



Bijdrage tot de theorie van de vector-potentiaal

<https://hdl.handle.net/1874/231114>

A⁴ 192

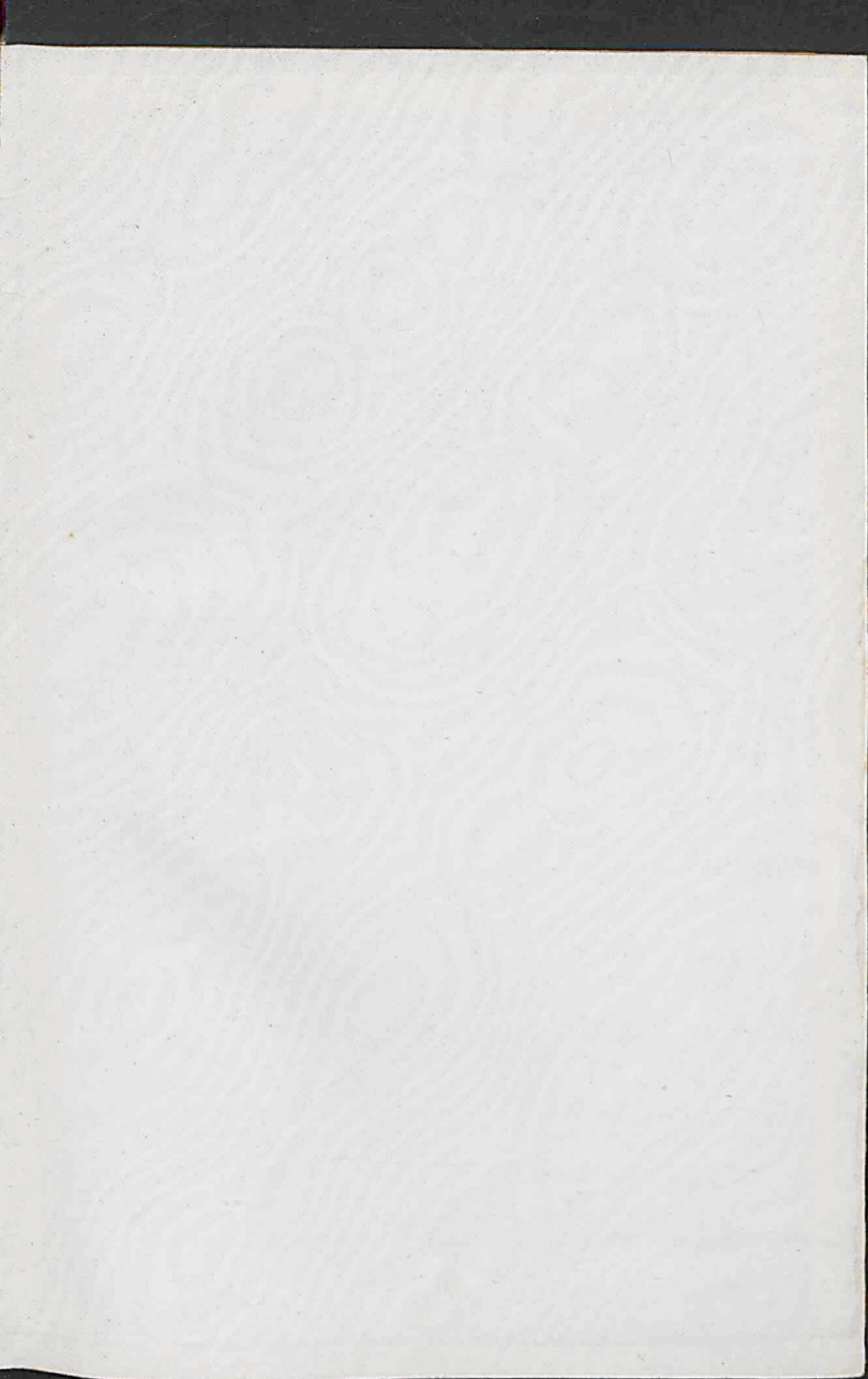
Phys
10 juli
1896

BIJDRAGE TOT DE THEORIE
VAN DE
VECTOR-POTENTIALAAL.

P. VAN MOURIK.

li.

A. qu.
192



BIJDRAGE TOT DE THEORIE

VAN DE

VECTOR-POTENTIALAAL.

BIJDRAGE TOT DE THEORIE
VAN DE
VECTOR-POTENTIAL.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. M. TH. HOUTSMA,

Hoogleraar in de Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte.

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN

DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Woensdag 8 Juli 1896, des namiddags te 3 uur,

DOOR

PIETER VAN MOURIK,

geboren te Doorn.



UTRECHT,
J. VAN BOEKHOVEN.
1896.

AAN DE NAGEDACHTENIS MIJNER OUDERS.

Gaarne maak ik van deze gelegenheid gebruik om U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, mijn hartelijken dank te betuigen voor hetgeen Gij voor mij geweest zijt: jaren geleden, toen ik Uw onderwijs mocht volgen, of later, als ik, nooit te vergeefs, Uw hulp heb ingeroepen.

Een afzonderlijk woord van dank aan U, Hooggeleerde GRINWIS. Het doet mij leed, dat de toestand Uwer gezondheid U noopt, een werkkring, die U lief is, vaarwel te zeggen en het is voor mij een weemoedige gedachte, dat ik de laatste Uwer leerlingen ben, die op deze wijze afscheid van U neemt. Wees overtuigd, dat Uw onderwijs en de vele bewijzen van vriendschap, die Gij mij hebt gegeven, bij mij steeds in dankbare herinnering zullen blijven.

IN H O U D.

	Bladz.
VOORWOORD.	
HOOFDSTUK I. FARADAY'S Electrotonische toestand	I
HOOFDSTUK II. Het begrip Vector-potentiaal	24
HOOFDSTUK III. De Vector-potentiaal van magneten	54
HOOFDSTUK IV. De Vector-potentiaal van electrische stroomen	76
STELLINGEN	95

VOORWOORD.

In dit proefschrift stel ik mij voor een *Inleiding* te geven tot de toepassingen, die MAXWELL in de Electrodynamica en in de leer der Inductie van de Vector-potentiaal maakt.

In het eerste hoofdstuk wordt nagegaan, op welke wijze zich dit begrip bij MAXWELL, blijkens zijn verhandelingen, heeft ontwikkeld. In § 7 is het mij, naar ik meen, gelukt een duidelijke voorstelling te geven van hetgeen MAXWELL bedoelt met eene mechanische analogie, waaraan hij blijkbaar veel waarde hecht en die door hem toch slechts vrij onbepaald wordt aangeduid.

In het tweede hoofdstuk wordt de Vector-potentiaal uit een meer algemeen oogpunt beschouwd, dan door MAXWELL is gedaan. Die grootheid wordt beschouwd in verband met een oppervlakte-integraal, op soortgelijke wijze als men de gewone potentiaal kan laten afhangen van een lijn-integraal. De eigenlijke beteekenis echter van de Vector-potentiaal voor de theorie van de werking op afstand wordt aangegeven in § 23 en § 24.

Het derde hoofdstuk kan in hoofdzaak beschouwd

worden als een commentaar op Art. 405—406 van
MAXWELL'S *Treatise*.

In het vierde hoofdstuk heb ik mij bepaald tot het
Electromagnetisme. In verband met het in het tweede
hoofdstuk behandelde worden de hoofdvergelijkingen op
eene van de gewone eenigszins afwijkende wijze afgeleid.
Een paragraaf over het Electromagnetische Moment is
slechts toegevoegd, om te doen zien in welke betrekking
deze grootheid staat tot de Vector-potentiaal

HOOFDSTUK I.

FARADAY'S ELECTROTONISCHE TOESTAND.

§ 1. De naam *Vector-potentiaal* is ingevoerd door MAXWELL en men behoeft het 2^{de} deel van zijn *Treatise on Electricity and Magnetism* slechts te doorbladeren, om te zien welk eene belangrijke rol deze grootheid in zijne theorie speelt. Toch is zij voor die theorie slechts een hulp-grootheid en het zou misschien moeilijk te verklaren zijn, hoe MAXWELL er toe gekomen is die grootheid zoo op den voorgrond te stellen, als men geen rekening hield met den invloed van FARADAY.

Het is bekend, dat MAXWELL, bij het opstellen zijner theorie, zich in hooge mate door FARADAY heeft laten inspireeren. Voor alle begrippen en voorstellingen, waarmede de laatste werkte, vindt men bij MAXWELL de gepaste wiskundige uitdrukking.

In de eerste plaats denkt men hier aan FARADAY'S theorie van de krachtlijnen, niet alleen als lijnen, die in ieder punt van het veld de richting en de intensiteit van de kracht aangeven, maar ook als lijnen, die den physischen toestand van het medium kenmerken.

Minder in het oog vallend, maar toch zeer wezenlijk, is de invloed, dien een andere conceptie van FARADAY — het bestaan van een *electrotonischen toestand* — gehad heeft op de wijze, waarop MAXWELL zijn theorie heeft opgebouwd.

Volgens MAXWELL is de geheele geschiedenis van de wijze, waarop zich deze conceptie in FARADAY's geest heeft ontwikkeld, de studie zeer waard. Enkele hoofdtrekken uit die geschiedenis willen wij hier laten volgen.

§ 2. In de 1^{ste} Serie van zijn *Experimental Researches in Electricity* beschrijft FARADAY de ontdekking van de volta-electrische en de magneto-electrische inductie. Ter verklaring van de waargenomen verschijnselen neemt hij nu aan, dat een gesloten geleider, onder den invloed van een electrischen stroom of van een magneet, dus in een magnetisch veld, in een bijzonderen toestand verkeert. Zoolang die toestand onveranderd blijft, gebeurt er niets; zoodra echter die toestand verandert, ontstaan er electromotorische krachten, die zoowel wat intensiteit als richting betreft, van de veranderingen in dien toestand afhangen. Aan dezen hypothetischen toestand der materie, van welks bestaan op geen andere wijze blijkt, geeft hij den naam van *Electrotonic State*. Deze toestand schijnt dan te bestaan in een soort van spanning. De opgewekte inductie-stroom houdt op, zoodra die spanning is tot stand gekomen en als de invloed, waardoor de spanning ontstaat, ophoudt te werken, geeft de ontspanning een inductie-stroom in tegengestelden zin.

In de 2^{de} Serie der *Ex. Res.* heeft FARADAY in de verandering van het aantal en de richting der magnetische

krachtlijnen, die door een geleider omsloten worden, een minder hypothetisch middel gevonden om de inductie-verschijnselen samen te vatten — dus te verklaren. De redenen, die hij had om het bestaan van een electrotonischen toestand aan te nemen, bestaan dus niet meer. Hij voegt er echter bij, dat het hem in hooge mate onwaarschijnlijk voorkomt, dat een geleider geheel indifferent zou zijn tegenover een krachtigen electrischen stroom, die zich in de nabijheid bevindt. Alleen het gemis van feiten, die het aannemen van een electrotonischen toestand wettigen, noopt hem die hypothese op te geven.

Toch dringt zich die hypothese telkens weder aan hem op en in de volgende Serieën der *Ex. Res.* komt hij er herhaaldelijk op terug. Zoo b. v. (*Ex. Res.* 1729):

„Het schijnt mij mogelijk en zelfs waarschijnlijk, dat de magnetische werking op afstand wordt overgebracht door de werking van tusschengelegen deeltjes op een wijze, die overeenkomst heeft met de wijze, waarop de inductie-krachten van statische electriciteit op afstand worden overgebracht, waarbij dan die tusschengelegen deeltjes tijdelijk in een meer of minder bijzonderen toestand verkeeren, die ik herhaalde malen met den naam van electrotonischen toestand heb aangeduid.”

Als hij later tot de overtuiging komt, dat ponderabele materie voor de voortplanting der magnetische kracht niet noodzakelijk is, helt hij er toe over om den electrotonischen toestand te beschouwen als den toestand, waarin de aether onder den invloed van magnetische krachten verkeert, ofschoon nog niet kan gezegd worden,

waarin die toestand bestaat: in een trilling, in een spanning of mogelijk in iets, dat overeenkomst heeft met een electrischen stroom (*On the Physical Lines of Magnetic Force. Ex. Res. III, p. 443*). In ieder geval zou die toestand samenvallen met hetgeen het wezen der magnetische krachtlijnen uitmaakt.

§ 3. De wetenschappelijke waarde van deze conceptie bestaat volgens MAXWELL hierin, dat de aandacht gevestigd wordt op een grootheid, die niet door haar absolute waarde, maar door haar veranderingen de verschijnselen in het electromagnetische veld bepaalt. Hij zegt (*Treatise, Art. 540*): „Door een reeks van experimenten, geïnspireerd en geleid door ingespannen denken, werd FARADAY, zonder behulp van wiskundige berekeningen, er toe gebracht het bestaan te erkennen van iets, waarvan wij nu weten, dat het een mathematische grootheid is, die men zelfs de fundamenteele grootheid in de theorie van het electromagnetisme zou kunnen noemen. Daar hij echter op zuiver experimenteelen weg tot deze conceptie was gekomen, schreef hij er een physisch bestaan aan toe en veronderstelde, dat zij bestond in een bijzonderen toestand der materie.” En verder: „Veel later hebben andere onderzoekingen op zuiver mathematischen weg tot hetzelfde begrip geleid; maar niemand heeft, zoover ik weet, in de mathematische conceptie van de potentiaal van twee stroomgeleiders FARADAY's stoute hypothese van een electrotonischen toestand herkend.”

. Het is misschien niet geheel van belang ontbloot na te gaan op welke wijze dit begrip door MAXWELL is

verwerkt. In al zijne verhandelingen over Electriciteit houdt hij er zich mede bezig en ook in zijn geest heeft het een geschiedenis doorloopen, voordat hij er toe komt het als een zuiver mathematische grootheid te beschouwen.

§ 4. In zijn eerste verhandeling over Electriciteit: „*On Faraday's Lines of Force*” (1855. *Scientific Papers*, Vol. I, p. 155—229) stelde MAXWELL zich tot taak aan te toonen, dat de denkbeelden, die FARADAY bij zijne onderzoekingen geleid hadden, niet onbestaanbaar zijn met den mathematischen vorm, waarin POISSON en anderen de wetten der electriciteit hadden gegoten. Zijn doel is een physische analogie te vinden, waardoor men in staat gesteld wordt de resultaten van vroegere onderzoekingen samen te vatten, zonder dat men daardoor gebonden wordt aan eenige theorie. Op deze wijze, meent MAXWELL, is men er voor gevrijwaard, zijn onderwerp uit het oog te verliezen door analytische subtiliteiten, of ook de waarheid voorbij te streven door het volgen eener geliefkoosde hypothese.

In het eerste gedeelte der verhandeling worden de wetten der electriciteit vergeleken met de eigenschappen eener onsamendrukbare vloeistof, wier beweging wordt vertraagd door een kracht evenredig met de snelheid. De vloeistof wordt verondersteld geen inertie te bezitten. Door de overeenkomst, die de stroomlijnen van zulk een vloeistof zouden hebben met de electriche krachtlijnen, is men dan in staat gesteld niet alleen om de wetten der statische electriciteit in een enkel medium af te leiden, maar ook om aan te toonen, wat er moet plaats hebben,

als de werking van het eene diëlectricum in het andere overgaat.

Het tweede gedeelte van de verhandeling is gewijd aan het electromagnetisme en heeft tot opschrift: „*On Faraday's Electrotonic State.*” Er wordt in aangetoond, dat de wetten, die door AMPÈRE zijn ontdekt, tot resultaten leiden, die in overeenstemming zijn met die van FARADAY. Dit tweede gedeelte verschilt in wijze van behandeling geheel van het eerste. MAXWELL erkent, dat het hem nog niet is gelukt zich van den electrotonischen toestand een mechanische voorstelling te vormen, die hem in staat zou stellen, van het wezen van dien toestand en van zijn eigenschappen zonder mathematische symbolen een duidelijke verklaring te geven. Door een nauwgezette studie van de verschillende betrekkingen, die door de vergelijkingen worden uitgedrukt, in verband met de studie van de wetten, die de bewegingen van elastische lichamen en van taaie vloeistoffen beheerschen, hoopt hij echter er in te zullen slagen zulk een mechanische voorstelling te vinden.

Voorloopig voert hij drie uitdrukkingen in, waaraan hij den naam geeft van *electrotonische functies* of *componenten van de electrotonische intensiteit*. De electromotorische krachten, die door magneten of door electrische stroomen in een bepaald punt worden opgewekt zijn de afgeleiden naar den tijd van die functies en er wordt aangetoond op welke wijze de magnetische kracht van die functies afhangt.

Volgens deze beschouwingen heeft men zich dan den electrotonischen toestand in eenig punt van de ruimte

voor te stellen als een grootheid, die in grootte en richting is bepaald, dus als een vector. Neemt men de componenten van dien vector volgens de raaklijn in ieder punt van een gesloten kromme, dan vindt men door integratie wat men kan noemen de *totale electrotonische intensiteit voor die kromme* en deze laatste grootheid is een maat voor de magnetische inductie door een willekeurig oppervlak, dat door de kromme begrensd wordt, of, wat hetzelfde is, voor het aantal magnetische krachtlijnen, die door dat oppervlak gaan.

In de electrotonische functies heeft men dus het middel om de beschouwing van de magnetische inductie, die door een oppervlak gaat, te vermijden en in de plaats daarvan den elektrischen stroom te beschouwen als afhankelijk van grootheden, die bestaan op dezelfde plaats, waar de stroom wordt opgewekt.

Het verdient nu zeker opmerking, dat MAXWELL hier deze laatste methode als de *natuurlijke* stelt tegenover de eerste als de *kunstmatige* (*Sc. Pap.* I, p. 203). Volgens MAXWELL'S volledige theorie, die geen werking op afstand toelaat, maar waarin de krachten in ieder punt alleen afhangen van toestandsveranderingen in de onmiddellijke nabijheid van dat punt, is deze onderscheiding wel niet vol te houden. De methode van de electrotonische intensiteit zou toch in die theorie alleen dan de natuurlijke mogen heeten, als door die grootheid werkelijk de physische toestand van het medium in ieder punt op een bepaald tijdstip werd aangegeven; zooals wij zullen zien, is dit niet het geval.

§ 5. Nadat MAXWELL dus in zijn eerste verhandeling de geometrische beteekenis van den electrotonischen toestand had gevonden, gaat hij er in zijn tweede verhandeling „*On Physical Lines of Force*” (1861. *Sc. Pap.* I, p. 451—513) toe over om de magnetische en de electrische verschijnselen uit een mechanisch oogpunt te beschouwen en hij ontwerpt zijn merkwaardige theorie, volgens welke het magnetische veld zou gevuld zijn met moleculaire vortices, wier assen samenvallen met de magnetische krachtlijnen. De cellen, waarin die vortices roteeren, zijn gescheiden door lagen van deeltjes, die een dubbele rol te vervullen hebben: zij brengen de beweging van de eene cel op de andere over en in hun voortgaande beweging bestaat de electrische stroom. De geheele theorie is met de grootste uitvoerigheid uitgewerkt en niet alleen de magnetische en de electromagnetische, maar ook de electrostatische werkingen worden er door verklaard. Volgens MAXWELL's eigen verklaring (*Treatise* II, Art. 831) moet echter deze theorie voor niet meer gehouden worden dan zij werkelijk is. Men heeft er slechts het bewijs in te zien, dat een mechanisme denkbaar is, welks bewegingen door dezelfde wetten beheerscht worden als de verschijnselen in het electromagnetische veld. Maar ofschoon MAXWELL in zijn volgende verhandeling en in zijn *Treatise* een veel meer algemeene mechanische theorie van het electromagnetische veld heeft ontworpen, wordt toch door sommige hoofdzaken van de oudere theorie zijn blijvende overtuiging uitgedrukt, zeer zeker b. v. door de onderstelling, dat moleculaire rotaties om de magnetische krachtlijnen plaats grijpen.

