



Leerboek der mechanica

<https://hdl.handle.net/1874/234027>

F. H. Julius

Mechanica.



1080a.6.1

mm 10497

BIBLIOTHEEK UNIVERSITEIT UTRECHT



3012 759 5



ge

D. J. E. Schrek.
JULIU 88

1
LEERBOEK

Ia

ACA 2000

DER

MECHANICA,

DOOR

DR. F. H. JULIUS,

Leeraar aan de Rijks Hoogere Burgerschool te Zwolle.

MET 238 FIGUREN.



ZWOLLE,

W. E. J. TJEENK WILLINK.

1888.



INHOUD.

EERSTE AFDEELING. MECHANICA VAN HET STOFFELIJK PUNT.

Hoofdstuk I. Beweging. Snelheid. Versnelling.

	Bladz.
§ 1. Stoffelijk punt	1
§ 2. Rust. Beweging	1
§ 3. Eenparige beweging	3
§ 4. Veranderlijke beweging	5
§ 5. Eenparig versnelde beweging	7
§ 6. Eenparig vertraagde beweging	10

Hoofdstuk II. Ontbinden van bewegingen.

§ 7. Ontbinding van een rechtlijnige eenparige beweging	11
§ 8. Ontbinding van een rechtlijnige eenparig versnelde en van een rechtlijnige eenparig vertraagde beweging	13
§ 9. Ontbinding van een willekeurige beweging	15
§ 10. Deviatie	15

Hoofdstuk III. Massa. Kracht.

§ 11. Massa.	22
§ 12. Kracht	23
§ 13. Samenstelling van twee krachten	25
§ 14. Ontbinding van een kracht.	27
§ 15. Samenstelling van drie of meer krachten	29
§ 16. Werking en terugwerking	32
§ 17. Arbeid door een kracht verricht	32
§ 18. Arbeidsvermogen	35
§ 19. Moment van een kracht ten opzichte van een as	42
§ 20. Moment van een kracht ten opzichte van een punt.	45

Hoofdstuk IV. Beweging van een vrij stoffelijk punt.

§ 21. Vrije val van een stoffelijk punt	47
§ 22. Parabolische beweging	48
§ 23. Eenparige cirkelvormige beweging	56

	Bladz.
§ 24. Conische slinger	58
§ 25. Enkelvoudige trillende beweging	62
§ 26. Planetenbeweging	66
§ 27. Aantrekkingskracht	68
§ 28. Zwaartekracht	72
§ 29. Evenwicht	75

Hoofdstuk V. Beweging van een stoffelijk punt langs voorgeschreven lijnen.

§ 30. Weerstanden van vaste vlakken, lijnen, punten	79
§ 31. Beweging langs een voorgeschreven rechte lijn	81
§ 32. Eenparige beweging langs een voorgeschreven kromme lijn	86
§ 33. Veranderlijke beweging langs een voorgeschreven kromme lijn	88
§ 34. Beweging langs een verticaalen cirkelomtrek	90
§ 35. Enkelvoudige slinger	92

TWEDE AFDEELING. STATICA OF LEER VAN HET EVENWICHT VAN KRACHTEN, WERKENDE OP EEN ABSOLUUT VAST LICHAAM.

Hoofdstuk VI. Algemeene evenwichtsvergelijkingen.

§ 36. Absoluut vaste lichamen	95
§ 37. Vervanging van krachten	98
§ 38. Vervanging van twee krachten langs onderling evenwijdige lijnen werkende	102
§ 39. Koppel	106
§ 40. Vervanging van koppels in één vlak werkende	108
§ 41. Vervanging van koppels in onderling evenwijdige vlakken werkende	110
§ 42. Vervanging van koppels werkende in vlakken, die elkander snijden	112
§ 43. Algemeene evenwichtsvergelijkingen voor willekeurige krachten op een lichaam werkende	115

Hoofdstuk VII. Werking der zwaartekracht.

§ 44. Vervangende van krachten, langs onderling evenwijdige lijnen werkende	123
§ 45. Algemeene vergelijkingen van het zwaartepunt	127
§ 46. Zwaartepunten van meetkundige lichamen, vlakken, lijnen	129
§ 47. Bepaling van zwaartepunten van lijnen	131
§ 48. Bepaling van zwaartepunten van vlakken	133
§ 49. Bepaling van zwaartepunten van lichamen	136
§ 50. Regel van Guldin	138

Hoofdstuk VIII. Weerstanden van vaste steunpunten.

§ 51. Lichaam ondersteund in een punt. Stabiël, labiël en indifferent evenwicht	142
--	-----

§ 52.	Toepassing op het meten van gewichten	143
§ 53.	Lichaam ondersteund in twee punten	146
§ 54.	Lichaam ondersteund in drie punten	150
§ 55.	Lichaam steunend op een horizontaal vlak	152
§ 56.	Weerstanden van twee lichamen, die elkander in één punt steunen.	155
§ 57.	Brugbalans	159
§ 58.	Balans van Roberval	162

Hoofdstuk IX. Wrijvingsweerstand.

§ 59.	Wrijvingscoëfficiënt	164
§ 60.	Wrijvingshoek	167
§ 61.	Lichaam in twee punten ondersteund door vaste vlakken	171
§ 62.	Wrijvingscoëfficiënt en wrijvingshoek bij de beweging in gleuven.	178
§ 63.	Wrijving van tappen in tappannen	181
§ 64.	Wrijvingsrollen	184
§ 65.	Wrijvingsbalans van Hirn	187
§ 66.	Wrijving van een touw over een cilinder	189
§ 67.	Remtouw	195
§ 68.	Buigingsweerstand bij kettingen en touwen	197
§ 69.	Weerstandcoëfficiënt bij de draaiing van schijven, veroorzaakt door kettingen of touwen.	201

Hoofdstuk X. Werktuigen.

§ 70.	Nuttige en schadelijke weerstand	203
§ 71.	Arbeidssnelheid. Vang van Prony	206
§ 72.	Hefboom	211
§ 73.	Katrollen en takels	211
§ 74.	Hellend vlak	218
§ 75.	De wig	226
§ 76.	Eenparige schroefbeweging	227
§ 77.	Schroef met vlakken gang	229
§ 78.	Schroef met scherpen gang	233
§ 79.	Riem zonder eind	238

DERDE AFDEELING. DYNAMICA OF LEER DER BEWEGING VAN EEN NIET IN EVENWICHTSTOESTAND VERKEEREND ABSOLUUT VAST LICHAAM.

Hoofdstuk XI. Algemeene stellingen.

§ 80.	Werking van de inwendige krachten	244
§ 81.	Behoud van arbeidsvermogen	246
§ 82.	Beginsel der virtueele verplaatsingen	247
§ 83.	Beginsel van d'Alembert.	249

Hoofdstuk XII. Eenparige draaiende beweging van een lichaam om een vaste as.

Bladz.

§ 84. Arbeidsvermogen van beweging van een ronddraaiend lichaam.	
Traagheidsmoment.	250
§ 85. Traagheidsmoment, gereduceerde massa, traagheidsstraal	251
§ 86. Eenparig draaiende beweging.	261
§ 87. Vrije assen.	264
§ 88. Samengestelde conische slinger	267

Hoofdstuk XIII. Veranderlijk draaiende beweging van een lichaam om een vaste as.

§ 89. Hoekversnelling	270
§ 90. Het vliegwiel.	272
§ 91. Samengestelde slinger	276
§ 92. Reversieslinger.	278

Hoofdstuk XIV. Willekeurige beweging van een lichaam.

§ 93. Arbeidsvermogen van een lichaam	281
§ 94. Beweging van het zwaartepunt	285
§ 95. Beweging van een vrij lichaam	287
§ 96. Rollende beweging langs een hellend vlak.	290

VIERDE AFDEELING. STATICA DER VEERKRACHTIGE LICHAMEN OF LEER VAN HET EVENWICHT VAN KRACHTEN OP EEN VEERKRACHTIG LICHAAM WERKENDE.

Hoofdstuk XV. Verlenging en verkorting van een prismatische stang.

§ 97. Elasticiteit	293
§ 98. Elasticiteitsmodulus	295
§ 99. Elasticiteits- en vastheidsgrens	297

Hoofdstuk XVI. Buiging.

§ 100. Spanningen in gebogen balken	299
§ 101. Traagheidsmomenten der doorsneden	304
§ 102. Berekening van de grootste spanning	306
§ 103. Elastische lijn.	311

VIJFDE AFDEELING. DYNAMICA DER ELASTISCHE LICHAMEN.

Hoofdstuk XVII. De theorie der botsing.

§ 104. Rechte centrale stoot	316
§ 105. Bepaling van den restitutie-coëfficiënt ϵ	320
§ 106. Onveerkrachtige stoot	323

	Bladz.
§ 107. Veerkrachtige stoot	328
§ 108. Botsing van rondwentelende lichamen. Ballistische slinger . . .	329
§ 109. Ontploffingen	333

ZESDE AFDEELING. STATICA DER VLOEIBARE LICHAMEN.

Hoofdstuk XVIII. Evenwichtstoestand van een vloeibaar lichaam onder de werking van uitwendige drukkrachten.

§ 110. Onderscheid tusschen vaste en vloeibare lichamen	337
§ 111. Drukkrachten werkende op een vloeibaar lichaam	338
§ 112. Evenwicht van krachten werkende op een vloeibaar lichaam geheel besloten in een vat met vaste wanden en beweegbare zuigers	340
§ 113. Hydraulische pers	343

Hoofdstuk XIX. Werking der zwaartekracht op vloeibare lichamen.

§ 114. Druk tegen platte vlakken	346
§ 115. Middelpunt van drukking	349
§ 116. Druk tegen gebogen zijvlakken	350
§ 117. Opwaartsche druk	351
§ 118. Stabiliteit van drijvende lichamen. Metacentrum	353

ZEVENDE AFDEELING. DYNAMICA DER VLOEIBARE LICHAMEN.

Hoofdstuk XX. Uitvloeiing van water.

§ 119. Uitvloeiingssnelheid	359
§ 120. Hoeveelheid uitstroomend water	363
§ 121. Uitvloeiingstijd	365
§ 122. Snelheidscoëfficiënt, contractiecoëfficiënt, uitvloeiingscoëfficiënt . .	367

VERBETERINGEN.

- Bladz. 5, 6^e regel v. b. staat: v , moet zijn: c .
- » 30, fig. 12, boogje hoek β_1 moet doorgetrokken worden tot aan de lijn OY .
- » 33, 9^e regel v. b. staat: Q , moet zijn: K .
- » 51, 16^e » v. b. » 14,4, moet zijn: 14.3.
- » 62, 9^e » v. b. » 75, moet zijn: 225.
- » 74, 6^e » v. b. » K_o , moet zijn: k_o .
- » 85, 7^e » v. o. » $K = tg \alpha$, moet zijn:

$$K = Q tg \alpha.$$
- » 304, 1^e regel v. o. staat: $T = \frac{\gamma b h^2}{12}$ of $\mathfrak{T} = \frac{b h^2}{12}$,
 moet zijn: $T = \frac{\gamma b h^3}{12}$ of $\mathfrak{T} = \frac{b h^3}{12}$.
- » 356, 7^e regel v. b. staat: $\frac{\gamma}{2} b$, moet zijn: $\frac{1}{2} b$.



EERSTE AFDEELING.

MECHANICA VAN HET STOFFELIJK PUNT.

HOOFDSTUK I.

Beweging. Snelheid. Versnelling.

§ 1. Stoffelijk punt.

Onder een stoffelijk punt verstaat men een lichaam van zoo kleine afmetingen, dat de plaats die het inneemt als een meetkundig punt mag worden beschouwd.

Ook dan mag een lichaam als een stoffelijk punt worden beschouwd, als het onnoodig wordt geoordeeld de plaats, die eenig deel van het lichaam inneemt, te onderscheiden van de plaats, die door een ander deel van het lichaam wordt ingenomen. Zoo worden gewoonlijk bij de bepaling der banen, doorloopen door een afgeschoten kogel of door de aarde bij haar beweging om de zon, de kogel en de aarde als stoffelijke punten behandeld.

§ 2. Rust. Beweging.

Indien de afstand van twee stoffelijke punten P en Q geen verandering ondergaat, dan zegt men dat P en Q *ten opzichte van elkander in rust* zijn. Ondergaat die afstand een verandering, dan zegt men dat P en Q *zich ten opzichte van elkander bewegen*. Gewoonlijk beschouwt men slechts één dier bewegingen, bijv. die van P ten opzichte van Q .

Indien een punt P zich beweegt ten opzichte van eenige punten Q , R , S enz., welke ten opzichte van elkander in rust zijn, dan worden de punten Q , R , S enz. te zamen

de omgeving van P genoemd. Men zegt dan dat P zich beweegt ten opzichte van zijn omgeving, gevormd door de punten Q , R , S enz. Als de omgeving duidelijk aangewezen is, spreekt men korthedshalve ook wel eenvoudig van de beweging van P .

Daar de plaats door het stoffelijk punt P ingenomen, als een meetkundig punt mag worden beschouwd, doorloopt P bij zijn beweging een lijn, de *baan* van P genoemd. Al naarmate die baan een rechte of een kromme lijn is, heet de beweging van P rechtlijnig of kromlijnig.

Onder de richting der beweging van het punt P , dat zich in A bevindt, verstaat men de richting van de raaklijn in A aan de baan getrokken in den zin der beweging. Is de baan een rechte lijn AB , dan is de richting der beweging standvastig, zoolang het punt zich beweegt van A naar B ; is de baan een kromme lijn, dan verandert de richting der beweging van oogenblik tot oogenblik.

De lengte van het stuk der baan, door het punt P in eenig tijdsverloop afgelegd, heet de weg door P in dien tijd doorloopen.

Als eenheid van lengte wordt aangenomen de *meter*, dat is de lengte van een staaf platina, die te Parijs wordt bewaard.

Tegenwoordig wordt dikwijls, vooral in de natuurkunde, de centimeter als lengteeenheid aangenomen. Alle eenheden zijn in verband te brengen met de eenheden van lengte, tijd en massa. De eenheden van tijd en massa zullen later behandeld worden; maar nu zij reeds vermeld, dat het stelsel van eenheden, waarbij als eenheid van lengte de centimeter, als eenheid van tijd de seconde, en als eenheid van massa het gram aangenomen wordt, het centimeter-gram-seconde-stelsel genoemd wordt, of korthedshalve het CGS-stelsel.

De lengteeenheid in het CGS-stelsel is het honderdste deel van de in dit leerboek gebruikte.

Tot grondslag voor de tijdmeting dient de draaiing der aarde om haar as. Men neemt aan dat onderling gelijke tijdsverloopen die zijn, waarin de aarde onderling gelijke hoeken om haar as draait. Het meten van tijdsverloopen op dezen grondslag geschiedt met behulp van slingeruurwerken. Het is de zaak der sterrenkundigen te onderzoeken, of de aanwijzingen dier uurwerken juist zijn.

Als eenheid van tijdsverloop wordt *de seconde* aangenomen.

Naar de wegen in achtereenvolgende tijdsverloopen afgelegd, worden de bewegingen onderscheiden in eenparige en veranderlijke.

§ 3. Eenparige beweging.

Men zegt dat een punt een *eenparige beweging* heeft, indien het in onderling gelijke tijdsverloopen, hoe klein ook genomen, onderling gelijke wegen aflegt.

De snelheid van een punt met eenparige beweging wordt bepaald door den weg, dien het in zekeren tijd aflegt. Zij wordt evenredig gesteld met den weg per seconde doorloopen.

Is s het aantal meters in t seconden doorloopen, dan is $\frac{s}{t}$ meters de weg per seconde afgelegd; is v het aantal snelheidseenheden, dan heeft men:

$$v = f \frac{s}{t}.$$

Neemt men als eenheid van snelheid aan de snelheid, welke een punt met eenparige beweging heeft, dat in één seconde een weg van één meter doorloopt, dan wordt $f = 1$ en

$$v = \frac{s}{t} \text{ eenheden of } s = vt \text{ meters.}$$

Het aantal snelheidseenheden van de snelheid is dus gelijk aan het aantal meters per seconde afgelegd.

Het aantal meters van den in t seconden doorloopen weg is gelijk aan het product van het aantal snelheidseenheden en het aantal seconden.

In het CGS-stelsel is de eenheid van snelheid, de snelheid van een punt met eenparige beweging, dat in een seconde een weg van één centimer doorloopt. De snelheidseenheid CGS-stelsel is dus het honderdste gedeelte van de in dit leerboek gebruikte.

Onder de richting der snelheid van een punt P , dat zich in A bevindt, verstaat men de richting van de raaklijn in A aan de baan getrokken in den zin der beweging.

Een eenparige beweging kan zijn rechtlijnig of kromlijnig. Is de baan een rechte lijn, dan is de richting der snelheid

standvastig. Is de baan een kromme lijn, dan verandert de richting der snelheid van oogenblik tot oogenblik.

Om in een beperkte ruimte figuren te kunnen teekenen, is men gewoon een lengte van een meter voor te stellen door een lijn van zoodanige lengte, dat de afmetingen der figuur de gewenschte grootte verkrijgen. In een en dezelfde figuur moet een meter steeds door een lijn van dezelfde lengte worden voorgesteld; in verschillende figuren kan de voor meter aangenomen lengte een verschillende zijn. Voortaan zal in elke figuur een meter voorgesteld worden door een lijn van zoodanige lengte als voor die figuur het meest geschikt is. Wordt dan aan een lijn in de figuur een lengte van s meters toegekend, dan is de werkelijke lengte dier lijn s maal zoo groot als die van de als meter aangenomen lijn.

Daar de snelheid van een punt P is bepaald door haar grootte en richting, kan zij door een rechte lijn volledig worden voorgesteld. Men maakt de lijn zooveel meters lang als de snelheid snelheidseenheden heeft, terwijl de richting der lijn de richting der snelheid aangeeft.

Wanneer een punt P een eenparige beweging heeft langs den omtrek van een cirkel, dan spreekt men ook wel van de *hoeksnelheid* van P . De lijn, die het punt P verbindt met het middelpunt van den cirkel, heet de *voerstraal* van P .

De hoeksnelheid van een punt met eenparige cirkelvormige beweging wordt bepaald door den hoek, dien de voerstraal in zekeren tijd doorloopt. Zij wordt evenredig gesteld met den hoek per seconde doorloopen.

Als eenheid van hoeksnelheid wordt aangenomen de hoeksnelheid van een punt met eenparige cirkelvormige beweging, welks voerstraal in een seconde de hoekeenheid doorloopt.

Als eenheid van hoek wordt aangenomen de *radiaal*, dat is de hoek, welks booglengte gelijk is aan den straal. Daar een hoek van 360° een booglengte heeft van $2\pi r$ meters, zal een hoek van $\frac{360^\circ}{2\pi}$ een booglengte hebben van r meters.

Een radiaal is dus een hoek van $57^\circ 17' 45''$.

Heeft een punt een eenparige cirkelvormige beweging met de hoeksnelheid ω eenheden, en is de hoek door den voerstraal in t seconden doorloopen α radialen, dan heeft men

$$\alpha = \omega t.$$

In tegenstelling met de hoeksnelheid spreekt men van de lijnsnelheid van een punt. Er bestaat een eenvoudige betrekking tusschen de hoeksnelheid en de lijnsnelheid van een punt.

Is de hoeksnelheid van een punt ω eenheden, de lijnsnelheid c eenheden, en is de straal van den cirkel r meters lang, dan heeft men:

$$c = r \omega.$$

§ 4. Veranderlijke beweging.

Een punt heeft een veranderlijke beweging, indien het in onderling gelijke tijdsverloopen onderling ongelijke wegen aflegt.

Een veranderlijke beweging kan zijn rechtlijnig of kromlijnig.

Onder de *gemiddelde snelheid* van een punt P gedurende eenig tijdsverloop, verstaat men de snelheid, die een punt met eenparige beweging zou moeten hebben, om in datzelfde tijdsverloop een even grooten weg af te leggen als P .

Is een punt P met veranderlijke beweging op den tijd t in A , en doorloopt het in de eerstvolgende ϑ seconden een weg van s meters, dan is zijn gemiddelde snelheid

$w = \frac{s}{\vartheta}$ eenheden. De grootte dier gemiddelde snelheid zal

veranderen met den duur van het tijdsverloop ϑ . Neemt men dit tijdsverloop kleiner en kleiner, en laat men het tot nul naderen, dan nadert de gemiddelde snelheid tot een bepaalde grenswaarde. Deze grenswaarde is de gemiddelde snelheid van P gedurende het oneindig kleine tijdsverloop volgende op den tijd t , of wel, de snelheid van het punt P met veranderlijke beweging op den tijd t .

Indien op ieder oogenblik de plaats van het punt kan worden bepaald, dan is de beweging van het punt volkomen bekend, en dan kan de snelheid op ieder oogenblik worden gevonden.

De plaats van een punt P kan op ieder oogenblik worden bepaald, als gegeven zijn de baan van het punt, de plaats die het op eenig oogenblik inneemt, en den weg, dien het sedert dat oogenblik in een willekeurig tijdsverloop aflegt.

Laat bijv. de baan een rechte lijn zijn en het punt zich op eenig oogenblik in A bevinden.

De weg s , in t seconden volgende op dat oogenblik afgelegd, kan worden gegeven door een vergelijking, bewegingsvergelijking genoemd, welke een betrekking aangeeft tusschen s en t .

Zij bijv. gegeven $s = pt^2$, en zij het punt op den tijd nul in A , dan is het punt na t seconden in B , op een afstand pt^2 meters van A verwijderd. Om nu de snelheid van het punt op den tijd t te vinden, bepaalt men de gemiddelde snelheid gedurende het tijdsverloop ϑ seconden, volgende op den tijd t . In de $t + \vartheta$ eerste seconden is de afgelegde weg $s_1 = p(t + \vartheta)^2$; in de t eerste seconden $s = pt^2$. In de ϑ seconden, volgende op den tijd t , is dus de afgelegde weg:

$$l = s_1 - s = 2pt\vartheta + p\vartheta^2,$$

en de gemiddelde snelheid:

$$w = \frac{l}{\vartheta} = 2pt + p\vartheta.$$

Deze gemiddelde snelheid verandert met het tijdsverloop ϑ , maar wanneer ϑ tot nul nadert, nadert de gemiddelde snelheid tot de grenswaarde $2pt$. Is dus v het aantal snelheidseenheden op den tijd t , dan heeft men:

$$v = 2pt.$$

Zij om een ander voorbeeld te nemen, de bewegingsvergelijking:

$$s = pt + qt^2 + rt^3$$

en laat gevraagd worden de snelheid op den tijd t te bepalen.

De weg in de $t + \vartheta$ eerste seconden afgelegd, is:

$$s_1 = p(t + \vartheta) + q(t + \vartheta)^2 + r(t + \vartheta)^3.$$

De weg in de t eerste seconden afgelegd, is:

$$s = pt + qt^2 + rt^3.$$

De weg in ϑ seconden volgende op den tijd t afgelegd, is dan:

$$l = s_1 - s = (p + 2qt + 3rt^2)\vartheta + (q + 3rt)\vartheta^2 + r\vartheta^3,$$

en de gemiddelde snelheid:

$$w = \frac{l}{\vartheta} = p + 2qt + 3rt^2 + (q + 3rt)\vartheta + r\vartheta^2.$$

Laat men ϑ tot nul naderen, dan nadert w tot de grenswaarde $p + 2qt + 3rt^2$, en de snelheid op den tijd t is dus:

$$v = p + 2qt + 3rt^2.$$

Laat eindelijk de bewegingsvergelijking zijn:

$$s = r \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

De weg in de $(t + \vartheta)$ eerste seconden afgelegd, is:

$$s_1 = r \sin 2\pi \frac{t + \vartheta}{T}.$$

De weg in de t eerste seconden afgelegd, is:

$$s = r \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

De weg in ϑ seconden volgende op den tijd t afgelegd, is:

$$l = s_1 - s = r \left(\sin 2\pi \frac{t + \vartheta}{T} - \sin 2\pi \frac{t}{T} \right) \text{ of}$$

$$l = 2r \sin 2\pi \frac{\vartheta}{2T} \cos 2\pi \frac{2t + \vartheta}{2T},$$

en de gemiddelde snelheid:

$$w = \frac{2r}{\vartheta} \sin 2\pi \frac{\vartheta}{2T} \cos 2\pi \frac{2t + \vartheta}{2T},$$

of voor ϑ oneindig klein:

$$v = \frac{2r}{\vartheta} \cdot 2\pi \frac{\vartheta}{2T} \cos 2\pi \frac{t}{T} = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Neemt de snelheid van een punt voortdurend toe, dan is de beweging *versneld*; neemt de snelheid voortdurend af, dan is de beweging *vertraagd*.

§ 5. Eenparig versnelde beweging.

Een punt heeft een eenparig versnelde beweging, wanneer het in onderling gelijke tijdsverloopen, hoe klein ook genomen, onderling gelijke snelheidsvermeerderingen krijgt.

De *versnelling* van een punt met eenparig versnelde beweging wordt bepaald door de snelheidsvermeerdering, die het in zekeren tijd krijgt. Zij wordt evenredig gesteld aan de snelheidsvermeerdering per seconde. Neemt de snelheid in t seconden

met q eenheden toe, en is a het aantal versnellingseenheden, dan is:

$$a = f \frac{q}{t}.$$

Als *eenheid van versnelling* wordt aangenomen, de versnelling van een punt met eenparig versnelde beweging, welks snelheid in een seconde met de snelheidseenheid toeneemt. Bovenstaande vergelijking verandert daardoor in:

$$a = \frac{q}{t} \text{ of } q = at.$$

In het CGS-stelsel is de versnellingseenheid het honderdste gedeelte van de in dit leerboek aangenomene.

Heeft een punt een eenparig versnelde beweging met de versnelling a eenheden, dan neemt de snelheid in t seconden met at eenheden toe. Is dus op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, dan is de snelheid v eenheden na t seconden:

$$v = c + at. \quad (1)$$

De snelheid c wordt de aanvangssnelheid genoemd, d. w. z. de snelheid bij het begin van den tijd t ; de snelheid v de eindsnelheid, d. w. z. de snelheid aan het einde van den tijd t .

Om den weg te bepalen, dien een punt P met eenparig versnelde beweging met de versnelling a aflegt in t seconden, volgende op het oogenblik waarop de snelheid is c , stelt men zich een ander punt Q voor, dat een reeks van n eenparige bewegingen volbrengt, die elk $\frac{t}{n}$ seconden duren.

Op den tijd nul heeft Q dezelfde snelheid als P ; telkens na $\frac{t}{n}$ seconden verandert de snelheid van Q , en wordt gelijk aan de snelheid, die P op dat oogenblik heeft. De snelheden, waarmee Q zich beweegt in de achtereenvolgende tijdsverloopen $\frac{t}{n}$, zijn:

$$c, c + a \frac{t}{n}, c + 2a \frac{t}{n} \dots c + (n-1) a \frac{t}{n}.$$

De wegen, door Q in deze tijdsverloopen afgelegd, zijn:

$$\begin{aligned} & \frac{c \frac{t}{n}}{n} \quad \left(c + a \frac{t}{n} \right) \frac{t}{n} \quad \left(c + 2a \frac{t}{n} \right) \frac{t}{n} \dots \dots \dots \\ & \quad \left(c + (n-1) a \frac{t}{n} \right) \frac{t}{n}. \end{aligned}$$

De geheele weg, door Q in de t eerste seconden afgelegd, is de som der wegen, en dus:

$$s = ct + \frac{1}{2} at^2 - \frac{at^2}{2n}.$$

Hoe grooter n wordt genomen, des te meer komt de beweging van Q met die van P overeen, en des te kleiner wordt de term $\frac{at^2}{2n}$. Neemt men n oneindig groot, dan is de beweging van Q gelijk aan die van P , en voor den door P afgelegden weg verkrijgt men dan:

$$s = ct + \frac{1}{2} at^2. \quad (2)$$

Als men uit de vergelijkingen (1) en (2) t elimineert, dan verkrijgt men de vergelijkingen:

$$v = \sqrt{c^2 + 2as} \quad (3) \quad \text{en} \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2a} \quad (4)$$

Heeft dus een punt een eenparig versnelde beweging met de versnelling a eenheden, heeft het op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en heeft het daarna een weg s meters afgelegd, dan is zijn snelheid geworden $\sqrt{c^2 + 2as}$ eenheden, en omgekeerd:

Heeft een punt een eenparig versnelde beweging met de versnelling a eenheden, heeft het op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en heeft het na eenigen tijd de snelheid v eenheden gekregen, dan heeft het in dat tijdsverloop den weg $\frac{v^2 - c^2}{2a}$ meters afgelegd.

Is de aanvangssnelheid $c = 0$, dan veranderen de vergelijkingen in:

$$v = at \quad s = \frac{1}{2} at^2 \quad v = \sqrt{2as} \quad \text{en} \quad s = \frac{v^2}{2a}. \quad (5)$$

Is de beweging van het punt rechtlijnig eenparig versneld, dan is de richting der versnelling de richting van de lijn, waarlangs zich het punt beweegt in den zin der beweging.

Op soortgelijke wijze als dit voor de snelheid is verklaard, kan ook de versnelling van een punt in richting en grootte worden voorgesteld door een rechte lijn.

§ 6. Eenparig vertraagde beweging.

Een punt heeft een eenparig vertraagde beweging, wanneer het in onderling gelijke tijdsverloopen, hoe klein ook genomen, onderling gelijke snelheidsverminderingen ondergaat.

De vertraging van een punt met eenparig vertraagde beweging wordt bepaald door de snelheidsvermindering, die het in zekeren tijd ondergaat. Zij wordt evenredig gesteld met de snelheidsvermindering per seconde.

Als *eenheid van vertraging* wordt aangenomen de vertraging van een punt met eenparig vertraagde beweging, welks snelheid in een seconde met de snelheidseenheid vermindert.

In het CGS-stelsel is de vertragingseenheid het honderdste gedeelte van de in dit leerboek aangenomene.

Heeft een punt een eenparig vertraagde beweging met de vertraging a eenheden, dan neemt de snelheid in t seconden met at eenheden af. Is dus op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en na t seconden v eenheden, dan is:

$$v = c - at. \quad (6)$$

Op soortgelijke wijze als hierboven voor de eenparig versnelde beweging is geschied, kan de weg worden berekend door het punt afgelegd in de t seconden volgende op het oogenblik, waarop de snelheid c is. Men vindt daarvoor:

$$s = ct - \frac{1}{2} at^2. \quad (7)$$

Door eliminatie van t uit de vergelijkingen (6) en (7), vindt men:

$$v = \sqrt{c^2 - 2as} \quad (8) \quad \text{en} \quad s = \frac{c^2 - v^2}{2a}. \quad (9)$$

Heeft dus een punt een eenparig vertraagde beweging met de vertraging a eenheden, heeft het op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en heeft het daarna een weg s meters afgelegd, dan is zijn snelheid geworden $\sqrt{c^2 - 2as}$ eenheden, en omgekeerd:

Heeft een punt een eenparig vertraagde beweging met de

vertraging a eenheden, heeft het op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en heeft het na eenigen tijd de snelheid v eenheden gekregen, dan heeft het in dat tijdsverloop den weg $\frac{c^2 - v^2}{2a}$ meters afgelegd.

HOOFDSTUK II.

Ontbinden van bewegingen.

§ 7. Ontbinding van een rechte lijnige eenparige beweging.

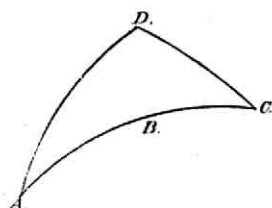
Laat een punt P zich in t seconden bewegen van A over B naar C (fig. 1). Het zou ook in C zijn aangekomen, indien het eerst van A naar D en daarna van D naar C was gegaan. Worden de bewegingen van A naar D en van D naar C zoodanig gekozen, dat het punt t seconden zou noodig hebben, zoowel om den weg AD , als om den weg DC te doorloopen, dan noemt men de bewegingen van

A naar D en van D naar C de ontbindingsbewegingen van de werkelijke beweging die P heeft; men zegt dan, dat men de werkelijke beweging van P gedurende deze t seconden in twee bewegingen ontbonden heeft.

De werkelijke beweging van P kan op een oneindig aantal wijzen in twee bewegingen worden ontbonden.

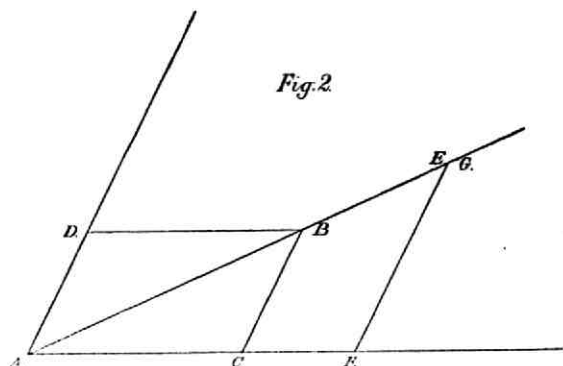
Heeft een punt P een rechte lijnige eenparige beweging, dan kan men voor elk willekeurig tijdsverloop de beweging van P ontbinden in twee eenparige bewegingen langs verschillende rechte lijnen; daartoe wordt slechts vereischt, dat de lijn, die in richting en grootte de snelheid van de werkelijke beweging voorstelt, de diagonaal is van het parallelogram, beschreven op de lijnen, welke in richting en grootte

Fig 1



de snelheden der ontbindingsbewegingen voorstellen, en wel de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende zijden zijn.

Om dit te bewijzen wordt aangenomen, dat het punt P een rechtlijnige eenparige beweging heeft met een snelheid in richting en grootte voorgesteld door de lijn AB (fig. 2). Na 1 seconde zal P dan in B gekomen zijn. Zij verder



figuur $ABCD$ een parallelogram. In t seconden zal P in E komen, als $AE = t \cdot AB$. Indien P eerst gedurende t seconden een rechtlijnige eenparige beweging gehad had met een snelheid, voorgesteld door de lijn AC , dan zou het na t seconden in F gekomen zijn, als $AF = t \cdot AC$. Verkreeg P daarna gedurende t seconden een rechtlijnige eenparige beweging met een snelheid, in richting en grootte voorgesteld door de lijn AD , dan kan de plaats G , waar P zou aankomen, gevonden worden door uit F een lijn te trekken, evenwijdig aan AD , en daarop te nemen een stuk $FG = t \cdot AD$.

De driehoeken AFG en ACB zijn gelijkvormig, daar

$$\angle ACB = \angle AFG \text{ en } \frac{AC}{CB} = \frac{AF}{FG}.$$

Hieruit volgt $\angle BAC = \angle GAF$; de lijnen GA en BA vallen dus langs elkander, en het punt G ligt op de lijn AB . Daar verder $\frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC}$ en $AF = t \cdot AC$, zoo is $AG = t \cdot AB$. Het punt G valt dus samen met E .

Men kan op geheel dezelfde wijze aantoonen dat het punt P eveneens in E zal aankomen, als men het eerst gedurende t seconden zich laat bewegen met de snelheid voorgesteld door de lijn AD , en daarna, van de plaats uit waar het zou gekomen zijn, wederom gedurende t seconden met de snelheid voorgesteld door de lijn AC .

§ 8. Ontbinding van een rechtlijnige eenparig versnelde en van een rechtlijnige eenparig vertraagde beweging.

Indien een punt P een eenparig versnelde beweging met de versnelling a eenheden heeft langs de lijn AB van A naar B , indien het zich op eenig oogenblik in A bevindt en de snelheid c eenheden heeft, dan kan voor een willekeurig tijdsverloop de beweging van P worden ontbonden in twee bewegingen langs de lijn AB van A naar B , waarvan de een eenparig is met de snelheid c eenheden, en de ander eenparig versneld met de versnelling a eenheden en de aanvangssnelheid nul.

Indien een punt P een eenparig vertraagde beweging met de vertraging a eenheden heeft langs de lijn AB van A naar B , indien het zich op eenig oogenblik in A bevindt en de snelheid c eenheden heeft, dan kan voor een willekeurig tijdsverloop de beweging van P worden ontbonden in een eenparige beweging langs de lijn AB van A naar B met de snelheid c eenheden, en in een eenparig versnelde langs de lijn AB van B naar A , met de versnelling a eenheden en de aanvangssnelheid nul.

Indien een punt P een rechtlijnige eenparig versnelde beweging heeft met een aanvangssnelheid nul, dan kan zijn beweging voor een willekeurig tijdsverloop ontbonden worden in twee eenparig versnelde bewegingen met aanvangssnelheden nul langs verschillende rechte lijnen; daartoe wordt slechts vereischt, dat de lijn, die in richting en grootte de versnelling van de werkelijke beweging voorstelt, de diagonaal is van het parallelogram, beschreven op de lijnen, welke in richting en grootte de versnellingen der ontbindingsbewe-

lijn AB . Daar verder $\frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC}$ en $AF = \frac{1}{2} t^2 \cdot AC$, zoo is $AG = \frac{1}{2} t^2 \cdot AB$. Het punt G valt dus samen met E .

§ 9. Ontbinding van een willekeurige beweging.

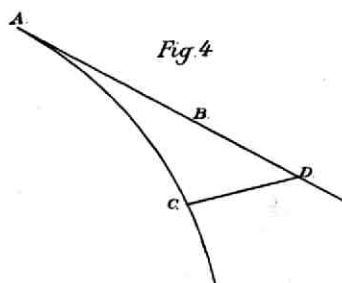
Hierboven is reeds opgemerkt, dat een beweging op talloze wijzen in twee andere kan worden ontbonden. De volgende wijze van ontbinding wordt meermaalen toegepast.

Laat P (fig. 4) op den tijd t seconden in A zijn en een snelheid c eenheden hebben, die in richting en grootte door AB wordt voorgesteld; de lijn AB is dan raaklijn aan de baan in A . Laat P ϑ seconden later in C zijn aangekomen. De beweging van P gedurende deze ϑ seconden kan dan ontbonden worden in een eenparige langs de lijn AB met de snelheid c eenheden, zoodat P na ϑ seconden in D komt als $AD = c\vartheta$ meters, en

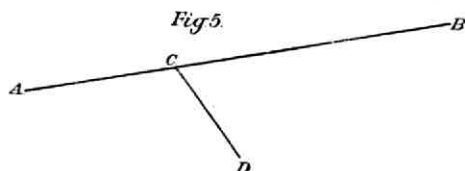
in een rechtlijnige eenparig versnelde beweging met de aanvangssnelheid nul langs de lijn DC , zoodat P in ϑ seconden van D naar C komt. De grootte van de versnelling dezer beweging kan worden berekend uit de lengte der lijn CD . Gewoonlijk bepaalt men de grenswaarde, waartoe deze versnelling nadert, wanneer ϑ kleiner en kleiner wordt genomen.

§ 10. Deviatie.

De bewegingstoestand van een punt wordt bepaald door de richting en de grootte van zijn snelheid. Indien grootte en richting der snelheid voortdurend dezelfde blijven, dan zegt men dat de bewegingstoestand van het punt niet verandert. Ondergaat een van beide of beide een wijziging, dan zegt men dat de bewegingstoestand verandert.



Laat het punt P (fig. 5) zich op den tijd t seconden in A bevinden en een snelheid hebben van c eenheden, welke

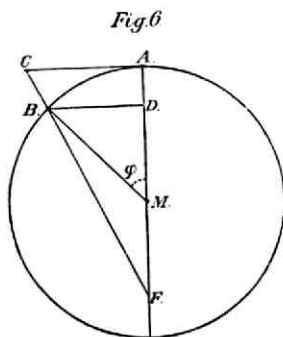


in richting en grootte wordt voorgesteld door de lijn AB . Indien de bewegingstoestand van P niet veranderde nadat het

in A is gekomen, dan zou het θ seconden later in C zijn, als $AC = c \theta$ meters. Zoo nu P zich na θ seconden werkelijk in D bevindt, dan noemt men de lijn CD de *deviatie*, die P ondergaat in de θ seconden, volgende op den tijd t .

Zooals hierboven reeds is opgemerkt, kan de werkelijke beweging van P ontbonden worden in een eenparige langs de lijn AB met de snelheid c eenheden, en in een rechtlijnige eenparig versnelde met de aanvangssnelheid nul, die P in θ seconden van C naar D brengt. De grenswaarde van de versnelling dezer laatste beweging, als θ kleiner en kleiner wordt genomen, noemt men de *deviatieversnelling* van P in A .

Indien de beweging van een punt volkomen bekend is, dan kan men op ieder oogenblik zijn deviatieversnelling bepalen.



Laat, om een voorbeeld te nemen, het punt P een eenparige beweging hebben met een snelheid c eenheden langs den omtrek van een cirkel met een straal r meters.

Laat P zich op den tijd t seconden bevinden in A (fig. 6) en θ seconden later in B , dan is boog $AB = c \theta$ meters. Indien de bewegingstoestand van P niet ver-

anderde, zou P na θ seconden aangekomen zijn in C , als $AC = c \theta$ meters. Daar P na θ seconden werkelijk in B is gekomen, is CB de deviatie, die P in deze θ seconden heeft ondergaan.

Legt P den weg CB af met een eenparig versnelde beweging met de aanvangssnelheid nul en de versnelling a eenheden, dan is:

$$CB = \frac{1}{2} a \vartheta^2.$$

Om de grenswaarde te bepalen waartoe a nadert, als ϑ kleiner en kleiner wordt genomen, laat men uit B een loodlijn BD neer op de middellijn AM . Nu is $\frac{AD}{CB} = \cos CFA$. Hoe kleiner ϑ genomen wordt, des te dichter valt B bij A en des te kleiner wordt $\angle CFA$. Bij het onbepaald afnemen van ϑ , nadert $\cos CFA$ tot de eenheid en aan de grens is dus $AD = CB$.

Volgens een bekende meetkundige stelling, is de koorde AB middenevenredige tusschen de middellijn en haar projectie AD op de middellijn.

Is φ het aantal radialen van $\angle BMA$, dan is koorde $AB = 2r \sin \frac{1}{2} \varphi$ en boog $AB = r\varphi$. Bij het kleiner worden van ϑ wordt ook φ kleiner, en daar voor zeer kleine hoeken $\sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2} \varphi$ is, zoo nadert de koorde tot de grens $r\varphi$. Aan de grens is dus koorde $AB =$ boog $AB = c\vartheta$. Daar dan tevens $AD = CB = \frac{1}{2} a \vartheta^2$, heeft men:

$$c^2 \vartheta^2 = 2r \cdot \frac{1}{2} a \vartheta^2$$

of

$$c^2 = ar$$

en dus

$$a = \frac{c^2}{r}. \quad (10)$$

De hoek CFA , dien de lijn CB maakt met de lijn AM , is des te kleiner, naarmate ϑ kleiner is. De grensrichting van CB is dus de richting van AM .

Heeft een punt P een eenparige beweging met de snelheid c eenheden langs den omtrek van een cirkel, welks straal r meter lang is, dan heeft zijn deviatieversnelling de grootte $\frac{c^2}{r}$ eenheden, en op ieder oogenblik de richting van den straal naar het middelpunt toe. De deviatieversnelling heeft dus standvastige grootte, maar veranderlijke richting.

Ook dan wanneer een punt P een rechte lijnige beweging heeft, spreekt men van zijn deviatie. In dat geval kan men de deviatieversnelling eenvoudiger op de volgende wijze vinden.

Onder de gemiddelde versnelling van een punt P met rechtlijnige beweging gedurende eenig tijdsverloop, verstaat men de versnelling, die een punt met eenparig versnelde beweging zou moeten hebben, opdat zijn snelheid in datzelfde tijdsverloop met hetzelfde bedrag zou toenemen als die van P .

Is een punt P met rechtlijnige niet eenparig versnelde beweging op den tijd t seconden in A , en neemt zijn snelheid in de eerstvolgende ϑ seconden toe met c eenheden, dan is zijn gemiddelde versnelling $d = \frac{c}{\vartheta}$ eenheden. De grootte dier gemiddelde versnelling zal veranderen met den duur van het tijdsverloop ϑ . De grenswaarde waartoe de gemiddelde versnelling nadert, als het tijdsverloop ϑ kleiner en kleiner wordt, noemt men de versnelling op den tijd t ; zij is gelijk aan de devatieversnelling van P in A . Gedurende een oneindig klein tijdsverloop toch, kan de versnelling slechts een oneindig kleine verandering ondergaan, en de beweging mag voor dit tijdsverloop als eenparig versneld worden beschouwd.

Als voorbeelden zullen behandeld worden de drie vroeger in § 4 behandelde bewegingsvergelijkingen, en de daaruit gevonden snelheden op den tijd t .

$$1. \quad s = pt^2 \qquad v = 2pt.$$

De snelheid op den tijd $t + \vartheta$ seconden is:

$$v_1 = 2p(t + \vartheta).$$

De snelheid op den tijd t seconden is:

$$v = 2pt.$$

De snelheidsvermeerdering in de ϑ seconden volgende op den tijd t is dus:

$$c = v_1 - v = 2p\vartheta$$

en de gemiddelde versnelling:

$$d = \frac{2p\vartheta}{\vartheta} = 2p.$$

De gemiddelde versnelling is onafhankelijk van het tijdsverloop ϑ , en de devatieversnelling heeft dus standvastige grootte.

$$2. \quad s = pt + qt^2 + rt^3 \quad v = p + 2qt + 3rt^2.$$

De snelheid op den tijd $t + \vartheta$ seconden is:

$$v_1 = p + 2q(t + \vartheta) + 3r(t + \vartheta)^2.$$

De snelheid op den tijd t seconden is:

$$v = p + 2qt + 3rt^2,$$

waaruit volgt:

$$c = v_1 - v = (2q + 6rt)\vartheta + 3r\vartheta^2$$

$$d = \frac{c}{\vartheta} = 2q + 6rt + 3r\vartheta.$$

Voor $\vartheta = 0$ wordt de deviatieversnelling dus:

$$a = 2q + 6rt.$$

$$3. \quad s = r \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad v = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

De snelheid op den tijd $t + \vartheta$ seconden is:

$$v_1 = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t + \vartheta}{T},$$

die op den tijd t seconden:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

waaruit:

$$c = v_1 - v = \frac{2\pi r}{T} \left(\cos 2\pi \frac{t + \vartheta}{T} - \cos 2\pi \frac{t}{T} \right)$$

$$\text{of} \quad c = -\frac{4\pi r}{T} \sin 2\pi \frac{2t + \vartheta}{2T} \sin \pi \frac{\vartheta}{T}$$

$$d = \frac{c}{\vartheta} = -\frac{4\pi r}{T\vartheta} \sin 2\pi \frac{2t + \vartheta}{2T} \sin \pi \frac{\vartheta}{T}$$

Voor oneindig kleine waarden van ϑ wordt dan de deviatieversnelling:

$$a = -\frac{4\pi r}{\vartheta T} \cdot \pi \frac{\vartheta}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T} = -\frac{4\pi^2 r}{T^2} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

of hierin substitueerende $s = r \sin 2\pi \frac{t}{T}$

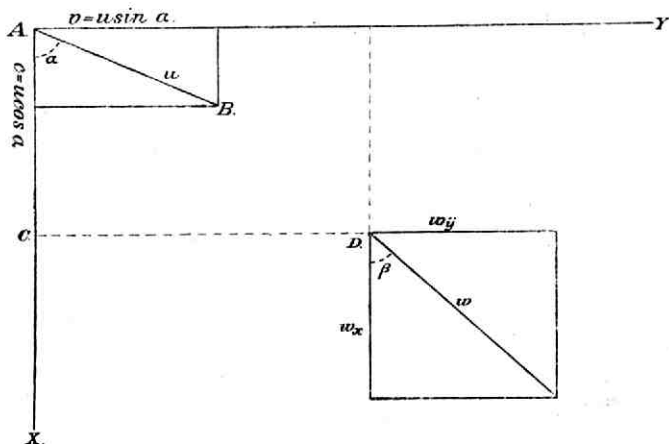
$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2} s.$$

Is de beweging van een punt P bekend, dan kan men door berekening op ieder oogenblik de deviatieversnelling in

richting en grootte bepalen. Omgekeerd kan men de beweging van P vinden, als zijn bewegingstoestand op eenig oogenblik, en zijn devatieversnelling van oogenblik tot oogenblik bekend zijn.

Laat een punt P dat zich in A (fig. 7) bevindt, een snelheid u eenheden hebben voorgesteld door de lijn AB ; laat zijn standvastige devatieversnelling a eenheden be-

Fig 7



dragen en de richting AX hebben; laat eindelijk α de hoek zijn, dien AB maakt met AX . Daar de devatieversnelling standvastig is in grootte en richting, kan de beweging van P voor een willekeurig tijdsverloop ontbonden worden in een eenparige beweging langs de lijn AB met de snelheid u eenheden, en in een eenparig versnelde langs de lijn AX met de aanvangssnelheid nul en de versnelling a eenheden. De eenparige beweging kan wederom ontbonden worden in twee eenparige bewegingen, een langs de lijn AX met de snelheid $c = u \cos \alpha$ eenheden, en een langs de lijn AY met de snelheid $v = u \sin \alpha$ eenheden. Daar de eenparig versnelde beweging en de eene ontbondene van de eenparige beweging in dezelfde richting plaats hebben, kan men deze twee ontbindingsbewegingen tot één samenvoegen, en wel

tot een eenparig versnelde beweging, langs de lijn AX , met de aanvangssnelheid c eenheden en de versnelling a eenheden.

Is het punt op den tijd nul in A , dan kan de plaats D , waar het zich t seconden later bevindt, gevonden worden, door eerst den weg $AC = x = ct + \frac{1}{2}at^2$ op de lijn AX af te zetten, daarna uit C een lijn evenwijdig aan AY te trekken, en daarop af te zetten een stuk $CD = y = vt$.

Is P in D aangekomen, dan is de snelheid van zijn ontbindingsbeweging in de richting AX $w_x = c + at$, en die van zijn ontbindingsbeweging in de richting AY $w_y = v$. Zijn werkelijke snelheid is derhalve $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$, en de hoek β , dien de richting der snelheid w met AX maakt,

kan gevonden worden uit de vergelijking $\tan \beta = \frac{w_y}{w_x}$. De

vier vergelijkingen:

$$x = ct + \frac{1}{2}at^2 \quad y = vt \quad w_x = c + at \quad w_y = v \quad (11)$$

zijn dus voldoende om op ieder willekeurig oogenblik de plaats en de grootte en richting der snelheid van P te vinden.

Door t uit de twee eerste vergelijkingen (11) te elimineeren, verkrijgt men de vergelijking:

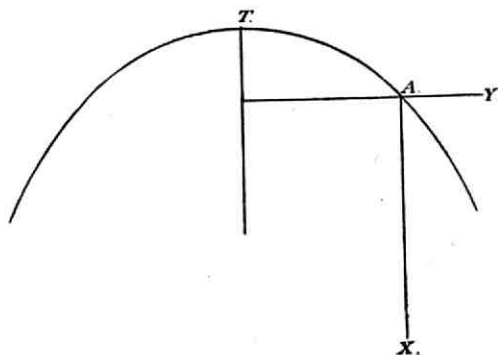
$$x = \frac{c}{v} y + \frac{a}{2v^2} y^2, \quad (12)$$

waaruit men voor een willekeurige waarde van y de bijbehorende waarde van x kan vinden. Uit deze vergelijking kan men vinden het geheel der plaatsen, die het punt P bij zijn beweging kan innemen, derhalve de baan van P . Deze baan is een kromme lijn, parabool genoemd (fig. 8). Men kan zich voorstellen dat de beweging, die P in A heeft, de voortzetting is van een vroegere beweging. De vergelijkingen (11) gelden ook voor die vroegere beweging; t moet dan echter negatief worden, d. w. z. die vergelijkingen hebben dan betrekking op den tijd t seconden vóór den tijd nul, toen P in A was.

Stelt men in de derde der vergelijkingen (11) $w_x = 0$, dan wordt: $c + at = 0$ of $t = -\frac{c}{a}$,

dat is, $\frac{c}{a}$ seconden vóór den tijd waarop P in A was, had de snelheid der ontbindingsbeweging van P in de richting AX de grootte nul, en was dus de snelheid v der ontbindingsbeweging langs AY de werkelijke snelheid van P .

Fig. 8.



De plaats T waar P zich dan bevindt, heet de top van den parabool, en de lijn, die door den top evenwijdig aan AX wordt getrokken, de as der parabool. De vergelijking (12)

wordt dan:

$$x = \frac{a}{2v^2} y^2,$$

uit welke vergelijking de baan van P op eenvoudige wijze kan worden geconstrueerd.

HOOFDSTUK III.

Massa. Kracht.

§ 11. Massa.

Newton stelde de hypothese, dat twee stoffelijke punten P en Q op elkander een invloed uitoefenen, tengevolge waarvan zij zich bewegen, en dat de grootte der deviatie-

Wanneer de deviatieversnelling alleen afhangt van de afstand dier punten, dan zou de deviatieversnelling van de maan om de aarde veel groter moeten zijn dan die van de aarde om de zon, en het blijft dat dat juist omgekeerd is.

versnelling van P , evenals die van Q , omgekeerd evenredig is aan het kwadraat van den afstand van P en Q . Uit omstandigheden, die hier niet nader kunnen verklaard worden, is gebleken dat de deviatieversnelling, die een punt P onder den invloed van een punt Q verkrijgt, niet alleen van den afstand dier punten afhangt.

Dit heeft geleid tot de invoering van het begrip *massa* of *hoeveelheid stof* van een stoffelijk punt. Men stelt de massa van een stoffelijk punt P evenredig aan de grootte der deviatieversnelling, die een willekeurig punt Q onder zijn invloed verkrijgt, en evenredig aan het kwadraat van den afstand van P tot Q . Hiervan uitgaande, kunnen de sterrekundigen de massa's der hemellichamen vergelijken.

Tot nog toe is het niet mogelijk de massa's van twee willekeurige lichamen op aarde te vergelijken door hun invloed op andere lichamen na te gaan. Men volgt een minder rechtstreeksche methode, waarbij men gebruik maakt van de balans.

Het meten van massa's volgens deze methode berust daarop, dat de massa's van twee lichamen zich verhouden als hun gewichten. Als eenheid van massa wordt aangenomen het *kilogram*, dat is de massa van een stuk platina dat te Parijs wordt bewaard.

In het CGSstelsel wordt als eenheid van massa aangenomen het *gram*; deze eenheid van massa is het duizendste gedeelte van de in dit leerboek aangenomene.

§ 12. Kracht.

Wanneer de bewegingstoestand van een punt verandert, dan schrijft men die verandering toe aan een oorzaak; men zegt, dat op het punt een *kracht* werkt.

Indien een punt in rust is of een rechtlijnige eenparige beweging heeft, dan werkt er dus geen kracht op; omgekeerd, indien op een punt geen kracht werkt, dan is het punt in rust of het heeft een rechtlijnige eenparige beweging. Is de beweging van het punt kromlijnig of rechtlijnig veranderlijk, dan werkt er een kracht op.

Men kent aan een kracht toe richting en grootte. Indien een punt P dat oorspronkelijk in rust is, een rechtlijnige

beweging van A naar B verkrijgt. dan zegt men dat er een kracht op werkt van standvastige richting. Onder de richting der kracht verstaat men dan de richting, waarin P zich gaat bewegen. Men zegt dat de kracht langs de lijn AB werkt. Krijgt het punt P bovendien een eenparig versnelde beweging, ondergaat dus zijn snelheid in onderling gelijke tijdsverloopen onderling gelijke vermeerderingen, dan kent men aan de kracht ook een standvastige grootte toe.

De grootte van de kracht, die aan een punt P , dat oorspronkelijk in rust is, een rechtlijnige eenparig versnelde beweging geeft, wordt bepaald door de massa van P en door de versnelling van P . Zij wordt evenredig gesteld met die massa en met die versnelling.

Is de beweging van P rechtlijnig niet eenparig versneld, dan werkt op P een kracht van standvastige richting, maar veranderlijke grootte.

Krijgt P een kromlijnige beweging, dan werkt er een kracht op, waarvan in het algemeen zoowel de grootte als de richting van oogenblik tot oogenblik verandert.

Heeft een punt P een willekeurige beweging, en bevindt het zich op eenig oogenblik in A , dan wordt de kracht die op P werkt als het in A is, bepaald door de massa van P en door de deviatieversnelling van P in A . Onder de richting der kracht verstaat men dan de richting der deviatieversnelling; de grootte der kracht wordt evenredig gesteld met de massa van P en met de grootte der devatieversnelling.

Heeft P een massa van m kilogram, en is zijn devatieversnelling als het in A is, a eenheden, dan is het aantal krachtseenheden K van de kracht, die in A op P werkt:

$$K = f a m.$$

Als eenheid van kracht wordt aangenomen de kracht, die aan een punt met de massa van één kilogram een versnelling geeft van één versnellingseenheid.

Indien een punt een massa m kilogram, en in A een devatieversnelling van a eenheden heeft, dan werkt er in A een kracht van K krachteenheden op, als:

$$K = am.$$

Deze krachtseenheid wordt de dynamische krachtseenheid genoemd.

In de practijk wordt veel gebruik gemaakt van een andere krachtseenheid, het gewicht van een kilogram. Ten onrechte wordt deze krachtseenheid gewoonlijk kilogram genoemd.

In dit leerboek zal zij in tegenstelling met de dynamische, de statische krachtseenheid genoemd worden. Zooals later zal worden aangetoond, is de statische krachtseenheid 9.812 maal zoo groot als de dynamische.

In het CGS-stelsel is de krachtseenheid de kracht, die aan de massa van één gram de versnellingseenheid geeft. Daar de eenheid van massa het duizendste en de eenheid van versnelling het honderdste gedeelte is van de hierboven gekozen eenheden, zoo is de krachtseenheid in het CGS-stelsel, *dynamisch* geheeten, het honderdduizendste gedeelte van de dynamische krachtseenheid. De dynamisch is dus het 981200^{ste} gedeelte van de statische krachtseenheid.

Daar men aan een kracht grootte en richting toekent, kan zij door een lijn AB voorgesteld worden. De lengte der lijn geeft de grootte der kracht aan; de richting der lijn de richting van de kracht, terwijl een op de lijn aangebracht pijltje den zin aangeeft, waarin de kracht werkt.

§ 13. Samenstelling van twee krachten.

In de sterrenkunde en in de natuurkunde tracht men steeds het bestaan van krachten, zooals zij zich openbaren in veranderingen van de bewegingstoestanden van punten, te verklaren uit de aanwezigheid van andere punten, die een zekeren invloed uitoefenen. Vandaar dat men zich kan voorstellen, dat op een punt twee of meer krachten werken. In deze veronderstelling doet zich de vraag voor, wat er zal gebeuren als een punt P zich bevindt onder den invloed van twee punten Q en Q_1 , en als er dus op P twee krachten werken.

Zoowel de sterrenkunde als de natuurkunde hebben er toe geleid het volgende aan te nemen:

Wanneer op een punt P , onder den invloed van twee punten Q en Q_1 twee krachten K en K_1 werken, dan verkrijgt men de kracht R , die op P werkt tengevolge van den invloed van Q en Q_1 samen, door een parallelogram te beschrijven op de lijnen, die in richting en grootte

de krachten K en K_1 voorstellen; de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende zijden zijn, stelt dan in richting en grootte de kracht R voor.

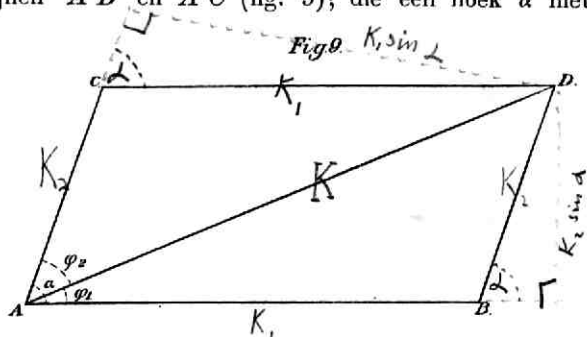
Men zegt, dat men de krachten K en K_1 heeft samengesteld, dat R de *resultante* is van K en K_1 , en dat K en K_1 de *composanten* zijn van R .

Uit bovengenoemde parallelogram-constructie blijkt nog het volgende:

Indien de krachten K en K_1 langs dezelfde lijn in dezelfde richting werken, dan is de resultante R gelijk aan de som van K en K_1 , en werkt langs diezelfde lijn in diezelfde richting.

Indien de krachten K en K_1 langs dezelfde lijn in onderling tegengestelde richtingen werken, dan is de resultante R gelijk aan het verschil van K en K_1 , en werkt langs diezelfde lijn in de richting der grootste kracht. Zijn in dit geval K en K_1 even groot, dan is de resultante nul. Men zegt dan, dat de krachten K en K_1 elkanders werking opheffen, of dat zij met elkander in evenwicht zijn.

Indien de krachten K_1 en K_2 voorgesteld worden door de lijnen AB en AC (fig. 9), die een hoek α met elk-



ander maken, en de resultante K door de lijn AD , die met AB en AC hoeken φ_1 en φ_2 maakt, dan zijn de lijnen AB , AC en AD lang K_1 , K_2 en K meters. Daar $ABCD$ een parallelogram is, vindt men de volgende betrekkingen:

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2 K_1 K_2 \cos \alpha}.$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{K_2 \sin \alpha}{K} \quad \sin \varphi_2 = \frac{K_1 \sin \alpha}{K}.$$

Is α een rechte hoek, dan vindt men:

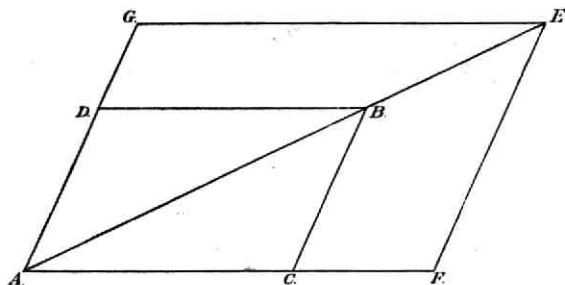
$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \quad \sin \varphi_1 = \frac{K_2}{K} \quad \sin \varphi_2 = \frac{K_1}{K}.$$

Werken op het punt P drie krachten K , K_1 , K_2 , dan kan men eerst de resultante R van K en K_1 door constructie vinden; en daarna op dezelfde wijze de resultante van R en K_2 . Op dezelfde wijze kan men verder gaan als er meer dan drie krachten op het punt P werken.

§ 14. Ontbinding van een kracht.

Laat een punt P een eenparig versnelde beweging hebben met de aanvangssnelheid nul en een versnelling van a eenheden, voorgesteld door de lijn AB (fig. 10). Zooals vroeger is aangetoond, kan men voor een willekeurig tijdsverloop de beweging van P ontbinden in twee eenparig versnelde bewegingen met aanvangssnelheden nul en versnel-

Fig. 10.



lingen a_1 en a_2 eenheden, voorgesteld door de lijnen AC en AD , als figuur $ACBD$ een parallelogram is.

Indien de massa van P m kilogram bedraagt, dan werkt langs de lijn AB een kracht $K = ma$ dyn. eenheden. Deze kracht worde voorgesteld door AE . Om aan P een versnelling te geven voorgesteld door de lijn AC , is er een kracht $K_1 = ma_1$ dyn. eenheden noodig, werkende langs AC ; deze kracht worde voorgesteld door AF .

Om aan P een versnelling te geven voorgesteld door de

lijn AD , is er een kracht $K_2 = ma_2$ dyn. eenheden noodig, werkende langs AD ; deze kracht worde voorgesteld door AG .

De krachten K_1 en K_2 , die aan het punt P de versnelingen voorgesteld door de lijnen AC en AD zouden geven, worden de *ontbindingskrachten* van K genoemd; men zegt dat men de kracht K in de krachten K_1 en K_2 heeft ontbonden.

De figuur $AFEG$ is een parallelogram. De driehoeken BAC en EAF toch zijn gelijkvormig, daar $\angle BAC = \angle EAF$ en $\frac{AE}{AF} = \frac{ma}{ma_1} = \frac{AB}{AC}$. Evenzoo de driehoeken BAD en EAG . Hieruit volgt dat EF evenwijdig is aan BC en EG aan BD ; daar nu $ACBD$ een parallelogram is, zoo is ook $AFEG$ een parallelogram.

Heeft het punt P oorspronkelijk niet de snelheid nul, dan blijft hetzelfde betoog geldig. De kracht toch die op het punt P werkt, wordt steeds beoordeeld naar de deviatieversnelling van P . Men kan aannemen dat de deviatie afgelegd wordt met een eenparig versnelde beweging, waarvan de aanvangssnelheid nul is. Daar deze eenparig versnelde beweging in twee eenparig versnelde bewegingen kan worden ontbonden, zoo kan ook de kracht op de bovengenoemde wijze in twee krachten worden ontbonden.

Men mag dus steeds een kracht K ontbinden in twee krachten K_1 en K_2 , indien de lijn, die de kracht K in richting en grootte voorstelt, de diagonaal is van het parallelogram beschreven op de lijnen, die de krachten K_1 en K_2 voorstellen, en wel de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende zijden zijn.

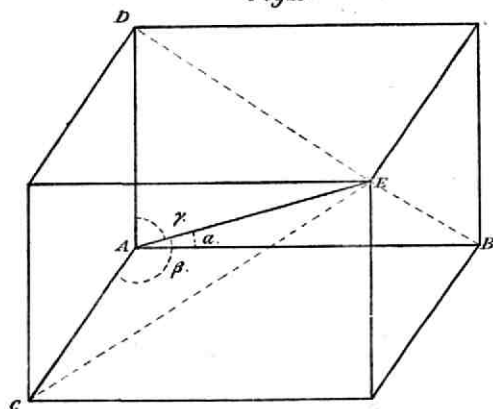
Uit hetgeen vroeger omtrent het samenstellen van krachten is bewezen, blijkt dat de kracht K , die ontbonden kan worden in de krachten K_1 en K_2 , ook de resultante zou zijn van K_1 en K_2 , indien de krachten K_1 en K_2 op het punt P werkten, tengevolge van den invloed door andere punten op P uitgeoefend. Voor de uitwerking op het punt P is het dus onverschillig of K_1 en K_2 de ontbindingskrachten, dan wel de composanten van de kracht K zijn.

§ 15. Samenstelling van drie of meer krachten.

Een kracht K kan steeds ontbonden worden in drie krachten werkende langs lijnen, die niet in hetzelfde vlak liggen; daartoe is slechts noodig, dat de lijn die de kracht K voorstelt, de diagonaal is van het parallelopipedum beschreven op de lijnen, die de ontbindingskrachten voorstellen, en wel de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende ribben zijn.

Indien de drie lijnen, waarlangs de ontbindingskrachten zullen werken, loodrecht op elkander staan, en indien men de hoeken kent, welke deze lijnen maken met de lijn, die de kracht K voorstelt, dan kan de grootte der ontbindingskrachten op eenvoudige wijze worden berekend.

Fig. 11.



Laat $AB C D E$ (fig. 11) een rechtehoekig parallelopipedum zijn; de lijn $A E$, die de kracht K voorstelt is K meters lang; de lijnen $A B$, $A C$ en $A D$, die de ontbindingskrachten K_1 , K_2 en K_3 voorstellen zijn K_1 , K_2 en K_3 meters lang. Maken deze lijnen met de diagonaal hoeken

α , β en γ , dan bestaan blijkens de figuur de betrekkingen:

$$K_1 = K \cos \alpha \quad K_2 = K \cos \beta \quad \text{en} \quad K_3 = K \cos \gamma.$$

Evenzoo kunnen drie krachten, werkende langs lijnen, die niet in hetzelfde vlak liggen, tot een resultante worden samengesteld. De lijn, die de resultante voorstelt, moet dan zijn de diagonaal van het parallelopipedum op de lijnen beschreven, die de composanten voorstellen, en wel de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende ribben zijn.

Indien de drie lijnen, waarlangs de composanten werken, loodrecht op elkander staan, dan kan de diagonaal van het

rechthoekig parallelipedum, beschreven op de lijnen die de composanten voorstellen, en dus de grootte en richting der resultante, op eenvoudige wijze worden berekend.

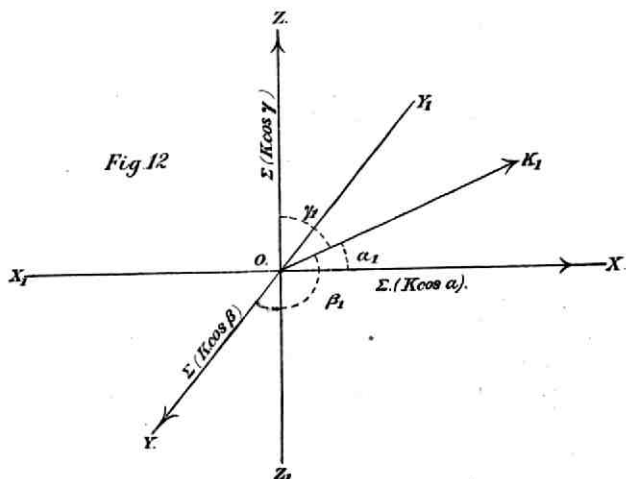
Laat (fig. 11) de lijnen AB , AC en AD de krachten K_1 , K_2 en K_3 , en de lijn AE de resultante K van K_1 , K_2 en K_3 voorstellen, dan zijn de lijnen AB , AC , AD en AE lang K_1 , K_2 , K_3 en K meters, en men vindt de betrekkingen:

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{K_1}{K}, \quad \cos \beta = \frac{K_2}{K}, \quad \cos \gamma = \frac{K_3}{K}.$$

Uit het bovenstaande wordt de methode afgeleid tot het berekenen van de grootte en de richting der resultante van een willekeurig aantal op een punt werkende krachten.

Laat O (fig. 12) de plaats zijn van een punt P waarop willekeurige krachten K_1 , K_2 , K_3 enz. werken. Men brengt



door O drie onderling loodrechte lijnen $X_1 X$, $Y_1 Y$, $Z_1 Z$, die coördinatenassen worden genoemd. De richtingen van O naar X , van O naar Y en van O naar Z worden positief, die van O naar X_1 , van O naar Y_1 en van O naar

Z_1 worden negatief genoemd. De lijnen, waar langs de krachten K_1 , K_2 , K_3 enz. werken, maken hoeken α_1 , α_2 , α_3 enz. met het positieve gedeelte der X as, β_1 , β_2 , β_3 enz. met het positieve gedeelte der Y as, en γ_1 , γ_2 , γ_3 enz. met het positieve gedeelte der Z as.

Elk der krachten K_1 , K_2 , K_3 enz. kan ontbonden worden langs de drie coördinatenassen. Bij deze wijze van ontbinden kent men aan de ontbindingskrachten een teeken toe. Men noemt een ontbindingskracht langs de lijn XX_1 positief, als zij werkt in de richting van O naar X , negatief als zij werkt in de richting van O naar X_1 . Hetzelfde geldt voor de ontbindingskrachten langs de lijnen YY_1 en ZZ_1 .

De ontbindingskrachten van K_1 zijn $K_1 \cos \alpha_1$, $K_1 \cos \beta_1$, $K_1 \cos \gamma_1$; evenzoo die van K_2 $K_2 \cos \alpha_2$, $K_2 \cos \beta_2$, $K_2 \cos \gamma_2$ enz. Alle ontbindingskrachten langs de X as werkende hebben een resultante K_x , die gelijk is aan de algebraïsche som der krachten. Dus:

$$K_x = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \text{enz.} = \sum (K \cos \alpha)$$

Evenzoo voor de Y as en de Z as:

$$K_y = K_1 \cos \beta_1 + K_2 \cos \beta_2 + \text{enz.} = \sum (K \cos \beta)$$

$$K_z = K_1 \cos \gamma_1 + K_2 \cos \gamma_2 + \text{enz.} = \sum (K \cos \gamma)$$

De krachten K_x , K_y , K_z kunnen worden samengesteld tot een resultante:

$$K_o = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}, \quad (13)$$

terwijl de lijn, waarlangs de resultante K_o werkt, met de coördinatenassen hoeken α_o , β_o , γ_o maakt, die gevonden kunnen worden uit de vergelijkingen:

$$\cos \alpha_o = \frac{K_x}{K} \quad \cos \beta_o = \frac{K_y}{K} \quad \cos \gamma_o = \frac{K_z}{K}.$$

Bovenstaande vergelijkingen gelden ook dan, wanneer een of meer der hoeken α , β en γ stomp zijn. Was bijv. α_1 een stompe hoek, dan zou de richting van de ontbindingskracht $K_1 \cos \alpha_1$ die van de X as zijn van O naar X_1 ; zij zou in de $\sum (K \cos \alpha)$ met het negatieve teeken moeten voorkomen; daar de cosinus van een stompen hoek negatief is, zoo zou dit werkelijk het geval zijn.

De hoeken α , β en γ die eenige lijn maakt met drie onderling loodrechte assen mogen niet willekeurig gegeven worden. Tus-

schen die hoeken bestaat de gemakkelijk aantewijzen betrekking:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

§ 16. Werking en terugwerking.

Zooals vroeger is opgemerkt, tracht men het ontstaan van krachten te verklaren uit de aanwezigheid van stoffelijke punten; daarbij is men er toe gedrongen geworden aan te nemen, dat als het punt P op het punt Q een invloed uitoefent, steeds ook Q een invloed uitoefent op P , en wel zoodanig, dat als tengevolge van dien invloed op Q een kracht werkt van zekere grootte en richting, ook op P een even groote kracht werkt in tegengestelde richting. Men zegt dat de werking gelijk is aan de terugwerking. Voorbeelden hiervan zijn de aantrekking die zon en aarde, de aantrekking of afstooting die twee magneetpolen, de drukking die twee lichamen op elkander uitoefenen.

§ 17. Arbeid door een kracht verricht.

Indien een punt P zich verplaatst heeft van A naar C ,

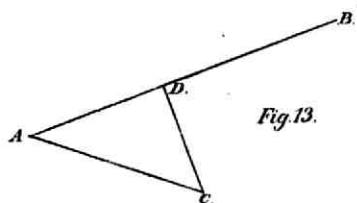


Fig. 13.

(fig. 13 en 14), terwijl er een kracht K op werkt langs de lijn AB , dan zegt men dat de kracht K arbeid heeft verricht. Deze arbeid wordt bepaald door de grootte der kracht en door de projectie AD van den afgelegden weg AC op de lijn AB . Is de richting van A naar D dezelfde als die der kracht, dan noemt men den verrichten arbeid positief; is de richting van A naar D tegen-

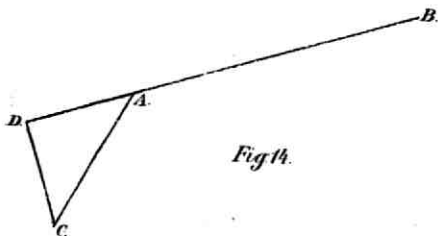


Fig. 14.

gesteld aan die der kracht, dan noemt men den verrichten arbeid negatief.

De projectie AD wordt de in de richting der kracht afgelegde weg genoemd. Men kent aan dezen weg een teeken toe, en wel een positief of een negatief teeken, al naarmate de weg is afgelegd in de richting der kracht of in tegengestelde richting.

Men stelt den arbeid evenredig met de grootte der kracht en met den weg in de richting der kracht afgelegd. Is dus de kracht K dyn. eenheden, en is de door P in de richting van $\overrightarrow{AD}$ afgelegde weg l meters, dan is het aantal arbeidseenheden van den arbeid:

$$A = f Kl.$$

Als eenheid van arbeid wordt aangenomen de arbeid, dien een kracht van één dyn. eenheid verricht, als haar aangrijpingspunt zich één meter in haar richting verplaatst. Een kracht van K dyn. eenheden, wier aangrijpingspunt zich l meters in haar richting verplaatst, verricht dan een arbeid van $A = Kl$ arbeidseenheden. Hierin kan l positief of negatief zijn; in het eerste geval is A positief, in het tweede negatief.

Deze arbeidseenheid wordt *dynamische arbeidseenheid* genoemd.

In de practijk wordt veel gebruik gemaakt van een andere arbeidseenheid, den *kilogrammeter*; dat is de arbeid, dien de statische krachtseenheid (het gewicht van een kilogram) verricht, als het aangrijpingspunt dier kracht zich één meter in haar richting verplaatst. De kilogrammeter is 9,812 maal zoo groot als de dynamische arbeidseenheid.

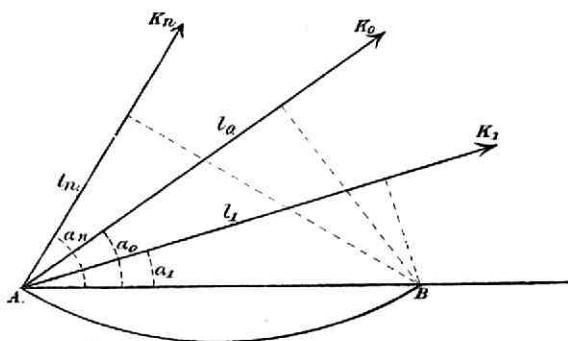
In het CGS-stelsel is de arbeidseenheid de arbeid, dien een kracht van één dynaam verricht, als haar aangrijpingspunt zich één centimeter in haar richting verplaatst. Daar een dynaam het honderdduizendste gedeelte van de dynamische krachtseenheid, en een centimeter het honderdste gedeelte van een meter is, zoo bevat de dynamische arbeidseenheid 10.000000, en de kilogrammeter 98.120000 arbeidseenheden CGS-stelsel.

Indien de kracht K veranderlijke grootte en richting heeft, bepaalt men de som der arbeiden, die bij eenzelfde verplaatsing van P verricht zou worden door een kracht K' , welke telkens na een zeer klein tijdsverloop dezelfde richting

en grootte heeft als K , en zoekt de grenswaarde van deze som, als dit tijdsverloop kleiner en kleiner wordt genomen.

Is de richting der kracht voortdurend loodrecht op de richting der beweging, dan is de door de kracht verrichte arbeid nul.

Fig 15.



Laten $K_1, K_2 \dots K_n$ (fig. 15) krachten zijn, die werken op een punt P dat zich verplaatst heeft van A naar B , en laat K_o de resultante dier krachten zijn, dan is langs elke willekeurige lijn:

$$K_o \cos \alpha_o = \Sigma (K \cos \alpha) = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \dots + K_n \cos \alpha_n.$$

Men kiese de lijn AX zoodanig, dat zij door A en B gaat, en late uit B loodlijnen neer op de lijnen, langs welke de krachten $K_1, K_2 \dots K_n$ en K_o werken. De cosinussen der hoeken α hebben de volgende waarden:

$$\cos \alpha_o = \frac{l_o}{AB} \quad \cos \alpha_1 = \frac{l_1}{AB} \quad \dots \quad \cos \alpha_n = \frac{l_n}{AB}.$$

Substitueert men deze waarden in bovenstaande vergelijking, en laat men den gemeenschappelijken factor $\frac{1}{AB}$ weg, dan verkrijgt men:

$$K_o l_o = \Sigma (Kl) = K_1 l_1 + K_2 l_2 + \dots + K_n l_n. \quad (14)$$

Nu zijn $l, l_1 \dots l_n$ de door het punt P in de richting der kracht afgelegde wegen; elk der producten $K, l, K_1 l_1 \dots K_n l_n$ is dus de grootte van den arbeid, door de daarin voorkomende kracht verricht, bij de verplaatsing van het punt P van A naar B .

Uit de vergelijking volgt dus:

De arbeid door de resultante verricht is gelijk aan de som der arbeiden verricht door de composanten.

In fig. 15 kunnen $K_1 \dots K_n$ ook zijn de ontbindingskrachten van K ; dus:

De arbeid door een kracht verricht is gelijk aan de som der arbeiden verricht door de ontbindingskrachten.

§ 18. Arbeidsvermogen.

Indien een stoffelijk punt door de omstandigheden, waarin het verkeert, in staat is een kracht negatieven arbeid op zich te laten verrichten, dan zegt men dat het arbeidsvermogen bezit.

De grootte van dit arbeidsvermogen wordt evenredig gesteld met het bedrag van den negatieven arbeid, dien het punt op zich kan laten verrichten.

Men zegt dat een punt P de eenheid van arbeidsvermogen bezit, als het de negatieve dynamische eenheid van arbeid op zich kan laten verrichten.

Deze eenheid van arbeidsvermogen wordt de *dynamische eenheid van arbeidsvermogen* genoemd.

In de praktijk wordt dikwijls gebruik gemaakt van de *statische eenheid van arbeidsvermogen*, dat is het arbeidsvermogen van een punt, dat den negatieven arbeid van een kilogrammeter op zich kan laten verrichten.

De dynamische eenheid van arbeidsvermogen bevat 10.000000, de statische 98.120000 eenheden van arbeidsvermogen CGS-stelsel.

Een punt P , dat een zekere snelheid bezit, heeft ten gevolge van die snelheid arbeidsvermogen.

Laat P zich in C bevinden en een snelheid c eenheden hebben in de richting CD . Als nu op P een kracht van K dyn. eenh. gaat werken langs de lijn CD van D naar C , dan verkrijgt P een rechtlijnige eenparig vertraagde be-

weging. Daar P zich dan beweegt in een richting tegengesteld aan die der kracht K , zoo laat het de kracht K negatieven arbeid verrichten; P bezit dus arbeidsvermogen. Om de grootte van dit arbeidsvermogen te bepalen, moet het bedrag gezocht worden van den negatieven arbeid, dien K kan verrichten.

Zij de massa van P m kilogram, dan is de vertraging $\frac{K}{m}$ eenh. De tijd, waarna de snelheid van P nul wordt, en K dus geen negatieven arbeid meer verricht, kan gevonden worden uit de vergelijking:

$$v = c - \frac{K}{m} t = 0 \quad \text{of} \quad t = \frac{mc}{K} \text{ seconden.}$$

In die t seconden heeft P een weg afgelegd van $ct - \frac{1}{2} \frac{K}{m} t^2$ of van $\frac{mc^2}{2K}$ meters. De kracht K heeft een arbeid verricht van $-\frac{mc^2}{2}$ dyn. eenheden; het bedrag van dezen arbeid is onafhankelijk van de grootte der kracht K .

Het arbeidsvermogen van een punt P , dat een massa van m kilogram en een snelheid van c eenh. heeft, bedraagt dus $\frac{mc^2}{2}$ dynamische eenheden van arbeidsvermogen.

Het arbeidsvermogen, dat P bezit tengevolge van zijn snelheid, noemt men zijn *arbeidsvermogen van beweging*.

Elk stoffelijk punt, waarop een kracht werkt, en dat zich in de richting dier kracht kan verplaatsen zonder dat de kracht ophoudt te werken, heeft dientengevolge arbeidsvermogen.

Laat het punt P zich in C bevinden en een snelheid c eenheden hebben in de richting CD ; laat er verder een kracht van K dyn. eenheden op werken, langs de lijn CD in de richting van C naar D . Als nu op P langs de lijn CD een kracht K_1 gaat werken, die even groot is als K in de richting van D naar C , dan zijn de krachten K en K_1 in evenwicht, en P krijgt een eenparige beweging langs CD in de richting van C naar D ; het beweegt zich dus in de richting tegengesteld aan die van K_1 , en de kracht K_1 verricht daarbij negatieven arbeid, zonder dat de snelheid van

P verandert. P bezit dus arbeidsvermogen, omdat er 'de kracht K op werkt. Het arbeidsvermogen, dat een punt bezit tengevolge van een kracht die er op werkt, noemt men zijn *arbeidsvermogen van plaats*.

Het bedrag van den negatieven arbeid, dien K_1 verrichten kan, hangt af van den weg, waarover P zich in de richting der kracht K kan bewegen, voordat die kracht K ophoudt op P te werken. Daar dit bedrag in vele gevallen niet kan worden bepaald, beschouwt men gewoonlijk slechts het bedrag van de verandering, die het arbeidsvermogen van plaats van een punt P ondergaat.

Indien op P een kracht werkt van K eenheden, en het zich l meters in de richting dier kracht heeft verplaatst, dan is het arbeidsvermogen van plaats van P met Kl eenheden verminderd, daar de negatieve arbeid, dien de kracht K_1 dan zou kunnen verrichten, met Kl eenheden afgenomen is. Werkt op P een kracht van K eenheden, en verplaatst het zich l meters in de richting tegengesteld aan die van K , dan is het arbeidsvermogen van plaats van P met Kl eenheden toegenomen, daar de negatieve arbeid, dien de kracht K_1 zou kunnen verrichten, met Kl eenheden is vermeerderd.

In het algemeen, als op een punt P een kracht K werkt, en het beweegt zich zoodanig dat K een positieven of negatieven arbeid van A eenh. verricht, dan zal het arbeidsvermogen van plaats van P met A eenh. verminderd of vermeerderd zijn.

Uit de hierboven bewezen vergelijking:

$$K_n l_n = K_1 l_1 + K_2 l_2 + \dots + K_n l_n$$

volgt, dat als op P werkt een kracht K_n , die de resultante is van de krachten $K_1, K_2, \dots, K_n$, bij een willekeurige verplaatsing van P de verandering in zijn arbeidsvermogen van plaats gelijk is aan de som van de veranderingen in arbeidsvermogen van plaats, die P bij diezelfde verplaatsing, tengevolge van de inwerking van elk der krachten K zou ondergaan.

En ook: als op P werkt een kracht K , dan is bij een willekeurige verplaatsing van P de verandering in zijn arbeidsvermogen van plaats gelijk aan de som van de veranderingen in arbeidsvermogen van plaats, die het bij

dezelfde verplaatsing zou ondergaan onder de inwerking van elk der ontbindingskrachten van K .

Een punt kan gelijktijdig arbeidsvermogen van plaats en arbeidsvermogen van beweging hebben.

Bevindt zich het punt P met de massa m kilogram in A (fig. 16), heeft het een snelheid van c eenheden in de richting AB , en werkt er op een kracht van K eenheden langs de lijn AB in de richting van A naar B , dan verliest het arbeidsvermogen van plaats, maar het wint arbeidsvermogen van beweging. Heeft P zich s meters verplaatst van A naar B , dan is zijn verlies aan arbeidsvermogen van plaats Ks eenheden. Daar P een eenparig versnelde beweging heeft met de versnelling $\frac{K}{m}$ eenheden, heeft het volgens vergelijking (3) in B de snelheid:

$$v = \sqrt{c^2 + 2 \frac{K}{m} s}.$$

In B heeft het een arbeidsvermogen van beweging van $\frac{mv^2}{2}$ eenheden. De vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging is derhalve:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = Ks \text{ eenheden.}$$

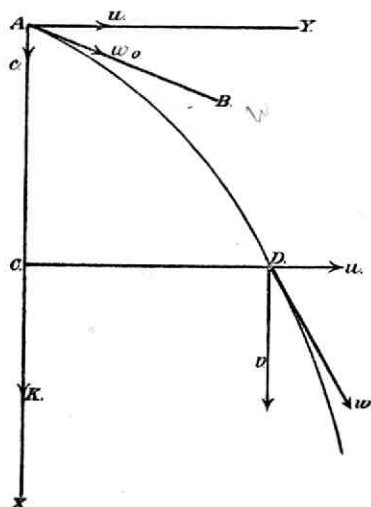
De vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging van P is gelijk aan de vermindering van zijn arbeidsvermogen van plaats.

Werkt op P een kracht in de richting tegengesteld aan die der snelheid van P , dan kan op dergelijke wijze aangetoond worden, dat de vermindering van het arbeidsvermogen van beweging gelijk is aan de vermeerdering van het arbeidsvermogen van plaats.

Laat het punt P met de massa van m kilogram zich in A (fig. 17) bevinden, laat het een snelheid w , eenheden in de richting AB hebben, en laat er een kracht op werken van K eenheden in de richting AX . Komt P na zekeren

tijd in D , en heeft het daar de snelheid w eenheden, dan is zijn arbeidsvermogen van beweging vermeerderd met $\frac{mw^2}{2} - \frac{mw_o^2}{2}$ eenheden; is de door P in de richting der

Fig17.



kracht afgelegde weg AC s meters lang, dan is zijn arbeidsvermogen van plaats verminderd met Ks eenheden.

Daar de deviatieversnelling van P standvastig is, kan volgens § 10 zijn beweging ontbonden worden in een eenparige beweging langs AY en een eenparig versnelde langs AX . Voor deze laatste geldt de hierboven gevonden vergelijking:

$$Ks = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} \quad (15)$$

waarin v en c de ontbindingssnelheden zijn van w en w_o in de richting

AX . De ontbindingssnelheden van w en w_o in de richting AY zijn even groot; laten zij de grootte u eenheden hebben;

nu is:
$$o = \frac{mu^2}{2} - \frac{mw_o^2}{2}. \quad (16)$$

Door optelling van de vergelijkingen (15) en (16) vindt men:

$$Ks = \frac{m(v^2 + u^2)}{2} - \frac{m(c^2 + u^2)}{2},$$

of daar $v^2 + u^2 = w^2$ en $c^2 + u^2 = w_o^2$,

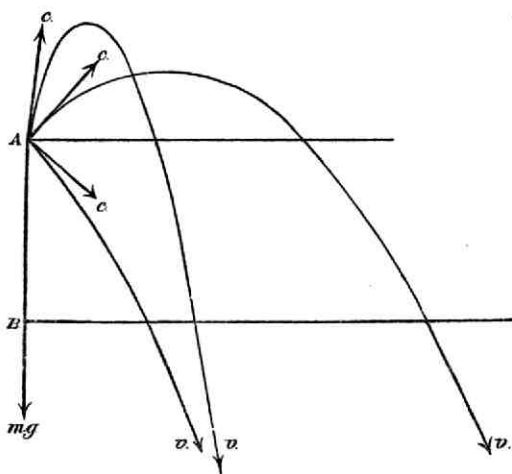
$$Ks = \frac{mw^2}{2} - \frac{mw_o^2}{2}.$$

Ook in dit geval is de vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging van P gelijk aan de vermindering van zijn arbeidsvermogen van plaats.

Met behulp van deze vergelijking kan de grootte der snelheid worden berekend, waarmede een voortgeworpen punt in eenig gegeven horizontaal vlak zal aankomen.

Heeft het punt P (fig. 18) in de richting der zwaarte-

Fig. 18.



kracht, dus in verticale richting naar beneden, een weg h meters afgelegd, dan heeft het een arbeidsvermogen van plaats mgh eenheden verloren. Is zijn aanvangssnelheid c eenheden en zijn eindsnelheid v eenheden, dan heeft het een arbeidsvermogen van beweging $\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$ eenheden gewonnen. Derhalve:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = mgh \text{ of } v = \sqrt{c^2 + 2gh}. \quad (17)$$

Hieruit blijkt, dat de grootte der eindsnelheid v alleen afhangt van de grootte der aanvangssnelheid c , en van den in verticale richting afgelegden weg, en onafhankelijk is van de richting der aanvangssnelheid.

Wordt bijv. door het werpen met de hand aan een steen (als stoffelijk punt beschouwd) een aanvangssnelheid van

15 eenheden medegedeeld, dan is de snelheid, waarmede hij in een 10 meters lager gelegen horizontaal vlak aankomt, steeds:

$$v = \sqrt{15^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 10} = 20,5 \text{ eenheden.}$$

In welke richting de steen ook moge voortgeworpen worden, naar boven, naar beneden of in horizontale richting, de eindsnelheid zal steeds dezelfde grootte hebben, want het gewonnen arbeidsvermogen van beweging zal steeds gelijk zijn aan het verloren arbeidsvermogen van plaats.

