Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Differentiaal- en integraal-rekening

https://hdl.handle.net/1874/233868

N. C. GROTENDORST.

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING.

1ste Gedeelte.
Differentiaal-rekening.

Lithographie der Kon. Mil. Academie.

BREDA.

1889.

mm 10364

293
F
46

BIBLIOTHEEK UNIVERSITEIT UTRECHT
2943 001 8

ge

293. F. 46.

N. C. GROTENDORST.

DIFFERENTIAAL– EN INTEGRAAL–REKENING.

1ste Gedeelte.

Differentiaal-rekening.

Lithographie der Kon. Mil. Academie.

BREDA.

1889.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Inhoud

Eerste gedeelte
Differentiaalrekening

Hoofdstuk I.

Functien. Oneindig kleine en oneindig groote grootheden.

Hoofdstuk II.

Afgeleide functien. Differentialen. Differentiaalquotienten

Hoofdstuk III

Analytische toepassingen der differentiaal-rekening

Hoofdstuk IV

Meetkundige toepassingen der differentiaalrekening.

Differentiaalrekening
Hoofdstuk I

Functien. Oneindig kleine en oneindig groote grootheden.

A. Inleiding. Standvastige en veranderlijke grootheden. Functiën

§1. In de lagere deelen der wiskunde (de gewone stel- en meetkunde) hebben wij steeds betrekkingen leeren kennen die er bestaan tusschen bekende en onbekende grootheden; in de hoogere deelen - en wel voornamelijk in de differentiaal- en integraalrekening - beschouwt men daarentegen standvastige en veranderlijke grootheden. De tusschen deze grootheden bestaande betrekkingen worden, even als de vorige, door vergelykingen uitgedrukt.

Eene _standvastige_ grootheid is eene zoodanige die gedurende den loop der beschouwing niet van waarde verandert.

7e *Veranderlijk* zijn die welke geene bepaalde waarden hebben, maar eene meer of minder uitgestrekte hoeveelheid verschillende waarden kunnen aannemen.

Reeds in de analytische meetkunde hebben wij kennis gemaakt met betrekkingen tusschen standvastige en veranderlijke grootheden. Zoo b.v. geeft de vergelijking van den cirkel $x^2+y^2=r^2$ aanleiding tot een onbepaald groot aantal betrekkingen, telkens tusschen de coördinaten van een punt des cirkels en den straal, betrekkingen die allen van de zelfde gedaante zijn.

Een zelfde grootheid kan veranderlijk of standvastig zijn, al naarmate van de omstandigheden. Zoo b.v. zijn de coördinaten van een punt van bovenbedoelden cirkel veranderlijk, maar zij moeten daarentegen standvastig worden genomen wanneer wij de vergelijking van de raaklijn $Xx+Yy=r^2$ in eenig punt (x, y) van dien cirkel $x^2+y^2=r^2$ beschouwen.

In de vergelyking $Xx+Yy=r^2$ zijn de coördinaten van eenig punt der raaklijn de veranderlijke grootheden.

Het is in ieder vraagstuk van het grootste gewicht goed nategaan welke grootheden men als veranderlijk en welke als standvastig moet beschouwen.

§ 2. Indien de waarde van eene veranderlijke grootheid y afhangt van de waarde die men aan eene andere veranderlijke grootheid x toekent, zoo noemt men y eene functie van x.
In de betrekking $x^2+y^2=r^2$ kunnen wij naar willekeur x of y als onafhankelijk veranderlijke grootheid kiezen, waardoor dan y of x de afhankelijk veranderlijke of functie wordt genoemd.
Een veranderlijke grootheid kan evengoed eene functie zijn van meerdere grootheden. Zoo b.v. zal in de vergelijking van het boloppervlak $x^2+y^2+z^2=r^2$, elk der drie veranderlijken x, y, z kunnen beschouwd worden als eene functie der beide overigen, die men als onafhankelijk veranderlijken kan kiezen.
In de vergelijkingen der rechte lijn, die de doorsnede is der beide vlakken $ax+by+cz=d$ en $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$, zal men daarentegen slechts een der drie veranderlijken x, y en z naar willekeur tot onafhankelijk veranderlijke kunnen kiezen, waardoor de beide overigen functien der eerste worden.
In 't algemeen zullen wij van m veranderlijke grootheden, waartusschen n $(m>n)$ betrekkingen

of vergelijkingen bestaan, er $m-n$ kunnen beschouwen als <u>onafhankelijk veranderlijk</u>, waardoor de n overigen <u>afhankelijk veranderlijk</u> of <u>functiën</u> der eersten worden.

§3. De functien worden verdeeld in <u>uitgedrukte</u> en <u>ingewikkelde</u>

De functie is <u>uitgedrukt</u>, indien eene formule rechtstreeks aanwijst hoe men de waarde der functie uit de waarden van hare elementen (d. z. de onafhankelijk veranderlijke en de bijkomende standvastige grootheden) kan berekenen.

Voorbeelden. $y = (x-r)\sqrt{\dfrac{2x+r}{2x-r}}$, $z = \text{boog}\sin\dfrac{y}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$

De functie is <u>ingewikkeld</u> als de betrekking tusschen haar en hare elementen door eene onopgeloste vergelyking is aangewezen.

Voorbeelden. $y^2 = (x-r)(2x+r)$, $\sin z = \dfrac{y}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$,

$$x + \sin x = y - \cos y.$$

Verder verdeelt men de functien in <u>algebraische</u> en <u>transcendentale</u>.

Bij de eerste moet de waarde der functie uit hare elementen kunnen worden berekend door optelling aftrekking, vermenigvuldiging en deeling of ook nog door machtsverheffing of worteltrekking, mits daarbij de exponent standvastig zij.

Voorbeeld. $z = x^2 - y^2 + \frac{y^2}{x}\sqrt{(r^2 - x^2)}$

In alle andere gevallen is de functie transcendentaal. Men spreekt alsdan nog van:

<u>goniometrische functien</u> b.v. $y = \tang x$

<u>cyclometrische functien</u> b.v. $y = \text{boog} \sin x$

<u>exponentiale functien</u> b.v. $y = e^x$

en <u>logarithmische functien</u> b.v. $y = \log x$

§ 4. De vorm eener functie bepaalt de wijze waarop hare waarde uit hare elementen kan worden berekend.

Om eene functie aanteduiden, zonder zich met haren vorm intelaten, schrijft men haar element of wel hare elementen (door komma's gescheiden) tusschen twee haakjes en plaatst er eene letter, meestal F, in de eene of andere gedaante, voor.

B.v. $y = F(x)$, $x = f(y)$, $z = \varphi(a, x, y)$, $u = \theta(x, y)$

Gewoonlijk geeft men de standvastige grootheden niet aan.

Wel laat de letter F, f, enz ons in het onzekere omtrent den vorm der functie, maar in den loop eener beschouwing moet dezelfde letter steeds gebruikt worden voor functien van den zelfden vorm.

Is b.v. $z = ax + b\sqrt{y}$ voorgesteld door $z = f(x, y)$ zoo zal ook $t = au + b\sqrt{v}$ moeten worden voorgesteld door $t = f(u,v)$, terwijl eene andere functie: $t = a^2u - bv^2$ zou moeten worden aangeduid door een ander functieteeken: $t = F(u,v)$

Dit geeft ons tevens een middel aan de hand om de waarde die eene functie verkrijgt voor bijzondere waarden van hare elementen gemakkelijk aan te duiden.

Voor de bovenstaande functien b.v. zijn:

$$f(x,0) = ax \;;\; f(0,1) = b \;;\; f(0,0) = 0 \;;$$
$$F(u+h, v+k) = a^2(u+h) - b(v+k)^2 \;; \text{ enz}$$

B. Limiet. Oneindig kleine en oneindig groote grootheden van verschillende orden.

§5. Als eene veranderlijke grootheid nadert tot eene standvastige grootheid, zoodanig dat het verschil tusschen beide grootheden kleiner kan worden dan eenige kleine grootheid die men zich denken wil, zoo wordt de standvastige grootheid de <u>limiet</u> van de veranderlijke genoemd.

Voorbeelden:

1º De inhoud van een cirkel is de limiet van de inhouden van om- of in dien cirkel beschreven regelmatige veelhoeken, indien men het aantal zijden voortdurend laat toenemen.

2° Indien men x tot nul laat naderen is de limiet van $\frac{\sin x}{\tang x} = 1$. Men schrijft dit verkort aldus:

$$\lim \frac{\sin x}{\tang x} = 1 \text{ voor } \lim x = 0.$$

3° $0,\dot{3}\dot{6} = \lim 0,363636\ldots = \frac{4}{11}$.

4° voor $\lim x = a$ is:

$$\lim \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a.$$

Meestal kan de limiet niet volkomen worden bereikt, al kan men haar zoo dicht naderen als men verkiest. De veranderlijke grootheid blijft daarbij dan meestal steeds grooter of steeds kleiner dan de limiet, doch kan ook wel eens afwisselend grooter of kleiner zijn. Zoo b.v. is $\lim \frac{\sin x}{x} = 0$ voor grooter wordende waarden van x; $\frac{\sin x}{x}$ wordt, telkens wanneer x gelyk wordt aan een veelvoud van den halven cirkelomtrek, gelijk aan nul en verandert dan voortdurend van teeken. Het quotient schommelt dus als 't ware om de waarde nul, doch de schommelingen worden voortdurend kleiner.

§6. Een veranderlijke grootheid die nul tot limiet heeft wordt eene <u>oneindig kleine grootheid</u> genoemd. Eene veranderlyke grootheid die grooter kan worden dan elke grootheid, die men zich denken wil, wordt eene <u>oneindig groote grootheid</u> (genoemd). Men stelt haar dan voor door het teeken ∞.

Voorbeelden:

1° Het verschil van de inhouden van een cirkel en een daarin beschreven regelmatigen n hoek is eene oneindig kleine grootheid als wij n veranderlijk aannemen en wel steeds grooter wordende waarden aan n toekennen.

2° Voor $\lim x = 0$ wordt $\lim . \sin x = 0$, $\lim \text{tang}\, x = 0$, $\lim \cot x = \infty$. Men zegt: $\sin x$ en $\text{tang}\, x$ zijn oneindig klein, indien x oneindig klein is, doch $\cot x$ is alsdan oneindig groot.

3° Het verschil tusschen de ordinaten eener kromme lijn en harer asymptoot voor eene zelfde waarde der abscis.

Uit de bepaling, zoowel als uit de voorbeelden, blijkt dat het karakter eener oneindig kleine en oneindig groote grootheid niet gelegen is in het zeer kleine of onmetelijk groote, maar in de omstandigheid dat de grootheid <u>veranderlijk</u> is en daarbij kleiner dan elke kleine of grooter dan elke groote grootheid <u>kan</u> worden, die men zich wil voorstellen

§ 7. Oneindig kleine grootheden kunnen, evenmin als oneindig groote, in berekeningen worden ingevoerd, tenzij men deze met gelijksoortige maten, d. z. dus oneindigkleine of oneindig groote grootheden meet. Aangezien de te meten grootheden, even als de maat zelve, veranderlyk zijn, moeten zij natuurlijk daarbij nog van elkaâr afhankelyk zijn en gelyktydig tot nul naderen of ∞ worden.

Voorbeelden:

1º Als wij in een rechthoek, welks zyden a en b zyn, de eerste zyde in n en de andere in $2n$ gelijke stukken verdeelen en door de deelpunten lijnen trekken evenwijdig met de zijden, zoo ontstaan er $2n^2$ rechthoekjes. In elk dezer rechthoekjes is, indien wij de zijden a' en b' en de diagonaal d' noemen, $\frac{a'}{b'} = \frac{2a}{b}$ en $\frac{d'}{b'} = \frac{V(4a^2+b^2)}{b}$ welke betrekkingen onafhankelijk zijn van n en derhalve ook doorgaan voor $n=\infty$. De oneindig kleine grootheden a' en d' zijn hier dus uitgedrukt in de oneindig kleine maat b'.

In dit voorbeeld is de verhouding van de veranderlijke grootheden a' en b' of ook van de grootheden d' en b' constant. In de meeste gevallen echter is die verhouding veranderlijk, naderende tot een bepaalde limiet, zoo als uit de volgende voorbeelden blijkt.

2º Indien wij x tot a laten naderen zijn

$x^2 + ax - 2a^2$ en $x^2 + 4ax - 5a^2$ oneindig kleine grootheden kiezen wij de eerste tot maat voor de tweede zoo wordt deze door 2 aangewezen. Immers:

$$\lim \frac{x^2+4ax-5a^2}{x^2+ax-2a^2} = \lim \frac{(x-a)(x+5a)}{(x-a)(x+2a)} = \lim \frac{x+5a}{x+2a} = 2$$

3º Voor $\lim x = 0$ is $\lim \cot x = \infty$ en $\lim \cot 2x = \infty$ maar $\lim \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim \frac{\cos x \, . \, 2\sin x \cos x}{\sin x \, . \, \cos 2x} = \lim \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x} = 2$

4º De raaklijn aan eene kromme lijn is de limietstand eener snijlijn die om een harer snijpunten met de kromme lijn draait zoodanig dat het tweede snijpunt voortdurend tot het eerste nadert.

Zij nu $y = f(x)$ de vergelijking der kromme lijn en beschouwen wij twee punten (x, y) en $(x+h, y+k)$ op deze kromme, zoo is de vergelijking der snijlijn:

$$Y - y = \frac{k}{h}(X - x)$$

Tot het bepalen van de vergelijking der raaklijn hebben wij noodig te kennen de limiet waartoe $\frac{k}{h}$ nadert, als h tot nul nadert.

Nemen wij als voorbeeld de parabool $y^2 = px$, zoo volgt uit $y^2 = px$ en $(y+k)^2 = p(x+h)$

$$2ky + k^2 = ph$$

of:

$$\frac{k}{h} = \frac{p}{2y+k}$$

waaruit dus blijkt dat:

$$\lim \frac{k}{h} = \frac{p}{2y}$$

is, en derhalve de vergelijking van de raaklijn in het punt (x, y)

$$Y - y = \frac{p}{2y}(X - x)$$

ook te schrijven in de gedaante:

$$yY = \tfrac{1}{2}p(X + x)$$

De differentiaalrekening heeft haar ontstaan te danken aan het zoeken van eene algemeene methode ter bepaling van de raaklynen aan kromme lijnen

5º Uit de vergelijking der hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

blykt dat voor $x = \infty$ ook $y = \infty$ wordt. Neemt men echter x als maat voor y, dan wordt:

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x} = \frac{b}{a}$$

§8. Niet zelden gebeurt het echter dat de limiet waartoe de verhouding van twee oneindig kleine of oneindig groo-te grootheden nadert door 0 of ∞ moet worden aan-gewezen

Zoo b.v. is voor $\lim x = 0$, $\lim \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} =$
$= \lim \operatorname{tang} \frac{1}{2} x = 0$

In de vergelijking der parabool $y^2 = px$ is voor $x = \infty$
$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{p}{y} = 0$, of $\lim \frac{x}{y} = \infty$.

Deze gevallen hebben aanleiding gegeven tot de onderscheiding van verschillende rangen.

Zijn A en B twee oneindig kleine of oneindig groote grootheden en stelt k een eindig getal voor zoo volgt uit $\lim \frac{A}{B} = k$ dat de grootheden met betrekking tot elkander eindig zijn; uit $\lim \frac{A}{B} = 0$ dat A oneindig klein is met betrekking tot B; en uit $\lim \frac{A}{B} = \infty$, dat A oneindig groot is met betrekking tot B.

§9 Wanneer onder eenige oneindig kleine grootheden er sommige voorkomen die oneindig klein zijn ten opzichte van andere, zoo kiest men een tot hoofdoneindig kleine of maat, en hiertoe neemt men er een die niet oneindig klein is ten opzichte van de overige.

Men noemt nu een oneindig kleine wier verhouding tot de hoofdoneindig kleine een eindige limiet heeft, een <u>oneindig kleine van de eerste orde.</u>

Is a de hoofdoneindig kleine en is dus $\lim \frac{a_1}{a} = k$ (eindig), zoo is in 't algemeen $\frac{a_1}{a} = k + \delta$, waarin $\lim \delta = 0$ is, of:

$$a_1 = a(k + \delta)$$

zijnde de algemeene uitdrukking voor een oneindig kleine van de eerste orde.

Indien de verhouding van eene oneindig kleine tot de n^{de} macht van de hoofdoneindig kleine een eindige limiet heeft, zegt men dat die <u>oneindig kleine van de n^{de} orde</u> is

Uit $\lim \dfrac{a_n}{a^n} = k$, volgt $\dfrac{a_n}{a^n} = k + \delta$ ($\lim \delta = 0$) en dus

$$a_n = a^n(k+\delta)$$

zijnde de algemeene gedaante voor eene oneindig kleine van de n^{de} orde.

Voorbeelden:

Is φ hoofdoneindig kleine zoo zijn $\sin\varphi$, $\operatorname{tang}\varphi$ en $\sin 2\varphi$ oneindig kleinen van de 1^e orde, omdat $\lim \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$, $\lim \dfrac{\operatorname{tang}\varphi}{\varphi} = 1$ en $\lim \dfrac{\sin 2\varphi}{\varphi} = 2$ is.

Daarentegen is $\sin\operatorname{vers}\varphi$ een oneindig kleine der 2^{de} orde, omdat:

$$\lim \frac{\sin\operatorname{vers}\varphi}{\varphi^2} = \lim \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\varphi^2} = \lim \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{is}$$

Evenzoo toonen wij gemakkelijk aan dat:

$$\sin 3\varphi - 3\sin\varphi \quad \text{en} \quad \operatorname{tang}\varphi - \sin\varphi$$

oneindig kleinen der 3^{de} orde zijn, en dat het orde-getal van de oneindig kleine

$$\sqrt{\operatorname{tang}\varphi} - \sqrt{\sin\varphi}$$

moet worden aangegeven door $2\frac{1}{2}$.

<u>Gevolgen</u>

1^e De som van eenige oneindig kleinen van de zelfde orde is in 't algemeen een oneindig kleine van diezelfde orde.

Zijn b.v. a_3, b_3 en c_3 drie oneindig kleinen van de 3^e orde, zoo is, als wij a de hoofdoneindig kleine noemen:

$$a_3 + b_3 + c_3 = a^3(k_1 + k_2 + k_3) + a^3(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)$$

en dus, indien $k_1 + k_2 + k_3$ niet gelijk nul is,

$$\lim \frac{a_3 + b_3 + c_3}{a^3} = \text{eindig}$$

2^e Het product van twee oneindig kleinen van de m^{de} en n^{de} orde is een oneindig kleine van de $(m+n)^{de}$ orde.

§10. Op overeenkomstige wijze kan men ook de oneindig groote grootheden in verschillende orden verdeelen, wat echter zeldzamer voorkomt.

Zoo is in het 2^e voorbeeld van §8, x oneindig groot van de 2de orde als y van de 1^e orde is. (*)

§11. Indien de limiet der verhouding van twee veranderlijke grootheden A en B (eindig, oneindig klein of oneindig groot) de eenheid is, zoo zullen die grootheden een verschil hebben dat oneindig klein is met betrekking tot elk dier grootheden.

(*) Voor $x = \infty$ van de 1ste orde is e^x oneindig groot van eene orde, waarvan het rang getal oneindig groot is.
Evenzoo zou alsdan het ordegetal van $\log x$ moeten worden aangewezen door 0.

Is $\lim \frac{A}{B} = 1$, zoo is $\frac{A}{B} = 1 + \delta$ dus $\frac{A-B}{B} = \delta$ of

$$\lim \frac{A-B}{B} = 0$$

Omgekeerd zullen twee veranderlijke grootheden die een verschil hebben dat met betrekking tot elk dier grootheden oneindig klein is – of zooals men meestal zegt, die oneindig weinig van elkaâr verschillen – eene verhouding hebben die de eenheid tot limiet heeft.

Is $A - B = \delta$ en $\lim \frac{\delta}{A} = 0$, zoo is $\frac{A-B}{A} = 1 - \frac{B}{A} = \frac{\delta}{A}$ dus $\frac{B}{A} = 1 - \frac{\delta}{A}$ en dus $\lim \frac{B}{A} = 1$.

De beide grootheden, die wij hier beschouwden, geven, bij weglating van het betrekkelijk oneindig klein verschil, aanleiding tot de vergelijking $A = B$, die nu wel niet juist is, maar dikwijls dezelfde diensten kan bewijzen als de volkomen juiste vergelijking $A = B + \delta$, als wij er slechts de juiste beteekenis – d.i. $\lim \frac{A}{B} = 1$ – aan hechten.

In de beschouwingen der differentiaal- en integraalrekening zullen wij telkens met dergelijke onvolkomen vergelijkingen in aanraking komen.

C. Vervanging van oneindig kleine grootheden bij het bepalen van de limieten der verhoudingen of der sommen dezer grootheden.

§12 Wij willen nu de beide grondbeginselen aangeven waarop de differentiaal- en integraalrekening steunen.

<u>Eerste grondbeginsel</u>. De limiet der verhouding van twee veranderlijke grootheden verandert niet, wanneer men die grootheden vervangt door andere, die er oneindig weinig mede verschillen (zie voorgaande paragraaf)

Stel $\lim \frac{A}{A_1} = 1$ en $\lim \frac{B}{B_1} = 1$, zoo is $A = A_1(1+\delta)$ en $B = B_1(1+\delta_1)$, derhalve:

$$\lim \frac{A}{B} = \lim \frac{A_1(1+\delta)}{B_1(1+\delta_1)} = \lim \frac{A_1}{B_1}.$$

Voorbeelden.

1º $\lim \frac{\sin 2\varphi}{\tan 3\varphi} = \lim \frac{2\varphi}{3\varphi} = \frac{2}{3}$ voor $\lim \varphi = 0$

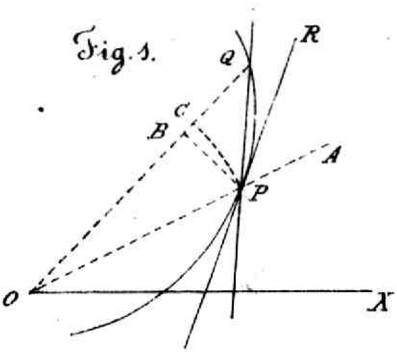
2º $\lim \frac{\sin\varphi - \tan^2\varphi}{\sin 3\varphi} = \lim \frac{\varphi}{3\varphi} = \frac{1}{3}$ voor $\lim \varphi = 0$

3º $\lim \frac{3x^2 + x - 1}{2x^2 - 4x + 5} = \lim \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$ voor $x = \infty$

4º Als wij bij kromme lijnen, die door hare poolvergelijking gegeven zijn, de raaklijn in eenig punt willen bepalen, zoo doen wij dit door den hoek te berekenen, welken de raaklijn maakt met de voerstraal van het raakpunt.

Zij $P\ (\varphi_0, r)$ het punt der kromme waarin de raaklijn moet worden bepaald en $Q\ (\varphi_1, r_1)$ een dicht daarbij gelegen punt, dan is RP de raaklijn in P, de limietstand van de snijlijn QP. (Zie §7, 4e voorbeeld)

Fig. 1.



Nu is $\angle RPA = \lim \angle QPA =$
$= \lim (\angle OQP + \angle QOP) = \lim \angle OQP.$

Verder is $\tang OQP = \frac{BP}{BQ}$, als PB loodrecht op OQ is getrokken.

Beschrijven wij uit O met OP als straal den cirkelboog PC, zoo is $\lim \frac{BP}{CP} = 1$ (Zie §9 1e voorbeeld) en $BP^2 = BC(2\,OP - BC)$, derhalve:

$$\frac{BC}{BP} = \frac{BP}{2\,OP - BC} \text{ of } \lim \frac{BC}{BP} = 0$$

Hieruit blijkt dus dat men, bij het bepalen van de limiet der uitdrukking $\frac{BP}{BQ}$, den teller mag vervangen door CP en den noemer door CQ (het verschil BC is oneindig klein t.o. van BP en derhalve ook t.o. van BQ)

Wij verkrijgen dus:

$$\text{tang } RPA = \lim \text{tang } OQP = \lim \frac{BP}{BQ} = \lim \frac{CP}{CQ} = \lim \frac{r(\varphi_1 - \varphi)}{r_1 - r}$$

<u>Tweede grondbeginsel</u> De limiet van de som van een oneindig groot aantal oneindig kleinen verandert niet, wanneer men elk dier oneindig kleinen vervangt door andere, waarvan de verhoudingen tot de eerste de eenheid tot limiet hebben.

Om dit te bewijzen onderstellen wij dat:

$$S = \lim (a + b + c + \text{enz})$$

en dat tevens gegeven is:

$$\lim \frac{a_1}{a} = 1 \,,\ \lim \frac{b_1}{b} = 1 \,,\ \lim \frac{c_1}{c} = 1 \,,\ \text{enz}$$

Nu is dus: $a_1 = a(1+\delta)$, $b_1 = b(1+\delta_1)$, $c_1 = c(1+\delta_2)$, enz

en $\lim \delta = \lim \delta_1 = \lim \delta_2 = \text{enz} = 0$

derhalve:

$$a_1 + b_1 + c_1 + \text{enz} = a + b + c + \text{enz} + a\delta + b\delta_1 + c\delta_2 + \text{enz}$$

of indien δ_p de grootste is der oneindig kleinen $\delta, \delta_1, \delta_2$, enz

$$a_1 + b_1 + c_1 + \text{enz} < (a + b + c + \text{enz})(1 + \delta_p)$$

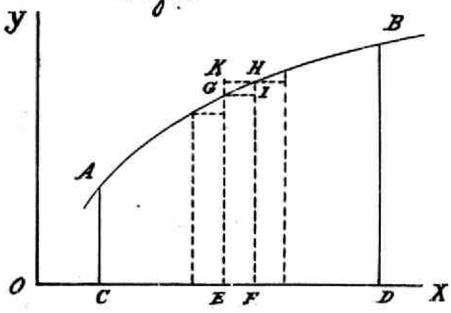
waaruit dus blijkt dat

$$\lim (a_1 + b_1 + c_1 + \text{enz}) = \lim (a + b + c + \text{enz})$$

Van dit grondbeginsel, waarvan wij in de integraalrekening voortdurend zullen gebruik maken, en dat reeds bij de oude wiskunstenaren bekend was, zullen wij eene toepassing maken door de grootte te berekenen van de vlakte-uitgebreidheid, begrensd door de X as, den boog eener kromme lijn en de ordinaten van de uiteinden van dien boog.

Zij dan AB de boog der kromme wier vergelijking $y = f(x)$ ten opzichte van rechthoekige assen gegeven is.

Fig. 2.



Wij verdeelen den afstand CD in n gelyke deelen en trekken uit de deelpunten lijnen evenwijdig met de Y as, waardoor ook de te berekenen vlakte-uitgebreidheid in n deelen wordt verdeeld.

Zij EFHG een dezer deelen, dan kunnen wij, door het trekken van GI // OX, dit deel weder verdeelen in een rechthoek EI en een kromlynig driehoekje GHI. Het zelfde kunnen wij doen voor de overige deelen waarin de figuur ABDC is verdeeld.

Wanneer wij nu n ∞ laten worden, zoo is elk deel EFHG oneindig klein, bestaande uit een oneindig kleinen rechthoek EI en een driehoekje GHI dat on-

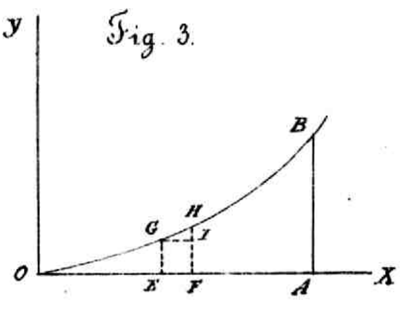
eindig klein is met betrekking tot dien rechthoek.
Om dit laatste goed in te zien behoeven wij slechts op te merken dat het figuurtje GHJ een gedeelte is van het rechthoekje GJHK, en hiervan zijn de zijden GJ en JH beiden oneindig klein (zij naderen gelijktijdig tot nul), terwijl van den rechthoek EJ de zyde EF = GJ oneindig klein doch de zijde EG eindig is. De rechthoek KJ is dus oneindig klein in vergelijking van den rechthoek EJ (zie §9. 2e gevolg)

Noemen wij ABDC, d.i. de te meten vlakte-uitgebreidheid, J, zoo is:

$$J = \lim \sum EFHG = \lim \sum EJ.$$

Passen wij deze methode toe ter berekening van den inhoud OAB als OB een boog is der parabool:

Fig. 3.



$$x^2 = py \text{ en } OA = a.$$

Nu is $EF = \frac{a}{n} = h$ en $OE = m\frac{a}{n}$ als E het mde deelpunt is, dus:

$$GE = \frac{m^2a^2}{n^2p} \text{ of rechthoek } EJ = \frac{m^2a^3}{n^3p}$$

Wy verkrijgen derhalve:

$$J = \lim \frac{h^3}{p}\left\{1^2 + 2^2 + \text{enz} + (n-1)^2\right\} = \lim \frac{h^3}{p}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) =$$

$$= \lim \frac{a(a-h)(2a-h)}{6p} = \frac{a^3}{3p} = \frac{1}{3}a\cdot\frac{a^2}{p} = \frac{1}{3}OA\cdot AB.$$

D. Vloeiende verandering van functien

§ 13. Nu wij in het voorafgaande hebben kennis gemaakt met de twee voorname beginselen, waarop het geheele gebouw der differentiaal- en integraalrekening wordt opgetrokken, moeten wij nog nagaan met welk soort van functien wij in het vervolg zullen werken.

Eene veranderlijke grootheid zegt men vloeiend te veranderen van a tot b, als zij alle tusschengelegen waarden doorloopt. Zij is dus vloeiend in de nabijheid van eene bepaalde waarde, als zij alle waarden kan aannemen, hoe dicht deze ook bij de genoemde waarde zijn gelegen.

Eene functie $f(x)$ noemt men vloeiend tusschen de grenzen $f(a)$ en $f(b)$ indien zij alle mogelijke tusschengelegen waarden aanneemt, indien het element x vloeiend van a tot b verandert, zonder in dien tusschentijd onbestaanbaar of oneindig groot te worden.

Met andere woorden: $f(x+h) - f(x)$ moet gelijktijdig met h oneindig klein worden, voor iedere

waarde van x tusschen a en b gelegen.
Zoo b.v is $y = \frac{x-3}{x+1}$ eene vloeiende functie, wanneer men x van 0 tot 10 laat veranderen.
Sommige functien zijn vloeiend voor alle waarden van de onafhankelyk veranderlyke, zoo als b.v.

$$y = 4x^2 + x\sqrt{(4+x^2)} \quad , \quad y = \frac{x^3+a^3}{x^2+a^2} \text{ , enz}$$

andere zijn slechts vloeiend binnen bepaalde grenzen zoo als b.v.

$y = \sqrt{(4-x^2)}$	is vloeiend van	$x = -2$ tot $x = +2$
$y = \text{boog} \sin x$	" " "	$x = -1$ " $x = +1$
$y = \frac{x-3}{x+1}$	" " "	$x = -\infty$ " $x = -1$, en
	"	$x = -1$ " $x = +\infty$
$y = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{(x-3)(x+2)}$	" " "	$x = -\infty$ " $x = -2$
	"	$x = -2$ " $x = -1$
	"	$x = +1$ " $x = +3$, en
	"	$x = +3$ " $x = +\infty$

terwijl er eindelijk ook functien zijn die zelfs binnen de nauwste grenzen niet vloeiend zijn, zoo als b.v.

$$y = (-2)^x.$$

Eene functie van meer dan een onafhankelijk veranderlijke b.v. $f(x, y, z)$ wordt vloeiend genoemd tusschen bepaalde grenzen voor de veranderlyken

x, y en z, als:

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z)$$

oneindig klein is wanneer h, k en l oneindig klein worden genomen en aan x, y en z waarden zijn gegeven die tusschen de aangegeven grenzen gelegen zijn.

In het vervolg zullen wij alleen vloeiende functien beschouwen of althans de functien alleen binnen de grenzen waartusschen zij vloeiend zijn.

Hoofdstuk II.

Afgeleide functien. Differentialen. Differentiaalquotienten.

A. Afgeleide functien. Aangroeiing en differentiaal eener functie van een onafhankelijk veranderlijk element.

§.14. Wanneer wij aan het element x van de functie $y = f(x)$ eene aangroeiing Δx toekennen, zal de functie zelve met een bedrag Δy aangroeien, zoodat:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

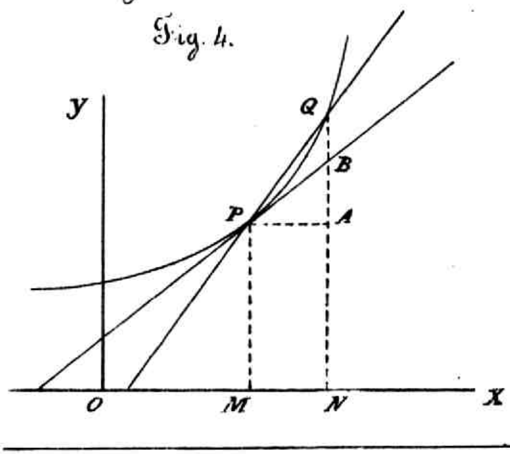
dus:
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Beschouwen wij nu Δx als eene veranderlijke grootheid, die nul tot limiet heeft, zoo zal ook Δy veranderlijk zijn en gelijktijdig met Δx tot nul naderen.

De verhouding $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zal naderen tot eene bepaalde limiet, welke eene functie van x zal zijn. (Deze functie, waaraan den naam van afgeleide functie wordt gegeven, wordt voorgesteld door het teeken $f'(x)$ (*)

Men kan iedere vloeiende functie $y = f(x)$ meetkundig voorstellen door eene kromme lijn, waarin de onafhankelyk veranderlijke de abscis en de functie de bijbehoorende ordinaat der kromme is.

Fig. 4.



Zij nu $P(x, y)$ een willekeurig en $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ een dicht bij P gelegen punt

(*) Deze notatie is afkomstig van Lagrange. Men gebruikt ook wel de notatie Dy of $Df(x)$, in navolging van Cauchy.

der kromme lijn, zoo is $AP = \Delta x$ en $AQ = \Delta y$, dus

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{AQ}{AP} = \text{tang } QPA.$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ stelt derhalve meetkundig voor de tangens van den hoek welken de rechte lijn PQ maakt met de X as

Laten wij nu Δx tot nul naderen, dan zal het punt Q tot P naderen en de snijlijn PQ tot de raak- lijn aan de kromme lijn in het punt P.

Is dus PB die raaklijn, zoo zal:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \text{tang } BPA$$

zijn. (Zie ook §7. 4^e voorbeeld)

Voorbeelden.

1°. $y = x^3 - 2x^2 = f(x)$

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x)^2$$

dus $\quad \Delta y = (3x^2 - 4x)\Delta x + (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$ $\quad (3x-2!$

waaruit volgt: $f'(x) = \lim \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 4x$

2°. $y = \sqrt{(a^2 - x^2)} = f(x)$

$$y + \Delta y = \sqrt{\{a^2 - (x+\Delta x)^2\}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\{a^2-(x+\Delta x)^2\}} - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{\Delta x} = -\frac{2x + \Delta x}{\sqrt{\{a^2 - (x+\Delta x)^2\}} + \sqrt{(a^2-x^2)}}$$

derhalve:

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Uit $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ volgt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \delta$ of:

$$\Delta y = f'(x).\Delta x + \delta.\Delta x$$

waarin $\lim \delta = 0$ is

In de laatste vergelijking leeren wij dus de aangroeiing der functie kennen, als het element der functie aangroeit met Δx.

Deze aangroeiing bestaat uit twee deelen, waarvan het eerste gedeelte (evenredig met Δx) gelijktijdig met Δx oneindig klein en van de zelfde orde is, en het tweede gedeelte $\delta.\Delta x$ oneindig klein is in vergelijking van het eerste.

Het eerste of voornaamste deel der aangroeiing wordt de differentiaal der functie genoemd en voorgesteld door dy.

Vervangen wij de oneindig kleine aangroeiing Δx door dx,(*) zoo wordt dus de differentiaal der functie:

$$dy = f'(x)\, dx.$$

in woorden: De differentiaal der functie is het product van de afgeleide functie en de differentiaal van het

---

(*) Als de functie de eenvoudige gedaante $y = f(x) = x$ heeft, zoo is $f'(x) = 1$, derhalve gaat $dy = f'(x)\Delta x$ over in $dy = \Delta x$, en is dus ook $dx = \Delta x$.

onafhankelyk veranderlijk element.

Uit het voorgaande volgt nog:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Men noemt $\frac{dy}{dx}$ ook het differentiaalquotient der functie, omdat het verkregen kan worden door de differentiaal der functie — d.i. de oneindig kleine aangroeiing der functie, na weglating der betrekkelijk oneindig kleinen — te deelen door de differentiaal van het onafhankelijk veranderlijk element.

§16. In §14. zagen wij reeds dat $f'(x)$ meetkundig voorstelt de tangens van den hoek welken de raaklijn in het punt (x, y) aan de kromme lijn $y = f(x)$ maakt met de X as. Ook dy kunnen wij meetkundig voorstellen.

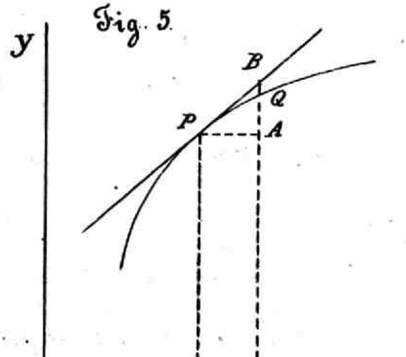


Fig. 5.

In nevenstaande figuur stelt AQ de aangroeiing van y voor, als x met dx aangroeit; AB echter is gelijk aan $AP \operatorname{tang} APB$ dus gelyk aan $f'(x)dx = dy$. BQ is dus oneindig klein in vergelijking van AB of AQ of AP.

$$\frac{AB}{AP} = \lim \frac{AQ}{AP}.$$

§17 Aangezien het doel der differentiaalrekening bestaat in het bepalen van de afgeleide functien voor alle mogelijke gegeven functien, kunnen wij, als gevolg van het medegedeelde in §15, ook zeggen dat dit bestaat in het bepalen van de differentialen der functien, d.w.z. de aangroeiingen der functien na weglating der betrekkelijk oneindig kleinen.

§18. Hoe eenvoudig het ook, volgens de voorbeelden in §14, schijnt om de afgeleide eener gegeven functie — of wat op hetzelfde neêrkomt de differentiaal der functie — te bepalen, zoo kunnen toch de stelkunstige bewerkingen, die daarvoor noodig zijn, zeer lastig en langwijlig worden, indien de functien niet eenvoudig zijn. Men heeft daarom van zeer eenvoudige functien de differentialen bepaald en daarvoor regels gemaakt die kunnen worden toegepast bij het bepalen der differentialen van meer samengestelde functien.

Alvorens tot het afleiden dier regels overtegaan merken wij nog op dat men de differentiaal van eenigen vorm gewoonlijk aanduidt door het plaatsen van de letter d. voor den tusschen twee haakjes geplaatsten vorm. Bestaat de vorm echter slechts uit een term, zoo laat men de haakjes meestal weg, doch plaatst achter de letter d een punt.

Zoo b.v. volgt uit:

$$y = ax^2 + b\sqrt{x} \qquad dy = d(ax^2 + b\sqrt{x})$$

$$y = x^2\sqrt{(a^2-x^2)} \qquad dy = d.\, x^2\sqrt{(a^2-x^2)}$$

enz.

§19. Hier volgen nu de differentialen van de zoo, genaamde eenvoudige functien.

1° $y = x^m$, waarin m geheel, positief en standvastig is.

Volgens de bepaling is:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \lim \frac{mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}(\Delta x)^2 + \text{enz} + (\Delta x)^m}{\Delta x} =$$

$$= mx^{m-1}.$$

en dus: $\quad d.\, x^m = m\, x^{m-1}\, dx.$

2° $y = \operatorname{Neplog} x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\operatorname{Neplog}(x+\Delta x) - \operatorname{Neplog} x}{\Delta x} = \lim \frac{\operatorname{Neplog}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{x}$$ (volgens het geleerde in de hoogere stelkunde)

dus:

$$d.\, \operatorname{Neplog} x = \frac{dx}{x}.$$

3º $y = e^x$, waarin e het grondtal van het Neperiaansche logarithmenstelsel voorstelt.

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$

(volgens het vroeger geleerde in de hoogere stelkunde) derhalve:

$$d.e^x = e^x dx.$$

4º $y = \sin x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim \frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) . \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

derhalve:

$$d. \sin x = \cos x\, dx$$

5º $y = \cos x$.

Men vindt op eene overeenkomstige wijze als by 4º:

$$d. \cos x = -\sin x\, dx$$

6º $y = \tan x$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\tan(x+\Delta x) - \tan x}{\Delta x} = \lim \frac{\sin \Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cos x.\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} . \lim \frac{1}{\cos(x+\Delta x)} . \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

derhalve:

$$d.\tang x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

7° $y = \cot x$

Men vindt hier op overeenkomstige wijze als bij 6°:

$$d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

§20. Ter bepaling van de differentialen der samengestelde functien dienen verder de volgende regels:

1° Differentiaal eener som

Stellen wij $y = u + v - w$, waarin u, v en w functien eener grootheid x zijn.

Indien x met het bedrag Δx aangroeit, zullen ook u, v en w aangroeien met Δu, Δv en Δw en dientengevolge ook y met Δy.

Hieruit volgt dus:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w$$

of in verband met de gegeven vergelijking:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

of ook $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

Laten wij nu Δx tot nul naderen, zoo is

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

of $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

dus ook: $dy = du + dv - dw$.

2° Differentiaal van een product.

Stellen wij $y = uv$, waarin u en v weder functien van x zijn.

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u . \Delta v}{\Delta x}$$

$$= \lim \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

of ook: $d . uv = u dv + v du$

Evenzoo vinden wij by een product van drie factoren:

$$d . uvw = uv\, dw + vw\, du + wu\, dv.$$

enz. enz.

Opmerking. Voor het byzondere geval dat een der factoren constant is b.v. $y = au$

vinden wij:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{a(u+\Delta u) - au}{\Delta x} = a \frac{du}{dx}$$

derhalve:

$$dy = a du$$

welk resultaat ook zou verkregen zijn door in:

$$dy = d . uv = u dv + v du$$

$v = a$ en dus $dv = da = 0$ te stellen.

Constante factoren komen dus bij het differentieeren vóór het differentiaalteeken.

3º Differentiaal van een quotient.

Zy weder $y = \frac{u}{v}$ en u en v functien van x, zoo vinden wij:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)\Delta x} =$$

$$= \lim \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 \Delta x} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\text{of ook} \quad d.\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Opmerking. Voor het byzondere geval dat de teller constant is, $u = a$, vinden wij

$$d.\frac{a}{v} = -\frac{adv}{v^2}.$$

Als de noemer constant is, dus $v = a$, zoo kunnen wij, in $y = \frac{u}{a}$, $\frac{1}{a}$ als een constantenfactor beschouwen en vinden derhalve

$$d.\frac{u}{a} = \frac{1}{a}du = \frac{du}{a}$$

4º Differentiaal van de functie van eene functie

Zij $y = f(u)$, terwijl hierin $u = F(x)$ is.