In deze theorie dan wordt de magnetische kracht veroorzaakt door de centrifugaal kracht van de vortices en een electromotorische kracht ontstaat door de tangentiële drukkingen, die optreden tusschen de vortices en de daartusschen geplaatste deeltjes, telkens wanneer de rotatie-snelheid ergens in het veld verandert. Deze electromotorische kracht kan vergeleken worden met de drukking op de krukas van een wiel in een machine, als de snelheid van het vliegwiel vermeerderd of vermindert.

De electrotonische toestand is dan datgene, wat de electromotorische kracht zou zijn, als de stroomen of magneten, waardoor de krachtlijnen veroorzaakt worden, in plaats van trapsgewijze hun volle sterkte te krijgen, plotseling waren ontstaan. Die toestand komt overeen met de impulsie, die op de krukas van een wiel in een machine zou werken, als het vliegwiel plotseling zijn volle snelheid verkreeg. Deze impulsie kan voor ieder punt van een machine berekend worden. Zij wordt door MAXWELL het herleide moment van de machine voor dit punt genoemd. Is nu de beweging van de machine veranderlijk, dan kan de kracht, die in een bepaald punt door de verandering van de snelheid ontstaat, gevonden worden door dat moment ten opzichte van den tijd te differentiëren, op dezelfde wijze, als de electromotorische kracht door differentiatie van den electrotonischen toestand kan worden afgeleid. In § 7 zullen wij deze beschouwingen door een eenvoudig voorbeeld trachten toe te lichten.

Volgens deze voorstelling is dus de electrotonische

toestand in een punt niet de uitdrukking voor iets, dat physisch in dat punt aanwezig is. Hij hangt af van den toestand van het geheele magnetische veld en is in zekeren zin een summatie van de werkingen, die in een bepaald punt door verstoringen in het geheele veld ontstaan. Ondanks de mechanische wijze van voorstelling is dus hier de electrotonische toestand een zuiver mathematisch begrip geworden. Een integraal-vorm zal dan ook de gepaste wiskundige uitdrukking er voor zijn.

§ 6. In zijn derde groote verhandeling „*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*” (1864. *Sc. Pap.* I, p. 526—597) laat MAXWELL de bijzondere veronderstellingen van de vorige verhandeling varen. In de Inleiding worden eerst eenige verschijnselen besproken — magnetische draaiing der polarisatie-vlakken van het licht, inductiestroom, diëlectrische polarisatie, geleiding — die er toe kunnen leiden om in het algemeen de verklaring der electrische en magnetische verschijnselen niet te zoeken in een werking op afstand, uitgaande van de lichamen, die wij geëlectriseerd of gemagnetiseerd noemen, maar in bewegingen en spanningen van het omringende medium. Verder wordt aangegeven welke redenen er kunnen zijn om aan te nemen dat dit medium dezelfde aether is, die in de theorie van het licht ter verklaring van de optische verschijnselen wordt te hulp geroepen.

Op deze wijze tracht MAXWELL de hypothese aannemelijk te maken, dat het electromagnetische veld een samengesteld mechanisme is, waarin een groote verscheidenheid van bewegingen kan plaats hebben, maar

altijd zoo, dat de beweging van het eene deel volgens vaste betrekkingen afhangt van bewegingen in andere deelen. Door op zulk een mechanisme dynamische grondstellingen toe te passen, komt hij tot eenige algemeene stellingen, die vergeleken worden met de wetten van inductie-stroomen. Hierdoor is hij dan in staat sommige eigenschappen van het mechanisme te identificeren met eigenschappen van electrische stroomen. In plaats van, zooals VON HELMHOLTZ en THOMSON gedaan hadden, de wetten der inductie-stroomen door middel van de wet van het behoud van arbeidsvermogen af te leiden uit de ponderomotorische werkingen, volgt MAXWELL den omgekeerden weg. Eerst worden de wetten der inductie vastgesteld en daaruit worden de ponderomotorische werkingen afgeleid.

Het electromagnetische moment.

§ 7. De eigenlijke verhandeling begint met beschouwingen over het *electromagnetische moment* van stroomen, onder welken naam hier de electrotonische toestand wordt aangeduid. Nergens blijkt zoo duidelijk als hier, hoezeer dit begrip door MAXWELL op den voorgrond wordt gesteld. In zijn *Treatise* ontwikkelt hij later een meer strenge en vooral meer algemeene mechanische theorie der inductie, maar de hoofdgedachte, waarvan hij uitgaat, vindt men hier in al haar eenvoud. Wij willen er daarom wat uitvoeriger bij stilstaan.

Beschouwen wij het veld in de omgeving van een electrischen stroom. De magnetische krachten in dat

veld hangen in grootte en richting volgens bekende wetten van den vorm van den stroomgeleider af. Wanneer de stroomsterkte verandert, dan veranderen ook de magnetische krachten in dezelfde verhouding. Als men aanneemt, dat de magnetische toestand van het veld bepaald wordt door bewegingen van het medium, dan moet men ook aannemen, dat een zekere kracht wordt aangewend om die bewegingen te vermeerderen of te verminderen, en als die bewegingen zijn opgewekt, blijven zij voortduren, „so that the effect of the connection between the current and the electromagnetic field surrounding it, is to endow the current with a kind of momentum, just as the connection between the driving-point of a machine and a fly-wheel endows the driving-point with an additional momentum, which may be called the momentum of the fly-wheel reduced to the driving-point. The unbalanced force acting on the driving-point increases this momentum, and is measured by the rate of its increase. In the case of electric currents, the resistance to sudden increase or diminution of strength produces effects exactly like those of momentum, but the amount of this momentum depends on the shape of the conductor and the relative position of its different parts” (*Sc. Pap.* p. 536).

Eenige toelichting is hier misschien niet geheel overbodig. Gemakshalve noemen wij het aangrijpingspunt van de uitwendige kracht op het wiel, het punt dus, waar in een machine het uiteinde van de krukstang op de kruk van het wiel werkt, het drijfpunt (driving-point, Antriebspunkt). Wij zullen hier echter aannemen, dat de kracht in het drijfpunt altijd loodrecht op den krukarm

werkt. De uitwendige kracht kan men zich op ieder oogenblik ontbonden denken in twee componenten, waarvan de eerste dient om den weerstand te overwinnen, terwijl door de tweede de snelheid van het wiel vermeerderd wordt. Die tweede componente, die wij X zullen noemen, kan berekend worden uit de massa, de afmetingen en de versnelling van het wiel. Zij namelijk C de massa, ϱ de traagheidsstraal, φ de hoeksnelheid van het wiel en r de lengte van den krukarm, dan is

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Xr}{C\varrho^2};$$

dus, als $\varrho = p r$ is,

$$X = C p^2 r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} (C p^2 u),$$

waarin u de lineaire snelheid van het drijfpunt voorstelt. De grootheid $C p^2$, die wij door L zullen voorstellen, kan men noemen de massa en $L u$ het moment (hoeveelheid van beweging) van het wiel herleid op het drijfpunt.

Om de analogie met hetgeen men bij electrische stroomen waarneemt, meer volkomen te maken, zullen wij aannemen, dat de weerstand, dien de uitwendige kracht te overwinnen heeft, op ieder oogenblik evenredig is met de snelheid van het drijfpunt. Dan is, als ξ de totale uitwendige kracht en R een coëfficiënt van weerstand voorstelt,

$$\xi = R u + \frac{d}{dt} (L u) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Als de beweging eenparig is, dan maakt de uitwendige kracht ξ evenwicht met de weerstand biedende kracht $R u$.

Bij veranderlijke beweging wordt de kracht $\xi - Ru$ (the unbalanced force) gebruikt om de snelheid van het vliegwiel, dus ook het herleide moment te vergrooten en de grootte van die kracht wordt gevonden door dat moment naar den tijd te differentieeren. Voor de veranderlijke snelheid van het drijfpunt vindt men door integratie van (1), in de veronderstelling dat ξ constant is,

$$u = \text{const. } e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\xi}{R}.$$

Nu stelt $\frac{\xi}{R}$ de snelheid voor, als de beweging eenparig is geworden. Noemen wij die snelheid b en de initiale snelheid a , dan is de constante in bovenstaande uitdrukking gelijk $a - b$, dus

$$u = b + (a - b) e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (2)$$

Stond de machine aanvankelijk stil, dan zou onder de werking van de constante uitwendige kracht ξ de snelheid van 0 tot b toenemen volgens de vergelijking

$$u = b \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (3)$$

Nemen wij t zoo groot, dat wij mogen aannemen, dat de eindsnelheid b bereikt is, dan is de arbeid, die gedurende dien tijd door de uitwendige kracht verricht wordt,

$$\xi \int_0^t u \, dt = R b^2 \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) dt = b^2 (Rt - L). \quad (4)$$

De arbeid, die in denzelfden tijd gebruikt is om den weerstand te overwinnen, is

$$R \int_0^t u^2 \, dt = R b^2 \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)^2 dt = b^2 \left(Rt - \frac{3}{2}L \right). \quad (5)$$

Het verschil van deze beide uitdrukkingen $\frac{1}{2} L b^2$ stelt de levende kracht voor, die het vliegwiel heeft verkregen.

Hield nu op een oogenblik, dat de snelheid b is, de uitwendige kracht op te werken, dan zou door de energie van het vliegwiel de beweging nog eenigen tijd voortduren met een snelheid, die afneemt volgens de vergelijking

$$u = b e^{-\frac{R}{L}t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Voor den weerstandsarbeid, die dan verricht wordt, totdat de machine stil staat, vindt men

$$R \int_0^t u^2 dt = R b^2 \int_0^t e^{-2\frac{R}{L}t} dt = \frac{1}{2} L b^2. \quad . \quad (7)$$

een bedrag gelijk aan dat van de levende kracht, die in het vliegwiel was opgehoopt op het oogenblik, dat de uitwendige kracht ophield te werken.

Al de verschijnselen nu, die een electrische stroom aanbiedt — extra-stroomen bij opening en bij sluiting, verwarming van den geleider, enz. — kunnen op eenvoudige wijze beschreven worden, als men aanneemt, dat tusschen den stroom en het omringende medium een verbinding bestaat, die — het mechanisme, waardoor zij tot stand komt, geheel buiten beschouwing gelaten — wat de uitwerking betreft, overeenkomt met de verbinding, die er bestaat tusschen het drijfpunt en het vliegwiel van onze denkbeeldige machine.

Zij ξ de electromotorische kracht, u de stroomsterkte (snelheid van de electriciteit), R de weerstand van den

geleider en L de coëfficiënt van zelf-inductie, een grootheid die afhangt van den vorm en de afmetingen van den geleider, dan wordt het verband tusschen deze grootheden aangegeven door de vergelijking (1).

Door (2) wordt de veranderlijke stroomsterkte op ieder oogenblik aangegeven, als de stroomsterkte verandert van a tot b .

Bij sluiting van den stroom gaat volgens (3) door den geleider in een tijd t , waarin de stroomsterkte constant is geworden, de hoeveelheid electriciteit

$$\int_0^t u \, dt = b t - b \frac{L}{R}.$$

Hierin stelt $-b \frac{L}{R}$ den totalen negatieven extra-stroom voor. De arbeid, dien de electromotorische kracht in den tijd t verricht, wordt volgens (4) en (5) slechts voor een deel gebruikt om den weerstand te overwinnen. Dit gedeelte wordt in warmte omgezet; het overblijvende gedeelte $\frac{1}{2} L b^2$ wordt als kinetische energie in het medium opgeborgen.

Deze energie blijft onveranderd, zoolang de stroomsterkte dezelfde blijft, dat is, zoolang $\xi - R u$ nul is. De energie vermeerdert, als $\xi - R u$ positief is. Wordt $\xi - R u$ negatief, dan wordt die energie gebruikt om de vermindering van de stroomsterkte te vertragen. Neemt men b. v. het galvanische element, dat den stroom levert, weg en vervangt men dit door een draad van gelijken weerstand, dan ontstaat een positieve extra-stroom, waarvan de sterkte op ieder oogenblik wordt aangegeven door (6). De arbeid, die hiervoor noodig is, wordt

volgens (7) geheel geleverd door de energie van het medium. De electromotorische kracht van dien extrastroom is volgens (1) op ieder oogenblik $-\frac{d}{dt}(Lu)$; de totale impulsie van de electromotorische kracht is dus gelijk Lu .

Deze grootheid Lu gebruikt MAXWELL als kenmerkend, in zekeren zin als maat, voor den electrotonischen toestand en hij noemt deze grootheid, naar mechanische analogie, het *electromagnetische moment* van den stroom, „using the word momentum merely to express that which is generated by a force acting during a time, that is, a velocity existing in a body.” En wat hierbij in beweging is, is niet alleen de electriciteit in den geleider, maar ook iets buiten den geleider.

§ 8. Tot dusverre hebben wij alleen de betrekking beschouwd, die er bestaat tusschen een stroom en het magnetische veld, dat door den stroom zelf ontstaat. In dat geval hangt het electromagnetische moment van den stroom, zooals wij gezien hebben, alleen van den stroom zelf af. Anders wordt het, wanneer er verschillende stroomen in het veld zijn.

Beschouwen wij het geval, dat er twee stroomen zijn. De magnetische kracht in ieder punt van het veld is de resultante van de krachten, die de beide stroomen afzonderlijk in dat punt te voorschijn zouden roepen. Beide stroomen staan met ieder punt van het veld in verbinding en daardoor staan zij met elkander in verbinding, zoodat een verandering van stroomsterkte in een van de ge-

leiders, in het algemeen, ook een verandering van stroomsterkte in den anderen zal ten gevolge hebben.

Om deze wisselwerking toe te lichten gebruikt MAXWELL de volgende mechanische analogie. Veronderstellen wij, dat een stoffelijk punt met de massa C zoodanig verbonden is met twee onafhankelijke drijfpunten A en B , dat altijd voldaan wordt aan de vergelijking

$$w = p u + q v, \quad (1)$$

waarin u , v en w de snelheden van A , B en C , p en q getallen voorstellen.

Werken nu in A en B de uitwendige krachten X en Y , dan is

$$C \frac{dw}{dt} \delta z = X \delta x + Y \delta y, \quad (2)$$

als δx , δy en δz de gelijktijdige verplaatsingen van A , B en C voorstellen.

Volgens (1) is

$$\frac{dw}{dt} = p \frac{du}{dt} + q \frac{dv}{dt},$$

en

$$\delta z = p \delta x + q \delta y.$$

Door deze waarden in (2) te substitueeren verkrijgt men, in aanmerking nemende dat δx en δy van elkander onafhankelijk zijn,

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{d}{dt} (C p^2 u + C p q v), \\ Y &= \frac{d}{dt} (C p q u + C q^2 v). \end{aligned} \right\} (3)$$

Men kan nu $C p^2 u + C p q v$ het moment van C herleid op A en $C p q u + C q^2 v$ het moment van C herleid op B noemen.

Staan er meer stoffelijke punten op dergelijke wijze, maar met verschillende waarden voor p en q , met A en B in verbinding, dan vindt men op overeenkomstige wijze, als men stelt

$$L = \Sigma C p^2, \quad M = \Sigma C p q \quad \text{en} \quad N = \Sigma C q^2,$$

voor het moment van A : $Lu + Mv$,
 en voor dat van B : $Mu + Nv$.

Nemen wij weder aan, om de analogie met electrische stroomen vollediger te maken, dat de beweging van A en B wordt tegengewerkt door krachten, evenredig met de snelheden van die punten, dan is, als Ru en Sv die krachten voorstellen en als ξ en η de uitwendige krachten in A en B zijn,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= Ru + \frac{d}{dt}(Lu + Mv), \\ \eta &= Sv + \frac{d}{dt}(Mu + Nv). \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Neemt op een bepaald oogenblik de snelheid van A toe, dan zal dientengevolge ook de snelheid van B veranderen. Om die verandering te voorkomen, zou men op B een kracht $\frac{d}{dt}(Mu)$ moeten laten werken. Deze werking op B , veroorzaakt door een vermeerdering van de snelheid van A , komt overeen met de electromotorische kracht, die in een geleider ontstaat door een vermeerdering van stroomsterkte in een naburigen geleider.

Men verkrijgt namelijk weder, evenals in het eenvoudiger geval van de vorige paragraaf, een bevredigende

verklaring van de verschijnselen, die twee stroomen aanbieden, als men aanneemt, dat tusschen die stroomen en het omringende medium een verbinding bestaat, die, wat de uitwerking betreft, overeenkomt met de verbinding van de drijfpunten A en B met de stoffelijke punten C in het mechanisme, dat boven werd aangeduid. Met andere woorden: die verschijnselen worden beschreven door de vergelijkingen (4), als ξ en η de electromotorische krachten, u en v de stroomsterkten, R en S de weerstanden van de twee stroomen A en B voorstellen.

Het electromagnetische moment van A is dan $Lu + Mv$ en dat van B , $Mu + Nv$. Hierin zijn L , M en N grootheden, die afhangen van den vorm en van den betrekkelijken stand der geleiders. L hangt af van den vorm van A , N van dien van B en M van den betrekkelijken stand van A en B .

Beschouwen wij tot toelichting het geval, dat de geleiders onveranderlijk zijn in vorm en stand; L , M en N zijn dan constanten. Laat verder in A de constante electromotorische kracht ξ en in B geen electromotorische kracht werkzaam zijn. De vergelijkingen (4) gaan dan over in

$$\left. \begin{aligned} \xi &= Ru + L \frac{du}{dt} + M \frac{dv}{dt}, \\ 0 &= Sv + M \frac{du}{dt} + N \frac{dv}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Uit deze vergelijkingen vindt men voor de totale hoeveelheid electriciteit, die in den tijd t door beide geleiders stroomt,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t u \, dt &= \frac{1}{R} \left\{ \xi t + L(u_0 - u_1) + M(v_0 - v_1) \right\}, \\ \int_0^t v \, dt &= \frac{1}{S} \left\{ M(u_0 - u_1) + N(v_0 - v_1) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

waarin u_0 , v_0 en u_1 , v_1 de stroomsterkten bij het begin en bij het einde van den tijd t voorstellen.

Laat men den tijd t beginnen op het oogenblik, dat de geleider A gesloten wordt en neemt men t zoo groot, dat een stationnaire toestand is ingetreden, dan is,

$$u_0 = 0, u_1 = \frac{\xi}{R}, v_0 = 0, v_1 = 0.$$

Dus

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t u \, dt &= u_1 \left(t - \frac{L}{R} \right), \\ \int_0^t v \, dt &= -u_1 \frac{M}{S}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

De totale negatieve extra-stroom in A is dus onafhankelijk van B . De totale inductie-stroom in B hangt alleen af van den coëfficiënt van wederkeerige inductie M , van den weerstand van B en van de eind-stroomsterkte in A .

Wil men ook den arbeid berekenen, die door de electromotorische kracht wordt verricht en die gedeeltelijk in warmte wordt omgezet, gedeeltelijk als kinetische energie in het medium wordt opgehoopt, dan moeten de vergelijkingen (5) volledig geïntegreerd worden. Wij zullen hier niet verder bij stilstaan. Het was er ons slechts om te doen duidelijk te maken, wat MAXWELL onder het electromagnetische moment van stroomen verstaat.

§ 9. Het voorafgaande moge voldoende zijn om de volgende definitie toe te lichten.

Laten F , G en H de componenten voorstellen van het electromagnetische moment in een punt van het veld, dat door een stelsel van stroomen of magneten ontstaat.

F is dan de totale impulsie van de electromotorische kracht in de x -richting, die in dat punt zou ontstaan, als deze stroomen en magneten uit het veld verwijderd werden. Dus, als P die electromotorische kracht op ieder oogenblik gedurende de verwijdering van het stelsel voorstelt,

$$F = \int_t^T P dt,$$

waarin T den tijd beteekent, waarop P de waarde nul heeft gekregen.

