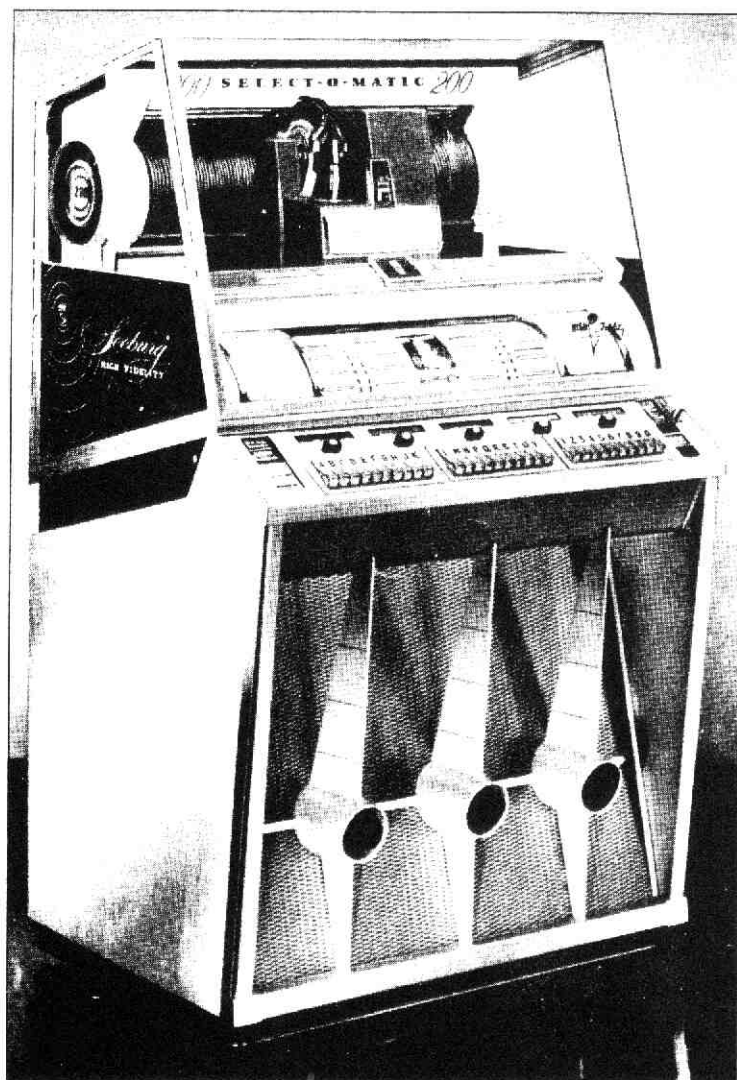




Rekenen met matrices

<https://hdl.handle.net/1874/10141>



REKENEN MET MATRICES



Freudenthal instituut
Archief

REKENEN MET MATRICES

Wiskunde A

REKENEN MET MATRICES

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerper: Jan de Lange

Met medewerking van: Jan de Jong
Martin Kindt
Henk van der Kooy
Martin van Reeuwijk
Anton Roodhardt

Vormgeving: Ada Ritzer

© 1990: 3e versie
Utrecht, augustus 1990.

Inhoudsopgave

1. Produktieproblemen.....	1
2. Andere matrices	12
3. Matrices vermenigvuldigen.....	19
4. Verder vermenigvuldigen	25
5. Machten van Matrices	32
6. Gemenge opgaven.....	39

1 Produktieproblemen

Een fabriekje produceert eenvoudige meubels, wandkasten en tafels. Het komt er eigenlijk op neer dat er maar vier 'grondstoffen' of 'basisprodukten' zijn:

- tafelblad:



- tafelpoot:



- boekenplank:



- verticale wandboekenplank:



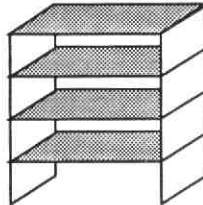
Deze produkten worden in het fabriekje vervaardigd en ook los verkocht, maar er vindt ook verwerking plaats tot produkten die 'af' zijn.

Dat zijn:

- tafel:



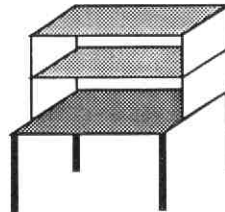
- boekenkast:



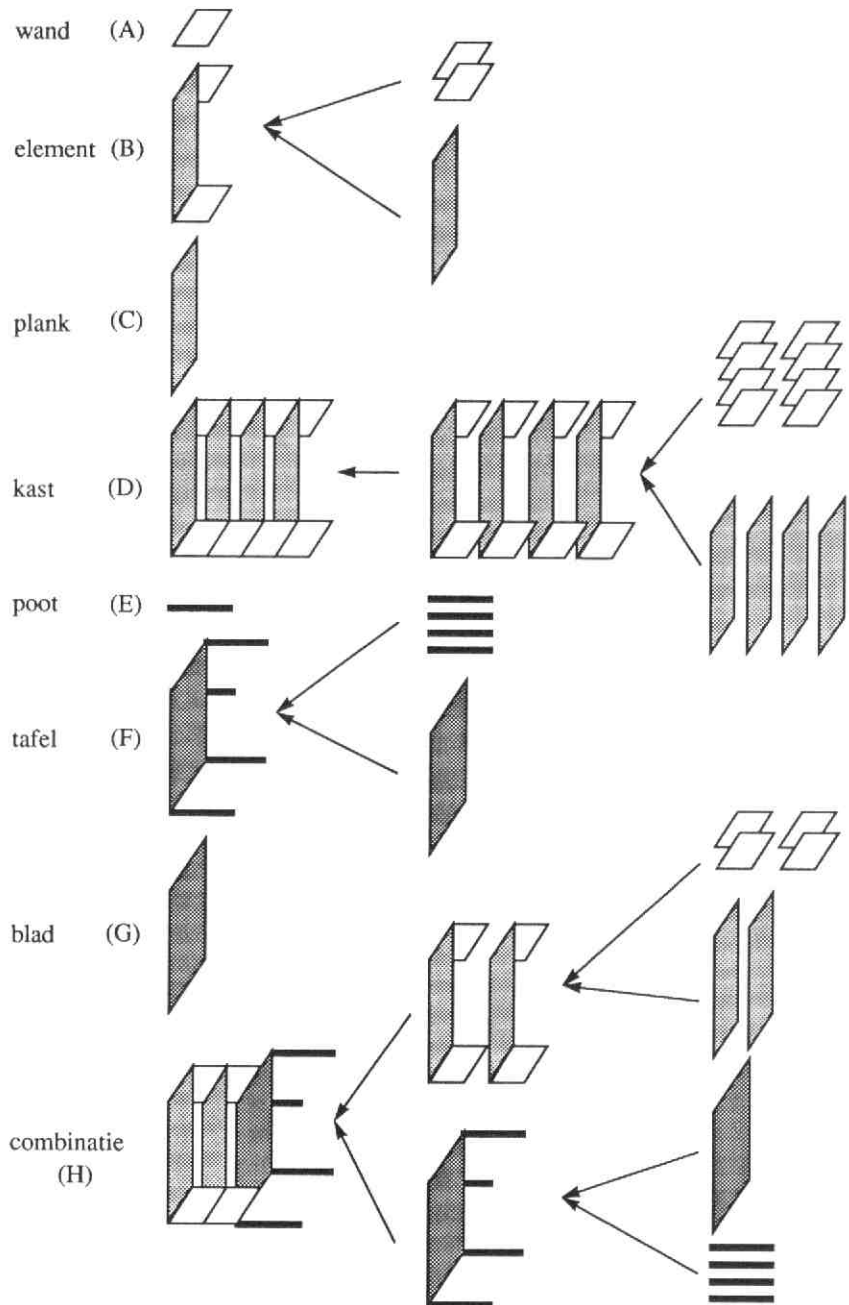
- kastelement:



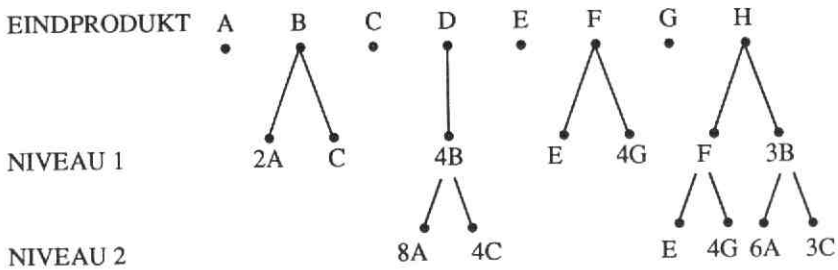
- tafel/kast combinatie:



Het produktieschema kan als volgt worden weergegeven:



Dit plaatje laat zich overzichtelijk samenvatten in het volgende schema:



Uit dit schema valt onder andere af te lezen:

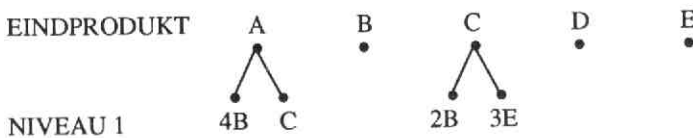
- dat er acht produkten worden gemaakt;
- dat sommige produkten direct worden geproduceerd: A, C, E en G;
- dat andere produkten worden samengesteld uit A, C, E en G;
- dat een eerste niveau onderverdeling toont:
 - B bestaat uit 2A en C;
 - D bestaat uit 5B;
 - F bestaat uit E en 4G;
 - H bestaat uit F en 3B;
- dat een tweede niveau onderverdeling toont:
 - D bestaat uit 10A en 5C;
 - H bestaat uit 6A, 3C, E en 4G;

1. Er komt een bestelling binnen voor zeven kasten (D) en drie tafels (F).
 - > Hoeveel van de diverse basisprodukten (A, C, E, G) zijn daarvoor in totaal nodig?
2. > Dezelfde vraag voor de bestelling:
 - Twaalf wandjes, zeven planken, twee kasten, drie tafels en een combinatie-meubel.

Een andere fabrikant maakt vijf verschillende produkten. Deze produkten noemen we A, B, C, D en E. Produkten B en E worden rechtstreeks geproduceerd, maar bij A, C en D ligt dat niet zo eenvoudig.

Zo heb je om C te kunnen maken twee B's en drie E's nodig. En om A te kunnen maken heb je vier B's en een C nodig.

In schema ziet dat er als volgt uit:



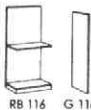


BASISELEMENTEN EN ZIJPANELEN

De basiselementen zijn 65, 116 of 207 cm hoog. Een basiselement met zijpanelen is 66 cm breed en 41 cm diep. Iedere verdere aanbouw verbreedt het geheel 64 cm. De zijpanelen hebben profiellijsten van aluminium.



GE 207 G 207



RB 116 G 116



RB 65 G 65

	Wit	Zwart
GE 207 basiselement. 2 Planken. 207 cm hoog.	270.-	260.-
G 207 zijpaneel. 207 cm hoog.	103.-	96.-
RB 116 achterwand-/bodemplank. 116 cm hoog.	127.-	120.-
G 116 zijpaneel. 116 cm hoog.	80.-	69.-
RB 65 achterwand-/bodemplank. 65 cm hoog.	81.-	76.-
G 65 zijpaneel. 65 cm hoog.	67.-	64.-

AFDEKBLADEN

Voor de lage basiselementen zijn er TP afdekladen. Voor het koppelen van verschillende hoogten met elkaar is het KS verbindingsblad nodig en voor het vormen van een hoek de HS hoekplank.



TP



KS



HS

TP 65/116 afdeklad.
KS verbindingsblad.
HS hoekplank.

	Wit	Zwart
TP 65/116 afdeklad.	68.-	65.-
KS verbindingsblad.	69.-	65.-
HS hoekplank.	58.-	54.-

INRICHTING

De laden worden compleet met verchroomde handgrepen en rails geleverd. De planken- en ladensets zijn per 2 resp. 4 stuks verpakt.



LS



S



UTDR



S

	Wit	Zwart
LS lade. 12,5 cm hoog. Per stuk.	48.-	45.-
LS ladenset. Per 4 stuks. Totale hoogte 50 cm.	167.-	160.-
S plankenset. 82x40 cm. Per 2 stuks.	64.-	55.-
UTDR uittrekbare plank. Voor stereo of video. 63x39 cm. Per stuk.	86.-	78.-

5 glazen plaat 2 stuks. Gehard glas. 62x37 cm. 69.-

DEUREN

De deuren kunnen naar wens links of rechts draaiend opgehangen worden en zijn voorzien van een verchroomde handgreep. Alle deuren zijn 62,5 cm breed.



HD



VD



D



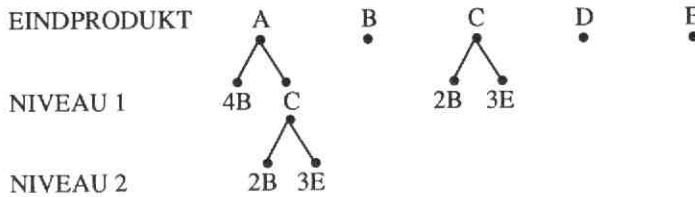
GLD

	Wit	Zwart
HD deur hoog. 89,5 cm hoog.	80.-	75.-
VD vitriedeur. 89,5 cm hoog.	104.-	95.-
D deur. 51 cm hoog.	60.-	54.-

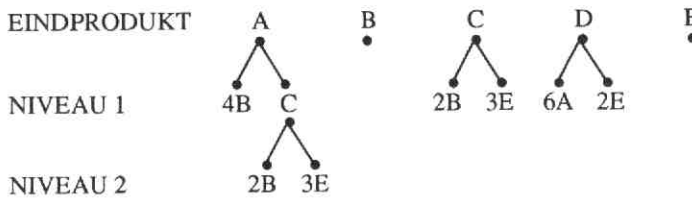
GLD glazen deur. 51 cm hoog. 65.-

Voorbeelden elementenbouw uit IKEA-folder.

Maar dit schema is zó natuurlijk nog niet compleet. Op Niveau 1 staat nog een C, terwijl we weten dat om C te kunnen maken er twee B's en drie E's nodig zijn. Daarom wordt het produktieschema:

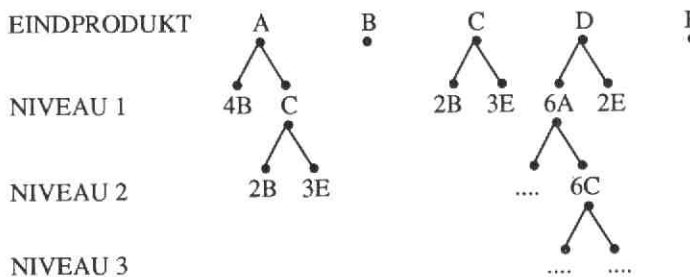


D wordt gefabriceerd uit zes A's en twee E's.
In de produktiegraaf levert dit:



Maar voor de produktie van de 6A's (Niveau 1) die voor één D nodig zijn, zijn bekende hoeveelheden van B en E nodig. (Zie de produktietak van A.)

3. > Vul de volledige produktiegraaf aan:



Om een helder beeld van het produktieproces te krijgen zijn ook *matrices* heel nuttig. Zeker als het proces wat ingewikkelder is.

Zo kun je op *Niveau 1* de volgende matrix opstellen:

NIVEAU 1-MATRIX:

$$N_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

4. > Verklaar de matrix.

Een gedeelte van de Niveau 2-matrix:

$$N_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 2 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 3 & 0 & 0 & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

5. > Maak de Niveau 2-matrix af.
6. > Stel de Niveau 3-matrix op.
7. > Hoe ziet de Niveau 4-matrix eruit?

De vijf produkten A, B, C, D en E worden dus gefabriceerd. Daarbij spelen B en E een belangrijke rol. Om één A te produceren heb je immers zes B's en drie E's nodig. Ook de andere produkten zijn 'uit te drukken' in B's en E's.

8. > Hoeveel B's en E's heb je nodig voor de produktie van één A en één B en één C en één D en één E?

De matrices Niveau 1, Niveau 2 en Niveau 3 kunnen ook gebruikt worden om uit te zoeken hoeveel er van de produkten B en E nodig is om van elk produkt één exemplaar te produceren.

9. > Tel de Niveau 1-matrix op bij de Niveau 2-matrix. Wat is de betekenis van deze som-matrix?
10. > Tel de Niveau 3-matrix op bij de matrix uit de vorige opgave. Wat is de betekenis van deze som-matrix?