Wanneer wij nu eene aangroeiing aan x toekennen zoo zal dientengevolge u aangroeien, en deze aangroeiing zal weder aanleiding geven tot eene aan-

groeiing van y.
Wij vinden dus:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \quad \text{en} \quad \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}$$

Aangezien nu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

is, zoo volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u} . \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

of wat het zelfde is:

$$dy = f'(u) . F'(x)\, dx.$$

Voorbeeld: $y = \text{Neplog}\,(x^2-a^2)$

dus $y = \text{Neplog}\, u$ en $u = x^2-a^2$

Nu is (zie §19 sub 2) $dy = \frac{du}{u}$
terwijl verder $du = 2x\,dx$ is.
Hieruit volgt: $dy = \frac{2x\,dx}{x^2-a^2}$.

5e Differentiaal eener omgekeerde functie.

Indien $y = f(x)$ gegeven is, kunnen wij ons voorstellen dat x uit die vergelijking opgelost en gevonden wordt $x = F(y)$.
Men noemt alsdan $x = F(y)$ de omgekeerde functie van $y = f(x)$.

Kent men de afgeleide functie van $x = F(y)$, dus $F'(y)$, zoo is ook de afgeleide functie $f'(x)$ daaruit te vinden. Door toepassing van het gevondene onder 4° verkrijgen wij:

$$dy = f'(x)\,F'(y)\,dy$$

of:

$$f'(x) = \frac{1}{F'(y)} = \frac{1}{F'\{f(x)\}}$$

§21. Wij zullen de voorgaande regels toepassen ter bepaling van de differentialen van eenige belangrijke functien.

1° $d.\log_a x = d.M\,\mathrm{Neplog}\,x = M\frac{dx}{x}$

waarin M de modulus voorstelt van het logarithmenstelsel dat a tot grondtal heeft.

Aangezien $M = \frac{1}{\mathrm{Neplog}\,a}$ is, kunnen wij ook schrijven

$$d.\log_a x = \frac{dx}{x\,\mathrm{Neplog}\,a}$$

2° $y = x^m$, waarin m standvastig doch overigens willekeurig is, d.w.z. geheel, gebroken, positief of negatief kan zijn.

$d.x^m = d.\,e^{m\,\mathrm{Neplog}\,x} = e^{m\,\mathrm{Neplog}\,x}\,d.\,m\,\mathrm{Neplog}\,x =$

$= x^m . m\frac{dx}{x} = mx^{m-1}dx.$

Hieruit volgt dat de formule, in §19 sub. 1 afgeleid voor geheele positieve waarden van m, doorgaat voor alle waarden van m.

b.v.

$$d.\sqrt{x} = d.x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

3°. $d.a^x = d.e^{x \operatorname{Neplog} a} = e^{x \operatorname{Neplog} a}\, d.x \operatorname{Neplog} a =$

$$= a^x \operatorname{Neplog} a.dx$$

4° $d.u^v = d.e^{v \operatorname{Neplog} u} = e^{v \operatorname{Neplog} u}\, d.v \operatorname{Neplog} u =$

$$= u^v\left(v\frac{du}{u} + \operatorname{Neplog} u.dv\right) = vu^{v-1}du + u^v \operatorname{Neplog} u.dv$$

5°. $d.\sec x = d.\frac{1}{\cos x} = -\frac{d.\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}$

6°. $d.\operatorname{cosec} x = d.\frac{1}{\sin x} = -\frac{d.\sin x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$

7°. Uit $y = \operatorname{boog} \sin x$ volgt $x = \sin y$

$$dx = \cos y\, dy$$

$$dy = \frac{dx}{\cos y}$$

dus: $\quad d.\operatorname{boog} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$

Op dezelfde wijze vinden wij:

$$d.\operatorname{boog} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$d.\,\text{boogtang}\,x = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$d.\,\text{boog cot}\,x = -\frac{dx}{1+x^2}$$

Opmerking. De differentialen dezer functiën zouden ook gevonden kunnen worden en zelfs zonder groote moeilijkheden te ondervinden, op de wijze als in §19 is aangewezen. Men rangschikt dan ook meestal de bovenbeschouwde functiën onder de eenvoudige, waarvan men de differentialen uit het hoofd kent. Wij hebben hier op deze wijze de differentialen bepaald om eenvoudige toepassingen te geven der regels. Zoo kan men b.v. ook $d.\,\text{tang}\,x$ als volgt vinden:

$$d.\,\text{tang}\,x = d.\,\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\, d.\sin x - \sin x\, d.\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Tot het vlug leeren toepassen der opgegeven regels is het noodig zich ijverig te oefenen in het differentieeren van vele samengestelde functiën.

B. Partieele differentiaalquotienten, partieele en volledige differentialen van functien van twee en meer onafhankelijk veranderlijken.

922. Beschouwen wij thans eene functie van twee onafhankelijk veranderlijke grootheden. b.v.

$$z = f(x, y)$$

Wy kunnen ons voorstellen dat wij, na eerst aan de onafhankelijk veranderlijke elementen de bepaalde waarden x en y te hebben gegeven, deze later de waarden $x + \Delta x$ en y toekennen, of m.a.w. alleen x veranderlijk beschouwen. In dit geval groeit de functie, dat is z, aan met een bedrag dat wij zullen voorstellen door $\Delta_x z$.
Wy vinden alsdan voor die aangroeiing:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

waaruit:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Is nu Δx oneindig klein, zoo noemen wij

$$\lim \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

het <u>partieele differentiaalquotient van z</u>

ten opzichte van x en schrijven daarvoor: $\frac{dz}{dx}$

Op de zelfde wijze noemen wij:

$$\lim \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

het partieel differentiaalquotient van z ten opzichte van y, en nemen daarvoor als notatie aan $\frac{dz}{dy}$

Uit de vergelijkingen volgt, dat:

$$\Delta_x z = \frac{dz}{dx} \Delta x + \delta . \Delta x$$

en $$\Delta_y z = \frac{dz}{dy} \Delta y + \delta_1 \Delta y$$

is, waarin δ en δ_1 oneindig kleine grootheden voorstellen.

Deze beide gedeeltelijke of partieele aangroeiingen van z bestaan weder, even als wij in § 15 bij functien van een onafhankelijk veranderlijk element gezien hebben, uit twee gedeelten, waarvan het tweede oneindig klein is in vergelijking van het eerste.

De eerste of voornaamste deelen noemen wij respectievelijk de partieele differentialen van z ten opzichte van x of y, en stellen wij voorloopig voor door de teekens $d_x z$ en $d_y z$.

Vervangen wij de oneindig kleine aangroeiingen Δx en Δy door dx en dy (zie §15) dan vinden wij dus:

$$d_x z = \frac{dz}{dx}dx \quad \text{en} \quad d_y z = \frac{dz}{dy}dy$$

Deze differentialen zijn dus eigenlijk de oneindig kleine gedeeltelijke aangroeiingen der functie na weglating der betrekkelijk oneindig kleinen.

§23. Denken wij ons nu dat, na de aanvankelijke waarden x en y, aan de beide elementen der functie de waarden $x+\Delta x$ en $y+\Delta y$ worden toegekend, zoo zal de functie aangroeien met een bedrag Δz dat wij de <u>volledige aangroeiing</u> der functie zullen noemen en gelijk is aan:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Hiervoor kunnen wij ook schrijven:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

Volgens de voorgaande paragraaf is:

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \frac{d.f(x,y)}{dx}\Delta x + \delta.\Delta x$$

en evenzoo $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) = \dfrac{d.f(x+\Delta x, y)}{dy}\Delta y + \delta_1 \Delta y$

waarin δ en δ_1 oneindig kleinen zijn

Wij mogen $\frac{d.f(x,y)}{dy}$ beschouwen als eene functie van x welke, door x te laten aangroeien met het bedrag Δx, overgaat in $\frac{d.f(x+\Delta x,y)}{dy}$, zoo-dat dus deze laatste vorm ook mag geschreven worden in de gedaante $\frac{d.f(x,y)}{dy}+\delta_2$, waarin δ_2 eene grootheid is die gelijktijdig met Δx nul wordt.

Hierdoor gaat dus Δz over in:

$$\Delta z = \frac{df(x,y)}{dx}\Delta x + \frac{d.f(x,y)}{dy}\Delta y + \delta.\Delta x + \delta_1.\Delta y + \delta_2.\Delta y$$

Beschouwen wij nu Δx en Δy oneindig klein en vervangen wij haar door dx en dy, dan zullen de drie laatste termen oneindig klein zijn ten opzichte van de beide eerste termen.

Die beide eerste termen vormen de zoogenaamde <u>volledige</u> <u>differentiaal</u> van z

$$dz = \frac{df(x,y)}{dx}dx + \frac{df(x,y)}{dy}dy$$

of wat hetzelfde is:

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy \qquad (*)$$

(*) De notatie $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$ voor de partieele differentiaalquoin woorden: <u>de volledige differentiaal eener func-tie van twee onafhankelijk veranderlijke elemen-ten is gelijk aan de som van de partieele differen-tialen dezer functie.</u>

Voorbeeld:

$$z = x\sin y - y\sin x$$

$$\frac{dz}{dx} = \sin y - y\cos x\,, \qquad \frac{dz}{dy} = x\cos y - \sin x$$

derhalve:

$$dz = (\sin y - y\cos x)\,dx + (x\cos y - \sin x)\,dy.$$

§24. Al wat hier gezegd is, kan gemakkelijk worden uitgebreid tot de gevallen waarin men functien van drie of meer onafhankelijk veranderlijke groot-heden beschouwt.

Is b.v. gegeven $u = f(x, y, z)$, zoo zijn $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ en $\frac{du}{dz}$ de partieele differentiaalquotienten en $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$ en $\frac{du}{dz}dz$ de partieele differentialen respectievelijk t.o. van x, y en z, terwijl:

---

tienten kan nooit aanleiding geven tot verwarring, omdat die uit-drukkingen niet anders kunnen voorstellen als $\lim \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ en $\lim \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$. Immers aangezien Δx en Δy van elkaar onafhankelijk zijn, zou $\lim \frac{\Delta z}{\Delta x}$ of $\lim \frac{\Delta z}{\Delta y}$ geheel onbepaald zijn. Inplaats van $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$ schrijft men ook wel $\frac{df}{dx}$ en $\frac{df}{dy}$.

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$$

de volledige differentiaal van u voorstelt.

C. Het differentieeren van ingewikkelde functiën van een onafhankelijk veranderlijk element.

§25. Indien y als functie van x gegeven is door de onopgeloste vergelijking

$$F(x, y) = 0$$

dan zouden wij ons y uit deze vergelijking kunnen opgelost denken, als:

$$y = \mathcal{F}(x)$$

en daarna deze vergelijking kunnen differentieeren, om op deze wijze te komen tot de waarde van $\frac{dy}{dx}$.

Deze weg leidt niet alleen dikwijls tot omslachtige bewerkingen, maar is ook niet altijd mogelijk, waardoor het dus nuttig en noodig is om eenen anderen weg te leeren kennen, langs welken wij tot de kennis van dit differentiaalquotient kunnen geraken.

Uit $f(x,y)=0$ blijkt dat, welke verandering Δx wij het element x ook laten ondergaan, de aan-groeiing van y, die daarvan het gevolg is, moet gevonden worden uit de vergelijking:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$$

of:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = 0$$

Voor deze laatste vergelijking kan, op grond van §23, geschreven worden:

$$\frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dy}\Delta y + \delta.\Delta x + \delta_1 \Delta y = 0 ,$$

eene vergelijking die voor alle waarden van Δx en daarvan afhankelyke waarden van Δy door-gaat.

Vervangen wij Δx en Δy door dx en dy, of wat het zelfde is, beschouwen wij $\Delta x, \Delta y, \delta$ en δ_1 oneindig klein, zoo gaat de vergelijking over in:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0$$

of:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

In 't algemeen zullen $\frac{df}{dx}$ en $\frac{df}{dy}$ functien van x en y zijn en dus ook de waarde van $\frac{dy}{dx}$ gevonden worden als functie van x en y.

Opmerking. Willen wij deze waarde herleiden tot $F'(x)$, die wij uit de opgeloste vergelijking $y = F(x)$ vinden, dan moeten wij van de betrekking $f(x,y)=0$ of $y=F(x)$ gebruik maken; met andere woorden de vergelykingen:

$$f(x,y)=0 \quad \text{en} \quad -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = F'(x)$$

zullen identiek zijn.

Als met eene waarde van x, verschillende waarden van y overeenstemmen, zullen er ook evenveel verschillende waarden van $\frac{dy}{dx}$ worden gevonden.

Voorbeelden.

1º Uit de vergelijking der ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

volgt door differentiatie:

$$\frac{x}{a^2}\,dx + \frac{y}{b^2}\,dy = 0 \quad \text{of} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Hadden wy y opgelost zoo zouden wy uit:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

gevonden hebben:

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{bx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

De beide voor $\frac{dy}{dx}$ gevonden waarden gaan in elkander over door gebruik te maken van de betrekking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aangezien met elke waarde van x twee waarden van y overeenstemmen verkrijgt men ook voor elke waarde van x twee waarden voor $\frac{dy}{dx}$ uit $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

2° Uit de vergelijking:

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

leidt men af:

$$(x^2 - ay)\,dx - (ax - y^2)\,dy = 0$$

of:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$$

Aangezien met elke waarde van x in het algemeen drie waarden van y overeenstemmen, verkrijgen wij ook drie daarbij behoorende waarden van $\frac{dy}{dx}$, zijn, de de richtingsconstanten der raaklijn in de drie verschillende punten der kromme lijn:

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

welke een zelfde abscis x bezitten.

§26. Indien tusschen de drie veranderlyke grootheden x, y en z twee vergelijkingen:

$$f(x,y,z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

en

$$F(x,y,z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

gegeven zijn, kunnen wij y en z beschouwen als functien van x.

De beide differentiaalquotienten $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ kunnen nu gevonden worden zonder dat het nodig is uit de vergelijkingen (1) en (2), door eliminatie van z of y de vergelijkingen:

$$\varphi(x,y) = 0 \quad \text{en} \quad \psi(x,z) = 0$$

af te leiden.

Op dezelfde wijze als in de voorgaande paragraaf is aangewezen, verkrijgen wij door differentiatie van (1) en (2):

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

en

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0 \quad \ldots\ldots (4)$$

In deze vergelykingen kunnen wij, na deeling door dx, $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ als de onbekenden beschouwen, waardoor bij oplossing gevonden wordt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dx}}{\frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dz}}$$

en:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dx} - \frac{df}{dx}\cdot\frac{dF}{dy}}{\frac{df}{dz}\cdot\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\cdot\frac{dF}{dz}}$$

Opmerking. (Deze waarden moeten gelijk zijn aan de waarden van $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ welke verkregen worden door differentiatie van $\varphi(x, y) = 0$ en $\psi(x, z)$; zij kunnen hiertoe echter niet worden herleid dan door gebruik te maken van de beide vergelijkingen (1) en (2)

Voorbeeld.

Gegeven de vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad \text{en} \qquad x^2 + y^2 - rx = 0$$

Door differentiatie vinden wij:

$$x + y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad 2x - r + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

waaruit door oplossing volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r - 2x}{2y} \quad \text{en} \quad \frac{dz}{dx} = - \frac{r}{2z}$$

Meetkundig stellen de vergelijkingen voor de kromme lijn die ontstaat als doorsnede van een bol met een cylindervlak. De gevonden waarden van $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ stellen dus voor de richtingsconstanten van de raaklijnen aan de projectien der kromlijnige doorsnede op het XY en XZ vlak in de projectien van het punt (x, y, z)

Het hier behandelde is gemakkelijk uit te breiden tot het geval dat men te doen heeft met n vergelijkingen tusschen $n+1$ veranderlijken.

D. Het differentieeren van ingewikkelde functien van twee en meer onafhankelijk veranderlyke elementen.

§27. Indien z als functie der beide onafhankelijk veranderlijke grootheden x en y gegeven is door de onopgeloste vergelijking:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

dan kunnen wij de beide partieele differentiaalquotienten van z, $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$, weder vinden zonder dat het noodig is de vergelyking (1) op te lossen.

Indien wij y standvastig houden en dus z eenvoudig beschouwen als functie van x, zoo vinden wij op grond van het aangevoerde in §25:

$$\frac{df}{dx}\, dx + \frac{df}{dz} . dz_x = 0$$

of na deeling door dx

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} . \frac{dz}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

(zie hierbij §22)

Evenzoo vinden wij door differentiatie t.o. van y

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} . \frac{dz}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

De vergelijkingen (2) en (3) geven de partieele differentiaalquotienten:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} \quad \text{en} \quad \frac{dz}{dy} = - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}$$

De volledige differentiaal van z is derhalve:

$$dz = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}\,dx - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}\,dy$$

Wij kunnen ook hier gelyksoortige opmerkingen maken als in §25 en §26.

Voorbeeld.

Uit de vergelijking der ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

volgt door differentiatie, respectievelijk t.o. van x en t.o. van y:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{z}{c^2}\cdot\frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2}\cdot\frac{dz}{dy} = 0$$

waaruit:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2x}{a^2z} \quad \text{en} \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2y}{b^2z}$$

Wy zouden ook aldus kunnen handelen:
door differentiatie van de vergelijking verkrijgen wij:

$$\frac{x}{a^2}\,dx + \frac{y}{b^2}\,dy + \frac{z}{c^2}\,dz = 0$$

of:

$$dz = -\frac{c^2x}{a^2z}\,dx - \frac{c^2y}{b^2z}\,dy$$

voor de volledige differentiaal der functie, waaruit derhalve blijkt dat:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2 z}{a^2 x} \quad \text{en} \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

de partieele differentiaalquotienten zijn.

§28. Indien tusschen de vier veranderlijke grootheden x, y, z en u twee vergelijkingen:

$$f(x, y, z, u) = 0 \;\ldots\ldots\; (1)$$

en

$$F(x, y, z, u) = 0 \;\ldots\ldots\; (2)$$

gegeven zijn, kunnen wij x en y kiezen tot onafhankelijk veranderlijke grootheden, waardoor z en u functien dezer grootheden zijn.

Ter afleiding van de partieele differentiaalquotienten:

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{du}{dx} \text{ en } \frac{du}{dy},$$

differentieeren wij de vergelijkingen (1) en (2) eerst t.o. van x; met andere woorden: wij beschouwen y standvastig. Op grond van §26 vinden wij alsdan:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dz}\cdot d_x z + \frac{df}{du}\cdot d_x u = 0$$

en

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dz}d_x z + \frac{dF}{du}\cdot d_x u = 0$$

of na deeling door dx

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Evenzoo vinden wij, door differentiatie van (1) en (2) t.o. van y:

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Door oplossing van $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{du}{dx}$ uit (3) en (4) en van $\frac{dz}{dy}$ en $\frac{du}{dy}$ uit (5) en (6) worden de verlangde differentiaalquotienten gevonden.

Ook hier zouden wij opmerkingen kunnen maken in den geest van die welke in §25 en §26 voorkomen.

Voorbeeld.

Gegeven: $\frac{u}{z} = a \,\text{Neplog}\, \frac{y}{x}$ en $uz = bxy$

Gevraagd: $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{du}{dy}$

Door differentiatie vinden wij:

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{u}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{x} \quad ; \quad u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} = by$$

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{du}{dy} - \frac{u}{z^2} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{a}{y} \quad ; \quad u\frac{dz}{dy} + z\frac{du}{dy} = bx$$

waaruit gemakkelijk door oplossing volgt:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{az^2 + bxy}{2xu} \quad \text{en} \quad \frac{du}{dy} = \frac{az^2 + bxy}{2yz}$$

Uit het in deze paragraaf aangevoerde blijkt voldoende hoe men moet handelen indien in 't algemeen m vergelijkingen gegeven zijn tusschen n veranderlijke grootheden.

E. Afgeleide functien en differentialen van hoogere orden van functien van een onafhankelijk veranderlijk element.

§29. In §14 hebben wij gezien op welke wijze van eene functie $y = f(x)$ de afgeleide functie $f'(x)$ wordt gevonden. Aangezien deze afgeleide weder om eene functie is van x, bezit ook zij eene afgeleide functie welke wij de tweede afgeleide functie van $y = f(x)$ noemen en voorstellen door $f''(x)$

(Deze tweede afgeleide functie zal eveneens eene afgeleide functie bezitten, die wij de derde afgeleide functie van $y = f(x)$ noemen en voor-

stellen door $f'''(x)$
Op die wijze voortgaande verkrijgen wij de achtereenvolgende afgeleide functien die voorgesteld worden door de notatien:

$$f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ f'''(x)\ ,\ f^{IV}(x),\ \text{enz.}\ldots\ldots f^{(n)}(x).\ (*)$$

Uit $y = f(x)$ hebben wij als differentiaal der functie afgeleid:

$$dy = f'(x)\,dx$$

welke, als functie van x natuurlijk op nieuw eene differentiaal bezit. Nemen wij voor de oneindig kleine aangroeiing die x ondergaat weder dx — m.a.w. beschouwen wij dx als eene standvastige grootheid — zoo is:

$$d(dy) = f''(x)\,dx\,.\,dx$$

of

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

welke wij de tweede differentiaal van y noemen.
Evenzoo bezit deze differentiaal, die wederom eene functie van x is, op nieuw eene differentiaal, waarvoor men, door de oneindig kleine aangroei-

---

(*) Daar, waar hetgeen aanleiding tot verwarring kan geven, kunnen wij die functien ook voorstellen door $f^1(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$ enz $f^n(x)$

ing van x weder gelijk aan dx te stellen, zal vinden:

$$d(d^2y) = f'''(x)dx . dx^2$$

of

$$d^3y = f'''(x)\, dx^3$$

Op deze wijze voortgaande vinden wy:

$$d^4y = f^{IV}(x)\, dx^4$$

enz

$$d^ny = f^{(n)}(x)\, dx^n$$

Hieruit volgt nog:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)\ ,\quad \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)\ , \text{ enz}$$

Men noemt $\frac{d^ny}{dx^n}$ het n^{de} differentiaalquotient der functie.

§30. Wy kunnen ook nog langs een anderen weg tot de kennis der achtereenvolgende afgeleide functien geraken.

Stellen wij ons voor dat in de functie $y = f(x)$ het element x achtereenvolgens de waarden:

$$x\ ,\ x+\Delta x\ ,\ x+2\Delta x\ ,\ x+3\Delta x\ ,\ \text{enz} \ldots\ldots x+n\Delta x$$

verkrijgt, en dat de achtereenvolgende waarden der functie dan voorgesteld worden door:

$$y\ ,\ y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ \text{ enz} \ldots\ldots y_n$$

Zoo dat dus

$$y = f(x)$$

$$y_1 = f(x+\Delta x)$$
$$y_2 = f(x+2\Delta x)$$
enz
$$y_n = f(x+n\Delta x)$$

Hieruit kunnen wij door aftrekking afleiden:

$$y_1 - y = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$y_2 - y_1 = \Delta y_1 = f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)$$
enz
$$y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1} = f(x+n\Delta x) - f(x+(n-1)\Delta x)$$

waaruit weder volgt:

$$\Delta y_1 = \Delta(y+\Delta y) = \Delta y + \Delta^2 y = f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)$$

of:

$$\Delta^2 y = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$$

en evenzoo

$$\Delta^3 y = f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)$$
enz:
$$\Delta^n y = f(x+n\Delta x) - \frac{n}{1}f(x+(n-1)\Delta x) + \frac{n(n-1)}{1.2}f(x+(n-2)\Delta x) - \text{enz} + (-1)^n f(x)$$

waarin $\Delta^2 y$ geschreven is voor $\Delta(\Delta y)$, $\Delta^3 y$ voor $\Delta(\Delta^2 y)$ enz.

Men noemt $\Delta^n y$ de n^{de} aangroeiing van y.

(Deelen wij de voor $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, enz $\Delta^n y$ gevonden waarden respectievelijk door Δx^2, Δx^3, enz Δx^n, en laten wij Δx tot nul naderen, zoo naderen de quotienten $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, ... $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$ tot bepaalde limieten, die blijken gelijk te zijn aan de vroeger gevonden afgeleide functien $f''(x)$, $f'''(x)$ .... $f^n(x)$ of wat hetzelfde is aan de differentiaalquotienten: $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Wij zullen dit voor het quotient $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ laten zien.

$$\Delta^2 y = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x) =$$
$$= f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x) - \{f(x+\Delta x) - f(x)\}.$$

Nu is (zie §15)

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \delta . \Delta x$$

waarin δ gelijktijdig met Δx oneindig klein is, zoo, dat wij in het algemeen δ mogen voorstellen door $\varphi(x)\Delta x$.

Hierdoor wordt:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \varphi(x)\Delta x^2$$

en dus: $$f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x) = f'(x+\Delta x).\Delta x + \varphi(x+\Delta x)\Delta x^2$$

of: $$\Delta^2 y = \{f'(x+\Delta x) - f'(x)\}\Delta x + \{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\}\Delta x^2 =$$
$$= f''(x)\Delta x^2 + \delta'.\Delta x^2 + \delta''.\Delta x^2.$$

waarin δ' en δ'' gelijktijdig met Δx oneindig klein zijn.

Wij vinden derhalve:

$$\lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Geheel op overeenkomstige wijze toonen wij aan dat:

$$\lim \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

enz:

$$\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

is.

Uit de laatste vergelijking volgt nog dat:

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = f^n(x) + \delta$$

is, waarin δ eene grootheid is die gelijktijdig met Δx nul wordt.

De n^{de} aangroeiing der functie kan dus worden voorgesteld door:

$$\Delta^n y = f^n(x).\Delta x^n + \delta.\Delta x^n.$$

Vervangen wij nu Δx door dx, en is derhalve ook δ oneindig klein, dan bestaat de n^{de} aangroeiing der functie uit twee gedeelten waarvan het laatste oneindig klein is in vergelijking van het eerste. Dit eerste of voornaamste deel dat wij voorgesteld hebben door $d^n y$ en n^{de} differentiaal der functie noemen is derhalve:

$$d^n y = f^n(x) . dx^n$$

Zynde eene oneindig kleine van de n^{de} orde even als in §29 is gevonden.

§31. Wij zullen nu van eenige functiën de achtereenvolgende afgeleide functiën bepalen.

a.)

$$y = x^m = f(x)$$

Wij vinden achtereenvolgens:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

enz.

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x) = m(m-1) \ldots\ldots (m-n+1)x^{m-n}$$

waarin, zoo m een geheel positief getal is, n gelijk of kleiner dan m moet worden ondersteld. Is $n = m$ zoo is $f^m(x) = m(m-1) \ldots\ldots 3.2.1 = m!$ derhalve constant, en dus zijn in datgeval alle volgende afgeleide functiën nul.

Op dezelfde wijze zal van de functie:

$$y = A + Bx + Cx^2 + \text{enz} + Lx^m$$

de m^{de} afgeleide functie constant zijn en wel gelijk aan $\mathcal{L}.m!$, terwijl alle volgende afgeleide functien gelijk nul zullen zijn.

b.)

$$y = f(x) = \text{Neplog}(1+x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = -(1+x)^{-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 1.2.(1+x)^{-3}$$

enz.

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x) = (-1)^{n-1}.(n-1)!(1+x)^{-n}$$

c.)

$$y = f(x) = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = e^x$$

derhalve $$\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x) = e^x$$

e^x is de eenige functie welke de eigenschap bezit dat alle afgeleide functien gelyk aan de functie zijn.

Uit het bovenstaande volgt gemakkelijk dat van de functie:

$$y = f(x) = a^x$$

de n^{de} afgeleide functie wordt aangewezen door:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = a^x (\text{Neplog}\, a)^n$$

d.)

$$y = f(x) = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \cos x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = -\sin x$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x) = -\cos x$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = f^{IV}(x) = \sin x.$$

Achtereenvolgens komen dezelfde waarden weder terug. Schrijven wij $f'(x) = \sin(\frac{1}{2}\pi + x)$, $f''(x) = \sin(\pi + x)$ enz, Zoo wordt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = \sin(\tfrac{1}{2} n\pi + x)$$

Op overeenkomstige wyze volgt uit:

$$y = f(x) = \cos x$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = \cos(\tfrac{1}{2} n\pi + x)$$

F. Differentiaalquotienten en differentialen van hoogere orden bij functien van twee en meer veranderlijke grootheden.

§32 Indien z gegeven is als functie der onafhankelijk veranderlijke grootheden x en y door de vergelijking:

$$z = f(x, y)$$

Zoo hebben wij in §22 leeren vinden de beide partieele differentiaalquotienten $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$, die in het algemeen weder functien van x en y beiden zijn. Zij bezitten dus elk andermaal twee partieele differentiaalquotienten.
Die van $\frac{dz}{dx}$ zullen wij voorstellen door

$$\frac{d^2z}{dx^2} \quad \text{en} \quad \frac{d^2z}{dxdy}$$

en die van $\frac{dz}{dy}$ door:

$$\frac{d^2z}{dydx} \quad \text{en} \quad \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Deze vier partieele tweede differentiaalquotienten zijn in 't algemeen weder functien van x en y en bezitten dus elk weder twee partieele

te differentiaalquotienten, welke de partieele derde differentiaalquotienten van z genoemd worden.
Op deze wijze voortgaande zien wij gemakkelijk in dat er in het algemeen 2^n partieele n^{de} differentiaalquotienten van z bestaan

$\dfrac{d^{p+q+r}z}{dx^p\,dy^q\,dx^r}$ zal voorstellen het $(p+q+r)^{de}$ differentiaalquotient van z, waarbij men eerst p malen achtereen het differentiaalquotient t.o. van x heeft genomen, daarna q maal t.o. van y en eindelijk weder r maal t.o. van x.

§33. Wij kunnen ook nog langs een anderen weg geraken tot de kennis van de achtereenvolgende partieele differentiaalquotienten van z.
Wij zullen dit voor de tweede differentiaalquotienten laten zien.
Indien wij in $z = f(x,y)$ het element x met het bedrag Δx laten aangroeien, groeit z met het bedrag $\Delta_x z$ aan, (zie §22), zoodat:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

Laten wij nu x andermaal met het bedrag Δx aangroeien en noemen wij de aangroeiing die $\Delta_x z$ dientengevolge ondergaat $\Delta_x(\Delta_x z) = \Delta^2_{xx} z$, zoo is:

$$\Delta^2_{xx} z = f(x+2\Delta x, y) - 2f(x+\Delta x, y) + f(x,y)$$

en derhalve:

$$\frac{\Delta^2_{xx} z}{\Delta x^2} = \frac{f(x+2\Delta x, y) - 2f(x+\Delta x, y) + f(x,y)}{\Delta x^2}$$

Laten wij nu Δx tot nul naderen zoo nadert $\frac{\Delta^2_{xx} z}{\Delta x^2}$ tot een bepaalde limiet die blijkens het geleerde in §30 zal gelijk zijn aan

$$\lim \frac{\Delta_x\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\Delta x} = \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2 z}{dx^2}$$

Geheel op dezelfde wijze kunnen wij aantoonen dat:

$$\lim \frac{\Delta^2_{yy} z}{\Delta y^2} = \lim \frac{\Delta_y\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\Delta y} = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dy} = \frac{d^2 z}{dy^2}$$

$$\lim \frac{\Delta^2_{xy} z}{\Delta x \Delta y} = \lim \frac{\Delta_y\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\Delta y} = \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dy} = \frac{d^2 z}{dx dy}$$

$$\lim \frac{\Delta^2_{yx} z}{\Delta y \Delta x} = \lim \frac{\Delta_x\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\Delta x} = \frac{d\left(\frac{dz}{dy}\right)}{dx} = \frac{d^2 z}{dy dx}$$

§34. De partieele differentiaalquotienten:

$$\frac{d^2 z}{dx dy} \quad \text{en} \quad \frac{d^2 z}{dy dx}$$

zijn aan elkander gelijk. Dit kan gemakkelijk aldus worden aangetoond:

Laten wij in de vergelijking:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

het element y aangroeien met Δy en noemen wij de aangroeiing die $\Delta_x z$ dientengevolge ondergaat $\Delta_y(\Delta_x z) = \Delta^2_{xy} z$, zoo wordt

$$\Delta^2_{xy} z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x,y)$$

Hadden wij evenwel in de vergelijking

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

het element x met het bedrag Δx laten aangroeien dan zou voor de aangroeiing van $\Delta_y z$ zijn gevonden:

$$\Delta_x(\Delta_y z) = \Delta^2_{yx} z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x,y)$$

Uit deze beide vergelijkingen volgt:

$$\Delta^2_{xy} z = \Delta^2_{yx} z$$

Aangezien nu voor alle waarden van Δx en Δy

$$\frac{\Delta^2_{xy} z}{\Delta x \Delta y} = \frac{\Delta^2_{yx} z}{\Delta y \Delta x}$$

is, zullen de beide vormen ook dezelfde limiet„waarden bezitten en derhalve is:

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = \frac{d^2 z}{dy dx}$$

§35. Wij hebben in het voorafgaande drie verschillende partieele tweede differentiaalquotienten leeren kennen, te weten:

$$\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dxdy} \quad \text{en} \quad \frac{d^2z}{dy^2}$$

De acht partieele derde differentiaalquotienten:

$$\frac{d^3z}{dx^3}, \quad \frac{d^3z}{dx^2dy}, \quad \frac{d^3z}{dxdydx}, \quad \frac{d^3z}{dxdy^2},$$

$$\frac{d^3z}{dydx^2}, \quad \frac{d^3z}{dydxdy}, \quad \frac{d^3z}{dy^2dx} \quad \text{en} \quad \frac{d^3z}{dy^3}$$

vormen eigenlijk slechts vier verschillende, aangezien

$$\frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{d^3z}{dxdydx} = \frac{d^3z}{dydx^2}$$

en

$$\frac{d^3z}{dxdy^2} = \frac{d^3z}{dydxdy} = \frac{d^3z}{dy^2dx}$$

is.

Deze gelijkheden blijken terstond als wij bedenken dat:

$$\frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{d^2\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dxdy} \quad \text{en} \quad \frac{d^3z}{dxdydx} = \frac{d^2\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dydx}$$

welke uitdrukkingen op grond van de voorgaande paragraaf gelijk zijn

Evenzoo is:

$$\frac{d^3z}{dxdydx} = \frac{d\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)}{dx} \text{ en } \frac{d^3z}{dydx^2} = \frac{d\left(\frac{d^2z}{dydx}\right)}{dx}$$

die evenzoo op grond van het voorgaande gelijk zijn.

Op dezelfde wijze kunnen wij aantoonen dat de drie andere derde differentiaalquotienten gelijk zijn.

Wy hebben dus slechts de volgende verschillende partieele derde differentiaalquotienten:

$$\frac{d^3z}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^2dy}, \frac{d^3z}{dxdy^2} \text{ en } \frac{d^3z}{dy^3}$$

Van de zestien partieele vierde differentiaalquotienten zijn de volgende vijf slechts verschillend:

$$\frac{d^4z}{dx^4}, \frac{d^4z}{dx^3dy}, \frac{d^4z}{dx^2dy^2}, \frac{d^4z}{dxdy^3} \text{ en } \frac{d^4z}{dy^4}$$

en in 't algemeen zijn er van de 2^n partieele n^{de} differentiaalquotienten slechts $n+1$ werkelijk van elkaâr onderscheiden.

Men heeft slechts te letten op het aantal malen dat x en op het aantal malen dat y veranderlijk is beschouwd, terwijl de volgorde waarin de differentiatien hebben plaats gehad, geheel onverschillig is.

§36. Op dezelfde wijze als wij in §23 uit $z=f(x,y)$ de volledige aangroeiing van z hebben bepaald, kunnen wij ook de tweede aangroeiing van z vinden door in

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

andermaal x en y met Δx en Δy te doen aangroeien

Wij vinden alsdan:

$$\Delta(\Delta x) = \Delta^2 z = f(x+2\Delta x, y+2\Delta y) - 2f(x+\Delta x, y+\Delta y) + f(x,y)$$

waarvoor wij kunnen schrijven

$$\Delta^2 z = \frac{f(x+2\Delta x, y+2\Delta y) - 2f(x+\Delta x, y+2\Delta y) + f(x, y+2\Delta y)}{\Delta x^2}\Delta x^2 +$$

$$+ 2\,\frac{f(x+\Delta x, y+2\Delta y) - f(x, y+2\Delta y) - f(x+\Delta x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y)}{\Delta x \Delta y}\Delta x \Delta y +$$

$$+ \frac{f(x, y+2\Delta y) - 2f(x, y+\Delta y) + f(x,y)}{\Delta y^2}\Delta y^2$$

Op grond van het behandelde in §32 tot §34 kunnen wij voor deze uitdrukking schrijven:

$$\Delta^2 z = \frac{\Delta^2_{xx} f(x, y+2\Delta y)}{\Delta x^2}\Delta x^2 + 2\,\frac{\Delta^2_{xy} f(x, y+\Delta y)}{\Delta x \Delta y}\Delta x \Delta y + \frac{\Delta^2_{yy} f(x,y)}{\Delta y^2}\Delta y^2$$

Beschouwen wij nu Δx en Δy oneindig klein dan is

$$\lim \frac{\Delta^2_{xx} f(x, y+2\Delta y)}{\Delta x^2} = \frac{d^2 f(x.y)}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$\lim \frac{\Delta^2_{xy} f(x, y+\Delta y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{d^2 f(x.y)}{dx dy} = \frac{d^2 z}{dx dy}$$

en $$\lim \frac{\Delta^2_{yy} f(x.y)}{\Delta y^2} = \frac{d^2 f(x.y)}{dy^2} = \frac{d^2 z}{dy^2}$$

Derhalve is

$$\Delta^2 z = \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \delta\right)\Delta x^2 + 2\left(\frac{d^2 z}{dx dy} + \delta_1\right)\Delta x \Delta y + \left(\frac{d^2 z}{dy^2} + \delta_2\right)\Delta y^2$$

waarin:
δ, δ_1 en δ_2 grootheden zijn die gelijktijdig met Δx en Δy nul worden.

De tweede oneindig kleine aangroeiing van z bestaat dus uit een gedeelte dat oneindig klein is van de tweede orde en een gedeelte dat oneindig klein is van hooger orde. Het eerste of voornaamste deel noemen wij de <u>volledige tweede differentiaal van z</u>, welke dus, wanneer wy dx en dy in de plaats van Δx en Δy schrijven, wordt voorgesteld door:

$$d^2 z = \frac{d^2 z}{dx^2} dx^2 + 2\frac{d^2 z}{dx dy} dx dy + \frac{d^2 z}{dy^2} dy^2.$$

$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2$ wordt genoemd de partieele tweede differentiaal van z, tweemaal t.o. van x genomen

$\frac{d^2z}{dxdy}dxdy$ is de partieele tweede differentiaal van z eens t.o. van x en eens t.o. van y genomen.

$\frac{d^2z}{dy^2}dy^2$ is de partieele tweede differentiaal van z tweemaal t.o. van y genomen.

Op de zelfde wijze zouden wij voor de volledige derde differentiaal van z vinden:

$$d^3z = \frac{d^3z}{dx^3}dx^3 + 3\,\frac{d^3z}{dx^2dy}dx^2dy + 3\,\frac{d^3z}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3z}{dy^3}dy^3$$

en in 't algemeen:

$$d^nz = \frac{d^nz}{dx^n}dx^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 +$$
$$+ \text{enz} \ldots\ldots + \frac{d^nz}{dy^n}dy^n.$$

of in symbolischen vorm:

$$d^nz = \left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right)^n$$

indien men slechts na de ontwikkeling van het tweede lid door het binomium van Newton, elk product $\frac{dz^n}{dx^p dy^{n-p}}$ vervangt door het differentiaal quotient:

quotient: $\dfrac{d^n z}{dx^p dy^{n-p}}$

§37 Het behandelde in de voorafgaande paragrafen is gemakkelijk uittebreiden op functien van meer dan twee onderling onafhankelijk veranderlijke elementen.

Is b.v. $u = f(x, y, z)$ gegeven, zoo zullen de navolgende verschillende partieele tweede differentiaalquotienten bestaan:

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2}, \quad \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \frac{d^2u}{dxdz} \text{ en } \frac{d^2u}{dydz}$$

terwijl:

$$\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy}; \quad \frac{d^2u}{dzdx} = \frac{d^2u}{dxdz} \text{ en } \frac{d^2u}{dzdy} = \frac{d^2u}{dydz}$$

zullen zijn.

Van de bestaande partieele derde differentiaalquotienten zijn b.v.

$$\frac{d^3u}{dx^2dy} = \frac{d^3u}{dxdydx} = \frac{d^3u}{dydxdx}$$

en

$$\frac{d^3u}{dxdydz} = \frac{d^3u}{dxdzdy} = \frac{d^3u}{dzdxdy} = \frac{d^3u}{dzdydx} = \frac{d^3u}{dydxdz} = \frac{d^3u}{dydzdx}$$

enz, enz.

(De volledige n^{de} differentiaal wordt symbolisch voorgesteld door:

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz \right)^n$$

terwijl b.v.

$$\frac{d^n u}{dx^p dy^q dz^{n-p-q}} dx^p dy^q dz^{n-p-q}$$

zal voorstellen de partieele n^{de} differentiaal van ~~z~~ u, p maal t.o. van x, q maal t.o. van y en $n-p-q$ maal t.o. van z genomen.

G. Het afleiden der differentiaalquotienten van hoogere orden bij ingewikkelde functien.

§38. Indien y als eene ingewikkelde functie van x gegeven is door de vergelijking:

$$f(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

hebben wij in §25 reeds gevonden ter bepaling van het eerste differentiaalquotient de vergelijking:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Differentieeren wij deze vergelijking nogmaals en merken wij daarbij op dat zoowel $\frac{df}{dx}$ als $\frac{df}{dy}$ in het algemeen vormen zijn die x en y bevatten en dus de gedaante hebben van het voorste lid der vergelijking (1), derhalve, bij differentiatie en na deeling door dx, uitdrukkingen zullen opleveren als in (2) zijn aangegeven, dan vinden wij:

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{d^2f}{dydx}+\frac{d^2f}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

of na herleiding:

$$\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2f}{dxdy}+\frac{dy^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

waaruit, door substitutie der waarde van $\frac{dy}{dx}$ uit (2), gevonden wordt:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\left(\frac{df}{dy}\right)^2-2\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy}+\frac{d^2f}{dy^2}\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)^2}{\left(\frac{df}{dy}\right)^3}$$

Op dergelijke wijze kan men ook voor de volgende differentiaalquotienten de formules afleiden.