Stelt men in vergelijking (17) $h = 0$, dan wordt $v = c$, d. i. de snelheid, waarmede een schuin naar boven geworpen punt P in het horizontale vlak van het beginpunt der beweging terugkomt, is juist even groot als zijn aanvangssnelheid was. Daar het punt geen arbeidsvermogen van plaats heeft gewonnen of verloren, moet ook het arbeidsvermogen van beweging dezelfde grootte hebben behouden.

Ligt eindelijk het eindpunt der beweging hooger dan het beginpunt, dan moet de hoogte h als een negatieve grootte in rekening worden gebracht, en de vergelijking (17) verandert in:

$$v = \sqrt{c^2 - 2gh}.$$

Het punt P heeft arbeidsvermogen van plaats gewonnen, het moet dus arbeidsvermogen van beweging verloren hebben; de eindsnelheid moet derhalve kleiner zijn dan de aanvangssnelheid. Of overigens het punt P dit hooger gelegen vlak zal bereiken, en op welke plaats en na welken tijd, deze vragen zullen later worden behandeld.

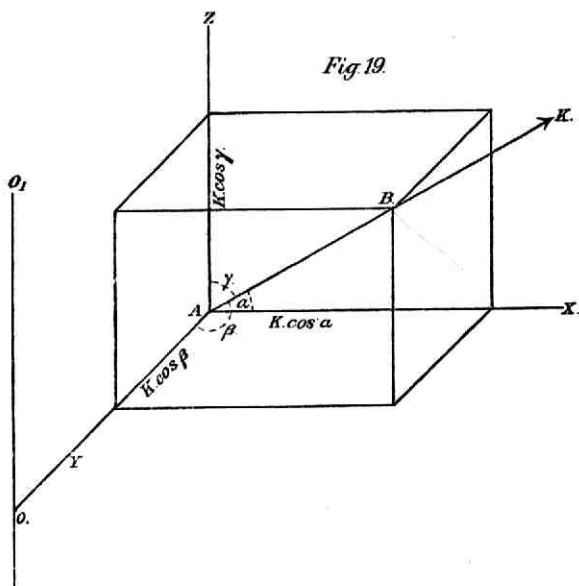
Heeft de kracht K veranderlijke grootte en richting, dan kan men zich den geheelen duur der beweging in zoo kleine deelen verdeeld denken, dat gedurende zulk een tijdsverloop de kracht als standvastig kan worden beschouwd. Gedurende zulk een tijdsverloop is dan de som van het arbeidsvermogen van beweging en het arbeidsvermogen van plaats van P standvastig; dus ook voor den geheelen duur der beweging.

Dit is een bijzonder geval van de wet van het behoud van arbeidsvermogen, welke in de natuurkunde zulk een groote rol speelt, en waarvan ook in de mechanica dikwijls gebruik gemaakt wordt.

§ 19. Moment van een kracht ten opzichte van een as.

Sommige beschouwingen in de mechanica worden veel eenvoudiger, door de invoering van het begrip het moment eener kracht K ten opzichte van een rechte lijn OO_1 . De groote belangrijkheid van dit begrip voor de mechanica zal intusschen eerst kunnen blijken bij de behandeling der vaste lichamen.

Zij A (fig. 19) de plaats waar zich het stoffelijk punt P bevindt, en K een kracht, die op P werkt langs de lijn AB . P wordt ook wel het aangrijpingspunt van de kracht K



genoemd. Men late uit A een loodlijn AO neer op de rechte lijn OO_1 , die voortaan de as zal genoemd worden. Men ontbinde de kracht K langs drie onderling loodrechte lijnen, en wel langs de loodlijn AY op de as OO_1 , langs de lijn AZ , die uit A evenwijdig aan de as OO_1 wordt getrokken, en langs de lijn AX , die loodrecht wordt ge-

trokken op het vlak gaande door het punt A en de as OO_1 . Noemt men de hoeken die AB maakt met de lijnen AX , AY en AZ , α , β en γ , dan zijn de ontbindingskrachten langs deze drie lijnen respectievelijk:

$$K \cos \alpha, \quad K \cos \beta, \quad K \cos \gamma.$$

Het moment van de kracht K wordt evenredig gesteld met de grootte der ontbindingskracht van K langs de lijn AX , die loodrecht staat op het vlak gaande door het aangrijppingspunt van K en de as OO_1 , en met de lengte der loodlijn uit het aangrijppingspunt van K op de as OO_1 neergelaten. Is M het aantal momentseenheden, en is de loodlijn AO r meters lang, dan heeft men:

$$M = f \cdot r K \cos \alpha.$$

Als momentseenheid wordt aangenomen het moment van een kracht K , welker ontbindingskracht langs een lijn loodrecht op het vlak gaande door haar aangrijppingspunt en de as, de grootte heeft van één dynamische eenheid, terwijl de loodlijn uit haar aangrijppingspunt op de as neergelaten één meter lang is.

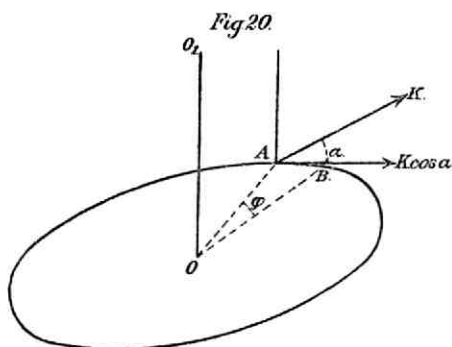
Is de grootte van de kracht K eenheden, maakt de lijn waarlangs zij werkt, een hoek α met de loodlijn op het vlak gaande door het aangrijppingspunt van K en de as OO_1 , en is de loodlijn uit het aangrijppingspunt op de as neergelaten r meters lang, dan is het aantal momentseenheden van het moment van K ten opzichte van de as OO_1 :

$$M = r K \cos \alpha.$$

Men kent aan het moment van een kracht K ten opzichte van een as OO_1 een teeken toe. Ziet men langs de as in de richting van O_1 naar O , en verkrijgt het punt P , indien het zich in de richting der kracht K gaat bewegen om de as OO_1 , een begin van draaiing in den zin van den horlogewijzer, dan noemt men het moment van K ten opzichte van de as OO_1 positief; verkrijgt P een begin van draaiing in den zin tegengesteld aan dien van den horlogewijzer, dan is het moment van K ten opzichte van de as OO_1 negatief.

De momentseenheid CGS-stelsel is het 10.000000^{ste} gedeelte van de in dit leerboek gebruikte.

Indien het punt P deel uitmaakte van een vast lichaam om de as OO_1 draaibaar (fig. 20), dan zou P een cirkel-



vormige beweging hebben. Om den arbeid te bepalen dien de kracht K verricht, indien de voerstraal van P een oneindig kleinen hoek doorloopt van φ radialen, kan men opmerken, dat de arbeid door K verricht gelijk is aan den arbeid verricht door de ontbindingskracht $K \cos \alpha$, daar

bij de beweging van P de richtingen der ontbindingskrachten $K \cos \beta$ en $K \cos \gamma$ voortdurend loodrecht zijn op de richting der beweging. Daar de ontbindingskracht $K \cos \alpha$ voortdurend in de richting der beweging van P werkt, heeft de door haar verrichte arbeid de grootte:

$$\mathfrak{A} = K \cos \alpha \times \text{boog } AB,$$

of, daar boog $AB = AO \cdot \varphi$ meters,

$$\mathfrak{A} = K \cos \alpha \cdot AO \cdot \varphi.$$

Het moment van K ten opzichte van de as OO_1 is:

$$M = K \cos \alpha \cdot AO,$$

dus:

$$\mathfrak{A} = M\varphi.$$

Men verkrijgt dus het aantal arbeidseenheden onder deze omstandigheden door de kracht K verricht, als men het aantal momentseenheden van het moment van K ten opzichte van de as OO_1 vermenigvuldigt met het aantal radialen van den oneindig kleinen hoek φ door den voerstraal van P doorlopen.

Momentenvergelijking.

Is K (fig. 19) de resultante van eenige krachten $K_1, K_2, \dots, K_n$ op P werkende, dan is volgens het vroeger verklaarde:

$$K \cos \alpha = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \dots + K_n \cos \alpha_n$$

of $K \cos \alpha \cdot AO = K_1 \cos \alpha_1 \cdot AO + K_2 \cos \alpha_2 \cdot AO + \dots + K_n \cos \alpha_n \cdot AO$,

dus: $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$.

Bovenstaande vergelijking geldt ook dan, als een of meer der hoeken α stomp zijn. Was bijv. α_2 een stompe hoek, dan zou het moment $K_2 \cos \alpha_2 \cdot AO$ van K_2 ten opzichte van de as OO_1 negatief zijn, en in de $\Sigma (K \cos \alpha \cdot AO)$ met het negatieve teeken moeten voorkomen. Daar de cosinus van een stompen hoek negatief is, zoo zou dit werkelijk het geval zijn.

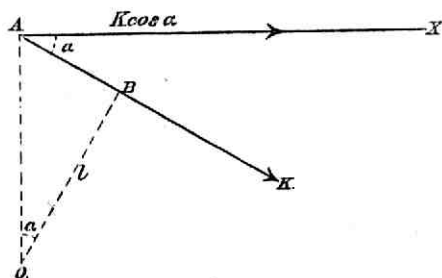
Het moment der resultante ten opzichte van een as is gelijk aan de som van de momenten der composanten ten opzichte van diezelfde as.

Deze vergelijking wordt de *momentenvergelijking* genoemd. In figuur 19 kan de kracht K ook in verschillende krachten $K_1, K_2 \dots K_n$ worden ontbonden. Het is gemakkelijk in te zien, dat ook dan de momentenvergelijking geldt, en dus dat het moment van een kracht ten opzichte van een as gelijk is aan de som van de momenten der ontbindingskrachten ten opzichte van diezelfde as.

§ 20. Moment van een kracht ten opzichte van een punt.

De uitdrukking voor het moment van een kracht ten opzichte van een as

Fig. 21.



wordt eenvoudiger, indien de lijn waarlangs de kracht werkt, gelegen is in het vlak, dat door het aangrijpingspunt der kracht loodrecht op de as wordt gebracht. Zij (fig. 21) O het snijpunt van de as en dit vlak, en AB de lijn waar-

langs de kracht K werkt op het punt P , dat zich in A bevindt.

Het moment van K ten opzichte van de as OO_1 is dan $M = K \cos \alpha \cdot AO$. Laat men uit het punt O een loodlijn OB neer op de lijn AB waarlangs de kracht K werkt, dan is blijkens de figuur de lengte l dier loodlijn:

$$l = OB = AO \cos \alpha.$$

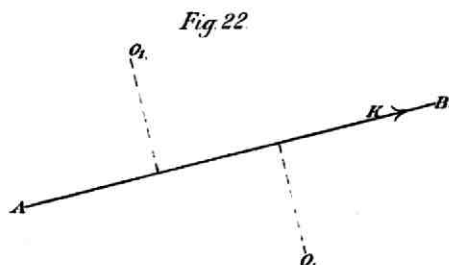
of:

$$M = Kl.$$

In dit geval spreekt men van het moment der kracht K ten opzichte van het punt O , en men verkrijgt het aantal momentseenheden door het aantal dyn. eenheden der kracht te vermenigvuldigen met het aantal meters lengte van de loodlijn, die uit O wordt neergelaten op de lijn waarlangs de kracht werkt.

Men kent aan het moment van een kracht ten opzichte van een punt een teeken toe.

De kracht K (fig. 22) werkende langs de lijn AB , zou



aan het punt P als het in rust was, een beweging geven langs AB . Deze beweging kan beschouwd worden als een begin van draaiing in den zin van den horlogewijzer om O , en als een begin van draaiing in

den zin tegengesteld aan dien van den horlogewijzer om O_1 .

In het eerste geval noemt men het moment der kracht ten opzichte van een punt positief, in het tweede geval negatief.

Het moment van een kracht ten opzichte van eenig punt, gelegen in de lijn waarlangs de kracht werkt, is nul.

Het boven gegeven bewijs voor de momentenvergelijking geldt ook voor dit geval, dus:

Het moment van de resultante ten opzichte van een punt O is gelijk aan de som der momenten van de componenten ten opzichte van ditzelfde punt; en

Het moment van een kracht ten opzichte van een punt O is gelijk aan de som der momenten van de ontbindingskrachten ten opzichte van hetzelfde punt.

In deze som moet elk moment met het daaraan toekomend teeken worden genomen.

Schrijft men de momentenvergelijking in den vorm:

$$K_o l_o = K_1 l_1 + K_2 l_2 + \dots + K_n l_n = \Sigma (Kl),$$

dan blijkt het, dat als men kent de grootten der krachten die op een punt P werken, en de afstanden, waarop zich eenig punt O bevindt van de lijnen waarlangs die krachten werken, men steeds kan bepalen het product van het aantal eenheden der resultante met het aantal meters, waarop het punt P verwijderd is van de lijn, waarlangs de resultante werkt. De momentenvergelijking kan dus toegepast worden om een der groottheden K_o of l_o te berekenen, als men de andere kent. Is $\Sigma (Kl)$ gelijk nul, dan moet of K_o of l_o gelijk nul zijn. Kan men derhalve een punt O vinden, ten opzichte waarvan de som der momenten van de op P werkende krachten gelijk nul is, dan gaat de lijn, waarlangs de resultante werkt, door O , en de richting der resultante is dan de richting van A naar O of van O naar A .

HOOFDSTUK IV.

Beweging van een vrij stoffelijk punt.

§ 21. Vrije val van een stoffelijk punt.

De waarneming heeft geleerd, dat als een stoffelijk punt in een luchtledige ruimte nabij de oppervlakte der aarde aan zich zelf wordt overgelaten, het zich gaat bewegen naar de aarde toe langs een rechte lijn. Op het punt werkt dus een kracht, die een standvastige richting heeft. Ook leert de waarneming, dat de beweging van het punt een eenparig versnelde is, en dat de versnelling dier beweging op alle plaatsen der aarde op dezelfde breedte gelegen, en voor alle punten even groot is. Op onze breedte bedraagt de versnelling 9,812 eenheden.

Indien aan het punt P een snelheid wordt gegeven in willekeurige richting, dan krijgt het een kromlijnige beweging; bepaalt men de deviatieversnelling van P , dan vindt

men dat deze van standvastige richting en grootte is; dat haar richting dezelfde is als die van een vallend punt met de aanvangssnelheid nul, en dat zij ook 9,812 eenheden groot is. Op elk punt, dat zich vrij beweegt in de nabijheid der aarde, werkt dus een kracht van standvastige richting en grootte. Is de massa van het punt m kilogram, dan is op onze breedte de kracht 9,812 m dyn. eenheden groot.

Later zal dit verschijnsel nader worden verklaard. De deviatieversnelling van een vrijvallend punt wordt de versnelling der zwaartekracht genoemd; de grootte dier versnelling zal voortaan door g worden voorgesteld.

De kracht, die aan het punt P de versnelling g geeft, heet de zwaartekracht op P werkende, of wel het gewicht van P .

Heeft P een massa van m kilogram, dan is het gewicht van P mg dyn. eenheden.

De richting van de zwaartekracht, dat is de richting waarin een punt met aanvangssnelheid nul zich beweegt, heet de verticale richting; een verticale lijn wordt kortweg een verticaal genoemd. Een vlak loodrecht op de verticaal van een plaats heet een horizontaal vlak voor die plaats, en elke lijn loodrecht op de verticaal een horizontale lijn.

§ 22. Parabolische beweging.

In § 10 is aangetoond, dat indien een punt standvastige deviatieversnelling heeft, zijn baan in het algemeen een kromme lijn is, die parabool genoemd wordt. Een punt onder de werking van een standvastige kracht heeft dus steeds een parabolische beweging. Valt de richting van de oorspronkelijke snelheid samen met die der deviatieversnelling, of is zij hieraan juist tegengesteld, dan gaat de parabool in een rechte lijn over.

De in die paragraaf gevonden vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x &= ct + \frac{1}{2} at^2 & w_x &= c + at \\ y &= vt & w_y &= v \end{aligned}$$

waarin:

$$c = u \cos \alpha \quad v = u \sin \alpha \quad \text{en} \quad a = \frac{K}{m}$$

kunnen aangewend worden om elke vraag te beantwoorden, die zou kunnen worden gedaan met betrekking tot de beweging van een punt, waarop een standvastige kracht werkt.

Door een paar voorbeelden zal aangetoond worden, hoe die vergelijkingen tot het oplossen van vraagstukken kunnen dienen.

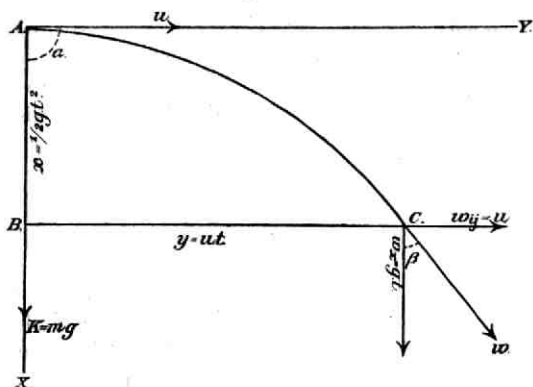
Indien een punt door het werpen met de hand een snelheid u eenheden verkrijgt, en daarna zijn beweging onder de werking der zwaartekracht voortzet, dan zijn de voorwaarden voor de parabolische beweging voorhanden. In bovenstaande vergelijkingen verandert dan K in mg en a in g .

Is de hoek dien de richting der aanvangssnelheid u maakt met de verticaal 90° , dan is:

$$c = u \cos 90^\circ = 0 \quad \text{en} \quad v = u \sin 90^\circ = u.$$

In dit geval nemen de vergelijkingen de in fig. 23 aangegeven eenvoudiger vormen aan.

Fig 23.



Zij de snelheid, die aan het punt wordt medegedeeld, $u = 20$ eenheden, en laat de tijd gevraagd worden, na welken het punt in een 10 meters lager gelegen horizontaal vlak aankomt, dan kan t opgelost worden uit de vergelijking:

$$x = \frac{1}{2} gt^2,$$

dus:
$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,81}} = 1,428 \text{ seconden.}$$

De weg BC , gedurende dien tijd in horizontale richting afgelegd, wordt verkregen uit de vergelijking:

$$BC = y = ut = 20 \cdot 1,428 = 28,6 \text{ meters.}$$

De snelheid der ontbindingsbeweging in verticale richting is:

$$w_x = gt = 9,81 \cdot 1,428 = 14,0 \text{ eenheden.}$$

De snelheid der ontbindingsbeweging in horizontale richting is even groot als de aanvangssnelheid:

$$w_y = u = 20 \text{ eenheden.}$$

De werkelijke snelheid die het punt in C heeft is:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{14^2 + 20^2} = 24,4 \text{ eenheden.}$$

De hoek β , dien de richting der eindsnelheid maakt met de verticaal, wordt gevonden uit de vergelijking:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_y}{w_x} = \frac{20}{14} = 1,43; \beta = 55^\circ.$$

Is de hoek α , dien de richting der aanvangssnelheid maakt met de verticaal, scherp, dan kan, zooals in § 10 is

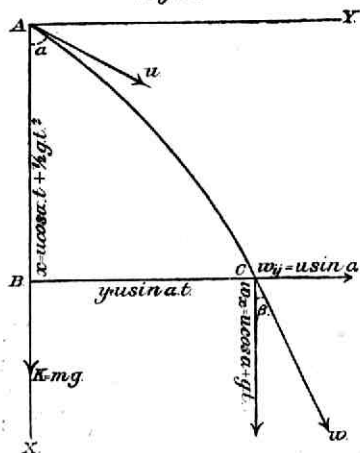
verklaard, de beweging beschouwd worden als de voortzetting van een parabolische beweging met horizontale aanvangssnelheid.

De snelheid der ontbindingsbeweging in verticale richting is nu $c = u \cos \alpha$, die der ontbindingsbeweging in horizontale richting $v = u \sin \alpha$. Na substitutie dezer waarden verkrijgen de algemeene vergelijkingen de in fig. 24 aangegeven vormen.

Heeft bijv. de aanvangssnelheid van de in fig. 24 voorgestelde beweging juist dezelfde grootte en richting

als de eindsnelheid van de in fig. 23 voorgestelde beweging, is dus:

Fig. 24.



$$u = 24,4 \text{ eenheden} \quad \alpha = 55^\circ$$

$$c = 24,4 \cos 55^\circ = 14 \text{ eenheden}$$

$$v = 24,4 \sin 55^\circ = 20 \text{ eenheden},$$

dan komt deze beweging volkomen overeen met die, welke in het vorige geval door het punt zou zijn volbracht, indien dit zijn beweging nog voorbij het eindpunt had voortgezet. De baan is dus een parabool, welker top, van het beginpunt *A* afgerekend, 10 meters hoger en 28,6 meters naar links ligt. De ontbondene in horizontale richting van de eindsnelheid is 20 eenheden; de weg in horizontale richting bijv. in de eerste 3 seconden afgelegd, zal dan zijn:

$$BC = y = 20 \cdot 3 = 60 \text{ meter.}$$

De ontbondene in verticale richting van de eindsnelheid is:

$$w_x = 14 + 9,81 \cdot 3 = 43,43 \text{ eenheden},$$

en de in verticale richting afgelegde weg:

$$AB = x = 14,4 + \frac{9,81 \cdot 3^2}{2} = 86,1 \text{ meter.}$$

De eindsnelheid is:

$$w = \sqrt{43,43^2 + 20^2} = 47,8 \text{ eenheden.}$$

Den hoek, dien de richting der eindsnelheid maakt met de verticaal, vindt men uit de vergelijking:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{20}{43,43} = 0,465 \quad \beta = 25^\circ.$$

De algemeene vergelijkingen blijven ook dan nog geldig, als de richting der aanvangssnelheid een stompen hoek maakt met de verticaal, waardoor $\cos \alpha$ en dus ook $c = u \cos \alpha$ negatieve waarden verkrijgen. De ontbindingsbeweging in verticale richting is aanvankelijk eenparig vertraagd, en haar richting tegengesteld aan die der zwaartekracht (fig. 25).

Wanneer de horizontale ontbondene der aanvangssnelheid even groot is als die in de beide vorige gevallen, dan kunnen deze laatste bewegingen beschouwd worden als de voortzettingen van de hier behandelde beweging.

Is bijv. $u = 24,4$ eenheden en $\alpha = 125^\circ$, dan is de snelheid der ontbindingsbeweging in horizontale richting:

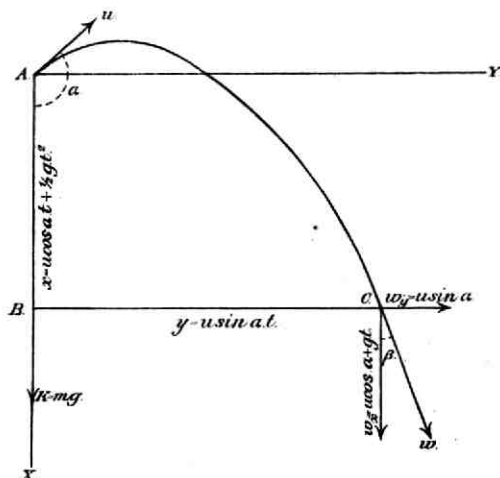
$$u = 24,4 \sin 125^\circ = 20 \text{ eenheden.}$$

De snelheid der ontbindingsbeweging in verticale richting is:

$$c = 24,4 \cos 125^\circ = -14 \text{ eenheden.}$$

De tijd, na welken het punt aankomt in een horizontaal

Fig. 25



vlak, dat 86,1 meters lager ligt dan het aanvangspunt A der beweging, wordt gevonden uit de vergelijking:

$$x = 86,1 = -14t + \frac{9,81t^2}{2},$$

waaruit:

$$t = 1,428 \pm \sqrt{19,6} \text{ seconden.}$$

Het dubbele teeken, waartoe de oplossing van deze vierkantsvergelijking voert, heeft de volgende beteekenis. In de parabool, waarvan de baan een deel uitmaakt, zijn twee plaatsen, die 86,1 meter lager liggen dan A . De eene plaats C zal werkelijk door het punt P worden ingenomen na een tijd, dien men verkrijgt door in bovenstaande vergelijking het positieve teeken te gebruiken. De andere plaats C_1 is van A af gerekend achterwaarts gelegen. Beschouwt men de hier behandelde beweging als de voortzetting van een reeds vroeger begonnen beweging, dan geeft de nega-

tieve waarde, die men voor t verkrijgt als men in bovenstaande vergelijking het negatieve teeken gebruikt, den tijd aan, vóór welken het punt zich in C_1 bevond. Hier moet dus het positieve teeken gebruikt worden, en dan verkrijgt men:

$$t = 1,428 + \sqrt{19,6} = 5,86 \text{ seconden.}$$

De weg BC gedurende dien tijd in horizontale richting afgelegd is:

$$BC = y = 20 \cdot 5,86 = 117,2 \text{ meters.}$$

De snelheid der ontbindingsbeweging in verticale richting is dan:

$$w_x = -14 + 9,81 \cdot 5,86 = 43,4 \text{ eenheden.}$$

Grootte en richting der eindsnelheid vindt men uit de vergelijkingen:

$$w = \sqrt{43,4^2 + 20^2} = 47,8 \text{ eenheden,}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{20}{43,4} = 0,46 \quad \beta = 25^\circ.$$

De waarden van w en β komen dus overeen met de in de vorige voorbeelden gevonden waarden.

De snelheid der ontbindingsbeweging in verticale richting heeft aanvankelijk een negatieve waarde, en is dus naar boven gericht. Den tijd t_1 , na welken zij nul wordt, en de richting der beweging dus horizontaal is, vindt men uit de vergelijking:

$$w_x = 0 = -14 + 9,81 t_1 \text{ of } t_1 = \frac{14}{9,81} = 1,427 \text{ seconden.}$$

De gedurende dien tijd in verticale en in horizontale richting afgelegde wegen, vindt men uit de vergelijkingen:

$$x = -14 \cdot 1,427 + \frac{9,81 \cdot 1,427^2}{2} = -10 \text{ meters}$$

$$y = 20 \cdot 1,427 = 28,54 \text{ meters.}$$

De in verticale richting afgelegde weg heeft eveneens aanvankelijk negatieve, later positieve waarden. De tijd t_2 , waarna deze weg nul wordt, waarna dus het voortgeworpen punt weder aankomt in het horizontale vlak van het aanvangspunt der beweging, wordt gevonden uit de vergelijkingen:

$$x = 0 = -14t_2 + \frac{9,81 t_2^2}{2} \text{ of } t_2 = \frac{28}{9,81} = 2,84 \text{ sec.}$$

De tijd t_2 is tweemaal zoo groot als t_1 , dus is ook de in den tijd t_2 in horizontale richting afgelegde weg tweemaal zoo groot als de in den tijd t_1 afgelegde, of:

$$y_2 = 57,1 \text{ meter.}$$

In de hier behandelde drie voorbeelden zijn met voordacht dezelfde waarden gekozen voor de standvastige snelheid w_y der ontbindingsbeweging in horizontale richting, om te doen zien, dat het in dit geval dezelfde parabool is, waarvan de banen deel uitmaken. De vorm van de parabool door een punt onder de werking der zwaartekracht doorloopen, hangt dus alleen af van de grootte der horizontale onthoudene van zijn aanvangssnelheid.

Ingeval slechts dat deel der baan onderzocht moet worden, dat boven het door het aanvangspunt der beweging gebrachte horizontale vlak gelegen is, dan worden de berekeningen eenigszins eenvoudiger, als men de richting tegengesteld aan die der zwaartekracht als positief aanneemt, en tevens in plaats van den hoek α den hoek ϵ , den zoogenaamden elevatiehoek, invoert, dat is de hoek, dien de richting der aanvangssnelheid met de horizontaal maakt (fig. 26). De algemeene vergelijkingen worden dan:

$$\begin{aligned} w_x &= u \sin \epsilon - gt & x &= ut \sin \epsilon - \frac{1}{2} gt^2 \\ w_y &= u \cos \epsilon & y &= ut \cos \epsilon. \end{aligned}$$

Het punt P heeft zijn grootste hoogte h , worpshoogte genoemd, bereikt, als het in den top der parabool is, als dus de snelheid van zijn ontbindingsbeweging in verticale richting nul is. Men vindt h door de waarde van t uit de vergelijking:

$$w_x = u \sin \epsilon - gt = 0 \text{ of } t = \frac{u \sin \epsilon}{g}$$

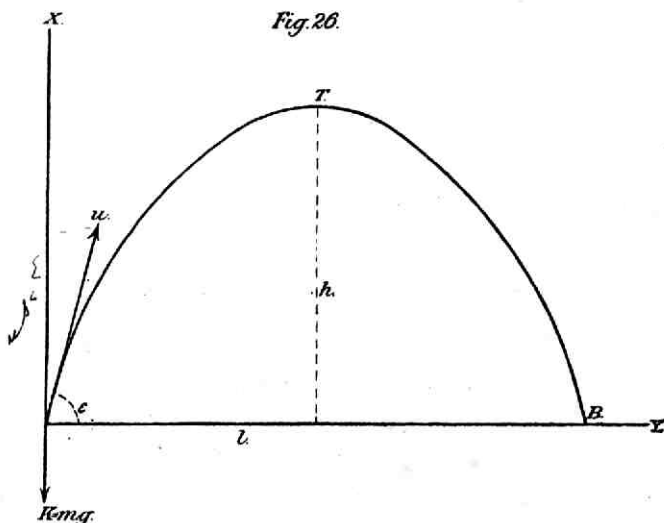
te substitueeren in de vergelijking voor x , waardoor men verkrijgt:

$$h = \frac{(u \sin \epsilon)^2}{2g}.$$

De worpsverheid $AB = l$ is de waarde, die y verkrijgt op het oogenblik dat :

$$x = u \sin \epsilon \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0.$$

Substitueert men de hieruit gevonden waarde van t in



de vergelijking voor y , dan vindt men voor de worpsverheid :

$$l = \frac{2u^2 \sin \epsilon \cos \epsilon}{g} = \frac{u^2}{g} \sin 2\epsilon,$$

waaruit men den invloed kan nagaan, dien de elevatiehoek ϵ heeft op de worpsverheid.

De factor $\sin 2\epsilon$ verkrijgt zijn grootste waarde 1, als $2\epsilon = 90^\circ$, dus $\epsilon = 45^\circ$ is.

Bij een bepaalde grootte u van de aanvangssnelheid is dus de grootste waarde der worpsverheid :

$$l = \frac{u^2}{g},$$

welke afstand tweemaal zoo groot is als de hoogte, die het

punt zou bereiken, indien het met de snelheid u in verticale richting naar boven werd geworpen. De sinussen van twee hoeken, waarvan de een evenveel grooter als de ander kleiner is dan 90° , hebben dezelfde waarden. Hieruit volgt, dat bij even groote aanvangssnelheden u , twee punten even groote worpsverheden zullen hebben, indien de elevatiehoek van het eene $\varepsilon + \Delta$, en die van het andere $\varepsilon - \Delta$ is. Wordt bijv. aan een punt P telkenmale een aanvangssnelheid $u = 20$ eenheden medegedeeld, dan bereikt het bij een elevatiehoek van 45° de grootste worpsverheid:

$$l = \frac{20^2}{9,81} = 40,8 \text{ meter.}$$

Bij een elevatiehoek $\varepsilon = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$, bedraagt de worpsverheid slechts:

$$l = \frac{20^2}{9,81} \sin 120^\circ = 35,3 \text{ meters,}$$

en dezelfde waarde verkrijgt zij bij een elevatiehoek:

$$\varepsilon = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ,$$

$$l = \frac{20^2}{9,81} \sin 30^\circ = 35,3 \text{ meters.}$$

De algemeene vergelijkingen voor de beweging van een voortgeworpen punt, zouden ook gelden voor de beweging van een uit een kanon geschoten kogel (de kogel als stoffelijk punt beschouwd), indien de beweging in het luchtledige geschiedde. De weerstand der lucht echter, die onder overigens gelijke omstandigheden zeer snel toeneemt met de snelheid van het punt, zal bij zoo groote snelheden als die van kanonskogels, een zeer grooten invloed op de beweging hebben. Bij de berekening van de kogelbaan uit de bovenstaande vergelijkingen, kan derhalve geen nauwkeurige overeenstemming gevonden worden tusschen de berekende en de waargenomen waarden.

§ 23. Eenparige cirkelvormige beweging.

In § 10 is gevonden, dat de deviatieversnelling van een punt P met eenparige cirkelvormige beweging, de stand-

vastige grootte $a = \frac{c^2}{r}$ eenheden heeft, indien de snelheid van P c eenheden is, en de straal van den doorloopen cirkel een lengte van r meters heeft; en dat haar richting op elk oogenblik is, die van den straal van P naar het middelpunt van den cirkel toe. Is de massa van P m kilogram, dan werkt op P een kracht K , die de standvastige grootte heeft:

$$K = \frac{mc^2}{r} \text{ dyn. eenheden,} \quad (17)$$

en waarvan de richting op ieder oogenblik samenvalt met die van den straal naar het middelpunt toe. Om deze reden heeft men aan die kracht den naam van *centripetaalkracht* gegeven. Zulk een eenparige cirkelvormige beweging kan bijv. op de volgende wijze worden voortgebracht.

Het eene einde van een uitgestreken draad wordt bevestigd aan een vast punt O , het andere aan een bol (als stoffelijk punt beschouwd). Het gewicht van den bol wordt buiten rekening gelaten of opgeheven gedacht. Wordt nu aan den bol een snelheid c medegedeeld in een richting loodrecht op die van den draad, dan doorloopt de bol een cirkelomtrek, en wel met een eenparige beweging.

Is de massa van den bol $m = 2$ kilogram, is de daaraan medegedeelde snelheid $c = 10$ eenheden, en is de draad $r = 4$ meters lang, dan is de op den bol werkende kracht voortdurend naar het middelpunt toe gericht en heeft de

grootte:

$$K = \frac{2 \cdot 10^2}{4} = 50 \text{ dyn. eenheden.}$$

Deze kracht wordt door den draad op den bol uitgeoefend.

Volgens het in § 16 verklaarde beginsel van werking en terugwerking wordt door den bol op den draad een even groote kracht in tegengestelde richting uitgeoefend. De draad wordt dus door de kracht K gespannen.

Wil men K in statische krachtseenheden uitdrukken, dan moet de gevonden waarde van K door 9,81 gedeeld worden, en dus:

$$K = \frac{50}{9,81} = 5,1 \text{ statische eenheden.}$$

Bij de beweging wordt de draad dus even sterk ge-

spannen, alsof hij aan een vast punt was opgehangen, en aan het benedeneinde een massa van 5,1 kilogram droeg.

Snijdt men gedurende de beweging den draad door, dan houdt de kracht op te werken, en de bol zal een rechtlijnige eenparige beweging verkrijgen in de richting van de raaklijn aan dat punt van den cirkel, waar de bol was op het oogenblik dat de kracht ophield te werken.

Door invoering van de hoeksnelheid van P kan men aan de uitdrukking voor de centripetaalkracht een anderen vorm geven.

Is de hoeksnelheid van P ω eenheden, dan bestaat er volgens § 3 tusschen de getallen, die het aantal eenheden van de hoeksnelheid, het aantal eenheden van de lijnsnelheid en het aantal meters van den straal uitdrukken, de betrekking:

$$c = r \omega.$$

Deze waarde in de vergelijking voor K substitueerende, vindt men:

$$K = mr\omega^2.$$

De maan beschrijft bij haar beweging om de aarde een baan, die bij benadering kan worden beschouwd als een cirkel, welks middelpunt met het middelpunt der aarde samenvalt. De straal van dien cirkel is ongeveer 60 aardstralen, dus:

$$r = 60 \cdot 6370000 = 382000000 \text{ meters.}$$

De omloopstijd bedraagt $27^d 7^u 43^m 11^s$ of in een rond getal 2360000 seconden; de hoeksnelheid der maan is dan:

$$\omega = \frac{2\pi}{2360000} \text{ eenheden.}$$

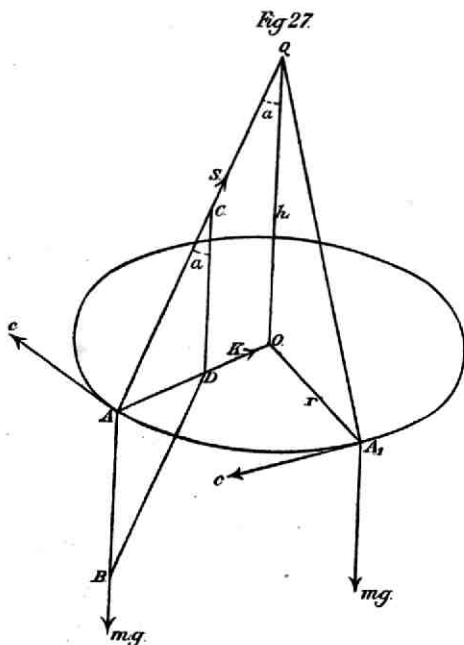
Als de massa der maan m kilogram is, dan heeft derhalve de kracht, die op de maan moet werken om haar de waargenomen beweging te doen volbrengen, de grootte:

$$K = mr\omega^2 = m \cdot \frac{382000000 \cdot 4 \cdot 3,14^2}{2360000^2} = 0,0027 m \text{ eenh.}$$

§ 24. Conische slinger.

Om een stoffelijk punt P met de massa m kilogram, dat een aanvangssnelheid c eenheden in horizontale richting heeft, en waarop behalve zijn gewicht mg nog een kracht S

werkt, een horizontalen cirkelomtrek met den straal r meters eenparig te doen doorloopen, moet de kracht S zoodanig gekozen worden, dat op ieder oogenblik de resultante K van de beide krachten mg en S de grootte $K = \frac{mc^2}{r}$, en de rich-



ting van P naar het middelpunt O toe heeft. Is P op eenig oogenblik in A (fig. 27); wordt de kracht mg door de lijn AB , en de kracht K door de lijn AD voorgesteld, dan beschrijve men een parallelogram, waarvan AD de diagonaal, en AB de eene zijde is. De andere zijde stelt dan in grootte en richting voor de kracht S , die op dat oogenblik op P moet werken. Bevindt P zich ergens anders op den cirkel-

omtrek, bijv. in A_1 , dan moet de richting en de grootte van de kracht S door dezelfde constructie worden bepaald.

De hoek α , dien de lijn waarlangs de kracht S werkt maakt met de verticaal, kan bepaald worden uit de vergelijking:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{K}{mg},$$

of, als men daarin de waarde $K = \frac{mc^2}{r}$ substitueert:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2}{rg}. \quad (18)$$

Vervangt men hierin $\operatorname{tg} \alpha$ door $\frac{r}{h}$, en lost men daarna h uit de vergelijking op, dan vindt men voor de hoogte van het punt Q , het snijpunt van AC en de as van den cirkel, boven het cirkelvlak:

$$h = g \frac{r^2}{c^2} \text{ meters.} \quad (19)$$

De standvastige grootte van de kracht S zou men kunnen vinden uit de vergelijking:

$$S = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mc^2}{r}\right)^2} = m \sqrt{g^2 + \frac{c^4}{r^2}} \text{ eenheden.}$$

Den tijd t , waarin het stoffelijk punt den cirkelomtrek doorloopt, vindt men als men dien omtrek $2 \pi r$ deelt door den in een seconde afgelegden weg c ; dus:

$$t = 2 \pi \frac{r}{c} \text{ seconden,}$$

of voor $\frac{r}{c}$ zijn waarde $\sqrt{\frac{h}{g}}$ uit vergelijking (19) substitu-eerende:

$$t = 2 \pi \sqrt{\frac{h}{g}} \text{ seconden.} \quad (20)$$

Zulk een eenparige beweging langs den omtrek van een horizontalen cirkel kan bijv. op de volgende wijze tot stand komen. Het eene einde van een uitgestrekten draad is aan een vast punt Q bevestigd; aan het andere einde is een bol (als stoffelijk punt beschouwd) aangebracht. Brengt men dezen draad in den stand QA (fig. 27), en deelt men daarna den bol een snelheid c mede, in een richting loodrecht op het verticale vlak QAO , en met de uit verge-

lijking (19) te bepalen grootte $c = r \sqrt{\frac{g}{h}}$ eenheden, dan zal de bol een eenparige beweging verkrijgen langs den cirkelomtrek met het middelpunt O . De draad beschrijft daarbij een kegeloppervlak, welks top in Q ligt; daarom wordt een zoodanige inrichting een conische slinger genoemd.

Is bijv. $h = 5$ meter en $r = 2$ meter, dan moet de snelheid c de grootte hebben:

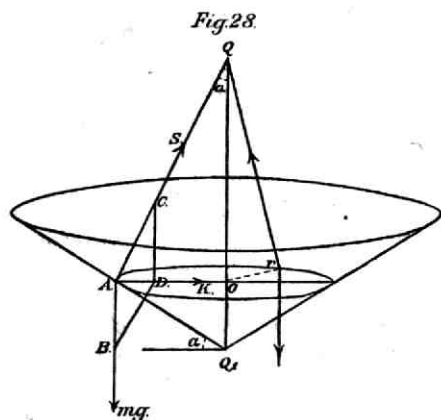
$$c = 2 \sqrt{\frac{9,81}{5}} = 2,8 \text{ eenheden.}$$

Uit vergelijking (20) blijkt dat de omloopstijd van zulk een conischen slinger alleen afhangt van de hoogte Q boven het horizontale vlak van de baan. Alle conische slingers dus, waarbij die hoogte, evenals hier, 5 meter bedraagt, hebben denzelfden omloopstijd, namelijk:

$$t = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{5}{9,81}} = 4,48 \text{ seconden.}$$

De kracht S , die bij de boven beschreven inrichting door den draad op het stoffelijk punt wordt uitgeoefend, kan ook op andere wijze worden aangebracht. Stelt men zich voor dat de draad QA is doorgesneden, en dat de bol in plaats daarvan in alle punten der baan wordt ondersteund door een vast vlak, dat overal loodrecht staat op de richting van den draad, dan zal de weerstand van dit vaste vlak dezelfde

uitwerking hebben als vroeger de spanning van den draad. Dit vaste vlak moet den vorm hebben van een kegeloppervlak, welks top in Q_1 (fig. 28) ligt, en welks beschrijvende lijnen, overal loodrecht staande op de beschrijvende lijnen van het door den draad beschreven kegeloppervlak, met den horizon een hoek α maken, even



groot als de hoek, dien de draad maakt met de verticaal. Men kan derhalve van vergelijking (18) gebruik maken om bijv. bij een kromming van een spoorweg den hoek α te

berekenen, dien de dwarsliggers met den horizon moeten maken, opdat de vellingen van de raderen der wagens alleen een normalen en geen zijdelingschen druk uitoefenen tegen de flensen der rails.

Zij bijv. de straal van de kromming $r = 500$ meters, en de snelheid, waarmede de trein de kromming moet doorloopen, $c = 15$ eenheden, dan kan de hellingshoek der dwarsliggers worden bepaald uit de vergelijking:

$$\text{tg } \alpha = \frac{225}{500 \cdot 9,81} = 0,04587 \text{ of } \alpha = 2^\circ 38'.$$

Is b de afstand der rails van midden tot midden gerekend, dan is $b \sin \alpha$ de hoogte van de buitenste rail boven de binnenste.

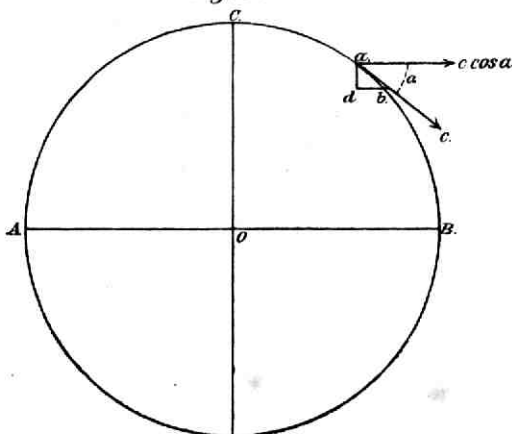
§ 25. Enkelvoudige trillende beweging.

Wanneer een stoffelijk punt zich zoodanig beweegt, dat het telkens na een zeker tijdsverloop in dezelfde plaats van zijn baan terugkeert en dan denzelfden bewegingstoestand heeft, dan zegt men dat het punt een slingerbeweging volbrengt. Zoo heeft een punt met eenparige cirkelvormige beweging een slingerbeweging; den tijd, waarin het punt den geheelen omtrek doorloopt, noemt men zijn slingertijd. Zijn de banen, die het punt telkens doorloopt, zeer klein, dan spreekt men gewoonlijk van een trillende beweging en van den trillingstijd.

Wanneer een punt Q een eenparige cirkelvormige beweging heeft met de snelheid c eenheden, dan kan zijn beweging voor een willekeurig tijdsverloop ontbonden worden in twee bewegingen langs twee onderling loodrechte middel-lijnen. Laat de ontbindingsbeweging langs een dier middel-lijnen, bijv. langs de horizontale middellijn AB (fig. 29) een zoodanige zijn, dat een ander punt P , die beweging volbrengende, op ieder oogenblik een snelheid heeft gelijk aan de horizontale ontbindingssnelheid van Q . Men kan aantoonen, dat dan op elk oogenblik de plaats van P is de projectie op de lijn AB van de plaats welke Q inneemt. Neemt men toch het tijdsverloop ϑ , waarin Q den boog ab doorloopt, klein genoeg, dan kan de horizontale ontbindings-

beweging van Q gedurende dat tijdsverloop worden beschouwd als een eenparige beweging met de snelheid $c \cos \alpha$. Daar $c \cdot \vartheta = ab$ is, is de door P in dat tijdsverloop afgelegde weg $c \cos \alpha \cdot \vartheta = ab \cdot \cos \alpha = db$. Gedurende elk

Fig. 29.



klein tijdsverloop ϑ is de door P afgelegde weg even lang als de horizontale projectie van den door Q afgelegden weg; dit is dus ook zoo voor een willekeurig tijdsverloop. Is dus op den tijd nul het punt Q in C en het punt P in O , dan zal na elk willekeurig tijdsverloop de plaats van P zijn de projectie op AB van de plaats, welke Q inneemt.

Hieruit volgt tevens, dat op ieder oogenblik:

de deviatieversnelling van P naar het punt O toe gericht, en in grootte gelijk is aan de deviatieversnelling der horizontale ontbindingsbeweging van Q , en dus:

de op P werkende kracht naar het punt O toe gericht, en in grootte gelijk is aan de horizontale ontbondene van de op Q werkende kracht.

Het punt P heeft dan een zoogenaamde enkelvoudige trillende beweging, welker beschouwing van groot belang is voor de leer van het geluid en van het licht. P gaat dus langs de lijn AB heen en weer; den afstand van de uiterste standen A en B noemt men de amplitude van P .

Onder den trillingstijd T verstaat men den tijd, waarin P den afstand AB heen en terug doorloopt. De trillingstijd van P is dus evengroot als die van Q , en bedraagt:

$$T = \frac{2 \pi r}{c} \text{ seconden.}$$

In deze vergelijking is c het aantal eenheden van de lijnsnelheid van Q , en dus ook van de snelheid, die P in O heeft.

Als men de uit vergelijking (17) voortvloeiende waarde:

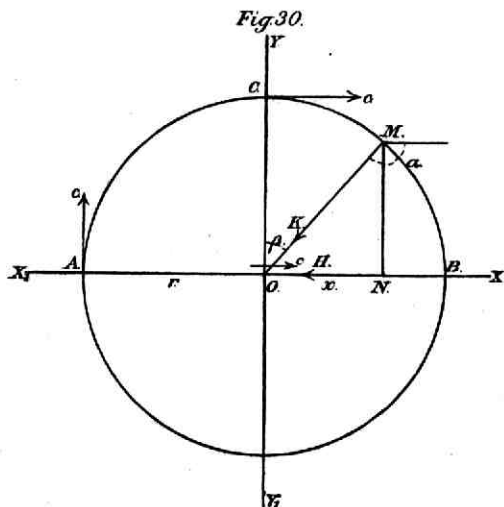
$$\frac{m c}{2}$$

$$c = \sqrt{\frac{K r}{m}}$$

in bovenstaande vergelijking substitueert, dan verandert deze laatste in:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{m r}{K}} \text{ seconden.} \quad (21)$$

Bevindt zich P in N (fig. 30) op den afstand x van



het punt O , en is de kracht, die alsdan op P werkt, H eenheden groot, dan is:

$$H = K \cos \alpha = -\frac{K}{r} x \text{ eenheden.} \quad (22)$$

De kracht is dus evenredig met den afstand van P tot O ; zij heeft haar grootste waarde $\mp K$, voor $x = \pm r$; zij is negatief of positief, d. w. z. zij werkt naar links of naar rechts, naarmate het punt P zich rechts of links van het punt O bevindt.

Hieruit volgt, dat het punt P een enkelvoudige trillende beweging zal verkrijgen, wanneer aan de volgende voorwaarden is voldaan:

- 1° De op het punt P werkende kracht H moet voortdurend gericht zijn naar eenzelfde punt O .
- 2° De grootte der kracht H moet evenredig zijn met den afstand van P tot O . *De kracht is evenredig met den afstand*
- 3° Indien P een aanvangssnelheid heeft, dan moet deze de richting hebben van de lijn, die door P en O gaat.

Stelt men het quotient $\frac{K}{r}$ door A voor, dan nemen de vergelijkingen (22) en (21) den volgende vorm aan:

$$H = -Ax \text{ eenheden,} \quad (23)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{A}} \text{ seconden.} \quad (24)$$

A is de grootte van de op P werkende kracht, als P op een meter afstand van O verwijderd is. Het quotient $\frac{A}{m}$ is derhalve de devatieversnelling, die de kracht H aan het punt P geeft, als het zich op een meter afstand van O bevindt. Noemt men deze devatieversnelling q , dan is:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{q}} \text{ seconden.} \quad (25)$$

Het aantal seconden van den trillingstijd van een punt P met enkelvoudige trillende beweging is dus gelijk aan het getal 2π , gedeeld door den vierkantswortel uit het aantal eenheden der devatieversnelling die P heeft, als het op den afstand van één meter van O is verwijderd.

De trillingstijd is derhalve onafhankelijk van de amplitude van P .

Neemt men aan dat het punt P zich op den tijd nul in O bevindt, en t seconden later aankomt in N , x meters van O verwijderd, dan is $x = r \sin \beta$. Het punt Q doorloopt

den boog CM in denzelfden tijd t , waarin het punt P den weg ON aflegt. Is de trillingstijd van Q T seconden, dan heeft men: $\frac{t}{T} = \frac{\text{boog } CM}{2\pi r} = \frac{\beta r}{2\pi r}$, of $\beta = 2\pi \frac{t}{T}$, waaruit volgt:

$$x = r \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

In § 10 is deze bewegingsvergelijking behandeld. Voor de deviatieversnelling van P op den tijd t , waarop P den weg x meters heeft afgelegd, werd toen gevonden $a = -\frac{4\pi^2}{T^2} x$. De alsdan op P werkende kracht H heeft dus de grootte:

$$H = -\frac{4\pi^2 m}{T^2} x,$$

welke waarde van H met de uit de hierboven gevondene vergelijkingen (23) en (24) voortvloeiende geheel overeenstemt.

§ 26. Planetenbeweging.

Uit de waarnemingen van TYCHO BRAHÉ en die van hemzelfen leidde KEPLER de drie naar hem genoemde wetten af, omtrent de beweging van de planeten om de zon; zij luiden:

1^e wet. Elke planeet beweegt zich langs den omtrek van een ellips, waarvan het eene brandpunt zich in het middelpunt der zon bevindt.

2^e wet. Bij iedere planeet zijn de perken (sectoren) door den voerstraal doorloopen, evenredig met de daartoe benoodigde tijden.

3^e wet. De kwadraten der omloopstijden van twee planeten verhouden zich als de derde machten van haar gemiddelde afstanden tot de zon.

Ter verklaring van deze wetten van KEPLER stelde NEWTON de volgende hypothese op:

Twee willekeurige punten P en P_1 trekken elkander aan met een kracht, waarvan de grootte evenredig is met de massa's van P en P_1 , en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun afstand.

Zijn de massa's van de punten P en P_1 m en m_1 , en is

hun afstand r meters, dan trekken zij elkander aan met een kracht van K dyn. eenheden, als:

$$K = f \frac{mm_1}{r^2}. \quad (26)$$

Stelt men in deze vergelijking m , m_1 en r gelijk aan 1, dan wordt $K = f$. De standvastige grootte f geeft dus aan het aantal dynamische eenheden van de kracht, waarmee twee massa's elk groot één kilogram, elkander aantrekken, wanneer zij op één meter afstand van elkander verwijderd zijn.

De algemeene verklaring van de wetten van KEPLER uit de hypothese van NEWTON kan slechts met behulp van hoogere wiskunde worden gegeven.

In de veronderstelling, dat de planeten cirkelomtrekken doorloopen, kunnen genoemde wetten op eenvoudige wijze uit de hypothese van NEWTON worden afgeleid.

Zij M kilogram de massa der zon, m kilogram de massa van een planeet, en zij r meters de afstand van het middelpunt der planeet tot het middelpunt der zon, dan is de aantrekkingskracht, die de zon op de planeet uitoefent:

$$K = f \frac{Mm}{r^2}.$$

Daar bij de veronderstelde beweging r standvastige grootte heeft, is dus ook de grootte van de op de planeet werkende kracht standvastig; zij is bovendien steeds naar hetzelfde punt, het middelpunt van de zon gericht. De planeet heeft dus een *eenparige* cirkelvormige beweging, en daarmee zijn voor het geval van cirkelvormige planetenbeweging de eerste twee wetten van KEPLER verklaard.

De kracht K heeft de grootte der centripetaalkracht, of:

$$K = f \frac{Mm}{r^2} = \frac{mc^2}{r} \text{ dyn. eenheden,}$$

als c eenheden de snelheid is van de planeet bij haar beweging om de zon.

Is T seconden de omlooptijd van de planeet, dan is:

$$c = \frac{2\pi r}{T} \text{ en } f \frac{Mm}{r^2} = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}.$$

Is van een andere planeet de massa m_1 , de afstand tot de zon r_1 , en de omloopstijd T_1 , dan is:

$$f \frac{Mm_1}{r_1^2} = \frac{4\pi^2 r_1 m_1}{T_1^2}.$$

Deelt men deze twee vergelijkingen op elkander, dan vindt men:

$$\frac{r^3}{r_1^3} = \frac{T^2}{T_1^2},$$

waarmede de 3^{de} wet van KEPLER is verklaard.

§ 27. Aantrekkingskracht.

Uit de hypothese van NEWTON kunnen ook de verschijnselen verklaard worden, welke zich voordoen bij de beweging van een stoffelijk punt nabij de oppervlakte van de aarde.

Elk punt Q van de aarde oefent op een stoffelijk punt P een kracht uit van $f \frac{mm_1}{r^2}$ eenheden, als de massa van P m kilogram, die van Q m_1 kilogram, en de afstand van P tot Q r meters is. Om de kracht te vinden, die de geheele aarde op P uitoefent, zou men de resultante moeten zoeken van de krachten, waarmede alle punten der aarde op P werken. Deze resultante kan niet berekend worden, daar men niet de massa van elk punt der aarde kent. Omdat echter alle composanten evenredig zijn met de massa van P , zoo zal ook de resultante evenredig zijn met de massa van P , en bijv. gelijk zijn aan mp eenheden, waarin p dus is de kracht, die de aarde uitoefent op de massa van één kilogram. Men kan bewijzen, dat indien de aarde een homogeeene bol was, of bestond uit homogeeene concentrische lagen, de kracht, die de aarde op een punt P daarbuiten zou uitoefenen, dezelfde grootte en richting zou hebben, alsof de geheele massa der aarde in haar middelpunt geconcentreerd was.

Nu is de aarde wel niet een bol bestaande uit homogeeene concentrische lagen, maar bij benadering mag zij daarvoor gehouden worden. In deze onderstelling is de kracht, die de aarde uitoefent op een punt P , overal gericht naar het

middelpunt toe, en is de waarde van p overal aan de oppervlakte der aarde dezelfde.

Uit de hypothese van NEWTON blijkt derhalve, dat de aarde op een punt P met de massa m kilogram een kracht mp uitoefent, die van standvastige grootte is, zoolang de afstand van P tot de oppervlakte der aarde slechts een kleine verandering ondergaat in vergelijking met zijn afstand tot het middelpunt der aarde. Elk punt, welke zijn massa ook moge zijn, krijgt daardoor een deviatieversnelling van p eenheden. De omstandigheid dat de aarde geen bol is, maar aan de polen is afgeplat, maakt dat deze deviatieversnelling niet dezelfde is op alle plaatsen der aarde.

Men noemt de kracht waarmee de aarde op een punt P werkt, de *aantrekkingskracht* door de aarde op P uitgeoefend; en de deviatieversnelling, die P onder de werking der aantrekkingskracht zou krijgen, de versnelling der aantrekkingskracht voor de plaats waar P zich bevindt. Deze bedraagt aan den aequator ongeveer 9,814 eenheden.

Om den invloed na te gaan, dien de hoogte van P boven de oppervlakte der aarde heeft op de versnelling der aantrekkingskracht, kan men op de volgende wijze te werk gaan. Zij de massa der aarde A kilogram, die van P m kilogram; zij p eenheden de versnelling der aantrekkingskracht voor een plaats aan de oppervlakte der aarde, dus op een afstand gelijk aan den aardstraal of aan r meters; en p_1 eenheden de versnelling der aantrekkingskracht voor een plaats op den afstand R meters van het middelpunt der aarde; dan is volgens de hypothese van NEWTON:

$$mp = f \frac{mA}{r^2} \quad \text{en} \quad mp_1 = f \frac{mA}{R^2}, \quad (27)$$

of na deeling: $p_1 = p \frac{r^2}{R^2}$.

De aardstraal is ongeveer 6370000 meters lang, terwijl de hoogte van den hoogsten berg boven de oppervlakte der zee nog geen 10000 meters bedraagt. Op den top van zulk een berg zou de versnelling der aantrekkingskracht de grootte hebben:

$$p_1 = 9,81 \cdot \frac{637^2}{638^2} = 9,78 \text{ eenheden.}$$

De afstand van de maan tot de aarde bedraagt ongeveer 60 aardstralen; op dien afstand heeft de versnelling der aantrekkingskracht slechts de grootte:

$$p_1 = p \frac{r^2}{60^2 r^2} = \frac{9,81}{3600} = 0,0027 \text{ eenheden.}$$

In § 23 is gevonden dat de kracht, die op de maan moet werken, om haar de beweging mede te deelen, welke zij werkelijk heeft, 0,0027 *m* eenheden bedraagt. Uit de overeenstemming van dit getal met het zooeven gevondene, blijkt dat de uit de hypothese van NEWTON berekende waarde der aantrekkingskracht juist de grootte heeft, die ter verklaring van de maanbeweging moet worden aangenomen.

Op de hypothese van NEWTON berust ook de methode, waarop men in de sterrenkunde de massa's van twee hemellichamen vergelijkt.

Zij *Z* kilogram de massa van de zon, *A* kilogram de massa der aarde, en *R* meters de afstand van het middelpunt der aarde tot het middelpunt der zon; zij verder *V* het aantal eenheden van de snelheid, die de aarde bij haar beweging om de zon bezit. Beschouwt men bij benadering de aardbaan en evenzoo de maanbaan als cirkels, dan heeft men:

$$\frac{A V^2}{R} = f \frac{A Z}{R^2}.$$

Is de massa der maan *M* kilogram, is de afstand van het middelpunt der maan tot het middelpunt der aarde *r* meters, en is de snelheid, die de maan bij haar beweging om de aarde bezit, *v* eenheden, dan heeft men evenzoo:

$$\frac{M v^2}{r} = f \frac{M A}{r^2}.$$

Na deeling vindt men dan:

$$\frac{Z}{A} = \frac{V^2}{v^2} \cdot \frac{R}{r},$$

of daar: $V = \frac{2 \pi R}{T}$ en $v = \frac{2 \pi r}{t},$

waarin T de omloopstijd van de aarde om de zon, en t de omloopstijd van de maan om de aarde is,

$$\frac{Z}{A} = \frac{R^3}{r^3} \cdot \frac{t^2}{T^2}.$$

Men vindt voor deze verhouding ongeveer 320000. De massa der zon is dus ongeveer 320000 maal zoo groot als de massa der aarde.

Als men in de eerste der vergelijkingen (27) de grootheden A en r vervangt door de massa M en de straal R van eenig ander bolvormig hemellichaam, dan verkrijgt men, in de veronderstelling dat ook daarop de massa op de boven aangenomen wijze is verdeeld, voor de versnelling van de aantrekkingskracht aan de oppervlakte van dat hemellichaam, de vergelijking:

$$mp_1 = f \frac{m M}{R^2},$$

welke door vergelijking (27) gedeeld, verandert in:

$$p_1 = p \frac{M}{A} \cdot \frac{r^2}{R^2}.$$

De massa der zon is ongeveer 320000 maal zoo groot als de massa der aarde, en de straal der zon is ongeveer 108 aardstralen; de versnelling van de aantrekkingskracht aan de oppervlakte van de zon heeft dus de grootte:

$$p_1 = p \frac{320000 A}{A} \cdot \frac{r^2}{108^2 \cdot r^2} = 9,81 \cdot 27,4 = 269 \text{ eenheden.}$$

Als men de kracht K in vergelijking (26) rechtstreeks meet door twee massa's van m en m_1 kilogram op een afstand van r meters te plaatsen, en de grootte waar te nemen van de aantrekking, die deze massa's op elkander uitoefenen, dan kan deze vergelijking dienen om de grootte A van de massa der aarde te berekenen. Noemt men namelijk q de bekende kracht, waarmede de massa m_1 op den bekenden afstand R , den aardstraal, door de onbekende aardmassa A wordt aangetrokken, dan heeft men:

$$q = f \frac{m_1 A}{R^2},$$

is de kracht die
twee punten op elkaar
uitoefenen als ze op 1 m
afstand zijn.

welke door vergelijking (26) gedeeld, verandert in:

$$\frac{q}{K} = \frac{A}{m} \cdot \frac{r^2}{R^2} \text{ of } A = m \cdot \frac{q}{K} \cdot \frac{R^2}{r^2}.$$

Op deze wijze heeft men inderdaad de massa der aarde gemeten, en daarvoor ongeveer gevonden:

$$A = 6,1 \cdot 10^{24} \text{ kilogram.}$$

Een kubieke meter van den aardbol heeft dus gemiddeld een massa van 5675 kilogram.

Als men uit vergelijking (27) f oplost, dan vindt men voor de kracht, waarmede een massa van 1 kilogram een andere massa van 1 kilogram op een afstand van 1 meter aantrekt:

$$f = p \cdot \frac{r^2}{A}.$$

Hierin de bekende waarden substitueerende:

$$f = 9,81 \cdot \frac{6370000^2}{6,1 \cdot 10^{24}} = 65 \cdot 10^{-12} \text{ eenheden.}$$

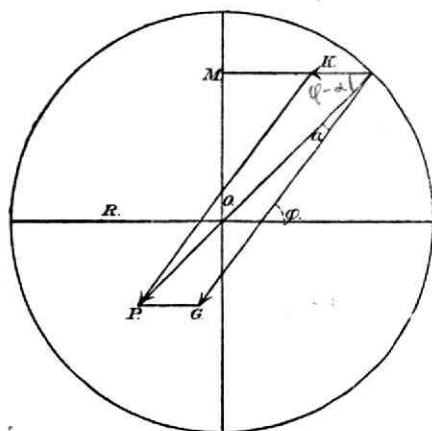
§ 28. Zwaartekracht.

Indien men een punt P in de nabijheid van de oppervlakte der aarde loslaat, dan gaat het zich, volgens het boven verklaarde, onder de werking der aantrekkingskracht bewegen in de richting naar het middelpunt der aarde. Het blijkt nu, dat de richting der door ons *waargenomen* beweging een andere is, als de *werkelijke* beweging. Dit verschijnsel wordt verklaard uit de asdraaiing der aarde, waaraan wij zelve deelnemen.

Opdat een punt Q met de massa m kilogram, in de onmiddellijke nabijheid van de oppervlakte der aarde en aan de asdraaiing der aarde deelnemende, op dezelfde plaats ten opzichte van de aarde blijve zweven, moet er een kracht K (fig. 31) op werken, steeds gericht naar het middelpunt M van den cirkel door Q doorloopen, en groot $m k = m r \omega^2$ eenheden, indien ω is het aantal eenheden van de hoeksnelheid van Q , en r de straal van den cirkel door Q doorloopen. Nu is de werkelijk op Q werkende kracht, de

aantrekkingskracht P , gericht naar het middelpunt O der aarde, en mp eenheden groot. Indien men de kracht P ontbindt in de kracht K en in een andere kracht G , dan is de richting en de grootte van G bepaald. De kracht P heeft op

Fig. 31.



de beweging van het punt Q denzelfden invloed als de ontbindingskrachten K en G te samen. Daar de werking van K daarin bestaat, dat het punt Q zwevende wordt gehouden ten opzichte van de aarde, zoo zal de waargenomen beweging van Q ten opzichte van de aarde, alleen afhangen van de kracht G . Deze kracht G is het, die de *zwaartekracht* wordt ge-

noemd, en die aan het punt Q de versnelling der zwaartekracht geeft, welke hierboven steeds door g is voorgesteld.

De versnelling der zwaartekracht is niet op alle plaatsen der aarde even groot, zelfs als de versnelling der aantrekkingskracht dit wel was; haar grootte hangt af van de breedte der plaats. In de veronderstelling dat de versnelling der aantrekkingskracht overal even groot is, kan men een betrekking vinden tusschen de versnelling der zwaartekracht op een plaats aan den aequator en die op een plaats op de breedte φ gelegen.

Kortheidshalve zullen de grootheden door de wijzers o en φ worden onderscheiden, al naarmate zij betrekking hebben op een plaats aan den aequator of op de breedte φ . Dus:

$$G_o = mg_o \text{ en } G_\varphi = mg_\varphi \quad K_o = mk_o \text{ en } K_\varphi = mk_\varphi.$$

Aan den aequator hebben K_o en P dezelfde richting; dus:

$$G_o = P - K_o \text{ of } mg_o = mp - mk_o, \quad g_o = p - k_o.$$

*K_o is de eenheid
in de aarde
K_o = mk_o*

De versnelling k_o heeft de standvastige waarde $k_o = R\omega^2$, als R de straal der aarde is.

De aarde volbrengt haar aswenteling in $23^u 56^m 4,1^s$ of in 86164,1 seconden. De hoeksnelheid van elk punt der aarde is dus $\omega = \frac{2\pi}{86164,1} = 0,00007292$ eenheden. Neemt men $R = 6370000$ meters, dan is $K_o = R\omega^2 = 0,03387$.

Op de breedte φ heeft men blijkens de figuur, na weglating van den gemeenschappelijken factor m :

$$g_\varphi^2 = p^2 + k_\varphi^2 - 2pk_\varphi \cos(\varphi - \alpha),$$

terwijl $k_\varphi = R \cos(\varphi - \alpha)$ $\omega^2 = k_o \cos(\varphi - \alpha)$ is.

Daar α in vergelijking met φ klein is, mag men haar verwaarloozen, en wordt de vergelijking:

$$g_\varphi^2 = p^2 - (2pk_o - k_o^2) \cos^2 \varphi = p^2 \left(1 - \frac{2pk_o - k_o^2}{p^2} \cos^2 \varphi \right)$$

$$g_\varphi = p \left\{ 1 - \frac{2pk_o - k_o^2}{p^2} \cos^2 \varphi \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$p \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{2pk_o - k_o^2}{p^2} \cos^2 \varphi + \dots \right\}.$$

Daar, zooals uit de boven gevonden waarden blijkt, k_o klein is in vergelijking van p , mogen de tweede en hoogere machten van k_o verwaarloosd worden, en gaat de vergelijking over in:

$$g_\varphi = p - k_o \cos^2 \varphi = p - k_o + k_o \sin^2 \varphi = g_o + k_o \sin^2 \varphi.$$

Door rechtstreeksche waarneming heeft men voor de versnelling der zwaartekracht op een plaats aan den aequator gevonden 9,7806 eenheden. De versnelling der zwaartekracht op de breedte φ is dus:

$$g_\varphi = 9,7806 + 0,03387 \sin^2 \varphi.$$

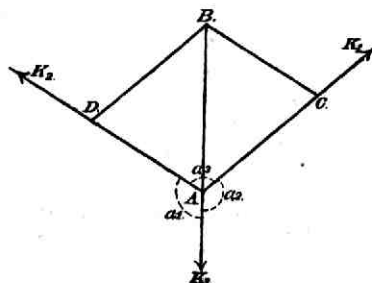
Vergelijkt men de door waarneming gevonden waarden van g_φ met de uit deze vergelijking voortvloeiende, dan blijkt het dat deze laatste te klein zijn, dat dus de waarden van g_φ van den aequator naar de polen gaande, sterker aangroeien dan uit deze vergelijking zou volgen. De reden van dit verschil ligt in de onjuistheid van de veronderstel-

ling, dat de aarde is een bol, en dat dus p op alle plaatsen dezelfde waarde heeft. De aarde is een spherioïde, en ook p moet dus van den aequator naar de polen gaande, toenemen. Wordt ook de vorm der aarde bij de berekening in aanmerking genomen, dan blijkt het, dat men den factor 0,03387 door den factor 0,0506 moet vervangen. De zeer bevredigende uitkomsten, die men dan verkrijgt bij de vergelijking van de waargenomen en de berekende waarden van g_φ , is een steun te meer voor de meening, dat de verklaring van NEWTON de ware is.

§ 29. Evenwicht.

De resultante van de op een stoffelijk punt werkende krachten is de kracht, die dezelfde uitwerking heeft als alle krachten te zamen. Is dus de resultante gelijk nul, dan hebben de krachten geen uitwerking; men zegt dat de krachten met elkander in evenwicht zijn; het is even alsof op het punt geen kracht werkt. Indien op een punt geen kracht werkt, dan is zijn bewegingstoestand standvastig. Is dus de resultante van de op een punt werkende krachten gelijk nul, dan heeft het punt een rechtlijnige eenparige beweging, of het is in rust. Is omgekeerd een punt in rust, of heeft het een rechtlijnige eenparige beweging, dan werkt er geen kracht op, of de op het punt werkende krachten zijn met elkander in evenwicht.

Fig 32



Houden twee krachten elkander in evenwicht, dan zijn zij even groot, en werken langs dezelfde lijn in onderling tegengestelde richtingen. Hieruit volgt, dat als een willekeurig aantal op een punt werkende krachten elkander in evenwicht houden, elk dier krachten moet zijn even groot als, maar tegen-

gesteld gericht aan de resultante van alle overige.

Houden bijv. drie krachten K_1 , K_2 , K_3 (fig. 32) elkander

in evenwicht, en beschrijft men op de lijnen AC en AD , die de krachten K_1 en K_2 voorstellen, een parallelogram, dan is de diagonaal AB even groot als de lijn die de kracht K_3 voorstelt. De zijden van den driehoek ABC stellen de drie krachten voor; zij verhouden zich als de sinussen van de tegenoverliggende hoeken. Vervangt men deze hoeken door hun supplementen α_1 , α_2 , α_3 , dan verkrijgt men de evenredigheid:

$$K_1 : K_2 : K_3 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3.$$

De algemeene voorwaarden voor het evenwicht van de op een stoffelijk punt werkende krachten verkrijgt men uit vergelijking (13), door de daarin gevonden waarde der resultante gelijk nul te stellen:

$$\sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2} = 0.$$

De grootheid onder het wortelteeken bestaat uit drie termen, die nooit negatief kunnen zijn. Zij kan dus alleen dan gelijk nul wezen, als elk der termen nul is. Deze vergelijking bevat dus de drie volgende:

$$K_x = 0 \quad K_y = 0 \quad K_z = 0,$$

of voor K_x , K_y en K_z haar waarden stellende:

$$\Sigma (K \cos \alpha) = 0 \quad \Sigma (K \cos \beta) = 0 \quad \Sigma (K \cos \gamma) = 0.$$

Daar de stand van de drie onderling loodrechte assen willekeurig gekozen is, zoo volgt uit deze vergelijkingen:

Als de op een stoffelijk punt werkende krachten met elkander in evenwicht zijn, dan is de som van de ontbondenen dier krachten langs elke willekeurige lijn gelijk nul.

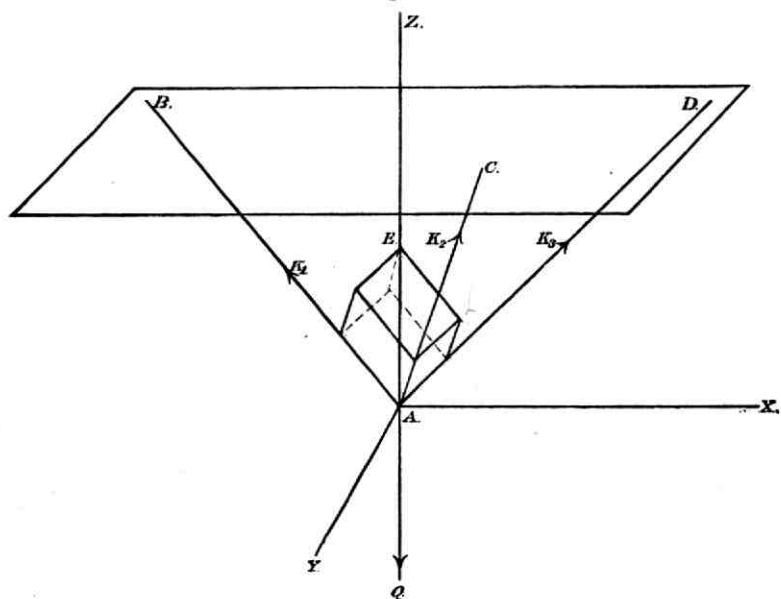
Omgekeerd: *als de som der ontbondenen van de op een stoffelijk punt werkende krachten langs drie onderling loodrechte lijnen gelijk is aan nul, dan vindt hetzelfde plaats langs elke willekeurige andere lijn, en zijn de krachten met elkander in evenwicht.*

Weet men dat eenige krachten met elkander in evenwicht zijn, en kent men er enkele van, dan kan men soms de overige nog onbekende krachten vinden, door op het geheele stelsel van krachten de evenwichtsvergelijkingen toe te passen.

Als bijv. aan het aanhechtingspunt A (fig. 33) van drie in de punten B , C en D bevestigde draden, door middel

van een vierden draad een gewicht Q opgehangen is, dan volgt uit den toestand van rust van het punt A , dat de

Fig.33



vier door middel van de draden er op uitgeoefende krachten K_1 , K_2 , K_3 en Q aan de evenwichtsvergelijkingen moeten voldoen

Neemt men de as AZ in de richting tegengesteld aan die der zwaartekracht, waardoor de assen AX en AY in een horizontaal vlak liggen, dan worden de evenwichtsvergelijkingen:

$$K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + K_3 \cos \alpha_3 = 0$$

$$K_1 \cos \beta_1 + K_2 \cos \beta_2 + K_3 \cos \beta_3 = 0$$

$$K_1 \cos \gamma_1 + K_2 \cos \gamma_2 + K_3 \cos \gamma_3 - Q = 0.$$

Zijn de richtingen der draden, en daarmee de hoeken bekend, dan kunnen de drie onbekende grootheden K_1 , K_2 , K_3 uit deze drie vergelijkingen berekend worden.

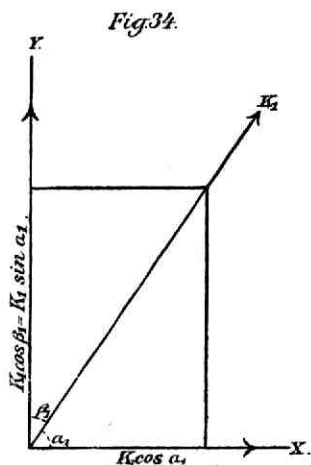
Het vraagstuk kan ook door constructie worden opgelost; men heeft daartoe slechts een parallelipedum te construeeren, welks diagonaal AE even groot is als de lijn, die de kracht Q voorstelt, en welks ribben evenwijdig zijn aan AB , AC en AD . De drie langs AB , AC en AD vallende ribben stellen dan in richting en grootte de krachten K_1 , K_2 en K_3 voor.

Het aantal evenwichtsvergelijkingen wordt tot twee teruggebracht, als alle krachten werken langs lijnen in eenzelfde vlak gelegen. Neemt men de assen zoodanig dat de Z -as loodrecht staat op dit vlak, dan zijn de grootheden $\cos \gamma_1 \dots \cos \gamma_n$ alle gelijk nul, en ter bepaling van de richting van elk der krachten is de hoek, dien de lijn waarlangs zij werkt met de X -as maakt, voldoende. De grootheden $\cos \beta_1 \dots \cos \beta_n$ kunnen toch in dit geval vervangen worden door $\sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n$ (fig. 34), en de evenwichtsvergelijkingen worden:

$$\Sigma (K \cos \alpha) = 0. \quad \Sigma (K \sin \alpha) = 0.$$

In het bijzondere geval eindelijk, dat alle krachten langs dezelfde lijn werken, is er slechts een evenwichtsvergelijking noodig, namelijk:

$$\Sigma (K) = 0.$$



De som der naar den eenen kant gerichte krachten moet dus gelijk zijn aan de som der naar den tegengestelden kant gerichte krachten. Heeft in dit geval het punt een eenparige beweging langs de lijn, waarlangs de krachten werken, dan noemt men de som der krachten in de richting der beweging werkende, ook wel de *beweegkracht*, en de som der krachten in de

richting tegengesteld aan die der beweging werkende, den *weerstand*.

HOOFDSTUK V.

Beweging van een stoffelijk punt langs voorgeschreven lijnen.

§ 30. Weerstanden van vaste vlakken, lijnen, punten.

Slechts door een kracht kan de bewegingstoestand van een punt worden gewijzigd.

Indien derhalve op een punt, eenige krachten werken, wier resultante K bekend is, en het blijkt, dat de door het punt werkelijk volbrachte beweging afwijkt van de beweging, die de kracht K alleen werkende zou tengevolge hebben, dan moet de oorzaak dier afwijking gezocht worden in een kracht, welke nog bovendien werkzaam was. Deze onbekende kracht moet dan een zoodanige zijn, dat zij met de kracht K samengesteld, een resultante oplevert, die de werkelijk volbrachte beweging tengevolge heeft.

Op deze wijze moeten de krachten beoordeeld worden, die optreden, wanneer een stoffelijk punt door hindernissen in zijn vrije beweging wordt belemmerd. Grootte en richting dier krachten kunnen uit de werkelijk volbrachte beweging gevonden worden, zoodra de overige werkende krachten bekend zijn.

Indien een stoffelijk punt zich beweegt langs de oppervlakte van een in rust zijnden vasten wand, en de kracht K een zoodanige richting heeft, dat zij, alleen werkende, het punt naar de ruimte achter de oppervlakte zou drijven, dan moet er, daar het punt op de oppervlakte blijft, behalve de kracht K nog een andere kracht P op werken, die door den vasten wand op het punt wordt uitgeoefend. Is de oppervlakte van den wand een plat vlak, dan moet de lijn, waarlangs de resultante van K en P werkt, in dit vlak zijn gelegen, daar anders het punt het vlak zou verlaten.

Uit deze voorwaarde alleen kan men intusschen de grootte en de richting der onbekende kracht P nog niet bepalen. Men kan toch op oneindig veel verschillende wijzen een parallelogram beschrijven, welks eene zijde de lijn is die K voorstelt, en waarvan de diagonaal in het vlak ligt.

Welke richting de onbekende kracht P ook moge hebben,

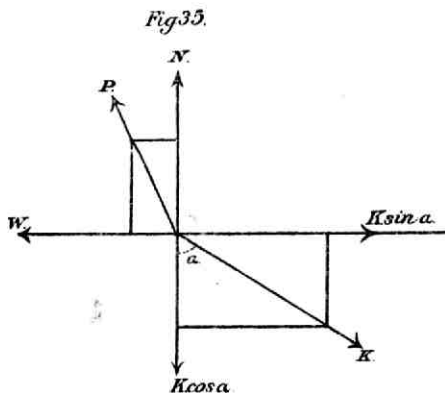
steeds kan men zich haar ontbonden denken in twee andere krachten N en W , waarvan de eene N langs de normaal, de andere W langs een lijn in het vlak werkt. De ontbindingskracht N kan steeds bepaald worden uit de gegeven kracht K alleen, ook zonder dat men de werkelijk volbrachte beweging kent. Daar toch de lijn, waarlangs de resultante van K en P werkt, in het vlak moet vallen, zoo moet noodzakelijk de ontbindingskracht dier resultante in de richting der normaal gelijk nul zijn. Uit fig. 35 vindt men dus de vergelijking:

$$K \cos \alpha - N = 0 \quad \text{of} \quad N = K \cos \alpha.$$

dat is, de normale weerstand, dien de wand biedt is steeds even

groot als en tegengesteld gericht aan de normale ontbondene van de kracht K .

Wat de andere ontbindingskracht W betreft, deze hangt af van de stof der lichamen, van de hoedanigheid hunner oppervlakten. Het is niet mogelijk à priori haar richting en grootte te bepalen; de wetten, volgens welke deze



ontbindingskracht werkt, kunnen slechts gevonden worden door waarneming van de werkelijk volbrachte beweging. Uit zoodanige waarnemingen is gebleken, dat deze kracht W steeds werkt in de richting tegengesteld aan die, waarin het punt zich werkelijk beweegt, of althans zich zou bewegen, indien de kracht W niet werkte; dat zij toeneemt met de normale ontbindingskracht van K_1 , waarmee zij bij benadering evenredig gesteld mag worden; en dat zij onder overigens gelijke omstandigheden kleiner is, naarmate de oppervlakten der lichamen gladder zijn. De ontbindingskracht W wordt de *wrijvingsweerstand* genoemd; zij zal later in een afzon-

derlijk hoofdstuk worden behandeld. Voorloopig wordt aangenomen, dat de oppervlakten volmaakt glad zijn, en dus:

$$W = 0.$$

Onder deze omstandigheden bestaat de werking van den wand alleen in het te voorschijn roepen van de kracht N , door welke de normale ontbindingskracht van K in evenwicht gehouden wordt. Het stoffelijk punt beweegt zich derhalve als een vrij punt, waarop slechts de ontbindingskracht $K \sin \alpha$ werkt.

Denkt men zich het stoffelijk punt ingesloten tusschen twee zulke gladde evenwijdige oppervlakten, die elke beweging in de richting van de normaal, zoowel naar den eenen als naar den anderen kant beletten, dan geraakt men tot de voorstelling van een punt, dat zich slechts in een vlak kan bewegen. Men moet zich voorstellen dat dit vlak normale krachten doet ontstaan, telkens wanneer zonder deze het punt het vlak zou verlaten, en dat die krachten steeds juist zoo groot zijn als noodig is, om te beletten dat het punt het vlak verlaat.

Denkt men zich een stoffelijk punt zoodanig door vaste lichamen omgeven, dat het zich slechts langs een rechte lijn bewegen kan, zooals bijv. een kogel in een rechte buis, dan geraakt men tot de voorstelling van een vaste rechte lijn. Men moet zich voorstellen, dat die lijn normale krachten doet ontstaan, telkens wanneer zonder deze het punt de lijn zou verlaten, en dat deze krachten steeds juist zoo groot zijn als noodig is, om te beletten dat het punt de lijn verlaat.

Eindelijk kan men zich een stoffelijk punt zoodanig door vaste lichamen ingesloten denken, dat elke beweging, naar welke richting ook, wordt belet; zoodoende geraakt men tot de voorstelling van een vast punt, dat telkens krachten doet ontstaan, wanneer zonder deze het stoffelijk punt in beweging zou geraken; krachten steeds juist zoo groot als noodig is om elke beweging te beletten.

§ 34. Beweging langs een voorgeschreven rechte lijn.

Indien een stoffelijk punt P onder de werking van de standvastige kracht K (fig. 36) zich langs een voorgeschreven

rechte lijn van A naar B beweegt, dan bestaat de werking van de vaste lijn daarin, dat zij op ieder oogenblik een normalen weerstand N te voorschijn roept, juist zoo groot als noodig is, om te maken dat de resultante van K en N

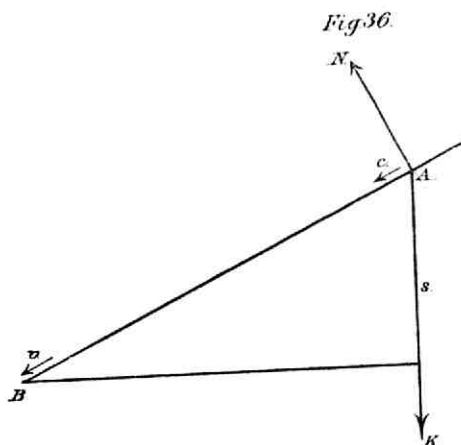
langs de lijn AB valt. De arbeid door de resultante dier beide krachten verricht, is in dit geval gelijk aan den arbeid door de kracht K verricht, omdat N steeds loodrecht gericht is op de beweging. Is het punt P van A in B gekomen, dan heeft het een arbeidsvermogen van plaats van Ks eenheden verloren, als de projectie van AB op de richting van K , s meters lang is. Heeft P in A de snelheid c eenheden, in B de snelheid v eenheden, dan heeft P een arbeidsvermogen van beweging van $\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$ eenheden gewonnen, als de massa van P m kilogram is. Volgens de wet van het behoud van arbeidsvermogen is:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = Ks = mas,$$

of:
$$v = \sqrt{c^2 + 2as},$$

waaruit blijkt, dat de grootte der eindsnelheid v onafhankelijk is van de helling der baan, en slechts afhangt van de grootte der aanvangssnelheid c , en van den weg in de richting der kracht afgelegd.

Vervangt men in bovenstaande vergelijking de kracht K door het gewicht mg van het punt, en is de in verticale



richting doorloopen hoogte h meters, dan verkrijgt men de vergelijking:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = mgh \text{ of } v = \sqrt{c^2 + 2gh},$$

uit welke blijkt, dat de grootte der eindsnelheid v onafhankelijk is van de helling der baan, en slechts afhangt van de grootte der aanvangssnelheid c , en van het verschil in hoogte h der punten A en B .

De resultante van de krachten K en N (fig. 37) is $K \sin \alpha$. Ontbindt men toch de kracht K in $K \sin \alpha$ en $K \cos \alpha$, dan wordt de ontbindingskracht $K \cos \alpha$ in evenwicht gehouden door den weerstand N , en de ontbindingskracht

$K \sin \alpha$ deelt aan het punt P langs de voorgeschreven lijn een beweging mede, even alsof P een volkomen vrij punt ware. De versnelling, die P verkrijgt, is dus:

$$p = \frac{K \sin \alpha}{m}.$$

Zijn beweging is eenparig versneld.

Is K het gewicht van P , dan

is $K = mg$, en men vindt dus voor de versnelling, waarmede een punt P zich onder de werking der zwaartekracht beweegt langs een hellend vlak, dat een hoek α maakt met den horizon:

$$p = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha \text{ eenheden.}$$

Is de aanvangssnelheid $c = 0$, dan vindt men voor den in t seconden afgelegden weg l :

$$l = g \sin \alpha \cdot \frac{t^2}{2} \text{ meters.}$$

dit volgt uit de form
 $x = l = ct + \frac{1}{2} at^2$ (Zie p. 10 bladz. 21 bovenaan) 6*

Lost men hieruit t op, dan is:

$$t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{l}{\sin \alpha}} \text{ seconden.}$$

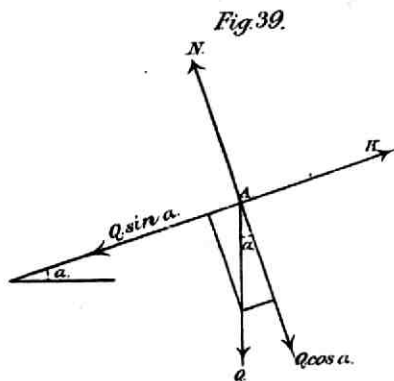
De duur der beweging hangt alleen af van de grootte van het quotient $\frac{l}{\sin \alpha}$; verschillende hellende lijnen worden dus in onderling gelijke tijden doorloopen, als de quotienten $\frac{l}{\sin \alpha}$ voor al deze lijnen gelijk zijn. De vier zijden van

een willekeurigen rechthoek $ABCD$ (fig. 38), welks eene diagonaal verticaal staat, voldoen aan deze voorwaarde, want men heeft:

$$\frac{l}{\sin \alpha} = \frac{l_1}{\sin \alpha_1} = AC.$$

Verder blijkt hieruit, dat alle koor-den, die door een der beide eindpunten gaan van de verticale middellijn eens cirkels, door een punt P onder de werking der zwaartekracht in onderling gelijke tijden worden doorloopen.

De beweging van een punt langs een voorgeschreven



rechte lijn is eenparig als de ontbindingskrachten in de richting der lijn met elkander evenwicht maken. De resultante der krachten is dan loodrecht op de lijn gericht, en wordt door den weerstand van deze in evenwicht gehouden.

Om bijv. een punt P met het gewicht Q (fig. 39) zich eenparig te doen bewegen langs een lijn,

die een hoek α met den horizon maakt, is een in de

richting der helling naar boven werkende kracht noodig:

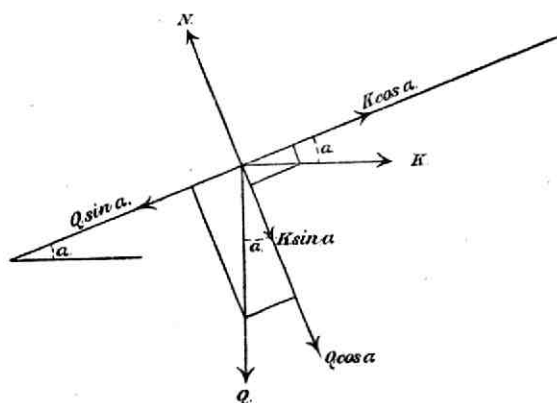
$$K = Q \sin \alpha,$$

en de weerstand der baan is:

$$N = Q \cos \alpha.$$

Werkt daarentegen de kracht K (fig. 40) in horizontale

Fig 40



richting, dan moet zij voldoen aan de vergelijking:

$$K \cos \alpha = Q \sin \alpha \quad \text{of} \quad K = Q \tan \alpha.$$

In dit geval heeft de weerstand de grootte:

$$N = Q \cos \alpha + K \sin \alpha,$$

of, na substitutie van de voor K gevonden waarde:

$$N = Q (\cos \alpha + \tan \alpha \cdot \sin \alpha) = \frac{Q}{\cos \alpha}.$$

Het is hierbij volkomen hetzelfde of de eenparige beweging naar boven of naar beneden is gericht.

$$\begin{aligned} & \cos \alpha + \tan \alpha \sin \alpha \\ &= \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin \alpha \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

§ 32. Eenparige beweging langs een voorgeschreven kromme lijn.

De normale weerstand van een rechte lijn komt steeds slechts dan in werking, als een kracht, wier richting niet met die van de lijn samenvalt, dien weerstand te voorschijn roept. Is zulk een kracht niet aanwezig, dan biedt de lijn ook geen weerstand.

Bij de beweging van een punt langs een voorgeschreven kromme lijn daarentegen, wordt een weerstand ook dan te voorschijn geroepen, als er overigens geen krachten op het punt werken. Om toch de richting der snelheid van een punt aanhoudend te doen veranderen is voortdurend een kracht noodig. In de veronderstelling dat er geen wrijvingsweerstand bestaat, moet ook hier de weerstand in ieder punt loodrecht gericht zijn op de kromme lijn, en deze weerstand kan dus alleen de richting, maar niet de grootte der snelheid doen veranderen.