Het gedeelte dus der electromotorische kracht (P , Q , R) dat afhangt van een verandering in de intensiteit van het magnetische veld, is

$$P = -\frac{dF}{dt}, \quad Q = -\frac{dG}{dt}, \quad R = -\frac{dH}{dt}.$$

Laat s de lengte van een lineairen stroomgeleider in het veld voorstellen. De lijn-integraal

$$\int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds$$

stelt dan het electromagnetische moment van den stroom voor.

In de vorige verhandeling schrijft MAXWELL $P = \frac{dF}{dt}$, enz. in overeenstemming met de daar gegeven definitie van den electrotonischen toestand (zie p. 9).

§ 10. In zijn *Treatise* gebruikt MAXWELL in de leer van het Magnetisme voor het eerst de benaming *Vector-potentiaal van de magnetische inductie* en hij identificeert dan later deze grootheid met het electromagnetische moment of, zooals hij deze grootheid ook noemt, het *electrokinetische moment*.

HOOFDSTUK II.

HET BEGRIIP VECTOR-POTENTIALAAL.

Integratie bij gedeelten toegepast op een veelvoudige integraal.

§ 11. Laten u en v twee eindige, doorlopende, éénwaardige functiën van x , y en z zijn en laten ook de afgeleiden dier functiën eindig zijn. Als niet uitdrukkelijk het tegendeel gezegd wordt, zullen wij in het vervolg steeds veronderstellen, dat de functiën, die wij beschouwen, aan die voorwaarden voldoen.

Beschouwen wij de integraal

$$\iiint u \frac{dv}{dx} d\tau,$$

genomen over een enkelvoudig-samenhangend volume τ , dat begrensd wordt door een oppervlak σ .

Integreeren wij eerst bij gedeelten met betrekking tot x en onderstellen wij eenvoudigheidshalve, dat een rechte, evenwijdig aan de x -as, het oppervlak slechts in twee punten met de abscissen x_1 en x_2 ($x_1 < x_2$) ontmoet, dan

gaat de integraal over in

$$\iint dy \, dz \left\{ (u \, v)_2 - (u \, v)_1 \right\} - \iiint v \frac{du}{dx} d\tau,$$

waarin de indices 1 en 2 aanwijzen, dat men in het produkt uv de abscis x te vervangen heeft door x_1 en x_2 .

De dubbele integraal in deze uitdrukking moet genomen worden over de projectie van het oppervlak σ op het yz -vlak; maar deze integraal is niets anders dan de oppervlakte-integraal

$$\iint u \, v \cos l \, d\sigma,$$

genomen over het oppervlak σ , waarin l de hoek is, dien de uitwendige normaal op het oppervlak met de x -as maakt; voor ieder punt (x_1, y, z) is namelijk die hoek stomp en voor ieder punt (x_2, y, z) scherp.

Men verkrijgt dus de bekende formule

$$\iiint u \frac{dv}{dx} d\tau = \iint u \, v \cos l \, d\sigma - \iiint v \frac{du}{dx} d\tau \quad . \quad (1)$$

Snijdt een lijn, evenwijdig aan de x -as, het oppervlak in meer dan twee punten, dan is het aantal snijpunten altijd even en het blijkt gemakkelijk dat de formule blijft doorgaan.

Zijn op oneindigen afstand u en v gelijk nul, dan is, als men de integratie over de geheele ruimte uitstrekt, de eerste term van het tweede lid van (1) nul en men heeft eenvoudig

$$\iiint u \frac{dv}{dx} d\tau = - \iiint v \frac{du}{dx} d\tau \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Zal deze wijze van integreeren mogelijk zijn, dan moeten

de functiën u en v in de geheele ruimte als doorlopend beschouwd kunnen worden. Bij een bepaalde toepassing van de formule komen wij hierop terug (§ 27).

§ 12. Wij willen nu een soortgelijke herleiding toepassen op de dubbele integraal

$$\iint \left(v \frac{du}{dz} \cos m - v \frac{du}{dy} \cos n \right) d\sigma,$$

uitgestrekt over een niet-gesloten oppervlak σ , dat begrensd wordt door een kromme s ; u en v zijn functiën van x , y en z ; m en n zijn de hoeken, die de positieve normaal op het oppervlak met de y - en de z -as maakt.

Het is noodig, dat wij nauwkeurig vaststellen, wat wij zullen verstaan door een beweging in positieven zin langs de grenskromme s . Denken wij ons om een punt P op het oppervlak een oneindig kleine gesloten kromme t getrokken. Door een waarnemer, die met de voeten in P en met het hoofd in de richting van de positieve normaal staat, zal een beweging in positieven zin langs t gezien worden als een beweging tegengesteld aan den zin, waarin zich de wijzers van een uurwerk bewegen. Stellen wij ons nu voor, dat P in de nabijheid van s ligt en dat een gedeelte van t met s samenvalt. Hierdoor wordt de positieve zin langs s bepaald; het is namelijk duidelijk, dat die zin altijd dezelfde zal zijn, tot welk gedeelte van s men P ook laat naderen.

Drie onderling loodrechte assen zullen altijd zoo worden aangenomen, dat een wenteling van het positieve gedeelte der x -as naar het positieve gedeelte der y -as, over een hoek van 90° , uit een punt van het positieve gedeelte

der z -as als positieve draaling gezien wordt. Dit is het rechtsche systeem, dat door MAXWELL meer algemeen in gebruik is gekomen.

Projecteeren wij de kromme s op het xy - en op het xz -vlak. Laten s' en s'' die projecties zijn. Wij kunnen stellen: $d\sigma \cos n = dx dy$ en $d\sigma \cos m = dx dz$, als wij eenvoudigheidshalve aannemen, dat de hoeken, die de normaal met de y -as en met de z -as maakt, overal scherp zijn. Integreert men den tweeden term van de gegeven uitdrukking bij gedeelten ten opzichte van y , dan verkrijgt men

$$\begin{aligned} \iint v \frac{du}{dy} \cos n d\sigma &= \iint v \frac{du}{dy} dx dy = \\ &= \int_a^{a'} dx \left\{ (vu)_2 - (vu)_1 \right\} - \iint u \frac{dv}{dy} dx dy, \end{aligned}$$

als men aanneemt, dat een rechte in het xy -vlak, evenwijdig aan de y -as, de kromme s' slechts in twee punten met de ordinaten y_1 en y_2 ($y_1 < y_2$) snijdt. Door $(vu)_1$ en $(vu)_2$ worden de waarden voorgesteld, die het produkt vu heeft in de punten van σ , die zich in (x, y_1) en (x, y_2) projecteeren, terwijl a en a' de kleinste en de grootste abscis voorstellen van de ordinaten, die met de kromme s' een punt gemeen hebben.

Beschouwen wij nu ook de lijn-integraal

$$\int_{(s')} vu dx = \int vu \frac{dx}{ds'} ds',$$

waarin s' de lengte van s' , gemeten van een vast punt af, voorstelt. De waarde van deze integraal, in positieven

zin genomen, is

$$\int_a^{a'} \left\{ (vu)_1 - (vu)_2 \right\} dx.$$

Dus, als men weder $dx dy$ door $d\sigma \cos n$ vervangt,

$$\iint v \frac{du}{dy} \cos n d\sigma = - \int v u \frac{dx}{ds'} ds' - \iint u \frac{dv}{dy} \cos n d\sigma. \quad (1)$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$\iint v \frac{du}{dz} \cos m d\sigma = + \int v u \frac{dx}{ds''} ds'' - \iint u \frac{dv}{dz} \cos m d\sigma. \quad (2)$$

Men kan x beschouwen als een functie van de onderling onafhankelijke veranderlijken s' en s'' , terwijl zoowel s' als s'' een functie is van s ; men kan dus stellen

$$\frac{dx}{ds} ds = \frac{dx}{ds'} ds' + \frac{dx}{ds''} ds''.$$

Door (1) van (2) af te trekken verkrijgt men dus

$$\begin{aligned} & \iint \left(v \frac{du}{dz} \cos m - v \frac{du}{dy} \cos n \right) d\sigma = \\ & = \int v u \frac{dx}{ds} ds - \iint \left(u \frac{dv}{dz} \cos m - u \frac{dv}{dy} \cos n \right) d\sigma, \quad (3) \end{aligned}$$

waarin de enkelvoudige integraal langs de kromme s moet genomen worden.

Bij dit bewijs werd stilzwijgend aangenomen, dat de grenskromme der projectie van het oppervlak op het xy -vlak, die wij t' zullen noemen, samenvalt met de projectie s' der grenskromme van het oppervlak. Zoo ook ten opzichte van het xz -vlak. Het is echter niet moeilijk te bewijzen, dat de formule (3) blijft doorgaan, als dit niet het geval is.

De kromme t op het oppervlak, wier projectie t' is, verdeelt het oppervlak in twee deelen. Nemen wij gemakshalve aan, dat de hoek, dien de normaal op het bovenste gedeelte met de z -as maakt, overal scherp en op het onderste gedeelte, dat de grenskromme s moge bevatten, overal stomp is. Duiden wij de punten, waarin een rechte in het xy -vlak evenwijdig aan de y -as de projectie t' snijdt, door de indices 3 en 4 en de punten, waarin die rechte de projectie s' snijdt, door 1 en 2 aan. Laten verder b en b' de kleinste en de grootste abscis voorstellen van de ordinaten, die met t' een punt gemeen hebben, terwijl a en a' dezelfde beteekenis hebben voor s' . Voor het bovenste gedeelte van het oppervlak, dat wij σ' noemen, is dan

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma')} v \frac{du}{dy} \cos n \, d\sigma &= \iint \left(v \frac{du}{dy} \right)_{\sigma'} dx \, dy = \\ &= \int_b^{b'} dx \left\{ (vu)_4 - (vu)_3 \right\} - \iint \left(u \frac{dv}{dy} \right)_{\sigma'} dx \, dy. \end{aligned}$$

Voor het onderste gedeelte σ'' :

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma'')} v \frac{du}{dy} \cos n \, d\sigma &= - \iint \left(v \frac{du}{dy} \right)_{\sigma''} dx \, dy = \\ &= - \int_b^{b'} dx \left\{ (vu)_4 - (vu)_3 \right\} + \int_a^{a'} dx \left\{ (vu)_2 - (vu)_1 \right\} + \iint \left(u \frac{dv}{dy} \right)_{\sigma''} dx \, dy. \end{aligned}$$

Door deze vergelijkingen op te tellen, vindt men voor het geheele oppervlak

$$\iint v \frac{du}{dy} \cos n \, d\sigma = \int_a^{a'} dx \left\{ (vu)_2 - (vu)_1 \right\} - \iint u \frac{dv}{dy} \cos n \, d\sigma.$$

De vergelijking (1) blijft dus doorgaan. Op dezelfde wijze bewijst men, dat (2) en dus ook (3) geldig blijft.

Bij een gesloten oppervlak verdwijnt de lijn-integraal in (3) en men heeft dan

$$\iiint \left(v \frac{du}{dz} \cos m - v \frac{du}{dy} \cos n \right) d\sigma = - \iiint \left(u \frac{dv}{dz} \cos m - u \frac{dv}{dy} \cos n \right) d\sigma. \quad (4)$$

De laatste formule kan ook zeer eenvoudig rechtstreeks op de volgende manier worden bewezen. In plaats van de identiteit

$$\iiint \left(\frac{d^2(uv)}{dz dy} - \frac{d^2(uv)}{dz dy} \right) d\tau = 0$$

kan men, zooals gemakkelijk uit (1) § 11 blijkt, schrijven

$$\iint \frac{d(uv)}{dz} \cos m d\sigma - \iint \frac{d(uv)}{dy} \cos n d\sigma = 0.$$

Voert men hierin de differentiatie uit, dan verkrijgt men (4).

Verandering van een oppervlakte-integraal in een volume-integraal.

§ 13. Laten X , Y en Z drie functiën van de coördinaten zijn; l , m en n de hoeken, die de uitwendige normaal op een gesloten oppervlak σ met de assen maakt. Stelt men in de vergelijking (1) van § 11 $u = 1$ en $v = X$, dan gaat zij over in

$$\iint X \cos l d\sigma = \iiint \frac{dX}{dx} d\tau.$$

Zoo heeft men ook

$$\iint Y \cos m d\sigma = \iiint \frac{dY}{dy} d\tau,$$

en

$$\iint Z \cos n d\sigma = \iiint \frac{dZ}{dz} d\tau.$$

Door optelling dezer vergelijkingen verkrijgt men

$$\iint (X \cos l + Y \cos m + Z \cos n) d\sigma = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau. \quad (1)$$

Deze formule wordt toegeschreven aan OSTROGRADSKY; zij kan ook beschouwd worden als een bijzonder geval van de bekende formule van GREEN.

Beschouwt men X , Y en Z als de componenten van een vector $\mathfrak{F}$, die in een punt van het oppervlak met de normaal in dat punt een hoek η vormt, dan is, als F de numerieke waarde van dien vector voorstelt,

$$F \cos \eta = X \cos l + Y \cos m + Z \cos n,$$

dus

$$\iint F \cos \eta d\sigma = \iiint \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} \right) d\tau. \quad (2)$$

De uitdrukking in het eerste lid van deze vergelijking noemt men de oppervlakte-integraal van $\mathfrak{F}$ over σ .

Stelt de vector $\mathfrak{F}$ de snelheid van een vloeistof voor, dan geeft de uitdrukking

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$$

de hoeveelheid vloeistof aan, die in de eenheid van tijd uit de eenheid van volume stroomt.

Wij zullen deze uitdrukking met HEAVISIDE de *divergentie* van den vector $\mathfrak{F}$ noemen. De negatieve divergentie wordt door MAXWELL de *convergentie* van $\mathfrak{F}$ genoemd.

Voor (2) kunnen wij dus schrijven

$$\iint F \cos \eta d\sigma = \iiint \operatorname{div} \mathfrak{F} d\tau. \quad (3)$$

Of: de oppervlakte-integraal van een vector over een gesloten oppervlak is gelijk aan de volume-integraal van de divergentie van den vector over het volume, dat door het oppervlak begrensd wordt.

Is in een bepaald gebied overal $\text{div } \mathfrak{F} = 0$, dan noemt W. THOMSON de verdeeling van dien vector een *solenoïdale*.

Als overal binnen een gesloten oppervlak $\text{div } \mathfrak{F} = 0$ is, dan is volgens (3) de oppervlakte-integraal van $\mathfrak{F}$ over dat oppervlak gelijk nul. Denkt men zich dus dat oppervlak door een gesloten kromme in twee deelen verdeeld, dan is de oppervlakte-integraal over het eene deel in absolute waarde gelijk aan, maar in teeken verschillend van die over het andere deel. Hieruit volgt, dat voor een gebied, waarin $\text{div } \mathfrak{F} = 0$ is, de oppervlakte-integraal van $\mathfrak{F}$ over een willekeurig niet-gesloten oppervlak σ alleen afhangt van de grenskromme s . Het moet dus mogelijk zijn de oppervlakte-integraal over σ uit te drukken door een lijn-integraal langs s .

Om deze vervorming tot stand te brengen zullen wij eerst aantonen, dat de lijn-integraal van een willekeurigen vector langs een gesloten kromme altijd kan veranderd worden in een oppervlakte-integraal.

Verandering van een lijn-integraal in een oppervlakte-integraal.

§ 14. Laten F , G en H drie functiën van de coördinaten zijn. Stelt men in (3) § 12 $v = 1$ en $u = F$, dan gaat die vergelijking over in

$$\iint \left(\frac{dF}{dz} \cos m - \frac{dF}{dy} \cos n \right) d\sigma = \int F \frac{dx}{ds} ds.$$

Op overeenkomstige wijze vindt men ook

$$\iint \left(\frac{dG}{dx} \cos n - \frac{dG}{dz} \cos l \right) d\sigma = \int G \frac{dy}{ds} ds,$$

en

$$\iint \left(\frac{dH}{dy} \cos l - \frac{dH}{dx} \cos m \right) d\sigma = \int H \frac{dz}{ds} ds.$$

Door deze vergelijkingen op te tellen verkrijgt men

$$\begin{aligned} \iint \left\{ \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \right) \cos l + \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \right) \cos m + \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \right) \cos n \right\} \\ = \int \left(F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds} \right) ds \quad \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Deze belangrijke stelling wordt meestal toegeschreven aan STOKES.

Stelt men

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} &= a, \\ \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} &= b, \\ \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} &= c, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

en beschouwt men F , G en H als de componenten van een vector $\mathfrak{A}$, die met de raaklijn aan de kromme s een hoek ϵ en a , b en c als de componenten van een vector $\mathfrak{B}$, die met de positieve normaal op het oppervlak σ een hoek η vormt, dan kan men, daar

$$A \cos \epsilon = F \frac{dx}{ds} + G \frac{dy}{ds} + H \frac{dz}{ds}$$

is, in plaats van (1) schrijven

$$\iint B \cos \eta d\sigma = \int A \cos \epsilon ds \quad \dots \quad (3)$$

Of: de oppervlakte-integraal van $\mathfrak{B}$ over σ is gelijk aan de lijn-integraal van $\mathfrak{A}$ langs de grenskromme.

In deze vergelijking kan de vector $\mathfrak{A}$ geheel willekeurig genomen worden, mits eindig en continu, maar met den vector $\mathfrak{B}$ is dit niet het geval. Differentieert men namelijk de vergelijkingen (2) respectievelijk naar x , y en z en telt men de verkregen vergelijkingen op, dan vindt men voor de voorwaarde, waaraan $\mathfrak{B}$ moet voldoen,

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0.$$

Deze voorwaarde is dus noodig; dat zij voldoende is om de formule (3) te kunnen toepassen, zullen wij in § 17 aantonen.

Stelt de vector $\mathfrak{A}$ de snelheid van een vloeistof voor, dan is $\mathfrak{B}$, zooals uit (2) blijkt, een vector, waarvan de grootte gelijk is aan tweemaal de rotatie-snelheid van de vloeistof in de onmiddellijke nabijheid van het punt, waarop $\mathfrak{A}$ betrekking heeft en waarvan de richting samenvalt met de as van rotatie (KIRCHHOFF, *Mechanik*, 3. Aufl. p. 107).

Een vector $\mathfrak{B} (a, b, c)$, die volgens de vergelijkingen (2) van een vector $\mathfrak{A} (F, G, H)$ wordt afgeleid, wordt door MAXWELL de *curl* van $\mathfrak{A}$ genoemd.

Voor (3) kunnen wij dus schrijven

$$\iint T \text{curl } \mathfrak{A} \cos \eta \, d\sigma = \int A \cos \epsilon \, ds, \quad \dots \quad (4)$$

als $T \text{curl } \mathfrak{A}$ de numerieke waarde van *curl* $\mathfrak{A}$ voorstelt.

Is in een bepaald gebied overal *curl* $\mathfrak{A} = 0$, dan wordt zulk een verdeling van den vector $\mathfrak{A}$ een *wervelvrije* genoemd, daar in de vloeistof dan geen wervelbewegingen voorkomen.

Is de richting van $\mathfrak{A}$ overal dezelfde, dan kan men één der assen, b. v. de z -as, met die richting laten samenvallen; men vindt dan voor $\text{curl } \mathfrak{A}$ de twee componenten $\frac{dH}{dy}$ volgens de x -as en $-\frac{dH}{dx}$ volgens de y -as. In dat geval staat dus $\text{curl } \mathfrak{A}$ loodrecht op $\mathfrak{A}$. In het algemeen is dit echter niet het geval.

De scalaire potentiaal.

§ 15. Laat gegeven zijn een vector $\mathfrak{F}$, in de geheele ruimte eindig en continu en op oneindigen afstand gelijk nul. Zij verder $\text{curl } \mathfrak{F} = 0$, dan is volgens (4) § 14 de lijn-integraal van $\mathfrak{F}$ langs een gesloten kromme gelijk nul en voor een niet-gesloten kromme hangt de waarde van die integraal niet af van den vorm der kromme, maar alleen van de eindpunten.