De benodigdhedenmatrix van het productieproces zoals dat in de graaf was weergegeven, ziet er als volgt uit:

TOTALE BENODIGDHEDEN-MATRIX:

$$TB = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 36 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 20 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

De vierde kolom laat zien dat je om één D te produceren op *verschillende* niveaus de volgende produkten nodig hebt:

6 A's, 36 B's, 6 C's en 20 E's.

Eigenlijk is deze manier van voorstellen niet helemaal correct. We hebben namelijk het *Eindprodukt-niveau* van de graaf niet in de matrix verwerkt. Of anders gezegd: het staat wat gek dat de tweede en vijfde kolom helemaal uit nullen bestaan. Het feit dat B geproduceerd moet worden, is niet terug te vinden in de matrix.

11. > Verklaar aan de hand van de productiegraaf van pag. 5 dat de matrix op eindproduktniveau (ook wel: Niveau 0) er als volgt uit moet zien:

NIVEAU 0 -MATRIX:

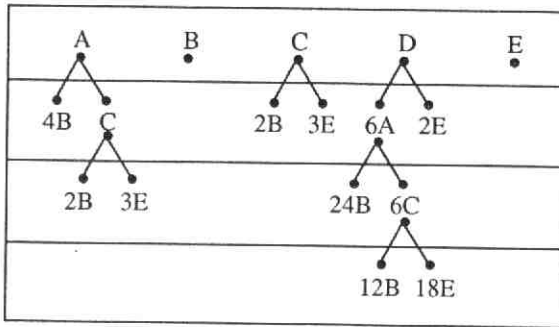
$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Afspraak

De Totale Benodigdheden-matrix is de som van de Niveau 0-matrix, Niveau 1-matrix, Niveau 2-matrix en Niveau 3-matrix (in dit geval) of $TB = N_0 + N_1 + N_2 + N_3$.

12. > Stel de Totale Benodigdheden-matrix op.

Produktiegraaf



Matrices

Niveau 0

	A	B	C	D	E
A	1				
B		1			
C			1		
D				1	
E					1

Niveau 1

				6	
4			2		
1					
		3	2		

Niveau 2

				24	
2				6	
3					

Niveau 3

				12	
			18		

Totale
Benodigdheden

	1	0	0	6	0
6	1	2	36	0	
1	0	1	6	0	
0	0	0	1	0	
3	0	3	20	1	

Wat valt er nu precies af te lezen uit de TB-matrix?

- Dat B en E de basisprodukten zijn.
- Dat je voor één exemplaar A, 6B's en 3E's nodig hebt, en er 1C in de productiegang zit.
- Dat je voor één exemplaar C, 2B's en 3E's nodig hebt.
- Dat je voor één exemplaar D 36B's en 20E's nodig hebt en er in het productieproces 6A's en 6C's als tussenprodukt zitten.

Een fabrikant maakt vijf produkten P, Q, R, S en T, waarvan P en R de basisprodukten zijn.

Produkt Q bestaat uit vijf P en één R.

Produkt S bestaat uit drie Q en één T.

Produkt T bestaat uit vier Q en één P.

13. > Stel de volledige productiegraaf op (dus aan het eind van de takken alleen nog P's en R's).
14. > Stel de Totale Benodigdheden-matrix op door eerst de Niveau-matrices op te stellen.

De Totale Benodigdheden-matrix van een productieproces is als volgt:

	A	B	C	D	E	F
A	1	.	.	.	1	.
B	20	1	8	1	20	.
C	2	.	1	.	2	.
D	2	.	1	1	2	.
E	.	.	.	.	1	.
F	2	.	1	1	6	1

(. = nul)

De Niveau 4-matrix heeft overal nullen, behalve in de E-kolom:

	E
A	.
B	2
C	.
D	.
E	1
F	6

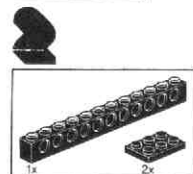
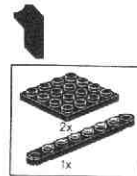
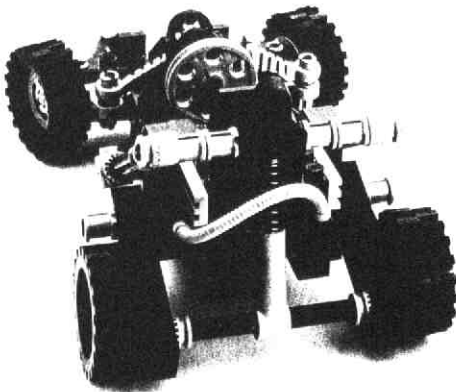
De Niveau 3-matrix:

	A	B	C	D	E	F
A	.	.	.	.	.	.
B	2	.	.	.	14	.
C	.	.	.	.	.	.
D	.	.	.	.	2	.
E	.	.	.	.	.	.
F	2	.	.	.	.	.

De Niveau 2-matrix:

	A	B	C	D	E	F
A	.	.	.	.	.	.
B	14	.	1	.	4	.
C	.	.	.	.	2	.
D	2	.	.	.	.	.
E	.	.	.	.	.	.
F	.	.	1	.	.	.

15. > Bepaal de Niveau 1-matrix.
16. > Bepaal de produktiegraaf.
17. > Welke zijn de basisprodukten?



Bij het bouwen van LEGO modellen gebruik je een aantal basiselementen, die in verschillende stappen samengevoegd worden tot het eindprodukt.

Samenvatting

Bij productieprocessen kunnen matrices en grafen ingewikkelde zaken verhelderen. De 'produktiegraaf' maakt het productieproces zichtbaar. Het is een 'visueel model'.

De *matrices* - die uiteraard in ingewikkelde gevallen in de computer worden ingevoerd - leveren op overzichtelijke wijze op verschillende produktieniveaus informatie over de benodigde onderdelen.

'Niveau-Benodigdheden'-matrices kunnen *opgeteld* worden door de overeenkomstige elementen uit de matrices bij elkaar op te tellen:

A		
	3	
*		

+

B		
	7	
**		

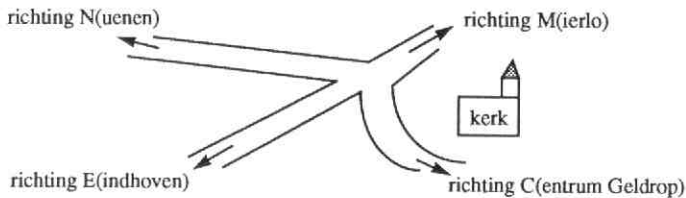
=

A+B		
	10	

2 Andere matrices

Verkeer(d)

Hieronder zie je het kruispunt in Geldrop bij de grote 'koepelkerk'. Om het verkeer hier zo soepel mogelijk te laten doorstromen, zijn de verkeerslichten zó afgesteld dat er bij de spitsuren nog geen opstoppen mogen ontstaan.



Uit tellingen bleek dat bij spitsuren de volgende aantallen auto's verwerkt moeten worden (per uur):

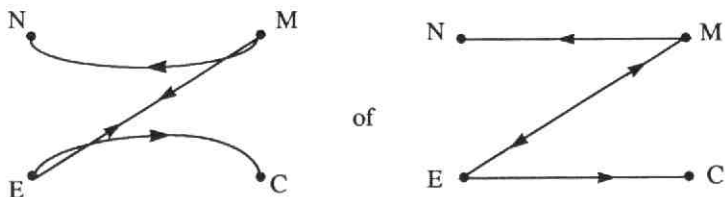
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{M} \\ \text{N} \\ \text{E} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 40 & 200 & 30 \\ 30 & 0 & 80 & 50 \\ 210 & 60 & 0 & 60 \\ 30 & 40 & 80 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \text{M} \\ \text{N} \\ \text{E} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{naar} \\ \text{van} \end{matrix} & \end{matrix}$$

1. > Hoeveel auto's passeren er van Eindhoven naar Nuenen tussen 5 en 7 uur 's avonds (de spitsuren)?
2. 's Ochtends duurt het 'spitsuur' $1\frac{1}{2}$ uur.
 - > Bepaal de matrix die de aantallen auto's bevat die gedurende die periode passeren.
3. > Wat betekent de matrix $3\frac{1}{2} \cdot A$?

De matrix G_1 geeft aan welke richtingen tegelijkertijd groen licht hebben en hoe lang. Zo lees je uit G_1 af dat de richtingen $M \rightarrow E$, $E \rightarrow M$, $M \rightarrow N$ en $E \rightarrow C$ tegelijk kunnen rijden, gedurende een periode van $\frac{2}{3}$ minuut. De andere richtingen zijn dan geblokkeerd door rood licht.

$$G_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{M} & \text{N} & \text{E} & \text{C} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{M} \\ \text{N} \\ \text{E} \\ \text{C} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Met een graaf kun je dit als volgt weergeven:



Deze situatie geldt de eerste $\frac{2}{3}$ minuut.