Het punt P zal derhalve, indien er overigens geen krachten op werken, de voorgeschreven kromlijnige baan met eenparige beweging doorloopen.

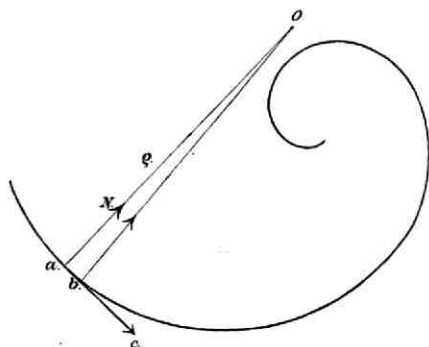
Om in dit geval de grootte en de richting van den normalen weerstand te bepalen, moet men onderzoeken, welke kracht op een vrij stoffelijk punt zou moeten werken, om het een beweging te doen volbrengen, in alle opzichten gelijk aan de werkelijk volbrachte beweging. Daartoe verdeele men de lijn in zoo kleine deelen, dat elk deeltje als een cirkelboog mag worden beschouwd (fig. 41). Den straal van zulk een oneindig klein cirkelboogje ab noemt men den kromtestraal van de kromme lijn in a . Heeft een punt P een eenparige beweging met de snelheid c , langs den omtrek van een cirkel met den straal ϱ , dan moet de op P werkende kracht gericht zijn naar het middelpunt van den cirkel toe, en de grootte hebben:

$$N = \frac{mc^2}{\varrho}.$$

Daar gedurende de beweging de snelheid c van het punt onveranderd blijft, zoo is de weerstand van de kromme lijn omgekeerd evenredig met den kromtestraal.

Indien het punt P bijv. een spiraal van buiten naar binnen doorloopt, dan neemt de weerstand aanhoudend toe; heeft daarentegen de lijn overal dezelfde kromming, zooals bijv. bij een cirkelomtrek of bij een schroeflijn, dan is de weer-

Fig. 41



stand in alle punten even groot. Is op eenige plaats op de kromme lijn $\varrho = 0$, dan wordt N oneindig groot, d. w. z. een punt kan onmogelijk langs een lijn met hoeken een eenparige beweging hebben.

Ook dan nog is de beweging van P eenparig, als op P behalve de weerstand der kromme lijn nog een kracht K

werkt, mits deze kracht in ieder punt loodrecht gericht zij op de kromme lijn. De weerstand N der lijn wordt daardoor echter een andere; hij zal nu toch moeten kunnen ontbonden worden in twee krachten, waarvan de een is even groot als en tegengesteld gericht aan K , terwijl de andere $\frac{mc^2}{\varrho}$ de richting der snelheid zal doen veranderen.

In het bijzondere geval dat de voorgeschreven baan een vlakke kromme lijn is, en de lijn, waarlangs de kracht K werkt, in het vlak dier kromme ligt, heeft men:

$$N = \frac{mc^2}{\varrho} \mp K \text{ of } N \pm K = \frac{mc^2}{\varrho},$$

dat is, al naarmate de kracht K naar binnen of naar buiten werkt, verkleint of vergroot zij den weerstand N . Werkt de kracht K naar binnen, dan is de som $N + K$, werkt zij naar buiten, dan is het verschil $N - K$ gelijk aan de centripetaalkracht.

Indien een punt P een eenparige kromlijnige beweging

heeft langs een voorgeschreven lijn, dan is op ieder oogenblik de resultante van alle op P werkende krachten de centripetaalkracht.

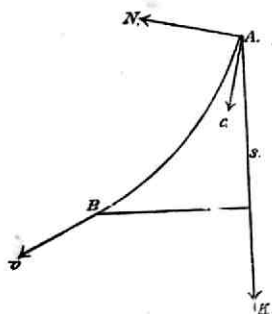
Heeft K toevallig de richting en de grootte der centripetaalkracht, dan wordt $N=0$; de kromme lijn zal dan kunnen weggenomen worden; het nu vrije punt P zal desniettegenstaande de voorgeschreven baan doorloopen.

§ 33. Veranderlijke beweging langs een voorgeschreven kromme lijn.

Indien de kracht K niet loodrecht op de kromme lijn is gericht, dan verandert ook de grootte der snelheid van P . Om de grootte der snelheidsverandering te bepalen, kan men ook hier gebruik maken van de wet van het behoud van arbeidsvermogen. Welke richting toch de kracht K moge hebben, de normale weerstand der kromme lijn is in ieder punt loodrecht op de baan van P gericht, en verricht dus den arbeid nul. Legt P het stuk AB (fig. 42) van zijn voorgeschreven baan af onder de werking der kracht K , heeft P in A een snelheid c eenheden, in B een snelheid v eenheden, en is de projectie van AB op de lijn, waarlangs K werkt, s meters lang, dan heeft men:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = Ks.$$

Fig 42



De eindsnelheid v hangt dus wederom alleen af van de aanvangssnelheid, en van den in de richting der kracht afgelegden weg, en is geheel onafhankelijk van den vorm der voorgeschreven baan.

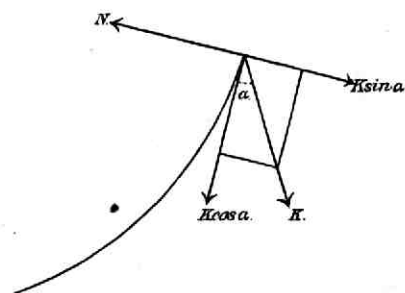
Doorloopt P bijv. onder de werking der zwaartekracht een volkomen gladde gebogen buis, en is het verschil in hoogte van het aanvangspunt en het eindpunt der beweging h meters, dan vindt men dezelfde vergelijking:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = mgh \text{ of } v = \sqrt{c^2 + 2gh},$$

die reeds in § 31 voor de beweging langs een voorgeschreven rechte lijn, en in § 18 voor de beweging van een vrij stoffelijk punt onder de werking der zwaartekracht is gevonden.

Om op eenig oogenblik de versnelling van de ontbindingsbeweging in de richting der baan, de zoogenaamde tangentialversnelling, te bepalen, moet men de kracht K (fig. 43) in twee krachten ontbinden, de eene langs de normaal op

Fig. 43.



de kromme, de andere langs de raaklijn. De tangentialontbindingskracht $K \cos \alpha$ geeft aan het punt de tangentialversnelling:

$$p = \frac{K \cos \alpha}{m}.$$

De normale ontbindingskracht $K \sin \alpha$ heeft geen andere uitwerking dan het te voorschijn roepen van een nieuwen weerstand

even groot als en tegengesteld gericht aan die ontbindingskracht. De weerstand N moet dus kunnen ontbonden worden in een kracht even groot als en tegengesteld aan de normale ontbindingskracht van K en in de centripetaalkracht.

Indien de voorgeschreven baan een vlakke kromme is, en de lijn, langs welke de kracht werkt, in het vlak dier kromme ligt, dan heeft men:

$$N = \frac{mc^2}{\rho} \mp K \sin \alpha \text{ of } N \pm K \sin \alpha = \frac{mc^2}{\rho}, \quad (28)$$

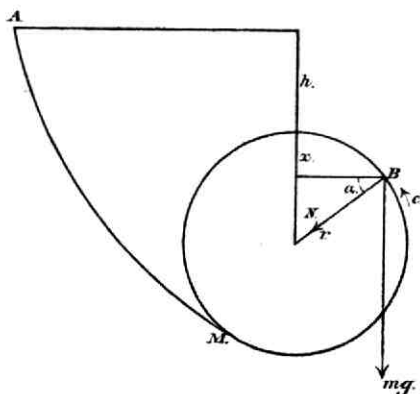
al naarmate de normale ontbindingskracht $K \sin \alpha$ naar binnen of naar buiten werkt.

De resultante van de weerstand en van de ontbindingskracht is de richting van een kracht loodrecht op de kromme. Het moet zijn de een

§ 34. Beweging langs een verticalen cirkelomtrek.

Laat een punt P met de massa m kilogram zich bevinden in A (fig. 44) op h meters boven het hoogste punt van een

Fig. 44.



verticalen cirkelomtrek met een straal van r meters. Indien nu het punt onder de werking der zwaartekracht valt langs een kromme lijn, en bijv. bij M den cirkelomtrek binnentreedt, dan kan men den weerstand berekenen, dien P in eenig punt B van den cirkelomtrek ondervindt.

Bevindt B zich x meters beneden het hoogste punt van den cirkel, dan kan de snelheid c van P bepaald worden uit de vergelijking:

$$\frac{mc^2}{2} = mg(h + x),$$

waaruit men vindt, na voor x zijn waarde $x = r(1 - \sin \alpha)$ te hebben gesubstitueerd:

$$c^2 = 2g[h + r(1 - \sin \alpha)].$$

De in B werkende, naar binnen gerichte weerstand van den cirkelomtrek, kan dan uit vergelijking (28) bepaald worden, welke voor dit geval volgens fig. 45 wordt:

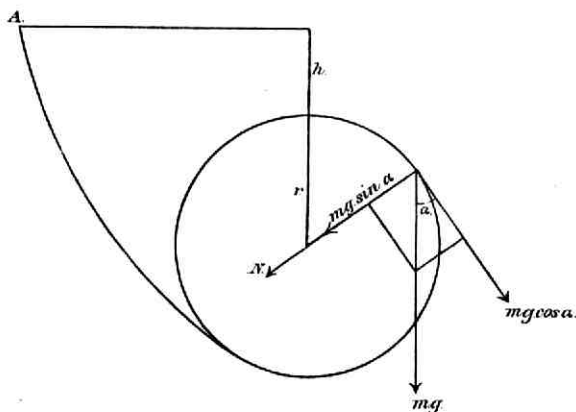
$$N + mg \sin \alpha = \frac{mc^2}{r},$$

of, hierin de gevonden waarde van c^2 stellende en N oplossende:

$$N = 2mg \left(\frac{h}{r} + 1 - \frac{3}{2} \sin \alpha \right). \quad (29)$$

Of de weerstand N , dien P ondervindt, naar binnen of naar buiten is gericht, of het dus de binnenkant of de buitenkant van den cirkelomtrek is, die weerstand biedt, dat hangt af van het teeken dat uit vergelijking (29) voor

Fig 45.



N verkregen wordt. De naar binnen gerichte weerstand wordt kleiner, naarmate $\sin \alpha$ grooter wordt; hij bereikt zijn kleinste waarde in het hoogste punt van den cirkelomtrek, waar $\sin \alpha = 1$ is, namelijk:

$$N = 2mg \left(\frac{h}{r} - \frac{1}{2} \right).$$

De weerstand zal ook hier nog naar binnen gericht zijn, indien voldaan is aan de voorwaarde:

$$h > \frac{r}{2}.$$

Hierop berust de inrichting van den zoogenaamden centrifugaalspoorweg, waarbij een wagen onder de werking der zwaartekracht zich beweegt langs den binnenkant van een in een verticaal vlak gelegen cirkelvormig gebogen spoorweg, zonder daarvan af te vallen. Ligt het aanvangspunt der beweging hoog genoeg, dan zal de wagen ook in het hoogste punt van den cirkelomtrek nog een druk tegen de rails uit-

oefenen, een druk naar boven dus, niettegenstaande de zwaartekracht in tegengestelde richting werkt.

Is $h < \frac{r}{2}$, dan zal in het bovenste gedeelte van den cirkelomtrek de weerstand naar buiten, in het onderste gedeelte naar binnen gericht zijn. Het punt, waar de weerstand nul is, wordt gevonden door in vergelijking (29) $N = 0$ te stellen en daaruit $\sin \alpha$ op te lossen, welke dan de waarde verkrijgt:

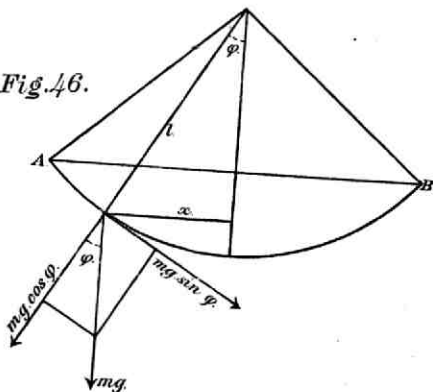
$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{h}{r} \right).$$

§ 35. Enkelvoudige slinger.

Als bij de in de vorige paragraaf besproken inrichting de snelheid van P in het laagste punt van den cirkelomtrek klein is, dan zal P bij zijn opstijging spoedig tot rust komen, en daarna zijn beweging omkeeren. In het laagste punt gekomen zal het naar den anderen kant opstijgen, nogmaals terugkeeren, en op deze wijze om het laagste punt van den cirkelomtrek slingeren volbrengen.

Een zoodanige beweging heeft bijv. een kogel, die, door

Fig. 46.



een draad aan een vast punt verbonden, een weinig uit zijn evenwichtsstand gebracht en daarna losgelaten wordt. Beschouwt men den kogel als een stoffelijk punt, en verwaarloost men het gewicht van den volkomen buigzaam en onrekbaar gedachten draad, dan verkrijgt men een toe-

stel, die de *enkelvoudige slinger* wordt genoemd.

- Onder den slingertijd van den enkelvoudigen slinger ver-

staat men den tijd, dien het punt P noodig heeft, om van zijn eenen, uitersten stand in zijn anderen uitersten stand te komen; de helft dus van den tijd, die bij den conischen slinger en bij de enkelvoudige trillende beweging als trillings-tijd is aangenomen.

Op het oogenblik dat de elongatiehoek, dat is de hoek dien de draad met de verticaal maakt, gelijk φ is, bedraagt de tangentialversnelling van P (fig. 46):

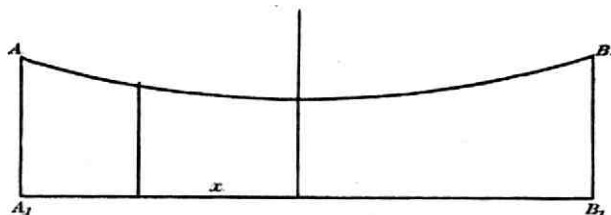
$$\frac{mg \sin \varphi}{m} = g \sin \varphi = \frac{g}{l} x \text{ eenheden.}$$

De tangentialversnelling is derhalve evenredig met den afstand van P tot aan de verticaal; voor $x = l$ meter heeft zij de waarde:

$$g = \frac{g}{l} l.$$

Indien een ander punt Q , in plaats van den boog AB , diens horizontale projectie $A_1 B_1$ (fig. 47) doorliep, en wel

Fig 47



in dier voege, dat zijn versnelling evenredig was met den afstand x , en op den afstand van 1 meter de grootte g had, dan zou Q tot het doorloopen van den weg $A_1 B_1$ volgens vergelijking (25) den tijd noodig hebben:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Het punt P , dat den cirkelboog AB doorloopt, heeft wel is waar een eenigszins langeren weg af te leggen, en

gebruikt daartoe dus een eenigszins langeren tijd, maar het verschil zal des te kleiner zijn, hoe minder de lengte van den boog AB verschilt van de lengte zijner horizontale projectie $A_1 B_1$, dat is, hoe kleiner de amplitude is. Bij een geringe amplitude mag men dus bij benadering voor den slingertijd nemen:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (30)$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat ook bij den enkelvoudigen slinger de slingertijd onafhankelijk is van de amplitude.

Men kan van vergelijking (30) gebruik maken om een der drie daarin voorkomende grootheden te bepalen, zoodra de beide andere bekend zijn. Lost men er bijv. g uit op:

$$g = \frac{\pi^2 l}{t^2},$$

dan kan zij dienen om de versnelling van de zwaartekracht te bepalen, als de waarden van t en l rechtstreeks zijn waargenomen.

Lost men l op:

$$l = \frac{gt^2}{\pi^2},$$

dan geeft zij de lengte aan van den slinger, welke zijn slingeringen in t seconden volbrengt. Stelt men bijv. $t = 1$, dan verkrijgt men voor de lengte van den secondenslinger op onze breedte:

$$L = \frac{9,81}{3,14^2} = 0,995 \text{ meter.}$$

TWEEDE AFDEELING.

STATICA OF LEER VAN HET EVENWICHT VAN KRACHTEN,
WERKENDE OP EEN ABSOLUUT VAST LICHAAM.

HOOFDSTUK VI.

Algemeene evenwichtsvergelijkingen.

§ 36. Absoluut vaste lichamen.

In de vorige afdeeling werden de lichamen steeds beschouwd als stoffelijke punten, hetzij omdat de afmetingen zoo klein waren, dat zij konden verwaarloosd worden, hetzij omdat er alleen sprake was van de beweging van lichamen in hun geheel, zonder dat er acht geslagen werd op het verschil in de beweging der afzonderlijke deelen. Voortaan wordt van deze vereenvoudiging afgezien. In de volgende afdeelingen zullen behandeld worden zoodanige lichamen, of lichamen onder zoodanige omstandigheden, dat het noodig is de plaats door een deel ingenomen, te onderscheiden van de plaats door een ander deel ingenomen.

De natuurkundigen stellen zich voor, dat ieder lichaam is opgebouwd uit zeer kleine deeltjes, moleculen genoemd, die elkander niet aanraken, maar door tusschenruimten, poriën, van elkander gescheiden zijn. Bovendien dringen de warmteverschijnselen er toe aan te nemen, dat de moleculen in aanhoudende beweging zijn. Van de banen der moleculen weet men lijna niets. Men mag aannemen, dat bij vaste lichamen de moleculen zich met zeer groote snelheden bewegen langs gesloten banen van uiterst geringe afmetingen, zoodat zij telkens op dezelfde plaats terugkomen, waar zij geweest zijn. Bij vele beschouwingen komt de beweging

der moleculen niet in aanmerking, en wordt het werkelijke lichaam in onze voorstelling vervangen door een ander, waarvan de moleculen in rust zijn, en zich bevinden op de gemiddelde plaatsen, die zij bij haar beweging innemen.

In de werkelijkheid is men in staat van elk lichaam het volume te veranderen, en dus de afstanden te wijzigen tusschen de gemiddelde plaatsen der moleculen. Men kan zich evenwel ook voorstellen een lichaam, waarvan de moleculen niet alleen in rust zijn, maar ook hun onderlinge afstanden onder geen voorwaarde kunnen wijzigen. Dergelijke vaste lichamen worden daarom *absoluut vaste lichamen* genoemd; en alleen de zoodanige zullen in deze afdeeling behandeld worden. Wanneer men de beschouwingen over de absoluut vaste lichamen wil toepassen op werkelijk bestaande lichamen, dan moet steeds in aanmerking genomen worden, dat zulks alleen geoorloofd is, als de werkelijke lichamen onder zoodanige omstandigheden verkeerden, dat de deelen geen merkbare afstandsverandering ondergaan, en als het niet noodig geacht wordt rekening te houden met de beweging der moleculen, d. w. z. met de warmteverschijnselen, die zouden kunnen optreden.

Men neemt daarbij dan aan, dat er zoo noodig tusschen de punten van het lichaam krachten werken, die de afstanden dier punten onveranderd houden. Omtrent deze krachten worden slechts twee veronderstellingen gemaakt.

1° dat zij werken langs de verbindingslijnen der punten, en

2° dat wanneer P een werking — hetzij aantrekkend hetzij afstootend — ondergaat van Q , Q een even groote werking in tegengestelde richting ondervindt van P , m. a. w., dat ook bij deze krachten, werking gelijk is aan terugwerking. Deze krachten worden inwendige krachten genoemd, in tegenstelling van uitwendige krachten, dat zijn zoodanige krachten, die optreden door den invloed van punten, geen deel van het beschouwde lichaam uitmakende.

Men zegt dat de bewegingstoestand van een lichaam niet verandert, als de bewegingstoestand van elk zijner punten onveranderd blijft. Dit laatste zal steeds het geval zijn, als de uit- en inwendige krachten op elk punt werkende in evenwicht zijn. Indien op verschillende punten van het lichaam uitwendige krachten werken, en deze zoodanig zijn,

dat zij tengevolge van het onderling verband der punten, geen invloed hebben op de beweging van het lichaam, dan zegt men, dat de uitwendige krachten op het lichaam werkende in evenwicht zijn.

Onder de massa van een lichaam verstaat men de som van de massa's der stoffelijke punten, waaruit het lichaam bestaat. Zijn de massa's der stoffelijke punten $m_1, m_2 \dots m_n$, dan is dus de massa van het lichaam:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \Sigma (m).$$

De afstanden tusschen de stoffelijke punten zijn zeer klein, evenals de afmetingen der punten. Vandaar dat men gewoonlijk niet beschouwt de massa van elk punt afzonderlijk, maar die van een groep stoffelijke punten, welke te zamen een zeker volume innemen. Onder dit volume worden ook begrepen de tusschenruimten tusschen de stoffelijke punten.

De *gemiddelde dichtheid* van een lichaam wordt bepaald door de massa van het lichaam en door zijn volume; zij wordt evenredig gesteld met de massa die de volumeeenheid bevat. Als eenheid van gemiddelde dichtheid wordt aangenomen de gemiddelde dichtheid van een lichaam, dat in een kubieken meter een massa van één kilogram bevat. Is de massa van een lichaam m kilogram en is zijn volume v kubieke meters, dan is zijn gemiddelde dichtheid d eenheden,

als:

$$d = \frac{m}{v}.$$

Daar in het CGS-stelsel de eenheid van massa het duizendste deel, en de eenheid van volume het millioenste deel is van de hier gebruikte eenheden, zoo is de eenheid van gemiddelde dichtheid in het CGS-stelsel duizendmaal zoo groot als de in dit leerboek gebruikte.

Als de gemiddelde dichtheid van eenig volumedeel van een lichaam dezelfde waarde heeft, hoe klein men dit volumedeel ook neemt, dan zegt men dat het lichaam een standvastige dichtheid heeft; men noemt het lichaam dan homogeen.

Onder de *soortelijke massa* van een stof verstaat men de massa van een kubieken meter dier stof.

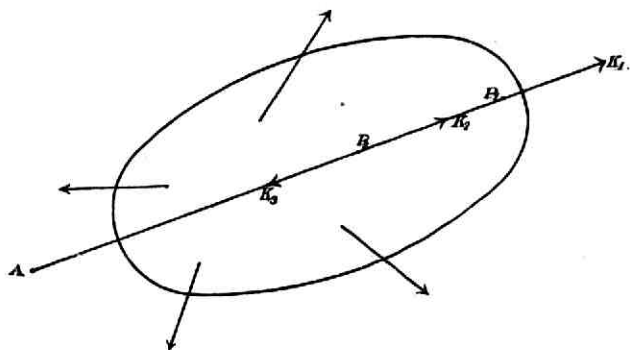
§ 37. Vervanging van krachten.

Indien op de punten P_1 en P_2 van een lichaam respectievelijk de uitwendige krachten K_1 en K_2 werken, in onderling tegengestelde richtingen langs de lijn die P_1 en P_2 verbindt, terwijl K_1 en K_2 even groot zijn, dan is de beweging van het lichaam geheel dezelfde alsof de krachten K_1 en K_2 er niet op werkten. Het is toch klaarblijkelijk dat K_1 en K_2 geen invloed op de beweging van het lichaam kunnen hebben, zonder dat de afstand van P_1 en P_2 een verandering ondergaat. Men zegt, dat de krachten K_1 en K_2 elkanders werking opheffen.

Men besluit hieruit tot het volgende: als op een punt P_1 van het lichaam een uitwendige kracht K_1 werkt langs de lijn AB , en als P_2 een ander punt van het lichaam is op de lijn AB gelegen, dan is de beweging, die het lichaam verkrijgt door de inwerking van de kracht K_1 , dezelfde als die welke het lichaam zou verkrijgen, indien op P_1 geen kracht, en op P_2 een kracht K_2 werkte, langs de lijn AB , even groot als en in dezelfde richting als K_1 .

Laat toch K_1 (fig. 48) een der krachten zijn, die op het

Fig. 48.

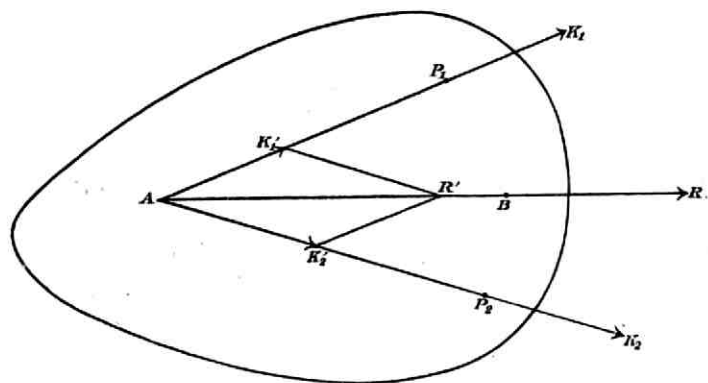


punt P_1 van het lichaam werken, en laat P_2 een ander punt van het lichaam zijn, in de lijn gelegen waarlangs K_1 werkt. Indien nu op P_2 nog bovendien twee krachten

K_2 en K_3 gaan werken, in onderling tegengestelde richtingen, langs dezelfde lijn en even groot als K_1 , dan zullen deze krachten geen invloed op de beweging van het lichaam hebben, omdat haar resultante nul is. Daar nu de krachten K_1 en K_3 , zooals hierboven is opgemerkt, elkanders werking opheffen, zoo zal de invloed, dien de kracht K_2 in P_2 aangrijpende op de beweging van het lichaam heeft, dezelfde zijn als die van de kracht K_1 in P_1 aangrijpende.

Uit deze beschouwingen blijkt, dat de invloed, dien een kracht heeft op de beweging van het lichaam, alleen afhangt van haar grootte, van haar richting, en van de lijn waarlangs zij werkt, en niet van het punt waarop zij werkt, of zooals men het uitdrukt, van haar aangrijpingspunt. Is dus A (fig. 48) een meetkundig punt buiten het lichaam op de lijn gelegen waarlangs K_1 werkt, dan mag ook A als het aangrijpingspunt van K_1 worden beschouwd, mits men zich

Fig. 49.

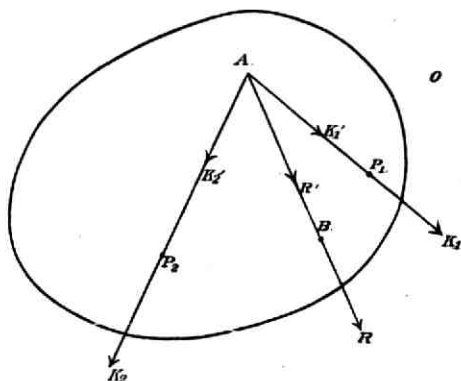


voorstelt, dat de afstand van A tot de stoffelijke punten van het lichaam niet kan veranderen.

Indien twee in de punten P_1 en P_2 van het lichaam aangrijpende krachten K_1 en K_2 (fig. 49) werken langs lijnen, die elkander in een punt A snijden, dan kunnen de krachten K_1 en K_2 in P_1 en P_2 aangrijpende, vervangen worden door de even groote krachten K_1' en K_2'

aangrijpende in A . Hierbij is het onverschillig of het snijpunt A in het lichaam is gelegen of daarbuiten, mits in het laatste geval A wordt beschouwd als een meetkundig punt, welks afstand tot de stoffelijke punten van het lichaam niet kan veranderen. De beweging van het lichaam is dus dezelfde onder de werking der krachten K_1' en K_2' in A aangrijpende, als onder de werking der krachten K_1 en K_2 aangrijpende in P_1 en P_2 . Is R' de resultante van de krachten K_1' en K_2' , dan heeft R' denzelfden invloed op de beweging van het lichaam als K_1 en K_2 te zamen. Men kan nu weer R' aangrijpende in A , vervangen door de even groote kracht R aangrijpende in eenig punt B van het lichaam, op de lijn gelegen waarlangs R' werkt. Op de beweging van het lichaam heeft dus ook R denzelfden invloed als K_1 en K_2 . Daar echter onder de werking der krachten K_1' en K_2' geheel andere inwendige krachten tot stand komen als onder de werking der krachten K_1 en K_2 , zoo kan R niet meer worden beschouwd als de resultante, de

Fig. 50.



kracht die in alle opzichten dezelfde uitwerking heeft als K_1 en K_2 . Vandaar dat men R noemt de *vervangende* van K_1 en K_2 ; met betrekking toch tot de beweging kan haar werking die van K_1 en K_2 vervangen.

Ook in dit geval geldt de momentenvergelijking.

Volgens fig. 50 toch is:

Moment R = moment R' = moment K_1' + moment K_2' .

Maar moment K_1' = moment K_1
 en moment K_2' = moment K_2 ,
 dus: moment R = moment K_1 + moment K_2 .

De som der momenten van twee uitwendige in een vlak werkende krachten ten opzichte van een punt O is gelijk aan het moment van de vervangende kracht ten opzichte van hetzelfde punt O .

Om de resultante R van twee in een punt A aangrijpende krachten K_1 en K_2 te vinden, kan men uit de vergelijkingen:

$$R \cos \alpha = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 \quad (31)$$

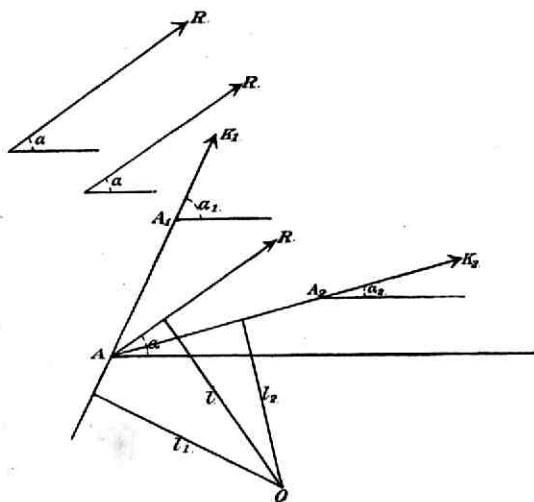
$$R \sin \alpha = K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_2 \quad (32)$$

de grootte en de richting der resultante bepalen, terwijl het punt A haar aangrijpingspunt is.

Moet echter de vervangende gezocht worden van de krachten K_1 en K_2 aangrijpende in A_1 en A_2 (fig. 51), dan zijn bovenstaande vergelijkingen niet meer voldoende.

In dit geval is er nog een vergelijking noodig, welke

Fig 51



aangeeft, dat van al de oneindig vele krachten R , die de uit de vergelijkingen (31) en (32) voortvloeiende grootte en

richting hebben, diegene wordt bedoeld, welke werkt langs de lijn gaande door A , het snijpunt van de lijnen waarlangs K_1 en K_2 werken. Men kan daartoe gebruik maken van de momentenvergelijking, want van alle lijnen, waarlangs de kracht R kan werken, is er slechts een, wier afstand tot het punt O de uit de momentenvergelijking gevonden grootte l heeft. Voegt men dus bij de vergelijkingen (31) en (32) nog de volgende:

$$Rl = K_1 l_1 + K_2 l_2, \quad (33)$$

dan zijn de grootte en de richting van de vervangende, en de lijn, langs welke zij werkt, volkomen bepaald.

§ 38. Vervanging van twee krachten langs onderling evenwijdige lijnen werkende.

Bij de boven gegeven beschouwingen is uitgegaan van de veronderstelling dat de lijnen, waarlangs de krachten werken, elkander snijden. Er moet dus onderzocht worden of deze drie vergelijkingen nog geldig blijven, indien de krachten langs onderling evenwijdige lijnen werken.

Werken op de punten A en B (fig. 52) van een lichaam twee krachten K_1 en K_2 langs onderling evenwijdige lijnen, dan zal het op de beweging van het lichaam geen invloed hebben, als er nog bovendien op de punten A en B twee even groote krachten Q_1 en Q_2 gaan werken, langs de lijn AB in onderling tegengestelde richtingen. De krachten K_1 en K_2 hebben dus op de beweging denzelfden invloed als de vier krachten K_1 , K_2 , Q_1 en Q_2 te zamen. De krachten K_1 en Q_1 hebben tot resultante R_1 ; de krachten K_2 en Q_2 hebben tot resultante R_2 . De vervangende van K_1 en K_2 heeft dus denzelfden invloed op de beweging als de vervangende R van R_1 en R_2 , en daar de lijnen, waarlangs deze laatste werken, elkander snijden, mogen de vergelijkingen (31) (32) en (33) ook ter bepaling van de vervangende van K_1 en K_2 worden aangewend.

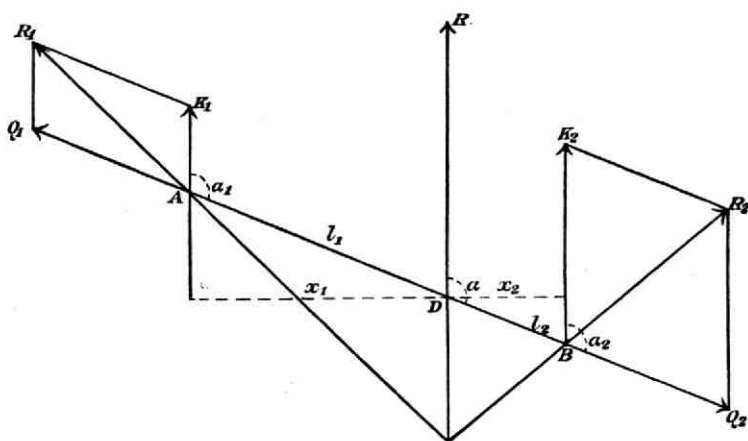
Stelt men in de vergelijkingen (31) en (32) $\alpha_1 = \alpha_2$, dan verkrijgt men:

$$\begin{aligned} R \cos \alpha &= (K_1 + K_2) \cos \alpha_1 & R \sin \alpha &= (K_1 + K_2) \sin \alpha_1 \\ \text{of} \quad R &= K_1 + K_2 & \alpha &= \alpha_1 = \alpha_2. \end{aligned}$$

De vervangende van twee krachten, in dezelfde richting langs onderling evenwijdige lijnen werkende, is gelijk aan haar som en heeft dezelfde richting als die krachten.

Om het punt D te bepalen, waar de lijn langs welke de

Fig. 52.



vervangende R werkt, de lijn AB snijdt, kan men van de momentenvergelijking gebruik maken. Ten opzichte van eenig punt is het moment van de vervangende R gelijk aan de som der momenten van R_1 en R_2 , of ook aan de som der momenten van K_1 , K_2 , Q_1 en Q_2 . Daar nu:

$$\text{moment } Q_1 + \text{moment } Q_2 = 0,$$

zoo is het moment van R gelijk aan de som der momenten van K_1 en K_2 .

Neemt men de momenten ten opzichte van het punt D , dan is:

$$0 = K_1 x_1 - K_2 x_2 \quad \text{of} \quad 0 = K_1 l_1 - K_2 l_2.$$

De twee stukken l_1 en l_2 , waarin de lijn AB door het punt D wordt verdeeld, zijn omgekeerd evenredig met de grootten der krachten, die op de uiteinden van AB werken.

Vervangt men l_2 door $AB - l_1$, dan vindt men voor

den afstand l_1 van D tot aan het aangrijpingspunt van K_1 :

$$l_1 = \frac{K_2}{K_1 + K_2} \cdot AB.$$

Werken er meer dan twee krachten langs onderling evenwijdige lijnen in een vlak, dan kan men eerst de vervangende R_1 zoeken van K_1 en K_2 , daarna de vervangende R_2 van R_1 en K_3 enz. Ook voor de vervangende van een willekeurig aantal krachten, werkende langs onderling evenwijdige lijnen in een vlak gelegen, geldt dus:

De vervangende is gelijk aan de som der krachten, en heeft dezelfde richting als deze krachten.

Het moment der vervangende ten opzichte van een in het vlak gelegen punt 0, is gelijk aan de som der momenten van alle krachten ten opzichte van hetzelfde punt 0.

Korter uitgedrukt, heeft men:

$$R = \Sigma (K) \quad Rl_0 = \Sigma (Kl).$$

Ook indien de krachten K_1 en K_2 werken langs onderling evenwijdige lijnen in onderling tegengestelde richtingen, mogen de vergelijkingen (31) (32) en (33) gebruikt worden, indien men kan aantoonen, dat de krachten K_1 en K_2 kunnen vervangen worden door twee krachten R_1 en R_2 , werkende langs twee elkander snijdende lijnen.

Gaat men op dezelfde wijze als hierboven te werk, dan blijkt (fig. 53) dat als K_1 en K_2 even groot zijn, de lijnen waarlangs de resultanten R_1 en R_2 werken, steeds onderling gelijke hoeken maken met de lijn AB , en dus ook onderling evenwijdig zijn. In dit geval kunnen K_1 en K_2 niet vervangen worden door twee krachten langs twee elkander snijdende lijnen.

Hebben K_1 en K_2 verschillende grootten, dan maken de lijnen waarlangs de resultanten R_1 en R_2 werken, onderling ongelijke hoeken met de lijn AB . De krachten K_1 en K_2 kunnen dan vervangen worden door krachten R_1 en R_2 , werkende langs twee elkander snijdende lijnen, en in dit geval gelden dus ook de vergelijkingen (31) (32) en (33).

Stelt men in de vergelijkingen (31) en (32) $\alpha_2 = 180^\circ + \alpha_1$, dan verkrijgt men:

$$R \sin \alpha = (K_1 - K_2) \sin \alpha_1 \text{ en } R \cos \alpha = (K_1 - K_2) \cos \alpha_2.$$

Brengt men deze vergelijkingen tot het kwadraat, en telt men ze op, dan wordt:

$$R^2 = (K_1 - K_2)^2$$

of $R = \pm (K_1 - K_2)$ en $\sin \alpha = \frac{K_1 - K_2}{R} \sin \alpha_1$.

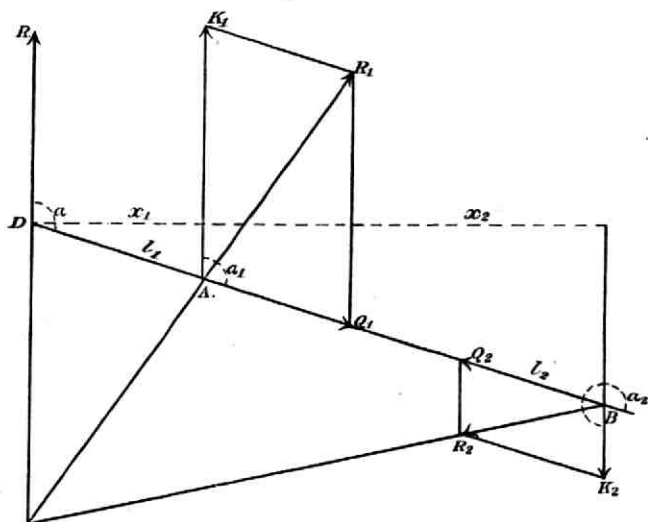
Een kracht is uit den aard der zaak steeds een positieve grootheid. Is dus $K_1 > K_2$, dan heeft men:

$$R = K_1 - K_2 \text{ en } \sin \alpha = \sin \alpha_1.$$

Is $K_1 < K_2$, dan wordt:

$$R = K_2 - K_1 \text{ en } \sin \alpha = -\sin \alpha_1.$$

Fig. 53.



De vervangende van twee krachten van ongelijke grootten, werkende langs onderling evenwijdige lijnen in onderling tegengestelde richtingen, is gelijk aan het verschil der krachten, en werkt in de richting der grootste.

Het punt D , waar de lijn langs welke de vervangende R werkt, de lijn AB snijdt, kan weer uit de momenten-

vergelijking worden gevonden. Neemt men de momenten ten opzichte van het punt D , dan is:

$$-K_1 x_1 + K_2 x_2 = 0 \text{ of } -K_1 l_1 + K_2 l_2 = 0.$$

De twee stukken l_1 en l_2 , waarin de lijn AB door het punt D wordt verdeeld, zijn omgekeerd evenredig met de grootten der krachten, die op de uiteinden van AB werken. Vervangt men l_2 door $l_1 + AB$, dan verkrijgt men voor den afstand l_1 van D tot aan het aangrijpingspunt van K_1 :

$$l_1 = \frac{K_2}{K_1 - K_2} \cdot AB.$$

§ 39. Koppel.

In de vorige paragraaf is aangetoond, dat men twee even groote krachten K_1 en K_2 op een lichaam werkende, langs onderling evenwijdige lijnen in onderling tegengestelde richtingen, niet kan vervangen door twee krachten, werkende langs elkander snijdende lijnen; zij kunnen dus niet door één kracht worden vervangen. Een zoodanig stel krachten noemt men een *koppel*. Het vlak waarin de krachten werken heet het *koppelvlak*; de afstand van de lijnen, waar langs de krachten K_1 en K_2 werken, heet de *arm* van het koppel.

Het *moment* van een koppel wordt bepaald door de grootte der krachten en door den arm. Het wordt evenredig gesteld met de grootte der krachten en met den arm. Is elk der krachten K dyn. eenheden groot, en is de arm l meters, dan is het koppelmoment:

$$M = f K l.$$

Als eenheid van koppelmoment wordt aangenomen het moment van een koppel, waarvan elk der krachten een dyn. eenheid is, en dat een arm heeft van één meter. Is elk der krachten K dyn. eenheden, en is de arm l meters, dan is het moment van het koppel M dier eenheden, als

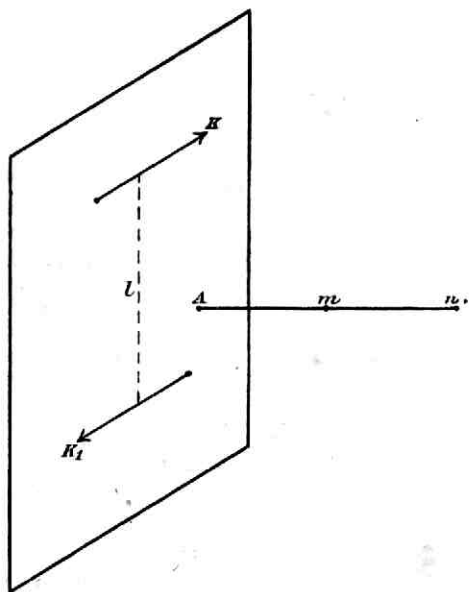
$$M = K l.$$

In het CGS-stelsel is de koppelmomentseenheid het 10^7 ^{de} gedeelte van de in dit leerboek aangenomene.

Men kent aan een koppelmoment een teeken toe. Indien de krachten, die het koppel vormen, aan het koppelvlak een draaiing trachten te geven in den zin van den horlogewijzer, dan noemt men het koppelmoment positief; trachten zij het koppelvlak te doen draaien in den zin tegengesteld aan dien van den horlogewijzer, dan noemt men het koppelmoment negatief. Natuurlijk hangt dan het teeken van een gegeven koppel nog af van de plaats, welke men zich voorstelt in te nemen. Met de voeten in het koppelvlak staande, kan men zich met het hoofd òf naar de eene zijde òf naar de andere zijde van het vlak gericht denken.

Wanneer men in eenig punt A van het koppelvlak (fig. 54) een loodlijn op dat vlak opricht aan dien kant, van waar-

Fig. 54.



uit gezien het koppel aan het koppelvlak een draaiing tracht te geven in den zin van den horlogewijzer, en wanneer op die loodlijn een stuk mn wordt genomen, zooveel meters lang als het koppelmoment momentseenheden heeft, dan noemt men dat stuk mn in de richting van m naar n , de as van het koppel. Er zal aangetoond worden, dat de uitwerking van een koppel geheel be-

paald is door de grootte en de richting van zijn as, en dat dus de as beschouwd mag worden als de graphische voorstelling van het koppel.

§ 40. Vervanging van koppels in één vlak werkende.

Wanneer twee koppels zoodanig op een lichaam werken, dat zij te zamen geen invloed hebben op de beweging van het lichaam, dan zegt men, dat die koppels elkander in evenwicht houden.

Twee koppels, in hetzelfde vlak werkende en met willekeurige armen, houden elkander in evenwicht, wanneer hun

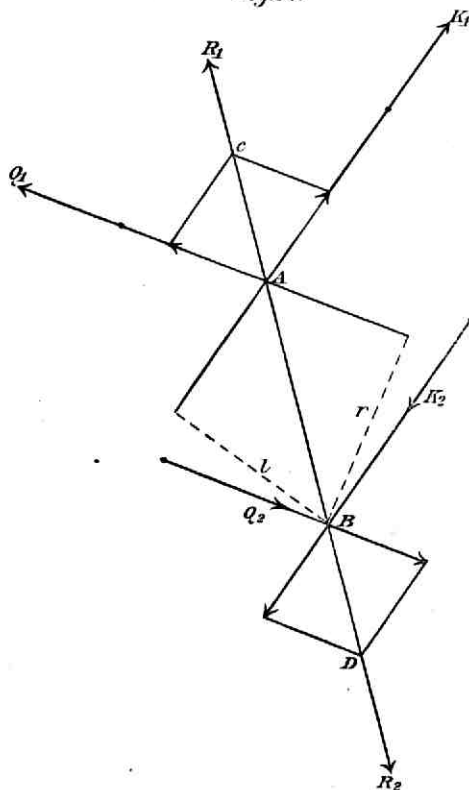
momenten even groot zijn, maar in teeken verschillen, en dus de algebraïsche som der momenten nul is.

Laat Kl en $-Qr$ eenheden de momenten zijn van twee op een lichaam werkende koppels (fig. 55), terwijl $Kl = Qr$ is.

Men verleng de lijnen, waarlangs de krachten K_1 en Q_1 werken, totdat zij elkander snijden in A , en bepale door de parallelogramconstructie de lijn AC , die de vervangende R_1 van K_1 en Q_1 voorstelt. Men verleng evenzoo de lijnen, waarlangs K_2 en Q_2 wer-

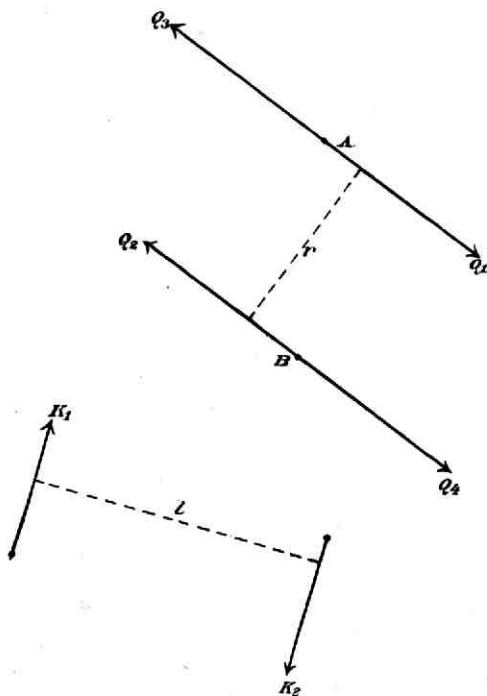
ken, en bepale de lijn BD , die de vervangende van K_2 en Q_2 voorstelt. De lijnen AC en BD zijn even groot

Fig. 55



als gelijkstandige diagonalen van congruente parallelogrammen. Het moment van R_1 ten opzichte van het punt B is volgens de momentenvergelijking: $Kl - Qr$; dit moment is nul, daar gegeven is $Kl = Qr$. De lijn, waarlangs R_1 werkt, gaat dus door B . Op dezelfde wijze toont men aan, dat de lijn, waarlangs R_2 werkt, door A gaat. Daar R_1 en R_2 even groot zijn, en langs dezelfde lijn AB in onderling tegen-

Fig 56.



gestelde richtingen werken, houden zij elkander in evenwicht; dit is dus ook het geval met de koppels K_1, K_2 en Q_1, Q_2 .

Uit het hier bewezene volgt, dat men een koppel K_1, K_2 (fig. 56) steeds mag vervangen door een in hetzelfde vlak werkend koppel Q_1, Q_2 , mits dit laatste hetzelfde moment heeft als het eerste. Men trekke toch door de twee willekeurige punten A en B van het lichaam, twee onderling evenwijdige lijnen, wier afstand r meters bedraagt. Indien

langs die lijnen nog bovendien krachten gaan werken, en wel op A de even groote krachten Q_1 en Q_3 in onderling tegengestelde richtingen, en op B de even groote krachten Q_2 en Q_4 in onderling tegengestelde richtingen, dan heeft dit geen invloed op de beweging van het lichaam.

Hebben de krachten Q_1 , Q_2 , Q_3 en Q_4 alle de grootte Q dyn. eenheden, dan werken nu op het lichaam de drie koppels $K_1 K_2$, $Q_1 Q_2$ en $Q_3 Q_4$, terwijl zijn beweging dezelfde is gebleven. Is bovendien $Qr = Kl$, dan houden de koppels $K_1 K_2$ en $Q_3 Q_4$ elkander in evenwicht, omdat de som hunner momenten nul is. Het koppel $K_1 K_2$ is derhalve vervangen door het koppel $Q_1 Q_2$, waarvan het moment gelijk is aan dat van $K_1 K_2$.

Werken er verschillende koppels in eenzelfde vlak met momenten M_1 , M_2 enz., dan kan elk dier koppels vervangen worden door een ander, waarvan de krachten aangrijpen in twee willekeurig gekozen punten A en B , en werken langs gegeven onderling evenwijdige lijnen. Is de afstand dier lijnen l meters, dan werken langs elk dier lijnen krachten, groot $\frac{M_1}{l}$, $\frac{M_2}{l}$ enz. dyn. eenheden. De in A en de in B aangrijpende resultanten der langs elke lijn werkende krachten, vormen dus een koppel, waarvan het moment is:

$$M = M_1 + M_2 + \text{enz.}$$

Indien derhalve eenige koppels in één vlak op een lichaam werken, dan is het moment van het vervangende koppel gelijk aan de som der momenten van de gegeven koppels.

§ 41. Vervanging van koppels in onderling evenwijdige vlakken werkende.

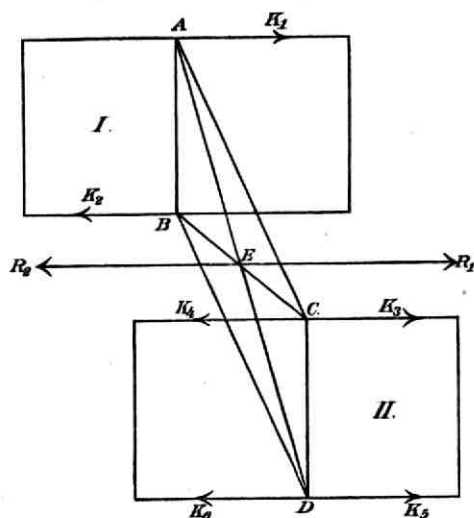
Alles wat hierboven bewezen is, geldt ook voor koppels in onderling evenwijdige vlakken werkende.

Om dit aan te toonen behoeft men slechts te bewijzen, dat een koppel werkende in het vlak I , vervangen kan worden door een ander koppel met een even groot moment, werkende in een vlak II evenwijdig aan vlak I , zonder dat de beweging van het lichaam verandert.

Zijn $K_1 K_2$ (fig. 57) de krachten van een koppel werkende in vlak I ; trekt men ergens een loodlijn AB op de lijnen waarlangs die krachten werken, dan mogen de punten A en B als de aangrijpingspunten van K_1 en K_2 worden beschouwd. Zij CD een lijn in vlak II gelijk en even-

wijdig aan AB ; indien nu nog bovendien in C de krachten K_3 en K_4 , in D de krachten K_5 en K_6 gaan werken, alle even groot als K_1 langs lijnen loodrecht op CD in onderling tegengestelde richtingen, dan houden die krachten

Fig. 57.



elkander in evenwicht, en hebben dus geen invloed op de beweging van het lichaam. De krachten K_1 en K_5 kunnen door R_1 , de krachten K_2 en K_4 door R_2 vervangen worden. Beide vervangenden R_1 en R_2 grijpen aan in het snijpunt E der diagonalen AD en BC van het parallellogram $ABCD$; zij zijn gelijk, en werken langs dezelfde lijn in onderling tegengestelde rich-

tingen; zij zijn dus met elkander in evenwicht. De krachten K_3 K_6 vormen nu in vlak II een koppel, dat het gegeven koppel K_1 K_2 in vlak I vervangt.

In elk der beide vlakken mag een willekeurig koppel vervangen worden door een ander met hetzelfde moment; hiermede is derhalve geheel algemeen bewezen, dat een koppel in eenig vlak werkende, steeds vervangen kan worden door een ander, werkende in een vlak evenwijdig aan het zijne, mits het moment hetzelfde blijft.

In verband met het in de vorige paragraaf bewezene volgt hieruit nog:

Koppels werkende in evenwijdige vlakken kunnen steeds worden vervangen door een koppel, welks moment gelijk is aan de algebraïsche som van de momenten der gegeven

koppels; als vlak van het vervangend koppel mag beschouwd worden elk willekeurig vlak evenwijdig aan de gegeven vlakken.

Door de as van een koppel zijn bepaald de grootte van het moment en de stand van alle onderling evenwijdige vlakken loodrecht op de as. Hiermede is dus tevens het bewijs geleverd, dat de werking van een koppel geheel bepaald is door zijn as.

§ 42. Vervanging van koppels werkende in vlakken, die elkander snijden.

Werken twee koppels met momenten M en M_1 in vlakken die elkander snijden (fig 58), dan kunnen zij steeds vervangen worden door twee andere koppels KK_1 en QQ_1 , waarvan de krachten werken op twee willekeurige punten A en B in de doorsnede der vlakken gelegen, en langs lijnen loodrecht op AB getrokken. Is de lijn AB l meters lang, dan is:

$$K = \frac{M}{l} \text{ en } Q = \frac{M_1}{l} \text{ dyn. eenheden.}$$

De krachten K en Q in A aangrijpende kunnen tot een resultante R worden samengesteld; de krachten K_1 en Q_1 in B aangrijpende tot een resultante R_1 . De lijnen, die R en R_1 voorstellen, zijn de diagonalen van twee parallelogrammen, die in evenwijdige vlakken liggen, en slechts verschillen door de onderling tegengestelde richtingen der gelijkstandige zijden. De resultanten R en R_1 zijn dus even groot, en werken langs onderling evenwijdige lijnen in onderling tegengestelde richtingen; zij vormen derhalve een koppel. Het moment van het vervangend koppel is RL .

Er zal aangetoond worden, dat als op de lijnen OM en ON , die de assen der gegeven koppels voorstellen, een parallelogram wordt beschreven, de diagonaal OL , waarvoor OM en ON de omliggende zijden zijn, in grootte en richting de as van het vervangend koppel voorstelt.

De lijn OM stelle de as voor van het koppel KK_1 ; zij staat dus loodrecht op vlak I en heeft de lengte Kl meters; de lijn ON stelle de as voor van het koppel QQ_1 ; zij staat dus loodrecht op vlak II en heeft de lengte Ql meters.

koppel, dat zij dus niet alleen in grootte, maar ook in richting de as van het vervangend koppel voorstelt. Eenig koppel, welks vlak loodrecht staat op deze lijn, en welks moment zooveel eenheden heeft als de lijn OL meters lang is, kan als het vervangende koppel der twee gegeven koppels beschouwd worden.

In het bovenstaande is bewezen, dat om van twee koppels op een lichaam werkende het vervangende koppel te vinden, men van dezelfde parallelogramconstructie mag gebruik maken, die vroeger is aangewend tot het vinden der resultante van twee krachten. Alle toepassingen uit die constructie gemaakt ter bepaling van de resultante van een willekeurig aantal op een punt werkende krachten, kunnen dus ook dienen bij het bepalen van het vervangend koppel van een willekeurig aantal gegeven koppels.

Laat bijv. een willekeurig aantal koppels met momenten $M_1, M_2, \dots, M_n$ op een lichaam werken. Uit een willekeurig punt O richte men loodlijnen op de verschillende koppelvlakken op, neme op iedere loodlijn van het punt O af een stuk, zooveel meters lang als het daarbij behorende koppel momentseenheden heeft, en wel in die richting, van waar uit gezien het koppel aan het koppelvlak een draaiing tracht te geven in den zin van den horlogewijzer. Die lijnen stellen dan de assen der koppels voor, en zijn $M_1, M_2, \dots, M_n$ meters lang. Men brenge nu door O drie onderling loodrechte coördinatenassen. Men kan dan elke koppelas ontbinden langs de drie coördinatenassen. Maken de koppelassen hoeken $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \dots, \lambda_n, \mu_n, \nu_n$ met de coördinatenassen, dan zijn die ontbondenen $M_1 \cos \lambda_1, M_1 \cos \mu_1, M_1 \cos \nu_1, \dots, M_n \cos \lambda_n, M_n \cos \mu_n, M_n \cos \nu_n$. De ontbondenen langs elk der coördinatenassen hebben een resulteerende gelijk aan haar som, dus:

$$M_x = \Sigma (M \cos \lambda) \quad M_y = \Sigma (M \cos \mu) \quad M_z = \Sigma (M \cos \nu).$$

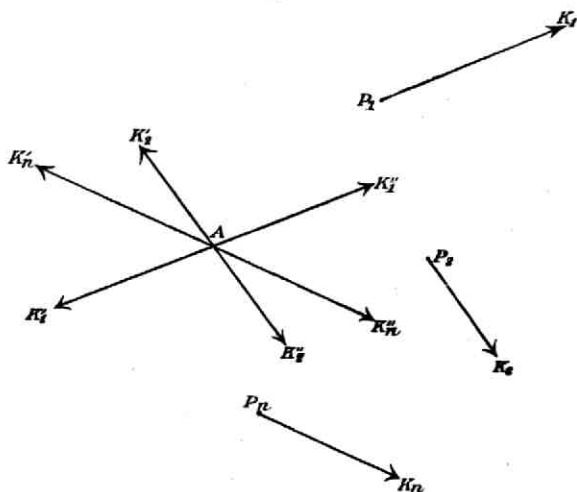
Voor de as van het vervangend koppel, vindt men hieruit de grootte: $M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$, (34) terwijl de richting der as bepaald wordt uit de vergelijkingen:

$$\cos \lambda_o = \frac{M_x}{M_o} \quad \cos \mu_o = \frac{M_y}{M_o} \quad \cos \nu_o = \frac{M_z}{M_o}.$$

§ 43. Algemeene evenwichtsvergelijkingen
voor willekeurige krachten op een
lichaam werkende.

Laat $K_1, K_2, \dots, K_n$ (fig. 59) zijn uitwendige krachten, die in de punten $P_1, P_2, \dots, P_n$ van een lichaam aangrijpen, en werken langs lijnen, die ten opzichte van elkander willekeurig gelegen zijn. Zij A een punt van het lichaam of een meetkundig punt daarbuiten, waarvan de afstanden tot

Fig. 59.



de punten van het lichaam niet kunnen veranderen. De beweging van het lichaam zal geen wijziging ondergaan, indien nog bovendien in A gaan werken: de krachten K'_1 en K''_1 , even groot als K_1 , in onderling tegengestelde richtingen langs een lijn evenwijdig met die, waarlangs K_1 werkt; de krachten K'_2 en K''_2 , even groot als K_2 , in onderling tegengestelde richtingen langs een lijn evenwijdig met die, waarlangs K_2 werkt, enz.

Elk der n gegeven krachten K is dan vervangen door drie krachten K , K' en K'' . De kracht K'' grijpt aan in het punt A , en heeft dezelfde richting als de onmiddellijk ge-

geven kracht K ; de twee andere K en K' vormen te zamen een koppel. In het geheel verkrijgt men dus n krachten van bekende richting en grootte, met het gemeenschappelijk aangrijpingspunt A , en bovendien n koppels, welker momenten en assen uit de ligging van het willekeurig gekozen punt A en uit de gegeven krachten kunnen bepaald worden.

De n krachten, in een punt A aangrijpende, kunnen tot een resultante R samengesteld worden. Van de n koppels kan men op de wijze in de vorige paragraaf uiteengezet, het vervangend koppel bepalen. Daar een koppel niet door een kracht kan vervangen worden, een koppel en een kracht elkander dus nooit in evenwicht kunnen houden, zoo kan er slechts dan evenwicht zijn, indien de vervangende kracht en het moment van het vervangend koppel elk afzonderlijk nul zijn. De algemeene evenwichtsvergelijkingen zijn dus:

$$R = 0 \quad (35) \quad \text{en} \quad M = 0. \quad (36)$$

Elk dezer beide vergelijkingen sluit evenwel drie andere in zich. De algemeene uitdrukking toch voor de resultante van n in één punt aangrijpende krachten is:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

en de algemeene uitdrukking voor het moment van het vervangend koppel van n gegeven koppels is:

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

De onder de wortelteekens staande termen kunnen als kwadraten nooit negatief worden; R en M kunnen dus slechts dan nul zijn, als elk dier termen afzonderlijk nul is. De vergelijkingen (35) en (36) sluiten dus de volgende zes evenwichtsvergelijkingen in zich:

$$R_x = 0 \quad R_y = 0 \quad R_z = 0 \quad (37)$$

$$M_x = 0 \quad M_y = 0 \quad M_z = 0 \quad (38)$$

De in deze zes vergelijkingen voorkomende grootheden moeten nu nog in de gegevens worden uitgedrukt. Als zoodanig moeten beschouwd worden:

1° de grootten der krachten $K_1 \dots K_n$;

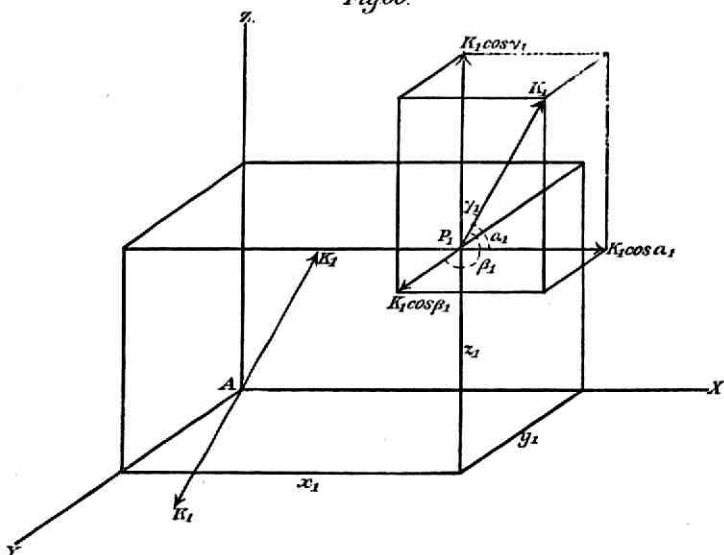
2° de hoeken $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, die de lijnen

waarlangs de krachten werken, maken met de drie coördinatenassen;

3° de coördinaten $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ van de aangrijpingspunten, dat zijn de afstanden dier punten tot de drie coördinatenvlakken (fig 60).

De in de vergelijkingen (37) voorkomende grootheden

Fig 60.



R_x, R_y, R_z zijn de ontbondenen langs de drie coördinatenassen van die kracht, welke de resultante der gegeven krachten zou zijn, indien deze laatste op het gemeenschappelijk aangrijpingspunt A werkten, elk langs de lijn evenwijdig aan die lijn, waarlangs de gegeven kracht werkt, en in denzelfden zin als de gegeven kracht. De grootheden R_x, R_y, R_z hebben derhalve hier volkomen dezelfde beteekenis als in § 29, namelijk:

$$R_x = \sum (K \cos \alpha) \quad R_y = \sum (K \cos \beta) \quad R_z = \sum (K \cos \gamma) \quad (39)$$

De in vergelijking (38) voorkomende grootheden M_x, M_y, M_z beteekenen de momenten van drie koppels, wier koppellassen

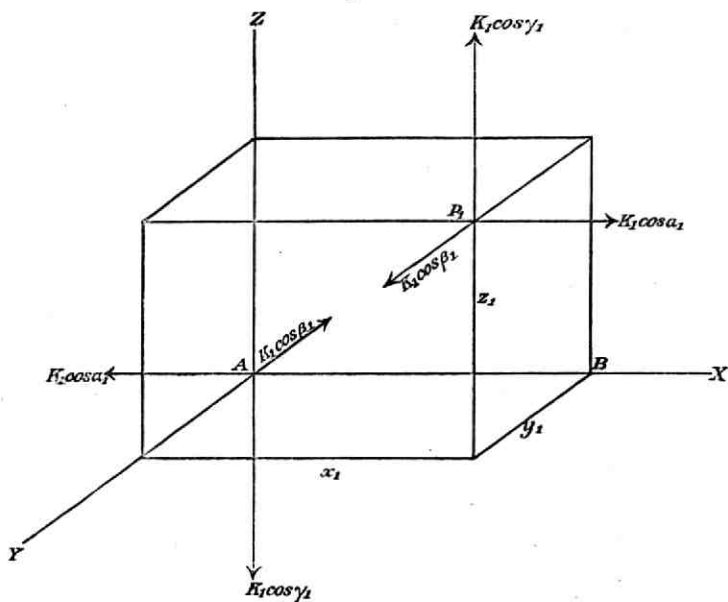
met de drie coördinatenassen samenvallen, en wier samenstelling het vervangend koppel oplevert.

Men bepaalt deze drie grootheden door de as van elk der n koppels langs de drie coördinatenassen te ontbinden, en de som te nemen van de ontbondenen langs elk der coördinatenassen.

Men kan bewijzen, dat de getalwaarde van het koppelmoment M_x even groot is als de getalwaarde van de som der momenten van de oorspronkelijk gegeven krachten ten opzichte van de as AX ; hetzelfde geldt dan voor de assen AY en AZ .

Om dit te bewijzen is het voldoende om aan te toonen, dat de bijdrage tot het koppelmoment M_x , door een van de n koppels $K_1 K_1'$ geleverd, dezelfde getalwaarde heeft

Fig 61.

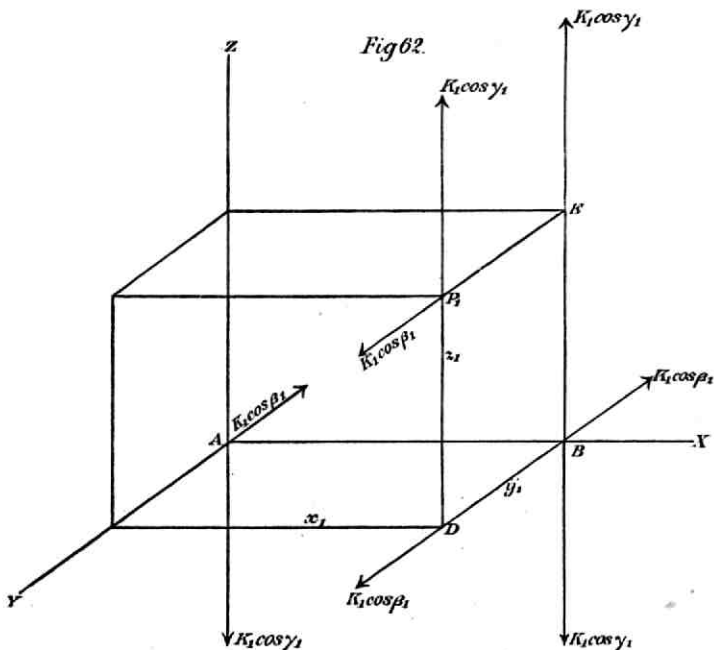


als het moment der oorspronkelijk gegeven overeenkomstige kracht K_1 ten opzichte van de as AX .

Daartoe ontbindt men elk der beide krachten K_1 van het koppel (fig. 61) in drie krachten in de richting der coördi-

natenassen. In plaats van het eene koppel $K_1 K_1'$ verkrijgt men dan drie koppels, waarvan de krachten zijn: $K_1 \cos \alpha_1$, $K_1 \cos \beta_1$ en $K_1 \cos \gamma_1$. De as van het koppel $K_1 \cos \alpha_1$ staat loodrecht op de as AX , omdat deze laatste in het koppelvlak ABP_1 ligt; de as van dit koppel heeft geen ontbondene langs de lijn AX , en het moment van dit koppel levert dus geen bijdrage aan het moment M_x .

De beweging van het lichaam zal geen verandering ondergaan, indien er nog bovendien aan de uiteinden der lijn BD (fig. 62) twee elkander in evenwicht houdende krachten $K_1 \cos \beta_1$, en aan de uiteinden der lijn BE twee elkander



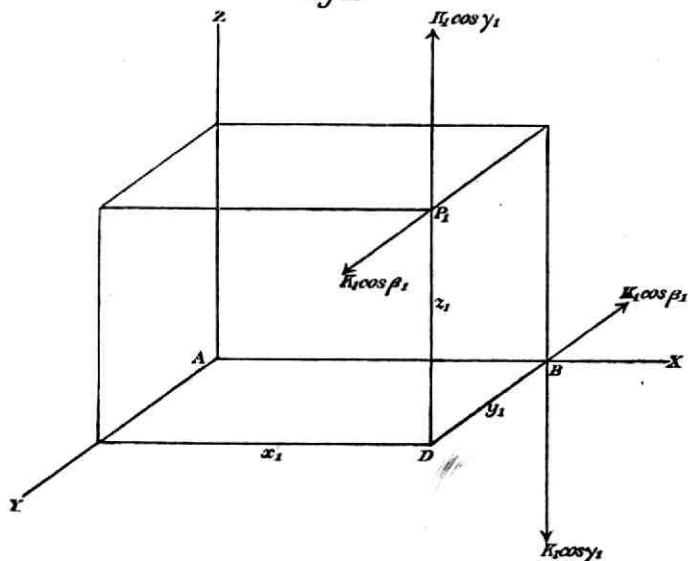
in evenwicht houdende krachten $K_1 \cos \gamma_1$ gaan werken. In plaats van twee, heeft men dan vier koppels. De in de punten A en D aangrijpende krachten $K_1 \cos \beta_1$ vormen een koppel, in welks vlak de as AX ligt; dit is ook het

geval met de in de punten A en E aangrijpende krachten $K_1 \cos \gamma_1$.

De assen dezer twee laatste koppels staan derhalve loodrecht op AX , en de momenten dier koppels kunnen bij de ontbinding geen bijdragen leveren aan het moment M_x .

Er blijven derhalve nog slechts de twee in fig. 63 aan-

Fig 63



gegeven koppels over, wier koppelvlakken beide loodrecht staan op AX , en wier assen dus langs de coördinatenas AX vallen. De momenten dier koppels $y_1 K_1 \cos \gamma_1$ en $z_1 K_1 \cos \beta_1$ zijn derhalve de bijdragen, die het koppel $K_1 K_1'$ aan het moment M_x levert. De as van het eerste koppel is gericht van A naar X , die van het tweede van X naar A . De bijdrage van het eerste koppel aan het moment M_x is dus positief, die van het tweede koppel negatief. De geheele bijdrage van het koppel $K_1 K_1'$ tot het moment M_x is dus:

$$M_x = y_1 K_1 \cos \gamma_1 - z_1 K_1 \cos \beta_1 \quad (40)$$

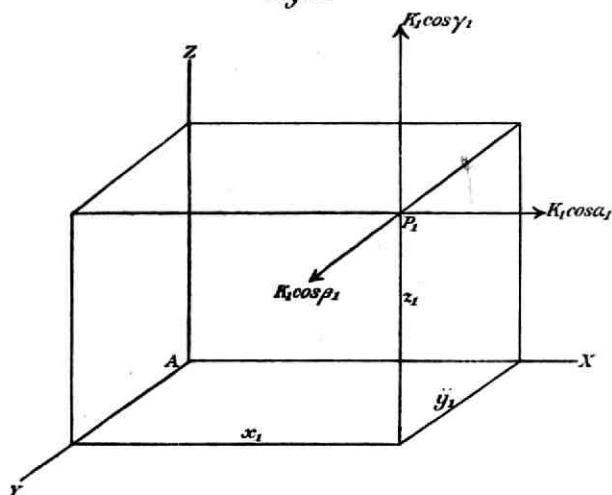
Volgens het in § 19 verklaarde is het moment van de kracht K_1 ten opzichte van eenige as, gelijk aan de som der momenten van haar ontbindingskrachten $K_1 \cos \alpha_1$, $K_1 \cos \beta_1$, $K_1 \cos \gamma_1$ ten opzichte van dezelfde as.

De momenten dier drie ontbindingskrachten ten opzichte van de as AX zijn volgens fig. 64:

$$y_1 K_1 \cos \gamma_1 - z_1 K_1 \cos \beta_1 \text{ en nul.}$$

De som dier drie grootheden komt geheel overeen met de

Fig. 64



in vergelijking (40) gevonden waarde van M_x ; bijgevolg heeft de bijdrage door het koppel $K_1 K_1'$ geleverd tot het moment M_x dezelfde getalwaarde als het moment van de oorspronkelijk gegeven, in het punt P_1 aangrijpende kracht K_1 ten opzichte van de as AX .

De grootheid M_x kan dus beschouwd worden als de som der momenten van alle gegeven krachten ten opzichte van de as AX . Zij heeft de grootte:

$$M_x = \sum (y K \cos \gamma - z K \cos \beta).$$

Daar de as AX geheel willekeurig genomen is, geldt dit

bewijs evenzoo voor de assen $A Y$ en $A Z$. De momenten M_y en M_z hebben dan de waarden:

$$M_y = \Sigma (z K \cos \alpha - x K \cos \gamma).$$

$$M_z = \Sigma (x K \cos \beta - y K \cos \alpha).$$

De algemeene evenwichtsvergelijkingen zijn dus de volgende:

$$\Sigma (K \cos \alpha) = 0 \quad (41)$$

$$\Sigma (K \cos \beta) = 0 \quad (42)$$

$$\Sigma (K \cos \gamma) = 0 \quad (43)$$

$$\Sigma (y K \cos \gamma - z K \cos \beta) = 0 \quad (44)$$

$$\Sigma (z K \cos \alpha - x K \cos \gamma) = 0 \quad (45)$$

$$\Sigma (x K \cos \beta - y K \cos \alpha) = 0 \quad (46)$$

Daar het stel coördinatenassen geheel willekeurig is aangenomen, zoo moet aan vergelijking (41) tot (46) nog voldaan zijn als men willekeurige andere assen kiest. Die vergelijkingen in woorden uitgedrukt, luiden dan als volgt:

Wanneer de op een absoluut vast lichaam werkende uitwendige krachten met elkander in evenwicht zijn, dan is de som der ontbindingskrachten in elke willekeurige richting, en de som der momenten van alle krachten ten opzichte van elke willekeurige as gelijk nul.

Omgekeerd:

Wanneer op een absoluut vast lichaam uitwendige krachten werken, wanneer de som der ontbindingskrachten in drie onderling loodrechte richtingen, en de som der momenten van alle krachten ten opzichte van drie onderling loodrechte assen gelijk nul is, dan is dit in iedere richting en ten opzichte van elke as het geval, en dan zijn de krachten met elkander in evenwicht.

Is aan de evenwichtsvergelijkingen (41) tot (46) niet voldaan, dan kunnen de uitwendige krachten, die op verschillende punten van een lichaam werken, in haar invloed op de beweging van het lichaam vervangen worden door een kracht en een koppel. Deze kracht hangt, wat grootte en richting betreft, niet af van de plaats van het punt A ; van die plaats hangt wel af de grootte en richting der as van het vervangend koppel.

Het is mogelijk dat het moment van het vervangend koppel nul is; dan is genoemde kracht de vervangende van $K_1 \dots K_n$; is alleen de kracht nul, dan is het genoemde koppel het vervangend koppel van $K_1 \dots K_n$.

Het kan gebeuren dat het lichaam niet geheel vrij is in zijn beweging. Is bijv. één punt van het lichaam vast, dan is het voor het evenwicht niet noodig dat de vervangende kracht nul is, mits zij werkt langs een lijn gaande door het vaste punt. Neemt men toch het vaste punt aan als snijpunt der coördinatenassen, dan wordt aan de vergelijkingen (41), (42) en (43) steeds voldaan. Voor het evenwicht wordt dan alleen vereischt, dat voldaan zij aan de vergelijkingen (44) (45) en (46).

Zijn in een lichaam twee punten P_1 en P_2 vast, dan zijn alle punten vast op de lijn die P_1 en P_2 verbindt. Kiest men die vaste lijn als een der coördinatenassen, bijv. als de as AZ , dan is steeds aan de vergelijkingen (41) tot (45) voldaan, en voor het evenwicht wordt dan alleen vereischt, dat voldaan zij aan vergelijking (46).

Het zou ook kunnen gebeuren, dat zich in het lichaam een vaste as bevond, zoodanig dat een beweging van het lichaam langs die as mogelijk bleef. Kiest men deze as dan als as AZ , dan wordt aan de vergelijkingen (41), (42), (44) en (45) steeds voldaan, en er wordt voor het evenwicht alleen vereischt, dat voldaan zij aan de vergelijkingen (43) en (46).

Zijn eindelijk in een lichaam drie vaste punten, die niet op dezelfde rechte lijn zijn gelegen, dan is het lichaam altijd in evenwichtstoestand, welke uitwendige krachten er ook op mogen werken.

HOOFDSTUK VII.

Werking der zwaartekracht.

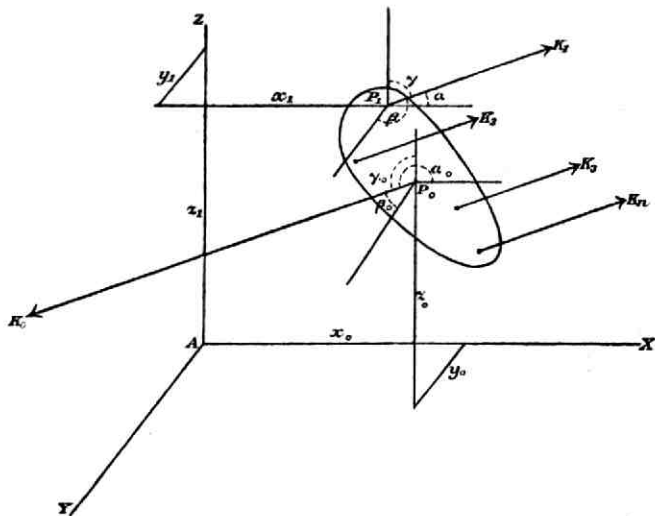
§ 44. Vervangende van krachten langs onderling evenwijdige lijnen werkende.

Indien eenige krachten op een lichaam werken, in dezelfde richting langs onderling evenwijdige lijnen, die niet in een

zelfde vlak liggen, dan hebben zij een vervangende. Werken bijv. drie zoodanige krachten K_1, K_2, K_3 , dan hebben volgens § 38 K_1 en K_2 een vervangende P . De lijn waarlangs P werkt is evenwijdig aan de lijnen waarlangs K_1 en K_2 , en dus ook aan de lijn waarlangs K_3 werkt. P en K_3 hebben dus ook een vervangende, die tevens de vervangende is van K_1, K_2 en K_3 .

Om van een willekeurig aantal krachten, werkende in dezelfde richting langs onderling evenwijdige lijnen, de ver-

Fig. 65.



vangende te bepalen, kan men gebruik maken van de algemeene evenwichtsvergelijkingen. Indien toch bij de gegeven krachten nog bovendien een kracht ging werken, even groot als de vervangende, langs de lijn waarlangs de vervangende werkt, maar in tegengestelde richting, dan zouden nu alle krachten met elkander in evenwicht zijn, en dus moeten voldoen aan de algemeene evenwichtsvergelijkingen.

Zijn $K_1 \dots K_n$ (fig. 65) de gegeven krachten en α, β, γ de hoeken, die de lijnen waarlangs zij werken, maken met

drie onderling loodrechte coördinatenassen; zij verder K_o de kracht, die de gegeven krachten in evenwicht houdt, en α_o , β_o , γ_o de hoeken, die de lijn waarlangs zij werkt, maakt met de drie assen, dan nemen de vergelijkingen (41), (42) en (43) der vorige paragraaf den volgende vorm aan:

$$\begin{aligned}\cos \alpha \Sigma (K) + K_o \cos \alpha_o &= 0 \\ \cos \beta \Sigma (K) + K_o \cos \beta_o &= 0 \\ \cos \gamma \Sigma (K) + K_o \cos \gamma_o &= 0 \\ \text{of: } \cos \alpha \Sigma K &= -K_o \cos \alpha_o \\ \cos \beta \Sigma K &= -K_o \cos \beta_o \\ \cos \gamma \Sigma K &= -K_o \cos \gamma_o.\end{aligned}$$

Telt men de kwadraten der drie laatste vergelijkingen bij elkander op, dan verkrijgt men:

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \Sigma^2 (K) = K_o^2 (\cos^2 \alpha_o + \cos^2 \beta_o + \cos^2 \gamma_o)$$

$$\text{of: } K_o = \Sigma (K).$$

Ter bepaling van de hoeken α_o , β_o , γ_o heeft men dan:

$$\cos \alpha_o = -\cos \alpha \quad \cos \beta_o = -\cos \beta \quad \cos \gamma_o = -\cos \gamma.$$

Hieruit volgt, dat de kracht K_o gelijk is aan de som der krachten $K_1 \dots K_n$, dat zij werkt langs een lijn evenwijdig aan de lijnen, waarlangs de gegeven krachten werken, maar in tegengestelde richting. De vervangende, tegengesteld aan K_o , werkt dus in dezelfde richting als de gegeven krachten, en is eveneens gelijk aan haar som.

De ligging der lijn, waarlangs de vervangende werkt, is bepaald als men eenig punt der lijn kent; als aangrijpingspunt der vervangende kan elk op die lijn gelegen punt worden beschouwd. Noemt men de coördinaten van eenig punt der lijn x_o , y_o , z_o , dan kan men deze vinden uit de evenwichtsvergelijkingen (44), (45), (46) der vorige paragraaf. Daar ook de kracht K_o hierbij in aanmerking komt, nemen deze vergelijkingen den vorm aan:

$$\begin{aligned}[\cos \gamma \Sigma (Ky) + \cos \gamma_o K_o y_o] - [\cos \beta \Sigma (Kz) + \cos \beta_o K_o z_o] &= 0. \\ [\cos \alpha \Sigma (Kz) + \cos \alpha_o K_o z_o] - [\cos \gamma \Sigma (Kx) + \cos \gamma_o K_o x_o] &= 0. \\ [\cos \beta \Sigma (Kx) + \cos \beta_o K_o x_o] - [\cos \alpha \Sigma (Ky) + \cos \alpha_o K_o y_o] &= 0.\end{aligned}$$

Hierin substitueerende de reeds gevonden waarden:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_o &= -\cos \alpha & \cos \beta_o &= -\cos \beta & \cos \gamma_o &= \cos \gamma \\ \cos \gamma [\Sigma(Ky) - K_o y_o] - \cos \beta [\Sigma(Kz) - K_o z_o] &= 0 \\ \cos \alpha [\Sigma(Kz) - K_o z_o] - \cos \gamma [\Sigma(Kx) - K_o x_o] &= 0 \\ \cos \beta [\Sigma(Kx) - K_o x_o] - \cos \alpha [\Sigma(Ky) - K_o y_o] &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Deze drie vergelijkingen zijn niet onderling onafhankelijk. Vermenigvuldigt men toch de eerste met $\cos \alpha$, de tweede met $\cos \beta$, en telt men ze bij elkander op, dan verkrijgt men de derde vergelijking. Er zijn dus, zooals reeds van te voren bekend was, oneindig veel punten x_o, y_o, z_o , die aan deze vergelijkingen voldoen. Het is voldoende een dier punten te bepalen, en dus voor de grootheden x_o, y_o en z_o een stel van waarden te vinden, die aan de vergelijkingen (48) voldoen. Nu komt elk der zes factoren tusschen haakjes tweemaal voor, en aan de vergelijkingen (48) wordt dus voldaan, wanneer men stelt:

$$\begin{aligned} \Sigma(Kx) - K_o x_o &= 0. \\ \Sigma(Ky) - K_o y_o &= 0. \\ \Sigma(Kz) - K_o z_o &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{of:} \quad \left. \begin{aligned} x_o &= \frac{\Sigma(Kx)}{\Sigma(K)} \\ y_o &= \frac{\Sigma(Ky)}{\Sigma(K)} \\ z_o &= \frac{\Sigma(Kz)}{\Sigma(K)} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Daar elk der coëfficiënten van de grootheden $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ nul is, zoo wordt nog dan aan de vergelijkingen (48) voldaan, als de hoeken α, β, γ willekeurige andere waarden krijgen, dat is, als de krachten een willekeurige andere richting krijgen, maar langs onderling evenwijdige lijnen in denzelfden zin blijven werken.

Het hier gevonden punt P_o onderscheidt zich derhalve van alle andere punten, gelegen in de lijn waarlangs de kracht K_o werkt, daardoor, dat de lijn waarlangs de vervangende werkt, steeds door P_o blijft gaan, als men de lijnen waarlangs de gegeven krachten werken, om de aangrijpingspunten

dier krachten laat draaien, mits slechts die lijnen onderling evenwijdig blijven, en de krachten haar oorspronkelijke grootten behouden, of althans alle in dezelfde verhouding veranderen. Om deze reden noemt men het door de vergelijkingen (49) bepaalde punt het »middelpunt van de langs onderling evenwijdige lijnen werkende krachten.”

§ 45. Algemeene vergelijkingen van het zwaartepunt.

Indien een lichaam bestaat uit stoffelijke punten met de massa's $m_1, m_2 \dots m_n$, dan werken er tengevolge van den invloed der aarde krachten op, de gewichten der stoffelijke punten, van $m_1 g, m_2 g \dots m_n g$ dyn. eenheden. Heeft het lichaam afmetingen, die klein zijn in vergelijking met de afmetingen der aarde, dan mogen die krachten beschouwd worden als te werken langs onderling evenwijdige lijnen. Zij hebben dan een vervangende, het gewicht van het lichaam genoemd, in verticale richting naar beneden werkende en $(m_1 + m_2 + \dots + m_n) g$ eenheden groot. Het middelpunt van deze krachten heet het zwaartepunt van het lichaam.

Vervangt men in de vergelijkingen (49) der vorige paragraaf $K_1, K_2 \dots K_n$ door $m_1 g, m_2 g \dots m_n g$, dan vindt men:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\sum (mg x)}{\sum (mg)} \\ y_0 &= \frac{\sum (mg y)}{\sum (mg)} \\ z_0 &= \frac{\sum (mg z)}{\sum (mg)}, \end{aligned}$$

of daar g een standvastige factor is van teller en noemer:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\sum (mx)}{M} \\ y_0 &= \frac{\sum (my)}{M} \\ z_0 &= \frac{\sum (mz)}{M} \end{aligned} \right\} (50)$$

Uit deze vergelijkingen blijkt, dat de ligging van het zwaartepunt onafhankelijk is van de grootte en richting der krachten, en dat zij alleen afhangt van de ligging der afzonderlijke stoffelijke punten, en van de wijze waarop de massa van het lichaam over de afzonderlijke punten is verdeeld.

Voor het opsporen van het zwaartepunt geven zij den volgende regel:

Om den afstand van het zwaartepunt van een lichaam tot een vlak te vinden, vermenigvuldige men het aantal massaeenheden van elk afzonderlijk stoffelijk punt met zijn afstand tot dit vlak, en deele de som van al deze producten door het aantal massaeenheden van het geheele lichaam.

Schrijft men de vergelijkingen (50) onder den vorm:

$$\left. \begin{aligned} Mx_o &= \Sigma (mx) \\ My_o &= \Sigma (my) \\ Mz_o &= \Sigma (mz), \end{aligned} \right\} (51)$$

dan blijkt hieruit, dat men de som der producten, welke men verkrijgt als men het aantal massaeenheden van elk der punten vermenigvuldigt met zijn afstand tot eenig vlak, steeds mag vervangen door het product van het aantal massaeenheden van het lichaam met den afstand van zijn zwaartepunt tot hetzelfde vlak.

Het voorgaande geldt niet slechts voor het geheele lichaam, maar ook voor elk willekeurig deel er van, daar zulk een deel op zichzelf ook een lichaam is. Men mag derhalve het geheele lichaam verdeelen in deelen, en de som der producten van elk deel afkomstig, vervangen door het product van het aantal massaeenheden van dat deel met den afstand van zijn zwaartepunt tot het vlak.

De vergelijkingen (50) en (51) gelden derhalve ook dan als $m_1, m_2 \dots m_n$ niet meer de massa's der afzonderlijke punten, maar de massa's van geheele groepen van stoffelijke punten voorstellen, waarbij dan onder x_1, y_1, z_1 enz. de afstanden der zwaartepunten van de overeenkomstige groepen tot de coördinatenvlakken moeten worden verstaan.

Men kan zich voorstellen een geheel van stoffelijke punten die gelegen zijn op een oppervlak. Indien de massa op onderling gelijke oppervlakte-deelen, hoe klein ook genomen,

overal dezelfde is, noemt men zulk een stelsel van stoffelijke punten een homogeen oppervlak.

Evenzoo kan men zich voorstellen een geheel van stoffelijke punten, die gelegen zijn op een lijn. Indien de massa op onderling gelijke lengtedeeelen, hoe klein ook genomen, overal dezelfde is, noemt men zulk een stelsel van stoffelijke punten een homogeen lijn.

§ 46. Zwaartepunten van meetkundige lichamen, vlakken, lijnen.

Indien I het volume is van een homogeen lichaam en γ de soortelijke massa van de stof waaruit het bestaat, dan is de massa van het geheele lichaam:

$$M = \gamma \cdot I.$$

Verdeelt men het volume van het lichaam in deelen $i_1, i_2 \dots i_n$, dan zijn evenzoo de massa's der deelen:

$$m_1 = \gamma i_1 \quad m_2 = \gamma i_2 \dots m_n = \gamma i_n.$$

Vervangt men deze waarden van $m_1, m_2 \dots m_n$ in de vergelijkingen (50), dan vindt men voor de coördinaten van het zwaartepunt van een homogeen lichaam:

$$x_o = \frac{\sum (\gamma i x)}{\sum (\gamma i)} \quad y_o = \frac{\sum (\gamma i y)}{\sum (\gamma i)} \quad z_o = \frac{\sum (\gamma i z)}{\sum (\gamma i)},$$

of den gemeenschappelijken factor in teller en noemer weglatende:

$$\left. \begin{aligned} x_o &= \frac{\sum (i x)}{\sum (i)} & I x_o &= \sum (i x) \\ y_o &= \frac{\sum (i y)}{\sum (i)} & I y_o &= \sum (i y) \\ z_o &= \frac{\sum (i z)}{\sum (i)} & I z_o &= \sum (i z) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Uit deze vergelijkingen blijkt, dat bij homogeen lichamen de ligging van het zwaartepunt geheel onafhankelijk is van de soortelijke massa der stof waaruit het lichaam bestaat, en dat zij alleen afhangt van den meetkundigen vorm van het

lichaam. Daarom is het geoorloofd te spreken van het zwaartepunt van een meetkundig lichaam.

Evenals van het zwaartepunt van een meetkundig lichaam, kan men ook spreken van het zwaartepunt van een meetkundig vlak en van een meetkundige lijn.

Bovenstaande vergelijkingen kunnen onmiddellijk aangewend worden ter bepaling van het zwaartepunt van homogene vlakken en lijnen; slechts beteekent dan γ de massa respectievelijk op de vlakke- en op de lengteenheid aanwezig.

Bij de aanwending der vergelijkingen (52) ter bepaling van het zwaartepunt, wordt verondersteld, dat men het lichaam kan verdeelen in volumedeelen, waarvan de zwaartepunten reeds bekend zijn. Is dit niet het geval, dan moeten de volumedeelen $i_1 \dots i_n$ oneindig klein genomen worden. De tellers en de noemers in die vergelijkingen zijn dan de sommen van een oneindig groot aantal oneindig kleine grootheden, welker bedrag moet worden bepaald.

