



Verzameling van vraagstukken op het gebied van de analytische meetkunde der ruimte

<https://hdl.handle.net/1874/235315>

VERZAMELING VAN VRAAGSTUKKEN

OP HET GEBIED VAN DE

ANALYTISCHE MEETKUNDE DER RUIMTE

DOOR

Dr. P. J. HOLLMAN.

EERSTE GEDEELTE

(de rechte lijn, het platte vlak, de bol.)

ALKMAAR,
HERMS. COSTER & ZON.
1886.

P. oct.
1035

P. 8° 1035

CA 1881 N. 40



VERZAMELING VAN VRAAGSTUKKEN

OP HET GEBIED VAN DE

ANALYTISCHE MEETKUNDE DER RUIMTE

DOOR

Dr. P. J. HOLLMAN.

EERSTE GEDEELTE

(de rechte lijn, het platte vlak, de bol.)

ALKMAAR,
HERM^s. COSTER & ZOON.

1886.



VOORBERIGT.

Nu en dan was de schrijver dezer regelen jonge lieden behulpzaam bij hunne wiskundige studien; strekten deze zich zoo ver uit, dat er sprake was van het beoefenen der analytische meetkunde der ruimte, dan deed zich de behoefte aan geschikte voorbeelden gevoelen.

Het is toch maar al te waar wat reeds Newton zegt in zijne *arithmetica universalis*: „*in scientiis addiscendis prosunt exempla magis quam praecepta*”. — Op velerlei ander gebied der wiskunde bestaan verzamelingen van voorbeelden of vraagstukken, maar naar die op het gebied der analytische meetkunde der ruimte zocht de schrijver te vergeefs; hij vond er geene, noch in de hollandsche taal, noch in werken in het buitenland uitgegeven. Gaande weg rijpte daarom bij hem het denkbeeld aanteekening te houden van vraagstukken, die het meest geschikt zijn om het geleerde op dit gebied te onderhouden; het is toch niet voldoende dat men een zeker aantal formules in het hoofd heeft, men moet die ook op geschikte wijze weten te gebruiken, want van den weg, dien men inslaat om een vraagstuk op te lossen, hangt veel, ja meestal alles af. Naarmate het aantal vraagstukken toenam, werd ook de drang grooter anderen in het voordeel te laten deelen. Eindelijk besloot de S. tot de uitgave, daarin welwillend de hand geboden door de heeren Coster alhier. Op hun aanraden zijn vraagstukken en oplossingen afzonderlijk gedrukt; het is toch maar al te waar dat gemakzucht den mensch drijft om het oog te slaan in de oplossing, nog voordat hij zijne krachten beproefd heeft, waardoor veel van het voordeel, dat het uitwerken van vraagstukken anders in den regel heeft, te loor gaat.

Is de S. overtuigd dat het boekje zijne nuttige zijde kan hebben voor den leerling, hij hoopt dat het de goedkeuring moge wegdragen van den leermeester, dat het dienen kan om hem van eene lastige taak te ontheffen.

Voorloopig ziet het eerste gedeelte het licht dat, met het oog

op het examen voor middelbaar onderwijs, de leer behandelt van de regte lijn en het platte vlak, en waaraan eenige voorstellen, betreffende den bol, zijn toegevoegd.

Maakt men de opmerking dat sommige vraagstukken als voorbeelden reeds in de meeste leerboeken gevonden worden, die handelwijze laat zich verdedigen met de opmerking dat bij de oplossing de leer der determinanten is te hulp geroepen, eene leer die, hoe vruchtbaar in de gevolgen, op dit gebied in hollandsche boeken, voor zooverre den S. bekend is, nog te weinig toepassing heeft gevonden.

De laatste vraagstukken zijn zonder de oplossingen vermeld. Voor den leermeester is dit niet van belang ontbloot, wijl hij nu zonder eenige moeite in staat is gesteld zich rekenschap te geven van de vorderingen zijner leerlingen, die, is het voorafgaande goed begrepen en degelijk verwerkt, met eenige inspanning de oplossingen zullen vinden. Van belang ook is het voor hem, die zonder leermeester zich dit schoone gedeelte der wiskunde tracht eigen te maken. Slaagt hij niet in het oplossen der hier gegeven vraagstukken, het is een bewijs dat hij nog niet genoeg bedreven is in de leerwijze der coördinaten, dat hem sommige zaken nog duister zijn, of dat hij niet naar willekeur de formules kan vinden of gebruiken die hij voor het bepaalde doel noodig heeft.

Moge de uitgave iets bijdragen om den lust voor wiskundige studien in het land van Huijgens te onderhouden en te vermeerderen.

V R A A G S T U K K E N.

1. Wanneer drie onderling regthoekige assen OX , OY en OZ door een plat vlak respectievelijk in de punten Q , R en S gesneden worden, zoodat de lijnen QR , RS en SQ respectievelijk de doorgangen zijn van dit platte vlak met de vlakken der xy , der yz en der xz , dan hebben de hoeken QRO , RSO en SQO , of ook de hoeken RQO , SRO en QSO , de eigenschap dat het gedurig product hunner tangenten gelijk is aan de eenheid. Men vraagt het bewijs.

2. Bij een regthoekig coördinaten stelsel heeft tusschen de hoeken, die eene regte lijn met de assen maakt, de volgende betrekking plaats: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Wat wordt er van die uitdrukking als het coördinaten stelsel scheefhoekig is?

3. Eene regte lijn in de ruimte is gegeven door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} z &= ay + bx + c, \\ z &= a^1y + b^1x + c^1; \end{aligned}$$

hoe berekent men uit deze hare projectien op elk der coördinaatvlakken?

4. Onder welke voorwaarden zullen twee in de ruimte gegeven regte lijnen elkander snijden?

5. Bepaal de vergelijking eener regte lijn, die door twee gegeven punten $x_1y_1z_1$ en $x_2y_2z_2$ gaat.

6. Onder welke voorwaarden gaat eene lijn door drie gegeven punten $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$?

7. Bepaal de vergelijkingen der regte lijn, die door een gegeven punt $x_1y_1z_1$ gaat en met twee der coördinaatassen de hoeken α en β maakt.

8. Twee lijnen, die loodregt op elkander staan, zijn ge-

geven. In haar snijpunt wordt eene derde lijn getrokken, die loodregt staat op de eene en een gegeven hoek maakt met de andere; men vraagt naar de vergelijkingen dezer lijn.

9. Op eene regte lijn is een punt $x_1y_1z_1$ gegeven; men vraagt op dezelfde lijn het punt $x_2y_2z_2$ te bepalen, dat op een gegeven afstand van het eerste is gelegen.

10. Op eene gegevene regte lijn wordt het gedeelte AB door het punt C gedeeld in verhouding van $m:n$; hoe drukt men de coördinaten van C uit in die van A en B ?

11. De vergelijkingen van twee regte lijnen en de coördinaten van een punt zijn gegeven; men vraagt naar de vergelijking der regte lijn, die door het gegeven punt gaat en met de gegeven regte lijnen gelijke hoeken maakt.

12. Drie gegeven lijnen kruissen elkander twee aan twee in de ruimte; men vraagt eene vierde lijn te bepalen, die twee der gegevene snijdt en evenwijdig loopt aan de derde.

13. Drie gegeven lijnen kruissen elkander twee aan twee in de ruimte; men vraagt de hoeken te bepalen, welke een vierde lijn, die twee der gegevene snijdt en evenwijdig loopt met de derde, met de gegevene lijnen maakt, en den afstand te berekenen, waarop zij van de derde verwijderd is.

14. De hellingen eener regte lijn op de assen van gegeven scheefhoekige coördinaten zijn gelijk; men vraagt den hoek te bepalen, dien gezegde lijn met de assen maakt.

15. Hoe weet men dat een gegeven lijn in een gegeven vlak ligt?

16. Men begeert de voorwaarde te vinden, waaraan voldaan moet worden, zal eene lijn loodregt op een vlak staan.

17. Wanneer gegeven zijn de lengte der loodlijn, welke uit den oorsprong van regthoekige coördinaten op een vlak is nedergelaten, benevens de hoeken door die lijn met de assen gevormd, vraagt men naar de vergelijking van het vlak.

18. Geef nog de vergelijkingen der regte lijn aan, die door een gegeven punt gaat en loodregt staat op eene gegevene regte lijn.

19. De vergelijking en de lengte te vinden der lijn, die loodregt op twee gegeven lijnen staat.

20. Men vraagt de voorwaarden te bepalen, waaraan de rigtingshoeken van drie lijnen ten opzichte van onderling loodrechte assen moeten voldoen, zullen die drie lijnen evenwijdig zijn aan een zelfde plat vlak.

21. Bepaal het snijpunt van drie gegeven vlakken in den vorm van een determinant.

22. Bepaal het vlak dat gaat door drie gegeven punten, die niet in dezelfde rechte lijn liggen, hierbij gebruik makend van de leer der determinanten.

23. Zoek de vergelijking van een vlak dat door twee evenwijdige lijnen gaat.

24. En hoe wordt de vergelijking van het vlak, wanneer de lijnen elkander snijden?

25. Zoek in den vorm van een determinant de vergelijking van het vlak, dat door twee gegeven punten gaat en loodrecht staat op een gegeven vlak.

26. Welke betrekkingen moeten er plaats vinden tusschen de constanten in de vergelijkingen van drie vlakken, opdat deze elkander langs het beloop eener rechte lijn snijden? En hoe wordt de voorwaardenvergelijking, opdat de snijding volgens evenwijdige lijnen geschiede?

27. Zoek de vergelijking van een vlak, dat door een gegeven punt en eene gegebene rechte lijn gaat.

28. Welke is de vergelijking van het vlak, dat door twee gegeven punten gaat en evenwijdig loopt aan eene gegebene lijn?

29. Zoek den determinant, waardoor het vlak bepaald wordt, dat door een gegeven rechte lijn gaat en loodrecht staat op een gegeven vlak.

30. Welke wordt de determinant in het vorig vraagstuk bedoeld, wanneer het vlak evenwijdig zal loopen aan twee gegeven lijnen:

$$\begin{aligned} x &= mz + p, & y &= nz + q; \\ x &= m^1 z + p^1, & y &= n^1 z + q^1; \end{aligned}$$

en door een gegeven punt $x_1 y_1 z_1$ gaan?

31. Men vraagt naar de vergelijking der rechte lijn, welke evenwijdig loopt met twee gegeven vlakken en door een gegeven punt gaat.

32. Bepaal het vlak dat loodregt staat op eene gegevene lijn

$$x = mz + p, \quad y = nz + q;$$

en door het punt x_1, y_1, z_1 gaat.

33. De vergelijkingen eener regte lijn en de coördinaten van een punt zijn gegeven. Men vraagt naar de plaats aller regte lijnen, die door dat punt gaan en loodregt staan op de gegeven lijn. Hoe vindt men de vergelijkingen der regte lijn, welke door het gegeven punt gaande de eerstgenoemde lijn loodregt snijdt? Eindelijk verlangt men de lengte dier loodlijn te kennen.

34. Hoe bepaalt men den afstand van een punt tot een vlak, wanneer de coördinaatassen niet regthoekig op elk-ander staan?

35. De vergelijking te vinden der regte lijn, welker punten alle op gelijke afstanden van de coördinaatvlakken zijn.

36. Men vraagt naar de vergelijking van een vlak, waarvan elk punt de eigenschap heeft dat zijne afstanden tot twee gegeven vlakken eene standvastige verhouding hebben.

37. Bereken den afstand van twee gegeven evenwijdige vlakken.

38. Wanneer S en S^1 de inhouden zijn van twee figuren in hetzelfde platte vlak gelegen, en $S_x, S_x^1; S_y, S_y^1; S_z, S_z^1$ de projectien harer inhouden op drie onderling regthoekige vlakken voorstellen, dan heeft men

$$SS^1 = S_x S_x^1 + S_y S_y^1 + S_z S_z^1;$$

men vraagt naar het betoog.

39. Van een driehoek zijn de coördinaten der hoekpunten gegeven; men vraagt den inhoud van dien driehoek in den vorm van een determinant uit te drukken.

40. Wanneer α, β en γ de hoeken zijn, welke een regte lijn L met hare projectien op drie onderling regthoekige vlakken maakt, δ de afstand van den oorsprong der coördinaten tot de lijn L , δ_1, δ_2 en δ_3 de afstanden van den oorsprong tot de projectien van L op de coördinaatvlakken, dan is

$$\delta^2 = \delta_1^2 \cos^2 \alpha + \delta_2^2 \cos^2 \beta + \delta_3^2 \cos^2 \gamma;$$

men vraagt het betoog.

41. Wanneer twee vlakken A en B benevens een punt p gegeven zijn, en men brengt door p twee vlakken C en D , zoodat de lijn van doorsnede dezer laatsten de doorsnede van A en B snijdt, en voorts door de lijn van doorsnede van A en C en die van B en D een vlak F , benevens door de doorsnede van A en D en van B en C een vlak G , dan vraagt men naar de plaats der doorsneden van de vlakken F en G .

42. Er zijn gegeven drie lijnen a , b en c , die elkander in een punt snijden, benevens eene vierde lijn, die geen der anderen ontmoet. Door de lijn d worden twee vlakken D en D' gebragt; zij snijden elk voor zich de lijnen a , b en c in drie veranderlijke punten p_a , p_b , p_c en p'_a , p'_b , p'_c . Als men nu een vlak F brengt door de punten p_a , p_b en p'_c ; een ander vlak G door de punten p_a , p'_b en p_c ; een derde vlak H eindelijk door p'_a , p_b en p_c , dan vraagt men de punten van doorsnede der vlakken F , G en H te bepalen.

43. Zet men op de stralen, die uit een punt O naar verschillende punten van een gegeven vlak loopen, stukken uit omgekeerd evenredig met de lengten dier stralen, dan zullen de vlakken, loodregt op de uiteinden dier stukken gebragt, allen door een punt gaan. Men vraagt het betoog.

44. Bij een zeshoek, wiens zijden niet allen in hetzelfde vlak liggen, maar welks overstaande zijden twee aan twee gelijk zijn en evenwijdig loopen, liggen de punten, waarin de zijden midden door gedeeld worden in een plat vlak. Men vraagt het betoog.

45. Wanneer de overstaande zijden van een zesvlak verlengd wordende, elkander snijden volgens rechte lijnen, die in een vlak liggen, dan ontmoeten de diagonalen van dat zesvlak elkander in een punt. Men vraagt het betoog.

46. Er zijn gegeven drie evenwijdige lijnen, die niet allen in hetzelfde vlak liggen; men zet op een dezer lijnen eene gegevene lengte AB uit, en neemt vervolgens op de tweede een willekeurig punt C , op de derde eindelijk een ander willekeurig punt D ; hoe bewijst men dat de inhoud der piramide $ABCD$ immer dezelfde of constant zal zijn, welke

ook de ligging der punten C en D moge wezen, onverschillig ook op welke lijn men AB heeft genomen?

47. Wanneer men door het midden van de ribben eener driehoekige piramide vlakken brengt, die loodrecht staan op de overstaande ribben, dan snijden die zes vlakken elkander in een punt. Men vraagt naar het betoog.

48. Men vraagt te bewijzen dat, wanneer twee paren overstaande ribben van een tetraeder loodrecht op elkander staan, zulks ook het geval met het derde paar is.

49. Wanneer de overstaande ribben van een tetraeder loodrecht op elkander staan, snijden de vier hoogtelijnen elkander in een punt. Men vraagt wederom het betoog.

50. Wanneer de hoogtelijnen van een tetraeder elkander in een punt snijden, dan ontmoeten de gemeenschappelijke loodlijnen op de overstaande ribben elkander in datzelfde punt. Men vraagt het bewijs.

51. Te bewijzen dat, wanneer men in een tetraeder het midden der overstaande ribben door rechte lijnen vereenigt, die lijnen elkander in een punt snijden, en in dat punt tevens midden door worden gedeeld.

52. Bewijs dat het zwaartepunt eener driehoekige piramide, het ontmoetingspunt harer hoogtelijnen en het punt, waarin de loodlijnen, die door de zwaartepunten der zijvlakken gaan, elkander snijden, in eene rechte lijn liggen.

53. Wanneer de hoogtelijnen van een tetraeder elkander in een punt snijden, en men laat uit dat punt loodlijnen neder op de zes ribben, dan is voor dat punt de som dier loodlijnen een minimum. Waarom?

54. Wanneer de hoogtelijnen van een tetraeder elkander in een punt ontmoeten, liggen de uiteinden der gemeenschappelijke loodlijnen op twee overstaande ribben nedergelegaten, en het midden der ribben — in het geheel twaalf punten — op het oppervlak van een bol, welks middelpunt zamenvalt met het zwaartepunt van de driehoekige piramide. Men vraagt het betoog.

55. Van eene driehoekige piramide zijn de coördinaten der toppunten gegeven. Men vraagt hieruit den inhoud te bepalen.

56. Wanneer men in een tetraeder $ABCD$ door de ribben AB , AC en AD ; die elkander in het hoekpunt A ontmoeten, en de punten B^1 , C^1 en D^1 , die de overstaande ribben midden door deelen, vlakken brengt, dan snijden deze elkander volgens eene regte lijn α , gaande door het hoekpunt A .

Herhaalt men de bewerking met de andere hoekpunten B , C en D , dan verkrijgt men op die wijze nog drie andere lijnen β , γ en δ . Deze vier lijnen, benevens de lijnen p , q en r , welke het midden D^1 en D^{11} , C^1 en C^{11} , B^1 en B^{11} der overstaande ribben verbinden, snijden elkander in een punt O .

De drie vlakken, welke door het midden van drie aan elkander grenzende ribben, loodrecht op de overstaande ribben gebragt worden, snijden elkander volgens het beloop eener regte lijn; en wijl men de bewerking voor elk der drie overige hoekpunten kan herhalen, verkrijgt men vier regte lijnen, die elkander in een punt O^1 ontmoeten.

De drie vlakken, welke door het midden van drie in hetzelfde vlak liggende ribben loodrecht op de laatsten gebragt worden, snijden elkander volgens eene regte lijn; herhaalt men de bewerking voor de andere zijvlakken, dan verkrijgt men drie andere snijlijnen, welke allen door hetzelfde punt O^{11} gaan.

Eindelijk liggen de punten O , O^1 en O^{11} in eene regte lijn, en deelt het punt O de lijn O^1O^{11} middendoor. Men vraagt het betoog.

57. Beproof de lijnen α , β , γ en δ benevens de lijnen p , q en r in het vorig vraagstuk vermeld, uit te drukken in eene functie der zes ribben van de driehoekige piramide.

58. Men kent de som der kwadraten van de afstanden van eenig punt p tot n gegeven punten. Hoe berekent men hieruit de meetkundige plaats van het punt p ?

59. De vergelijking van een bol en de coördinaten van een punt op zijn oppervlak zijn gegeven; bepaal de vergelijking van het raakvlak aan dien bol in het gegeven punt.

60. Door eene gegevene lijn wordt een raakvlak aan een gegeven bol gebragt; men vraagt naar de coördinaten van het raakpunt.

61. Aan een gegeven bol is een raakvlak gebragt, dat evenwijdig loopt met een gegeven vlak. Hoe bepaalt men de vergelijking van dat raakvlak?

62. Zoek een determinant, welke de vergelijking van den bol uitdrukt, en waarbij gebruik gemaakt wordt van de gedeeltelijke eerst afgeleide functien en den straal.

63. Zoek de vergelijking van den bol, die door vier gegeven punten gaat.

64. Zoek de betrekking tusschen de afstanden van vijf punten: $M(xyz)$, $M_1(x_1y_1z_1)$, $M_2(x_2y_2z_2)$, $M_3(x_3y_3z_3)$, $M_4(x_4y_4z_4)$, alle op de oppervlakte van denzelfden bol gelegen.

65. Men vraagt de punten te bepalen uit welke men gelijke raaklijnen kan trekken aan twee gegeven bollen, die elkander snijden.

66. Men vraagt de vergelijking te bepalen van den bol, die door drie gegeven punten gaat en een gegeven vlak aanraakt.

67. Men vraagt het vlak te bepalen, dat door een gegeven lijn gaat en een gegeven bol volgens een gegeven cirkel snijdt.

68. De vergelijkingen van drie bollen zijn gegeven; men vraagt naar de meetkundige plaats van het middelpunt eens vierden bols, die de drie gegevene aanraakt, benevens de meetkundige plaats van elk der drie aanrakingspunten.

69. Twee gegeven punten A en B liggen buiten een gegeven bol; hoe bepaalt men het punt C op den bol zoo, dat $AC + BC$ een minimum is?

70. Indien gegeven zijn de vergelijkingen van een bol en van eene rechte lijn in de ruimte, begeert men de coördinaten van een op die lijn gelegen punt te vinden, dat een gegeven afstand van het oppervlak des bols heeft.

71. Welk punt van een gegeven lijn heeft den kortsten afstand tot het oppervlak van een gegeven bol, en hoe groot is die afstand?

72. De vergelijkingen van de drie vlakken eens drievlakigen hoeks zijn gegeven; men vraagt naar de coördinaten

van het middelpunt eens daarin sluitenden bols van gegeven straal.

73. Zoek een determinant, die den straal van den bol om een tetraeder beschreven uitdrukt in functie van drie aan elkander grenzende ribben en de hoeken, die deze met elkander maken.

74. Hetzelfde als in het vorig vraagstuk wordt gevraagd voor den straal van den ingeschreven bol.

75. Twee platte vlakken en een bol snijden elkander in dier voege, dat een gedeelte van de gemeene doorsnede der vlakken, als koorde, binnen den bol valt. Indien men nu de lengte dier koorde kent, en ook nog gegeven zijn de vergelijkingen der beide vlakken, ten opzichte van onderling regthoekige coördinaatassen, wier oorsprong in het middelpunt van den bol is genomen, begeert men daaruit den straal van den bol te vinden.

76. Wanneer de vierkanten a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 en a_6 der onderlinge afstanden van vier punten voldoen aan

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_3 & a_2 & a_4 \\ 1 & a_3 & 0 & a_1 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_1 & 0 & a_6 \\ 1 & a_4 & a_5 & a_6 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dan liggen die punten in een plat vlak. Men vraagt het betoog.

77. Van een driehoek zijn gegeven de inhouden der projectien op elk der regthoekige coördinaatvlakken, uitgedrukt in de coördinaten der hoekpunten. Men vraagt den inhoud van dien driehoek te bepalen, en de vergelijking op te maken van het vlak, waarin hij gelegen is.

78. Hoe lost men het vorig vraagstuk op, bijaldien van den driehoek gegeven zijn de vergelijkingen van de projectien der zijden?

79. De vergelijkingen te bepalen van de zijvlakken en ribben van het regelmatige viervlak.

80. Hetzelfde voor het regelmatig achtvlak.

81. De vlakken, die door de ribben van een drievlakkigen

hoek gaan, en loodrecht staan op de overliggende zijden, snijden elkander in eene rechte lijn. Men vraagt hiervan het betoog, gebruik makend van de vergelijkingen der zijvlakken in den normaalvorm.

82. De zes vlakken, die de standhoeken der zijvlakken van een tetraeder of viervlak midden door deelen, snijden elkander in een punt. Bij het bewijs gebruik te maken van de vergelijkingen der zijvlakken in den normaalvorm.

83. De vergelijking van het vlak, dat den tweevlakkigen hoek, waarin de oorsprong van het coördinaten-stelsel ligt, midden door deelt, is $E_1 - E_2 = 0$, wanneer $E_1 = 0$ en $E_2 = 0$ de vergelijkingen zijn der vlakken in den normaalvorm genomen. Het vlak dat den supplementshoek midden door deelt, wordt aangewezen door $E_1 + E_2 = 0$. Men vraagt het betoog.

84. Welke beteekenis mag men hechten aan de vergelijkingen

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + E_3 &= 0 \\ -E_1 + E_2 + E_3 &= 0 \\ E_1 - E_2 + E_3 &= 0 \\ E_1 + E_2 - E_3 &= 0, \end{aligned}$$

wanneer $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ en $E_3 = 0$ de vergelijkingen van drie vlakken in den normaalvorm voorstellen?

85. Bewijs dat

$$288 I^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix},$$

waarin I de inhoud is van het viervlak of den tetraeder $M_1 M_2 M_3 M_4$, en d het vierkant van de lengte der ribbe uitdrukt, zoodat men in het algemeen heeft:

$$d_{pq} = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2.$$

86. De hellingen eener rechte lijn op gegeven scheefhoekige coördinaatvlakken zijn gelijk; men vraagt den hoek te bepalen, dien de lijn met de coördinaatvlakken maakt.

87. Trekt men door een punt O , gelegen in de zijde ABC van een viervlak $ABCD$, lijnen O_a , O_b en O_c , even-

wijdig aan de ribben AD , BD en CD , tot zij de zijden DBC , DAC en DAB ontmoeten, dan is

$$\frac{O_a}{DA} + \frac{O_b}{DB} + \frac{O_c}{DC} = 1;$$

men vraagt naar het betoog.

88. Neemt men een punt O binnen een viervlak $ABCD$, en verlengt men de lijnen AO , BO , CO en DO tot zij in a , b , c en d de overstaande zijden ontmoeten, dan heeft men de betrekking

$$\frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} + \frac{Od}{Dd} = 1;$$

men vraagt wederom het betoog.

89. Bewijs dat elk vlak, gaande door het midden van twee overstaande ribben van een viervlak, dit laatste in twee gelijke deelen verdeelt.

90. Men vraagt een gegeven viervlak door een plat vlak zoodanig in twee segmenten te verdeelen, dat de zwaartepunten dezer laatsten gelegen zijn op eene regte lijn, loodrecht op dat vlak.

91. Binnen een drievlakkigen hoek is een punt gegeven; men vraagt een plat vlak zoodanig door dat punt te brengen dat het gedeelte door den drievlakkigen hoek afgesneden gelijkvormig zij met een gegeven driehoek.

92. In de ruimte ligt eene regte lijn AB en buiten deze twee punten P en Q . Men begeert uit het punt P in eene regte lijn PC naar een punt C van de gegeven lijn te gaan, en uit dit punt C tot het ander gegeven punt Q , insgelijks in eene regte lijn, terug te keeren, zoodanig dat men den kortsten weg aflegt; bepaal het punt C .

93. Men begeert op eene regte lijn in de ruimte het punt te vinden, uit hetwelk twee punten in de ruimte onder den grootsten hoek gezien worden.

94. Bewijs dat het vierkant van het zijvlak tegenover den regten drievlakkigen hoek eener regthoekige driehoekige piramide gelijk is aan de som van de vierkanten der drie zijvlakken, welke om den regten drievlakkigen hoek staan.

95. Aantoonen dat het vierkant van een der zijvlakken

eener driehoekige piramide gelijk is aan de som van de vierkanten der drie andere zijvlakken, verminderd met de som der producten dezer drie andere zijvlakken, op alle mogelijke wijzen twee aan twee genomen, en elk dezer producten vermenigvuldigd met de cosinus van den standhoek der twee zijvlakken, die in dit product voorkomen.

96. Wanneer in de ruimte uit eenig punt P vier lijnen zoodanig getrokken zijn, dat geen drie dezer lijnen in hetzelfde vlak liggen, dan begeert men eene vergelijking op de zes onderscheidene hoeken te vinden, welke deze lijnen, twee aan twee genomen, met elkander maken.

97. Indien men door een willekeurig punt drie onderling loodrechte vlakken brengt, die ieder in het bijzonder een gegeven bol snijden, zal de som der drie doorsneden eene standvastige grootheid zijn, hoe men overigens de rigting der vlakken gekozen hebbe. Men vraagt hiervan het bewijs.

98. Betoog dat in een tetraeder, welks hoogtelijnen elkander in hetzelfde punt ontmoeten, dit punt, het zwaartepunt van den tetraeder en het middelpunt van den ingeschreven bol in eene regte lijn liggen.

99. Toon aan dat in den tetraeder in het voorgaand vraagstuk omschreven: 1°. de zwaartepunten der zijvlakken, 2°. de voetpunten der hoogtelijnen, 3°. de punten gelegen op die hoogtelijnen, op twee derden van den afstand tusschen de toppen en het snijpunt der hoogtelijnen, in het geheel derhalve 12 punten, allen liggen op het oppervlak van denzelfden bol.

100. Zoek ook het bewijs dat het middelpunt van den bol in het laatste vraagstuk aangegeven ligt op het midden der lijn, die het snijpunt der hoogtelijnen vereenigt met het snijpunt der loodlijnen, op elk zijvlak uit het zwaartepunt dier zijvlakken opgericht. De straal van dezen bol en de straal van dien om den tetraeder beschreven staan tot elkander als een tot drie.

OPLOSSINGEN DER VRAAGSTUKKEN.

1. Uit de regthoekige driehoeken OQR , ORS en OSQ volgt terstond

$$\text{tang } QRO = \frac{OQ}{OR}; \text{ tang } RQO = \frac{OR}{OQ};$$

$$\text{tang } RSO = \frac{OR}{OS}; \text{ tang } SRO = \frac{OS}{OR};$$

$$\text{tang } SQO = \frac{OS}{OQ}; \text{ tang } QSO = \frac{OR}{OS};$$

daar nu blijkbaar

$$\frac{OQ}{OR} \times \frac{OR}{OS} \times \frac{OS}{OQ} = \frac{OR}{OQ} \times \frac{OS}{OR} \times \frac{OQ}{OS} = 1$$

is, volgt uit de bovenstaande waarden onmiddellijk dat men ook heeft:

$$\text{tang } QRO \times \text{tang } RSO \times \text{tang } SQO = 1,$$

$$\text{en tang } RQO \times \text{tang } SRO \times \text{tang } QSO = 1.$$

2. Wij noemen de hoeken, die de coördinaatassen OX , OY en OZ met elkander maken λ , μ en ν , zoodat

$$\text{hoek } YOZ = \lambda, \text{ } ZOX = \mu, \text{ } XOY = \nu,$$

is.