De volgende $\frac{1}{3}$ minuut geldt de matrix G_2 :

$$G_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} M \ N \ E \ C \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

4. > Teken de bijbehorende graaf.

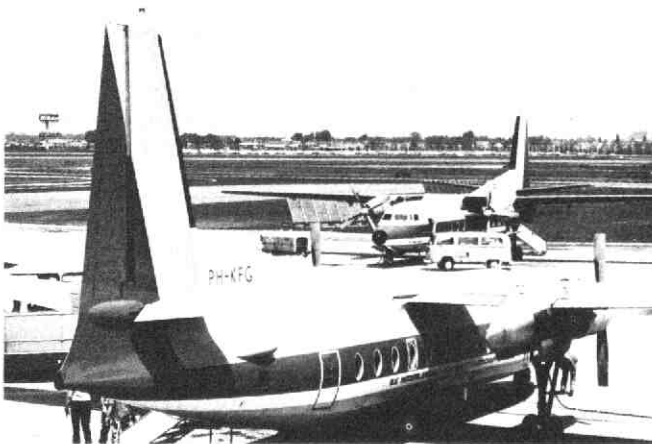
De volgende twee halve minuten gelden:

$$G_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} M \ N \ E \ C \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$G_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} M \ N \ E \ C \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

5. > Teken de graaf die de groenperiodes van *alle* vier matrices weergeeft en controleer of ook alle richtingen een keer groen krijgen.

6. > Bepaal de matrix $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$
Wat is de betekenis van G ? Welke informatie kun je uit de matrix G halen?
7. > Bepaal $T = 30 \cdot G$
Wat betekenen de elementen van T ?
8. Per minuut kunnen er 20 auto's door het groene licht rijden.
> Geef in matrixvorm het aantal auto's dat in elk van de richtingen maximaal kan worden verwerkt in één uur.
9. Vergelijk deze matrix met matrix A (blz. 12).
> Zijn de stoplichten goed afgesteld? Zo nee, kun je dan een andere matrix G geven waarbij één en ander wel goed verloopt?



De FKF uit de timetable duidt de Fokker Friendship aan, waarvan je er op deze foto twee van de NLM ziet.

Vluchten

De NLM-Cityhopper vliegt iedere werkdag een aantal malen vanuit Amsterdam naar Eindhoven, Enschede, Groningen en Maastricht.

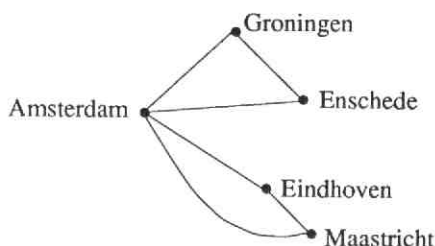
Hiernaast zie je de 'time-table' (1979-1980).

Vertrekdag 1 betekent maandag

vertrekdagen	vertrek	aankomst	vluchtnr type klasse
AMSTERDAM - EINDHOVEN			
1 _ _ _ _ _	0625	0650	HN461 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	1045	1115	HN463 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	1310	1340	HN465 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	1700	1730	HN467 Y FKF
_ _ _ _ 5 _ _	2100	2130	HN469 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	2110	2140	HN471 Y FKF
AMSTERDAM - ENSCHEDE			
1 _ _ _ _ _	0620	0650	HN441 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	0830	0940	HN443 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	1325	1400	HN445 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	1655	1730	HN447 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	2120	2155	HN439 Y FKF
AMSTERDAM - GRONINGEN			
1 2 3 4 5 _ _	0830	0905	HN443 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	1325	1435	HN445 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	1655	1805	HN447 Y FKF
1 2 3 4 5 _ 7	2130	2205	HN449 Y FKF
AMSTERDAM - MAASTRICHT			
1 2 3 4 5 _ _	1045	1145	HN463 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	1310	1410	HN465 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	1700	1800	HN467 Y FKF
_ _ _ _ _ 7	1700	1740	HN467 Y FKF
1 2 3 4 5 _ _	2110	2210	HN471 Y FKF
_ _ _ _ _ 7	2110	2150	HN471 Y FKF

10. > Hoeveel vluchten zijn er van Amsterdam naar Eindhoven op maandag?
En op zaterdag?

De graaf van het lijnennet van Cityhopper ziet er zó uit:



De meeste vluchten naar Maastricht landen eerst in Eindhoven; die naar Enschede in Groningen.

11. > Kun je voor bovenstaande bewering aanwijzingen vinden in de 'time-table'?

Er zit dus een 'verborgen' time-table in het plaatje. Je kunt namelijk ook vliegen van Groningen naar Enschede, en van Eindhoven naar Maastricht.

Alle vluchten kunnen ook in omgekeerde richting gemaakt worden. Voor maandag levert dit de volgende frequentie-matrix op:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & Ei & Ma & Gr & Ens \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ Ei \\ Ma \\ Gr \\ Ens \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

12. > Verklaar de getallen in de matrix, vooral de twee drieën

De matrix voor dinsdag, woensdag en donderdag is hetzelfde.

13. > Bepaal deze matrix; noem deze D.

14. > Bepaal de matrix voor vrijdag: V.

15. > Bepaal $M + V + 3D + Z = W$.
(Hierin is Z de frequentiematrix voor de zondag)
Wat is de betekenis van deze matrix?

16. > Teken de graaf van het lijnennet met daarbij het aantal vluchten per week per lijn.

Vorraden

Spijkerbroeken heb je in vele maten en merken. Bij een voorraad telling heeft een zaak drieëntwintig broeken van het merk Wrangler en wel in de maten:

28" (28 inch waist)	:	3
30"	:	11
32"	:	6
34"	:	3

Voor andere merken geldt:
(voor resp. dezelfde maten)

Levi's	:	5, 5, 3 en 4
Club de France	:	1, 7, 0 en 0
Bobos	:	6, 2, 2 en 2
Ball	:	3, 0, 0 en 3

Al deze informatie kan met behulp van een matrix overzichtelijk opgeschreven worden.



17. > Maak de matrix af:

	W	L	CF	Bo	Ba
28"	...	...	...	...	...
30"	...	...	...	...	...
32"	...	...	...	...	...
34"	...	...	...	...	...

18. > Hoeveel broeken zijn er in voorraad van maat 32"?

19. > Van welk merk zijn er de meeste broeken?

De verkoper wil z'n voorraad op peil brengen, waarbij hij onder andere de volgende zaken in het achterhoofd heeft:

- van de merken Wrangler en Levi Strauss verkoopt hij ongeveer tweemaal zoveel als van de andere drie merken;
- de maten 30" en 32" 'gaan' tweemaal zo snel als 28" en 34";
- per merk wil hij niet meer dan veertig exemplaren in huis hebben.

20. > Maak zelf een bestelling op grond van bovenstaande gegevens en schrijf deze in matrixvorm.

De voorraden zijn op peil gebracht zó dat aan de 'aandachtspunten' van de eigenaar is gedacht. Het resultaat hiervan is dat er van de meest verkochte maten van de grootste merken twaalf exemplaren in de winkel aanwezig zijn.

21. > Schrijf de voorraadmatrix op (als deze verschillend is van de al eerder gevonden matrix).

22. In één week wordt er verkocht:

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} W & L & CF & Bo & Ba \end{matrix} \\ \begin{matrix} 28'' \\ 30'' \\ 32'' \\ 34'' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

De winst per broek op de Wranglers is f 30,-; op Levi's f 35,-; op Club de France f 40,-; op Bobos f 25,- en op Ball f 40,-.

> Hoeveel winst maakt de zaak die week in totaal op de kleinste maat?

23. > En op maat 30"?
En in totaal?

Samenvatting

Matrices kunnen op vele manieren gebruikt worden.

In dit hoofdstuk zag je bijvoorbeeld *frequentiematrices* en *voorraadmatrices*. Naast het optellen en aftrekken van matrices hebben we ook *matrices met een getal vermenigvuldigd*:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

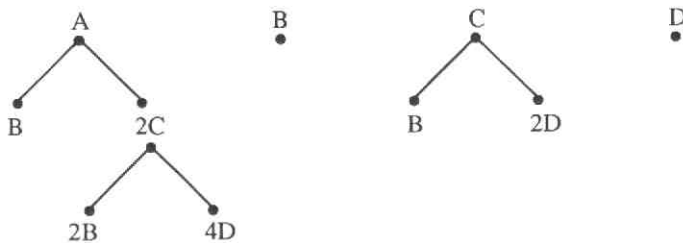
3 Matrices vermenigvuldigen

We gaan terug naar de meubelfabrikant (hoofdstuk 1).