De bepaling der coördinaten van het zwaartepunt kan somtijds op eenvoudiger wijze geschieden dan door de toepassing der vergelijkingen (52). Dit is steeds dan het geval, indien het gelukt aan het stelsel van coördinatenassen een zoodanigen stand te geven, dat enkele coördinaten van het zwaartepunt nul worden. Kiest men de coördinatenassen zoodanig, dat x_o , y_o , z_o alle drie nul worden, dan ligt het zwaartepunt natuurlijk in het snijpunt dier assen. In dit geval moet voldaan zijn aan de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (ix) &= 0 \\ \Sigma (iy) &= 0 \\ \Sigma (iz) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Kiest men de coördinatenassen zoodanig, dat y_o en z_o nul worden, dan ligt het zwaartepunt op de as AX . Er moet dan voldaan zijn aan de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (iy) &= 0 \\ \Sigma (iz) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Is eindelijk alleen z_o gelijk nul, dan ligt het zwaartepunt in het vlak XY . Er moet dan voldaan zijn aan de vergelijking:

$$\Sigma (iz) = 0. \quad (55)$$

Kan men derhalve voor het stelsel van coördinatenassen achtereenvolgens verschillende standen vinden, zoodanig dat het zwaartepunt of in een der coördinatenvlakken, of in een der coördinatenassen ligt, dan behoeft men om het zwaartepunt te verkrijgen, slechts het snijpunt van drie zulke vlakken, of van twee zulke lijnen te bepalen.

Deze methode kan met voordeel worden aangewend, ingeval het lichaam een bepaalden regelmatigigen vorm heeft, daar men bij zulk een lichaam meestal dadelijk kan zien, hoe een vlak moet aangebracht worden, opdat aan de vergelijking (55) ten opzichte van dit vlak voldaan zij. Noemt men de producten $i_1 z_1 \dots i_n z_n$ korthedshalve de momenten der volumedeelen ten opzichte van het vlak XY , dan zegt die vergelijking, dat de som der momenten van de volumedeelen ten opzichte van het vlak XY nul moet zijn.

In de twee volgende gevallen kan men al dadelijk aantoonen, dat deze voorwaarde vervuld is; vooreerst als elk dier momenten afzonderlijk nul is, d. i. als de zwaartepunten der afzonderlijke deelen alle in het vlak XY liggen, en ten tweede, als het vlak XY het lichaam in twee symmetrische helften verdeelt.

Evenzoo gaat een rechte lijn door het zwaartepunt van een vlak, wanneer de zwaartepunten der afzonderlijke deelen van dit vlak alle in die lijn liggen, of ook wanneer die lijn het vlak in twee symmetrische helften verdeelt.

Hieruit volgt, dat bij alle regelmatigige lichamen en vlakken het zwaartepunt in het middelpunt der figuur is gelegen.

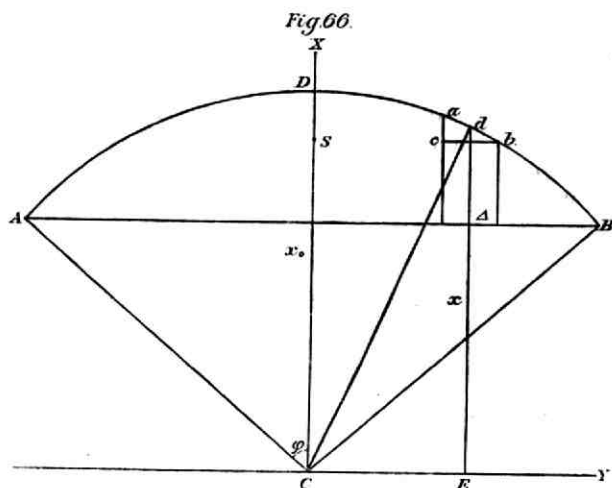
§ 47. Bepaling van zwaartepunten van lijnen.

Het zwaartepunt van een homogeeene rechte lijn ligt in haar midden, omdat ten opzichte van elk door dit punt gebracht vlak aan de vergelijking (55) is voldaan.

Het zwaartepunt van een gebroken lijn of van den omtrek eens veelhoeks kan derhalve dadelijk uit de vergelijkingen (52) worden gevonden. Daarin zijn dan $i_1 \dots i_n$ de lengten der zijden, en $x_1 y_1 z_1 \dots x_n y_n z_n$ de coördinaten van de middens dier zijden.

Het zwaartepunt van een willekeurige kromme lijn vindt men door deze te beschouwen als een gebroken lijn met

oneindig vele oneindig kleine zijden. Is de kromme lijn een cirkelboog, dan behoeft slechts de afstand van het zwaartepunt tot het middelpunt van den cirkel bepaald te worden, daar men reeds weet, dat het zwaartepunt moet liggen in den straal CD (fig. 66), die den boog AB middendoor-



deelt. Ter bepaling van den afstand $SC = x_0$ dient de eerste der vergelijkingen (52):

$$x_0 = \frac{\sum (ix)}{\sum (i)},$$

waarin $i_1 \dots i_n$ de lengten der oneindig kleine boogjes, en $x_1 \dots x_n$ de afstanden daarvan tot de as CY voorstellen.

Uit de gelijkvormigheid der driehoeken abc en CdE volgt:

$$\frac{ab}{cb} = \frac{Cd}{Ed} \text{ of } \frac{i}{\Delta} = \frac{r}{x}, \text{ dus } ix = r \Delta,$$

waaruit men vindt:

$$x_0 = r \frac{\sum (\Delta)}{\sum (i)} = r \cdot \frac{\text{koorde } AB}{\text{boog } AB},$$

of, als de halve hoek ACB φ radialen is:

$$x_0 = r \frac{2r \sin \varphi}{2r \varphi} = r \frac{\sin \varphi}{\varphi}. \quad (56)$$

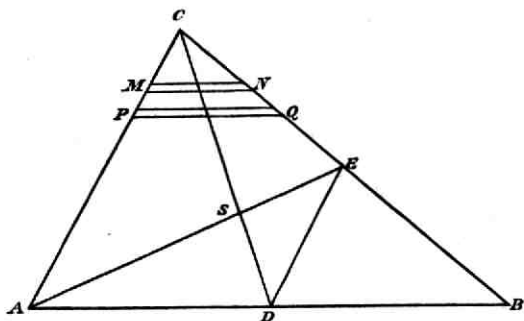
Stelt men hierin $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dan verkrijgt men voor den afstand van het zwaartepunt van den halven cirkelomtrek tot het middelpunt:

$$x_0 = \frac{2r}{\pi}.$$

§ 48. Bepaling van zwaartepunten van vlakken.

Het zwaartepunt van een driehoek ABC (fig. 67) ligt in de rechte lijn CD , die het midden der zijde AB met het tegenoverliggende hoekpunt C vereenigt, omdat de zwaartepunten van de oneindig smalle strookjes $MN, PQ, \dots$, waarin de driehoek kan worden verdeeld door aan de zijde AB evenwijdig getrokken lijnen, alle in de lijn CD liggen. Om dezelfde reden ligt het zwaartepunt van den driehoek ook op de lijn AE , die het midden van de zijde BC met

Fig. 67.



het tegenover liggende hoekpunt A verbindt. Het ligt dus in het snijpunt S der beide lijnen DC en AE . Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken BDE en BAC volgt $DE = \frac{1}{2} AC$, en uit de gelijkvormigheid van de driehoeken DES en ACS volgt $DS = \frac{1}{2} CS = \frac{1}{3} CD$. Het zwaartepunt van een driehoek ligt dus op de lijn, die het midden van een zijde met het tegenover liggende hoekpunt verbindt, en van die zijde af gerekend, op een derde van die lijn.

Het zwaartepunt van een veelhoek kan uit de vergelijkingen (52) worden bepaald, door den veelhoek te verdeelen in driehoeken. Is de veelhoek een vierhoek, dan kan men het zwaartepunt ook vinden, als men den vierhoek op twee

verschillende wijzen door diagonalen in twee driehoeken verdeelt. Verbindt men telkens de zwaartepunten der beide driehoeken door een lijn, dan ligt het zwaartepunt van den vierhoek in het snijpunt dier verbindingslijnen.

Om het zwaartepunt te vinden van een cirkelsector (fig. 68) met den straal r ,

verdeelt men den hoek 2φ radialen in oneindig kleine deelen. Elk deel van den cirkelsector mag als een driehoek beschouwd worden. Van al de driehoeken, waarin de cirkelsector verdeeld is, liggen de zwaartepunten op den omtrek van een cirkelboog met $\frac{2}{3}r$ tot straal. Het zwaartepunt van den cirkelsector valt dus samen met het zwaartepunt van dien cirkelboog. Volgens vergelijking (56) bedraagt de afstand, waarop dit van het middelpunt is gelegen:

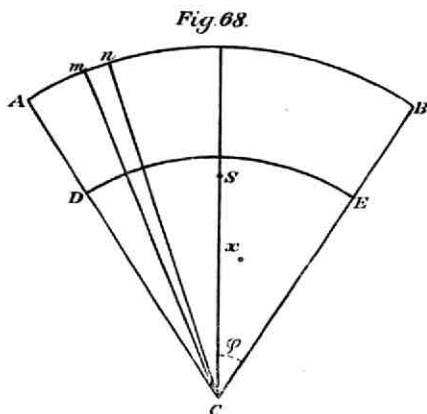
$$x_o = \frac{2}{3} r \frac{\sin \varphi}{\varphi}. \quad (57)$$

Stelt men hierin $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dan vindt men, dat het zwaartepunt van een halven cirkel op den afstand:

$$x_o = \frac{4r}{3\pi}$$

van het middelpunt is verwijderd.

Verdeelt men den cirkelsector $CADB$ (fig. 69) door de koorde AB in het segment ADB en den driehoek



CAB , en noemt men de vlakinhouden van sector, segment en driehoek respectievelijk F_0 , F_1 en F_2 , dan kan men het zwaartepunt van het segment bepalen uit de vergelijking:

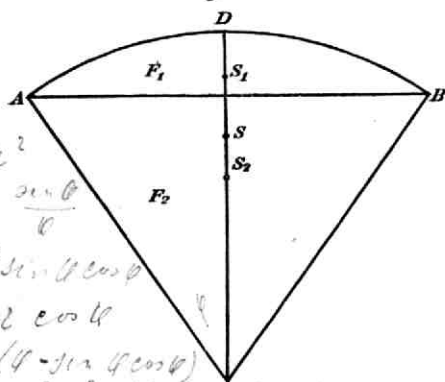
$$F_0 x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2, = \sum F x$$

waaruit voor x_1 gevonden wordt:

$$x_1 = \frac{F_0 x_0 - F_2 x_2}{F_1}.$$

In deze vergelijking moeten de vroeger gevonden waarden van x_0 en x_2 worden gesubstitueerd.

Fig. 69.



Het zwaartepunt van het gebogen oppervlak eens cilinders ligt in het midden van zijn as.

Het zwaartepunt van het gebogen oppervlak eens kegels ligt op de as op een derde van de hoogte van het grondvlak af gerekend.

Wordt een bol door een cilinder omhuld, en brengt men loodrecht op de as des cilinders twee oneindig dicht bij elkander gelegen vlakken, E_1 en E_2 (fig. 70) aan, dan snijden deze van den bol en den cilinder oneindig dunne schijfjes af. De gebogen oppervlakken dier schijfjes hebben hetzelfde zwaartepunt en dezelfde grootte. Het gebogen oppervlak van het uit den bol gesneden schijfje is namelijk:

$$f = 2 r \cos \varphi \cdot \pi \cdot m n, \quad x_1 = \frac{2}{3} r \sin \varphi$$

of daar $m n \cos \varphi = p q$ is:

$$f = 2 \pi r \cdot p q.$$

Het zwaartepunt van het gebogen oppervlak van een bol-

bolsegment met den straal $\frac{3}{4}r$ beschreven. Het zwaartepunt van den bolsector valt dus samen met het zwaartepunt van genoemd oppervlak. Is de hoogte van het bolvormig oppervlak van den sector h , dan is de hoogte van het bolsegment $\frac{3}{4}h$. Het zwaartepunt van het gebogen oppervlak van een bolsegment ligt op het midden der hoogte. De afstand van het zwaartepunt van den bolsector tot het middelpunt is derhalve:

$$x_o = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h.$$

Stelt men hierin $h = r$, dan verkrijgt men voor den afstand van het zwaartepunt van een halven bol tot het middelpunt:

$$x_o = \frac{3}{8}r.$$

Het zwaartepunt van een bolsegment kan wederom bepaald worden door den bolsector te verdeelen in een bolsegment en een kegel, en daarna het moment van het geheel gelijk te stellen aan de som van de momenten der beide deelen.

§ 50. Regel van Guldin.

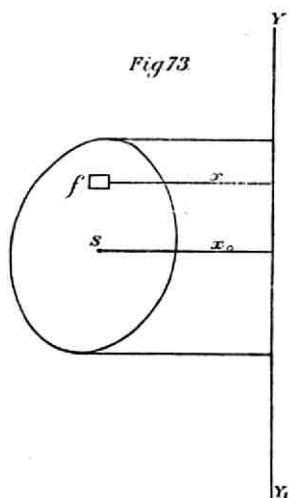
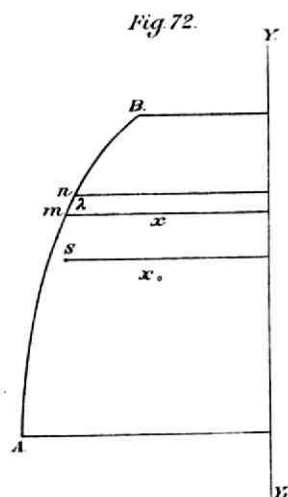
Wanneer een vlakke figuur draait om een in haar vlak gelegen as YY_1 (fig. 72), dan zal een punt op den afstand x van de as gelegen bij een volledige omwenteling den weg $2\pi x$ afleggen; het op den afstand x van de as gelegen oneindig kleine deel $mn = \lambda$ van een lijn AB in dat vlak, zal dus een deel van een kegeloppervlak beschrijven, waarvan de inhoud is $2\pi x\lambda$. De inhoud van het door de geheele lijn AB met de lengte l meters beschreven oppervlak F is de som van de inhouden door de afzonderlijke deelen beschreven, dus:

$$F = \Sigma(2\pi x\lambda) = 2\pi \Sigma(\lambda x).$$

Daar nu de som der momenten van de deelen gelijk is aan het moment van de geheele lijn of $\Sigma(\lambda x) = lx_o$, zoo heeft men:

$$F = 2\pi x_o l. \quad (58)$$

De vlakteinhoud van een omwentelingsoppervlak is gelijk aan de lengte van de beschrijvende lijn, vermenigvuldigd met den weg doorlopen door het zwaartepunt dier lijn.
Op soortgelijke wijze bepaalt men den inhoud van een



omwentelingslichaam. Het oneindig kleine deeltje f (fig. 73) beschrijft bij een geheele omwenteling een lichaam, waarvan de inhoud $2\pi x f$ is; de inhoud van het door de geheele figuur F beschreven lichaam is:

$$I = \Sigma (2\pi x f) = 2\pi \Sigma (fx),$$

of daar

$$\Sigma (fx) = Fx_0 \text{ is,}$$

$$I = 2\pi x F. \quad (59)$$

De inhoud van een omwentelingslichaam is derhalve gelijk aan den vlakteinhoud van de beschrijvende figuur, vermenigvuldigd met den weg door haar zwaartepunt doorlopen.

Bovengenoemde stellingen worden *de regel van Guldin* genoemd; zij gelden niet alleen voor een volledige omwenteling, maar ook voor elk willekeurig deel er van; men moet dan slechts den hoek 2π vervangen door den beschreven hoek φ .

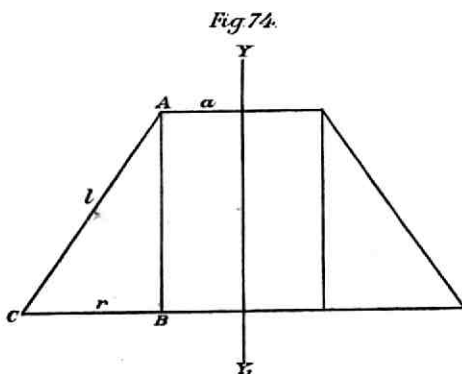
De inhoud van het lichaam beschreven bij de omwenteling van den rechthoekigen driehoek ABC (fig. 74) om de aan de rechthoekzijde AB evenwijdige as YY_1 , kan uit vergelijking (59) gevonden worden; stelt men daarin:

$$F = \frac{r h}{2} \text{ en } x_o = a + \frac{r}{3}, \text{ dan wordt:}$$

$$I = \left(a + \frac{r}{3}\right) \pi r h.$$

De zijde $AC = l$ beschrijft daarbij het oppervlak van een afgeknotten kegel, welks vlakteinhoud uit vergelijking (58) wordt verkregen door daarin $x_o = a + \frac{r}{2}$ te stellen, dus:

$$F = 2 \left(a + \frac{r}{2}\right) \pi l.$$



Stelt men in beide vergelijkingen $a = 0$, dan verkrijgt men voor den inhoud en voor het gebogen oppervlak van een kegel, welks hoogte h , en welks grondvlak een cirkel is met den straal r , de waarden:

$$I = \frac{\pi r^2 h}{3} \text{ en } F = \pi r l.$$

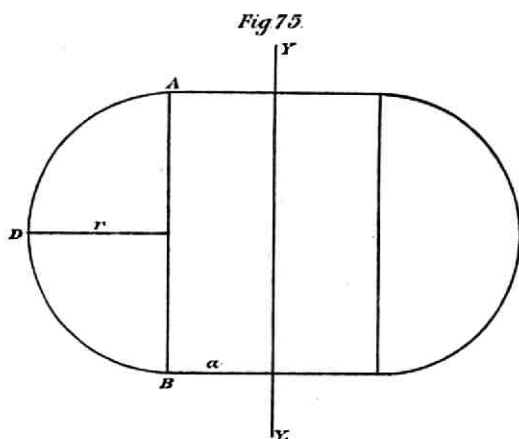
De inhoud van het lichaam beschreven bij de omwenteling van den halven cirkel ABD (fig. 75) om een as YY_1

evenwijdig aan de middellijn AB , kan gevonden worden door in vergelijking (59)

$$F = \frac{\pi r^2}{2} \text{ en } x_o = a + \frac{4r}{3\pi} \text{ te stellen, dus:}$$

$$I = \left(a + \frac{4r}{3\pi}\right) \pi^2 r^2.$$

Het door den halven cirkelomtrek ABD beschreven opper-



vlak vindt men door in vergelijking (58) $l = \pi r$ en $x_o = a + \frac{2r}{\pi}$ te stellen, dus:

$$F = 2 \left(a + \frac{2r}{\pi}\right) \pi^2 r.$$

Stelt men in deze beide vergelijkingen $a = 0$, dan vindt men voor den inhoud en voor het oppervlak van een bol met den straal r beschreven, de waarden:

$$I = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ en } F = 4 \pi r^2.$$

HOOFDSTUK VIII.

Weerstanden van vaste steunpunten.

§ 51. Lichaam ondersteund in een punt. Stabiël, labiël en indifferent evenwicht.

Het gewicht van een lichaam kan, welken stand het lichaam ook moge innemen, steeds beschouwd worden als een in het zwaartepunt aangrijpende en in verticale richting naar beneden werkende kracht.

Opdat het gewicht van een lichaam door eenige andere kracht worde in evenwicht gehouden, moet die kracht in verticale richting naar boven werken en gelijk zijn aan het gewicht; haar aangrijpingspunt moet liggen in de verticaal van het zwaartepunt. Aan deze drie voorwaarden voldoet de door het gewicht G te voorschijn geroepen weerstand W van eenig vast punt O in de verticaal van het zwaartepunt gelegen; deze weerstand toch is een kracht, die zoo groot is en in zoodanige richting werkt, dat elke beweging van het punt wordt belet. Is dus een der punten in de verticaal van het zwaartepunt gelegen een vast punt, dan is het lichaam in rust, mits er verder geen krachten op werken.

Indien omgekeerd het in een punt O bevestigde lichaam in rust is, dan kan men hieruit de gevolgtrekking maken, dat de krachten G en W elkander in evenwicht houden, en dat dus het zwaartepunt ergens in de verticaal van het vaste punt moet gelegen zijn. Men heeft hierin een middel om de plaats van het zwaartepunt proefondervindelijk te bepalen. Hangt men namelijk het lichaam achtereenvolgens in twee verschillende punten op, en bepaalt men beide keeren de punten $A_1 B_1$ en $A_2 B_2$, waarin de verticaal van het ophangpunt het oppervlak van het lichaam snijdt, dan is het snijpunt van de beide verbindingslijnen $A_1 B_1$ en $A_2 B_2$ het gezochte zwaartepunt.

Wordt het in het punt O bevestigde lichaam een weinig uit zijn evenwichtsstand gebracht, en daarna aan zich zelf overgelaten, dan zal het in het algemeen een draaiende beweging om het punt O aannemen. Al naarmate de draaiende beweging aanvankelijk een zoodanige is, dat het lichaam naar zijn vorigen evenwichtsstand terugkeert, of er

zich nog verder uit verwijderd, wordt de aanvankelijke evenwichtsstand stabiel of labiel genoemd. Indien het lichaam na elke kleine draaiing in rust blijft, dan noemt men den aanvankelijken evenwichtsstand indifferent.

De evenwichtsstand is stabiel, indien het zwaartepunt beneden het vaste punt en dus zoo laag mogelijk ligt; labiel, indien het zwaartepunt boven het vaste punt en dus zoo hoog mogelijk ligt; indifferent, indien het zwaartepunt met het vaste punt samenvalt.

Bovenstaande beschouwingen gelden ook dan nog, als het lichaam bevestigd is aan een horizontale vaste as.

Wanneer op een lichaam, dat in rust is en in een vast punt ondersteund wordt, twee of meer krachten werken, dan moeten deze krachten een vervangende hebben, werkende langs de lijn, die door het vaste punt gaat.

Het komt dikwijls voor dat een lichaam een vaste steunas heeft en in rust is, terwijl er krachten op werken langs lijnen, alle gelegen in een vlak loodrecht op de steunas. Ook dan moeten die krachten een vervangende hebben, werkende langs de lijn, welke gaat door het snijpunt O van de steunas en het vlak waarin de krachten werken. In dit geval volgt uit de momentenvergelijking, dat de som der momenten van alle krachten ten opzichte van het punt O nul moet zijn.

Een zoodanig lichaam, dat gewoonlijk den vorm heeft van een rechte of gebogen staaf, noemt men een hefboom. De lengte der loodlijn, uit O neergelaten op de lijn waarlangs eenige kracht werkt, heet de hefboomsarm dier kracht.

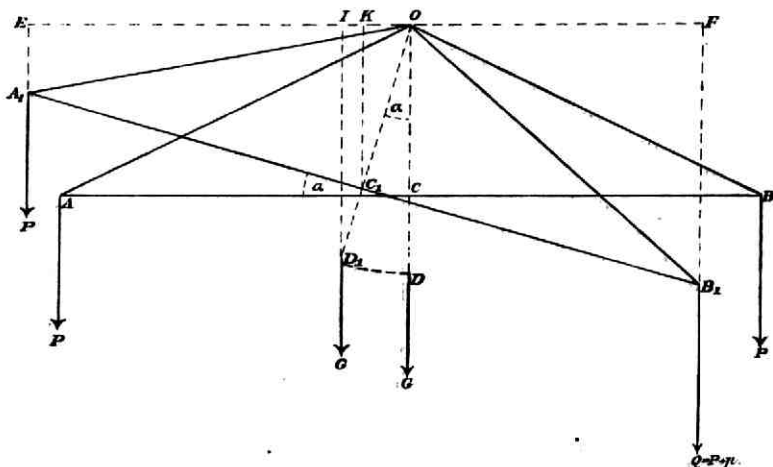
§ 52. Toepassing op het meten van gewichten.

Het hoofdbestanddeel van een balans is een hefboom, waaraan men den naam *juk* geeft.

Zij O (fig. 76) het snijpunt van de horizontale steunas met het daarop loodrecht staande vlak van teekening; kortheidshalve zal het punt O het steunpunt worden genoemd. Zijn evenzoo A en B de snijpunten van de steunassen der schalen met het vlak der teekening, welke assen evenwijdig zijn aan de steunas van het juk; A en B zullen de ophangpunten genoemd worden. Zij verder D het in het vlak van

teekening gelegen zwaartepunt van het juk; zij eindelijk de lengte der armen van het juk $AC = BC = l$ meters, de afstand van het zwaartepunt tot het steunpunt $OD = d$ meters, en de afstand van het steunpunt tot de lijn die

Fig. 76.



de ophangpunten verbindt $OC = a$ meters. Belast men de schaal in A met een gewicht P , die in B met een gewicht $Q = P + p$ eenheden, dan zal het juk den nieuwen evenwichtsstand OA_1B_1 innemen; de hoek, dien A_1B_1 met AB maakt, zij α radicalen.

Uit de momentenvergelijking volgt, als G het gewicht van het juk is:

$$(P + p) OF - P \cdot OE - G \times OI = 0,$$

of daar $OF = KF - KO$ en $OE = EK + KO$,

$$(P + p)(KF - KO) - P(EK + KO) - G \cdot OI = 0.$$

Nu is $KF = EK = l \cos \alpha$, $KO = a \sin \alpha$ en $OI = d \sin \alpha$, dus $(P + p)(l \cos \alpha - a \sin \alpha) - P(l \cos \alpha + a \sin \alpha) - Gd \sin \alpha = 0$,

$$\text{of } \operatorname{tg} \alpha = p \frac{l}{(2P + p)a + Gd} = p \frac{l}{(P + Q)a + Gd}.$$

Den hoek α noemt men den doorslag; voor kleine hoeken mag $\tan \alpha$ door α vervangen worden, en dan blijkt uit bovenstaande vergelijking, dat de grootte van α bij een bepaald overwicht p , afhangt van de lengten der armen, van de belasting $P + Q$, van den afstand a van het steunpunt tot de lijn die de ophangpunten verbindt, van het gewicht G van het juk, en van den afstand van het zwaartepunt van het juk tot het steunpunt.

Naar de grootte van α bij een bepaald overwicht p , wordt de gevoeligheid van een balans beoordeeld.

Stelt men in bovenstaande waarde van α $a = 0$, dan verkrijgt men:

$$\alpha = p \frac{l}{Gd}.$$

Indien dus het steunpunt ligt in de lijn die de ophangpunten verbindt, dan is de gevoeligheid van de balans evenredig met de lengte der armen, en omgekeerd evenredig met het gewicht van het juk en den afstand van het zwaartepunt van het juk tot het steunpunt; zij is dan echter onafhankelijk van de belasting.

Opdat de evenwichtsstand van de balans stabiel zij, moet het zwaartepunt D beneden het steunpunt O gelegen zijn.

De unster is een ongelijkarmige hefboom.

Zij O (fig. 77) het steunpunt en S het zwaartepunt van de onbelaste unster. Zij A het ophangpunt van de tot het opnemen van de belasting bestemde schaal met het gewicht K , en B het ophangpunt van een gewicht P , dan zal de unster in denzelfden evenwichtsstand zijn, dien zij inneemt als K en P niet werken, indien voldaan is aan de vergelijking:

$$Pa - Kr = 0.$$

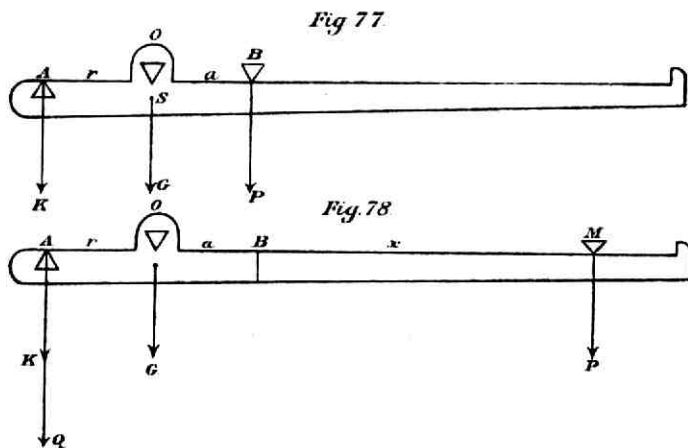
Wordt de schaal belast met het gewicht Q , dan zal om de unster in denzelfden evenwichtsstand te doen blijven, het ophangpunt van het gewicht P moeten verschoven worden. Bedraagt de afstand BM van het nieuwe ophangpunt M tot het oorspronkelijke B x meters (fig. 78), dan heeft men:

$$P(a + x) - (K + Q)r = 0.$$

Trekt men de eerste vergelijking van de tweede af, dan verkrijgt men:

$$Px - Qr = 0 \quad \text{of} \quad Q = \frac{Px}{r}.$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat men het onbekende gewicht Q kan berekenen uit de gemeten lengte x . In den



regel wordt de lange arm van de unster van te voren verdeeld, en wordt bij ieder deelpunt de berekende getalwaarde $\frac{Px}{r}$ geplaatst.

Opdat de evenwichtsstand van de unster stabiel zij, moet het zwaartepunt S beneden het steunpunt O liggen.

§ 53. Lichaam ondersteund in twee punten.

Indien twee punten A en B , in de verticaal van het zwaartepunt van een in rust zijnd lichaam gelegen, vaste punten zijn, dan kan de weerstand in elk dier punten te voorschijn geroepen, in het algemeen niet worden bepaald. Uit de ééne evenwichtsvergelijking voor dit geval volgt toch alleen, dat de som der weerstanden door de beide

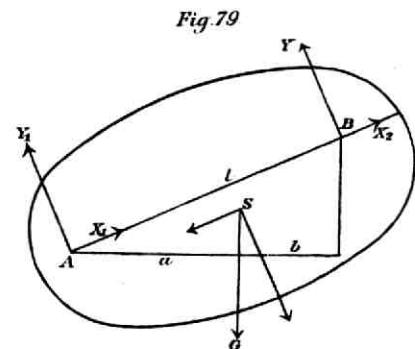
vaste punten geboden, gelijk is aan het in verticale richting naar beneden werkende gewicht van het lichaam; zij geeft dus geen uitsluitel omtrent de wijze, waarop de weerstand over de beide vaste punten is verdeeld. Door de wijze van ophangen te veranderen kan men het zoo inrichten, dat de weerstand van het punt A alleen, of die van het punt B alleen, evenwicht maakt met het gewicht G van het lichaam, of ook, dat de weerstand van één dier punten een willekeurige grootte heeft.

Indien men bijv. aan het aanvankelijk slechts in het punt A bevestigde lichaam nog een gewicht Q hangt, dan is de in A te voorschijn geroepen weerstand gelijk aan $Q + G$. Deze weerstand verandert niet als het punt B bevestigd, en daarna het gewicht Q weggenomen wordt. Bij deze wijze van bevestiging is de weerstand van A verticaal naar boven gericht en heeft de grootte $W_1 = G + Q$, terwijl de weerstand van B verticaal naar beneden is gericht en de grootte heeft $W_2 = Q$.

Indien het in rust zijnd lichaam bevestigd is in twee vaste punten A en B , welke niet in de verticaal van het zwaartepunt gelegen zijn, dan is de weerstand door elk der punten geboden, evenzoo onbepaald. De punten A en B moeten dan met het zwaartepunt van het lichaam in hetzelfde verticale vlak liggen. Voor het evenwicht wordt dan slechts vereischt, dat het snijpunt der lijnen, waarlangs de weer-

standen W_1 en W_2 werken, in de verticaal van het zwaartepunt ligt, een voorwaarde, waaraan op oneindig veel verschillende wijzen kan worden voldaan.

Deze onbepaaldheid heeft echter alleen betrekking op de ontbindingskrachten X_1 en X_2 (fig. 79) der weerstanden langs de lijn AB , terwijl de ont-



bindingskrachten Y_1 en Y_2 langs lijnen loodrecht op AB

steeds normaal op het gemeenschappelijk raakvlak in dat punt.

Zoo is bijv. in fig. 80 de weerstand van het punt A steeds loodrecht op de lijn AB . Ter bepaling der weerstanden heeft men uit de momentenvergelijkingen ten opzichte van B en van A :

$$W_1 \cdot AB - G \cdot BC = 0 \quad \text{of} \quad W_1 = G \frac{BC}{AB}$$

$$G \cdot AD - W_2 \cdot AE = 0 \quad \text{of} \quad W_2 = G \frac{AD}{AE}$$

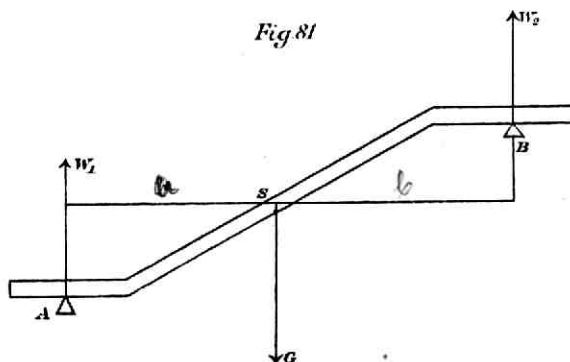
Indien het lichaam in elk der steunpunten op een horizontaal vlak rust, dan is de richting van den weerstand in elk der steunpunten verticaal.

Ter bepaling dier weerstanden heeft men (fig. 81):

$$W_1 (a + b) - Gb = 0 \quad \text{of} \quad W_1 = G \frac{b}{a + b}$$

$$Ga - W_2 (a + b) = 0 \quad \text{of} \quad W_2 = G \frac{a}{a + b}$$

Op gelijke wijze kunnen de weerstanden worden bepaald,



indien het op deze wijze in twee punten ondersteunde lichaam bovendien nog met andere gewichten is belast.

Maakt men (fig. 82) de momentenvergelijkingen op ten opzichte van de punten B en A , dan verkrijgt men:

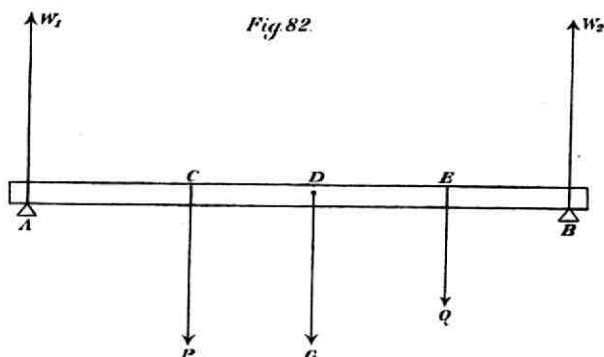
$$W_1 \cdot AB - P \cdot CB - G \cdot DB - Q \cdot EB = 0$$

$$P \cdot AC + G \cdot AD + Q \cdot AE - W_2 \cdot AB = 0,$$

of
$$W_1 = P \cdot \frac{CB}{AB} + G \cdot \frac{DB}{AB} + Q \cdot \frac{EB}{AB}$$

$$W_2 = P \cdot \frac{AC}{AB} + G \cdot \frac{AD}{AB} + Q \cdot \frac{AE}{AB}.$$

Uit deze vergelijkingen kan men nagaan welk gedeelte



van den weerstand door elk der gewichten P , G en Q wordt te voorschijn geroepen. Zij toonen aan, dat door elk gewicht afzonderlijk een even groote weerstand wordt opgewekt alsof dat gewicht de eenige belasting ware.

§ 54. Lichaam ondersteund in drie punten.

Zijn drie niet in een rechte lijn gelegen punten van een lichaam vaste punten, dan kunnen de weerstanden van die punten slechts dan worden bepaald, wanneer de richtingen dier weerstanden bekend zijn.

Is de richting van den weerstand in een der drie punten gegeven, dan kan steeds ook de grootte van dien weerstand worden bepaald. Stelt men toch de momentenvergelijking

verticaal van het zwaartepunt de zijde BC van den driehoek ABC , dan is $V_1 = 0$. Snijdt de verticaal van het zwaartepunt het ondersteuningsvlak in een punt F_1 buiten den driehoek, dan wordt de momentenvergelijking:

$$G \cdot E_1 F_1 + V_1 \cdot AD = 0 \text{ of } V_1 = -G \cdot \frac{E_1 F_1}{AD}.$$

V_1 wordt dan negatief, en het lichaam zal kantelen, tenzij het punt A een weerstand in verticale richting naar beneden kan bieden.

Voor het evenwicht wordt dus vereischt, dat de verticaal van het zwaartepunt het ondersteuningsvlak snijdt binnen den driehoek, waarvan de steunpunten de hoekpunten zijn. Valt dit snijpunt ergens in den omtrek van den driehoek, dan is de evenwichtsstand labiel; de geringste uitwijking naar dien kant zou het omslaan van het lichaam tengevolge hebben. Valt daarentegen het snijpunt binnen den driehoek, dan is het, teneinde het lichaam om één der zijden van den driehoek te doen kantelen, noodig, dat er op eenig punt van het lichaam een kracht werke, wier moment ten opzichte van die zijde aanvankelijk minstens even groot is als het moment van het gewicht G ten opzichte van diezelfde zijde. In het laatste geval is dus de evenwichtsstand van het lichaam stabiel, en het moment van het gewicht G ten opzichte van de zijde, om welke men het lichaam wil doen kantelen, kan als maat voor de stabiliteit worden genomen. Dit moment wordt daarom het *stabiliteitsmoment* van het lichaam ten opzichte van die zijde genoemd.

§ 55. Lichaam steunend op een horizontaal vlak.

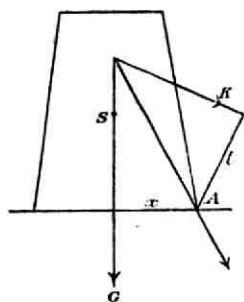
Rust een lichaam met meer dan drie punten op een horizontaal steunvlak, dan is de verdeeling van den weerstand over de steunpunten wederom onbepaald. Voor het evenwicht wordt slechts vereischt, dat het punt, waar de verticaal van het zwaartepunt het steunvlak snijdt, ligt binnen de ondersteuningsbasis, dat is, de door de buitenste steunpunten gebrachte veelhoek, binnen welken dus alle steunpunten gelegen zijn.

Het moment van het gewicht ten opzichte van eenige zijde

der ondersteuningsbasis wordt het stabiliteitsmoment van het lichaam ten opzichte van die zijde genoemd. Een lichaam, dat met een plat vlak rust op een horizontaal vlak, kan beschouwd worden als een lichaam met oneindig veel steunpunten.

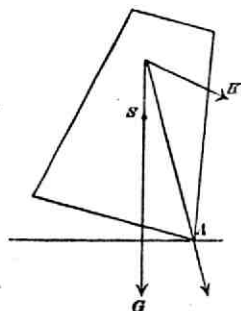
Om een lichaam (fig. 84) om de zijde A te doen kantelen, moet op eenig punt van dat lichaam een kracht K werken,

Fig. 84.



welker moment Kl ten opzichte van A aanvankelijk minstens even groot moet zijn als het stabiliteitsmoment Gx ten opzichte van A ; in dit geval toch gaat de lijn, waarlangs de vervangende van G en K werkt, door de zijde A , en de minste kracht is voldoende om het lichaam in beweging te brengen. Gedurende het kantelen wordt het moment van het gewicht G ten opzichte van A voortdurend kleiner; het wordt nul op het oogenblik dat het zwaartepunt S verticaal boven de zijde A ligt en dus zijn hoogsten stand bereikt (fig. 86). Zonder dat het kantelen ophoudt kan derhalve ook het moment van de kracht,

Fig. 85.



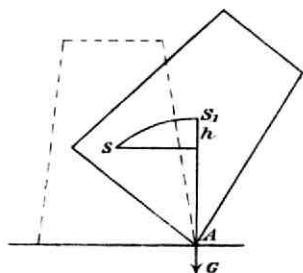
die het kantelen veroorzaakt, allengs kleiner worden, en wel in dier voege, dat het steeds gelijk blijft aan het moment van G . Is dit het geval, dan zal ook gedurende de beweging de vervangende der krachten G en K steeds werken langs de lijn die door A gaat (fig. 85). De vervangende verricht bij deze beweging den arbeid nul; ook de som der arbeiden door K en G bij deze beweging verricht is dus nul. Daar volgens fig. 86 de door het gewicht G verrichte arbeid $-Gh$ is, vindt men den door de kracht K ver-

richten arbeid $\mathcal{U}$ uit de vergelijking:

$$\mathcal{U} - Gh = 0 \quad \text{of} \quad \mathcal{U} = Gh. \quad (60)$$

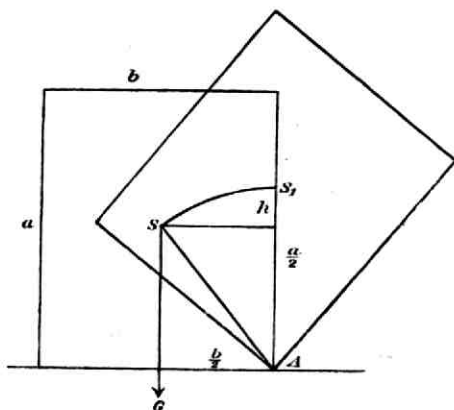
Zoodra het lichaam den stand in fig. 86 heeft bereikt, is er verder geen kracht meer noodig om het geheel te doen omvallen, daar zijn eigen gewicht de beweging zal doen voortduren.

Fig. 86



stand, dien het zwaartepunt doorloopt, als het lichaam uit

Fig. 87



zijn oorspronkelijken evenwichtsstand in den naastbijgelegen labielen evenwichtsstand wordt gebracht.

Zijn van een rechthoekig parallelopipedum (fig. 87) de ribben a , b en c meters lang, en is de soortelijke massa van de stof waaruit het bestaat γ , dan is de massa van het lichaam:

$M = \gamma abc$ kilogram,
en het gewicht:

$$G = g \gamma abc \text{ eenheden.}$$

Het stabiliteitsmoment ten opzichte van de ribbe A is:

$$M = g \gamma abc \frac{h}{2} \text{ eenheden.}$$

De verticale afstand, dien het zwaartepunt bij de kanteling doorloopt, is:

$$h = AS_1 - \frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$$

De dynamische stabiliteit van het lichaam ten opzichte van de ribbe A is dus bepaald door den arbeid:

$$\mathfrak{A} = g \gamma abc \left\{ \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} \right\} \text{ eenheden.}$$

Bestaat het lichaam uit graniet, waarvan de soortelijke massa 2750 kilogram is, en is $a = 0,8$, $b = 0,6$ en $c = 1$ meter, dan is:

$$\mathfrak{A} = 9,81 \cdot 2750 \cdot 0,8 \cdot 0,6 \{ \sqrt{0,4^2 + 0,3^2} - 0,4 \} = 1195 \text{ eenh.}$$

Wil men dezen arbeid in kilogrammeters uitdrukken, dan moet bovenstaand getal door 9,81 gedeeld worden,

$$\text{of} \quad \mathfrak{A} = \frac{1195}{9,81} = 132 \text{ kilogrammeters.}$$

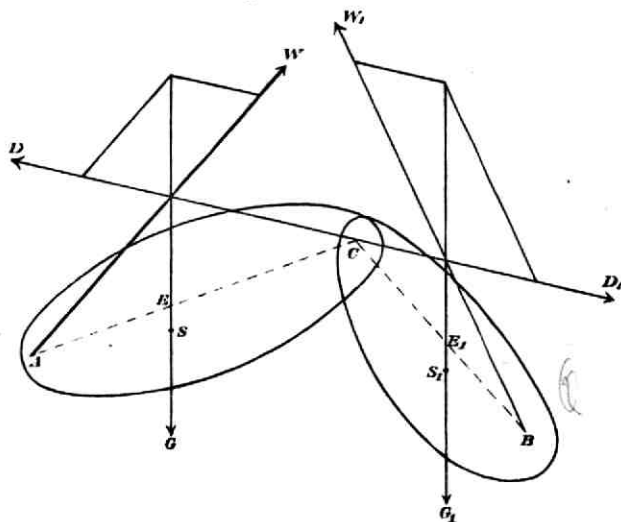
Om dus dit granietblok om de ribbe A te doen kantelen is er een arbeid noodig, even groot als de arbeid benoodigd om een massa van 132 kilogram 1 meter hoog op te heffen.

§ 56. Weerstand van twee lichamen, die elkander in één punt steunen.

In § 53 is aangetoond, dat wanneer een lichaam in twee vaste punten ondersteund wordt, de weerstanden van de steunpunten niet kunnen bepaald worden, zoolang niet de wijze van bevestiging in minstens één van beide steunpunten bekend is. Dit laatste is nu het geval, indien twee lichamen P en Q (fig. 88) elk in een vast punt bevestigd zijn, en elkander in een derde punt C wederkeerig steunen. Daar toch werking en terugwerking aan elkander gelijk zijn, is de kracht D , die Q in het punt C op P uitoefent en die de draaiing van P om het vaste punt A belet, gelijk en tegengesteld aan de kracht D_1 , die P in het punt C op Q uitoefent en die de draaiing van Q om het vaste punt B

belet. Men heeft dus ter bepaling van D en D_1 twee onderling onafhankelijke vergelijkingen, de momentenvergelijkingen ten opzichte van A en B , uit welke de grootten en de richtingen der krachten D en D_1 kunnen gevonden

Fig. 88



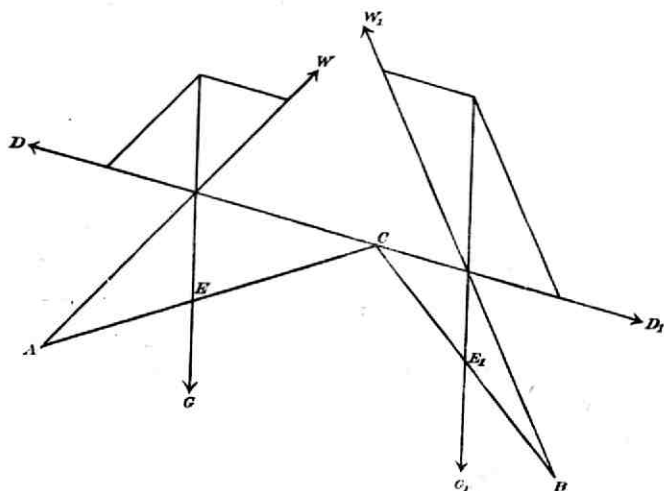
worden. Zijn de krachten D en D_1 bekend, dan kunnen de weerstanden W en W_1 van de vaste punten A en B bepaald worden door middel van de in § 53 verklaarde en in fig. 88 aangegeven constructie.

Voor het evenwicht wordt vereischt, dat de krachten D, D_1, G, G_1 in hetzelfde vlak werken; de zwaartepunten S en S_1 en de drie steunpunten A, B en C moeten derhalve in eenzelfde verticaal vlak liggen. De lijn waarlangs de kracht G werkt, snijdt derhalve de lijn AC , en het snijpunt E mag als het aangrijppingspunt van G beschouwd worden. Om dezelfde reden mag het snijpunt E_1 als het aangrijppingspunt van het gewicht G_1 worden aangenomen. Daar de vorm van elk der lichamen hier slechts voor zooverre in aanmerking komt, als de ligging van het zwaartepunt er door wordt bepaald, zoo kan die vorm voortaan buiten be-

schouwing blijven; de lichamen mogen behandeld worden als vaste stangen, die in de vaste punten A en B bevestigd zijn, die elkander in C steunen, en die in E en E_1 met de gewichten G en G_1 belast zijn. Dit eenvoudiger geval is voorgesteld in fig. 89.

Om de grootte en de richting van elk der krachten D en

Fig. 89.



D_1 te kennen, is het voldoende de ontbindingskrachten in horizontale en verticale richting te bepalen. Men verkrijgt deze ontbindingskrachten H, H_1, V, V_1 door achtereenvolgens de momentenvergelijking op te stellen, eerst ten opzichte van A en dan ten opzichte van B . Deze vergelijkingen zijn volgens fig. 90 en fig. 91.

$-Vb - Hh + Gc = 0$ en $-Vb_1 + Hh_1 - G_1c_1 = 0$
 of $Gc = M$ en $G_1c_1 = M_1$ stellende, en in het oog houdende dat $V_1 = V$ en $H_1 = H$,

$$Vb + Hh = M \quad -Vb_1 + Hh_1 = M_1.$$

De oplossing van deze vergelijkingen geeft voor de gezochte ontbindingskrachten:

$$H = \frac{M b_1 + M_1 b}{b h_1 + b_1 h},$$

$$V = \frac{M h_1 - M_1 h}{b h_1 + b_1 h}.$$

De grootte van D , evenals die van D_1 is:

$$D = D_1 = \sqrt{H^2 + V^2}$$

De hoek, dien de lijn waarlangs D en D_1 werken,

Fig. 90

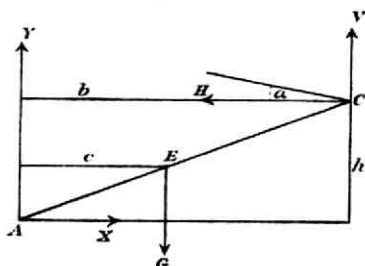
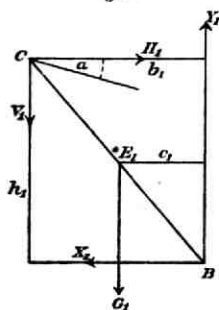


Fig. 91.



maakt met een horizontale lijn, verkrijgt men uit de vergelijking:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H}.$$

Is $M h_1 - M_1 h = 0$ of $\frac{M}{M_1} = \frac{h}{h_1}$, dan is V , en dus ook

$\operatorname{tg} \alpha$ nul; de richting van D is dan horizontaal.

Is $M h_1 - M_1 h$ negatief, dan is V negatief; d. w. z. dat in de figuur zoowel V als V_1 in tegengestelde richting moet worden genomen. Ook $\operatorname{tg} \alpha$ is dan negatief, en de hoek α is dan ook aan den anderen kant van de horizontale lijn gelegen.

Is de kracht D bekend, dan kunnen de ontbindingskrachten X en Y bepaald worden van den weerstand W door het vaste punt A geboden. Men heeft toch:

$$\begin{aligned} X - H &= 0 & \text{of} & & X &= H \\ Y + V - G &= 0 & \text{of} & & Y &= G - V. \end{aligned}$$

Evenzoo vindt men voor de ontbindingskrachten X_1 en Y_1 van den weerstand door het vaste punt B geboden:

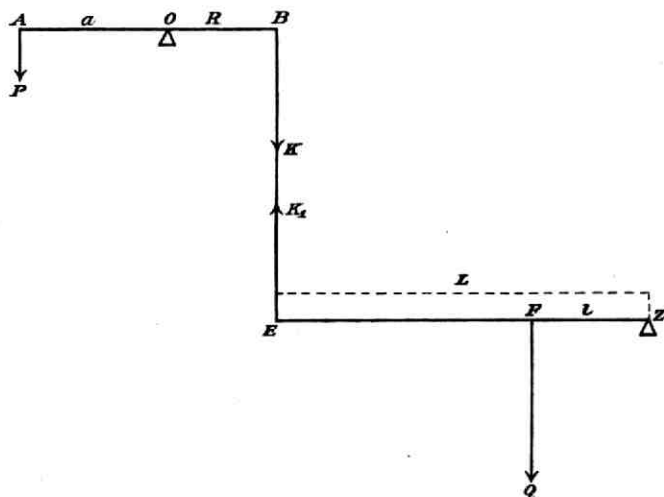
$$X_1 = H \text{ en } Y_1 = G_1 + V.$$

De horizontale ontbindingskrachten X en X_1 van die weerstanden zijn derhalve beide gelijk aan de horizontale ontbindingskracht van den weerstand D , terwijl de som der verticale ontbindingskrachten Y en Y_1 gelijk is aan de som van de gewichten der beide stangen.

§ 57. Brugbalans.

De horizontale hefboom AB (fig. 92) is om het vaste punt O , de horizontale hefboom EZ is om het vaste punt Z

Fig. 92

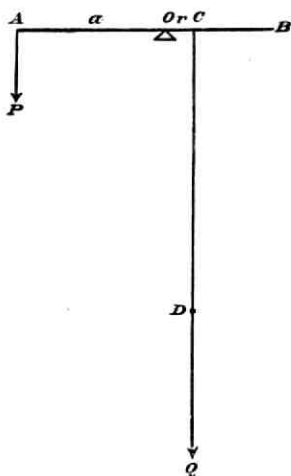


draaibaar. Zij zijn tevens door een verticale stang BE zoodanig met elkander verbonden, dat een draaiing van den eenen hefboom steeds een draaiing in tegengestelden zin van den anderen tengevolge heeft. Het gewicht van de drie stangen wordt verwaarloosd, of de invloed er van op de een of andere wijze opgeheven.

Wordt in A een gewicht P , en ergens op den hefboom EZ , bijv. in F , een gewicht Q aangebracht, dan kan men de voorwaarde vinden, waaronder de geheele hefboomtoestel in evenwichtstoestand is.

Door de stang BE wordt op den hefboom AB in het punt B een kracht K , op den hefboom EZ in het punt E een kracht K_1 uitgeoefend. Daar werking gelijk is aan terugwerking, wordt omgekeerd door den hefboom AB een kracht K in het punt B , en door den hefboom EZ een kracht K_1 in het punt E op de stang BE uitgeoefend. Daar ook de stang EB in evenwichtstoestand is, zoo moeten de krachten K en K_1 even groot zijn en in onderling tegengestelde richtingen werken langs de lijn die B en E verbindt. Uit den evenwichtstoestand van de hefboomen AB en EZ volgen de vergelijkingen:

Fig. 93.



$$Pa = KR \text{ en } KL = Ql,$$

of na eliminatie van K :

$$Pa = Q \frac{l}{L} R. \quad (61)$$

Men kan ook het gewicht Q ergens rechtstreeks aan den hefboom AB (fig. 93) doen werken, en het punt C zoeken, waar het gewicht Q zal moeten aangrijpen, opdat er ook nu nog evenwicht zij. Dit punt kan gevonden worden uit de vergelijking:

$$Pa = Qr. \quad (62)$$

Uit de vergelijkingen (61) en (62) blijkt, dat het voor den evenwichtstoestand van den hefboomtoestel onverschillig is, of het gewicht Q aangrijpt in F of in C , indien slechts voldaan is aan de voorwaarde:

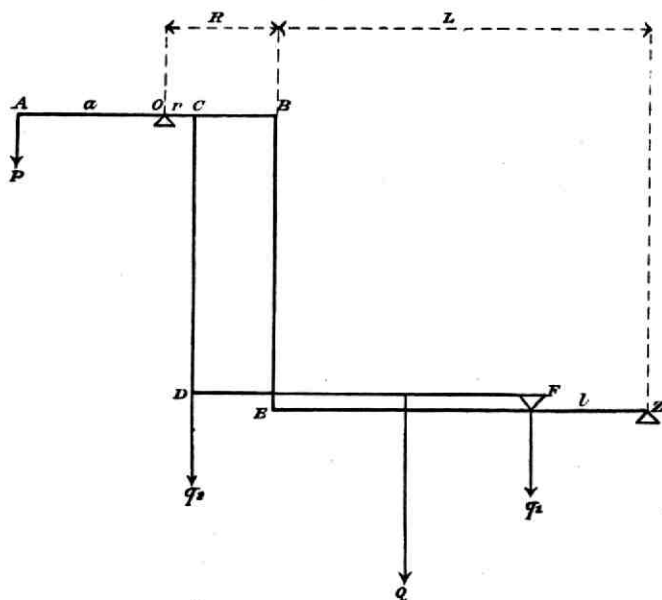
$$\frac{l}{L} R = r \text{ of } \frac{l}{L} = \frac{r}{R}. \quad (63)$$

Wat voor het geheele gewicht Q waar is, geldt natuurlijk ook voor een willekeurig deel er van. Wanneer men dus

het gewicht Q bijv. in twee deelen q_1 en q_2 verdeelt, en het eene deel in F , het andere in C laat aangrijpen, dan zal de uitwerking op den hefboomtoestel volkomen dezelfde zijn, alsof het geheele gewicht Q rechtstreeks in C aangreep.

Een zoodanige verdeling van het gewicht Q in twee deelen heeft werkelijk plaats, wanneer dit gewicht aangebracht wordt op een horizontalen balk DF (fig. 94),

Fig 94.



welks eene uiteinde steunt in het punt F van den hefboom EZ , en welks andere uiteinde bevestigd is aan het uiteinde van een in het punt C opgehangen verticale stang CD . Het gewicht van den balk DF en dat van de stang CD wordt verwaarloosd, of de invloed er van op de een of andere wijze opgeheven. Waar ook het gewicht Q op den balk moge aangrijpen, het kan in zijn uitwerking worden vervangen door krachten q_1 en q_2 aangrijpende in de steun-

punten F en D , waarbij de grootten van q_1 en q_2 afhangen van de plaats waar Q aangrijpt; steeds echter is $q_1 + q_2 = Q$. Deze krachten q_1 en q_2 , aangrijpende in F en D , hebben op den evenwichtsstand dezelfde uitwerking, alsof het gewicht Q rechtstreeks in C werkte.

Ook in dit geval zal dus de hefboomtoestel in evenwichtstoestand zijn als:

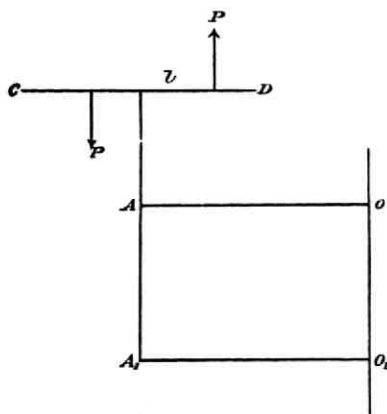
$$Pa = Qr \quad \text{of} \quad Q = P \frac{a}{r}.$$

De hierboven beschreven hefboomtoestel heet de brugbalans; voldoen de hefboomsarmen aan vergelijking (63), dan is de evenwichtsstand der balans onafhankelijk van de plaats, waar het gewicht Q op de horizontale brug DF wordt aangebracht. Kent men de verhouding $\frac{a}{r}$, dan kan men het onbekende gewicht Q uit het bekende gewicht P vinden. Gewoonlijk wordt de verhouding $\frac{a}{r} = 10$ genomen.

§ 58. Balans van Roberval.

AO en A_1O_1 (fig. 95) zijn twee even lange, onderling evenwijdige stangen, in

Fig. 95.

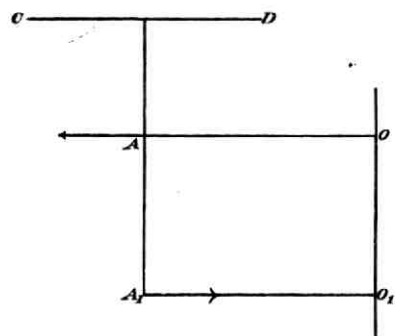


de vaste punten O en O_1 draaibaar, en in de punten A en A_1 bevestigd aan een vast lichaam $CDAA_1$, op zoodanige wijze, dat die stangen ook in de punten A en A_1 draaibaar zijn. Indien op het lichaam $CDAA_1$ een koppel Pl werkt, dan zal dit koppel op de beweging van het lichaam geen invloed hebben. Men kan toch dit koppel vervangen door een ander, waarvan de krachten aan-

grijpen in de punten A en A_1 (fig. 96) en werken langs

de lijnen AO en A_1O_1 . Daar iedere kracht langs die lijnen werkende, door de weerstanden van de vaste punten O en

Fig. 96.

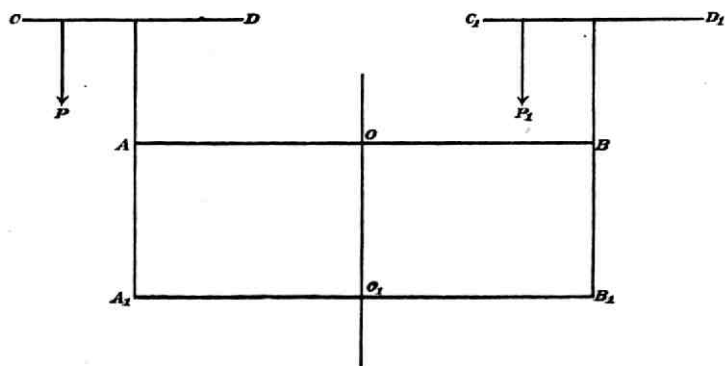


O_1 wordt in evenwicht gehouden, zoo zal het koppel geen invloed hebben op de beweging van het lichaam $CDA A_1$.

Hierop berust de inrichting van de balans van Roberval (fig. 97). De vier stangen AB , A_1B_1 , AA_1 en BB_1 zijn zoodanig aan elkander bevestigd, dat zij een parallelogram vormen; de stangen zijn in de verbindingspunten draaibaar.

De stangen AB en A_1B_1 zijn in het midden bevestigd aan twee op dezelfde verticaal gelegen vaste punten O en O_1 , en eveneens om die punten

Fig. 97.



draaibaar. Aan de naar boven verlengde stangen AA_1 en BB_1 zijn de schalen bevestigd. Is de plaats van het zwaarte-

punt zoodanig gekozen, dat de onbelaste balans alleen bij horizontalen stand der stangen AB en A_1B_1 in rust is, dan zal dit steeds zoo zijn, als de schalen met de even groote gewichten P en P_1 zijn belast. De plaats waar de belasting op de schalen wordt aangebracht, heeft geen invloed op den evenwichtsstand. Men kan toch steeds de in verticale richting werkende kracht P , op een willekeurig punt der schaal aangrijpende, vervangen door een even groote kracht werkende langs de verticale stang AA_1 en een koppel. Daar dit laatste volgens het boven verklaarde geen invloed heeft op den evenwichtsstand, zoo is de werking van P , in een willekeurig punt van de schaal aangrijpende, dezelfde als de werking van een even groot gewicht P , aangrijpende in eenig punt van de verticale stang AA_1 .

HOOFDSTUK IX.

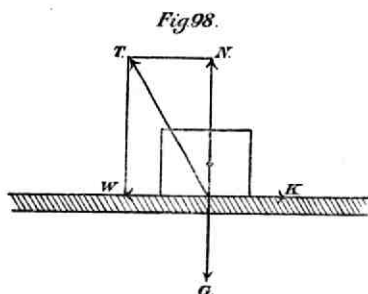
Wrijvingsweerstand.

§ 59. Wrijvingscoëfficiënt.

Indien een lichaam zich beweegt langs een horizontaal steunvlak, en er behalve de weerstand van het steunvlak alleen zijn gewicht G op werkt, dan leert de ervaring, dat de snelheid der beweging vermindert, en dat het lichaam na korter of langer tijdsverloop tot rust komt. Om de bewegingstoestand van het lichaam onveranderd te doen blijven, is het noodig dat op het lichaam nog bovendien een kracht werkt; deze kracht moet een ontbondene hebben in de richting der beweging, waarvan de grootte van de omstandigheden afhangt.

Hieruit volgt, dat de weerstand T (fig. 98), dien het vlak aan het lichaam biedt, niet werkt langs de normaal op het vlak, maar ontbonden moet kunnen worden in twee krachten; is de eene ontbindingskracht N normaal op het vlak, dan moet de andere W in het vlak werken in een richting tegengesteld aan die der beweging. De grootte dezer laatste ontbindingskracht W kan bepaald worden door te onder-

zoeken hoe groot de kracht K is, die in de richting der beweging op het lichaam moet werken om de beweging eenparig te doen zijn. Men heeft bevonden, dat de ontbindingskracht W des te kleiner is, hoe gladder de langs



elkander bewegende oppervlakken zijn, en men neemt daarom aan, dat zij veroorzaakt wordt door de kleine oneffenheden dier oppervlakken, die zelfs door de zorgvuldigste polijsting niet geheel weggenomen kunnen worden.

De ontbindingskracht W wordt de *wrijvingsweerstand* genoemd; de ont-

bindingskracht N zal voortaan de *normale weerstand* heeten, terwijl de weerstand T door het vlak geboden, en waarvan N en W de ontbindingskrachten zijn, duidelijkheidshalve *totale weerstand* zal genoemd worden.

Steeds wanneer twee lichamen een druk op elkander uitoefenen en zij zich langs elkander bewegen, treedt een wrijvingsweerstand op, die in het aanrakingsoppervlak op elk der beide lichamen werkt in een richting tegengesteld aan die, waarin het zich beweegt. De ervaring leert, dat bij twee bepaalde lichamen met zoo goed mogelijk gepolijste oppervlakken de grootte van den wrijvingsweerstand ten naastenbij evenredig is met de grootte van den normalen druk, dien zij op elkander uitoefenen, of:

$$W = fN. \quad (64)$$

Het standvastige getal, dat de verhouding $\frac{W}{N}$ aangeeft, wordt de *wrijvingscoëfficiënt* dier beide lichamen genoemd. Kent men twee der in vergelijking (64) voorkomende grootheden, dan kan uit die vergelijking de derde worden bepaald.

Heeft bijv. een slede met een massa van 250 kilogram, een eenparige beweging over een gladde horizontale ijsbaan, terwijl er een trekkracht in horizontale richting op werkt, dan is de normale druk $250 \cdot 9,8 = 2450$ dynamische

W kan nu vaststellen op denzelfden grond, dat het lichaam zich naar boven zou bewegen.

eenheden. Is uit proeven reeds bekend, dat in dit bijzonder geval de wrijvingscoëfficiënt $f = 0,02$ is, dan vindt men voor den wrijvingsweerstand:

$$W = 0,02 \times 2450 = 49 \text{ eenheden.}$$

Heeft men omgekeerd, door rechtstreeksche meting de grootte van de vereischte trekkracht, en daarmede de grootte van den wrijvingsweerstand bepaald, en daarvoor 49 eenheden gevonden, dan zou de wrijvingscoëfficiënt in dit bijzonder geval zijn:

$$f = \frac{49}{2450} = 0,02.$$

De proeven, die men genomen heeft om voor elk bijzonder geval de grootte van den wrijvingscoëfficiënt te bepalen, hebben het volgende geleerd:

1) De grootte van den wrijvingscoëfficiënt hangt grootendeels af van de stof der beide wrijvende lichamen en van de hoedanigheid en den toestand der in aanraking zijnde oppervlakken. Bij harde lichamen kan door het aanwenden van geschikte smeermiddelen een aanzienlijke vermindering van den wrijvingscoëfficiënt verkregen worden. Hoe harder en gladder de wrijvende lichamen zijn, hoe zorgvuldiger zij gesmeerd worden, des te meer mag de wrijvingscoëfficiënt beschouwd worden als onafhankelijk van de stof waaruit de lichamen bestaan.

2) De snelheid van de beweging heeft invloed op de grootte van den wrijvingscoëfficiënt. Wordt de snelheid kleiner, dan neemt de wrijvingscoëfficiënt toe; hij bereikt zijn grootste waarde bij de snelheid nul; dat is, de wrijvingscoëfficiënt bij den overgang van rust in beweging is grooter dan de wrijvingscoëfficiënt bij beweging, en bij een langzame beweging is hij grooter dan bij een snelle.

3) De wrijvingscoëfficiënt hangt bovendien af van de wijze, waarop de druk over het vlak van aanraking is verdeeld, dat is, van de grootte van den druk op de vlakte-eenheid. Bij zeer kleinen en bij zeer grooten druk op de vlakte-eenheid is de wrijvingscoëfficiënt grooter dan bij gemiddelden druk, en men mag aannemen, dat er voor twee bepaalde lichamen een bepaalde grootte van dezen druk is,

bij welke de wrijvingscoëfficiënt onder overigens gelijke omstandigheden zijn kleinste waarde bereikt.

4) Gedurende de beweging worden voortdurend kleine deeltjes van de oppervlakken der wrijvende lichamen losgescheurd. Dientengevolge ondergaat de toestand der wrijvende oppervlakken, de verdeeling van den druk, en derhalve ook in het algemeen de grootte van den wrijvingscoëfficiënt een aanhoudende verandering.

Daar eensdeels de wijze waarop de verschillende omstandigheden haar invloed doen gelden, onbekend en niet nauwkeurig te bepalen is; daar anderdeels deze omstandigheden zelve gedurende de wrijving veranderen, zoo kan er geen sprake zijn van onveranderlijk geldige, of zelfs van eenigermate nauwkeurig vast te stellen waarden der wrijvingscoëfficiënten. Men moet zich dus vergenoegen met gemiddelde waarden, welke als ruwe benaderingen van de werkelijke waarden te beschouwen zijn, met grenswaarden, tusschen welke onder gewone omstandigheden de waarden der wrijvingscoëfficiënten veranderen.

§ 60. Wrijvingshoek.

De wrijvingsweerstand kan uit den aard der zaak alleen een beweging verhinderen of een bestaande beweging vertragen, nooit een beweging voortbrengen.

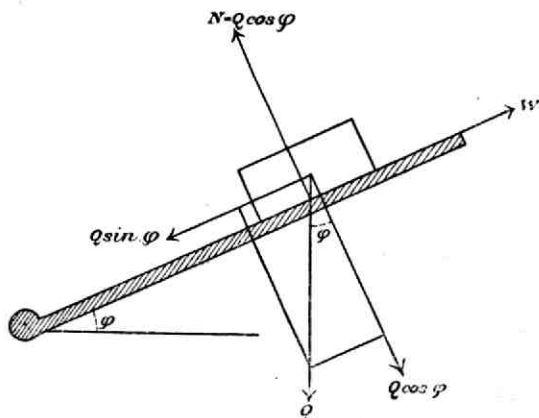
Op elk der beide wrijvende lichamen werkt de wrijvingsweerstand steeds in de richting tegengesteld aan die, waarin zich het lichaam of werkelijk beweegt, of zonder het voorhanden zijn van den wrijvingsweerstand zou bewegen. Heeft de beweging werkelijk plaats, dan heeft de wrijvingsweerstand steeds de grootte $W = fN$.

Zijn daarentegen de lichamen in rust, en is een gedeelte van de kracht fN reeds voldoende om het in beweging komen te verhinderen, dan komt slechts juist dat gedeelte werkelijk tot stand, en de wrijvingsweerstand is in dat geval kleiner dan fN . Streng genomen moet dus fN als de bovenste grenswaarde van de kracht W beschouwd worden, zoodat de werkelijke grootte van den wrijvingsweerstand moet voldoen aan de voorwaarde:

$$W \leq fN.$$

Wanneer een lichaam geplaatst is op een vlak, dat met den horizon een hoek φ maakt, dan zou het steeds in beweging komen, indien er geen wrijvingsweerstand was. Het gewicht Q (fig. 99) van het lichaam kan toch worden ont-

Fig. 99.



bonden in de twee ontbindingskrachten $Q \sin \varphi$ en $Q \cos \varphi$; de laatste $Q \cos \varphi$ roept een normalen weerstand $N = Q \cos \varphi$ van het vlak te voorschijn, en wordt door dezen in evenwicht gehouden; de eerste $Q \sin \varphi$ zou een beweging van het lichaam tengevolge hebben; de wrijvingsweerstand werkt deze beweging tegen. De werkelijke grootte van de kracht W hangt af van de grootte van den hoek φ ; hierbij kunnen twee gevallen voorkomen.

Is de hoek φ groot, en tengevolge daarvan $Q \sin \varphi$ groter dan fN of $fQ \cos \varphi$, dan komt de beweging werkelijk tot stand, en dan is steeds:

$$W = fQ \cos \varphi.$$

Is daarentegen de hoek φ klein, en tengevolge daarvan $Q \sin \varphi$ kleiner dan $fQ \cos \varphi$, dan is een gedeelte van deze laatste kracht reeds voldoende om het tot stand komen der beweging te verhinderen, en de in werking komende wrijvingsweerstand heeft dan slechts de grootte:

$$W = Q \sin \varphi.$$

Heeft de hoek φ een zoodanige grootte dat:

$$Q \sin \varphi = f Q \cos \varphi \quad \text{of} \quad \operatorname{tg} \varphi = f, \quad (65)$$

dan is deze hoek φ de grootste van alle hoeken, bij welke de wrijvingsweerstand nog voldoende is om de beweging te verhinderen. Deze hoek wordt de *wrijvingshoek* genoemd. Uit vergelijking (65) blijkt dat de wrijvingshoek de hoek is, waarvan de tangens gelijk is aan den wrijvingscoëfficiënt.

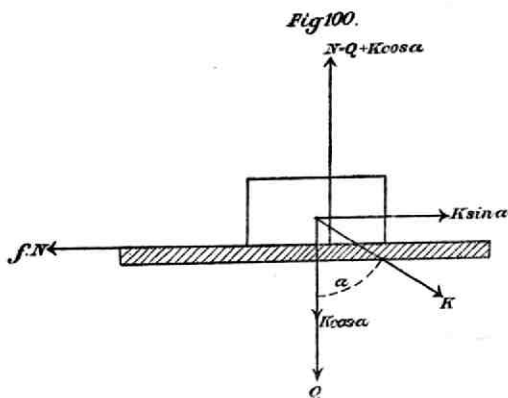
Men heeft hierin een middel om de grootte van den wrijvingscoëfficiënt door proefneming te bepalen. Men plaatst daartoe het lichaam op een hellend vlak, en laat den hellingshoek allengs grooter worden, zoolang totdat het lichaam in beweging komt; de tangens van dezen hellingshoek is dan de wrijvingscoëfficiënt bij den overgang van rust in beweging. Om den wrijvingscoëfficiënt bij een bepaalde snelheid te vinden, moet men den hellingshoek een zoodanige grootte trachten te geven, dat het lichaam zich met de bepaalde snelheid eenparig langs het vlak beweegt; de tangens van den hellingshoek is dan de wrijvingscoëfficiënt bij die bepaalde snelheid.

Hierbij moet nog het volgende in het oog gehouden worden. Indien het lichaam een eenparige beweging heeft, dan moeten de uitwendig op het lichaam werkende krachten elkander in evenwicht houden. Deze krachten zijn het gewicht van het lichaam en de totale weerstand. Daar deze krachten om in evenwicht te zijn langs dezelfde lijn moeten werken, en de totale weerstand klaarblijkelijk moet aangrijpen in een punt binnen de ondersteuningsbasis gelegen, zoo moet ook de verticaal van het zwaartepunt het vlak snijden binnen de ondersteuningsbasis. Ligt het zwaartepunt zoo hoog of is de ondersteuningsbasis zoo klein, dat de verticaal van het zwaartepunt het vlak snijdt in een punt buiten de ondersteuningsbasis, dan zal het lichaam omkantelen. Voortaan zal steeds worden aangenomen, dat het eerste het geval is, en dus het lichaam in stabielen evenwichtstoestand is. In dit geval is de beweging van het lichaam, zooals later zal worden aangetoond, evenzoo alsof alle krachten aangrepen in het zwaartepunt.

Indien een lichaam met het gewicht Q (fig. 100) een eenparige beweging heeft langs een horizontaal vlak, dan

kan de grootte bepaald worden van de kracht, die daartoe op het lichaam moet werken langs een lijn, welke den hoek α maakt met de verticaal. De som der ontbindingskrachten langs het vlak moet gelijk nul zijn; dus:

$$K \sin \alpha - W = 0.$$



Daar het lichaam zich langs het vlak beweegt, is $W = fN$,
of daar:

$$N = Q + K \cos \alpha$$

$$K \sin \alpha - fQ - fK \cos \alpha = 0$$

$$K = Q \frac{f}{\sin \alpha - f \cos \alpha}.$$

Hierin f vervangende door $\tan \varphi$, vindt men na herleiding:

$$K = Q \frac{\sin \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)}.$$

De grootte van K hangt af van de grootte van hoek α ; als $\alpha = \varphi$ is, wordt K oneindig groot; de eenparige beweging van het lichaam is dus slechts dan mogelijk als α grooter is dan φ . K heeft de kleinste waarde als $\alpha = 90^\circ + \varphi$ is, dat is, als de lijn waarlangs zij werkt een hoek φ gelijk aan den wrijvingshoek maakt met het horizontale vlak. Zij verkrijgt dan de waarde:

$$K = Q \sin \varphi.$$

Als kleiner is dan φ , dange lardese vergelijking niet meer, men mag hem niet in gebruik nemen.

Steeds wanneer een lichaam zich langs een vlak beweegt kan de totale weerstand ontbonden worden in den normalen weerstand N , en in den wrijvingsweerstand fN . Den hoek φ , dien de lijn waarlangs de totale weerstand werkt, maakt met de normaal, kan men vinden uit de vergelijking:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{fN}{N} = f.$$

Indien dus een lichaam zich beweegt langs een vlak, dan maakt de lijn, waarlangs de totale weerstand werkt, met de normaal een hoek φ gelijk aan den wrijvingshoek aan den kant van de normaal tegengesteld aan de richting der beweging.

§ 61. Lichaam in twee punten ondersteund door vaste vlakken.

Een lichaam dat in twee punten op vlakken steunt, heeft alleen dan een evenwichtsstand, als de steunpunten en het zwaartepunt in hetzelfde verticale vlak gelegen zijn. Er wordt verder aangenomen, dat dit verticale vlak loodrecht staat op de horizontale doorsnede der twee steunvlakken, en dat de wrijvingscoëfficiënten in de beide aanrakingspunten even groot zijn.

Richt men in de aanrakingspunten A en B normalen op, en snijden deze elkander in een punt D van de verticaal door het zwaartepunt, dan is het lichaam in evenwichtstoestand, zelfs dan als de steunvlakken volkomen glad zijn. De grootten der normale weerstanden kunnen dan gevonden worden uit de bekende parallelogramconstructie.

Ligt het snijpunt D (fig. 101) niet in de verticaal van het zwaartepunt, dan werken de wrijvingsweerstanden mede om het lichaam in rust te houden. Om te bepalen in welke richting de wrijvingsweerstand in elk der aanrakingspunten werkt, kan men zich voorstellen, dat het lichaam in het punt D is opgehangen; uit de richting der draaiende beweging, alsdan door het gewicht Q veroorzaakt, kan men de richtingen bepalen, in welke de aanrakingsplaatsen A en B langs de steunvlakken zouden glijden, indien er geen wrijvingsweerstanden waren. De wrijvings-

twee totale weerstanden T en T_1 op het lichaam werken. De hoeken φ , die de lijnen, waarlangs de totale weerstanden T en T_1 werken, maken met de overeenkomstige normalen N en N_1 , en die aan elkander gelijk zijn, als op denzelfden boog DC staande hoeken aan den omtrek, zijn de wrijvingshoeken; de gezochte wrijvingscoëfficiënt is dus $f = \operatorname{tg} \varphi$. Is de werkelijke wrijvingscoëfficiënt kleiner dan $\operatorname{tg} \varphi$, dan verkrijgt het lichaam een glijdende beweging. Is hij juist gelijk aan $\operatorname{tg} \varphi$, dan bevindt het lichaam zich aan de grens van den evenwichtstoestand. De krachten T en T_1 kunnen dan bepaald worden, of door de in fig. 101 aangegeven parallelogramconstructie, of door de uit deze voortvloeiende evenredigheid:

$$T : T_1 : Q = \sin (90 - \alpha_1 - \varphi) : \sin (90 - \alpha + \varphi) : \sin (\alpha + \alpha_1),$$

waaruit men vindt:

$$T = Q \frac{\cos (\alpha_1 + \varphi)}{\sin (\alpha + \alpha_1)} \quad (66)$$

$$T_1 = Q \frac{\cos (\alpha - \varphi)}{\sin (\alpha + \alpha_1)}. \quad (67)$$

De normale weerstanden N en N_1 kunnen gevonden worden door ontbinding van de totale weerstanden T en T_1 ; men vindt daarvoor dan:

$$N = T \cos \varphi \quad \text{en} \quad N_1 = T_1 \cos \varphi.$$

Is de werkelijke wrijvingscoëfficiënt groter dan de voor $\operatorname{tg} \varphi$ gevonden waarde, dan komt in de aanrakingsplaatsen niet de geheele wrijvingsweerstand fN tot stand, maar slechts dat gedeelte, hetwelk noodig is om de beweging te verhinderen. De totale weerstanden T en T_1 hebben dus dezelfde grootte en richting als zij zouden gehad hebben, indien de werkelijke wrijvingscoëfficiënt slechts de waarde had, uit den boven gevonden hoek φ als wrijvingshoek voortvloeiende. De grootte van T en T_1 kan dus ook dan uit de vergelijkingen (66) en (67) gevonden worden.

Is omgekeerd de wrijvingscoëfficiënt $f = \operatorname{tg} \varphi$ gegeven, en wordt de verticaal gezocht, waarin het zwaartepunt moet

liggen, opdat het lichaam zich aan de grens van den evenwichtstoestand bevinde, dan kan men het punt O van de gezochte verticaal leeren kennen door lijnen te trekken, die met de normalen den gegeven wrijvingshoek φ maken. Er is echter nog een tweede verticaal, die aan de vraag voldoet. Wanneer men namelijk in elk der beide aanrakingspunten den hoek φ aan den anderen kant van de normaal uitzet, dan is het links van het punt D gelegen snijpunt eveneens een punt, welks verticaal de verlangde eigenschap bezit.

Daar de vorm van het lichaam slechts in zooverre van invloed is op den evenwichtstoestand, als van dien vorm afhangt de ligging der aanrakingspunten en der verticaal van het zwaartepunt, zoo kan men het lichaam beschouwen als een rechte stang, welke samenvalt met de lijn, die de beide aanrakingspunten verbindt, en welker gewicht aangrijpt in het snijpunt dier lijn met de verticaal van het zwaartepunt.

Om de verhouding te bepalen van de stukken AE en BE (fig. 102), waarin het aangrijpingspunt E de stang AB moet verdeelen, opdat deze zich aan de grens van den evenwichtstoestand bevinde, heeft men uit de driehoeken AEO en BEO de vergelijkingen:

$$\frac{OE}{AE} = \frac{\sin(\alpha - \varphi - \epsilon)}{\cos(\alpha - \varphi)} = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \cos \epsilon - \sin \epsilon$$

$$\frac{OE}{BE} = \frac{\sin(\alpha_1 + \varphi + \epsilon)}{\cos(\alpha_1 + \varphi)} = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) \cos \epsilon + \sin \epsilon,$$

waarin ϵ de hoek is, dien de stang AB maakt met den horizon. Deelt men de laatste vergelijking door de eerste, dan verkrijgt men:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) \cos \epsilon + \sin \epsilon}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \cos \epsilon - \sin \epsilon},$$

of als men het quotient $\frac{AE}{BE} = n$ stelt, en teller en noemer van het tweede lid door $\cos \epsilon$ deelt:

$$n = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) + \operatorname{tg} \epsilon}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) - \operatorname{tg} \epsilon}. \quad (68)$$

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi - \epsilon)}{\cos(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin(\alpha_1 + \varphi + \epsilon)}{\cos(\alpha_1 + \varphi)} = \frac{\sin(\alpha - \varphi) \cos \epsilon - \cos(\alpha - \varphi) \sin \epsilon}{\cos(\alpha - \varphi)} = \frac{\sin(\alpha_1 + \varphi) \cos \epsilon + \cos(\alpha_1 + \varphi) \sin \epsilon}{\cos(\alpha_1 + \varphi)}$$

Uit deze vergelijking kan de hoek worden bepaald, dien een op den horizontalen bodem staande en tegen een verticalen wand steunende ladder minstens met den horizon moet maken om niet uit te glijden. Ligt het zwaartepunt van den ladder in het midden, dan wordt $n = 1$, dus:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{1 - f^2}{2f}.$$

Is bijv. $f = 0,2$, dan wordt:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{1 - 0,04}{0,4} = 2,4 \text{ en } \epsilon = 67^\circ,5.$$

Bij een hoek van $67^\circ,5$ met den horizon zou de ladder zich derhalve aan de grens van den evenwichtstoestand bevinden.

De waarde van n uit vergelijking (68) heeft blijkens fig. 102 betrekking op de grens, tot welke het aangrijpingspunt E naar rechts kan worden verschoven zonder dat de stang zal uitglijden. Vervangt men in deze vergelijking $\alpha - \varphi$ door $\alpha + \varphi$, en $\alpha_1 + \varphi$ door $\alpha_1 - \varphi$, dan verkrijgt men:

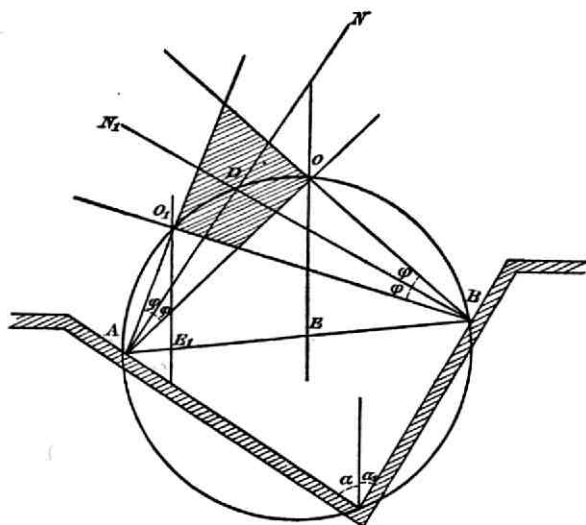
$$\frac{A E_1}{B E_1} = n_1 = \frac{\operatorname{tg} (\alpha_1 - \varphi) + \operatorname{tg} \epsilon}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi) - \operatorname{tg} \epsilon} \quad (71)$$

Deze vergelijking heeft betrekking op het snijpunt O_1 (fig. 103), dat men verkrijgt als men in elke aanrakingsplaats den wrijvingshoek in de tegenovergestelde richting uitzet. Zij geeft de grens aan, tot welke het aangrijpingspunt E_1 naar links kan worden verschoven zonder dat de stang zal uitglijden.

Het tusschen de lijnen AO en AO_1 liggende gedeelte van het vlak der teekening is namelijk de meetkundige plaats van alle mogelijke lijnen, waarlangs de totale weerstand T kan werken; evenzoo is het tusschen de lijnen BO en BO_1 liggende gedeelte de meetkundige plaats van alle lijnen, waarlangs de totale weerstand T_1 kan werken. Het in fig. 103 gestreepte gedeelte OO_1 van het vlak der teekening, dat beide hoeken gemeen hebben, is dus het gebied, waarop het snijpunt van de lijnen waarlangs de drie krachten Q , T en T_1 werken, steeds moet worden gezocht. Van den cirkel-

omtrek $CADB$ kunnen derhalve slechts die punten, welke binnen dien vlakke-inhoud liggen, snijpunten van genoemde drie lijnen zijn. Trekt men dus verticalen door de eindpunten O en O_1 van den binnen dien vlakke-inhoud liggen-

Fig. 103



den boog OO_1 , dan verkrijgt men de grenspunten E en E_1 , tot welke het aangrijpingspunt van Q naar den eenen en naar den anderen kant langs de stang kan worden verschoven, zonder dat deze zal uitglijden.

Stelt men $\frac{AE}{AB} = m$, dan is:

$$\frac{BE}{AB} = 1 - m \text{ en } n = \frac{m}{1 - m}.$$

Substitueert men deze waarde voor n in vergelijking (68), dan verkrijgt men:

$$m = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) + \operatorname{tg} \epsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \varphi) + \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}.$$

Handelt men eveneens met vergelijking (71), en stelt men dus:

$$n_1 = \frac{m_1}{1 - m_1},$$

dan verkrijgt men:

$$m_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varphi) + \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \varphi) + \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Is $\alpha - \varphi = \varepsilon$, dan wordt $m = 1$, en is tevens $\alpha_1 - \varphi = -\varepsilon$, dan wordt $m_1 = 0$. Zijn beide voorwaarden vervuld, dan vallen de grenspunten E en E_1 met de eindpunten B en A der stang samen. In dit bijzonder geval kan dus elk willekeurig punt der stang als aangrijpingspunt van het gewicht worden gekozen, zonder dat de stang zal uitglijden.

Stelt men daarentegen in de twee voorgaande vergelijkingen $\varphi = 0$, dan verkrijgt men:

$$m = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha} = m_1,$$

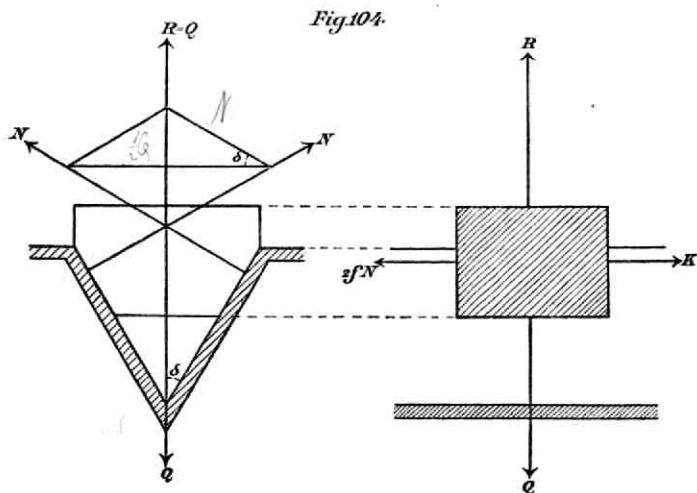
dat is, als de steunvlakken volmaakt glad zijn, dan vallen de twee grenspunten E en E_1 samen; in dit geval is er slechts één punt waar het gewicht Q kan aangrijpen zonder dat de stang zal uitglijden; namelijk dat punt, hetwelk met D in dezelfde verticaal ligt.

§ 62. Wrijvingscoëfficiënt en wrijvingshoek bij de beweging in gleuven.

Wanneer een lichaam zich voortbeweegt in een horizontale wigvormige gleuf, gevormd door twee elkander volgens een horizontale lijn snijdende vlakken, dan zal in elk der beide vlakken van aanraking een wrijvingsweerstand worden te voorschijn geroepen, welke in een richting tegengesteld aan die der beweging, en dus in horizontale richting werkt. Is de beweging van het lichaam eenparig, dan moet er een kracht op werken, welke horizontale, in den zin der beweging gerichte ontbondene K gelijk is aan de som der beide wrijvingsweerstand.

De wrijvingsweerstand langs elk der steunvlakken is ge-

lijk aan het product van den normalen druk met den wrijvingscoëfficiënt. Er wordt aangenomen dat de wrijvingscoëfficiënten voor de beide steunvlakken even groot zijn, en dat de steunvlakken gelijke hoeken maken met de verticaal. De normale weerstanden N en N_1 zijn dan even groot, want hun vervangende R moet de grootte Q hebben en in verticale richting naar boven werken; de lijn, waarlangs zij



werkt, deelt dus den hoek middendoor, gevormd door de lijnen, waarlangs N en N_1 werken.

Uit fig. 104 verkrijgt men derhalve de vergelijkingen:

$$Q = 2 N \sin \delta \quad \text{of} \quad N = \frac{Q}{2 \sin \delta}$$

$$K = 2 f N = \frac{f}{\sin \delta} Q, \quad (72)$$

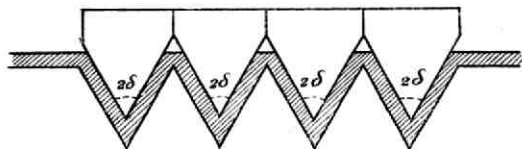
waarin δ is de halve hoek der gleuf.

Wanneer meerdere zoodanige gleuven, welke alle denzelfden hoek hebben, horizontaal en evenwijdig naast elkander liggen (fig. 105), en in elk dier gleuven een lichaam glijdt, dan is de kracht, die op elk lichaam moet werken om de beweging eenparig te doen zijn, volgens vergelijking (72) gelijk aan het gewicht van het lichaam vermenigvuldigd met

het quotient $\frac{f}{\sin \delta}$. Bijgevolg is ook, als alle lichamen tot een geheel vereenigd worden, de kracht, die op het geheel moet werken om de beweging eenparig te doen zijn, gelijk aan het product van het geheele gewicht met het quotient $\frac{f}{\sin \delta}$, steeds in de veronderstelling, dat op alle aanrakingsplaatsen de wrijvingscoëfficiënt dezelfde grootte heeft. Vergelijking (72) geldt dus ook voor het geval dat er meerdere gleuven naast elkander liggen.