Uit den oorsprong trekken wij de lijn OD en stellen

$$\text{hoek } DOX = \alpha, \text{ } DOY = \beta, \text{ } DOZ = \gamma.$$

Op de lijn OD nemen wij, van den oorsprong af, eene lengte OM gelijk aan de eenheid, en noemen de coördinaten van het punt M x , y en z . Trekt men voorts uit M de lijn MP evenwijdig met de as der Z , totdat zij in P het vlak der XY ontmoet, en in dat laatste vlak de lijn PQ evenwijdig aan de as der Y , totdat zij in Q de as der X ontmoet, dan is

$$OQ = x, \text{ } QP = y \text{ en } PM = z.$$

Projicieert men achtereenvolgens de rechte lijn OM en de gebroken lijn $OQPM$ op de rechte lijn OD en de assen OX , OY en OZ , dan heeft men de volgende vier vergelijkingen:

$$\begin{aligned} -1 + x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma &= 0, \\ -\cos \alpha + x + y \cos \nu + z \cos \mu &= 0, \\ -\cos \beta + x \cos \nu + y + z \cos \lambda &= 0, \\ -\cos \gamma + x \cos \mu + y \cos \lambda + z &= 0. \end{aligned}$$

Elimineert men nu de veranderlijken x , y en z , dan vindt men voor de verhouding, die bestaat tusschen de hoeken λ , μ , ν , α , β en γ

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \alpha & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \beta & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \gamma & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Men kan dien determinant ontwikkelen en zal dan vinden

$$\begin{aligned} &\cos^2 \alpha \sin^2 \lambda + 2 \cos \beta \cos \gamma (\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda) + \\ &+ \cos^2 \beta \sin^2 \mu + 2 \cos \gamma \cos \alpha (\cos \nu \cos \lambda - \cos \mu) + \\ &+ \cos^2 \gamma \sin^2 \nu + 2 \cos \alpha \cos \beta (\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu) = \Delta^2, \end{aligned}$$

waarin

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu,$$

of

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Daar de vergelijking der projectie blijkbaar ook de vergelijking van het projicerend vlak is, zoo komt het er slechts op aan om de vergelijkingen der projicerende vlakken te vinden. En daar deze steeds evenwijdig loopen met een der coördinaatassen, zoo worden zij door eene vergelijking tusschen twee coördinaten uitgedrukt. Elimineert men derhalve achtereenvolgens z , y en x tusschen de vergelijkingen der gegevene lijn, dan verkrijgt men voor de vergelijking der projectie

$$\text{Op het vlak } XY: (a-a^1)y + (b-b^1)x + c-c^1 = 0;$$

$$\text{Op het vlak } XZ: (a-a^1)z + (a^1b-ab^1)x + a^1c-ac^1 = 0;$$

$$\text{Op het vlak } YZ: (b-b^1)x + (ab^1-a^1b)y + b^1c-bc^1 = 0.$$

4. Stellen wij de gegeven lijnen voor door

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0; \\ A^1x + B^1y + C^1z + D^1 &= 0, \\ A_1^1x + B_1^1y + C_1^1z + D_1^1 &= 0; \end{aligned} \quad \cdot \cdot \cdot (1)$$

dan zullen zij elkander snijden, wanneer de coördinaten van het snijpunt voldoen aan (1) en (2). Elimineert men derhalve x , y en z tusschen (1) en (2), dan erlangt men de voorwaardenvergelijking:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A^1 & B^1 & C^1 & D^1 \\ A_1^1 & B_1^1 & C_1^1 & D_1^1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zijn echter de lijnen gegeven door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x &= az + p \\ y &= bz + q \end{aligned} \quad (3) \quad \begin{aligned} x &= a^1z + p^1 \\ y &= b^1z + q^1 \end{aligned} \quad (4),$$

dan brengt men dit geval tot het voorgaande terug, door de vergelijkingen aldus te schrijven:

$$\begin{aligned} -x + 0y + az + p &= 0, \\ 0x - y + bz + q &= 0, \\ -x + 0y + a^1z + p^1 &= 0, \\ 0x - y + b^1z + q^1 &= 0; \end{aligned}$$

en elimineert men nu x , y en z , dan wordt de voorwaardenvergelijking

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & a & p \\ 0 & -1 & b & q \\ -1 & 0 & a^1 & p^1 \\ 0 & -1 & b^1 & q^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & p \\ 0 & 1 & b & q \\ 1 & 0 & a^1 & p^1 \\ 0 & 1 & b^1 & q^1 \end{vmatrix} = 0.$$

Trekken wij de twee eerste regels van de beide laatsten af, dan verkrijgen wij

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & p \\ 0 & 1 & b & q \\ 0 & 0 & a^1 - a & p^1 - p \\ 0 & 0 & b^1 - b & q^1 - q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 - a & p^1 - p \\ b^1 - b & q^1 - q \end{vmatrix} = 0,$$

wat overeenkomt met

$$\frac{p^1 - p}{a^1 - a} = \frac{q^1 - q}{b^1 - b},$$

dat tevens de coördinaat z van het snijpunt is. Brengt men die waarde in (3) of (4) over, dan worden ook x en y bekend.

5. Wanneer men de vergelijking der te zoeken lijn voorstelt door

$$(1) \quad x = az + p, \quad (2) \quad y = bz + q,$$

dan zijn a en p , b en q de onbekenden, welke men moet bepalen uit de voorwaarde dat de lijn door de beide gegeven punten gaat. Substitueert men achtereenvolgens de coördinaten der gegeven punten in (1) en (2), dan verkrijgt men de voorwaardensvergelijkingen

$$(3) \quad x_1 = az_1 + p, \quad (4) \quad y_1 = bz_1 + q;$$

$$(5) \quad x_2 = az_2 + p, \quad (6) \quad y_2 = bz_2 + q.$$

Uit deze kan men a en p , b en q bepalen en in (1) en (2) overbrengen. Geschikter is het a en p tusschen (1), (3) en (5), en b en q tusschen (2), (4) en (6) te elimineren, wat geschiedt kan door de determinanten

$$(7) \quad \begin{vmatrix} x & -z & -1 \\ x_1 & -z_1 & -1 \\ x_2 & -z_2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad (8) \quad \begin{vmatrix} y & -z & -1 \\ y_1 & -z_1 & -1 \\ y_2 & -z_2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Trekt men den tweeden regel van den eersten, den derden van den tweeden af, dan heeft men

$$\begin{vmatrix} x & -x_1 & z_1 - z & 0 \\ x_1 & -x_2 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_2 & -z_2 & 1 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -x_1 & z_1 - z \\ x_1 & -x_2 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - x_1)(z_2 - z_1) - (x_1 - x_2)(z_1 - z) = 0,$$

of

$$x - x_1 = \frac{x_1 - x_2}{z_2 - z_1}(z_1 - z); \quad \dots (9)$$

op overeenkomstige wijze vindt men uit (8)

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{z_2 - z_1}(z_1 - z), \quad \dots (10)$$

door welke vergelijkingen (9) en (10) de lijn geheel bepaald is.

6. Bij de voorwaardensvergelijkingen (3), (4), (5) en (6) van het vorig vraagstuk komen nog de volgende

$$x_3 = az_3 + p, \quad y_3 = bz_3 + q,$$

zoodat a en p , b en q tusschen deze en (3), (4), (5) en (6) moeten worden geelimineerd, waartoe men heeft:

$$\begin{vmatrix} x_1 & - & z_1 & - & 1 \\ x_2 & - & z_2 & - & 1 \\ x_3 & - & z_3 & - & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y_1 & - & z_1 & - & 1 \\ y_2 & - & z_2 & - & 1 \\ y_3 & - & z_3 & - & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

waaruit de voorwaarden

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \text{ en } \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$$

7. Noemen wij de vergelijkingen der rechte lijn

$$x = az + p, \text{ en } y = bz + q,$$

dan zijn a en p , b en q de onbekenden, welke wij uit de gegevens van het vraagstuk moeten trachten te bepalen. Daar de lijn door het punt x_1, y_1, z_1 gaat, kunnen wij hare vergelijkingen onder den volgenden vorm brengen:

(1) $\dots x - x_1 = a(z - z_1)$, (2) $\dots y - y_1 = b(z - z_1)$, waarin nog slechts de onbekenden a en b voorkomen. Zijn α en β de hoeken, welke de lijn met twee der coördinaatassen maakt, dan wordt de derde hoek γ uitgedrukt door

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

Maar de drie hoeken α , β en γ voldoen aan de vergelijkingen

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

waaruit door deeling

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = a, \quad \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = b.$$

Deze waarden voor a en b overbrengende in (1) en (2), komt er voor de vergelijkingen der gezochte lijn

$$x - x_1 = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} (z - z_1), \quad y - y_1 = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} (z - z_1),$$

of meer symmetrisch

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}.$$

Wil men, ten slotte, p en q bepalen, dan moet men gebruik maken van de vergelijkingen

$$x_1 = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} z_1 + p \text{ en } y_1 = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} z_1 + q.$$

8. Noemen wij de vergelijkingen der lijnen, die loodregt op elkander staan,

$$(1) \quad x = az + p, \quad (2) \quad y = bz + q;$$

$$(3) \quad x = a^1 z + p^1, \quad (4) \quad y = b^1 z + q^1;$$

dan zijn a en p , b en q , a^1 en p^1 , b^1 en q^1 niet willekeurig gegeven. Eerstens toch moeten zij voldoen aan de voorwaarde dat de lijnen elkander snijden; elimineert men x , y en z tusschen (1), (2), (3) en (4), dan verkrijgt men de daartoe noodige betrekking

$$z = \frac{p^1 - p}{a^1 - a} = \frac{q^1 - q}{b^1 - b}, \quad . \quad . \quad (5)$$

welke dienen kan om een der grootheden a , a^1 , b , b^1 , p^1 , p , q^1 of q in functie der overigen uit te drukken.

Maar de lijnen (1), (2) en (3), (4) moeten loodregt op elkander staan, hetwelk nog aanleiding geeft tot de vergelijking

$$a a^1 + b b^1 + 1 = 0, \quad . \quad . \quad (6)$$

waardoor wederom een der grootheden, stel b^1 , in functie van a , a^1 en b kan worden uitgedrukt.

Heeft men q^1 uit (5) en b^1 uit (6) overgebracht in (4), dan bevatten (1), (2), (3) en (4) nog 6 van elkander onafhankelijke grootheden.

Noemt men het snijpunt der gegeven lijnen x_1 , y_1 , z_1 dan heeft men ter bepaling van z_1 uit (5)

$$z_1 = \frac{p^1 - p}{a^1 - a}, \quad \text{of} \quad z_1 = \frac{p^1 - q}{b^1 - b}.$$

Uit (1) of (3) kan men vervolgens x_1 , en uit (2) of (4) y_1 berekenen, nadat men de gevonden waarde van z_1 in die vergelijkingen heeft overgebracht.

De lijn, welke gezocht wordt, moet gaan door het snijpunt der gegeven lijnen; hare vergelijkingen zijn derhalve van den vorm

$$x - x_1 = a^{11} (z - z_1), \quad y - y_1 = b^{11} (z - z_1),$$

met de onbekenden a^{11} en b^{11} . Het komt er dus op aan die onbekenden in de verdere gegevens van het vraagstuk uit te drukken. De lijn, welke door het snijpunt x_1 , y_1 , z_1 gaat, moet loodregt staan op eene der gegevene lijnen, op

de eerste bijvoorbeeld, en dit geeft, zoo als wij weten, aanleiding tot de vergelijking:

$$aa^{11} + bb^{11} + 1 = 0. \quad (7).$$

Maar zij moet een gegeven hoek maken met de andere, in casu de tweede lijn. Noem dien hoek α , dan wordt zijne waarde bepaald door

$$\cos \alpha = \frac{a^1 a^{11} + b^1 b^{11} + 1}{\sqrt{(a^{1^2} + b^{1^2} + 1)} \sqrt{(a^{11^2} + b^{11^2} + 1)}} \quad (8).$$

Brengt men nu a^{11} of b^{11} uit (7) over in (8), dan erlangt men eene vierkants-vergelijking ter bepaling van b^{11} of a^{11} ; heeft men zoo a^{11} of b^{11} gevonden, dan volgt de andere b^{11} of a^{11} onmiddellijk uit (7), waarmede het vraagstuk opgelost is.

De vierkantsvergelijking geeft aanleiding tot twee verschillende waarden, wat met den aard der zaak overeenkomt, want men kan de lijn zelve of haar verlengde beschouwen; of ook de gegeven hoek kan scherp of stomp zijn; het nulpunt zijner telling ligt regts of links.

9. Wanneer de vergelijkingen der gegeven lijn worden voorgesteld door

$$x = az + p \quad \text{en} \quad y = bz + q,$$

dan moeten, wjl $x_2 y_2 z_2$ op die lijn ligt, ook gelden de vergelijkingen

$$(1) \quad x_2 = az_2 + p \quad \text{en} \quad y_2 = bz_2 + q. \quad (2)$$

Laat de gegeven afstand der punten $x_1 y_1 z_1$ en $x_2 y_2 z_2$ gelijk aan R gesteld worden, dan heeft men, volgens een bekenden regel

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = R^2,$$

en hierin voor x_2 en y_2 de boven gevonden waarden overbrengende

$$(x_1 - az_2 - p)^2 + (y_1 - bz_2 - q)^2 + (z_1 - z_2)^2 = R^2,$$

uit welke vierkantsvergelijking z_2 gemakkelijk gevonden wordt. Ter bepaling van x_2 en y_2 dienen vervolgens (1) en (2). Dat men voor z_2 en bijgevolg voor x_2 en y_2 twee waarden vindt, is zeer natuurlijk, want het punt $x_2 y_2 z_2$ kan regts of links, wil men, hooger of lager dan $x_1 y_1 z_1$ liggen.

10. Noem de coördinaten van A x_1 y_1 z_1 , die van B x_2 y_2 z_2 , dan vindt men voor de coördinaten x y z van C :

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}; \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}; \quad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}.$$

Men verkrijgt deze waarden, bijvoorbeeld de laatste, uit het trapezium, welks evenwijdige zijden de coördinaten z_1 en z_2 zijn, en waarin derhalve z een aan die zijden evenwijdige lijn is, die door het punt C gaat.

Heeft men op eene rechte lijn drie punten A_1 , A_2 en A_3 , welker coördinaten respectievelijk zijn x_1 y_1 z_1 , x_2 y_2 z_2 en x_3 y_3 z_3 , en wordt door B de afstand $A_1 A_2$ zoodanig verdeeld dat men heeft $A_1 B : B A_2 = m : n$, en door C de afstand $A_3 B$ in verhouding van $A_3 C : C B = p : q$, dan kan men de coördinaten x y z van het punt C door die van A_1 , A_2 en A_3 uitdrukken.

Door herhaalde aanwending dezer formules vindt men dat de rechte lijnen, welke het midden der tegenoverliggende ribben van een tetraeder verbinden, elkander in hetzelfde punt midden door deelen. De x coördinaat toch van het middelpunt der ribben x_1 y_1 z_1 , x_2 y_2 z_2 is $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, die der tegenoverliggende ribben x_3 y_3 z_3 , x_4 y_4 z_4 is $\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$; bij gevolg is de x coördinaat van het midden der lijn, welke beide punten verbindt, $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Overeenkomstige waarden verkrijgt men ook voor het midden van elke andere dergelijke rechte lijn.

Is $A_1 A_2 A_3 A_4$ een viervlak, en deelt C_1 de lijn $A_1 A_2$ en C_2 de lijn $A_3 A_4$ in verhouding van

$$A_1 C_1 : C_1 A_2 = A_3 C_2 : C_2 A_4 = m : n,$$

en evenzoo D_1 en D_2 de lijnen $A_1 A_3$ en $A_2 A_4$ in verhouding van

$$A_1 D_1 : D_1 A_3 = A_2 D_2 : D_2 A_4 = p : q,$$

dan snijden de lijnen $C_1 C_2$ en $D_1 D_2$ elkander.

Zijn nu de x coördinaten van de punten C_1 , C_2 , D_1 en D_2 achtereenvolgens ξ_1 , ξ_2 , ξ_1' en ξ_2' , dan vindt men

$$\frac{q\xi_1 + p\xi_2}{p+q} = \frac{n\xi_1' + m\xi_2'}{m+n};$$

gevolgelyk snijden elkander de lijnen $C_1 C_2$ en $D_1 D_2$ in het punt, welks coördinaten x , y en z , zijn:

$$x = \frac{mpx_1 + npx_3 + mqx_2 + nqx_1}{(m+n)(p+q)};$$

$$y = \frac{mpy_1 + npy_3 + mgy_2 + ngy_1}{(m+n)(p+q)};$$

$$z = \frac{mpz_1 + npz_3 + mqz_2 + nqz_1}{(m+n)(p+q)}.$$

11. Laat ons de gegeven lijnen op regthoekige coördinaten voorstellen door

$\{ \cos \gamma (x - x_1) = \cos \alpha (x - x_1) \}$, $\{ \cos \gamma^1 (x - x_2) = \cos \alpha^1 (x - x_2) \}$,
 $\{ \cos \gamma (y - y_1) = \cos \beta (x - x_1) \}$, $\{ \cos \gamma^1 (y - y_2) = \cos \beta^1 (x - x_2) \}$,
 en noemen wij x^1 , y^1 en z^1 de coördinaten van het gegeven punt.

Voor de vergelijkingen der gezochte lijn schrijven wij
 $\cos \gamma^{11} (x - x^1) = \cos \alpha^{11} (x - x^1)$; $\cos \gamma^{11} (y - y^1) = \cos \beta^{11} (x - x^1)$,
 waarin α^{11} , β^{11} en γ^{11} zoodanig bepaald moeten worden dat voldaan wordt aan

$$\cos \gamma \cos \gamma^{11} + \cos \beta \cos \beta^{11} + \cos \alpha \cos \alpha^{11} = \pm (\cos \gamma^1 \cos \gamma^{11} + \cos \beta^1 \cos \beta^{11} + \cos \alpha^1 \cos \alpha^{11}).$$

Elimineert men nu $\cos \alpha^{11}$ en $\cos \beta^{11}$ tusschen deze drie vergelijkingen, dan komt er

$$\cos \gamma (x - x^1) + \cos \beta (y - y^1) + \cos \alpha (x - x^1) = \pm \{ \cos \gamma^1 (x - x^1) + \cos \beta^1 (y - y^1) + \cos \alpha^1 (x - x^1) \},$$

als gezochte meetkundige plaats der lijn. Die vergelijking stelt twee vlakken voor, namelijk:

$$(\cos \gamma - \cos \gamma^1) (z - z^1) + (\cos \beta - \cos \beta^1) (y - y^1) + (\cos \alpha - \cos \alpha^1) (x - x^1) = 0,$$

$$(\cos \gamma + \cos \gamma^1) (z - z^1) + (\cos \beta + \cos \beta^1) (y - y^1) + (\cos \alpha + \cos \alpha^1) (x - x^1) = 0,$$

welke loodrecht op elkander staan.

12. De drie gegeven lijnen drukken wij uit door de vergelijkingen.

$$y = ax + b, \quad z = cx + d; \quad 1)$$

$$y = a^1 x + b^1, \quad z = c^1 x + d^1; \quad 2)$$

$$y = a^{11} x + b^{11}, \quad z = c^{11} x + d^{11}; \quad 3)$$

en de gezochte lijn door

$$y = ax + B \quad \text{en} \quad z = cx + D, \quad 4)$$

waardoor wij reeds te kennen geven, dat zij evenwijdig zal loopen aan 1), zoodat het er alleen op aan komt om B en D te bepalen uit de voorwaarde dat zij 2) en 3) zal snijden. Zullen 2) en 4) elkander werkelijk snijden, dan wordt dit, zooals bekend is, uitgedrukt door de voorwaarde

$$\frac{B - b^1}{a - a^1} = \frac{D - d^1}{c - c^1}; \quad 5)$$

gelijkerwijze vinden wij als voorwaarde dat 3) en 4) elkander snijden

$$\frac{B - b^{11}}{a - a^{11}} = \frac{D - d^{11}}{c - c^{11}}. \quad 6)$$

Berekenen wij nu B en D uit 5) en 6), en brengen wij de zoo gevonden waarden over in 4), dan is daarmee het vraagstuk opgelost.

Het kost nu ook weinig moeite om den afstand der snijpunten te bepalen; noemen wij de coördinaten van het snijpunt, waarin 2) en 4) elkander ontmoeten p , q en r ; even zoo voor 3) en 4) p^1 , q^1 en r^1 , dan is

$$p = \frac{B - b^1}{a - a^1} = \frac{D - d^1}{c - c^1}; \quad p^1 = \frac{B - b^{11}}{a - a^{11}} = \frac{D - d^{11}}{c - c^{11}};$$

$$q - q^1 = a(p - p^1) \text{ en } r - r^1 = c(p - p^1).$$

Deze waarde in de bekende formule

$$R = \sqrt{(p - p^1)^2 + (q - q^1)^2 + (r - r^1)^2}$$

overbrengende, komt er ten slotte

$$R = \frac{(b^1 - b^{11})(c^1 - c^{11}) - (a^1 - a^{11})(d^1 - d^{11})}{(a - a^1)(c - c^{11}) - (a - a^{11})(c - c^1)} \sqrt{(1 + a^2 + c^2)}.$$

13. Om de drie gegevene en de vierde te zoeken lijn aan te duiden, maken wij gebruik van de vergelijkingen in het vorig vraagstuk voorop gezet. De hoeken waaronder de lijnen (2) en (3) door de lijn (4) gesneden worden, kan men onmiddellijk berekenen uit de bekende formules

$$\cos \varphi = \frac{1 + aa^1 + cc^1}{\sqrt{(1 + a^2 + c^2)} \sqrt{(1 + a^{1^2} + c^{1^2})}},$$

$$\text{en} \quad \cos \varphi^1 = \frac{1 + aa^{11} + cc^{11}}{\sqrt{(1 + a^2 + c^2)} \sqrt{(1 + a^{11^2} + c^{11^2})}}.$$

Om den afstand te vinden, waarop de lijn (4) van de lijn

(1) verwijderd is, brengen wij door den oorsprong een vlak loodrecht op die beide lijnen; de vergelijking van dat vlak is dan

$$x + ay + cz = 0.$$

En noemen wij de coördinaten van de punten, waarin dit vlak door de lijnen (1) en (4) gesneden wordt, achtereenvolgens lmn en $l^1 m^1 n^1$, dan hebben wij, ter bepaling dier coördinaten, de volgende zes vergelijkingen:

$$l + am + cn = 0; \quad m = al + b; \quad n = cl + d;$$

$$l^1 + am^1 + cn^1 = 0; \quad m^1 = al^1 + B; \quad n^1 = cl^1 + D.$$

Uit deze vindt men door aftrekking en herleiding de waarden van $l - l^1$, $m - m^1$ en $n - n^1$, en brengt men die over in de bekende formule

$$R = \sqrt{\{(l - l^1)^2 + (m - m^1)^2 + (n - n^1)^2\}},$$

dan komt er, ten slotte

$$R = \sqrt{\frac{(1+c^2)(B-b)^2 - 2ac(B-b)(D-d) + (1+a^2)(D-d)^2}{1+a^2+c^2}},$$

in welke uitdrukking men de waarden van B en D , vroeger gevonden, nog moet overbrengen.

14. Noemt men den onbekenden hoek ϕ , dan worden in den determinant van het tweede vraagstuk α , β en γ door ϕ vervangen, dat is $\alpha = \beta = \gamma = \phi$, zoodat men heeft

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \phi & \cos \phi & \cos \phi \\ \cos \phi & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \phi & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \phi & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Om den hoek ϕ uit deze vergelijking af te zonderen, deelen wij den eersten regel en de eerste kolom door $\cos \phi$, waardoor de determinant, lettende op $\frac{1}{\cos^2 \phi} = \tan^2 \phi + 1$, wordt

$$\begin{vmatrix} \tan^2 \phi + 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 + 1 & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ 0 + 1 & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ 0 + 1 & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$\begin{vmatrix} \tan^2 \phi & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ 0 & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ 0 & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ 1 & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ 1 & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De eerste term dezer vergelijking is $\Delta^2 \tan^2 \phi$, de tweede — $16 \sin^{1/2} \lambda \sin^{1/2} \mu \sin^{1/2} \nu$; want wanneer men den eersten regel van elk der drie volgende aftrekt, komt er

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cos \nu - 1 & \cos \mu - 1 \\ 0 & \cos \nu - 1 & 0 & \cos \lambda - 1 \\ 0 & \cos \mu - 1 & \cos \lambda - 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos \nu - 1 & \cos \mu - 1 \\ \cos \nu - 1 & 0 & \cos \lambda - 1 \\ \cos \mu - 1 & \cos \lambda - 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 (\cos \lambda - 1) (\cos \mu - 1) (\cos \nu - 1) = -2 (1 - \cos \lambda) \times$$

$$(1 - \cos \mu) (1 - \cos \nu) = -16 \sin^{1/2} \lambda \sin^{1/2} \mu \sin^{1/2} \nu,$$

omdat in het algemeen $1 - \cos \psi = 2 \sin^{1/2} \psi$.

Ter bepaling van den hoek ϕ heeft men derhalve

$$\tan \phi = \frac{4 \sin^{1/2} \lambda \sin^{1/2} \mu \sin^{1/2} \nu}{\Delta}$$

15. Noemt men de vergelijkingen der regte lijn

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

dan heeft elk vlak, dat door die lijn gaat, in het algemeen den vorm

$$\lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0;$$

opdat nu echter de lijn in het gegeven vlak

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ligge, moet men λ_1 en λ_2 zoodanig bepalen, dat voldaan worde aan de vergelijking

$$\lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda_2 (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = Ax + By + Cz + D;$$

en daar deze vergelijking voor alle waarden van x , y en z moet plaats vinden, heeft men ter bepaling van λ_1 en λ_2 de volgende vergelijkingen:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - A = 0$$

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 - B = 0$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 - C = 0$$

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 - D = 0$$

Bepaalt men nu λ_1 en λ_2 uit twee dezer vergelijkingen, dan moeten de gevonden waarden tevens aan de andere vergelijkingen voldoen. Hieruit volgt reeds dat men voorwaardenvergelijkingen moet kunnen vinden. En daartoe komt men, als men den determinant van telkens drie der vier vergelijkingen gelijk nul stelt.

De voorwaarde dat eene rechte lijn in een vlak ligt, wordt derhalve door de vier volgende vergelijkingen uitgedrukt:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A \\ B_1 & B_2 & B \\ C_1 & C_2 & C \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A \\ B_1 & B_2 & B \\ D_1 & D_2 & D \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A \\ C_1 & C_2 & C \\ D_1 & D_2 & D \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B \\ C_1 & C_2 & C \\ D_1 & D_2 & D \end{vmatrix} = 0;$$

in het geheel derhalve door twee van elkander onafhankelijke vergelijkingen, daar de beide anderen in de eersten liggen opgesloten.

16. Veronderstellen wij dat de lijn

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

loodrecht staat op het vlak

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wanneer wij uit den oorsprong der coördinaten eene lijn evenwijdig met (1) trekken, dan zijn blijkbaar hare vergelijkingen

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

En wanneer wij door het punt I dezer laatste lijn, welks coördinaten door a , b en c worden aangegeven, een vlak brengen evenwijdig met (2), dan is de vergelijking van dat vlak

$$Ax + By + Cz = Aa + Bb + Cc = D^1. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Stellen wij $OI = u$, en laat α , β en γ de hellingen zijn der lijn OI op de drie assen der coördinaten. Noemen wij nog de afstanden der punten L , M en N , waarin het vlak (3) de coördinaatassen snijdt, tot den oorsprong l , m en n , dan is

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{D^1}{A} = \frac{Aa + Bb + Cc}{A}, \\
 m &= \frac{D^1}{B} = \frac{Aa + Bb + Cc}{B}, \\
 n &= \frac{D^1}{C} = \frac{Aa + Bb + Cc}{C}.
 \end{aligned}$$

Daar nu

$$u = l \cos \alpha = m \cos \beta = n \cos \gamma$$

is, heeft men

$$\cos \alpha = \frac{Au}{D^1}, \quad \cos \beta = \frac{Bu}{D^1}, \quad \cos \gamma = \frac{Cu}{D^1} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Projecteren wij voorts de lijn u achtereenvolgens op de drie coördinaatassen, en doen wij hetzelfde met den omtrek gevormd door de coördinaten a , b en c van haar uiteinde I , dan verkrijgen wij de drie vergelijkingen

$$\begin{aligned}
 u \cos \alpha &= a + b \cos \nu + c \cos \mu, \\
 u \cos \beta &= a \cos \nu + b + c \cos \lambda, \\
 u \cos \gamma &= a \cos \mu + b \cos \lambda + c;
 \end{aligned}$$

welke, op (4) lettende, worden

$$\begin{aligned}
 \frac{Au^2}{D^1} &= a + b \cos \nu + c \cos \mu, \\
 \frac{Bu^2}{D^1} &= a \cos \nu + b + c \cos \lambda, \quad . \quad . \quad . \quad (5) \\
 \frac{Cu^2}{D^1} &= a \cos \mu + b \cos \lambda + c.
 \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen wij deze drie gelijkheden respectievelijk met a , b en c , en nemen wij de som, dan komt er voor de gevraagde voorwaarde

$$\begin{aligned}
 \frac{u^2}{D^1} &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos \lambda + 2ac \cos \mu + 2ab \cos \nu}{Aa + Bb + Cc} \\
 &= \frac{a + b \cos \nu + c \cos \mu}{A} \\
 &= \frac{a \cos \nu + b + c \cos \lambda}{B} \\
 &= \frac{a \cos \mu + b \cos \lambda + c}{C}.
 \end{aligned}$$

17. Noem de lengte der loodlijn P , en de gegeven hoeken α ,

β en γ ; deze vier grootheden kan men beschouwen als de poolcoördinaten van het voetpunt der loodlijn, zoodat de regthoekige coördinaten voor dat punt worden

$$x_1 = P \cos \alpha, \quad y_1 = P \cos \beta, \quad z_1 = P \cos \gamma;$$

en de vergelijkingen der loodlijn

$$x \cos \gamma = z \cos \alpha; \quad y \cos \gamma = z \cos \beta.$$

Maar de vergelijking van het vlak, dat loodregt staat op de laatstgenoemde lijn en tevens gaat door het punt x_1, y_1, z_1 , is $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma$; brengt men hierin de waarden van x_1, y_1 en z_1 over, in het oog houdende dat $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ is, dan komt er voor de vergelijking van het vlak

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = P.$$

18. Om het vraagstuk op te lossen, zoekt men de vergelijkingen van twee vlakken, waarin de regte lijn moet liggen. Zij bevindt zich toch zoo wel in het vlak, hetwelk door de gegebene lijn en het gegeven punt gelegd wordt, als in het vlak dat loodregt staat op de gegebene lijn en door dit punt gaat.