De fabrikant maakt niet alleen produkten, hij verkoopt ze ook. De produktie dient natuurlijk afgestemd te worden op de vraag.

Een fabrikant die vier produkten maakt, krijgt een bestelling voor 7 A's, 12 B's, 3 C's en 20 D's.

Zijn produktiegraaf is nogal simpel:



De fabrikant moet nu weten hoeveel grondstoffen B en D hij nodig heeft en hoeveel tussenprodukten.

1. > Bereken de totale hoeveelheid B en D (grondstoffen) die hij nodig heeft om deze bestelling te kunnen voldoen.

De vorige vraag kan ook opgelost worden met de TB-matrix.

Deze is in dit geval:

TOTALE BENODIGDHEDEN-MATRIX:

$$TB = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

De *bestelling* noteren we ook als een matrix, en wel als een kolom:

Bestelling-matrix:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$$

We kijken nu eerst naar de grondstof B:

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \quad \text{D} \\ \text{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{B} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{C} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{D} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. > Hoeveel B's zijn er nodig voor één A?
En voor 7 A's?
3. > Hoeveel B's zijn er nodig voor 12 B's?
4. > Hoeveel B's zijn er nodig voor 3 C's?
5. > Hoeveel B's zijn er nodig voor 20 D's?

De antwoorden op de vragen 2 tot en met 5 kun je schematisch weergeven met de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 7 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 20 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array}$$

Totaal zijn er voor de bestelling dus $3 \cdot 7 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 20$ B's nodig.

6. > Bereken op dezelfde wijze het benodigde aantal D's.

Op deze manier kunnen we niet alleen de aantallen benodigde grondstoffen berekenen, maar ook de aantallen (tussen)produkten:

$$\text{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 20 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array}$$

$$\text{B} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 7 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 20 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array}$$

$$C \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 2 \cdot 7 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 20 \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$$

$$D \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 4 \cdot 7 + 0 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 20 \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$$

Of, in één keer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 36 \\ 17 \\ 54 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$$

We lezen nu uit de rechter kolommatrix af:

- We hebben voor de bestelling 36 B's en 54 D's nodig.
- Er zijn 7 A's en 17 C's als (tussen)produkt.

De bewerking die we zojuist op de matrices hebben toegepast heet:

MATRIXVERMENIGVULDIGING

In bovenstaand voorbeeld hebben we het product van een 4x4-matrix met een 4x1-matrix. Het resultaat is een 4x1-matrix.

7. > Bereken met het matrixproduct de benodigdheden voor de volgende bestellingen:

Bestelling 2: $\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$

Bestelling 3: $\begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$

8. > Bereken de totale benodigdheden voor Bestelling 2 en Bestelling 3 samen.

9. > Bereken het matrixprodukt $A \cdot B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

10. > Bereken het matrixprodukt $C \cdot B$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

11. > Bereken het matrixprodukt $D \cdot E$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

12. > Bereken het matrixprodukt $F \cdot G$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13. > Bereken het matrixprodukt $K \cdot L$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

14.

$$M = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- >a Waarom kun je het matrixprodukt $K \cdot M$ niet berekenen?
- >b Onder welke voorwaarde kun je matrices wel met elkaar vermenigvuldigen?

Een winkel heeft T-shirts in drie maten en vier kleuren.
In één week verkopen ze de volgende hoeveelheden:

$$V = \begin{array}{c} \text{S} \quad \text{M} \quad \text{L} \\ \text{Rood} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \text{Wit} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{Blauw} \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \\ \text{Groen} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Op S maakt de winkelier f 13,-- winst, op M f 12,-- en op L f 10,--.
In matrixvorm:

$$W = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{S} \\ \text{M} \\ \text{L} \end{array}$$

15. > Bereken de winst van de winkelier in één week (op de T-shirts) door berekening van $V \cdot W$.

Kijk nog eens naar opgaven 22 en 23 uit hoofdstuk 2.

16. > Hoe had je de totale winst op de spijkerbroeken met matrix-vermenigvuldiging kunnen berekenen?

Eerder zagen we de Niveau 0-matrix bij productieprocessen.
Deze had de volgende vorm:

$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

17. > Stel dat N_0 een 7×7 -matrix is.
Wat gebeurt er als je N_0 met een kolommatrix (7 elementen) vermenigvuldigt?

Afspraak

Een matrix met op de hoofddiagonaal (linksboven naar rechtsonder) énen en verder alleen nullen, wordt de *eenheidsmatrix* genoemd.

Samenvatting

Een matrix kan onder bepaalde voorwaarden vermenigvuldigd worden met een kolommatrix (of vector) en wel op de volgende manier

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . \\ 3 \cdot 7 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 20 \\ . \\ . \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$$

Dit kan alleen als het aantal kolommen van de matrix gelijk is aan het aantal elementen van de vector.

De eenheidsmatrix heeft *één* op de hoofddiagonaal (linksboven - rechtsonder) en verder nullen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Verder vermenigvuldigen

In het vorige hoofdstuk heb je gezien hoe een matrix vermenigvuldigd kan worden met een kolommatrix.

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 43 \end{bmatrix}$$

1. > Controleer dit voorbeeld.

In het voorbeeld zie je dat het aantal kolommen van de linker matrix (= 5) gelijk is aan het aantal elementen in de rechter matrix.

Als de rechter matrix méér dan één kolom bevat, kan er ook zinvol vermenigvuldigd worden. Een voorwaarde daarbij is dat het aantal rijen van de rechter matrix overeenkomt met het aantal kolommen van de linkermatrix. We zullen dit toelichten aan de hand van een voorbeeld.

Neem de bestelling TB-matrix uit het vorige hoofdstuk en de drie bestellingsmatrices B_1 , B_2 en B_3 .

$$TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$

De drie bestellingen kunnen ook in één matrix worden weergegeven:

$$B_{TOT} = \begin{matrix} & \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 7 & 12 & 15 \\ 12 & 8 & 0 \\ 3 & 9 & 12 \\ 20 & 15 & 30 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Nu kan de B_{TOT} vermenigvuldigd worden met de TB:

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \begin{bmatrix} 7 & 12 & 15 \\ 12 & 8 & 0 \\ 3 & 9 & 12 \\ 20 & 15 & 30 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 7 & . & . \\ 36 & . & . \\ 17 & . & . \\ 54 & . & . \end{bmatrix} \end{matrix}$$

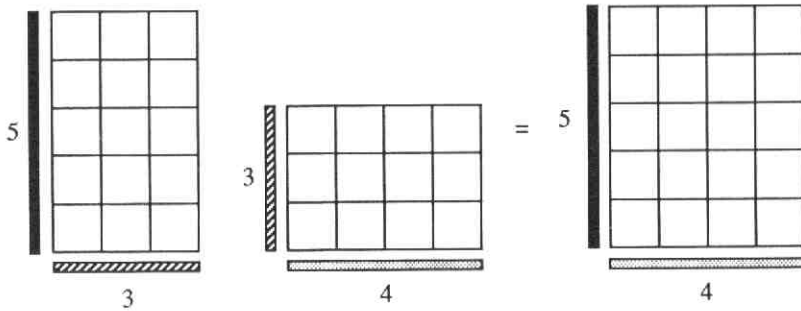
2. > Voer bovenstaande vermenigvuldiging verder uit.
3. > Welke letters kun je bij de produktmatrix geven?
4. > Wat betekenen de getallen uit de produktmatrix?

$$TB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

5. > Bereken het matrixprodukt van TB en B.
6. > Bereken:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrixvermenigvuldiging



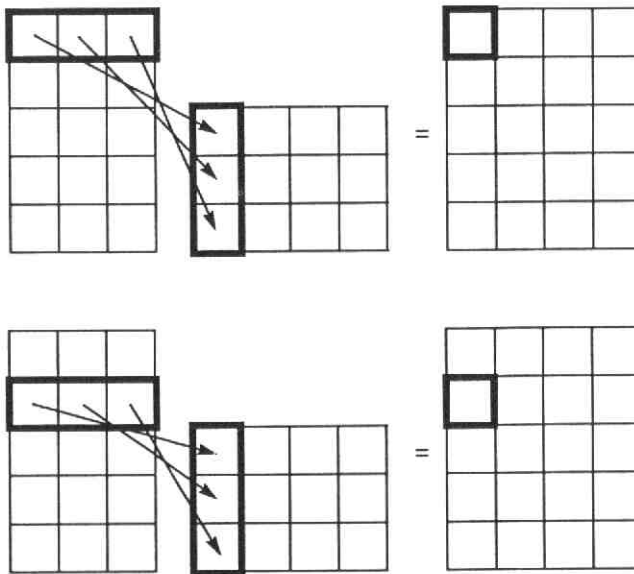
Voorwaarde

Breedte eerste matrix = hoogte tweede matrix
of: aantal kolommen eerste = aantallen rijen tweede

Resultaat

$(5 \times 3 \text{ matrix}) \times (3 \times 4 \text{ matrix}) = (5 \times 4 \text{ matrix})$.