De beweging over een horizontaal vlak kan beschouwd worden als een bijzonder geval van de beweging in gleuven,

Fig 105



en wel in een zoodanige gleuf, wier hoek 180° bedraagt. Stelt men toch in vergelijking (72) $\delta = 90^\circ$, dan verkrijgt men de vroeger gevonden, voor de beweging over een horizontaal vlak geldende waarde $K = fQ$. De werking van de gleuf bestaat dus in het vergrooten van den wrijvingscoëfficiënt in reden van f tot $\frac{f}{\sin \delta}$, en het quotient:

$$\frac{f}{\sin \delta} = f_1 \quad (73)$$

kan »de wrijvingscoëfficiënt voor de beweging in gleuven» genoemd worden.

Zal een lichaam onder de werking van zijn gewicht in een hellende gleuf met eenparige beweging naar beneden glijden, dan moet de hellingshoek der gleuf, in plaats van den wrijvingshoek φ , de grootere hoek ψ zijn, welke hoek kan worden gevonden uit de vergelijking:

$$\text{tg } \psi = f_1.$$

Deze hoek kan om die reden »de wrijvingshoek voor de beweging in gleuven» genoemd worden.

§ 63. Wrijving van tappen in tappannen.

Twee op een vast lichaam werkende koppels houden elkander in evenwicht als hun momenten even groot zijn, maar in teeken verschillen. Als dus een lichaam om een as wentelt, en de uitwendige krachten die er op werken, samen twee koppels vormen met even groote maar tegengestelde momenten, dan heeft het lichaam een eenparig draaiende beweging. Omgekeerd, wanneer behalve een gegeven koppel nog andere uitwendige krachten werken op een eenparig draaiend lichaam, dan moeten die andere krachten samen eveneens een koppel vormen, welks moment even groot is, als dat van het gegeven koppel, maar daarvan in teeken verschilt.

Indien een lichaam met het gewicht Q om een horizontale as draait, en daarbij met een paar tappen op tappannen rust, dan moet, om de beweging een eenparig draaiende te doen zijn, op het lichaam voortdurend een koppel werken. Er wordt aangenomen, dat behalve dit koppel M en het gewicht Q , op het lichaam nog slechts werken de weerstanden, die de cilindrische tappannen aan de tappen bieden, en dat de tappen zonder klemmen, dus met eenige speelruimte hoe klein ook, in de tappannen draaien. De vervangende T van deze weerstanden moet dan met het gewicht Q een koppel vormen: zij moet dus even groot zijn als Q en verticaal naar boven werken. Hieruit kan het moment M bepaald worden van het koppel, dat de draaiende beweging eenparig doet blijven.

De totale weerstand T kan steeds ontbonden worden in den normalen weerstand N en den langs de raaklijn aan den tap werkenden wrijvingsweerstand fN . Zooals vroeger is verklaard maakt, indien er werkelijk een glijden plaats grijpt, de lijn waarlangs de totale weerstand werkt met de normaal steeds een hoek gelijk aan den wrijvingshoek φ . De kracht T zal dus slechts dan verticaal naar boven kunnen gericht zijn, als de straal OP van het punt P , waar de tap de tappan aanraakt, den wrijvingshoek φ maakt met de verticaal (fig. 106). De arm van het door de krachten Q en T gevormde koppel is dan $OP \sin \varphi$, en het moment M van het drijvende koppel:

$$M = Qq \sin \varphi. \quad (74)$$

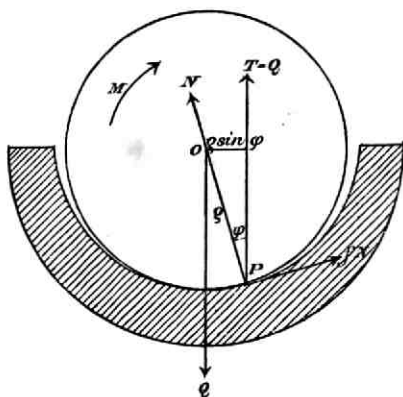
Het product $Q \varrho \sin \varphi$ is de nauwkeurige uitdrukking voor het moment van den wrijvingsweerstand van tappen. Meestal is de wrijvingshoek φ zoo klein, dat men $\sin \varphi$ door $\operatorname{tg} \varphi$ of den wrijvingscoëfficiënt f mag vervangen, te meer omdat de waarde van f toch niet met volkomen juistheid bepaald kan worden.

Vergelijking (74) verandert daardoor in:

$$M = Q \varrho f. \quad (75)$$

Substitueert men in vergelijking (74) voor Q haar waarde $\frac{N}{\cos \varphi}$, dan ziet men dat de waarde van M in vergelijking (75) slechts daarin van die in vergelijking (74) verschilt,

Fig. 106.



dat men in de laatste N vervangt door Q , dat men dus het onderscheid tusschen N en Q verwaarloost; men neemt daarbij dus aan, dat de normale weerstand, dien de tappen biedt aan den tap, slechts weinig verschilt van het gewicht der as. Is dus de as nog met een ander gewicht belast, en noemt men de geheele belasting, het gewicht der as daaronder begrepen, D , dan

heeft men meer algemeen voor het moment van den wrijvingsweerstand van tappen:

$$M = f D \varrho. \quad (76)$$

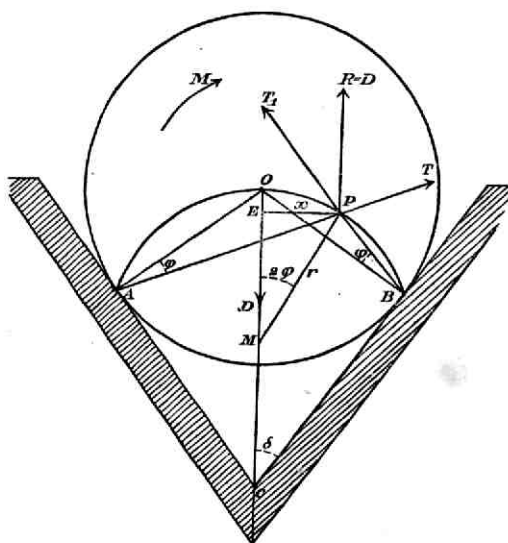
Wanneer de tappen niet cilindervormig is, maar de gedaante heeft van een gleuf (fig. 107), dan vormt de vervangende R van de in de aanrakingspunten A en B werkende totale weerstanden T en T_1 met de kracht D het koppel, dat de draaiende beweging tegenwerkt, en door het drijvende

koppel moet worden in evenwicht gehouden. Zooals uit de figuur blijkt is het moment van dit koppel:

$$M = D x. \quad (77)$$

Om de grootte van x te vinden kan men opmerken, dat de vijf punten A , O , P , B , C op den omtrek van een

Fig. 107.



cirkel liggen. Noemt men den straal van dien cirkel r , dan heeft men:

$$x = PE = r \sin 2\varphi, \quad \varphi = 2r \sin \delta,$$

of de hieruit voortvloeiende waarde van x :

$$x = \varphi \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \delta} \quad (78)$$

in vergelijking (77) substitueerende:

$$M = D \varphi \frac{\sin 2\varphi}{2 \sin \delta}.$$

Is de wrijvingshoek zeer klein, dan kan $\sin 2\varphi$ vervangen

worden door $2 \sin \varphi$ of $2 \operatorname{tg} \varphi = 2 f$, waardoor men voor het moment van genoemd koppel vindt:

$$M = \frac{f}{\sin \delta} D \varrho, \quad (79)$$

of $\frac{f}{\sin \delta} = f_1$ stellende:

$$M = f_1 D \varrho. \quad (80)$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat de vergelijkingen (75) en (76) voor de beweging in cilindervormige tappannen gevonden, ook gelden voor de beweging in gleufvormige tappannen, mits men daarin den wrijvingscoëfficiënt f vervangt door f_1 , den wrijvingscoëfficiënt bij de beweging in gleuven.

Daar f_1 steeds grooter is dan f , zoo is het moment van het koppel, dat vereischt wordt om de draaiende beweging eenparig te doen blijven, bij gleufvormige tappannen grooter dan bij cilindervormige. Is bijv. $2\delta = 60^\circ$ dus $\sin \delta = \frac{1}{2}$, dan is $f_1 = 2f$.

§ 64. Wrijvingsrollen.

Het is dikwijls gewenscht bij de draaiende beweging van een rad, den wrijvingsweerstand, dien de tap van het rad ondervindt, zoo klein mogelijk te doen zijn. Daartoe kan men gebruik maken van zoogenaamde wrijvingsrollen. De inrichting van den toestel kan op tweeërlei wijzen geschieden. De eerste manier is voorgesteld in fig. 108. De tap van het rad rust niet in een tappen maar op een wrijvingsrol *I*, terwijl de wrijvingsrollen *II* en *III* een zijdelingsche afwijking van den tap beletten. De tap is tusschen de wrijvingsrollen *II* en *III* met een kleine speelruimte draaibaar, en zal dus bij zijn beweging slechts tegen een dier wrijvingsrollen een druk uitoefenen. Draait de tap bijv. in positieven zin, dan oefent hij een druk uit op de wrijvingsrollen *I* en *II*, waardoor deze rollen in negatieven zin gaan draaien, terwijl de wrijvingsrol *III* in rust blijft.

De vervangende T van de twee weerstanden T_1 en T_2 door de wrijvingsrollen *I* en *II* aan den tap geboden, vormt met de kracht D , den druk van den tap, het koppel, dat door het drijvende koppel in evenwicht gehouden moet wor-

punt O . Daar nu T_1 en T_2 beide $q \sin \epsilon$ tot hefboomsarm hebben, heeft men:

$$M = (T_1 + T_2) q \sin \epsilon. \quad (82)$$

Nu is $T_1 = T \cos \epsilon$ en $T_2 = T \sin \epsilon$; na substitutie van deze waarden in vergelijking (82), en daarbij T vervangende door $D = T$, vindt men:

$$M = D q \sin \epsilon (\cos \epsilon + \sin \epsilon). \quad (83)$$

In driehoek ABC is:

$$R : r = \sin \varphi : \sin \epsilon \text{ of } \sin \epsilon = \frac{r}{R} \sin \varphi.$$

Nu is ϵ kleiner dan φ , en bij kleine wrijvingshoeken mag men dus den factor $\cos \epsilon + \sin \epsilon$ gelijk één stellen; vervangt men bovendien $\sin \varphi$ door $\operatorname{tg} \varphi$ of f , waardoor bij benadering $\sin \epsilon = f \frac{r}{R}$ wordt, dan verkrijgt men:

$$M = f \frac{r}{R} D q. \quad (84)$$

Vergelijkt men deze waarde met de in vergelijking (76) bij de beweging in cilindervormige tappannen gevondene, dan blijkt het, dat bij het gebruik van wrijvingsrollen het moment van het drijvende koppel evenveel malen kleiner wordt als de straal van de tappan der wrijvingsrollen in den straal van die wrijvingsrollen zelve begrepen is.

De tweede wijze, waarop de wrijvingsrollen gebruikt worden, is voorgesteld in fig. 109. Uit de figuur blijkt dat het moment van het drijvende koppel is:

$$M = D x. \quad (85)$$

De arm x kan op dezelfde wijze als in fig. 107 worden bepaald. Vervangt men in vergelijking (78) φ door ϵ , dan wordt:

$$x = q \frac{\sin 2 \epsilon}{2 \sin \delta},$$

of na substitutie dezer waarde in vergelijking (85), en $\sin 2 \epsilon$ door $2 \sin \epsilon$ vervangende:

$$M = D q \frac{\sin \epsilon}{\sin \delta},$$

$x = r \sin \alpha$

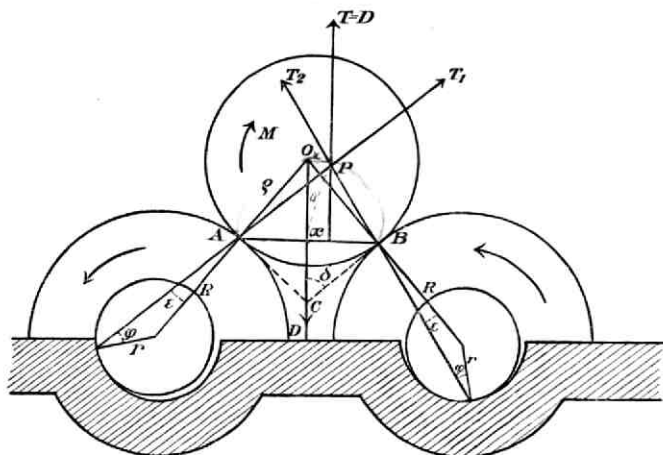
$q = r \epsilon$, daar α een middelen hoek is een arm r met ϵ .

waarin $\sin \varepsilon$, evenals hierboven, bij benadering gelijk gesteld mag worden aan $f \frac{r}{R}$. Hierdoor verkrijgt men:

$$M = \frac{f}{\sin \delta} \cdot \frac{r}{R} D \varrho.$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat het gebruik van op deze

Fig. 109.



wijze ingerichte wrijvingsrollen alleen dan voordeel is, wanneer $\frac{f}{\sin \delta} \cdot \frac{r}{R}$ kleiner is dan één.

Is bijv. $2\delta = 60^\circ$ dus $\sin \delta = \frac{1}{2}$ en $\frac{r}{R} = \frac{1}{10}$ dan wordt:

$$M = \frac{1}{5} f D \varrho.$$

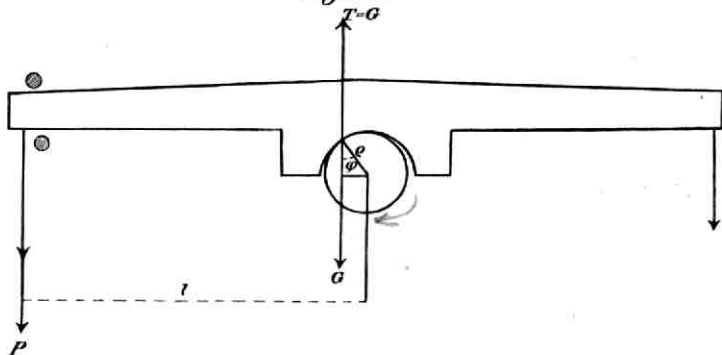
Het moment van het drijvende koppel bij deze inrichting is dan slechts het vijfde gedeelte van het moment bij de beweging in een cilindervormigen tappen vereischt.

§ 65. Wrijvingsbalans van Hirn.

De wrijvingsbalans van HIRN dient ter bepaling van wrijvingscoëfficiënten bij de beweging van tappen in tappannen.

Opdat het gewicht G van een belaste evenaar in evenwicht worde gehouden door den weerstand T van een draaienden tap, moet de lijn, waarlangs de kracht G werkt, gaan door het aanrakingspunt dier twee lichamen, en derhalve volgens § 63 gelegen zijn op den afstand $\varrho \sin \varphi$ van het middelpunt van den tap (fig. 110). Indien de last symmetrisch over de beide uiteinden van den evenaar verdeeld was, dan zou het zwaartepunt op de verticaal van het middelpunt van den tap gelegen zijn, en de som der momenten van alle gewichten ten opzichte van dat middelpunt zou nul zijn. Door toevoeging van een overwicht p aan den linkerkant, kan het zwaartepunt op den vereischten afstand

Fig 110.



$\varrho \sin \varphi$ gebracht worden. Ten opzichte van het middelpunt is het moment van de vervangende G gelijk aan de som der momenten van alle gewichten; deze laatste nu is gelijk aan het moment van het overwicht p ; zoodat men heeft

$$pl = G\varrho \sin \varphi \quad \text{of} \quad \sin \varphi = \frac{p}{G} \cdot \frac{l}{\varrho}.$$

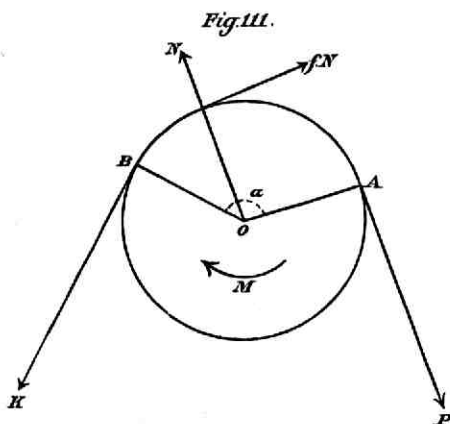
Heeft men de gewichten p en G door rechtstreeksche waarneming gevonden, dan kan uit deze vergelijking de wrijvingscoëfficiënt bij de beweging van tappen in cilindervormige tappannen worden bepaald. Wegens het geringe verschil tusschen $\sin \varphi$ en $\text{tg } \varphi$ mag $\sin \varphi$ door f worden vervangen. Is bijv. $\varrho = 0,05$ meter, $l = 1$ meter, $G = 1000$

eenheden en $p = 5$ eenheden, dan vindt men voor den wrijvingscoëfficiënt de waarde:

$$f = \frac{5}{1000} \cdot \frac{1}{0,05} = 0,1.$$

§ 66. Wrijving van een touw over een cilinder.

Indien een volkomen buigzaam touw over een rond-draaienden cilinder geslagen, in rust gehouden wordt door de aan de uiteinden werkende krachten K en P (fig. 111), dan zal de evenwichtstoestand niet worden verstoord, indien op de een of andere wijze de buigzaamheid van het touw opgeheven en het touw in een vaste stang veranderd wordt.



De op het touw werkende krachten moeten derhalve voldoen aan de algemeene evenwichtsvergelijkingen, even alsof het touw een vast lichaam was. Op het touw werken behalve de krachten K en P , nog in ieder punt de normale weerstand N van den draaienden cilinder en de daaraan evenredige wrij-

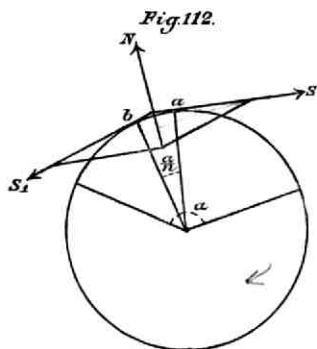
vingingsweerstand fN . Volgens de algemeene evenwichtsvoorwaarden moet de som der momenten van alle op het touw werkende krachten ten opzichte van het punt O gelijk nul zijn. Volgens de figuur is dus:

$$Pr - Kr + \Sigma(fNr) = 0 \text{ of } K - P = \Sigma(fN) \quad (86)$$

Om in elk punt den normalen weerstand N en den daaraan evenredigen wrijvingsweerstand fN te bepalen, verdeelen men den door het touw omspannen boog in n gelijke deelen. Zij ab zulk een deel (fig. 112).

Het moment van K ten opzichte van O is Kr .

Men kan zich voorstellen, dat het touw in de punten a en b is doorgesneden; de



inwendige krachten, die aan elk der doorgesneden einden werkten en het stuk ab in evenwichtstoestand hielden, kan men kortheidshalve de spanningen van het touw in a en in b noemen. De op het stuk ab werkende spanningen van het touw moeten dan door de uitwendige krachten S en S_1 vervangen worden, welke werken langs de raaklijnen aan den cirkel in a en b .

Indien er op het stuk ab geen wrijvingsweerstand werkte zou $S_1 = S$ zijn, en

$$N = 2 S \sin \frac{\alpha}{2n}.$$

Een benaderde waarde van den op het stuk ab werkenden wrijvingsweerstand zal dus zijn:

$$f N = 2 f S \sin \frac{\alpha}{2n}.$$

Hoe grooter men n neemt, des te kleiner zal de fout zijn, die men daardoor begaat. Voor n gelijk oneindig groot mag deze waarde als de juiste worden beschouwd, en neemt men in aanmerking, dat voor zoo kleine hoeken de sinus gelijk is aan den hoek, dan vindt men:

$$f N = S \frac{f \alpha}{n}.$$

De spanning S_1 is dus met inachtneming van de wrijving:

$$S_1 = S + S \frac{f \alpha}{n} = S \left(1 + \frac{f \alpha}{n} \right).$$

Men verkrijgt derhalve de spanning in eenig punt van het touw door de spanning in het voorafgaande punt met den factor $\left(1 + \frac{f \alpha}{n} \right)$ te vermenigvuldigen. Gaat men uit van

de spanning P , dan moet men om K te verkrijgen, P n achtereenvolgende malen vermenigvuldigen met den factor

$1 + \frac{f\alpha}{n}$, en men heeft dus:

$$K = P \left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^n, \quad (87)$$

waarin n een oneindig groot getal is.

Om voor dit geval de waarde van den factor $\left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^n$ te bepalen, stelle men:

$$\left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^n = \left\{ \left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{f\alpha}} \right\}^{f\alpha}$$

en ontwikkel de macht $\left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{f\alpha}}$ volgens het binomium van NEWTON. Men heeft dan:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{f\alpha}} &= 1 + \frac{n}{f\alpha} \cdot \frac{f\alpha}{n} + \frac{\frac{n}{f\alpha} \left(\frac{n}{f\alpha} - 1\right)}{2} \left(\frac{f\alpha}{n}\right)^2 + \\ &+ \frac{\frac{n}{f\alpha} \left(\frac{n}{f\alpha} - 1\right) \left(\frac{n}{f\alpha} - 2\right)}{2 \cdot 3} \left(\frac{f\alpha}{n}\right)^3 + \dots = \\ 1 + 1 + \frac{1 - \frac{f\alpha}{n}}{2} + \frac{\left(1 - \frac{f\alpha}{n}\right) \left(1 - 2\frac{f\alpha}{n}\right)}{2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

Stelt men hierin $n = \infty$, dan verkrijgt men als grenswaarde:

$$\lim. \left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{f\alpha}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots = e,$$

waarin $e = 2.71828 \dots$ het grondtal beteekent van het neperiaansche logarithmenstelsel. Men vindt dus:

$$\left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^n = \left\{ \left(1 + \frac{f\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{f\alpha}} \right\}^{f\alpha} = e^{f\alpha} \text{ en}$$

$$K = P e^{f\alpha}. \quad (88)$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat de verhouding van de krachten K en P alleen afhangt van α en f , en dat zij onafhankelijk is van den straal des cilinders.

Op den draaienden cilinder werkt de wrijvingsweerstand in de richting tegengesteld aan die der draaiing. Om de draaiende beweging eenparig te doen blijven, moet op den cilinder een koppel werken, waarvan het moment is:

$$M = r \Sigma (fN),$$

of volgens vergelijkingen (86) en (88):

$$M = (K - P)r = Pr(e^{f\alpha} - 1). \quad (89)$$

De vergelijkingen (88) en (89) gelden voor elke willekeurige snelheid der draaiende beweging; bijgevolg ook voor de snelheid nul, dat is voor het geval, dat de cilinder in rust is. Vergelijking (88) geeft dan de grenswaarde aan, welke de kracht K niet kan overschrijden, zonder het door den weerstand P tegengehouden touw over den in rust zijnden cilinder te doen heenglijden, en vergelijking (89) de grenswaarde, die het moment van een op den cilinder werkend koppel niet kan overschrijden zonder dezen een draaiende beweging te doen aannemen.

Ingeval de draaiende beweging van den cilinder in de tegengestelde richting plaats grijpt, moet men in bovenstaande vergelijkingen K en P verwisselen of wel $+f$ door $-f$ vervangen, daar de wrijvingsweerstand dan evenzoo op elk der beide lichamen in de tegengestelde richting werkt. Men kan derhalve aan vergelijking (88) den volgende meer algemeenen vorm geven:

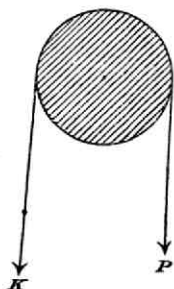
$$K = P e^{\pm f\alpha}, \quad (90)$$

waarin het teeken $+$ moet gebruikt worden, indien de wrijvingsweerstand in de richting tegengesteld aan die van K , en het teeken $-$, indien de wrijvingsweerstand in dezelfde richting als de kracht K werkt.

Is bijv. (fig. 113) de wrijvingscoëfficiënt van een hennep-touw op een houten cilinder $f = 0,4$, is $\alpha = \pi$ radialen en $P = 100$ eenheden, dan is:

$$K = 100 \cdot e^{0,4 \cdot 3,14} = 100 \cdot 3,51 = 351 \text{ eenheden.}$$

Fig. 113.



Is de cilinder onbeweeglijk bevestigd, en neemt de kracht K allengs toe, dan zal het glijden van het touw en het optrekken van het gewicht P beginnen op het oogenblik dat de kracht grooter wordt dan 351 eenheden.

Moet daarentegen de kracht K slechts het glijden van het touw of het dalen van het gewicht P beletten, dan is de onderste grenswaarde van de daartoe vereischte kracht:

$$K = 100 \cdot e^{-0,4 \cdot 3,14} = \frac{100}{3,51} = 28,5 \text{ eenheden.}$$

Om het touw in rust te doen blijven mag derhalve de kracht K niet grooter dan 351 en niet kleiner dan 28,5 eenheden zijn.

Neemt men in vergelijking (88) van beide leden de neperiaansche logarithmen, dan verkrijgt men:

$$\lg K = \lg P + f\alpha \quad \text{of} \quad \alpha = \frac{1}{f} \lg \frac{K}{P},$$

waaruit de hoek α kan worden bepaald, als K en P gegeven zijn.

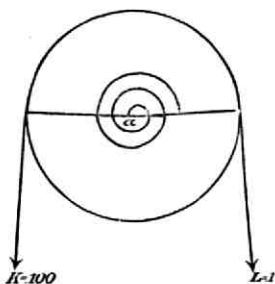
Is bijv. gegeven $K = 500$ eenheden, $P = 1$ eenheid en $f = 0,4$, dan heeft men:

$$\alpha = \frac{1}{0,4} \lg 500 = \frac{6,2146}{0,4} = 15,5365 \text{ radialen.}$$

Opdat derhalve bij het in fig. 114 voorgestelde geval de aan het eene einde van het om een onbeweeglijken cilinder gewonden touw werkende kracht $P = 1$ eenheid voldoende

zij om het neerdalen van het aan het andere einde hangende

Fig 114.

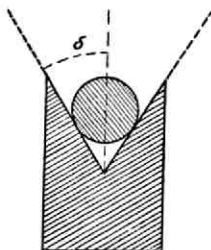


gewicht $K=500$ eenheden te beletten, moet de hoek, behoorende bij den door het touw omspannen boog, minstens de grootte $\alpha = 15,5365$ radialen hebben. Moet in plaats hiervan het aantal omwindingen n worden berekend, dan heeft men:

$$n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{15,5365}{6,28} = 2,47.$$

De gevonden vergelijkingen kunnen ook worden toegepast ingeval de cilinder voorzien is van een gleuf, waarin zich het touw bevindt (fig. 115). Men

Fig 115.



behoeft dan slechts f te vervangen door den wrijvingscoëfficiënt bij de beweging in gleuven $f_1 = \frac{f}{\sin \delta}$, waardoor vergelijking (90) overgaat in:

$$K = P e^{\pm \frac{f\alpha}{\sin \delta}}.$$

Was bijv. bij het in fig. 113 voor- gestelde geval de cilinder voorzien van een gleuf met den hoek $2\delta = 60^\circ$, dan

zou men f moeten vervangen door $\frac{f}{\sin \delta} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8$, en als grenswaarden der kracht K zou men verkrijgen:

$$K = 500 \cdot e^{\pm 0,8 \cdot 3,14} = \begin{cases} 1230 & \text{eenheden.} \\ 8,13 & \text{eenheden.} \end{cases}$$

In dezelfde veronderstelling zou men bij het op fig. 114 betrekking hebbende voorbeeld voor α de waarde verkrijgen:

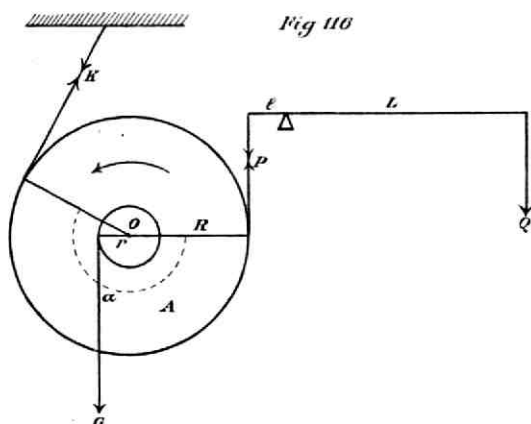
$$\alpha = \frac{\sin \delta}{f} \lg \cdot \frac{K}{P} = \frac{0,5}{0,4} \lg 500 = 7,768 \text{ radialen,}$$

die slechts de helft is van de boven gevonden waarde.

§ 67. Remtouw.

Een over een ronddraaienden cilinder geslagen, aan het eene einde bevestigd, en aan het andere einde door een kracht P gespannen touw kan dienen om de beweging van den cilinder te remmen.

Zij A (fig. 116) een cilinder; zij verder om een trommel,



aan de as van den cilinder bevestigd, een touw geslagen, waaraan een gewicht G hangt, dan zal dit gewicht een versneld draaiende beweging van den cilinder veroorzaken, en daarbij zou het gewicht G met een versnelde beweging dalen. Wil men door een remtouw de beweging eenparig houden, of als de cilinder in rust is, een voortdueren van den toestand van rust bewerken, dan moet het moment van den aan den omtrek van den cilinder werkenden wrijvingsweerstand $K - P$ even groot zijn als het moment van het gewicht G , beide momenten genomen ten opzichte van het punt O . De evenwichtsvergelijking is dus:

$$G r = (K - P) R.$$

Substitueert men hierin de waarde van K uit vergelijking (88), dan verkrijgt men:

$$G = P \frac{R}{r} (e^{f\alpha} - 1).$$

Wordt de kracht P aangebracht door middel van een hefboom, dan moet blijken de figuur voldaan zijn aan de vergelijking:

$$Pl = QL \text{ of } Q = P \frac{l}{L}.$$

Deelt men deze vergelijking door de voorgaande, dan verkrijgt men:

$$\frac{Q}{G} = \frac{l}{L} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{e^{f\alpha - 1}}.$$

Is bijv. de door het remtouw omspannen hoog het twee derde van den geheelen omtrek, dan is $\alpha = \frac{2}{3} \cdot 2\pi = 4,19$ radialen. Stelt men verder $f = 0,2$, $\frac{l}{L} = \frac{1}{20}$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$, dan is:

$$\frac{Q}{G} = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{e^{0,2 \cdot 4,19 - 1}} = \frac{1}{104,8}.$$

Bedroeg dus het gewicht G 1048 eenheden, dan zou aan het uiteinde van den hefboom een kracht $Q = 10$ eenheden moeten aangebracht worden.

Van de twee krachten K en P is steeds diegene de grootste, welke de draaiing van den cilinder tegenwerkt. Om de voordeeligste werking te verkrijgen, moet dus de hefboom bevestigd worden aan dat uiteinde van het remtouw, waaraan de voortgebrachte kracht in den zin van de draaiing werkt. In het bovenstaande voorbeeld is volgens vergelijking (88) de verhouding der krachten K en P :

$$\frac{K}{P} = e^{f\alpha} = 2,31.$$

Indien dus de hefboom bevestigd was aan het andere sterker gespannen einde van het remtouw, dan zou onder overigens gelijke omstandigheden een 2,31 maal grooter kracht $Q = 23,1$ eenheden aan het uiteinde van den hefboom moeten aangebracht worden.

§ 68. Buigingsweerstand en bij kettingen en touwen.

Indien aan een ronddraaienden tap (fig. 117) een belasting hangt, en de ring is in evenwichtstoestand, dan werken er twee krachten op: de belasting Q , die opgehangen is aan het punt B van een aan den ring bevestigde stang, en de totale weerstand T door den ronddraaienden tap aan den ring geboden. Daar een werkelijk glijden plaatsgrijpt, moet de lijn waarlangs T werkt, den wrijvingshoek φ met de normaal maken. De aanraking tusschen tap en ring moet derhalve plaats hebben in een punt C , welks straal AC een hoek φ maakt met de verticaal. De afstand van het middelpunt van den tap tot de verticaal van C is blijkens de figuur: $\varepsilon = \rho \sin \varphi$.

Wanneer de ring in rust is, dan moet de verticaal van het punt B , waarin de belasting Q opgehangen is, eveneens op den afstand ε van dat middelpunt verwijderd zijn. Daar ε onafhankelijk is

Fig 117.

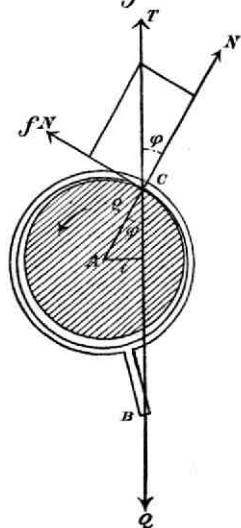
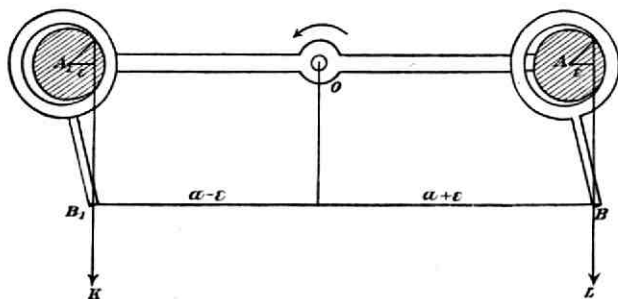


Fig 118.



van de snelheid waarmede de tap ronddraait, zoo is de

in de figuur voorgestelde stand van den ring ook dan nog een evenwichtsstand als de ronddraaiingssnelheid zeer klein of ook nul is.

Aan de beide uiteinden A en A_1 van een horizontalen gelijkarmigen hefboom (fig. 118) zijn tappen bevestigd. Er wordt verondersteld dat aan elk dier tappen op de hierboven beschreven wijze een belaste ring is opgehangen, en dat elke ring zich in dien evenwichtsstand bevindt, welke aan een draaiing van den tap in negatieven zin beantwoordt. Is de hefboom AOA_1 in rust, dan moet voldaan zijn aan de vergelijking:

$$K(a - \varepsilon) = L(a + \varepsilon) \quad \text{of} \quad \frac{K}{L} = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{a}}{1 - \frac{\varepsilon}{a}}.$$

Vermenigvuldigt men teller en noemer van deze breuk met $1 + \frac{\varepsilon}{a}$, dan verkrijgt men:

$$\frac{K}{L} = \frac{1 + 2\frac{\varepsilon}{a} + \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2},$$

waarin voor ε de gevonden waarde $\varrho \sin \varphi$ moet worden gesubstitueerd. In de veronderstelling echter, dat de grootheden ϱ en φ beide zeer klein zijn, kan de term $\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2$ in teller en noemer verwaarloosd worden; bij benadering is dan:

$$\frac{K}{L} = 1 + 2\frac{\varepsilon}{a}.$$

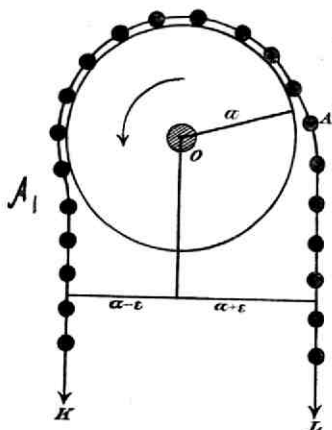
Vervangt men tevens $\sin \varphi$ door $\text{tg } \varphi$, waardoor $\varepsilon = f\varrho$ wordt, dan verkrijgt men:

$$\frac{K}{L} = 1 + 2f\frac{\varrho}{a}. \quad (91)$$

Deze vergelijking kan eveneens bij benadering als geldig worden beschouwd, indien de krachten K en L werken

aan de uiteinden van een ketting, over een om een spil draaibare schijf geslagen (fig. 119). Ook dan nog geldt zij als het aangrijpingspunt van K zich eenparig naar beneden, en dus dat van L zich eenparig naar boven beweegt. Bij de beweging toch van de ketting ontstaat aan den omtrek

Fig 119



der schijf een wrijvingsweerstand, die aan de schijf een eenparig ronddraaiende beweging mededeelt. In A , waar de ketting van den rechtlijnigen in den gebogen, en in A_1 , waar de ketting van den gebogen in den rechtlijnigen vorm overgaat, heeft wrijving plaats in de aanrakingsplaatsen der schakels, en in beide punten werkt die wrijving de vormverandering van de ketting tegen. Tengevolge daarvan is de hefboomsarm van de kracht L steeds iets grooter, die van de kracht K steeds iets kleiner dan zonder dezen wrijvingsweerstand het geval zou zijn. De verande-

ring van de hefboomsarmen kan nu op dezelfde wijze als in fig. 118 worden bepaald. Is dus a de straal van de schijf vermeerderd met de halve dikte der ketting, δ de dikte van den schakel, dus $\delta = 2\rho$, en wordt de wrijvingsweerstand, dien de spil der schijf bij haar beweging in de tappannen ondervindt, voorloopig buiten rekening gelaten, dan is volgens vergelijking (91):

$$K = L + f \frac{\delta}{a} L.$$

Is de kracht L het gewicht van een lichaam, dan wordt zij korthedshalve gewoonlijk de last genoemd.

Indien de schakels volkomen glad waren, dan zou $K = L$ moeten zijn. De grootheid $f \frac{\delta}{a} L$ is dus het bedrag, waarmee de kracht moet worden vermeerderd, om behalve den

last L nog den buigingsweerstand van de ketting te overwinnen. Deze buigingsweerstand heeft dus de grootte:

$$B = f \frac{\delta}{a} L. \quad (92)$$

Is bijv. het quotient $\frac{\delta}{a} = 0,1$ en de wrijvingscoëfficiënt $f = 0,15$, dan is de buigingsweerstand:

$$B = 0,15 \cdot 0,1 L = 0,015 L.$$

De buigingsweerstand heeft dus in dit geval dezelfde uitwerking, alsof de last met 1,5 percent vermeerderd wordt.

Op soortgelijke wijze als bij een ketting de wrijving van de schakels onderling, doet bij touwen de wrijving tusschen de afzonderlijke strengen of draden een buigingsweerstand ontstaan, die op de in fig. 119 aangeduide wijze de verhouding der hefboomsarmen van kracht en last wijzigt. De grootte van den buigingsweerstand bij touwen kan echter niet door berekening worden gevonden. Zij moet door rechtstreeksche proeven worden bepaald, en hangt natuurlijk geheel af van de hoedanigheid van het touw. Volgens REDTENBACHER is de buigingsweerstand voor touwen evenredig met het kwadraat van de dikte der touwen, en bij benadering te bepalen uit de formule:

$$B = 13 \frac{\delta^2}{a} L, \quad (93)$$

waarin δ meters de dikte van het touw, en a meters de straal van de schijf is.

Is bijv. de dikte van het touw 0,02 meter en de straal der schijf $a = 0,1$ meter, dan is de buigingsweerstand:

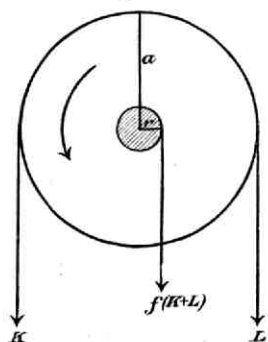
$$B = 13 \frac{0,02^2}{0,1} L = 0,052 L,$$

en zou dus dezelfde uitwerking hebben als een vermeerdering van den last met 5,2 percent.

§ 69. Weerstandscoefficient bij de draaiing van schijven, veroorzaakt door kettingen of touwen.

Evenals de werking van den buigingsweerstand kan worden beschouwd als te bestaan in een vermeerdering van den last met een grootheid B , welke bepaling in de vorige

Fig 120.



paragraaf is verklaard, zoo kan ook de werking van den wrijvingsweerstand, dien bij het ronddraaien der schijf de tappen van de tappannen ondervinden, beschouwd worden als te bestaan in de vermeerdering van den last met een zekere grootheid W , die op de volgende wijze kan worden gevonden.

Indien de ketting of het touw volkomen buigzaam was, dan zou de kracht K , behalve den last L , nog slechts den wrijvingsweerstand der tappen te overwinnen hebben. De grootte van de kracht K , die noodig is om den last L met eenparige beweging te doen stijgen en daarbij de schijf te doen ronddraaien, kan (fig. 120) gevonden worden uit de vergelijking:

$$Ka - La - f(K + L)r = 0$$

of: $\frac{K}{L} = \frac{1 + f \frac{r}{a}}{1 - f \frac{r}{a}}$

Handwritten notes: Vermeerdering Laster met $1 + f \frac{r}{a}$ en $1 - f \frac{r}{a}$ kan wijzen op $\frac{1 + f \frac{r}{a}}{1 - f \frac{r}{a}}$. Daar $f \frac{r}{a}$ zeer klein is, mag zij worden verwaarloosd den noemer.

Daar de grootheid $f \frac{r}{a}$ in den regel zeer klein is, zoo kan op dezelfde wijze als in de vorige paragraaf is verklaard, bovenstaande vergelijking bij benadering worden vervangen

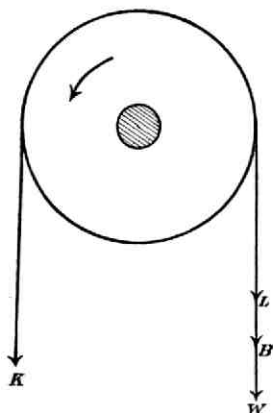
door: $\frac{K}{L} = 1 + 2f \frac{r}{a}$

Is $d = 2r$ de middellijn van den tap der schijf, dan is:

$$K = L + f \frac{d}{a} L.$$

Hierin is $f \frac{d}{a} L$ de gezochte grootheid W , dat is het bedrag, dat men bij den last moet voegen, om de werking van den wrijvingsweerstand der tappen te vervangen. Derhalve is:

Fig 121.



$$W = f \frac{d}{a} L. \quad (94)$$

De vereenigde werking van den buigingsweerstand en van den wrijvingsweerstand kan nu in rekening worden gebracht door de twee gewichten B en W bij den last L te voegen (fig. 121), en dan de kracht K te bepalen, even alsof de ketting of het touw volkomen buigzaam en de tappen der schijf volkomen glad waren. Men heeft dus:

$$K = L + B + W. \quad (95)$$

Substitueert men hierin de in de vergelijkingen (92) en (94) gevonden waarden, dan is voor kettingen:

$$K = L \left(1 + f_1 \frac{\delta}{a} + f \frac{d}{a} \right) = \mu L. \quad (96)$$

Hierin is de wrijvingscoëfficiënt der schakels f_1 genoemd om hem te onderscheiden van dien der tappen; bovendien is het gewicht der schijf zelve verwaarloosd.

Substitueert men in vergelijking (95) de in de vergelijkingen (93) en (94) gevonden waarden, dan is voor touwen:

$$K = L \left(1 + 13 \frac{\delta^2}{a} + f \frac{d}{a} \right) = \mu L. \quad (97)$$

In de vergelijkingen (96) en (97) zijn de factoren tusschen haakjes de getallen, waarmede men den last L moet vermenigvuldigen om de kracht K te verkrijgen.

Deze factoren worden *weerstandscoefficienten* genoemd. Voor kettingen is dus de weerstandscoefficient:

$$\mu = 1 + f_1 \frac{\delta}{a} + f \frac{d}{a}.$$

Is bijv. de dikte der schakels $\delta = 0,01$ meter, de straal der schijf $a = 0,1$ meter, de middellijn van de tappen der schijf $d = 0,015$ meter, en de wrijvingscoëfficiënt, zoowel van de schakels als van de tappen $f = f_1 = 0,15$, dan vindt men voor den weerstandcoëfficiënt:

$$\mu = 1 + 0,15 \frac{0,01}{0,1} + 0,15 \frac{0,015}{0,1} = 1,0375.$$

De kracht K moet derhalve in dit geval 3,75 percent grooter zijn dan de last L .

Voor touwen is de weerstandcoëfficiënt:

$$\mu = 1 + 13 \frac{\delta^2}{a} + f \frac{d}{a}.$$

Is bijv. de dikte van het touw $\delta = 0,02$ meter, de straal der schijf $a = 0,08$ meter, de middellijn van de tappen der schijf $d = 0,024$ meter en de wrijvingscoëfficiënt der tappen $f = 0,15$, dan is de weerstandcoëfficiënt:

$$\mu = 1 + 13 \cdot \frac{0,02^2}{0,08} + 0,15 \cdot \frac{0,024}{0,08} = 1,11.$$

De op te heffen last wordt derhalve in dit geval met 11 percent vermeerderd, dat is, tot het met eenparige beweging doen opstijgen van een last van 100 eenheden, is een kracht van 111 eenheden noodig.

HOOFDSTUK X.

Werktuigen.

§ 70. Nuttige en schadelijke weerstand.

Het komt meermalen voor, dat op eenig punt P van een lichaam een uitwendige of ook wel een inwendige kracht L werkt, en dat het aangrijpingspunt P dier kracht L over een zekeren weg s in de richting tegengesteld aan die der kracht moet worden verplaatst. In dat geval wordt de kracht L gewoonlijk de *weerstand* genoemd, en men zegt

dan, dat de weerstand L over den weg s moet worden overwonnen.

Het eenvoudigste zou zijn daartoe een kracht K op het punt P te laten werken langs de lijn, waarlangs de weerstand werkt, en in een richting tegenovergesteld aan die van den weerstand. De kracht K zou aanvankelijk iets grooter moeten zijn dan L , maar zoodra het punt P een snelheid, hoe gering ook, heeft verkregen, is een kracht K gelijk aan L voldoende om de beweging verder eenparig te doen zijn. Voortaan zal worden aangenomen, dat de kracht K reeds van den aanvang af slechts de grootte L behoeft te hebben.

De kracht K noodig tot het overwinnen van een weerstand L zal korthedshalve voortaan de *beweegkracht* worden genoemd. In het zooeven behandelde geval moet dus de grootte der beweegkracht gelijk zijn aan die van den weerstand.

Wordt de weerstand L over een weg s overwonnen, dan heeft hij een negatieven arbeid van Ls eenheden verricht; deze arbeid wordt de *weerstandsarbeid* genoemd. De beweegkracht K verricht daarbij den positieven arbeid Ks eenheden, *beweegkrachtsarbeid* genoemd, die in grootte gelijk is aan den weerstandsarbeid.

Intusschen laten de omstandigheden meestal niet toe de beweegkracht rechtstreeks op het lichaam te doen werken. Men maakt dan gebruik van toestellen, *werktuigen* genoemd. Op een door den aard van het werktuig bepaalde plaats laat men een zoodanige beweegkracht K aangrijpen, dat daardoor op een andere plaats van het werktuig een kracht wordt te voorschijn geroepen, aangrijpende in het punt P en gelijk en tegengesteld gericht aan den weerstand L . Dit heeft het voordeel, dat men aan de beweegkracht K de voor de omstandigheden meest geschikte grootte en richting kan geven.

Aan het gebruik van een werktuig zijn echter ook nadeelen verbonden. Het lichaam, waarop de weerstand L werkt, beweegt zich langs de deelen van het werktuig, of de deelen van het werktuig bewegen zich langs elkander. In beide gevallen treden daarbij nog andere weerstanden, zooals wrijvings- en buigingsweerstanden op, die ook door de beweegkracht moeten overwonnen worden.

Deze weerstanden, die optreden tengevolge van het gebruik van het werktuig, die veelal een nadeelige werking hebben op het werktuig zelf, en die steeds maken dat de beweegkracht grooter moet zijn dan zonder die weerstanden noodig zou wezen, worden *schadelijke weerstanden* genoemd, in tegenstelling van den *nuttigen weerstand* L , dien men beoogt door de beweegkracht te laten overwinnen.

Daar de beweging van alle punten van het werktuig, en dus ook die van de aangrijpingspunten van K en L en van den schadelijken weerstand, wordt verondersteld eenparig te zijn, zoo heeft de vervangende dier drie krachten de grootte nul. De som der arbeiden door die drie krachten verricht, is dus ook nul, of wel, de beweegkrachtsarbeid is even groot als de som van den nuttigen weerstandsarbeid en den schadelijken weerstandsarbeid, maar de eerste is positief, de beide laatsten zijn negatief.

Het *nuttig effect* van een werktuig wordt gemeten door het quotient van den nuttigen weerstandsarbeid en den beweegkrachtsarbeid.

In § 18 is opgemerkt, dat als op een punt P een kracht werkt, die een negatieven arbeid van A arbeidseenheden verricht, dit punt een arbeidsvermogen van plaats van A eenheden van arbeidsvermogen wint.

Hoewel dit in het algemeen het geval is, doet zich iets bijzonders voor, indien die kracht een wrijvings- of buigingsweerstand is. Dan toch vermeerderd niet het arbeidsvermogen van plaats, maar het moleculair arbeidsvermogen van beweging van het punt P . Dit moleculair arbeidsvermogen van beweging gaat ten deele over op de overige punten van het lichaam, het lichaam wordt warm. Intusschen geldt ook hierbij de wet van het behoud van arbeidsvermogen; het moleculair arbeidsvermogen van beweging door het lichaam gewonnen, en dat zich openbaart in temperatuursverhooging, is even groot als het arbeidsvermogen van plaats van A eenheden, dat het punt P had moeten winnen.

Er kan derhalve geen wrijvings- of buigingsweerstand overwonnen worden, dan ten koste van arbeidsvermogen, dat in een onnutten vorm, in warmte, overgaat. Men zegt daarom, dat er arbeidsvermogen tot het overwinnen van den wrijvingsweerstand is verbruikt. Dit arbeidsvermogen

is natuurlijk afkomstig van het verlies aan arbeidsvermogen van plaats, dat het werktuig heeft ondergaan, doordien de beweegkracht positieven arbeid heeft verricht. Vandaar dat men ook wel zegt, dat tot het overwinnen van wrijvingsweerstand arbeid wordt vereischt.

Bij de beweging van een tap in een tappan (§ 63) is de wrijvingsweerstand in een punt van den tap aangrijpende fD eenheden. Is v de lijnsnelheid van zoodanig punt, dan verricht de wrijvingsweerstand in elke seconde den negatieven arbeid fDv eenheden, en in elke seconde wordt dus tot het overwinnen van den wrijvingsweerstand een arbeid van fDv eenheden vereischt.

Is bijv. de druk $D = 1000$ eenheden en de wrijvingscoëfficiënt $f = 0,08$, dan is de wrijvingsweerstand:

$$fD = 0,08 \cdot 1000 = 80 \text{ eenheden.}$$

Is verder de straal van den tap $\varrho = 0,075$ meter en het aantal omwentelingen in de minuut $n = 12$, dan is de lijnsnelheid van een punt op den omtrek van den tap:

$$v = 2\pi\varrho \frac{n}{60} = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,075 \cdot \frac{12}{60} = 0,0942 \text{ eenheden.}$$

De in elke seconde voor het overwinnen van dien wrijvingsweerstand vereischte arbeid is dus:

$$A = 80 \cdot 0,0942 = 7,536 \text{ eenheden.}$$

§ 71. Arbeidssnelheid. Vang van Prony.

Bij het gebruik van werktuigen is het dikwijls noodig te kunnen bepalen hoe groot de nuttige weerstandsarbeid is, die in de seconde wordt verricht. Dit heeft aanleiding gegeven tot het invoeren van het begrip *arbeidssnelheid*.

De arbeidssnelheid van een werktuig wordt evenredig gesteld aan den nuttigen weerstandsarbeid, die bij het gebruik van dat werktuig in de seconde wordt verricht.

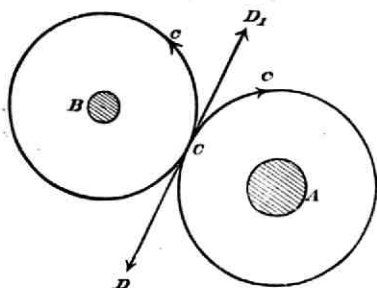
De eenheid van arbeidssnelheid is de arbeidssnelheid van een werktuig bij het gebruik waarvan, de nuttige weerstandsarbeid in elke seconde verricht, de negatieve eenheid van arbeid bedraagt.

In de praktijk wordt een andere eenheid van arbeidssnelheid gebruikt, *paardekracht* genoemd. Een paardekracht is de arbeidssnelheid van een werktuig bij het gebruik waarvan, de nuttige weerstandsarbeid in elke seconde verricht

75 kilogramm. bedraagt. Deze eenheid is 75 g of 736 maal zoo groot als bovengenoemde eenheid.

Wanneer de twee eenparig ronddraaiende assen *A* en *B* (fig. 122), deel uitmakende van een werktuig, door een paar getande raderen met elkander in verband staan, en *A* de drijvende, *B* de gedrevene as is, dan zullen

Fig 122.



op de plaats *C* waar de tanden in elkander grijpen, twee onderling gelijke maar tegengesteld gerichte drukkrachten *D* en *D₁* worden te voorschijn geroepen. De kracht *D* werkt op de as *A* als weerstand, de kracht *D₁* werkt op de as *B* als beweegkracht.

Indien de nuttige weerstand ergens op een punt van de as *B* aangrijpt, dan kan de in de seconde verrichte nuttige weerstandsarbeid slechts weinig in grootte verschillen van den in de seconde door *D₁* verrichten beweegkrachtsarbeid; deze laatste is gelijk aan den in de seconde door *D* verrichten weerstandsarbeid. Om dus de arbeidssnelheid van het werktuig te vinden behoeft slechts deze laatste te worden bepaald.

Men kan daartoe gebruik maken van de vang van PRONY, een toestel die in fig. 123 in beginsel is voorgesteld, en wel op de volgende wijze:

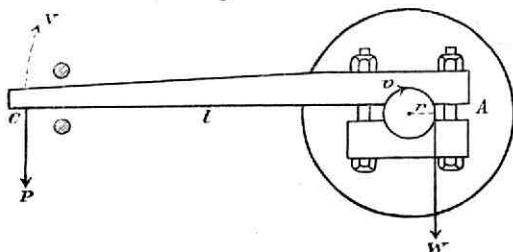
De as *B* wordt ontkoppeld, zoodat de tanden der raderen niet meer in elkander grijpen. De as *A*, waarop de weerstand *D* nu niet meer werkt, verkrijgt dan een grooter omdraaiingssnelheid; het aantal omwentelingen in de minuut zal bijv. van *n* tot *n₁* toenemen. Nu wordt de vang aan de as *A* bevestigd, en de schroeven worden aangedraaid tot dat het aantal omwentelingen in de minuut weer tot *n* is

verminderd. Zoodra de vorige omdraaiingssnelheid is bereikt, verricht de wrijvingsweerstand van de vang op de as in elke seconde denzelfden weerstandsarbeid als vroeger de weerstand D . Is W de aan den omtrek van de as A werkende wrijvingsweerstand en v de lijnsnelheid van een punt op den omtrek dier as, dan is de arbeidssnelheid van het werktuig:

$$U = Wv \text{ eenheden.} \quad (98)$$

De wrijvingsweerstand werkt ook op de vang en tracht deze in positieven zin te doen ronddraaien. Hij werkt op de vang even als een gewicht W zou doen, dat aan de vang was opgehangen op een afstand gelijk aan den straal r van

Fig 123



de as rechts van het middelpunt. De grootte van W kan bepaald worden door aan de vang in C een gewicht P op te hangen, juist zoo groot als noodig is om de kracht W in evenwicht, en de vang in horizontalen stand zwevende te houden. Door toepassing van de momentenvergelijking heeft men dan:

$$Pl = Wr \quad \text{of} \quad W = P \frac{l}{r}.$$

Substitueert men deze waarde van W in vergelijking (98) dan verkrijgt men:

$$U = P \left(\frac{l}{r} v \right). \quad (99)$$

De factor tusschen haakjes geeft de lijnsnelheid aan, die eenig punt op een cirkelomtrek met den straal l zou hebben,

indien die cirkel aan de draaiende beweging van de as deelnam. Noemt men deze snelheid V , dan verkrijgt men de eenvoudiger uitdrukking:

$$U = P \cdot V. \quad (100)$$

De gezochte arbeidsnelheid is dus gelijk aan het product van het gevonden gewicht P met de snelheid, die het ophangpunt van P zou hebben, indien de vang aan de draaiende beweging van de as deelnam.

Hierbij is verondersteld, dat het zwaartepunt van de onbelaste vang in de verticaal van het draaipunt ligt. Was dit niet het geval, lag het zwaartepunt bijv. ter linkerzijde van de draaiingsas, dan zou in vergelijking (100) in plaats van het gewicht P , een naar evenredigheid grooter gewicht in rekening moeten gebracht worden.

Is bijv. het aantal omwentelingen in de minuut van de as A $n = 75$, en heeft men voor het aan den hefboomsarm $l = 2,5$ meter op te hangen gewicht $P = 1000$ dynamische eenheden gevonden, dan is de snelheid V :

$$V = 2 \pi l \frac{n}{60} = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5 \cdot \frac{75}{60} = 19,635 \text{ eenheden,}$$

en volgens vergelijking (100) de arbeidssnelheid:

$$U = 1000 \cdot 19,635 = 19635 \text{ eenheden.}$$

Om de arbeidssnelheid in paardekrachten uit te drukken, heeft men slechts boven gevonden getal door 736 te deelen, of:

$$U = 26,7 \text{ paardekrachten.}$$

In plaats van de vang van PRONY kan men ook van een remtouw gebruik maken. Na ontkoppeling van de as B slaat men daartoe een remtouw over de as A of over een aan de as bevestigde schijf, en maakt de spanning van het touw zoo groot, dat de ronddraaiingssnelheid der as dezelfde verkrijgt als voor de ontkoppeling. Om de arbeidsnelheid van het werktuig te vinden, heeft men, zooals hierboven is verklaard, slechts den weerstandsarbeid te bepalen door den wrijvingsweerstand in de seconde verricht. Noemt men de spanning in de beide einden van het touw K en P , dan heeft de wrijvingsweerstand volgens verge-

lijking (86) de grootte $K - P$. Om de spanningen K en P te bepalen, gaat men op de volgende wijze te werk. Eerst bevestigt men het einde D van het touw (fig. 124) aan een vast punt, en hangt men aan het einde C gewichten

Fig. 124.

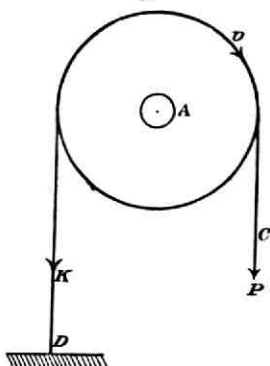
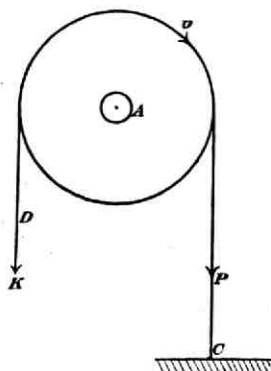
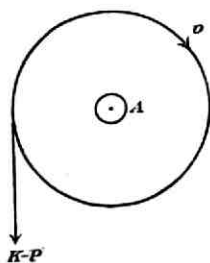


Fig. 125.



totdat de as haar oorspronkelijke omdraaiingssnelheid heeft verkregen. Dit gewicht is de gezochte spanning P . Daarna herhaalt men de bewerking, maar nu wordt (fig. 125) het

Fig. 126.



einde C bevestigd, en het einde D met gewichten bezwaard. Dit gewicht is de gezochte spanning K . Is nu v eenheden de lijnsnelheid van een punt op den omtrek der schijf, waaraan de wrijvingsweerstand $K - P$ werkt, dan is de gezochte arbeidssnelheid:

$$U = (K - P) v \text{ eenheden.}$$

Heeft men bijv. gevonden $v = 3$ eenheden, $P = 1000$ en $K = 2500$ eenheden, dan is de gezochte arbeidssnelheid:

$$U = (2500 - 1000) 3 = 4500 \text{ eenh.} = 6,1 \text{ paardekrachten.}$$

§ 72. Hefboom.

Elke toestel, waarop een beweegkracht aangebracht wordt, wier richting niet rechtstreeks tegengesteld is aan de richting van den te overwinnen weerstand, wordt een werktuig genoemd. De werktuigen zijn of enkelvoudige of samengestelde; de samengestelde bestaan uit deelen die zelf werktuigen zijn. De meest verwijderde onderdeelen, die nog aan de boven gegeven bepaling voor een werktuig voldoen, worden enkelvoudige werktuigen genoemd. Alleen de enkelvoudige en enkele zeer eenvoudige samengestelde werktuigen zullen worden behandeld. Er zijn twee typen van enkelvoudige werktuigen: de hefboom en het hellend vlak. Elk werktuig is of een hefboom, of een hellend vlak, of een verbinding van hefboomen en hellende vlakken.

Een *hefboom* is een staaf om een vaste as draaibaar. De evenwichtsvoorwaarde, waaraan de op den hefboom werkende krachten moeten voldoen, is derhalve, dat de som der momenten van de krachten ten opzichte van die vaste as gelijk nul is. In den regel is de hefboom draaibaar om tappen, die door tappannen in onveranderlijken stand worden gehouden. In elk bijzonder geval kan de weerstand, dien de tappen aan den tap biedt, en daarmede de wrijvingsweerstand worden bepaald. Voorbeelden hiervan zijn reeds behandeld bij de wrijvingsbalans van HIRN en de vang van PRONY.

§ 73. Katrollen en takels.

De katrol bestaat uit een schijf aan een spil bevestigd; de spil is draaibaar in een paar tapgaten, die zich bevinden in een om de schijf aangebrachten beugel. Wordt de beugel aan een vast punt A bevestigd (fig. 127), en wordt om de schijf een touw geslagen, aan welks uiteinden krachten werken, dan wordt de katrol een *vaste katrol* genoemd. Is K de kracht en L de last, dan is volgens vergelijking (97):

$$K = \mu L.$$

waarin μ de weerstandscoefficient is.

De weg door het aangrijpingspunt van den last doorloopen is even groot als de weg door het aangrijpingspunt van de

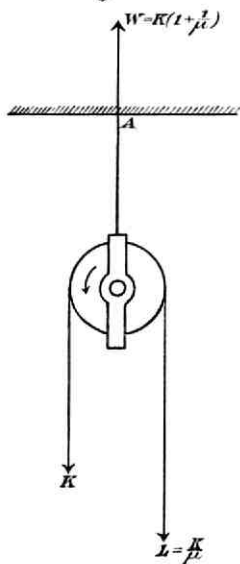
kracht doorloopen; is die weg s meters, dan is de nuttige weerstandsarbeid $A_t = Ls$ en de beweegkrachtsarbeid $A_k = Ks$; het quotient p , waardoor het nuttige effect van de vaste katrol wordt gemeten, is dus:

$$p = \frac{A_t}{A_k} = \frac{Ls}{Ks} = \frac{1}{\mu}.$$

Verwaarloost men het gewicht van de katrol, dan is de weerstand, geboden door het vaste ophangpunt, waaraan de beugel bevestigd is:

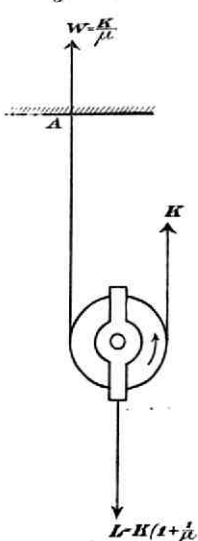
$$W = K + L = K \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Fig. 127.



Is het eene einde van het over de schijf geslagen touw aan een vast punt A bevestigd (fig. 128), grijpt de kracht aan het andere einde van het touw en de last aan den beugel aan, dan wordt de katrol een *losse katrol* genoemd. Is de kracht K , dan is de weerstand W , dien het bevestigingspunt aan het andere einde van het touw biedt, $W = \frac{K}{\mu}$. Verwaarloost men het gewicht van de katrol, dan is de last:

Fig. 128.



$$L = K + W = K \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Legt het aangrijpingspunt van den last een weg s af, dan legt het aangrijpingspunt van de kracht den weg $2s$ af.

De nuttige weerstandsarbeid is dan Ls en de beweegkrachtsarbeid $2 Ks$. Het quotient p , waardoor het nuttig effect bij de losse katrol wordt gemeten, is dus:

$$p = \frac{Ls}{2 Ks} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu} \right).$$

Een *takel* is een samenstel van losse en vaste katrollen. Als men bij den in fig. 129 voorgestelden zoogenaamden *machtstakel* wederom het gewicht der katrollen verwaarloost, dan vindt men achtereenvolgens:

$$W = \frac{K}{\mu}, \quad K_1 = K + W = K \left(1 + \frac{1}{\mu} \right).$$

$$W_1 = \frac{K_1}{\mu}, \quad K_2 = K_1 + W_1 = K \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)^2.$$

$$W_2 = \frac{K_2}{\mu}, \quad L = K_2 + W_2 = K \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)^3.$$

Is het aantal katrollen n , dan is in het algemeen:

$$L = K \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)^n.$$

Legt het aangrijpingspunt van den last L een weg s af, dan legt het aangrijpingspunt van de kracht af den weg $2^n \cdot s$. Het quotient p , waardoor het nuttig effect bij den *machtstakel* gemeten wordt, is dus:

$$p = \frac{Ls}{K \cdot 2^n s} = \left(1 + \frac{1}{\mu} \right)^n.$$

Is bijv. voor den in fig. 129 voorgestelden takel de weerstandscoefficient $\mu = 1,2$, dan is:

$$L = 6,85 K \text{ en } p = 0,86.$$

De nuttige weerstandsarbeid bedraagt dus 86 percent van den beweegkrachtsarbeid, terwijl de overige 14 percent voor het overwinnen van wrijvings- en buigingsweerstand wordt vereischt.

Vervangt men in de gevonden vergelijkingen μ door $\frac{1}{\mu}$,

dan gelden zij voor een beweging van het werktuig in tegen-
gestelden zin. Men kan daaruit dan vinden, hoe groot de

Fig 129

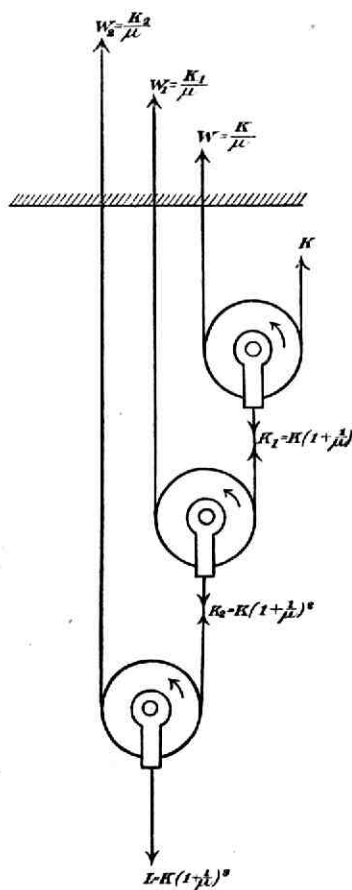
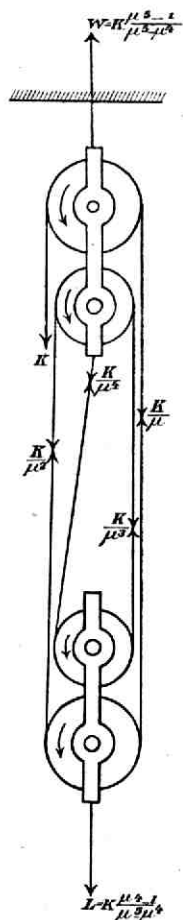


Fig 130



kracht K moet zijn om den last L met eenparige beweging
te doen dalen. Men heeft dan:

$$L = K(1 + \mu)^n.$$

In het bovenstaande voorbeeld zou men dan vinden:

$$L = K(1 + 1,2)^3 = 10,65 K.$$

Bij den in fig. 130 voorgestelden takel is de spanning in ieder deel van het touw het μ^{de} gedeelte van die in het voorafgaande deel. Verwaarloost men het gewicht van de blokken, en neemt men aan, dat de afstand der blokken van elkander zoo groot is, dat men de deelen van het touw als onderling evenwijdig mag beschouwen, dan is de kracht op ieder blok gelijk aan de som der spanningen in die deelen van het touw, welke met de schijven van dat blok in rechtstreeksch verband staan. Men heeft diensgevolge:

$$L = \frac{K}{\mu} + \frac{K}{\mu^2} + \frac{K}{\mu^3} + \frac{K}{\mu^4} = \frac{K}{\mu^4} (\mu^3 + \mu^2 + \mu + 1),$$

of:
$$L = \frac{K}{\mu^4} \cdot \frac{\mu^4 - 1}{\mu - 1} = K \frac{\mu^4 - 1}{\mu^5 - \mu^4}.$$

Is het aantal schijven niet 4 maar n , dan heeft men algemeen:

$$L = K \frac{\mu^n - 1}{\mu^{n+1} - \mu^n}.$$

Meestal zijn de in een blok behorende schijven niet onder elkander, maar naast elkander geplaatst (fig. 131). De bovenstaande vergelijking verandert daarbij niet.

Legt het aangrijpingspunt van den last een weg s af, dan legt het aangrijpingspunt van de kracht af den weg ns , en het quotient p , waardoor het nuttig effect van den gewonnen takel gemeten wordt, is derhalve:

$$p = \frac{Ls}{K \cdot ns} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mu^n - 1}{\mu^{n+1} - \mu^n}.$$

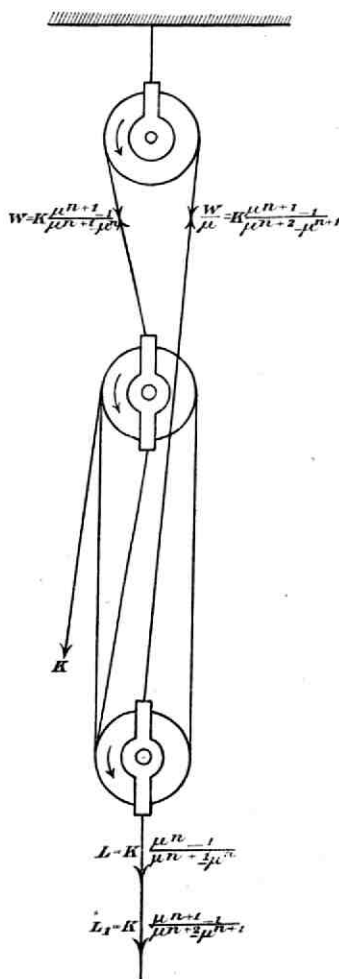
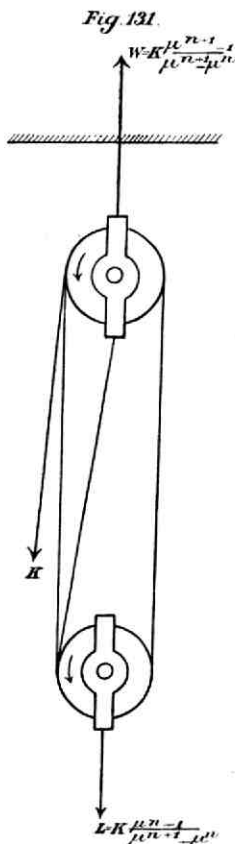
Is de weerstandscoefficient 1,2 en het aantal schijven 4, dan vindt men:

$$L = 2,59 K \quad \text{en} \quad p = 0,65.$$

In dit geval wordt dus 35 percent van den beweegkrachtsarbeid tot het overwinnen van wrijvings- en buigingsweerstand vereischt.

Moet de last L met eenparige beweging dalen, dan heeft

Fig 132



men in bovenstaande vergelijking slechts μ te vervangen door $\frac{1}{\mu}$, waardoor men verkrijgt:

$$L = K \frac{\frac{1}{\mu^n} - 1}{\frac{1}{\mu^{n+1}} - \frac{1}{\mu^n}} = \mu K \frac{1 - \mu^n}{1 - \mu}.$$

Is wederom $\mu = 1,2$ en $n = 4$, dan is:

$$L = 6,44 K.$$

Bij den in fig. 131 voorgestelden takel is de weerstand geboden door het punt waaraan het bovenste blok hangt:

$$W = L + K = K \frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu^{n+1} - \mu^n}.$$

Indien men het touw, waaraan dit blok hangt, niet aan een vast punt bevestigt, maar om de schijf van een vaste katrol slaat, en het andere einde aan het onderste blok bevestigt, dan is de spanning in dit einde (fig. 132):

$$\frac{W}{\mu} = K \frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu^{n+2} - \mu^{n+1}}.$$

Deze spanning werkt op het onderste blok, en om dus de beweging eenparig te doen zijn, moet bij den last

$$L = K \frac{\mu^n - 1}{\mu^{n+1} - \mu^n} \text{ nog een last } L_1 = K \frac{\mu^{n+1} - 1}{\mu^{n+2} - \mu^{n+1}}$$

gevoegd worden. De geheele last is dan:

$$L_2 = L + L_1 = K \cdot \frac{2\mu^{n+1} - \mu - 1}{\mu^{n+2} - \mu^{n+1}}.$$

*Laat men de wij-
ving buiten rekken
dan wordt $\mu = 1$*

Legt het aangrijpingspunt van L_2 een weg s af, dan legt het aangrijpingspunt van K af den weg $s \cdot (2n + 1)$. Daar toch de blokken door een over een vaste katrol geslagen touw zijn verbonden, zal het bovenste blok een weg s meters dalen, als het aangrijpingspunt van den last, en daarmee het onderste blok, een weg s meters stijgt. De blokken komen dus $2s$ meters dicht bij elkander, en het touw om n schijven loopende wordt over een lengte $2ns$ meters ingepalmd. Het aangrijpingspunt van de kracht K legt nu een weg s meters af, omdat het bovenste blok s meters daalt, en bovendien een weg $2ns$ meters door het inpalmen van

het touw, te zamen dus een weg $(2n+1)s$ meters. Het quotient p , waardoor het nuttig effect bij dezen zoogenaamden *spaanschen takel* wordt gemeten, is:

$$p = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{2\mu^{n+1} - \mu - 1}{\mu^{n+2} - \mu^{n+1}}.$$

Is bijv. de in fig. 131 voorgestelde takel tot een spaanschen takel ingericht, is dus $\mu = 1,2$ en $n = 4$, dan vindt men:

$$L_2 = 5,58 K \text{ en } p = 0,62.$$

Er wordt dus 38 percent van den beweegkrachtsarbeid tot het overwinnen van wrijvings- en buigingsweerstand vereischt.

Moet de last met eenparige beweging dalen, dan moet weer μ vervangen worden door $\frac{1}{\mu}$, dus:

$$L_2 = K \frac{\frac{2}{\mu^{n+1}} - \frac{1}{\mu} - 1}{\frac{1}{\mu^{n+2}} - \frac{1}{\mu^{n+1}}} = \mu K \frac{2 - \mu^n - \mu^{n+1}}{1 - \mu}.$$

Wederom $\mu = 1,2$ en $n = 4$ stellende:

$$L_2 = 12,81 K.$$

§ 74. Hellend vlak.

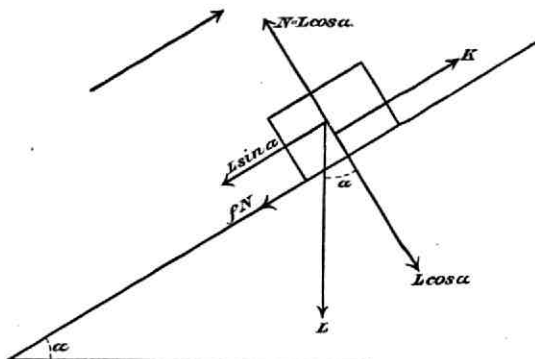
Om de voorwaarden te vinden, waaronder een lichaam zich langs een hellend vlak met eenparige beweging naar boven of naar beneden beweegt, ontbindt men alle op het lichaam werkende krachten in twee richtingen, de een loodrecht op het vlak, de ander daaraan evenwijdig. De som der ontbindingskrachten evenwijdig aan het vlak moet dan nul zijn. Hierbij wordt verondersteld, dat de krachten alle werken in het verticale vlak door de baan van het zwaartepunt gebracht.

Is α de hellingshoek, L de last, en werkt de kracht K langs een lijn evenwijdig aan het hellend vlak, dan is de

normale weerstand van het vlak $N = L \cos \alpha$, en de wrijvingsweerstand $fN = fL \cos \alpha$. Heeft de last een eenparige beweging naar boven (fig. 133), dan verkrijgt men:

$$K - L \sin \alpha - fL \cos \alpha = 0.$$

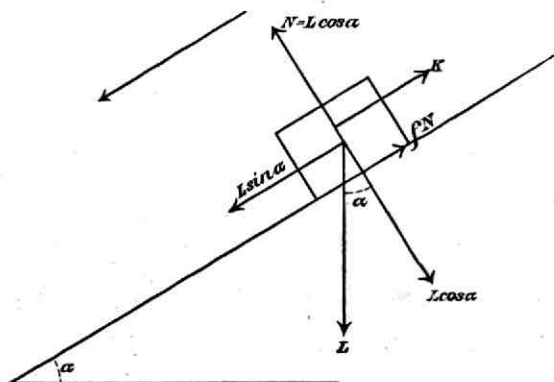
Fig. 133.



Heeft de last een eenparige beweging naar beneden (fig. 134), dan verkrijgt men:

$$K - L \sin \alpha + fL \cos \alpha = 0.$$

Fig. 134.



De voorwaarde voor de eenparige beweging wordt dus

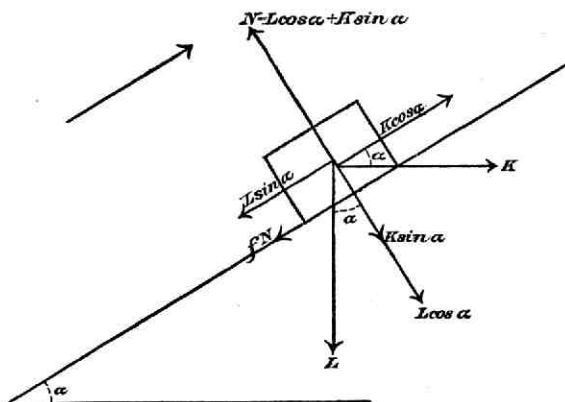
uitgedrukt door de voor beide gevallen geldende vergelijking:

$$K = L (\sin \alpha \pm f \cos \alpha) = L \frac{\sin (\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi} \quad (101)$$

waarin het teeken $+$ op het in fig. 133, het teeken $-$ op het in fig. 134 voorgestelde geval betrekking heeft. Deze vergelijking geeft tevens de grenswaarden aan, tusschen welke de grootte van de kracht K moet liggen, opdat een in rust zijnd lichaam onder haar werking noch naar den eenen, noch naar den anderen kant in beweging gerake.

Is in geval van fig. 134 $\alpha < \varphi$ dan wordt K negatief,

Fig 135.



dat wil zeggen, dan moet K naar beneden werken om de beweging van den last eenparig te doen zijn.

Werkt de kracht K in horizontale richting, dan is de normale weerstand van het vlak $N = L \cos \alpha + K \sin \alpha$ en de wrijvingsweerstand $fN = f(L \cos \alpha + K \sin \alpha)$. Beweegt de last zich eenparig naar boven (fig. 135), dan is:

$$K \cos \alpha - L \sin \alpha - f(L \cos \alpha + K \sin \alpha) = 0.$$

of

$$K = L \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}.$$

Beweegt zich de last eenparig naar beneden (fig. 136) dan is:

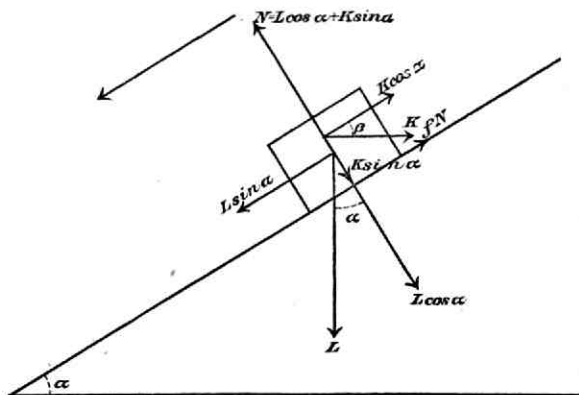
$$K \cos \alpha - L \sin \alpha + f(L \cos \alpha + K \sin \alpha) = 0.$$

of
$$K = L \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha}.$$

Voor beide gevallen geldt dan de vergelijking:

$$K = L \frac{\sin \alpha \pm f \cos \alpha}{\cos \alpha \mp f \sin \alpha}.$$

Fig 136.



Deelt men teller en noemer door $\cos \alpha$, dan wordt:

$$K = L \frac{\tan \alpha \pm f}{1 \mp f \tan \alpha}$$

of den wrijvingscoëfficiënt f vervangende door den tangens van den wrijvingshoek:

$$K = L \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi). \quad (102)$$

Is $\alpha + \varphi = 90^\circ$, dan wordt in het door fig. 135 voorgestelde geval $K = \infty$. Is dus de hellingshoek het complement van den wrijvingshoek, en werkt K in horizontale richting, dan kan de last zich onmogelijk met eenparige beweging naar boven bewegen.

Werkt de kracht K langs een lijn, die een hoek β maakt met het hellend vlak, dan is de normale weerstand van het vlak $N = L \cos \alpha + K \sin \beta$, en de wrijvingsweerstand $fN = f(L \cos \alpha + K \sin \beta)$.

Men heeft dus wederom:

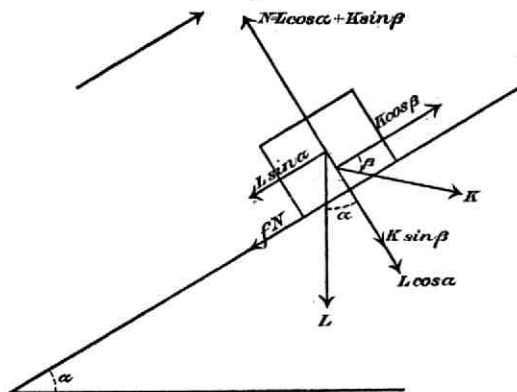
$$K \cos \beta - L \sin \alpha \mp f(L \cos \alpha + K \sin \beta) = 0.$$

of

$$K = L \frac{\sin \alpha \pm f \cos \alpha}{\cos \beta \mp f \sin \beta},$$

waarin de bovenste teekens gelden voor fig. 137 en de onderste teekens voor fig. 138.

Fig 137



Vervangt men in deze vergelijking f door $\operatorname{tg} \varphi$, en vermenigvuldigt men teller en noemer met $\cos \varphi$, dan verkrijgt men:

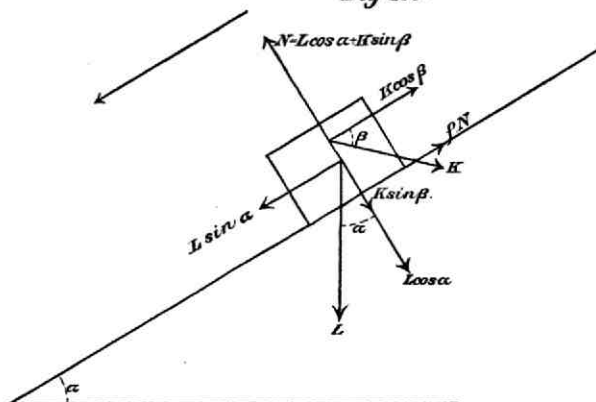
$$K = L \frac{\sin (\alpha \pm \varphi)}{\cos (\beta \pm \varphi)}. \quad (103)$$

Stelt men hierin $\beta = 0$ en $\beta = \alpha$, dan blijkt het dat de vergelijkingen (101) en (102) als bijzondere gevallen in vergelijking (103) zijn bevat.

De vergelijking (103) kan ook gevonden worden door gebruik te maken van de in § 60 gevonden eigenschap,

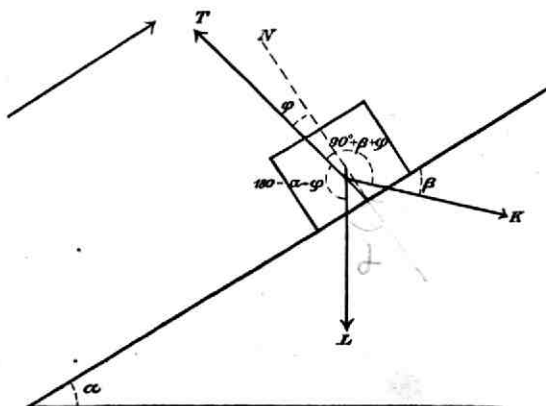
dat indien er glijding plaats grijpt, de lijn waarlangs de totale weerstand werkt, den hoek φ maakt met de normaal

Fig. 138.



aan den kant tegenovergesteld aan de richting der beweging. De drie krachten K , L en T (fig. 139 en fig. 140) zijn

Fig. 139.

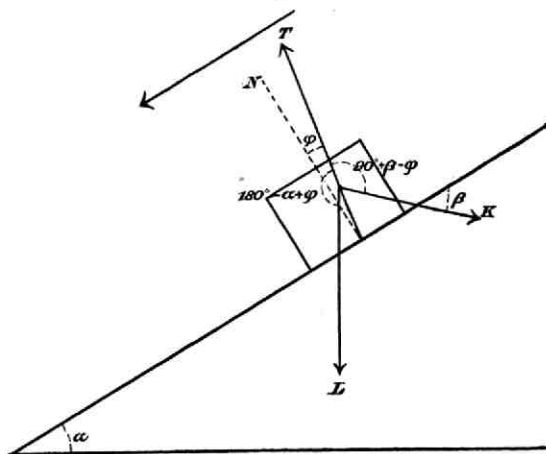


in evenwicht, en verhouden zich dus als de sinussen van de tegenoverliggende hoeken, of

$$K : L = \sin (\alpha \pm \varphi) : \cos (\beta \pm \varphi).$$

Uit vergelijking (103) blijkt, dat bij het in fig. 139 voorgestelde geval $K = \infty$ wordt als $\beta = 90 - \varphi$; dat is, als de lijn waarlangs K werkt, een hoek gelijk aan den wrijvingshoek maakt met het naar binnen gerichte deel der normaal. Is $\beta > 90 - \varphi$, dan geldt vergelijking (103) niet meer voor het in fig. 139 voorgestelde geval. Daar de ontbindingskracht $K \cos \beta$ alsdan kleiner is dan $f K \sin \beta$, is een beweging van het lichaam naar boven niet mogelijk, en derhalve is de veronderstelling, waarvan bij de afleiding

Fig. 140



dier vergelijking is gebruik gemaakt, dat namelijk de wrijvingsweerstand de grootte fN heeft, niet meer juist.

Is de hellingshoek grooter dan de wrijvingshoek, en werkt op het lichaam alleen zijn gewicht L , dan zal daar $L = mg$ is, de kracht $L (\sin \alpha - f \cos \alpha)$ aan het lichaam geven de versnelling:

$$q = g (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

In de veronderstelling dat de wrijvingscoëfficiënt niet verandert, is de beweging van het lichaam eenparig versneld. Is de aanvangssnelheid nul, dan is de in t seconden afgelegde weg:

$$l = \frac{q t^2}{2}.$$

Uit deze twee vergelijkingen kan, als de grootheden t , l en α zijn waargenomen, de wrijvingscoëfficiënt berekend worden.

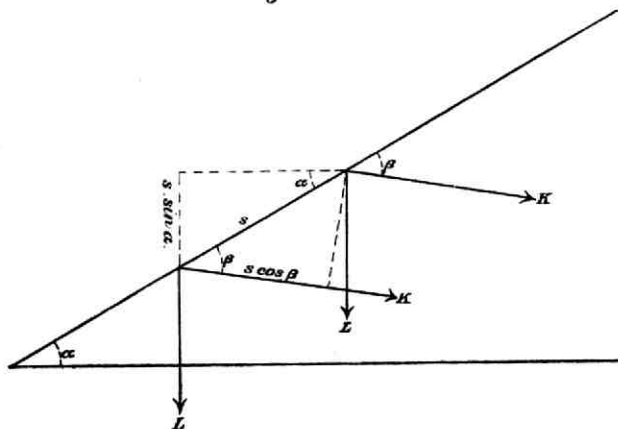
Legt bijv. een van stapel loopend schip langs een hellend vlak, dat een hoek van $4^{\circ} 25'$ maakt met den horizon, in 5,25 seconden een weg van 5,98 meters af, dan heeft men:

$$5,98 = \frac{q \cdot 5,25^2}{2} \text{ of } q = 0,434 \text{ eenheden,}$$

$$0,434 = 9,81 (0,077 - f \cdot 0,997) \text{ of } f = 0,033.$$

Beweegt het lichaam zich tegen het hellend vlak op, dan werken de krachten $L \sin \alpha$ en $f L \cos \alpha$ beide de beweging

Fig. 141



tegen; deze is derhalve eenparig vertraagd met de vertraging:

$$q = g (\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Is t het aantal seconden, waarna de snelheid nul geworden is, dan is de in dien tijd afgelegde weg:

$$l = g \left(\sin \alpha + f \cos \alpha \right) \frac{t^2}{2}.$$

Ook uit deze vergelijking kan de wrijvingscoëfficiënt bepaald worden, als de grootheden l , t en α zijn waargenomen.

Heeft men bijv. waargenomen, dat een slede tegen een onder een hoek van $5^{\circ}45'$ hellende ijsbaan 24 meters in 20 seconden oploopt, voordat haar snelheid nul geworden is, dan verkrijgt men:

$$24 = 9,81 \left(0,1 + f \cdot 0,995 \right) \frac{20^2}{2} \text{ of } f = 0,02.$$

Beweegt zich de last eenparig naar boven, en is de langs het hellend vlak afgelegde weg s (fig. 141), dan is de nuttige weerstandsarbeid $Ls \sin \alpha$ en de beweegkrachtsarbeid $Ks \cos \beta$. Het quotient p , waardoor het nuttig effect bij een hellend vlak gemeten wordt, is dan:

$$p = \frac{\cos(\beta + \varphi) \sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi) \cos \beta}.$$

§ 75. De wig.

Een wig is een driehoekig prisma. Een der standhoeken van de zijvlakken onderling is in den regel klein, en wordt de tophoek der wig genoemd. Het zijvlak tegenover den tophoek heet de rug der wig. Door middel van een wig kan een kracht K , op de rug aangebracht, de weerstanden L , normaal op de zijvlakken werkende, overwinnen.

Er wordt aangenomen, dat de kracht K werkt langs een lijn, die loodrecht staat op de rug en die den tophoek 2δ middendoordeelt (fig. 142).