Als $\text{curl } \mathfrak{F} = 0$ is, dan is, als X , Y en Z de componenten van $\mathfrak{F}$ voorstellen, de uitdrukking

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

een exacte differentiaal. Stellen wij

$$Xdx + Ydy + Zdz = -dV.$$

De integraal dezer grootheid, die voldoet aan de voorwaarde, dat zij op oneindigen afstand tot nul nadert, noemen wij in overeenstemming met MAXWELL (*Treatise*, Art. 70) de *potentiaal-functie*, of, ter onderscheiding van de vector-potentiaal, ook wel de *scalaire potentiaal*.

Voor de lijn-integraal van $\mathfrak{F}$ tusschen twee punten

A en B langs een willekeurige kromme heeft men dan

$$\int_A^B F \cos \varepsilon \, ds = V_A - V_B, \dots (1)$$

als V_A en V_B de waarden van V in A en in B voorstellen.

Ligt het punt B op oneindigen afstand, dan is

$$\int_A^\infty F \cos \varepsilon \, ds = V_A \dots (2)$$

De componenten van $\mathfrak{F}$ worden van V afgeleid volgens de vergelijkingen

$$X = -\frac{dV}{dx}, \quad Y = -\frac{dV}{dy}, \quad Z = -\frac{dV}{dz} \dots (3)$$

Stelt men nu

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi\varrho, \dots (4)$$

waarin de factor 4π alleen dient om bij de toepassingen in overeenstemming te blijven met de gebruikelijke eenheden, dan kan men voor die vergelijking ook schrijven

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varrho, \dots (5)$$

of, volgens de gebruikelijke notatie,

$$\Delta V = -4\pi\varrho \dots (6)$$

Is nu $\mathfrak{F}$ of V gegeven, dan kan ϱ uit de vergelijkingen (4) of (5) berekend worden. Men kan echter ook vragen $\mathfrak{F}$ of V te bepalen, als ϱ voor ieder punt van de ruimte gegeven is. Dit komt neer op de oplossing van (5) in verband met de voorwaarde, dat V op oneindigen afstand nul moet zijn.

De oplossing is

$$V = \iiint \frac{\varrho}{r} d\tau, \dots \dots \dots (7)$$

waarin r den afstand voorstelt van ieder punt, waarop ϱ betrekking heeft, tot het punt, waarvoor V bepaald moet worden, terwijl de integratie moet uitgestrekt worden over ieder deel van de ruimte, waarin ϱ een eindige waarde heeft (Zie b. v. PICARD, *Traité d'Analyse*, I. § 8, p. 172).

Volgens (4) kan men voor (7) ook schrijven

$$V = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div } \mathfrak{F}}{r} d\tau \dots \dots \dots (8)$$

Beteekent V de potentiaal van massa's, die een aantrekkende of afstootende werking uitoefenen, omgekeerd evenredig met het kwadraat van den afstand, dan stelt ϱ de massa-dichtheid voor.

Hier is echter het woord potentiaal in meer uitgebreide beteekenis gebruikt. In het algemeen zal men dan de functie ϱ alleen door de vergelijking (4) gedefinieerd moeten beschouwen.

Voor de componenten van $\mathfrak{F}$ vindt men uit (7)

$$X = \iiint \frac{\varrho}{r^2} \cos \alpha d\tau, \text{ enz. } \dots \dots \dots (9)$$

waarin α de hoek is, dien r met de x -as maakt.

Is dus gegeven een vector $\mathfrak{F}$, die van een scalaire potentiaal kan worden afgeleid en denkt men zich, dat van ieder volume-element $d\tau$ een werking uitgaat, evenredig met $\varrho d\tau$, waarin $\varrho = \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathfrak{F}$, en omgekeerd evenredig met het kwadraat van den afstand, dan zal de

resultante van die fictieve krachten in ieder punt een vector zijn, die identiek is met den oorspronkelijk in dat punt gegeven vector $\mathfrak{F}$.

In het begin van deze paragraaf werd ondersteld, dat de vector $\mathfrak{F}$ in de geheele ruimte doorlopend is. De verdere beschouwingen blijven echter geldig, als de normale componenten van $\mathfrak{F}$ op sommige oppervlakken sprongsgewijze van $(F_n)_1$ tot $(F_n)_2$ overgaat. Men kan aannemen, dat $\mathfrak{F}$ in een oneindig dunne overgangslaag continu verandert. Voor de ruimte-dichtheid ϱ in die laag kan men dan stellen, daar de verandering der tangentieele componenten van $\mathfrak{F}$ oneindig klein is in vergelijking met die der normale componenten:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dF_n}{dn}.$$

Wil men de ruimte-lading als een oppervlakte-lading beschouwen, dan vindt men hieruit, door integratie over de dikte van de overgangslaag, voor de dichtheid dier lading:

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi} \left((F_n)_2 - (F_n)_1 \right).$$

De vergelijking (7) gaat dan over in

$$V = \iiint \frac{\varrho}{r} d\tau + \iint \frac{\varrho'}{r} d\sigma,$$

waarin de tweede integraal moet genomen worden over alle oppervlakken σ , waarop $\mathfrak{F}$ discontinu verandert.

§ 16. De functie V , die in de vorige paragraaf werd besproken, is een éénwaardige functie van de coördinaten.

Het kan echter voorkomen, dat een vector $\mathfrak{F}$ volgens de vergelijkingen (3) § 15 van een functie V kan worden

afgeleid en dat die functie meerwaardig is. Er zijn namelijk gevallen, dat in een bepaald gebied $\text{curl } \mathfrak{F} = 0$ is en dat toch de lijn-integraal $\int_A^B F \cos \epsilon \, ds$ tusschen twee punten A en B verschillende waarden heeft voor twee krommen, die geheel in dat gebied liggen. Dit zal plaats hebben, als het niet mogelijk is de eene kromme door een doorlopende beweging in de andere te doen overgaan zonder buiten het gebied te komen, waarin aan de vergelijking $\text{curl } \mathfrak{F} = 0$ voldaan is. Het beschouwde gebied is dan een twee- of meervoudig samenhangende ruimte. (Zie b. v. MAXWELL, *Treatise*, Art. 18—20 en KIRCHHOFF, *Mechanik*, 3. Aufl. p. 172 en p. 192). Een voorbeeld hiervan zullen wij aantreffen in § 35.

Noemt men dus, zooals dikwijls gedaan wordt, ook in dit geval de functie V een potentiaal, dan kan de potentiaal een meerwaardige functie zijn. Als niet het tegendeel gezegd wordt, zullen wij in het vervolg onder den term *scalair potentiaal* de éénwaardige functie van de vorige paragraaf verstaan.

Oplossing van de vergelijking $\text{curl } \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

§ 17. Zooals wij in § 14 gezien hebben, voldoet een vector $\mathfrak{B}$, waarvan de oppervlakte-integraal over een willekeurig oppervlak gelijk is aan de lijn-integraal van een anderen vector $\mathfrak{A}$ langs de grenskromme, aan de voorwaarde $\text{div } \mathfrak{B} = 0$. Wij zullen nu bewijzen, dat die voorwaarde voldoende is om de formule (3) § 14 te kunnen toepassen. Wij willen dus $\mathfrak{A}$ bepalen, als $\mathfrak{B}$ gegeven is.

Daartoe zullen wij hebben aan te toonen, dat, als a , b en c gegeven functiën van x , y en z zijn, die voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{da}{dx} + \frac{ab}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0, \dots \dots \dots (1)$$

altijd drie andere functiën F , G en H kunnen bepaald worden, die voldoen aan de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} &= a, \\ \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} &= b, \\ \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} &= c. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Deze drie vergelijkingen zijn echter niet voldoende om F , G en H volledig te bepalen. Stelt namelijk het stel waarden F' , G' , H' een particuliere oplossing van (2) voor, dan wordt de meest algemeene oplossing gegeven door de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} F &= F' + \frac{d\chi}{dx}, \\ G &= G' + \frac{d\chi}{dy}, \\ H &= H' + \frac{d\chi}{dz}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

waarin χ een willekeurige functie van x , y en z voorstelt.

Dat deze waarden F , G , H aan (2) voldoen, blijkt bij substitutie onmiddellijk. Dat zij de meest algemeene oplossing vormen, kan op de volgende wijze worden aangetoond.

Laat F_1, G_1, H_1 en F_2, G_2, H_2 twee particuliere oplossingen voorstellen, dan heeft men

$$\frac{dH_1}{dy} - \frac{dG_1}{dz} = a,$$

en

$$\frac{dH_2}{dy} - \frac{dG_2}{dz} = a.$$

Dus

$$\frac{d(H_1 - H_2)}{dy} = \frac{d(G_1 - G_2)}{dz},$$

zoo ook

$$\frac{d(F_1 - F_2)}{dz} = \frac{d(H_1 - H_2)}{dx},$$

en

$$\frac{d(G_1 - G_2)}{dx} = \frac{d(F_1 - F_2)}{dy}.$$

Maar dit zijn juist de voorwaarden, dat $F_1 - F_2, G_1 - G_2$ en $H_1 - H_2$ de afgeleiden zijn, respectievelijk naar x, y en z , van een zelfde functie χ .

Om F, G en H volledig te bepalen, moeten wij dus die grootheden nog aan een voorwaarde laten voldoen. Om tot een voor ons doel geschikte particuliere oplossing te geraken, kiezen wij de voorwaarde

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

terwijl wij tevens zullen aannemen, dat a, b en c op oneindigen afstand de waarde nul hebben.

Differentieert men de derde der vergelijkingen (2) naar y en de tweede naar z , dan vindt men door aftrekking

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dy} - \frac{db}{dz} &= \frac{d^2 G}{dx dy} - \frac{d^2 F}{dy^2} - \frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{d^2 H}{dx dz} = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) - \left(\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{d^2 F}{dy^2} + \frac{d^2 F}{dz^2} \right). \end{aligned}$$

Dus, als aan (4) voldaan is,

$$\left. \begin{array}{l} \Delta F = - \left(\frac{dc}{dy} - \frac{db}{dz} \right), \\ \text{zoo ook} \\ \Delta G = - \left(\frac{da}{dz} - \frac{dc}{dx} \right), \\ \text{en} \\ \Delta H = - \left(\frac{db}{dx} - \frac{da}{dy} \right). \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Stellen wij nu

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dc}{dy} - \frac{db}{dz} = 4 \pi u, \\ \frac{da}{dz} - \frac{dc}{dx} = 4 \pi v, \\ \frac{db}{dx} - \frac{da}{dy} = 4 \pi w. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Door deze vergelijkingen resp. naar x , y en z te differentieeren en op te tellen, vindt men, dat u , v en w voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

De vergelijkingen (5) gaan nu over in

$$\left. \begin{array}{l} \Delta F = - 4 \pi u, \\ \Delta G = - 4 \pi v, \\ \Delta H = - 4 \pi w. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

De functiën F , G en H kunnen dus beschouwd worden als potentialen van massa's met de dichtheden u , v en w en wij vinden de volgende oplossing van de vergelijkingen (2):

$$\left. \begin{aligned} F &= \iiint \frac{u}{r} d\tau, \\ G &= \iiint \frac{v}{r} d\tau, \\ H &= \iiint \frac{w}{r} d\tau. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

§ 18. Wij willen nu aantoonen, dat door de gevonden oplossing aan (4) en (2) van de vorige paragraaf voldaan wordt.

Vormen wij $\frac{dF}{dx}$. Bij deze differentiatie blijft u constant, daar de verandering van F alleen betrekking heeft op een verplaatsing van het punt (x, y, z) . Dus

$$\frac{dF}{dx} = \iiint u \frac{d}{dx} \frac{1}{r} dx' dy' dz'.$$

Hierin is $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, als de coördinaten van ieder punt, waarin u een eindige waarde heeft, worden aangegeven door x' , y' en z' .

Daar

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{r} = - \frac{d}{dx'} \frac{1}{r}$$

is, kan men ook schrijven

$$\frac{dF}{dx} = - \iiint u \frac{d}{dx'} \frac{1}{r} dx' dy' dz'.$$

Deze integraal moet genomen worden over het volume, waarin u een eindige waarde heeft. Daar buiten dat volume $u = 0$ is, kunnen wij ook over de geheele ruimte

integreeren. Wij vinden dan door toepassing (2) § 11

$$\frac{dF}{dx} = \iiint \frac{1}{r} \frac{du}{dx'} dx' dy' dz'.$$

Soortgelijke uitdrukkingen vindt men voor $\frac{dG}{dy}$ en $\frac{dH}{dz}$; dus

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{du}{dx'} + \frac{dv}{dy'} + \frac{dw}{dz'} \right) dx' dy' dz'. \quad (1)$$

De elementen van deze integraal zijn alle nul volgens (7); dus wordt aan (4) voldaan.

Evenzoo vindt men

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} &= \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dy'} - \frac{dv}{dz'} \right) dx' dy' dz' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{r} \frac{d}{dx'} \left\{ \left(\frac{da}{dx'} + \frac{db}{dy'} + \frac{dc}{dz'} \right) - \left(\frac{d^2 a}{dx'^2} + \frac{d^2 a}{dy'^2} + \frac{d^2 a}{dz'^2} \right) \right\} dx' dy' dz' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\Delta a}{r} dx' dy' dz' = a. \end{aligned}$$

Zoo ook voor de andere componenten; dus wordt aan (2) voldaan.

Definitie en eigenschappen van de vector-potentiaal.

§ 19. Een vector, die, zooals de vector $\mathfrak{A}$ van § 17, de eigenschap heeft, dat zijn divergentie nul is en waarvan de componenten F , G en H voldoen aan de vergelijkingen (2) § 17 noemen wij een *vector-potentiaal*.

Volgens definitie voldoet dus een vector-potentiaal aan de vergelijkingen

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\text{en} \quad \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin $\mathfrak{B}$ een eindige, doorlopende vector voorstelt,

die op oneindigen afstand nul is en die voldoet aan de voorwaarde $\text{div } \mathfrak{B} = 0$.

Wij zeggen, dat een vector $\mathfrak{B} (a, b, c)$ van een vector-potentiaal $\mathfrak{A} (F, G, H)$ wordt afgeleid, als de betrekking tusschen die vectoren wordt aangegeven door de vergelijking (2), of, wat hetzelfde is, door de vergelijkingen (2) § 17.

Een vector $\mathfrak{B}$, die van een vector-potentiaal is afgeleid, voldoet steeds aan de voorwaarde

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en dit is waar, onafhankelijk van de beperkende voorwaarde, $\text{div } \mathfrak{A} = 0$, die wij bij definitie aan de vector-potentiaal hebben opgelegd.

Omgekeerd kan een vector, die aan de voorwaarde (3) voldoet, altijd van een vector-potentiaal worden afgeleid (§ 17).

§ 20. De componenten van een vector-potentiaal worden volgens de vergelijkingen (9) van § 17 afgeleid van functiën u , v en w , die bepaald worden door de vergelijkingen (6) § 17.

De componenten van de vector-potentiaal bezitten dus, als functiën der coördinaten beschouwd, de eigenschappen der potentiaal-functie.

Beschouwt men u , v en w als de componenten van een vector $\mathfrak{C}$, dan kan men in plaats van (9) § 17 ook schrijven

$$\mathfrak{A} = \iiint \frac{\mathfrak{C}}{r} d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

of, volgens (6) § 17

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{curl } \mathfrak{B}}{r} d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

in welke vergelijkingen de integratie als een vector-sommatie moet worden opgevat.

De vector-potentiaal wordt dus afgeleid van den vector $\mathfrak{C}$ door integratie, op soortgelijke wijze als de scalaire potentiaal wordt afgeleid van de grootheid, die wij in § 15 door ϱ voorstelden.

Volgens (7) § 17 voldoet een vector $\mathfrak{C}$, waarvan een vector-potentiaal kan worden afgeleid, aan de voorwaarde

$$\text{div } \mathfrak{C} = 0.$$

Men zou een meer algemeene theorie van de vector-potentiaal verkrijgen, als men die grootheid definieerde door de vergelijking (1), waarin $\mathfrak{C}$ een willekeurigen vector zou voorstellen.

Volgens (1) § 18 zou dan $\text{div } \mathfrak{A}$ gelijk zijn aan de scalaire potentiaal van $\text{div } \mathfrak{C}$. De vergelijkingen (5) § 17 zouden overgaan in

$$\Delta F = - \left(\frac{dc}{dy} - \frac{db}{dz} \right) + \frac{d}{dx} \text{div } \mathfrak{A}, \text{ enz.}$$

De theorie zou hierdoor minder eenvoudig worden en zooals wij in § 24 zullen zien, zou die meer algemeene theorie voor de toepassingen van weinig belang zijn.

§ 21. De groote overeenkomst, die er bestaat tusschen de scalaire potentiaal en de vector-potentiaal komt ook zeer duidelijk uit, als men gebruik maakt van HAMILTON'S operator

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}.$$

De betrekking tusschen een vector $\mathfrak{F} = iX + jY + kZ$ en de scalaire potentiaal V , waarvan hij kan worden

afgeleid, wordt aangegeven door

$$\mathfrak{F} = -\nabla V. \quad (1)$$

Past men denzelfden operator toe op een vector

$$\mathfrak{A} = iF + jG + kH,$$

dan is het resultaat in het algemeen een quaternion. Men heeft namelijk

$$\begin{aligned} \nabla \mathfrak{A} &= \nabla (iF + jG + kH) \\ &= -\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) + i\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) + j\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) + k\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right) \\ &= -\operatorname{div} \mathfrak{A} + \operatorname{curl} \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Is $\mathfrak{A}$ een vector-potentiaal, dan is het scalaire gedeelte van dit quaternion nul en men heeft eenvoudig

$$\nabla \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \mathfrak{A},$$

dus volgens (2) § 19

$$\mathfrak{B} = \nabla \mathfrak{A} \quad (2)$$

De overeenkomst wordt alleen gestoord, doordien in (1) een minus-teeken voorkomt, dat in (2) ontbreekt.

§ 22. Volgens het behandelde in § 14 is de oppervlakte-integraal van een vector, die van een vector-potentiaal kan worden afgeleid, over een willekeurig oppervlak gelijk aan de lijn-integraal van de vector-potentiaal langs de grenskromme van het oppervlak. Wij zouden dit de hoofdeigenschap van de vector-potentiaal kunnen noemen.

§ 23. Evenals men de krachten, die van een scalaire potentiaal worden afgeleid, kan terugbrengen tot de werking van centra, omgekeerd evenredig met het kwadraat van den afstand, zoo kan men ook de krachten, die

van een vector-potentiaal worden afgeleid, terugbrengen tot werkingen op afstand, uitgaande van den vector $\mathfrak{C} (u, v, w)$ waarvan die potentiaal is afgeleid.

Denken wij ons de integraal $\iiint \frac{\mathfrak{C}}{r} d\tau$ gesplitst in elementen $\frac{\mathfrak{C}}{r} d\tau$, en veronderstellen wij, dat ieder element gelijk is aan een overeenkomstig element van $\mathfrak{A}$, dat wij $\mathfrak{A}' (F', G', H')$ noemen. Wij stellen dus

$$F' = \frac{u}{r} d\tau, G' = \frac{v}{r} d\tau, H' = \frac{w}{r} d\tau.$$

De componenten van de kracht $\mathfrak{B}' (a', b', c')$, die uitgaat van het element $\mathfrak{C} d\tau$, worden dan gevonden door deze waarden te substitueeren in

$$a' = \frac{dH'}{dy} - \frac{dG'}{dz}, \text{ enz.}$$

Natuurlijk is deze splitsing geheel kunstmatig; zij kan ons niets leeren omtrent de werkelijke oorzaak der voorhanden krachten. Blijkbaar zal echter door de resultante der aldus verkregen fictieve krachten de werking in ieder punt kunnen worden verklaard.