Hoe?



enzovoort

Juke-Box

Een handelaar in oude juke-boxen houdt zijn handel op eigentijdse wijze bij: met een computer.

Hij heeft zijn voorraad in de computer, zijn verkopen per maand en uiteraard ook de inkoopprijs en zijn winst.

In april verkocht hij

merk	Wurlitzer	Rock-Ola	Seeburg
Bouwjaar			
1958	2	1	0
1960	0	3	1
1962	1	2	3

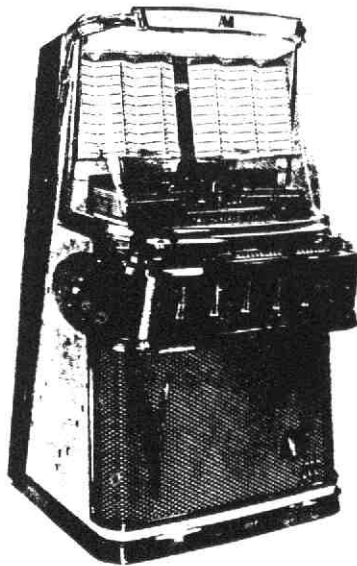
$$= V \text{ (verkoopmatrix)}$$

De gemiddelde inkoopprijzen (I) en de winst (W) staan in de matrix G (in guldens):

	I	W
Wurlitzer	5000	2000
Rock-Ola	3500	1500
Seeburg	3000	1500

$$= G$$

7. > Bereken $V \cdot G$ en leg uit wat dit matrixprodukt betekent.
8. > Voor welke prijs verkoopt de handelaar een Seeburg?





U2

begon als een garagebandje van scholieren en de groep is in enkele jaren uitgegroeid tot de grootste rockband van haar tijd. De doorbraak kwam in 1983 met het album *War*, waarna het succes met iedere elpee en iedere tournee een steeds hogere vlucht nam. U2 is daarmee de Rolling Stones van de jaren tachtig geworden. Of zouden ze liever 'de Beatles van de jaren tachtig' genoemd willen worden? Gitarist *The Edge*: 'Dat is een interessante vraag. Ik weet het niet, ik hoop dat wij van allebei wat hebben. Ik houd van beide groepen om verschillende redenen. Wij lijken echter op geen van beide. We mogen dan een hoop platen verkopen, maar dat wil nog niet zeggen dat we net zo goed zijn als The Beatles. Verkoopcijfers op zich zeggen niet zoveel.'

Concerten

Een concertorganisatiebureau heeft voor het zomerseizoen vier popgroepen geregeld, die op verschillende plaatsen in het land zullen optreden volgens de volgende matrix:

$$\begin{array}{c}
 \text{Amsterdam} \\
 \text{Utrecht} \\
 \text{Rotterdam} \\
 \text{Eindhoven}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 2 & 3 & 0 & 1 \\
 0 & 2 & 2 & 3 \\
 1 & 1 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 2 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 = S$$

De kaartjes zijn er steeds in drie prijsklassen en verschillen natuurlijk per popgroep.

$$\begin{array}{c}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1^e \quad 2^e \quad 3^e \text{ rang} \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 45 & 30 & 25 \\
 50 & 30 & 30 \\
 35 & 25 & 20 \\
 25 & 20 & 15
 \end{array} \right]
 \end{array}
 = P$$

Tenslotte de bezoekersaantallen per concert (afgerond):

$$\begin{array}{c}
 A \\
 U \\
 R \\
 E
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 2100 & 900 & 0 & 900 \\
 0 & 2100 & 1500 & 1500 \\
 1500 & 900 & 6000 & 1200 \\
 900 & 0 & 1500 & 900
 \end{array} \right]
 \end{array}
 = B$$

Ruwweg één zesde van de kaartjes was eerste rang, één derde tweede rang en de helft was derde rang.

9. > Welke popgroep was het best bezocht?

10. > Maak de volgende matrix af:

Amsterdam: $U_1 U_2 U_3 U_4$

$$A = \begin{array}{c}
 1^e \\
 2^e \\
 3^e
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc}
 . & . & . & . \\
 . & . & . & . \\
 . & . & . & .
 \end{array} \right]$$

11. > Bereken $P \cdot A$.

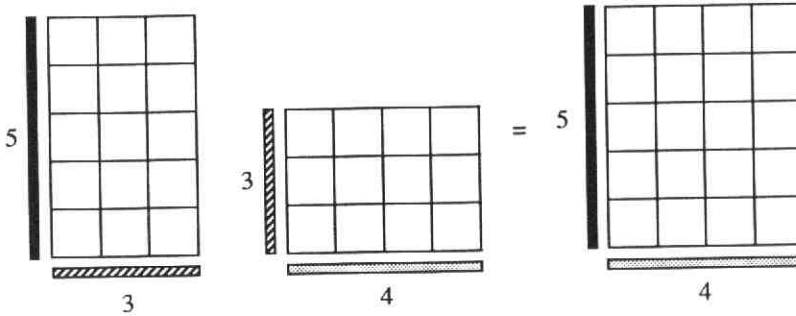
Wat is de betekenis van dit matrixprodukt?

12. > Is $S \cdot P$ te berekenen?

Heeft $S \cdot P$ betekenis?

Samenvatting

Matrixvermenigvuldiging is mogelijk als het aantal kolommen van de linker matrix gelijk is aan het aantal elementen in de rechter matrix.



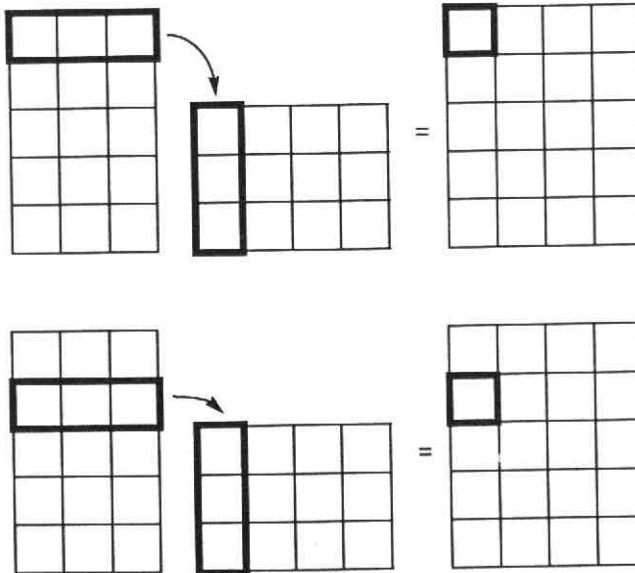
Voorwaarde

Breedte eerste matrix = hoogte tweede matrix
 of: aantal kolommen eerste = aantallen rijen tweede

Resultaat

$(5 \times 3 \text{ matrix}) \times (3 \times 4 \text{ matrix}) = (5 \times 4 \text{ matrix})$.

Hoe?



enzovoort

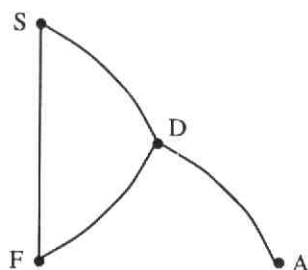
5 Machten van Matrices

Meerstapsreizen

In het boekje 'Afstanden, Grafen en Matrices' kwam de volgende verbindingsgraaf voor:



We kijken naar een gedeelte daarvan:



De verbindingsmatrix:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} A \quad D \quad S \quad F \\
 A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\
 D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\
 S \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\
 F \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{bmatrix} = V
 \end{array}$$

1. > Welke plaats ligt het meest centraal?
2. > Welke plaats ligt het meest geïsoleerd?

De verbindingsmatrix laat zien of je *direct* van de ene naar de andere plaats kunt komen. Maar om tot een beter inzicht te komen over de mate van verbondenheid van een graaf, wordt er ook vaak gekeken welke plaatsen uit andere plaatsen bereikbaar zijn in bijvoorbeeld twee stappen.