Zijn nu

$$x = mz + p \quad \text{en} \quad y = nz + q$$

de vergelijkingen der gegebene regte lijn en x_1, y_1, z_1 de coördinaten van het punt, dan heeft men voor de vergelijkingen der regte lijn

$$m(x - x_1) + n(y - y_1) + (z - z_1) = 0$$

en

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \\ p & q & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

19. Wij stellen voor de vergelijkingen der gegeven lijnen

$$x = m z + p, \quad y = n z + q; \quad 1)$$

$$x = m^1 z + p^1, \quad y = n^1 z + q^1. \quad 2)$$

De gezochte lijn moet loodregt staan op het vlak, waarvan de beide gegeven lijnen evenwijdig loopen, en uit die voorwaarde vindt men onmiddellijk de hoeken met de coördinaatassen. Want de vergelijking van het vlak, dat de

eerste der beide lijnen bevat en evenwijdig loopt met de andere, is

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ p & q & 0 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \\ m^1 & n^1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welken determinant men ook aldus kan schrijven

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Noemt men de hoeken, welke de gezochte lijn met de X -, Y - en Z -as maakt, α , β en γ , dan worden zij bepaald door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{n - n^1}{\sqrt{\{(m - m^1)^2 + (n - n^1)^2 + (mn^1 - m^1n)^2\}}}; \\ \cos \beta &= \frac{m - m^1}{\sqrt{\{(m - m^1)^2 + (n - n^1)^2 + (mn^1 - m^1n)^2\}}}; \quad 3) \\ \cos \gamma &= \frac{n^1m - m^1n}{\sqrt{\{(m - m^1)^2 + (n - n^1)^2 + (mn^1 - m^1n)^2\}}}. \end{aligned}$$

De gevonden formules laten nog eenige herleidingen toe, want men kan m en m^1 , n en n^1 uitdrukken in de hoeken, welke beide gegeven lijnen met de assen maken. Noemen wij λ , μ , ν de hoeken, welke de eerste, λ^1 , μ^1 en ν^1 die, welke de andere lijn met de X -, Y - en Z -as insluiten, dan is

$$\begin{aligned} m &= \frac{\cos \lambda}{\cos \nu}; & n &= \frac{\cos \mu}{\cos \nu}; \\ m^1 &= \frac{\cos \lambda^1}{\cos \nu^1}; & n^1 &= \frac{\cos \mu^1}{\cos \nu^1}; \end{aligned}$$

en dus ook

$$\begin{aligned} &\sqrt{\{(m - m^1)^2 + (n - n^1)^2 + (mn^1 - m^1n)^2\}} = \\ &= \frac{1}{\cos \nu \cos \nu^1} \sqrt{\{(\cos \lambda \cos \mu^1 - \cos \lambda^1 \cos \mu)^2 + (\cos \mu \cos \nu^1 - \\ &\quad - \cos \nu \cos \mu^1)^2 + (\cos \lambda \cos \nu^1 - \cos \lambda^1 \cos \nu)^2\}} \end{aligned}$$

De uitdrukking onder het wortelteeken is gelijk aan de sinus van den hoek, dien de gegeven lijnen met elkander

maken. Noemen wij dien hoek (g, g^1) , dan worden de formules voor α , β en γ :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\cos \lambda \cos \nu^1 - \cos \lambda^1 \cos \nu}{\sin(g, g^1)}; \cos \beta = \frac{\cos \mu \cos \nu^1 - \cos \nu \cos \mu^1}{\sin(g, g^1)}; \\ \cos \gamma &= \frac{\cos \lambda \cos \mu^1 - \cos \lambda^1 \cos \mu}{\sin(g, g^1)}. \end{aligned}$$

Men is nu in staat gesteld de vergelijkingen der beide vlakken te bepalen, welke elk door een der gegevene lijnen gaat en de gezochte lijn bevat. Die vergelijkingen te zamen genomen geven dan de gezochte lijn aan. Het stuk dezer laatste, dat tusschen de gegevene lijnen begrepen is en loodrecht op beiden staat, of de afstand der gegeven lijnen, is blijkbaar gelijk aan den afstand van eenig punt der eene rechte lijn en het vlak, dat door de andere, evenwijdig aan de eerste gelegd is. Noemt men den afstand der beide lijnen d en de coördinaten van een punt der tweede x , y en z , dan is

$$d = - \frac{\begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\{(m - m^1)^2 + (n - n^1)^2 + (mn^1 - m^1n)^2\}}},$$

waarbij men oplettende aan den wortel het teeken te geven, dat d positief maakt.

Daar voorts $x = m^1 z + p^1$ en $y = n^1 z + q^1$ is, wordt de waarde van d

$$d = - \frac{\begin{vmatrix} m^1 z + p^1 & n^1 z + q^1 & z \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\{(m - m^1)^2 + (n - n^1)^2 + (mn^1 - m^1n)^2\}}}.$$

Maar de eerste der beide determinanten van den teller kan men splitsen in

$$\begin{vmatrix} m^1 z & n^1 z & z \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p^1 & q^1 & 0 \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix},$$

De eerste dezer determinanten wordt gelijk nul, wijl de eerste en derde regel, op den factor z na, aan elkander gelijk zijn. De waarde van d wordt ten slotte uitgedrukt door

$$d = - \frac{\begin{vmatrix} p^1 & q^1 & 0 \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ m & n & 1 \\ m^1 & n^1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\{(m-m^1)^2 + (n-n^1)^2 + (mn^1-m^1n)^2\}}}$$

of

$$d = \frac{(p-p^1)(n-n^1) - (q-q^1)(m-m^1)}{\sqrt{\{(m-m^1)^2 + (n-n^1)^2 + (mn^1-m^1n)^2\}}}$$

In de gevondene uitdrukking geeft men aan den wortel het teeken, waardoor d , als absolute grootheid, positief wordt.

De gevonden afstand d is ook de kortste weg om van de eene naar de andere lijn te gaan. Om dit aan te toonen, noemen wij de coördinaten van eenig punt der eerste lijn $x y z$, die van eenig punt der tweede $x_1 y_1 z_1$, en dan hebben wij, lettende op 1) en 2),

$$\begin{aligned} p &= x - m z; & q &= y - n z; \\ p^1 &= x_1 - m^1 z_1; & q^1 &= y_1 - n^1 z_1. \end{aligned}$$

waardoor de waarde van d wordt

$$d = \frac{(x-x_1)(n-n^1) - (y-y_1)(m-m^1) + (mn^1-m^1n)(z-z_1)}{\sqrt{\{(m-m^1)^2 + (n-n^1)^2 + (mn^1-m^1n)^2\}}}$$

of, wegens 3),

$$d = (x-x_1) \cos \alpha + (y-y_1) \cos \beta + (z-z_1) \cos \gamma.$$

Duidt men nu door r den afstand aan der punten $x y z$ en $x_1 y_1 z_1$; voorts door ω , ϕ en ψ de hoeken, welke r respectievelijk met de X -, Y - en Z -assen maakt, dan is

$x-x_1 = r \cos \omega$; $y-y_1 = r \cos \phi$; $z-z_1 = r \cos \psi$;
en brengt men deze waarden in de uitdrukking voor d over, dan heeft men

$$d = r (\cos \alpha \cos \omega + \cos \beta \cos \phi + \cos \gamma \cos \psi).$$

De factor van r in deze uitdrukking kan men $\cos \theta$ noemen, wanneer met θ de hoek bedoeld wordt, dien r en d insluiten; bij gevolg is

$$d = r \cos \theta,$$

en derhalve d altijd kleiner dan r , wijl r met eene echte breuk, $\cos \theta$, moet vermenigvuldigd worden, om gelijk aan d te worden.

20. Indien λ , μ , ν de rigtingshoeken van het vlak zijn, dat is de hoeken van de normaal op het vlak met de assen,

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die der eerste, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die der tweede en $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die der derde lijn, zoo zal de voorwaardens-vergelijking worden verkregen door eliminatie van λ, μ en ν uit de drie vergelijkingen

$$\cos \lambda \cos \alpha_1 + \cos \mu \cos \beta_1 + \cos \nu \cos \gamma_1 = 0,$$

$$\cos \lambda \cos \alpha_2 + \cos \mu \cos \beta_2 + \cos \nu \cos \gamma_2 = 0,$$

$$\cos \lambda \cos \alpha_3 + \cos \mu \cos \beta_3 + \cos \nu \cos \gamma_3 = 0.$$

Men ziet onmiddellijk dat de voorwaarde is

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

21. Noem de gegeven vlakken:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A^1x + B^1y + C^1z + D^1 &= 0, \\ A^{11}x + B^{11}y + C^{11}z + D^{11} &= 0. \end{aligned} \quad 1)$$

Snijden de vlakken elkander in een punt, dan voldoen de coördinaten van dat punt aan elk der vergelijkingen 1); het komt er dus slechts op aan om x, y en z te bepalen uit 1). Elimineert men y en z , dan erlangt men de volgende vergelijking in x

$$\begin{vmatrix} Ax + D & B & C \\ A^1x + D^1 & B^1 & C^1 \\ A^{11}x + D^{11} & B^{11} & C^{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Het eerste lid dezer vergelijking is de som van twee determinanten; bijgevolg laat zij zich herleiden tot

$$\begin{vmatrix} Ax & B & C \\ A^1x & B^1 & C^1 \\ A^{11}x & B^{11} & C^{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D & B & C \\ D^1 & B^1 & C^1 \\ D^{11} & B^{11} & C^{11} \end{vmatrix} = 0,$$

of tot $x(A B^1 C^{11}) + (D B^1 C^{11})$;

de coördinaten van het punt van doorsnede zijn derhalve

$$x = -\frac{(D B^1 C^{11})}{(A B^1 C^{11})}; y = -\frac{(A D^1 C^{11})}{(A B^1 C^{11})}; z = -\frac{(A B^1 D^{11})}{(A B^1 C^{11})}.$$

Snijden de vlakken elkander volgens evenwijdige lijnen, dan zijn x, y en z oneindig en bijgevolg $(A B^1 C^{11}) = 0$, terwijl de andere determinanten $(D B^1 C^{11})$, $(A D^1 C^{11})$ en $(A B^1 D^{11})$ eene eindige van nul verschillende waarde behouden. Heeft echter de snijding volgens eene enkele lijn

plaats, dan blijven de coördinaten van het snijpunt onbepaald en zijn de vier determinanten (AB^1C^1) , (DB^1C^1) , (AD^1C^1) en (AB^1D^1) gelijk aan nul.

22. Zij de vergelijking van het vlak

$$1) \quad ax + by + cz + 1 = 0;$$

noem de gegeven punten $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$ en $x_3y_3z_3$, dan moeten zij voldoen aan de vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2) \quad & ax_1 + by_1 + cz_1 + 1 = 0, \\ & ax_2 + by_2 + cz_2 + 1 = 0, \\ & ax_3 + by_3 + cz_3 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen kan men a , b en c bepalen, en in 1) overbrengen, waardoor de vergelijking van het gevraagde vlak gevonden is. Maar men kan ook a , b en c tusschen 1) en 2) elimineren. Zullen die vier vergelijkingen met elkander bestaanbaar zijn, dan moet de determinant verdwijnen; men heeft alzoo

$$3) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Deze vergelijking geeft het verband aan, dat tusschen de coördinaten x , y en z van eenig punt van het vlak bestaat, is derhalve de vergelijking van het gezochte vlak.

Men kan den determinant volgens de elementen van den eersten regel ontwikkelen, waardoor de vergelijking van het vlak den volgende algemeenen vorm verkrijgt:

$$x \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Voor de waarden van a , b en c vinden wij de volgende uitdrukkingen

$$\begin{aligned} a = - & \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}; \\ c = - & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

In de vergelijking 3) ligt ook de voorwaarde opgesloten, waaraan vier gegeven punten xyz , $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ moeten voldoen, zullen zij allen in hetzelfde vlak liggen.

23. Laat ons aannemen dat de evenwijdige lijnen, van welke de eerste door een punt M_1 of $x_1 y_1 z_1$, de tweede door een punt M_2 of $x_2 y_2 z_2$ gaat, met de assen der coördinaten de hoeken α , β en γ maken.

Zijn de assen rechthoekig, dan wordt een tweede punt M^1 van de eerste evenwijdige lijn bepaald door de coördinaten

$$x^1 = x_1 + \rho \cos \alpha,$$

$$y^1 = y_1 + \rho \cos \beta,$$

$$z^1 = z_1 + \rho \cos \gamma,$$

als men den afstand $M_1 M^1$ der punten M_1 en M^1 door ρ aanduidt.

De vergelijking van het vlak, dat gaat door de drie punten M_1 , M_2 en M^1 , is

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_1 + \rho \cos \alpha & y_1 + \rho \cos \beta & z_1 + \rho \cos \gamma \end{vmatrix} = 0;$$

men kan haar nog vereenvoudigen, wanneer men den tweeden regel van den vierden aftrekt en door ρ deelt; daardoor komt er voor de vergelijking van het gevraagde vlak:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

24. Noem x_0, y_0 en z_0 de coördinaten van het snijpunt M_0 der beide lijnen, en laten $\alpha, \beta, \gamma; \alpha^1, \beta^1, \gamma^1$ de hoeken voorstellen, welke de lijnen met rechthoekige coördinaatassen maken. De coördinaten

$$x_0 + \rho \cos \alpha, \quad y_0 + \rho \cos \beta, \quad z_0 + \rho \cos \gamma$$

zijn die van een ander punt M der eerste rechte lijn, waarbij de afstand $M_0 M = \rho$ is; evenzoo vindt men voor een ander punt M^1 der tweede lijn de coördinaten

$$x_0 + \rho^1 \cos \alpha^1; \quad y_0 + \rho^1 \cos \beta^1; \quad z_0 + \rho^1 \cos \gamma^1;$$

wanneer men den afstand $M_0 M^1$ door ρ^1 uitdrukt.

Het vlak dat door de punten M_0 , M en M^1 gaat, heeft tot vergelijking

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_0 + \rho \cos \alpha & y_0 + \rho \cos \beta & z_0 + \rho \cos \gamma \\ 1 & x_0 + \rho^1 \cos \alpha^1 & y_0 + \rho^1 \cos \beta^1 & z_0 + \rho^1 \cos \gamma^1 \end{vmatrix} = 0.$$

Door eene gelijksoortige herleiding als in het vorig vraagstuk vindt men voor het gezochte vlak:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ 0 & \cos \alpha^1 & \cos \beta^1 & \cos \gamma^1 \end{vmatrix} = 0.$$

25. Wij noemen de coördinaten der gegeven punten x_1, y_1, z_1 en x_2, y_2, z_2 , en

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad 1)$$

de vergelijking van het gegeven vlak.

$$\text{Is nu} \quad A^1x + B^1y + C^1z + D^1 = 0 \quad 2)$$

de vergelijking van het gezochte vlak, dan heeft men ter bepaling van de onbekenden A^1, B^1, C^1 de drie volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned} A^1x_1 + B^1y_1 + C^1z_1 + D^1 &= 0, \\ A^1x_2 + B^1y_2 + C^1z_2 + D^1 &= 0, \\ A^1A + B^1B + C^1C &= 0. \end{aligned} \quad 3)$$

De vergelijkingen 2) en 3) kunnen alleen dan te zamen bestaan, als hare determinant gelijk nul wordt; dientengevolge is de vergelijking van het gezochte vlak:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

26. Laat de vlakken voorgesteld worden door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_1z + b_1y + c_1x + 1 &= 0, \\ a_2z + b_2y + c_2x + 1 &= 0, \\ a_3z + b_3y + c_3x + 1 &= 0. \end{aligned} \quad 1)$$

Daar elk vlak, dat de lijn van doorsnede van het eerste

en tweede vlak bevat, teruggebragt kan worden tot den vorm

$a_1 z + b_1 y + c_1 x + 1 + \lambda (a_2 z + b_2 y + c_2 x + 1) = 0$, 2) moet ook het derde vlak zulk een vorm kunnen hebben, omdat de snijlijn ook in dit vlak gelegen is; met andere woorden, men moet λ zoodanig kunnen bepalen, dat de komende vergelijking met 2) identiek wordt. Brengen wij 2) tot den vorm

$$\frac{a_1 + a_2 \lambda}{1 + \lambda} z + \frac{b_1 + b_2 \lambda}{1 + \lambda} y + \frac{c_1 + c_2 \lambda}{1 + \lambda} x + 1 = 0,$$

dan komt er

$$\frac{a_1 + a_2 \lambda}{1 + \lambda} = a_3; \quad \frac{b_1 + b_2 \lambda}{1 + \lambda} = b_3; \quad \frac{c_1 + c_2 \lambda}{1 + \lambda} = c_3;$$

waaruit

$(a_3 - a_2)\lambda = (a_1 - a_3); (b_3 - b_2)\lambda = (b_1 - b_3); (c_3 - c_2)\lambda = (c_1 - c_3)$ of λ eliminerende

$$(a_3 - a_2)(b_3 - b_1) - (a_3 - a_1)(b_3 - b_2) = 0,$$

$$(a_3 - a_2)(c_3 - c_1) - (a_3 - a_1)(c_3 - c_2) = 0,$$

aan welke beide vergelijkingen voldaan moet worden, zullen de drie vlakken elkander langs dezelfde lijn snijden.

De vergelijkingen van de lijnen van doorsnede der drie vlakken vindt men, bijaldien men achtereenvolgens y en x tusschen de vergelijkingen der vlakken elimineert; zij zijn

$$\{ (a_1 b_2 - a_2 b_1) z + (c_1 b_2 - c_2 b_1) x + (b_2 - b_1) = 0; \}$$

$$\{ (a_1 c_2 - a_2 c_1) z + (c_1 b_2 - c_2 b_1) y + (c_2 - c_1) = 0. \}$$

$$\{ (a_1 b_3 - a_3 b_1) z + (c_1 b_3 - c_3 b_1) x + (b_3 - b_1) = 0; \}$$

$$\{ (a_1 c_3 - a_3 c_1) z + (c_1 b_3 - c_3 b_1) y + (c_3 - c_1) = 0. \}$$

$$\{ (a_2 b_3 - a_3 b_2) z + (c_2 b_3 - c_3 b_2) x + (b_3 - b_2) = 0; \}$$

$$\{ (a_2 c_3 - a_3 c_2) z + (c_2 b_3 - c_3 b_2) y + (c_3 - c_2) = 0. \}$$

De voorwaarde dat deze drie lijnen evenwijdig loopen, wordt uitgedrukt door

$$\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{c_1 b_3 - c_3 b_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1} = \frac{c_2 b_3 - c_3 b_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2},$$

$$\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 c_2 - a_2 c_1} = \frac{c_1 b_3 - c_3 b_1}{a_1 c_3 - a_3 c_1} = \frac{c_2 b_3 - c_3 b_2}{a_2 c_3 - a_3 c_2},$$

of, na herleiding,

$$c_1 (b_2 a_3 - b_3 a_2) - c_2 (b_1 a_3 - b_3 a_1) + c_3 (b_1 a_2 - b_2 a_1) = 0.$$

Deze voorwaarde, determinant zoo men wil, moet vervuld zijn, zullen de vlakken elkander langs het beloop van evenwijdige lijnen snijden.

27. Noem x_1 , y_1 en z_1 de coördinaten van het gegeven punt en laat

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

de vergelijkingen der gegeven lijn voorstellen.

Wordt nu

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad 1)$$

als de vergelijking van het gezochte vlak aangenomen, dan erlangt men ter bepaling van A , B , C en D de volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0, \\ Am + Bn + C &= 0, \\ Ap + Bq + D &= 0; \end{aligned}$$

en daar zij te gelijker tijd met 1) moeten bestaan, zoo is de vergelijking van het gezochte vlak

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \\ p & q & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Men kan dit vraagstuk ook aldus oplossen:

stel dat de vergelijkingen der rechte lijn zijn

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a^1 x + b^1 y + c^1 z + d^1 = 0, \quad 1)$$

en de coördinaten van het gegeven punt x_1, y_1, z_1 .

Elk vlak, dat de lijn 1) bevat, laat zich voorstellen door

$$ax + by + cz + d + \lambda(a^1 x + b^1 y + c^1 z + d^1) = 0. \quad 2)$$

Daar dit vlak ook door het punt x_1, y_1, z_1 moet gaan, moeten de coördinaten van dat punt aan 2) voldoen, zoodat $ax_1 + by_1 + cz_1 + d + \lambda(a^1 x_1 + b^1 y_1 + c^1 z_1 + d^1) = 0$; elimineert men nu den factor λ , dan komt er voor het gevraagde vlak

$$\frac{ax + by + cz + d}{ax_1 + by_1 + cz_1 + d} = \frac{a^1 x + b^1 y + c^1 z + d^1}{a^1 x_1 + b^1 y_1 + c^1 z_1 + d^1}$$

28. Noem de coördinaten der gegeven punten x_1, y_1, z_1 en x_2, y_2, z_2 en laat

$$x = m z + p \text{ en } y = n z + q$$

de gegeven lijn voorstellen.

Is nu

$$A x + B y + C z + D = 0 \quad 1)$$

de vergelijking van het gezochte vlak, dan hangen de constanten A , B , C en D af van de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} A x_1 + B y_1 + C z_1 + D &= 0, \\ A x_2 + B y_2 + C z_2 + D &= 0, \\ A m + B n + C &= 0; \end{aligned} \quad 2)$$

en men heeft uit 1) en 2) voor de vergelijking van het gezochte vlak

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

29. Zij

$$A x + B y + C z + D = 0$$

de vergelijking van het gegeven vlak, en laat ons door

$$x = m z + p, \quad y = n z + q$$

de gegeven lijn aanduiden.

Noemt men de vergelijking van het te zoeken vlak

$$A^1 x + B^1 y + C^1 z + D^1 = 0, \quad (1)$$

dan bestaan, krachtens de voorwaarden van het vraagstuk, tusschen de constanten A^1 , B^1 , C^1 en D^1 , de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} A^1 m + B^1 n + C^1 &= 0, \\ A^1 p + B^1 q + D^1 &= 0, \\ A^1 A + B^1 B + C^1 C &= 0, \end{aligned}$$

waaruit men A^1 , B^1 en C^1 in D^1 en de bekenden kan uitdrukken; brengt men die waarden in (1) over, dan vervalt ook D^1 , waardoor het vraagstuk is opgelost. Men verkrijgt dus voor de vergelijking van het gezochte vlak:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ m & n & 1 & 0 \\ p & q & 0 & 1 \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

30. Is wederom

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad 1)$$

de vergelijking van het te zoeken vlak, dan worden de constanten A , B , C en D gevonden uit

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

$$Am + Bn + C = 0,$$

$$Am^1 + Bn^1 + C = 0,$$

waaruit in verbinding met 1) voor het gezochte vlak voortvloeit

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ m & n & 1 & 0 \\ m^1 & n^1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

31. Zij $Ax + By + Cz + D = 0$

de vergelijking van het eene,

$$A^1x + B^1y + C^1z + D^1 = 0,$$

die van het andere vlak, en laten de coördinaten van het gegeven punt worden voorgesteld door x_1, y_1, z_1 .

Daar nu de rechte lijn door dat punt gaat, zoo hebben hare vergelijkingen den vorm

$$x - x_1 = m(z - z_1), \quad y - y_1 = n(z - z_1);$$

terwijl ter bepaling van m en n de vergelijkingen

$$Am + Bn + C = 0 \quad \text{en} \quad A^1m + B^1n + C^1 = 0$$

dienen.

En daar de gezochte lijn evenwijdig moet loopen aan de doorsnede der vlakken, is tevens het volgend vraagstuk opgelost:

de vergelijking te vinden eener rechte lijn, welke door een gegeven punt gaat en evenwijdig loopt aan eene geëvene lijn.

Want elke der beide vergelijkingen der geëvene lijn stelt een vlak voor, waarmede de gezochte lijn evenwijdig moet loopen.

Eene andere wijze van oplossen bestaat hierin dat men de lijn, welke door het gegeven punt gaat, voorstelt door

$$x - x_1 = m(z - z_1) \quad \text{en} \quad y - y_1 = n(z - z_1),$$

en opmerkt dat de rigtingscoëfficiënten m en n gelijk moeten zijn aan die der gegeven lijn.

32. Zal het vlak door het gegeven punt gaan, dan kan men het voorstellen door

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0;$$

en daar dit vlak loodregt op de gegeven lijn moet staan, heeft men de voorwaarden

$$A : B : C = m : n : 1;$$

derhalve is

$$m(x - x_1) + n(y - y_1) + (z - z_1) = 0$$

de vergelijking van het gezochte vlak.

33. Laat de gegeven lijn bepaald worden door de vergelijkingen

$$c(x - x^1) = a(z - z^1), \quad c(y - y^1) = b(z - z^1), \quad \dots (1)$$

en noem de coördinaten van het punt x_1, y_1, z_1 , dan zal de lijn die door dat punt gaat zijn van den vorm

$$c^1(x - x_1) = a^1(z - z_1), \quad c^1(y - y_1) = b^1(z - z_1); \quad (2)$$

en wijl zij loodregt op (1) moet staan heeft men, de hoeken der coördinatenassen λ, μ en ν noemende, de voorwaardenvergelijking

$$aa^1 + bb^1 + cc^1 + (cb^1 + c^1b) \cos \lambda + (ca^1 + c^1a) \cos \mu + (ba^1 + b^1a) \cos \nu = 0. \quad (3)$$

Elimineert men nu de quotienten $a^1 : c^1$ en $b^1 : c^1$ tusschen (2) en (3), dan komt er

$$(a + c \cos \mu + b \cos \nu)(x - x_1) + (b + c \cos \lambda + a \cos \nu)(y - y_1) + (c + b \cos \lambda + a \cos \mu)(z - z_1) = 0, \quad (4)$$

welke vergelijking de gezochte plaats aanwijst en, van den eersten graad zijnde, een plat vlak te kennen geeft.

Bij regthoekige coördinaten gaat de gevonden vergelijking over in

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0. \quad (5)$$

Voor het tweede gedeelte van het vraagstuk merken wij op dat de lijn, die door het punt x_1, y_1, z_1 , gaat en de gegeven lijn loodregt snijdt, noodwendig in het vlak (4) of (5) moet liggen; het punt waar die beide lijnen elkander ontmoeten is dus ook het punt van doorsnede van (1) en (5). Noemen wij, bij regthoekige coördinaten, dit punt x_2, y_2, z_2 , dan hebben wij de vergelijkingen

$$c(x_2 - x_1) = a(z_2 - z_1), \quad c(y_2 - y_1) = b(z_2 - z_1);$$

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$x_2 - x_1 = \frac{ac(z_1 - z_1) + ab(y_1 - y_1) - (b^2 + c^2)(x_1 - x_1)}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$y_2 - y_1 = \frac{bc(z_1 - z_1) + ab(x_1 - x_1) - (a^2 + c^2)(y_1 - y_1)}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$z_2 - z_1 = \frac{bc(y_1 - y_1) + ac(x_1 - x_1) - (a^2 + b^2)(z_1 - z_1)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Brengt men, ten slotte, deze waarden over in

$$(z_2 - z_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(z - z_1);$$

$$(z_2 - z_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(z - z_1),$$

dat is in de vergelijkingen der lijn, die door de punten $x_1 y_1 z_1$ en $x_2 y_2 z_2$ gaat, dan erlangt men de vergelijkingen der lijn, die aan de voorwaarden in het vraagstuk vermeld voldoet.