De normale druk L brengt langs elk der zijvlakken den wrijvingsweerstand fL voort. Daar de som der ontbindingskrachten in elke richting gelijk nul moet zijn, heeft men:

$$K - 2L \sin \delta - 2fL \cos \delta = 0.$$

$$K = 2L (\sin \delta - \operatorname{tg} \varphi \cos \delta).$$

$$K = \frac{2L}{\cos \varphi} \sin(\delta + \varphi).$$

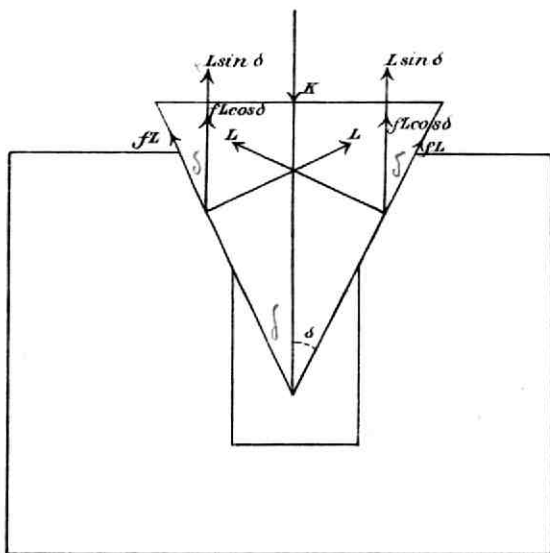
Indien de grootte moet bepaald worden van de kracht K , die op de wig moet werken, opdat de wig een eenparige beweging naar boven verkrijge, dan verandert in boven-

staande vergelijking φ in $-\varphi$, waardoor men verkrijgt:

$$K = \frac{2L}{\cos \varphi} \sin(\delta - \varphi).$$

Heeft δ de grootte van den wrijvingshoek, dan is $K = 0$;

Fig 142.



is δ kleiner dan φ , dan wordt K negatief, en de kracht zal dus naar boven moeten werken om de beweging eenparig te doen zijn.

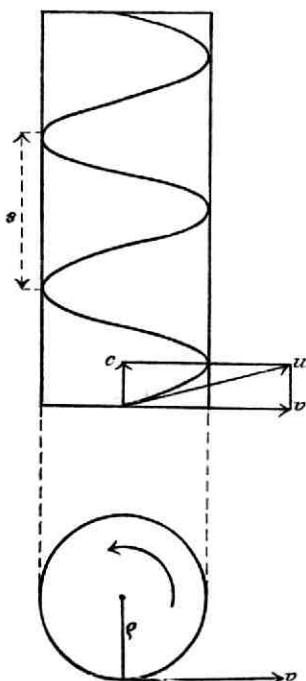
§ 76. Eenparige schroefbeweging.

Wanneer een lichaam zich zoodanig beweegt, dat men zijn werkelijke beweging ontbinden kan in twee bewegingen, waarvan de eene is een eenparige draaiende beweging om een as met de hoeksnelheid ω eenheden, en de andere een eenparige rechtlijnige beweging in de richting van die as met de snelheid c eenheden, dan heeft elk punt P van

dat lichaam een eenparige beweging langs een baan, die men *schroeflijn* noemt. De beweging van het lichaam wordt een eenparige schroefbeweging genoemd.

De beweging van eenig punt op den afstand ϱ van de as gelegen, kan voor een willekeurig tijdsverloop worden ontbonden in twee bewegingen: een eenparige cirkelvormige

Fig. 143.



met de lijnsnelheid $v = \varrho \omega$ langs den omtrek van een cirkel loodrecht staande op de as en waarvan het middelpunt in de as is gelegen, en een eenparige rechtlijnige met de snelheid c in de richting van de as. De snelheid u van het punt kan ontbonden worden in een ontbindingssnelheid v in de richting van de raaklijn aan dien cirkel, en in een ontbindingssnelheid c in de richting van de as (fig. 143). Volbrengt het lichaam een omwenteling in t seconden, en legt het in dien tijd een weg s meters af in de richting van de as, dan kunnen de ontbindingssnelheden van het punt P gevonden worden uit de vergelijkingen:

$$s = ct \quad \text{of} \quad c = \frac{s}{t}$$

$$2\pi\varrho = vt \quad \text{of} \quad v = \frac{2\pi\varrho}{t}.$$

Is het lichaam een verticale cilinder, dan is:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{v} = \frac{c}{\varrho \omega} = \frac{s}{2\pi\varrho} \quad (104)$$

als α de hoek is, dien de richting der snelheid u maakt met den horizon. Daar α standvastig is, heeft de hoek, dien de schroeflijn maakt met den horizon, een standvastige grootte.

Voor eenig ander punt op den afstand ϱ_1 van de as gelegen, heeft men op gelijke wijze:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{c}{\varrho_1 \omega} = \frac{s}{2\pi \varrho_1}.$$

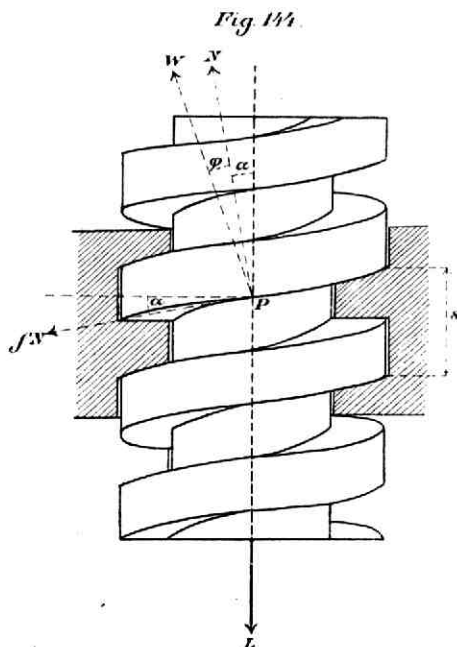
De afstand s , gedurende een omwenteling in de richting der as doorloopen, wordt de *spoed* van de schroeflijn genoemd. De schroeflijnen, door punten p op verschillende afstanden van de as gelegen doorloopen, hebben dus alle denzelfden *spoed*, maar de hoeken, die zij met den horizon maken, verschillen al naarmate haar afstanden tot de as. De schroefbeweging van het lichaam is eenparig, als de draaiende en de rechte lijnige ontbindingsbewegingen elk afzonderlijk eenparig zijn. Daartoe wordt vereischt, dat de som der momenten van alle op het lichaam werkende krachten ten opzichte van de draaiingsas gelijk is aan nul, en dat de som der ontbindingskrachten in de richting der as gelijk is aan nul.

§ 77. Schroef met vlakken gang.

Indien langs een schroeflijn om een cilinder een band wordt gewonden van zoodanigen vorm, dat de doorsnede van dien band met een vlak door de as gebracht, waar ook genomen, een rechthoek is, dan verkrijgt men een schroef met vlakken gang (fig. 144 en 145). In de veronderstelling dat de schroef door een vastliggende schroefmoer omsloten is, wordt gevraagd de grootte te bepalen van de kracht K , die in horizontale richting aan den hefboomsarm l moet werken, om de schroef eenparig naar boven te doen bewegen, en daarbij den in de richting der as werkenden weerstand L te overwinnen.

Op de schroef werken, behalve de last L en de kracht K , nog slechts de door de onbeweeglijke schroefmoer op haar uitgeoefende weerstanden, welke aangrijpen in de punten waar de schroef de schroefmoer aanraakt. Bij benadering mag worden aangenomen, dat deze aangrijpingspunten alle liggen op de gemiddelde schroeflijn met de straal $\varrho = \frac{R + r}{2}$ (fig. 146).

Is toch al in den aanvang de druk gelijkmatig over het geheele schroefvlak verdeeld, dan zal de slijting der buitenste deelen grooter zijn dan die der meer binnenwaarts gelegene, omdat in eenzelfde tijd over een zeker vlaktedeel buitenwaarts een groot oppervlak heenglijdt dan over een even groot vlaktedeel binnenwaarts. Bij het ongelijkmatig afslijten



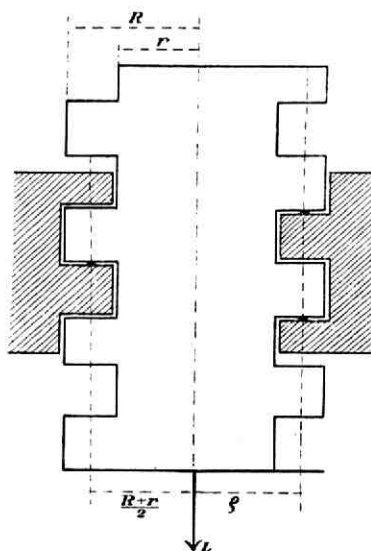
van het oppervlak zullen weldra de binnenwaarts gelegene deelen een grooter druk ondervinden dan de buitenwaarts gelegene. De blijvende drukverdeling treedt dan in, als de slijting overal dezelfde is, en dit is het geval als de drukkingen op verschillende punten van het schroefvlak omgekeerd evenredig zijn met de snelheden waarmede die punten zich bewegen. Een zeer smal strookje met den straal $q + \Delta$ beschreven, zal dan een even grooten druk

ondervinden als een even smal strookje met den straal $q - \Delta$ beschreven, en voor de verdeling van den druk is het dus hetzelfde alsof de geheele druk wordt uitgeoefend op den cirkel met den straal q .

De hoek, dien deze gemiddelde schroeflijn met den horizon maakt, kan onmiddellijk uit vergelijking (104) worden bepaald, en zal als gegeven worden aangenomen. In eenig punt P van de gemiddelde schroeflijn wordt door de moer aan de schroef een weerstand geboden, die ontbonden kan worden in den normalen weerstand N en den wrijvings-

weerstand fN . De normale weerstand werkt langs de doorsnede van twee vlakken, het eene loodrecht op de gemiddelde schroeflijn, het andere een verticaal raakvlak aan den cilinder, waarop de gemiddelde schroeflijn ligt. Deze lijn maakt dus een hoek α met de verticale as der schroef. De wrijvingsweerstand fN werkt in de richting van de raaklijn aan de gemiddelde schroeflijn naar beneden, en

Fig 145



maakt derhalve een hoek α met den horizon. Daar een werkelijk glijden plaats heeft, zoo maakt de lijn, waarlangs de totale weerstand W werkt, een hoek φ met de normaal, en dus een hoek $\alpha + \varphi$ met de verticaal. Hetzelfde geldt van de weerstanden in alle andere aanrakingspunten.

Het moment van den weerstand W ten opzichte van de as der schroef verkrijgt men door zijn horizontale ontbindingskracht $W \sin(\alpha + \varphi)$ met den hefboomsarm ρ (fig. 146) te vermenigvuldigen. Is de draaiende ontbindingsbeweging der schroef eenparig, dan moet de

som der momenten ten opzichte van de draaiingsas gelijk nul zijn; men heeft dus:

$$Kl - \Sigma [W \rho \sin(\alpha + \varphi)] = 0.$$

De verticale ontbindingskracht van W is $W \cos(\alpha + \varphi)$. Is de rechtlijnige ontbindingsbeweging der schroef eenparig, dan moet de som der ontbindingskrachten in de richting der as gelijk nul zijn, en dus:

$$L - \Sigma [W \cos(\alpha + \varphi)] = 0.$$

In deze twee vergelijkingen kunnen de standvastige factoren $\varrho \sin(\alpha + \varphi)$ en $\cos(\alpha + \varphi)$ voor het somteeken worden gebracht. Daardoor gaan deze vergelijkingen over in:

$$\begin{aligned} Kl &= \varrho \sin(\alpha + \varphi) \Sigma(W) \\ L &= \cos(\alpha + \varphi) \Sigma(W). \end{aligned}$$

Deelt men de eerste vergelijking door de tweede, dan verkrijgt men:

$$Kl = L \varrho \tan(\alpha + \varphi). \quad (105)$$

Legt het aangrijppingspunt van den nuttigen weerstand L den weg s af, dan legt het aangrijppingspunt van de beweegkracht den weg $2\pi l$ af. Het quotient p , waardoor het nuttig effect van de schroef met vlakken gang wordt gemeten, is dus:

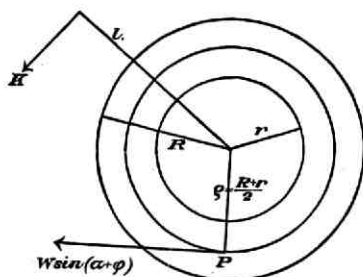
$$p = \frac{Ls}{K \cdot 2\pi l} = \frac{s}{2\pi \varrho \tan(\alpha + \varphi)},$$

of daar volgens vergelijking (104) $\frac{s}{2\pi \varrho} = \tan \alpha$

$$p = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi)}. \quad (106)$$

Vervangt men in vergelijking (105) φ door $-\varphi$, dan verkrijgt men de evenwichtsvergelijking voor de beweging in tegengestelden zin, waarbij dus de schroef met eenparige beweging daalt. In dit geval toch werkt de wrijvingsweerstand in tegengestelden zin, en de lijn waarlangs de weerstand W werkt, maakt dus den hoek $\alpha - \varphi$ met de verticaal. Voor dit geval is:

Fig 146.



$$Kl = L \varrho \tan(\alpha - \varphi) \quad (107)$$

De schroef toden manen van een afkalkende schroef af te halen.

Als nu voor φ met de wrijvingshoek, nu dan de
wrijvingshoek in gleuven heeft, dat het nu de
formule ook voor de schroef met scherp gang
carremus

de grootte van het moment der kracht, welke noodig is om te verhinderen, dat de schroef een versnelde beweging naar beneden verkrijgt. Is $\alpha = \varphi$ dan is $Kl = 0$, dat is, als de hellingshoek der gemiddelde schroeflijn gelijk is aan den wrijvingshoek, dan is er geen kracht noodig om de naar beneden gerichte beweging der schroef eenparig te doen zijn, hoe groot ook de last L is. Is α kleiner dan φ , dan wordt Kl negatief, dat is, om de benedenwaarts gerichte beweging van de schroef eenparig te doen zijn, moet het moment van de kracht negatief zijn, moet de kracht dus werken in den zin der draaiing.

De evenwichtsvergelijking voor de schroef met vlakken gang is dus:

$$Kl = Lq \tan(\alpha \pm \varphi) \quad (108)$$

waarin het bovenste teeken geldt voor de stijgende, het onderste voor de dalende beweging der schroef.

De vergelijking (108) geldt ook dan wanneer de schroef in rust is, en geeft dus de grenswaarden aan, welke het moment der kracht niet kan overschrijden, zonder dat de in rust zijnde schroef naar den eenen of naar den anderen kant in beweging komt.

Ook dan nog blijft vergelijking (108) geldig als de schroef vast is, en de krachten K en L op de beweeglijke schroefmoer werken.

§ 78. Schroef met scherpen gang.

De schroef met scherpen gang (fig. 147) verschilt daarin van de schroef met vlakken gang, dat de doorsnede van den band om den cilinder langs de schroeflijn gewonden met een door de as gebracht vlak niet een rechthoek, maar een geijkbeenige driehoek is (fig. 148).

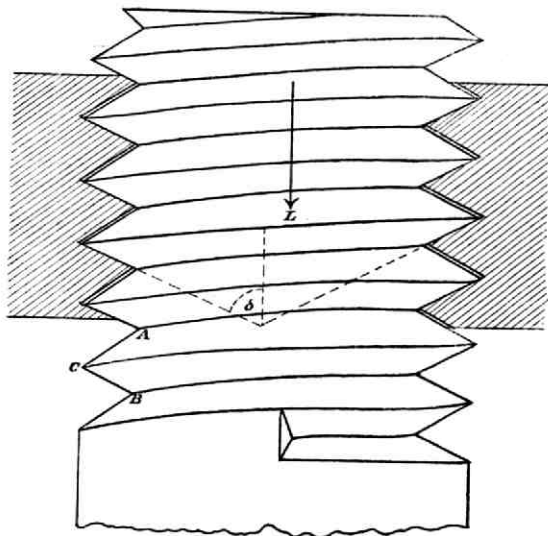
De kracht vereischt om de schroef met eenparige beweging te doen stijgen en daarbij den in de richting der schroefas naar beneden werkenden weerstand L te overwinnen, wordt bij benadering verkregen door in vergelijking (105) den wrijvingshoek φ te vervangen door ψ den wrijvingshoek voor gleuven. Dit kan op de volgende wijze worden aangetoond.

Op de schroef werken behalve de krachten K en L nog

in ieder punt de totale weerstand W , die ontbonden kan worden in den normalen weerstand N en in den wrijvingsweerstand fN .

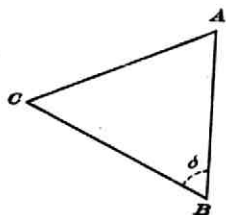
Zij P (fig. 149) een punt van de gemiddelde schroeflijn

Fig. 147.



en CB een der zijden van den gelijkbeenigen driehoek, die de doorsnede is van den om den cilinder gewonden band met het vlak van teekening, waarin ook de schroefas ligt; de lijn BC maakt den hoek δ met de verticaal.

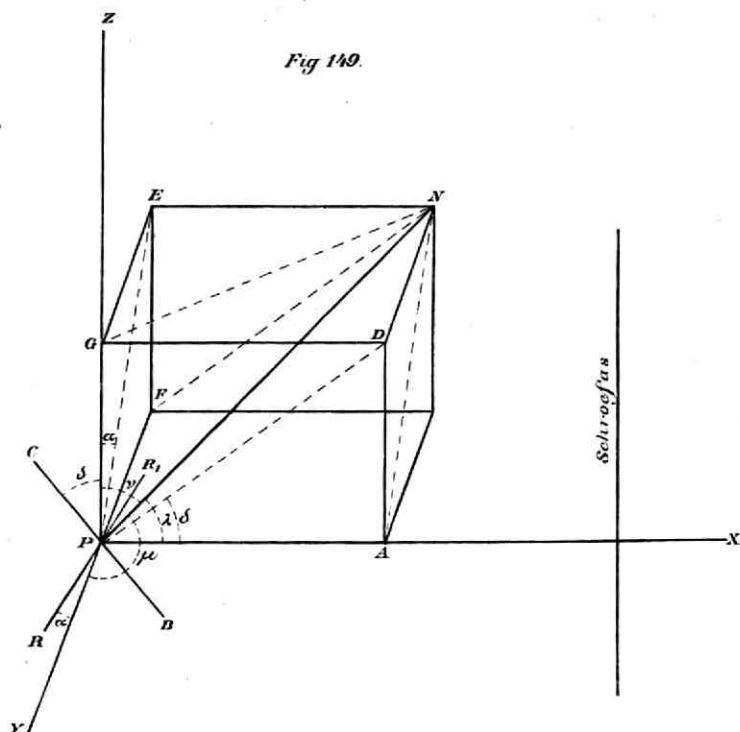
Fig. 148.



Brengt men door P een raakvlak ZPY aan den cilinder, waarop de gemiddelde schroeflijn ligt, dan snijdt de as PX de schroefas. De in het vlak YZ gelegen raaklijn RR_1 , in P aan de schroeflijn getrokken, maakt den hoek α met de horizontale lijn PY . De normaal in P , die loodrecht staat op de raaklijn RR_1 en op de lijn CB , is derhalve de doorsnede van

twee vlakken, het vlak DPY , loodrecht staande op CB , en dat dus den hoek δ maakt met de horizontale lijn PX , en het vlak EPX , loodrecht staande op de raaklijn RR_1 , en dat dus den hoek α maakt met de verticale lijn PZ .

Fig 149.



Noemt men de hoeken, die de normaal PN maakt met de drie coördinatenassen, λ , μ , ν , dan geeft de figuur de volgende betrekkingen aan:

$$PN \cos \lambda = PA = PD \cos \delta = PN \sin \mu \cos \delta$$

$$- PN \cos \mu = PF = PE \sin \alpha = PN \sin \lambda \sin \alpha$$

$$PN \cos \nu = FG = PE \cos \alpha = PN \sin \lambda \cos \alpha \quad \text{of}$$

$$\cos \lambda = \sin \mu \cos \delta \quad \cos \mu = -\sin \lambda \sin \alpha \quad \cos \nu = \sin \lambda \cos \alpha.$$

Brengt men de eerste twee vergelijkingen in het kwadraat en neemt men de som $\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda = 1$, dan is:

$$\sin^2 \mu \cos^2 \delta + \frac{\cos^2 \mu}{\sin^2 \alpha} = 1$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha \cos^2 \delta - \cos^2 \mu \sin^2 \alpha \cos^2 \delta + \cos^2 \mu &= \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \mu (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta) &= \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \delta) \end{aligned}$$

$$\cos \mu = - \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta}}$$

Hieruit kan men nu verder $\cos \lambda$ en $\cos \nu$ vinden, en men verkrijgt dan:

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{\cos \alpha \cos \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta}} & \cos \mu &= - \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta}} \\ \cos \nu &= \frac{\cos \alpha \sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta}}. \end{aligned}$$

Ontbindt men nu (fig. 150) N en fN langs de drie coördinatenassen, dan verkrijgt men voor de sommen der ontbindingskrachten:

langs de X -as	$N \cos \lambda$
langs de Y -as	$N \cos \mu - fN \cos \alpha$
langs de Z -as	$N \cos \nu - fN \sin \alpha$.

De evenwichtsvergelijkingen worden dan:

$$\begin{aligned} \Sigma [-N \cos \mu + fN \cos \alpha] \varrho - Kl &= 0 \\ \Sigma [N \cos \nu - fN \sin \alpha] - L &= 0 \end{aligned}$$

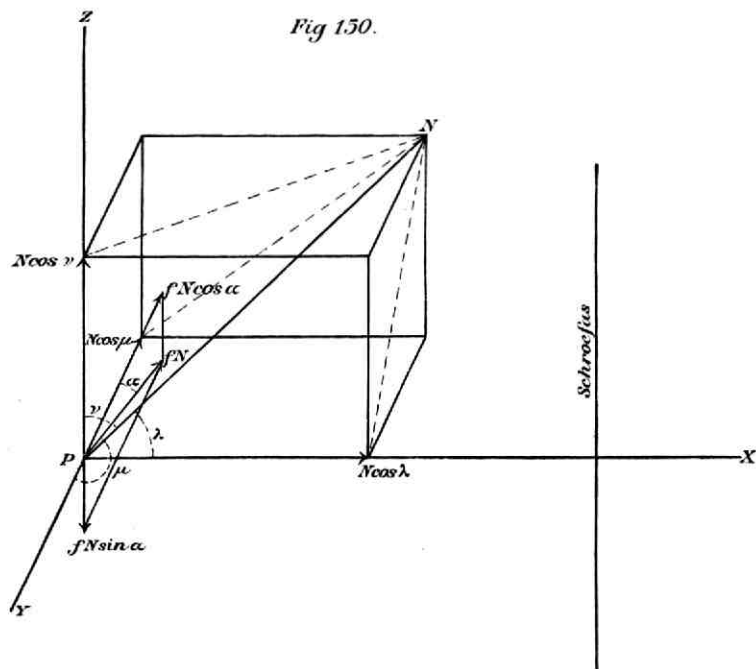
of na substitutie der gevonden waarden voor $\cos \mu$ en $\cos \nu$:

$$\begin{aligned} \frac{Kl}{\varrho} &= \left[\frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta}} + \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha \right] \Sigma N \\ L &= \left[\frac{\cos \alpha \sin \delta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta}} - \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha \right] \Sigma N \end{aligned}$$

Deelt men deze vergelijkingen op elkander, deelt men daarna teller en noemer door $\cos \alpha \sin \delta$, en stelt men $\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \delta} = \operatorname{tg} \psi$, dan vindt men:

$$\frac{Kl}{L\varrho} = \frac{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta}} + \operatorname{tg} \psi}{\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \delta}} - \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \alpha}.$$

Daar nu in den regel α zeer klein is en δ weinig van 90° verschilt, zijn $\sin \alpha$ en $\cos \delta$ beide klein, zoodat het



kwadraat van hun product mag verwaarloosd worden, waardoor men verkrijgt:

$$Kl = L\varrho \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi}$$

of
$$Kl = L\varrho \operatorname{tg} (\alpha + \psi). \quad (109)$$

Deze vergelijking is dezelfde als vergelijking (105), als

men in deze laatste den wrijvingshoek φ vervangt door ψ , den wrijvingshoek bij gleuven. Alle gevolgtrekkingen uit vergelijking (105) gelden dus ook voor vergelijking (109).

Het quotient p , waardoor het nuttig effect van de schroef met scherpen gang wordt gemeten, is dus:

$$p = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \psi)}. \quad (110)$$

Daar ψ grooter is dan φ , zoo is onder overigens gelijke omstandigheden het nuttig effect bij de schroef met scherpen gang steeds kleiner dan bij de schroef met vlakken gang. Deze laatste verdient dus de voorkeur, wanneer de schroef tot het voortbrengen van beweging moet worden aangewend. Vervangt men in vergelijking (109) ψ door $-\psi$, dan is

$$Kl = L_0 \operatorname{tg} (\alpha - \psi)$$

het moment van de kracht, vereischt om een teruggaande beweging van de schroef met scherpen gang te verhinderen. Moet zulk een teruggaande beweging door den wrijvingsweerstand alleen reeds verhinderd worden, dan moet α gelijk of kleiner zijn dan ψ . Bij een schroef met vlakken gang zou de teruggaande beweging reeds bij een kleineren hellingshoek $\alpha = \varphi$ plaats grijpen.

Hieruit volgt, dat in die gevallen, waar men zekerheid moet hebben dat de schroef niet van zelf terugwijkt, dat is in die gevallen, waar de schroef als middel van bevestiging dient, bij gelijken hellingshoek de schroef met scherpen gang beter aan haar doel voldoet dan de schroef met vlakken gang. Vandaar dat houtschroeven steeds schroeven met scherpen gang zijn.

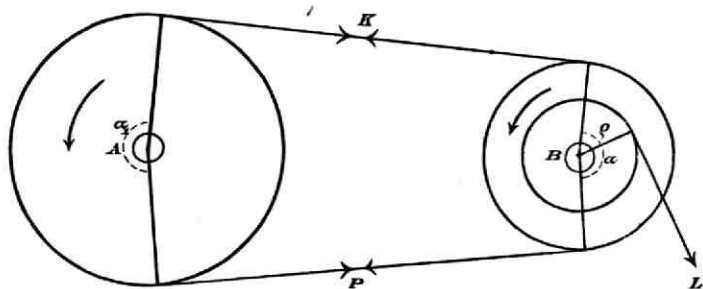
§ 79. Riem zonder eind.

Ten slotte zal nog behandeld worden de riem zonder eind, ook wel drijfriem genoemd, een inrichting, waarvan zeer dikwijls gebruik wordt gemaakt om een kracht, op eenig deel van een werktuig aangrijpende, op een ander deel over te dragen.

A en *B* (fig. 151) zijn twee cilinders of trommels om assen draaibaar, om welke trommels een riem zonder eind

is aangebracht. Er wordt verondersteld dat op de as van den trommel A , de drijfas genoemd, krachten werken, die haar een eenparige draaiende beweging mededeelen. Op de as van den trommel B , de gedreven as, grijpt de nuttige weerstand L aan; er wordt gevraagd, hoe groot de spanning

Fig 151.



van den riem minstens zijn moet, opdat ook de gedreven as een eenparige draaiende beweging verkrijge, en de aan den hefboomsarm ρ werkende weerstand L overwonnen worde.

Is het moment van den weerstand L zoo groot dat de gedreven as in rust blijft, dan zal bij het ronddraaien van de drijfas of de riem door den trommel A worden medegenomen en over den trommel B heenglijden, of de trommel A onder den in rust blijvenden riem doordraaien. Een glijden heeft daarbij steeds plaats langs den omtrek van den kleinsten der beide trommels. Volgens vergelijking (86)

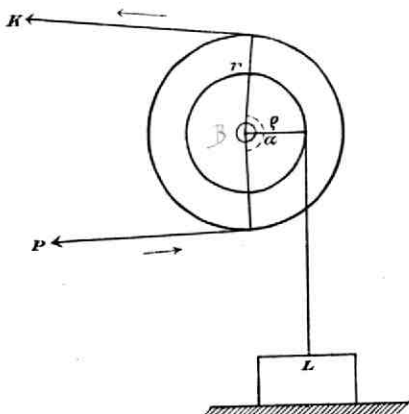
toch is de wrijvingsweerstand $W = P(e^{f\alpha} - 1)$, als P is de spanning in dat deel van den riem, waarin die spanning het kleinst is, en α de hoek omspannen door den boog, waarlangs riem en trommel elkander aanraken. Die hoek, en dus de wrijvingsweerstand, is het kleinst aan den omtrek van den kleinsten trommel. Is derhalve de trommel B het kleinst, dan zal de riem over dien trommel heenglijden. Is de trommel A het kleinst, dan zal die trommel onder den riem doordraaien zonder hem mede te nemen. Hierbij

$$W = K - L$$

wordt verondersteld dat de wrijvingscoëfficiënten voor beide trommels dezelfde zijn.

Eerst wordt aangenomen dat de trommel *B* de kleinste

Fig 152



is. Men kan zich voorstellen, dat de weerstand wordt voortgebracht door een gewicht *L*, dat aan een om een cilinder met den straal *q* gewonden draad hangt en bij het ronddraaien der as wordt opgewonden. Is dit gewicht door een vast vlak ondersteund (fig. 152) en is de spanning aanvankelijk zoo klein, dat de met den trommel *A* rondlopende riem over den trommel *B* heenglijdt, dan moet

volgens vergelijking (88) tusschen de spanningen *K* en *P* in de beide deelen van den riem de betrekking bestaan:

$$K = P e^{f\alpha}.$$

De aan den omtrek van den trommel *B* werkende wrijvingsweerstand is dan steeds:

$$K - P = P(e^{f\alpha} - 1). \quad (111)$$

Laat men nu de spanning van den riem allengs grooter worden — bijv. door drukkrachten, die de tappannen van de twee assen van elkander verwijderen — dan zal omdat

P grooter wordt, ook de wrijvingsweerstand $P(e^{f\alpha} - 1)$ grooter worden. Volgens vergelijking (89) blijft de as *B*

in rust, zoolang het moment $Pr(e^{f\alpha} - 1)$ van den wrijvingsweerstand kleiner is dan het moment Lq van den weerstand *L*. Eerst op het oogenblik dat:

$$Lq = Pr(e^{f\alpha} - 1) \quad (112)$$

begint de as *B* te draaien, en wordt het gewicht *L* opgeheven.

Zoodra de snelheid van eenig punt op den omtrek van den trommel B gelijk geworden is aan de snelheid van eenig punt van den riem, houdt het glijden op, en de draaiende beweging van de gedreven as wordt eenparig.

Daar de wrijvingsweerstand steeds slechts voor zooverre wordt te voorschijn geroepen, als noodig is om de beweging van den riem ten opzichte van den trommel te beletten, zoo zal bij het nog grooter worden der spanning de wrijvingsweerstand niet meer toenemen; en daar volgens vergelijking (86) steeds $W = K - P$ is, zoo zal bij het verder toenemen van de spanning, die vermeerdering zich gelijkelijk over de beide einden van den riem verdeelen. Noemt men K_o en P_o de uit de vergelijkingen (111) en (112) voortvloeiende waarden van K en P , dan heeft men:

$$K = K_o + \Delta \quad \text{en} \quad P = P_o + \Delta.$$

De waarden:

$$P_o = L \frac{g}{r} \cdot \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \quad (113) \quad \text{en} \quad K_o = L \frac{g}{r} \cdot \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \quad (114)$$

zijn dus de onderste grenswaarden voor de spanningen, die gedurende de beweging in de twee deelen van den riem voorhanden moeten zijn. Komen de assen tot rust, dan houdt het verschil in spanning op, en de riem is nu over haar geheele lengte gelijkmatig gespannen. Voor de spanning die de riem dan heeft, mag bij benadering genomen worden de rekenkundig middenevenredige van de grootste en de kleinste spanning gedurende de beweging. Derhalve is:

$$S = \frac{K_o + P_o}{2} = \frac{L}{2} \frac{g}{r} \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \quad (115)$$

de onderste grenswaarde van de spanning, welke de riem voor het begin der beweging moet hebben.

Wordt in de tweede plaats aangenomen, dat de trommel A de kleinste is (fig. 153), dan zal bij te geringe spanning van den riem de trommel A onder den riem door-draaien zonder hem mede te nemen. Tusschen de spanningen K en P bestaat alsdan de betrekking:

$$K = P e^{f\alpha_1}$$

en eerst dan als de spanning zoozeer is vergroot, dat

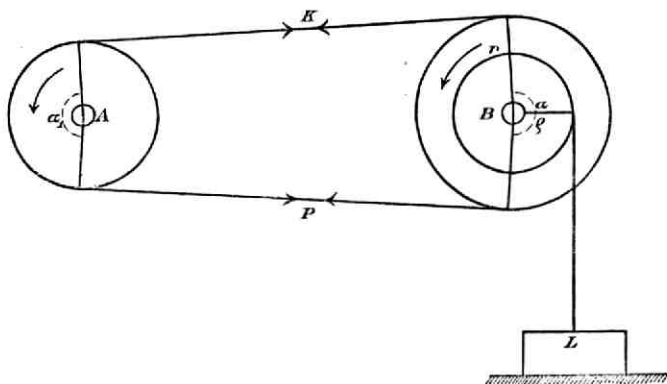
$$Lq = Pr(e^{f\alpha_1} - 1),$$

zal de riem door den trommel worden medegenomen, en zal de last L worden opgewonden.

Deze vergelijking verschilt slechts daarin met vergelijking (112) dat α vervangen is door α_1 . Die vergelijking en de daaruit afgeleide vergelijkingen zijn dus algemeen geldig, mits men voor α steeds den kleinsten der beide hoeken neemt.

Is de weerstand L niet rechtstreeks gegeven, maar in

Fig 153.



plaats daarvan de arbeidssnelheid en de ronddraaiingssnelheid van de as B , dan kan men de gegeven arbeidssnelheid gelijkstellen aan de berekende.

Is bijv. n het aantal omwentelingen in de minuut en N het aantal paardekrachten van de arbeidssnelheid, dan

heeft men:
$$L \cdot 2\pi q \frac{n}{60} = N \cdot 736.$$

Het hieruit berekende moment van den weerstand:

$$Lq = \frac{N \cdot 60 \cdot 736}{n \cdot 2\pi}$$

moet dan in vergelijking (115) gesubstitueerd worden.

Is bijv. $N = 2$, $n = 80$, $r = 0,4$, $\alpha = \pi$, en $f = 0,28$, dan wordt het moment van den weerstand:

$$L_p = \frac{2.60.736}{80.2.3,14} = 175,8.$$

Door substitutie van deze waarde in vergelijking (115), verkrijgt men als benedenste grenswaarde van de vereischte gemiddelde spanning:

$$S = \frac{175,8}{2.0,4} \cdot \frac{e^{0,28.3,14} + 1}{e^{0,28.3,14} - 1} = 531,45 \text{ eenheden.}$$

Volgens de vergelijkingen (113) en (114) zijn dan gedurende de beweging de spanningen in de twee deelen van den riem:

$$P = \frac{175,8}{0,4(2,41 - 1)} = 311,70 \text{ eenheden.}$$

$$K = \frac{175,8.2,41}{0,4(2,41 - 1)} = 751,20 \text{ eenheden.}$$

Daar $\frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{f\alpha} - 1}$ is, wordt de waarde van

S kleiner wanneer f grooter wordt. Daar de gespannen riem de assen tegen de tappannen drukt, waardoor de wrijvingsweerstand vergroot wordt, zoo is het voordeelig de spanning zoo klein mogelijk te maken. Men kan daartoe van gleuven gebruik maken. Brengt men namelijk langs den omtrek der schijven gleuven aan; en vervangt men den vlakken riem door een rond koord, dan verkrijgt men de waarden der in dit geval vereischte spanningen door in bovenstaande vergelijkingen den wrijvingscoëfficiënt f te vervangen door $f_1 = \frac{f}{\sin \delta}$, den wrijvingscoëfficiënt voor gleuven.

DERDE AFDEELING.

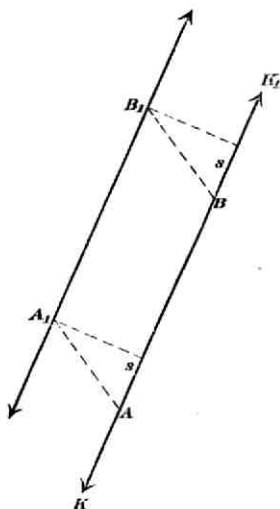
DYNAMICA OF LEER DER BEWEGING VAN EEN NIET IN EVEN-
WICHTSTOESTAND VERKEEREND ABSOLUUT VAST LICHAAM.

HOOFDSTUK XI.

Algemeene stellingen.

§ 80. Werking van de inwendige krachten.

Als op twee stoffelijke punten, deel uitmakende van een vast lichaam, twee krachten K en K_1 werken langs de lijn AB die de punten verbindt, als bovendien K en K_1 even groot en onderling tegengesteld gericht zijn, dan is de som van de arbeiden door deze krachten bij elke willekeurige voortgaande beweging verricht gelijk nul. Zij toch $A_1 B_1$ (fig. 154) de lijn die de punten in hun nieuwen stand verbindt, dan is $A_1 B_1$ evenwijdig aan AB . De kracht K heeft den arbeid $-Ks$, de kracht K_1 den arbeid $+K_1s$ verricht. De som dier arbeiden is nul.



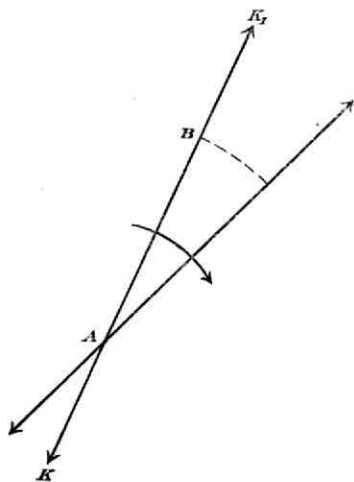
Hetzelfde geldt voor een zoodanige beweging van het lichaam, waarbij de lijn AB om een harer uiteinden draait. Bij deze draaiing toch verricht de in het vaste punt A (fig. 155) aangrijpende kracht K den arbeid nul, wegens de onbeweeglijkheid van haar aan-

grijpingspunt, en de in het punt B aangrijpende kracht K_1 verricht den arbeid nul, omdat de lijn waarlangs zij werkt, steeds loodrecht staat op de baan door B doorloopen.

Welke ook de beweging zij van een lichaam, men kan haar steeds voor een willekeurig tijdsverloop ontbinden in een voortgaande beweging en in een draaiende beweging om het punt A .

Het is klaarblijkelijk dat de arbeid, door een kracht ver-

Fig. 155.



richt bij de werkelijke beweging van haar aangrijpingspunt, gelijk is aan de som der arbeiden door die kracht verricht bij de ontbindingsbewegingen

van haar aangrijpingspunt. Daar nu voor elk der beide ontbindingsbewegingen de som der arbeiden door K en K_1 verricht gelijk is aan nul, zoo is dit ook het geval voor de werkelijke, dus voor elke willekeurige beweging van het lichaam.

Ook dan nog geldt deze stelling, indien gedurende de beweging de krachten K en K_1 van grootte veranderen. In dit geval

toch kan de geheele duur der beweging verdeeld worden in deelen die zoo klein zijn, dat gedurende zulk een tijddeel de krachten als standvastig mogen beschouwd worden. Voor elk afzonderlijk tijddeel is de stelling reeds bewezen; zij moet derhalve ook gelden voor de som van alle tijddeelen, d. i. voor den geheelen duur der beweging.

Volgens de wet van werking en terugwerking zijn de in een stelsel van stoffelijke punten werkende inwendige krachten twee aan twee even groot en onderling tegengesteld gericht. Daar tevens, zooals in § 36 is verklaard, bij een absoluut vast lichaam deze inwendige krachten steeds die grootte

hebben, welke noodig is om de punten op onveranderde afstanden te houden, zoo volgt uit de boven bewezen stelling, dat bij een absoluut vast lichaam de som der arbeiden door de inwendige krachten verricht steeds nul is, hoe ook de beweging van het lichaam moge zijn, en hoe ook de inwendige krachten gedurende de beweging mogen veranderen.

§ 81. Behoud van arbeidsvermogen.

Wanneer op eenig stoffelijk punt P van een absoluut vast lichaam een uitwendige kracht K werkt, dan zal de beweging van dat punt in het algemeen verschillen van die, welke het volkomen vrije punt onder de werking van de kracht K zou verkrijgen. Het eene stoffelijk punt toch kan niet in beweging worden gebracht, zonder dat de overige punten eveneens in beweging geraken, en een verandering in zijn bewegingstoestand is in het algemeen onafscheidelijk verbonden met veranderingen in de bewegingstoestanden der overige punten. De kracht die op het punt P blijktens zijn beweging werkt, is dus de resultante van de kracht K en van de inwendige krachten, die den afstand van P tot de overige punten onveranderd houden.

Het optreden van uitwendige krachten heeft derhalve steeds het in werking komen van inwendige krachten ten gevolge, wier grootten van de uitwendige krachten afhangen.

Kent men K , de resultante der uitwendige op P aangrijpende krachten, en I , de resultante der inwendige krachten $i_1, i_2, i_3 \dots$ door de overige punten van het lichaam op P uitgeoefend, dan kan de beweging van P worden bepaald met behulp van de in § 18 voor een enkel stoffelijk punt bewezen stelling omtrent het behoud van arbeidsvermogen.

Noemt men $\mathfrak{A}$ den door de kracht K , en α den door de kracht I gedurende de beweging verrichten arbeid, is $\frac{m c^2}{2}$ het arbeidsvermogen van beweging van het punt P bij het begin, en $\frac{m v^2}{2}$ dat aan het einde der beweging, dan is volgens vergelijking (15):

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m c^2}{2} = \mathfrak{A} + \alpha.$$

Stelt men deze vergelijking op voor elk der andere punten van het lichaam, en telt men de gevonden vergelijkingen bij elkander op, dan verkrijgt men:

$$\Sigma \left(\frac{m v^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{m c^2}{2} \right) = \Sigma (\mathfrak{A}) + \Sigma (\alpha).$$

In deze vergelijking beteekent $\Sigma (\alpha)$ de som der arbeiden door alle inwendige krachten verricht, welke som volgens de in de vorige paragraaf bewezen stelling steeds nul is. Men heeft dus:

$$\Sigma \left(\frac{m v^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{m c^2}{2} \right) = \Sigma (\mathfrak{A}). \quad (116)$$

De grootheid $\Sigma (\mathfrak{A})$ beteekent de som der arbeiden door de gegeven uitwendige krachten K verricht, de grootheid $\Sigma \left(\frac{m c^2}{2} \right)$ de som van het arbeidsvermogen van beweging van alle afzonderlijke punten bij het begin, $\Sigma \left(\frac{m v^2}{2} \right)$ de som van het arbeidsvermogen van beweging van alle afzonderlijke punten aan het einde der beweging. Uit bovenstaande vergelijking blijkt dus, dat de vroeger voor het stoffelijk punt gevonden wet van het behoud van arbeidsvermogen ook geldt voor een absoluut vast lichaam.

Indien de uitwendige op een lichaam werkende krachten den arbeid A eenheden verricht hebben, en het arbeidsvermogen van plaats van het lichaam dus met A eenheden is verminderd, dan is het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam met A eenheden toegenomen.

§ 82. Beginsel der virtúeele verplaatsingen.

De som der arbeiden door de inwendige krachten verricht, is zooals boven is aangetoond steeds nul. Werken dus op de punten waaruit een lichaam bestaat, alleen inwendige krachten, dan is bij elke mogelijke beweging de vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam gelijk nul. Gaat nu op dit lichaam een stel uitwendige krachten werken, die in evenwicht zijn, dan verandert daardoor de beweging van het lichaam niet. Ook dan nog

is de vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam gelijk nul, en dus ook volgens vergelijking (116) de som der arbeiden door de uitwendige krachten verricht.

Men kan bewijzen, dat in het algemeen elk stel uitwendige krachten vervangen kan worden door een kracht R en door een koppel M , werkende in een vlak loodrecht op de lijn, waarlangs R werkt. In bijzondere gevallen kan of het moment van M , of de grootte van R nul zijn; zijn beide nul, dan zijn de krachten met elkander in evenwicht. Wanneer nu het lichaam gedraaid wordt om de lijn, waarlangs R werkt, en dus om de koppelas, dan kan de som der arbeiden door de uitwendige krachten verricht, niet nul wezen, tenzij het moment van M nul is; wanneer het lichaam verschoven wordt langs de koppelas, dan kan de som der arbeiden niet nul zijn, tenzij de grootte van R nul is. Indien derhalve op een lichaam een stel uitwendige krachten werken, en indien bij *elke mogelijke* verplaatsing de som van de arbeiden door de uitwendige krachten verricht nul is, dan zijn die krachten met elkander in evenwicht.

De toepassing van de wet van het behoud van arbeidsvermogen op het bijzonder geval dat de uitwendige krachten in evenwicht zijn, voert dus tot de volgende algemeene stelling:

Wanneer de op een absoluut vast lichaam werkende uitwendige krachten in evenwicht zijn, dan is bij elke mogelijke beweging van het lichaam de som der arbeiden door de uitwendige krachten bij een oneindig kleine verplaatsing der aangrijpingspunten verricht gelijk nul.

En omgekeerd:

Wanneer voor elke mogelijke beweging deze voorwaarde is vervuld, dan zijn de uitwendige krachten in evenwicht.

De toevoeging »bij een oneindig kleine verplaatsing der aangrijpingspunten» is noodig, omdat in het algemeen bij de beweging van het lichaam, de stand der lijnen, waarlangs de krachten werken, verandert ten opzichte van het lichaam.

Deze stelling wordt het »beginsel der virtueele verplaatsingen» genoemd.

Bij een voortgaande beweging van het lichaam, wordt de som der arbeiden door de uitwendige krachten bij een oneindig kleine verplaatsing harer aangrijpingspunten ver-richt, verkregen door den afgelegden weg te vermenigvuldigen met de som der ontbindingskrachten in de richting der beweging. Bij een draaiing van het lichaam verkrijgt men deze volgens § 19 door den oneindig kleinen draaiingshoek te vermenigvuldigen met de som der momenten van alle krachten ten opzichte van de draaiingsas. Daar beide sommen nul moeten zijn, zoo blijkt dat men de twee in § 43 gevonden evenwichtsvergelijkingen onmiddellijk uit het beginsel der virtueele verplaatsingen kan afleiden.

§ 83. Beginsel van d'Alembert.

Indien een lichaam in beweging is, dan is de op eenig punt blijkens zijn beweging werkende kracht Q , de resultante van de gegeven uitwendige kracht K en de onbekende inwendige kracht I , welke van het verband van dit punt met de overige punten van het lichaam afhangt. Is m de massa en q de devatieversnelling van het punt, dan is steeds $Q = mq$. Indien op het punt nog bovendien ging werken een kracht Q' even groot als Q , maar in tegengestelde richting, dan zouden de krachten Q' , K en I in evenwicht zijn. Hetzelfde heeft plaats in elk der andere punten van het lichaam. Daar het stelsel inwendige krachten I op zich zelf in evenwicht is, zoo zullen ook de krachten K en Q' in evenwicht zijn.

Wanneer dus op elk punt van een lichaam een kracht Q' gaat werken, even groot als de kracht die op dat punt blijkens zijn beweging werkt, maar in tegengestelde richting, dan zullen de krachten Q' en de uitwendige krachten K in evenwicht zijn.

Deze stelling wordt het beginsel van d'ALEMBERT genoemd.

De algemeene evenwichtsvergelijkingen kunnen derhalve worden toegepast om de onbekende krachten mq , en daarmee de onbekende devatieversnellingen der afzonderlijke stoffelijke punten te bepalen.

Evenals de wet van het behoud van arbeidsvermogen in den bijzonderen vorm van het beginsel der virtueele ver-

plaatsingen kan worden gebruikt om de evenwichtsvergelijkingen af te leiden uit de wetten der bewegingsleer, zoo kunnen omgekeerd door middel van het hier gevonden beginsel van D'ALEMBERT, de wetten der bewegingsleer worden teruggebracht tot de reeds in de vorige afdeeling gevonden evenwichtsvergelijkingen.

HOOFDSTUK XII.

Eenparige draaiende beweging van een lichaam om een vaste as.

§ 84. Arbeidsvermogen van beweging van een ronddraaiend lichaam. Traagheidsmoment.

Het arbeidsvermogen van beweging van een lichaam is gelijk aan de som der grootheden die het arbeidsvermogen van beweging van elk der punten voorstellen. Is m de massa en v de snelheid van eenig punt, dan is het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam:

$$A = \Sigma \left(\frac{mv^2}{2} \right).$$

Is de beweging van het lichaam een voortgaande, dan is de snelheid van alle punten even groot; v kan dan voor het somteeken gebracht worden, of:

$$A = \frac{v^2}{2} \Sigma (m) = \frac{Mv^2}{2}.$$

Wanneer de beweging van het lichaam in een draaiing om een as O bestaat, en ω de hoeksnelheid is, dan is de lijnsnelheid van een punt, dat zich op den afstand ρ van de as bevindt:

$$v = \rho \omega.$$

Stelt men deze waarde van v in bovenstaande uitdrukking van het arbeidsvermogen van beweging, dan verkrijgt men:

$$A = \Sigma \left(\frac{m\rho^2\omega^2}{2} \right),$$

of daar ω voor alle punten dezelfde waarde heeft:

$$A = \frac{\omega^2}{2} \Sigma (m \rho^2).$$

De uitdrukking $\Sigma (m \rho^2)$ beteekent de som der producten van alle afzonderlijke massadeelen van het lichaam met de vierkanten van hun afstanden tot de as. De waarde er van is de maat van wat men noemt het *traagheidsmoment van het lichaam ten opzichte van die as*.

Stelt men het traagheidsmoment van het lichaam ten opzichte van de as O voor door T_o , dan is dus:

$$T_o = \Sigma (m \rho^2).$$

Voor het arbeidsvermogen van beweging van een lichaam, dat met een hoeksnelheid ω draait om de as O , vindt men dan:

$$A = \frac{T_o \omega^2}{2}, \quad (117)$$

Om de wet van het behoud van arbeidsvermogen bij de draaiende beweging van een lichaam te kunnen toepassen, moet eerst het traagheidsmoment van het lichaam ten opzichte van de draaiingsas worden berekend.

§ 85. Traagheidsmoment, gereduceerde massa, traagheidsstraal.

Indien de afzonderlijke massadeelen van het lichaam alle op denzelfden afstand van de draaiingsas O liggen, dan kan in de uitdrukking voor het traagheidsmoment de standvastige grootheid ρ voor het somteeken gebracht worden, waardoor men verkrijgt:

$$T_o = \Sigma (m \rho^2) = \rho^2 \Sigma (m).$$

of, de geheele massa van het lichaam μ noemende:

$$T_o = \mu \rho^2. \quad (118)$$

Het traagheidsmoment van een ring of hollen cilinder met oneindig kleine wanddikte ten opzichte van zijn meetkundige as, is dus gelijk aan het product van zijn massa en het vierkant van zijn straal.

Het traagheidsmoment van een willekeurig lichaam kan als gevonden worden beschouwd, zoodra de massa μ bekend is, die een ring met den gegeven straal ϱ zou moeten hebben, opdat zijn traagheidsmoment gelijk zij aan dat van het gegeven lichaam. Deze massa μ noemt men de op den straal ϱ *gereduceerde massa* van het lichaam. De grootte der gereduceerde massa hangt af van de grootte van den aangenomen straal ϱ . Daar het product $\mu \varrho^2$ als traagheidsmoment van het lichaam een bepaald, standvastig getal is, zoo komt met elke waarde van ϱ een bepaalde waarde van μ overeen. Die waarde van ϱ , voor welke de gereduceerde massa μ gelijk is aan de werkelijke massa van het lichaam, wordt de *traagheidsstraal* van het lichaam genoemd. Stelt men $\varrho = 1$ dan wordt $T_o = \mu$; het traagheidsmoment stelt dus de op den straal één meter gereduceerde massa van het lichaam voor.

Cilinder.

Indien een cirkel met den straal R gelijkmatig met massa is bedekt, en γ de massa op de vlakke-eenheid is, dan is de geheele massa van den cirkel:

$$M = \gamma \pi R^2. \quad (119)$$

Verdeelt men den cirkel in concentrische ringen met de oneindig kleine wanddikte Δ , dan is de massa m van zulk een ring met den straal x :

De massa m van een cirkelring met een gegeven straal x en een lengte $2\pi x \Delta$ is $m = \gamma \cdot 2\pi x \Delta$

$$m = \gamma \cdot 2\pi x \Delta$$

en zijn traagheidsmoment ten opzichte van de as O volgens vergelijking (118):

$$m x^2 = 2\pi \gamma x^3 \Delta.$$

Het traagheidsmoment van den cirkel is gelijk aan de som der traagheidsmomenten van alle afzonderlijke ringen, en dus:

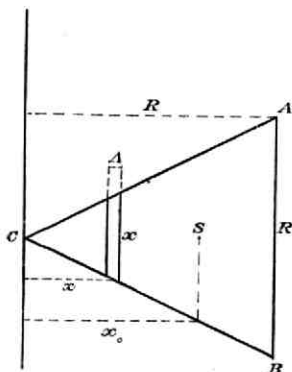
$$T_o = 2\pi \gamma \sum_{x=0}^x x^3 \Delta. \quad (120)$$

In deze vergelijkingen drukt het somteeken uit, dat voor

x achtereenvolgens waarden $x = \Delta$, $x = 2\Delta$, $x = 3\Delta$ tot $x = n\Delta$ gesubstitueerd, en daarna alle op deze wijze verkregen producten $x^3\Delta$ bij elkander opgeteld moeten worden.

Om deze som te bepalen kan men zich voorstellen, dat een vierhoekige pyramide ABC (fig. 156), wier grondvlak

Fig. 156.



AB een vierkant met de zijde R , en wier hoogte eveneens R is, in lagen met de oneindig kleine dikte Δ verdeeld is door vlakken evenwijdig aan het grondvlak.

Volgens de vergelijkingen van het zwaartepunt is het moment van den inhoud I der pyramide ten opzichte van een vlak evenwijdig aan het grondvlak door den top C gebracht, gelijk aan de som der momenten van de afzonderlijke lagen, en dus:

$$Ix_0 = \sum_{x=0}^{x=R} (ix).$$

Substitueert men hierin de waarden:

$$I = \frac{R^3}{3} \quad x_0 = \frac{3}{4}R \quad \text{en} \quad i = x^2 \Delta,$$

dan vindt men:

$$\sum_{x=0}^{x=R} (x^2 \Delta) = \frac{R^4}{4} \cdot \chi^3$$

Stelt men deze waarde in vergelijking (120), dan wordt:

$$T_0 = \gamma \pi \frac{R^4}{2} \quad (121)$$

of na substitutie van de in vergelijking (119) gevonden waarde $\gamma \pi R^2 = M$:

$$T_0 = \frac{MR^2}{2}. \quad (122)$$

De op den straal ϱ gereduceerde massa van den cirkel vindt men door gelijkstelling der beide uitdrukkingen:

$$\mu \varrho^2 = \frac{M R^2}{2}.$$

Stelt men in deze vergelijking $\varrho = R$, dan verkrijgt men voor de op den straal R gereduceerde massa van den cirkel de waarde:

$$\mu = \frac{M}{2}.$$

Stelt men $\mu = M$, dan verkrijgt men voor den traagheidsstraal van den cirkel:

$$\varrho = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Bovenstaande vergelijkingen gelden niet slechts voor een cirkel, maar ook voor een oneindig dunne cirkelvormige schijf; slechts beteekent dan γ de massa in de cubieke eenheid.

Ook voor een cilinder met de willekeurige hoogte h gelden deze vergelijkingen. Verdeelt men toch den cilinder door vlakken evenwijdig aan het grondvlak in schijfjes met de oneindig kleine dikte Δ , dan is de massa van zulk een schijfje $m = \gamma \pi R^2 \Delta$ en het traagheidsmoment $\frac{m R^2}{2} = \frac{\gamma \pi R^4}{2} \Delta$. Het traagheidsmoment van den cilinder is dus:

$$T_o = \frac{\gamma \pi R^4}{2} \Sigma \Delta = \frac{\gamma \pi R^4 h}{2},$$

of daar de massa is $M = \gamma \pi R^2 h$

$$T_o = \frac{M R^2}{2}.$$

Om het traagheidsmoment te bepalen van een hollen cilinder, welks binnenste straal r , en welks buitenste straal R is, moet men hem beschouwen als het verschil van twee cilinders, en derhalve het traagheidsmoment van den binnensten ontbrekkenden cilinder van dat des geheelens cilinders

afrekken. Volgens vergelijking (119) is het verschil der massa's of de massa van den hollen cilinder:

$$M = \gamma \pi (R^2 - r^2).$$

Voor het traagheidsmoment vindt men volgens vergelijking (121):

$$T_o = \gamma \pi \frac{R^4 - r^4}{2}.$$

Deelt men deze vergelijking door de voorgaande, dan wordt:

$$T_o = M \frac{R^2 + r^2}{2}.$$

Rechte stang en rechthoekige plaat.

Wanneer een massa gelijkmatig is verdeeld over een rechte lijn, in dier voege dat elke lengte-eenheid de massa γ bevat, dan is de massa van de lijn AB (fig. 157), wier lengte l meters is:

$$M = \gamma l.$$

Verdeelt men de lijn in oneindig kleine stukken λ , dan is de massa m van zulk een deeltje:

$$m = \gamma \lambda$$

en het traagheidsmoment ten opzichte van de as OO_1 van een deeltje op den afstand x dier as gelegen:

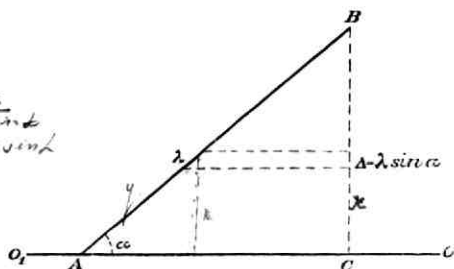
$$mx^2 = \gamma \lambda x^2,$$

of λ vervangende door $\frac{\Delta}{\sin \alpha}$

$$mx^2 = \frac{\gamma}{\sin \alpha} x^2 \Delta.$$

Het traagheidsmoment van de stang AB is gelijk aan

Fig. 157.



de som der traagheidsmomenten van alle oneindig kleine deeltjes, en dus:

$$T_o = \frac{\gamma}{\sin \alpha} \sum_{x=0}^{x=R} (x^2 \Delta). \quad (122)$$

De uitdrukking $\sum_{x=0}^{x=R} (x^2 \Delta)$ beteekent, dat men de lijn $BC = R$ moet verdeelen in de oneindig kleine deelen Δ , en de som moet nemen van alle producten $x^2 \Delta$, die men verkrijgt, als men aan x achtereenvolgens de waarden $\Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta = R$ geeft. Om de waarde van deze som te bepalen, kan men opmerken, dat zij den inhoud voorstelt van de pyramide in fig. 156, of ook het moment van den in dezelfde figuur voorkomenden driehoek ABC , welke de projectie der pyramide is. Men heeft dus:

$$\sum_{x=0}^{x=R} (x^2 \Delta) = \frac{R^3}{3}$$

of daar $R = l \sin \alpha$ is:

$$\sum_{x=0}^{x=R} (x^2 \Delta) = \frac{(l \sin \alpha)^3}{3}.$$

Substitueert men deze waarde in vergelijking (122), dan wordt:

$$T_o = \gamma l \frac{(l \sin \alpha)^2}{3}$$

of daar $\gamma l = M$ is:

$$T_o = M \frac{(l \sin \alpha)^2}{3}. \quad (123)$$

De traagheidsstraal der stang heeft de waarde:

$$\rho = \frac{l \sin \alpha}{\sqrt{3}},$$

en de op den straal $R = l \sin \alpha$, of de op het eindpunt B gereduceerde massa is:

$$\mu = \frac{M}{3}.$$

De traagheidsstraal
 $I = m \rho^2$, waar
 $\rho = \frac{(l \sin \alpha)^2}{3}$

Staat de stang loodrecht op de as OO_1 , dan is $\sin \alpha = 1$, en bovenstaande vergelijkingen gaan over in:

$$T_o = \frac{ML^2}{3} \quad \text{en} \quad \rho = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad (124)$$

Stelt men weer $\frac{ML^2}{3} = \frac{1}{12} \rho^2 \text{ dan is } \rho = \frac{l}{\sqrt{3}}$

terwijl de op het eindpunt der stang gereduceerde massa ook in dit geval een derde van de werkelijke massa bedraagt.

Bovenstaande vergelijkingen gelden niet alleen voor een lijn, maar ook voor een oneindig smalle vlakke strook; slechts beteekent dan γ de massa op de vlakke-eenheid.

Op soortgelijke wijze als hierboven voor den cilinder is geschied, kan aangetoond worden, dat de drie laatste vergelijkingen ook gelden voor een rechthoekige plaat met willekeurige breedte, wier eene zijde langs de as ligt.

Bij de bepaling van traagheidsmomenten kan dikwijls met vrucht gebruik gemaakt worden van de twee volgende stellingen:

- 1°. *Het traagheidsmoment van een lichaam ten opzichte van een willekeurige as OO_1 is gelijk aan het traagheidsmoment ten opzichte van een door het zwaartepunt gaande as evenwijdig aan OO_1 , vermeerderd met het product van de massa van het lichaam en het vierkant van den afstand der beide assen;*
- 2°. *Het traagheidsmoment van een vlakke oneindig dunne plaat ten opzichte van een as, die in het punt O loodrecht staat op de plaat, is gelijk aan de som der traagheidsmomenten van die plaat ten opzichte van twee in de plaat gelegen onderling loodrechte assen, die elkander in het punt O snijden.*

Zij, om de eerste stelling te bewijzen, O (fig. 158) een as loodrecht staande op het vlak van teekening, S een aan O evenwijdige as gaande door het zwaartepunt van het lichaam. Volgens de figuur is:

$$T_o = \Sigma (m \varrho^2) \quad \text{en} \quad T_s = \Sigma (mr^2).$$

Nu is:

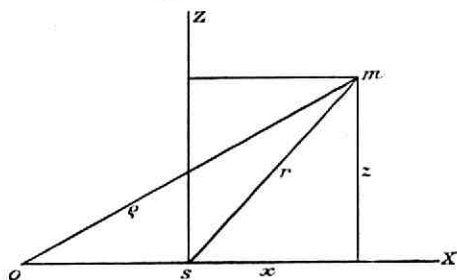
$$r^2 = x^2 + z^2 \quad \text{en}$$

$$\varrho^2 = (a \pm x)^2 + z^2 = a^2 + x^2 + z^2 \pm 2ax = r^2 + a^2 \pm 2ax$$

$$\text{of} \quad T_o = \Sigma (mr^2) + a^2 \Sigma (m) \pm 2a \Sigma (mx).$$

Van de drie termen in het tweede lid is de eerste T_s , de tweede is Ma^2 , als M de massa van het lichaam is, en de derde is nul, omdat volgens de vergelijkingen van het zwaartepunt $\Sigma(mx) = 0$ is. Het traagheidsmoment ten opzichte van de as O is dus:

Fig 158.



$$T_o = T_s + Ma^2. \quad (125)$$

Om de tweede stelling te bewijzen zij O (fig. 159) een as loodrecht staande op het vlak van teekening, in welk vlak

Fig. 159

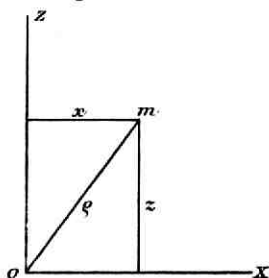
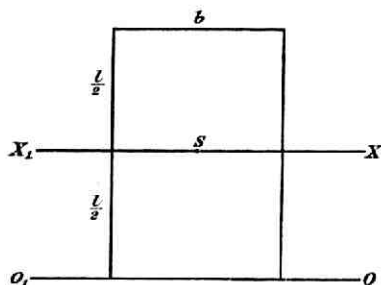


Fig 160.



de oneindig dunne plaat en de twee onderling loodrechte assen OX en OZ gelegen zijn. Volgens de figuur is:

$$\begin{aligned} T_o &= \Sigma(m\rho^2) & T_x &= \Sigma(mz^2) & T_z &= \Sigma(mx^2), \\ \text{of daar} & & \rho^2 &= x^2 + z^2 & & \\ & & T_o &= T_x + T_z. & (126) & \end{aligned}$$

Uit eenige voorbeelden zal blijken hoe deze stellingen kunnen dienen tot het vinden van traagheidsmomenten.

Volgens vergelijking (124) is het traagheidsmoment van

een rechthoekige plaat ten opzichte van de as OO_1 (fig. 160):

$$T_o = \frac{Ml^2}{3}.$$

Het traagheidsmoment van die plaat ten opzichte van de aan OO_1 evenwijdige as XX_1 door het zwaartepunt S gaande, is dan volgens vergelijking (125):

$$T_x = T_o - Ma^2 = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12}.$$

Evenzoo is het traagheidsmoment ten opzichte van de as ZZ_1 (fig. 161):

$$T_z = \frac{Mb^2}{12}.$$

Het traagheidsmoment ten opzichte van de as S , die in

Fig. 161.

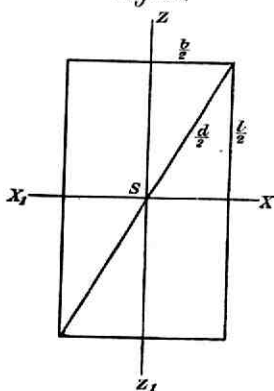
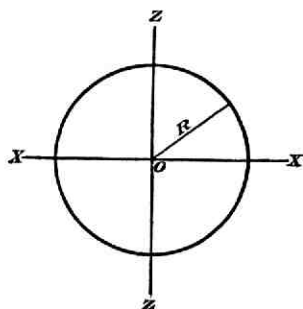


Fig. 162.



het zwaartepunt loodrecht op de plaat staat, is dus volgens vergelijking (126):

$$T_s = T_x + T_z = \frac{M}{12}(l^2 + b^2) = \frac{Md^2}{12}.$$

Op soortgelijke wijze als vroeger kan men aantoonen, dat deze vergelijking ook geldt voor het traagheidsmoment van een rechthoekig parallelipedum ten opzichte van een as

gaande door het zwaartepunt en loodrecht staande op de twee zijvlakken, wier zijden l en b , of wier diagonaal d is.

Volgens vergelijking (122) is het traagheidsmoment van de oneindig dunne cirkelvormige schijf ten opzichte van de as O (fig. 162):

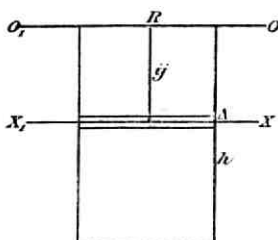
$$T_o = \frac{MR^2}{2}.$$

Daar klaarblijkelijk $T_x = T_z$ is, vindt men uit vergelijking (126) voor het traagheidsmoment van een cirkelvormige schijf ten opzichte van een middellijn:

$$T_x = \frac{1}{2} T_o \text{ of } T_x = \frac{MR^2}{4}.$$

Om het traagheidsmoment van een cilinder ten opzichte van een middellijn OO_1 van het bovenvlak (fig. 163) te vinden,

Fig. 163.



verdeelt men den cilinder door vlakken evenwijdig aan het bovenvlak in schijfjes met de oneindig kleine dikte Δ . Is $m = \gamma \pi R^2 \Delta$ de massa van zulk een schijfje, dan is het traagheidsmoment ten opzichte van de middellijn XX_1 :

$$\frac{mR^2}{4} = \frac{\gamma \pi R^4 \Delta}{4}.$$

Is y de afstand van het schijfje tot de as OO_1 , dan is volgens vergelijking (125) zijn traagheidsmoment ten opzichte van de as OO_1 :

$$\frac{\gamma \pi R^4 \Delta}{4} + \gamma \pi R^2 y^2 \Delta.$$

Voor het traagheidsmoment van den cilinder ten opzichte van de as OO_1 verkrijgt men dan:

$$T_o = \frac{\gamma \pi R^4}{4} \sum (\Delta) + \gamma \pi R^2 \sum_{y=0}^y (y^2 \Delta)$$

$$\text{of } T_o = \frac{\gamma \pi R^4 h}{4} + \frac{1}{3} \gamma \pi R^2 h^3 = \frac{\gamma \pi R^2 h}{12} (3R^2 + 4h^2).$$

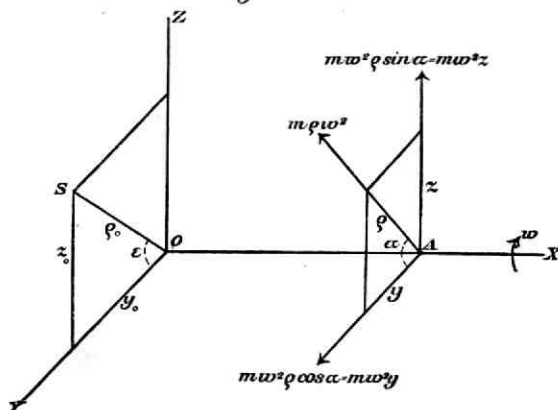
Voert men in deze vergelijking de massa $M = \gamma \pi R^2 h$ in, dan wordt:

$$T_o = \frac{M(3R^2 + 4h^2)}{12}.$$

§ 86. Eenparig draaiende beweging.

Indien een lichaam een eenparig draaiende beweging heeft om een vaste as, dan volbrengt elk punt een eenparige cirkelvormige beweging, en op elk punt werkt dus de centripetaalkracht. De krachten Q' , die volgens het beginsel van D'ALEMBERT in evenwicht zijn met de uitwendige krach-

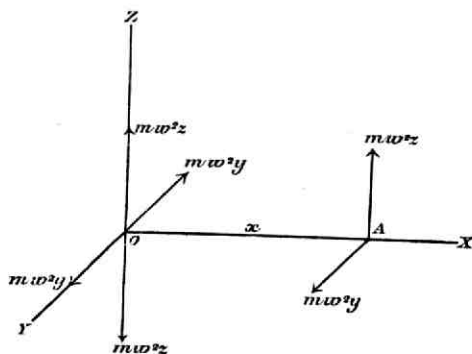
Fig. 164.



ten — waartoe ook de weerstanden behooren, waardoor de draaiingsas in onveranderlijken stand wordt gehouden — zijn dus even groot als de centripetaalkrachten, maar werken in tegengestelde richting. Is ω de hoeksnelheid van het lichaam, dan heeft de centripetaalkracht, werkende op een stoffelijk punt met de massa m en op den afstand ρ van de as gelegen, de grootte $m\rho\omega^2$ en de richting van den straal naar binnen. De kracht Q' is even groot en werkt in de richting van den straal naar buiten. Als aangrijpingspunt dier kracht kan ook beschouwd worden het punt A (fig. 164), waarin de lijn, waarlangs zij werkt, de as snijdt.

Om de werking der gezamenlijke krachten Q' te bepalen, kan men een rechthoekig coördinatenstelsel $OXYZ$ aanbrengen, in dier voege dat het zwaartepunt S van het lichaam in het vlak OYZ ligt, en de draaiingsas langs de as OX valt. Ontbindt men de kracht $m\omega^2$ op de in de figuur aangegeven wijze in de krachten $m\omega^2y$ en $m\omega^2z$, en handelt men op dezelfde wijze met de op de overige punten van het lichaam werkende krachten Q' , dan verkrijgt men twee groepen van krachten, wier aangrijppingspunten alle in de draaiingsas OX liggen; de eene groep bestaat uit krachten, werkende langs lijnen evenwijdig aan de as OY , de andere

Fig. 165.



uit krachten, werkende langs lijnen evenwijdig aan de as OZ .

Met deze krachten kan men nu op dezelfde wijze te werk gaan als in § 43 bij het afleiden der algemeene evenwichtsvergelijkingen is geschied. Men kan de kracht $m\omega^2y$ (fig. 165)

vervangen door een kracht aangrijpende in het punt O en een koppel, welks moment $m\omega^2yx$ is, en welks koppelas met de Z -as samenvalt. Evenzoo kan men de kracht $m\omega^2z$ vervangen door een kracht aangrijpende in O en een koppel, welks moment $m\omega^2zx$ is, en welks koppelas met de Y -as samenvalt. Handelt men op gelijke wijze met de overige krachten Q' , dan verkrijgt men twee groepen van krachten en twee groepen van koppels. Elk der beide groepen van krachten heeft een resultante gelijk aan de som der krachten, elk der beide groepen van koppels een vervangend koppel, welks moment gelijk is aan de som der momenten. In het geheel zijn er dus twee krachten en twee koppels. De grootte en richting der krachten en der koppelassen zijn in fig. 166 aangegeven.

De twee in het punt O aangrijpende krachten R_y en R_z hebben een resultante, wier richting bepaald is door de vergelijking:

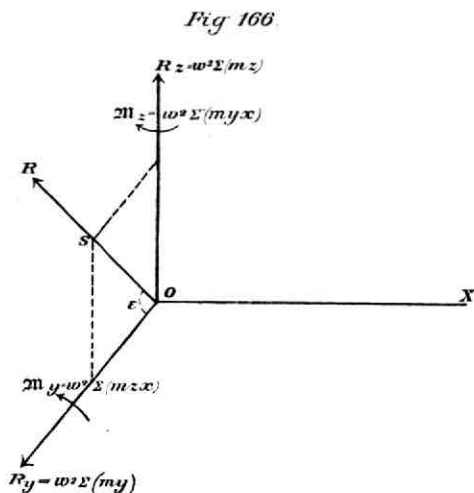
$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{R_z}{R_y} = \frac{\sum (mz)}{\sum (my)}.$$

Is M de massa van het lichaam, dan is volgens de leer

van het zwaartepunt $\sum (mz) = Mz_o$ en $\sum (my) = My_o$; bijgevolg is:

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{z_o}{y_o}.$$

Hieruit blijkt, dat de hoek ϵ gelijk is aan hoek SOY in fig. 164; derhalve gaat de lijn, waarlangs de kracht R werkt, door het zwaartepunt S van het lichaam, en mag het zwaartepunt als aangrijppingspunt der kracht R worden



beschouwd. Voor de grootte van R vindt men:

$$R = \sqrt{R_y^2 + R_z^2} = M\omega^2 \sqrt{y_o^2 + z_o^2},$$

of daar volgens figuur 164 $\sqrt{y_o^2 + z_o^2} = \rho_o$ is:

$$R = M\rho_o\omega^2. \quad (127)$$

Op gelijke wijze kan het moment van het vervangend koppel worden bepaald.

Als men volgens de in § 42 gevonden regels de twee koppels voorstelt door hun assen, en deze assen:

$$\mathfrak{M}_y = \omega^2 \sum (mzx) \quad (128) \quad \text{en} \quad \mathfrak{M}_z = \omega^2 \sum (myx) \quad (129)$$

samenstelt, dan heeft de as van het vervangend koppel de grootte:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}.$$

De as van het vervangend koppel ligt in het vlak YZ , en staat dus loodrecht op de draaiingsas van het lichaam; de hoek, dien zij met de as OY maakt, kan op dezelfde wijze als hoek ϵ gevonden worden.

Men kan dus de krachten Q' vervangen door een kracht R en een koppel $\mathfrak{M}$. De kracht R heeft de grootte, die de centripetaalkracht zou hebben, indien de massa van het lichaam in het zwaartepunt S vereenigd was; zij werkt langs dezelfde lijn als deze, maar in tegengestelde richting. De as van het koppel staat loodrecht op de draaiingsas; haar grootte hangt af van de twee sommen $\Sigma(mzx)$ en $\Sigma(myx)$, dat is, van de wijze, waarop de massa over het lichaam is verdeeld.

§ 87. Vrije assen.

De krachten Q' , en dus ook de kracht R en het koppel $\mathfrak{M}$ in de vorige paragraaf gevonden, zijn op elk oogenblik in evenwicht met de uitwendige krachten. Werken er op het lichaam geen andere uitwendige krachten als de weerstanden, die de draaiingsas in een onveranderlijken stand houden, dan kunnen die weerstanden vervangen worden door een kracht even groot als R , maar in tegengestelde richting werkende, en door een koppel, waarvan het moment even groot is als $\mathfrak{M}$, maar het tegengestelde teeken heeft.

In het bijzondere geval, dat R en $\mathfrak{M}$ beide nul zijn, en dat dus de krachten Q' met elkander in evenwicht zijn, wordt de draaiingsas van het lichaam een *vrije as* genoemd. In dit geval zijn er geen weerstanden noodig, om de draaiingsas in haar stand te houden; die as zou ook dan niet van stand veranderen, indien het lichaam vrij in de ruimte zweefde.

Opdat de draaiingsas OX (fig. 164) een vrije as zij, moet voldaan zijn aan de twee volgende voorwaarden:

$$R = 0 \quad (130) \quad \mathfrak{M} = 0. \quad (131)$$

Stelt men in vergelijking (130) voor R de waarde in vergelijking (127) gevonden, dan wordt:

$$M_{\varrho_0} \omega^2 = 0 \quad \text{of} \quad \varrho_0 = 0.$$

De draaiingsas kan dus slechts dan een vrije as zijn, als zij door het zwaartepunt van het lichaam gaat.

Daar $\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}$ is, sluit vergelijking (131) twee andere vergelijkingen in zich, namelijk:

$$\mathfrak{M}_y = 0 \quad \text{en} \quad \mathfrak{M}_z = 0,$$

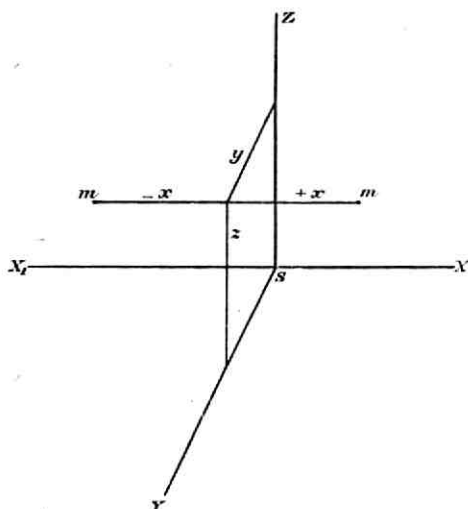
welke na substitutie der waarden uit de vergelijkingen (128) en (129) overgaan in:

$$\Sigma(mzx) = 0 \quad (132) \quad \text{en} \quad \Sigma(myx) = 0. \quad (133)$$

Aan deze twee voorwaarden is bijv. voldaan, als de massa

van het lichaam ten opzichte van het vlak YZ symmetrisch is verdeeld, in dier voege, dat tegenover eenig massadeeltje m (fig. 167) op den afstand $+x$ van dit vlak gelegen, zich steeds een ander even groot massadeeltje op den afstand $-x$ bevindt. De bijdragen toch door deze twee massadeeltjes aan de som $\Sigma(mzx)$ geleverd, zijn dan

Fig. 167.



$m.z.(+x)$ en $m.z.(-x)$ en heffen elkander dus op; terwijl de bijdragen door hen aan de som $\Sigma(myx)$ geleverd $m.y.(+x)$ en $m.y.(-x)$ zijn, en elkander dus eveneens opheffen. Hetzelfde geldt van de bijdragen, die de overige massadeeltjes paarsgewijze aan elk dier sommen leveren. Bij elk homogeen lichaam, dat den vorm heeft van een recht prisma, is de lijn, die de zwaartepunten der eindvlakken verbindt, steeds een vrije as. Evenzoo is bij een lichaam, dat den vorm heeft van een oneindig dunne vlakke plaat, de door het zwaartepunt S gaande loodlijn op het vlak der

plaat steeds een vrije as, daar in dit geval de factor x in alle termen der sommen $\Sigma(myx)$ en $\Sigma(mzx)$ nul is.

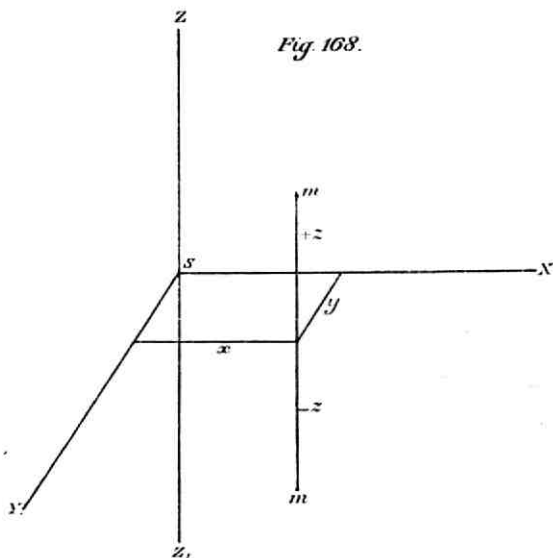


Fig. 168.

Nog in een ander geval blijkt het dadelijk, dat aan

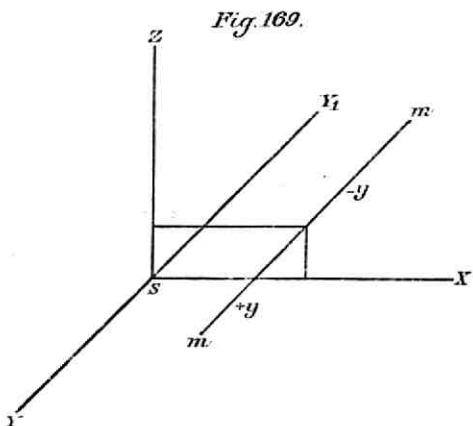


Fig. 169.

genoemde twee voorwaarden is voldaan, namelijk wanneer de massa van het lichaam ten opzichte van elk der beide vlakken YX en ZX symmetrisch is verdeeld.

Is toch de massa van het lichaam symmetrisch verdeeld ten opzichte van het vlak YX

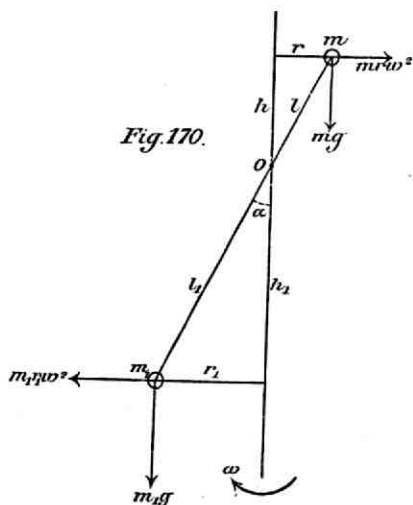
(fig. 168), dan ligt tegenover elk massadeeltje m , dat aan

het eerste lid der vergelijking (132) de bijdrage $m.x.(+z)$ levert, een ander dat aan die som de even groote negatieve bijdrage $m.x.(-z)$ levert; en is de massa van het lichaam tevens symmetrisch verdeeld ten opzichte van het vlak ZX (fig. 169), dan ligt tegenover elk massadeeltje, dat aan het eerste lid der vergelijking (133) de bijdrage $m.x.(+y)$ levert, steeds een ander, dat aan die som de even groote negatieve bijdrage $m.x.(-y)$ levert. Hieruit volgt bijv. dat bij een homogeen omwentelingslichaam de omwentelingsas steeds een vrije as is.

Door middel van hogere wiskunde kan worden aangetoond, dat er in elk willekeurig lichaam steeds *drie* vrije assen zijn, die in het zwaartepunt loodrecht op elkander staan. In elk lichaam kan dus een rechthoekig coördinatenstelsel zoodanig worden aangebracht, dat elk der coördinatenassen een vrije as is.

§ 88. Samengestelde conische slinger.

De samengestelde conische slinger bestaat in zijn een-



voudigsten vorm uit twee stoffelijke punten verbonden door een vaste rechte stang, welker gewicht verwaarloosd wordt; deze stang, die aan de draaiende beweging van een vaste verticale as deelneemt, is in een punt O van de as zoodanig bevestigd, dat zij in een verticaal vlak om dit punt draaibaar is.

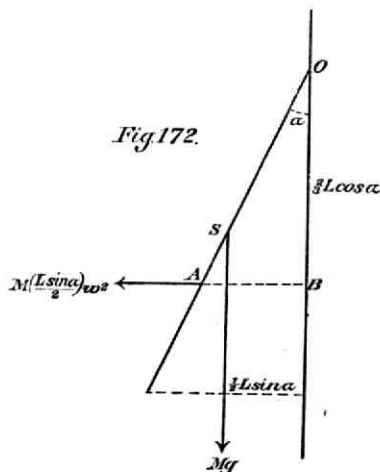
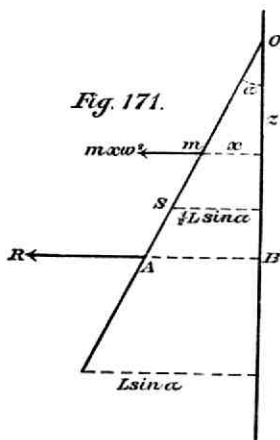
Om den hoek α (fig. 170) te bepalen, dien de stang met de as maakt bij een gegeven

hoeksnelheid ω , kan men wederom gebruik maken van het

beginsel van D'ALEMBERT. De uitwendige op de stang werkende krachten moeten in evenwicht zijn met de krachten Q' . De uitwendige krachten zijn de gewichten der stoffelijke punten mg en m_1g ; de krachten Q' zijn de op de stoffelijke punten blijkens hun beweging werkende centripetaalkrachten $m\omega^2 r$ en $m_1\omega^2 h_1$, in tegengestelde richting genomen. Daar het punt O een vast punt is, en de stang alleen draaibaar is in een verticaal vlak, verkrijgt men als eenige evenwichtsvergelijking:

$$m\omega^2 h + mgr + m_1\omega^2 h_1 - m_1gr_1 = 0.$$

Stelt men in deze vergelijking $r = l \sin \alpha$, $h = l \cos \alpha$,



$r_1 = l_1 \sin \alpha$, $h_1 = l_1 \cos \alpha$, en lost men daarna $\cos \alpha$ op, dan vindt men:

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2} \frac{m_1 l_1 - ml}{m_1 l_1^2 + ml^2}.$$

Als $m_1 l_1 = ml$ is, dat is, als het zwaartepunt samenvalt met het draaipunt O , dan wordt $\cos \alpha = 0$, en dus $\alpha = 90^\circ$. In dit geval neemt de stang den horizontalen stand aan.

Bestaat de conische slinger uit een rechte stang, die in een harer uiteinden O aan de verticale draaiingsas is opgehangen

(fig. 171), dan vindt men voor de vervangende R van de krachten Q' :

$$R = \Sigma (mx\omega^2) = \omega^2 \Sigma (mx).$$

Hierin kan $\Sigma (mx)$ worden vervangen door het product van de geheele massa der stang M met den afstand van haar zwaartepunt S tot de draaiingsas; derhalve is:

$$R = \omega^2 M \frac{L \sin \alpha}{2}. \quad (134)$$

Om het aangrijppingspunt A van R te vinden, kan men gebruik maken van de momentenvergelijking:

$$R \cdot OB = \Sigma (mx\omega^2 z),$$

of na substitutie van $OB = OA \cos \alpha$ en $z = \frac{x}{\operatorname{tg} \alpha}$

$$R \cdot AO \cdot \cos \alpha = \frac{\omega^2}{\operatorname{tg} \alpha} \Sigma (mx^2).$$

Stelt men hierin voor R de in vergelijking (134) gevonden waarde, en voor $\Sigma (mx^2)$, het traagheidsmoment der stang ten opzichte van de verticale draaiingsas, de in vergelijking (123) gevonden waarde $T_o = \frac{m L^2 \sin^2 \alpha}{3}$, dan wordt:

$$\omega^2 M \frac{L \sin \alpha}{2} \cdot OA \cdot \cos \alpha = \frac{\omega^2}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{M L^2 \sin^2 \alpha}{3},$$

of $OA = \frac{2}{3} L.$

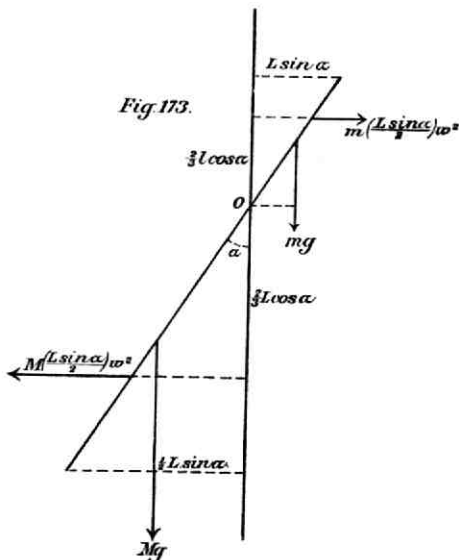
Volgens fig. 172 verkrijgt men dus voor den hoek, dien de stang maakt met de verticale as, de vergelijking:

$$M \frac{L \sin \alpha}{2} \omega^2 \cdot \frac{2}{3} L \cos \alpha - Mg \frac{L \sin \alpha}{2} = 0,$$

of $\cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L\omega^2}.$

Valt het ophangpunt niet samen met het uiteinde der stang, maar verdeelt het haar lengte in de twee deelen l

en L met de massa's m en M , dan verkrijgt men op gelijke wijze uit fig. 173:



$$m \frac{l \sin \alpha}{2} \omega^2 \cdot \frac{2}{3} l \cos \alpha + mg \frac{l \sin \alpha}{2} + \\ + M \frac{L \sin \alpha}{2} \omega^2 \cdot \frac{2}{3} L \cos \alpha - Mg \frac{L \sin \alpha}{2} = 0,$$

of

$$\cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{ML - ml}{ML^2 + ml^2}.$$

HOOFDSTUK XIII.

Veranderlijk draaiende beweging van een lichaam om een vaste as.

§ 89. Hoekversnelling.

Een lichaam heeft een eenparig versneld draaiende beweging als het in onderling gelijke tijdsverloopen, hoe klein ook genomen, onderling gelijke vermeerderingen van de hoeksnelheid krijgt.

De *hoekversnelling* van een lichaam met eenparig versneld draaiende beweging wordt evenredig gesteld met de vermeerdering van de hoeksnelheid per seconde.

Als *eenheid van hoekversnelling* wordt aangenomen de hoekversnelling van een lichaam met eenparig versneld draaiende beweging, welks hoeksnelheid in een seconde met de hoeksnelheidseenheid toeneemt.

Neemt de hoeksnelheid in t seconden met α eenheden toe, dan is het aantal eenheden der hoekversnelling ϵ , als:

$$\epsilon = \frac{\alpha}{t}.$$

Heeft een lichaam een hoekversnelling ϵ , dan doorloopt eenig op den afstand ρ van de draaiingsas gelegen stoffelijk punt een cirkelomtrek met den straal ρ , en wel met een eenparig versnelde beweging; de lijnsnelheid van dit punt neemt in elke seconde met $\rho \epsilon$ eenheden toe.

De kracht, die op het punt blijktens zijn beweging werkt, kan dus ontbonden worden in de centripetaalkracht $m \rho \omega^2$ en in een langs de raaklijn in den zin der beweging werkende kracht $m \rho \epsilon$, tangentieele kracht genoemd.

Bij de niet-eenparig versneld draaiende beweging verandert de hoekversnelling van oogenblik tot oogenblik. Verdeelt men echter den geheelen duur der beweging in oneindig kleine deelen, dan kan de beweging gedurende zulk een tijdsverloop als eenparig versneld draaiend worden beschouwd. Ook dan kan dus de kracht, die op het punt blijktens zijn beweging werkt, ontbonden worden in de centripetaalkracht en in de tangentieele kracht.