Aangezien wij deze formules, die vrij ingewikkeld worden, niet zullen gebruiken zullen wij haar ook niet afleiden, evenmin als de formules ter bepaling van de differentiaalquotienten $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, enz $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, enz, wanneer gelijktijdig gegeven zijn de vergelijkingen:

$$f(x,y,z)=0 \text{ en } F(x,y,z)=0$$

(zie §26)

§39. Is z gegeven als eene ingewikkelde functie van de elementen x en y door middel van de vergelijking:

$$f(x,y,z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Zoo hebben wij in §27 ter bepaling van de partieele differentiaalquotienten $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$ gevonden de vergelijkingen:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

en

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Differentieeren wij nu de vergelijking (2) opnieuw t.o. van x, en bedenken wij dat in 't algemeen $\frac{df}{dx}$ en $\frac{df}{dz}$ vormen zullen zijn die x, y en z bevatten, waardoor zij dus bij die differentiatie, na deeling door dx, uitdrukkingen zullen opleveren van de gedaante (2) zoo ver- krijgen wij:

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2f}{dz\,dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

of: $$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\,\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2f}{dx\,dz} + \frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

waaruit, na invoering van de waarde voor $\frac{dz}{dx}$ uit (2), wordt gevonden:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{df}{dz}\right)^2 - 2\,\frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot\frac{df}{dz}\cdot\frac{df}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2}{\left(\frac{df}{dz}\right)^3}$$

Evenzoo vinden wij uit (3) door differentiatie t.o. van y en invoering der waarde van $\frac{dz}{dy}$:

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{df}{dz}\right)^2 - 2\,\frac{d^2f}{dy\,dz}\cdot\frac{df}{dy}\cdot\frac{df}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{df}{dy}\right)^2}{\left(\frac{df}{dz}\right)^3}$$

Differentieeren wij echter de vergelijking (2) t.o. van y, zoo vinden wij:

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot\frac{dz}{dy} + \left(\frac{d^2f}{dz\,dy} + \frac{d^2f}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dy}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0$$

waaruit, na invoering der waarden van $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$ uit (2) en (3), wordt gevonden:

$$\frac{d^2z}{dxdy} = -\frac{\frac{d^2f}{dxdy}\left(\frac{df}{dz}\right)^2 - \frac{d^2f}{dxdz}\cdot\frac{df}{dy}\cdot\frac{df}{dz} - \frac{d^2f}{dydz}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dz} + \frac{d^2f}{dz^2}\cdot\frac{df}{dx}\cdot\frac{df}{dy}}{\left(\frac{df}{dz}\right)^3}$$

Wij zouden dezelfde waarde hebben verkregen indien wij de vergelijking (3) t.o. van x hadden gedifferentieerd.

De formules voor de hoogere differentiaalquotienten zullen wij niet afleiden; evenmin die welke kunnen worden verkregen voor de hoogere differentiaalquotienten, als wij te doen hebben met ingewikkelde functien waarop in §28 is gewezen.

H Het veranderen van onafhankelijk veranderlijke

§40. Wij hebben uit $y=f(x)$, in de onderstelling dat x het onafhankelijk veranderlijk element is, de achtereenvolgende differentiaalquotienten $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$, enz bepaald. Somtijds kan het gebeuren dat men de grootheid x liever beschouwen wil als de functie van eene andere grootheid t, die men alsdan als onafhankelijk veranderlijke wenscht aan te nemen, en het komt er dan op aan te berekenen de uitdrukkingen die men moet substitueeren voor de differentiaalquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, enz.

Zijn dus $y = f(x)$ en $x = \varphi(t)$ gegeven, zoo vinden wij door differentiatie met inachtneming van het geleerde in §20 sub. 4:

$$\frac{dy}{dt} = f'(x).\varphi'(t) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Differentieeren wij deze vergelijking op nieuw t.o. van t, zoo verkrijgen wij:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

nogmaals differentieerende:

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3x}{dt^3} + 3\,\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

enz, enz.

Losfen wij nu $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, enz op, zoo vinden wij:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - 3\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

enz, enz.

Uit de gevonden uitdrukkingen blijkt dat het differentiaalquotient $\frac{dy}{dx}$ steeds gelijk is aan de differentiaal van y gedeeld door de differentiaal van x, onverschillig of men x al dan niet als onafhankelijk veranderlijke beschouwt; dat daarentegen de uitdrukkingen voor $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, enz geheel veranderen en dus niet meer gelijk zijn aan de hoogere differentialen van y gedeeld door de overeenkomstige machten van dx. Dit komt omdat $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, enz zijn op-gemaakt in de onderstelling dat dx standvastig was, terwijl dit niet meer het geval is, zoodra x eene functie is van het onafhankelijk veranderlijk element t.

Wij kunnen dan ook de bovengevonden formule voor $\frac{d^2y}{dx^2}$ vinden door differentiatie van $\frac{dy}{dx}$, in de onderstelling dat de teller dy en de noemer dx van dit gebroken beiden veranderlijk zijn

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

enz.

§41. Somtijds kan het gebeuren dat men, na in $y = f(x)$ het element x als onafhankelijk veranderlijk te hebben beschouwd, later liever y als onafhankelijk veranderlijk element wil nemen.

Wil men nu weten wat wij voor de differentiaalquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, enz moeten substitueeren, zoo kunnen wij dit afleiden uit het behandelde in de voorgaande paragraaf.

Immers uit $y = f(x)$ volgt $x = \varphi(y)$ als omgekeerde functie, zoodat wij in de formules der voorgaande paragraaf slechts $t = y$ en

dus $\frac{dy}{dt} = 1$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dt^3} = 0$ enz. behoeven te stellen.
Wij verkrijgen derhalve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\cdot\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

enz:

§42. Als $y = f(x)$ gegeven is, kan het ook wel voorkomen dat men een nieuwe grootheid φ als onafhankelijk veranderlijke wil invoeren, zoodanig dat:

$$x = \mathfrak{F}(r, \varphi)$$

$$\text{en} \quad y = F(r, \varphi)$$

is, waarbij dan r eene functie van φ is.
Eene zoodanige verandering van onafhankelijk veranderlijke kan bijvoorbeeld voorkomen in de analytische meetkunde bij den overgang van rechtlijnige tot poolcoördinaten.
Differentieeren wij de gegeven vergelijkingen

bij herhaling t.o. van φ, zoo vinden wij:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dF}{d\varphi} + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dr}{d\varphi}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dF'}{d\varphi} + \frac{dF'}{dr} \cdot \frac{dr}{d\varphi}$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \frac{d^2F}{d\varphi^2} + 2\frac{d^2F}{dr\,d\varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \frac{d^2F}{dr^2} \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2}$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = \frac{d^2F'}{d\varphi^2} + 2\frac{d^2F'}{dr\,d\varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi} + \frac{d^2F'}{dr^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{dF'}{dr} \cdot \frac{d^2r}{d\varphi^2}$$

enz.

Wij behoeven nu slechts deze waarden te substitueeren in de uitdrukkingen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^3}, \text{ enz.}$$

die wij in § 40 gevonden hebben.

I. Eigenschappen van differentiaal-quotienten.

§ 43. Alvorens over te gaan tot de toepassingen der differentiaalrekening is het noodig de aandacht te vestigen op eenige eigenschappen van functiën van een onafhankelijk veranderlijk element in verband met hare afgeleide functien of differentiaalquotienten.

1° Eigenschap

De waarde eener vloeiende functie $y = f(x)$ zal, bij aangroeiende waarden van het element x, toenemende of afnemende zijn, naarmate de eerste afgeleide functie of het differentiaalquotient positief of negatief is

Uit de vergelijking:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \delta . \Delta x$$

(zie §15), waarin $\lim \delta = 0$ is, blijkt dat men Δx zoo klein kan nemen dat het teeken van Δy uitsluitend afhankelijk is van het teeken van het eerste gedeelte $f'(x)\,\Delta x$ van het tweede lid. Nemen wij derhalve alsdan Δx positief, zoo is het teeken van Δy in overeenstemming met dat van $f'(x)$, waarmede de eigenschap bewezen is.

Wordt voor eene waarde van $x = a$, $f'(x) = 0$ of ∞, zoo kunnen wij hieruit niet afleiden of de functie voor $x = a$ toenemende of afnemende is; wij moeten alsdan het teeken bepalen van $f'(a \pm h)$, waarin h een zeer klein positief bedrag voorstelt.

2e Eigenschap

Indien $y = f(x)$ en tevens $f'(x)$ eene vloeiende functie is tusschen de grenzen a en $a+h$, zoo zal

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$$

zijn, waarin θ eene grootheid voorstelt die tusschen 0 en 1 gelegen is.

Uit de beteekenis van afgeleide functie volgt dat:

$$f(a+h) - f(a) = h\{f'(a) + \delta\}$$

is, of $f'(a) + \delta = X$ stellende:

$$f(a+h) - f(a) - hX = 0$$

Wij zullen nu twee grenzen K en G trachten te vinden, waartusschen de waarde van X moet gelegen zijn.

Uit:

$$K < X < G$$

volgt dat zal moeten worden voldaan aan de ongelijkheden:

$$f(a+h) - f(a) - hK > 0$$

$$\text{en} \quad f(a+h) - f(a) - hG < 0$$

Als wij de eerste ongelijkheid beschouwen, dan blijkt dat het eerste lid eene functie van h is, die de eigenschap bezit nul te worden voor $h=0$, terwijl zij voor andere waarden van h positief moet zijn.

Het eerste differentiaalquotient dezer functie zal dus op grond van de voorgaande eigenschap positief moeten zijn; derhalve moet

$$f'(a+h) - K > 0$$

$$\text{of } f'(a+h) > K$$

Evenzoo vinden wij:

$$f'(a+h) < G.$$

Nemen wij dus voor K en G de kleinste en de grootste van de verschillende waarden die $f'(x)$ aanneemt als wij het element x laten veranderen van a tot $a+h$, zoo wordt aan beide ongelijkheden gelijktijdig voldaan.

Aangezien $f'(x)$ eene vloeiende functie moet zijn, althans binnen de bedoelde grenzen, zal zij zeker de waarde X, die tusschen K en G gelegen is, moeten aannemen voor eene waarde van x die tusschen a en $a+h$ valt of, wat het zelfde is, voor $x = a+\theta h$, waarin $1>\theta>0$ is.

Wij vinden dus $X = f'(a+\theta h)$ en derhalve:

$$f(a+h) - f(a) = h\,f'(a+\theta h).$$

Gevolg. Indien van eene functie het differentiaal-quotient voortdurend nul is, wanneer men het element van a tot $a+h$ laat veranderen, zoo is de functie constant tusschen die zelfde grenzen. Immers dan is $X = K = G = 0$ en derhalve $f(a+h) = f(a)$

3^e^ Eigenschap

Indien voor een bepaalde waarde van x, $y = f(x)$ oneindig groot wordt, zoo is voor die zelfde waarde van x ook de afgeleide functie oneindig groot.

Deze eigenschap bewijst men het gemakkelijkste als men de kromme lijn beschouwt die bij een rechthoekig assenstelsel $y = f(x)$ tot vergelijking heeft. Alsdan is $f'(x)$ de tangens van den hoek dien de raaklijn in het punt (x, y) maakt met de X as.

Is nu voor $x = a$, $y = \infty$, zoo is $x = a$ (eene asymptoot) de raaklijn in het punt (a, ∞) der kromme; deze raaklijn staat loodrecht op de X as en dus is de tangens van den hoek met de X as, dat is $f'(a)$, oneindig groot.

Gevolgen

1. Indien een bepaalde waarde van x eenig differentiaalquotient eener functie van x oneindig groot maakt, zoomaakt die waarde van x alle volgende differentiaalquotienten oneindig groot.

2. Elke bepaalde waarde van x die eenig differentiaalquotient eener functie eene eindige waarde geeft zal ook aan alle voorafgaande differentiaalquotienten en aan de functie zelve eene eindige waarde geven.

Hoofdstuk III

Analytische toepassingen der differentiaalrekening.

A. De reeksen van Taylor en Maclaurin

§44. (De toepassingen, die men van de differentiaalrekening maakt, kunnen van analytischen of meetkundigen aard zijn.
Tot de eerste kan men in de voornaamste plaats rekenen de ontwikkeling van eene functie in eene oneindig voortloopende reeks.
Indien men in eene functie $f(x)$ het element x vervangt door $x+h$, zoo kan men $f(x+h)$ in eene reeks ontwikkelen waarvan de termen gerangschikt zijn volgens de opklimmende machten van h en die naar haren uitvinder de reeks van Taylor genoemd wordt.
Stel dat wij in $y=f(x)$ aan het element x

achtereenvolgens de waarden $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, ... $x+n\Delta x$ toekennen, tengevolge waarvan de waarden der functie $y_1\ y_2 \ldots\ldots y_n$ worden (zie § 30), zoo vinden wij gemakkelijk:

$$y_1 = y + \Delta y$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$$
$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$$
enz.

$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1} = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \text{enz} + \Delta^n y$$

welke laatste uitdrukking ook kan geschreven worden in de gedaante:

$$y_n = y + \frac{\Delta y}{\Delta x}.n\Delta x + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}.n^2\Delta x^2 + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1.2.3}.\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}.n^3\Delta x^3 + \text{enz}$$

Stellen wij nu $n\Delta x = h$, zoo zal $n = \infty$ worden indien wij Δx oneindig klein nemen. Alsdan veranderen tevens $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ enz in de differentiaalquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, enz, en gaat de gevonden uitdrukking over in:

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}.\frac{h^3}{1.2.3} + \text{enz}$$

of:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \text{enz}$$

zijnde de reeks van Taylor.

Indien $f(x)$ een geheel rationaal polynomium in x van den n^{den} graad is, zal het tweede lid bestaan uit $n+1$ termen aangezien alsdan $f^n(x)$ eindig en alle volgende afgeleide functies gelijk nul zullen zijn (zie §31 a)

In alle andere gevallen zal het tweede lid bestaan uit een oneindig groot aantal termen.

Tot de bruikbaarheid van deze reeks wordt vereischt:

dat geen der afgeleide functies oneindig groot wordt;

dat zoowel $f(x)$ als alle afgeleide functies vloeiend veranderen, als men x laat aangroeien tot $x+h$;

en dat de reeks convergent zij voor de te bezigen waarden van h.

§45. Ter beoordeeling der convergentie zou men gebruik kunnen maken van de bekende kenmerken voor convergentie in de hoogere Stelkunde geleerd; evenwel kan men voor de reeks van Taylor eene uitdrukking vinden aangevende de som van alle termen welke op den n^{den} term volgen, en wij weten dat alsdan voor de convergentie vereischt wordt dat de limiet waartoe deze som nadert, bij het grooter worden van n, gelijk nul zij.

Gemakkelijk is in te zien dat deze som h^n tot factor zal hebben. Wij zullen, om redenen die zoo straks zullen blijken, de som voorstellen door $h^m R$, waarin alsdan $m \gtrless n$, doch voorloopig onbepaald is

Wij hebben dus:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \text{enz} + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + h^m R$$

of:

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{1.2} f''(x) - \text{enz} - \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) - h^m R = 0$$

waarin derhalve het voorste lid eene functie is die voor alle waarden van h gelijk nul zal maken zijn.

Vervangen wij nu h door $k + z - x$, zoo gaat onze vergelijking over in:

$$f(z+k) - f(x) - (k+z-x) f'(x) - \frac{(k+z-x)^2}{1.2} f''(x) - \\ - \text{enz} - \frac{(k+z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) - (k+z-x)^m R = 0 \ldots (1)$$

Het voorste lid dezer vergelijking is te beschouwen als eene functie van x die vloeiend zal veranderen als wij x laten veranderen van

$x = z$ tot $x = z + k$ toe, terwijl zij tevens voor deze beide waarden van x gelijk nul zal moeten zijn.

Wij zullen nu trachten voor R eene van x onafhankelijke waarde te vinden zoodanig dat de functie die wij gemakshalve door $F(x)$ voorstellen, aan deze voorwaarden blijft voldoen.

Door differentiatie vinden wij

$$F'(x) = -f'(x) - (k+z-x)f''(x) - \frac{(k+z-x)^2}{1.2}f'''(x) - \text{enz}$$
$$-\frac{(k+z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(x) + m(k+z-x)^{m-1}R +$$
$$+ f'(x) + (k+z-x)f''(x) + \text{enz} + \frac{(k+z-x)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}f^{n-1}(x) =$$
$$= m(k+z-x)^{m-1}R - \frac{(k+z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(x).$$

Ook deze functie van x zal vloeiend zijn van $x = z$ tot $x = z + k$, omdat ook $f^n(x)$ vloeiend is tusschen die grenzen.

Op grond van §43 sub 2. is derhalve:

$$F(z+k) - F(z) = k\,F'(z+\theta k)$$

waaruit, aangezien $F(z+k) = 0$ en $F(z) = 0$ is, volgt dat $F'(z+\theta k) = 0$

Wij verkrijgen derhalve de vergelijking:

$$m(k-\theta k)^{m-1}R - \frac{(k-\theta k)^{n-1}}{1.2\ldots\ldots(n-1)} f^n(z+\theta k) = 0$$

of:

$$R = \frac{k^{n-m}(1-\theta)^{n-m}}{m.1.2\ldots\ldots(n-1)} f^n(z+\theta k)$$

Substitueeren wij deze waarde in vergelijking (1) zoo vinden wij:

$$f(z+k) - f(x) - (k+z-x)f'(x) - \frac{(k+z-x)^2}{1.2} f''(x) - \text{enz}$$
$$- \frac{(k+z-x)^{n-1}}{1.2\ldots\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) - \frac{k^{n-m}(1-\theta)^{n-m}(k+z-x)^m}{m.1.2\ldots\ldots(n-1)} f^n(z+\theta h)$$

Wij kunnen nu hierin over m nog naar willekeur beschikken, mits wij slechts $m \leqq n$ nemen.
Stellen wij $m=n$, zoo wordt de reeks:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \text{enz} +$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{h^n}{1.2\ldots\ldots n} f^n(x+\theta h) \ldots\ldots (A)$$

Nemen wij $m=1$, zoo wordt zij

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \text{enz} +$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots\ldots(n-1)} f^n(x+\theta h) \ldots\ldots (B)$$

Hiermede is de reeks van Taylor derhalve in eindigen vorm gebracht. De sluitterm in (A) aangegeven is het eerst gevonden door Lagrange, die welke in (B) voorkomt het eerst door Cauchy.

Wij weten dat θ in deze beide uitdrukkingen eene grootheid is, die gelegen is tusschen 0 en 1, doch merken hierbij nog op dat natuurlijk θ in de bei„de vormen (A) en (B) niet dezelfde waarde heeft.

Ter beoordeeling van de convergentie is het in sommi„ge gevallen niet onverschillig van welken vorm men gebruik maakt.

<u>Opmerking</u>. Noemen wij h de oneindig kleine aan„groeiing van het element x in de functie $y=f(x)$ zoo neemt de reeks van Taylor de eenvoudige gedaante

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} + \text{enz.}$$

aan.

§46. Als wij in de reeks van Taylor $x=0$ stellen en daarna in plaats van h weder x schrijven verkrijgen wij:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \text{enz} + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(\theta x) \ldots\ldots (A)$$

of:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \text{enz} + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(0) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(\theta x) \ldots (B)$$

welke de reeks van Maclaurin genoemd wordt.
Zij dient ter ontwikkeling eener functie van x in eene reeks waarvan de termen gerangschikt zijn volgens de opklimmende machten van x.
Zij is slechts bruikbaar als $f(x)$ en alle afgeleide functien vloeiend zijn tusschen de grenzen 0 en x, geen der afgeleide functien voor $x=0$ oneindig groot worden en de reeks convergent is voor de beschouwde waarde van x.
Wij hebben hier de reeks van Maclaurin afgeleid uit die van Taylor; men had echter ook omgekeerd kunnen te werk gaan.

§47. Wij kunnen de reeks van Taylor gemakkelijk uitbreiden voor het geval men te doen heeft met meer dan een onafhankelijk veranderlijk element.
Wij zullen dit doen zien door de ontwikkeling van $f(x+h, y+k)$ in eene reeks waarvan de termen gerangschikt zijn volgens de opklimmende machten van h en k.
Stellen wij daartoe $h = at$ en $k = bt$ en beschouwen wij nu $f(x+at, y+bt)$ als eene functie van t, die wij gemakshalve voorstellen door

$F(t)$.

Volgens de reeks van Maclaurin is:

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1} F'(0) + \frac{t^2}{1.2} F''(0) + \text{enz} +$$

$$+ \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(0) + \frac{t^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta t) \ldots\ldots (1)$$

Nu is:

$$F(t) = f(x+at, y+bt) = f(u,v)$$

als wij gemakshalve $x+at = u$ en $y+bt = v$ stellen.

Door differentiatie vinden wij:

$$F'(t) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = a\frac{df}{du} + b\frac{df}{dv}$$

$$F''(t) = a\left(\frac{d^2f}{du^2} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{d^2f}{dudv} \cdot \frac{dv}{dt}\right) + b\left(\frac{d^2f}{dudv} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{d^2f}{dv^2} \cdot \frac{dv}{dt}\right) =$$

$$= a^2\frac{d^2f}{du^2} + 2ab\frac{d^2f}{dudv} + b^2\frac{d^2f}{dv^2}$$

enz.

Nu is:

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dx}, \quad \frac{df}{dv} = \frac{df}{dy}, \quad \frac{d^2f}{du^2} = \frac{d^2f}{dx^2},$$

$$\frac{d^2f}{dudv} = \frac{d^2f}{dxdy}, \quad \frac{d^2f}{dv^2} = \frac{d^2f}{dy^2}, \text{ enz}$$

derhalve:

$$F'(t) = a\frac{df}{dx} + b\frac{df}{dy}$$

$$F''(t) = a^2 \frac{d^2f}{dx^2} + 2ab \frac{d^2f}{dxdy} + b^2 \frac{d^2f}{dy^2}$$

enz. enz

$$F^n(t) = \left(a \frac{df}{dx} + b \frac{df}{dy}\right)^n$$

in symbolischen vorm, stellende deze uitdruk-kingen tevens voor de waarden van $F'(0)$, $F''(0)$, enz $F^n(0)$ als wij de differentiaalquotiën-ten nemen van de functie $f(x, y)$.
Door substitutie in (1) vinden wij derhalve:

$$f(x+at, y+bt) = f(x,y) + \frac{t}{1}\left(a\frac{df}{dx} + b\frac{df}{dy}\right) +$$
$$+ \frac{t^2}{1.2}\left(a\frac{df}{dx} + b\frac{df}{dy}\right)^2 + \text{enz} + \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\left(a\frac{df}{dx} + b\frac{df}{dy}\right)^{n-1} +$$
$$+ \frac{t^n}{1.2\ldots n} R.$$

waarin $R = \left(a\frac{df}{dx} + b\frac{df}{dy}\right)^n$, na daarin x door $x + a\theta t$ en y door $y + b\theta t$ te hebben vervangen; of wel $at = h$ en $bt = k$ stellende:

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \left(h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy}\right) + \frac{\left(h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy}\right)^2}{1.2} +$$
$$+ \text{enz} + \frac{\left(h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy}\right)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{R}{1.2\ldots n}$$

waarin R voorstelt de waarde van $\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}\right)^n$ na daarin x door $x+\theta h$ en y door $y+\theta k$ te hebben vervangen

Opmerkingen

1º Wij mogen niet vergeten dat in bovenbedoelde reeks $\left(h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}\right)^m$ een symbolische uitdrukking is en dus beteekent:

$$h^m\frac{d^mf}{dx^m}+mh^{m-1}k\frac{d^mf}{dx^{m-1}dy}+\text{enz}+k^m\frac{d^mf}{dy^m}.$$

2º Noemen wij h en k de oneindig kleine aangroeiingen van de elementen x en y in de functie $z=f(x,y)$, zoo neemt de gevonden reeks de eenvoudige gedaante:

$$\Delta z = dz + \frac{d^2z}{1.2}+\frac{d^3z}{1.2.3}+\text{enz}$$

aan, in vorm geheel overeenkomende met het gevondene aan het slot van §45.

3º Gemakkelijk zal men nu in staat zijn eene reeks afteleiden ter ontwikkeling van

$$F(x+h,\, y+k,\, z+l, \ldots\ldots)$$

volgens de opklimmende machten van $h, k, l \ldots\ldots$

§48 Als wij in de ontwikkeling van $f(x+h, y+k)$ in de voorgaande paragraaf gevonden $x=0$ en $y=0$ stellen en daarna weder de letters h en k door x en y vervangen, zoo verkrijgen wij:

$$f(x,y) = f(0.0) + x\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{df}{dy}\right)_0 + \frac{\left\{x\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{df}{dy}\right)_0\right\}^2}{1.2} +$$

$$+ \text{enz} + \frac{\left\{x\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{df}{dy}\right)_0\right\}^{n-1}}{1.2\ldots\ldots(n-1)} + \frac{R}{1.2\ldots n}$$

Zijnde de reeks van Maclaurin, toegepast op functien van twee veranderlijke grootheden en geschreven in symbolischen vorm, waarin $\left(\frac{df}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{df}{dy}\right)_0$ enz aangeven de waarden die $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, enz aannemen als men hierin $x=0$ en $y=0$ stelt, en R gelijk is aan

$$\left\{x\,\frac{df}{dx} + y\,\frac{df}{dy}\right\}^n$$

als men na de ontwikkeling van dezen symbolischen vorm, in de verschillende differentiaal-quotienten het element x door θx en y door θy vervangt.

B. Toepassingen van de reeks van Maclaurin.

§49. Ontwikkeling van e^x

Uit $f(x) = e^x$ volgt $f^n(x) = e^x$, $f^n(0) = 1$ en $f^n(\theta x) = e^{\theta x}$.

De reeks van Maclaurin geeft dus:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \text{enz} + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{x^n e^{\theta x}}{1.2\ldots n}$$

Deze reeks is convergent voor alle waarden van x, immers $\lim \frac{x^n e^{\theta x}}{1.2\ldots n} = \lim \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\ldots\frac{x}{n}\cdot e^{\theta x} = 0$

Om het nut van den sluitterm te doen zien, zullen wij de reeks gebruiken voor $x = 1$ en zes termen van de reeks in rekening brengen.

Wij vinden alsdan:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{e^\theta}{1.2.3.4.5.6} =$$

$$= 2{,}71\cancel{6} + \frac{e^\theta}{720}$$

Als wij derhalve slechts 6 termen van de reeks gebruiken zullen wij eene fout maken die gelijk is aan $\frac{e^\theta}{720}$ dus gelegen is tusschen

$\frac{1}{720}$ en $\frac{e}{720}$ of tusschen $\frac{1}{720}$ en $\frac{3}{720}$, want al moeten wij hier onderstellen de waarde van e niet te kennen, wij weten toch zeker dat $e < 3$ is

Wij leeren dus dat $e > 2,716 + 0,00138$ en $e < 2,716 + 0,00416$ is, m.a.w. dat e gelegen is tusschen $2,71803$ en $2,72083$.

Hadden wij tien termen van de reeks gebruikt, zoo zouden wij het getal e in 5 decimalen nauwkeurig verkrijgen.

§50. Ontwikkeling van $\sin x$ en $\cos x$

Van $f(x) = \sin x$ hebben wij in §31 sub d de achtereenvolgende afgeleide functien bepaald. Gemakkelijk volgt hieruit:

$$f^{2n}(0) = 0 \quad , \quad f^{2n+1}(0) = (-1)^n$$

Door substitutie in de reeks van Maclaurin vinden wij:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{enz} + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)} +$$

$$+ \frac{(-1)^n x^{2n} \sin\theta x}{1.2\ldots\ldots 2n}$$

Wij kunnen voor den sluitterm, zooals gemakkelijk is intezien, even goed schrijven:

$$\frac{(-1)^n x^{2n+1} \cos\theta x}{1.2 \ldots\ldots (2n+1)}$$

Aangezien de sluitterm tot nul nadert zal de reeks convergent zijn voor alle waarden van x.

Geheel op overeenkomstige wijze vindt men

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{enz} + \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{1.2 \ldots (2n-2)} + X.$$

waarin voor X

$$\frac{(-1)^n x^{2n-1} \sin\theta x}{1.2 \ldots\ldots (2n-1)} \text{ ofwel } \frac{(-1)^n x^{2n} \cos\theta x}{1.2 \ldots 2n}$$

kan genomen worden.

§ 51 Ontwikkeling van Neplog $(1+x)$

Neplog x is door de formule van Maclaurin niet in eene reeks te ontwikkelen, omdat deze functie voor $x = 0$ oneindig groot wordt. Wij zullen daarom Neplog $(1+x)$ in eene reeks ontwikkelen.

In § 31 sub 6 vonden wij uit $f(x) = \text{Neplog}(1+x)$

$$f^n(x) = (-1)^{n+1} (n-1)! (1+x)^{-n}$$

derhalve:

$$f(0) = 0$$

$$\text{en } f^n(0) = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

De reeks van Maclaurin geeft dus:

$$\text{Nep}\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{enz} + \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

Indien $x > 0$ maar $\overline{\leq} 1$ is, wordt

$$\lim \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n} = \lim \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n = 0$$

Is x negatief, dan is de vorm, waarin de sluitterm aangegeven is, ongeschikt ter beoordeeling der convergentie. Wij maken dan gebruik van de uitdrukking (B) van §46.

Deze sluitterm van Cauchy wordt in het onderhavige geval:

$$\frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n}$$

Is nu $x < 0$ maar > -1, zoo is $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ en vinden wij dus:

$$\lim \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n} = \lim \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{1+\theta x} = 0.$$

De reeks, voor Nep log $(1+x)$ gevonden, is derhalve convergent voor alle waarden van x gelegen tusschen -1 en $+1$ en tevens voor $x = 1$. Voor $x = -1$ is de reeks divergent, wat trouwens ook te verwachten was omdat voor die waarde Nep log $(1+x)$

negatief oneindig groot wordt en dus niet door een convergente reeks kan worden aangewezen.

§52 Ontwikkeling van boog tang x

Indien wij door eenvoudige differentiatie de achtereenvolgende afgeleide functien van boog tang$x$ bepalen, zoo is het niet gemakkelijk eene wet te ontdekken die ons in staat stelt de n^{de} afgeleide functie te bepalen.

Wij kunnen echter gemakkelijk eene formule afleiden waardoor wij in staat zijn de n^{de} afgeleide functie te berekenen wanneer de beide voorafgaande afgeleide functien bekend zijn.

Stellen wij toch:

$$f(x) = \text{boogtang}\, x$$

zoo is
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

waaruit volgt:

$$(1+x^2)f'(x) = 1.$$

Differentieeren wij nu bij herhaling zoo vinden wij:

$$(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$$
$$(1+x^2)f'''(x) + 4xf''(x) + 2f'(x) = 0$$
$$(1+x^2)f^{IV}(x) + 6xf'''(x) + 6f''(x) = 0$$

....

$$(1+x^2)f^{n}(x)+2(n-1)xf^{n-1}(x)+(n-1)(n-2)f^{n-2}(x)=0$$

Voor $x=0$ vinden wij derhalve de algemeene formule:

$$f^{n}(0)=-(n-1)(n-2)f^{n-2}(0)$$

welke doorgaat voor alle waarden van $n \geqq 3$

Nu is $f(0)=0$, $f'(0)=1$ en $f''(0)$, waaruit dus in verband met de formule volgt dat alle even afgeleide functien gelijk nul zijn en dat:

$$f'''(0)=-1.2$$
$$f^{V}(0)=+1.2.3.4$$
enz
$$f^{2n+1}(0)=(-1)^{n}1.2.3\ldots.2n$$

is.

Door substitutie in de reeks van Maclaurin vinden wij:

$$\text{boogtang}\, x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\text{enz}$$

eene reeks die convergent is voor alle waarden van x, begrep. in $x^2 \leqq 1$.

Met boogtang x wordt hier bedoeld de boog die kleiner is dan $\frac{1}{2}\pi$ en x tot tangens heeft.

Wanneer $x^2>1$ is zal de reeks ~~weinig~~ niet bruikbaar zijn ter berekening van boogtang x; wij kunnen echter alsdan gebruik maken van de volgende:

$$\text{boogtang}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{boogcot}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{boogtang}\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{enz.}$$

Opmerking.

Door de hier gevolgde methode hebben wij geen uitdrukking gevonden voor den sluitterm der reeks. Wij kunnen dezen wel langs andere wegen vinden, doch zullen dit achterwege laten.

C. Toepassingen van de reeks van Taylor

§53. Ontwikkeling van $\sin(x+h)$ volgens de opklimmende machten van h.

Stellen wij $f(x) = \sin x$, zoo is

$$f(x+h) = \sin(x+h)$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{iv}(x) = \sin x$$

enz. (Zie §31. sub d)

Door substitutie in de reeks van Taylor vinden wij derhalve

$$\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1}\cos x - \frac{h^2}{1.2}\sin x - \frac{h^3}{1.2.3}\cos x + \frac{h^4}{1.2.3.4}\sin x$$
$$+ \frac{h^5}{1.2.3.4.5}\cos x - \text{enz} + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi + x\right) + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\sin\left(\tfrac{1}{2}n\pi + x + \theta h\right)$$

Gemakkelijk blijkt dat in deze reeks de beide reeksen die wij in §49 voor $\sin x$ en $\cos x$ vonden begrepen zijn, als wij slechts in $\sin(x+h)$ achtereenvolgens $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}\pi$ stellen.
Op gelijke wijze kunnen wij eene reeks afleiden voor $\cos(x+h)$
Deze reeksen kunnen gebruikt worden bij het interpoleeren van Sinustafels.

§54. <u>Ontwikkeling van Neplog$(x+h)$</u> volgens de opklimmende machten van h.

Uit:
$$f(x) = \text{Neplog}\, x$$
volgt:
$$f^n(x) = (-1)^{n-1}\, 1.2\ldots\ldots(n-1)\, x^{-n}$$

Door substitutie in de reeks van Taylor vinden wij

$$\text{Neplog}\,(x+h) = \text{Neplog}\, x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \text{enz}$$
$$+ \frac{(-1)^n h^{n-1}}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{(-1)^{n+1} h^n}{n\,(x+\theta h)^n}$$

Schrijven wij dit resultaat in den vorm

$$\text{Neplog}\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\text{enz}$$

zoo blijkt deze reeks niet wezenlijk te verschillen van die welke in § 51 gevonden is.

D. Ontwikkeling van eenige functien door toepassing van de methode der onbepaalde Coëfficienten

§ 55 Alhoewel wij de reeks van Maclaurin kunnen gebruiken ter ontwikkeling van $\tan x$, zoo kunnen wij dit doel echter gemakkelijker bereiken door optemerken dat $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ is, en dus:

$$\tan x = \frac{x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{enz}}{1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{enz}} =$$

$$= x + Ax^3 + Bx^5 + \text{enz}$$

kan gesteld worden.

Hieruit volgt:

$$x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{enz}=\left(x+Ax^3+Bx^5+\text{enz}\right)\left(1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{enz}\right)$$

waaruit dan door toepassing van het geleerde in de hoogere Stelkunde de waarden van A, B, enz gevonden worden.

Men kan op dezelfde wijze te werk gaan voor het verkrijgen van reeksen voor cot x, sec x en cosec x.

Men zal vinden:

$$\tan g\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \text{enz}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \text{enz}$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \text{enz}$$

$$\text{cosec}\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15120} + \text{enz}$$

De wet van opvolging der coëfficienten is zeer ingewikkeld. Men kan door invoering van de zoogenaamde Bernoulliaansche getallen de wetten vinden.

§ 56 Dikwijls kan men met vrucht gebruik maken van de differentiaalrekening in verband met de theorie der onbepaalde coëfficienten.

Willen wij b.v. eene reeks vinden voor $\sin x$ zoo kunnen wij:

$$\sin x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \text{enz}$$

stellen. Vooreerst toch weten wij dat $\sin(-x) = -\sin x$ is, zoodat er geen evenmachten in de reeks kunnen voorkomen; verder is $\frac{\sin x}{x}$ voor $x = 0$ gelijk aan 1, waaruit blijkt dat de coëfficient van x de eenheid moet zijn.

Differentieeren wij nu de vergelijking twee malen achtereen, zoo vinden wij achtereenvolgens:

$$\cos x = 1 + 3Ax^2 + 5Bx^4 + 7Cx^6 + \text{enz}$$

$$-\sin x = 2.3Ax + 4.5Bx^3 + 6.7.Cx^5 + \text{enz}$$

waaruit in verband met de eerste vergelijking volgt:

$$1 = -2.3A$$
$$A = -4.5B$$
$$B = -6.7.C$$
$$\text{enz}$$

of: $A = -\frac{1}{1.2.3}$, $B = \frac{1}{1.2.3.4.5}$, $C = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$ enz

Bij substitutie dezer waarden in de beide eerste vergelijkingen, verkrijgen wij de reeds vroeger gevonden ontwikkelingen voor $\sin x$ en $\cos x$.

§57. Ontwikkeling van Boog sin x

Stellen wij

$$\text{Boog} \sin x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \text{enz}$$

Gemakkelijk blijkt weder dat de coefficient van x de eenheid moet zijn en even machten niet kunnen voorkomen in het tweede lid.

Door differentiatie vinden wij:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + 3Ax^2 + 5Bx^4 + 7Cx^6 + \text{enz}$$

of $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ volgens het binomium van Newton in eene reeks ontwikkelende:

$$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}x^6 + \text{enz} = 1 + 3Ax^2 + 5Bx^4 + 7Cx^6 + \text{enz}$$

waaruit blijkt:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \quad , \quad B = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} \quad , \quad C = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7} \quad \text{enz}$$

en dus:

$$\text{Boog} \sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7} + \text{enz.}$$

E. Over het verband tusschen goniometrische en exponentiale functien door middel van onbestaanbare uitdrukkingen.

§58. Bij de oplossing van de vierkantsvergelijkingen, die geen bestaanbare wortels hebben, hebben wij deze verkregen in de gedaante

$$a \pm b\sqrt{-1}.$$

waarin a en b bestaanbare waarden voorstellen en $\sqrt{-1}$ het symbool is voor de uitdrukking die tot de tweede macht gebracht -1 zou opleveren.

Men heeft de onbestaanbare uitdrukkingen $a \pm b\sqrt{-1}$, waaraan men ook den naam van complexe vormen heeft gegeven, in wiskunstige beschouwingen ingevoerd als een vermogend hulpmiddel tot het afleiden van verschillende betrekkingen tusschen bestaanbare grootheden.

Elke vergelijking tusschen complexe vormen; dat is dus eene vergelijking die onbestaanbare uitdrukkingen bevat, geeft aanleiding tot twee vergelijkingen tusschen bestaanbare vormen, want uit

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$$

volgt dat:

$$a = c \quad \text{en} \quad b = d$$

is

Elke onbestaanbare vorm van de gedaante: $a + b\sqrt{-1}$ kan worden voorgesteld door

$$r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

Hiertoe wordt vereischt dat:

$$r\cos\varphi = a \quad \text{en} \quad r\sin\varphi = b$$

is, of:

$$r = \sqrt{(a^2+b^2)}\ , \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\ , \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

Men noemt r de <u>modulus</u> en φ het <u>argument</u> van den onbestaanbaren vorm, terwijl men voor r steeds den positieven wortel van a^2+b^2 en voor φ een boog kiest die kleiner is dan 2π

§59 Bepaalt men het product van twee onbestaanbare vormen $\cos x + \sqrt{-1}.\sin x$ en $\cos y + \sqrt{-1}.\sin y$, zoo wordt het bestaanbare deel: $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$ en de factor van $\sqrt{-1}$: $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)$; derhalve is:

$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}.\sin(x+y)$$

Evenzoo vinden wij

$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}.\sin z) =$$
$$= \cos(x+y+z) + \sqrt{-1}.\sin(x+y+z)$$

en een overeenkomstig resultaat voor meerdere factoren.

Zijn er n factoren en stellen wij vervolgens $x = y = z =$ enz, zoo geraken wij tot de vergelijking:

$$(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}.\sin nx \;\ldots\ldots (1)$$

welke de formule van Moivre genoemd wordt.

Alhoewel men uit de afleiding der formule slechts mag besluiten dat zij alleen doorgaat voor positieve geheele waarden van n, zoo zal echter later blijken dat zij te gebruiken is voor alle waarden van n.

Wanneer men het voorste lid van de vergelijking (1) volgens het binomium van Newton in eene reeks ontwikkelt, dan geeft de vergelijking aanleiding tot de beide vergelijkingen:

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\sin^4 x - \text{enz}$$

en

$$\sin nx = n\cos^{n-1}x\sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \text{enz}$$

formules die ons in staat stellen den Sinus en den cosinus van het veelvoud van een boog uit te drukken in een rationalen vorm van den Sinus en den Cosinus van den enkelen boog.

Cos nx kan steeds rationaal in cos x alleen worden uitgedrukt; Sin nx daarentegen kan slechts dan alleen in sin x rationaal worden aangegeven, wanneer n oneven is.

§60. Wanneer men in de reeksontwikkeling

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{enz}$$

de grootheid x vervangt door $x\sqrt{-1}$, zoo is men overeengekomen om het resultaat voor te stellen door $e^{x\sqrt{-1}}$, m.a.w. men neemt aan de waarheid van de vergelijking:

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{enz}$$

Nemen wij nu de bestaanbare termen te zamen en evenzoo die welke $\sqrt{-1}$ tot factor hebben, dan laat zich deze vergelijking, op grond van de vroeger voor cos x en sin x gevonden reeksen, schrijven in de gedaante:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}.\sin x \text{ .... } (2)$$

Vervangen wij in deze vergelijking x door nx of wel brengen wij de beide leden tot de n^{de} macht, zoo zal het voorste lid in beide gevallen overgaan in $e^{nx\sqrt{-1}}$ en dus gevonden worden: (*)

$$\cos nx + \sqrt{-1}.\sin nx = (\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^n$$

zijnde weder de formule van Moivre, die nu blijkt voor alle waarden van n doorte gaan.

Hadden wij, in de reeksontwikkeling voor e^x, x vervangen door $-x\sqrt{-1}$ zoo zouden wij hebben gevonden:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}.\sin x \text{ .... } (3)$$

evengoed uit (2) afteleiden.

Uit (2) en (3) volgt:

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \text{ .... } (4)$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \text{ .... } (5)$$

(*) Men neemt aan dat $e^{x\sqrt{-1}}.e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}$ is, enz.

Deze vergelijkingen, die het eerst door Euler gevonden zijn, moeten beschouwd worden als symbolische uitdrukkingen. Zij geven het verband aan dat er bestaat tusschen de goniometrische en exponentiale functien.

§61. In §58 zagen wij dat men elken onbestaanbaren vorm kan schrijven in de gedaante:

$$r(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)$$

Op grond van het voorafgaande kunnen wij gemakkelijk aantoonen dat men eveneens elken onbestaanbaren vorm kan schrijven in de gedaante

$$e^{x+y\sqrt{-1}}$$

Immers:

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x.e^{y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y)$$

Opdat dus:

$$e^x(\cos y + \sqrt{-1}.\sin y) = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)$$

worde, moet worden voldaan aan:

$$e^x\cos y = r\cos\varphi \quad \text{en} \quad e^x\sin y = r\sin\varphi$$

dus: $\quad e^{2x} = r^2\,,\ e^x = r$ of $x = \text{Neplog}\,r$

en $\cos y = \cos\varphi$, $\sin y = \sin\varphi$ of $y = \varphi + 2n\pi$.