Men zou ook op deze wijze kunnen redeneren: daar de gevraagde lijn zoowel in het vlak (5) ligt als in het vlak dat de gegeeene lijn en het gegeven punt bevat, is zij de doorsnede beider vlakken en bijgevolg worden hare vergelijkingen

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0;$$

$$\frac{a(z - z_1) - c(x - x_1)}{a(z_1 - z_1) - c(x_1 - x_1)} = \frac{b(z - z_1) - c(y - y_1)}{b(z_1 - z_1) - c(y_1 - y_1)} = 0.$$

De lengte eindelijk der loodlijn, dat is de afstand der punten $x_1 y_1 z_1$ en $x_2 y_2 z_2$ wordt uitgedrukt door

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

brengt men hierin de boven gevonden waarden voor $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ en $z_2 - z_1$ over, dan komt er, na eenige herleiding, stellende ter bekorting

$$\{a(z_1 - z_1) - c(x_1 - x_1)\}^2 = A,$$

$$\{b(z_1 - z_1) - c(y_1 - y_1)\}^2 = B,$$

$$\{a(y_1 - y_1) - b(x_1 - x_1)\}^2 = C,$$

voor de lengte der loodlijn

$$\sqrt{\frac{A + B + C}{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

34. Noem de coördinaten van het gegeven punt P $x^1 y^1 z^1$; zij

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad 1)$$

de vergelijking van het vlak; laat p de loodlijn voorstellen uit het punt P op het vlak neder gelaten. Die loodlijn maakt met de coördinaatassen hoeken, aangegeven door α , β en γ .

Brengt men door het punt P een vlak, evenwijdig aan 1), dan is zijne vergelijking

$$Ax + By + Cz = Ax^1 + By^1 + Cz^1. \quad 2).$$

De vlakken 1) en 2) snijden de assen der coördinaten op afstanden, die respectievelijk worden aangewezen door

$$a = -\frac{D}{A}; \quad b = -\frac{D}{B}; \quad c = -\frac{D}{C};$$

$$\text{en } a^1 = \frac{Ax^1 + By^1 + Cz^1}{A}; \quad b^1 = \frac{Ax^1 + By^1 + Cz^1}{B};$$

$$c^1 = \frac{Ax^1 + By^1 + Cz^1}{C}.$$

Hierna is het duidelijk dat men heeft:

$$p = (a^1 - a) \cos \alpha = \frac{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D}{A} \cos \alpha, \text{ of}$$

$$p = (b^1 - b) \cos \beta = \frac{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D}{B} \cos \beta, \text{ en}$$

$$p = (c^1 - c) \cos \gamma = \frac{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D}{C} \cos \gamma,$$

waaruit

$$\cos \alpha = \frac{Ap}{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D}; \quad \cos \beta = \frac{Bp}{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D};$$

$$\cos \gamma = \frac{Cp}{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D}.$$

Zooals men weet en zooals wij vroeger hebben aangetoond, bestaat er tusschen de hoeken der coördinaatassen en die eener willekeurige lijn de volgende betrekking:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \alpha & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \beta & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \gamma & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Brengen wij hierin de waarden van $\cos \alpha$, $\cos \beta$ en $\cos \gamma$, boven gevonden over, dan komt er

$$\begin{vmatrix}
 1 & \frac{Ap}{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D} & \frac{Bp}{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D} & \frac{Cp}{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D} \\
 \frac{Ap}{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D} & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\
 \frac{Bp}{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D} & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\
 \frac{Cp}{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D} & \cos \mu & \cos \lambda & 1
 \end{vmatrix} = 0$$

Vermenigvuldigen wij den eersten regel en de eerste kolom met $\frac{Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D}{p}$, dan wordt de determinant eenvoudiger; men heeft

$$\begin{vmatrix}
 \frac{(Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D)^2}{p^2} & A & B & C \\
 A & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\
 B & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\
 C & \cos \mu & \cos \lambda & 1
 \end{vmatrix} = 0,$$

of

$$\frac{(Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D)^2 \Delta^2}{p^2} = - \begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ A & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ B & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ C & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}, \quad 3)$$

zijnde

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu,$$

of

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

De vergelijking 3) geeft ten slotte voor de waarde van p

$$p = \frac{(Ax^1 + By^1 + Cz^1 + D) \Delta}{\{ A^2 \sin^2 \lambda + 2BC(\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda) + B^2 \sin^2 \mu + 2AC(\cos \nu \cos \lambda - \cos \mu) + C^2 \sin^2 \nu + 2AB(\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu) \}}. \quad 4)$$

Wil men den afstand van den oorsprong O tot het vlak 1) kennen, dan moet men $x^1 = y^1 = z^1 = 0$ stellen; men verkrijgt daardoor

$$p = \pm \frac{D \Delta}{H},$$

wanneer men ter bekorting de uitdrukking onder het wortelteeken in 4) gelijk H stelt.

35. Het vlak 1) van het vorig vraagstuk wordt het vlak yz , dat als vergelijking heeft $x=0$, wanneer $B=C=D=0$ zijn. In dat geval herleidt zich de formule 3) aldaar tot

$$\frac{A^2 x^1{}^2}{p^2} \Delta^2 = A^2 \sin^2 \lambda,$$

waaruit $p = \frac{\Delta x^1}{\sin \lambda}.$

De afstanden p , q , r van het punt $x^1 y^1 z^1$ tot de drie coördinaatvlakken $x=0$, $y=0$ en $z=0$, worden derhalve uitgedrukt door

$$p = \frac{\Delta x^1}{\sin \lambda}; \quad q = \frac{\Delta y^1}{\sin \mu}; \quad r = \frac{\Delta z^1}{\sin \nu}.$$

En daar die afstanden, volgens de gegevens van het vraagstuk aan elkander gelijk moeten zijn, heeft men de verhoudingen

$$\frac{x^1}{\sin \lambda} = \frac{y^1}{\sin \mu} = \frac{z^1}{\sin \nu}.$$

Die vergelijkingen geven de plaats aan van alle punten, die op gelijke afstanden van de coördinaatvlakken gelegen zijn. Uit haren vorm besluit men dat zij eene regte lijn daarstellen. Zij gelden voor alle kwadranten of ook voor de drievlakkige hoeken OX^1YZ , OX^1Y^1Z , OX^1YZ^1 , wanneer men behoorlijk acht geeft op de teekens der sinussen.

36. Schrijft men de vergelijking van een vlak in den normaalvorm

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - d = 0,$$

dan wordt zijn afstand Δ tot eenig punt $x_1 y_1 z_1$ uitgedrukt door

$$\Delta = \pm (x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - d),$$

onder dien verstande dat men het onderste of - teeken gebruikt, als het punt $x_1 y_1 z_1$ met het aanvangspunt der coördinaten aan dezelfde zijde van het vlak liggen.

Wij noemen de coördinaten van een willekeurig punt in het te zoeken vlak xyz , en $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ de vergelijkingen der gegeven vlakken in den normaalvorm. Substitueert men de coördinaten xyz in E_1 , dan verkrijgt men den negatieven afstand $-a_1$ van het punt xyz tot het vlak $E_1 = 0$; en brengt men die coördinaten in het vlak E_2 over, dan wordt daardoor de negatieve afstand $-a_2$ van het punt xyz tot het vlak $E_2 = 0$ bekend. Maar de verhouding $a_1 : a_2$ moet voor alle punten constant gelijk m zijn; van daar moeten de coördinaten van elk punt van het gezochte vlak voldoen aan de vergelijking:

$$\frac{E_1}{E_2} = m;$$

derhalve is $E_1 - m E_2 = 0$ de vergelijking van het gezochte vlak.

Zijn de vergelijkingen der bekende vlakken niet in den normaalvorm gegeven, maar voorgesteld door

$$E_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1,$$

$$\text{en} \quad E_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2,$$

dan is

$$a_1 = \frac{-E_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}; \quad a_2 = \frac{-E_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

wanneer wij aan de wortelgrootheid het teeken geven, dat

$$\frac{-D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \quad \text{en} \quad \frac{-D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

positief maakt.

Men komt dan tot de vergelijking:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{E_1}{E_2} \sqrt{\frac{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = m,$$

of $E_1 - m \rho E_2 = 0$, wanneer men de grootheid onder het wortelteeken korthedshalve $= 1/\rho$ neemt.

Het gevonden vlak $E_1 - m E_2 = 0$ gaat, zooals de vergelijking leert, door de snijlijn der vlakken $E_1 = 0$ en $E_2 = 0$ en deelt den hellingshoek zoo, dat

$$\frac{\sin \delta}{\sin \epsilon} = \pm \frac{a_1}{a_2} = \pm m$$

is, wanneer door δ en ϵ de hoeken worden aangeduid, die het gevonden vlak met de vlakken E_1 en E_2 vormt, waarbij men het teeken moet nemen dat $a_1 : a_2$ positief maakt. Is $m = 1$, dan deelt het vlak $E_1 - E_2 = 0$ den hoek der vlakken $E_1 = 0$ en $E_2 = 0$ midden door. En deelen vlakken de hoeken, welke de vlakken van een drievlakkigen hoek met elkander maken, de standhoeken, midden door, dan snijden die vlakken elkander in een rechte lijn.

37. Laat bij regthoekige coördinaten de vergelijkingen der evenwijdige vlakken worden voorgesteld door

$$ax + by + cz + d = 0; \quad ax + by + cz + d^1 = 0;$$

nemen wij vervolgens een punt $x_1 y_1 z_1$ in het eerste vlak en trekken uit dat punt de loodlijn k op het tweede vlak, dan is

$$k = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d^1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}};$$

maar $x_1 y_1 z_1$ ligt in het eerste vlak en bijgevolg is $ax_1 + by_1 + cz_1 = -d$, en derhalve

$$k = \frac{d^1 - d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

Men verkrijgt dezelfde uitdrukking, wanneer men bedenkt dat de loodlijn k^1 , uit den oorsprong op het eerste vlak neder gelaten, gevonden wordt uit

$$k^1 = \frac{d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

die op het tweede vlak neder gelaten uit

$$k^{11} = \frac{d^1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

en blijkbaar het verschil of $k^{11} - k^1$, dat is

$$\frac{d^1 - d}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

den afstand k der vlakken beteekent.

Hebben de gegeven vergelijkingen den vorm

$$(x - x_1) \cos \alpha + (y - y_1) \cos \beta + (z - z_1) \cos \gamma = 0,$$

$$(x - x_2) \cos \alpha + (y - y_2) \cos \beta + (z - z_2) \cos \gamma = 0,$$

waarbij $x_1 y_1 z_1$ een punt in het eerste, $x_2 y_2 z_2$ een punt in het tweede vlak verbeelden, dan vinden wij, daar $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ is,

$$k = \pm \{ (x_2 - x_1) \cos \alpha + (y_2 - y_1) \cos \beta + (z_2 - z_1) \cos \gamma \}.$$

Nu zijn $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ en $z_2 - z_1$ de projectien op de assen van de lijn, die de beide punten verbindt, en $(x_2 - x_1) \cos \alpha$, $(y_2 - y_1) \cos \beta$ en $(z_2 - z_1) \cos \gamma$ zijn blijkbaar de projectien dezer projectien op eenige lijn, loodregt op beide vlakken; neemt men derhalve in elk der beide evenwijdige vlakken een willekeurig punt p^1 , p^{11} , projecteert men de lijn $p^1 p^{11}$ op drie willekeurige loodregt op elkander staande lijnen, en projecteert men andermaal de verkregen projectien a_1 , a_2 , a_3 op eenige loodlijn op de vlakken, dan is de som dezer laatste projectien standvastig en gelijk aan den afstand der vlakken, waar overigens de punten p^1 en p^{11} in de evenwijdige vlakken ook genomen zijn.

38. Laat het platte vlak met de drie onderling regthoekige projectievlakken de hoeken ω_x , ω_y en ω_z maken, dan is volgens eene bekende stelling $S_x = S \cos \omega_x$, $S_y = S \cos \omega_y$, $S_z = S \cos \omega_z$, $S_x^1 = S^1 \cos \omega_x$, $S_y^1 = S^1 \cos \omega_y$ en $S_z^1 = S^1 \cos \omega_z$. Nemen wij de som van de producten dezer gelijkheden, dan komt er

$$S_x S_x^1 + S_y S_y^1 + S_z S_z^1 = S S^1 (\cos^2 \omega_x + \cos^2 \omega_y + \cos^2 \omega_z),$$

maar

$$\cos^2 \omega_x + \cos^2 \omega_y + \cos^2 \omega_z = 1,$$

derhalve

$$S_x S_x^1 + S_y S_y^1 + S_z S_z^1 = S S^1,$$

zoodat hierdoor de stelling bewezen is. Stelt men $S = S^1$, dan heeft men

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

Zij nog A de regthoekige projectie van een vlakken veelhoek S op eenig vlak E ; voorts A^1 , A^{11} en A^{111} de regthoekige projectien van S op drie onderling regthoekige vlakken en B^1 , B^{11} , B^{111} de regthoekige projectien van A^1 , A^{11} en A^{111} op het vlak E , dan is

$$A = B^1 + B^{11} + B^{111}.$$

Laat ω de hoek zijn, dien het vlak van den veelhoek S met het vlak E maakt, voorts α_1, α_2 en α_3 de hoeken, die het vlak van den veelhoek en $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ de hoeken, die het vlak E met de drie onderling loodrechte vlakken maakt, dan is

$A = S \cos \omega$; $A^1 = S \cos \alpha_1$; $A^{11} = S \cos \alpha_2$; $A^{111} = S \cos \alpha_3$;
ook is

$$B^1 = S \cos \alpha_1 \cos \beta_1; \quad B^{11} = S \cos \alpha_2 \cos \beta_2; \\ B^{111} = S \cos \alpha_3 \cos \beta_3,$$

en bijgevolg

$$B^1 + B^{11} + B^{111} = (\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \\ + \cos \alpha_3 \cos \beta_3) S,$$

maar $\cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 = \cos \omega$,
bijgevolg

$$B^1 + B^{11} + B^{111} = S \cos \omega = A.$$

39. Veronderstellen wij in de eerste plaats dat het hoekpunt A van den driehoek ABC in den oorsprong der coördinaten ligt, en laten x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 de coördinaten der beide andere hoekpunten B en C zijn. Wanneer wij het oppervlak van den driehoek S noemen en door b en c de zijden AC en AB tegenover de hoekpunten B en C aanduiden, dan hebben wij terstond

$$4 S^2 = b^2 c^2 \sin^2 A = b^2 c^2 - b^2 c^2 \cos^2 A,$$

$$\text{of} \quad 4 S^2 = \begin{vmatrix} c^2 & b c \cos A \\ b c \cos A & b^2 \end{vmatrix}.$$

Wij gaan bovendien uit van de veronderstelling dat de coördinaatassen regthoekig op elkander staan, en noemen wij de hoeken, welke de zijden AB en AC met die assen maken $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ en $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, dan hebben wij

$$x_1 = c \cos \alpha_1, \quad y_1 = c \cos \beta_1, \quad z_1 = c \cos \gamma_1;$$

$$x_2 = b \cos \alpha_2, \quad y_2 = b \cos \beta_2, \quad z_2 = b \cos \gamma_2;$$

en daar

$$\cos A = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

is, komt er, wanneer men met $b c$ vermenigvuldigt en de boven gevonden waarden substitueert,

$$b c \cos A = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Blijkbaar is bovendien

$$c^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \text{ en } b^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

brengt men deze waarden in den boven gevonden determinant over, dan heeft men

$$4S^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix} (1).$$

In het voorbijgaan zij hier opgemerkt dat deze determinant de som is van de vierkanten der drie determinanten begrepen in den determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

welke de dubbele projectien van den inhoud des driehoeks op de coördinatenvlakken voorstellen.

Laat ons, in de tweede plaats, den oorsprong der coördinaten overbrengen naar een willekeurig punt der ruimte met de coördinaten $-x$, $-y$ en $-z$, en stellen wij de nieuwe coördinaten der hoekpunten B en C door x^1, y^1, z^1 ; x^{11}, y^{11} en z^{11} voor. De coördinaten van het punt A zijn ten opzichte van den nieuwen oorsprong x, y en z .

Als wij dit doen, hebben wij de betrekkingen

$$\begin{aligned} x_1 &= x^1 - x; & y_1 &= y^1 - y; & z_1 &= z^1 - z; \\ x_2 &= x^{11} - x; & y_2 &= y^{11} - y; & z_2 &= z^{11} - z, \end{aligned}$$

waaruit wij verder afleiden

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= (x^1 - x)^2 + (y^1 - y)^2 + (z^1 - z)^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) + (x^{12} + y^{12} + z^{12}) - 2(xx^1 + yy^1 + zz^1); \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= (x^{11} - x)^2 + (y^{11} - y)^2 + (z^{11} - z)^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) + (x^{112} + y^{112} + z^{112}) - 2(xx^{11} + yy^{11} + zz^{11}); \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 &= (x^1 - x)(x^{11} - x) + (y^1 - y)(y^{11} - y) + \\ &\quad + (z^1 - z)(z^{11} - z) = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) + (x^1 x^{11} + y^1 y^{11} + z^1 z^{11}) - \\ &\quad - (xx^{11} + yy^{11} + zz^{11}) - (xx^1 + yy^1 + zz^1). \end{aligned}$$

Stellen wij kortheidshalve

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= l, & x^1 x^{11} + y^1 y^{11} + z^1 z^{11} &= p, \\ x^{12} + y^{12} + z^{12} &= m, & xx^{11} + yy^{11} + zz^{11} &= q, \\ x^{112} + y^{112} + z^{112} &= n, & xx^1 + yy^1 + zz^1 &= r, \end{aligned}$$

dan hebben wij

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= l + m - 2r, \\x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= l + n - 2q, \\x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 &= l + p - q - r.\end{aligned}$$

Brengen wij deze waarden in (1) over, dan komt er

$$\begin{aligned}4S^2 &= \begin{vmatrix} l+m-2r & l+p-q-r \\ l+p-q-r & l+n-2q \end{vmatrix} = \\&= \begin{vmatrix} 1 & r & q \\ 0 & l+m-2r & l+p-q-r \\ 0 & l+p-q-r & l+n-2q \end{vmatrix},\end{aligned}$$

of, wanneer men den eersten regel bij de beide volgende voegt,

$$\begin{aligned}4S^2 &= \begin{vmatrix} 1 & r & q \\ 1 & l+m-r & l+p-r \\ 1 & l+p-q & l+n-q \end{vmatrix} = \\&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & 1 & r & q \\ r & 1 & l+m-r & l+p-r \\ q & 1 & l+p-q & l+n-q \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Vermenigvuldigen wij, in dezen laatsten determinant, de tweede kolom met $-l$, en voegen wij vervolgens de som der beide eerste kolommen bij elke der beide volgende, dan hebben wij

$$4S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ l & 1 & r & q \\ r & 1 & m & p \\ q & 1 & p & n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & l & r & q \\ 1 & r & m & p \\ 1 & q & p & n \end{vmatrix}.$$

Wanneer men ten slotte l, m, n, p, q en r door hare waarden vervangt, verkrijgt men

$$S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+y^2+z^2 & xx^1+yy^1+zz^1 & xx^{11}+yy^{11}+zz^{11} \\ 1 & xx^1+yy^1+zz^1 & x^{12}+y^{12}+z^{12} & x^1x^{11}+y^1y^{11}+z^1z^{11} \\ 1 & xx^{11}+yy^{11}+zz^{11} & x^1x^{11}+y^1y^{11}+z^1z^{11} & x^{112}+y^{112}+z^{112} \end{vmatrix}.$$

Men kan gemakkelijk aantoonen dat deze determinant het product is van

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & x^1 & y^1 & z^1 \\ 0 & 1 & x^{11} & y^{11} & z^{11} \end{vmatrix}, \quad \Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & y & z \\ 1 & 0 & x^1 & y^1 & z^1 \\ 1 & 0 & x^{11} & y^{11} & z^{11} \end{vmatrix}.$$

40. Om deze stelling te betoogen veronderstellen wij dat de rechte lijn L gegeven is door de vergelijkingen

$$x = az + p; \quad y = bz + q. \quad (1)$$

De afstand van eenig punt x_1, y_1, z_1 tot die lijn wordt op de volgende wijze bepaald. Wij brengen door dat punt x_1, y_1, z_1 een vlak loodrecht op de lijn (1), en bekomen voor de vergelijking van dat vlak

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + z - z_1 = 0. \quad (2)$$

Om den afstand van x_1, y_1, z_1 tot de lijn (1) te vinden, moet men de coördinaten van het punt van doorsnede van het vlak (2) en de lijn (1) opzoeken, en die overbrengen in de algemeene vergelijking

$$\text{Afstand} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}; \quad (3)$$

men vindt dan, na eenige herleiding, voor het vierkant van dien afstand de uitdrukking:

$$\frac{(x_1 - az_1 - p)^2 + (y_1 - bz_1 - q)^2 + \{a(y_1 - q) - b(x_1 - p)\}^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Stellen wij in deze uitdrukking $x_1 = 0, y_1 = 0$ en $z_1 = 0$, dat is, met andere woorden, veronderstellen wij dat het punt x_1, y_1, z_1 in den oorsprong ligt, dan bekomen wij

$$\delta^2 = \frac{p^2 + q^2 + (bp - aq)^2}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Het kost weinig moeite om de andere afstanden δ_1, δ_2 en δ_3 op soortgelijke wijze te bepalen. De vergelijking $x = az + p$ van de lijn (1) geeft hare projectie op het xz vlak te kennen, en de lijn, die loodrecht staat op die projectie, wordt aangewezen door $x = -\frac{1}{a}z$, wanneer zij door den oorsprong gaat. Bepaalt men uit de laatste vergelijkingen de waarden van x en z , dan heeft men

$$x = \frac{p}{a^2 + 1}; z = \frac{-ap}{a^2 + 1},$$

waaruit voor δ_2 de waarde voortvloeit van

$$\delta_2^2 = \frac{p^2}{a^2 + 1}.$$

Op het yz vlak is de projectie der lijn (1) $y = bz + q$, en de lijn, die door den oorsprong loodrecht op deze laatste staat $y = -\frac{1}{b}z$, zoodat wij voor δ_3 vinden

$$\delta_3^2 = \frac{q^2}{b^2 + 1};$$

De projectie op het xy vlak, of

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{aq - bp}{a},$$

wordt gevonden door z te elimineren tusschen de vergelijkingen (1); gaat men op soortgelijke wijze als boven te werk, dan vindt men

$$\delta_1^2 = \frac{(aq - bp)^2}{a^2 + b^2}.$$

Noemen wij de hoeken, die de lijn L met de coördinaatassen maakt, α_1 , β_1 en γ_1 , dan is

$$\cos^2 \alpha_1 = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + 1}; \quad \cos^2 \beta_1 = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + 1};$$

$$\cos^2 \gamma_1 = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1};$$

maar $\alpha_1 = 90 - \gamma$; $\beta_1 = 90 - \beta$ en $\gamma_1 = 90 - \alpha$, derhalve

$$\cos^2 \alpha_1 = \sin^2 \gamma = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + 1}; \text{ of ook } 1 - \sin^2 \gamma = 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2 + 1},$$

dat is $\cos^2 \gamma = \frac{b^2 + 1}{a^2 + b^2 + 1}.$

Op soortgelijke wijze vindt men

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1}; \quad \cos^2 \beta = \frac{a^2 + 1}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Vermenigvuldigt men ten slotte δ_1^2 met $\cos^2 \alpha$, dan komt er

$$\frac{(aq - bp)^2}{a^2 + b^2 + 1}; \text{ voor } \delta_2^2 \text{ maal } \cos^2 \beta \text{ vindt men } \frac{p^2}{a^2 + b^2 + 1},$$

en het product van δ_3^2 en $\cos^2 \gamma$ geeft $\frac{q^2}{a^2 + b^2 + 1}$; maakt

men de sommen dezer producten op, dan heeft men

$$\frac{p^2 + q^2 + (a q - b p)^2}{a^2 + b^2 + 1},$$

welke de waarde is boven voor δ^2 gevonden.

Voor de vergelijking der lijn L had men ook kunnen schrijven

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha_1} = \frac{y - y_0}{\cos \beta_1} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma_1};$$

dan zou men voor den afstand δ van een punt $x_1 y_1 z_1$ tot de lijn gevonden hebben

$$\delta^2 = [\cos \beta_1 (z - z_0) - \cos \gamma_1 (y - y_0)]^2 + [\cos \gamma_1 (x_1 - x_0) - \cos \alpha_1 (z_1 - z_0)]^2 + [\cos \alpha_1 (y_1 - y_0) - \cos \beta_1 (x_1 - x_0)]^2,$$

of ook

$$\delta^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 - [(x_0 - x_1) \cos \alpha_1 + (y_0 - y_1) \cos \beta_1 + (z_0 - z_1) \cos \gamma_1]^2,$$

waaruit wederom het overige gemakkelijk voortvloeit, als men maar de betrekkingen tusschen α , β , γ , en α_1 , β_1 en γ_1 niet uit het oog verliest.

41. Om hiertoe te geraken nemen wij het vlak A als vlak der xz , het vlak B als vlak der yz en een willekeurig vlak voor dat der xy ; de doorsnede der vlakken A en B wordt hierdoor de as der z . Voorts stellen wij de coördinaten van het gegeven punt met betrekking tot het aangenomen coördinatenstelsel gelijk $x_1 y_1 z_1$. Noemen wij nu de veranderlijke punten, waarin de vlakken C en D de assen snijden, respectievelijk p^1_x , p^1_y , p^1_z en p^{11}_x , p^{11}_y , p^{11}_z en stellen wij, O het aanvangspunt der coördinaten verbeeldende,

$$\begin{aligned} Op^1_x &= x^1; & Op^1_y &= y^1; & Op^1_z &= z^1; \\ Op^{11}_x &= x^{11}; & Op^{11}_y &= y^{11}, \end{aligned}$$

dan wordt de vergelijking

$$\text{van het vlak } C: \frac{x}{x^1} + \frac{y}{y^1} + \frac{z}{z^1} = 1,$$

$$\text{van het vlak } D: \frac{x}{x^{11}} + \frac{y}{y^{11}} + \frac{z}{z^1} = 1;$$

maar wijl deze vlakken door het punt p moeten gaan, heeft men tevens

$$\frac{x_1}{x^1} + \frac{y_1}{y^1} + \frac{z_1}{z^1} = 1 \dots (1); \quad \frac{x_1}{x^{11}} + \frac{y_1}{y^{11}} + \frac{z_1}{z^{11}} = 1 \quad (2).$$

De vergelijking van het vlak F , gaande door de punten p_1^1 , p_2^1 en p_3^1 en die van het vlak G , waarin zich de punten p_1^{11} , p_2^{11} en p_3^{11} bevinden, zijn

$$\frac{x}{x^1} + \frac{y}{y^{11}} + \frac{z}{z^1} = 1 \dots (3); \quad \frac{x}{x^{11}} + \frac{y}{y^1} + \frac{z}{z^{11}} = 1 \quad (4).$$

Trekken wij nu de vergelijkingen (2) en (4) respectievelijk van (1) en (3) af, dan komt er

$$\left(\frac{1}{x^1} - \frac{1}{x^{11}}\right)x_1 + \left(\frac{1}{y^1} - \frac{1}{y^{11}}\right)y_1 = 0; \quad \left(\frac{1}{x^1} - \frac{1}{x^{11}}\right)x - \left(\frac{1}{y^1} - \frac{1}{y^{11}}\right)y = 0,$$

waaruit door het elimineren van $\frac{1}{x^1} - \frac{1}{x^{11}}$ gevonden wordt

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 0,$$

welke vergelijking de gezochte plaats aangeeft en een vlak voorstelt, dat de as der z of de doorsnede van A en B bevat. Dat vlak blijft onveranderd, wanneer het punt p andere plaatsen inneemt, onder voorwaarde dat de verhouding van y_1 tot x_1 dezelfde blijft, dat is, met andere woorden, onder voorwaarde dat het punt p zich beweegt in het vlak dat de as der z bevat.