Noemen wij de richtings-cosinussen

van $\mathfrak{C}$: l_1, m_1, n_1 ;

van r : l_2, m_2, n_2 ;

dan is, als C de numerieke waarde van $\mathfrak{C}$ voorstelt,

$$H' = \frac{C n_1}{r} d\tau, G' = \frac{C m_1}{r} d\tau;$$

dus

$$a' = \frac{d}{dy} \frac{C n_1}{r} d\tau - \frac{d}{dz} \frac{C m_1}{r} d\tau,$$

of, daar

$$\frac{dr}{dy} = m_2 \text{ en } \frac{dr}{dz} = n_2$$

is,

$$\left. \begin{aligned} a' &= \frac{C d\tau}{r^2} (m_1 n_2 - m_2 n_1), \\ \text{zoo ook } b' &= \frac{C d\tau}{r^2} (n_1 l_2 - n_2 l_1), \\ \text{en } c' &= \frac{C d\tau}{r^2} (l_1 m_2 - l_2 m_1). \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

Uit deze vergelijkingen volgt

$$a' l_1 + b' m_1 + c' n_1 = 0,$$

en

$$a' l_2 + b' m_2 + c' n_2 = 0.$$

$\mathfrak{B}'$ staat dus loodrecht op het vlak, dat door $\mathfrak{C}$ en r gaat. Noemen wij de richtings-cosinussen van de normaal op die zijde van het vlak, waar een wenteling van $\mathfrak{C}$ naar r over een hoek $< 180^\circ$ als positieve draaiing gezien wordt, l , m en n . Zij verder ϑ de hoek tusschen $\mathfrak{C}$ en r , dan kan men in plaats van (1) schrijven

$$a' = C \frac{d\tau}{r^2} l \sin \vartheta,$$

$$b' = C \frac{d\tau}{r^2} m \sin \vartheta,$$

$$c' = C \frac{d\tau}{r^2} n \sin \vartheta.$$

Voor de grootte van $\mathfrak{B}'$ vindt men dus

$$B' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2} = C \frac{d\tau}{r^2} \sin \vartheta,$$

en de richting van $\mathfrak{B}'$ valt samen met die van bovengenoemde normaal.

De fictieve werking op afstand van het vector-element

$\mathfrak{C} d\tau$ heeft dus plaats volgens de wet, die door LAPLACE uit het experiment van BIOT en SAVART is afgeleid voor de werking van een stroomelement op een magneetpool.

Zij gegeven een kracht (of meer algemeen een vector) $\mathfrak{B}$, die van een vector-potentiaal kan worden afgeleid. Denkt men zich nu, dat van ieder vector-element $\mathfrak{C} d\tau$, waarin $\mathfrak{C} = \frac{1}{4\pi} \text{curl } \mathfrak{B}$, een werking uitgaat volgens de wet van LAPLACE, dan zal de resultante van deze fictieve krachten in ieder punt van het veld een vector zijn, die identiek is met den oorspronkelijk in dat punt gegeven vector $\mathfrak{B}$.

Bij de ontwikkeling van de theorie der scalaire potentiaal gaat men doorgaans uit van massa's m , die werken volgens de wet der algemeene gravitatie en men definieert dan de potentiaal door de uitdrukking $\Sigma \frac{m}{r}$. Zoo zou men ook de theorie van de vector-potentiaal kunnen afleiden door uit te gaan van, wat men kan noemen, vector-massa's $\mathfrak{C}$, die op afstand werken volgens de wet van LAPLACE en men zou dan die potentiaal kunnen definieeren door de uitdrukking $\Sigma \frac{\mathfrak{C}}{r}$.

Splitsing van een vector in twee componenten.

§ 24. Een willekeurige vector kan in het algemeen noch van een scalaire potentiaal, noch van een vector-potentiaal worden afgeleid. Zulk een vector kan echter, mits hij in de geheele ruimte eindig en doorlopend en op oneindigen afstand nul is, altijd gesplitst worden in twee componenten, waarvan de eene van een scalaire

potentiaal, de andere van een vector-potentiaal wordt afgeleid.

Zij $\mathfrak{F} (X, Y, Z)$ een gegeven vector.

Kiezen wij een vector $\mathfrak{F}_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ zoodanig dat

$$\text{curl } \mathfrak{F}_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$\text{div } \mathfrak{F}_1 = \text{div } \mathfrak{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Volgens § 15 is de vector $\mathfrak{F}_1$ door deze vergelijkingen volkomen bepaald en kan hij van een scalaire potentiaal worden afgeleid. Volgens (8) § 15 en (1) § 21 is

$$\mathfrak{F}_1 = -\frac{1}{4\pi} \nabla \iiint \frac{\text{div } \mathfrak{F}}{r} d\tau.$$

Kiezen wij een tweeden vector $\mathfrak{F}_2 (X_2, Y_2, Z_2)$ zoodanig dat

$$\text{div } \mathfrak{F}_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en

$$\text{curl } \mathfrak{F}_2 = \text{curl } \mathfrak{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

De vector $\mathfrak{F}_2$ is volgens § 17 door deze vergelijkingen volkomen bepaald. Hij kan van een vector-potentiaal worden afgeleid en men heeft volgens (2) § 20 en (2) § 21

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{1}{4\pi} \nabla \iiint \frac{\text{curl } \mathfrak{F}}{r} d\tau.$$

Stelt men nu, dat $\mathfrak{F}$ de resultante is van $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ en een derden vector $\mathfrak{F}' (X', Y', Z')$, dan is

$$X = X_1 + X_2 + X', \text{ enz.}$$

Uit de vergelijkingen (1) tot (4) volgt dan, als men ze voluit schrijft, onmiddellijk

$$\text{curl } \mathfrak{F}' = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en

$$\text{div } \mathfrak{F}' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Uit (5) volgt

$$\mathfrak{F}' = -\frac{1}{4\pi} \nabla \iiint \frac{\text{div } \mathfrak{F}'}{r} d\tau;$$

maar volgens (6) is $\text{div } \mathfrak{F}' = 0$, dus is $\mathfrak{F}'$ zelf nul.

Hiermede is de stelling, in het begin van deze paragraaf vermeld, bewezen.

§ 25. Brengt men deze stelling in verband met hetgeen bewezen is in § 15 en § 23, dan komt men tot een stelling, die op andere wijze is afgeleid door VASCHY (*Comptes Rendus*, t. 116, p. 1244 et 1355) en die wij als volgt kunnen formuleeren:

De verdeeling van een kracht (of meer algemeen van een vector) $\mathfrak{F}$ in de verschillende punten van een kracht-(vector-) veld is identiek met de verdeeling van de resultante van twee fictieve krachten $\mathfrak{F}_1$ en $\mathfrak{F}_2$, die op de volgende wijze gedefinieerd worden: $\mathfrak{F}_1$ zou ontstaan door een stelsel massa's, werkende op afstand volgens de wet van de algemeene gravitatie; $\mathfrak{F}_2$ zou ontstaan door een stelsel vector-massa's, werkende op afstand volgens de wet van LAPLACE. De dichtheid ϱ der eerste massa's en de dichtheid $\mathfrak{G}$ der vector-massa's worden gegeven door de vergelijkingen $4\pi\varrho = \text{div } \mathfrak{F}$ en $4\pi\mathfrak{G} = \text{curl } \mathfrak{F}$.

Natuurlijk heeft men hier aan het woord massa in het algemeen niet de gewone beteekenis te hechten. Om toe te lichten hoe men het in een algemeen geval kan interpreteren, kiezen wij met VASCHY het volgende voorbeeld.

Veronderstellen wij, dat in een lichaam een trillende beweging plaats heeft. De kracht, die op een tijdstip t op de eenheid van massa van het lichaam in een punt

$M(x, y, z)$ werkt, is gelijk aan de versnelling van dat punt. Als dus f, g en h de verplaatsingen van het punt M voorstellen, gerekend van den evenwichtsstand, dan zullen de componenten van de kracht zijn

$$X = \frac{d^2 f}{dt^2}, \quad Y = \frac{d^2 g}{dt^2}, \quad Z = \frac{d^2 h}{dt^2}.$$

Volgens de voorgaande stelling is deze kracht identiek met de resultante van de krachten, die in M zouden ontstaan door:

1^o. Een stelsel massa's, werkende op afstand volgens de wet van de algemeene gravitatie en waarvan de dichtheid ϱ in de verschillende punten gedefinieerd zou worden door de vergelijking

$$4\pi\varrho = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) = \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}.$$

2^o. Een stelsel vector-massa's, werkende op afstand volgens de wet van LAPLACE en waarvan de componenten u, v en w der dichtheid $\mathfrak{C}$ gedefinieerd zouden worden door

$$4\pi u = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz} \right),$$

en overeenkomstige uitdrukkingen voor $4\pi v$ en $4\pi w$.

Afgezien van den factor 4π , kunnen nu de dichtheden ϱ en $\mathfrak{C}$ als volgt geïnterpreteerd worden: ϱ zou zijn de versnelling der kubieke dilatatie ϑ van het lichaam in zijn verschillende punten en $\mathfrak{C}$ zou zijn de hoekversnelling der rotatie.

HOOFDSTUK III.

DE VECTOR-POTENTIALAAL VAN MAGNETEN.

De vector-potentiaal van een magnetisch element.

§ 26. De potentiaal van een magnetisch element in een punt P is

$$V = \frac{m ds}{r^2} \cos \epsilon, \dots \dots \dots (1)$$

waarin m de poolsterkte, ds de lengte van het element, r den voerstraal van het element naar het punt P en ϵ den hoek tusschen ds en r voorstelt (*Treatise*, Art. 383).

Plaatsen wij gemakshalve het element in den oorsprong en noemen wij de coördinaten van P : x , y en z , dan is

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

de richtings-cosinussen van r zijn

$$\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}.$$

Stellen wij het magnetische moment van het element $m ds \pm M$ en noemen wij de richtings-cosinussen van ds : λ , μ en ν , dan is

$$V = \frac{M}{r^2} \left(\lambda \frac{x}{r} + \mu \frac{y}{r} + \nu \frac{z}{r} \right) \\ = -M \left(\lambda \frac{d \frac{1}{r}}{dx} + \mu \frac{d \frac{1}{r}}{dy} + \nu \frac{d \frac{1}{r}}{dz} \right) \quad (2)$$

Dus, als wij de componenten van de magnetische kracht α , β en γ noemen,

$$\alpha = -\frac{dV}{dx} = M \left(\lambda \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + \mu \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dy} + \nu \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx dz} \right) \quad (3)$$

Hiervoor kunnen wij schrijven, ten gevolge van de bekende betrekking

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} = 0,$$

$$\alpha = M \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{d \frac{1}{r}}{dx} - \lambda \frac{d \frac{1}{r}}{dy} \right) - M \frac{d}{dz} \left(\lambda \frac{d \frac{1}{r}}{dz} - \nu \frac{d \frac{1}{r}}{dx} \right),$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{of} \quad \alpha = M \frac{d}{dy} \left(\frac{\lambda y - \mu x}{r^3} \right) - M \frac{d}{dz} \left(\frac{\nu x - \lambda z}{r^3} \right), \\ \text{zoo ook } \beta = M \frac{d}{dz} \left(\frac{\mu z - \nu y}{r^3} \right) - M \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda y - \mu x}{r^3} \right), \\ \text{en} \quad \gamma = M \frac{d}{dx} \left(\frac{\nu x - \lambda z}{r^3} \right) - M \frac{d}{dy} \left(\frac{\mu z - \nu y}{r^3} \right). \end{array} \right\} \quad (4)$$

Stelt men nu

$$\left. \begin{array}{l} F = M \frac{\mu z - \nu y}{r^3} = M \left(\nu \frac{d \frac{1}{r}}{dy} - \mu \frac{d \frac{1}{r}}{dz} \right), \\ G = M \frac{\nu x - \lambda z}{r^3} = M \left(\lambda \frac{d \frac{1}{r}}{dz} - \nu \frac{d \frac{1}{r}}{dx} \right), \\ H = M \frac{\lambda y - \mu x}{r^3} = M \left(\mu \frac{d \frac{1}{r}}{dx} - \lambda \frac{d \frac{1}{r}}{dy} \right), \end{array} \right\} \quad (5)$$

dan gaan de vergelijkingen (4) over in

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ \beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ \gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Door de vergelijkingen (5) resp. naar x , y en z te differentieëren en vervolgens op te tellen, vindt men

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

Wij kunnen dus F , G en H beschouwen als de componenten van een vector-potentiaal $\mathfrak{A}$, waarvan de magnetische kracht $\mathfrak{H}$ (α , β , γ) volgens de vergelijkingen (6) wordt afgeleid.

Om de richting en de grootte van $\mathfrak{A}$ te vinden, denken wij ons een vlak door ds en r en richten een loodlijn op die zijde van het vlak op, waar een wenteling van ds naar r over een hoek ϵ als positieve draaiing gezien wordt. Noemen wij de hoeken, die de loodlijn met de assen maakt, l , m en n , dan is

$$\cos l = \frac{\mu \frac{z}{r} - \nu \frac{y}{r}}{\sin \epsilon}, \text{ enz.}$$

Voor de vergelijkingen (5) kan men dus schrijven

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{M}{r^2} \sin \epsilon \cos l, \\ G &= \frac{M}{r^2} \sin \epsilon \cos m, \\ H &= \frac{M}{r^2} \sin \epsilon \cos n. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

De numerieke waarde van de vector-potentiaal van een magnetisch element, in een gegeven punt, is dus gelijk aan het magnetische moment van het element, gedeeld door het vierkant van den voerstraal van het element naar het punt en vermenigvuldigd met den sinus van den hoek tusschen de as van het element en den voerstraal. De richting van de vector-potentiaal is die, waarin een gewone schroef, die loodrecht staat op het vlak door het element en den voerstraal, zich zou bewegen, als zij gedraaid werd van de positieve richting van het element naar de positieve richting van den voerstraal over een hoek kleiner dan 180° . Of anders gezegd: Voor een oog, dat in de positieve richting van het element ziet, is de vector-potentiaal getrokken in negatieven zin, dat is in den zin, waarin zich de wijzers van een uurwerk bewegen.

De vector-potentiaal is nul in ieder punt van het verlengde der as van het magnetische element. Stellen wij ons een bol voor, waarvan het middelpunt samenvalt met dat van het element en noemen wij de punten, waarin het verlengde van de as den bol snijdt, de polen van den bol, dan is de vector-potentiaal nul in de polen en zij heeft gelijke numerieke waarde in alle punten van twee overeenkomstige parallellen, terwijl die waarde haar maximum bereikt in den aequator. Dus juist tegengesteld aan de scalaire potentiaal. De richting van de vector-potentiaal in ieder punt van den bol valt samen met de raaklijn van den parallel door dat punt.

Voor een eenvoudig geval kunnen wij ons hier gemakkelijk overtuigen van de waarheid van de hoofdeigenschap

der vector-potentiaal (§ 22). Voor ieder punt van een parallel, waarvan de sferische afstand tot één der polen ϵ is, is de numerieke waarde van de vector-potentiaal constant $= \frac{M}{r^2} \sin \epsilon$. De lijn-integraal van $\mathfrak{A}$ langs den parallel is dus

$$\frac{M}{r^2} \sin \epsilon \cdot 2 \pi r \sin \epsilon = \frac{2 \pi M}{r} \sin^2 \epsilon.$$

De magnetische kracht in de richting van den straal is

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{2 M}{r^3} \cos \epsilon.$$

De oppervlakte-integraal van de magnetische kracht over het bolsegment, dat door den parallel begrensd wordt, is dus

$$\int_0^\epsilon \frac{2 M}{r^3} \cos \epsilon \cdot 2 \pi r^2 \sin \epsilon d\epsilon = \frac{2 \pi M}{r} \sin^2 \epsilon.$$

De waarde van de lijn-integraal is derhalve gelijk aan die van de oppervlakte-integraal.

De scalaire potentiaal van een magneet.

§ 27. Door de intensiteit der magnetisatie van een magnetisch element verstaat men de verhouding van het magnetische moment van het element tot zijn volume. Noemen wij die intensiteit $\mathfrak{J}$, haar rechthoekige componenten A , B en C en haar richtings-cosinussen λ , μ en ν , dan is, als I de numerieke waarde van $\mathfrak{J}$ voorstelt,

$$A = I\lambda, B = I\mu, C = I\nu.$$

Het magnetische moment van een volume-element $dx' dy' dz'$ van een magneet is $I dx' dy' dz'$ en de

potentiaal van dat element in een punt (x, y, z) is volgens (2) § 26.

$$\begin{aligned} dV &= -I \left(\lambda \frac{d \frac{1}{r}}{dx} + \mu \frac{d \frac{1}{r}}{dy} + \nu \frac{d \frac{1}{r}}{dz} \right) dx' dy' dz' \\ &= - \left(A \frac{d \frac{1}{r}}{dx} + B \frac{d \frac{1}{r}}{dy} + C \frac{d \frac{1}{r}}{dz} \right) dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Voor de potentiaal van den geheelen magneet in het punt (x, y, z) heeft men dus, in aanmerking nemende dat

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dx} = - \frac{d \frac{1}{r}}{dx'}, \text{ enz.}$$

is,

$$V = \iiint \left(A \frac{d \frac{1}{r}}{dx'} + B \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} + C \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} \right) dx' dy' dz', \quad (1)$$

waarin de integratie over het volume van den magneet moet uitgestrekt worden.

Door de uitdrukking in het tweede lid bij gedeelten te integreeren volgens formule (1) § 11, verkrijgt men

$$V = \iint \frac{lA + mB + nC}{r} dS - \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{dA}{dx'} + \frac{dB}{dy'} + \frac{dC}{dz'} \right) dx' dy' dz', \quad (2)$$

waarin l , m en n de richtings-cosinussen van de uitwendige normaal op het oppervlak S van den magneet voorstellen en de eerste integraal over het oppervlak, de tweede over het volume van den magneet moet genomen worden.

Wij kunnen echter de integraal uit (1) ook over de geheele ruimte uitstrekken, daar buiten den magneet

A , B en C nul zijn. Door dan bij gedeelten te integreeren, heeft men volgens (2) § 11

$$V = - \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{dA}{dx'} + \frac{dB}{dy'} + \frac{dC}{dz'} \right) dx' dy' dz'. \quad (3)$$

De waarde van deze integraal is natuurlijk niet dezelfde als die van de overeenkomstige uitdrukking in (2). Zal deze wijze van integreeren geoorloofd zijn, dan mag de intensiteit $\mathfrak{S}$ aan de oppervlakte van den magneet niet discontinu veranderen. Wij moeten dus aannemen, dat er een dunne overgangslaag bestaat, waarin de waarde van $\mathfrak{S}$ wel zeer snel, maar continu van I tot nul overgaat. Of dit in werkelijkheid het geval is of niet, doet niet ter zake; men kan de dikte van de overgangslaag altijd zoo klein kiezen, dat men niet in strijd komt met eenig experimenteel vastgesteld feit. Die overgangslaag zal, in het algemeen, een eindige bijdrage geven tot de integraal in (3) en deze bijdrage is gelijk aan de oppervlakte-integraal in (2).

Het voordeel van deze integratie bij gedeelten over de geheele ruimte bestaat hierin, dat de herleidingen er zeer door vereenvoudigd worden, zooals wij in § 30 zullen zien.

Voor de x -componente van de magnetische kracht vindt men, als de integratie over de geheele ruimte uitgestrekt wordt,

$$\alpha = - \frac{dV}{dx} = \iiint \frac{d}{dx} \frac{1}{r} \left(\frac{dA}{dx'} + \frac{dB}{dy'} + \frac{dC}{dz'} \right) dx' dy' dz'. \quad (4)$$

De vector-potentiaal van een magneet.