In verband met §58 weten wij dus dat:

$$a + b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\text{Neplog}(a^2+b^2) + (\varphi + 2n\pi)\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots (6)$$

is, waarin φ voorstelt een boog kleiner dan 2π zoodanig dat:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ en } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ is.}$$

§62. Nemen wij weder aan dat de exponent van e in de vergelijking (6) mag worden beschouwd te zijn de neperiaansche logarithmus van den onbestaanbaren vorm $a+b\sqrt{-1}$, dan is dus:

$$\text{Nep}\log(a+b\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}\,\text{Nep}\log(a^2+b^2) + (\varphi+2n\pi)\sqrt{-1}$$

waaruit blijkt dat de vorm $a+b\sqrt{-1}$ een oneindig groot aantal verschillende logarithmen heeft, aangezien men aan n alle mogelijke geheele positieve en negatieve waarden kan toekennen.

In de hier beschouwde vergelijking heeft Neplog. in het tweede lid de gewone beteekenis, doch in het voorste lid de ruimere beteekenis die wij daar aan zoo even toekenden.

Stellen wij $b=0$, dus $\varphi=0$ of $\varphi=\pi$, naarmate a positief of negatief is, en nemen wij voor a achtereenvolgens een positieve en een negatieve waarde die wij duidelijkheidshalve zullen voorstellen door A en $-A$, dan is

$$\text{Nep}\log A = \text{Nep}\log A + 2n\pi\sqrt{-1}$$

en

$$\text{Neplog}\,(-A) = \text{Neplog}\,A + (2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Uit deze vergelijkingen blijkt dat elk positief getal een bestaanbare maar een oneindig groot aantal onbestaanbare logarithmen bezit, terwijl een negatief getal slechts onbestaanbare logarithmen heeft.

F. Het bepalen van de werkelijke waarden van uitdrukkingen die onder onbepaalde voorkomen.

§63. Indien eene functie van x voor eene bepaalde waarde van het element een der volgende gedaanten:

$$\frac{0}{0}\,,\ \frac{\infty}{\infty}\,,\ 0\times\infty\,,\ \infty-\infty\,,\ 0^0\,,\ 1^\infty\,,\ \infty^0$$

aanneemt, zoo schijnt de functie voor de bedoelde waarde van het element onbepaald te worden; in de meeste gevallen echter zal de functie alsdan toch eene bepaalde en eindige waarde hebben.

Zoo b.v. zal $\dfrac{x^2-a^2}{x^2+ax-2a^2}$ voor $x=a$ gelyk worden aan $\frac{0}{0}$. Deelen wij teller en noemer van het gebroken door $x-a$, zoo wordt de breuk:

$\frac{x+a}{x+2a}$, welke voor $x=a$ gelijk wordt aan $\frac{2}{3}$.

(De onbepaalde gedaante werd hier veroorzaakt door het aanwezig zijn van den factor $x-a$, in teller en noemer, die voor $x=a$ gelijk nul is.
Neemt nu in het algemeen $f(x)$ voor $x=a$ eene onbepaalde gedaante aan, zoo verstaat men door de waarde van $f(a)$ de limiet waartoe $f(a+h)$ nadert indien h nadert tot nul.
Zoo is dan ook in het bovenstaande voorbeeld

$$\lim \frac{(a+h)^2-a^2}{(a+h)^2+a(a-h)-2a^2} = \lim \frac{2ah-h^2}{3ah+h^2} = \frac{2}{3}$$

de waarde van:

$$\frac{x^2-a^2}{x^2+ax-a^2} \text{ voor } x=a \quad (\text{Zie ook §§ 7 en 12})$$

§ 64. Alhoewel dikwijls geringe stelkunstige herleidingen voldoende zijn om de wezenlijke waarden van uitdrukkingen, die onder onbepaalde vormen voorkomen, te bepalen, zoo levert de differentiaalrekening echter het vermogende hulpmiddel op om het doel zeker

te bereiken (zie echter §69)
Wij zullen achtereenvolgens de in de voorgaan-de paragraaf aangegeven vormen behandelen.

De gedaante $\frac{0}{0}$.

§65. Zij $\frac{f(x)}{F(x)}$ het gebroken dat voor $x = a$ de gedaante $\frac{0}{0}$ aanneemt, dan is ingevolge het voorafgaande $\lim \frac{f(a+h)}{F(a+h)}$, voor $\lim h = 0$, de wezenlijke waarde van het gebroken voor $x = a$.

Ontwikkelen wij $f(a+h)$ en $F(a+h)$ volgens de reeks van Taylor, zoo is:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \text{enz}}{F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{1.2}F''(a) + \text{enz}}$$

en daar nu $f(a) = 0$ en $F(a) = 0$ is, vinden wij onmiddellijk:

$$\lim \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

Voor $x = a$, is derhalve:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

Het kan gebeuren dat ook $f'(x)$ en $F'(x)$ nul worden voor $x = a$, ja zelfs ook nog volgende afgeleide functien voor die waarde van x.
Gemakkelijk zien wij in dat, indien $f^m(x)$ en $F^m(x)$ de afgeleide functien zijn die voor het eerst niet gelijktydig nul worden voor $x = a$,

$$\lim \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f^m(a)}{F^m(a)}$$

en dus voor $x = a$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f^m(x)}{F^m(x)}$$

is.(*)

Voorbeeld.

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \text{ (voor } x=0) = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

(*) Ook voor $a = \infty$ mag deze regel worden toegepast, het welk gemakkelyk is aantetoonen door $x = \frac{1}{y}$ te stellen, en op de verkregen functie in y den regel toetepassen voor $y = 0$.

De gedaante: $\frac{\infty}{\infty}$

§66. Neemt het gebroken $\frac{f(x)}{F(x)}$ voor $x = a$ de gedaante $\frac{\infty}{\infty}$ aan, zoo schrijven wij de breuk in den vorm:

$$\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

waardoor zij, voor $x = a$, de waarde $\frac{0}{0}$ verkrijgt. Nu is dus:

$$\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}} (\text{voor } x = a) = \frac{-\frac{F'(x)}{\{F(x)\}^2}}{-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}} = \left\{\frac{f(x)}{F(x)}\right\}^2 \cdot \frac{F'(x)}{f'(x)} = \frac{f(x)}{F(x)}$$

derhalve is voor $x = a$.

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

Wanneer derhalve eene breuk de gedaante $\frac{\infty}{\infty}$ aanneemt, zoo bepalen wij de wezenlijke waarde op dezelfde wijze als in de voorgaande paragraaf is aangegeven.

Voorbeeld.

$$\frac{x+\tan x}{1+\sec x}\left(\text{voor } x=\tfrac{1}{2}\pi\right)=\frac{1+\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}=\frac{1+\cos^2 x}{\sin x}=1$$

De gedaanten $0\times\infty$ en $\infty-\infty$

§67. Indien eene functie van x, voor $x=a$, een der gedaanten $0\times\infty$ of $\infty-\infty$ aanneemt, zoo kunnen wij de functie schrijven in een zoodanigen vorm dat zij na substitutie van $x=a$ de gedaante $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ aanneemt en dan volgens het voorgaande de wezenlijke waarde bepalen.

Zoo zal $f(x).F(x)$, voor $x=a$ $0\times\infty$ wordende, te schrijven zijn in de gedaante:

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}} \quad \text{of} \quad \frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

die respectievelijk voor $x=a$, $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$ zullen worden.

Evenzoo zal $f(x)-F(x)$ geschreven kunnen worden in de gedaante:

$$\frac{\frac{1}{F(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x).F(x)}}$$

die $\frac{0}{0}$ wordt voor $x=a$, indien $f(a)$ en $F(a)$ beiden ∞ zijn.

Voorbeelden

a.)
$$(1-x)\tang \tfrac{1}{2}\pi x = \frac{1-x}{\cot \frac{1}{2}\pi x} (\text{voor } x=1) = \frac{-1}{-\dfrac{\frac{1}{2}\pi}{\sin^2 \frac{1}{2}\pi x}} = \frac{2}{\pi}$$

b.)
$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\text{Neplog}\, x} = \frac{x\,\text{Neplog}\, x - x + 1}{(x-1)\,\text{Neplog}\, x} (\text{voor } x=1) =$$
$$= \frac{\text{Neplog}\, x}{\text{Neplog}\, x + \dfrac{x-1}{x}} = \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

De gedaanten $0^0, 1^\infty, \infty^0$.

§68 Neemt eene functie van x voor $x=a$ een dezer gedaanten 0^0, 1^∞ of ∞^0 aan, zoo zal men die functie in het algemeen kunnen voorstellen door.
$$f(x)^{F(x)}.$$
Merken wij nu op dat
$$f(x)^{F(x)} = e^{F(x)\,\text{Neplog} f(x)}$$
is, zoo blijkt dat voor $x=a$ de exponent van

e steeds de gedaante $0\times\infty$ zal aannemen, wanneer $f(a)^{F(a)}$ de waarden 0^0, 1^∞ of ∞^0 verkrijgt.

Volgens het geleerde in de voorgaande paragraaf bepalen wij dus de wezenlijke waarde van den exponent van e, waardoor tevens de waarde van de oorspronkelijke functie is gevonden.

Voorbeelden.

a.) $\tan x^{\frac{1}{Nep\log \sin x}}$ neemt, voor $x=0$, de gedaante 0^0 aan.

Nu is $\frac{Nep\log\tan x}{Nep\log\sin x}$ (voor $x=0$) $= \frac{\frac{1}{\cos x\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$

derhalve is $\tan x^{\frac{1}{Nep\log\sin x}}$ (voor $x=0$) $= e^1 = e$

b.) $\tan x^{\tan 2x}$ wordt 0^0 voor $x=0$, 1^∞ voor $x=\frac{1}{4}\pi$ en ∞^0 voor $x=\frac{1}{2}\pi$.

Nu is: $\frac{Nep\log\tan x}{\cot 2x}$ (voor $x=0, \frac{1}{4}\pi$ of $\frac{1}{2}\pi$) $= \frac{\frac{1}{\cos x\sin x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} =$

$= -\sin 2x$, dus 0 voor $x=0$ en voor $x=\frac{1}{2}\pi$ en -1 voor $x=\frac{1}{4}\pi$.

Wij vinden derhalve dat de opgegeven vorm voor $x=0$ en voor $x=\frac{1}{2}\pi$ de waarde 1 en voor $x=\frac{1}{4}\pi$ de waarde

$\frac{1}{e}$ verkrijgt.

c.)

$(a+be^{\tan g x})^{\pi-2x}$ wordt ∞^0 voor $x=\frac{1}{2}\pi$.

$$\frac{\text{Neplog}\,(a+be^{\tan g x})}{\frac{1}{\pi-2x}}\ (\text{voor } x=\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{\frac{be^{\tan g x}}{\cos^2 x\,(a+be^{\tan g x})}}{\frac{2}{(\pi-2x)^2}} =$$

$$2\cdot\frac{be^{\tan g x}}{a+be^{\tan g x}}\cdot\left\{\frac{\frac{1}{2}\pi-x}{\sin(\frac{1}{2}\pi-x)}\right\}^2 = 2.$$

Derhalve heeft de opgegeven functie voor $x=\frac{1}{2}\pi$ de waarde e^2.

§69 Uit het voorgaande is gebleken dat men bij het bepalen van de wezenlijke waarde van functien die onder onbepaalde vormen voorkomen steeds de vraag terugbrengt tot het eerste of tweede geval, dat is de waardebepaling van een gebroken dat de gedaante $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ aanneemt.

Het kan nu voorkomen dat men by toepassing van het aangegevene in §65 en §66 vrij groote bewerkingen verkrijgt en somtijds zelfs stuit op gebrokens die steeds $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ blijven.

Men zal alsdan zijn toevlucht kunnen of moeten nemen tot andere middelen. Dikwijls zal een geringe stelkunstige herleiding of ontbinding in factoren op het juiste oogenblik toegepast (zie b.v. voorgaande paragraaf sub c) voldoende zijn om de moeilijkheid te ontloopen; meestal echter zal men zyne toevlucht moeten nemen tot de toepassing van het algemeene beginsel aangegeven in § 63, waarbij men dan veelal van reeksontwikkeling zal moeten gebruik maken.

Voorbeelden.

a.) $$\frac{x}{\sqrt{-\,Neplog\cos x}}$$ wordt $\frac{0}{0}$ voor $x=0$.

Nu is:

$$\frac{x}{\sqrt{-\,Neplog\cos x}}\,(\text{voor } x=0) = \frac{1}{\dfrac{\tan g\, x}{2\sqrt{-\,Neplog\cos x}}} = \frac{2\sqrt{-\,Neplog\cos x}}{\tan g\, x}$$

en hoever men nu ook doorgaat steeds zal men bij substitutie van $x=0$ de waarde $\frac{0}{0}$ vinden. Uit het hier verkregen resultaat blijkt echter dat voor $x=0$

$$\frac{x}{\sqrt{-\,Neplog\cos x}} = \frac{2\sqrt{-\,Neplog\cos x}}{x}\cdot\frac{x}{\tan g\, x}$$

is, derhalve:

$$\frac{x^2}{-\,\mathrm{Neplog}\cos x} = \frac{2x}{\tang x} = 2$$

en dus:

$$\frac{x}{\sqrt{-\,\mathrm{Neplog}\cos x}} = \sqrt{2}$$

is.

Men zou onmiddellijk tot dit resultaat zijn gekomen door slechts de wezenlijke waarde van het vierkant van den opgegeven vorm, d.i. van $\dfrac{x^2}{-\,\mathrm{Neplog}\cos x}$ voor $x = 0$, te bepalen.

b.)

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2-a^2)}} \text{ (voor } x=a) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{(x-a)}}}{\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(x+a)}}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Wij hebben hier $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ in den teller weggelaten ten opzichte van den (voor $x = a$) oneindig grooten term $\dfrac{1}{2\sqrt{(x-a)}}$.

(Zie hierbij § 12)

c.)

$$\frac{\text{Boog}\sin x - e^x \sin x + x^2}{\text{Boog}\tan x - x} \text{ wordt } \frac{0}{0} \text{ voor } x = 0.$$

Merken wij op dat:

$$\text{Boog}\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \text{enz}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \text{enz}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \text{enz}$$

en:

$$\text{Boog}\tan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \text{enz}$$

is, zoo vinden wij onmiddellijk dat de opgegeven vorm gelijk is aan:

$$\frac{-\frac{1}{6}x^3 + \text{enz}}{-\frac{1}{3}x^3 + \text{enz}}$$

welke voor $x = 0$ gelijk aan $\frac{1}{2}$ wordt.

§70. Het kan gebeuren dat bij het bepalen van het differentiaalquotient $\frac{dy}{dx}$ uit eene gegeven vergelijking $f(x, y) = 0$, zoowel $\frac{df}{dx}$ als $\frac{df}{dy}$ nul worden voor eene waarde $x = a$ en dus $\frac{dy}{dx}$ de gedaante $\frac{0}{0}$ aanneemt.

Wij weten dat alsdan voor $x = a$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

of:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d^2f}{dy^2} + 2\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dx^2} = 0$$

Deze vergelijking zou men ook hebben verkregen door $f(x,y)=0$ tweemaal achtereen te differentieeren en daarna $\frac{df}{dy} = 0$ te stellen.

Vinden wij op nieuw voor $\frac{dy}{dx}$ de uitdrukking $\frac{0}{0}$ zoo kunnen wij door driemaal differentieeren gemakkelijk een vergelijking in $\frac{dy}{dx}$ van den derden graad verkrijgen; enz.

Door het invoeren van nieuwe veranderlijken kan men dikwijls de wezenlijke waarde gemakkelijker bepalen.

Voorbeeld.

Bepaal de waarde van $\frac{dy}{dx}$ uit de vergelijking: $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ voor $x = 0$.

Voor $x=0$, wordt $y=0$ en dus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2-ay}{y^2-ax} = \frac{0}{0}$$

Uit:

$$x^2-ay+(y^2-ax)\frac{dy}{dx}=0$$

vinden wij door differentiatie, voor $x=0$

$$-a\frac{dy}{dx}+\left(2y\frac{dy}{dx}-a\right)\frac{dy}{dx}=0$$

derhalve:

$$\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dx}=\infty.$$

Wij hadden de waarde ook kunnen vinden door op te merken dat voor $x=0$ en $y=0$

$$\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

zijn moet. Stellen wij $\frac{y}{x}=t$, dan wordt de gegeven vergelijking:

$$x(1+t^3)-3at=0$$

of

$$x = \frac{3at}{1+t^3}$$

waaruit blijkt dat $x=0$ wordt zoowel voor $t=0$ als voor $t=\infty$.

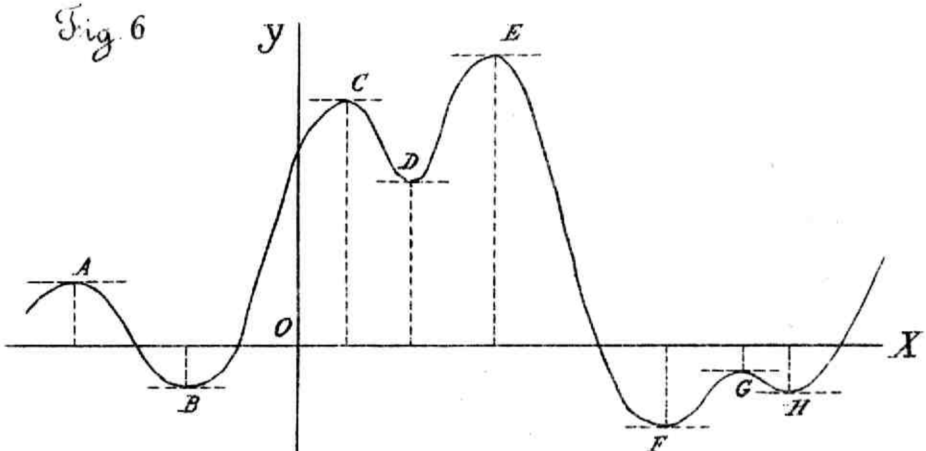
G. Theorie der maxima en minima.

a. Uitgedrukte functien van een onafhankelijk veranderlijke grootheid.

§71. Zij $y = f(x)$ eene uitgedrukte vloeiende functie, dan kan deze van dien aard zijn dat zij bij voortdurend aangroeiende waarden van x, binnen twee bepaalde grenzen, aanvankelijk aangroeit om later af te nemen, in welk geval er dus eene waarde $x = a$ binnen die grenzen is aan te wijzen, waarvoor de functie eene grootste of maximumwaarde verkrijgt.
Zij kan echter, bij voortdurende aangroeiing van x, ook aanvankelijk afnemen om later weder aan te groeien, in welk geval er eene waarde van x is aan te wijzen waarvoor de functie eene kleinste of minimumwaarde verkrijgt.
Geeft men aan het element x alle moge-

lijke waarden dan kan de functie van dien aard zijn dat zij dan eens afnemende en dan weêr aangroeiende is, zoodat de functie verschillende minimum- en maximumwaarden verkrijgt. Een maximumwaarde kan daarbij zeer goed kleiner zijn dan eene gevonden minimumwaarde, terwijl een negatief maximum of minimum mag worden beschouwd als een minimum of maximum, als men het teeken der functie niet in acht neemt.

Fig. 6



Een en ander is gemakkelijk te zien in bovenstaande figuur, waarin $y = f(x)$ door eene kromme lijn is voorgesteld. Zoo is in D de functie een minimum terwijl zij daar toch grooter waarde heeft dan in

A, alwaar zij een maximum is. In ~~B~~ en C is de functie een maximum en in B, F en H een minimum; letten wij niet op het teeken dus op den negatieventoestand waarin de functie alsdan verkeert, zoo zien wij dat men de absolute waarde der functie moge beschouwen in ~~B~~ en C een minimum en in B, F en H een maximum te zijn.

Een functie is dus voor $x = a$ een maximum of een minimum indien zy de grootste of de kleinste is van drie onmiddellijk op elkaâr volgende waarden dier functie

Is derhalve voor eene oneindig kleine waarde van h gelijktijdig

$$\left.\begin{array}{r} f(a) > f(a+h) \\ \text{en} \quad f(a) > f(a-h) \end{array}\right\} \dots\dots (1)$$

Zoo is $f(x)$ voor $x = a$ een maximum; is daarentegen gelijktijdig:

$$\left.\begin{array}{r} f(a) < f(a+h) \\ \text{en} \quad f(a) < f(a-h) \end{array}\right\} \dots\dots (2)$$

Zoo is $f(x)$ voor $x = a$ een minimum

§72. In §43, sub 1°, hebben wij gezien dat eene functie van x, bij aangroeiende waarden van het element, aangroeiende of afnemende is naarmate de afgeleide functie positief of negatief is

Wanneer dus voor alle waarden van x de eerste afgeleide functie het zelfde teeken behoudt kan de functie geen maximum of minimum worden, gaat de afgeleide functie daarentegen van den positieven in den negatieven toestand over dan is de functie een maximum; heeft de overgang evenwel plaats van den negatieven in den positieven toestand zoo is de functie een minimum.

Willen wij derhalve nagaan voor welke waarden van x, $f(x)$ een maximum of minimum wordt, zoo hebben wij slechts te onderzoeken voor welke waarden van x, $f'(x)$ van teeken verandert.

Deze teekenverandering kan slechts plaats hebben voor die waarden van x welke voldoen aan de vergelyking:

$$f'(x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

of aan de vergelyking:

$$f'(x) = \infty \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wanneer men althans de zeldzaam voorkomen-de gevallen uitzondert, waarin $f'(x)$ niet vloeiend is en dus $f'(x)$ plotseling met overspringing van een oneindig groot aantal waarden van teeken verandert. (zie § 74 sub g)

Om te onderzoeken of de waarden die voldoen aan een der vergelijkingen (3) of (4) werkelijk de functie tot een maximum of minimum maken hebben wij slechts nategaan of zij $f'(x)$ van teeken doen veranderen of wel wij kunnen deze toetsen aan de ongelykheden (1) en (2).

§ 73. Voor alle waarden van x die voldoen aan de vergelijking $f'(x) = 0$ kunnen wij nog op eene andere wijze onderzoeken of zij de functie al dan niet tot een maximum of minimum maken.

Ontwikkelen wij $f(x+h)$ volgens de reeks van Taylor, zoo is:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + h^3R$$

Stellen wij nu dat eene waarde $x = a$, $f'(x)$ gelijk nul maakt, doch daarentegen $f''(a)$ positief is, dan blijkt uit:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{1.2} f''(a) + h^3R$$

dat voor een oneindig kleine positieve of negatieve waarde van h het tweede lid hetzelfde teeken heeft als $f''(a)$ derhalve positief is.

$f(x)$ is dus een <u>minimum</u> voor $x=a$.

Was $f''(a)$ negatief dan zou $f(x)$ een <u>maximum</u> zijn voor $x=a$.

Is $f''(a)=0$, dan hebben wij de reeksontwikkeling slechts een term verder voort te zetten.

Uit:

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^3}{1.2.3}f'''(a)+h^4R$$

blijkt nu dat indien $f'''(a)$ niet gelijk nul is voor eene oneindig kleine waarde van h het tweede lid van teeken zal veranderen als men h van teeken laat veranderen.

$f(x)$ is dus voor $x=a$ noch een maximum, noch een minimum

Was $f'''(a)=0$ dan blijkt uit

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^4}{1.2.3.4}f^{IV}(a)+h^5R.$$

dat $f(x)$ voor $x=a$ een maximum of een minimum is, naarmate $f^{IV}(a)$ negatief of positief is.

Op deze wijze kunnen wij voortgaan en komen zoodoende tot de navolgende regel:

„ Eene waarde van x die, zonder eene grens
„ voor de bestaanbaarheid van $f(x)$ te zijn, ach-„
„ tereenvolgens $f'(x)$, $f''(x)$ enz gelijk nul maakt,
„ doch voor het eerst aan eene afgeleide
„ functie van <u>evene</u> rangorde eene bepaalde
„ waarde geeft, maakt de functie tot een <u>maxi-</u>
„ <u>mum</u> of een <u>minimum</u>, naarmate die
„ laatstgenoemde waarde <u>negatief</u> of <u>positief</u>
„ is. Is de afgeleide functie, die voor het eerst
„ niet gelijk nul wordt, van <u>oneven</u> rang-„
„ orde, zoo maakt de bepaalde waarde van
„ x de functie <u>niet</u> tot een maximum
„ of minimum".

<u>Opmerking</u>. Wanneer voor eene waarde van x eenige achtereenvolgende afgeleide functien $f'(x)$, $f''(x)$, enz nul worden, doch de daaropvolgende oneindig groot, zoo kan de regel niet worden toegepast en zal men verplicht zijn het onderzoek in te stellen op de wijze zooals in de voorgaande paragraaf is aangegeven.

§74. Voorbeelden

a.)

$$y = f(x) = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a-x}$$

$$f'(x) = -\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{(a-x)^2}$$

$f'(x) = 0$ voor $x = \dfrac{a^2}{a \pm b}$

$f'(x) = \infty$ voor $x = 0$ en voor $x = a$

Nu is $f''(x) = \dfrac{2a^2}{x^3} + \dfrac{2b^2}{(a-x)^3}$

en dus $f''\left(\dfrac{a^2}{a+b}\right) = \dfrac{2(a+b)^4}{a^4 b}$ d.i. positief

$f''\left(\dfrac{a^2}{a-b}\right) = -\dfrac{2(a-b)^4}{a^4 b}$. d.i. negatief.

De gegeven functie wordt derhalve voor $x = \dfrac{a^2}{a+b}$ een minimum $\left(a + 2b + \dfrac{b^2}{a}\right)$ en voor $x = \dfrac{a^2}{a-b}$ een maximum $\left(a \mp 2b + \dfrac{b^2}{a}\right)$

Zoo wel voor $x = 0$ als voor $x = a$ wordt $f(x) = \infty$

b.)

$$y = f(x) = \frac{(x+3a)^3}{(x+2a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x+3a)^2}{(x+2a)^3}$$

$f'(x)$ wordt gelijk nul voor $x=0$ en voor $x=-3a$. Wij zien onmiddellijk dat voor $x=-3a$, $f'(x)$ niet van teeken verandert, daarentegen voor $x=0$, $f'(x)$ van den negatieven in den positieven toestand overgaat.

$f(0)=\frac{27}{4}a$ is dus een ~~maximum~~ minimum, terwijl $f(-3a)=0$ noch een maximum, noch een minimum is.

$x=-2a$, waarvoor $f'(x)$ oneindig groot is, maakt ook $f(x)$ oneindig groot.

c.)

$$y=f(x) = \operatorname{tang} x - \sin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = 0 \quad \text{voor } x=0$$

$$f''(x) = +\frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \sin x\;; \quad f''(0)=0$$

$$f'''(x) = +2\,\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} + \cos x\;; \quad f'''(0)=3$$

$f(x)$ wordt derhalve door geene waarde van x tot een maximum of minimum gemaakt.

Schrijven wij $f'(x)$ in de gedaante: $\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}$ dan blijkt terstond dat $f'(x)$ voor alle waarden van x positief is, en er dus geen sprake kan zijn van maximum of minimum.

d.)

$$y = f(x) = e^{x} + e^{-x} + 2\cos x$$
$$f'(x) = e^{x} - e^{-x} - 2\sin x = 0 \quad \text{voor } x = 0$$
$$f''(x) = e^{x} + e^{-x} - 2\cos x; \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = e^{x} - e^{-x} + 2\sin x; \qquad f'''(0) = 0$$
$$f^{iv}(x) = e^{x} + e^{-x} + 2\cos x; \qquad f^{iv}(0) = 4$$

$f(x)$ wordt dus voor $x=0$ een minimum met de waarde $f(0)=4$.

e.)

$$y = f(x) = x - \sqrt[3]{ax^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \text{voor } x = \frac{8}{27}a$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt[3]{a}}{9\sqrt[3]{x^4}} \qquad f''\left(\frac{8}{27}a\right) \text{ is positief}$$

$$f'(x) = \infty, \text{ voor } x = 0$$

$f\left(\frac{8}{27}a\right) = -\frac{4}{27}a$ is derhalve een minimum, terwijl $f(0) = 0$ een maximum is, hetgeen blijkt uit de omstandigheid dat $f'(x)$ voor $x=0$ overgaat van den positieven in den negatieven toestand; of ook door in de functie achtereenvolgens voor x te

Substitueeren de waarden $-h$, 0 en $+h$
Wij vinden:

$$f(-h) = -h - \sqrt[3]{ah^2} \quad ; \quad f(0) = 0 \quad ; \quad f(h) = h - \sqrt[3]{ah^2}$$

Wanneer nu h oneindig klein wordt genomen zoo is h oneindig klein in vergelijking van $\sqrt[3]{h^2}$ en dus is $f(-h) < f(0)$ en $f(h) < f(0)$

f.)

$$y = f(x) = 2x^2 - 3\sqrt[3]{4a^2x^4}$$

$$f'(x) = 4x - 4\sqrt[3]{4a^2x} = 0 \quad \text{voor } x = 0,\ x = \pm 2a$$

$$f''(x) = 4\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4a^2}{x^2}}\right)$$

$f''(\pm 2a)$ is positief derhalve is $f(x)$ zoowel voor $x = -2a$ als voor $x = 2a$ een minimum met de waarde $-4a^2$.

$f''(0) = \infty$. Substitueeren wij, even als in het voorgaande voorbeeld, voor x achtereenvolgens $-h$, 0 en $+h$, hetzij in $f(x)$ hetzij in $f'(x)$ zoo blijkt gemakkelijk dat $f(0) = 0$ een maximum is.

g)

$$y = f(x) = x\,\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}} - \frac{2}{x}e^{\frac{1}{x}} - 1}{\left(e^{\frac{1}{x}} + 1\right)^2}$$

Ten einde voor verschillende positieve en negatieve waarden van x de waarden van $f'(x)$ gemakkelijk te kunnen nagaan, stellen wij x gelijk $\frac{1}{z}$ en gelijk $-\frac{1}{u}$. Alsdan vinden wij voor $f'(x)$

$$\frac{e^{2z}-2ze^{z}-1}{(e^{z}+1)^2} \quad \text{en} \quad \frac{1+2ue^{u}-e^{2u}}{(e^{u}+1)^2}$$

Na een eenvoudig onderzoek blijkt nu dat $f'(x)$ positief is voor elke positieve waarde van z, daarentegen negatief voor iedere positieve waarde van u. Voor $z=\infty$ is $f'(x)=1$, voor $u=\infty$ is $f'(x)=-1$, waaruit dus blijkt dat voor $x=0$ $f'(x)$ plotseling van den negatieven in den positieven toestand overgaat met voorbijgang van alle waarden tusschen -1 en $+1$ gelegen.

$f(0)=0$ is derhalve een minimum.

Als x verandert van $-\infty$ tot 0 doorloopt de functie alle waarden van $\frac{1}{2}$ tot 0 toe en $f'(x)$ alle waarden van af 0 tot -1. Verandert x van 0 tot ∞ zoo doorloopt $f(x)$ alle waarden van 0 tot $\frac{1}{2}$ en $f'(x)$ alle waarden van $+1$ tot 0.

§75. Dikwijls kan men bij het bepalen der maxima en minima enkele vereenvoudigingen maken.

1°. Zoo zal $f(x)$ gelijktijdig een maximum of minimum zijn met de functien:

$$a + bf(x) \quad ; \quad \{f(x)\}^n \text{ en } Neplog\, f(x)$$

als a, b en n positief zijn.
Evenzoo zal, a, b en n weder positief onderstellen, de, $f(x)$ een maximum of minimum zijn als:

$$a - bf(x) \quad \text{of} \quad \frac{a}{\{f(x)\}^n}$$

een minimum of maximum is.
Wij moeten echter hierbij opmerken dat somtijds waarden van x $\{f(x)\}^n$ of $Neplog\,x$ onbestaanbaar zouden kunnen maken of grenzen zouden kunnen zijn voor de bestaanbaarheid dier functien, zonder dat dit voor $f(x)$ het geval behoeft te zijn.
2°. Wanneer $f'(x)$ de gedaante van eene breuk heeft en $x=a$ eene waarde is die den teller van deze breuk nul maakt, zoo kan men het teeken van $f''(a)$ bepalen zonder dat het noodig is $f''(x)$ geheel af te leiden.

Immers is $f'(x) = \dfrac{T}{N}$, waarin T en N functien van x voorstellen, zoo is:

$$f''(x) = \frac{N\frac{dT}{dx} - T\frac{dN}{dx}}{N^2}$$

zoodat voor eene waarde $x = a$ die $T = 0$ maakt, ook $T\frac{dN}{dx} = 0$ is, en dus:

$$f''(x) = \frac{\frac{dT}{dx}}{N}.$$

Wil men derhalve voor de waarden van x die $f'(x) = 0$ maken, doordien zij gevonden zijn uit de vergelijking $T = 0$, onderzoeken welk teeken zij aan de tweede afgeleide functie geven, zoo kunnen wij volstaan door te schrijven

$$f''(x) = \frac{\frac{dT}{dx}}{N} + \text{enz}$$

aangezien het weggelaten deel van de tweede afgeleide functie toch gelijk nul wordt voor de te onderzoeken waarden.
Wordt $\frac{dT}{dx}$ eveneens nul zoo is:

$$f'''(x) = \frac{\frac{d^2T}{dx^2}}{N.} + \text{enz}$$

te stellen, en zoo voortgaande.
3°. Wanneer men door de een of andere omstandigheid weet dat de functie een maximum (of

minimum) moet hebben, en wij vinden uit $f'(x)$, door deze gelijk nul of oneindig groot te stellen, slechts eene waarde van x die daartoe in aanmerking komt, dan is het geheele verdere onderzoek natuurlijk overbodig.

§76. Voorbeelden.

a.) Op een parabool, waarvan O de top en F het brandpunt is, een punt P te bepalen zoodanig dat $\frac{OP}{FP}$ zoo groot mogelijk zij.

De topvergelijking van de parabool is $y^2 = px$. Noemen wij de coördinaten van het punt P x en y, zoo is:

$$\frac{OP}{PF} = \frac{\sqrt{(x^2+px)}}{x+\frac{1}{4}p}$$

De functie die een maximum moet worden is derhalve:

$$f(x) = \frac{x^2+px}{(4x+p)^2}$$

Uit $f'(x) = \frac{p^2-2px}{(4x+p)^3} = 0$ volgt $x = \frac{1}{2}p$.

Substitueeren wij deze waarde in:

$$f''(x) = -\frac{2p}{(4x+p)^3} + \text{enz}$$

Zoo blijkt dat $f''(\frac{1}{2}p)$ negatief is en dus $x = \frac{1}{2}p$

werkelijk $f(x)$ en dus ook $\frac{OP}{PF}$ tot een maximum maakt.

Dit laatste onderzoek zou men achterwege hebben kunnen laten, omdat wij weten dat voor $x=0$, $\frac{OP}{PF}=0$ en voor $x=\infty$, $\frac{OP}{PF}=1$ is, terwijl voor eene eindige waarde van $x>\frac{1}{8}p$, $\frac{OP}{PF}>1$ wordt. $\frac{OP}{PF}$ zal dus, bij het aangroeien van x, aangroeien van 0 af tot een zeker bedrag om later weder af te nemen tot 1.

Het verkregen maximum is $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

b.) In een gegeven bol een rechtcirkelvormigen kegel te beschrijven, waarvan de inhoud zoo groot mogelijk is.

Als de straal van den bol gelijk r gegeven is en de hoogte van den kegel gelijk x gesteld wordt, zoo is de inhoud van den kegel:

$$J=\frac{1}{3}\pi x^2(2r-x)$$

Het blijkt nu dat $\frac{dJ}{dx}$ gelijk nul wordt als voldaan is aan de vergelijking:

$$4rx-3x^2=0$$

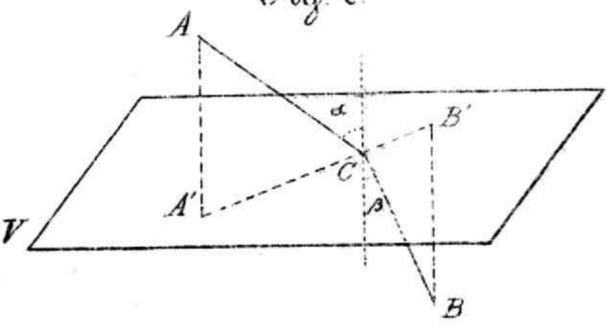
dus voor $x=\frac{4}{3}r$ en voor $x=0$.

(De tweede waarde kan niet aan de vraag voldoen, en aangezien uit eene eenvoudige meetkuntige beschouwing blijkt dat er een maximum moet aanwezig zijn, zoo is dus $x = \frac{4}{3} r$ de hoogte van den gevraagden kegel, welks inhoud $\frac{32}{81}\pi r^3$ is en die dus gelijk is aan het $\frac{8}{27}$ deel van den bol.

c.) Twee punten A en B liggen ter weerszijden van een vlak V. Men vraagt welken weg een beweegbaar punt zal moeten afleggen om in den kortstmogelijken tijd van A naar B te komen, wanneer het zich aan beide zijden van het vlak eenparig beweegt, doch met verschillende snelheden v en v'.

Het is duidelijk dat de verlangde weg een gebroken lijn ACB (zie fig 7) zal moeten zijn, gelegen in een vlak loodrecht op V.

Fig. 7.



Zij gegeven $AA' = a$ $BB' = b$ en $A'B' = c$ dan is de weg ACB bekend, als wij $A'C = x$ kunnen bepalen.

(De tijd benoodigd tot het afleggen van den weg

ACB is:

$$t = \frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{v} + \frac{\sqrt{\{b^2+(c-x)^2\}}}{v'}$$

Uit $\quad \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{v\sqrt{(a^2+x^2)}} - \dfrac{c-x}{v'\sqrt{\{b^2+(c-x)^2\}}} = 0 \ldots (1)$

zouden wij de verlangde waarde van x kunnen bepalen. Wij stuiten echter dan op eene vierde-machtsvergelijking.

Gemakkelijk is evenwel in te zien dat de vergelijking (1) kan geschreven worden in de gedaante:

$$\frac{1}{v}\cos ACA' = \frac{1}{v'}\cos BCB'$$

of wat hetzelfde is:

$$\frac{v}{v'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

waarin α en β voorstellen de hoeken door AC en BC gevormd met de normaal in het punt C.

Wanneer het punt C aan deze voorwaarde voldoet zal de tyd een minimum zijn omdat gemakkelijk blijkt dat er een minimum zal moeten bestaan.

c.) In eenig punt P eener ellips trekt men eene raaklijn en laat uit een der brandpunten een loodlijn hierop neer. Bepaal het punt P zoodanig dat de loodlijn zoo groot of zoo klein mogelijk zij.

Zijn a en b de halve assen der ellips en stelt e de lineaire excentriciteit voor, zoo is de lengte der loodlijn uit het brandpunt $(e, 0)$ op de raaklijn in het punt (x, y) der ellips neergelaten:

$$l = b\sqrt{\frac{a^2 - ex}{a^2 + ex}}$$

De functie van x die derhalve een maximum of minimum moet worden is:

$$f(x) = \frac{a^2 - ex}{a^2 + ex}$$

Nu is:
$$f'(x) = -\frac{2a^2 e}{(a^2 + ex)^2}$$

welke voor geen enkele waarde van x gelyk nul kan worden, en evenmin ∞ voor eene waarde van x tusschen $-a$ en $+a$ gelegen.

Wij besluiten dus dat l geen maximum of minimum kan worden.

Toch weten wij dat de loodlijn l hare kleinste waarde $a - e$ heeft voor $x = a$ en hare grootste

$a+e$ voor $x=-a$

Er zijn twee redenen aan te wijzen waarom wij deze beide waarden niet vonden.

Vooreerst ligt het in de bedoeling van het vraagstuk om aan x slechts waarden toetekennen die gelegen zijn tusschen de grenzen $-a$ en $+a$. Geven wij aan de absis eene waarde, welke buiten die grenzen valt, zoo is wel is waar de ordinaat van het punt der ellips onbestaanbaar en wordt derhalve ook de vergelijking der raaklijn in dat punt onbestaanbaar, maar toch vinden wij voor den afstand van het punt (c, o) tot die raaklijn een bestaanbaar bedrag, wanneer de waarde van x slechts binnen de grenzen $-\frac{a^2}{e}$ en $+\frac{a^2}{e}$ wordt genomen.

Verandert x van $-\frac{a^2}{e}$ tot $+\frac{a^2}{e}$ zoo doorloopt l alle waarden van ∞ tot 0, zonder een maximum of minimum te worden.

Daarbij komt echter nog dat voor elke waarde van x twee punten op de ellips worden gevonden, waarin de raaklijnen evenver van het brandpunt gelegen zijn.

Beschouwen wij l als eene functie van y zoo vinden wij:

$$l = b\,\frac{ab \pm e\sqrt{(b^2-y^2)}}{\sqrt{(b^4+e^2y^2)}}$$

en dus:

$$\frac{dl}{dy} = \mp ab^2ey\,\frac{ab \pm e\sqrt{(b^2-y^2)}}{\sqrt{(b^2-y^2)(b^4+e^2y^2)^3}}$$

$\frac{dl}{dy}$ wordt gelijk 0 voor $y=0$ en wisselt dan van teeken, zoodat l voor het bovenste teeken een maximum wordt met de waarde $a+e$ en voor het onderste teeken een minimum met de waarde $a-e$.

b. Ingewikkelde functien van een onafhankelijk veranderlijke grootheid.

§77. Wanneer y als functie van x gegeven is door de vergelijking $f(x,y)=0$, zoo is

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

en dus zullen de waarden van x, die y tot een maximum of minimum kunnen maken, gevonden worden uit de vergelijkingen:

$$f(x,y)=0 \quad \text{en} \quad \frac{df}{dx}=0 \quad \text{of} \quad \frac{df}{dy}=\infty$$

of wel uit de vergelijkingen:

$$f(x,y)=0 \quad \text{en} \quad \frac{df}{dy}=0 \quad \text{of} \quad \frac{df}{dx}=\infty$$

Wanneer $\frac{df}{dx}$ en $\frac{df}{dy}$ voor $x=a$ gelijktijdig 0 of ∞ worden, zoo moet men de wezenlyke waarde van $\frac{dy}{dx}$ bepalen.

Is die waarde al dan niet 0 of ∞, zoo komt $x=a$ al dan niet in aanmerking.

Iedere waarde $x=a$ die $\frac{dy}{dx}$ oneindig groot maakt moet worden getoetst aan de voorwaarde in § 71 en § 72 gegeven. Men moet dus nagaan of $\frac{dy}{dx}$ van teeken verandert of wel de waarden van y voor $x=a-h$, a en $a+h$ onderzoeken.

Maakt $x=a$, $\frac{dy}{dx}=0$ zoo kunnen wij het teeken van de volgende differentiaalquotienten nagaan.