Volgens het beginsel van D'ALEMBERT moeten de krachten Q' met de uitwendige krachten in evenwicht zijn. Blijkens het hierboven aangetoonde kan elke kracht Q' ontbonden worden in een kracht $m \rho \omega^2$, even groot als de centripetaalkracht, maar in tegengestelde richting werkende, en in een kracht $m \rho \epsilon$, werkende langs de raaklijn in den zin tegengesteld aan dien der beweging. De eerste ontbindingskracht werkt langs een lijn die de draaiingsas snijdt. Is deze een vaste as, dan is de eenige evenwichtsvergelijking die, welke uitdrukt dat de som der momenten ten opzichte van de draaiingsas nul is. Noemt men korthedshalve het moment van een der uitwendige krachten m , dan heeft men:

men $\rho \epsilon$ vermassa $\times$ versnelling, de hoekversnelling is ϵ dus de lijnsnelheid is $\rho \epsilon$, dus is de

$$\Sigma (m) - \Sigma (m \varrho \varepsilon \cdot \varrho) = 0,$$

of daar ε een gemeenschappelijke factor is:

$$\varepsilon \Sigma (m \varrho^2) = \Sigma (m).$$

De hoekversnelling op eenig oogenblik is dus:

$$\varepsilon = \frac{\Sigma (m)}{\Sigma (m \varrho^2)} = \frac{\mathfrak{M}}{T}, \quad (135)$$

waarin $\mathfrak{M} = \Sigma (m)$ de som is der momenten van de uitwendige krachten, en $T = \Sigma (m \varrho^2)$ het traagheidsmoment van het lichaam, beide ten opzichte van de draaiingsas.

§ 90. Het vliegwiel.

Wanneer een as ronddraait onder de werking van twee krachten K en W , waarvan de eerste het veranderlijk moment $\mathfrak{M}_k$ heeft, en in den zin der draaiing als beweegkracht werkt, terwijl de laatste het veranderlijk moment $\mathfrak{M}_w$ heeft, en de draaiing als weerstand tegenwerkt, dan is volgens vergelijking (135) de hoekversnelling op eenig oogenblik:

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_w}{T}.$$

in het traagheidsmoment van het lichaam opgezichte de draaiingsas
Al naarmate het verschil $\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_w$ op dit oogenblik een positieve of een negatieve waarde heeft, neemt de hoeksnelheid der as toe of af.

Indien de veranderlijkheid der beide momenten periodiek is, dat is, indien na afloop van een bepaalde periode steeds dezelfde waarden in dezelfde volgorde terugkeeren, dan zal de hoeksnelheid der as in elk dier perioden met hetzelfde bedrag toe- of afnemen. Deze verandering zal nul zijn in het bijzondere geval, dat de som der arbeiden door beweegkracht en weerstand in elke periode verricht, gelijk nul is. Opdat dus na afloop van elke periode dezelfde bewegingstoestanden in dezelfde volgorde terugkeeren, moet de in elke periode door den weerstand verrichte arbeid dezelfde grootte hebben als de door de beweegkracht verrichte arbeid, maar daarvan in teeken verschillen.

Bestaat in zulk geval de periode uit twee tijdperken, zoo-

danig dat in het eerste het moment van de beweegkracht, in het tweede het moment van den weerstand het grootst is, dan zal de hoeksnelheid in het eerste tijdperk voortdurend toenemen, en in het tweede evenveel afnemen. De hoeksnelheid bereikt haar grootste waarde op het oogenblik dat het toenemen ophoudt en het afnemen begint; zij bereikt haar kleinste waarde op het oogenblik dat het afnemen ophoudt en het toenemen begint. Terwijl de hoeksnelheid van haar kleinste waarde ω tot haar grootste waarde Ω overgaat, vermeerderd het arbeidsvermogen van beweging, en volgens de wet van het behoud van arbeidsvermogen is die vermeerdering in getalwaarde gelijk aan de som van de arbeiden gedurende dien tijd door de krachten K en W verricht. Is dus $\mathfrak{A}_k$ de in dit tijdperk door de beweegkracht K verrichte positieve arbeid, en $\mathfrak{A}_w$ de absolute waarde van den door den weerstand W verrichten negatieven arbeid, dan is:

$$\frac{T\Omega^2}{2} - \frac{T\omega^2}{2} = \mathfrak{A}_k - \mathfrak{A}_w. \quad (136)$$

Het eerste lid dezer vergelijking kan men schrijven onder den vorm:

$$T \frac{\Omega + \omega}{2} (\Omega - \omega);$$

stelt men kortheidshalve $\frac{\Omega + \omega}{2} = \vartheta$ en $\frac{\Omega - \omega}{\vartheta} = n$, ten lost men daarna T uit de vergelijking op, dan vindt men:

$$T = \frac{n}{\vartheta^2} (\mathfrak{A}_k - \mathfrak{A}_w). \quad (137)$$

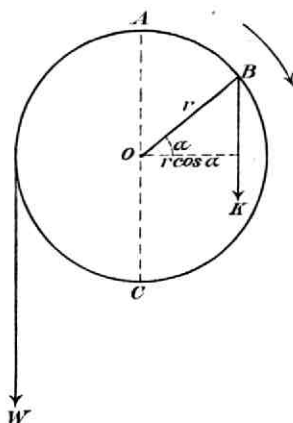
De grootheid ϑ is de rekenkundig middenevenredige tussen de grootste en de kleinste hoeksnelheid; zij kan de gemiddelde hoeksnelheid genoemd worden; het getal n geeft aan het hoeveelste gedeelte van deze gemiddelde hoeksnelheid het grootste verschil in hoeksnelheid bedraagt. De vergelijking (137) geeft derhalve aan hoe groot het traagheidsmoment der as minstens zijn moet om te maken, dat de schommelingen der hoeksnelheid een zeker gedeelte van de gemiddelde hoeksnelheid niet te boven gaan.

Indien het traagheidsmoment der as de vereischte grootte niet heeft, kan men het ontbrekende aanvullen door een andere massa aan de as te verbinden. Deze toegevoegde massa zal een des te grooter bijdrage aan het traagheidsmoment leveren, naarmate zij verder van de draaiingsas verwijderd is. Het is derhalve voordeelig de aan de as te bevestigen massa den vorm te geven van een ring met groote middellijn. Deze wordt dan *vliegwiel* genoemd. De vergelijking (137) kan ook worden aangewend om de massa van het vliegwiel te berekenen als het getal n gegeven is, zooals uit het volgende voorbeeld blijken zal.

Berekening van het vliegwiel voor een krukas.

Er zal worden aangenomen dat de beweegkracht K voortdurend in verticale richting aan het uiteinde van een krukarm werkt, een standvastige grootte heeft, bij het neergaan naar beneden, en bij het opgaan naar boven werkt; verder dat de standvastige weerstand W werkt aan een koord, dat om de krukas wordt opgewonden.

Fig. 174.



Volgens fig. 174 heeft het moment van den weerstand de standvastige grootte Wr ; het moment van de beweegkracht daarentegen verandert met den stand van den krukarm, en wel in dier voege, dat na een halve omwenteling van de kruk steeds dezelfde waarden periodiek terugkeeren. Terwijl de kruk uit den stand OA in den stand OC overgaat, verricht de kracht K den arbeid $+K \cdot AC$ of $+K \cdot 2r$; de kracht W verricht daarbij den arbeid $-W \cdot \pi r$. Opdat de beweging periodiek zij, moet derhalve voldaan zijn aan de vergelijking:

$$K \cdot 2r = W \cdot \pi r \text{ of } K = \frac{\pi}{2} W. \quad (138)$$

Om den stand OB van de kruk te vinden, bij welken de hoekversnelling nul is, moet men de momenten van kracht en weerstand aan elkander gelijk stellen; volgens fig. 174 heeft men dan:

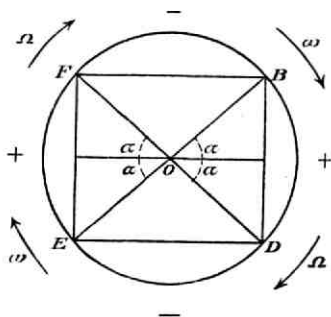
$$Kr \cos \alpha = Wr.$$

Substitueert men hierin de in vergelijking (138) voor K gevonden waarde, dan verkrijgt men:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\pi} = 0,6366 \text{ of } \alpha = 0,8807 \text{ radialen. (139)}$$

Gedurende den overgang van de kruk uit den stand OB in den stand OD (fig. 175)

Fig. 175



is het moment van de kracht voortdurend grooter dan dat van den weerstand; gedurende den overgang uit den stand OD in den stand OE daarentegen heeft het omgekeerde plaats. De hoekversnelling is derhalve positief zoolang het uiteinde van den krukarm den boog BD , negatief zoolang het den boog DE doorloopt. De hoeksnelheid verkrijgt dus haar kleinste waarde ω , als de

kruk den stand OB , haar grootste waarde Ω , als de kruk den stand OD inneemt.

De grootte $\mathcal{U}_k$ uit vergelijking 136 beteekent den arbeid, die door de kracht K wordt verricht gedurende den overgang van de kruk uit den stand OB in den stand OD , dus:

$$\mathcal{U}_k = K \cdot BD = K \cdot 2r \sin \alpha = \frac{\pi}{2} W \cdot 2r \sin \alpha.$$

Het aangrijpingspunt van den weerstand W legt daarbij den boog BD af; derhalve is:

$$\mathcal{U}_w = W \cdot 2r \alpha.$$

Substitueert men deze waarden in vergelijking (137), dan verkrijgt men:

$$T = \frac{n}{\vartheta^2} W r (\pi \sin \alpha - 2\alpha),$$

of als men voor α de in vergelijking (139) gevonden waarde stelt:

$$T = 0,661 \cdot \frac{n}{\vartheta^2} \cdot W r.$$

Is M de massa, R de straal van het vliegwiel, en is het traagheidsmoment der as zelf klein genoeg ten opzichte van het traagheidsmoment van het vliegwiel om verwaarloosd te mogen worden, dan is $T = MR^2$, en men vindt voor de massa van het vliegwiel:

$$M = 0,661 \frac{n}{R^2 \vartheta^2} \cdot W r.$$

Indien bijv. de schommelingen van de hoeksnelheid het dertigste gedeelte van de gemiddelde hoeksnelheid niet mogen te boven gaan, dan is $n = 30$; volbrengt de as 60 omwentelingen in de minuut, dan is de gemiddelde hoeksnelheid $\vartheta = 2\pi$. Is verder de lengte van den krukarm $r = 0,3$ meter, de straal van het vliegwiel $R = 1,5$ meter, en de op den straal r gereduceerde weerstand $W = 1000$ stat. eenheden = 1000 g. dyn. eenheden, dan vindt men voor de massa van het vliegwiel:

$$M = 0,661 \frac{30}{(1,5 \cdot 2\pi)^2} 1000 \cdot g \cdot 0,3 = 657 \text{ kilogram.}$$

§ 91. Samengestelde slinger.

Elk lichaam draaibaar om een horizontalen niet door het zwaartepunt gaande as heet een *samengestelde slinger*. De draaiingsas wordt de *ophangas* genoemd.

Indien de loodlijn OS (fig. 176) uit het zwaartepunt op de ophangas O neergelaten r meters lang is, dan is op het oogenblik dat deze loodlijn den hoek α maakt met de verticaal, de hoekversnelling ϵ van den samengestellten slinger volgens vergelijking (135):

$$\epsilon = \frac{Mgr \sin \alpha}{T_0},$$

waarin M de massa en T_0 het traagheidsmoment van het lichaam ten opzichte van de draaiingsas O beteekent.

Fig. 176.

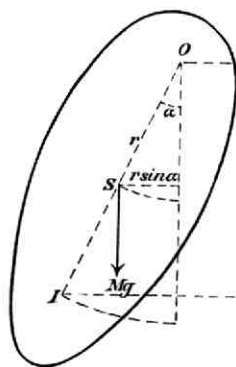


Fig. 177



Om den slinger-tijd van den samengestellten slinger te vinden kan men de lengte l bepalen van een enkelvoudigen slinger, die bij denzelfden elongatiehoek α steeds dezelfde hoekversnelling heeft als de samengestelde slinger. Deze twee slingers hebben dan klaarblijkelijk denzelfden slinger-tijd.

Bij een elongatiehoek α (fig. 177) heeft een enkelvoudige slinger met de massa m en de lengte l de hoekversnelling:

$$\epsilon = \frac{mgl \sin \alpha}{ml^2} = \frac{g \sin \alpha}{l}.$$

Door gelijkstelling van de gevonden waarden der hoekversnellingen vindt men:

$$l = \frac{T_0}{Mr}, \quad (140)$$

en dus volgens vergelijking (30) voor den slinger-tijd van den samengestellten slinger:

$$t = \pi \sqrt{\frac{T_0}{Mgr}}.$$

Het punt I , dat men verkrijgt als men de lijn OS verlengt en daarop van de as O af de lengte l uitzet, wordt het *slingerpunt* van den samengestellten slinger genoemd; de lijn door het slingerpunt I evenwijdig aan de ophangas getrokken heet de *slingeras*.

Hieran is Mgr het moment der zwaarte ten opzichte van de as O de slinger horizontaal bij dezelfde elongatiehoek α .

De formule $t = \pi \sqrt{\frac{T_0}{Mgr}}$ is ook van toepassing op magnetische slingers, zoodanig $T_0 = \pi \sqrt{\frac{F_0}{Mg}}$ waarin F_0 de horizontale magnetische kracht is.

Van alle punten van het lichaam zijn de op de slingeras gelegene de eenige, welker beweging niet wordt gewijzigd door het verband met de overige punten; elk punt op de slingeras volbrengt zijn slingeringen evenzoo alsof het een enkelvoudige slinger ware.

§ 92. Reversieslinger.

Wanneer men den in fig. 178 voorgestelden samengestelden slinger omkeert en aan de slingeras I ophangt, zoodat nu deze de nieuwe ophangas wordt, dan verkrijgt men den in fig. 179 voorgestelden slinger, welks nieuwe

Fig 178.

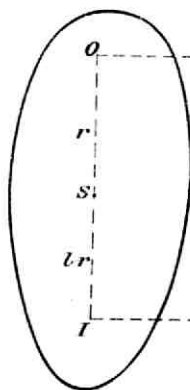
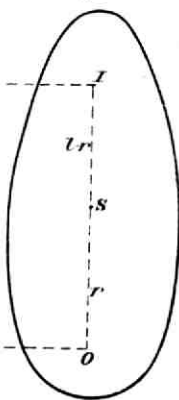


Fig 179



slingeras men op de in de vorige paragraaf verklaarde wijze kan bepalen.

De lengte l_1 van den enkelvoudigen slinger, welke zijn slingeringen in denzelfden tijd volbrengt als de nieuwe slinger, vindt men uit vergelijking (140), als men daarin r door $l - r$, en het traagheidsmoment T_o door het traagheidsmoment T_i ten opzichte van de nieuwe ophangas vervangt. Men heeft dus:

$$l_1 = \frac{T_i}{M(l-r)}.$$

Is T_s het traagheidsmoment ten opzichte van de as door het zwaartepunt evenwijdig aan de ophangas getrokken, dan is volgens vergelijking (125):

$$T_i = T_s + M(l - r)^2$$

en dus:

$$l_1 = \frac{T_s}{M(l - r)} + l - r. \quad (141)$$

Vervangt men evenzoo in vergelijking (140) T_o door zijn waarde $T_o = T_s + Mr^2$, dan verkrijgt men:

$$l = \frac{T_s}{Mr} + r \text{ of } M(l - r) = \frac{T_s}{r}. \quad (142)$$

Deze waarde van $M(l - r)$ in vergelijking (141) stellende, vindt men:

$$l_1 = l.$$

Hieruit volgt, dat bij elken slinger de ophangas met de slingeras kan worden verwisseld, zonder dat daardoor de slingertijd verandert.

Hierin heeft men tevens een middel om proefondervindelijk de lengte te bepalen van een enkelvoudigen slinger met bepaalden slingertijd.

Als men namelijk den slingertijd van den aan de as O opgehangen slinger waarneemt, en daarna door proefneming de beneden het zwaartepunt gelegen as I opzoekt, welke als ophangas moet worden gekozen om wederom denzelfden slingertijd te verkrijgen, dan is de afstand OI der beide assen de gezochte lengte. Een tot dit doel ingerichte slinger wordt *reversieslinger* genoemd.

Bij het gebruik van den reversieslinger moet in het oog gehouden worden, dat er onder het zwaartepunt, behalve de slingeras I nog een tweede as O_1 is, die als ophangas gekozen, eveneens denzelfden slingertijd oplevert; het is die as, die ten opzichte van het zwaartepunt symmetrisch tegenover de oorspronkelijke ophangas is gelegen. Volgens vergelijking (142) toch hangt bij een en hetzelfde lichaam l slechts af van r , en moet dus wederom dezelfde waarde aannemen, indien de op den afstand r beneden het zwaartepunt

gelegen as als ophangas wordt gekozen. In een bijzonder geval valt de slingeras met de as O_1 samen, namelijk als $l - r = r$ is, of volgens vergelijking (142):

$$M r^2 = T_s, \quad (143)$$

dat is, als de afstand van het zwaartepunt tot de ophangas gelijk is aan den traagheidsstraal van het lichaam ten opzichte van de door het zwaartepunt gaande as.

Voor een dunne, aan een harer uiteinden opgehangen stang met de lengte L is bijv. volgens vergelijking (124) $T_o = \frac{1}{3} M L^2$, en dus:

$$l = \frac{\frac{1}{3} M L^2}{\frac{1}{2} M L} = \frac{2}{3} L.$$

De slingertijd zal derhalve dezelfde blijven als men als ophangas kiest de lijn, die op twee derde der lengte evenwijdig aan de ophangas wordt getrokken. Bij het gebruik der stang als reversieslinger moet men er op letten deze slingeras niet te verwisselen met de as door het onderste uiteinde der stang getrokken, welke als ophangas gekozen natuurlijk denzelfden slingertijd zou opleveren. De traagheidsstraal ρ ten opzichte van de door het zwaartepunt gaande as wordt gevonden uit de vergelijking:

$$M \rho^2 = T_s = \frac{M L^2}{12} \text{ of } \rho = \frac{L}{\sqrt{12}}.$$

Wordt de op dezen afstand boven het zwaartepunt gelegen as als ophangas gekozen, dan ligt de slingeras op denzelfden afstand beneden het zwaartepunt.

Uit de vergelijkingen (140) en (142) blijkt, dat men een der traagheidsmomenten T_o of T_s moet kennen om de ligging van de slingeras te bepalen. Omgekeerd kunnen deze vergelijkingen ook dienen om het traagheidsmoment te vinden. Daartoe behoeft men slechts door waarneming de lengte te bepalen van den enkelvoudigen slinger met gelijken slingertijd; is bovendien de afstand r van het zwaartepunt tot de ophangas bekend, dan kan men de traagheidsmomenten berekenen uit de vergelijkingen:

$$T_o = M r l \quad (144) \quad \text{en} \quad T_s = M r (l - r) \quad (145)$$

Deze handelwijze kan met voordeel worden toegepast in al die gevallen, waarin wegens onregelmatigheid van vorm of van massaverdeeling het berekenen van het traagheidsmoment groote moeilijkheden zou opleveren.

Volgens vergelijking (145) heeft het product der twee grootheden r en $l - r$ de standvastige waarde:

$$r(l - r) = \frac{T_s}{M} = q^2,$$

terwijl haar som de van r afhangende waarde l heeft. De som der beide factoren van een getal is het kleinste als de twee factoren aan elkander gelijk zijn. Hieruit volgt dat de vergelijking (143), of onder een andere gedaante de vergelijking:

$$r = q = l - r$$

tevens de voorwaarde bevat, waaronder de slingertijd van een bepaald lichaam het kleinste is.

HOOFDSTUK XIV.

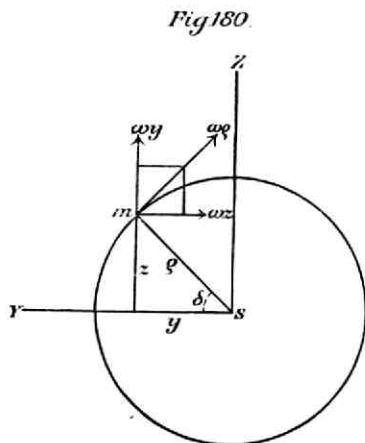
Willekeurige beweging van een lichaam.

§ 93. Arbeidsvermogen van een lichaam.

De beweging van een lichaam kan voor elk oneindig klein tijdsverloop ontbonden worden in een draaiende beweging om een as door het zwaartepunt gaande en een voortgaande beweging; de hoeksnelheid der eerste ontbindingsbeweging zij ω , de snelheid der tweede zij u . Er wordt gevraagd het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam te bepalen.

Men brengt daartoe door het zwaartepunt van het lichaam drie onderling loodrechte coördinatenassen, waarvan de eene SX met de draaiingsas samenvalt, en de tweede SZ zoodanig wordt gekozen, dat de richting van de snelheid u evenwijdig is aan het vlak XZ ; daarna bepaalt men het arbeidsvermogen van beweging van een punt met de massa m en op den afstand q van de draaiingsas gelegen. De snelheid

van dit punt kan ontbonden worden in $\omega \rho$ (fig. 180) en u (fig. 181). De ontbindingssnelheid $\omega \rho$ kan wederom ontbonden worden in $\omega \rho \cos \delta = \omega y$ en $\omega \rho \sin \delta = \omega z$; de ontbindingssnelheid u in $u \cos \alpha$ en $u \sin \alpha$.



De ontbindingssnelheden van het punt (fig. 182) zijn dus: $u \cos \alpha$ in de richting SX , $-\omega z$ in de richting SY , en

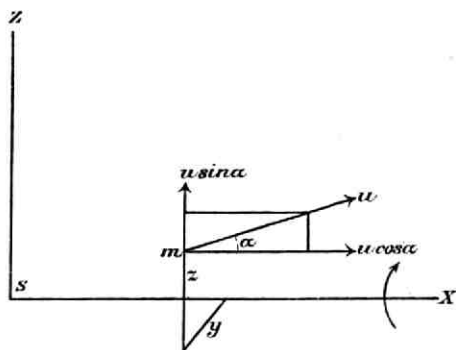
$u \sin \alpha + \omega y$ in de richting SZ . De werkelijke snelheid v kan derhalve gevonden worden uit de vergelijking:

$$v^2 = (u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha + \omega y)^2 + (\omega z)^2,$$

of daar $u^2 \cos^2 \alpha + u^2 \sin^2 \alpha = u^2$ en $\omega^2 y^2 + \omega^2 z^2 = \omega^2 \rho^2$ is:

$$v^2 = u^2 + \omega^2 \rho^2 + 2u \sin \alpha \cdot \omega y.$$

Fig. 181.



Het arbeidsvermogen van beweging van het punt is $\frac{mv^2}{2}$,
en die van het geheele lichaam $\Sigma \frac{mv^2}{2}$.

Daar u , ω en α voor alle punten dezelfde waarden hebben, vindt men:

$$\Sigma \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{u^2}{2} \Sigma(m) + \frac{\omega^2}{2} \Sigma(m \rho^2) + u \omega \sin \alpha \Sigma(my).$$

Daar het zwaartepunt in het vlak XZ is gelegen is $\Sigma(my) = 0$. Noemt men $\Sigma(m)$ — de geheele massa van het lichaam — M , en $\Sigma(m \rho^2)$ — het traagheidsmoment ten opzichte van de door het zwaartepunt gaande draaiingsas — T_s , dan is het arbeidsvermogen van beweging van het geheele lichaam:

$$\mathfrak{A} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{T_s \omega^2}{2}.$$

De term $\frac{Mu^2}{2}$ is

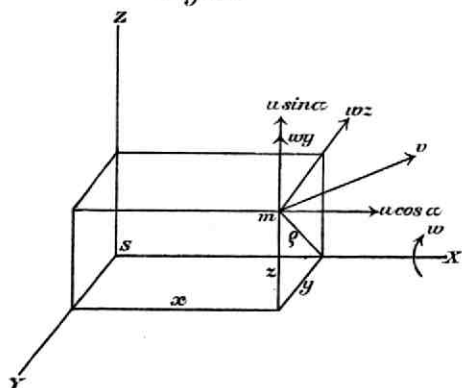
het arbeidsvermogen van beweging ten gevolge van de voortgaande, $\frac{T_s \omega^2}{2}$ dat ten gevolge van de draaiende ontbindingsbeweging van het lichaam. Bovenstaande vergelijking zegt dus:

Men vindt het arbeidsvermogen van beweging van een lichaam door zijn beweging te ontbinden in een voortgaande en een draaiende om een door het zwaartepunt gaande as, het arbeidsvermogen van beweging te bepalen dat het lichaam heeft ten gevolge van elk dier ontbindingsbewegingen, en de som dier grootheden te nemen.

Als voorbeeld diene het volgende:

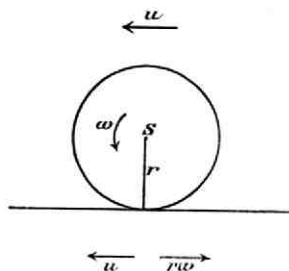
Indien een cilinder met den straal r over een horizontaal vlak rolt, dan kan zijn beweging voor een willekeurig tijdsverloop ontbonden worden in een voortgaande met de snelheid u (fig. 183) en een ronddraaiende om zijn as met de

Fig. 182.



hoeksnelheid ω . Een punt op den omtrek van den cilinder heeft bij de laatste ontbindingsbeweging de lijnsnelheid $r\omega$.

Fig. 183.



De werkelijke snelheid van het punt, waar de cilinder het vlak aanraakt is nul, anders zou de beweging geen zuiver rollende zijn. Hieruit volgt dat

$$u = r\omega \quad \text{of} \quad \omega = \frac{u}{r}.$$

Het arbeidsvermogen van beweging van den cilinder is derhalve:

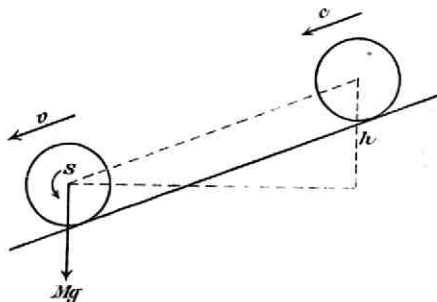
$$\mathfrak{A} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{T_s}{2} \left(\frac{u}{r}\right)^2 = \frac{u^2}{2} \left(M + \frac{T_s}{r^2}\right).$$

Voor $\frac{T_s}{r^2}$, de op den omtrek van den cilinder gereduceerde massa, is vroeger gevonden de waarde $\frac{M}{2}$, dus:

$$\mathfrak{A} = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3M}{2} = \frac{3Mu^2}{4}.$$

Rolt een cilinder onder de werking der zwaartekracht

Fig. 184.



langs een hellend vlak naar beneden (fig. 184), dan is volgens de wet van het behoud van arbeidsvermogen:

$$\frac{3 M v^2}{4} - \frac{3 M c^2}{4} = M g h.$$

of
$$v = \sqrt{c^2 + 2 g \left(\frac{2}{3} h\right)}.$$

Is de aanvangssnelheid nul, dan wordt de eindsnelheid:

$$v = \sqrt{2 g \left(\frac{2}{3} h\right)},$$

dus even groot als die van een lichaam, dat van de hoogte $\frac{2}{3} h$ vrij valt.

§ 94. Beweging van het zwaartepunt.

De algemeene vergelijkingen voor het zwaartepunt (51) gelden voor elken stand van het lichaam. Indien een lichaam

zich beweegt veranderen de coördinaten zoowel van de afzonderlijke punten als van het zwaartepunt. Op ieder oogenblik echter is het product van de geheele massa met den afstand van het zwaartepunt tot het vaste vlak YZ gelijk aan de som der producten, die men verkrijgt als men elk massadeeltje vermenigvuldigt met zijn afstand tot ditzelfde vlak, of volgens fig. 185:

$$M x_o = \Sigma (m x) \quad (146)$$

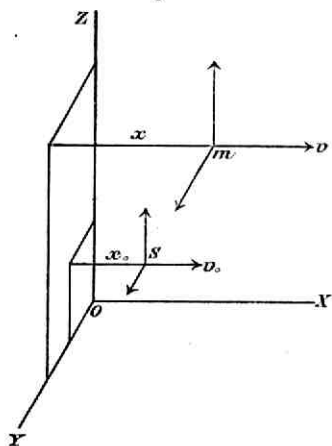
Indien men de snelheden der afzonderlijke punten op de in de figuur aangeduide

wijze ontbindt, dan zal gedurende het eerstvolgende oneindig kleine tusscheel τ de grootheid x in $x + v \tau$, en de grootheid x_o in $x_o + v_o \tau$ overgaan. De algemeene vergelijking (146) geldt ook voor het einde van dit tusscheel, bijgevolg is:

$$M (x_o + v_o \tau) = \Sigma [m (x + v \tau)]$$

of
$$M x_o + M v_o \tau = \Sigma (m x) + \tau \Sigma (m v).$$

Fig 185.



$\tau = \text{tusscheel}$

Trekt men hiervan de vergelijking (146) af, en laat men den gemeenschappelijken factor τ weg, dan verkrijgt men:

$$Mv_o = \Sigma (mv). \quad (147)$$

Op elk oogenblik is het product van de geheele massa en de ontbindingssnelheid van het zwaartepunt in eenige richting gelijk aan de som van de producten der massa's van alle afzonderlijke punten en hun ontbindingssnelheden in diezelfde richting.

Dezelfde stelling geldt ook voor de versnellingen. Is p de ontbindingsversnelling van de massa m , en p_o de ontbindingsversnelling van het zwaartepunt, beide in de richting OX , dan zal gedurende het oneindig kleine tijdsdeel τ de grootheid v in $v + p\tau$, en de grootheid v_o in $v_o + p_o\tau$ overgaan. Vergelijking (147) geldt ook voor het einde van dit tijdsdeel; bijgevolg is:

$$M(v_o + p_o\tau) = \Sigma [m(v + p\tau)]$$

of
$$Mv_o + Mp_o\tau = \Sigma (mv) + \tau \Sigma (mp).$$

Trekt men hiervan de vergelijking (147) af, en laat men den gemeenschappelijken factor τ weg, dan verkrijgt men:

$$Mp_o = \Sigma (mp). \quad (148)$$

Op elk oogenblik is het product van de geheele massa en de ontbindingsversnelling van het zwaartepunt in eenige richting gelijk aan de som van de producten der massa's van alle afzonderlijke punten en hun ontbindingsversnellingen in diezelfde richting.

Met behulp van deze stelling kan de ontbindingsversnelling p_o van het zwaartepunt in de richting OX berekend worden, indien op het lichaam willekeurige uitwendige krachten K werken. De producten mp stellen namelijk in grootte en richting de ontbondenen voor van de krachten Q , die blijkens hun beweging op de punten werken. De ontbondenen van de krachten Q' werken in tegengestelde richting. Ontbindt men de uitwendige krachten K langs drie onderling loodrechte asrichtingen, en stelt men de ontbindingskrachten in de richting OX door X voor, dan verkrijgt men volgens het beginsel van D'ALEMBERT de vergelijking:

$$\Sigma (X) - \Sigma (mp) = 0$$

of volgens vergelijking (148):

$$Mp_o = \Sigma(X).$$

De ontbindingsversnelling van het zwaartepunt in de richting OX is dus:

$$p_o = \frac{\Sigma(X)}{M}.$$

Men zou dezelfde ontbindingsversnelling gevonden hebben voor een enkel stoffelijk punt met de massa M , waarop alle krachten K werkten langs lijnen evenwijdig aan die, waarlangs zij werkelijk werken. Dit is niet slechts waar voor de richting OX , maar ook voor de richtingen OY en OZ , en derhalve voor elke willekeurige richting.

Het zwaartepunt van een lichaam beweegt zich evenzoo alsof de geheele massa er in vereenigd was en alsof alle krachten er op werkten langs lijnen evenwijdig aan die, waarlangs zij werkelijk werken.

Deze stelling geldt, evenals het beginsel van D'ALEMBERT, niet slechts voor absoluut vaste lichamen, maar geheel algemeen voor elk willekeurig stelsel stoffelijke punten.

§ 95. Beweging van een vrij lichaam.

Zoals in § 43 is aangetoond, kunnen de op een lichaam werkende uitwendige krachten steeds vervangen worden door een kracht in het zwaartepunt aangrijpende en een koppel. In verband met het in de vorige paragraaf bewezene, kan dus steeds de versnelling van het zwaartepunt gevonden worden; zij is namelijk:

$$q = \frac{R}{M},$$

waarin R de vervangende kracht, en M de geheele massa van het lichaam beteekent.

Daar de krachten van een koppel geen invloed hebben op de beweging van het zwaartepunt, zoo zal de werking van een koppel bestaan in een draaiing van het lichaam om het zwaartepunt.

De algemeene oplossing van dit geval is te moeilijk om

in dit leerboek behandeld te worden. Er zal dus een eenvoudiger geval worden aangenomen; er zal namelijk worden verondersteld, dat de lijn door het zwaartepunt van het lichaam gaande en loodrecht staande op het koppelvlak een vrije as is.

Daar bij de bepaling van de ontbindingsbeweging, die het gevolg is van het op het lichaam werkende koppel, de overige ontbindingsbewegingen niet in aanmerking komen, zoo kan men aannemen dat het zwaartepunt van het lichaam in rust is. Stelt men zich voor dat de vrije as, die loodrecht staat op het koppelvlak, door weerstanden in een onveranderlijken stand wordt gehouden, dan krijgt het lichaam om die as een versneld draaiende beweging met de versnelling:

$$\epsilon = \frac{\mathfrak{M}}{T},$$

waarin $\mathfrak{M}$ het koppelmoment en T het traagheidsmoment ten opzichte van de draaiingsas beteekent. Men kan nu bewijzen dat de weerstanden, die de as in onveranderlijken stand houden, nul zijn.

Zijn de weerstanden nul, dan zijn de krachten van het koppel de eenige uitwendige krachten, en moeten volgens het beginsel van D'ALEMBERT met de krachten Q' in evenwicht zijn; en omgekeerd, zijn die krachten in evenwicht, dan zijn de weerstanden nul.

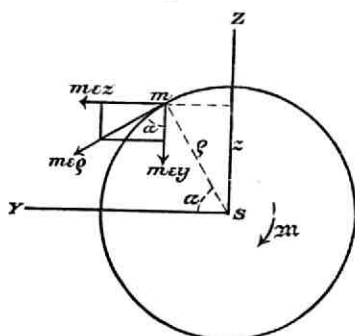
De krachten Q' kunnen ontbonden worden in krachten even groot als de centripetaalkrachten maar in tegengestelde richting werkende, en in de tangentele krachten, werkende in den zin tegengesteld aan dien der beweging. Daar de draaiingsas een vrije as is, zijn zooals in § 87 is aangetoond de eerste ontbindingskrachten met elkander in evenwicht, en er moet dus slechts bewezen worden, dat de tangentele ontbindingskrachten van Q' met de krachten van het koppel in evenwicht zijn.

Daartoe bringe men door het zwaartepunt S drie onderling loodrechte coördinatenassen zoodanig aan, dat de as SX met de draaiingsas samenvalt (fig. 186 en 187).

Zij $\mathfrak{M}$ het moment van het koppel, en $m\epsilon\rho$ (fig. 186) een der tangentele ontbindingskrachten; ontbindt men deze

laatste op de in de figuur aangegeven wijze in de twee krachten $m\epsilon\rho \cos \alpha = m\epsilon y$ en $m\epsilon\rho \sin \alpha = m\epsilon z$, dan blijkt

Fig. 186.



dat aan de zes evenwichtsvergelijkingen is voldaan. In de richting der as SX zijn geen ontbindingskrachten; de som der ontbindingskrachten in de richting SY is $\Sigma(m\epsilon z) = \epsilon \Sigma(mz)$, die in de richting SZ is $\Sigma(m\epsilon y) = \epsilon \Sigma(my)$, en daar het zwaartepunt zoolwel in het vlak XZ als in het vlak XY ligt, is:

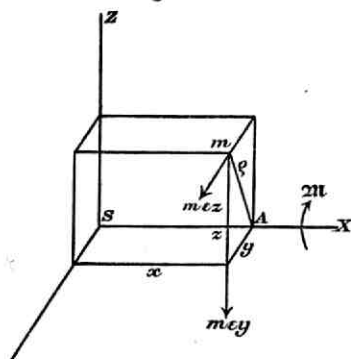
$$\Sigma(my) = 0 \text{ en } \Sigma(mz) = 0.$$

De sommen der momenten ten opzichte van de assen SX , SY en SZ zijn:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} - \Sigma(m\epsilon\rho^2) \quad \Sigma(m\epsilon yx) \quad \text{en} \quad \Sigma(m\epsilon zx) \\ \text{of} \quad \mathfrak{M} - T\epsilon \quad \epsilon \Sigma(myx) \quad \text{en} \quad \epsilon \Sigma(mzx). \end{aligned}$$

Daar volgens vergelijking (135) $\epsilon = \frac{\mathfrak{M}}{T}$ is, is de som der

Fig. 187.



momenten ten opzichte van de as SX gelijk nul. Daar verder de as een vrije as is, heeft men:

$$\Sigma(myx) = 0 \text{ en } \Sigma(mzx) = 0,$$

zoodat ook de sommen der momenten ten opzichte van de assen SY en SZ gelijk nul zijn.

Daar aan de zes evenwichtsvergelijkingen voldaan is, zijn er geen weerstanden noodig om de as in onveranderlijken stand te houden, en heeft

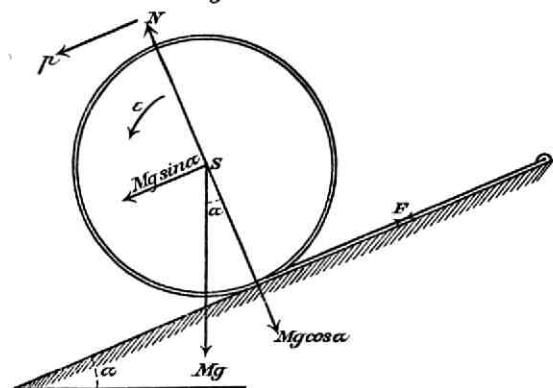
dus de ontbindingsbeweging op bovengenoemde wijze plaats.

§ 96. Rollende beweging langs een hellend vlak.

Indien er geen wrijvingsweerstand voorhanden was, dan zou een lichaam, dat op een hellend vlak is geplaatst en zich aanvankelijk in rust bevond, een voortgaande beweging verkrijgen, en de aanrakingsplaats zou daarbij langs het hellend vlak *glijden*. De wrijvingsweerstand werkt dit glijden tegen, en veroorzaakt tevens een draaiende beweging. Is de wrijvingsweerstand groot genoeg om het glijden van de aanrakingsplaats geheel te beletten, dan krijgt het lichaam een rollende beweging.

Om te onderzoeken of de beweging een zuiver rollende, of wel een onvolkomen, met glijden verbonden rollende is, kan men zich voorstellen, dat om het lichaam een draad is gewikkeld, die langs het hellend vlak uitgestrekt en aan eenig punt bevestigd is, en die het lichaam dwingt een rollende beweging te volbrengen. Vergelijkt men dan de spanning F in dien draad met den wrijvingsweerstand, die bij het glijden van het lichaam zou ontstaan, en blijkt het dat deze wrijvingsweerstand niet kleiner is dan genoemde

Fig. 188.



kracht F , dan zal ook zonder het voorhanden zijn van den draad de beweging van het lichaam een rollende zijn.

Op het rollende lichaam (fig. 188) werken drie krachten,

namelijk het gewicht Mg , de normale weerstand N en de kracht F . Van deze drie krachten werkt alleen F langs een lijn, die niet door het zwaartepunt gaat; de draaiing om het zwaartepunt geschiedt derhalve met de hoekversnelling:

$$\epsilon = \frac{Fr}{T_s}$$

In deze vergelijking beteekent T_s het traagheidsmoment ten opzichte van de door het zwaartepunt gaande, loodrecht op de baan gerichte as, die verondersteld wordt een vrije as te zijn. De lijnversnelling van eenig punt op den omtrek is:

$$p = r\epsilon = \frac{Fr^2}{T_s}$$

Stelt μ de op den omtrek van den rollenden cirkel gereduceerde massa voor, dan is $T_s = \mu r^2$, en derhalve:

$$p = \frac{F}{\mu} \text{ of } F = \mu p. \quad (149)$$

Zooals vroeger is aangetoond, heeft bij de rollende beweging elk punt op den omtrek, tengevolge van de draaiende ontbindingsbeweging, een lijnsnelheid, die steeds gelijk is aan de snelheid der voortgaande ontbindingsbeweging; derhalve zijn ook de versnellingen der ontbindingsbewegingen aan elkander gelijk.

Hieruit volgt dat de versnelling van het zwaartepunt eveneens de grootte p heeft.

Volgens § 94 is die versnelling:

$$p = \frac{Mg \sin \alpha - F}{M}$$

Substitueert men hierin de hierboven gevonden waarde van F , dan verkrijgt men:

$$p = \frac{Mg \sin \alpha}{M + \mu}. \quad (150)$$

De som der ontbindingskrachten in de richting normaal op het vlak is nul, dus:

$$N - Mg \cos \alpha = 0 \text{ of } N = Mg \cos \alpha.$$

Is f de wrijvingscoëfficiënt, dan heeft bij een werkelijk glijden de wrijvingsweerstand de grootte fN . Is fN grooter dan F , dan komt van de kracht fN slechts een gedeelte tot stand, en wel een gedeelte dat gelijk is aan F . Is daarentegen fN kleiner dan F , dan zou er een glijden plaats grijpen, indien er geen draad voorhanden was. In het grensgeval is $fN = F$ of volgens vergelijking (149):

$$fMg \cos \alpha = \mu p.$$

Substitueert men hierin de voor p gevonden waarde, dan verkrijgt men:

$$fMg \cos \alpha = \frac{\mu Mg \sin \alpha}{M + \mu}.$$

of
$$\operatorname{tg} \alpha = \left(1 + \frac{M}{\mu}\right) f.$$

Uit deze vergelijking kan de hoek bepaald worden, dien het hellend vlak hoogstens met den horizon mag maken, opdat de beweging tengevolge van den wrijvingsweerstand een rollende zij. Zij geeft tevens de grens aan, tot welke, zonder het voorhanden zijn van den draad, de vergelijking (150) geldig blijft.

Is het lichaam een cilinder, dan is $\frac{M}{\mu} = 2$, en dus geeft $\operatorname{tg} \alpha = 3f$ de grootste helling van het vlak aan, waarbij de cilinder nog rolt. Zoolang de hellingshoek deze waarde niet overschrijdt, is volgens vergelijking (150) de versnelling:

$$p = \frac{3}{2} g \sin \alpha.$$

VIERDE AFDEELING.

STATICA VAN VEERKRACHTIGE LICHAMEN OF LEER VAN HET
EVENWICHT VAN KRACHTEN OP EEN VEERKRACHTIG
LICHAAM WERKENDE.

HOOFDSTUK XV.

Verlenging en verkorting van een prismatische stang.

§ 97. Elasticiteit.

In de twee vorige afdeelingen werden de lichamen als absoluut vast beschouwd; er werd aangenomen:

- 1°. dat de kleinste deelen in rust zijn op hun gemiddelde plaatsen,
- 2°. dat de afstanden der deelen onveranderlijk zijn.

Voortaan zal van deze laatste vereenvoudiging worden afgezien, en zal onder een elastisch lichaam worden verstaan, een stelsel van punten, die in rust zijn op hun gemiddelde plaatsen, en die door hun onderlinge werking op die plaatsen gehouden worden. Wanneer geen uitwendige krachten werken, en dus het lichaam in rust is of een eenparige rechte lijnige beweging heeft, dan is de resultante van de inwendige krachten op eenig deeltje P werkende steeds nul. De stand, dien P dan inneemt ten opzichte van de overige punten, zal de *nulstand* genoemd worden.

Gaan op het lichaam uitwendige krachten werken, dan zullen in het algemeen de afstanden der deeltjes onderling veranderen. Blijkens de ervaring zal dan de resultante der inwendige krachten op P werkende, gericht zijn langs de lijn, die de plaats van P verbindt met den nulstand; terwijl de grootte dier resultante evenredig is met den afstand van P tot den nulstand. Houden de uitwendige krachten

op te werken, dan keeren de deelen in den nulstand terug. Dit geldt evenwel slechts zoolang de afstand der deeltjes tot den nulstand zeer klein blijft; wanneer die afstand een zekere grens overschrijdt, dan keeren de deeltjes na het ophouden der uitwendige krachten niet meer tot den nulstand terug.

Alle verschijnselen, die samenhangen met de uitwijking der deeltjes uit den nulstand, behooren tot de leer der *elasticiteit*.

Indien op een lichaam uitwendige krachten werken, dan bevinden, zooals reeds boven is opgemerkt, de deeltjes zich niet in den nulstand; door het optreden van die uitwendige krachten ondergaan dus vorm en afmetingen van het lichaam een verandering. Om de voorwaarden te kennen, waaronder de uitwendige krachten in evenwicht zijn, moet in ieder bijzonder geval de door de uitwendige krachten teweeggebrachte vormverandering worden bepaald, en moet tevens onderzocht worden of bij de stof, waaruit het lichaam bestaat, de inwendige krachten de grootte kunnen hebben, beantwoordende aan de uitwijking der deeltjes uit den nulstand.

De wetten, volgens welke bij verschillende stoffen de inwendige krachten met de uitwijking der deeltjes uit den nulstand veranderen, moeten daartoe vooraf proefondervindelijk worden bepaald. De in de tweede afdeeling gevonden algemeene evenwichtsvergelijkingen blijven overigens ook voor de elastische lichamen geldig. Heeft toch een lichaam tengevolge van uitwendige krachten een vormverandering ondergaan, dan zal de evenwichtstoestand niet worden gestoord als het met behoud van die vormverandering in een absoluut vast lichaam veranderd wordt. Voor de uitwendige krachten, die het lichaam in dezen evenwichtstoestand houden, gelden derhalve dezelfde vergelijkingen, die bij absoluut vaste lichamen van gelijken vorm zouden moeten aangewend worden.

Hetzelfde geldt ook voor de inwendige krachten. Stelt men zich voor dat het lichaam door een willekeurige snede in twee deelen wordt verdeeld, en dat aan de snijvlakte op elk der deelen uitwendige krachten gaan werken, welke den vorigen evenwichtstoestand herstellen, die krachten derhalve, welke vroeger als inwendige krachten werkten, dan geldt nu voor elk der beide deelen wat vroeger voor het geheel

gold. Door herhaling van deze handelwijze kunnen de in elk punt van het elastisch lichaam werkende inwendige krachten worden onderzocht. De kennis van de wetten der elasticiteit is derhalve voldoende om de statica der elastische lichamen terug te brengen tot de statica der absoluut vaste lichamen.

§ 98. Elasticiteitsmodulus.

Een stang worde in verticalen stand geplaatst en aan het bovineinde bevestigd; onder aan de stang worde een massa gehangen, welks gewicht voortaan de belasting zal worden genoemd. Om de inwendige krachten te bepalen, die in eenige horizontale laag werkzaam zijn, stelt men zich voor dat de stang is doorgesneden, en dat aan de doorsnede uitwendige krachten gaan werken, die met de overige krachten evenwicht maken. Indien men het gewicht van het afgesneden stuk der stang verwaarloost, dan is de vervangende der op de doorsnede werkende krachten even groot als de belasting en verticaal naar boven gericht.

Zij P een punt en V een om P heen gelegen deel der doorsnede, zij verder Q de vervangende van de op V werkende krachten, dan hangt het quotient $\frac{Q}{V}$ in het algemeen af van de grootte van V . Laat men V tot nul naderen, dan nadert $\frac{Q}{V}$ tot een bepaalde grenswaarde S , die men de

spanning der stang in P noemt. Is de stang prismatisch en de belasting gelijkmatig verdeeld, dan is de spanning in alle punten der doorsnede en, bij verwaarloozing van het gewicht der stang, tevens in alle punten der stang even groot.

Indien men verschillende prismatische stangen aan het bovineinde bevestigd, van onderen belast, en de verlengingen waarneemt die zij daardoor ondergaan, dan verkrijgt men de volgende resultaten:

- 1) Zoolang de spanning van de stang een bepaalde grens, de zoogenaamde elasticiteitsgrens (§ 99), niet overschrijdt, is de verlenging evenredig met de belasting, en krijgt de stang bij het wegnemen der belasting haar oorspronkelijke lengte terug.

Daar spanningen, welke deze grens overschrijden, in de practijk niet mogen voorkomen, zoo mag de evenredigheid van belasting en verlenging als algemeen geldig worden beschouwd.

2) *De verlenging der stang is evenredig met haar oorspronkelijke lengte.*

De spanning is over de geheele lengte der stang dezelfde, en ook de verlengingen der afzonderlijke deelen zijn derhalve evenredig met hun oorspronkelijke lengten.

3) *De verlenging is omgekeerd evenredig met de doorsnede der stang.*

De belasting wordt verondersteld gelijkmatig verdeeld te zijn. Een stang, wier doorsnede n vlakke-eenheden bevat, kan beschouwd worden als te bestaan uit n stangen, elk met een doorsnede van één vlakke-eenheid; elk dier stangen draagt het n^{de} gedeelte van de belasting en ondergaat derhalve het n^{de} gedeelte van de verlenging, die de geheele belasting daaraan zou teweegbrengen.

4) *De verlenging hangt af van de stof waaruit de stang bestaat.*

Indien men onder aan een stang met de lengte L meters en de doorsnede F vierkante meters een belasting van Q dynamische eenheden aanbrengt, dan is de verlenging:

$$\lambda = f \frac{L Q}{F} \text{ meters.} \quad (151)$$

De coëfficiënt f beteekent de verlenging van een stang van één meter lengte en één vierkanten meter doorsnede, aan welker onderste uiteinde een belasting van één dyn. eenheid is aangebracht. De coëfficiënt f hangt dus alleen af van de stof waaruit de stang bestaat. In plaats van dezen coëfficiënt voert men gewoonlijk in den coëfficiënt:

$$E = \frac{1}{f}$$

welke de *elasticiteitsmodulus* der stof wordt genoemd.

Vergelijking (151) gaat daardoor over in:

$$\lambda = \frac{1}{E} \frac{L Q}{F}. \quad (152)$$

Stelt men hierin $\lambda = L$ en $F = 1$, dan wordt $E = Q$; dat is: de elasticiteitsmodulus van een stof geeft aan het aantal dynamische eenheden van de belasting, die noodig zou zijn om een stang dier stof met een doorsnede van één vierkanten meter tot haar dubbele lengte uit te rekken, steeds in de veronderstelling, dat ook bij zoo groote spanningen de verlenging evenredig bleef met de belasting.

In het CGS-stelsel geeft de elasticiteitsmodulus van een stof aan het aantal dynamen van de belasting, die noodig zou zijn om een stang dier stof met één vierkanten centimeter doorsnede tot haar dubbele lengte uit te rekken.

In het CGS-stelsel is dus de elasticiteitsmodulus 10 maal zoo groot als de hierboven aangegevene.

De verlenging van een smeedijzeren stang met een doorsnede van één vierkanten meter en belast met één dyn.

eenheid bedraagt $\frac{1}{196,2 \cdot 10^9}$ van de oorspronkelijke lengte.

De elasticiteitsmodulus van smeedijzer is derhalve $196,2 \cdot 10^9$. In het CGS-stelsel zou hij $196,2 \cdot 10^{10}$ zijn.

Is omgekeerd bekend dat de elasticiteitsmodulus van smeedijzer $196,2 \cdot 10^9$ bedraagt, dan vindt men voor de verlenging van een stang van 2 meters lengte en 400 vierkante millimeters doorsnede, en belast met een massa van 3000 kilogram, waarvan het gewicht dus 29430 dyn. eenheden bedraagt:

$$\lambda = \frac{29430 \cdot 2}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 196,2 \cdot 10^9} = 0,00075 \text{ meter.}$$

Indien men de aan het begin dezer paragraaf vermelde proef omkeert, en de van onderen bevestigde stang aan haar bovineinde belast, dan zal deze belasting een verkorting van de stang teweegbrengen. Hierbij is gebleken, dat ter bepaling der verkortingen dezelfde vergelijkingen gelden, volgens welke de verlengingen moesten berekend worden, en dat voor alle stoffen de elasticiteitsmodulus bij samendrukking even groot is als die bij uitrekking.

§ 99. Elasticiteits- en vastheidsgrens.

Indien de spanning van de stang een bepaalde grens overschrijdt, dan ontstaat een verlenging, die bij het weg-

nemen van de belasting slechts gedeeltelijk weer verdwijnt. Wordt de spanning nog grooter, dan bereikt zij ten slotte een tweede grenswaarde, bij welke de stang breekt.

De grenswaarde S , die de belasting eener stang met een doorsnede van één vierkanten meter niet kan overschrijden, zonder een blijvende verlenging teweeg te brengen, wordt de *elasticiteitsgrens* der stof genoemd.

Zooals reeds in de vorige paragraaf werd opgemerkt, is deze waarde tevens de grens tot welke vergelijking (152) nog geldig blijft.

De waarde μ , welke de belasting eener stang met één vierkanten meter doorsnede niet kan overschrijden zonder dat de stang breekt, wordt de *vastheidsgrens* der stof genoemd.

Een smeedijzeren stang met één vierkanten meter doorsnede ondergaat een blijvende verlenging als haar belasting meer dan $14,7 \cdot 10^7$, en breekt als haar belasting meer dan $39 \cdot 10^7$ dyn. eenheden bedraagt.

Indien de elasticiteitsgrens S en de vastheidsgrens μ van de stof uit proeven bekend zijn, dan is het gewicht P , waarmede een uit die stof vervaardigde stang met een doorsnede van F vierkante meters hoogstens belast kan worden zonder een blijvende verlenging te ondergaan.

$$P = S \cdot F \text{ dyn. eenheden} \quad (153)$$

en de belasting Q , die voldoende zou zijn om de stang dadelijk te doen breken:

$$Q = \mu \cdot F \text{ dyn. eenheden.}$$

De waarde van P uit vergelijking (153) is tevens de uiterste grenswaarde, waartoe bij eenig gebouw de belasting van een zoodanige stang kan worden opgevoerd zonder de veiligheid van het gebouw in gevaar te brengen.

De in de vorige paragraaf als voorbeeld gekozen smeedijzeren stang met een doorsnede van 400 vierkante millimeters, zou hoogstens met $P = 14,7 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 58800$ dyn. eenheden kunnen worden belast zonder de elasticiteitsgrens te overschrijden. Om de stang dadelijk te doen breken zou een belasting $Q = 39 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 156000$ dyn. eenheden noodig zijn. Ter berekening van de teweeggebrachte

verlenging mag vergelijking (152) slechts worden gebruikt, zoolang de belasting niet meer dan 58800 dyn. eenheden bedraagt. Daar het in de practijk doorgaans niet mogelijk is van te voren op alle omstandigheden acht te geven, die mettertijd een vermeerdering van de spanning of een vermindering van het weerstandsvermogen tengevolge kunnen hebben, zoo is men gewoon in plaats van S een kleinere waarde — al naarmate van den verlangden graad van zekerheid slechts de waarde $\frac{S}{2}$, $\frac{S}{3}$ — als geoorloofde grens van de belasting per vierkanten meter der doorsnede aan te nemen.

Om het draagvermogen te berekenen van een stang, die in de richting harer lengte wordt samengedrukt, moet men op soortgelijke wijze te werk gaan. De elasticiteitsgrens en de vastheidsgrens moeten door afzonderlijke proeven worden bepaald, daar zij in het algemeen verschillen van de bij de uitrekking gevonden waarden.

HOOFDSTUK XVI.

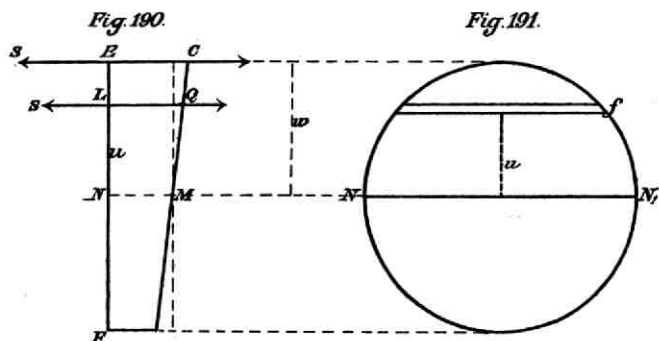
Buiging.

§ 100. Spanningen in gebogen balken.

Als men van een horizontalen prismatischen balk het eene uiteinde bevestigt, en het andere vrije uiteinde belast, dan zal deze belasting een buiging van den balk teweegbrengen; de oorspronkelijk rechte balk wordt gebogen; de bolle kant is daarbij naar boven gericht (fig. 189). Beschouwt men den balk als een bundel evenwijdige onverbreekbaar aan elkander bevestigde lagen, dan worden bij de buiging de bovenste lagen *langer*, de onderste *korter*. Tusschen de bovenste en de onderste laag moet zich dus ergens een laag AB bevinden, die noch langer noch korter wordt; deze laag wordt de *neutrale laag* genoemd.

De verlengingen van de bovenste en de verkortingen van de onderste lagen zijn grooter, naarmate de lagen verder van de neutrale laag verwijderd zijn. Men mag aannemen,

In alle punten van de doorsnede EF , welke op denzelfden afstand u van de neutrale laag gelegen zijn, is de spanning s even groot. Is in alle punten van een oppervlak de spanning even groot, dan verkrijgt men de vervangende van alle op dit oppervlak werkende krachten door de spanning te vermenigvuldigen met het aantal vierkante meters van het oppervlak. Verdeelt men dus de doorsnede EF van den balk door lijnen evenwijdig aan de neutrale laag in



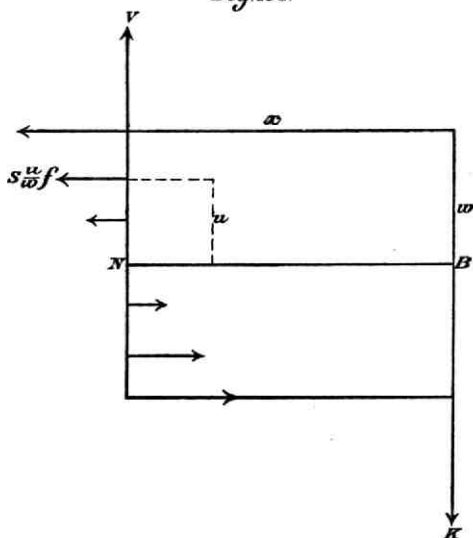
oneindig smalle strooken, en is f (fig. 191) de vlakte-inhoud van de strook op den afstand u van de neutrale laag gelegen, dan is de vervangende van de op die strook werkende krachten:

$$s \cdot f = S \frac{u}{w} f.$$

Indien men den balk snijdt door een vlak, dat in het punt N loodrecht staat op de neutrale laag, en daarna onderzoekt welke krachten aan de scheidingsvlakte moeten werken om den evenwichtstoestand van het stuk BN (fig. 192) te herstellen, dan bevindt men, dat vooreerst aan het afgesneden eind van elke laag een kracht moet werken in de lengterichting dier laag, welke de boven gevonden grootte $sf = S \frac{u}{w} f$ heeft. In de veronderstelling dat de doorbuiging zeer gering is, kunnen de lijnen waarlangs deze krachten werken als horizontaal worden beschouwd. Bovendien

moet in de doorsnede nog een kracht V verticaal naar boven werken, omdat genoemde horizontale krachten alleen niet voldoende zouden zijn om de verticaal naar beneden werkende kracht K in evenwicht te houden. Wegens de veronderstelde geringe buiging mag men aannemen, dat de scheidingsvlakte verticaal is, en dat dus de kracht V langs dit vlak werkende, een verschuiving van het stuk BN belet. Daar V en K de eenige verticaal gerichte krachten

Fig 192.



zijn, die op het stuk BN werken, zoo volgt uit de algemeene evenwichtsvergelijking:

$$V = K.$$

De eenige horizontaal gerichte krachten, die op het stuk BN werken zijn bovengenoemde krachten sf ; boven de neutrale laag werken zij van rechts naar links, onder de neutrale laag van links naar rechts. De som dier krachten moet gelijk nul zijn, dus:

$$\Sigma \left(\frac{S}{w} uf \right) = 0,$$

of, als men den gemeenschappelijken factor $\frac{S}{w}$ van alle onder het somteeken staande termen weglaat :

$$\Sigma (fu) = 0. \quad (155)$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat de som der momenten van alle volumedeelen der doorsnede ten opzichte van de in de neutrale laag liggende horizontale lijn NN , welke de *neutrale as* wordt genoemd, gelijk nul is. Deze som kan vervangen worden door het product van den vlakke-inhoud der geheele doorsnede met den afstand van haar zwaartepunt tot genoemde as, en daar dit product gelijk nul is, zoo moet het zwaartepunt der doorsnede in de neutrale as liggen. Door de vergelijking (155) wordt dus de ligging der neutrale laag bepaald; zij drukt uit dat de neutrale laag die laag is, welke door de zwaartepunten van alle doorsneden gaat. De algemeene evenwichtsvoorwaarden vereischen bovendien nog, dat de som der momenten van alle op het stuk BN werkende krachten ten opzichte van een willekeurige as, bijv. ten opzichte van de in fig. 192 loodrecht op het vlak der teekening staande neutrale as NN_1 , gelijk nul is. Het moment van de kracht K is positief, de momenten van alle krachten sf zijn negatief. Daar verder het moment van de kracht sf de grootte $\frac{Suf}{w} u = \frac{S}{w} fu^2$ heeft, zoo is als de lijn NB x meters lang is:

$$\Sigma \left(\frac{S}{w} fu^2 \right) = Kx,$$

of den standvastigen factor $\frac{S}{w}$ voor het somteeken brengende :

$$\frac{S}{w} \Sigma (fu^2) = Kx. \quad (156)$$

In deze vergelijking beteekent $\Sigma (fu^2)$ de som der producten van de afzonderlijke volumedeelen der doorsnede met de vierkanten van hun afstanden tot de neutrale as. Het traagheidsmoment dier doorsnede ten opzichte van de neutrale as zou zijn :

$$T = \Sigma (\gamma fu^2) = \gamma \Sigma (fu^2).$$

Stelt men $\gamma = 1$, en noemt men deze waarde van T $\mathfrak{Z}$, dan is:

$$\mathfrak{Z} = \Sigma (fu^2)$$

het traagheidsmoment der doorsnede ten opzichte van de neutrale as, indien zich op iederen vierkanten meter der doorsnede een massa van één kilogram bevindt.

Vergelijking (156) gaat daardoor over in:

$$\frac{S}{w} \mathfrak{Z} = Kx. \quad (157)$$

Indien op het stuk BN behalve de kracht K nog andere krachten in verticale richting werken, dan moet Kx vervangen worden door de som der momenten van al die krachten ten opzichte van de neutrale as der doorsnede. Stelt men deze som door $\mathfrak{M}$ voor, dan verkrijgt vergelijking (157) den meer algemeenen vorm:

$$\frac{S}{w} \mathfrak{Z} = \mathfrak{M} \quad \text{of} \quad S = \frac{w}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{M}. \quad (158)$$

In deze vergelijking beteekent S de spanning in een punt der doorsnede op den afstand w van de neutrale laag gelegen. Is w , zooals hier zal worden aangenomen, de afstand van die laag, welke het verst van de neutrale laag verwijderd is, dan is S tevens de grootste spanning, die in de geheele doorsnede voorkomt.

Uit vergelijking (158) kan men derhalve de grootste spanning in eenige doorsnede berekenen, zoodra de grootheden w , $\mathfrak{Z}$ en $\mathfrak{M}$ gegeven zijn.

§ 101. Traagheidsmomenten der doorsneden.

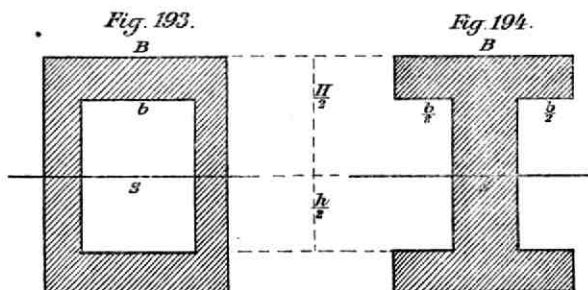
Om de traagheidsmomenten $\mathfrak{Z}$ der doorsneden te verkrijgen, behoeft men slechts in de in § 85 gevonden waarden van T den factor $\gamma = 1$ te stellen. Is de doorsnede een rechthoek, waarvan de hoogte h en de breedte b is, dan is het traagheidsmoment ten opzichte van een as door het zwaartepunt evenwijdig aan de lijn met de lengte b getrokken:

$$T = \frac{\gamma b h^2}{12} \quad \text{of} \quad \mathfrak{Z} = \frac{b h^2}{12}.$$

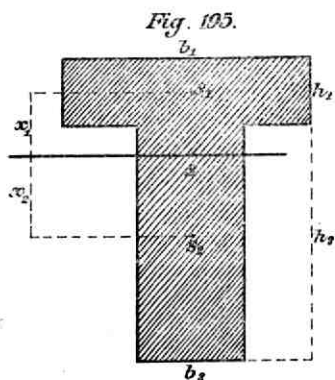
De in fig. 193 voorgestelde doorsnede kan beschouwd worden als het verschil van twee rechthoeken met hoogten H en h , en breedten B en b ; derhalve is:

$$\mathfrak{I} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}.$$

Dezelfde uitdrukking geldt ook voor de in fig. 194 voorgestelde doorsnede. Op soortgelijke wijze kunnen de traag-



heidsmomenten bepaald worden van andere doorsneden, die tot den grondvorm van den rechthoek kunnen worden teruggebracht, zoodra zij symmetrisch zijn ten opzichte van de door het zwaartepunt gaande horizontale as.



Bij niet symmetrische doorsneden moet eerst de ligging van het zwaartepunt worden bepaald. Voor de in fig. 195 voorgestelde doorsnede heeft men ter bepaling van de afstanden x_1 en x_2 , waarop de zwaartepunten S_1 en S_2 van S verwijderd zijn, de vergelijkingen:

$$b_1 h_1 x_1 = b_2 h_2 x_2 \quad \text{en} \quad x_1 + x_2 = \frac{h_1 + h_2}{2},$$

waaruit men vindt:

$$x_1 = \frac{b_2 h_2 (h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)} \quad x_2 = \frac{b_1 h_1 (h_1 + h_2)}{2(b_1 h_1 + b_2 h_2)}.$$

Voor de traagheidsmomenten $\mathfrak{I}_1$ en $\mathfrak{I}_2$ van de afzonderlijke rechthoeken ten opzichte van de horizontale door het zwaartepunt S der geheele doorsnede gaande as heeft men dan:

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 x_1^2 \quad \text{en} \quad \mathfrak{I}_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 x_2^2,$$

waarna het traagheidsmoment der geheele doorsnede bepaald kan worden uit de vergelijking:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2.$$

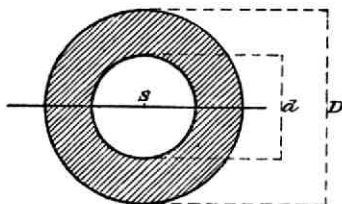
Het traagheidsmoment van een cirkelvormige doorsnede ten opzichte van haar middellijn is:

$$\mathfrak{I} = \frac{\pi R^4}{4}$$

of, als D de middellijn van den cirkel is:

Fig. 196.

$$\mathfrak{I} = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (159)$$



De in fig. 196 voorgestelde ringvormige doorsnede kan beschouwd worden als het verschil van twee cirkels met de middellijnen D en d . Haar traagheidsmoment is derhalve:

$$\mathfrak{I} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}.$$

§ 102. Berekening van de grootste spanning.

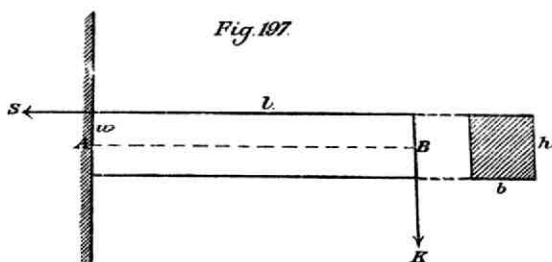
Uit vergelijking (157) blijkt dat de grootste in een doorsnede voorkomende spanning voor verschillende doorsneden een verschillende waarde heeft; de spanning S toch hangt of van het moment der kracht K ; zij is het grootst in die

doorsnede, welke het verst van het aangrijpingspunt der kracht K verwijderd is, dus in die, welke met de bevestigingsplaats samenvalt. Stelt men $x = l$, dan wordt:

$$\frac{S}{w} \mathfrak{T} = Kl, \quad (160)$$

waarin nu S de grootste in den geheelen balk voorkomende spanning beteekent.

Is de doorsnede van den balk een rechthoek (fig. 197),



dan is $w = \frac{h}{2}$ en $\mathfrak{T} = \frac{bh^3}{12}$. Stelt men deze waarden in bovenstaande vergelijking, dan verkrijgt men:

$$\frac{Sbh^2}{6} = Kl \quad \text{of} \quad S = \frac{6Kl}{bh^2}. \quad (161)$$

Is bijv. $K = 1250$ dyn. eenheden, $l = 0,8$, $b = 0,02$ en $h = 0,1$ meter, dan verkrijgt men voor de grootste spanning in den balk de waarde:

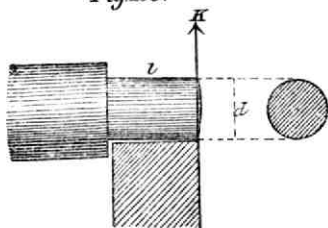
$$S = \frac{6 \cdot 1250 \cdot 0,8}{0,02 \cdot 0,1^2} = 3 \cdot 10^7 \text{ dyn. eenheden.}$$

Deze waarde moet steeds kleiner zijn dan de practisch geoorloofde spanning voor de stof waaruit de balk bestaat. Omgekeerd kan uit vergelijking (161) de grootste waarde bepaald worden die de kracht K kan hebben, zonder dat de practisch geoorloofde spanning wordt overschreden. Is bijv. als practisch geoorloofde spanning van smeedijzer gegeven $S = 6 \cdot 10^7$ dyn. eenheden, dan vindt men dat bij een

balk van bovengenoemde afmetingen de grootste waarde der kracht K 2500 dyn. eenheden is.

Zijn de kracht K en de grootte der geoorloofde spanning gegeven, dan kunnen uit vergelijking (160) de afmetingen berekend worden, die de doorsnede minstens hebben moet.

Fig. 198.



Heeft de balk een cirkelvormige doorsnede (fig. 198), dan is $w = \frac{d}{2}$, en volgens

vergelijking (159) $\mathfrak{Z} = \frac{\pi d^3}{64}$.

Men verkrijgt dus volgens vergelijking (160):

$$\frac{S \pi}{32} d^3 = Kl,$$

waaruit de middellijn d van den cilindervormigen balk kan worden berekend.

Stelt men bijv. $l = 1,5 d$, $K = 10000$ dyn. eenheden, en de in de practijk geoorloofde spanning voor gietijzer $3 \cdot 10^7$ dyn. eenheden, dan verkrijgt men:

$$d = \sqrt{\frac{48 \cdot K}{S \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 10000}{3 \cdot 10^7 \cdot 3,14}} = 0,0714 \text{ meters.}$$

Op deze wijze moet de middellijn van een tap berekend worden, indien men zekerheidshalve aanneemt, dat de weerstand van de tappan in het uiteinde van de tap aangrijpt, iets wat bij een minder zorgvuldige bewerking van de tappan kan voorkomen.

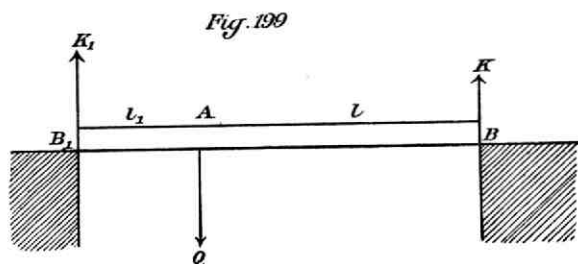
De grootste spanning in een balk, die aan de uiteinden ondersteund en in eenig punt A met een gewicht Q belast is (fig. 199), kan evenzoo uit vergelijking (160) berekend worden. Wordt toch het stuk AB_1 in een vasten wand besloten, en daarna de belasting Q weggenomen, dan bevindt het stuk AB zich in denzelfden toestand als de balk AB in fig. 197; slechts met dat onderscheid, dat nu de kracht K naar boven werkt. In vergelijking (160) beteekent voor dit geval K den weerstand van het eene steunpunt, en l den afstand van dit steunpunt tot het aangrijpings-

punt der belasting. Daar $K(l_1 + l) = Ql_1$ is, vindt men $K = \frac{Ql_1}{l+l_1}$, en dus:

$$\frac{S}{w} \mathfrak{Z} = \frac{Ql_1}{l+l_1}.$$

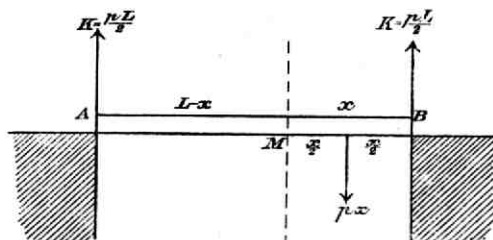
Daar $Kl = K_1 l_1$ is, komt men tot dezelfde vergelijking, als men de grootste spanning in het stuk AB_1 zoekt.

Is de belasting van een in zijn beide uiteinden ondersteun-



den balk gelijkmatig over zijn lengte L verdeeld, en is p de belasting van de lengte-eenheid, dan is $K = \frac{pL}{2}$ de weerstand van elk der beide steunpunten, en px de belasting van het stuk $BM = x$ (fig. 200). Stelt men zich voor

Fig. 200.



dat het deel AM in een vasten wand besloten is, dan kan het buiten dien wand uitstekende deel BM beschouwd worden als een balk, waarop twee krachten werken, namelijk

de naar boven werkende kracht K , en de naar beneden werkende kracht px , aangrijpende in het zwaartepunt van BM . De in de doorsnede M teweeggebrachte spanningen hangen af van het verschil der momenten dier twee krachten. In de algemeene vergelijking (158) heeft dus $\mathfrak{M}$ de waarde:

$$\mathfrak{M} = Kx - px \frac{x}{2} = \frac{pLx}{2} - \frac{px^2}{2}.$$

De grootste spanning in een doorsnede op den afstand x van een der beide uiteinden, vindt men dus uit de vergelijking:

$$\frac{S}{w} \mathfrak{T} = \frac{p}{2} x (L - x).$$

Het product van de twee stukken x en $L - x$ is het grootst als $x = L - x = \frac{L}{2}$ is. De grootste in den geheelen balk voorkomende spanning wordt dus in het midden van den balk gevonden, en kan bepaald worden uit de vergelijking:

$$\frac{S}{w} \mathfrak{T} = \frac{pL^2}{8}.$$

Het eigen gewicht van een prismatischen balk is een gelijkmatig over de lengte van den balk verdeelde belasting. Is γ de soortelijke massa van de stof waaruit de balk bestaat, dan is $g\gamma$ het gewicht van een cubieken meter; is F het aantal vierkante meters van de doorsnede, dan is het gewicht van een stuk van één meter lengte:

$$p = g\gamma F.$$

De grootste spanning door het eigen gewicht van den balk teweeggebracht, verkrijgt men dus uit de vergelijking:

$$\frac{S}{w} \mathfrak{T} = \frac{g\gamma FL^2}{8}.$$

Heeft de balk de gedaante van een parallelipedum met de hoogte h en de breedte b , dan neemt deze vergelijking den vorm aan:

$$\frac{Sbh^2}{6} = \frac{g\gamma bhL^2}{8}, \text{ of } L = \frac{4}{3g} \cdot \frac{S}{\gamma} \cdot \frac{h}{L}.$$

De lengte, waarbij de balk nog in staat is zijn eigen gewicht te dragen, wordt dus bepaald eensdeels door het quotient $\frac{S}{\gamma}$, dat afhangt van de stof waaruit de balk bestaat, anderdeels door het quotient $\frac{h}{L}$ van zijn hoogte en lengte.

Voor smeedijzer is $\gamma = 7700$; neemt men voor de geoorloofde spanning $S = 6 \cdot 10^7$, dan verkrijgt men als grootste lengte voor een balk, welks hoogte het honderdste deel der lengte is:

$$L = \frac{4}{3,9,81} \cdot \frac{6 \cdot 10^7}{7700} \cdot \frac{1}{100} = 15,9 \text{ meters.}$$

Heeft de balk een doorsnede van den in fig. 193 voorgestelden vorm, dan is $\mathfrak{Z} = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$, $w = \frac{H}{2}$, $F = BH - bh$. Zijn grootste lengte kan dan bepaald worden uit de vergelijking:

$$S \frac{BH^3 - bh^3}{6H} = g\gamma (BH - bh) \frac{L^2}{8},$$

of:

$$L = \frac{3g}{4} \cdot \frac{S}{\gamma} \cdot \frac{H}{L} \cdot \frac{1 - \frac{BH^3}{bh^3}}{1 - \frac{BH}{bh}}.$$

Stelt men bijv. $\frac{b}{B} = \frac{h}{H} = 0,9$ dan verkrijgt men:

$$L = \frac{4}{3g} \cdot \frac{S}{\gamma} \cdot \frac{H}{L} \cdot 1,81.$$

De holle balk mag derhalve onder overigens gelijke omstandigheden een 1,81 maal zoo groote lengte hebben als de massieve.

§ 103. Elastische lijn.

De kromme lijn AB (fig. 189), die de kromming van de neutrale laag aangeeft, wordt de *elastische lijn* genoemd. Het oneindig kleine stuk MN van deze lijn kan beschouwd

worden als een cirkelboog, welks middelpunt O het snijpunt is van de twee normalen CD en EF , en welks straal $\varrho = ON$ de *kromtestraal* in dat punt van de elastische lijn wordt genoemd. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken CGM en MNO volgt de evenredigheid:

$$\frac{CG}{MN} = \frac{MG}{ON}.$$

CG is de verlenging van MN in de laag waarin de spanning is S ; indien de verlenging MN bedroeg, en dit stuk dus tot de dubbele lengte werd uitgerekt, dan zou de spanning E bedragen. Daar nu de verlengingen evenredig zijn met de spanningen is $\frac{CG}{MN} = \frac{S}{E}$; stelt men weer $MG = w$ en $ON = \varrho$, dan is dus:

$$\frac{S}{E} = \frac{w}{\varrho} \quad \text{of} \quad \frac{S}{w} = \frac{E}{\varrho}.$$

Door substitutie van deze waarde van $\frac{S}{w}$ in de algemeene vergelijking (158) verkrijgt men:

$$\frac{E\mathfrak{L}}{\varrho} = \mathfrak{M}. \quad (162)$$

Uit deze vergelijking vindt men voor den kromtestraal van het oneindig kleine stuk MN der elastische lijn AB (fig. 201):

$$\varrho = \frac{E\mathfrak{L}}{\mathfrak{M}} = \frac{E\mathfrak{L}}{K(l-x)}.$$

In de vergelijking:

$$MN = \varrho \varphi \quad \text{of} \quad \varphi = \frac{MN}{\varrho}$$

mag wegens de veronderstelde geringe doorbuiging de boog MN vervangen worden door zijn horizontale projectie $MP = \Delta$; substitueert men daarin bovendien de voor ϱ gevonden waarde, dan wordt:

$$\varphi = \frac{K(l-x)\Delta}{E\mathfrak{L}}. \quad (163)$$

$$\text{of} \quad \omega = \frac{K}{E\xi} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right). \quad (165)$$

Stelt men in deze vergelijking $x = l$, dan verkrijgt men voor den hoek α , dien de elastische lijn aan haar uiteinde B met den horizon maakt:

$$\alpha = \frac{Kl^2}{2E\xi}.$$

In den oneindig kleinen rechthoekigen driehoek MNP is de verticale rechthoekszijde $PN = \epsilon = \Delta \operatorname{tg} \omega$, of daar wegens de veronderstelde geringe doorbuiging $\operatorname{tg} \omega$ door ω mag worden vervangen:

$$\epsilon = \omega \cdot \Delta.$$

Substitueert men hierin voor ω de in vergelijking (165) gevonden waarde, dan verkrijgt men:

$$\epsilon = \frac{K}{E\xi} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \Delta. \quad (166)$$

Verdeelt men wederom de horizontale projectie AQ van kromme AM in oneindig kleine deelen, dan kan men de bij elk deel behorende verticale projectie van het overeenkomstige stuk der kromme vinden, door in bovenstaande vergelijking de bijbehorende waarde van x te substitueeren; door sommatie van alle op deze wijze gevonden uitdrukkingen verkrijgt men:

$$\Sigma (\epsilon) = \frac{K}{E\xi} \left[l \Sigma (x \Delta) - \frac{1}{2} \Sigma (x^2 \Delta) \right]. \quad (167)$$

Het eerste lid dier vergelijking stelt de som der verticale projecties voor van alle stukken der kromme AM , en is dus gelijk y (fig. 202); verder is $\Sigma (x \Delta) = \frac{x^2}{2}$ en $\Sigma (x^2 \Delta) = \frac{x^3}{3}$; hieruit volgt:

$$y = \frac{K}{E\xi} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Voor $x = l$ wordt $y = e$; de doorbuiging e van het uiteinde B is dus:

$$e = \frac{Kl^3}{3E\xi}.$$

Indien de belasting gelijkmatig over den balk is verdeeld, dan moet in vergelijking (162) het moment $\mathfrak{M} = K(l-x)$ vervangen worden door het moment:

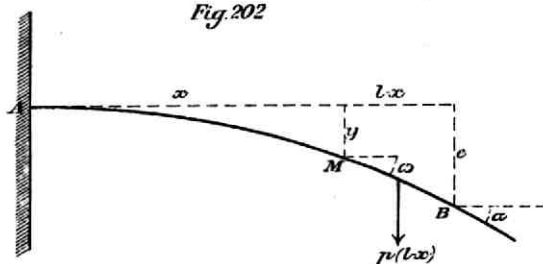
$$\mathfrak{M} = p(l-x) \frac{l-x}{2} = \frac{p}{2}(l^2 - 2lx + x^2).$$

In plaats van de vergelijkingen (163) en (164) verkrijgt men dan de twee volgende:

$$\varphi = \frac{p}{2E\xi} (l^2 - 2lx + x^2) \Delta \quad \text{en}$$

$$\omega = \frac{p}{2E\xi} [l^2 \Sigma(\Delta) - 2l \Sigma(x \Delta) + \Sigma(x^2 \Delta)].$$

Fig. 202



Voor de hoeken ω en α , vindt men hieruit:

$$\omega = \frac{p}{2E\xi} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) \quad \text{en} \quad \alpha = \frac{pl^3}{6E\xi}.$$

In plaats van de vergelijkingen (166) en (167), verkrijgt men in dat geval de twee volgende:

$$\epsilon = \frac{p}{2E\xi} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Delta \quad \text{en}$$

$$\Sigma(\epsilon) = y = \frac{p}{2E\xi} \left[l^2 \Sigma(x \Delta) - l \Sigma(x^2 \Delta) + \frac{1}{3} \Sigma(x^3 \Delta) \right],$$

welke voor de doorbuigingen y en S in de punten M en B de waarden geven:

$$y = \frac{p}{2E\xi} \left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$$

en

$$l = \frac{pl^4}{8E\xi}.$$

VIJFDE AFDEELING.

DYNAMICA DER ELASTISCHE LICHAMEN.

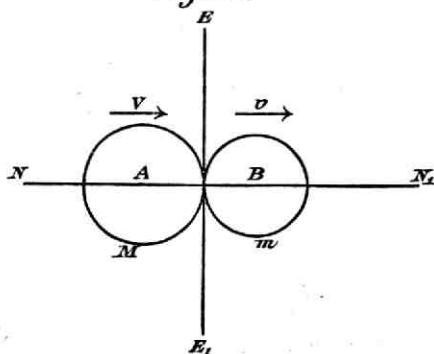
HOOFDSTUK XVII.

De theorie der botsing.

§ 104. Rechte centrale stoot.

Indien op het oogenblik dat twee lichamen tegen elkander botsen, de in het aanrakingspunt normaal op het raakvlak EE_1 staande lijn NN_1 door de beide zwaartepunten A en B gaat (fig. 203), dan noemt men den stoot een *centralen*.

Fig. 203.



in tegenstelling met den *excentrischen* stoot, bij welken genoemde normaal door geen, of slechts door een van beide zwaartepunten gaat. Bewegen de beide lichamen zich bovendien in de richting dier normaal, dan wordt de stoot tevens een *rechte* stoot genoemd, in tegenstelling met den *scheeven* stoot, bij welken geen, of

slechts een van beide bewegingsrichtingen normaal op het raakvlak is.

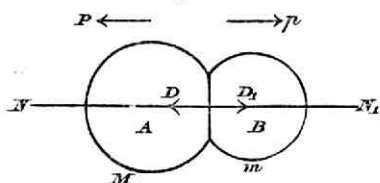
Vóór den stoot had elk der beide lichamen een rechtlijnige eenparige beweging; op het oogenblik echter, dat de voorste massa m met de snelheid v ingehaald wordt door de achterste

massa M met de grootere snelheid V , beginnen de twee lichamen op elkander in te werken; op de aanrakingsplaats ontstaan drukkkrachten, door welke de bewegingen der lichamen gewijzigd worden. Volgens de wet van werking en terugwerking is de op de massa m werkende druk D_1 even groot als de op de massa M werkende druk D , maar daaraan tegengesteld gericht. Op de massa m werkt de druk D_1 in de richting der beweging, en geeft aan die massa een versnelling; op de massa M werkt de druk D in de richting tegengesteld aan die der beweging, en geeft aan die massa een vertraging.

Volgens § 94 beweegt het zwaartepunt AB der massa m

zich evenzoo als een enkel stoffelijk punt zou doen, dat de massa m had en waarop de druk werkte. Indien derhalve op eenig oogenblik de druk de grootte D heeft verkregen (fig. 204), dan is de versnelling van het zwaartepunt B der massa m :

Fig. 204.



$$p = \frac{D_1}{m}.$$

Om dezelfde reden is op dat oogenblik de vertraging van het zwaartepunt A der massa M :

$$P = \frac{D}{M}.$$

Hoe ook de druk moge veranderen gedurende den tijd, dat de beide lichamen met elkander in aanraking blijven, het quotient der snelheidsveranderingen is voor elk tijdsverloop:

$$\frac{p}{P} = \frac{M}{m},$$

en de snelheidsveranderingen zijn dus omgekeerd evenredig met de massa's.

Noemt men c de snelheid, die het zwaartepunt B der

massa m op eenig tijdstip gedurende het verloop of aan het einde der botsing bereikt heeft, dan is $c - v$ de vermeerdering der snelheid die B tot op dit tijdstip heeft verkregen; en noemt men C de snelheid, die het zwaartepunt A der massa M op ditzelfde tijdstip heeft bereikt, dan is $V - C$ het bedrag waarmede de snelheid van A tot op hetzelfde tijdstip is verminderd. Het quotient dier snelheidsveranderingen is dus:

$$\frac{c - v}{V - C} = \frac{M}{m}. \quad (168)$$

Brengt men deze vergelijking onder den vorm:

$$mc + MC = mv + MV, \quad (169)$$

dan kan zij ook rechtstreeks uit de beweging van het gemeenschappelijk zwaartepunt worden afgeleid.

Volgens § 94 moet het gemeenschappelijk zwaartepunt van het door de twee lichamen gevormde stelsel zich evenzoo bewegen, alsof de geheele massa er in vereenigd was, en alle krachten er op aangrepen. De versnelling van het gemeenschappelijk zwaartepunt is in dit geval gelijk nul, omdat er geen uitwendige krachten zijn, en de inwendige krachten, waartoe ook de beide drukkkrachten D en D_1 behooren, twee aan twee even groot en onderling tegengesteld gericht zijn. Hieruit volgt dat de snelheid van dit zwaartepunt op het tijdstip, waarop vergelijking (168) betrekking heeft, nog even groot moet zijn als voor de botsing. Noemt men u de snelheid, waarmede het gemeenschappelijk zwaartepunt zich vóór den stoot bewoog, dan is dus volgens vergelijking (147) het product:

$$(m + M)u = mv + MV = mc + MC \quad (170)$$

een standvastige grootheid, welke gedurende de botsing niet verandert. Vergelijking (169) drukt dus uit, dat de snelheid van het gemeenschappelijk zwaartepunt door de botsing geen verandering ondergaat.

Om de snelheidsveranderingen van de zwaartepunten A en B der massa's M en m te bepalen, kan men opmerken dat de snelheden V en v , zooals uit vergelijking (170) blijkt, gelijktijdig tot u , de snelheid van het gemeenschappelijk

zwaartepunt, naderen. Op het oogenblik dat beide gelijk u zijn, is hun gemeenschappelijke snelheid dus:

$$u = \frac{MV + mv}{M + m} \quad (171)$$

De snelheid van het zwaartepunt A is derhalve verminderd met:

$$V - u = \frac{m}{M + m} (V - v), \quad (172)$$

en de snelheid van het zwaartepunt B is vermeerderd met:

$$u - v = \frac{M}{M + m} (V - v). \quad (173)$$

Indien men derhalve den geheelen duur van den stoot in twee deelen t_1 en t_2 verdeelt, en het eerste deel t_1 rekent tot op het oogenblik, waarop de snelheden der zwaartepunten A en B aan elkander gelijk worden, dan kan de snelheidsverandering van elk der beide zwaartepunten gedurende dit tijddeel steeds bepaald worden. De snelheidsveranderingen gedurende het tweede tijddeel t_2 daarentegen hangen af van de intensiteit van den stoot en van de physische eigenschappen der beide lichamen; in het algemeen kunnen zij slechts bij benadering worden bepaald.

Noemt men de eindsnelheden aan het einde van het tijddeel t_2 , dus aan het einde van de botsing, C en c , dan is $u - C$ de snelheidsvermindering van het zwaartepunt A , en $c - u$ de snelheidsvermeerdering van het zwaartepunt B , beide gedurende het tijddeel t_2 . De uit vergelijking (168) voortvloeiende stelling »de snelheidsveranderingen zijn omgekeerd evenredig met de massa's'', geldt ook voor elk der beide tijddeelen t_1 en t_2 afzonderlijk; derhalve is:

$$\frac{u - C}{c - u} = \frac{m}{M} = \frac{V - u}{u - v}. \quad (174)$$

Uit de gelijkheid van het eerste en het derde quotient volgt de vergelijking:

$$\frac{u - C}{V - u} = \frac{c - u}{u - v} = \epsilon, \quad (175)$$

waarin ϵ , de zoogenaamde *restitutie-coëfficiënt*, de nog on-

bekende getalwaarde beteekent, welke de verhouding aangeeft van de in de tijddeelen t_2 en t_1 teweeggebrachte snelheidsveranderingen. Voor de in het tijddeel t_2 teweeggebrachte snelheidsveranderingen verkrijgt men derhalve:

$$u - C = \varepsilon (V - u) \quad (176) \quad c - u = \varepsilon (u - v) \quad (177)$$

Telt men deze op bij de gedurende het tijddeel t_1 teweeggebrachte, in de vergelijkingen (172) en (173) gevonden snelheidsveranderingen, dan vindt men voor de geheele door den stoot teweeggebrachte snelheidsveranderingen:

$$V - C = (1 + \varepsilon) \frac{m}{M + m} (V - v), \quad (178)$$

$$c - v = (1 + \varepsilon) \frac{M}{M + m} (V - v), \quad (179)$$

waaruit de eindsnelheden C en c berekend kunnen worden, zoodra de coëfficiënt ε bekend is.

§ 105. Bepaling van den restitutiecoëfficiënt ε .