42. Wij nemen als coördinatenassen de gegeven lijnen a , b en c , en hare doorsnede O als oorsprong van telling; voorts stellen wij de veranderlijke grootheden $Op_a = x^1$, $Op_b = y^1$, $Op_c = z^1$; $Op_a^1 = x^{11}$, $Op_b^1 = y^{11}$, $Op_c^1 = z^{11}$. Op de gegeven rechte lijn nemen wij twee willekeurige punten $x_1 y_1 z_1$ en $x_2 y_2 z_2$; dan wordt de vergelijking

$$\text{van het vlak } D \quad \frac{x}{x^1} + \frac{y}{y^1} + \frac{z}{z^1} = 1,$$

$$\text{van het vlak } D^1 \quad \frac{x}{x^{11}} + \frac{y}{y^{11}} + \frac{z}{z^{11}} = 1.$$

Maar wijl de lijn d , derhalve ook de punten $x_1 y_1 z_1$ en $x_2 y_2 z_2$ in deze vlakken liggen, hebben wij nog de vergelijkingen

$$\frac{x_1}{x^1} + \frac{y_1}{y^1} + \frac{z_1}{z^1} = 1 \dots (1) \quad \frac{x_2}{x^1} + \frac{y_2}{y^1} + \frac{z_2}{z^1} = 1 \dots (2)$$

$$\frac{x_1}{x^{11}} + \frac{y_1}{y^{11}} + \frac{z_1}{z^{11}} = 1 \dots (3) \quad \frac{x_2}{x^{11}} + \frac{y_2}{y^{11}} + \frac{z_2}{z^{11}} = 1 \dots (4)$$

Nog is de vergelijking

$$\text{van het vlak } F \quad \frac{x}{x^1} + \frac{y}{y^1} + \frac{z}{z^{11}} = 1 \dots (5)$$

$$\text{van het vlak } G \quad \frac{x}{x^1} + \frac{y}{y^{11}} + \frac{z}{z^1} = 1 \dots (6)$$

$$\text{van het vlak } H \quad \frac{x}{x^{11}} + \frac{y}{y^1} + \frac{z}{z^1} = 1 \dots (7)$$

Trekken wij nu de vergelijkingen (3) van (1), (4) van (2), en (6) en (7) van (5) af, dan komt er

$$\left(\frac{1}{x^1} - \frac{1}{x^{11}}\right)x_1 + \left(\frac{1}{y^1} - \frac{1}{y^{11}}\right)y_1 + \left(\frac{1}{z^1} - \frac{1}{z^{11}}\right)z_1 = 0, \dots (8)$$

$$\left(\frac{1}{x^1} - \frac{1}{x^{11}}\right)x_2 + \left(\frac{1}{y^1} - \frac{1}{y^{11}}\right)y_2 + \left(\frac{1}{z^1} - \frac{1}{z^{11}}\right)z_2 = 0, \dots (9)$$

$$\left(\frac{1}{y^1} - \frac{1}{y^{11}}\right)y = \left(\frac{1}{z^1} - \frac{1}{z^{11}}\right)z \quad (10); \quad \left(\frac{1}{x^1} - \frac{1}{x^{11}}\right)x = \left(\frac{1}{z^1} - \frac{1}{z^{11}}\right)z \quad (11)$$

Elimineren wij, ten slotte, $\left(\frac{1}{x^1} - \frac{1}{x^{11}}\right)$ en $\left(\frac{1}{y^1} - \frac{1}{y^{11}}\right)$ tusschen (8), (9) en (10) en tusschen (8), (9) en (11), dan verdwijnt ook $\left(\frac{1}{z^1} - \frac{1}{z^{11}}\right)$, en wij verkrijgen

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1)x + (x_2 y_1 - x_1 y_2)z = 0;$$

$$(x_1 z_2 - x_2 z_1)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)z = 0,$$

als vergelijkingen der gezochte plaats. Uit haar blijkt dat zij eene rechte lijn is, die door den oorsprong gaat; deze lijn blijft onveranderd, al brengt men ook verandering in de ligging der lijn d , altijd onder voorwaarde dat de verhoudingen

$$\frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}, \quad \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_2 y_1 - x_1 y_2}$$

dezelfde blijven. Geschiedt dit laatste, dan liggen de punten $x_1 y_1 z_1$ en $x_2 y_2 z_2$ in een bepaald vlak, dat door den oorsprong gaat; van daar ondergaat de gevonden plaats ook geene verandering, wanneer de lijn d zich beweegt op een vlak, dat door den oorsprong der coördinaten gaat.

43. Om het betoog dier stelling te leveren beginnen wij met de lengten der stralen op te maken. Wij nemen aan dat het punt O het nulpunt is van onderling regthoekige coördinaten, en schrijven in die veronderstelling voor de vergelijking van het gegeven vlak

$$Ax + By + Cz = 1,$$

voor de vergelijkingen van een der stralen $x = az$; $y = bz$.

In het punt, waar de straal het vlak snijdt, moeten in de gestelde vergelijkingen x , y en z dezelfde waarden bekomen; brengt men $x = az$ en $y = bz$ in de eerste over, dan vindt men reeds terstond

$$z = \frac{1}{Aa + Bb + C},$$

en verder
$$x = \frac{a}{Aa + Bb + C}; \quad y = \frac{b}{Aa + Bb + C},$$

waaruit voor den afstand van O tot het vlak volgt

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{Aa + Bb + C}.$$

De lengte van het stuk op den aangenomen straal uitgezet, wordt derhalve uitgedrukt door

$$P \cdot \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

waarin P een willekeurig getal beduidt.

Door het uiteinde van het stuk moet nu een vlak loodregt op den straal gebragt worden; dit vereischt de kennis der coördinaten x^1 , y^1 en z^1 van dat punt. Men vindt x^1 uit de vergelijking

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{Aa + Bb + C} : P \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{a}{Aa + Bb + C} : x^1,$$

waaruit

$$x^1 = P \frac{a(Aa + Bb + C)}{a^2 + b^2 + 1};$$

op soortgelijke wijze bekomt men voor y^1 en z^1 de uitdrukkingen

$$y^1 = P \frac{b(Aa + Bb + C)}{a^2 + b^2 + 1}; \quad z^1 = \frac{P(Aa + Bb + C)}{a^2 + b^2 + 1}.$$

De vergelijking van het vlak loodregt op $x = ax$; $y = bx$, dat tevens gaat door het punt $x^1 y^1 z^1$, is

$$ax + by + z = P(Aa + Bb + C).$$

Maar voor elk ander vlak, dat loodregt staat op een willekeurigen straal $x = a^1x$; $y = b^1x$ of $x = a^{11}x$; $y = b^{11}x$, en aan de voorwaarde in het vraagstuk vermeld voldoet, vindt men, denzelfden weg bewandelende, de vergelijkingen

$$a^1x + b^1y + z = P(Aa^1 + Bb^1 + C)$$

$$a^{11}x + b^{11}y + z = P(Aa^{11} + Bb^{11} + C)$$

enz.

enz.

Maakt men het snijpunt dezer vlakken op, dan vindt men

$$x = PA; y = PB; z = PC,$$

onafhankelijk van de waarden a, b, a^1, b^1 , enz., welke den eenen straal van den anderen onderscheiden; derhalve, enz.

44. Wij duiden den zeshoek aan door de letters M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 en M_6 respectievelijk bij elk der hoeken geplaatst, denken ons dat het punt M_1 ligt in den oorsprong van onderling regthoekige coördinaten en dat het punt M_2 in de as der x valt. Dan zijn de coördinaten van

het punt M_1 0; 0; 0.

" " M_2 x_2 ; 0; 0;

" " M_3 x_3 ; y_3 ; z_3 ;

" " M_4 x_4 ; y_4 ; z_4 ;

" " M_5 $x_4 - x_2$; y_4 ; z_4

" " M_6 $x_4 - x_3$; $y_4 - y_3$; $z_4 - z_3$.

Voorts zijn de coördinaten van

het midden van $M_1 M_2$ $\frac{1}{2} x_2$; 0; 0;

" " " $M_2 M_3$ $\frac{1}{2} (x_2 + x_3)$; $\frac{1}{2} y_3$; $\frac{1}{2} z_3$.

" " " $M_3 M_4$ $\frac{1}{2} (x_3 + x_4)$; $\frac{1}{2} (y_3 + y_4)$; $\frac{1}{2} (z_3 + z_4)$;

" " " $M_4 M_5$ $x_4 - \frac{1}{2} x_2$; y_4 ; z_4 .

" " " $M_5 M_6$ $x_4 - \frac{1}{2} (x_2 + x_3)$; $y_4 - \frac{1}{2} y_3$; $z_4 - \frac{1}{2} z_3$;

" " " $M_6 M_1$ $\frac{1}{2} (x_4 - x_3)$; $\frac{1}{2} (y_4 - y_3)$; $\frac{1}{2} (z_4 - z_3)$.

Zoo als men weet, liggen vier punten in een plat vlak, wanneer de determinant hunner coördinaten gelijk nul is. Laat ons zien of dit met de vier eerste punten het geval is; schrijven wij den determinant op:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} x_2 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} (x_2 + x_3) & \frac{1}{2} y_3 & \frac{1}{2} x_3 & 1 \\ \frac{1}{2} (x_3 + x_4) & \frac{1}{2} (y_3 + y_4) & \frac{1}{2} (x_3 + x_4) & 1 \\ x_4 - \frac{1}{2} x_2 & y_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix},$$

en trekken wij den eersten regel van den tweeden af, dan komt er

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} x_2 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} x_3 & \frac{1}{2} y_3 & \frac{1}{2} x_3 & 0 \\ \frac{1}{2} (x_3 + x_4) & \frac{1}{2} (y_3 + y_4) & \frac{1}{2} (x_3 + x_4) & 1 \\ x_4 - \frac{1}{2} x_2 & y_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix},$$

of in dezen nogmaals den tweeden regel van den derden aftrekkende, heeft men

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} x_2 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} x_3 & \frac{1}{2} y_3 & \frac{1}{2} x_3 & 0 \\ \frac{1}{2} x_4 & \frac{1}{2} y_4 & \frac{1}{2} x_4 & 1 \\ x_4 - \frac{1}{2} x_2 & y_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix},$$

en eindelijk, van twee malen den derden regel den vierden aftrekkende,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} x_2 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} x_3 & \frac{1}{2} y_3 & \frac{1}{2} x_3 & 0 \\ \frac{1}{2} x_4 & \frac{1}{2} y_4 & \frac{1}{2} x_4 & 1 \\ \frac{1}{2} x_2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

In den laatsten determinant zijn de eerste en de vierde regel aan elkander gelijk; de determinant is derhalve $= 0$, en de vier genoemde punten liggen in een plat vlak.

Maar in datzelfde vlak liggen ook de punten, die wij tot heden buiten rekening lieten. Stelt men toch de coördinaten van een dezer laatsten in de plaats van eenig ander punt, dan zal men op dezelfde wijze betoogen dat de determinant gelijk nul wordt, derhalve, enz.

45. Om die stelling op de gemakkelijkste wijze aan te toonen, maken wij gebruik van een scheefhoekig coördinatenstelsel; wij denken ons een der hoeken van het zesvlak in den oorsprong, en nemen aan dat drie der zijvlakken zamen vallen met de coördinaatvlakken. Het grondvlak van het zesvlak valt dan zamen met het xy vlak en kan aange-
wezen worden door de letters $OPQR$; duiden wij het

bovenvlak nog aan door de letters $O^1 P^1 Q^1 R^1$, dan zijn de diagonalen $O Q^1$ en $O^1 Q$, $P R^1$ en $P^1 R$. De zes vlakken, waaronder het zesvlak is zamengesteld, zijn dan

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{ste}} \text{ vlak} & x = 0, \\ 2^{\text{de}} & y = 0, \\ 3^{\text{de}} & z = 0, \\ 4^{\text{de}} & a x + b y + c z + 1 = 0, \dots\dots (1) \\ 5^{\text{de}} & a_1 x + b_1 y + c_1 z + 1 = 0, \\ 6^{\text{de}} & a_2 x + b_2 y + c_2 z + 1 = 0. \end{array}$$

De doorsnede van het eerste en vierde vlak heeft tot vergelijkingen

$$x = 0; \quad b y + c z + 1 = 0; \dots\dots (2)$$

voor de doorsnede van het tweede en vijfde vlak vindt men

$$y = 0; \quad a_1 x + c_1 z + 1 = 0, \dots\dots (3)$$

voor die van het derde en zesde vlak

$$z = 0; \quad a_2 x + b_2 y + 1 = 0. \dots\dots (4)$$

Maar die doorsneden of rechte lijnen moeten volgens de opgave van het vraagstuk in een en hetzelfde platte vlak gelegen zijn. Noemen wij de vergelijking van dit vlak

$$A x + B y + C z + 1 = 0, \dots\dots (5)$$

dan volgt uit de voorwaarde dat (2) in dit vlak ligt

$$C = c \quad \text{en} \quad B = b,$$

dat (3) in (5) ligt

$$C = c_1 \quad \text{en} \quad A = a_1,$$

dat (4) in (5) ligt, eindelijk,

$$B = b_2; \quad A = a_2,$$

en de vergelijking (5) wordt, door het overbrengen dezer waarden,

$$a_1 x + b y + c z + 1 = 0,$$

terwijl bovendien $a_2 = a_1$; $b_2 = b$ en $c_1 = c$ is,

waardoor de vergelijkingen van het vierde, vijfde en zesde vlak worden

$$a x + b y + c z + 1 = 0,$$

$$a_1 x + b_1 y + c z + 1 = 0,$$

$$a_1 x + b y + c_2 z + 1 = 0.$$

Het komt er nu nog slechts op aan om de vergelijkingen der diagonalen op te maken en de snijpunten te bepalen.

De diagonaal OQ^1 gaat door den oorsprong en het punt Q^1 of het snijpunt der vlakken 4, 5 en 6, welks coördinaten zijn

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c \\ 1 & b & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c \\ a_1 & b & c_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ a_1 & 1 & c \\ a_1 & 1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c \\ a_1 & b & c_2 \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_1 & b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c \\ a_1 & b & c_2 \end{vmatrix}};$$

de vergelijkingen van OQ^1 worden derhalve

$$x = \frac{c_2 - c}{a - a_1} z; \quad y = \frac{c_2 - c}{b_1 - b} z. \quad \dots \quad (6)$$

Het punt O^1 ontstaat door de snijding van het eerste, tweede en zesde vlak, waardoor de coördinaten van dat punt worden

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = -\frac{1}{c_2};$$

voor de coördinaten van het punt Q , geboren uit de snijding van het derde, vierde en vijfde vlak, vindt men

$$x = \frac{b - b_1}{a b_1 - a_1 b}; \quad y = \frac{a_1 - a}{a b_1 - a_1 b}; \quad z = 0.$$

De vergelijkingen der lijn, die door de punten O^1 en Q gaat, zijn derhalve

$$x = \frac{c_2(b - b_1)}{ab_1 - a_1b} z + \frac{b - b_1}{ab_1 - a_1b}; \quad y = \frac{c_2(a_1 - a)}{ab_1 - a_1b} z + \frac{a_1 - a}{ab_1 - a_1b} \quad (7).$$

Om die vergelijkingen van PR^1 op te maken, bedenke men dat P gevormd wordt door de snijding van het eerste, derde en vijfde vlak, zoo dat de coördinaten van P worden

$$x = 0; \quad y = -\frac{1}{b_1}; \quad z = 0,$$

terwijl die van R^1 , ontstaan door de snijding van het tweede, vierde en zesde vlak, zijn

$$x = \frac{c - c_2}{a c_2 - a_1 c}; \quad y = 0; \quad z = \frac{a_1 - a}{a c_2 - a_1 c}.$$

Voor PR^1 vindt men derhalve

$$x = \frac{c - c_2}{a_1 - a} z; \quad y = \frac{a c_2 - a_1 c}{b_1 (a_1 - a)} z - \frac{1}{b_1} \quad \dots \quad (8)$$

Er blijft over de vergelijkingen van $P^1 R$ op te sporen; deze diagonaal gaat door het punt P^1 , waarin de vlakken een, vijf en zes elkander snijden, zoodat de coördinaten van dat punt worden

$$x = 0; \quad y = \frac{c - c_2}{b_1 c_2 - b c}; \quad z = \frac{b - b_1}{b_1 c_2 - b c};$$

maar de diagonaal gaat ook door het punt R , ontstaan uit de snijding der vlakken twee, drie en vier; de coördinaten van dat punt zijn derhalve

$$x = -\frac{1}{a}; \quad y = 0; \quad z = 0,$$

waardoor de vergelijkingen van $P^1 R$ worden

$$x = \frac{b_1 c_2 - b c}{a(b - b_1)} z - \frac{1}{a}; \quad y = \frac{c - c_2}{b - b_1} \dots \quad (9)$$

Zoekt men nu de coördinaten van het snijpunt van twee diagonalen, uit (6), (7), (8) en (9) willekeurig genomen, dan zal men immer dezelfde waarden bekomen, zoo dat het aan geen twijfel meer onderhevig is of de vier genoemde diagonalen snijden elkander in een punt.

46. Het bewijs dezer stelling vloeit voort uit de volgende overwegingen. Door de lijn, waarop de lengte AB is uitgezet en de tweede der drie evenwijdige lijnen kan men een vlak brengen. In dat vlak ligt de driehoek ABC , welks inhoud gelijk is aan AB vermenigvuldigd met den halven afstand der evenwijdige lijnen. En die afstand verandert niet, waar men het punt C ook neme, juist wijl de lijnen evenwijdig loopen. De inhoud van den driehoek is derhalve standvastig. Maar de inhoud der piramide is evenzeer constant, omdat hij gevonden wordt door het vermenigvuldigen van den inhoud des driehoeks ABC met een derde der hoogte, en die hoogte is de afstand der derde evenwijdige lijn tot het vlak, waarin de beide andere liggen. Waar zich het punt D in die derde lijn ook moge bevinden, het zal steeds op denzelfden afstand van het vlak der beide andere lijnen gelegen zijn. En deze redenering blijft dezelfde, al verwisselt men ook de eene der evenwijdige lijnen met eene der overigen. In plaats van de derde lijn

kan men ook een vlak nemen, waarop zich het punt C of D of de lijn AB bevindt, mits dit evenwijdig loopt met het vlak, waarin zich de beide andere evenwijdige lijnen bevinden.

47. Wij beschouwen de piramide in verband met een regthoekig coördinatenstelsel, denken ons dat een harer hoekpunten in den oorsprong ligt en nemen aan dat haar grondvlak zamenvalt met het xy vlak, terwijl een der ribben langs de x as gelegen is. Noemen wij de piramide $OABC$ dan bevindt zich het punt O in den oorsprong en de ribbe OA valt samen met de x as. De coördinaten van het punt A zijn dan $x = x_1$, $y = 0$, $z = 0$. De coördinaten van het punt B , dat in het xy vlak ligt, noemen wij $x = x_2$, $y = y_2$, $z = 0$. Eindelijk mogen $x = x_3$, $y = y_3$ en $z = z_3$ de coördinaten van het punt C voorstellen.

Het vlak, dat door $\frac{1}{2} OA$ of door het punt gaat, welks coördinaten zijn $x = \frac{1}{2} x_1$, $y = 0$, $z = 0$ en loodrecht staat op de overstaande ribbe BC , wordt voorgesteld door

$$(x_3 - x_2)(x - \frac{1}{2} x_1) + (y_3 - y_2)y + z z_3 = 0.$$

Voor het vlak dat gaat door $\frac{1}{2} BC$ en loodrecht staat op OA vindt men

$$x - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = 0.$$

Voor het vlak door $\frac{1}{2} OB$ gaande, loodrecht op AC , heeft men

$$(x_3 - x_1)(x - \frac{1}{2} x_2) + y_3(y - \frac{1}{2} y_2) + z z_3 = 0.$$

Gaat het vlak door $\frac{1}{2} AC$, loodrecht op OB , dan wordt zijne vergelijking

$$y y_2 - \frac{1}{2} y_2 y_3 + x_2(x - \frac{1}{2}(x_1 + x_3)) = 0.$$

Staat het vlak loodrecht op AB en gaat het tevens door $\frac{1}{2} OC$, dan herleidt zich zijne vergelijking tot

$$y y_2 - \frac{1}{2} y_2 y_3 + (x_2 - x_1)(x - \frac{1}{2} x_3) = 0.$$

En gaat het door $\frac{1}{2} AB$, loodrecht op OC , dan heeft men

$$x_3(x - \frac{1}{2}(x_1 + x_3)) + y_3(y - \frac{1}{2} y_2) + z z_3 = 0.$$

Eenmaal de vergelijkingen der zes vlakken gevonden, kan men het snijpunt van drie hunner bepalen; daartoe heeft men de waarden van x , y en z te zoeken uit drie dier vergelijkingen. Men zal vinden

$$x = \frac{1}{2} (x_2 + x_3);$$

$$y = \frac{1}{2} y_3 + \frac{x_2}{2 y_2} (x_1 - x_2);$$

$$z = \frac{x_3 y_2 (x_1 - x_3) + y_2 y_3 (y_2 - y_3 - x_2 (x_1 - x_2))}{2 z_3}.$$

Brengt men deze waarden van x , y en z over in eene der andere drie vergelijkingen, dan zal men bevinden dat zij telkens identiek worden. Hieruit vloeit voort dat de zes vlakken elkander snijden in het punt, welks coördinaten uitgedrukt worden door de zoo even gevonden waarden van x , y en z .

48. Laat ons den tetraeder aanduiden door de letters A , B , C en D , met dien verstande dat ABD het grondvlak en C den top aanwijst. Stellen wij nog $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $BC = a^1$, $AC = b^1$, $AB = c^1$, den hoek, waaronder de lijnen DA en BC elkander snijden gelijk α , den hoek $(DB, CA) = \beta$ en den hoek $(DC, AB) = \gamma$. Projecteren wij voorts de gebroken lijn $CDAB$ op de ribbe CB , dan verkrijgen wij de vergelijking

$$CD \cos DCB + DA \cos \alpha + AB \cos ABC = BC,$$

of

$$c \cos DCB + a \cos \alpha + c^1 \cos ABC = a^1,$$

of ook $a \cos \alpha = a^1 - c \cos DCB - c^1 \cos ABC$,

welke met $2 a^1$ vermenigvuldigd geeft

$$2aa^1 \cos \alpha = 2a^1{}^2 - 2c a^1 \cos DCB - 2c^1 a^1 \cos ABC. \quad (1)$$

Maar uit de driehoeken DBC en ABC volgt

$$b^2 = c^2 + a^1{}^2 - 2c a^1 \cos DCB,$$

$$b^1{}^2 = c^1{}^2 + a^1{}^2 - 2c^1 a^1 \cos ABC,$$

en bijgevolg

$$a^1{}^2 - 2c a^1 \cos DCB = b^2 - c^2,$$

$$a^1{}^2 - 2c^1 a^1 \cos ABC = b^1{}^2 - c^1{}^2.$$

Brengt men deze waarden in (1) over, dan komt er

$$2aa^1 \cos \alpha = b^2 + b^1{}^2 - c^2 - c^1{}^2.$$

Op gelijksoortige wijze of ook door besluit uit analogie heeft men nog

$$2 bb' \cos \beta = c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2,$$

$$2 cc' \cos \gamma = a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2.$$

Trekt men de drie laatst gevonden vergelijkingen bij elkander, dan volgt er

$$aa' \cos \alpha + bb' \cos \beta + cc' \cos \gamma = 0,$$

waaruit wij besluiten dat van de drie hoeken α , β en γ minstens eene scherp en eene stomp is, en dat, zijn twee hoeken regt, noodwendig ook de derde regt zal zijn.

49. Wijn, volgens de voorwaarde van het vraagstuk, de overstaande ribben loodregt op elkander staan, kan men door de opstaande ribben der piramide vlakken brengen loodregt op de overstaande ribben. Die vlakken snijden elkander noodwendig volgens de hoogtelijn. En omdat elk der zijvlakken van de driehoekige piramide als grondvlak kan worden aangenomen, verkrijgt men in het geheel, door dezelfde bewerking te herhalen, vier hoogtelijnen A^1 , B^1 , C^1 en D^1 . Duiden wij de piramide aan door de letters A , B , C en D , dan zal de hoogtelijn A^1 , uit A op het grondvlak BCD neder gelaten, in hetzelfde vlak liggen als de hoogtelijn D^1 uit D op ABC gevallen. Die lijnen, welke natuurlijk niet evenwijdig loopen, snijden derhalve elkander in een punt. Wat wij hier aantoonden voor de hoogtelijnen A^1 en D^1 geldt ook voor de hoogtelijnen A^1 en C^1 , A^1 en B^1 , B^1 en C^1 , C^1 en D^1 ; maar de hoogtelijn A^1 kan de lijnen B^1 , C^1 en D^1 , die niet in hetzelfde vlak liggen, niet tegelijkertijd snijden, tenzij dit plaats vinde in het eene punt, dat de vlakken met elkander gemeen hebben; derhalve, enz. Het omgekeerde dezer stelling, of: de overstaande ribben der driehoekige piramide staan loodregt op elkander, wanneer de hoogtelijnen elkander in een punt ontmoeten, is even gemakkelijk aan te toonen.

Men kan de eerste stelling nog langs een anderen, zuiver analytischen weg betoogen. Daartoe beschouwen wij de driehoekige piramide in verband met een regthoekig coördinaten-

stelsel, en duiden de hoekpunten aan door de letters M_1 , M_2 , M_3 en M_4 . Het hoekpunt M_1 plaatsen wij in den oorsprong, het hoekpunt M_2 in de as der x , het hoekpunt M_3 in het vlak der xy ; de coördinaten van het punt M_1 zijn dan allen nul, die van M_2 zijn x_2 , 0 en 0; die van M_3 zijn x_3 , y_3 en 0, van M_4 zijn x_4 , y_4 en z_4 . Natuurlijk heeft M_3 met M_4 dezelfde x , wijl de ribbe $M_3 M_4$ loodregt staat op de ribbe $M_1 M_2$. De vergelijking van het vlak, dat gaat door de punten M_1 , M_2 en M_3 , of van het vlak XOY , is $z=0$, terwijl de loodlijn of hoogtelijn, uit M_4 nedergelaten op $M_1 M_2 M_3$ tot vergelijkingen heeft

$$x = x_3; y = y_4.$$

Maken wij de vergelijking voor het vlak $M_1 M_2 M_4$ op, dan vinden wij

$$z_4 y - y_4 z = 0;$$

en voor de vergelijkingen der loodlijn, uit M_3 op $M_1 M_2 M_4$ nedergelaten

$$x = x_3; y - y_3 = -\frac{z_4}{y_4} z.$$

Het vlak $M_1 M_3 M_4$ geeft aanleiding tot de vergelijking

$$y_3 z_4 x - x_3 z_4 y + x_3 (y_4 - y_3) z = 0;$$

voor de loodlijn uit M_2 op $M_1 M_3 M_4$ nedergelaten hebben wij

$$x - x_2 = \frac{y_3 z_4}{x_3 (y_4 - y_3)} z; \quad y = -\frac{z_4}{y_4 - y_3} z.$$

Het vlak $M_2 M_3 M_4$, eindelijk, wordt bepaald door

$$y_3 z_4 x + (x_2 z_4 - x_3 z_4) y + (x_3 - x_2) (y_4 - y_3) z - x_2 y_3 z_4 = 0,$$

en de loodlijn uit M_1 op dat vlak nedergelaten door

$$x = \frac{y_3 z_4}{(x_3 - x_2) (y_4 - y_3)} z; \quad y = -\frac{z_4}{y_4 - y_3} z.$$

Maar volgens de veronderstelling staan de overstaande ribben loodregt op elkander. Van de ribbe $M_1 M_3$ bijvoorbeeld is de vergelijking

$$y = \frac{y_3}{x_3} x;$$

de ribbe over $M_1 M_3$, of $M_2 M_4$, wordt bepaald door

$$x - x_2 = \frac{x_2 - x_3}{-z_4} z; \quad y = \frac{y_4}{z_4} z,$$

en, omdat die ribben loodregt op elkander staan, vloeijen uit genoemde vergelijkingen voort:

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{y_4}{x_2 - x_3}.$$

Dezelfde betrekking vindt men uit de voorwaarde dat $M_1 M_3$ en $M_2 M_4$ loodregt op elkander staan. Neemt men deze betrekking in aanmerking en zoekt men het snijpunt van twee willekeurige hoogtelijnen, dan zal men, welke dezer lijnen men ook beschouwe, voor x , y en z steeds dezelfde waarden vinden, ten blijke dat die hoogtelijnen elkander in een en hetzelfde punt ontmoeten. De coördinaten van dat punt zijn

$$x = x_3; \quad y = y_4 \quad \text{en} \quad z = \frac{y_4 (y_3 - y_4)}{z_4}.$$

50. Uit een vorig vraagstuk hebben wij gezien dat de overstaande ribben van een tetraeder regthoekig op elkander staan, wanneer de hoogtelijnen allen hetzelfde snijpunt gemeen hebben. Dientengevolge kunnen wij door elk der ribben een vlak, loodregt op de overstaande ribbe brengen. Wij nemen hier weder onze toevlugt tot een regthoekig coördinatenstelsel en wijzen de driehoekige piramide op dezelfde wijze aan als in het vorig vraagstuk. Brengen wij nu een vlak loodregt op de ribbe $M_1 M_2$, zoo dat het tevens door de overstaande ribbe $M_3 M_4$ gaat, dan ligt de gemeenschappelijke loodlijn op de ribben $M_1 M_2$ en $M_3 M_4$ in dat vlak. De vergelijking van dat vlak, dat hier evenwijdig loopt met het yz vlak is $x = x_3$. Brengen wij nog een vlak loodregt op de ribbe $M_3 M_4$, onder voorwaarde dat het tevens door de ribbe $M_1 M_2$ zal gaan, dan bevat ook dit vlak de gemeenschappelijke loodlijn. De vergelijking van dit laatste vlak, dat de x as bevat en loodregt staat op $M_3 M_4$, is $(y_4 - y_3) y + z_4 z = 0$. De gemeenschappelijke loodlijn wordt derhalve aangewezen door de vergelijkingen

$$x = x_3; \quad (y_4 - y_3) y + z_4 z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Op soortgelijke wijze berekent men de gemeenschappelijke loodlijn van elk paar overstaande ribben. De ribbe $M_1 M_3$ bijv. heeft tot vergelijking

$$y = \frac{y_3}{x_3} x; \quad z = 0,$$

en de overstaande ribbe $M_2 M_4$ wordt aangewezen door

$$x - x_2 = \frac{x_2 - x_3}{-z_4} z; \quad y = \frac{y_4}{z_4} z.$$

Voor de vergelijking derhalve van het vlak, dat de lijn $M_1 M_3$ bevat en loodregt staat op $M_2 M_4$ vindt men:

$$x_3(x_2 - x_3)x + x_3 y_4 y + x_3 z_4 z + x_3(x_2 - x_3) - y_4 y_3 = 0, \quad (2)$$

en voor de vergelijking van het vlak dat $M_2 M_4$ bevat en loodregt staat op $M_1 M_3$

$$z_4 x_3 x + z_4 y_3 y + (x_3(x_2 - x_3) - y_4 y_3)z - x_2 x_3 z_4 = 0. \quad (3)$$

Beide laatste vergelijkingen te zamen genomen wijzen de gemeenschappelijke loodlijn op $M_1 M_3$ en $M_2 M_4$ aan.

Lossen wij x , y en z uit de vergelijkingen (1), (2) en (3) op, dan vinden wij

$$x = x_3; \quad y = y_4; \quad z = \frac{y_4 (y_4 - y_3)}{-z_4}, \quad \dots \quad (4)$$

benevens de voorwaardensvergelijking $x_3 (x_2 - x_3) = y_4 y_3$.