§ 28. Voor de x -componente van de vector-potentiaal van het element $dx' dy' dz'$ in het punt (x, y, z) heeft men volgens (5) § 26

$$\begin{aligned} I & \left(\nu \frac{d \frac{1}{r}}{dy} - \mu \frac{d \frac{1}{r}}{dz} \right) dx' dy' dz' \\ &= \left(C \frac{d \frac{1}{r}}{dy} - B \frac{d \frac{1}{r}}{dz} \right) dx' dy' dz' \\ &= \left(B \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} - C \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} \right) dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

De componenten van de vector-potentiaal voor den geheelen magneet zijn dus

$$\left. \begin{aligned} F &= \iiint \left(B \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} - C \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} \right) dx' dy' dz', \\ G &= \iiint \left(C \frac{d \frac{1}{r}}{dx'} - A \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} \right) dx' dy' dz', \\ H &= \iiint \left(A \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} - B \frac{d \frac{1}{r}}{dx'} \right) dx' dy' dz', \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

waarin de integralen over het volume van den magneet moeten worden genomen.

Blijkens de afleiding in § 26 zijn de componenten van de magnetische kracht $\mathfrak{S}$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ \beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ \gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

§ 29. De laatste formules gelden echter alleen voor punten buiten den magneet. Ligt het punt (x, y, z) binnen den magneet, dan gaat bovenstaande afleiding niet meer door. Bij de vervorming der uitdrukkingen voor de magnetische kracht van een magnetisch element is namelijk in § 26 gebruik gemaakt van de betrekking

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz^2} = 0,$$

en dit is voor oneindig dicht bij het punt (x, y, z) gelegen elementen van den magneet niet geoorloofd.

Het is trouwens a priori duidelijk, dat de magnetische kracht in een magneet niet van een vector-potentiaal kan worden afgeleid, daar die kracht, voor inwendige punten, niet voldoet aan de voorwaarde $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$.

De gedachtengang van MAXWELL (*Treatise*, Art. 406) schijnt nu de volgende te zijn. Men kan de vector-potentiaal gedefinieerd blijven beschouwen door de vergelijkingen (1) § 28, ook voor inwendige punten; de grootheden $\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}$, enz. geven dan echter niet meer de componenten van de magnetische kracht aan.

MAXWELL noemt nu die grootheden a , b en c en hij

geeft de volgende herleiding:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\
 &= \iiint \left\{ A \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy' dy} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz' dz} \right) - B \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx' dy} - C \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx' dz} \right\} dx' dy' dz' \\
 &= -\frac{d}{dx} \iiint \left(A \frac{d \frac{1}{r}}{dx'} + B \frac{d \frac{1}{r}}{dy'} + C \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} \right) dx' dy' dz' \\
 &\quad - \iiint A \left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx'^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dy'^2} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dz'^2} \right) dx' dy' dz'.
 \end{aligned}$$

Verder heet het dan: de eerste term van het laatste lid is blijkbaar $-\frac{dV}{dx}$ of α . De grootheid onder het integraal-teeken in den tweeden term is nul voor alle volume-elementen, behalve voor het element, dat het punt (x, y, z) bevat. Als (A) de waarde voorstelt van A in het punt (x, y, z) , dan is de waarde van den tweeden term $4\pi(A)$.

$$\text{Dus} \quad a = \alpha + 4\pi(A).$$

POINCARÉ merkt op (*Électricité et Optique* II, p. 21), dat deze vergelijking door MAXWELL niet bewezen is. Wij doen misschien beter met te zeggen, dat het bewijs slechts is aangeduid.

Beschouwen wij één der voorkomende integralen b. v.

$$\iiint B \frac{d \frac{1}{r}}{dz'} d\tau$$

en de door differentiatie onder het integraal-teeken daaruit afgeleide integraal

$$\iiint B \frac{d^2}{dz' dz} \frac{1}{r} d\tau.$$

Het is gemakkelijk te bewijzen, dat de eerste integraal eindig en bepaald blijft, ook wanneer het punt (x, y, z) binnen den magneet ligt en dus $\frac{1}{r}$ oneindig groot wordt voor oneindig dichtbij gelegen elementen $d\tau$, maar dat dit met de tweede integraal niet het geval is.

Voert men pool-coördinaten in en stelt men

$$x' = x + r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$y' = y + r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$z' = z + r \cos \vartheta,$$

dan gaan beide integralen over in (zie b. v. RIEMANN, *Schwere, Electr. und Magn.* § 6)

$$-\iiint B \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

en

$$-\iiint B \frac{1 + 3 \cos^2 \vartheta}{r} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

en het blijkt, dat de tweede integraal wegens de oneindig groote elementen, die onder het integraal-teeken voorkomen en die gedeeltelijk positief, gedeeltelijk negatief zijn, onbepaald is.

Lette men hierop niet, dan zou men gemakkelijk bewijzen, dat, als V de potentiaal van een massa voorstelt, $\triangle V = 0$ is, ook voor een inwendig punt, wat niet waar is.

Er zou dus nog moeten bewezen worden, dat de uitdrukkingen, die in de herleiding van MAXWELL voorkomen,

een bepaalde waarde hebben. De grensbepalingen, die hiervoor zouden noodig zijn, zullen wij vermijden door, in navolging van POINCARÉ, de herleidingen zoo in te richten, dat de tweede afgeleiden van $\frac{1}{r}$ onder het integraal-teeken niet voorkomen.

§ 30. Als men de integralen in de vergelijkingen (1) § 28 over de geheele ruimte uitgestrekt denkt en bij gedeelten integreert, dan gaan die vergelijkingen over in

$$\left. \begin{aligned} F &= \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{dC}{dy'} - \frac{dB}{dz'} \right) d\tau, \\ G &= \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{dA}{dz'} - \frac{dC}{dx'} \right) d\tau, \\ H &= \iiint \frac{1}{r} \left(\frac{dB}{dx'} - \frac{dA}{dy'} \right) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

Men heeft dus

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \iiint \frac{dC}{dy'} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} d\tau - \iiint \frac{dB}{dz'} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} d\tau, \\ \frac{dG}{dy} &= \iiint \frac{dA}{dz'} \frac{d}{dy} \frac{1}{r} d\tau - \iiint \frac{dC}{dx'} \frac{d}{dy} \frac{1}{r} d\tau, \\ \frac{dH}{dz} &= \iiint \frac{dB}{dx'} \frac{d}{dz} \frac{1}{r} d\tau - \iiint \frac{dA}{dy'} \frac{d}{dz} \frac{1}{r} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

en soortgelijke uitdrukkingen voor $\frac{dF}{dy}$, enz.

Voor de integraal

$$\iiint \frac{dC}{dy'} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} d\tau$$

kan men schrijven, door eerst bij gedeelten ten opzichte

van x' en vervolgens bij gedeelten ten opzichte van y' te integreeren

$$\begin{aligned} \iiint \frac{dC}{dy'} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} d\tau &= - \iiint \frac{dC}{dy'} \frac{d}{dx'} \frac{1}{r} d\tau = \iiint \frac{d^2 C}{dy' dx'} \frac{1}{r} d\tau \\ &= - \iiint \frac{dC}{dx'} \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} d\tau = \iiint \frac{dC}{dx'} \frac{d}{dy} \frac{1}{r} d\tau. \end{aligned}$$

Deze integraal blijft, zooals boven reeds werd opgemerkt, bepaald, ook voor een inwendig punt. Zoo ook voor de andere integralen.

Men heeft dus:

$$\begin{aligned} a &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ &= \iiint \left(\frac{dB}{dx'} - \frac{dA}{dy'} \right) \frac{d}{dy} \frac{1}{r} d\tau - \iiint \left(\frac{dA}{dz'} - \frac{dC}{dx'} \right) \frac{d}{dz} \frac{1}{r} d\tau \\ &= \iiint \left(\frac{dB}{dy'} + \frac{dC}{dz'} \right) \frac{d}{dx} \frac{1}{r} d\tau - \iiint \frac{dA}{dy'} \frac{d}{dy} \frac{1}{r} d\tau - \iiint \frac{dA}{dz'} \frac{d}{dz} \frac{1}{r} d\tau \\ &= \iiint \left(\frac{dA}{dx'} + \frac{dB}{dy'} + \frac{dC}{dz'} \right) \frac{d}{dx} \frac{1}{r} d\tau \\ &\quad - \iiint \left(\frac{dA}{dx'} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} + \frac{dA}{dy'} \frac{d}{dy} \frac{1}{r} + \frac{dA}{dz'} \frac{d}{dz} \frac{1}{r} \right) d\tau. \end{aligned}$$

De eerste term van het laatste lid dezer vergelijking is volgens (4) § 27 niets anders dan $-\frac{dV}{dx}$ of a .

Om de beteekenis van den tweeden term te bepalen, stellen wij:

$$P = \iiint \frac{A}{r} d\tau,$$

dan is

$$\Delta P = -4\pi A,$$

en

$$\frac{dP}{dx} = \iiint A \frac{d}{dx} \frac{1}{r} d\tau = - \iiint A \frac{d}{dx'} \frac{1}{r} d\tau = \iiint \frac{dA}{dx'} \frac{1}{r} d\tau.$$

Dus

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \iiint \frac{dA}{dx'} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} d\tau.$$

Soortgelijke uitdrukkingen vindt men voor

$$\frac{d^2 P}{dy^2} \text{ en } \frac{d^2 P}{dz^2}.$$

De tweede term is dus gelijk aan $-\Delta P$ of $4\pi A$.

Men vindt dus ten slotte

$$\left. \begin{array}{l} \text{zoo ook} \quad a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \alpha + 4\pi A, \\ b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} = \beta + 4\pi B, \\ \text{en} \quad c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = \gamma + 4\pi C. \end{array} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

Door de vergelijkingen (2) op te tellen, vindt men

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0. \quad \dots \quad (4)$$

Hiermede is bewezen dat, ook voor een inwendig punt, de grootheden F , G en H uit de vergelijkingen (1) van § 28 als de componenten van een vector-potentiaal kunnen worden beschouwd.

De betrekking (4) wordt ook gevonden, als men, zooals MAXWELL aangeeft, de vergelijkingen (1) § 28

respectievelijk naar x , y en z differentieert en dan optelt. Wel moet men dan onder het integraal-teeken differentieeren; dit heeft echter hier geen bezwaar, daar de termen twee aan twee tegen elkander wegvallen. Wij moeten namelijk aannemen, dat die termen, al blijft de waarde onbepaald, ook bij de limiet aan elkander gelijk blijven.

§ 31. De kracht $\mathfrak{B}$, waarvan a , b en c de componenten zijn, is het eerst beschouwd door W. THOMSON en door hem genoemd de *magnetische kracht volgens de electro-magnetische definitie* (§ 39). De kracht $\mathfrak{H}$, die van een scalaire potentiaal kan worden afgeleid, wordt door hem genoemd de *magnetische kracht volgens de polaire definitie*. Door MAXWELL wordt $\mathfrak{B}$ de *magnetische inductie* en $\mathfrak{H}$ de *magnetische kracht* genoemd.

De vectoren $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{I}$ hangen van elkander af volgens de vector-vergelijking

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{I}.$$

Denkt men zich in een magneet een nauwe spleet en in die spleet een magneetpool van de eenheid van sterkte geplaatst, dan zal de kracht, waarmede de magneet op die pool werkt, gelijk zijn aan $\mathfrak{H}$, als de spleet valt in de richting van de magnetisatie en gelijk $\mathfrak{B}$, als de spleet loodrecht is op die richting (*Treatise*, Art. 398—399).

Ontstaat het magnetisme geheel door influentie, dan is $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ (*Treatise*, Art. 428). Deze coëfficiënt μ wordt door MAXWELL de *magnetische inductieve capaciteit*, of ook de *coëfficiënt der magnetische inductie*; door THOMSON de *permeabiliteit* van de stof genoemd.

De componenten van de magnetische inductie voldoen altijd aan de voorwaarde

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \text{ (Treatise, Art. 403).}$$

Voor punten buiten een magneet of liever voor punten, waar de magnetische polarisatie nul is, is er geen verschil tusschen de magnetische kracht en de magnetische inductie. De vergelijkingen (3) van § 30 gelden dus algemeen, zoowel voor in- als uitwendige punten.

De vector $\mathfrak{A}$ wordt daarom door MAXWELL de *vector-potentiaal van de magnetische inductie* genoemd.

§ 32. Wij zullen nu door een eenvoudig voorbeeld laten zien, hoe men de formules (1) van § 28 kan toepassen om de vector-potentiaal van een magneet te bepalen.

Beschouwen wij één der voorkomende integralen, b v.

$$\iiint B \frac{d}{dz'} \frac{1}{r} dx' dy' dz'.$$

Voor deze integraal kunnen wij schrijven

$$-\frac{d}{dz} \iiint \frac{B}{r} dx' dy' dz'.$$

Laat nu P de potentiaal voorstellen van een massa, die met de dichtheid B over het volume van den magneet is verbreid, dan gaat de laatste uitdrukking over in $-\frac{dP}{dz}$.

Kent men dus de intensiteit van de magnetisatie $\mathfrak{S}$ (A, B, C) voor ieder punt van een magneet in grootte en richting en kent men ook de potentialen van massa-

verdeelingen over het volume van den magneet met de dichtheden A , B , C , dan kan de vector-potentiaal van den magneet door differentiatie gevonden worden.

Zij geven een bol, zoodanig gemagnetiseerd, dat de magnetisatie in grootte en richting constant is.

Nemen wij het middelpunt van den bol als oorsprong van het coördinatenstelsel en de x -as in de richting van de magnetisatie, dan is

$$A = I, B = 0, C = 0.$$

Dus

$$F = 0,$$

$$G = - \iiint A \frac{d}{dz'} \frac{1}{r} d\tau = \frac{d}{dz} \iiint \frac{I}{r} d\tau,$$

$$H = \iiint A \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} d\tau = - \frac{d}{dy} \iiint \frac{I}{r} d\tau.$$

De potentiaal van een homogenen bol met de dichtheid I is, als wij den straal a noemen, voor een uitwendig punt op een afstand r van het middelpunt

$$V_u = \frac{4}{3} \pi I \frac{a^3}{r},$$

en voor een inwendig punt

$$V_i = \frac{2}{3} \pi I (3a^2 - r^2).$$

(Zie b. v. RIEMANN, l. c. p. 17).

Dus is voor een uitwendig punt

$$G = \frac{dV_u}{dz} = - \frac{4}{3} \pi I \frac{a^3}{r^3} z,$$

$$H = - \frac{dV_u}{dy} = \frac{4}{3} \pi I \frac{a^3}{r^3} y.$$

De numerieke waarde van de vector-potentiaal is dus

$$\frac{4}{3} \pi I \frac{a^3}{r^3} \sqrt{(z^2 + y^2)} = \frac{4}{3} \pi I \frac{a^3}{r^2} \sin \epsilon = \frac{M}{r^2} \sin \epsilon,$$

als wij den hoek, dien r met de x -as maakt, ϵ en het magnetische moment van den bol M noemen.

Deze uitdrukking is dezelfde als die, welke wij in § 26 vonden voor de vector-potentiaal van een magnetisch element en het is gemakkelijk in te zien, dat ook de richting van $\mathfrak{A}$ door den daar gegeven regel wordt bepaald.

Voor de componenten van de magnetische kracht vindt men

$$\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \frac{4}{3} \pi I a^3 \frac{x^2 - r^2}{r^5},$$

$$\beta = -\frac{dH}{dx} = 4 \pi I a^3 \frac{xy}{r^5},$$

$$\gamma = \frac{dG}{dx} = 4 \pi I a^3 \frac{xz}{r^5}.$$

Voor een inwendig punt is

$$G = \frac{dV_i}{dz} = -\frac{4}{3} \pi I z,$$

$$H = -\frac{dV_i}{dy} = \frac{4}{3} \pi I y.$$

De numerieke waarde van $\mathfrak{A}$ is dus

$$\frac{4}{3} \pi I \sqrt{(z^2 + y^2)} = \frac{4}{3} \pi I r \sin \epsilon.$$

Voor de componenten van de magnetische inductie vindt men

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} = \frac{8}{3} \pi I = -\frac{4}{3} \pi I + 4 \pi I,$$

$$b = -\frac{dH}{dx} = 0,$$

$$c = \frac{dG}{dx} = 0.$$

De totale magnetische inductie (*flux of induction*), die door den grooten cirkel van den bol, loodrecht op de richting van de magnetisatie, gaat, is dus

$$\frac{8}{3} \pi I \cdot \pi a^2 = \frac{8}{3} \pi^2 a^2 I.$$

Voor de lijn-integraal van de vector-potentiaal langs den omtrek van dien cirkel vindt men, zooals behoort, dezelfde waarde.

Wij merken nog op, dat de gevonden waarden voor de vector-potentiaal voor in- en uitwendige punten aan de oppervlakte van den bol continu in elkander overgaan.

De vector-potentiaal van een magnetische schaal.

§ 33. Een dun vlak of gebogen plaatje, gemagnetiseerd in een richting loodrecht op de oppervlakte, zoodanig dat het produkt van de intensiteit der magnetisatie en van de dikte van het plaatje overal constant is, noemt men een *magnetische schaal*. De constante $\varphi = Ih$, waarin h de dikte van het plaatje en I de intensiteit der magnetisatie voorstelt, wordt de *magnetische sterkte* van de schaal genoemd.

Een magneet, die kan verdeeld worden in schalen (*lamellen*), die of gesloten zijn, of haar grenskrommen

op het oppervlak van den magneet hebben, noemt men een *lamellairen* magneet.

De intensiteit der magnetisatie van een lamellairen magneet voldoet aan de voorwaarde $\text{curl } \mathfrak{S} = 0$.

Stellen wij ons namelijk voor, dat uit een vast punt een kromme wordt getrokken naar een punt (x', y', z') binnen den magneet. De som van de sterkten der schalen, die door de kromme doorsneden worden, noemen wij φ . Brengen wij hierbij de sterkte van een schaal als positief of negatief in rekening, naargelang de schaal door de kromme van de negatieve naar de positieve zijde of in de tegenovergestelde richting doorsneden wordt, dan is het duidelijk dat deze grootheid φ onafhankelijk is van den vorm der kromme tusschen de beide punten. Zij heeft een constante waarde op de oppervlakte van een zelfde schaal, maar verandert van de eene schaal tot de andere. De richting der magnetisatie is overal loodrecht op de oppervlakte der schalen en de intensiteit der magnetisatie is in ieder punt omgekeerd evenredig met den normalen afstand dn van twee opeenvolgende schalen, dus is

$$I = \frac{d\varphi}{dn}.$$

Hieruit volgt:

$$A = \frac{d\varphi}{dx'}, B = \frac{d\varphi}{dy'}, C = \frac{d\varphi}{dz'} \quad \dots \quad (1)$$

Substitueert men deze waarden voor A , B en C in de vergelijkingen (1) § 28, dan vindt men voor de x -componente van de vector-potentiaal van een lamellairen magneet

$$F = \iiint \left(\frac{d\varphi}{dy'} \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} - \frac{d\varphi}{dz'} \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} \right) d\tau \quad \dots \quad (2)$$

Deze volume-integraal kan veranderd worden in een oppervlakte-integraal over het oppervlak S van den magneet.