V geeft dus de één-staps verbindingen.
A is daarbij erg geïsoleerd, D erg centraal.

Hoe zit dat nu met tweestapsreizen?
Vanuit A kun je in twee stappen:

- naar A $(A \xrightarrow[1]{\text{stap}} D \xrightarrow[2]{\text{stap}} A);$

- naar S $(A \xrightarrow[1]{} D \xrightarrow[2]{} S);$

- naar F $(A \xrightarrow[1]{} D \xrightarrow[2]{} F).$

Er zijn dus drie tweestapsreizen mogelijk vanuit A; voor de tweestapsmatrix levert dit:

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \text{A} \quad \text{D} \quad \text{S} \quad \text{F} \\ \text{van} \quad \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{D} \\ \text{S} \\ \text{F} \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

3. > Vanuit D kun je vijf tweestapsreizen maken. Welke?
4. > Maak de tweestapsmatrix af.

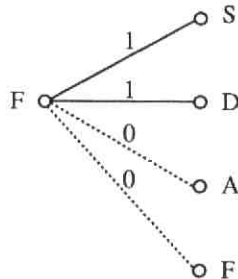
Terug naar de éénstapsmatrix V.

5. > Bereken $V \cdot V = V^2$.
Vergelijk je antwoord met opgave 4.
Verklaring?
6. > Bereken $V^3 (= V \cdot V^2)$
Wat is de betekenis van V^3 ?
7. > Bereken $V^4 (= V \cdot V^3)$
Wat is de betekenis van V^4 ?
8. > Wat zou V^0 moeten zijn?
9. > Bereken $V^0 + V^1 + V^2$.
Wat betekent het dat er geen nullen in deze sommatrix voorkomen?

De resultaten van de vorige bladzijden kun je op vele manieren verklaren. Het gaat daarbij onder andere om de volgende vraag:

Waarom stellen de *getallen* in V^2 het aantal mogelijke tweestapsreizen voor?

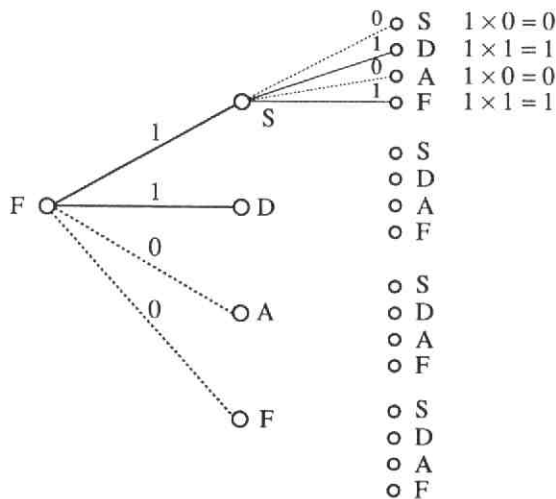
We kunnen ook de volgende graaf tekenen voor de éénstapsreizen vanuit F:



10. > Verklaar deze graaf en het verband met de matrix.

11. > Teken een soortgelijke graaf voor de éénstapsreizen vanuit D.

Voor tweestapsreizen wordt de graaf wat ingewikkelder; een gedeelte is getekend:



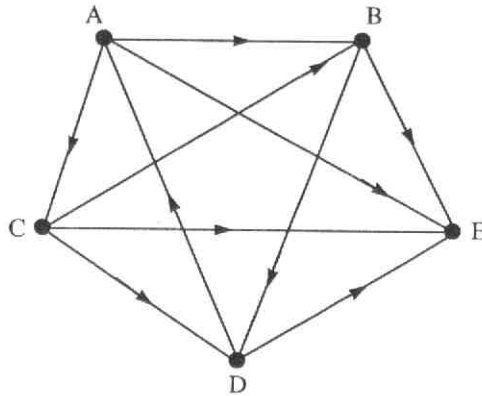
12. > Het getekende gedeelte levert al twee tweestapsreizen op. Welke? Maak de boomgraaf af en verklaar nu het verband met de matrix V^2 .

13. > Teken een deel van de boomgraaf die alle driestapsreizen aangeeft vanuit A.

De baas

Zoals je eerder hebt gezien (in het boekje 'Afstanden, Grafen & Matrices') worden grafen ook gebruikt om relaties in groepen uit te pluizen. Eén manier is om van een grotere groep steeds een tweetal te nemen en dan te kijken wie 'de baas' is over de ander. We zijn dan op zoek naar de 'leider' van zo'n groep. De graaf die zo'n relatie weergeeft, wordt wel een Dominantiegraaf genoemd.

Uiteraard is zo'n graaf een *gerichte* graaf:



17. > Bepaal de bijbehorende Dominantiematrix D . (Een verbindingsmatrix)
18. > Wie is klaarblijkelijk de leider van de groep? En wie heeft er niets te vertellen?

Uit het antwoord van opgave 18 blijkt bij bestudering van de graaf of matrix dat er niet altijd één leider is. A en C (kijk naar het aantal énen in hun rij) hebben allebei evenveel recht om 'leider' genoemd te worden.

Om uit deze impasse te komen, wordt er wel gekeken naar 'tweetrapsdominantie'.

19. > Bepaal D^2 .
Wat is de betekenis van D^2 ?
20. > Bepaal D^3 .
Wat is de betekenis van D^3 ?

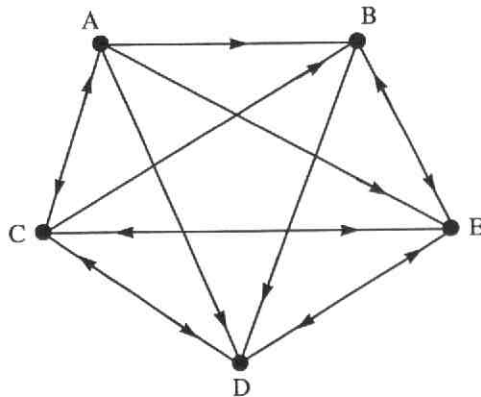
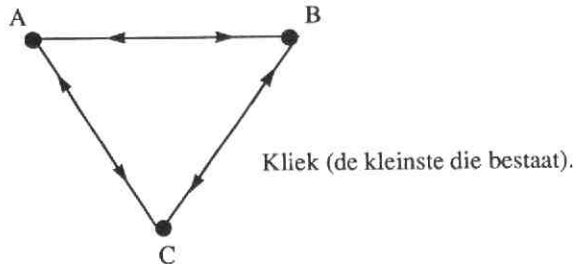
Kliek

Behalve de kwestie van wie er de baas is in een groep, is het ook interessant te weten welke 'kliekvorming' er plaatsvindt. Wie spelen met wie onder één hoedje?

Zo kan je een graaf tekenen met als relatie: 'kan het prima vinden met'.

Als A het nu goed kan vinden met B en B ook met A, dan kun je ze dus vrienden noemen.

Maar van een 'kliek' wordt gesproken als er minstens *drie* mensen twee aan twee vriend zijn, dus in een graaf:



21. > Hoeveel 'klieken' vind je in bovenstaande graaf?
22. > Bepaal de matrix S die bovenstaande graaf weergeeft.
23. > Teken bovenstaande graaf, maar dan *uitsluitend* met de dubbele pijlen, dus alleen met wederzijdse vrienden.
24. > Bepaal de matrix M die de graaf van opgave 23 weergeeft.
25. > Bepaal M^3 .
Wat is de betekenis van M^3 ?

Samenvatting

Matrices kun je met zichzelf vermenigvuldigen, dus tot de macht verheffen. In bepaalde situaties hebben M^2 , M^3 enzovoort, een bijzondere betekenis. En ook de som $M + M^2 + M^3 + \dots$ kan inzicht geven in structuren die anders erg ondoorzichtig lijken.

Als M een matrix is, dan vertelt M^2 over iets dat met 'twee-stappen' te maken heeft en M^3 op dezelfde wijze over iets met 'drie-stappen'.

Wat de 'stappen' precies aanduiden hangt af van de situatie waarin de matrices gebruikt worden.