De waarden dezer coördinaten zijn dezelfde als die voor het snijpunt der hoogtelijnen in het vorig vraagstuk gevonden, en de voorwaardensvergelijking geeft te kennen dat de ribben $M_1 M_3$ en $M_2 M_4$ loodregt op elkander staan, zooals het behoort volgens de veronderstelling, waarvan wij uitgingen.

Berekent men eindelijk nog de derde gemeenschappelijke loodlijn op de ribben $M_2 M_3$ en $M_1 M_4$ en zoekt men het snijpunt met de overigen, dan vindt men voor x , y en z de waarden (4) terug, waardoor de stelling bewezen is.

51. Wij beschouwen den tetraeder in verband met een regthoekig coördinatenstelsel, plaatsen een zijner hoeken in den oorsprong en laten een der ribben langs de as der x vallen. Dan zijn de coördinaten van

het punt	M_0	0,	0,	0,
"	"	M_1	x_1 ,	0, 0,
"	"	M_2	x_2 ,	y_2 , 0,
"	"	M_3	x_3 ,	y_3 , z_3 .

De coördinaten van het midden der ribbe $M_0 M_1$ zijn

$$x = \frac{1}{2} x_1; \quad y = 0; \quad z = 0;$$

die van het midden der overstaande ribbe $M_2 M_3$

$$x = \frac{1}{2} (x_2 + x_3); \quad y = \frac{1}{2} (y_2 + y_3); \quad z = \frac{1}{2} z_3,$$

en de vergelijkingen der lijn, welke deze punten vereenigt,

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{1}{2} x_1 &= \frac{x_2 + x_3 - x_1}{z_3} z, \\ y &= \frac{y_2 + y_3}{z_3} z. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

De coördinaten van het midden der ribbe $M_1 M_2$ zijn

$$x = \frac{1}{2} (x_1 + x_2); \quad y = \frac{1}{2} y_2; \quad z = 0;$$

die van het midden der overstaande ribbe $M_0 M_3$

$$x = \frac{1}{2} x_3; \quad y = \frac{1}{2} y_3; \quad z = \frac{1}{2} z_3,$$

en de vergelijkingen der lijn, welke deze punten vereenigt,

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{1}{2} x_3 &= \frac{x_3 - x_2 - x_1}{z_3} (z - \frac{1}{2} z_3), \\ y - \frac{1}{2} y_3 &= \frac{y_3 - y_2}{z_3} (z - \frac{1}{2} z_3). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

De coördinaten van het midden der ribbe $M_0 M_2$ zijn

$$x = \frac{1}{2} x_2; \quad y = \frac{1}{2} y_2; \quad z = 0,$$

die van het midden der overstaande ribbe $M_1 M_3$

$$x = \frac{1}{2} (x_1 + x_3); \quad y = \frac{1}{2} y_3; \quad z = \frac{1}{2} z_3,$$

en de vergelijkingen der lijn, welke deze punten vereenigt,

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{1}{2} x_2 &= \frac{x_1 + x_3 - x_2}{z_3} z, \\ y - \frac{1}{2} y_2 &= \frac{y_3 - y_2}{z_3} z. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

Lossen wij x , y en z uit (1) en (2) op, dan vinden wij voor de coördinaten van het snijpunt van (1) en (2)

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},$$

$$y = \frac{y_2 + y_3}{4},$$

$$z = \frac{z_3}{4}.$$

Maar die coördinaten voldoen ook aan de vergelijking (3), waardoor het niet twijfelachtig is of zij drukken het snij-

punt uit der lijnen (1), (2) en (3), zoodat het eerste gedeelte der stelling betoogd is.

Dat door het gevonden punt elk der gegeven lijnen in twee gelijke deelen verdeeld wordt, blijkt terstond, wanneer men volgens de bekende formule

$$\sqrt{\{(x-x^1)^2 + (y-y^1)^2 + (z-z^1)^2\}}$$

den afstand bepaalt van dat punt tot het midden der ribbe. Voor den afstand van het gevonden punt tot het midden der ribbe $M_0 M_1$, welks coördinaten zijn $x = \frac{1}{2} x_1$; $y = 0$, $z = 0$, komt er

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{x_2 + x_3 - x_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y_2 + y_3}{4}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{4}\right)^2\right\}};$$

en berekent men den afstand van dat punt tot het midden der overstaande ribbe $M_2 M_3$, welks coördinaten zijn $x = \frac{1}{2} (x_2 + x_3)$, $y = \frac{1}{2} (y_2 + y_3)$, $z = \frac{1}{2} z_3$, dan erlangt men

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{-(x_2 + x_3 - x_1)}{4}\right)^2 + \left(\frac{-(y_2 + y_3)}{4}\right)^2 + \left(\frac{-z_3}{4}\right)^2\right\}},$$

welke uitdrukkingen in volstreekte waarde overeenkomen; zij leveren een verschil in teeken op, maar dat is zooals het behoort, wanneer men de lengte der lijnen van het gevonden punt afrekent. Is de eene positief, dan moet de andere, wijl zij in tegenovergestelde rigting loopt, negatief zijn. Past men die rekening op de andere lijnen toe, dan komt men tot gelijksoortige uitkomst.

Maakt men gebruik van scheefhoekige coördinaten, dan wordt de oplossing nog iets eenvoudiger. Wij plaatsen in dit geval wederom een der hoeken van den tetraeder in den oorsprong van het coördinatenstelsel, en laten drie ribben zamenvallen met de assen der x , der y en der z . Dan worden de coördinaten van

$$\begin{array}{lll} \text{het punt } M_0 & x=0; & y=0; & z=0; \\ \text{"} & \text{"} & M_1 & x=x_1; & y=0; & z=0; \\ \text{"} & \text{"} & M_2 & x=0; & y=y_2; & z=0; \\ \text{"} & \text{"} & M_3 & x=0; & y=0; & z=z_3. \end{array}$$

Voor de coördinaten van het midden van $M_0 M_1$ vinden wij

$$x = \frac{1}{2} x_1; \quad y = 0; \quad z = 0;$$

voor die van het midden van $M_2 M_3$

$$x = 0; \quad y = \frac{1}{2} y_2; \quad z = \frac{1}{2} z_3,$$

zoodat de vergelijkingen (1) in dat geval worden

$$x - \frac{1}{2} x_1 = \frac{x_1}{-z_3} z,$$

$$y = \frac{y_2}{z_3} z;$$

voor de vergelijkingen (2), die de lijn uitdrukken, welke de punten vereenigt, aangewezen door de coördinaten

$$x = \frac{1}{2} x_1; \quad y = \frac{1}{2} y_2; \quad z = 0;$$

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = \frac{1}{2} z_3;$$

vinden wij

$$x - \frac{1}{2} x_1 = \frac{x_1}{-z_3} z,$$

$$y - \frac{1}{2} y_2 = \frac{y_2}{-z_3} z.$$

De lijn, welke het midden der beide nog overige ribben vereenigt, wordt uitgedrukt door de vergelijkingen

$$x - \frac{1}{2} x_1 = \frac{x_1}{z_3} (z - \frac{1}{2} z_3),$$

$$y = \frac{-y_2}{z_3} (z - \frac{1}{2} z_3),$$

want zij gaat door de punten, welker coördinaten zijn

$$x = 0; \quad y = \frac{1}{2} y_2; \quad z = 0;$$

$$x = \frac{1}{2} x_1; \quad y = 0; \quad z = \frac{1}{2} z_3.$$

Berekent men de snijpunten der gevonden lijnen, dan vindt men, hoe men die ook twee aan twee vereenige, telkens voor de coördinaten van het snijpunt

$$x = \frac{1}{4} x_1; \quad y = \frac{1}{4} y_2; \quad z = \frac{1}{4} z_3,$$

ten blijkende dat bedoelde lijnen elkander in dat punt snijden.

Dat het punt de lijnen in twee gelijke deelen verdeelt, zal blijken, wanneer men de rekening opmaakt, zooals wij boven voor rechthoekige coördinaten deden; alleen zij men indachtig dat de algemeene formule voor den afstand van twee punten, bij scheefhoekige coördinaten eenige verande-

ring ondergaat. Zij wordt in dit laatste geval, wanneer wij den afstand δ noemen

$$\delta^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 + 2(y_1 - y)(z_1 - z) \cos yz + \\ + 2(x_1 - x)(z_1 - z) \cos xz + 2(x_1 - x)(y_1 - y) \cos xy.$$

52. Op dezelfde wijze als in een vorig vraagstuk, beschouwen wij wederom de driehoekige piramide in verband met een regthoekig coördinatenstelsel, en duiden, gelijk daar, de hoekpunten aan door de letters M_1 , M_2 , M_3 en M_4 . Het hoekpunt M_1 plaatsen wij wederom in den oorsprong, het hoekpunt M_2 in de as der x , het hoekpunt M_3 in het vlak der xy , zoodat de coördinaten van M_1 alle nul zijn; die van M_2 worden $x = x_2$; $y = 0$; $z = 0$; voor M_3 is $x = x_3$; $y = y_3$; $z = 0$; voor M_4 eindelijk is $x = x_3$; $y = y_4$; $z = z_4$. Zullen de hoogtelijnen elkander in een punt ontmoeten, dan moeten de overstaande ribben loodrecht op elkander staan; dit is natuurlijk ook het geval met $M_3 M_4$, die loodrecht staat op $M_1 M_2$ en van daar hebben M_3 en M_4 dezelfde x .

Uit bovengenoemd vraagstuk is reeds gebleken dat de coördinaten van het snijpunt der hoogtelijnen worden uitgedrukt door

$$x = x_3; \quad y = y_4; \quad z = \frac{y_4 (y_3 - y_4)}{z_4}.$$

Het zwaartepunt eener driehoekige piramide is gelegen op de lijn, die het zwaartepunt van het grondvlak met den top vereenigt. Wij moeten derhalve in de eerste plaats het zwaartepunt van het grondvlak of van den driehoek $M_1 M_2 M_3$ bepalen. Gelijk men weet vindt men het zwaartepunt van een driehoek, bijaldien men twee zijner hoekpunten met het midden der overstaande zijden vereenigt; die vereenigingslijnen ontmoeten elkander in het zwaartepunt van den driehoek. De vergelijking der lijn, die van M_2 naar het midden van $M_1 M_3$ loopt, is

$$y = \frac{\frac{1}{2} y_3 (x - x_2)}{\frac{1}{2} x_3 - x_2};$$

voor de vergelijking der lijn uit M_3 naar het midden van $M_1 M_2$ getrokken, heeft men

$$y = \frac{y_3 (x - \frac{1}{2} x_2)}{x_3 - \frac{1}{2} x_2}.$$

Lost men uit deze vergelijkingen de waarden van x en y op, dan vindt men voor de coördinaten van het zwaartepunt der basis $M_1 M_2 M_3$

$$x = \frac{1}{3} (x_2 + x_3); \quad y = \frac{1}{3} y_3; \quad z = 0.$$

De lijn, die dit zwaartepunt met den top M_4 vereenigt, en waarop het zwaartepunt der driehoekige piramide ligt, heeft tot vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} x - x_3 &= \frac{x_3 - \frac{1}{3} (x_2 + x_3)}{z_4} (z - z_4); \\ y - y_4 &= \frac{y_4 - \frac{1}{3} y_3}{z_4} (z - z_4). \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Om het zwaartepunt zelf te vinden, moeten wij eene tweede lijn, waarop het ligt, zoeken; het snijpunt dier lijnen zal het ons aan de hand doen. In de driehoekige piramide mogen wij ook het zijvlak $M_1 M_3 M_4$ als basis en M_2 als top beschouwen. Om het zwaartepunt van $M_1 M_3 M_4$ op te maken, trekken wij uit M_4 eene lijn naar het midden van $M_1 M_3$ en vinden voor hare vergelijkingen

$$x - x_3 = \frac{x_3 - \frac{1}{2} x_1}{z_4} (z - z_4);$$

$$y - y_4 = \frac{y_4 - \frac{1}{2} y_1}{z_4} (z - z_4);$$

desgelijks trekken wij eene lijn uit M_3 naar het midden van $M_1 M_4$, waarvoor wij vinden

$$x - \frac{1}{2} x_3 = \frac{\frac{1}{2} x_3 - x_1}{\frac{1}{2} z_4} (z - \frac{1}{2} z_4);$$

$$y - \frac{1}{2} y_4 = \frac{\frac{1}{2} y_4 - y_1}{\frac{1}{2} z_4} (z - \frac{1}{2} z_4).$$

Lossen wij uit deze vergelijkingen x , y en z op, dan vinden wij voor de coördinaten van het zwaartepunt van $M_1 M_3 M_4$

$$x = \frac{2}{3} x_3; \quad y = \frac{1}{3} (y_3 + y_4); \quad z = \frac{1}{3} z_4;$$

de lijn, welke dit punt met den top M_2 vereenigt, wordt voorgesteld door

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{2}{3} x_3 &= \frac{\frac{2}{3} x_3 - x_2}{\frac{1}{3} z_4} (z - \frac{1}{3} z_4); \dots \dots \dots \\ y - \frac{1}{3} (y_3 + y_4) &= \frac{\frac{1}{3} (y_3 + y_4)}{\frac{1}{3} z_4} (z - \frac{1}{3} z_4). \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Ook op deze lijn ligt het zwaartepunt der piramide. Bepaalt men x , y en z uit (1) en (2), dan komt er voor de coördinaten van het zwaartepunt

$$x = \frac{1}{4} (x_2 + 2 x_3); \quad y = \frac{1}{4} (y_3 + y_4); \quad z = \frac{1}{4} z_4.$$

De loodlijn uit het zwaartepunt van den driehoek $M_1 M_2 M_3$ op diens vlak, het xy vlak, opgericht, heeft tot vergelijkingen

$$x = \frac{1}{3} (x_2 + x_3); \quad y = \frac{1}{3} y_3.$$

De vergelijking van het zijvlak $M_1 M_3 M_4$ is

$$y_3 z_4 x - x_3 z_4 y + x_3 (y_4 - y_3) z = 0,$$

en de loodlijn, uit het zwaartepunt van den driehoek $M_1 M_3 M_4$ op dat vlak, geeft aanleiding tot de vergelijkingen

$$x - \frac{2}{3} x_3 = \frac{y_3 z_4}{x_3 (y_4 - y_3)} (z - \frac{1}{3} z_4);$$

$$y - \frac{1}{3} (y_3 + y_4) = \frac{z_4}{y_4 - y_3} (z - \frac{1}{3} z_4).$$

De coördinaten van de snijpunten der laatstgenoemde loodlijnen zijn

$$x = \frac{1}{3} (x_2 + x_3); \quad y = \frac{1}{3} y_3; \quad z = \frac{1}{3} z_4 - \frac{y_4 (y_4 - y_3)}{3 z_4}. \quad (3)$$

Hadden wij het derde zijvlak $M_2 M_3 M_4$ in onze rekening betrokken, dan waren wij tot dezelfde uitkomsten geraakt.

Het valt nu gemakkelijk aan te toonen dat de drie gevonden punten in eene rechte lijn liggen. De lijn, die door het zwaartepunt en het snijpunt der hoogtelijnen, beiden boven gevonden, gaat, heeft tot vergelijkingen

$$x - \frac{1}{4} (x_2 + 2 x_3) = \frac{\frac{1}{4} (x_2 + 2 x_3) - x_3}{\frac{1}{4} z_4 - \frac{y_4 (y_3 - y_4)}{z_4}} (z - \frac{1}{4} z_4);$$

$$y - \frac{1}{4} (y_3 + y_4) = \frac{\frac{1}{4} (y_3 + y_4) - y_4}{\frac{1}{4} z_4 - \frac{y_4 (y_3 - y_4)}{z_4}} (z - \frac{1}{4} z_4);$$

brengt men in deze vergelijkingen de waarden (3) over,

dan worden zij identiek, met andere woorden, de waarden (3) voldoen aan deze vergelijkingen, ten blijkte dat ook het punt (3) zich op de gevonden rechte lijn bevindt, waarmede het bewijs geleverd is.

53. Wanneer de hoogtelijnen van een tetraeder elkander in een punt snijden, staan de overstaande ribben loodrecht op elkander. De lijn, welke loodrecht staat op twee overstaande ribben, gaat in dit geval door het punt, waar de hoogtelijnen elkander snijden, zooals in een vorig vraagstuk gebleken is. Maar die lijn is de kortste weg om van eene ribbe tot de overstaande te gaan; de som dier drie lijnen zal derhalve een minimum zijn. Maar de som dier lijnen is tevens de dubbele som der loodlijnen, uit het punt, waar de hoogtelijnen elkander snijden, op elk der ribben neder gelaten, derhalve, enz.

54. Om het bewijs voor deze stelling op te maken duiden wij de piramide wederom aan door de letters M_1 , M_2 , M_3 en M_4 . Het hoekpunt M_1 komt in den oorsprong der regthoekige coördinaten te liggen, het hoekpunt M_2 valt in de as der x , zoodat zijne coördinaten zijn x_2 , 0, 0. Het hoekpunt M_3 ligt in het vlak der xy , met de coördinaten x_3 , y_3 , 0. Bij het hoekpunt M_4 eindelijk behooren de coördinaten x_3 , y_4 en z_4 .

Wij beginnen met het zwaartepunt der piramide te bepalen. Daartoe is het in de eerste plaats noodig het zwaartepunt van het grondvlak te berekenen. En aangezien het grondvlak een driehoek $M_1 M_2 M_3$ is, ligt het zwaartepunt in het punt, waarin de lijnen, die uit de hoekpunten naar het midden der overstaande zijden getrokken worden, elkander ontmoeten. De lijn, die uit M_1 naar het midden van $M_2 M_3$ getrokken wordt, heeft tot vergelijkingen

$$y = \frac{y_3}{x_2 + x_3} x; \quad z = 0.$$

De lijn, welke uit M_3 naar het midden van $M_1 M_2$ gaat, wordt voorgesteld door

$$y = \frac{y_3 (2x - x_2)}{2x_3 - x_2}; \quad z = 0.$$

Voor de lijn uit M_2 naar het midden van $M_1 M_3$ getrokken komt er

$$y = \frac{y_3 (x - x_2)}{x_3 - 2x_2}; \quad z = 0.$$

Uit deze vergelijkingen vindt men voor de coördinaten x_1 , y_1 en z_1 van het zwaartepunt

$$x_1 = \frac{1}{3}(x_2 + x_3); \quad y_1 = \frac{1}{3}y_3; \quad z_1 = 0.$$

Trekt men uit het zwaartepunt $x_1 y_1 z_1$ van het grondvlak eene lijn naar den top M_4 van den tetraeder, dan ligt het zwaartepunt der piramide op een vierde der lijn van het grondvlak gerekend. De coördinaten van het zwaartepunt der piramide $x_0 y_0 z_0$ zijn derhalve

$$x_0 = \frac{2x_3 + x_2}{4}; \quad y_0 = \frac{y_4 + y_3}{4}; \quad z_0 = \frac{1}{4}z_4,$$

gelijk men vindt door eene bekende rekening, waarvan wij in een ander vraagstuk het voorbeeld gegeven hebben.

Nu de coördinaten van het zwaartepunt gevonden zijn, valt het gemakkelijk de afstanden in het vraagstuk genoemd te berekenen, volgens de bekende formule,

$$\text{afstand} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}.$$

Doen wij dit voor den afstand van het zwaartepunt der piramide tot het midden der ribben $M_2 M_3$ en $M_1 M_2$, dan vinden wij respectievelijk

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left\{ \left(\frac{2x_3 - x_2}{4} \right)^2 + \left(\frac{y_4 + y_3}{4} \right)^2 + \frac{z_4^2}{16} \right\}}, \\ & \sqrt{\left(\frac{x_2^2}{16} + \left(\frac{y_4 - y_3}{4} \right)^2 + \frac{z_4^2}{16} \right)}. \end{aligned}$$

Die uitdrukkingen zijn volkomen gelijk aan elkander, wanneer men in aanmerking neemt dat de overstaande ribben der piramide loodrecht op elkander staan, waaruit de voorwaardensvergelijking

$$y_4 y_3 = x_3 (x_2 - x_3)$$

voortvloeit.

Berekent men den afstand van het zwaartepunt tot het midden van een der opstaande ribben, bijvoorbeeld $M_1 M_4$,

dan erlangt men, in aanmerking nemende dat de coördinaten van dat midden zijn $\frac{1}{2}x_3$, $\frac{1}{2}y_4$ en $\frac{1}{2}z_4$,

$$\sqrt{\left\{\frac{x_2^2}{16} + \frac{(y_3 - y_4)^2}{16} + \frac{z_4^2}{16}\right\}},$$

welke uitdrukking met de vorige overeenkomt.

Voor de afstanden van het zwaartepunt tot het midden der overige ribben zal men gelijke formules vinden. Even zoo voor de afstanden van het zwaartepunt tot den voet der loodlijnen in het vraagstuk genoemd. Wij willen dit althans voor eene loodlijn aantonen.

De lijn, die loodregt staat op de ribben $M_1 M_2$ en $M_3 M_4$, wordt aangewezen door de vergelijkingen

$$x = x_3; (y_4 - y_3)y + z_4 z = 0,$$

de ribbe $M_1 M_2$ of de x as door de vergelijkingen

$$y = 0, \quad z = 0,$$

zoodat het snijpunt dezer lijnen wordt uitgedrukt door

$$x = x_3, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

en de afstand van dit punt tot het zwaartepunt der piramide is

$$\sqrt{\left\{\frac{(x_2 - 2x_3)^2 + (y_4 + y_3)^2 + z_4^2}{16}\right\}},$$

welke uitdrukking van de vroeger gevondene in geen enkel opzigt afwijkt.

55. Noem de toppunten der piramide $M_1 (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 (x_3, y_3, z_3)$ en $M_4 (x_4, y_4, z_4)$; zij I de inhoud, S de inhoud van het zijvlak of den driehoek $M_2 M_3 M_4$ en $M_1 H$ de hoogte of de lengte der loodlijn uit M_1 op het zijvlak $M_2 M_3 M_4$ nedergelaten, dan heeft men, zooals uit de lagere meetkunde bekend is

$$3I = S \times M_1 H.$$

Zoeken wij, in de eerste plaats, den inhoud S van den driehoek $M_2 M_3 M_4$. De vergelijking van het vlak dat door de punten M_2 , M_3 en M_4 van het zijvlak gaat is begrepen in den determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ontwikkelt men dezen, dan komt er

$$x \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

waarvoor wij korthedshalve schrijven

$$Ax + By + Cz + D = 0. \dots \dots \dots (1)$$

In deze vergelijking zijn A , B , C op het teeken na gelijk aan den dubbelen inhoud der projectien van den driehoek $M_2 M_3 M_4$ op elk der coordinatenvlakken YOZ , XOZ en XOY . Tweemaal den inhoud van $M_2 M_3 M_4$ of $2S$ zal derhalve — zoo als reeds in een vorig vraagstuk geleerd is — gelijk zijn aan $\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$. Maar de afstand $M_1 H$ van het punt M_1 tot (1) is

$$M_1 H = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{2S}$$

en

$$M_1 H \times 2S = 6I = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

dat is

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 6I.$$

Als assen der coordinaten nemen wij de ribben AB , AC en AD en stellen de lengte $AB=a$, $AC=b$, $AD=c$, dan zijn de coordinaten der punten B^1 , C^1 en D^1 , die deze ribben midden door deelen,

$$x_1 = \frac{1}{2}a, y_1 = 0, z_1 = 0; x_2 = 0, y_2 = \frac{1}{2}b, z_2 = 0;$$

$$x_3 = 0, y_3 = 0, z_3 = \frac{1}{2}c,$$

en de coordinaten van B^1 , C^1 en D^1 , die de ribben CD , BD en BC midden door deelen

$$x_4 = 0, y_4 = \frac{1}{2}b, z_4 = \frac{1}{2}c; x_5 = \frac{1}{2}a, y_5 = 0, z_5 = \frac{1}{2}c;$$

$$x_6 = \frac{1}{2}a, y_6 = \frac{1}{2}b, z_6 = 0.$$

Maken wij nu de vergelijkingen op der vlakken, die door de coördinaatassen en de punten B^1 , C^1 en D^1 gaan, dan vinden wij

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}; \frac{x}{a} = \frac{z}{c}; \frac{y}{b} = \frac{z}{c}. \dots\dots (1)$$

Daar nu elk dezer vergelijkingen uit de beide anderen kan worden afgeleid, zullen de waarden der coördinaten uit twee harer bepaald, ook aan de derde voldoen. Hieruit volgt dat de doorsnede van twee der vlakken in het derde ligt en derhalve de drie vlakken elkander volgens dezelfde lijn ontmoeten. Die lijn is geheel bepaald door twee der vergelijkingen (1).

De vergelijkingen der drie vlakken, welke respectievelijk door de punten B, C, D^{11} ; B, D, C^{11} en C, D, B^{11} gaan, zijn $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} = 1$; $\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, (2) en aan haar wordt voldaan, wanneer men $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{1}{4}b$ en $z = \frac{1}{4}c$ neemt. Maar die waarden voldoen ook aan de vergelijkingen (1); van daar snijden de vlakken $AB B^1$, ACC^1 , ADD^1 , BCD^{11} , BDC^{11} en $CD B^{11}$ elkander in het punt O , welks coördinaten zijn $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{1}{4}b$, $z = \frac{1}{4}c$, waardoor aan het tweede gedeelte der vraag voldaan is.

Noemt men, gelijk wij vroeger deden, de hoeken die de coördinaatassen met elkander maken, λ , μ en ν , dan zijn de vergelijkingen der zes vlakken, die door het midden der ribben gaan en loodregt op de overstaande ribben staan

$$\begin{aligned} (x - \frac{1}{2}a) \cos \mu + (y - \frac{1}{2}b) \cos \lambda + z &= 0, \\ (x - \frac{1}{2}a) \cos \nu + y + (z - \frac{1}{2}c) \cos \lambda &= 0, \\ x + (y - \frac{1}{2}b) \cos \nu + (z - \frac{1}{2}c) \cos \mu &= 0, \\ (b \cos \nu - a) x + (b - a \cos \nu) y + (b \cos \lambda - a \cos \mu) (x - \frac{1}{2}c) &= 0, \\ (c \cos \mu - a) x + (c \cos \lambda - a \cos \nu) (y - \frac{1}{2}b) + (c - a \cos \mu) z &= 0, \\ (c \cos \mu - b \cos \nu) (x - \frac{1}{2}a) + (c \cos \lambda - b) y + (c - b \cos \lambda) z &= 0. \end{aligned}$$

Door geringe omvorming worden deze vergelijkingen

$$x \cos \mu + y \cos \lambda + z = \frac{1}{2} (b \cos \lambda + a \cos \mu). \dots\dots (3)$$

$$x \cos \nu + y + z \cos \lambda = \frac{1}{2} (c \cos \lambda + a \cos \nu). \dots\dots (4)$$

$$x + y \cos \nu + z \cos \mu = \frac{1}{2} (c \cos \mu + b \cos \nu). \dots\dots (5)$$

$$b(x \cos \nu + y + z \cos \lambda) - a(x + y \cos \nu + z \cos \mu) = \frac{1}{2} c (b \cos \lambda - a \cos \mu) \quad (6)$$

$$c(x \cos \mu + y \cos \lambda + z) - a(x + y \cos \nu + z \cos \mu) = \frac{1}{2} b (c \cos \lambda - a \cos \nu) \quad (7)$$

$$c(x \cos \mu + y \cos \lambda + z) - b(x \cos \nu + y + z \cos \lambda) = \frac{1}{2} a (c \cos \mu - b \cos \nu) \quad (8)$$

Nu is het gemakkelijk in te zien dat vergelijking (6) het gevolg is van de vergelijkingen (4) en (5); (7) het gevolg van (3) en (5); (8) het gevolg van (3) en (4) en ook van (6) en (7). Van daar snijden de vlakken (4), (5) en (6); (3), (5) en (7); (3), (4) en (8); en (6), (7), (8) elkander volgens eene regte lijn, terwijl alle zes vlakken door het punt gaan, waarin drie, bijvoorb. de vlakken (3), (4) en (5) elkander snijden. Door dit punt O^1 gaan derhalve ook de vier genoemde regte lijnen, zoodat aan het derde gedeelte der vraag voldaan is. De coördinaten van het punt O^1 kan men afleiden uit de vergelijkingen (3), (4) en (5); men zal vinden

$$x_1 = \frac{c (\cos \mu - \cos \lambda \cos \nu) + b (\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu) + a (2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu - \cos^2 \mu - \cos^2 \lambda)}{2 (1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu)}$$

$$y_1 = \frac{c (\cos \lambda - \cos \mu \cos \nu) + b (2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu - \cos^2 \lambda - \cos^2 \nu) + a (\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu)}{2 (1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu)}$$

$$z_1 = \frac{c (2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu) + b (\cos \lambda - \cos \mu \cos \nu) + a (\cos \mu - \cos \lambda \cos \nu)}{2 (1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu)}$$

Om het vierde gedeelte der vraag te beantwoorden, merken wij op dat de vergelijkingen der zes vlakken, welke door het midden der ribben gaan en loodrecht op haar staan, den vorm hebben van

$$x \cos \mu + y \cos \lambda + z = \frac{1}{2} c \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$x \cos \nu + y + z \cos \lambda = \frac{1}{2} b \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$x + y \cos \nu + z \cos \mu = \frac{1}{2} a \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$b(x \cos \nu + y + z \cos \lambda) - a(x + y \cos \nu + z \cos \mu) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2), \quad (12)$$

$$c(x \cos \mu + y \cos \lambda + z) - a(x + y \cos \nu + z \cos \mu) = \frac{1}{2} (c^2 - a^2), \quad (13)$$

$$c(x \cos \mu + y \cos \lambda + z) - b(x \cos \nu + y + z \cos \lambda) = \frac{1}{2} (c^2 - b^2). \quad (14)$$

Uit de inzage dezer vergelijkingen blijkt dat (12) het gevolg is van (10) en (11); (13) het gevolg van (9) en (11); (14) het gevolg van (9) en (10) als ook van (12) en (13). Hieruit vloeit voort dat de vlakken (10), (11) en (12); (9),

(11) en (13); (9), (10) en (14); eindelijk (12), (13) en (14) elkander volgens eene rechte lijn snijden, en dat alle zes vlakken door het punt gaan, waarin drie hunner, bijvoorb. (9), (10) en (11) elkander snijden. Maar in dat punt O^{11} snijden elkander ook de vier genoemde lijnen, derhalve enz. Lost men x , y en z uit de vergelijkingen (9), (10) en (11) op, dan vindt men

$$x_2 = \frac{c(\cos\lambda \cos\nu - \cos\mu) + b(\cos\lambda \cos\mu - \cos\nu) + a(1 - \cos^2\lambda)}{2(1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda \cos\mu \cos\nu)},$$

$$y_2 = \frac{c(\cos\mu \cos\nu - \cos\lambda) + b(1 - \cos^2\mu) + a(\cos\lambda \cos\mu - \cos\nu)}{2(1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda \cos\mu \cos\nu)},$$

$$z_2 = \frac{c(1 - \cos^2\nu) + b(\cos\mu \cos\nu - \cos\lambda) + a(\cos\lambda \cos\nu - \cos\mu)}{2(1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda \cos\mu \cos\nu)}.$$

Vergelijkt men de uitdrukkingen, die wij voor de coördinaten x_1, y_1, z_1 en x_2, y_2, z_2 gevonden hebben, dan blijkt dat

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}a; \quad y_1 + y_2 = \frac{1}{2}b; \quad z_1 + z_2 = \frac{1}{2}c$$

zijn, en wijl, naar het vroeger berekende, $x = \frac{1}{4}a$, $y = \frac{1}{4}b$ en $z = \frac{1}{4}c$ zijn, zoo volgt hieruit dat ook $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$; $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$; $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ zijn, waaruit wij mogen besluiten dat O het punt is, waarin de lijn $O_1 O_{11}$ midden door gedeeld wordt.