Door partieel naar z' te integreeren, vindt men voor de eerste integraal van (2)

$$\iiint \frac{d\varphi}{dy'} \frac{d}{dz'} \frac{1}{r} d\tau = \iint \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dy'} \cos n dS - \iiint \frac{1}{r} \frac{d^2\varphi}{dy' dz'} d\tau.$$

Evenzoo voor de tweede integraal door integratie naar y'

$$\iiint \frac{d\varphi}{dz'} \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} d\tau = \iint \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dz'} \cos m dS - \iiint \frac{1}{r} \frac{d^2\varphi}{dy' dz'} d\tau.$$

Dus

$$F = \iint \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi}{dy'} \cos n - \frac{d\varphi}{dz'} \cos m \right) dS. \quad (3)$$

Of, volgens (4) § 12

$$F = \iint \varphi \left(\frac{d}{dz'} \frac{1}{r} \cos m - \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} \cos n \right) dS. \quad (4)$$

Voor een magnetische schaal is φ constant, dus

$$F = \varphi \iint \left(\frac{d}{dz'} \frac{1}{r} \cos m - \frac{d}{dy'} \frac{1}{r} \cos n \right) dS. \quad (5)$$

Deze oppervlakte-integraal kan veranderd worden in een lijn-integraal langs de grenskromme s van de schaal.

Stelt men in (3) § 12: $v = 1$, $u = \frac{1}{r}$ en vervangt men x', y', z' door x, y, z , dan vindt men

$$\left. \begin{array}{l} F = \varphi \int \frac{1}{r} \frac{dx}{ds} ds, \\ \text{zoo ook} \quad G = \varphi \int \frac{1}{r} \frac{dy}{ds} ds, \\ \text{en} \quad H = \varphi \int \frac{1}{r} \frac{dz}{ds} ds. \end{array} \right\} \quad (6)$$

In plaats van deze vergelijkingen kan men schrijven

$$\mathfrak{A} = \varphi \int \frac{d\mathfrak{s}}{r}.$$

Uit deze vergelijking volgt de volgende eenvoudige constructie voor de vector-potentiaal van een magnetische schaal van de eenheid van sterkte in een punt P .

Laat een punt D zich bewegen langs de grenskromme van de schaal met een snelheid, waarvan de numerieke waarde in ieder punt gelijk is aan den afstand van dat punt tot P . Laat een tweede punt E uit P vertrekken en zich bewegen met een snelheid, waarvan de richting op ieder oogenblik evenwijdig is aan die van D en waarvan de grootte voortdurend gelijk is aan de eenheid. Laat E in R gekomen zijn, als D de grenskromme van de schaal éénmaal doorloopen heeft. De lijn PR stelt dan in richting en grootte de vector-potentiaal van de schaal voor (*Treatise*, Art. 422).

HOOFDSTUK IV.

DE VECTOR-POTENTIALAAL VAN ELECTRISCHE STROOMEN.

Het electromagnetisme.

§ 34. De bekende onderzoekingen van BIOT en SAVART, betreffende het magnetische veld in de nabijheid van een oneindig langen rechtlijnigen stroomgeleider, zijn door JOUBIN uitgebreid voor het magnetische veld binnen den geleider (*Comptes Rendus*, t. 110, p. 231).

Een constante stroom werd geleid door een langen wijden glazen cylinder, gevuld met een oplossing van kopersulfaat. Een zeer kleine magneet, van een spiegel voorzien en aan een coondraad in de vloeistof opgehangen, veroorloofde de magnetische kracht ook binnen den stroomgeleider te bepalen.

Dit onderzoek leidde tot de volgende resultaten:

1°. Zoowel binnen als buiten den geleider zijn de krachtlijnen cirkels, wier as samenvalt met de as van den cylinder. De richting van de magnetische kracht wordt verder door den regel van AMPÈRE bepaald.

2°. Binnen den cylinder neemt de magnetische kracht,

die in de as nul is, toe, naarmate men zich van de as verwijdt en wel evenredig met den afstand tot de as.

3^o. De magnetische kracht verandert continu, als men de oppervlakte van den stroomgeleider passeert.

4^o. Buiten den cylinder neemt de magnetische kracht af omgekeerd evenredig met den afstand tot de as. Die kracht is dezelfde, alsof de geheele stroom in de as van den cylinder geconcentreerd is.

Daar verder de magnetische kracht evenredig is met de stroomsterkte, wordt aan 2^o. en 4^o. voldaan, als men voor de grootte van die kracht stelt, binnen den geleider:

$$k i' \frac{\pi r^2}{r} = k i' \pi r,$$

buiten den geleider:

$$k i' \frac{\pi a^2}{r} = \frac{k i}{r}$$

In deze uitdrukkingen is a de straal van den geleider, r de afstand van het punt, waar de magnetische kracht bepaald wordt, tot de as, i' de stroomdichtheid, $i = \pi a^2 i'$ de stroomsterkte en k een constante, die alleen van de eenheid van stroomsterkte afhangt.

Door deze waarden wordt ook aan 3^o. voldaan. Op een afstand δ van de oppervlakte van den geleider is namelijk de magnetische kracht

$$\text{binnen:} \quad k i' \pi (a - \delta),$$

$$\text{buiten:} \quad k i' \frac{\pi a^2}{a + \delta}$$

en deze uitdrukkingen naderen tot dezelfde limiet, als δ tot nul nadert.

Voor de componenten der magnetische kracht vindt men volgens 1^o., als men de z-as laat samenvallen met de as van den cylinder, binnen den geleider:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -k i' \pi r \cdot \frac{y}{r} = -k \pi i' y, \\ \beta &= k i' \pi r \cdot \frac{x}{r} = k \pi i' x, \\ \gamma &= 0; \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

buiten den geleider:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{k i}{r} \cdot \frac{y}{r} = -k i \frac{y}{r^2}, \\ \beta &= \frac{k i}{r} \cdot \frac{x}{r} = k i \frac{x}{r^2}, \\ \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

Al deze resultaten zijn ook af te leiden uit het eenvoudige experiment van BIOT en SAVART, als men den stroom in oneindig dunne evenwijdige stroomdraden gesplitst denkt en als men dan aanneemt, dat de magnetische werking van die stroomdraden binnen en buiten den geleider volgens dezelfde wet plaats heeft (Zie JOUBIN, l. c.). Wij geven er de voorkeur aan, de vergelijkingen (1) en (2) rechtstreeks als het resultaat van het experiment voor te stellen.

§ 35. Door op het krachtveld, dat boven werd beschreven, de stelling van § 25 toe te passen, kan men de geheele theorie van het electromagnetisme op zeer eenvoudige wijze afleiden. Het denkbeeld om het electromagnetisme op deze wijze te behandelen ontleenen wij aan VASCHY (*Comptes Rendus*, t. 116, p. 1437).

Volgens die stelling kan men de magnetische kracht $\mathfrak{H}$ ontbinden in een component $\mathfrak{H}_1$, die zou ontstaan door een stelsel massa's, werkende op afstand volgens de wet van de algemeene gravitatie en in een component $\mathfrak{H}_2$, die zou ontstaan door een stelsel vector-massa's, werkende op afstand volgens de wet van LAPLACE. De eerste component kan afgeleid worden van de éénwaardige scalaire potentiaal

$$\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div } \mathfrak{H}}{r} d\tau;$$

de tweede component van de vector-potentiaal

$$\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{curl } \mathfrak{H}}{r} d\tau.$$

Uit (1) en (2) § 34 vindt men, binnen den geleider:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} &= 0, \\ \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 0, \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0, \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 2k\pi i'; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

buiten den geleider:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} &= 0 \\ \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 0, \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 0, \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

In het geheele veld is dus $\text{div } \mathfrak{H} = 0$ en dus is ook $\mathfrak{H}_1 = 0$. De magnetische kracht $\mathfrak{H}$ valt derhalve samen met de component $\mathfrak{H}_2$.

Hieruit volgt, dat de magnetische kracht, zoowel binnen als buiten den geleider, van een vector-potentiaal kan worden afgeleid.

Buiten den geleider is $\text{curl } \mathfrak{H} = 0$. Voor uitwendige punten kan dus de magnetische kracht ook van een scalaire potentiaal worden afgeleid. Daar echter $\text{div } \mathfrak{H}$ overal nul is, kan die potentiaal niet éénwaardig zijn. Er is dus ook geen verdeling van magnetische massa's denkbaar, die, wat de magnetische werking betreft, volkomen identiek zou zijn met den electrischen stroom.

Dat de potentiaal meerwaardig is, hangt hiermede samen, dat de ruimte buiten den geleider voor de magnetische kracht tweevoudig samenhangend is.

De lijn-integraal van $\mathfrak{H}$ langs een kromme, die den geleider omsluit, is $\pm \frac{k i}{r} \cdot 2 \pi r = \pm 2 k \pi i$. Denkt men zich die kromme in twee takken verdeeld, dan is het niet mogelijk, de beide takken door een doorlopende beweging in elkander te laten overgaan, zonder buiten het gebied te komen, waarin aan de voorwaarde $\text{curl } \mathfrak{H} = 0$ voldaan is. Binnen den geleider is namelijk $\text{curl } \mathfrak{H}$ niet nul. De magnetische kracht heeft daar geen potentiaal.

Buiten den geleider is de potentiaal, zooals uit (2) § 34 blijkt,

$$- k i B g t g \frac{y}{x} + \text{const.}$$

§ 36. De grootheden, die in § 25 ϱ en $\mathfrak{G}(u, v, w)$ genoemd zijn, hebben hier volgens (1) en (2) § 35 de volgende waarden, binnen den geleider:

$$\varrho = 0, u = 0, v = 0, w = \frac{1}{2} k i'; \quad (1)$$

buiten den geleider:

$$\varrho = 0, u = 0, v = 0, w = 0. \quad (2)$$

Bij een minder eenvoudige keuze der coördinaat-assen in § 34 zouden wij blijkbaar in plaats van (1) gevonden hebben

$$q = 0, u = \frac{1}{2} k i'_1, v = \frac{1}{2} k i'_2, w = \frac{1}{2} k i'_3,$$

waarin i'_1 , i'_2 en i'_3 de componenten van i' voorstellen.

Stelt men $k = 2$, wat neerkomt op het aannemen van de electromagnetische eenheid van stroomsterkte (§ 38), dan heeft de vector $\mathfrak{C}$ hier een zeer eenvoudige beteekenis: hij is in richting en grootte gelijk aan de stroomdichtheid i' , wanneer wij de stroomdichtheid als een vector beschouwen.

De stelling van § 25 stelt ons nu in staat om het magnetische veld van een constanten stroom van willekeurigen vorm te berekenen.

Noemen wij de stroomdichtheid $\mathfrak{C} (u, v, w)$, dan geven de vergelijkingen (6) van § 17 onmiddellijk de betrekking aan, die er tusschen de magnetische kracht en de stroomdichtheid bestaat. Dus

$$\left. \begin{aligned} 4 \pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4 \pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4 \pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

Of, wat hetzelfde is,

$$\text{curl } \mathfrak{H} = 4 \pi \mathfrak{C} \dots \dots (4)$$

Dit is een van de hoofdvergelijkingen van MAXWELL's theorie. In die theorie hebben echter de symbolen een uitgebreidere beteekenis dan er hier aan werd toegekend (*Treatise*, Art. 608—611). Het is intusschen niet moeilijk

in te zien, dat de vergelijkingen (3) ook in die uitgebreidere beteekenis geldig blijven, als men van dezelfde veronderstellingen uitgaat als MAXWELL.

Bij MAXWELL heet $\mathcal{C}$ de ware stroom en deze wordt beschouwd als de resultante van den geleidingsstroom, waarmede wij ons hier alleen hebben beziggehouden, en van den stroom, die ontstaat door verandering met den tijd van de diëlectrische polarisatie van het medium. Deze laatste stroomen ontstaan volgens MAXWELL niet alleen in het diëlectricum, maar ook in den vrijen aether en ook in geleiders bij veranderlijke toestanden. MAXWELL neemt nu aan, dat ook deze zoogenaamde verplaatsingsstroomen gesloten zijn, of liever, dat zij altijd met de geleidingsstroomen gesloten stroomen vormen en dat zij dezelfde magnetische werking uitoefenen als geleidingsstroomen. In deze veronderstelling kunnen wij aan de grootheden u , v en w in (3) dezelfde beteekenis hechten, die er door MAXWELL aan wordt toegekend.

§ 37. Om de componenten van de vector-potentiaal van een electrischen stroom of van een stelsel van stroomen te bepalen, kunnen wij weder rechtstreeks gebruik maken van de vergelijkingen (9) van § 17. Dus

$$\left. \begin{aligned} F &= \iiint \frac{u}{r} d\tau, \\ G &= \iiint \frac{v}{r} d\tau, \\ H &= \iiint \frac{w}{r} d\tau, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

waarin de integratie over al de geleiders, of, als wij het begrip stroom in den zin van MAXWELL opvatten, over de geheele ruimte moet worden uitgestrekt.

De betrekking tusschen de magnetische kracht en de vector-potentiaal wordt dan volgens (2) § 17 aangegeven door de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ \beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ \gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Passen wij de vergelijkingen (1) toe op den stroom van § 34, dan is $u = 0$, $v = 0$, $w = i'$. Dus $F = G = 0$. Om H te bepalen in een punt $P(x, y, 0)$, welks afstand tot de as wij p noemen, denken wij ons den cylinder begrensd door twee vlakken $z = -b$ en $z = +b$, waarin b oneindig groot is ten opzichte van p .

Een punt Q binnen den cylinder worde in Q' geprojecteerd op het xy -vlak. Het punt Q is dan bepaald door de coördinaten $OQ' = \varrho$, $\angle Q'OP = \vartheta$ en $QQ' = z$ en men heeft, als a den straal van den cylinder voorstelt,

$$H = \iiint \frac{w}{r} d\tau = i' \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{\varrho d\varrho d\vartheta dz}{r}.$$

Integreeren wij eerst met betrekking tot z , dan is, als wij $Q'P = t$ stellen, daar b oneindig groot is ten opzichte van t ,

$$\begin{aligned}
 \int_{-b}^{+b} \frac{dz}{r} &= \int_{-b}^{+b} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 + t^2)}} = \log \frac{\sqrt{(b^2 + t^2)} + b}{\sqrt{(b^2 + t^2)} - b} \\
 &= \log \frac{b \left(1 + \frac{1}{2} \frac{t^2}{b^2} + \dots \right) + b}{b \left(1 + \frac{1}{2} \frac{t^2}{b^2} + \dots \right) - b} = \log \frac{2b}{\frac{1}{2} \frac{t^2}{b}} \\
 &= 2 (\log 2b - \log t).
 \end{aligned}$$

Ligt het punt P buiten of op de oppervlakte van den cylinder, dan is

$$t = \sqrt{(p^2 - 2pq \cos \vartheta + q^2)} = p \sqrt{\left(1 - 2 \frac{q}{p} \cos \vartheta + \frac{q^2}{p^2} \right)},$$

waarin $\frac{q}{p} \leq 1$, dus

$$\int_{-b}^{+b} \frac{dz}{r} = 2 (\log 2b - \log p) - \log \left(1 - 2 \frac{q}{p} \cos \vartheta + \frac{q^2}{p^2} \right).$$

Dus

$$H_u = 2i' (\log 2b - \log p) \int_0^a q dq \int_0^{2\pi} d\vartheta - i' \int_0^a q dq \int_0^{2\pi} \log \left(1 - 2 \frac{q}{p} \cos \vartheta + \frac{q^2}{p^2} \right) d\vartheta.$$

Nu is

$$\int_0^{2\pi} \log (1 - 2c \cos \vartheta + c^2) d\vartheta = 0, \text{ voor } c^2 < 1.$$

(Zie BIERENS DE HAAN, *Nouv. Tab. d'int. déf.* T. 332, 1).

De formule gaat door voor $c = 1$.

Dus

$$H_u = 2\pi i' a^2 (\log 2b - \log p) = -2i (\log p - \log 2b). \quad (3)$$

Voor de magnetische kracht vindt men

$$\alpha = \frac{dH_u}{dy} = -2i \frac{y}{p^2},$$

$$\beta = -\frac{dH_u}{dx} = 2i \frac{x}{p^2},$$

in overeenstemming met (2) § 34.

Ligt het punt P binnen den cýlinder, dan kan men stellen

$$H_i = i' \int_0^p \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{\varrho \, d\varrho \, d\vartheta \, dz}{r} + i' \int_p^a \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{\varrho \, d\varrho \, d\vartheta \, dz}{r} \\ = H'_u + H'_i.$$

Uit (3) volgt onmiddellijk

$$H'_u = 2 \pi i' p^2 (\log 2b - \log p). \quad . \quad . \quad (4)$$

Ter bepaling van H'_i heeft men te stellen

$$t = \sqrt{p^2 - 2pq \cos \vartheta + q^2} = q \sqrt{1 - 2 \frac{p}{q} \cos \vartheta + \frac{p^2}{q^2}},$$

waarin $\frac{p}{q} \leq 1$ is. Op overeenkomstige wijze als boven vindt men dan

$$H'_i = 2 i' \log 2b \int_p^a \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} d\vartheta - 2 i' \int_p^a \varrho \log \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} d\vartheta \\ = 2 \pi i' (a^2 - p^2) \log 2b - 4 \pi i' \int_p^a \varrho \log \varrho \, d\varrho.$$

Nu is

$$\int_p^a \varrho \log \varrho \, d\varrho = \left(\frac{\varrho^2}{2} \log \varrho - \frac{\varrho^2}{4} \right)_p^a \\ = \frac{a^2}{4} (2 \log a - 1) - \frac{p^2}{4} (2 \log p - 1).$$

Dus

$$H'_i = 2 \pi i' (a^2 - p^2) \log 2b - \pi i' a^2 (2 \log a - 1) + \pi i' p^2 (2 \log p - 1). \quad (5)$$

Door (4) en (5) op te tellen verkrijgt men na herleiding

$$H_i = -2 i' \left(\frac{p^2}{2a^2} - \log 2b + \log a - \frac{1}{2} \right). \quad . \quad (6)$$

De waarde, die men hieruit vindt voor de magnetische kracht, komt weder overeen met (1) § 34.

De waarden voor H uit (3) en (6) gaan, zooals behoort, aan de oppervlakte van den geleider continu in elkander over.

De grootheid H'_i uit (5) stelt de vector-potentiaal voor van een stroom, die begrensd wordt door twee coaxiale cylindervlakken met de stralen p en a in een punt P van het binnenste grensvlak. Blijkens de afleiding vindt men voor dezen stroom volkomen dezelfde waarde voor H in een willekeurig punt P binnen de ruimte, die door den kleinsten cylinder begrensd wordt. In die ruimte is dus de vector-potentiaal constant en de magnetische kracht derhalve nul. Dit feit is experimenteel aangetoond door JOUBIN (*l. c.*).

§ 38. Passen wij de vergelijkingen (1) van de vorige paragraaf toe op een constanten stroom, die door een geleider s met zeer kleine doorsnede $d\omega$ gaat, een zoogenaamden lineairen stroom. Zij de constante stroomsterkte i , dan is de stroomdichtheid $\mathfrak{C} = \frac{i}{d\omega}$.

De richting van $\mathfrak{C}$ wordt aangegeven door de raaklijn aan s in de richting van den stroom; de richtings-cosinussen zijn

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}.$$

Dus

$$u = \frac{i}{d\omega} \cdot \frac{dx}{ds}, \text{ enz.}$$

Verder is $d\tau = d\omega ds$; dus

$$\left. \begin{aligned} F &= i \int \frac{1}{r} \frac{dx}{ds} ds, \\ G &= i \int \frac{1}{r} \frac{dy}{ds} ds, \\ H &= i \int \frac{1}{r} \frac{dz}{ds} ds. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Deze uitdrukkingen zijn dezelfde als die, welke wij in § 33 vonden voor de componenten van de vector-potentiaal van een magnetische schaal, als men stelt $\varphi = i$. Als een magnetische schaal en een electriche stroom dezelfde vector-potentiaal hebben, dan is ook de magnetische kracht, die van beide uitgaat, gelijk. Men komt dus zoo op eenvoudige wijze tot de beroemde stelling van AMPÈRE:

De magnetische werking van een constanten lineairen stroom is gelijk aan die van een magnetische schaal, die door den geleider begrensd wordt en waarvan de sterkte gelijk is aan de sterkte van den stroom.