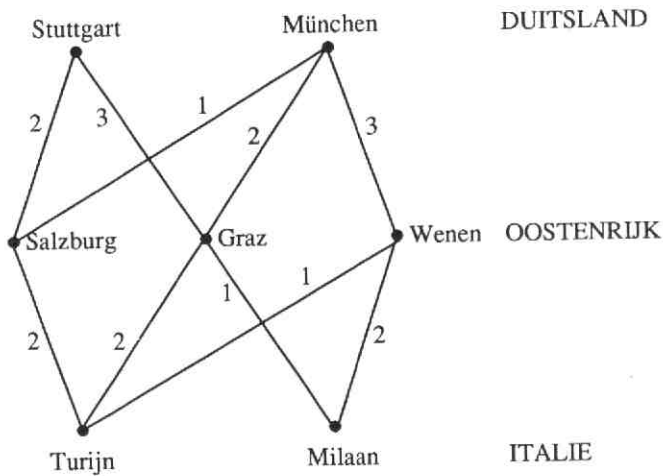
De kleinste klik die er bestaat.

6 Gemengde opgaven

Luchtlijnen

Een Oostenrijkse luchtvaartmaatschappij verbindt de steden Turijn en Milaan in Noord Italië met Wenen, Salzburg en Graz in Oostenrijk en met Stuttgart en München in Zuid Duitsland.

De graaf die het aantal vluchten per dag tussen die drie landen aangeeft:



De frequentiematrix van het aantal vluchten per dag van Duitsland naar Oostenrijk is dus:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. > Verklaar matrix A en stel zelf matrix B op voor de vluchten van Oostenrijk naar Italië, zó dat B een 3×2 matrix wordt.
2. > Bereken via matrixvermenigvuldiging het aantal combinatie-mogelijkheden voor vluchten van Zuid Duitsland naar Noord Italië via Oostenrijk. Schrijf het resultaat in matrixvorm: een 2×2 matrix C.
3. > Waarom zal je aan een groot gedeelte van de mogelijke vluchtcombinaties uit de vorige opgave niets hebben?

Kan dat wel?

Gegeven is de matrix:

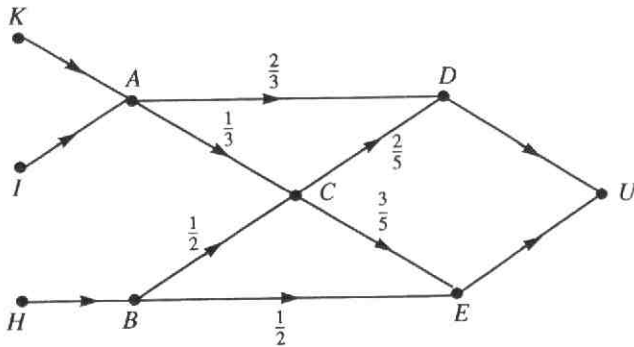
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. > Kan A een verbindingsmatrix zijn?
Wat valt er dan over op te merken?
5. > Kan A een afstandsmatrix zijn?
Verklaar je antwoord en geef zo mogelijk aan in welke dimensie je een goede afstandskaart kan tekenen.
6. > Kan A een frequentiematrix zijn?
Verklaar je antwoord.



Te veel verkeer dat dezelfde kant uit gaat (zoals in de ochtend- en avondspits) kan vervelende files tot gevolg hebben.

Avondspits



De graaf hierboven past bij een net van hoofdwegen van een grote stad. Over die wegen gaat in de avondspits éénrichtingsverkeer (zie de pijlen in de graaf). De punten K , I en H staan voor respectievelijk de kantorenwijk, het industrieterrein en het havengebied van de stad en U is het beginpunt van de uitvalsweg. A , B en C zijn knooppunten waar politie-agenten het aankomend verkeer verdelen volgens de in de figuur aangegeven verhoudingen.

Voorbeeld:

Het totale verkeersaanbod uit K en I dat bij A aankomt wordt zó gesplitst dat $\frac{1}{3}$ deel in de richting van C en $\frac{2}{3}$ deel in de richting van D wordt gestuurd.

Op een zekere dag komen er tussen 17.00 en 18.00 uur per 10 minuten gemiddeld 600 auto's uit K , 450 uit I en 780 uit H .

7. > Bereken hoeveel auto's er gemiddeld per 10 minuten over weg DU en hoeveel over weg EU worden gestuurd.

Een forens werkt in de kantorenwijk en reist 200 dagen per jaar in de avondspits over het wegennet naar huis.

8. > Hoeveel dagen per jaar kan hij verwachten over weg DU te rijden?
9. > Geef de matrix van de kansen voor auto's komend uit K , I en H om over de wegen DU en EU te worden gestuurd:

$$\begin{array}{c} \text{van} \\ K \quad I \quad H \\ \text{naar} \quad \begin{array}{c} DU \\ EU \end{array} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array}$$

10. > Is het mogelijk dat de aantallen auto's uit K , I en H in de avondspits zodanig zijn, dat er evenveel auto's over DU als over EU rijden?
- Licht je antwoord toe.

(examen 1989)

Schaken

Een schaakvereniging hield een toernooi, waaraan de vijf beste clubschakers deelnamen: A, B, C, D en E. Er werd een volledige competitie gedraaid, hetgeen betekent dat iedere speler tweemaal tegen iedere andere gespeeld heeft, één keer met wit en één keer met zwart.

In onderstaande matrix valt af te lezen de punten, die de *witspelers* in een partij behaalden. Bij winst is dat een hele punt, bij remise een halve punt en bij verlies geen punt.

$$R = \begin{matrix} & & \text{zwart} \\ & & \text{A} \text{ B} \text{ C} \text{ D} \text{ E} \\ \begin{matrix} \text{w} \\ \text{i} \\ \text{t} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

11. > Bepaal van alle vijf spelers het totaal aantal punten, dat ze behaalden.

De vijf spelers zijn, los van de bovengenoemde uitslagen, naar speelsterkte als volgt gerangschikt: D is de beste van de vijf, dan volgen B, C, A en E.

12. > Maak een matrix (5 x 5) als volgt:

$$P = \begin{matrix} \text{'is beter dan'} \nearrow & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} \\ \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \\ \text{E} \end{matrix} & \begin{bmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} \end{matrix}$$

in de matrix dienen alleen nullen en enen te staan. Een 1 als linksgevoemde beter is dan de bovengenoemde, en anders een 0.

13. > Bereken P^2 .

14. > Wat stellen in P^2 de getallen ongelijk nul voor?

De nullen in P^2 hebben verschillende betekenissen. Geef die, aan de hand van voorbeelden

Het toernooi was dit jaar zo'n succes, dat de organisatoren besluiten om volgend jaar iets voor alle leden te doen. De tien beste spelers zullen dan een volledige competitie draaien, terwijl de 17 andere leden een halve competitie zullen afwerken, dat wil zeggen dat iedere speler één keer tegen iedere andere speler uitkomt.

15. > Hoeveel partijen moeten er dan in totaal gespeeld worden?

Op school

Uit het jaarverslag van een school zijn de volgende gegevens gehaald:

$$\begin{array}{c}
 \text{van} \\
 \begin{array}{ccccc}
 & 3v & 3h & 4v & 4h & 5v \\
 \begin{array}{l} 3v \\ 3h \\ 4v \\ 4h \\ 5v \end{array} & \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 L = \begin{bmatrix} 140 \\ 100 \\ 140 \\ 220 \\ 180 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3v \\ 3h \\ 4v \\ 4h \\ 5v \end{array}
 \end{array}$$

De getallen in matrix B stellen voor het gedeelte van het aantal leerlingen, dat aan het einde van het schooljaar van de ene jaargroep naar de andere gaat. Zo betekent het getal 0,8 in de vijfde rij, derde kolom dat 80% van de 4v-leerlingen is overgegaan naar 5v.

In matrix L staan de aantallen leerlingen per jaargroep aan het einde van het schooljaar vermeld. Schoolverlaters staan daar niet vermeld.

16. > Waarom geldt dat de eerste drie kolomsommen 1 zijn, terwijl dat bij de twee laatsten niet het geval is?
17. > Verklaar waarom een rij som groter kan zijn dan 1.
18. > Bereken $B \cdot L$
Wat stellen de getallen in de gevonden produktmatrix voor?

Het produkt van matrix B met zichzelf levert het volgende resultaat:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 & 0 & 0 \\ 0,16 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0,12 & 0,40 & 0,04 & 0,09 & 0 \\ 0,64 & 0 & 0,24 & 0 & 0,04 \end{bmatrix}$$

19. > Wat is de betekenis van de getallen die in B^2 op de diagonaal van linksboven naar rechtsonder staan?
20. > Laat zien hoe het getal 0,64 in de vijfde rij, eerste kolom is berekend.
Welke betekenis heeft dit getal?