Voor alle waarden van x die $\frac{df}{dx}=0$ maken is:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{d^2f}{dx^2}}{\dfrac{df}{dy}}\,, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\dfrac{d^3f}{dx^3}}{\dfrac{df}{dy}} \quad \text{enz.}$$

(zie §37; ook afteleiden uit §75 Sub. 2)

§78. Zijn gegeven de vergelijkingen

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{en} \quad F(x, y, z) = 0$$

Zoo kunnen wij de waarden van x, die z tot een maximum of minimum kunnen maken, bepalen door de beide vergelijkingen te differentieeren en daarna $\frac{dz}{dx} = 0$ te stellen, waardoor men vindt:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Hieruit $\frac{dy}{dx}$ elimineerende vinden wij eene vergelijking die in verband met de vergelijkingen $f=0$ en $F=0$ de verlangde waarden van x oplevert.

Of deze waarden van x werkelijk z tot een maximum of minimum maken moet een nader onderzoek leeren.

Het voorenstaande is gemakkelijk uittebreiden tot het geval dat men $n-1$ vergelijkingen tusschen n veranderlijken heeft.

§79. Voorbeelden

a.) $x^3 - 3axy + y^3 = 0$

Door differentiatie vinden wij:

$$x^2 - ay - (ax - y^2)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

of:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$$

Uit $x^2 - ay = 0$ volgt in verband met de gegeven vergelijking:

$$x^6 - 2a^3x^3 = 0$$

dus: $x = 0, y = 0$ of $x = a\sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$.

Uit $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x}{ax - y^2} + \text{enz}$ blijkt dat $\frac{d^2y}{dx^2}$ negatief is voor $x = a\sqrt[3]{2}$ en derhalve $y = a\sqrt[3]{4}$ een maximum is.

Voor $x = 0, y = 0$ is $\frac{dy}{dx} = 0$ of ∞ (zie §70)

Uit (1) volgt door differentiatie:

$$2x - 2a\frac{dy}{dx} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (ax - y^2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ldots\ldots (2)$$

zoodat dus voor $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ de onbepaalde gedaante $\frac{0}{0}$ aanneemt.

Bepalen wij de wezenlijke waarde (zie §70) dan vinden wij door differentiatie van (2) gemakkelijk:

$$2-3a\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+6y\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

of $\frac{dy}{dx}=0$ stellende: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{3a}$ dus positief.

Voor $x=0$ is derhalve $y=0$ een minimum als $\frac{dy}{dx}=0$ is.

Opmerking. Als men, evenals reeds in §70 gedaan is voor $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}=t$ stelt, zoo blijkt terstond uit:

$$x=\frac{3at}{1+t^3}$$

dat met een oneindig kleine negatieve of positieve waarde van x ook een oneindig kleine negatieve of positieve waarde van t dus van $\frac{dy}{dx}$ overeenstemt, met andere woorden dat $\frac{dy}{dx}$ van teeken wisselt voor $x=0$ en dus $y=0$ een minimum is.

Tevens zien wij dat zoowel voor zeer groote posi-

tieve als negatieve waarden van t, x positief is.
Voor $t = \frac{dy}{dx} = \pm\infty$ is $x = 0$ derhalve eene grens voor de bestaanbaarheid van twee gelykworden de waarden $y = 0$ en is er dus ook van maximum of minimum geen sprake.

b.) Onder alle rechtcirkelvormige kegels welke hetzelfde totale oppervlak πa^2 bezitten, dien te bepalen welke den grootsten inhoud heeft.

Stellen wij den straal van het grondvlak gelijk x en de hoogte des kegels gelijk y, zoo is

$$x^2 + x\sqrt{(x^2+y^2)} = a^2$$

dus:
$$x^2y^2 = a^4 - 2a^2x^2 \quad \text{.............} (1)$$

De inhoud I van den kegel is $\frac{1}{3}\pi x^2 y$, zoodat dus:

$$z = x^2 y \quad \text{.............} (2)$$

een maximum moet worden.

In de vergelijkingen (1) en (2) kunnen wij x als de onafhankelijk veranderlijke kiezen.

Door differentiatie vinden wij, na $\frac{dz}{dx} = 0$ te hebben gesteld:

$$xy^2 + x^2y\frac{dy}{dx} = -2a^2x$$

en:

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

waaruit, na eliminatie van $\frac{dy}{dx}$ gevonden wordt
$x=0, y=0$ en $x=\frac{1}{2}a, y=a\sqrt{2}$
Het eerste stel waarden is niet te gebruiken; het laatste zal aan de vraag moeten voldoen omdat eene meetkunstige beschouwing onmiddellijk doet zien dat er een maximum moet bestaan.
Bij dezen maximumkegel is $J=\frac{1}{12}\pi a^3\sqrt{2}$, terwijl het ronde oppervlak gelijk is aan driemaal het grondvlak.

c. Uitgedrukte functien van twee en meer onafhankelijk veranderlijke grootheden.

§80. Men zegt dat $u=f(x,y,z\ldots\ldots)$ voor $x=a$, $y=b$, $z=c$,...... een maximum is indien:

$$f(a,b,c\ldots\ldots) > f(a+h, b+k, c+l,\ldots\ldots)$$

voor alle oneindig kleine positieve of negatieve waarden van $h, k, l\ldots\ldots$
Is onder de zelfde omstandigheden

$$f(a.b.c\ldots\ldots) < f(a+h, b+k, c+l,\ldots\ldots)$$

dan is de functie een minimum.

Geven wij aan $k, l \ldots$ de bijzondere waarden $k=0$, $l=0, \ldots$ dan moet dus voor een maximum (of minimum) $f(a+h, b, c \ldots) - f(a, b, c \ldots)$ zoowel voor positieve als voor negatieve oneindig kleine waarden van h hetzelfde teeken hebben, of met andere woorden: $f(x, b, c \ldots)$, zijnde nu eene functie van slechts een veranderlijk element x, moet een maximum (of minimum) zijn voor $x = a$.

Voor $x = a$ moet dus $\dfrac{df(x, b, c \ldots)}{dx}$ gelijk zijn aan nul of oneindig groot, of, beter gezegd, van teeken verwisselen.

Evenzoo zouden wij kunnen aantoonen dat voor $y = b$. $\dfrac{df(a, y, b, \ldots)}{dy}$ van teeken moet verwisselen, enz.

(De waarden van $x, y, z \ldots$ die $f(x, y, z \ldots)$ tot een maximum of minimum kunnen maken moeten derhalve gevonden worden uit de vergelijkingen:

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ of } \infty, \quad \frac{df}{dy} = 0 \text{ of } \infty, \quad \frac{df}{dz} = 0 \text{ of } \infty \ldots\ldots$$

Of de waarden aanleiding geven tot een maximum, tot een minimum of tot geen van beiden, moet nog nader worden onderzocht door na te gaan of al dan niet de vereischte teekenwisseling der differentiaalquotienten plaats heeft. Voor het geval $f(x+h, y+k, \ldots\ldots)$ in een reeks kan worden ontwikkeld volgens Taylor (zie §46) kan men, op eene overeenkomstige wijze als in §73 voor functien van een onafhankelijk veranderlijk element is aangewezen, regels opmaken ten einde dit onderzoek te vergemakkelijken. — Aangezien in de meeste toepassingen het onderzoek overbodig is zullen wij hier die regels niet bespreken.

d. Ingewikkelde functien van twee en meer onafhankelijk veranderlijke grootheden.

§81. Stellen wij, om de gedachten te bepalen, dat gegeven zijn de beide betrekkingen:

$$f(x, y, z, u) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$F(x, y, z, u) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

zoodat derhalve z en u zijn te beschouwen als functien van x en y, en dat men nu weten wil voor welke waarden van x en y de grootheid u een maximum of minimum wordt.
Wij hebben dan eenvoudig nategaan voor welke waarden van x en y de differentiaalquotienten $\frac{du}{dx}$ en $\frac{du}{dy}$ gelijk aan nul worden, wanneer wij althans buiten beschouwing laten de overige gevallen waarin die differentiaalquotienten van teeken kunnen wisselen.
Differentieeren wij de gegeven vergelijkingen en stellen wij $\frac{du}{dx}$ en $\frac{du}{dy}$ gelijk nul zoo vinden wij:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0$$

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0$$

of na eliminatie van $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$ twee vergelijkingen:

$$\varphi(x, y, z, u) = 0 \text{ .... } (3)$$

en

$$\psi(x, y, z, u) = 0 \text{ .... } (4)$$

die in verband met de gegeven vergelijkingen (1) en (2) ons in staat stellen x en y optelossen.

Wij vinden zoodoende de waarden die u tot een maximum of minimum kunnen maken; of zy dit zullen doen, zou een opzettelyk onderzoek moeten uitmaken

§82. Voorbeelden

a.) $z = x^3 + y^3 - xy$

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 - y \quad , \quad \frac{dz}{dy} = 3y^2 - x$$

Uit $3x^2 - y = 0$ en $3y^2 - x = 0$ volgen de waarden $x = 0$ en $y = 0$ of wel $x = \frac{1}{3}$ en $y = \frac{1}{3}$.

Houden wij in $\frac{dz}{dx}$ y constant dan zien wij dat voor $x = 0$ geen teekenwisseling plaats heeft; zoodat dus voor $x = 0$ en $y = 0$ z geen maximum of minimum kan worden.

Nemen wij $y = \frac{1}{3}$ en stellen wij $x = \frac{1}{3} \mp h$ zoo wordt:

$$\frac{dz}{dx} = \mp 2h - 3h^2$$

waaruit blijkt dat voor $x = \frac{1}{3}$ $y = \frac{1}{3}$ teekenwisseling van $\frac{dz}{dx}$ plaats heeft en wel van negatief in positief.
Hetzelfde geldt voor $\frac{dz}{dy}$, zooals gemakkelijk kan blijken.

$x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ maakt derhalve Z tot een minimum, en wel met de waarde $-\frac{1}{27}$.

b.)

Van een rechthoekig parallelopipedum is het opperolak gegeven. Bepaal de ribben zoodanig dat de inhoud zoo groot mogelijk wordt.
Noemen wij de ribben x, y en z en stellen wij het gegeven opperolak voor door $2a^2$, zoo is:

$$xy + yz + zx = a^2$$

en

$$J = xyz$$

Wij kunnen hier J en z beschouwen als functien van de onafhankelijk veranderlijke grootheden x en y.
Door differentiatie vinden wij na $\frac{dJ}{dx}$ en $\frac{dJ}{dy}$ gelijk nul gesteld te hebben:

$$y + z + (x+y)\frac{dz}{dx} = 0 \quad , \quad x + z + (x+y)\frac{dz}{dy} = 0$$

$$y\left(z + x\frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad , \quad x\left(z + y\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

Elimineeren wij $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{dz}{dy}$, dan blijken aan de komende vergelijkingen geene andere eindige waarden te voldoen dan:

$$x = y = z = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}$$

zoodat het gevraagde parallelopipedum dus een kubus is; want dat er werkelijk een maximum voor I moet bestaan kan eene eenvoudige meetkundige beschouwing ons onmiddellijk doen zien.

Hoofdstuk IV

Meetkundige toepassingen der differentiaalrekening

A. Het bepalen der richting bij vlakke kromme lijnen, gegeven door hare vergelijkingen bij rechtlijnige coördinaatassen.

a. Raaklijnen en normalen.

§83. Bij het onderzoek van den vorm van vlakke kromme lijnen komt het voornamelijk aan in elk punt de richting en de kromming te kunnen bepalen. Wij zullen ons aanvankelijk met het eerste bezighouden en daarbij voorloopig onderstellen dat de kromme lijn gegeven is door hare vergelijking bij rechthoekige coördinaatassen.

Door de richting van eene kromme lijn in eenig punt P verstaan wij de richting van de raaklijn in dit punt aan de kromme.

Zij nu $y = f(x)$ de vergelijking der kromme lijn en noemen wij (x, y) de coördinaten van het punt P en $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ die van een nabij-gelegen punt Q der kromme, zoo weten wij (zie §14 en §7 sub 4) dat de raaklijn in het punt P de limietstand is van de snijlijn PQ, wanneer het punt Q zich verplaatst over de kromme lijn en onbegrensd tot het punt P nadert.

De vergelijking der snijlijn PQ is

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x) \quad \text{..........} \quad (1)$$

wanneer X en Y de loopende coördinaten voorstellen.

De vergelijking der raaklijn wordt dus:

$$Y - y = (X - x) . \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

Noemen wij α den hoek welken de raaklijn in het punt (x, y) maakt met de X as, zoo is:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx} \text{ derhalve } \sin\alpha = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}} \text{ en } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$$

Voor de vergelijking der normaal in het punt P d.i. van de lijn die in het raakpunt P loodrecht op de raaklijn staat, vinden wij:

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x) \cdots\cdots\cdots (2)$$

Is de kromme lijn gegeven door de ingewikkelde vergelijking

$$f(x, y) = 0$$

Zoo veranderen de beide gevonden vergelijkingen (1) en (2) in:

$$(X - x)\frac{df}{dx} + (Y - y)\frac{df}{dy} = 0 \cdots\cdots\cdots (1^x)$$

en

$$(X - x)\frac{df}{dy} - (Y - y)\frac{df}{dx} = 0 \cdots\cdots (2^x)$$

§84. Tot het construeeren van de raaklijn in eenig punt eener kromme lijn kan men gebruik maken van de volgende lijnen, welke wij reeds in de analytische meetkunde leerden kennen:

1° de subtangens, zijnde de projectie van de raaklijn, gemeten van af het snijpunt met de X as tot in het raakpunt, op de X as.

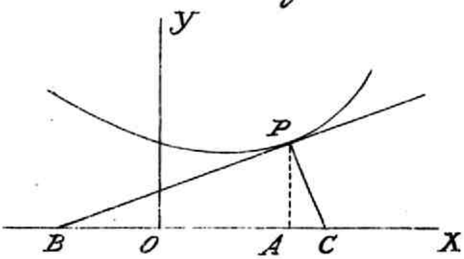
2° de subnormaal, zijnde de projectie van de normaal, gemeten van af het snijpunt met de X as tot in het punt der kromme waarin de normaal is aangebracht, op de X as

3º de **raaklijn**, waardoor men alsdan verstaat de lengte dezer lijn, zoo als zij onder 1º is aangegeven.

4º de **normaal**, eene lengte bezittende als onder 2º is gezegd.

In fig 8 stelt derhalve AB de subtangens, AC de subnormaal, BP de raaklijn en PC de normaal voor.

Fig. 8.



Uit de figuur lezen wij gemakkelijk:

$$S_t = AB = AP \cot PBA =$$

$$= y \cot \alpha = y \frac{dx}{dy}$$

$$S_n = AC = AP \tan APC = y \tan \alpha = y \frac{dy}{dx}$$

$$T = PB = AP \sec APB = \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{\frac{dy}{dx}}$$

$$N = PC = AP \sec APC = \frac{y}{\cos \alpha} = y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

De beide eerstgenoemde grootheden worden bij voorkeur gebezigd omdat in de daarvoor gevonden uitdrukkingen geen wortelteekens voorkomen en dus over haren positieven of negatieven toestand kan geoordeeld worden.

In de figuur is de kromme lijn en het punt P zoodanig geteekend dat x, y en $\frac{dy}{dx}$ positief zijn (De grootheden AB en AC zijn dus ook positief.

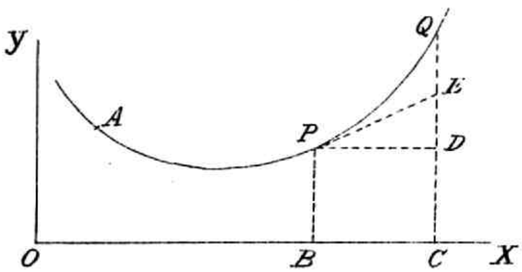
Vinden wij voor $y\frac{dx}{dy}$ en dus ook voor $y\frac{dy}{dx}$ een negatief bedrag, zoo moet het punt B rechts en C links van A vallen, wanneer althans het punt P boven de X as ligt.

De uitdrukkingen, welke voor de raaklijn en de normaal gevonden zijn, kunnen nog eenvoudiger geschreven worden, zooals in de volgende paragraaf zal blijken

Ten slotte merken wij nog op dat men bij de bovenstaande lijnen ook gebruik kan maken van de Y as in plaats van de X as. Men spreekt b.v. van de subtangens op de Y as, waarvan de grootte is $x\frac{dy}{dx}$.

§85. Noemen wij s de lengte der kromme lijn, gemeten van af een bepaald punt A op de kromme tot in het punt P, welks abscis x is, zoo is s noodzakelijk eene functie van x. Is nu $x+\Delta x$ de abscis van een punt Q der kromme, nabij P gelegen, zoo zal: $AQ = s+\Delta s$ en derhalve $PQ = \Delta s$ zijn.

Fig 9.



Uit fig 9 blijkt, daar boog PQ grooter dan koorde PQ is:

$$\Delta s > \sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$$

dus:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{\left(1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$$

Is E het snijpunt van de raaklijn in P met de ordinaat QC, zoo is

$$\Delta s < PE + QE \qquad ?$$

$$\Delta s < \Delta x . \sec EPD + QD - \Delta x . \operatorname{tang} EPD$$

$$\text{dus } \frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} + \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}$$

Laten wij nu Δx onbegrensd afnemen, m.a.w. is Δx oneindig klein, zoo vinden wij uit de beide ongelijkheden:

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

Door de invoering van deze waarde vinden wij:

$\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds}$ en $\sin\alpha = \dfrac{dy}{ds}$, derhalve voor de waarden van raaklijn en normaal:

$$T = y\frac{ds}{dy} \qquad \text{en } N = y\frac{ds}{dx}$$

<u>Opmerking</u>. (De voor de raaklijn gevonden vergelijking:

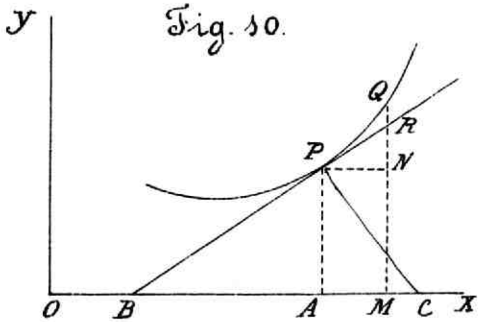
$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

is blijkbaar die eener rechte lijn gaande door de punten (x, y) en $(x + dx, y + dy)$. Het eerste dezer punten ligt op de kromme lijn, het tweede punt niet, immers dy is, als x met dx aangroeit, wel de aangroeiing der functie, doch eerst na weglating van betrekkelijk oneindig kleinen.

Doet men dus van die betrekkelijk oneindig kleinen afstand, zoo zou men mogen aanne„men dat het punt $(x + dx, y + dy)$ zoowel op de raaklijn als op de kromme lijn is gelegen, en dus zeggen dat de raaklijn twee onmiddel„

lijk op elkaâr volgende punten met de kromme lijn gemeen heeft.

In fig 10 zouden dan de punten Q en R moeten samenvallen en dus PR de koorde vormen van



den boog PQ, en daar deze oneindig weinig van elkaâr verschillen mogen wij aannemen dat boog PQ = PR is.

Deze laatste beschouwing voert op eene gemakkelijke wijze tot de gevonden betrekkingen tusschen de differentialen der grootheden x, y en s.

Zoo b.v. is nu PQN te beschouwen als een rechthoekigen driehoek met ds tot hypothenusa en dx en dy tot rechthoekszyden, terwijl $\angle QPN = \angle PBA = \alpha$ is

Wij vinden dan onmiddellijk:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad , \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

terwijl de gelijkvormigheid van de driehoeken APB, APC en PQN gemakkelijk leidt tot de vroeger gevonden uitdrukkingen voor subtangens, subnormaal, raaklijn en normaal.

§86 Zijn de coördinaatassen scheefhoekig en noemen wij μ den hoek dien zij met elkander vormen, zoo vinden wij voor de vergelijking van de raaklijn in het punt (x,y) aan eene kromme lijn, die door hare vergelijking $f(x,y)=0$ t.o. van die assen gegeven is:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

of ook

$$(X-x)\frac{df}{dx}+(Y-y)\frac{df}{dy}=0$$

dus uitdrukkingen van dezelfde gedaante als bij rechthoekige assen.

(De vergelijking der normaal wordt:

$$Y-y=-\frac{1+\frac{dy}{dx}\cos\mu}{\frac{dy}{dx}+\cos\mu}(X-x)$$

of ook:

$$(X-x)\left(\frac{df}{dy}-\frac{df}{dx}\cos\mu\right)-(Y-y)\left(\frac{df}{dx}-\frac{df}{dy}\cos\mu\right)=0$$

(De hoek, welken de raaklijn met de X as maakt, kan worden gevonden op de wijze als in de analytische meetkunde is geleerd. Gemakkelijker evenwel kunnen wij de beschouwingen van de voorgaande paragraaf toepassen.

In driehoek PQN (fig 11) is nu $\angle QNP = \pi - \mu$ en dus:

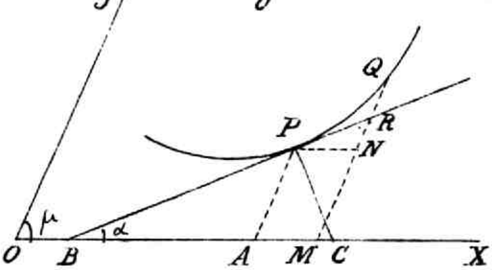
$$dx : dy = \sin(\mu - \alpha) : \sin\alpha$$

waaruit:

$$\cot\alpha = \cot\mu + \frac{dx}{dy}\operatorname{cosec}\mu .$$

De gelijkvormigheid van de driehoeken APB en PQN leert ons:

Fig. 11.



$$AB : AP = PN : NQ$$

of $$S_t = AB = y\frac{dx}{dy}$$

en:

$$BP : AP = PQ : QN$$

of: $$T = BP = y\frac{ds}{dy}$$

terwijl uit $\triangle PQN$ volgt:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\mu .$$

of $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\cos\mu\right)}$$

Voor de grootte van subnormaal en normaal vinden wij vrij samengestelde uitdrukkingen die op grond daarvan weinig worden gebruikt.

§87 Toepassingen

1° Door een gegeven punt P eener cycloïde eene raaklijn aan die kromme te trekken.

In de analytische meetkunde hebben wij voor de vergelijking der cycloïde, wanneer wij de as der cycloïde als X as en de raaklijn in den top als Y as aannemen, gevonden:

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)} + r \text{ boog cos } \frac{r-x}{r}$$

waarin r den straal van den voortbrengenden cirkel voorstelt.

Door differentiatie vinden wij:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-x}{x}}$$

en dus voor den subtangens:

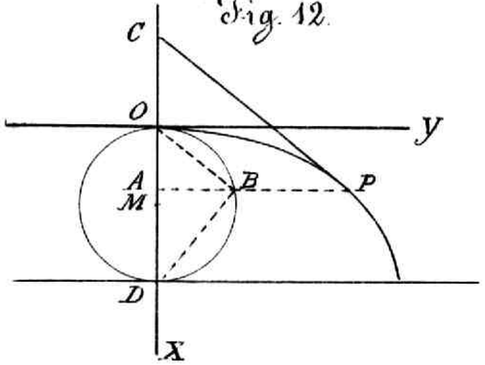
$$St = y\frac{dx}{dy} = y\sqrt{\frac{x}{2r-x}}$$

Hiervoor kunnen wij ook schrijven

$$St = \frac{xy}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

Daar AC (zie fig 12) den subtangens, $OA = x$, $AP = y$ en $AB = \sqrt{(2rx - x^2)}$ is, hebben wij derhalve:

Fig. 12.



$AB : AP = AO : AC$

De raaklijn in het punt P loopt dus evenwijdig met de koorde OB.

Aangezien DB loodrecht staat op OB zal dus de normaal van het punt P evenwijdig loopen met de lijn BD, of, wat het zelfde is, gaan door het raakpunt van den voortbe-genden cirkel met de grondlijn, als men dezen cirkel teekent in den stand waarbij hij door het punt P gaat.

2° Eene raaklijn te trekken aan de kromme lijn $f(x,y)=0$ door een punt (a,b), buiten die kromme gelegen.

Zij (x,y) het onbekende raakpunt dan is de vergelijking der raaklijn in dit punt:

$$(X-x)\frac{df}{dx} + (Y-y)\frac{df}{dy} = 0$$

en daar deze lijn door het punt (a,b) moet gaan, zal dus moeten worden voldaan aan de betrekking:

$$(a-x)\frac{df}{dx} + (b-y)\frac{df}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Daar het punt (x, y) op de kromme lijn ligt wordt voldaan aan:

$$f(x,y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

De beide vergelijkingen (1) en (2) stellen ons in staat x en y, zijnde de coördinaten van het raakpunt te vinden.

Wij kunnen (1) en (2) beschouwen als de vergelijkingen van twee meetkundige plaatsen die elkaâr snijden in de gevraagde raakpunten.

Passen wij het bovenstaande toe op eene kegelsnede die t.o. van willekeurige coördinaatassen gegeven is door hare vergelijking:

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

zoo vinden wij:

$$\frac{df}{dx} = 2Ax + By + D, \quad \frac{df}{dy} = Bx + 2Cy + E$$

waardoor de vergelijking (1) overgaat in:

$$a(2Ax + By + D) + b(Bx + 2Cy + E) = 2Ax^2 + Bxy + Dx + Bxy + 2Cy^2 + Ey$$

of

$$a(2Ax + By + D) + b(Bx + 2Cy + E) + Dx + Ey + 2F = 0$$

ook te schrijven in de gedaante:

$$Aax + \frac{1}{2}B(ay+bx) + Cby + \frac{1}{2}D(x+a) + \frac{1}{2}E(y+b) + F = 0$$

welke vergelijking te beschouwen is als die der (poollijn) raakkoorde voor het punt (a, b)

<u>Opmerking</u>. Als $f(x, y)$ eene geheele rationale functie in x en y van den n^{den} graad, en dus ook de kromme lijn van den n^{den} graad is, zoo kan men aantoonen dat de vergelijking (1) steeds van den $(n-1)^{sten}$ graad zal zijn. De vergelijkingen (1) en (2) geven dus hoogstens $n(n-1)$ waarden voor x en y.

Door een punt buiten eene kromme lijn van den n^{den} graad kunnen wij dus hoogstens $n(n-1)$ raaklijnen aan die kromme lijn trekken.

3° Aan de kromme lijn $f(x, y) = 0$ eene raaklijn te trekken evenwijdig met eene gegeven lijn.

Zy a. de richtingsconstante der gegeven rechte lijn, dan moet $a = \frac{dy}{dx}$ zyn, indien x en y de coördinaten van het onbekende raakpunt voorstellen.

Uit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = a$$

volgt de vergelijking:

$$\frac{df}{dx} + a\frac{df}{dy} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

welke in verband met:

$$f(x,y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

de verlangde raakpunten oplevert.
Opmerking. Aan eene kromme lijn van den n^{den} graad zijn hoogstens $n(n-1)$ onderling evenwijdige raaklijnen te trekken.

6. Rechtlijnige asymptoten.

588. Door de rechtlijnige asymptoot eener kromme lijn verstaan wij de rechte lijn waartoe de kromme lijn voortdurend nadert zonder haar ooit te kunnen bereiken, zoodat dus de afstand van een punt der kromme tot die raaklijn oneindig klein wordt als het punt zich op de kromme in het oneindige verwijdert.
Uit de vergelijking

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

van de raaklijn in het punt (x, y) aan eene kromme lijn $f(x.y)=0$, volgt dat de stukken M en N welke die raaklijn van de coordinaatas-sen afsnijdt worden voorgesteld door:

$$M = x - y\frac{dx}{dy}$$

$$\text{en } N = y - x\frac{dy}{dx}$$

Stellen wij ons nu voor dat het punt $(x.y)$ zich langs de kromme lijn verplaatst en in het oneindige verdwijnt, dan kan het gebeuren dat de bovenstaande uitdrukkingen voor M en N beiden of een van beiden tot bepaalde limieten naderen. De raaklijn zal in die gevallen een bepaalden limietstand verkrijgen en alsdan blijkbaar eene asymptoot van de kromme lijn zijn.

Vinden wij alleen voor M of wel alleen voor N een bepaalde limiet zoo loopt de asymp-toot evenwijdig met de Y of wel met de X as.

Worden M en N beiden oneindig groot zoo verdwijnt de raaklijn gelijktijdig met het raakpunt in het oneindige en de kromme lijn bezit dus geen asymptoot.

De waarde welke $\frac{dy}{dx}$ aanneemt, wanneer men voor x en y de coördinaten van het oneindig ver verwijderde raakpunt substitueert, leert ons dan de richting kennen welke de kromme lijn in dat oneindig ver afgelegen punt bezit. Is die waarde geheel onbepaald, zooals b.v. bij de spiraal van Archimedes het geval is, zoo blijkt hieruit dat de kromme lijn in het oneindige geen bepaalde richting aanneemt.

§89 Voorbeelden.

a.)
$$y^3 - x^3 = a^3 \quad \text{of} \quad y = \sqrt[3]{(a^3 + x^3)}$$

Uit de vergelijking blijkt onmiddellijk dat de kromme lijn oneindig ver afgelegen punten zal bezitten, omdat bij het grooter positief of negatief worden van x ook y grooter positief of negatief wordt en voor $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$ wordt.

Door differentiatie vinden wij:

$$y^2 \frac{dy}{dx} - x^2 = 0$$

en dus wordt:

$$M = x - y\frac{dx}{dy} = x - \frac{y^3}{x^2} = \frac{x^3 - y^3}{x^2} = -\frac{a^3}{x^2}$$

$$N = y - x\frac{dy}{dx} = y - \frac{x^3}{y^2} = \frac{y^3 - x^3}{y^2} = \frac{a^3}{y^2}$$

of voor $x = \infty$, $y = \infty$

$$M = N = 0$$

De kromme lijn bezit dus eene **asymptoot** die door den oorsprong gaat. Tot nadere bepaling van den stand der asymptoot berekenen wij de waarde van $\frac{dy}{dx}$ voor $x = \infty$, $y = \infty$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(a^3+x^3)^2}} \text{ (voor } x = \infty) = 1$$

Zijn de coördinaatassen dus rechthoekig zoo maakt de asymptoot een hoek van 45° met de X as.

b.) Het folium van Descartes.

Deze kromme lijn heeft $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ tot vergelijking

Gemakkelijk zien wij dat de kromme lijn oneindig ver afgelegen punten bezit, wier coördinaten $x = \pm\infty$, $y = \mp\infty$ zijn

Voor de waarden van M en N vinden wij aangezien $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$ is:

$$M = \frac{axy}{x^2 - ay} \quad \text{en} \quad N = \frac{axy}{y^2 - ax}$$

uitdrukkingen die voor $x = \infty$, $y = \infty$ eene onbepaalde gedaante aannemen.

Merken wij nu op dat voor $x = \infty$, $y = \infty$, $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$ is, dan volgt uit de vergelijking der kromme:

$$1 - 3\frac{a}{x} \cdot \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} = 0$$

Zoodat voor $x = \infty$, $y = \infty$, $\frac{y}{x} = -1$ is.

Voor de stukken M en N vinden wij alsdan

$$M = \frac{a\frac{y}{x}}{1 - \frac{a}{x} \cdot \frac{y}{x}} = -a \quad \text{en} \quad N = \frac{a\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2} - \frac{a}{x}} = -a$$

De vergelijking der asymptoot is dus:

$$x + y + a = 0.$$

Wij zouden slechts een der waarden M of N noodig hebben gehad.

c.)

$$y = \frac{x^3 + ax^2 + a^3}{x^2}$$

Schrijven wij de vergelijking der kromme lijn in de gedaante:

$$y = x + a + \frac{a^3}{x^2}$$

Zoo zien wij onmiddellijk dat de rechte lijn:

$$y = x + a$$

eene asymptoot is der kromme lijn

Het verschil toch tusschen de ordinaten der kromme lijn en van de rechte lijn $y = x + a$ voor eene zelfde waarde van de abscis is $\frac{a^3}{x^2}$

Voor grooter wordende waarden van x wordt dit verschil kleiner, terwijl voor $x = \infty$ dit verschil gelijk nul wordt

De kromme lijn nadert dus meer en meer de rechte lijn, zoodat deze laatste de rechtlijnige asymptoot der kromme is.

Opmerking. Geheel op de zelfde wijze blijkt dat $ay = x^2$ eene parabolische asymptoot is der kromme lijn:

$$y = \frac{x^3 + a^3}{ax}$$

c. Buigpunten.

§90. Tot de merkwaardige punten der kromme lijnen behooren:

1° de buigpunten,
2° de veelvoudige punten,
3° de keerpunten,
4° de hoekpunten,
5° de eindpunten, en
6° de geisoleerde punten.

Wij zullen achtereenvolgens nagaan wat men door die punten heeft te verstaan en op welke wijze men het bestaan dier punten kan aantoonen.

§91. Indien eene kromme lijn door hare vergelijking f:o: van rechthoekige coördinaat-assen gegeven is, kan men gemakkelijk beoordeelen of zij in eenig punt de holle of wel de bolle zijde naar de X as gekeerd heeft.

Eene eenvoudige beschouwing eener figuur leert ons dat de kromme in een bepaald punt hare holle zijde naar de X as zal keeren,

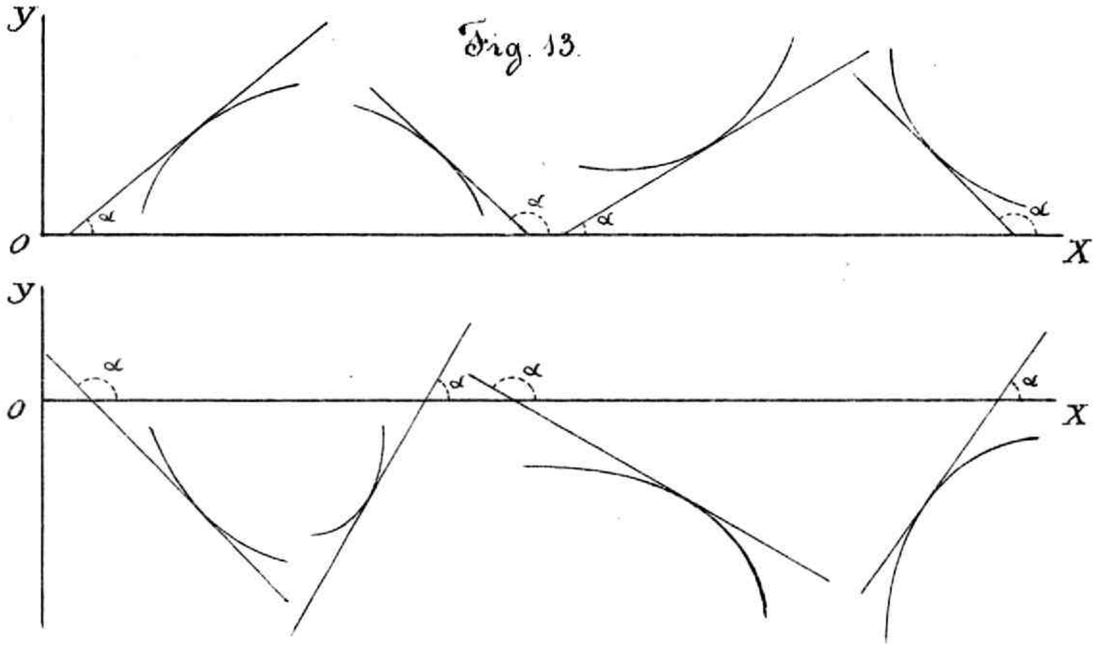


Fig. 13.

indien zij gelegen is binnen den scherpen hoek, welken de raaklijn, in dat punt, met de X as maakt, daarentegen hare bolle zijde, zoo zij buiten dien scherpen hoek ligt.

In het eerste geval zal, bij eene positieve waarde van y en aangroeiende waarden van x, de hoek α der raaklijn met de X as afnemen en dus ook de tangens van dien hoek kleiner worden; of:

$$\frac{d.\operatorname{tang}\alpha}{dx} = \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ negatief zijn}$$

Is y negatief dan zal juist het omgekeerde plaats hebben en dus $\frac{d^2y}{dx^2}$ positief zijn.

In het tweede geval, d.i. wanneer de kromme lijn de bolle zijde naar de X as keert, neemt bij eene positieve waarde van y, $\frac{dy}{dx}$ toe, daarentegen bij eene negatieve waarde van y af.

Het geheel samenvattende komen wij tot dezen regel:

„Indien tusschen de grenzen $x = a$ en $x = b$
„het tweede differentiaalquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ en
„de ordinaat y het zelfde teeken bezitten,
„zal de kromme lijn tusschen die grenzen
„voortdurend hare __bolle__ zijde naar de
„X as keeren; hebben daarentegen y en
„$\frac{d^2y}{dx^2}$ verschillende teekens zoo keert de
„kromme lijn hare __holle__ zijde naar de
„X as."

§92. Eene kromme lijn kan voor een gedeelte hare holle en voor een ander gedeelte hare bolle zijde naar eene rechte lijn keeren (b.v. naar de X as.). Het punt P (zie fig 14) waarin de overgang van kromming plaats heeft wordt een __buigpunt__ genoemd.

Uit den voorgaanden regel blijkt onmiddellijk dat in het buigpunt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gelijk 0 of ∞ moet worden. In het punt P toch moet $\frac{d^2y}{dx^2}$ van teeken veranderen, of, wat hetzelfde is, $\frac{dy}{dx}$ moet een maximum of minimum worden, hetgeen de beschouwing der figuur ook gemakkelijk leert.

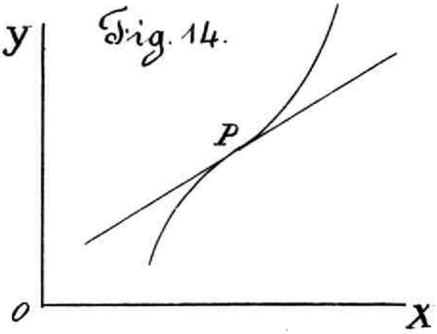


Fig. 14.

§93. Voorbeelden.

a.) De drie kegelsneden worden voorgesteld door de algemeene topvergelijking:

$$y^2 = px + qx^2.$$

Door differentiatie vinden wij

$$2y\frac{dy}{dx} = p + 2qx$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q$$

Dus: $$y\frac{d^2y}{dx^2} = q - \frac{(p+2qx)^2}{4y^2} = -\frac{p^2}{4y^2}$$

Aangezien deze uitdrukking voor alle waarden van y negatief is blijkt dat y en $\frac{d^2y}{dx^2}$ steeds een tegengesteld teeken bezitten en dus de drie kegel-sneden voortdurend de holle zijde naar de X as keeren.

b.) De kromme lijn $y^3 - x^3 = a^3$

Door differentiatie vinden wij:

$$y \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^3x}{y^4}$$

waaruit blijkt dat voor alle positieve waarden van x de kromme lijn de bolle, voor alle negatieve waarden van x de holle zijde naar de X as keert.

Letten wij er nu tevens op dat, voor $x = -a$, y van teeken verandert, zoo volgt er dus uit dat de kromme lijn voor $x = -a$ en voor $x = 0$ een buig-punt bezit, waarin de raaklijnen respectievelijk loodrecht op de X en Y as staan.

In verband met het gevondene in het 1e voorbeeld van §89 zal nu de kromme lijn gemakkelijk in teekening worden gebracht. (Zie fig 15)

c.) Het folium van Descartes. $x^3 - 3axy + y^3 = 0$.

Ten einde gemakkelijk den loop nategaan van deze kromme lijn (Zie §89 sub. b) stellen wij:

Fig. 15

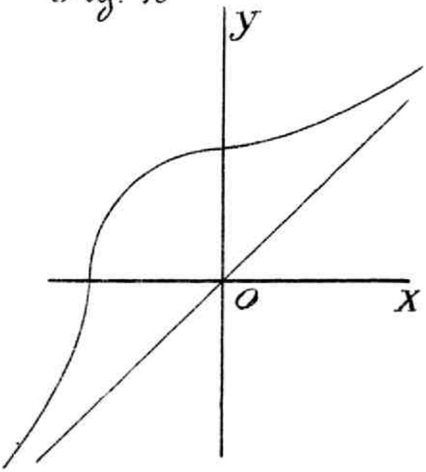
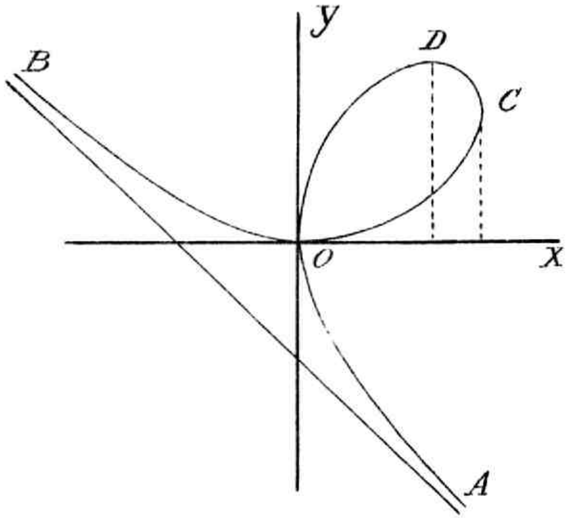


Fig. 16



$y = xt$, waardoor $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$ en $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$ wordt.

Door differentiatie vinden wij:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \text{ en dus } \frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$$

Laten wij nu t veranderen van $-\infty$ tot $+\infty$, zoo blijkt gemakkelijk dat voor:

$$\left.\begin{array}{llll} t = -\infty, & x = 0, & y = 0, & \dfrac{dy}{dx} = -\infty \\ t < -1, & x > 0, & y < 0 & \\ t = -1, & x = \pm\infty, & y = \mp\infty, & \dfrac{dy}{dx} = -1 \end{array}\right\} \text{tak OA}$$

$$\left.\begin{array}{llll} t \lessgtr \substack{0 \\ -1}, & x < 0, & y > 0, & \\ t = 0, & x = 0, & y = 0, & \dfrac{dy}{dx} = 0 \end{array}\right\} \text{tak BO}$$

$$\left.\begin{array}{l} t=0, \quad x=0, \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0 \\ t>0, \quad x>0, \quad y>0 \\ t=+\infty \quad x=0, \quad y=0 \quad \frac{dy}{dx}=\infty \end{array}\right\} \text{tak OCDO}$$

waardoor reeds in het ruwe den loop van de kromme lijn is op te maken.

Stellen wij $\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}=f(t)$, zoo is:

$$f'(t)=2\left(\frac{1+t^3}{1-2t^3}\right)^2$$

welke uitdrukking steeds positief is, zoodat $f(t)$ nooit een maximum of minimum kan worden, en derhalve de kromme lijn geen buigpunt bezit.

Voor $t=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, $x=a\sqrt[3]{4}$, $y=a\sqrt[3]{2}$ wordt $\frac{dy}{dx}=\infty$, dit is in het punt C; terwijl voor $t=\sqrt[3]{2}$, $x=a\sqrt[3]{2}$ $y=a\sqrt[3]{4}$, in het punt D, $\frac{dy}{dx}=0$ wordt.