57. Behouden wij de coördinaten van het vorig vraagstuk, en duiden wij dezelfde lijnen door dezelfde letters aan, dan hebben wij voor de vierkanten der ribben

$$AB^2 = a^2; \quad AC^2 = b^2; \quad AD^2 = c^2; \quad BC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\nu; \\ BD^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\mu; \quad CD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda. \quad (15)$$

Voor de lijn α vonden wij de vergelijkingen

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}; \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{c},$$

terwijl het zijvlak tegenover hoek A wordt uitgedrukt door

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Lost men uit deze vergelijkingen x , y en z op, dan vindt men voor de coördinaten van het punt, waarin de lijn α het zijvlak snijdt,

$$x = \frac{1}{3}a; y = \frac{1}{3}b; z = \frac{1}{3}c;$$

wijl nu de lijn α door den oorsprong gaat, wordt het vierkant harer lengte uitgedrukt door

$$\alpha^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \nu + 2ac \cos \mu + 2bc \cos \lambda),$$

dat is, lettende op (15),

$$\alpha^2 = \frac{1}{9} \{ 3(AB^2 + AC^2 + AD^2) - (BC^2 + BD^2 + CD^2) \}.$$

Verwisselen wij nu het punt A achtereenvolgend met B , C en D , dan komt er

$$\beta^2 = \frac{1}{9} \{ 3(AB^2 + BC^2 + BD^2) - (AC^2 + AD^2 + CD^2) \},$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{9} \{ 3(BC^2 + AC^2 + CD^2) - (AB^2 + BD^2 + AD^2) \},$$

$$\delta^2 = \frac{1}{9} \{ 3(BD^2 + CD^2 + AD^2) - (BC^2 + AB^2 + AC^2) \}.$$

Door deze formules zijn de lijnen α , β , γ en δ in functie der ribben uitgedrukt; tellen wij haar bij elkander, dan komt de betrekking

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \frac{4}{9} \{ AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 \}. \quad (16)$$

Schrijven wij voor de coördinaten der punten B^{11} , C^{11} , D^{11} , B^1 , C^1 en D^1 de waarden in het vorig vraagstuk gevonden, dan is

$$B^1 B^{11}{}^2 = p^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \nu - 2ac \cos \mu + 2bc \cos \lambda),$$

$$C^1 C^{11}{}^2 = q^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \nu + 2ac \cos \mu - 2bc \cos \lambda),$$

$$D^1 D^{11}{}^2 = r^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \nu - 2ac \cos \mu - 2bc \cos \lambda),$$

waaruit, lettende op (15), volgt

$$p^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2),$$

$$q^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 - AC^2 - BD^2),$$

$$r^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2),$$

zoodat nu ook de lijnen p , q en r in functie der ribben zijn uitgedrukt; door optelling vindt men de betrekking

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2),$$

of in verband met (16)

$$9(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 16(p^2 + q^2 + r^2).$$

58. Wij bepalen ons tot de aanname van drie gegeven punten, omdat dezelfde rekening voor elk willekeurig aantal door gaat. Laat dan $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ en $x_3 y_3 z_3$ de bekende coördinaten dezer punten voorstellen; noem de som van de kwadraten der drie afstanden van deze punten tot het punt

$p q^2$, en de coördinaten van dit punt x , y en z , dan hebben wij

$$\left. \begin{aligned} & (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + \\ & + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 + \\ & + (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2 \end{aligned} \right\} = q^2,$$

waaruit door ontwikkeling volgt

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} x - 2 \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} y - 2 \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} z + \\ + \frac{1}{3} \{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - q^2\} = 0,$$

als meetkundige plaats van het gezochte punt; zij is de oppervlakte van een bol.

59. Noem de coördinaten van het gegeven punt $x^1 y^1 z^1$, en zij de vergelijking van den bol

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2. \quad (1)$$

De vergelijkingen van de rechte lijn, die het middelpunt van den bol met het gegeven punt $x^1 y^1 z^1$ vereenigt, worden

$(x^1 - \alpha)(v - \gamma) = (z^1 - \gamma)(t - \alpha)$; $(y^1 - \beta)(v - \gamma) = (z^1 - \gamma)(u - \beta)$,
wanneer men de loopende coördinaten door t , u en v aanwijst. Hieruit vindt men voor de vergelijking van het vlak, dat door het punt $x^1 y^1 z^1$ gaat, en op de laatste lijn loodrecht staat,

$$(x^1 - \alpha)(t - x^1) + (y^1 - \beta)(u - y^1) + (z^1 - \gamma)(v - z^1) = 0. \quad (2)$$

Maar het punt $x^1 y^1 z^1$ ligt op den bol en van daar heeft men krachtens (1)

$$(x^1 - \alpha)^2 + (y^1 - \beta)^2 + (z^1 - \gamma)^2 = r^2. \quad (3)$$

Telt men (2) en (3) bij elkander, dan komt er

$$(x^1 - \alpha)(t - \alpha) + (y^1 - \beta)(u - \beta) + (z^1 - \gamma)(v - \gamma) = r^2, \quad (4)$$

als vergelijking van het gezochte raakvlak.

Ligt het middelpunt van den bol in den oorsprong der coördinaten, dan is $\alpha = \beta = \gamma = 0$, waardoor (1) overgaat in

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

en (4) in

$$x^1 t + y^1 u + z^1 v = r^2.$$

60. Veronderstellen wij dat het middelpunt van den gegeven bol in den oorsprong van een regthoekig coördinatenstelsel ligt, dan is zijne vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

terwijl, krachtens het vorig vraagstuk, het raakvlak van het te zoeken punt lmn wordt uitgedrukt door

$$lx + my + nz = r^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Noemen wij de vergelijkingen der gegeven lijn

$$x = az + p \quad \text{en} \quad y = bz + q, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dan wordt de voorwaarde dat die lijn ligt in het raakvlak (2) gevonden in de vergelijkingen

$$la + mb + n = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$lp + mq - r^2 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

maar het punt lmn ligt op den bol, daarom moet

$$l^2 + m^2 + n^2 = r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wezen.

Uit (4) en (5) vindt men gemakkelijk

$$m = -\frac{pn + ar^2}{pb - aq}; \quad l = -\frac{nq + br^2}{qa - bp}, \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

en deze waarden in (6) overbrengende, komt er

$$\left(\frac{nq + br^2}{qa - bp}\right)^2 + \left(\frac{pn + ar^2}{pb - aq}\right)^2 + n^2 = r^2, \quad . \quad (8)$$

uit welke vierkantsvergelijking n gemakkelijk bepaald wordt; die waarde in (7) overbrengende worden ook l en m bekend.

Uit (8) ziet men dat er in het algemeen twee waarden voor n en derhalve ook voor m en l gevonden worden. Er liggen dus op het oppervlak van den bol twee punten, die aan het vraagstuk voldoen. De verklaring hiervan ligt voor de hand; brengt men toch een willekeurig vlak door de gegeven lijn en laat men het om die lijn wentelen, tot dat het den bol raakt, dan kan die wenteling regtsom en linksom geschieden, hetwelk twee verschillende raakpunten oplevert. Mogt echter het raakpunt zelf een punt zijn der gegeven lijn, dan levert de vergelijking (8) voor n slechts eene waarde, zoodat de beide punten zamenvallen.

61. Is R de straal van den bol, en zijn x , y en z de loopende coördinaten, dan wordt bij regthoekige assen de vergelijking van een vlak, dat den bol in het punt x_1, y_1, z_1 aanraakt

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - R^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Laat de vergelijking van het gegeven vlak, waarmede het raakvlak evenwijdig zal loopen, in den normaalvorm worden voorgesteld door

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

dan drukt men uit dat dit vlak een raakvlak wordt aan den bol, wanneer men het vereenzelvigt met (1), zoo dat men verkrijgt

$$\frac{x_1}{\cos \alpha} = \frac{y_1}{\cos \beta} = \frac{z_1}{\cos \gamma} = \frac{R^2}{p};$$

neemt men hieruit de waarden van x_1 , y_1 en z_1 , die men overbrengt in

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0,$$

te kennen gevende dat het punt $x_1 y_1 z_1$ op den bol ligt, dan ziet men dat $p^2 = R^2$ of $p = \pm R$ is, en de vergelijking van het raakvlak aan den bol, evenwijdig met een gegeven vlak wordt

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \pm R = 0,$$

waaruit tevens blijkt dat er twee raakvlakken evenwijdig aan een gegeven vlak bestaan.

62. Wij noemen de coördinaten van het middelpunt van den bol a , b en c , zijn straal R , en x , y , z de coördinaten van een willekeurig punt van het oppervlak; dan zal de vergelijking van dien bol op scheefhoekige coördinaten uitgedrukt worden door

$$f(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(y-b)(z-c)\cos\lambda + 2(z-c)(x-a)\cos\mu + 2(x-a)(y-b)\cos\nu - R^2 = 0,$$

waaruit men voor de gedeeltelijke eerst afgeleide functien vindt

$$f'_x = 2(x-a) + 2(y-b)\cos\nu + 2(z-c)\cos\mu,$$

$$f'_y = 2(x-a)\cos\nu + 2(y-b) + 2(z-c)\cos\lambda,$$

$$f'_z = 2(x-a)\cos\mu + 2(y-b)\cos\lambda + 2(z-c),$$

en waardoor de vergelijking van den bol den volgenden vorm aanneemt

$$(x-a)f'_x + (y-b)f'_y + (z-c)f'_z - 2R^2 = 0.$$

Dientengevolge hebben wij tusschen de veranderlijken $2(a-x)$, $2(b-y)$ en $2(c-z)$ de volgende vier vergelijkingen

$$\begin{aligned} 4R^2 + 2(a-x)f_x^1 + 2(b-y)f_y^1 + 2(c-z)f_z^1 &= 0, \\ f_x^1 + 2(a-x) + 2(b-y)\cos\nu + 2(c-z)\cos\mu &= 0, \\ f_y^1 + 2(a-x)\cos\nu + 2(b-y) + 2(c-z)\cos\lambda &= 0, \\ f_z^1 + 2(a-x)\cos\mu + 2(b-y)\cos\lambda + 2(c-z) &= 0. \end{aligned}$$

Elimineert men die veranderlijken, dan komt de determinant

$$\begin{vmatrix} 4R^2 & f_x^1 & f_y^1 & f_z^1 \\ f_x^1 & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ f_y^1 & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ f_z^1 & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

waarmede aan de vraag voldaan is.

63. Bij rechthoekige coördinaten zal de vergelijking van den bol kunnen worden voorgesteld door

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0. \quad \dots \quad 1)$$

De vier gegeven punten zullen op het oppervlak van dien bol liggen, als hunne coördinaten $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ en $x_4 y_4 z_4$ aan de vergelijking 1) voldoen. Men heeft bijgevolg de vier vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + 2cz_1 + d &= 0, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + 2ax_2 + 2by_2 + 2cz_2 + d &= 0, \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + 2ax_3 + 2by_3 + 2cz_3 + d &= 0, \quad \dots \quad 2) \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + 2ax_4 + 2by_4 + 2cz_4 + d &= 0; \end{aligned}$$

uit deze kan men de waarden van a , b , c en d bepalen en die overbrengen in 1), waardoor het vraagstuk opgelost is.

In de vergelijkingen 1) en 2) klimmen de onbekenden $2a$, $2b$, $2c$ en d slechts tot den eersten graad op; geen dier vergelijkingen kan derhalve met eenige andere in strijd zijn, en men kan $2a$, $2b$, $2c$ en d tusschen 1) en 2) on-

middeljk elimineren, door in aanmerking te nemen dat de determinant gelijk nul moet wezen. Daardoor wordt 1)

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

64. De coördinaten der vijf punten moeten voldoen aan de vergelijking 1) van het vorig vraagstuk; zij geven derhalve aanleiding tot den determinant 3), welken men onder de beide volgende vormen kan daarstellen:

$$\begin{vmatrix}
1 & x^2 + y^2 + z^2 - 2x & -2y & -2z \\
1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2x_1 & -2y_1 & -2z_1 \\
1 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2x_2 & -2y_2 & -2z_2 \\
1 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - 2x_3 & -2y_3 & -2z_3 \\
1 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - 2x_4 & -2y_4 & -2z_4
\end{vmatrix} = 0,
\quad
\begin{vmatrix}
x^2 + y^2 + z^2 & 1 & x & y & z \\
x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\
x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\
x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\
x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & 1 & x_4 & y_4 & z_4
\end{vmatrix} = 0.$$

Wanneer wij het product dezer determinanten opnemen, door de lijnen te vermenigvuldigen, dan komen wij tot de betrekking

$$\begin{vmatrix}
0 & (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 & 0 & (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 & (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 & (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 \\
(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 & 0 & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 & (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 & (x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 + (z_1 - z_4)^2 & (x_1 - x_5)^2 + (y_1 - y_5)^2 + (z_1 - z_5)^2 \\
(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2 & (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 & 0 & (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 & (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2 + (z_2 - z_4)^2 & (x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2 + (z_2 - z_5)^2 \\
(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2 & (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 & (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 & 0 & (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 + (z_3 - z_4)^2 & (x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2 + (z_3 - z_5)^2 \\
(x_4 - x)^2 + (y_4 - y)^2 + (z_4 - z)^2 & (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2 & (x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 + (z_4 - z_2)^2 & (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2 & 0 & (x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2 + (z_4 - z_5)^2
\end{vmatrix} = 0.$$

Stellen wij voorts ter bekorting

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = \overline{M} \overline{M}_1^2 = a^2,$$

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 = \overline{M}_1 \overline{M}_2^2 = b^2,$$

$$(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2 + (z_2-z_3)^2 = \overline{M}_2 \overline{M}_3^2 = c^2,$$

$$(x_3-x_4)^2 + (y_3-y_4)^2 + (z_3-z_4)^2 = \overline{M}_3 \overline{M}_4^2 = d^2,$$

$$(x_4-x)^2 + (y_4-y)^2 + (z_4-z)^2 = \overline{M}_4 \overline{M}^2 = e^2;$$

vervolgens

$$(x_2-x_4)^2 + (y_2-y_4)^2 + (z_2-z_4)^2 = \overline{M}_2 \overline{M}_4^2 = \alpha^2,$$

$$(x_3-x)^2 + (y_3-y)^2 + (z_3-z)^2 = \overline{M}_3 \overline{M}^2 = \beta^2,$$

$$(x_4-x_1)^2 + (y_4-y_1)^2 + (z_4-z_1)^2 = \overline{M}_4 \overline{M}_1^2 = \gamma^2,$$

$$(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = \overline{M} \overline{M}_2^2 = \delta^2,$$

$$(x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2 + (z_1-z_3)^2 = \overline{M}_1 \overline{M}_3^2 = \varepsilon^2;$$

en brengen wij deze waarden in de voorgaande vergelijking over, dan hebben wij voor de gezochte betrekking

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & \delta^2 & \beta^2 & e^2 \\ a^2 & 0 & b^2 & \varepsilon^2 & \gamma^2 \\ \delta^2 & b^2 & 0 & c^2 & \alpha^2 \\ \beta^2 & \varepsilon^2 & c^2 & 0 & d^2 \\ e^2 & \gamma^2 & \alpha^2 & d^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

65. Laat de vergelijkingen der gegeven bollen worden voorgesteld door

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0; \quad (1)$$

$$S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2c_1z + d_1 = 0. \quad (2)$$

Trekt men die vergelijkingen van elkander af, dan komt er $2(a-a_1)x + 2(b-b_1)y + 2(c-c_1)z + d-d_1 = 0$, (2) welke vergelijking voldoet aan alle punten, die de bollen met elkander gemeen hebben. In het voorbijgaan zij hier opgemerkt dat het vlak (2) loodregt staat op de lijn, die de middelpunten der bollen of de punten (a, b, c) en (a_1, b_1, c_1) met elkander vereenigt; die lijn toch heeft tot vergelijkingen

$$\frac{x+a}{a_1-a} = \frac{y+b}{b_1-b} = \frac{z+c}{c_1-c},$$

waaruit terstond blijkt dat zij loodrecht staat op (2).

Elk punt in het vlak (2) voldoet nu aan de eigenschap in het vraagstuk bedoeld. Laat, om dit aan te toonen,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos \gamma + 2xz \cos \alpha + 2xy \cos \beta + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

de algemeene vergelijking van den bol zijn; het eerste lid kan men ook brengen onder den vorm

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 + 2(y-\beta)(z-\gamma) \cos \gamma + 2(x-\alpha)(z-\gamma) \cos \alpha + 2(x-\alpha)(y-\beta) \cos \beta - R^2 \dots (3)$$

Als nu x , y , z de coördinaten zijn van een willekeurig punt M in de ruimte, MT een tangens of raaklijn uit het punt M aan den bol getrokken, en C het middelpunt van den bol met de coördinaten α , β en γ , dan stelt de uitdrukking (3) de grootheid $CM^2 - R^2$ voor, welke laatste gelijk is aan MT^2 , wijl de driehoek CMT rechthoekig is. Hieruit volgt dat het eerste lid der vergelijking van den bol, waarin x , y en z de coördinaten van een willekeurig punt M der ruimte aanduiden, gelijk is aan het vierkant der raaklijn, uit het punt M aan den bol getrokken, onder voorwaarde echter dat de coëfficiënten van de tweede magten der veranderlijken tot de eenheid herleid zijn.

Trekken wij nu uit een willekeurig punt A der ruimte raaklijnen aan de bollen (1), dan worden de vierkanten dier raaklijnen voorgesteld door

$$AT^2 = S; \quad AT_1^2 = S_1;$$

maar volgens de gegevens van het vraagstuk moet $AT = AT_1$ zijn, waaruit $S = S_1$ of $S - S_1 = 0$, zijnde juist de vergelijking van het vlak (2); derhalve, enz.

De vergelijking (2) of $S - S_1 = 0$ wordt de vergelijking van het radicale vlak of het grondvlak genaamd. Men kan het vraagstuk algemeener maken en vragen wat er gebeurt bijaldien drie of vier bollen elkander snijden. Laat hiertoe S , S_1 , S_2 en S_3 de eerste leden voorstellen der vergelijkingen van vier bollen O , O_1 , O_2 en O_3 , laat ons aannemen dat de coëfficiënten van de vierkanten der veranderlijken tot de eenheid herleid zijn, en beschouwen wij in de eerste plaats drie der bollen:

De bollen O_1 en O_2 hebben het grondvlak: $S_2 - S_1 = 0$;
 " " O_2 en O " " " $S - S_2 = 0$;
 " " O en O_1 " " " $S_1 - S = 0$.

Elk dezer vergelijkingen is het gevolg der beide anderen; derhalve snijden de grondvlakken van drie bollen elkander volgens de lijn, welker vergelijking is

$$S = S_1 = S_2.$$

Men kan deze lijn de radicale as der drie bollen noemen; zij staat loodregt op het vlak dat door de middelpunten der bollen gaat en is de meetkundige plaats der punten uit welke men gelijke raaklijnen aan de drie bollen kan trekken.

Beschouwen wij, ten slotte, de vier bollen S , S_1 , S_2 en S_3 , dan zijn de radicale assen dezer bollen, drie aan drie genomen

$$\begin{aligned} \text{voor } (S_1, S_2, S_3) : S_1 = S_2 = S_3; \\ \text{" } (S_2, S_3, S) : S_2 = S_3 = S; \\ \text{" } (S_3, S, S_1) : S_3 = S = S_1; \\ \text{" } (S, S_1, S_2) : S = S_1 = S_2. \end{aligned}$$

Deze vier rechte lijnen gaan blijkbaar door het punt

$$S = S_1 = S_2 = S_3.$$

Die assen der vier bollen ontmoeten elkander derhalve in een punt; de raaklijnen uit dat punt aan de vier bollen getrokken zijn gelijk.

66. Voor de vergelijking van den bol op regthoekige coördinaten kan men schrijven

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2; \dots 1)$$

de coördinaten van het middelpunt a , b en c benevens de straal r van den bol zijn de onbekenden, die moeten worden gevonden uit de voorwaarde dat de bol gaat door drie gegeven punten pqr , $p^1 q^1 r^1$ en $p^{11} q^{11} r^{11}$, en een gegeven vlak $Ax + By + Cz + 1 = 0$ aanraakt.

Daar nu de gegeven punten op het oppervlak van den bol moeten liggen, zullen hunne coördinaten aan 1) voldoen, waardoor men de volgende drie vergelijkingen erlangt

$$(p - a)^2 + (q - b)^2 + (r - c)^2 = r^2, \dots 2)$$

$$(p^1 - a)^2 + (q^1 - b)^2 + (r^1 - c)^2 = r^2, \dots 3)$$

$$(p^{11} - a)^2 + (q^{11} - b)^2 + (r^{11} - c)^2 = r^2, \dots 4)$$

Trekt men 2) van 3), daarop 2) van 4) en eindelijk 3) van 4) af, dan erlangt men drie vergelijkingen, waarin de onbekenden a , b en c slechts in de eerste magt voorkomen. Door het invoeren van hulpgrootheden laten zich die vergelijkingen gemakkelijk herleiden tot den vorm

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \delta = 0,$$

$$a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 + \delta^1 = 0,$$

$$a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 + \delta^{11} = 0,$$

waaruit voor de onbekenden a , b en c gevonden wordt

$$a = \frac{(\delta \beta_1 \gamma_2)}{(\alpha \beta_1 \gamma_2)} = \frac{\begin{vmatrix} \delta & \beta & \gamma \\ \delta^1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta^{11} & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}, \quad b = \frac{(\alpha \delta^1 \gamma_2)}{(\alpha \beta_1 \gamma_2)} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \alpha_1 & \delta^1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \delta^{11} & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}},$$

$$c = \frac{(\alpha \beta_1 \delta^{11})}{(\alpha \beta_1 \gamma_2)} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta^1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta^{11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}.$$

Om den straal r te bepalen hebben wij, volgens eene bekende formule,

$$r = \frac{Aa + Bb + Cc + 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \dots 5)$$

want het achterste lid dezer vergelijking drukt de lengte uit der loodlijn, die uit het middelpunt abc van den bol op het gegeven vlak kan worden neder gelaten, en die loodlijn is blijkbaar de straal van den bol. Brengt men derhalve in 5) de gevondene waarden van a , b en c over, dan is ook de straal in gegeven grootheden uitgedrukt.

67. Zij de vergelijking van den gegeven bol op regthoekige coördinaten

$$(x^1 - a)^2 + (y^1 - b)^2 + (z^1 - c)^2 = r^2 : \dots\dots\dots 1)$$

laat de gegeven lijn met de as der x zamenvallen, dan wordt de vergelijking van het gevraagde vlak

$$A y + z = 0, \dots\dots\dots 2)$$

waarin alleen A de onbekende is, die wij moeten trachten te vinden.

Het vlak 2) moet den bol 1) volgens een gegeven cirkel snijden; het komt er dus op aan de vergelijking van dien cirkel in het vlak 2) te bepalen. Daartoe hebben wij, volgens bekende regels

$$x^1 = x \cos \phi - y \cos \theta \sin \phi,$$

$$y^1 = x \sin \phi + y \cos \theta \cos \phi, \dots\dots 3)$$

$$z^1 = y \sin \theta,$$

waarin ϕ de hoek is, welken het spoor van het snijdend vlak op het xy vlak met $O X$ maakt, en de hoek θ de helling aangeeft van het snijdend vlak op het $X Y$ vlak.

De eerste of de hoek ϕ is nul, want het vlak gaat door de X as; de hoek θ wordt bepaald door

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}} \quad \text{of} \quad \sin \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 1}}.$$

Brengen wij de waarden 3) in 1) over, dan komt er, na eenige vervorming en in acht nemend dat $\phi = 0$ is,

$$(x - a)^2 + (y - (b \cos \theta + c \sin \theta))^2 = r^2 - c^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \theta + 2 b c \sin \theta \cos \theta + c^2 \sin^2 \theta.$$

Deze is de vergelijking van een cirkel, terwijl blijkbaar het tweede lid den straal diens cirkels voorstelt. Maar het vlak moet den bol volgens een gegeven cirkel snijden; noemen wij den straal van dezen laatsten R , dan heeft men, ter bepaling van θ , de vergelijking

$$r^2 - c^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \theta + 2 b c \sin \theta \cos \theta + c^2 \sin^2 \theta = R^2.$$

In deze laatste de boven gevonden waarden van $\cos \theta$ en $\sin \theta$ overbrengende, komt er, na eenige verdere herleiding

$$A^2 + \frac{2 b c}{r^2 - R^2 - b^2} A + \frac{r^2 - R^2 - c^2}{r^2 - R^2 - b^2} = 0,$$

waaruit A gemakkelijk bepaald en zoo het vlak 2) geheel bekend wordt.

Snijdt een vlak den bol volgens een gegeven cirkel, dan

is de afstand van het middelpunt des bols tot het cirkelvlak gelijk aan $\sqrt{R^2 - r^2}$, wanneer R den straal van den bol, r dien van den cirkel voorstelt. Beschrijft men nu met den straal $\sqrt{R^2 - r^2}$ een bol, concentrisch met den gegebenen, dan zal elk vlak, dat raakvlak is aan dezen kleineren bol, den grooteren volgens het beloop van een cirkel met den straal r snijden. Hierdoor wordt het vraagstuk terug gebragt tot een vorig, het opzoeken namelijk van de coördinaten van het raakpunt als door een gegeven lijn een raakvlak aan een gegeven bol (hier met den straal $\sqrt{R^2 - r^2}$) gebragt wordt.

68. Wij nemen het middelpunt van een der gegeven bollen als oorsprong van een regthoekig coördinatenstelsel en het vlak, dat door de middelpunten der bollen gaat, als vlak der xy aan; dan zijn de vergelijkingen der gegeven bollen

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r_1^2 : \\ (x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 + z^2 &= r_2^2; \\ (x - \alpha_3)^2 + (y - \beta_3)^2 + z^2 &= r_3^2; \end{aligned} \right\} \dots\dots 1)$$

voor den te zoeken bol schrijven wij

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2, \dots\dots 2)$$

zoo dat $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, r_1, r_2$ en r_3 bekende, α, β, γ en r onbekende grootheden aanduiden.

Voorts nemen wij aan dat 2) de gegeven bollen uitwendig aanraakt; dit geeft aanleiding tot de volgende vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (r + r_1)^2, \dots\dots\dots 3) \\ (\alpha - \alpha_2)^2 + (\beta - \beta_2)^2 + \gamma^2 &= (r + r_2)^2, \dots\dots 4) \\ (\alpha - \alpha_3)^2 + (\beta - \beta_3)^2 + \gamma^2 &= (r + r_3)^2, \dots\dots 5) \end{aligned} \right\}$$

Trekken wij 4) en 5) van 3) af, dan verkrijgen wij

$$2\beta_2\beta + 2\alpha_2\alpha = \beta_2^2 + \alpha_2^2 + r_1^2 - r_2^2 + 2(r_1 - r_2)r; \dots 6)$$

$$2\beta_3\beta + 2\alpha_3\alpha = \beta_3^2 + \alpha_3^2 + r_1^2 - r_3^2 + 2(r_1 - r_3)r; \dots 7)$$

tusschen 6) en 7) kunnen wij dan r elimineren, hetwelk aanleiding geeft tot de uitdrukking

$$\frac{2\beta_2\beta + 2\alpha_2\alpha - \beta_2^2 - \alpha_2^2 - r_1^2 + r_2^2}{r_1 - r_2} = \frac{2\beta_3\beta + 2\alpha_3\alpha - \beta_3^2 - \alpha_3^2 - r_1^2 + r_3^2}{r_1 - r_3} \dots 8)$$

Deze vergelijking is ten opzichte van α en β van den eersten graad; zij wijst derhalve een plat vlak aan, dat op het vlak der xy rechthoekig staat. En daar aan 8) voldaan wordt door

$2\beta_2\beta + 2\alpha_2\alpha - \beta_2^2 - \alpha_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0, \dots 9)$
 en door $2\beta_3\beta + 2\alpha_3\alpha - \beta_3^2 - \alpha_3^2 - r_1^2 + r_3^2 = 0, \dots$
 stelt 8) de lijn van doorsnede der beide vlakken 9) daar.