Gedurende het eerste tijddeel t_1 komen de zwaartepunten A en B dicht bij elkander, en beide lichamen worden op de aanrakingsplaats samengedrukt. Deze samendrukking roept inwendige krachten te voorschijn, welke volgens bepaalde wetten samenhangen met de grootte der samendrukking. De krachten D en D_1 in de aanrakingsplaats te voorschijn geroepen, doorloopen gedurende het voortschrijden van de samendrukking een reeks verschillende waarden. De kracht D werkt op het lichaam met de massa M als uitwendige kracht en verricht negatieven arbeid; de getalwaarde van dien arbeid is gelijk aan die van het arbeidsvermogen van beweging door de massa M verloren. Evenzoo is de getalwaarde van den positieven arbeid door de kracht D_1 verricht, gelijk aan die van het arbeidsvermogen van beweging door de massa m gewonnen.

Veerkrachtige stoot.

Het einde van het tijddeel t_1 , of het tijdstip waarop de twee zwaartepunten het dichtst tot elkander genaderd zijn,

is tevens het oogenblik waarop de samendrukking het grootst is; na dit tijdstip zetten zich beide lichamen gedurende het tijddeel t_2 weder uit. Indien men aanneemt, dat beide lichamen hierbij volkomen hun vorige gedaante terugkrijgen, dan moeten de krachten D en D_1 achtereenvolgens juist dezelfde waarden, maar in omgekeerde volgorde doorloopen, en dus een even grooten arbeid verrichten als in het tijddeel t_1 . Ook het arbeidsvermogen van beweging, hetwelk de massa M verliest, en dat, hetwelk de massa m wint, moeten derhalve in het tijddeel t_2 even groot zijn als de overeenkomstige grootheden in het tijddeel t_1 . De snelheid van het zwaartepunt A , die in het tijddeel t_1 met $V - u$ afnam, zal dus in het tijddeel t_2 nog eens met $V - u$ verminderen; en de snelheid van het zwaartepunt B , die in het tijddeel t_1 met $u - v$ toenam, zal in het tijddeel t_2 nog eens met $u - v$ vermeerderen. Volgens vergelijking (175) is in dit geval de coëfficiënt ϵ gelijk 1, en de algemeene vergelijkingen (178) en (179) gaan dan over in:

$$V - C = \frac{2m}{M + m} (V - v) \quad (180) \quad c - v = \frac{2M}{M + m} (V - v) \quad (181)$$

In dit geval noemt men den stoot een volkomen *veerkrachtigen stoot*.

Onveerkrachtige stoot.

Indien de lichamen, na hun grootste samendrukking te hebben ondergaan, niet meer van vorm veranderen, dan zullen zij geen druk meer op elkander uitoefenen; zij zullen nu verder een eenparige beweging hebben met de gemeenschappelijke snelheid u . In dit geval is de coëfficiënt ϵ gelijk nul, en de algemeene vergelijkingen (178) en (179) gaan over in:

$$V - C = \frac{m}{M + m} (V - v) \quad (182) \quad c - v = \frac{M}{M + m} (V - v) \quad (183)$$

Men noemt dan den stoot een volkomen *onveerkrachtigen stoot*.

Uit het voorgaande blijkt, dat de waarde van den coëfficiënt ϵ verandert tusschen de grenzen nul en één; de ervaring leert

dat hij des te meer tot nul nadert, hoe grooter het verschil in snelheid $V - v$, en hoe kleiner de elasticiteitsgrens der lichamen is; dat hij daarentegen des te meer tot één nadert, hoe kleiner het verschil in snelheid $V - v$, en hoe grooter de elasticiteitsgrens der lichamen is. Bij de bepaling van den coëfficiënt ϵ komt derhalve niet alleen de physische hoedanigheid van elk der lichamen, maar ook de grootte van het verschil in snelheid $V - v$ in aanmerking. Ook bij lichamen met groote elasticiteitsgrens kan ϵ tot nul naderen, indien slechts het verschil in snelheid $V - v$ zeer groot is; en ook bij lichamen met kleine elasticiteitsgrens kan ϵ tot één naderen, indien slechts het verschil $V - v$ een zeer geringe grootte heeft.

Bij de botsing verliezen in het algemeen de lichamen arbeidsvermogen van beweging, zonder dat hun arbeidsvermogen van plaats toeneemt; ook hierbij gaat, evenals bij tegen elkander wrijvende lichamen, het verloren arbeidsvermogen van beweging in een anderen vorm, hoofdzakelijk in warmte over.

Men bepaalt dit verlies $\mathfrak{B}$ door het arbeidsvermogen van beweging $\frac{MC^2}{2} + \frac{mc^2}{2}$, dat de twee massa's gezamenlijk na den stoot bezitten, af te trekken van het arbeidsvermogen van beweging $\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$, dat zij vóór den stoot hadden. Men heeft dus:

$$\mathfrak{B} = \left(\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \right) - \left(\frac{MC^2}{2} + \frac{mc^2}{2} \right),$$

of als men de uit de vergelijkingen (178) en (179) voortvloeiende waarden voor C en c substitueert:

$$\mathfrak{B} = \frac{(1 - \epsilon^2) Mm(V - v)^2}{2(M + m)}.$$

Uit deze vergelijking blijkt dat het verlies bij den volkomen veerkrachtigen stoot nul is, omdat in dit geval $\epsilon = 1$ wordt. Bij den volkomen onveerkrachtigen stoot daarentegen is $\epsilon = 0$, en het door den stoot veroorzaakte verlies aan arbeidsvermogen van beweging is dus:

$$\mathfrak{B} = \frac{Mm}{M + m} \cdot \frac{(V - v)^2}{2}. \quad (180)$$

§ 106. Onveerkrachtige stoot.

De in de twee vorige paragrafen gevonden vergelijkingen gelden ook voor het geval dat de snelheid van de massa m nul of negatief is, d. w. z. dat de massa m in rust is of zich beweegt in de richting naar de massa M toe.

Indien een massa M met de snelheid V botst tegen een in rust zijnde massa m , en de omstandigheden van dien aard zijn, dat de vergelijkingen voor den onveerkrachtigen stoot mogen toegepast worden, dan verkrijgt men volgens vergelijking (171) voor de snelheid u , waarmede beide lichamen zich na den stoot verder bewegen:

$$u = \frac{MV}{M + m}.$$

Het door den stoot veroorzaakte verlies aan arbeidsvermogen van beweging heeft volgens vergelijking (180) de grootte:

$$\mathfrak{B} = \frac{MV^2}{2} \cdot \frac{m}{M + m}. \quad (181)$$

Vóór den stoot was het arbeidsvermogen van beweging $\frac{MV^2}{2}$. Dit arbeidsvermogen wordt als het ware in twee deelen verdeeld; het eene deel $\mathfrak{B}$ wordt besteed deels tot blijvende vormveranderingen, deels tot het opwekken van geluids- en warmtetrillingen. Het andere deel $(M + m) \frac{u^2}{2}$ heeft de grootte:

$$\mathfrak{R} = \frac{MV^2}{2} \cdot \frac{M}{M + m}, \quad (182)$$

en is het nog overgebleven arbeidsvermogen van beweging, dat de massa's M en m na den stoot, tengevolge van hun snelheid hebben.

Indien onmiddellijk na den stoot de verdere voortschrijdende beweging der massa's wordt belemmerd, indien er bijv. een weerstand W (fig. 205) op gaat werken, dan verricht de weerstand W negatieven arbeid, waarbij ook het overgebleven arbeidsvermogen van beweging $\mathfrak{R}$ verloren gaat. De weg s , dien de beide lichamen in de richting

teggengesteld aan die van den weerstand W afleggen, voor dat hun snelheid nul is geworden, kan volgens de wet van het behoud van arbeidsvermogen gevonden worden uit de vergelijking:

$$\frac{M V^2}{2} \cdot \frac{M}{M+m} = Ws. \quad (183)$$

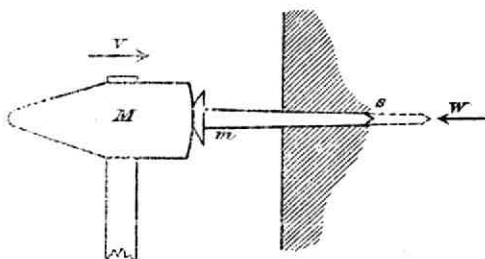
Van het oorspronkelijk voorhanden arbeidsvermogen van beweging $\frac{M V^2}{2}$ zal een des te grooter gedeelte voor dit doel be-

schikbaar blijven, naarmate het quotient $\frac{M}{M+m} = \frac{1}{1+\frac{m}{M}}$

grooter is.

In alle gevallen dus, waar men het na den stoot over-

Fig. 205.



tot het overwin-
nen van nuttigen
weerstand — zoo-
als bijv. bij het
inheien van palen,
bij het indrijven
van een wig, van
een spijkerenz.—
is het voordeel
de verhouding van
 m , de in rust
zijnde, tot M , de

voortdrijvende massa zoo klein mogelijk te maken.

Voert men in plaats van de dynamische eenheden van arbeidsvermogen en van kracht de statische in, dan veranderen de vergelijkingen (181), (182) en (183) in:

$$\mathfrak{B} = \frac{M V^2}{2g} \cdot \frac{m}{M+m} \text{ stat. eenheden.}$$

$$\mathfrak{K} = \frac{M V^2}{2g} \cdot \frac{M}{M+m} \text{ stat. eenheden.}$$

$$\frac{M V^2}{2g} \cdot \frac{M}{M+m} = Ws.$$

Noemt men H de met de snelheid V overeenkomende valhoogte, dan verkrijgt men:

$$\mathfrak{B} = MH \frac{m}{M+m} \quad \text{en} \quad \mathfrak{N} = MH \frac{M}{M+m} = Ws.$$

Uit deze laatste vergelijking kan men den weerstand W in statische krachtseenheden vinden, die over een bepaalden weg s wordt overwonnen, zoodra deze laatste bekend is. Wanneer bijv. een hamer met een massa $M = 1,5$ kilogram en met de snelheid $V = 5,6$ eenheden botst tegen een spijker met een massa van $0,1$ kilogram, dan verdeelt zich het voor den stoot aanwezige arbeidsvermogen van beweging:

$$\frac{MV^2}{2g} = MH = 1,5 \cdot \frac{5,6^2}{2 \cdot 9,8} = 2,4 \text{ stat. eenheden}$$

in de twee deelen:

$$\mathfrak{B} = 2,4 \cdot \frac{0,1}{1,5 + 0,1} = 0,15 \text{ stat. eenheden en}$$

$$\mathfrak{N} = 2,4 \cdot \frac{1,5}{1,5 + 0,1} = 2,25 \text{ stat. eenheden.}$$

Het eerste deel, een arbeidsvermogen van $0,15$ stat. eenheden, wordt verbruikt tot het vervormen van den kop des spijkers en tot het voortbrengen van geluids- en warmte-trillingen; de rest van $2,25$ stat. eenheden dient tot het overwinnen van den weerstand W , die het indringen van den spijker tegenwerkt. Had men waargenomen, dat de diepte waartoe de spijker indringt $s = 0,005$ meter bedraagt, dan vindt men de gemiddelde grootte van den weerstand uit de vergelijking:

$$W \cdot 0,005 = 2,25 \text{ of } W = 450 \text{ stat. krachtseenheden.}$$

Was de massa van den spijker $0,5$ kilogram geweest, dan zou het verlies aan arbeidsvermogen $\mathfrak{B} = \frac{1}{4} \cdot 2,4 = 0,6$ eenheden, en het nuttig gebruikte slechts $1,8$ eenheden bedragen hebben.

Heeft de stoot plaats in de richting van de zwaartekracht, zooals bijv. bij het inheien van een paal (fig. 206), dan wordt ook de na den stoot door het gewicht verrichte arbeid $(M+m)s$ tot het overwinnen van den weerstand W

gebruikt, en deze weerstand kan dan gevonden worden uit de vergelijking:

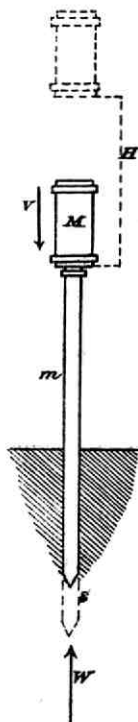
$$MH \cdot \frac{M}{M+m} + (M+m)s = Ws.$$

Stelt men bijv. $M = 1200$ kil., $m = 800$ kil., $V = 7$ eenh. (dus $H = \frac{7^2}{2 \cdot 9,8} = 2,5$ meter) en $s = 0,045$ meter, dan heeft men:

$$1200 \cdot 2,5 \cdot \frac{1200}{2000} + 2000 \cdot 0,045 = W \cdot 0,045 \text{ of}$$

$$W = 42000 \text{ stat. krachtseenheden.}$$

Fig 206.



In de veronderstelling dat de stoot volkomen onveerkrachtig is, zou van het arbeidsvermogen van beweging $MH = 3000$ stat. eenheden, dat voor den stoot voorhanden was, het vier tiende gedeelte of 1200 eenheden tot het vervormen van het boveneinde der paal, en de rest, 1800 eenheden, tot het inheien van de paal gebruikt worden.

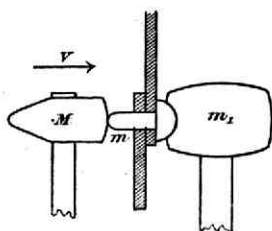
Terwijl in de beide vorige gevallen van het geheele arbeidsvermogen van beweging slechts het deel $\mathfrak{A}$ nuttig werd aangewend, en het voor de voortschrijdende beweging verloren gaande deel $\mathfrak{B}$ een nadeelige werking uitoefende, zijn er andere gevallen, waarbij omgekeerd juist het bij den stoot verloren gaande arbeidsvermogen van beweging nuttig wordt gebruikt, en de overblijvende rest $\mathfrak{C}$ een schadelijke werking heeft. In al die gevallen, waar men zich ten doel stelt door de werking van den stoot aan het in rust zijnde lichaam een blijvende vormverandering mede te deelen,

is het voordeelig de verhouding $\frac{m}{M}$ van de in rust zijnde tot de bewegende massa zoo groot mogelijk te maken.

Indien men bijv. door hamerslagen het uitstekende einde

van een klinkbout (fig. 207) wil vastklinken, dan wordt van het arbeidsvermogen van beweging van den hamer voor de vormverandering van den bout slechts dat gedeelte $\mathfrak{B}$ gebruikt, dat bij den stoot verloren gaat, terwijl de over-

Fig. 207.

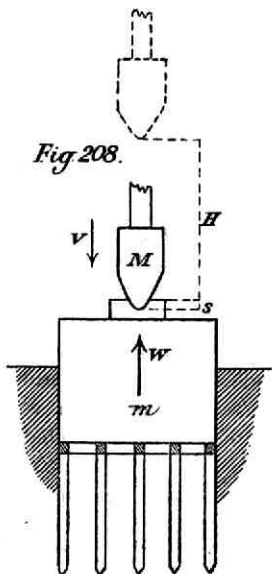


gebruikte deel van het arbeidsvermogen een grooter waarde.

blijvende rest $\mathfrak{R}$ een in dit geval volstrekt niet beoogde gemeenschappelijke beweging der beide massa's na den stoot teweegbrengt, en derhalve niets bijdraagt tot het overwinnen van nuttigen weerstand. Brengt men in dit geval een andere massa m_1 met de massa m in aanraking, dan heeft de in rust zijnde massa de grootte $m + m_1$, en daardoor verkrijgt $\mathfrak{B}$, en dus het nuttig

Op gelijke wijze vindt men, dat bij den stoot van een stoomhamer tegen een op het aambeeld liggend gloeiend stuk ijzer, dat gedeelte van het arbeidsvermogen van beweging van den hamer, dat tot vormverandering van het ijzer wordt gebruikt, des te grooter wordt, naarmate de massa van het aambeeld grooter is in verhouding tot de massa van den hamer (fig. 208). Is bijv. de massa van den hamer $M = 8000$ kil. en zijn snelheid $V = 7$ eenh. (overeenkomende met de valhoogte $H = 2,5$ meter), dan is vóór den stoot het arbeidsvermogen van beweging van den hamer

Fig. 208.



$$\frac{MV^2}{2g} = MH = 8000 \cdot 2,5 = 20000 \text{ stat. eenheden.}$$

Is verder de massa van het aambeeld met het daarop liggend

stuk ijzer $m = 56000$ kilogram, dan wordt van het geheele arbeidsvermogen van beweging het deel:

$$\mathfrak{B} = 20000 \cdot \frac{56000}{64000} = 17500 \text{ stat. eenheden}$$

tot het vervormen van het gloeiend ijzer, dus nuttig aangewend, terwijl de rest:

$$\mathfrak{N} = 20000 \cdot \frac{8000}{64000} = 2500 \text{ stat. eenheden}$$

tot het inheien van het aambeeld, tot het doen schudden van de fondamenten van het gebouw enz., dus op nadeelige wijze wordt gebruikt.

§ 107. Veerkrachtige stoot.

Hoe kleiner het verschil in snelheid der beide lichamen vóór den stoot is, des te meer is het geoorloofd de uit de vergelijkingen (180) en (181) voortvloeiende waarden:

$$C = V - \frac{2m(V-v)}{M+m} \quad \text{en} \quad c = v + \frac{2M(V-v)}{M+m}$$

als werkelijke grootten der snelheden na den stoot te beschouwen, vooral indien voor beide lichamen de elasticiteitsgrens groot is, zooals bijv. voor caoutchouc, ivoor, gehard staal, enz.

Is $M = m$, dan wordt $C = v$ en $c = V$, d. i. in dit geval verwisselen de beide lichamen van snelheid, in dier voege, dat na den stoot elk der beide lichamen de snelheid heeft, die het andere vóór den stoot had. Is bovendien v negatief, d. i. bewegen de beide lichamen zich naar elkander toe, dan beweegt zich na den stoot elk der beide lichamen in de richting tegengesteld aan die, waarin het zich vóór den stoot bewoog, en met de snelheid die het andere lichaam vóór den stoot had.

In het bijzondere geval dat $v = 0$ is, gaan bovenstaande vergelijkingen, als men korthedshalve $\frac{M}{m} = n$ stelt, over in:

$$C_1 = \frac{n-1}{n+1} V \quad \text{en} \quad c_1 = \frac{2n}{n+1} V.$$

Indien het in rust zijnd lichaam met de massa $m = \frac{M}{n}$ onmiddellijk na den stoot met de daardoor verkregen snelheid c_1 op zijn beurt botst tegen een in rust zijnd lichaam, welks massa in dezelfde verhouding tot de zijne staat en dus de grootte $\frac{m}{n}$ heeft, dan zal dit derde lichaam na den stoot de snelheid:

$$c_2 = \frac{2n}{n+1} c_1 = \left(\frac{2n}{n+1} \right)^2 V$$

hebben. Indien op gelijke wijze het derde lichaam tegen een vierde, het vierde tegen een vijfde botst enz. en de verhouding der achtereenvolgende massa's steeds $\frac{1}{n}$ blijft, dan zal na den p^{den} stoot, het laatste lichaam de snelheid verkrijgen:

$$c_p = \left(\frac{2n}{n+1} \right)^p V.$$

Voor $n = 1$, wordt $C_1 = 0$ en $c_p = V$; d. i. indien een veerkrachtige bal met de snelheid V botst tegen het eene uiteinde van een rij ballen, welke alle dezelfde massa hebben als de eerstgenoemde, dan zal de bal aan het andere uiteinde de snelheid V verkrijgen, terwijl de overige ballen alle in rust blijven.

Is $n = 0$, dan wordt $C_1 = -V$ en $c_1 = 0$, d. i. indien een veerkrachtige bal botst tegen een oneindig groote in rust zijnde massa of tegen een vaste wand, dan zal de bal na den stoot een snelheid hebben even groot als zijn aanvankelijke snelheid maar in tegengestelde richting, terwijl de in rust zijnde massa in rust blijft.

§ 108. Botsing van rondwentelende lichamen.

Ballistische slinger.

Twee lichamen P en Q met de massa's M en m draaien om twee onderling evenwijdige vaste assen en botsen tegen elkander. Er wordt aangenomen, dat de stoot een rechte

is, d. i. op het oogenblik der botsing bewegen zich de beide stootpunten in de richting loodrecht op het raakvlak (fig. 209).

Op de aanrakingsplaats zullen drukkrachten D en D_1 ontstaan, die even groot zijn, maar in onderling tegengestelde richtingen werken. De hoekvertraging van P is

$$H = \frac{DA}{T}, \text{ de hoekversnelling van}$$

Q is $h = \frac{Da}{t}$, waarin A en a de afstanden zijn van het stootpunt tot de draaiingsassen, en T en t de traagheidsmomenten van P en Q ten opzichte van de draaiingsassen.

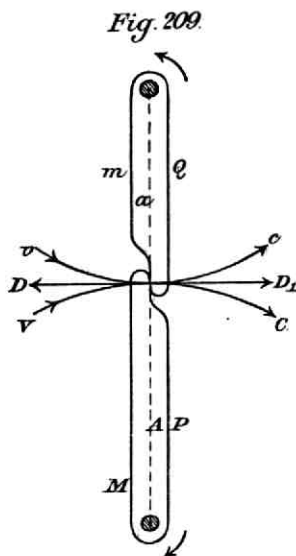
Noemt men $\mathfrak{M}$ en m de op het stootpunt gereduceerde massa's van P en Q , dan is $\mathfrak{M} = \frac{T}{A^2}$

en $m = \frac{t}{a^2}$. Substitueert men de hieruit voortvloeiende waarden van T en t in de uitdrukkingen voor H en h , dan vindt men:

$$AH = \frac{D}{\mathfrak{M}} \quad \text{en} \quad ah = \frac{D}{m}.$$

AH is de lijnvertraging van het stootpunt van P , ah de lijnversnelling van het stootpunt van Q ; de snelheidsveranderingen van de stootpunten zijn dus omgekeerd evenredig met de op die punten gereduceerde massa's van P en Q . Vergelijkt men deze uitkomst met vergelijking (168), dan blijkt het, dat die vergelijking ook in dit geval geldt, mits men onder V , v , C en c verstaat de snelheden der stootpunten, en M en m , de massa's der lichamen, vervangt door $\mathfrak{M}$ en m de op de stootpunten gereduceerde massa's van P en Q . Onder dit voorbehoud gelden dus alle uit vergelijking (168) voor bijzondere gevallen afgeleide vergelijkingen ook voor de botsing van ronddraaiende lichamen.

Zoo zou bijv. in de veronderstelling dat de stoot ongeveer



krachtig is, volgens vergelijking (181) het verlies aan arbeidsvermogen van beweging bij den stoot van een duimas tegen een fronthamer, zijn:

$$\mathfrak{B} = \frac{M V^2}{2} \cdot \frac{m}{M + m},$$

als M de op het stootpunt gereduceerde massa van de duimas en m de op het stootpunt gereduceerde massa van den hamer is. De uit vergelijking (181) gemaakte gevolgtrekking, dat het verlies aan arbeidsvermogen van beweging des te kleiner wordt hoe grooter de verhouding is van de bewegende tot de in rust zijnde massa, geldt derhalve ook in dit geval; hieruit wordt het duidelijk, waarom het voordeelig is het traagheidsmoment van de duimas door toevoeging van een vlieg wiel te vergrooten.

De algemeene vergelijkingen kunnen evenzeer worden aangewend, indien slechts een der beide lichamen, bijv. Q om een vaste as draait; de vergelijkingen worden dan:

$$V - C = \frac{(1 + \epsilon) m (V - v)}{M + m}$$

$$c - v = \frac{(1 + \epsilon) M (V - v)}{M + m}.$$

Stelt men hierin $v = 0$ en is de stoot onveerkrachtig, waardoor ook $\epsilon = 0$ wordt, dan verkrijgt men:

$$C = c = \frac{M V}{M + m}. \quad (184)$$

Uit deze vergelijking kan men de beweging berekenen. die een in rust hangende slinger Q met de massa m volbrengt, wanneer hij door den stoot van een lichaam P met de massa M uit zijn evenwichtsstand wordt gebracht (fig. 210). De snelheid c is de aanvangssnelheid, waarmede het stootpunt N zijn beweging langs den boog NN_1 begint, en het arbeidsvermogen van beweging van den slinger heeft dus bij het begin der beweging de grootte $\frac{m c^2}{2}$. Is α de

hoek, dien de slinger doorloopt voordat de snelheid nul wordt, en r de afstand van het zwaartepunt S tot de draaiingsas,

dan is volgens de wet van het behoud van arbeidsvermogen:

$$\frac{m c^2}{2} = mgr (1 - \cos \alpha)$$

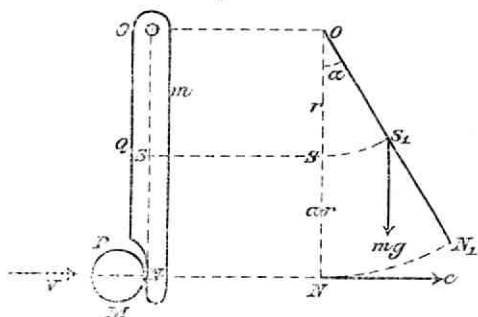
of
$$c = \sqrt{2 \frac{m}{m} gr (1 - \cos \alpha)}.$$

Substitueert men deze waarde van c in vergelijking (184) en lost men daarna V op, dan verkrijgt men:

$$V = \frac{M+m}{M} \sqrt{2 \frac{m}{m} gr (1 - \cos \alpha)}. \quad (185)$$

Van deze vergelijking kan men gebruik maken om de

Fig. 210.



snelheid V van een kanonskogel te berekenen, als men den elongatiehoek heeft waargenomen, door den stoot van den kogel tegen den slinger teweeggebracht.

Een slinger tot dat doel ingericht heet een ballistische slinger.

De op het stootpunt gereduceerde massa m kan eveneens door waarneming worden bepaald. Laat men den slinger kleine slingeringen volbrengen, en meet men den slingertijd τ , dan is vooreerst de lengte van den enkelvoudigen slinger, die denzelfden slingertijd heeft $l = \frac{g \tau^2}{\pi^2}$. Vervangt men

verder in vergelijking (140) $l = \frac{T_o}{m r}$ het traagheidsmoment

van den slinger ten opzichte van de ophangas door zijn waarde $T_o = m a^2$, en lost men m op, dan vindt men $m = \frac{m r l}{a^2}$. Door substitutie van deze waarde van m in vergelijking (185) verkrijgt men:

$$V = \left(\frac{a}{l} + \frac{m}{M} \cdot \frac{r}{a} \right) \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Vindt men bijv. $\tau = 1,57$ seconden, dan is $l = 2,45$ meters ; is verder $r = 2$ m., $a = l = 2,45$ m. (dus $\frac{m}{m} = 1,225$), $\frac{m}{M} = 400$ en $\alpha = 20^\circ$, dan verkrijgt men voor de snelheid van den kanonskogel $V = 557,67$ eenheden.

§ 109. Ontploffingen.

De snelheid u van het gemeenschappelijk zwaartepunt der beide lichamen wordt door den stoot niet veranderd. Is dus vóór den stoot die snelheid nul, dan zal zij ook na den stoot nog nul zijn. Volgens vergelijking (174) heeft men in dit geval:

$$\frac{-C}{c} = \frac{m}{M} = \frac{V}{-v}. \quad (186)$$

d. i. zoowel vóór als na den stoot hebben de snelheden onderling tegengestelde richtingen, en zijn zij omgekeerd evenredig met de massa's.

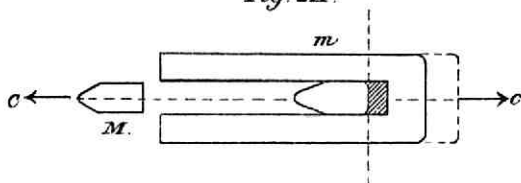
Deze vergelijking geldt ook dan nog, als de snelheden V en v beide nul zijn en de snelheden C en c door een ontploffing worden teweeggebracht. Is in dit geval een van beide snelheden bekend, dan kan de andere uit bovenstaande vergelijking berekend worden.

Zoo kan bijv. bij het afvuren van een kanon (fig. 241) de snelheid c , waarmede het kanon terugloopt, berekend worden, als men de snelheid C van den kogel en de verhouding $\frac{M}{m}$ der twee massa's kent.

Is bijv. $C = 400$ eenheden en $m = 200 M$, dan is $c = \frac{400}{200} = 2$ eenheden. De hoeveelheden arbeidsvermogen van beweging van kogel en kanon $\frac{MC^2}{2}$ en $\frac{mc^2}{2}$ verhouden zich als $200 : 1$. Van het geheele door de ontploffing

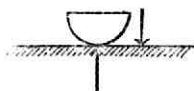
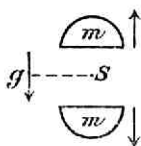
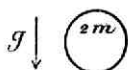
voortgebrachte arbeidsvermogen van beweging gaat dus $\frac{1}{201}$ op het kanon, en $\frac{200}{201}$ op den kogel over.

Fig. 211.



De krachten, die bij de ontploffing een scheiding van de deelen van het lichaam teweegbrengen, moeten als inwendige krachten beschouwd worden. Werken er bovendien nog uitwendige krachten, dan zullen deze in het algemeen de snelheid van het zwaartepunt wijzigen; de ontploffing zelve heeft op die snelheid geen invloed.

Fig. 212.



Indien bijv. een verticaal naar beneden vallende bom in twee helften springt, in dier voege dat de bovenste helft naar boven, en de onderste helft naar beneden wordt geslingerd (fig. 212), dan zou het zwaartepunt zijn beweging met de versnelling g voortzetten; en eerst op het oogenblik dat de onderste helft tegen den grond stoot, dat derhalve een nieuwe kracht, de weerstand van den vasten bodem, optreedt, ondergaat de versnelling een verandering. In de veronderstelling dat de bodem onveerkrachtig is, gaat de versnelling van het zwaartepunt sprongs- wijze van

$$\frac{2mg}{2m} = g \text{ in } \frac{mg}{2m} = \frac{1}{2}g \text{ over.}$$

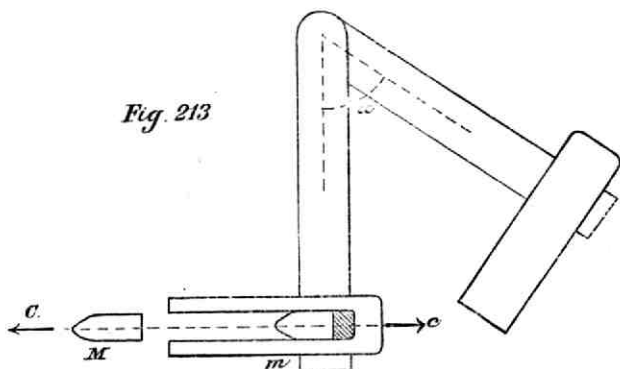
Hetzelfde geldt voor de beweging van het zwaartepunt, indien de bom een parabolische baan doorloopt, en gedurende

zijn beweging in een aantal stukken springt. Door de ontploffing zelve verandert de baan van het zwaartepunt niet. Op het oogenblik echter, dat het eerste stuk tegen den vasten bodem stoot, gaat het zwaartepunt uit de oorspronkelijke in een nieuwe parabolische baan over, en telkens bij het neervallen van een stuk ontstaat in de baan een hoek.

Bij een aan een vaste draaiingsas opgehangen slinger is de versnelling van het stootpunt dezelfde als die van een stoffelijk punt, welks massa gelijk is aan de op het stootpunt gereduceerde massa van den slinger. Vergelijking (186) kan derhalve ook gebruikt worden ingeval het ontploffende lichaam bestaat uit een aan een vaste draaiingsas opgehangen stelsel van twee massa's M en m , indien men in die vergelijking de massa m , welke na de ontploffing nog als slinger met de draaiingsas vereenigd blijft, door de op het stootpunt gereduceerde massa m vervangt. De snelheid C , die de massa M bij de ontploffing verkrijgt, is dan :

$$C = \frac{m}{M} c.$$

Dit geeft een tweede middel aan de hand om de snelheid van een kanonskogel door den ballistischen slinger te meten. Men kan namelijk het kanon zelf als slinger ophangen, en door meting van de bij het afvuren teweeg-



gebrachte afwijking α de snelheid C van den kanonskogel bepalen (fig. 213). Stelt men in bovenstaande vergelijking

de in de vorige paragraaf gevonden waarde van c , dan verkrijgt men:

$$C = \frac{m}{M} \sqrt{2 \frac{m}{m} gr (1 - \cos \alpha)},$$

waarin m en m betrekking hebben op de massa van het geheele uit slinger en kanon bestaande lichaam.

Is bijv. weer $\frac{m}{m} = 1,225$, $\frac{m}{M} = 400$, $\alpha = 2,45$ meters, $r = 2$ meters en $\alpha = 20^\circ$, dan vindt men:

$$C = 555,95 \text{ eenheden.}$$

ZESDE AFDEELING.

STATICA DER VLOEIBARE LICHAMEN.

HOOFDSTUK XVIII.

Evenwichtstoestand van een vloeibaar lichaam onder de werking van uitwendige drukkrachten.

§ 110. Onderscheid tusschen vaste en vloeibare lichamen.

In tegenstelling met de vaste lichamen, bij welke de inwendige krachten elke vormverandering en elke verandering der afmetingen tegenwerken, noemt men vloeibare lichamen de zoodanige, bij welke de inwendige krachten alleen een vermindering van de afstanden der deelen onderling tegenwerken. Bij vloeibare lichamen worden wel is waar ook dan inwendige krachten te voorschijn geroepen, wanneer tengevolge van uitwendige krachten de afstanden der deelen onderling grooter zouden worden; maar aangezien dit slechts onder bepaalde omstandigheden plaats grijpt en bovendien de dan in werking komende inwendige krachten steeds klein zijn, zoo zal dit geval niet verder worden behandeld. Aangezien ook de afstandsvermindering der deelen zeer klein is en niet verder in aanmerking behoeft te komen, zal dus worden aangenomen, dat bij een vloeibaar lichaam alleen zoodanige inwendige krachten optreden, die een vermindering van de afstanden der deelen onderling beletten.

De uitwendige krachten, die op het oppervlak van een vloeibaar lichaam werken, kunnen derhalve alleen dan in evenwicht zijn, indien zij naar binnen zijn gericht. Deze naar binnen gerichte krachten zullen drukkrachten genoemd worden.

Een verder onderscheid tusschen vaste en vloeibare lichamen bestaat daarin, dat de wrijvingsweerstand bij een in rust zijnd vloeibaar lichaam steeds nul is. Dit heeft de volgende beteekenis. Indien vaste lichamen zich langs elkander bewegen, dan ontstaan op de aanrakingsplaatsen krachten, die de beweging van elk der lichamen ten opzichte van het andere tegenwerken; dit is evenzeer het geval bij de beweging van vloeibare lichamen of van de deelen daarvan langs elkander of langs vaste lichamen. Terwijl echter bij vaste lichamen in rust op de aanrakingsplaatsen ook krachten in werking komen die een beweging kunnen verhinderen, welke zonder het voorhanden zijn dier krachten tot stand zou komen, is dit bij vloeibare lichamen niet het geval. Elke kracht op een vloeistofdeeltje werkende, zal dit deeltje in beweging brengen, indien deze beweging mogelijk is, zonder den afstand van dit deeltje tot andere deeltjes te verminderen.

Hieruit volgt dat een vloeibaar lichaam alleen dan in evenwichtstoestand kan zijn, als de algemeene evenwichtsvergelijkingen niet alleen voor het vloeibaar lichaam in zijn geheel gelden, maar ook voor alle afzonderlijke deelen. Een vloeibaar lichaam moet dus beschouwd worden als een stelsel van oneindig kleine vaste lichamen op zoodanige wijze verbonden, dat hun afstanden onderling niet kunnen verminderd worden.

Nog volgt hieruit dat elk vloeistofdeeltje, dat in aanraking is met den wand, daarvan een druk moet ondervinden in een richting loodrecht op den wand naar binnen.

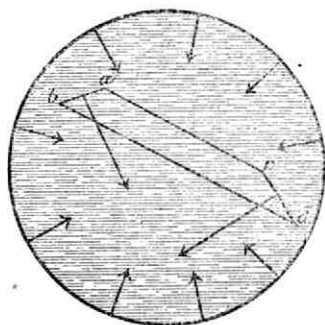
§ 111. Drukkrachten werkende op een vloeibaar lichaam.

De evenwichtsvoorwaarden voor krachten op een vloeibaar lichaam werkende, zijn dezelfde als die, welke vroeger gevonden zijn voor krachten op een vast lichaam werkende. De evenwichtstoestand toch van een vloeibaar lichaam wordt niet gestoord, indien het geheele vloeibare lichaam, of een willekeurig deel er van vast wordt.

Stelt men zich voor dat eenig deel van een vloeibaar lichaam, waarop uitwendige krachten werken die in even-

wicht zijn, door een willekeurig gekozen vlak wordt afgesneden, en dat de inwendige krachten vroeger op het overgebleven gedeelte werkende, vervangen worden door uitwendige krachten; dan moeten ook nu de uitwendige krachten aan de algemeene evenwichtsvergelijkingen voldoen, en men kan dus uit die vergelijkingen de genoemde inwendige krachten bepalen. De uitwendige krachten, die de inwendige op het scheidingsvlak werkende vervangen, kunnen volgens het in de vorige paragraaf behandelde, slechts zijn drukkrachten, in elk punt loodrecht op het scheidingsvlak gericht en naar binnen werkende. Deze krachten hebben in het algemeen op verschillende plaatsen een verschillende grootte; dat wil zeggen, als f de vlakke-inhoud van een oneindig klein deel, en pf de som van de op dit deel werkende drukkrachten is (waarin dus p den druk per vierkanten meter beteekent), dan zal de waarde van p op verschillende plaatsen verschillend kunnen zijn; de wet, volgens welke de grootte van p verandert met de plaats van het vlakke-deel, hangt af van de uitwendige krachten, die op het vloeibaar lichaam werken. In het bijzonder geval, dat de uitwendige krachten alleen bestaan in drukkrachten, die op het oppervlak van het vloeibaar lichaam werken, kan men bewijzen dat p een waarde heeft, die onafhankelijk is van de plaats

Fig. 214.



en den stand van het vlakke-element, en derhalve overal in het vloeibaar lichaam dezelfde is.

Beschouwt men toch van het in fig. 214 voorgestelde vloeibaar lichaam eenig cilindervormig of prismatisch gedeelte $abcd$, welks eindvlakken door de vlakke-elementen $ab = f_1$ en $cd = f_2$ worden gevormd, dan bevindt zich dit gedeelte in denzelfden toestand als een cilindervormige of prisma-

tische stang (fig. 215), ingesloten door vaste wanden, en slechts in de richting van haar lengte zonder wrijving ver-

schuifbaar, terwijl de op de eindvlakken f_1 en f_2 werkende drukkrachten $p_1 f_1$ en $p_2 f_2$ in evenwicht zijn. Als eenige evenwichtsvergelijking heeft men dan :

$$p_1 f_1 \cos \alpha_1 = p_2 f_2 \cos \alpha_2,$$

waarin α_1 en α_2 de hoeken zijn, welke de normalen op de eindvlakken maken met

de lengterichting der stang. Is f de doorsnede der stang, dan is $f_1 \cos \alpha_1 = f_2 \cos \alpha_2 = f$, waaruit volgt :

$$p_1 = p_2.$$

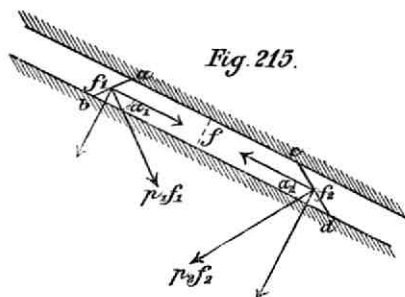
De druk per vierkanten meter is dus op beide eindvlakken even groot. Daar hetzelfde bewijs ook geldt voor een cilindervormig

of prismatisch gedeelte, welks eene eindvlak deel uitmaakt van het oppervlak der vloeistof, zoo verkrijgt men de volgende wet :

Indien de op een vloeibaar lichaam werkende uitwendige krachten in evenwicht zijn, en uitsluitend bestaan in drukkrachten, dan is de druk per vierkanten meter, zoowel aan het oppervlak als binnen in het vloeibaar lichaam, op alle plaatsen en in alle richtingen even groot.

§ 112. Evenwicht van krachten werkende op een vloeibaar lichaam geheel besloten in een vat met vaste wanden en beweegbare zuigers.

Door middel van een beweegbaren cilindervormigen zuiger wordt ergens op het oppervlak van een aan alle kanten door vaste wanden ingesloten vloeibaar lichaam een druk p per vierkanten meter uitgeoefend. Wordt het gewicht van het vloeibaar lichaam verwaarloosd, dan zullen ook op alle andere punten de vaste wanden op zijn oppervlak een even grooten druk p per vierkanten meter uitoefenen, welke druk overal loodrecht op de wanden en naar binnen gericht is. Om-



gekeerd zal het vloeibaar lichaam op elk punt van den wand een druk p per vierkanten meter uitoefenen, eveneens loodrecht op den wand, maar naar buiten gericht. Is F het

aantal vierkante meters van het eindvlak des zuigers (fig. 216), en K de uitwendige kracht, die op den zuiger werkt in de richting van de as, dan is de druk per vierkanten meter:

$$p = \frac{K}{F}. \quad (187)$$

Wordt een gedeelte van den vasten wand door een anderen beweegbaren cilindervormigen zuiger met een

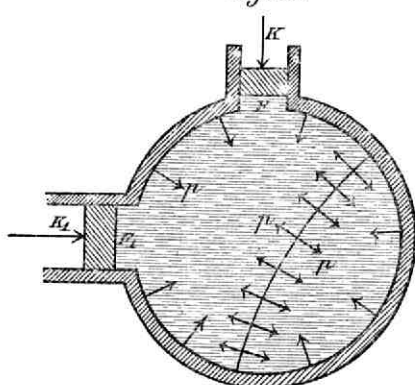
eindvlak van F_1 vierkante meters vervangen, dan zal het vloeibaar lichaam op dien zuiger een druk $p F_1$ uitoefenen, en die tweede zuiger zal alleen dan in rust zijn, als er een uitwendige kracht $K_1 = p F_1$ in de richting van de as naar binnen op werkt. Men heeft dus:

$$\frac{K_1}{K} = \frac{F_1}{F}. \quad (188)$$

De krachten K_1 en K verhouden zich dus als de doorsneden der zuigers. Brengt men een willekeurig vlak door het inwendige van het vloeibaar lichaam, dan oefenen de twee door het vlak gescheiden deelen normale drukkkrachten op elkander uit, die eveneens de grootte p per vierkanten meter hebben.

De vergelijkingen (187) en (188) gelden nog dan als de eindvlakken niet zijn platte vlakken loodrecht op de as, maar een willekeurige gedaante hebben, mits men onder F en F_1 verstaat de doorsneden van de buizen, waarin de zuigers zich bewegen. Ontbindt men toch den op eenig oneindig klein deeltje ϵ van het eindvlak werkenden druk $p\epsilon$ (fig. 217) in de richting van de as der buis en in een

Fig. 216.



Vat men het woord projectie in ruimeren zin op, in dier voege dat daar, waar de projecties van een aantal vlakte-elementen op elkander vallen, zij beschouwd worden als positieve en negatieve grootheden, en haar som dus is of nul, of de projectie van een dier elementen al naarmate haar aantal is even of oneven, dan verkrijgt men de meer algemeene stelling:

Welken vorm een in een buis beweegbare zuiger ook moge hebben, de druk dien het vloeibaar lichaam in de asrichting der buis tegen den zuiger uitoefent, hangt alleen af van de projectie van het gedrukte oppervlak op eenig vlak loodrecht op de as der buis, en heeft dezelfde grootte, die hij zou hebben, indien genoemde projectie het drukvlak was.

Beschouwt men eenig deel van den binnenwand van het vat als eindvlak van een zuiger, die slechts in één bepaalde asrichting beweegbaar is, dan kan bovenstaande stelling toegepast worden om de ontbondene in genoemde willekeurige richting te vinden van den druk, dien het vloeibaar lichaam tegen dat deel van den wand uitoefent. Geheel hetzelfde geldt ook voor de ontbondene van den druk tegen den buitenwand van een in een vloeistof ondergedompeld lichaam. Herhaalt men deze handelwijze voor drie onderling loodrechte richtingen, dan vindt men dat de drukkrachten, die het vloeibaar lichaam op dat deel van den wand uitoefent, kunnen vervangen worden door drie krachten, werkende langs drie onderling loodrechte lijnen. Deze lijnen snijden elkander in het algemeen niet in één punt, en de krachten hebben dus slechts in bijzondere gevallen een vervangende.

§ 113. Hydraulische pers.

Twee cilinders (fig. 218) door een buis verbonden zijn met vloeistof gevuld en door beweegbare zuigers gesloten. Verwaarloost men wederom het gewicht van het vloeibaar lichaam, dan zullen de uitwendige krachten in evenwicht zijn, indien op alle plaatsen van het vloeibaar lichaam de druk p per vierkanten meter even groot is. Wordt deze druk teweeggebracht door de twee in de asrichting der zuigers werkende krachten K en W , en neemt men aan

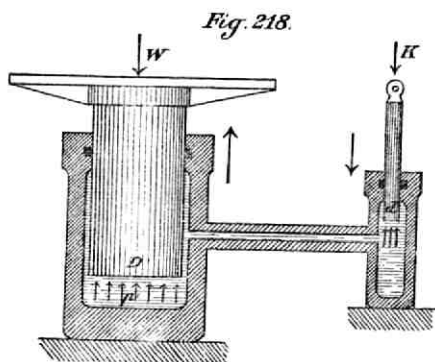
dat tusschen zuigers en cilinders geen wrijvingsweerstanden werken, dan is:

$$K = p \frac{\pi d^2}{4} \text{ en } W = p \frac{\pi D^2}{4},$$

waarin d en D de middellijnen zijn van de doorsneden der zuigers. Men heeft dus:

$$\frac{W}{K} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Deze vergelijkingen gelden ook dan nog als elk der beide zuigers een eenparig voortgaande beweging heeft, bijv., als



de kracht K den kleinen zuiger naar beneden drijft, waardoor tevens de groote zuiger naar boven bewogen en de op dezen als weerstand werkende kracht W overwonnen wordt. Is bijv. $D = 20 d$, dan is $W = 400 K$, en een op den kleinen zuiger werkende kracht $K = 100$ eenheden zou voldoende

zijn om een druk $W = 40000$ eenheden op den grooten zuiger te overwinnen.

Om een waterdichte sluiting van de zuigers in de cilinders te verkrijgen, kan men gebruik maken van een lederen ring (fig. 219), die zoodanig is omgebogen, dat de vloeistof zelve het buitenste deel tegen den wand van den cilinder, en het binnenste deel tegen den zuiger aandrukt. Bij de beweging van de zuigers ontstaat op iederen vierkanten meter van het aanrakingsvlak een wrijvingsweerstand fp eenheden. Bij den grooten zuiger is het aanrakingsvlak een cilindermantel, welks hoogte H en welks middellijn D meters is; het oppervlak is dus πDH vierkante meters. De wrijvingsweerstand heeft derhalve de grootte $fp \pi DH$, en heeft

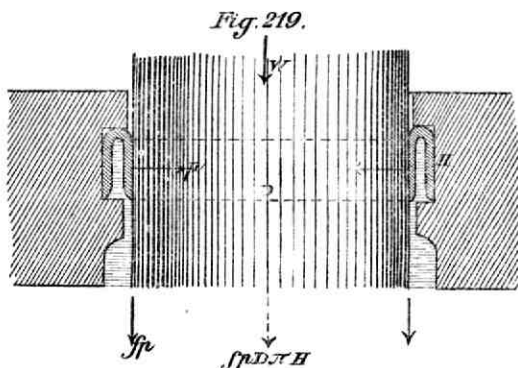
dezelfde richting als de weerstand W . De krachten op den grooten zuiger werkende moeten dus voldoen aan de vergelijking:

$$W + fp \pi D H - \frac{p \pi D^2}{4} = 0,$$

of, als men het quotient $\frac{H}{D}$ door m voorstelt:

$$W = p \pi D^2 (0,25 - fm).$$

Bij den kleinen zuiger werkt de wrijvingsweerstand in de



richting tegengesteld aan die van de kracht K . De krachten op dien zuiger werkende moeten dus voldoen aan de vergelijking:

$$K = p \pi d^2 (0,25 + fm_1),$$

waarin $m_1 = \frac{h}{d}$ is.

Uit deze twee vergelijkingen vindt men voor de verhouding der krachten W en K :

$$\frac{W}{K} = \frac{D^2}{d^2} \cdot \frac{0,25 - fm}{0,25 + fm_1}.$$

Daar in den grooten cilinder evenveel water binnentreedt als er uit den kleinen wordt weggedrukt, zoo zijn de in de seconde afgelegde wegen V en v omgekeerd evenredig met

de doorsneden der zuigers, dus $\frac{V}{v} = \frac{d^2}{D^2}$. Voor het quotient n waardoor het nuttig effect bij dit werktuig wordt bepaald, vindt men dus:

$$n = \frac{WV}{Kv} = \frac{W}{K} \cdot \frac{d^2}{D^2} = \frac{0,25 - fm}{0,25 + fm_1}.$$

Stelt men bijv. $f = 0,2$, $n = m_1 = 0,2$ en $D = 20 d$, dan is $W = 280,655 K$ en $n = 0,724$. Een op den kleinen zuiger werkende kracht $K = 100$ eenheden zou voldoende zijn om een op den grooten zuiger werkenden druk $W = 28965,5$ eenheden als weerstand te overwinnen, en de nuttige weerstandsarbeid zou 72,4 percent van den beweegkrachtsarbeid bedragen.

HOOFDSTUK XIX.

Werking der zwaartekracht op vloeibare lichamen.

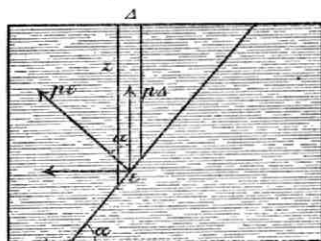
§ 114. Druk tegen platte vlakken.

Bij het ontbreken van wrijvingsweerstand, kan een deeltje aan het vrije oppervlak van een vloeibaar lichaam alleen in rust zijn, wanneer de resultante van alle er op werkende krachten, loodrecht gericht is op het oppervlak. Is dus de zwaartekracht de eenige uitwendige kracht die op de deeltjes in het vrije oppervlak gelegen werkt, dan moet dit oppervlak overal loodrecht staan op de verticaal, en derhalve een horizontaal plat vlak wezen. Werken er krachten op, welke richtingen van punt tot punt veranderen, dan moet het vrije oppervlak een gebogen vlak zijn, dat in ieder punt loodrecht staat op de richting der op dat punt werkende kracht.

De evenwichtstoestand van een vloeibaar lichaam, waarop de zwaartekracht werkt, wordt niet gestoord, indien eenig deel er van vast wordt. Laat dit deel de gedaante hebben van een van onderen schuin afgesneden, oneindig dunne prismatische zuil, welker bovenvlak een gedeelte is van den

horizontalen vloeistofspiegel. Uit de algemeene evenwichtsvergelijkingen volgt onder anderen, dat de som der ontbondenen van de op de zuil werkende krachten in verticale richting gelijk nul moet zijn (fig. 220). Daar de drukkrachten, die de omringende vloeistof uitoefent op de zijwanden der zuil, allen horizontaal gericht zijn, moet het gewicht der zuil gelijk zijn aan de ontbondene van den druk op het grondvlak der zuil in verticale richting.

Fig. 220.



Is het grondvlak der zuil ϵ , haar doorsnede Δ , haar hoogte z en is γ de massa van een cubieken meter der

vloeistof, dan is het gewicht der zuil $g\gamma\Delta z$. Noemt men verder den druk per vierkanten meter op het grondvlak der zuil p , dan is de druk op het vlakke-element ϵ , $p\epsilon$; de richting van dien druk maakt met de verticaal een even grooten hoek α , als het grondvlak met den horizon. De verticaal naar boven werkende ontbondene van dien druk is dus $p\epsilon \cos \alpha$ of, daar $\epsilon \cos \alpha = \Delta$ is, $p\Delta$. Stelt men deze krachten aan elkander gelijk, dan verkrijgt men:

$$p\Delta = g\gamma\Delta z \quad \text{of} \quad p = g\gamma z.$$

De normale druk op het vlakke-element ϵ is derhalve:

$$p\epsilon = g\gamma\epsilon z.$$

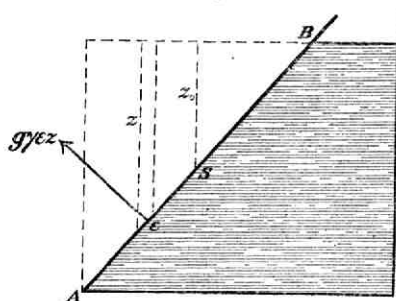
De druk op een vlakke-element ϵ is gelijk aan het gewicht van een vloeistofzuil, die het gedrukte deel tot grondvlak, en zijn afstand tot den vloeistofspiegel tot hoogte heeft.

Beschouwt men ϵ als een gedeelte van een vasten wand, die het vloeibaar lichaam in twee deelen scheidt, dan zal de evenwichtstoestand van het eene deel niet worden gestoord, als men het andere deel wegneemt; hieruit volgt, dat bovenstaande regel ook dan nog kan dienen ter bepaling van den druk op het vlakke-element ϵ , indien zooals in fig. 221 boven dit deeltje volstrekt geen vloeistof aanwezig is.

Daar de drukkrachten, door het vloeibaar lichaam op de vlakke-elementen van het platte vlak AB uitgeoefend, alle werken langs lijnen die loodrecht op dat vlak staan en dus onderling evenwijdig zijn, zoo is haar vervangende gelijk aan haar som; derhalve:

$$D = \Sigma (g \gamma \epsilon z) = g \gamma \Sigma (\epsilon z)$$

Fig. 221

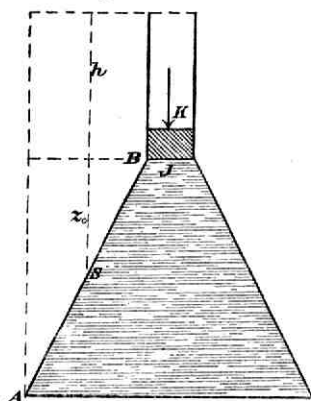


Volgens de leer van het zwaartepunt mag men $\Sigma (\epsilon z)$ vervangen door het product van het geheele drukvlak $AB = F$ met den afstand z_0 van zijn zwaartepunt S tot den vloeistofspiegel; men heeft dus:

$$D = g \gamma F z_0. \quad (189)$$

De druk van een vloeibaar lichaam op eenig deel van een plat vlak is gelijk aan het gewicht van een vloeistofzuil, welke dit deel tot grondvlak en den afstand van diens zwaartepunt tot den vloeistofspiegel tot hoogte heeft.

Fig. 222.



Wordt door een zuiger een kracht K uitgeoefend op het vrije oppervlak J (fig. 222) van een in een vat besloten vloeibaar lichaam, dan is de druk per vierkanten meter op den vloeistofspiegel $p = \frac{K}{J}$.

De druk op eenig deel van den vlakken wand, kan op dezelfde wijze als in het vorige geval bepaald worden; daartoe heeft men zich slechts voor te stellen, dat de zuiger vervangen is door een vloeistof-

stellen, dat de zuiger vervangen is door een vloeistof-

laag, die denzelfden druk uitoefent. De hoogte h welke deze laag zou moeten hebben, kan gevonden worden uit de vergelijking:

$$g\gamma Jh = K \quad \text{of} \quad h = \frac{K}{g\gamma J} = \frac{p}{g\gamma}.$$

In dit geval is de druk op het platte vlak $AB = F$:

$$D = g\gamma F(z_0 + h).$$

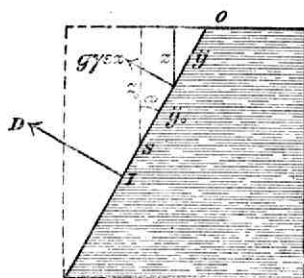
Ook dan nog geldt deze vergelijking, indien de druk op den vloeistofspiegel niet door een zuiger, maar rechtstreeks door den dampkring wordt uitgeoefend. Is de barometerstand H meters, is γ_1 de massa van een cubieken meter kwik, en J vierkante meters de grootte van het vrije oppervlak, dan is:

$$K = g\gamma_1 JH = g\gamma Jh, \quad \text{of} \quad h = \frac{\gamma_1}{\gamma} H.$$

§ 115. Middelpunt van drukking.

Om het snijpunt I van de lijn waarlangs de druk D werkt en den vlakken zijwand, het zoogenaamde *middelpunt van drukking*, te vinden, moet men

Fig. 223.



het moment der vervangende D ten opzichte van eenige as gelijk stellen aan de som der momenten van alle op de afzonderlijke vlakke-elementen ϵ werkende drukkrachten $g\gamma \epsilon z$ ten opzichte van diezelfde as. Kiest men als as de lijn OO_1 (fig. 223), langs welke de vloeistofspiegel den zijwand aanraakt, en is $O I l$ meters lang, dan is:

$$Dl = \Sigma (g\gamma \epsilon z y),$$

welke na substitutie van de in vergelijking (189) gevonden waarde van D , voor l geeft:

$$l = \frac{\Sigma (g\gamma \epsilon z y)}{g\gamma F z_0}.$$

aan haar algebraïsche som. In het bijzondere geval dat deze som nul is, kunnen die krachten bij uitzondering door een koppel vervangen worden.

De ontbindingskracht in horizontale richting $g\gamma z\sigma$ is gelijk aan den druk, dien de projectie σ van ε op het vlak loodrecht op die richting zou ondergaan. De vervangende X van al deze ontbindingskrachten is gelijk aan haar algebraïsche som, en dus even groot als de druk dien de geheele projectie AC van den gebogen wand op dat vlak zou ondergaan. Op gelijke wijze kan de vervangende Y van de ontbindingskrachten in de richting loodrecht op het vlak der teekening worden bepaald.

§ 117. Opwaartsche druk.

Bevindt zich een vloeibaar lichaam in een vat en beschouwt men den geheelen er mede in aanraking zijnden wand als drukvlak, dan is zoowel $X = 0$ als $Y = 0$, omdat de projectie van het drukvlak op elk willekeurig gekozen verticaal vlak nul is (fig. 225). De vervangende van de op alle deeltjes van het drukvlak werkende krachten is derhalve

Fig. 225.

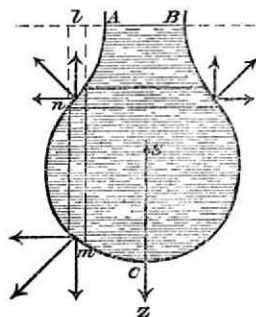
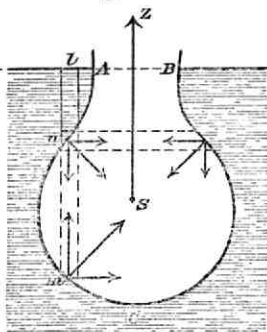


Fig. 226.

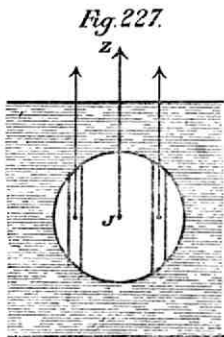


in dit geval een verticale kracht Z , die tevens de vervangende is van de verticale ontbondenen dier krachten. Beschouwt men de verticale ontbondenen der drukkingen op de boven elkander gelegen vlakke-elementen m en n , dan blijkt het

dat de ontbondene van den druk op m grooter is dan die van den druk op n . Het verschil is gelijk aan het gewicht van de vloeistofzuil ml verminderd met dat van de vloeistofzuil nl , en dus gelijk aan het gewicht van de vloeistofzuil mn . De vervangende Z is derhalve gelijk aan de som der gewichten der afzonderlijke verticale vloeistofzuilen, of aan het gewicht van het vloeibaar lichaam ABC , en de lijn waarlangs zij werkt, gaat door het zwaartepunt S van dat lichaam.

Indien alle krachten in tegengestelde richtingen werkten, dan zou dit ook met de vervangende het geval zijn. De vervangende van de drukkingen, die de wanden van het vat op het vloeibaar lichaam uitoefenen, is derhalve een kracht, die verticaal naar boven werkt langs een lijn gaande door het zwaartepunt S van het vloeibaar lichaam; zij is even groot als het gewicht van het lichaam, en maakt hiermede evenwicht.

Is het vat door de vloeistof omringd (fig. 226), dan kan men op dezelfde wijze aantoonen dat de vervangende van de drukkrachten door de vloeistof op de wanddeelen van het vat uitgeoefend, een verticaal naar boven gerichte kracht is, welker grootte gelijk is aan het gewicht der verplaatste vloeistof, en welke werkt langs een lijn gaande door het zwaartepunt S van de ruimte ABC . Deze verticaal naar boven werkende vervangende wordt *de opwaartsche druk* genoemd.



Ook indien, zooals in fig. 227, een geheel gesloten oppervlak aan alle kanten door vloeistof is omringd is de projectie van het drukvlak op een willekeurig verticaal vlak nul; de vervangende van alle drukkrachten is derhalve ook in dit geval gelijk aan den opwaartschen druk. Stelt men zich toch voor, dat de ondergedompelde ruimte in oneindig dunne

verticale zuilen is verdeeld, dan is voor elk der zuilen de opwaartsche druk gelijk aan het gewicht van de door haar verplaatste vloeistof; de geheele opwaartsche druk is derhalve

gelijk aan het gewicht van de door de geheele ruimte verplaatste vloeistof. Is J de inhoud van de ondergedompelde ruimte en γ de massa van een cubieken meter der vloeistof, dan is de opwaartsche druk:

$$Z = g \gamma J.$$

Deze kracht hangt uitsluitend af van de grootte der ruimte, zij is onafhankelijk van hetgeen zich binnen deze ruimte bevindt; wordt de ondergedompelde ruimte bijv. ingenomen door een vast lichaam, dan hangt de opwaartsche druk niet af van het gewicht des lichaams of van de plaats van zijn zwaartepunt. Geheel algemeen geldt dus de volgende wet:

Op elk in een vloeistof gedompeld lichaam werkt langs de lijn, die door het zwaartepunt van de ingedompelde ruimte gaat, een opwaartsche druk, even groot als het gewicht van de verplaatste vloeistof.

Deze wet wordt de wet van ARCHIMEDES genoemd.

Is J de inhoud en γ_1 de massa van een cubieken meter van het ondergedompelde lichaam, dan is zijn gewicht $G = g \gamma_1 J$; de opwaartsche druk A dien het ondervindt is even groot als het gewicht van de verplaatste vloeistof, dus $A = g \gamma J$. Het quotient s dier twee gewichten:

$$s = \frac{G}{A} = \frac{g \gamma_1 J}{g \gamma J} = \frac{\gamma_1}{\gamma}$$

is onafhankelijk van de keuze der gewichtseenheid en der inhoudseenheid, en wordt als maat beschouwd voor de *dichtheid* van het ondergedompelde lichaam *ten opzichte van de vloeistof*.

§ 118. Stabiliteit van drijvende lichamen.

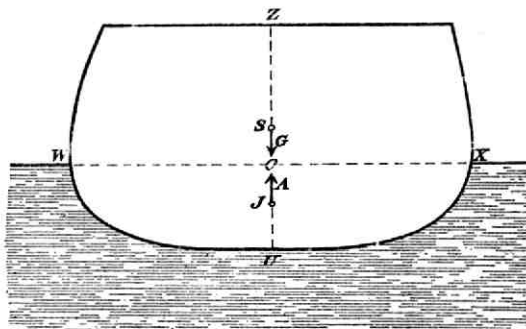
Metacentrum.

Is de dichtheid van een lichaam ten opzichte van een vloeistof kleiner dan één, dan zal het lichaam op die vloeistof drijven, en daarbij een gewicht vloeistof verplaatsen even groot als zijn eigen gewicht. Voor het evenwicht der op het lichaam werkende krachten wordt bovendien vereischt, dat het zwaartepunt J van de ondergedompelde ruimte en het zwaartepunt S van het lichaam in dezelfde verticaal

liggen (fig. 228). De lijn ZU , welke in dien evenwichtsstand door de beide zwaartepunten gaat, wordt de *drijf*as, en het vlak WOX , dat met den waterspiegel samenvalt, het *drijf*vlak van het lichaam genoemd.

Om de stabiliteit van den evenwichtstoestand te onderzoeken, moet men zich voorstellen dat de drijf as in een stand wordt gebracht, die met haar verticalen evenwichtsstand een zeer kleinen hoek φ maakt, en daarna het moment $\mathfrak{M}$ berekenen van het koppel, dat vereischt zou worden om het lichaam in dien stand te houden. Hierbij zal worden verondersteld, dat het lichaam een eenvoudigen vorm heeft, namelijk dien van een prisma, welks lengterichting loodrecht

Fig. 228.

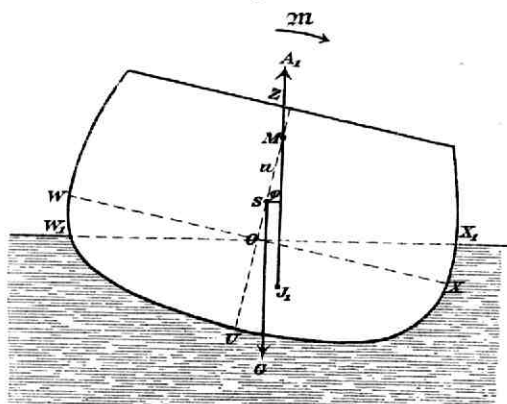


staat op het verticale draaiingsvlak en dus horizontaal is; bovendien wordt aangenomen dat de drijf as de doorsnede symmetrisch middendoordeelt. Heeft het prisma een lengte van één meter, dan is het aantal cubieke meters van zijn inhoud even groot als het aantal vierkante meters der doorsnede; ditzelfde geldt ook voor deelen van het lichaam.

De krachten, door welke het lichaam in zijn nieuwen evenwichtsstand wordt gehouden (fig. 229) zijn: ten eerste het gewicht G van het lichaam, ten tweede de nieuwe opwaartsche druk A_1 , die volgens het bovenstaande even groot is als G , en ten derde de krachten die het koppel met het moment $\mathfrak{M}$ vormen. Volgens fig. 229 heeft de arm van het koppel gevormd door de krachten G en A_1

de grootte $u \sin \varphi$, als u is de afstand van het zwaartepunt S tot het punt M , het snijpunt van de lijn, waarlangs de nieuwe opwaartsche druk werkt, met de drijfas. Wegens de veronderstelde kleinheid van den hoek φ mag $u \sin \varphi$ door $u \varphi$ vervangen worden. De momenten der koppels

Fig. 229.



moeten even groot zijn, maar in teeken verschillen; men heeft dus:

$$\mathfrak{M} = Gu\varphi. \quad (190)$$

De nieuwe opwaartsche druk A_1 (fig. 230) kan beschouwd worden als de vervangende van drie krachten; namelijk van den oorspronkelijken opwaartschen druk A , van den nieuwen opwaartschen druk a , veroorzaakt door het indompelen van het deel OXX_1 , en van den opwaartschen druk a_1 , dien het oorspronkelijk ondergedompelde, maar thans boven den waterspiegel uitstekende deel WOW_1 ondervond, en die dus nu in tegengestelde richting moet worden genomen. Daar $A_1 = G = A$ is, moet ook $a = a_1$ zijn. De nieuw ondergedompelde ruimte moet dus even groot zijn als de ruimte, die aan den anderen kant boven den waterspiegel is opgeheven. Bij den veronderstelden symmetrischen vorm van het lichaam volgt hieruit, dat de doorsneden dier ruimten twee driehoekige vlakken zijn, wier gemeenschappelijke

top met het punt O , het snijpunt van de drijfas met het drijfvlak, samenvalt. Elk der vlakken kan beschouwd worden als een gelijkbeenige driehoek met de basis $\frac{1}{2} b \varphi$ en de hoogte $\frac{1}{2} b$; derhalve is:

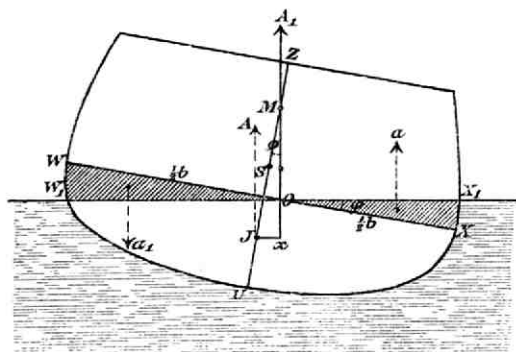
$$a = a_1 = \frac{1}{2} g \gamma \cdot \frac{1}{2} b \varphi \cdot \frac{1}{2} b = \frac{1}{8} g \gamma b^2 \varphi.$$

Het zwaartepunt van elk der beide driehoeken ligt op den afstand $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} b = \frac{1}{3} b$ van den top; de krachten a en a_1 vormen dus een koppel met den arm $\frac{2}{3} b$, en het moment:

$$m = a \cdot \frac{2}{3} b = \frac{1}{12} g \gamma b^3 \varphi. \quad (191)$$

Ten opzichte van elk punt der doorsnede, en dus ook ten opzichte van het punt J moet het moment van de ver-

Fig. 230.



vangende A_1 gelijk zijn aan de som van de momenten dier drie krachten; daar het moment der kracht A ten opzichte van het punt J nul is, zoo heeft men:

$$A_1 x = m.$$

Is F het gedeelte van de doorsnede dat beneden den waterspiegel is gelegen, dan is F ook de inhoud van de geheele ondergedompelde ruimte, en dus $A_1 = A = g \gamma F$; is verder h de afstand der punten S en J , dan is $x = JM \cdot \sin \varphi = (u + h) \varphi$. Men verkrijgt dan:

$$g \gamma F (u + h) \varphi = m.$$

Substitueert men deze waarde van m in vergelijking (191), en lost men u op, dan is :

$$u = \frac{b^3}{12F} - h. \quad (192)$$

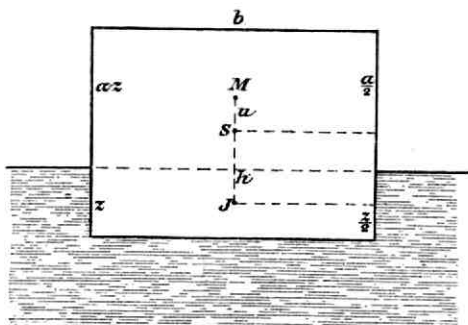
Uit deze vergelijking blijkt, dat u onafhankelijk is van den hoek φ , zoolang namelijk deze hoek klein is.

Bij kleine schommelingen van het drijvend lichaam zal dus de lijn, waarlangs de opwaartsche druk werkt, steeds door hetzelfde punt M van de drijf-as gaan. Dit punt wordt het *metacentrum* van het drijvende lichaam genoemd.

Uit vergelijking (190) blijkt, dat het moment $\mathfrak{M}$ evenredig is met u . De stabiliteit van het drijvende lichaam is derhalve des te grooter, hoe hoger het metacentrum boven het zwaartepunt ligt; het evenwicht is stabiel als u positief is. Volgens vergelijking (192) is aan deze voorwaarde steeds voldaan als h negatief is; m. a. w. ligt het zwaartepunt van een drijvend lichaam beneden het zwaartepunt van het verplaatste vloeibare lichaam, dan is het evenwicht steeds stabiel. Het evenwicht is labiel als u negatief is, indifferent als u gelijk nul of $h = \frac{b^3}{12F}$ is.

De diepte z (fig. 231), waartoe een homogeen parallelo-

Fig 231.



pipedium, welks dichtheid ten opzichte van water s is en

welks lengte, hoogte en breedte respectievelijk één, a en b meters zijn. in water inzinkt, vindt men door het gewicht $G = g s \gamma a b$ gelijk te stellen aan den opwaartschen druk $A = g \gamma z b$; dus:

$$g s \gamma a b = g \gamma z b \quad \text{of} \quad z = a s.$$

De doorsnede van de ingedompelde ruimte heeft den inhoud :

$$F = z b = s a b,$$

en de afstand van de zwaartepunten S en J is:

$$h = \frac{a}{2} - \frac{z}{2} = \frac{a}{2} (1 - s).$$

Substitueert men deze waarden in vergelijking (192), dan vindt men voor de hoogte van het metacentrum boven het zwaartepunt:

$$u = \frac{b^3}{12 s a b} - \frac{a}{2} (1 - s) = \frac{a}{12 s} \left[\frac{b^2}{a^2} - 6 s (1 - s) \right].$$

Stelt men in bovenstaande vergelijking $u = 0$, dan vindt men voor de waarde van de verhouding $\frac{b}{a}$, bij welke de grens van de stabiliteit wordt bereikt:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{6 s (1 - s)}.$$

ZEVENDE AFDEELING.

DYNAMICA DER VLOEIBARE LICHAMEN.

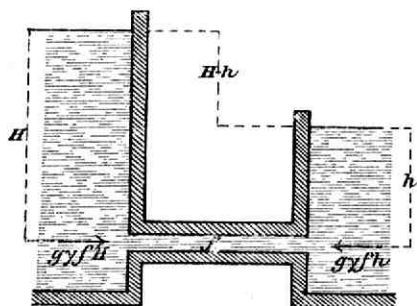
HOOFDSTUK XX.

Uitvloeijing van water.

§ 119. Uitvloeijingssnelheid.

Opdat een watermassa onder de werking der zwaartekracht in rust blijve, wordt vereischt, dat alle punten van het vrije oppervlak in hetzelfde horizontale vlak liggen. Indien twee vaten, waarin de waterspiegels op verschillende hoogten

Fig. 232.



liggen, door een horizontale buis verbonden zijn (fig. 232), dan werken op de beide uiteinden van de waterzuil in die buis ongelijke drukkrachten $g\gamma f H$ en $g\gamma f h$. Door het verschil dier twee krachten verkrijgt de oorspronkelijk in rust zijnde waterzuil een versnelde beweging, wier aanvankelijke versnel-

ling gevonden wordt door het verschil in druk $g\gamma f(H - h)$ te deelen door de massa der waterzuil. Bij de beweging van de waterzuil in de horizontale verbindingsbuis treden voortdurend aan het vooreinde der buis waterdeeltjes naar buiten, terwijl aan het achtereinde een even groote hoeveelheid water naar

binnen treedt. Dien tengevolge daalt de hoogste en rijst de laagste der twee waterspiegels. In de veronderstelling echter, dat de doorsnede f zeer klein is in vergelijking met die der beide vaten, mogen de hoogten H en h gedurende het uitvloeien als standvastig worden beschouwd. In dit geval mag men aannemen, dat niettegenstaande een gedeelte van het water, in de buis en in den omtrek van haar uiteinden, in beweging is, de drukkrachten op de uiteinden der waterzuil de grootte behouden, die zij hadden toen het water in rust was, en dat dus de kracht $g \gamma f (H - h)$ gedurende de uitvloeijing niet verandert.

Heeft de uitvloeijingssnelheid, d. i. de snelheid van de waterzuil in de buis, op eenig oogenblik de grootte v eenheden, dan is de in het naastvolgende tijddeeltje τ afgelegde weg $v \tau$ en de gedurende dat tijddeeltje door de kracht verrichte arbeid :

$$\mathfrak{A} = g \gamma f (H - h) v \tau. \quad (193)$$

Daar het water als onsamendrukbaar mag worden beschouwd, en dus de som van de arbeiden door de inwendige krachten verricht steeds nul is, zoo mag men aannemen, dat het arbeidsvermogen van plaats met bovenstaand bedrag afneemt en het arbeidsvermogen van beweging met een gelijk bedrag toeneemt.

Daar waar het water in de horizontale buis treedt, gaan aanhoudend waterdeeltjes uit den toestand van rust in beweging over, en verkrijgen dus arbeidsvermogen van beweging. Het volume van het water, dat gedurende het tijddeeltje τ in de buis treedt is $\iota = f v \tau$, zijn massa $m = \gamma f v \tau$. Op die plaats wordt derhalve gedurende het tijddeeltje τ het arbeidsvermogen van beweging vermeerderd met:

$$\frac{mv^2}{2} = \gamma f v \tau \frac{v^2}{2}. \quad (194)$$

Het gedurende den tijd τ verloren arbeidsvermogen van plaats kan beschouwd worden te zijn omgezet in een vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging, vooreerst van het reeds in beweging zijnde water, ten tweede van het water dat in de buis treedt en vóór dien tijd in rust

was. Dit laatste deel is des te grooter, hoe grooter de uitvloeïngssnelheid v reeds geworden is; het kan echter nooit grooter worden dan het geheele bedrag. De grootste waarde van de uitvloeïngssnelheid v is dus die, waarbij al het verloren arbeidsvermogen van plaats omgezet wordt in arbeidsvermogen van beweging van de deeltjes aan het begin der buis, welke voor dien tijd in rust waren. Door gelijkstelling van de voor $\frac{mv^2}{2}$ en $\mathfrak{A}$ gevonden waarden, verkrijgt men dus voor deze grens der uitvloeïngssnelheid de vergelijking:

$$\gamma f v \tau \frac{v^2}{2} = g \gamma f (H - h) v \tau \text{ of } v = \sqrt{2g(H - h)}. \quad (195)$$

De aanvankelijk versnelde beweging van de waterdeeltjes in de buis gaat allengs in een eenparige beweging over; de snelheid dier eenparige beweging is gelijk aan de snelheid, die een lichaam zou verkrijgen, indien het vrij viel van een hoogte $H - h$ gelijk aan den verticalen afstand der waterspiegels.

Vervangt men in bovenstaande vergelijkingen H en h door haar waarden $\frac{P}{g\gamma}$ en $\frac{p}{g\gamma}$, waarin P en p de drukkingen per vierkanten meter op de uiteinden der horizontale waterzuil zijn, dan vindt men

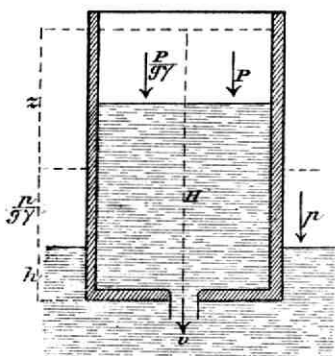
$$v = \sqrt{2 \left(\frac{P}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} \right)}.$$

In dezen vorm kan de vergelijking aangewend worden om de uitvloeïngssnelheid te bepalen, indien nog bovendien in elk der beide vaten op den waterspiegel een zekere druk werkt; P en p beteekenen dan den werkelijken druk per vierkanten meter op de uiteinden der waterzuil. Ook vergelijking (195) kan voor dit laatste geval als geldig worden beschouwd, mits men onder H en h verstaat de hoogten, die de waterspiegels boven de uiteinden der waterzuil zouden moeten hebben, om de werkelijk daarop uitgeoefende drukkingen voort te brengen.

Vergelijking (195) geldt ook voor het in fig. 233 voorgestelde geval, waarbij de uitvloeïngsopening zich niet in

den verticalen zijwand, maar in den horizontalen bodem bevindt. Noemt men het verschil in hoogte z , dan verkrijgt men de eenvoudiger uitdrukking:

Fig. 233.



$$v = \sqrt{2gz}. \quad (196)$$

Gedurende het tijdsdeeltje τ vloeit uit de opening een waterzuil met de lengte $v\tau$, de doorsnede f , en dus met het volume $f v \tau$. Het volume van het water in het vat zal gedurende dit tijdsdeeltje τ met dezelfde grootte verminderen. Is F de vlakinhoud van den waterspiegel, dan is de snelheid w , waar-

mede de waterspiegel in het vat daalt:

$$F w \tau = f v \tau \quad \text{of} \quad w = \frac{f}{F} v. \quad (197)$$

Heeft het vat een prismatische of cilindervormige gedaante, dan mag men aannemen, dat de beneden den waterspiegel gelegen deeltjes eveneens met de snelheid w dalen. Uit bovenstaande vergelijking blijkt, dat de snelheid waarmee de waterdeeltjes zich bewegen, voordat zij uitvloeien, slechts dan mag worden verwaarloosd, indien zooals vroeger is verondersteld de verhouding $\frac{f}{F}$ zeer klein is. Is aan deze voorwaarde niet voldaan, dan moet de in vergelijking (194) aangenomen waarde $\frac{mv^2}{2}$ voor de vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging, vervangen worden door:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mw^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{f^2}{F^2}\right).$$

Indien men in vergelijking (193) de massa van het in den tijd τ uitvloeiende water $\gamma f v \tau$ door m en het verschil in hoogten $H - h$ door z vervangt, dan vindt men dat

het verlies aan arbeidsvermogen van plaats mgz bedraagt. Door gelijkstelling der twee waarden, verkrijgt men:

$$mgz = \frac{mv^2}{2} - \frac{mw^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{f^2}{F^2}\right) \text{ of}$$

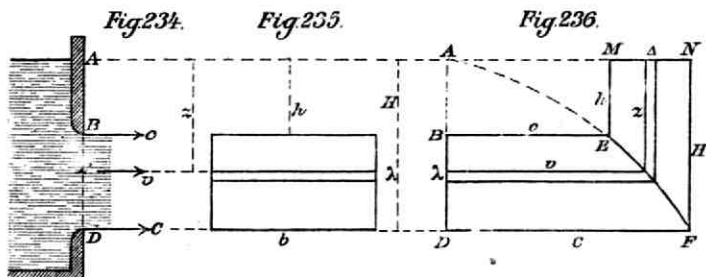
$$v = \sqrt{\frac{2gz}{1 - \frac{f^2}{F^2}}}.$$

De hoogte z kan hierbij onveranderlijk worden gehouden door boven in het vat evenveel water te doen toevloeien als er van onderen uitstroomt.

§ 120. Hoeveelheid uitstroomend water.

Zijn alle punten van de uitvloeingsopening even ver beneden den waterspiegel gelegen, en is dus de uitvloeings-snelheid v op alle punten even groot, dan is het volume van het in elke seconde uitvloeiende water gelijk aan den inhoud van een prisma, welks doorsnede gelijk is aan de uitvloeingsopening, en welks lengte v meters bedraagt. Indien daarentegen de verschillende punten der opening niet even ver beneden den waterspiegel liggen, dan moet de opening in oneindig smalle strookjes worden verdeeld, en het volume water bepaald worden, dat door elk dier strookjes uitvloeit; door optelling van de aldus gevonden volumes verkrijgt men dan het geheele volume.

In het punt P (fig. 234) is de uitvloeings-snelheid volgens vergelijking (196) $v = \sqrt{2gz}$, en door een op deze hoogte



gelegen horizontaal strookje met de breedte b en de oneindig

kleine hoogte λ (fig. 235), vloeit in een seconde het volume water $b\lambda v$. Het geheele volume bedraagt dus $I = \Sigma(b\lambda v)$. Is de uitvloeingsopening een rechthoek, dan is b een gemeenschappelijke factor van alle termen onder het somteeken en dus:

$$I = b \Sigma(v\lambda). \quad (198)$$

Om de waarde der som $\Sigma(v\lambda)$ te bepalen, kan men op de in fig. 236 aangegeven wijze de betrekking tusschen v en z graphisch voorstellen door middel van een kromme lijn AEF . (Deze lijn is een parabool, welks top A in den waterspiegel ligt).

Uit de figuur blijkt dat $\Sigma(v\lambda)$ wordt voorgesteld door den inhoud van de vlakke figuur $BEFD$, welke gelijk is aan den inhoud van den rechthoek $ADFN$, verminderd met den inhoud van den rechthoek $ABEM$ en met den inhoud van de vlakke figuur $MEFN$. Daar deze laatste gelijk is aan $\Sigma(z\Delta)$, zoo is:

$$\Sigma(v\lambda) = CH - ch - \Sigma(z\Delta).$$

Om de som $\Sigma(z\Delta)$ te vinden, moet men z vervangen door haar waarde $\frac{v^2}{2g}$, waardoor men verkrijgt:

$$\Sigma(z\Delta) = \frac{1}{2g} \Sigma(v^2\Delta) = \frac{1}{2g} \left(\frac{C^3}{3} - \frac{c^3}{3} \right),$$

of na substitutie van de waarden $C^2 = 2gH$ en $c^2 = 2gh$:

$$\Sigma(z\Delta) = \frac{1}{3} (CH - ch).$$

Men vindt dus:

$$\Sigma(v\lambda) = \frac{2}{3} (CH - ch).$$

Substitueert men deze waarde in vergelijking (198), dan vindt men voor het volume water, dat in elke seconde uitvloeit:

$$I = \frac{2}{3} b (CH - ch) = \frac{2}{3} b (H \sqrt{H} - h \sqrt{h}) \sqrt{2g}.$$

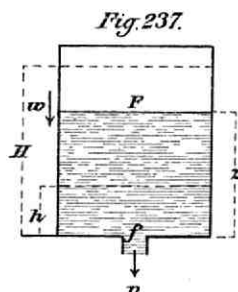
Voor $h = 0$, wordt:

$$I = \frac{2}{3} b H \sqrt{2gH}.$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat bij een overlaat het volume uitvloeiend water even groot is alsof alle waterdeeltjes dezelfde uitvloeiingssnelheid $\frac{2}{3} \sqrt{2gH}$ hadden.

§ 121. Uitvloeiingstijd.

Indien uit de opening f in den horizontalen bodem van een cilindervormig of prismatisch vat (fig. 237) het water met de snelheid

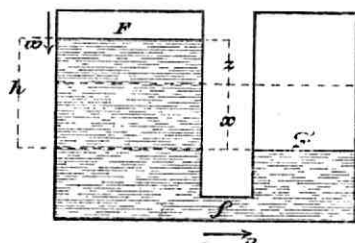


$v = \sqrt{2gz}$ uitvloeit, terwijl van boven geen toevoer plaats grijpt, dan vermindert het volume water in het vat in elke seconde met fv ; diengevolge daalt de waterspiegel, en wel volgens vergelijking (197) met de snelheid:

$$w = \sqrt{2 \left(g \frac{f^2}{F^2} \right) z}.$$

Uit deze vergelijking blijkt dat de beweging eenparig vertraagd is. Indien een punt met eenparig vertraagde beweging een vertraging p heeft, dan zal het op een afstand z van het eindpunt der beweging gekomen een snelheid $\sqrt{2pz}$ hebben; de tijd waarin het dien afstand z zal afleggen is dan $t = \sqrt{\frac{2z}{p}}$. Stelt men hierin $p = g \frac{f^2}{F^2}$, dan verkrijgt men voor den tijd, na welchen de waterspiegel den bodem van het vat bereikt:

Fig. 238.



$$t = \sqrt{\frac{2zF^2}{g f^2}},$$

en voor den tijd in welchen de waterspiegel van de hoogte H tot h daalt:

$$t = \frac{F}{f} \left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \right).$$

Op soortgelijke wijze kan de tijd worden berekend, waarin bij de in fig. 238 voor-

gestelde vaten de waterspiegel in het eene vat zoover daalt en die in het andere vat zoover rijst, dat zij in hetzelfde horizontale vlak liggen. De uitvloeingsnelheid heeft de grootte:

$$v = \sqrt{2g(x+z)},$$

en de snelheid van den dalenden waterspiegel is derhalve:

$$w = \frac{f}{F} v = \sqrt{2g \frac{f^2}{F^2} (x+h)}.$$

Het water dat uit het eene vat vloeit, komt in het andere vat waaruit volgt:

$$\mathfrak{F}x = Fz \quad \text{of} \quad x = \frac{F}{\mathfrak{F}}z.$$

Door substitutie van deze waarde vindt men:

$$w = \sqrt{2 \left[g \frac{f^2}{F^2} \left(1 + \frac{F}{\mathfrak{F}} \right) \right] z}.$$

De dalende waterspiegel heeft dus een eenparig vertraagde beweging met de vertraging:

$$p = g \frac{f^2}{F^2} \left(1 + \frac{F}{\mathfrak{F}} \right).$$

De tijd tot het afleggen van den weg z benoodigd is:

$$t = \sqrt{\frac{2z}{p}} = \sqrt{\frac{2z}{g} \cdot \frac{F^2 \mathfrak{F}}{f^2 (F + \mathfrak{F})}}.$$

Uit de vergelijking:

$$(z+x) = z \left(1 + \frac{F}{\mathfrak{F}} \right) = h,$$

vindt men:

$$z = \frac{h}{1 + \frac{F}{\mathfrak{F}}}.$$

Deze waarde van z in bovenstaande vergelijking substitueerende, vindt men:

$$t = \frac{F \mathfrak{F}}{f(F + \mathfrak{F})} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Is F zoo groot dat het quotient $\frac{\mathfrak{F}}{F}$ gelijk nul mag worden gesteld, dan verkrijgt men voor den tijd, waarin het kleinste vat volloopt:

$$t = \frac{\mathfrak{F}}{f} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

§ 122. Snelheidscoëfficiënt, contractiecoëfficiënt, uitvloeingscoëfficiënt.

Bij de afleiding van de algemeene vergelijkingen der uitvloeijing zijn veronderstellingen gemaakt, welke slechts bij benadering met de werkelijkheid overeenkomen. Om uitkomsten te geven die met de waarneming overeenstemmen, moeten de vergelijkingen correcties ondergaan. Voor de theoretische uitvloeijingssnelheid is gevonden $v = \sqrt{2gh}$, als h de drukhoogte is, en als de uitvloeingsopening f klein is in vergelijking met de doorsnede F van het vat. De werkelijke uitvloeijingssnelheid is steeds kleiner dan de theoretische, en wordt verkregen door deze laatste te vermenigvuldigen met een zekeren coëfficiënt φ , de *snelheidscoëfficiënt* genoemd, welke steeds kleiner is dan één. De werkelijke uitvloeijingssnelheid is derhalve:

$$v = \varphi \sqrt{2gh}.$$

Bij de theoretische bepaling van de hoeveelheid uitstrooïend water werd de uitvloeingsopening f als doorsnede van den waterstraal aangenomen. Ook dit is in den regel niet juist, daar de uitvloeiende straal zich meestal samentrekt, en op eenigen afstand van de opening een kleinere doorsnede heeft. Tengevolge van die contractie verkrijgt men de doorsnede van den straal door de uitvloeingsopening te vermenigvuldigen met een zekeren coëfficiënt α , die kleiner is dan één, en *contractiecoëfficiënt* genoemd wordt. Bevindt zich de opening in den horizontalen bodem, dan verkrijgt men dus het werkelijk volume van het in een seconde uitstrooïend water, als men de doorsnede αf vermenigvuldigt met de snelheid $\varphi \sqrt{2gh}$, of:

$$M = (\alpha \cdot f) (\varphi \sqrt{2gh}) = (\alpha \cdot \varphi) (f \sqrt{2gh}).$$

Het product:

$$\alpha \cdot \varphi = \mu$$

wordt de uitvloeingscoëfficiënt genoemd, omdat men daarmee het theoretisch volume van het uitstroomend water moet vermenigvuldigen, om het werkelijk volume te verkrijgen.

Een zoogenaamde »volkomen contractie» heeft plaats bij de uitvloeijing uit een opening in een vlakken dunnen wand, wanneer tevens de wijidte der opening klein is in vergelijking met haar afstand tot den naasten zijwand en met de drukhoogte. Bij een volkomen contractie van den waterstraal is de contractiecoëfficiënt gemiddeld $\alpha = 0,64$ en de snelheidscoëfficiënt $\varphi = 0,97$; bijgevolg is de uitvloeingscoëfficiënt:

$$\mu = 0,64 \cdot 0,97 = 0,62.$$

Bij een cirkelvormige opening met de middellijn D is de kleinste doorsnede van den straal ongeveer op den afstand $0,5 D$ van de opening gelegen, en heeft zij een middellijn $0,8 D$. Is in dit geval de opening voorzien van een korte buis, die ongeveer den vorm heeft van den gecontraheerden waterstraal, dan is $\alpha = 1$ en $\varphi = 0,97$.