Het gedeelte BOC der kromme lijn keert de bolle, het overige gedeelte de holle zijde naar de X as. In 589 hebben wij reeds gezien, dat de kromme lijn eene asymptoot bezit.

d. Veelvoudige punten.

§94. Door veelvoudige punten eener kromme lijn verstaan wij die punten waarin de kromme lijn zich zelve raakt of snijdt. Zoo b.v. hebben wij in het folium van Descartes (fig 16) eene kromme lijn leeren kennen die in den oorsprong een dubbelpunt bezit; aldaar snijdt de kromme lijn zich zelve loodrecht.

Men kan zich gemakkelijk voorstellen dat een kromme lijn een drievoudig, viervoudig of in het algemeen een veelvoudig punt bezit.

Zonder ons nu bezig te houden met de algemeene methode tot het opsporen dezer veelvoudige punten bij willekeurige kromme lijnen, zoo is het toch duidelijk dat in de nabijheid dier punten voor eene zelfde waarde van x twee of meer waarden van y moeten worden gevonden, die gelijk zullen worden als men aan x de waarde toekent van de abscis van het veelvoudig punt. Voor die zelfde waarde van x en de bijbehoorende waarde van y zal $\frac{dy}{dx}$ verschillende waarden moeten verkrijgen als de kromme lijn zich zelve snijdt, of wel gelijkgewordene waarden als de kromme zich zelve raakt.

De kromme lijn $f(x,y)=0$ zal dus in het punt $(x.y)$ geen veelvoudig punt kunnen bezitten, tenzij voor die waarden van x en y, $\frac{dy}{dx}$ den onbepaalden vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt en dus zoowel $\frac{df}{dx}=0$ als $\frac{df}{dy}=0$ wordt.

Omgekeerd echter zullen de waarden van x en y die daaraan voldoen, niet altijd veelvoudige punten opleveren; er moet dus een opzettelijk onderzoek daaromtrent worden ingesteld.

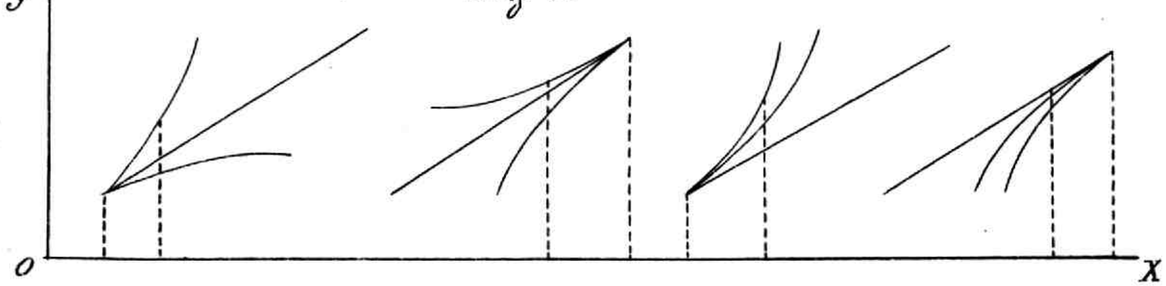
e. Keerpunten.

§95. Men zegt dat eene kromme lijn in het punt P een Keerpunt bezit, wanneer twee verschillende takken der kromme elk in het punt P eindigen en aldaar eene gemeenschappelijke raaklijn bezitten.

Men noemt het een Keerpunt van de eerste soort als de beide takken aan verschillende

zijden van de raaklijn liggen, een <u>keerpunt van de tweede soort</u> als deze takken aan de zelfde zijde van de raaklijn zijn gelegen.
Wij zullen aanvankelijk onderstellen dat de raaklijn in het keerpunt <u>niet</u> evenwijdig loopt met de Y as.
Eene eenvoudige beschouwing eener figuur doet ons zien dat de kromme lijn voor $x = a$ een keer-

Fig. 17.



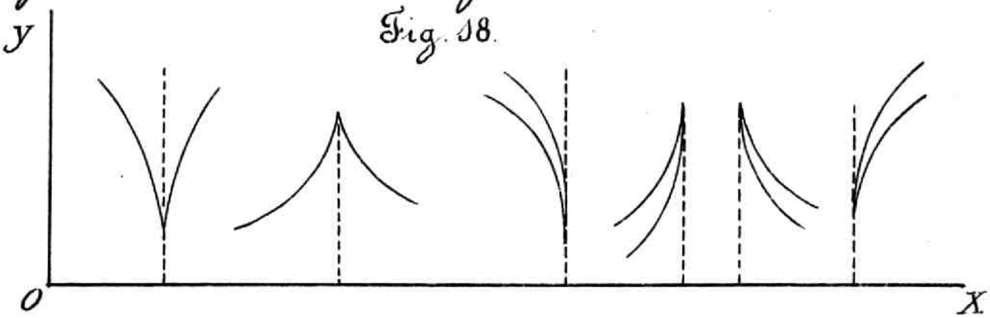
punt zal bezitten, indien $x = a$, niet alleen eene grens is voor de bestaanbaarheid van twee gelijkwordende waarden van y, maar tevens eene grens voor de bestaanbaarheid van twee gelijkwordende waarden van $\frac{dy}{dx}$.
Het keerpunt is alsdan van de <u>eerste soort</u>, indien, in de nabijheid van dit punt, van de beide takken de

eene de bolle, de andere de holle zijde naar de X as keert.

Keeren de beide takken óf de holle, óf de bolle zijde naar de X as, zoo is het keerpunt van de tweede soort.

596. Loopt de raaklijn in het keerpunt evenwijdig met de Y as, zoo blijkt uit de beschouwing van eene figuur onmiddellijk dat de kromme lijn voor $x=a$ een keerpunt van de eerste soort zal bezitten, wanneer voor die waarde van x, $\frac{dy}{dx}=\infty$ en y een maximum of minimum wordt.

Fig. 18.



De kromme zal voor $x=a$ een keerpunt van de tweede soort bezitten, indien:

1° $x=a$ eene grens is voor de bestaanbaarheid van twee gelijkwordende waarden van y;

2° $x=a$, $\frac{dy}{dx}=\infty$ maakt;

3° in de nabijheid van dit punt de takken der kromme zijn beide de holle of beide de bolle zijde naar de X as keeren.

§97. Voorbeelden.

a.) $(y-x)^2 = (x-1)^5$ of $y = x \pm \sqrt{(x-1)^5}$

Door differentiatie vinden wij:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \pm \frac{5}{2}\sqrt{(x-1)^3} \quad \text{en} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{15}{4}\sqrt{(x-1)}$$

$x=1$ is eene grens voor de bestaanbaarheid van y en van $\frac{dy}{dx}$. Voor $x>1$ vinden wij twee verschillende waarden voor y en voor $\frac{dy}{dx}$, die voor $x=1$ aan elkander gelijk worden. Daar verder voor eene waarde van x, die slechts weinig grooter is dan 1, twee positieve waarden van y, doch daarentegen twee in teeken verschillende waarden voor $\frac{d^2y}{dx^2}$ worden gevonden, zal het punt $(1,1)$ een keer-punt van de eerste soort zijn.

b.) $(4y-x^2)^2 = 16(x-2)^5$ of $y = \frac{1}{4}x^2 \pm \sqrt{(x-2)^5}$

Door differentiatie vinden wij:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x \pm \frac{5}{2}\sqrt{(x-2)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{15}{4}\sqrt{(x-2)}$$

$x=2$ is een grens voor de bestaanbaarheid van twee gelijkwordende waarden van y en van $\frac{dy}{dx}$, daarby blijkt dat $\frac{d^2y}{dx^2}$ voor $x=2$ gelijk wordt aan $\frac{1}{2}$ en dus de beide takken in het punt $(2,1)$ de bolle zijde naar de X as keeren. Het punt (2.1) is derhalve een keerpunt van de tweede soort.

c.) $y^3(2x-1)=x^2(x^2-1)$ of $y=\sqrt[3]{\frac{x^2(x^2-1)}{2x-1}}$

Door differentiatie vinden wij:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3x^3-2x^2-x+1}{\sqrt[3]{x(2x-1)^4(x^2-1)^2}}$$

Voor $x=0$ wordt $y=0$ en $\frac{dy}{dx}=\infty$, terwijl $x=+h$ zoowel als $x=-h$ (waarin h een klein bedrag voorstelt) aan y eene positieve waarde geeft. Voor $x=0$ wordt dus $y=0$ een minimum, waaruit blijkt dat de oorsprong een keerpunt is van de eerste soort.

d.) $y^5=(y^2-x)^2$.

Door differentiatie vinden wij

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{(4\pm5\sqrt{y})y} \quad \text{en} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2(8\pm15\sqrt{y})}{(4\pm5\sqrt{y})^3y^3}$$

Voor $x=0$ wordt $y=0$ en $y=1$

In het punt $(0,0)$ wordt $\frac{dy}{dx}=\infty$

Schrijven wij de vergelijking in de gedaante:

$$y^5 - y^4 + 2xy^2 - x^2 = 0$$

Zoo blijkt dat voor eene positieve waarde van $x = a$ de hoogere machtsvergelijking:

$$y^5 - y^4 + 2ay^2 - a^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

zeker één positieve wortel bezit, doch er ook drie kan hebben.

Stellen wij $x = -a$, zoo bezit de vergelijking:

$$y^5 - y^4 - 2ay^2 - a^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

slechts één positieve wortel terwijl de overige wortels onbestaanbaar zijn.

Nemen wij a zeer klein dan bezit (1) werkelijk drie positieve wortels,(+) waarvan een dicht bij 1, de beide andere dicht bij 0 zijn gelegen; de vergelijking (2) heeft dan slechts één wortel die dicht bij 1 ligt.

Hieruit blijkt dus dat voor negatieve waarden

(+) Voor $a = 0{,}1$ b.v. wordt de vergelijking:

$$f(y) = y^5 - y^4 + 0{,}02y^2 - 0{,}0001 = 0$$

Nu is $f(0)$ negatief
$f(0{,}1)$ positief
$f(0{,}2)$ negatief enz tot $f(0{,}9)$ negatief
$f(1)$ positief.

Zoodat de vergelijking drie wortels bezit, respectievelijk gelegen tusschen 0 en 0,1, tusschen 0,1 en 0,2 en tusschen 0,9 en 1.

van x slechts één positieve waarde van y, voor kleine positieve waarden van x daarentegen drie positieve waarden van y gevonden worden, van welke er twee voor $x=0$ gelyk worden en wel gelyk nul. m.a.w. $x=0$ is eene grens voor de bestaanbaarheid van twee gelijkwordende waarden van y. De oorsprong is derhalve een keerpunt van de

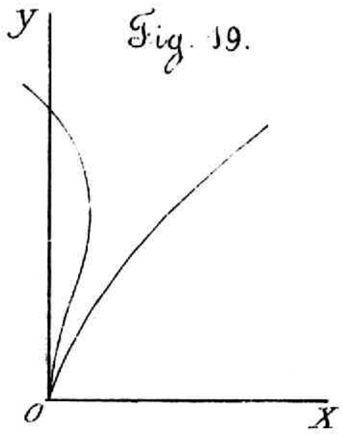


Fig. 19.

tweede soort, want $\frac{d^2y}{dx^2}$ wordt voor de beide kleine waarden van y – die voor $x=0$ verdwijnen – negatief.

N.B. Tot het onderzoek van den loop dezer kromme lijn (zie fig 19) is het beter y als onafhankelijk veranderlijke te nemen, of wat hetzelfde is de coördinaatassen om te wisselen en dus te beschouwen de vergelijking: $x^5=(x^2-y)^2$.

f. Hoekpunten.

§98 Indien twee verschillende takken eener kromme lijn in een zelfde punt eindigen, doch aldaar geen gemeenschappelijke raaklijn bezitten, zoo vormen zij een hoekpunt.

Eene kromme lijn zal dus voor $x = a$ een hoekpunt bezitten, indien $\frac{dy}{dx}$ voor die waarde niet vloeiend is, maar plotseling van waarde verandert.

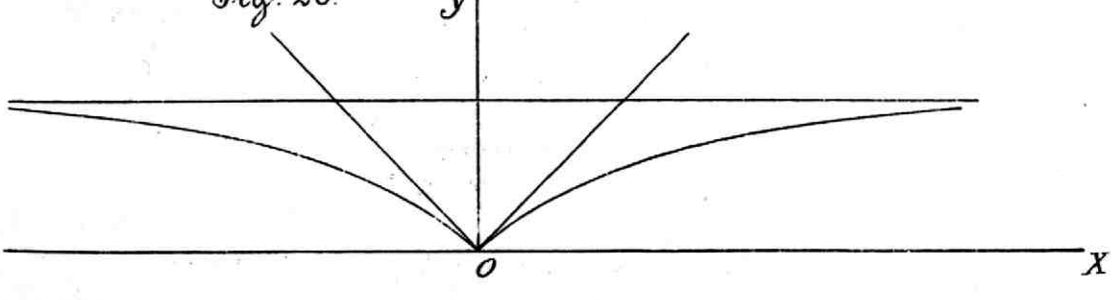
Voorbeeld.

$$y = x\,\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

Voor $x = 0$ is $y = 0$, terwijl $\frac{dy}{dx}$ plotseling van -1 in $+1$ verandert indien x overgaat van den negatieven in den positieven toestand (fig 20).

Zie ook §74 sub. g.

Fig. 20.



g. Eindpunten

599. Indien een tak eener kromme lijn in zijnen loop plotseling ophoudt, dan zegt men dat die kromme lijn een <u>eindpunt</u> bezit.
Is $y = f(x)$ de vergelijking der kromme en $x = a$ de abscis van het eindpunt, dan zal $f(x)$ voor $x = a$ moeten ophouden vloeiend te zijn, hetzij door alsdan plotseling onbestaanbaar te worden, hetzij door met een sprong van waarde te veranderen.
Zoo b.v. bezit de kromme lijn $y = x \, Neplog \, x$ een eindpunt in den oorsprong, omdat voor $x < 0$ y onbestaanbaar wordt en voor $x > 0$ y slechts één waarde bezit.
De kromme lijn $y = e^{\frac{1}{x}}$ bezit een eindpunt in den oorsprong omdat voor $x = 0$ y plotseling van nul oneindig groot wordt, terwijl eindelijk de kromme lijn:

$$y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

zelfs de twee eindpunten $(0,0)$ en $(0,1)$ bezit, daar voor $x = 0$ y plotseling van de waarde 0 overgaat op de waarde 1.

h. Afgezonderde punten

§100 Een punt welks coördinaten voldoen aan de vergelijking eener kromme lijn, zonder dat echter eenige tak der kromme door dit punt gaat, wordt een <u>afgezonderd punt</u> genoemd.

Zoo b.v. zal het punt $(-1, 0)$ een afgezonderd punt zijn in de kromme lijn:

$$y^2 = x(x+1)^2$$

B. Het bepalen der richting bij vlakke kromme lijnen, gegeven door hare vergelijking bij poolcoördinaten

a. Raaklijn. Polaire Subtangens.

§101. Indien eene kromme lijn gegeven is door hare vergelijking $r = f(\varphi)$, waarin φ de poolabscis en r den voerstraal van een willekeurig punt P der kromme voorstelt, zoo bepaalt men den stand der raaklijn in dit punt P door den hoek $OPA = \psi$, welken zij met den voerstraal OP maakt(*)

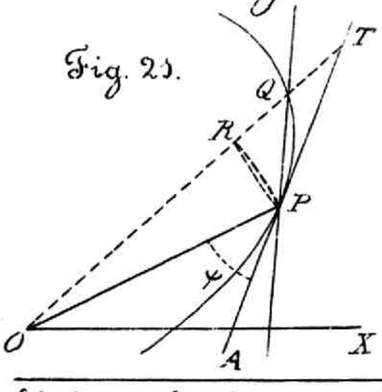


Fig. 21.

Is Q het punt, welks coördinaten $(\varphi + \Delta\varphi,\ r + \Delta r)$ zijn, en PR een cirkelboog, met OP als straal, uit O beschreven, dan is in $\Delta\, RPQ$:

$$RP : RQ = \sin RQP : \sin RPQ$$

dus:

(*) Deze hoek ψ is steeds die welken de raaklijn zou doorloopen indien men haar om het raakpunt in den positieven zin liet draaien, totdat zij langs den voerstraal zou vallen.

$$\frac{\sin RQP}{\sin RPQ} = \frac{\text{boog } RP}{RQ} \cdot \frac{RP}{\text{boog } RP} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta r} \cdot \frac{RP}{\text{boog } RP}$$

Indien het punt Q onbegrensd tot het punt P nadert en dus de snijlijn PQ overgaat in de raaklijn, nadert de hoek RQP tot hoek OPA $= \psi$ en de hoek RPQ tot $\frac{1}{2}\pi - \psi$, omdat de limietstand van de Koorde RP eene loodlijn in P op OP is.

In den limietstand verandert dus de gevonden vergelijking in:

$$\text{tang}\,\psi = \frac{r\,d\varphi}{dr}$$

(Vergelijk §12 sub 4.) waaruit:

$$\cos\psi = \frac{dr}{\sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}}$$

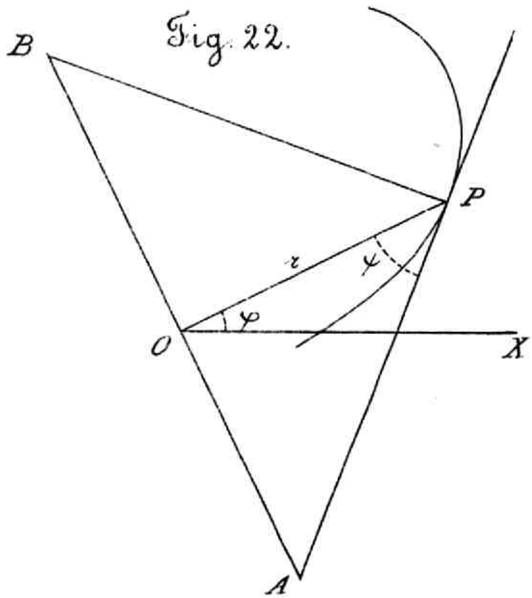
$$\text{en } \sin\psi = \frac{r\,d\varphi}{\sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}}$$

Aangezien ψ gelegen is tusschen de grenzen 0 en π zal $\sin\psi$ steeds positief zijn, doch $\cos\psi$ positief of negatief moeten worden genomen naarmate ψ scherp of stomp is.

§102 Inplaats van den hoek ψ, terbepaling van den stand der raaklijn, kan men ook gebruik

maken van lijnen wier lengte van dezen hoek afhankelijk is.
Zy PA de raaklijn en PB de normaal van het punt P (fig 22), terwijl AOB eene lijn is die loodrecht op den voerstraal OP door O getrokken is, dan kunnen de lijnen OA, OB, AP en BP daar, voor in aanmerking komen.

Fig. 22.



Wy noemen die lijnen: polaire subtangens, polaire subnormaal, raaklijn en normaal.
Uit de figuur volgt onmiddellijk:

$$S_t = OA = OP \tan \psi = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$$

$$S_n = OB = OP \cot \psi = \frac{dr}{d\varphi}$$

$$T = AP = OP \sec \psi = \frac{r\sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}}{dr}$$

$$N = BP = OP\,\mathrm{cosec}\,\psi = \frac{\sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}}{d\varphi}$$

Meestal wordt de eerstgenoemde lijn gebruikt. Deze lijn is positief indien $\frac{dr}{d\varphi}$ positief is, dus het punt A aan de zelfde zijde valt van den voerstraal als waar de hoek ψ gelegen is.

§103. Noemen wij de lengte van een gedeelte der kromme lijn, gemeten van af een vast punt tot in P, s zoo is s eene functie van φ en dus boog $PQ = \Delta s$ (zie fig 21)

In ΔPQR is $PR = PQ \frac{\sin RQP}{\sin PRQ}$, terwijl boog PR gelijk aan ~~$2r\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi$ is~~. $r\Delta\varphi$ is.

Wij vinden derhalve:

$$\frac{\text{boog } PQ}{PQ} = \frac{\Delta s}{PR}\,\frac{\sin RQP}{\sin PRQ} = \frac{\Delta s}{\cancel{2r\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi}\ r\Delta\varphi} \cdot \frac{\text{boog } RP}{RP} \cdot \frac{\sin RQP}{\sin PRQ}$$

of bij overgang tot de limiet:

$$1 = \frac{ds}{r\,d\varphi}\sin\psi$$

dus op grond van het gevondene in §101:

$$ds = \sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}$$

Opmerking.

De waarden voor $\tan\psi$ en ds gevonden kunnen ook worden afgeleid uit de uitdrukkingen die men

daarvoor bij rechthoekige coördinaatassen vindt, door gebruik te maken van de bekende transformatieformules: $x = r\cos\varphi$ en $y = r\sin\varphi$.
Dit wordt aan den leerling tot oefening overgelaten.

Van meer belang is het op te merken dat men die waarden gemakkelijker vindt door toepassing van de beschouwingen op bl: 172 en 173 gegeven.

Volgens deze methode mogen wij het kromlijnig figuurtje PQR aanzien als een rechthoekigen driehoek, rechthoekig in R, waarvan de zijden $PR = rd\varphi$, $QR = dr$ en $PQ = ds$ zijn en waarin hoek $RQP = \psi$ is. Uit dezen driehoek lezen wij dan onmiddellijk de betrekkingen:

$$\tang \psi = \frac{rd\varphi}{dr} \text{ en } ds = \sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}$$

§104. Voorbeelden.

a.) Voor de gewone epicycloïde (cardioïde) hebben wij in de analytische meetkunde de poolvergelijking:

$$r = 2a(1 - \cos\varphi)$$

gevonden.

Door differentiatie vinden wij

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2a \sin\varphi$$

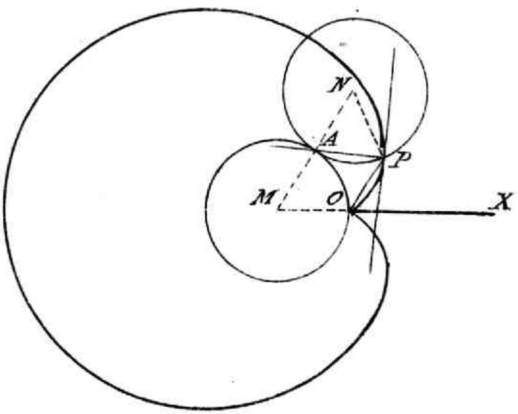
dus:

$$\tang\psi = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \tang\tfrac{1}{2}\varphi$$

of:

$$\psi = \tfrac{1}{2}\varphi$$

Fig. 23.



Als N het middelpunt is van den rollenden cirkel (fig 23) en A het raakpunt met den vasten cirkel M, op het oogenblik dat het beschrijvende punt in P is, zoo is OP evenwijdig met MAN, en dus loopt de raaklijn in P evenwijdig met de lijn die den hoek ANP = φ middendoordeelt.

Daar $\triangle$ ANP gelijkbeenig is, staat die deellijn loodrecht op AP zoodat AP de normaal van het punt P voorstelt.

(Zie de overeenkomstige eigenschap by de cycloïde.)

b.) De logarithmische spiraal:

$$r = a^{\varphi}.$$

Door differentiatie vinden wij:

$$\frac{dr}{d\varphi} = a^{\varphi} \operatorname{Nep}\log a$$

of indien wij M de modulus van het logarithmenstelsel noemen waarvan a de basis is:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r}{M}.$$

dus: $$\operatorname{tang}\psi = \frac{r\,d\varphi}{dr} = M$$

De raaklijn maakt dus in elk punt met den voerstraal een constanten hoek.
Voor den polairen subtangens vinden wij:

$$S_t = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = rM.$$

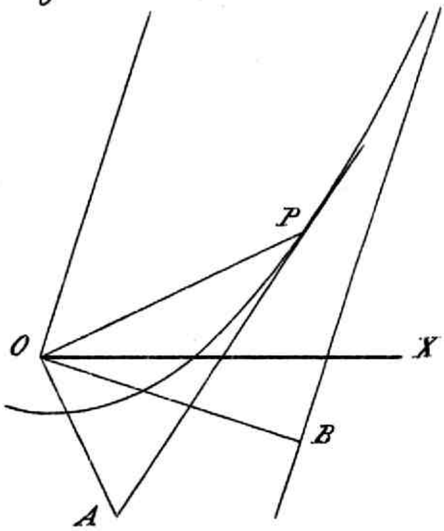
C. Rechtlijnige asymptoten.

§105. Zoodra een oneindig voortloopende tak eener kromme lijn eene asymptoot bezit, zal de voerstraal, van het in het oneindige verdwenen raakpunt, evenwijdig loopen met die asymptoot en oneindig groot zijn.

Voor een eindige waarde van φ zal dus $r = \infty$ zijn waarbij die eindige waarde tevens de richting van de raaklijn in het oneindig ver afgelegen punt zal aangeven.

Wil die raaklijn werkelijk eene asymptoot zijn, zoo moet zij op een eindigen afstand van de pool zijn gelegen.

Fig. 24.



Zij OB de afstand dan blijkt uit eene eenvoudige beschouwing der figuur (fig 24) dat OB de limiet is, waartoe de polaire subtangens OA van een punt P der Kromme nadert, indien dit punt in het oneindige verdwijnt.

Tot het onderzoek naar het bestaan van asymptoten moeten wij dus dezen weg volgen:

1e men onderzoekt voor welke waarden van φ $r = \infty$ wordt, om na te gaan of de Kromme lijn al dan niet oneindig ver afgelegen punten bezit.

Wordt $r = \infty$ voor $\varphi = \infty$ zoo tracht de kromme geen standvastige richting aantenemen.

2° Voor elke eindige waarde $\varphi = \alpha$, die $r = \infty$ maakt, onderzoekt men de waarde van den polairensubtangens $\frac{r^2 d\varphi}{dr}$. Is dit bedrag eindig zoo heeft de kromme lijn eene asymptoot die op dien afstand evenwijdig loopt met den voerstraal $\varphi = \alpha$. Is dit bedrag gelijk nul zoo is de voerstraal zelf de asymptoot. Is dit bedrag oneindig groot zoo bezit de kromme geen asymptoot doch tracht meer en meer evenwijdig te worden aan den voerstraal $\varphi = \alpha$.

§106 Voorbeelden.

a.) De algemeene poolvergelijking der kegelsneden, als wij een brandpunt tot pool en de lijn, die het brandpunt met den dichtstbijgelegen top verbindt, tot poolas aannemen is:

$$r = \frac{p}{1 + k\cos\varphi}$$

zijnde die eener ellips, hyperbool of parabool naarmate k kleiner, grooter dan of gelijk aan 1 is. Hierin stelt p de halve parameter der kegelsnede voor.

Door differentiatie vinden wij

$$(1 + k\cos\varphi)\,dr - k\,r\sin\varphi\,d\varphi = 0$$

dus: $$\frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{1+k\cos\varphi}{k\sin\varphi}$$

of: $$\frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{p}{k\sin\varphi}$$

r wordt oneindig groot als $1+k\cos\varphi=0$ dus: $\cos\varphi = -\frac{1}{k}$ is, waaruit blijkt dat alleen bij de hyperbool en parabool oneindig ver afgelegen punten bestaan.

Voor $k=1$ wordt $\varphi=\pi$, dus $\frac{r^2 d\varphi}{dr} = \infty$

(De parabool heeft derhalve geen asymptoot maar tracht meer en meer evenwijdig te worden met den voerstraal $\varphi=\pi$ d.i. met de poolas.

Voor $k>1$ vinden wij $\cos\varphi = -\frac{1}{k} = -\frac{a}{e}$, als $2a$ de hoofdas der hyperbool en $2e$ de brandpuntsafstand is.

Voor die waarde wordt:

$$\frac{r^2 d\varphi}{dr} = \pm \frac{ap}{e\sqrt{(1-\frac{a^2}{e^2})}} = \pm\frac{ap}{b} = \pm b.$$

als $2b$ de toegevoegde as is

(De hyperbool heeft dus twee asymptoten op een afstand b van de pool (het brandpunt) verwijderd en evenwijdig loopende met de beide voerstralen begrepen in de vergelijking $\cos\varphi = -\frac{a}{e}$, overeen.

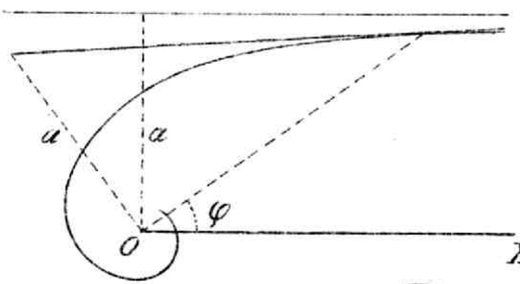
Komende met de beide vergelijkingen: $\tan\varphi = \mp\frac{b}{a}$

b) De hyperbolische spiraal $r\varphi = a$

$$r = \frac{a}{\varphi}\ , \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2}\ , \quad \frac{r^2 d\varphi}{dr} = -a$$

Voor $\varphi = 0$ wordt $r = \infty$, terwijl steeds de polaire subtangens gelijk $-a$ is en dus een standvastige lengte bezit.

Fig. 25.



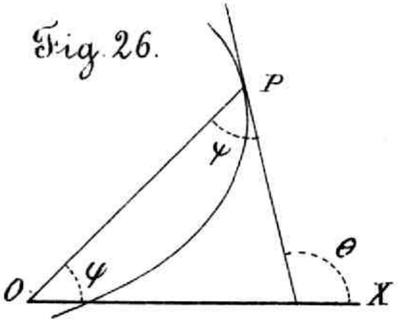
De kromme lijn heeft derhalve eene asymptoot die op den afstand a evenwijdig loopt met de poolas (zie fig 25)

c. Buigpunten.

§107 Ten einde na te gaan of eene kromme lijn in een zeker punt (φ, r) de holle of wel de bolle zijde naar de pool keert, hebben wij slechts te letten op de verandering van den hoek θ welken de raaklijn in dat punt maakt met de poolas, indien men de poolabscis φ van het punt laat aangroeien.

Eene eenvoudige beschouwing der figuur doet ons zien dat de kromme de holle of wel de bolle zijde naar de pool keert naarmate bij het aangroeiën van φ de hoek θ aangroeit of afneemt.

Fig. 26.

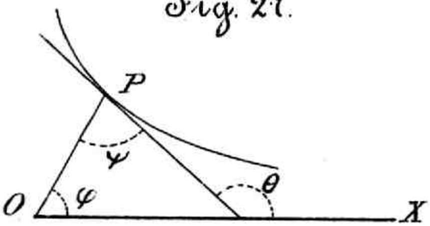


Nu is $\theta = \varphi + \psi = \varphi + \text{boogtang}\,\frac{r\,d\varphi}{dr}$

Bij het aangroeiten van φ zal θ aangroeiten of afnemen naarmate $\frac{d\theta}{d\varphi}$ positief of negatief is.

Door differentiatie vinden wij:

Fig. 27.



$$\frac{d\theta}{d\varphi} = 1 + \frac{\frac{dr^2 - r\,d^2r}{dr^2}}{1 + \frac{r^2 d\varphi^2}{dr^2}} =$$

$$= \frac{2dr^2 + r^2 d\varphi^2 - r\,d^2r}{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

of ook: $$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2}$$

Aangezien de noemer steeds positief is hangt het teeken alleen af van het teeken van den teller en verkrijgen wij dus den regel:

„eene kromme lijn keert in het punt (φ, r) de holle „of bolle zijde naar de pool naarmate de uit„ „drukking: $r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ positief of nega„ „tief is".

Het punt (φ, r) zal een buigpunt zijn indien θ een maximum of een minimum wordt.

In zulk een punt zal:

$$r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}$$

gelijk aan 0 of ∞ zijn.

Omgekeerd echter zullen alle waarden van φ of r die deze uitdrukking 0 of ∞ maken nog geen aanleiding geven tot een buigpunt. Wij zullen dan nog moeten nagaan of θ werkelijk een maximum of een minimum wordt.

Voor de overige merkwaardige punten zullen wij niet in bijzonderheden treden.

§ 108. Voorbeelden.

a.) $r = 2a(1-\cos\varphi)$ Cardioide zie p. 209.

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2a\sin\varphi, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = 2a\cos\varphi$$

$$r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 12a^2(1-\cos\varphi)$$

Daar deze laatste vorm voor alle waarden van φ

positief is keert de kromme lijn steeds hare holle zyde naar de pool.

Voor $\varphi = 0$, zoowel als voor $\varphi = 2\pi$ wordt $r = 0$, waaruit blijkt dat de pool een keerpunt zal zijn, en wel van de eerste soort. (zie fig 23)

b.) $$r = a(\tang\varphi - 1)$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{\cos^2\varphi}, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{2a\sin\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$\tang\psi = \frac{r d\varphi}{dr} = \cos\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi)$$

$$St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = a(\sin\varphi - \cos\varphi)^2$$

$$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = a^2(2\tang^3\varphi + 3\tang^2\varphi + 3)$$

Laten wij φ van 0 tot 2π veranderen, zoo kunnen wij reeds in het ruwe over den vorm der kromme lijn oordeelen.

zie fig 28.

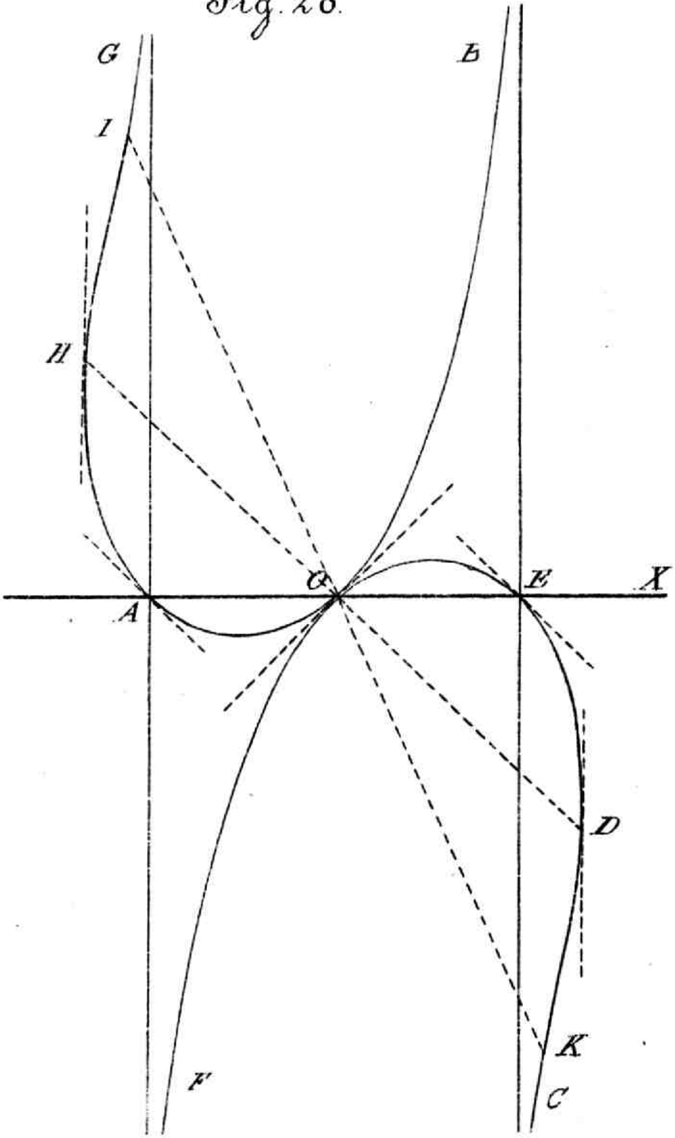
$$\left.\begin{array}{ll} \varphi = 0, & r = -a \\ \varphi = \frac{1}{4}\pi, & r = 0 \end{array}\right\} AO$$
$$\left.\begin{array}{ll} \varphi = \frac{1}{4}\pi, & r = 0 \\ \varphi = \frac{1}{2}\pi & r = \infty \quad St = a \end{array}\right\} OB$$
$$\left.\begin{array}{ll} \varphi = \frac{1}{2}\pi & r = \infty \\ \varphi = \frac{3}{4}\pi & r = -2a \end{array}\right\} CD$$
$$\left.\begin{array}{ll} \varphi = \frac{3}{4}\pi & r = -2a \\ \varphi = \pi & r = -a \end{array}\right\} DE$$
$$\left.\begin{array}{ll} \varphi = \pi & r = -a \\ \varphi = \frac{5}{4}\pi & r = 0 \end{array}\right\} EO$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = \frac{5}{4}\pi\ ,\quad r = 0\\ \varphi = \frac{3}{2}\pi\ ,\quad r = \infty,\ St = a\end{array}\right\}\ OF.$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = \frac{3}{2}\pi\ ,\quad r = \infty\\ \varphi = \frac{7}{4}\pi\ ,\quad r = -2a\end{array}\right\}\ GH.$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = \frac{7}{4}\pi\ ,\quad r = -2a\\ \varphi = 2\pi\ ,\quad r = -a\end{array}\right\}\ HA.$$

Fig. 28.



Daar $St = a$ wordt in de punten wier abscissen $\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{3}{2}\pi$ zijn, zullen de lijnen in E en A, loodrecht op de poolas getrokken, asymptoten zijn.

De pool is een dubbelpunt; de beide takken hebben aldaar eene gemeenschappelijke raaklijn die een hoek van 45° met de poolas maakt.

Uit:

$\tan \psi = \cos\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi)$

blijkt dat in de

punten A en E de raaklijnen hoeken van 135° met de poolas maken, terwijl zij in de punten D en H loodrecht op de poolas staan.

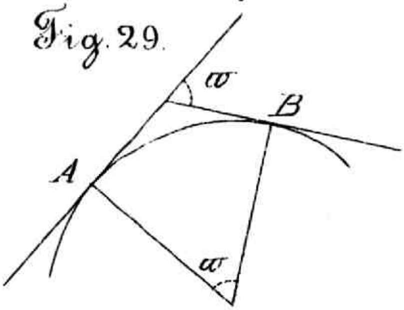
De vergelijking: $2\tan^3\varphi + 3\tan^2\varphi + 3 = 0$ bezit een bestaanbare wortel, tusschen −1 en −2 gelegen, waarvoor bij benadering wordt gevonden: $\tan\varphi = -1{,}91\ldots\ldots$ dus $\varphi = 117°38'$ en $\varphi = 297°38'$.

Van $\varphi = 0$ tot $\varphi = 117°38'$ is het voorste lid der vergelijking positief, van $\varphi = 117°38'$ tot $\varphi = 297°38'$ negatief en van $\varphi = 297°38'$ tot 360° weder positief. Het blijkt hieruit dat de beide voor φ gevonden waarden de poolabscissen zijn van twee buigpunten en dus de kromme lijn de gedaante heeft als in fig 28 is aangewezen.

C. Over de kromming bij kromme lijnen, gegeven door hare vergelijking bij rechthoekige coördinaatassen.

§109. Zij AB (fig 29) de boog eener willekeurige kromme lijn — waarin zich echter geen buigpunt bevindt — zoo is de hoek ϖ, welken de raaklijnen in de punten A en B met elkaâr vormen, de absolute kromming van de kromme lijn AB. (Deze hoek, die ook gelijk is aan den hoek gevormd door de normalen in de punten A en B, verandert wanneer het punt B zich langs de kromme lijn verplaatst.

Fig. 29.



Is AB = s de boog van een cirkel welks straal r is, zoo is $AB = r\varpi$ of $\varpi = \frac{AB}{r}$.
Hieruit blijkt vooreerst dat de absolute kromming in een zelfden cirkel evenredig is met de lengte van den boog, maar tevens dat zij voor gelijke bogen, genomen in cirkels van verschillenden straal, omgekeerd even-

redig is met dien straal.

§110. $\frac{\varpi}{AB}$ wordt de gemiddelde kromming van de kromme lijn AB genoemd.

Bij een cirkel is deze gelijk aan $\frac{1}{r}$, dus onafhankelijk van de lengte van den boog.

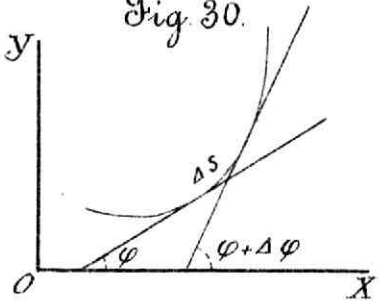
Laten wij op de willekeurige kromme lijn AB het punt B onbegrensd tot A naderen, dan wordt ϖ gelijktijdig met boog AB nul, terwijl $\frac{\varpi}{AB}$ nadert tot eene bepaalde limiet die de kromming aangeeft van de kromme lijn in het punt A.

De cirkel, die het omgekeerde dezer limiet — dus $\lim \frac{AB}{\varpi} = R$ —: tot straal heeft, zal over zijn geheele uitgestrektheid dezelfde kromming bezitten als de kromme lijn in het punt A.

R wordt de kromtestraal van de kromme lijn in het punt A genoemd.

§111. Ter berekening van den kromtestraal in het punt (x,y) eener kromme lijn, die door hare vergelijking $f(x,y)=0$ bij rechthoekige assen gegeven is, merken wij op dat:

Fig. 30.



$$R = \lim \frac{\Delta s}{\Delta \varphi} = \frac{ds}{d\varphi}$$

is, waarin φ den hoek voorstelt, welken de raaklijn in het punt (x, y) maakt met de X as, en s de lengte van de kromme lijn, gemeten van af een bepaald punt tot aan het punt (x, y)

Nu is:
$$\varphi = \text{boogtang}\, \frac{dy}{dx}$$

dus:
$$d\varphi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx$$

terwijl
$$ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

is. Wij vinden derhalve voor de lengte van den kromtestraal:

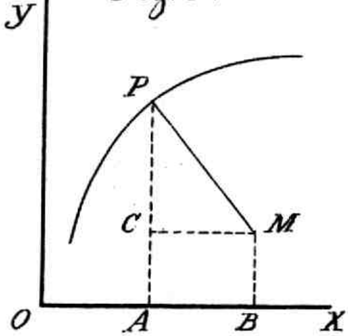
$$R = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Om voor R een positief bedrag te vinden zullen wij — indien het tweede differentiaalquotient negatief is — vóór het wortelteeken het negatieve teeken moeten plaatsen.

§112. Zetten wij op de normaal van het punt P (x,y) van af dit punt – en wel aan de holle zijde der kromme – een stuk PM uit, gelijk aan den kromtestraal, en beschrijven wij uit M een cirkel met R als straal, zoo heet die cirkel de *kromtecirkel* van het punt P en M het *kromtemiddelpunt*.

Noemen wij (α, β) de coördinaten van het punt M, dan zijn deze gemakkelijk te berekenen.

Fig. 31.



Stel daartoe, om de gedachten te bepalen, dat de kromme lijn de holle zijde naar de X as keert, (fig 31), zoo is:

$$R = -\frac{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Uit driehoek PCM volgt:

$$\operatorname{tang} CPM = \frac{\alpha - x}{y - \beta} = \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots (2)$$

en: $$\alpha - x = R \overset{\sin}{\cancel{\cos}} CPM = -\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

dus: $$y - \beta = -\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

De coördinaten van het middelpunt van den krommecirkel worden dus gegeven door:

$$\alpha = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

en:

$$\beta = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Elimineert men x en y tusschen de vergelijkingen (3) en (4) met behulp van de vergelijking der kromme lijn $f(x, y) = 0$, zoo ontstaat eene betrekking tusschen de grootheden α en β, zijnde de vergelijking van de meetkundige plaats der krommemiddelpunten.