De constante k van § 34 wordt dus gelijk 2 gesteld, om de numerieke waarde van de stroomsterkte gelijk te kunnen stellen aan de sterkte van de equivalente magnetische schaal.

§ 39. Bovenvermelde overeenkomst tusschen een electriche stroom en een magnetische schaal geldt alleen voor punten buiten de schaal, daar voor inwendige punten de magnetische kracht niet van de vector-potentiaal kan worden afgeleid.

Grooter wordt de analogie tusschen beide systemen, als men niet de magnetische kracht, maar de magnetische inductie beschouwt. Deze laatste wordt voor punten binnen en buiten de schaal op dezelfde wijze uit de vector-potentiaal van de schaal gevonden (§ 31).

De magnetische inductie (kracht) van een stroom in een willekeurig punt is dus gelijk aan de magnetische inductie in dat punt van de equivalente magnetische schaal.

Blijkbaar geldt hetzelfde voor een stelsel constante stroomen en het equivalente magnetische stelsel.

Dit mag wel de reden zijn, waarom de magnetische inductie door THOMSON genoemd wordt: de magnetische kracht volgens de electromagnetische definitie.

§ 40. Tot dusverre hebben wij de stroomen alleen beschouwd in een medium, dat magnetisch niet polari- seerbaar is, een medium dus welks permeabiliteit $\mu = 1$ is. Bij benadering geldt dit voor de lucht. Heeft echter μ een andere waarde en wil men, dat de kracht, die van de vector-potentiaal wordt afgeleid, altijd de magnetische inductie zal zijn, dan kan men stellen

$$\left. \begin{aligned} F &= \mu \iiint \frac{u}{r} d\tau, \\ G &= \mu \iiint \frac{v}{r} d\tau, \\ H &= \mu \iiint \frac{w}{r} d\tau. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

en

$$\left. \begin{aligned} a &= \mu \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \\ b &= \mu \beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \\ c &= \mu \gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Dit zijn de vergelijkingen, zooals zij door MAXWELL worden gebruikt. Hierbij heeft men echter in het oog te houden, dat zij alleen geldig zijn, als μ in de geheele ruimte constant is. In dat geval kan men ter berekening van de magnetische kracht even goed van de vergelijkingen (1) en (2) van § 37 gebruik maken.

Is echter μ veranderlijk, dan is dit niet het geval. Wel kan men zich dan nog, daar altijd aan de voorwaarde

$$\frac{d(\mu \alpha)}{dx} + \frac{d(\mu \beta)}{dy} + \frac{d(\mu \gamma)}{dz} = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

voldaan is, a , b en c door vergelijkingen van den vorm (2) bepaald denken. De waarden van F , G en H zouden dan echter niet meer door de vergelijkingen (1) worden aangegeven.

Eenvoudiger wordt het, als men zich in dit geval de magnetische kracht volgens de stelling van § 25 gesplitst denkt in twee componenten.

De component $\mathfrak{H}_1$ ontstaat door de schijnbare werking op afstand van massa's met de dichtheid $\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H}$. Volgens (3) is

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = -\frac{1}{\mu} \left(\alpha \frac{d\mu}{dx} + \beta \frac{d\mu}{dy} + \gamma \frac{d\mu}{dz} \right). \quad (4)$$

Deze werking gaat dus uit van die deelen der ruimte, waarin μ veranderlijk is. Grenzen twee homogene mediën met verschillende permeabiliteit μ_1 en μ_2 aan elkander, dan wordt het gedeelte der ruimte, waarin μ veranderlijk is, oneindig dun.

Daar μ alleen verandert in de richting van de normaal op de grensvlakte, vindt men uit (4) voor de ruimte-dichtheid in de overgangslaag:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dV}{dn} \cdot \frac{d\mu}{dn} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \mu \cdot \frac{dV}{dn} \cdot \frac{d}{dn} \frac{1}{\mu},$$

waarin V de totale potentiaal in een punt van de overgangslaag voorstelt, terwijl verondersteld wordt, dat in die laag geen stroomen aanwezig zijn.

Wil men de ruimte-lading als een oppervlakte-lading beschouwen, dan volgt hieruit, door integratie over de dikte der overgangslaag, daar $\mu \frac{dV}{dn}$ constant is (*Treatise*, Art. 428), voor de dichtheid dier lading:

$$\frac{\mu_2}{4\pi} \cdot \frac{dV_2}{dn_2} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1} \cdot \frac{dV_2}{dn_2},$$

als wij de normaal in de richting van het medium 1 naar het medium 2 nemen.

De component $\mathfrak{H}_2$ ontstaat door de schijnbare werking op afstand van vector-massa's met de dichtheid $\frac{1}{4\pi} \text{curl } \mathfrak{H}$. Daar de vergelijkingen (3) van § 36 geldig blijven (*Treatise*, Art. 499, 607) wordt $\mathfrak{H}_2$ door de vergelijkingen (1) en (2) § 37 bepaald. Deze component stelt dus de magnetische kracht voor, die van de stroomen zou uitgaan, als het medium homogeen was.

Het electromagnetische moment van stroomen.

§ 41. Laten in een veld twee gesloten lineaire stroomen s_1 en s_2 met de stroomsterkten i_1 en i_2 aanwezig zijn. Denkt men zich twee willekeurige oppervlakken σ_1 en σ_2 , die door s_1 en s_2 begrensd worden, dan kan de oppervlakte-integraal der magnetische inductie over ieder van die oppervlakken — in FARADAY'S taal, het aantal krachtlijnen, dat door den geleider omsloten wordt — veranderd worden in een lijn-integraal door middel van de vector-potentiaal van het veld.

Noemen wij die oppervlakte-integralen Q_1 en Q_2 , dan

is met de notatie van (3) § 14:

$$Q_1 = \iint B \cos \eta \, d\sigma_1 = \int A \cos \epsilon \, ds_1$$

of, daar $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ is, waarin $\mathfrak{A}_1$ de vector-potentiaal van s_1 en $\mathfrak{A}_2$ die van s_2 voorstelt,

$$Q_1 = \int A_1 \cos \epsilon_1 \, ds_1 + \int A_2 \cos \epsilon_2 \, ds_1.$$

Nu is

$$\int A_2 \cos \epsilon_2 \, ds_1 = \int \left(F_2 \frac{dx_1}{ds_1} + G_2 \frac{dy_1}{ds_1} + H_2 \frac{dz_1}{ds_1} \right) ds_1.$$

Hierin kunnen wij, als wij $\mu = 1$ stellen, voor F_2, G_2, H_2 de waarden uit (1) § 38 substitueeren, dus

$$\begin{aligned} \int A_2 \cos \epsilon_2 \, ds_1 &= i_2 \iint \frac{1}{r} \left(\frac{dx_2}{ds_2} \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy_2}{ds_2} \frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz_2}{ds_2} \frac{dz_1}{ds_1} \right) ds_1 \, ds_2 \\ &= i_2 \iint \frac{ds_1 \, ds_2}{r} \cos \delta, \end{aligned}$$

als δ den hoek tusschen twee elementen ds_1 en ds_2 voorstelt.

Op dezelfde wijze vindt men

$$\int A_1 \cos \epsilon_1 \, ds_1 = i_1 \iint \frac{ds_1 \, ds'_1}{r} \cos \delta,$$

waarin ds_1 en ds'_1 twee elementen van denzelfden stroomgeleider voorstellen en waarin iedere combinatie $ds_1 \, ds'_1$ twee malen voorkomt, terwijl in de vorige integraal iedere combinatie $ds_1 \, ds_2$ slechts éénmaal voorkomt.

Stelt men

$$M = \iint \frac{ds_1 \, ds_2}{r} \cos \delta,$$

$$L = \iint \frac{ds_1 \, ds'_1}{r} \cos \delta;$$

dan is

$$Q_1 = i_1 L + i_2 M.$$

De grootheid L noemt men de coëfficiënt van zelf-inductie van s_1 , M de coëfficiënt der wederkeerige inductie van s_1 en s_2 .

Evenzoo vindt men

$$Q_2 = i_1 M + i_2 N,$$

waarin

$$N = \iint \frac{ds_2 ds'_2}{r} \cos \delta.$$

De electromotorische krachten der inductie, die bij veranderlijke toestanden in s_1 en s_2 ontstaan, worden volgens de wet van FARADAY (*Treatise*, Art. 541) op ieder oogenblik gegeven door de vergelijkingen

$$E_1 = -\frac{dQ_1}{dt}, \quad E_2 = -\frac{dQ_2}{dt}.$$

De grootheden Q_1 en Q_2 zijn dus dezelfde als die, welke wij in § 8 hebben leeren kennen onder den naam van de electromagnetische momenten der beide stroomen.

Wat MAXWELL dus noemt het electromagnetische moment van een stroom is hetzelfde, wat door FARADAY genoemd wordt het aantal krachtlijnen, dat door den geleider omsloten wordt.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Il est toujours intéressant de suivre la marche des auteurs.

LAPLACE.

II.

De grootheden F , G en H , die MAXWELL in zijn theorie van het licht gebruikt, kunnen niet als de componenten van een eigenlijke vector-potentiaal beschouwd worden.

III.

Ook in zijn *Treatise* geeft MAXWELL geen mechanische verklaring van de electrische en de magnetische verschijnselen. Hij maakt het alleen waarschijnlijk, dat een dergelijke verklaring kan gegeven worden en wel op oneindig veel manieren.

IV.

Dat electriche en magnetische massa's een werking uitoefenen, omgekeerd evenredig met het kwadraat van den afstand, is niet de uitdrukking van een natuurwet, maar van een mathematische identiteit.

V.

De diëlectrische polarisatie van den vrijen aether heeft in MAXWELL'S theorie eigenlijk geen physischen zin.

VI.

Van de *Vector-Analyse* is voor de Physica meer nut te verwachten dan van de *Quaternions*.

VII.

Ten onrechte beweert TAIT, dat HAMILTON *genoodzaakt* was tot de methoden van NEWTON terug te keeren, ten einde de eigenaardige moeilijkheden der quaternion-differentiatie te overwinnen.

(TAIT, *Quaternions*, 2nd. ed. § 33).

VIII.

De toepassing der waarschijnlijkheidsrekening op het beoordeelen van de geloofwaardigheid van getuigen en

de juistheid van rechterlijke beslissingen wordt door STUART MILL terecht gebrandmerkt als „the opprobrium of mathematics”.

IX.

Het bewijs van de formule $\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ uit de leer der kleinste kwadraten moet gezocht worden in de overeenstemming van de uitkomsten met de ervaring.

X.

Ten onrechte beweert LAPLACE: „On doit regarder FERMAT comme le véritable inventeur du calcul différentiel”. (LAPLACE, *Théorie anal. des Prob.* Introduction, p. 42).

XI.

Uit het feit dat er een mechanisch aequivalent der warmte is, volgt nog niet, dat de warmte een vorm van beweging is.

XII.

Vele belangrijke wetten zijn te danken aan het onnauwkeurige of onvolledige der waarnemingen, waarop zij zijn gegrondvest.

XIII.

Voor eene meer algemeene verbreiding van de theorie der Quaternions is de *voortreffelijkheid* van HAMILTON'S leerboek eerder een na- dan een voordeel geweest.

XIV.

De X-stralen zijn transversale aether-golven van zeer kleine golflengte.

XV.

De verandering in weerstand, die sommige geleiders onder den invloed van electriche golven vertoonen, heeft een mechanische oorzaak.

XVI.

Het zonlicht wordt voortgebracht door electriche ontladingen.

XVII.

De veranderlijkheid der sterren van het Algol-type wordt voldoende verklaard door het aannemen van een donkeren begeleider.

XVIII.

Bij het onderwijs in de Mechanica aan de hogere burgerscholen kan het beginsel der virtuëele snelheden uitstekende diensten bewijzen.

XIX.

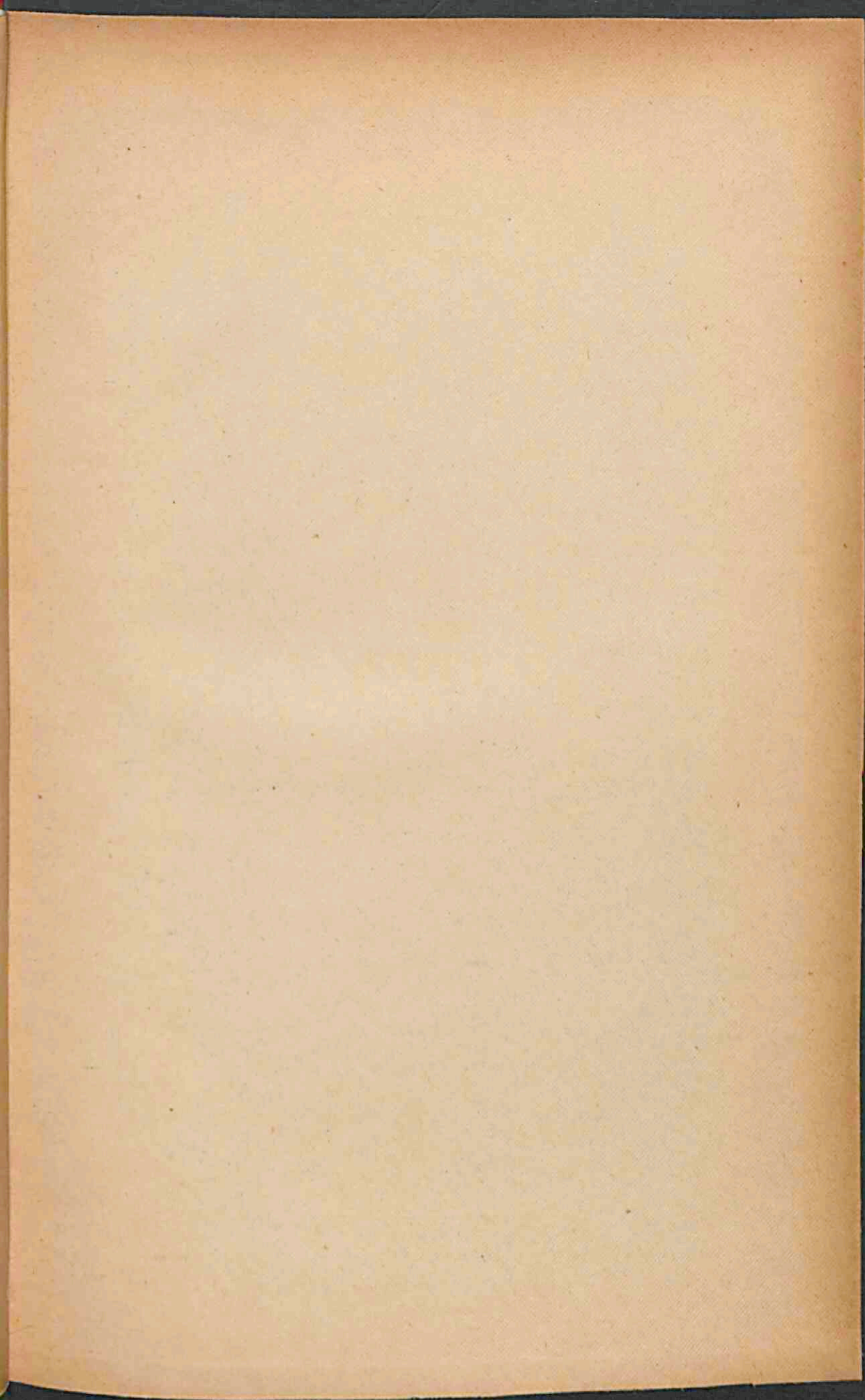
Het verdient geen aanbeveling, bij het elementaire onderwijs in de wiskunde de begrippen *limiet* en *oneindig kleine* zooveel mogelijk te vermijden. Dat onderwijs biedt een uitstekende gelegenheid aan om die begrippen vroegtijdig in te voeren.

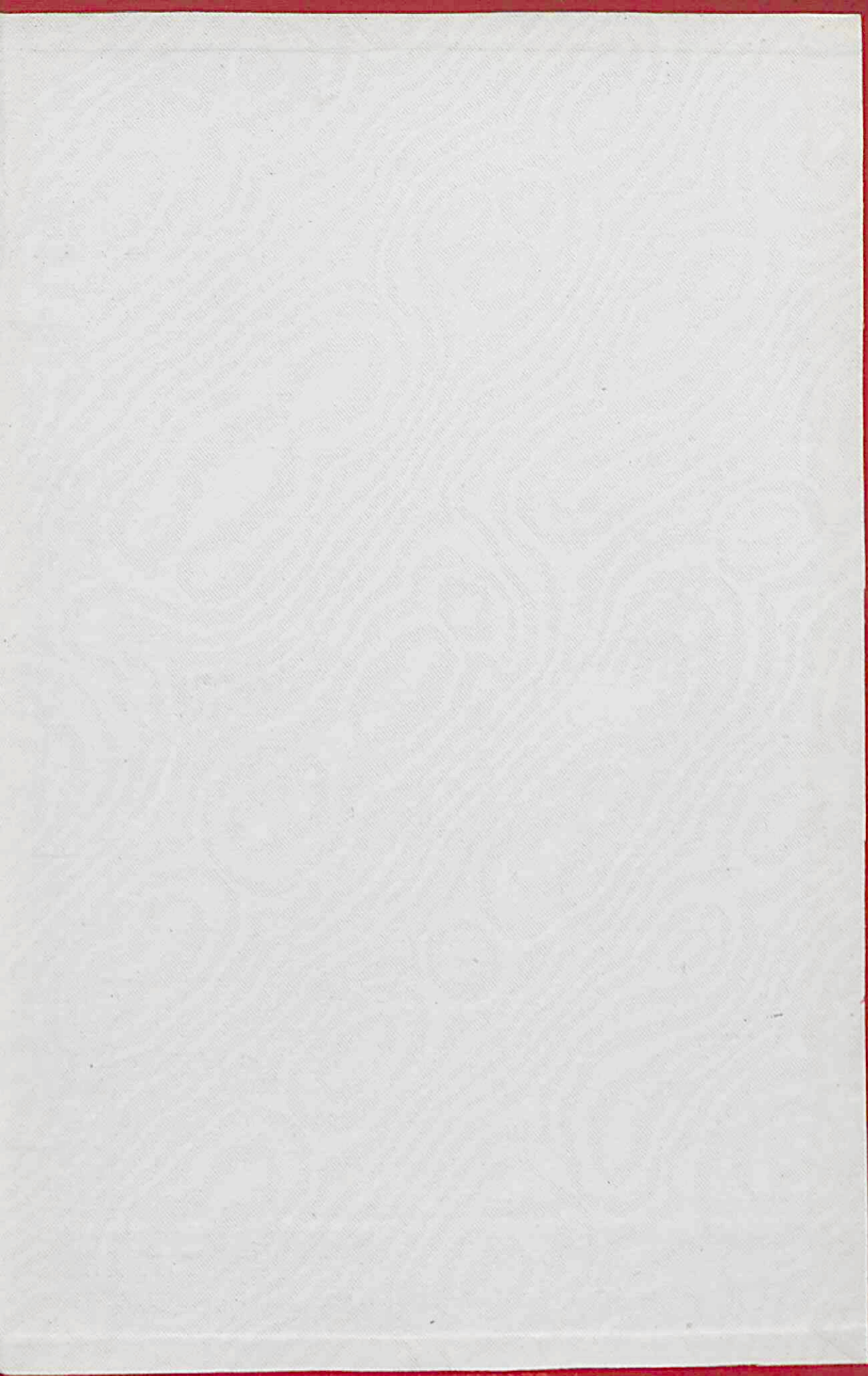
XX.

Het is wenschelijk in ons land niet den Midden-Europeeschen tijd in te voeren, maar den Amsterdam-schen tijd voor het burgerlijk leven te behouden.

ERRATUM.

Bladz. 32, regel 6 v. b. staat: *solonoïdale*, moet zijn:
solenoidale.





A