Elimineren wij vervolgens r tusschen een der vergelijkingen 3), 4) en 5), en tusschen 6) of 7), dan bekomen wij eene vergelijking in α , β en γ , welke van den tweeden graad is; elimineren wij daarop β tusschen de laatst bepaalde en 8), dan komt er eene vergelijking tusschen α en γ , welke eveneens van den tweeden graad is. Deze laatste vergelijking tusschen α en γ is die eener cilindervlakte van den tweeden graad, en alle middelpunten $\alpha\beta\gamma$ van den bol 2) liggen op die cilindervlakte en op het vlak 8); de meetkundige plaats van al die middelpunten is derhalve de lijn van doorsnede van dat cilindervlak en het platte vlak 8), bijgevolg is die meetkundige plaats eene lijn van eenerlei kromming, behoorende tot de kegelsneden.

Noemen wij, ten anderen, het aanrakingspunt van bol 2) en het eerste der kogelvlakten 1) $tu v$, dan hebben wij

$t^2 + u^2 + v^2 = r_1^2, \dots 10)$
 en $(t - \alpha)^2 + (u - \beta)^2 + (v - \gamma)^2 = r^2 \dots 11)$

Tellen wij nu 3) en 10) bij elkander, en verminderen die som met 11), dan komt er

$\alpha t + \beta u + \gamma v = r_1(r + r_1), \dots 12)$
 en brengen wij in deze vergelijking de waarden van r_1 en $r + r_1$ uit 3) en 10) over, dan hebben wij, na eene ligte herleiding

$(\alpha u - \beta t)^2 + (\alpha v - \gamma t)^2 + (\beta v - \gamma u)^2 = 0,$
 welke vergelijking alleen mogelijk is in geval men heeft
 $\alpha u - \beta t = 0; \alpha v - \gamma t = 0$ en $\beta v - \gamma u = 0, \dots 13)$
 waaruit blijkt dat het aanrakingspunt $tu v$ met de middelpunten der beide bollen in eene rechte lijn ligt, waaraan trouwens niet te twijfelen viel. Uit 12) en 13) verkrijgen wij, met behulp van 10)

waarvoor wij ook schrijven kunnen

$$x(y_1 z_2) - y(x_1 z_2) + z(x_1 y_2) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Maar het punt ligt in de doorsnede van den bol 1) en het vlak 5); die doorsnede is natuurlijk een cirkel. Om dien cirkel in ware ligging te kennen, moeten wij zijne vergelijking opzoeken ten opzichte van regthoekige assen in het vlak van doorsnede 2) of 5); hiertoe zijn twee dingen noodig, eerstens de hoek ϕ , welken het spoor van het snijdend vlak op het vlak XY met OX maakt; ten anderen de hoek θ , welke de helling aangeeft van het snijdend vlak op hetzelfde vlak XY .

De vergelijking van het spoor is

$$Ax + By = 0 \quad \text{of} \quad x(y_1 z_2) - y(x_1 z_2) = 0,$$

$$\text{waaruit tang } \phi = -\frac{A}{B} = +\frac{(y_1 z_2)}{(x_1 z_2)},$$

terwijl volgens bekende regels θ bepaald wordt uit

$$\cos \theta = \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}} = \frac{(x_1 y_2)}{\sqrt{(y_1 z_2)^2 - (x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2)^2}}.$$

Na ϕ en θ gevonden te hebben, maakt men gebruik van de gewone formules voor het veranderen van coördinaten:

$$x = x^1 \cos \phi - y^1 \cos \theta \sin \phi,$$

$$y = x^1 \sin \phi + y^1 \cos \theta \cos \phi,$$

$$z = y^1 \sin \theta.$$

Brengt men deze waarden voor x , y en z over in 1), dan erlangt men de vergelijking van den cirkel, ten opzichte van regthoekige coördinaten in het vlak van doorsnede. In dat vlak liggen ook de punten A en B , welker coördinaten men vindt door gebruik te maken van de laatst gegevene herleidingsformule. Het voorstel is hierdoor herleid tot het volgende: twee gegeven punten A en B liggen beide buiten een gegeven cirkel; men vraagt het punt C aan den omtrek zoo te bepalen dat $AC + BC$ een minimum wordt.

Uit de lagere meetkunde weet men dat tot het minimum zijn van $AC + BC$ vereischt wordt dat de lijnen AC en BC met de raaklijn in C gelijke hoeken maken. Dan toch zullen zij den kortsten weg opleveren van A door een punt dier raaklijn naar B ; en daar de cirkel slechts dit punt C met

de lijn gemeen heeft, en overigens uit den aard van het vraagstuk aan gene zijde daarvan ligt ten aanzien van A en B , is dit dan tevens de gevraagde kortste weg.

Laat dan, bij onderling regthoekige coördinaten het middelpunt van den cirkel in den oorsprong vallen, dan is zijne vergelijking

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Noemen wij de coördinaten van het punt A $x=p$, $y=q$, die van het punt B $x=r$, $y=0$, waarmede aan de algemeenheid niet te kort wordt gedaan; voor de coördinaten van het te zoeken punt C mogen x_1 en y_1 gelden. Dan is de vergelijking der raaklijn aan den cirkel in het punt $x_1 y_1$

$$x x_1 + y y_1 = R^2;$$

de vergelijking der lijn AC , welke gaat door het punt $p q$ en het raakpunt $x_1 y_1$ is

$$y - q = \frac{y_1 - q}{x_1 - p} (x - p),$$

die der lijn BC , gaande door $r 0$ en $x_1 y_1$,

$$y = \frac{y_1}{x_1 - r} (x - r).$$

De lijn AC maakt derhalve met de raaklijn een hoek, welks tangens is

$$\frac{\frac{y_1 - q}{x_1 - p} + \frac{x_1}{y_1}}{1 - \frac{y_1 - q}{x_1 - p} \times \frac{x_1}{y_1}} = \frac{R^2 - q y_1 - p x_1}{-p y_1 + q x_1}, \text{ want } x_1^2 + y_1^2 = R^2.$$

Evenzoo maakt de lijn BC met de raaklijn een hoek, waarvan de tangens wordt uitgedrukt door

$$\frac{\frac{y_1}{x_1 - r} + \frac{x_1}{y_1}}{1 - \frac{y_1}{x_1 - r} \times \frac{x_1}{y_1}} = \frac{R^2 - r x}{-r y};$$

en daar die hoeken aan elkander gelijk moeten zijn, heeft men

$$\frac{R^2 - q y_1 - p x_1}{-p y_1 + q x_1} = \frac{R^2 - r x}{-r y}$$

waaruit, na herleiding,

$$(p-r)y_1 - qx_1 + qr = 0;$$

maar uit de vergelijking van den cirkel volgt $x_1 = \sqrt{(R^2 - y_1^2)}$; brengt men deze waarde in de vorige vergelijking over, dan heeft men, na herleiding,

$$y_1^2 + \frac{2qr(p-r)}{(p-r)^2 + q^2} y_1 + \frac{q^2(r^2 - R^2)}{(p-r)^2 + q^2} = 0,$$

waaruit y_1 gemakkelijk wordt afgeleid. Men vindt daarop x_1 uit de gelijkheid $x_1^2 + y_1^2 = R^2$.

70. Nemen wij den oorsprong der onderling regthoekige coördinaten in het middelpunt van den bol, die alzoo tot vergelijking heeft

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad 1)$$

laten voorts, ten opzichte van dezelfde coördinatenassen

$$x = az + b \quad \text{en} \quad y = cz + d \quad 2)$$

de gegevene vergelijkingen der lijn in de ruimte zijn; indien dan de coördinaten van het gevraagde punt door p , q en r voorgesteld worden, is, daar dit punt op de lijn 2) ligt,

$$p = ar + b \quad \text{en} \quad q = cr + d. \quad 3)$$

Laten wij nu eene lijn door het middelpunt van den bol, dat is door den oorsprong, en het punt pqr gaan, dan zijn de vergelijkingen dezer lijn

$$x = \frac{p}{r} z \quad \text{en} \quad y = \frac{q}{r} z, \quad 4)$$

maar deze lijn snijdt het oppervlak van den bol, en, zoo wij de coördinaten van dat snijpunt $p^1 q^1 r^1$ noemen, hebben wij, volgens 1) en 4)

$$p^{1^2} + q^{1^2} + r^{1^2} = R^2; \quad p^1 = \frac{p}{r} r^1 \quad \text{en} \quad q^1 = \frac{q}{r} r^1,$$

uit welke vergelijkingen gemakkelijk gevonden wordt:

$$p^1 = \pm \frac{pR}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}}; \quad q^1 = \pm \frac{qR}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}};$$

$$r^1 = \pm \frac{rR}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}}. \quad 5)$$

De afstand der punten pqr en $p^1 q^1 r^1$ is tevens de afstand tusschen het eerstgenoemde punt en het oppervlak van den bol; dien gegeven afstand D noemende, is derhalve

$$D = \sqrt{(p - p^1)^2 + (q - q^1)^2 + (r - r^1)^2},$$

of, na substitutie der waarden 5) en behoorlijke herleiding,

$$D = \pm R \pm \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}.$$

Uit deze vergelijking hebben wij dadelijk

$$p^2 + q^2 + r^2 = (D \pm R)^2;$$

door hierin voor p en q de waarden 3) te stellen, komt er verder

$$(ar + b)^2 + (cr + d)^2 + r^2 = (D \pm R)^2,$$

of na herleiding en oplossing der vierkantsvergelijking

$$r = \frac{-(ab + cd) \pm \sqrt{(a^2 + c^2 + 1)(D \pm R)^2 - (ad - bc)^2 - (b^2 + d^2)}}{a^2 + c^2 + 1}.$$

Brengt men de waarden van r in de vergelijkingen 3) over, dan wordt

$$p = \frac{bc^2 + b - acd \pm a \sqrt{(a^2 + c^2 + 1)(D \pm R)^2 - (ad - bc)^2 - (b^2 + d^2)}}{a^2 + c^2 + 1}$$

en

$$q = \frac{da^2 + d - acb \pm c \sqrt{(a^2 + c^2 + 1)(D \pm R)^2 - (ad - bc)^2 - (b^2 + d^2)}}{a^2 + c^2 + 1},$$

zoodat nu de coördinaten van het begeerde punt gevonden zijn. Gaat de gegeven lijn door het middelpunt van den bol, dat is, door den oorsprong, dan wordt $b=0$ en $d=0$, waardoor de coördinaten van het gezochte punt zijn

$$p = \pm \frac{a(D \pm R)}{\sqrt{(a^2 + c^2 + 1)}}, q = \pm \frac{c(D \pm R)}{\sqrt{(a^2 + c^2 + 1)}}, r = \pm \frac{D \pm R}{\sqrt{(a^2 + c^2 + 1)}}.$$

71. Trekt men uit het middelpunt van den bol eene lijn loodregt op de gegeven lijn, dan is de afstand van het middelpunt des bols tot het punt, waar de loodlijn de gegeven lijn snijdt, korter dan eenige andere lijn uit het middelpunt van den bol tot eenig ander punt der gegebene lijn getrokken. En is de loodlijn de kortste, dan is het verschil tusschen de loodlijn en den straal van den bol kleiner dan dat tusschen dezen laatsten en eenige andere lijn uit het middelpunt van den bol tot de gegeven lijn getrokken; het komt er dus in de eerste plaats op aan dat snijpunt te vinden. Zij daartoe

$$x = az + b \text{ en } y = cz + d \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

de vergelijking der gegebene lijn, en laat het middelpunt

der vlakken $E_1=0$ en $E_2=0$ midden door deelt, $E_1-E_2=0$; in dit laatste vlak bevindt zich het middelpunt van den bol, maar het ligt ook in het vlak $E_1-E_3=0$ en in het vlak $E_2-E_3=0$, bijgevolg in de lijn, welke de doorsnede dier vlakken is. En deze lijn bevat de middelpunten van alle bollen, welke in den drievlakkigen hoek sluiten. Is de straal van een dezer bollen $=R$ gegeven, dan heeft men in die lijn slechts het punt op te zoeken, dat op den afstand R van een der vlakken des drievlakkigen hoeks gelegen is.

Wij zullen een anderen weg inslaan; de gegevene vergelijkingen der vlakken noemen wij

$$\begin{aligned} A x + B y + C z + D &= 0, \\ A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \quad . \quad . \quad . \quad 1) \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0, \end{aligned}$$

en schrijven voor de te vinden vergelijking van den bol

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = R^2,$$

waarin R gegeven is en p, q en r de onbekenden zijn.

Maar het punt $p q r$ ligt op den afstand R van elk der vlakken 1), zoodat

$$\begin{aligned} \frac{A p + B q + C r + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} &= R; \quad \frac{A_1 p + B_1 q + C_1 r + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = R \text{ en} \\ \frac{A_2 p + B_2 q + C_2 r + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} &= R \end{aligned}$$

is, uit welke vergelijkingen de onbekenden p, q en r gemakkelijk bepaald worden. Om dit op de geschiktste wijze te verrigten, stellen wij ter bekorting:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} &= a; \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = b \text{ tot } \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = d \\ \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} &= a_1, \text{ enz.} \end{aligned}$$

en verkrijgen zoo doende de drie vergelijkingen

$$\begin{aligned} a p + b q + c r + d - R &= 0, \\ a_1 p + b_1 q + c_1 r + d_1 - R &= 0, \\ a_2 p + b_2 q + c_2 r + d_2 - R &= 0, \end{aligned}$$

waaruit

$$p = \frac{((R-d) b_1 c_2)}{(a b_1 c_2)} = \frac{\begin{vmatrix} R-d & b & c \\ R-d_1 & b_1 & c_1 \\ R-d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}};$$

$$q = \frac{(a (R-d_1) c_2)}{(a b_1 c_2)} = \frac{\begin{vmatrix} a & R-d & c \\ a_1 & R-d_1 & c_1 \\ a_2 & R-d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}};$$

$$r = \frac{(a b_1 (R-d_2))}{(a b_1 c_2)} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & R-d \\ a_1 & b_1 & R-d_1 \\ a_2 & b_2 & R-d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}.$$

Voor ieder der drie wortelgrootheden kan het dubbele teeken gesteld worden; door deze teekens naar welgevallen te combineren, komen er dus acht verschillende vergelijkingen voor den begeerden bol. Deze vergelijkingen behooren blijkbaar tot de acht verschillende bollen, die, allen denzelfden straal hebbende, kunnen geplaatst worden in de acht drielakkige hoeken, waarin de drie gegeven vlakken de onbepaalde ruimte verdeelen.

73. Neem den top der driehoekige piramide als oorsprong en de aan elkander grenzende ribben a , b en c als assen van het coördinatenstelsel. Noem voorts den straal van den omgeschreven bol R , en de hoeken tusschen de coördinaatassen λ , μ en ν . Een der stralen van den bol loopt uit het middelpunt van dezen naar den top der piramide of den oorsprong van het aangenomen coördinatenstelsel. Maakt die straal met de assen de hoeken α , β en γ , dan vindt men voor zijne projectien op de assen

$$\frac{a}{2} = R \cos \alpha; \quad \frac{b}{2} = R \cos \beta; \quad \frac{c}{2} = R \cos \gamma.$$

Brengt men nu in den determinant in het tweede vraagstuk gevonden de waarden van $\cos \alpha$, $\cos \beta$ en $\cos \gamma$, uit bovenstaande gelijkheden voortvloeiende, over, dan wordt die betrekking

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{2R} & \frac{b}{2R} & \frac{c}{2R} \\ \frac{a}{2R} & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \frac{b}{2R} & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \frac{c}{2R} & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

of, de eerste lijn en de eerste kolom elk met $2R$ vermenigvuldigende,

$$\begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ b & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ c & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

waaruit gemakkelijk afgeleid wordt

$$4R^2 \Delta^2 = - \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ b & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ c & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix};$$

zooals men weet is

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu,$$

of

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix},$$

dat is

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \sin^2 \mu \sin^2 \nu - (\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda)^2 \\ &= (\sin \mu \sin \nu + \cos \mu \cos \nu - \cos \lambda) \times \\ &\quad \times (\cos \lambda - \cos \mu \cos \nu + \sin \mu \sin \nu) \\ &= [\cos(\mu - \nu) - \cos \lambda] [\cos \lambda - \cos(\mu + \nu)]; \end{aligned}$$

$$\text{maar } \cos(\mu - \nu) - \cos \lambda = 2 \sin \frac{\lambda + \mu - \nu}{2} \sin \frac{\nu + \lambda - \mu}{2}$$

$$\text{en} \quad \cos \lambda - \cos (\mu + \nu) = 2 \sin \frac{\lambda + \mu + \nu}{2} \sin \frac{\mu + \nu - \lambda}{2},$$

derhalve

$$\Delta^2 = 4 \sin \frac{\lambda + \mu + \nu}{2} \sin \frac{\mu + \nu - \lambda}{2} \sin \frac{\nu + \lambda - \mu}{2} \sin \frac{\lambda + \mu - \nu}{2}.$$

Nog heeft men de betrekking

$$\Delta = 6 V,$$

wanneer V het volumen of den inhoud voorstelt van den tetraeder, welks drie aan elkander grenzende ribben gelijk aan de eenheid genomen worden. De reden hiervan op te sporen mogen wij aan den lezer overlaten.

74. Behouden wij het coördinatenstelsel van het vorig vraagstuk, en noemen wij de coördinaten van het middelpunt des ingeschreven bols $x^1 y^1 z^1$, dan moeten de afstanden van dit middelpunt tot aan de coördinaatvlakken allen gelijk aan r , den straal van den bol, zijn. Wij hebben derhalve naar aanleiding van het 34^{te} vraagstuk

$$r = \frac{\Delta x^1}{\sin \lambda} = \frac{\Delta y^1}{\sin \mu} = \frac{\Delta z^1}{\sin \nu}. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Bovendien wordt het vierde zijvlak van den tetraeder uitgedrukt door

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

Er is dus niets anders noodig dan in form. (3) van het 33^{te} vraagstuk A , B , C en D te vervangen door $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ en -1 , p door r , en x^1 , y^1 en z^1 door hare waarden $\frac{r \sin \lambda}{\Delta}$, $\frac{r \sin \mu}{\Delta}$ en $\frac{r \sin \nu}{\Delta}$, uit (1) genomen, om terstond te geraken tot de vergelijking

$$\left(\frac{\sin \lambda}{a} + \frac{\sin \mu}{b} + \frac{\sin \nu}{c} - \frac{\Delta}{r} \right)^2 = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \frac{1}{b} & \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \frac{1}{c} & \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}, \quad (2)$$

die de waarde van den straal des ingeschreven bols oplevert.

Het tweede lid van den verkregen determinant kan nog vereenvoudigd worden; daartoe vermenigvuldigt men de drie laatste kolommen en de drie laatste regels respectievelijk met a , b en c , en buiten de lijnen met $\frac{1}{a \cdot b \cdot c} \times \frac{1}{a \cdot b \cdot c}$, op dat de waarde dezelfde zal blijven. Hierdoor neemt de determinant den volgende vorm aan:

$$-\frac{1}{a^2 b^2 c^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & ab \cos \nu & ac \cos \mu \\ 1 & ab \cos \nu & b^2 & bc \cos \lambda \\ 1 & ac \cos \mu & bc \cos \lambda & c^2 \end{vmatrix},$$

waardoor blijkbaar wordt dat het tweede lid van (2) gelijk is aan het vierkant van den dubbelen inhoud van het vierde zijvlak S , gedeeld door $a^2 b^2 c^2$. Dien ten gevolge heeft men

$$\left(\frac{\sin \lambda}{a} + \frac{\sin \mu}{b} + \frac{\sin \nu}{c} - \frac{\Delta}{r} \right)^2 = \frac{4 S^2}{a^2 b^2 c^2},$$

of

$$\frac{\Delta}{r} = \frac{\sin \lambda}{a} + \frac{\sin \mu}{b} + \frac{\sin \nu}{c} \pm \frac{2 S}{a b c}.$$

Deze formule geeft de stralen van twee bollen, die de vier zijvlakken van den tetraeder aanraken; hunne middelpunten bevinden zich op de lijn

$$\frac{x}{\sin \lambda} = \frac{y}{\sin \mu} = \frac{z}{\sin \nu}.$$

Maar bovendien zijn er nog zes andere bollen, die aan het vraagstuk voldoen, dat is de vier zijvlakken van de driehoekige piramide aanraken; men vindt hunne stralen door achtereenvolgens het teeken van $\sin \lambda$, $\sin \mu$ en $\sin \nu$ te veranderen:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{r^1} &= \frac{\sin \mu}{b} + \frac{\sin \nu}{c} - \frac{\sin \lambda}{a} \pm \frac{2 S}{a b c}, \\ \frac{\Delta}{r^{11}} &= \frac{\sin \nu}{c} + \frac{\sin \lambda}{a} - \frac{\sin \mu}{b} \pm \frac{2 S}{a b c}, \\ \frac{\Delta}{r^{111}} &= \frac{\sin \lambda}{a} + \frac{\sin \mu}{b} - \frac{\sin \nu}{c} \pm \frac{2 S}{a b c}. \end{aligned}$$

Deze bollen hebben twee aan twee hunne middelpunten op de lijnen:

$$\begin{aligned} -\frac{x}{\sin \lambda} &= \frac{y}{\sin \mu} = \frac{z}{\sin \nu}, \\ \frac{x}{\sin \lambda} &= -\frac{y}{\sin \mu} = \frac{z}{\sin \nu}, \\ \frac{x}{\sin \lambda} &= \frac{y}{\sin \mu} = -\frac{z}{\sin \nu}. \end{aligned}$$

75. Laat het oppervlak van den bol, tot vergelijking hebbende

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad 1)$$

gesneden worden door eene rechte lijn, welker vergelijkingen zijn

$$x = az + b \quad \text{en} \quad y = cz + d; \quad 2)$$

noemen wij dan de coördinaten van het eene snijpunt pqr , die van het andere $p^1q^1r^1$, en laat k de lengte voorstellen van het deel dier lijn, dat als koorde binnen den bol valt, zoo hebben wij dadelijk

$$k^2 = (p - p^1)^2 + (q - q^1)^2 + (r - r^1)^2. \quad . . . 3)$$

Dewijl nu de punten pqr en $p^1q^1r^1$ op de lijn 2) liggen, is

$$p = ar + b \quad \text{en} \quad q = cr + d \quad . . . 4)$$

$$p^1 = ar^1 + b \quad \text{en} \quad q^1 = cr^1 + d \quad . . . 5)$$

waaruit door aftrekking volgt

$$(p - p^1) = a(r - r^1); \quad (q - q^1) = c(r - r^1),$$

door substitutie van welke waarden 3) overgaat in

$$k^2 = (a^2 + c^2 + 1)(r - r^1)^2 \quad 6)$$

Maar de punten pqr en $p^1q^1r^1$ liggen op het oppervlak van den bol 1); dus hebben wij mede

$$p^2 + q^2 + r^2 = R^2,$$

$$p^{1^2} + q^{1^2} + r^{1^2} = R^2,$$

of door substitutie der waarden 4) en 5)

$$(ar + b)^2 + (cr + d)^2 + r^2 = R^2,$$

$$(ar^1 + b)^2 + (cr^1 + d)^2 + r^{1^2} = R^2,$$

dat is, na herleiding,

$$r^2 + \frac{2(ab+cd)}{a^2+c^2+1}r + \frac{b^2+d^2-R^2}{a^2+c^2+1} = 0,$$

$$r^{1^2} + \frac{2(ab+cd)}{a^2+c^2+1}r^1 + \frac{b^2+d^2-R^2}{a^2+c^2+1} = 0;$$

hieruit blijkt dat r en r^1 de wortels eener zelfde vierkantsvergelijking zijn, en dat dus, volgens de eigenschappen der vierkantsvergelijkingen

$$r + r^1 = -\frac{2(ab+cd)}{a^2+c^2+1}$$

en

$$r \times r^1 = \frac{b^2+d^2-R^2}{a^2+c^2+1}$$

zal zijn. Daar nu altijd

$$(r-r^1)^2 = (r+r^1)^2 - 4rr^1$$

is, vinden wij door substitutie en herleiding

$$(r-r^1)^2 = \frac{4\{R^2(a^2+c^2+1) - (ad-bc)^2 - (b^2+d^2)\}}{(a^2+c^2+1)^2}$$

en dus volgens 6)

$$k^2 = \frac{4\{R^2(a^2+c^2+1) - (ad-bc)^2 - (b^2+d^2)\}}{a^2+c^2+1};$$

zonderen wij hieruit eindelijk R^2 af, dan vinden wij

$$R^2 = \frac{1}{4}k^2 + \frac{(ad-bc)^2 + b^2 + d^2}{a^2+c^2+1}, \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

door welke formule de straal van den bol 1) gevonden wordt uit de wetenschap dat zijn oppervlak uit de lijn 2) eene koorde ter lengte k afsnijdt.

Ter oplossing van het voorgestelde vraagstuk, behoeven wij dus blijkbaar niets anders te doen dan de formule 7) toe te passen op het geval dat de lijn 2) de doorsnede der beide gegevene vlakken is. Laat hunne vergelijkingen zijn

$$A x + B y + C z + D = 0$$

en

$$A^1 x + B^1 y + C^1 z + D^1 = 0,$$

dan vinden wij, door beurtelings y en x tusschen deze vergelijkingen te elimineren, voor de vergelijkingen van de projectien hunner gemeene doorsnede

$$(A B^1 - A^1 B) x - (B C^1 - B^1 C) z - (B D^1 - B^1 D) = 0,$$

$$(A B^1 - A^1 B) y - (C A^1 - C^1 A) z + (A D^1 - A^1 D) = 0;$$

stellen wij dus ter bekorting

$$\left. \begin{aligned} B C^1 - B^1 C &= \alpha; & C A^1 - C^1 A &= \beta; & A B^1 - A^1 B &= \gamma; \\ A^1 D - A D^1 &= \alpha^1; & B D^1 - B^1 D &= \beta^1; & C D^1 - C^1 D &= \gamma^1; \end{aligned} \right\} 8)$$

dan worden de vergelijkingen van de genoemde doorsnede

$$x = \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\beta^1}{\gamma} \quad \text{en} \quad y = \frac{\beta}{\gamma} z - \frac{\alpha^1}{\gamma},$$

zoodat wij slechts in 7) zullen moeten substitueren

$$a = \frac{\alpha}{\gamma}; \quad b = \frac{\beta^1}{\gamma}; \quad c = \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{en} \quad d = -\frac{\alpha^1}{\gamma}$$

om ter oplossing van ons vraagstuk te vinden

$$R^2 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{\left(\frac{\alpha \alpha^1 + \beta \beta^1}{\gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{\beta^1}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{\alpha^1}{\gamma} \right)^2}{\left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^2 + 1};$$

nemen wij echter in aanmerking dat volgens 8)

$$\alpha \alpha^1 + \beta \beta^1 + \gamma \gamma^1 = 0$$

is, waaruit volgt

$$\frac{\alpha \alpha^1 + \beta \beta^1}{\gamma^2} = -\frac{\gamma^1}{\gamma},$$

dan verkrijgen wij, ter bepaling van den gevraagden straal, de zeer regelmatige formule

$$R^2 = \frac{1}{4} k^2 + \frac{\alpha^1{}^2 + \beta^1{}^2 + \gamma^1{}^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \dots 9)$$

Uit 9) volgt nu ook nog dat

$$\frac{\alpha^1{}^2 + \beta^1{}^2 + \gamma^1{}^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

het vierkant voorstelt van de loodlijn, uit den oorsprong op de gemeene doorsnede der gegeven vlakken vallende.

Bij dezelfde Uitgevers is verschenen:

- BOEKE, (Dr. J. D.), Stoechiometrische Vraagstukken,
ten gebruike bij het onderwijs in de scheikunde,
3^e druk f 0.75
———, Gids bij het aanleeren der Scheikunde. . . — 0.35
HOLLMAN, (Dr. P. J.), Wiskundige schets der Levens-
verzekering — 3.—
———, Levensverzekering, eens ieders pligt! . — 0.10
LACROIX, (S. F.), Beginselen der Meetkunde. Dl. I.
Meetkunde van het platte vlak. Eigenschappen
der lijnen en vlakken, 7^e druk, bewerkt door
Dr. D. BIERENS DE HAAN — 3.—
———, Idem. Dl. II. Meetkunde van de ruimte.
Eigenschappen der vlakken en lichamen, 6^e druk,
bewerkt door Dr. D. BIERENS DE HAAN — 2.—
SPEIJER, (J. S.), Tafel van de gewone of briggiaansche
logarithmen van 1 tot 101000, met eene ver-
klaring van het gebruik der logarithmen bij het
koopmansrekenen, 2^e druk — 1.—
-