Deze meetkundige plaats is eene kromme lijn waaraan men den naam van ontwondene der eerste kromme lijn heeft gegeven, en zulks op grond van hare eigenschappen die in de volgende paragraaf zullen worden bewezen.

§113 De ontwondene eener kromme lijn bezit de volgende twee hoofdeigenschappen:

1º De normalen der kromme lijn zijn raaklijnen aan de ontwondene in de kromtemiddelpunten

2º Het verschil in lengte tusschen twee kromtestralen der kromme lijn is gelijk aan den boog der ontwondene, begrepen tusschen de twee kromtemiddelpunten.

Om de eerste eigenschap te bewijzen maken wij gebruik van de vergelijking (2) der voorgaande paragraaf:

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0$$

waarin y, α, β en $\frac{dy}{dx}$ als functien van x zijn te beschouwen.

Door differentiatie vinden wij:

$$1-\frac{d\alpha}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

welke vergelijking, door gebruik te maken van de betrekking (4):

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

overgaat in:

$$-\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

of:

$$\frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\frac{dy}{dx}=-1 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

aangevende dat de raaklijn in het punt (α, β) der ont-woudene loodrecht staat op de raaklijn in het punt (x, y) der kromme, en daar zij door het punt (x, y) gaat is zy dus tevens de normaal dezer kromme.

Om de tweede eigenschap te bewijzen maken wij gebruik van de betrekking:

$$R = \sqrt{\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\}}$$

Door differentiatie vinden wij hieruit:

$$dR = \frac{(x-\alpha)(dx-d\alpha) + (y-\beta)(dy-d\beta)}{\sqrt{\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\}}}$$

welke met behulp van (2) overgaat in:

$$dR = -\frac{(x-\alpha)d\alpha + (y-\beta)d\beta}{\sqrt{\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\}}} = -\frac{d\alpha + \frac{y-\beta}{x-\alpha}d\beta}{\sqrt{\{1 + \left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right)^2\}}}$$

Op grond van (2) en (5) is:

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = -\frac{dx}{dy} = \frac{d\beta}{d\alpha}$$

waardoor wij vinden:

$$dR = -\frac{d\alpha + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}{\sqrt{\{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\}}} = -\sqrt{(d\alpha^2 + d\beta^2)}$$

Nu gaat deze vergelijking, wanneer wij boog AM der ontwoudene (zie fig 32) gelijk stellen aan s_1, over in:

$$dR = -ds,$$

of: $$R = C - s,$$

waarin C een constante voorstelt.

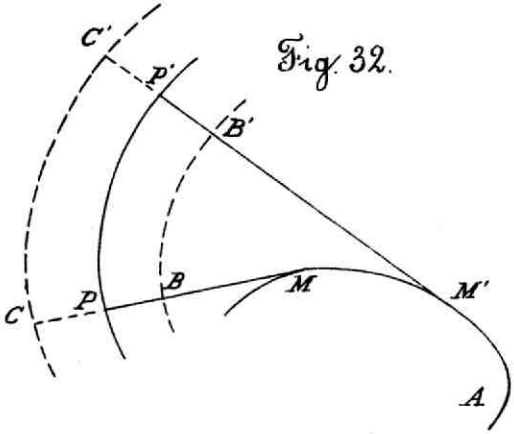


Fig. 32.

Zijn PM en $P'M'$ twee verschillende kromtestralen zoo is:

$$PM = C - \text{boog } AM$$

en $$P'M' = C - \text{boog } A'M'$$

waaruit door aftrekking volgt:

$$P'M' - PM = \text{boog } AM - \text{boog } AM' = \text{boog } MM'$$

waarmede de tweede eigenschap bewezen is.

§ 114. De beide in de voorgaande paragraaf bewezen eigenschappen hebben aan de meetkundige plaats der kromtemiddelpunten den naam van <u>ontwondene</u> doen geven.

Stellen wij ons toch voor dat het mogelijk ware een volkomen buigbaar en onrekbaar koord, zonder dikte, te leggen over de kromme lijn $AM'M$, en wel zoodanig dat het eene uiteinde b.v. bevestigd ware in A en het andere uiteinde gestrekt volgens de raaklijn MP in P kwam, zoo zou het uiteinde P van het koord de kromme lijn PP' doorloopen indien het koord, voortdurend gestrekt, van de kromme lijn MM' werd afgewonden.

De kromme lijn PP' wordt de ontwindende van MM' genoemd.

Was het koord korter of langer geweest, zoodat het uiteinde gekomen ware in B of C, zoo zou bij de afwinding de kromme lijn BB' of CC' zijn ontstaan, die derhalve eveneens MM' tot ontwondene hebben.

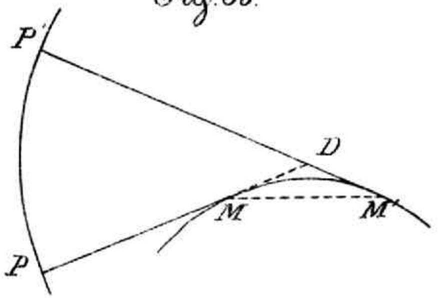
Uit het voorgaande blijkt dat elke kromme lijn slechts ééne bepaalde ontwondene bezit, doch dat voor elke kromme lijn een oneindig groot aantal ontwindenden bestaan, die men evenwijdige kromme lijnen noemt.

§115. Het middelpunt van den kromtecirkel in eenig punt $P(x.y)$ kan ook worden verkregen indien men de limiet bepaalt van het snijpunt der normalen in de punten $P(x,y)$ en $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

Dat dit inderdaad het geval is kunnen wij gemakkelijk als volgt aantoonen. Zij D (fig 33) het snijpunt der normalen in de punten P en P', M en M' de middelpunten der kromtecirkels.

Nadert het punt P' onbegrensd tot P, zoo na-

Fig. 33.



dert $P'M'$ tot PM en dus $\angle MDM'$ tot een gestrekten hoek. In driehoek MDM' is dus MM' de grootste zijde; deze nadert tot nul en dus nadert ook MD tot nul.

Wanneer men het punt P' tot P laat naderen zal derhalve het snijpunt D zich langs de lijn PM verplaatsen en naderen tot het punt M.

De omstandigheid dat wij de ontwondene mogen aanzien als de meetkundige plaats van de snijpunten der opvolgende normalen, geeft ons een gemakkelijk middel aan de hand om bij benadering de ontwondene eener kromme lijn te teekenen.

§ 116. Zonder veel moeite kan ook nog worden aangetoond dat de kromtecirkel van een punt (x, y) de limiet is van den cirkel die gebracht wordt door de punten:

$$(x, y) \quad , \quad (x+\Delta x, y+\Delta y) \text{ en } (x+2\Delta x, y+2\Delta y+\Delta^2 y)$$

indien men Δx onbegrensd tot nul laat naderen, waardoor dus ten slotte de drie punten samenvallen.

Wij zullen dit aan den leerling overlaten.

§ 117. Uit de gevonden formule voor den kromte-straal blijkt, dat deze 0 of ∞ wordt indien $\frac{d^2y}{dx^2}$ gelijk ∞ of 0 wordt.

Nemen wij dit in acht, dan komen wij gemakkelijk tot de volgende besluiten:

1° Wanneer de kromme lijn een buigpunt heeft is de kromtestraal in dat punt 0 of ∞ en heeft dus de ontwondene een buigpunt of wel eene asymptoot (fig 34 en 35)

2° Wanneer de kromme lijn een keerpunt van de eerste soort heeft zoo kan de kromtestraal in dat punt 0 of ∞ zijn en dus de ontwondene door het keerpunt gaan of wel eene asymptoot bezitten die door het keerpunt gaat (fig 36 en 37)

3° Is $\frac{d^2y}{dx^2}$ gelijk 0 of ∞ zonder dat de kromme lijn een buig- of keerpunt bezit, zoo heeft de ontwondene eene asymptoot of wel een keerpunt van de eerste soort (fig 38 en 39)

Verder kunnen zich nog de volgende byzonderheden voordoen:

Fig. 34.

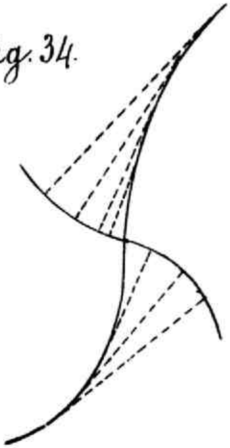


Fig. 36.

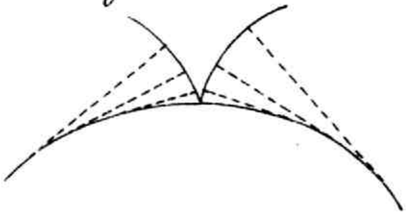


Fig. 35.

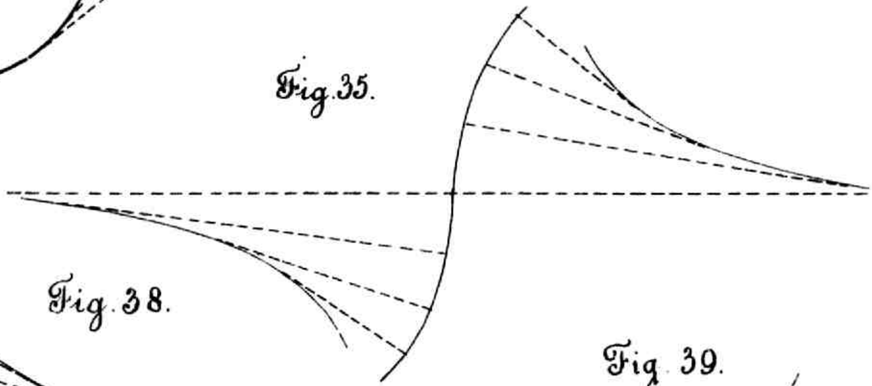


Fig. 38.

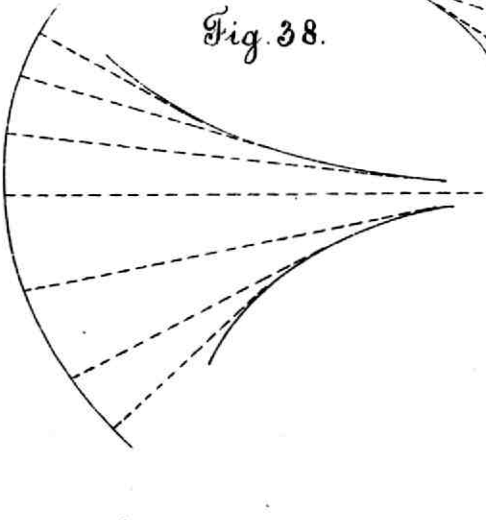


Fig. 39.

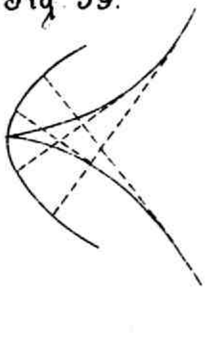
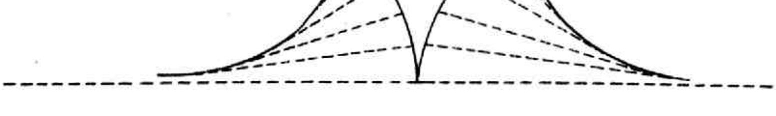


Fig. 37.



1° De kromtestraal kan in eenig punt een maximum of minimum zijn, waardoor de ontwondene een keerpunt bezit van de eerste soort. (fig 40 en 41)

2° De kromme lijn kan een keerpunt van de tweede soort bezitten, zonder dat in dit punt $\frac{d^2y}{dx^2}$ nul of oneindig groot is. De ontwondene heeft dan een buigpunt (fig 42) of wel een keerpunt van de tweede soort (fig 43).

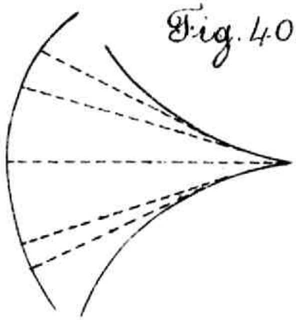


Fig. 40.

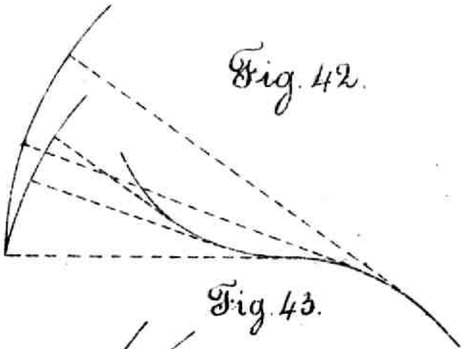


Fig. 42.

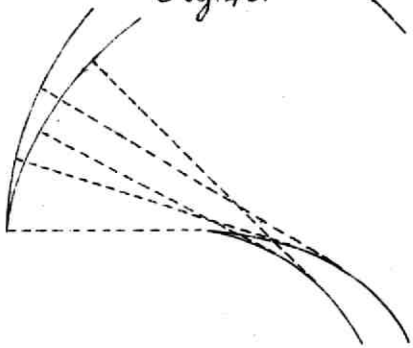


Fig. 43.

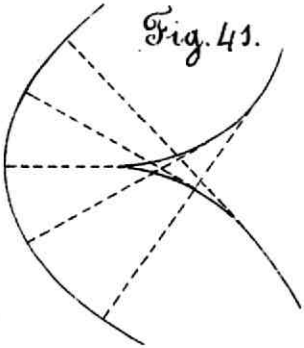


Fig. 41.

§118 Beschouwen wij van eene kromme lijn drie dicht bij elkaâr gelegen punten P, P' en P'' en hunne kromtemiddelpunten M, M' en M'', dan zal een cirkel, die uit het punt M' met $M'P'$ als straal beschreven is, de kromme lijn in het punt P' gelijktijdig raken en snijden, althans wanneer de kromtestraal $P'M'$ niet een maximum of een minimum is.

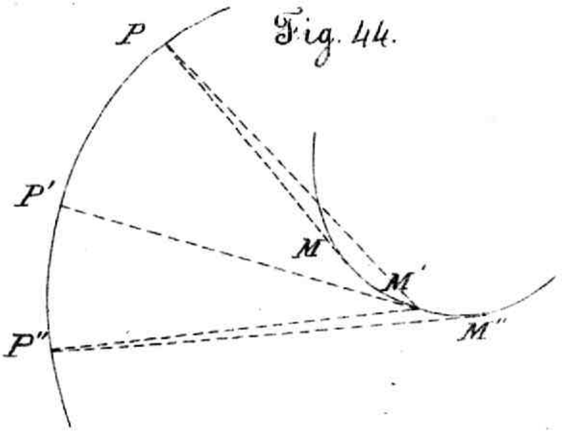


Fig. 44.

Verbinden wij toch de punten P en P'' met M' zoo is:

$$M'P'' > M''P'' - M'M''$$

dus:

$$M'P'' > M'P'$$

en:

$$M'P < MP + MM'$$

dus

$$M'P < M'P'$$

waaruit blijkt dat P binnen en P'' buiten den cirkel zal liggen die uit M' met $M'P'$ als straal beschreven is.

Bij dit bewijs zijn de koorden MM' en $M'M''$ gelijk gesteld aan de bogen, hetgeen slechts mag geschieden als de punten op een oneindig kleinen afstand van elkaâr gelegen zijn.

(Denken wij ons uit eenig punt van de normaal, tusschen P' en M' gelegen, een cirkel beschreven die de kromme lijn in P' raakt, zoo zullen de beide punten P en P'' buiten dien cirkel vallen, of - met andere woorden - in de nabijheid van het raakpunt zal de kromme lijn ter weêrszijden van dit raakpunt vallen tusschen den cirkel en de raaklijn aan de kromme in P'.

Beschrijven wij een rakenden cirkel in P', waarvan de straal grooter is dan P'M', zoo zal in de nabijheid van het raakpunt de cirkel gelegen zijn tusschen de kromme lijn en de raaklijn

Denken wij ons de straal van den rakenden cirkel veranderlijk in grootte, zoo vormt de kromtecirkel juist den overgang van de twee verschillende soorten van rakende cirkels.

§119 Alvorens over te gaan tot het behandelen van eenige voorbeelden, willen wij nog opmerken dat men de coördinaten van eenig punt eener kromme lijn dikwijls uitdrukt als functien van een derde veranderlijke en dus de kromme lijn geeft door de beide vergelijkingen:

$$x = f(t) \text{ en } y = F(t)$$

In dat geval neemt de formule van den kromtestraal een eenigszints andere gedaante aan.
Wij vinden nu:

$$R = \frac{ds}{d\varphi}$$

waarin:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

en:

$$d\varphi = d.\,\text{boogtang}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2}$$

is, derhalve:

$$R = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

Wanneer wij bedenken dat:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \quad \text{en} \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$$

dus:

$$d.\frac{dx}{ds} = -\sin\varphi\,d\varphi \quad \text{en} \quad d.\frac{dy}{ds} = \cos\varphi\,d\varphi$$

is, zoo is:

$$d\varphi = \sqrt{\left\{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}}$$

zoodat derhalve de formule voor den kromtestraal ook kan worden geschreven in de gedaante:

$$R = \frac{ds}{\sqrt{\left\{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}}} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

Wanneer men de differentiatien uitvoert en gebruik maakt van de betrekkingen:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

en:

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y$$

Zoo kan de formule (2) zonder moeite worden herleid tot:

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{\{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2\}}} \quad \cdots\cdots (3)$$

§120 Voorbeelden:

a) De parabool $y^2 = px$

Wij vinden achtereenvolgens:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3}$$

$$R = -\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\sqrt{(4y^2 + p^2)^3}}{2p^2}$$

Voor $y = 0$ is $R = \frac{1}{2}p$.

Bij het grooter worden van y zal R toenemen en dus de kromming geringer worden.

Tot het opmaken van de vergelijking der ontwondene maken wij gebruik van de betrekkingen (3) en (4) van § 112.

Wij vinden gemakkelijk:

$$\alpha - x = \frac{4y^2+p^2}{2p} = 2x + \tfrac{1}{2}p \quad \text{of} \quad 3x = \alpha - \tfrac{1}{2}p$$

en: $$y - \beta = y\,\frac{4y^2+p^2}{p^2} \quad \text{of} \quad 4y^3 = -p^2\beta$$

Elimineeren wij nu x en y uit deze vergelijkingen en $y^2 = px$, zoo vinden wij voor de vergelijking der ontwondene:

$$\beta^2 = \frac{16}{27p}\left(\alpha - \tfrac{1}{2}p\right)^3$$

Vervangen wij $\alpha - \frac{1}{2}p$ door X en β door Y, d.w.z. nemen wij, bij behoud der Xas, eene nieuwe Yas aan welke door het kromtemiddelpunt van den top der parabool gaat, zoo wordt de vergelijking:

$$Y^2 = \frac{16}{27p}X^3$$

Deze vergelijking is die eener halfcubische parabool. Deze kromme heeft een keerpunt van de eerste soort in den oorsprong, zij bezit geene asymptoten en de gedaante zooals in fig 45 is aangewezen.

b.) De ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wij vinden achtereenvolgens:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \quad R = \frac{\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)^3}}{a^4b^4}$$

Voor $x=0$ wordt $R = \frac{a^2}{b}$, voor $y=0$ wordt $R = \frac{b^2}{a}$

aangevende de waarden van de kromtestralen in de uiteinden der kleine en der groote as.

Laat men uit het hoekpunt E (fig 46) van den rechthoek op de halve assen a en b, eene loodlijn neêr op de diagonaal AB, zoo worden de beide assen getneden in de punten G en H, zijnde de kromtemiddelpunten van de toppen A en B.

Ter bepaling van de ontwondene vinden wij:

$$a^4\alpha = (a^2-b^2)x^3 \text{ en } b^4\beta = -(a^2-b^2)y^3$$

dus na eliminatie van x en y uit deze vergelijkingen en die der ellips:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-b^2)^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2\beta^2}{(a^2-b^2)^2}} = 1$$

ook te schrijven in de gedaante:

$$\left(\frac{X}{m}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Y}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als wij α en β vervangen door X en Y en gemakshalve $\frac{a^2-b^2}{a} = m$ en $\frac{a^2-b^2}{b} = n$ stellen.

Uit de vergelijking blijkt zonder moeite dat deze kromme lijn vier keerpunten van de eerste soort bezit en de gedaante heeft als in fig 46 is aangegeven.

c.) De hyperbool:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wij vinden:

$$R = \frac{\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)^3}}{a^4b^4}$$

zoodat dus de kromtestraal in de toppen der hyperbool $\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}p$ wordt.

Het kromtemiddelpunt van den top A vinden wij door in het hoekpunt E van den rechthoek op de assen eene loodlijn op de asymptoot op te richten. (Deze loodlijn snijdt de hoofdas in het verlangde kromtemiddelpunt.

Voor de vergelijking der ontwondene vinden wij:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2\alpha^2}{(a^2+b^2)^2}} - \sqrt[3]{\frac{b^2\beta^2}{(a^2+b^2)^2}} = 1$$

of:

$$\left(\frac{X}{m}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{Y}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als wij weder α en β door X en Y vervangen en gemakshalve $\frac{a^2+b^2}{a} = m$ en $\frac{a^2+b^2}{b} = n$ stellen.
De gedaante der kromme — die geene asymptoten bezit — blijkt uit fig 47.
De bovenstaande resultaten kunnen ook verkregen worden uit die der ellips, door daarin slechts b te vervangen door $b\sqrt{-1}$.
d.) De algemeene topvergelijking der kegelsneden is:

$$y^2 = px + qx^2$$

waaruit gevonden wordt:

$$2y\frac{dy}{dx} = p + 2qx \quad \text{en} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = q \quad \text{dus:} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3}$$

Maakt men gebruik van de in §84 gevonden waarde voor de lengte van de normaal:

$$N = y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

Zoo kan de formule voor den kromtestraal geschreven worden in de gedaante:

$$R = -\frac{N^3}{y^3\frac{d^2y}{dx^2}}$$

~~welke~~ dus voor de Kegelsneden overgaat in:

$$R = \frac{N^3}{(\frac{1}{2}p)^2}$$

In elk der drie Kegelsneden is derhalve de kromte-straal evenredig met de derde macht van de normaal.
(Deze formule geeft tevens aanleiding tot eene gemakkelijke constructie van het krommemiddelpunt.
Immers: wij weten dat bij de Kegelsneden de projectie van de normaal op den voerstraal gelijk is aan de halve parameter; noemen wij dus α den hoek gevormd door den voerstraal en de normaal, zoo is

$$\tfrac{1}{2}p = N\cos\alpha$$

derhalve:

$$R = N\sec^2\alpha$$

Is dus K (zie fig 45, 46 en 47) het snijpunt van de normaal van eenig punt P met de X as, $KL \perp PK$, L het snijpunt van KL met den voerstraal van P en eindelijk M het snijpunt van de lijn LM, die in L loodrecht op dez voerstraal is getrokken, met de normaal, zoo is M het kromtemiddelpunt van P, want: $\angle LPK = \alpha$, $PK = N$, dus $LP = N\sec\alpha$ en $PM = LP\sec\alpha =$ $= N\sec^2\alpha = R$.

e.) De cycloïde.

Wij zullen - alleen met het doel om eene toepassing te maken van de in § 119 gegeven formule (1) — gebruik maken van de bekende vergelijkingen:

$$x = r(1-\cos\theta)$$
$$y = r(\theta + \sin\theta)$$

waaruit door differentiatie wordt verkregen:

$$\frac{dx}{d\theta} = r\sin\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = r(1+\cos\theta)$$
$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = r\cos\theta \qquad \frac{d^2y}{d\theta^2} = -r\sin\theta$$

en dus: $R = 2r\sqrt{2(1+\cos\theta)} = 4r\cos\frac{1}{2}\theta$.

Zij E het snijpunt van de normaal van het punt P (fig 48) met de grondlijn, zoo is $PE = AD = 2r\cos\frac{1}{2}\theta$ en dus is $R = 2PE$, waaruit een gemakkelijke construktie voor het krommemiddelpunt volgt.

In den top O is de kromtestraal $4r$, in het keerpunt B is hij nul.

Het blijkt nu eenvoudig dat de ontwondene eene cycloïde is. Trekken wij de lijn GH evenwijdig aan de grondlijn op een afstand $2r$, en beschouwen wij deze lijn als de grondlijn voor eene cycloïde voortgebracht bij wenteling van den cirkel, op BH als middellijn beschreven, over GH en wel door het punt B, dan zal deze cycloïde juist de ontwondene der eerstbeschouwde cycloïde zijn.

Fig. 45.

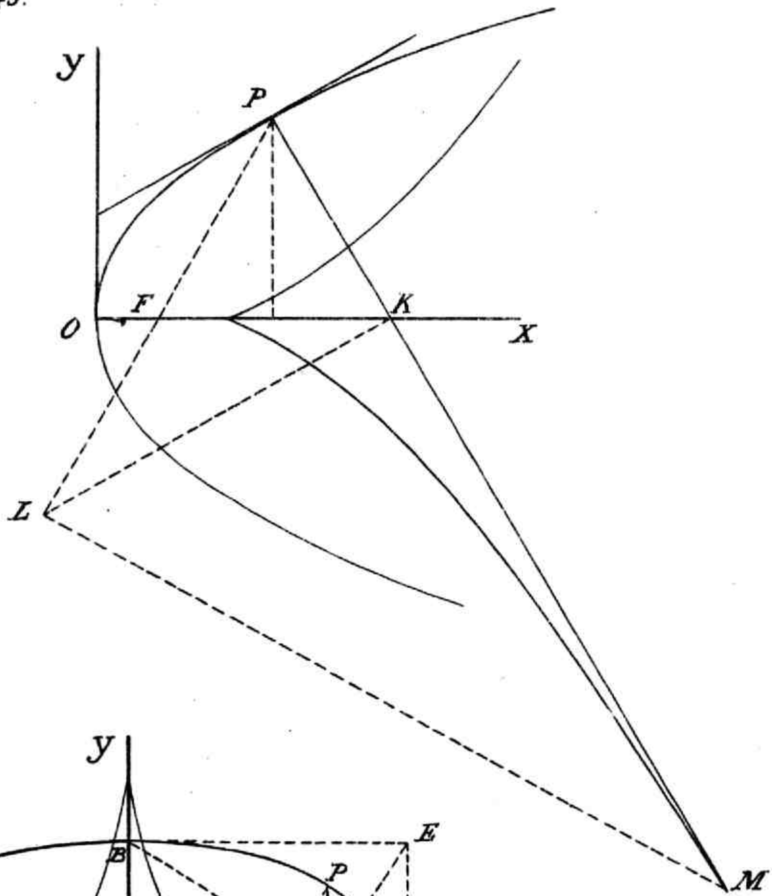
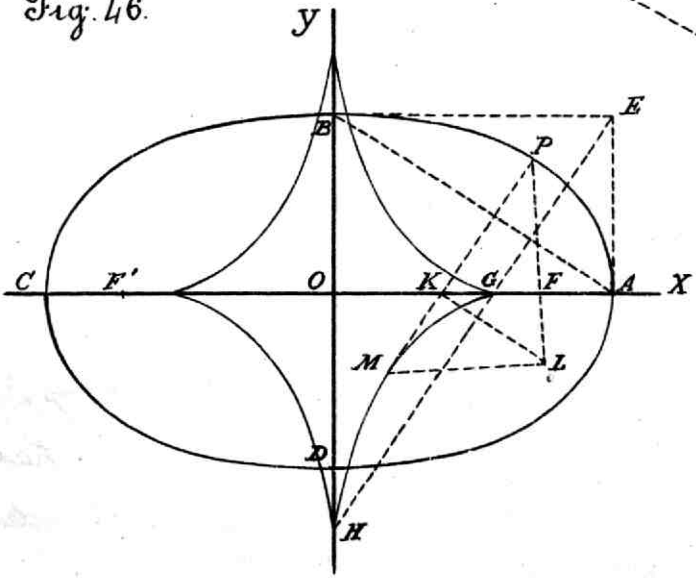


Fig. 46.



immers gemakkelijk blijkt dat BK gelijk en evenwijdig is met AD dus ook met ME.
Verder is AE = DP = boog OD dus BE = boog AD.
maar: MK = BE en boog BK = boog AD dus MK = boog KB, zijnde eene eigenschap, die doorgaat voor elk punt der ontwondene, tevens de kenmerkende eigenschap van eene cycloïde.

D. Over de kromming bij kromme lijnen, gegeven door hare poolvergelijking.

§121. Tot het opmaken van de formule voor den kromtestraal in eenig punt eener kromme lijn, die door hare poolvergelijking $r = f(\varphi)$ gegeven is, kunnen wij gebruik maken van de in §107 gevonden uitdrukking voor $\frac{d\theta}{d\varphi}$, waarin θ den hoek voorstelt die door de raaklijn in eenig punt gemaakt wordt met de poolas.
Volgens de bepaling, in §109 voor den kromtestraal gegeven, is:

Fig. 47.

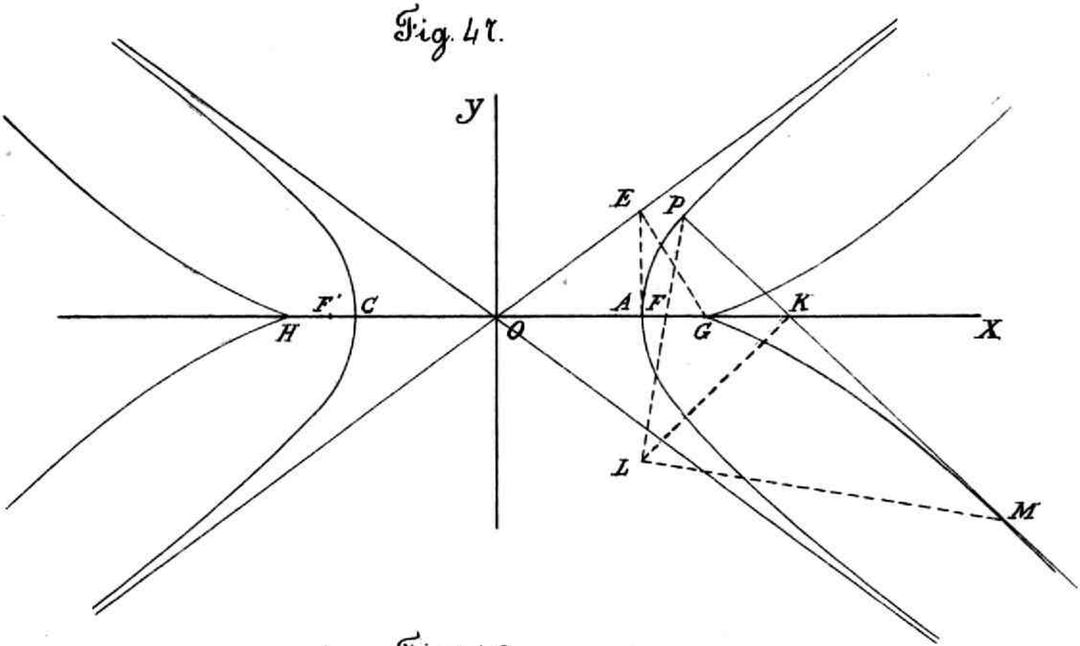
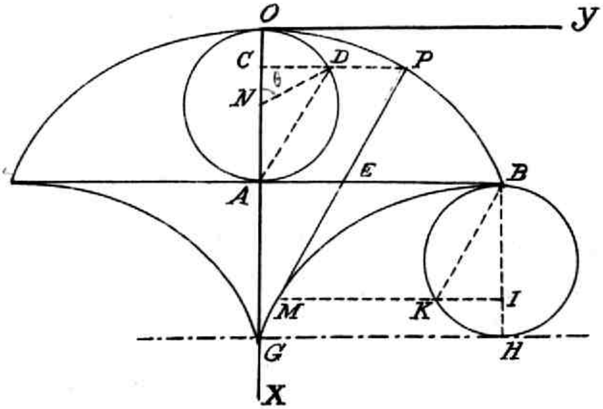


Fig. 48.



$$R = \frac{ds}{d\theta}$$

en dus:

$$R = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^3}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

Deze zelfde formule kan ook worden afgeleid uit formule (1) van §119, door gebruik te maken van de bekende transformatieformules $x = r\cos\varphi$ en $y = r\sin\varphi$, en daarin nu φ als onafhankelijk veranderlijke te kiezen

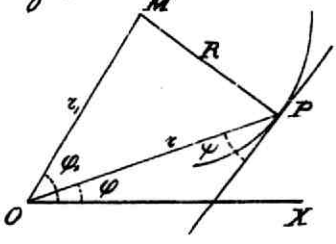
§122. Tot het opmaken van de poolvergelijking der ontwondene zou men den volgenden weg kunnen inslaan.

Zij, in fig 49, M (φ', r') het krommemiddelpunt van $P(\varphi, r)$, ψ de hoek van de raaklijn in P met den voerstraal OP en $PM = R$, dan blijkt uit $\triangle OMP$ dat:

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR\sin\psi$$

$$r_1 : R = \cos\psi : \sin(\varphi_1 - \varphi)$$

Fig. 49.



Deze beide vergelijkingen, in verband met de gevonden formule voor den kromtestraal en de gegeven vergelijking der kromme, stellen ons in staat

de grootheden r, φ en R te elimineeren, waardoor wij eene vergelijking tusschen r_1 en φ_1 overhouden, welke dan de poolvergelijking der ontwondene is.
Alhoewel de formule voor den kromtestraal nog in andere vormen kan geschreven worden, en ook tot het afleiden van de vergelijking der ontwondene meer bruikbare formules kunnen worden afgeleid, zoo zullen wij ons hiermede echter niet verder bezig houden.

§123. Voorbeeld.

De gewone epicycloïde:

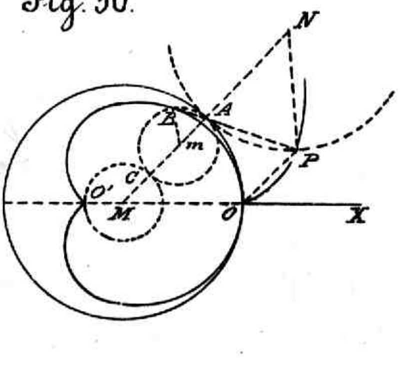
$$r = 2a(1 - \cos\varphi)$$

Wij vinden:

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2a\sin\varphi\ ,\quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = 2a\cos\varphi\ ,\quad R = \frac{8}{3}a\sin\frac{1}{2}\varphi$$

In §104 hebben wij gezien dat PA (fig 50) de richting is van de normaal van het punt P, als A het raakpunt is van den rollenden met den vasten cirkel.

Fig. 50.



Nu is $PA = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi$

en $PB = R = \frac{4}{3}PA$

of $AB = \frac{1}{3}PA$

Beschrijven wij een cirkel, gaande door de punten A en B

en rakende den cirkel MA in het punt A, zoo is de straal van dezen cirkel $mA = \frac{1}{3}a$. Een cirkel, met $Mc = \frac{1}{3}a$ als straal beschreven, raakt den vorigen cirkel in C.

Gemakkelijk blijkt de gelijkheid der hoeken BmA en ANP of AMO, zoodat ook $\angle BmC = \angle O'MC$, dus boog BC = boog $O'C$ is. De meetkundige plaats van het punt B is derhalve eene gewone epicycloïde ontstaande door de rolling van den cirkel mC over den vasten cirkel $O'M$.

E. Over de raking van kromme lijnen. Ineensmeltingskrommen.

§124. Als twee kromme lijnen $y = f(x)$ en $y' = F(x)$ een punt gemeen hebben en dus voor een bepaalde waarde van x, $y = y'$ wordt, zoo is het verschil der ordinaten van beide kromme lijnen voor eene abscis $x+h$, waarin h oneindig klein is,

$$V = f(x+h) - F(x+h) = h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left\{f''(x+\theta h) - F''(x+\theta' h)\right\}$$

derhalve in het algemeen een oneindig kleine van de zelfde orde als h.

De kromme lijnen snijden elkander in dat geval.
Is niet alleen $y = y'$ maar tevens $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$, zoo wordt:

$$V = \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx^2}\right) + \frac{h^3}{1.2.3}\left\{f'''(x+\theta h) - F'''(x+\theta' h)\right\}$$

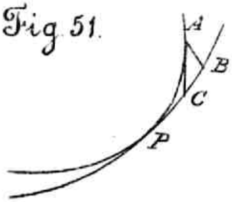
dus (als h oneindig klein is van de 1e orde) in het algemeen een oneindig kleine van de tweede orde.
De kromme lijnen bezitten nu in het punt eene gemeenschappelijke raaklijn en raken dus elkander.
Is $y = y'$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$ en $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx^2}$, zoo wordt:

$$V = \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3y'}{dx^3}\right) + \frac{h^4}{1.2.3.4}\left\{f^4(x+\theta h) - F^4(x+\theta' h)\right\}$$

dus een oneindig kleine van de derde orde.
De kromme lijnen bezitten nu in het gemeenschappelijke punt niet alleen dezelfde raaklijn maar ook denzelfden krommtecirkel.
Men zegt alsdan dat de kromme lijnen elkander raken volgens de tweede orde.
Is $y = y'$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx^2}$ .... $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^ny'}{dx^n}$, doch $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ niet gelijk aan $\frac{d^{n+1}y'}{dx^{n+1}}$, zoo is V in het algemeen een oneindig kleine van de $n+1^{ste}$ orde en raken de kromme lijnen elkander volgens de n^{de} orde.

Het is niet moeilijk in te zien dat de orde der aanraking van twee kromme lijnen onafhankelijk is van de keuze der coördinaatassen, mits men slechts de Y as niet evenwijdig neme aan de gemeenschappelijke raaklijn. Immers zy P (fig 51) het raakpunt, A een dicht by P gelegen punt op de eerste kromme lijn en AB en AC de lijnen evenwijdig aan de verschillende Y assen getrokken, dan zijn A, B en C de hoekpunten van een driehoek, welks hoeken B en C tot bepaalde eindige limieten naderen, als het punt A tot P nadert.

Fig. 51.



AC en AB die zich verhouden als de sinussen van die hoeken zijn dus oneindig kleinen van dezelfde orde.

§125. Indien de kromme lijnen $y = f(x)$ en $y' = F(x)$ elkander in het punt P, welks abscis x is, raken volgens de n^{de} orde, zal elke andere kromme lijn $y'' = \varphi(x)$ welke de eerste der beide kromme lijnen raakt volgens eene lagere (b.v. $n-1^{ste}$) orde, in de onmiddellijke nabijheid van P niet tusschen de beide krommen gelegen kunnen zijn.

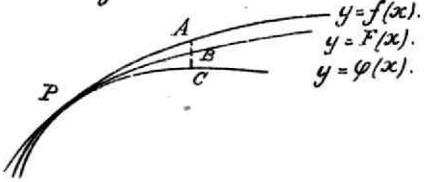
Wij vinden voor het verschil AB (fig 52) van twee ordinaten in de nabyheid van P voor de abscis $x+h$, bij de eerste kromme lijnen:

$$AB = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1}y'}{dx^{n+1}}\right) + \frac{h^{n+2}}{(n+2)!}\left\{f^{n+2}(x+\theta h) - F^{n+2}(x+\theta' h)\right\}$$

en evenzoo voor het verschil AC van de ordinaten der eerste en derde kromme lijn:

$$AC = \frac{h^{n}}{n!}\left(\frac{d^{n}y}{dx^{n}} - \frac{d^{n}y''}{dx^{n}}\right) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\{f^{n+1}(x+\theta h) - \varphi^{n+1}(x+\theta'' h)\right\}$$

Fig. 52.



Uit deze waarden blijkt dat $\lim \frac{AC}{AB} = \infty$ is.

Voor iedere waarde van h, mits deze klein genoeg genomen wordt, is dus zeker $AC > AB$.

§126. Uit de in de voorgaande paragraaf aangegeven waarde voor het verschil van twee ordinaten in de nabijheid van het raakpunt van twee kromme lijnen die elkaâr raken volgens de n^{de} orde, blijkt dat het teeken van dit verschil, als h klein genoeg genomen wordt, uitsluitend afhankelijk is van het teeken van den eersten term, die in het tweede lid voorkomt.

Beschouwen wij n <u>oneven</u>, zoo is $n+1$ even en vin.

den wij dus, zoowel voor eene positieve als voor eene negatieve waarde van h, uitdrukkingen voor AB = V die het zelfde teeken bezitten.
Is daarentegen n even, dus n+1 oneven, zoo verkrijgen wij voor V uitdrukkingen van verschillend teeken als wij aan h eene positieve of wel eene negatieve waarde toekennen.
Ligt dus in het eerste geval de eerste kromme lijn, aan de rechterzijde van het raakpunt, boven de kromme, zoo is dit ook links van het raakpunt het geval.
In het tweede geval echter zal de eerste kromme lijn aan de linker zijde van het raakpunt beneden de tweede kromme lijn vallen als zij aan de rechter zijde boven die kromme ligt.
Indien derhalve twee kromme lijnen elkander raken volgens eene even orde, zoo zullen die kromme lijnen elkander gelijktijdig in het raakpunt raken en snijden (raaklijn in een buigpunt; kromtecirkel in een willekeurig punt)
Opmerking. Indien twee kromme lijnen $y = f(x)$ en $y' = F(x)$ elkaâr in het punt (x, y) raken volgens de n^{de} orde zal niet altijd het

verschil van de ordinaten der krommen in de nabijheid van het raakpunt een oneindig kleine zijn van de $n+1^{ste}$ orde.

Immers is $f^{n+1}(x) - F^{n+1}(x)$ oneindig groot, — hetzij door dat een dezer afgeleide functien ∞ is, of wel doordat beiden ∞ zijn en een oneindig groot verschil bezitten, — zoo blijkt uit de waarde voor het verschil der ordinaten:

$$V = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\{ f^{n+1}(x+\theta h) - F^{n+1}(x+\theta' h)\right\}$$

dat in dit geval V oneindig groot is in vergelijking van h^{n+1}.

Hadden wij de reeksontwikkelingen slechts tot h^n uitgestrekt zoo zouden wij gevonden hebben:

$$V = \frac{h^n}{n!}\left\{ f^n(x+\theta h) - F^n(x+\theta' h)\right\}$$

en daar nu $f^n(x) = F^n(x)$ is, zal $f^n(x+\theta h) - F^n(x+\theta' h)$ gelijktijdig met h oneindig klein zijn en derhalve V oneindig klein in vergelijking met h^n.

Het ordegetal der oneindig kleine V is dus een breuk waarvan de waarde tusschen n en $n+1$ gelegen is.

In een dergelijk geval zal men ook alleen uit de even of oneven waarde van n niet kunnen uitmaken of de kromme lijnen elkaâr al of niet gelijktijdig raken en snijden. Door het opmaken van het verschil V kan men eerst beoordeelen of dit gelijktijdig met h al dan niet van teeken zal veranderen.

§127 Voorbeelden

a.) De beide kromme lijnen:

$$y^2(1+2x)+3x^2=1 \quad \text{en} \quad y=x^3+x-1$$

raken elkaâr in het punt $(0,-1)$ volgens de <u>derde</u> orde.

b.) De kromme lijnen:

$$y=x^3+(x-1)^5 \quad \text{en} \quad y=x^3$$

raken elkaâr in het punt $(1,1)$ volgens de <u>vierde</u> orde (raking en snijding)

c.) De kromme lijnen:

$$y=x+(x-1)^{\frac{5}{3}} \quad \text{en} \quad y(x+1)=3x-1$$

raken elkaâr in het punt $(1,1)$ volgens de <u>eerste</u> orde. Alhier heeft toch gelijktijdig snijding plaats.

Berekenen wij het verschil van de ordinaten der beide kromme lijnen voor $x=1+h$, zoo vinden wij:

$$V = h^{\frac{5}{3}} + \frac{h^2}{2+h}$$

(De eerste kromme lijn ligt dus rechts van het raakpunt boven, links beneden de tweede kromme lijn.

d.) Eene kegelsnede en de kromtecirkel in den top raken elkaâr volgens de derde orde.

§128. Indien eene kromme lijn bepaald wordt door eene vergelijking: $f(x, y, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0$, waarin $a_1, a_2 \ldots a_n$ n willekeurige parameters voorstellen, dan kunnen wij deze parameters zoodanig bepalen dat de kromme lijn aan n voorwaarden voldoet.

Bestaan deze voorwaarden hierin dat de kromme lijn eene andere gegeven kromme lijn $F(x,y)=0$ in het punt $(x.y)$ moet aanraken volgens de hoogst mogelijke orde, zoo noemt men de eerste kromme lijn de ineensmeltingskromme of ook wel de osculeerende kromme van de tweede gegeven kromme lijn.

(De n voorwaarden ter bepaling van de n constante parameters zijn dat voor $X = x$:

$$Y = y\,,\ \frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}\,,\ \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots\ldots \frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

moeten zijn, ~~zoodat~~ derhalve de raking in het algemeen van de $(n-1)^{\text{ste}}$ orde zal zijn, tenzij door toevallige omstandigheden ook nog eenige volgende differentiaalquotienten gelijk mochten worden.

§129. Voorbeelden.

a.) De ineensmeltingsrechte lijn te bepalen in het punt $(x.y)$ aan de kromme lijn $f(x.y)=0$

Zij de gevraagde lijn $Y = aX + b$, dan moet voor $X = x$, $Y = y$ en $\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$ zijn.

Wij kunnen de rechte lijn, die twee parameters a en b bevat slechts aan twee voorwaarden laten voldoen. Wij vinden derhalve:

$$y = ax + b \quad \text{en} \quad a = \frac{dy}{dx}$$

$$\text{dus:} \quad b = y - ax = y - x\frac{dy}{dx}$$

De gevraagde ineensmeltingsrechte is derhalve:

$$Y = X\frac{dy}{dx} + y - x\frac{dy}{dx}$$

$$\text{of:} \quad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

b.) Den ineensmeltingscirkel te bepalen in het punt $(x.y)$ aan de kromme lijn $f(x.y)=0$

Zij de gevraagde cirkel:

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 = r^2$$

Zoo kunnen wij dezen aan drie voorwaarden laten voldoen.

Voor $X = x$ moet $Y = y$, $\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$ en $\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ zijn.

Door differentiatie vinden wij:

$$X - a + (Y - b)\frac{dY}{dX} = 0$$

$$1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + (Y - b)\frac{d^2Y}{dX^2} = 0$$

derhalve ter bepaling van a, b en r de drie volgende vergelijkingen:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x - a + (y - b)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - b)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

welke geheel overeenkomen met de vergelijkingen die in §112 ter bepaling van den kromtecirkel gevonden zijn.

c.) In de kegelsnede $Y^2 = pX + qX^2$ de constanten p en q zoodanig te bepalen dat zij de insnuffelingskromme worde in den top aan de cycloïde.

$$y = V(2rx - x^2) + r\,\text{boog}\cos\frac{r - x}{r}.$$

Aangezien de raaklijn in den top de Yas is zullen wij de assen moeten omwisselen, daar voor $x = 0$ $\frac{dy}{dx}$ en alle volgende differentiaalquotienten ∞

zonden worden.
(Daar de kegelsnede slechts twee standvastigen bevat zal men deze dus slechts aan twee voorwaarden kunnen laten voldoen. Zij gaat echter door den oorsprong en raakt aldaar reeds de cycloïde.
Bij uitvoering der differentiatien zal gemakkelijk blijken dat de gevraagde kegelsnede

$$Y^2 = 8rX - \frac{4}{3}X^2$$

tot vergelijking zal hebben. Zij is eene ellips die de cycloïde volgens de 5^e orde zal raken.

F. Omhullende kromme lijnen

§130 Elke vergelijking $f(x, y, C) = 0$, waarin C eene willekeurige constante is, stelt een groot aantal kromme lijnen voor van de zelfde soort, indien wij slechts aan C verschillende – telkens constante – waarden toekennen.
Wij kunnen ons zelfs C vloeiend veranderlijk denken, waardoor de vergelijking $f(x, y, C) = 0$ in dat geval een stelsel van oneindig veel kromme lijnen van de zelfde soort zal voorstellen.
Men noemt C de <u>parameter</u> dezer kromme-

lijnen.

(De veranderlijke lijn kan het geheele platte vlak doorloopen, — zooals b.v. de cirkel $x^2+y^2=C^2$ — of wel slechts een gedeelte van het vlak, zooals b.v. de cirkel $(x-C)^2+(y-C)^2=C^2$, die steeds de beenen van hoek XOY of hare verlengden zal aanraken.

Veronderstellen wij dat de veranderlijke kromme lijn een spoor achterlaat, zoo zal de grens van de vlakte uitgebreidheid, door de kromme lijn doorloopen, eene kromme lijn zijn, die men de <u>omhullende kromme</u> noemt der kromme lijnen, begrepen in de vergelijking $f(x,y,C)=0$.

Elk punt der omhullende kromme is een punt van de bewegende kromme lijn in een bepaalden stand, en daar gezien deze de omhullende niet kan snijden, zal dus de omhullende kromme rakende zijn aan alle kromme lijnen $f(x,y,C)=0$.

§131. Wij kunnen ons de omhullende kromme nog op eene andere wijze ontstaan denken. Geven wij toch aan de constante twee bepaalde waarden C en $C+\Delta C$, zoo zullen de beide kromme lijnen:

$$f(x,y,C)=0 \quad \text{en} \quad f(x,y,C+\Delta C)=0$$

elkaâr in het algemeen snijden in een of meer punten P. Laat men ΔC veranderen, zoo veranderen de punten P van plaats en wanneer men ΔC tot nul laat naderen zullen de punten P naderen tot bepaalde limietstanden P.
De meetkundige plaats dier punten P, wanneer men C laat veranderen, d.i. de meetkundige plaats der opvolgende snijpunten van de kromme lijnen $f(x,y,C)=0$ zal de omhullende kromme zijn.
Wij zullen nu de vergelijking van de omhullende kromme lijn opmaken, uitgaande van deze laatste beschouwingswijze en daarna aantoonen dat de verkregen meetkundige plaats dezelfde zal zijn als die welke in de voorgaande paragraaf werd bedoeld.
De snijpunten P der kromme lijnen $f(x,y,C)=0$ en $f(x,y,C+\Delta C)=0$ kunnen worden gevonden door oplossing van x en y uit die beide vergelijkingen, of – wat hetzelfde is – uit de vergelijkingen:

$$f(x,y,C)=0 \quad \text{en} \quad f(x,y,C+\Delta C)-f(x,y,C)=0$$

of: $$f(x,y,C)=0 \quad \text{en} \quad \frac{f(x,y,C+\Delta C)-f(x,y,C)}{\Delta C}=0$$

Laat men derhalve ΔC tot nul naderen zoo vinden wij de coördinaten der punten P uit de vergelijkingen:

$$f(x,y,C)=0 \quad \text{en} \quad \frac{d\,f(x,y,C)}{dC}=0$$

of korter geschreven uit de vergelijkingen:

$$f(x,y,C)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

en $$\frac{df}{dC}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Wenschen wij nu de meetkundige plaats der punten P te kennen — d.i. de betrekking tusschen de coördinaten dezer punten, onafhankelijk van C, — zoo behoeven wij slechts C tusschen de beide vergelijkingen (1) en (2) te elimineeren.

Om aan te toonen dat deze meetkundige plaats voldoet aan de bepaling van § 130, dat wil zeggen dat zij de kromme lijnen $f(x,y,C)=0$ raakt, zullen wij de waarde van de richtingsconstante der raaklijn in het punt P, dus van $\frac{dy}{dx}$ opmaken, zoowel voor het punt P der lijn $f(x,y,C)=0$ die omhuld wordt als voor het punt P der omhullende.

Voor het eerste punt vinden wij $\frac{dy}{dx}$ uit:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Voor het punt der omhullende, die bepaald wordt door de vergelijkingen (1) en (2) vinden wij: (zie §26)

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{df}{dC} \cdot \frac{dC}{dx} = 0$$

welke, in verband met $\frac{df}{dC}=0$, eveneens oplevert de vergelijking:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Wij vinden derhalve dezelfde waarde voor $\frac{dy}{dx}$ zoodat dus in het punt P de omhulde en de omhullende lijn eene gemeenschappelijke raaklijn zullen bezitten.

§132. Voorbeelden.

a.) Bepaal de omhullende der kromme lijnen begrepen in de vergelijking:

$$y = mx - \frac{1+m^2}{2a} x^2 \ldots\ldots (1)$$

wanneer men hier m als de veranderlijke parameter beschouwt.

Schrijven wij de vergelijking in de gedaante:

$$f(x, y, m) = mx - \frac{1+m^2}{2a}x^2 - y = 0$$

Zoo is: $\frac{df}{dm} = x - m\frac{x^2}{a}$

Uit $\frac{df}{dm} = 0$ vinden wij $m = \frac{a}{x}$ en dus voor de vergelijking der omhullende:

$$y = a - \frac{1 + \frac{a^2}{x^2}}{2a}x^2$$

of, na herleiding,

$$x^2 + 2ay = a^2$$

(De vergelijking (1) stelt voor de baan die door een massief punt wordt doorloopen, wanneer het in het luchtledige met eene constante snelheid wordt weggeworpen onder een hoek α met den horizon, waarvan de tangens = m is.

b.) Eene rechte lijn van constante lengte beweegt zich met de uiteinden langs de beenen van een rechten hoek. Bepaal de omhullende dezer lijn.

Nemen wij de beenen van den hoek als coördinaatasfen aan, zoo zal de vergelijking der lijn zijn:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

waarin m en n de stukken zijn, die de lijn van de assen afsnijdt.
Is a de gegeven lengte der lijn, zoo is:

$$m^2+n^2=a^2 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(Denken wij ons nu m als de veranderlijke parameter, zoo zouden wij uit (2) n kunnen oplossen en substitueeren in (1), om zoodoende de eene vergelijking te vinden van de gedaante $f(x,y,m)=0$.
(De eliminatie van m uit deze laatste vergelijking en $\frac{df}{dm}=0$ levert alsdan de gevraagde omhullende op.
Wij kunnen echter ook de vergelijkingen (1) en (2) differentieeren t.o. van m, waardoor wij vinden:

$$-\frac{x}{m^2}-\frac{y}{n^2}\cdot\frac{dn}{dm}=0 \quad\ldots\ldots\ldots(3)$$

en: $$m+n\frac{dn}{dm}=0 \quad\ldots\ldots\ldots(4)$$

en nu $\frac{dn}{dm}$, m en n elimineeren tusschen de vergelijkingen (1), (2), (3) en (4)
Uit (3) en (4) vinden wij:

$$\frac{dn}{dm}=-\frac{m}{n}=-\frac{n^2x}{m^2y} \quad \text{of: } m^3y=n^3x$$

Hierdoor vinden wij uit (1)

$$\frac{x}{m} + y \cdot \frac{1}{m}\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = 1 \quad \text{of} \quad m = x + \sqrt[3]{xy^2}$$

$$\text{dus } n = m\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = \sqrt[3]{x^2y} + y$$

Deze waarden substitueerende in (2) verkrijgen wij:

$$(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^2 = a^2$$

$$\text{of:} \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

voor de gevraagde omhullende, zijnde eene hypo„ cycloïde, waarbij a de straal van den vasten en $\frac{1}{4}$ a die van den rollenden cirkel is.

c.) Uit een willekeurig punt P (fig 53), op den halven cirkel BAC genomen, wordt getrokken: eene lijn PD loodrecht op de middellijn BC, de straal PO en eindelijk de lijn PE zoodanig dat $\angle OPE = \angle OPD$ is. Men vraagt de omhullende kromme van de lijn PE te bepalen, als het punt P den hal„ ven cirkel doorloopt.

Nemen wij de coördinaatassen zoo als die in de figuur zijn aangegeven, dan zal de ver„ gelijking der lijn PE zijn:

$$y - a\sin\varphi = (x - a\cos\varphi)\operatorname{tang} 2\varphi$$

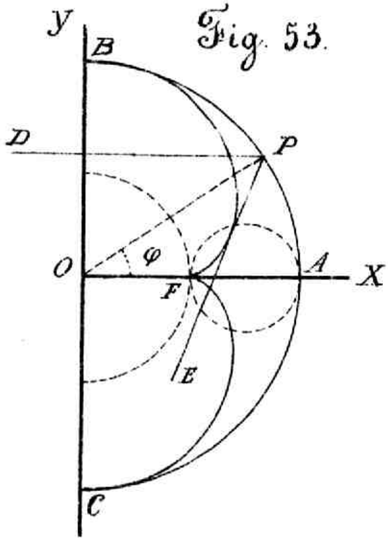


Fig. 53.

indien a den straal voorstelt van den cirkel en φ den hoek POX.
Deze vergelijking laat zich ook schrijven in de gedaante:

$$x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi - a\sin\varphi = 0 \quad \ldots (1)$$

Stellen wij nu het differentiaal-quotient dezer functie t: o: van φ gelijk nul, zoo vinden wij:

$$2x\cos 2\varphi + 2y\sin 2\varphi - a\cos\varphi = 0 \quad \ldots (2)$$

De vergelijking der omhullende zou nu worden gevonden door eliminatie van φ uit (1) en (2). Aangezien wij echter zoodoende tot eene vrij ingewikkelde vergelijking geraken, zullen wij liever x en y in de derde veranderlijke φ uitdrukken. Wij vinden dan:

$$x = \tfrac{1}{4} a\,(3\cos\varphi - \cos 3\varphi)$$

$$y = \tfrac{1}{4} a\,(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$$

waaruit blijkt dat de omhullende eene epicycloïde is waarbij de straal van den vasten cirkel $\frac{1}{2}$ a en die van den rollenden cirkel $\frac{1}{4}$ a is.
Beschouwen wij DP als een lichtstraal — afkomstig uit een lichtbron, die op een oneindig grooten afstand op het verlengde van AO ge-

plaatst is — die volgens de richting PE door den cirkel BAC wordt teruggekaatst, zoo is BFC de brandlijn van dezen cirkel. (Zie Julius. Natuurkunde. 2e deel bl 344 1e druk)

G. Lijnen van dubbele kromming

a. Raaklijn

§133. Bij een rechthoekig assenstelsel worden de lijnen van dubbele kromming voorgesteld door twee vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z)=0 \\ F(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (1)$$

die elk afzonderlijk genomen een oppervlak voorstellen.

Elimineeren wij tusschen die vergelijkingen — indien dit althans mogelijk is — eerst de grootheid z en daarna de grootheid y, zoo vinden wij de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x,y)=0 \\ \psi(x,z)=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

welke nu dezelfde lijn voorstellen.

Elk dier vergelijkingen kan men beschouwen als die der projectie van de kromme op het betreffende coördinatenvlak, of ook als de vergelijking van een projecteerend cylindervlak.

Somtijds stelt men eene lijn van dubbele kromming voor door drie vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= F(t) \\ z &= \varphi(t) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3)$$

zoodat de coördinaten van elk punt functien zijn van een vierde onafhankelijk veranderlijke grootheid.

§134. De vergelijkingen der lijn, welke het punt (x, y, z) eener kromme lijn verbinden met een naburig gelegen punt $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ op die kromme, zijn:

$$Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x)$$

$$Z - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(X - x)$$

Laten wij nu Δx tot nul naderen, zoo naderen gelijktijdig Δy en Δz tot nul en gaat de snijlijn over in de raaklijn aan de kromme in het punt (x, y, z). Deze raaklijn heeft derhalve tot vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} Y - y &= \frac{dy}{dx}(X - x) \\ Z - z &= \frac{dz}{dx}(X - x) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1)$$

aangevende de bekende eigenschap dat de projectiën der raaklijn rakende zijn aan de gelijknamige projectiën der kromme lijn.

(De vergelijkingen (1) zijn ook te schrijven in de gedaante:

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz} \quad \cdots\cdots (2)$$

Is de kromme lijn gegeven door de vergelijkingen (1) der voorgaande paragraaf dan zullen wij, op de wijze als in § 26 is aangewezen, de waarden van $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ kunnen bepalen.

Gemakkelijk blijkt dat in dit geval de raaklijn wordt gegeven door de beide vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} (X - x)\frac{df}{dx} + (Y - y)\frac{df}{dy} + (Z - z)\frac{df}{dz} &= 0 \\ (X - x)\frac{dF}{dx} + (Y - y)\frac{dF}{dy} + (Z - z)\frac{dF}{dz} &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots (3)$$

dus als de doorsnede van twee platte vlakken.

In § 144 zullen wij leeren dat elk dezer vlakken eene eenvoudige meetkundige beteekenis heeft.

§135. Stellen wij de lengte der kromme lijn, gemeten van af een bepaald beginpunt tot in een willekeurig punt $P\ (x, y, z)$ voor door s, zoo is s eene functie van x, als wij x tot onafhankelijk veranderlijke kiezen.

Zij Q een dicht bij P gelegen punt op de kromme, waarvan de coördinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ en $z+\Delta z$ zijn, zoo is de lengte van boog PQ gelijk aan Δs en de afstand D dezer punten:

$$D = V(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)$$

waaruit:

$$\frac{D}{\Delta x} = V\left(1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}+\frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}\right)$$

Laten wij nu Δx tot nul naderen, zoo naderen $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ en $\frac{D}{\Delta x}$ tot de zelfde limiet en vinden wij derhalve:

$$\frac{ds}{dx} = V\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right)$$

$$\text{of } ds = V(dx^2+dy^2+dz^2)$$

§136. Ter bepaling van de grootte van de hoeken welke de raaklijn met de coördinatenassen maakt, trekken wij uit den oorsprong eene lijn evenwijdig met die raaklijn, die derhalve tot vergelijkingen heeft:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{dy}{dx}X \\ Z &= \frac{dz}{dx}X \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1)$$

en nemen op die lijn een willekeurig punt, b.v. het punt $\left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$, dat derhalve van den oorsprong verwijderd is op den afstand:

$$V\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)$$

Zijn nu α, β en γ de hoeken die de raaklijn, en dus ook de lijn (1), met de coördinatenassen maakt Zoo is, in verband met de voorgaande paragraaf:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{V\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)} = \frac{dx}{ds} \\ \cos\beta &= \frac{\frac{dy}{dx}}{V\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)} = \frac{dy}{ds} \\ \cos\gamma &= \frac{\frac{dz}{dx}}{V\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}\right)} = \frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\} \cdots (2)$$

Men kan vóór het wortelteeken in deze uitdrukkingen het dubbele teeken plaatsen, waardoor dan de beide richtingen van de raaklijn worden aangewezen.

C. Normale vlak.

§137 Het vlak dat door het raakpunt (x,y,z) loodrecht op de raaklijn wordt gebracht, noemt men het <u>normale vlak</u>, terwijl alle lijnen in dit vlak door het punt getrokken, <u>normalen zijn</u>.
Stellen wij de vergelijking van het normale vlak voor door:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

Zoo zijn A, B en C onmiddellijk te bepalen uit de bekende eigenschap dat de doorgangen van dit vlak loodrecht zullen moeten staan op de gelijknamige projectiën der raaklijn. Wij vinden zoodoende gemakkelijk:

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

welke vergelijking alleen voor rechthoekige coördinatenassen zal doorgaan, evenals de in de beide voorgaande paragrafen gevonden uitdrukkingen, terwijl de vergelijkingen voor de raaklijn ook bij scheefhoekige assen zijn te gebruiken.

c. Tangentiaal- of osculeerend vlak. Hoofdnormaal.

§138 Wij kunnen een vlak brengen door een punt P eener kromme lijn en twee punten P' en P'' op die kromme dicht bij het punt P genomen. Laten wij daarna de punten P' en P'' tot het punt P naderen, zoo zal het vlak meer en meer naderen tot een bepaalden limiet-stand, die bereikt wordt wanneer de beide punten met het punt P samenvallen.
Het vlak in dien grensstand wordt het tangentiale of osculeerende vlak der kromme voor het punt P genoemd.
Lieten wij aanvankelijk slechts het punt P' tot P naderen, zou zouden wij een vlak verkrijgen gaande door de raaklijn in het punt P aan de kromme en een willekeurig punt P'' dicht bij P op de kromme gelegen, m.a.w. een vlak dat de kromme lijn in P raakt doch tevens in P'' snijdt.

Laten wij nu het punt P'' tot P naderen, dan zal op het oogenblik dat de punten P en P'' samenvallen het vlak der zooeven genoemde limiet-stand aannemen en dus overgaan in het tangentiale vlak.

Tot het opmaken van de vergelijking van het tangentiale vlak zullen wij ons voorstellen dat de kromme lijn gegeven is door de vergelijkingen:

$$x = f(t)$$
$$y = F(t)$$
$$z = \varphi(t)$$

Zijn de coördinaten voor het punt P (x, y, z) zoo zijn die van P' $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ en van P'' $(x+2\Delta x+\Delta^2 x, y+2\Delta y+\Delta^2 y, z+2\Delta z+\Delta^2 z)$

Wij vinden die waarden door aan het onafhankelijk veranderlijk element de waarden t, $t+\Delta t$ en $t+2\Delta t$ toe te kennen.

Stellen wij dat de vergelijking van het vlak gaande door de drie punten:

$$AX + BY + CZ + D = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

is, zoo moet worden voldaan aan de betrekkingen:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$A(x+\Delta x) + B(y+\Delta y) + C(z+\Delta z) + D = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$A(x+2\Delta x+\Delta^2 x) + B(y+2\Delta y+\Delta^2 y) + C(z+2\Delta z+\Delta^2 z) + D = 0 \ (4)$$

Schrijven wij nu ter bekorting voor de vergelijking (2):

$$V = 0$$

Zoo worden de beide volgende:

$$V + \Delta V = 0$$

$$V + 2\Delta V + \Delta^2 V = 0$$

overeenkomende met het stelsel:

$$V = 0 \ , \ \Delta V = 0 \ \text{ en } \Delta^2 V = 0$$

of ook:

$$V = 0 \ , \ \frac{\Delta V}{\Delta t} = 0 \ \text{ en } \frac{\Delta^2 V}{\Delta t^2} = 0$$

Laten wij de punten P′ en P″ tot het punt P naderen dan zal in den limietstand moeten worden voldaan aan het stelsel:

$$V = 0 \ , \ \frac{dV}{dt} = 0 \ \text{ en } \frac{d^2 V}{dt^2} = 0$$

$$\text{of } V = 0 \ , \ dV = 0 \ \text{ en } d^2 V = 0$$

d.i. aan de vergelijkingen

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$A dx + B dy + C dz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$A d^2x + B d^2y + C d^2z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Hieruit kunnen wij de verhoudingen van drie der grootheden A, B, C en D tot de vierde bepalen, welke dan na substitutie in (1) de vergelijking van het tangentiale vlak opleveren.
De eliminatie van A, B, C en D uit (1), (2), (5) en (6) leidt natuurlijk tot dezelfde uitkomst.
Uit (1) en (2) vinden wij

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0$$

Uit (5) en (6) volgt:

$$\frac{A}{dy\,d^2z-dz\,d^2y}=\frac{B}{dz\,d^2x-dx\,d^2z}=\frac{C}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}$$

en dus voor de vergelijking van het gevraagde vlak:

$$(X-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(Y-y)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+$$
$$+(Z-z)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0 \;\ldots\ldots\; (7)$$

§139 Onder alle normalen der kromme lijn voor het punt (x,y,z) is er een welke in het tangentiale vlak van dit punt gelegen is. Men noemt deze de <u>hoofdnormaal</u> der kromme lijn in dat punt. Deze wordt dus bepaald door de beide vergelijkingen (1) van §137 en (7) van §138

d. Kromming

§140. Indien wij in de punten P en P' eener kromme lijn raaklijnen trekken, dan zullen deze raaklijnen elkaâr kruisen onder een hoek ϖ. Noemen wij boog PP' weder Δs, zoo stelt $\frac{\varpi}{\Delta s}$ de gemiddelde kromming voor over het gedeelte PP' der kromme lijn. Laten wij het punt P' naderen tot het punt P zoo nadert het quotient $\frac{\varpi}{\Delta s}$ tot eene bepaalde limiet $\frac{\varpi}{ds}$, waarin ϖ alsdan den hoek is dien de raaklijnen in twee onmiddellijk op elkaâr volgende punten der kromme lijn met elkaâr maken. Deze limiet geeft de kromming aan van de kromme lijn in het punt P, terwijl het omgekeerde d. i $\frac{ds}{\varpi}$ de kromtestraal van het punt P genoemd wordt.

Om $R = \frac{ds}{\varpi}$ uittedrukken in de coördinaten van het punt (x, y, z), trekken wij uit den oorsprong twee lijnen OA en OB evenwijdig met de raaklijnen in de punten P en P'. Noemen wij a, b, c de cosinussen van de hoeken welke OA maakt met de coördinatenassen, dan zijn $a+\Delta a$, $b+\Delta b$, $c+\Delta c$ de cosinussen van de hoeken welke OB met de assen maakt.

Zijn A en B de punten, op die lijnen OA en OB, gelegen op een afstand van den oorsprong gelijk aan de eenheid, zoo is:

$$AB = 2 \sin \tfrac{1}{2} \varpi = \sqrt{\{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (\Delta c)^2\}}$$

Bij het naderen tot de limiet gaat deze vergelijking over in:

$$\varpi = \sqrt{(da^2 + db^2 + dc^2)}$$

Aangezien volgens § 136

$$a = \frac{dx}{ds}\ ,\ b = \frac{dy}{ds} \text{ en } c = \frac{dz}{ds}$$

is, vinden wij derhalve voor de formule van den kromtestraal:

$$R = \frac{ds}{\sqrt{\left\{\left(d\cdot\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\cdot\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}}} \quad \ldots (1)$$

Door de differentiatiën in den noemer uitvoeren wordt deze formule:

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{\{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2\}}}$$

Stellen wij den noemer dezer laatste uitdrukking voor door N, zoo is:

$$N^2 = ds^2(d^2x)^2 + dx^2(d^2s)^2 - 2\,dx\,d^2x\,ds\,d^2s +$$
$$+ ds^2(d^2y)^2 + dy^2(d^2s)^2 - 2\,dy\,d^2y\,ds\,d^2s +$$
$$+ ds^2(d^2z)^2 + dz^2(d^2s)^2 - 2\,dz\,d^2z\,ds\,d^2s$$

Aangezien nu:

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ \text{en dus } ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z \end{array}\right\} \cdots\cdots (a)$$

is, verandert deze waarde in:

$$N^2 = ds^2\left\{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2\right\}$$

en dus de formule voor den kromtestraal in:

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{\left\{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2\right\}}} \cdots\cdots (2)$$

Met behulp van de betrekkingen (a) zijn wij in staat om ds en d^2s uit de bovenstaande formule te verdrijven.

Na eenige herleiding vinden wij:

$$R = \sqrt{\frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3}{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2}} \cdots (3)$$

<u>Opmerking</u>. In deze formules is ondersteld dat x, y en z functien eener vierde onafhankelijk ver-

anderlijke grootheid zijn. Beschouwen wij x als de onafhankelijk veranderlijke zoo moeten wij in de formules slechts $d^2x = 0$ stellen.

§141. Verbindt men het punt P eener kromme lijn met een dichtbij gelegen punt P' dier kromme, dan kunnen wij loodrecht op het midden der koorde PP' een vlak brengen en het snijpunt bepalen van dit vlak met de hoofdnormaal der kromme in het punt P. Zij M dit snijpunt dan is M te beschouwen als het middelpunt van eenen cirkel die door de punten P en P' gaat. Laten wij nu het punt P' tot P naderen dan wordt het vlak, waarin de cirkel gelegen is, in den limietstand het tangentiale of osculeerende vlak van het punt P, terwijl de limietwaarde van PM gelijk is aan den kromtestraal van het punt P.

De cirkel in den limietstand wordt de <u>kromtecirkel</u> of wel de <u>osculeerende cirkel</u> van het punt P genoemd.

Deze zelfde cirkel zou ook worden verkregen wanneer men een cirkel brengt door drie dicht bij elkaar gelegen punten P, P' en P'' der kromme lijn en daarna de punten P' en P'' tot het punt P liet naderen tot dat de drie punten samen-vielen.

Wij zullen ons met het bewijs van een en ander niet ophouden, evenmin als met het opmaken van de vergelijking der meetkundige plaats van de krommemiddelpunten.

Deze meetkundige plaats is echter geen ont-wondene van de kromme lijn, zoo als dit bij eene vlakke kromme lijn het geval is.

Wel heeft een lijn van dubbele kromming een oneindig groot aantal ontwondenen doch de meetkundige plaats der kromte-middelpunten behoort daartoe niet.

§142. De kromme lijnen, die niet in een plat vlak zijn gelegen, bezitten behalve de beschouwde kromming nog eene <u>tweede</u> kromming, ook <u>wringing</u> genaamd, die het gevolg is van de omstandigheid dat de kromme lijn in de opvolgende punten ver-schillende tangentiale vlakken bezit.

Noemen wij ε den hoek dien de beide tangen-tiale vlakken in de punten P en P' der kromme lijn met elkaâr vormen, en zij boog $PP' = \Delta s$ zoo stelt $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ de gemiddelde wringing voor der kromme lijn over de uitgestrektheid PP'.

Laten wij het punt P' tot het punt P naderen zoo nadert het quotient tot een bepaalde limiet $\frac{\varepsilon}{ds}$ waarin ε alsdan voorstelt den hoek gevormd door de tangentiale vlakken in twee op volgende punten der kromme lijn. Dit quotient is de wringing der kromme in het punt P, terwijl het omgekeerde, dus:

$$R_1 = \frac{ds}{\varepsilon}$$

den kromtestraal van wringing voorstelt.

Ten einde ε uittedrukken in de coördinaten van het punt P, merken wij op dat de hoek, gevormd door de tangentiale vlakken gelijk is aan den hoek gevormd door de loodlijnen uit den oorsprong op beide vlakken neêrgelaten.

De vergelijking van het tangentiale vlak in het punt P is:

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

waarin:

$$\left.\begin{aligned} A &= dy\,d^2z - dz\,d^2y \\ B &= dz\,d^2x - dx\,d^2z \\ C &= dx\,d^2y - dy\,d^2x \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1)$$

(zie § 138)

(De loodlijn uit O op dit vlak neergelaten maakt dus met de coördinatenassen hoeken λ, μ en ν, zoodanig dat:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = a_1 \\ \cos\mu &= \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = b_1 \\ \text{en } \cos\nu &= \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = c_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

is.

Laten wij nu ook een loodlijn neêr op het tangentiale vlak in het punt $P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, zoo zal voor den hoek ε, die gevormd wordt door beide loodlijnen in den limietstand, worden gevonden — op geheel overeenkomstige wijze als in § 140 is geschied —

$$\varepsilon = \sqrt{(da_1^2 + db_1^2 + dc_1^2)}$$

De kromtestraal van wringing wordt derhalve:

$$R_1 = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{da_1^2+db_1^2+dc_1^2}} \ldots\ldots (3)$$

waarin a_1, b_1 en c_1 met behulp van de vergelijkingen (2) en (1) moeten worden bepaald.

§143. Voorbeeld.

De gewone schroeflijn

Wij kiezen de as der schroef tot Z as van een rechthoekig assenstelsel, waarbij de X as door het beginpunt A (fig 54) der schroeflijn gaat.

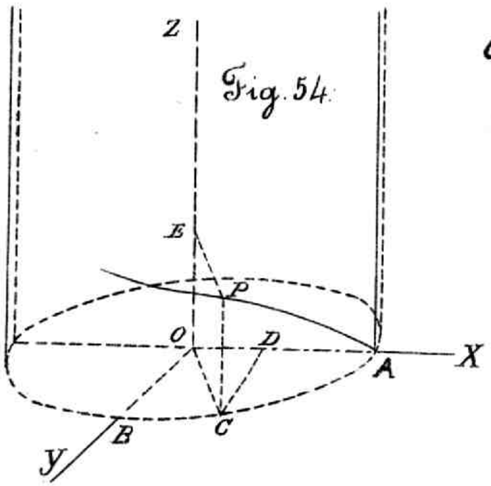


Fig. 54

Van een willekeurig punt P zijn de coördinaten: $OD = x$, $CD = y$ en $PC = z$.

Is r de straal van der cylinder, waarop de schroeflijn beschreven is, h de spoed en noemen wij hoek $DOC = \varphi$,

Zoo is:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= \frac{h}{2\pi}\varphi \end{aligned}\right\} \text{..........} (1)$$

Deze drie vergelijkingen stellen de schroeflijn voor, waarbij wij φ als onafhankelijk veranderlijke kunnen beschouwen.

Elimineeren wij φ, zoo vinden wij:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ z &= \frac{h}{2\pi} \operatorname{boogcos} \frac{x}{r} \end{aligned}\right\} \text{......} (2)$$

voor de vergelijkingen der XY en XZ projectiën.
Wij kunnen nu naar willekeur gebruik maken van de vergelijkingen (1) of (2)
Voor de vergelijkingen der raaklijn in een willekeurig punt vinden wij:

$$\frac{X - r\cos\varphi}{-r\sin\varphi} = \frac{Y - r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{2\pi Z - h\varphi}{h}$$

of wel:

$$Xx + Yy = r^2$$
$$Z - z = -\frac{h}{2\pi y}(X - x)$$

Zijn α, β en γ de hoeken van de raaklijn met de assen, zoo wordt:

$$\cos\alpha = \mp\frac{2\pi y}{l}, \quad \cos\beta = \pm\frac{2\pi x}{l}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{h}{l}$$

waarin l de lengte van een geheelen schroefgang voorstelt, dus:

$$l = \sqrt{(4\pi^2 r^2 + h^2)}$$

γ is constant; d.i. eene bekende eigenschap van de schroeflijn.
Zonder moeite vinden wij voor de vergelijking van het normale vlak in het punt (x, y, z):

$$2\pi(yX - xY) - h(Z - z) = 0$$

en voor die van het tangentiale vlak in

dat punt:

$$h(yX - xY) + 2\pi r^2(Z - z) = 0$$

Uit beide vergelijkingen blijkt dat de vlakken de Z as snijden in het punt $E\ (0, 0, z)$; aangezien zij ook gaan door het punt $P\ (x, y, z)$ is de rechte lijn PE, die door beide punten gaat, de hoofdnormaal.

De krommestraal zal blijken bepaald te worden door de formule:

$$R = \frac{l^2}{4\pi^2 r} = r\sec^2\delta$$

waarin δ de hellingshoek van de schroeflijn voorstelt; terwijl voor den krommestraal van wringing wordt gevonden:

$$R_1 = \frac{l^2}{2\pi h} = \frac{r}{\sin\delta\cos\delta}.$$

De beide krommingen zijn derhalve bij de gewone schroeflijn constant.

H. Gebogen oppervlakken.

§144. Tot het opmaken van de vergelijking van het rakende vlak in het punt $P(x, y, z)$ aan het oppervlak:

$$f(x, y, z) = 0$$

maken wij gebruik van de bepaling, dat dit vlak de meetkundige plaats is van de raak-lijnen in het punt P aan de verschillende kromme lijnen, die door dat punt op het oppervlak kunnen getrokken worden.
Snijden wij derhalve het gegeven oppervlak door het willekeurige oppervlak

$$F(x, y, z) = 0$$

– dat echter door het punt P moet gaan –, zoo zullen de beide vergelijkingen: $f = 0$ en $F = 0$, de kromlijnige doorsnede bepalen.
Volgens §134 is de raaklijn, in het punt (x, y, z) aan die kromme lijn, bepaald door de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} (X-x)\frac{df}{dx} + (Y-y)\frac{df}{dy} + (Z-z)\frac{df}{dz} &= 0 \\ (X-x)\frac{dF}{dx} + (Y-y)\frac{dF}{dy} + (Z-z)\frac{dF}{dz} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

Beschrijven wij op het gegeven oppervlak eene andere kromme lijn door het punt P, d.w.z. snijden wij dit oppervlak door een nieuw oppervlak, dan verandert F en dus ook de raaklijn die men aan de doorsnede van $f=0$ en $F=0$ kan trekken.

Voor alle raaklijnen, die op deze wijze worden verkregen, blijft de eerste van het stelsel vergelijkingen (a) dezelfde, en deze:

$$(X-x)\frac{df}{dx}+(Y-y)\frac{df}{dy}+(Z-z)\frac{df}{dz}=0 \quad \text{.........} (1)$$

is dus die van de meetkundige plaats der raaklijnen. Aangezien die vergelijking in X, Y en Z van den eersten graad is stelt zij een plat vlak voor, dat het <u>rakende vlak</u> aan het oppervlak in het punt (x, y, z) genoemd wordt.

De loodlijn in P op het rakende vlak opgericht wordt de <u>normaal</u> van het punt P genoemd.

Voor de vergelijkingen van de normaal vinden wij

$$\frac{X-x}{\frac{df}{dx}}=\frac{Y-y}{\frac{df}{dy}}=\frac{Z-z}{\frac{df}{dz}} \quad \text{.........} (2)$$

terwijl de hoeken α, β en γ, die zij met de coördinatenasfen maakt, worden gevonden uit:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm\frac{\frac{df}{dx}}{N} \\ \cos\beta &= \pm\frac{\frac{df}{dy}}{N} \\ \cos\gamma &= \pm\frac{\frac{df}{dz}}{N} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (3)$$

waarin $N = \sqrt{\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right\}}$ is.

§145. In de voorgaande paragraaf hebben wij de vergelijking van het rakende vlak, en daaruit die van de normaal, afgeleid wanneer het oppervlak gegeven is door eene onopgeloste vergelijking; is echter de vergelijking van het oppervlak:

$$z = f(x, y)$$

en stellen wij $\frac{dz}{dx} = p$ en $\frac{dz}{dy} = q$

Zoo worden de vergelijkingen (1), (2) en (3) gemakkelijk geschreven in de gedaante:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y) \cdots\cdots (I)$$

$$\left.\begin{aligned} X - x + p(Z - z) &= 0 \\ Y - y + q(Z - z) &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (II)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \pm \frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+1)}} \\ \cos\beta &= \pm \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+1)}} \\ \cos\gamma &= \pm \frac{1}{\sqrt{(p^2+q^2+1)}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (III)$$

<u>Opmerking</u>. (De vergelijking van het rakende vlak in de gedaante (I) vinden wij gemakkelijk als wij door het punt (x, y, z) vlakken brengen evenwijdig met het XZ en het YZ vlak, raaklijnen trekken aan de doorsneden dier vlakken met het oppervlak en ten slotte een vlak brengen door die beide raaklijnen.

§146. <u>Toepassingen</u>

1° Door het punt (a, b, c) buiten een oppervlak een rakend vlak aan dit oppervlak $f(x, y, z) = 0$ te brengen.

Stellen wij dat (x.y.z) het raakpunt is van het gevraagde vlak, dan zal de vergelijking van dit vlak

$$(X-x)\frac{df}{dx}+(Y-y)\frac{df}{dy}+(Z-z)\frac{df}{dz}=0$$

zijn. (Daar het gaan moet door het punt (a, b, c) zal derhalve moeten worden voldaan aan de betrekking:

$$(a-x)\frac{df}{dx}+(b-y)\frac{df}{dy}+(c-z)\frac{df}{dz}=0 \ldots\ldots (1)$$

Uit deze vergelijking, in verband met:

$$f(x.y.z)=0 \ldots\ldots (2)$$

kunnen de coördinaten van het raakpunt gevonden worden.

Aangezien er slechts twee vergelijkingen zijn ter oplossing van de drie coördinaten, zoo is het vraagstuk onbepaald, hetgeen vooraf in te zien was.

(De vergelijkingen (1) en (2) stellen de meetkundige plaats der raakpunten voor, d.i. de kromme lijn volgens welke het gegeven oppervlak geraakt wordt door een omhullingskegel met (a, b, c) tot top.

Wenschen wij de vergelijking van het omhullend kegelopppervlak te vinden, zoo merken wij op dat de vergelijkingen eener willekeurige beschrijvende lijn:

$$Y-b=\frac{y-b}{x-a}(X-a)\quad\ldots\ldots(3)$$

$$Z-c=\frac{z-c}{x-a}(X-a)\quad\ldots\ldots(4)$$

lijn. Elimineeren wij nu x, y en z uit de vergelijkingen (1), (2), (3) en (4) zoo vinden wij de vergelijking van het gewenschte opperolak.

2°. Aan het oppervlak $f(x.y.z)=0$ een rakend vlak te brengen evenwijdig met de lijn

$$\begin{cases} y=ax \\ z=bx \end{cases}$$

Stellen wij dat $(x.y.z)$ het raakpunt is, zoo is de vergelijking van het rakende vlak:

$$(X-x)\frac{df}{dx}+(Y-y)\frac{df}{dy}+(Z-z)\frac{df}{dz}=0$$

en dus die van een vlak, dat door den oorsprong evenwijdig aan het rakende vlak gebracht is:

$$X\frac{df}{dx}+Y\frac{df}{dy}+Z\frac{df}{dz}=0$$

Dit vlak moet gaan door de gegeven lijn zoodat dus moet worden voldaan aan de vergelijking:

$$\frac{df}{dx}+a\frac{df}{dy}+b\frac{df}{dz}=0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

Deze vergelijking met die van het oppervlak:

$$f(x.y.z)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

bepalen de kromme lijn volgens welke het oppervlak geraakt wordt door een omhullings-cylinder, waarvan de beschrijvende lijn evenwijdig is met de gegeven lijn $\begin{cases} y=ax \\ z=bx \end{cases}$

De vergelijkingen eener willekeurige beschrijvende lijn zijn:

$$Y-y=a(X-x) \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$Z-z=b(X-x) \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

Door eliminatie van x, y en z uit de vergelijkingen (1), (2), (3) en (4) vinden wij de vergelijking van het omhullend cylindervlak.

Augustus 1889

H. Hendorst