De singuliere oplossingen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde met twee veranderlijken

P. M. HERINGA.

DE SINGULIERE OPLOSSINGEN
VAN
DIFFERENTIAAL VERGELIJKINGEN
VAN
DE EERSTE ORDE
MET TWEE VERANDERLIJKEN

A. A. Nijland
N° 148

DE SINGULIERE OPLOSSINGEN

VAN

DIFFERENTIAAL VERGELIJKINGEN

VAN

DE EERSTE ORDE MET TWEE VERANDERLIJKEN.

DE SINGULIERE OPLOSSINGEN

VAN

DIFFERENTIAAL VERGELIJKINGEN

VAN

DE EERSTE ORDE MET TWEE VERANDERLIJKEN.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE

HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

D^r. H. VAN HERWERDEN,

GEWOON HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER BESPIEGELENDE WIJSBEGEERTE EN LETTEREN,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

EN

VOLGENS BESLUIT DER WIS- EN NATUURKUNDIGE FACULTEIT,

TE VERDEDIGEN

op Woensdag den 20sten December 1876, des namiddags ten 1 ure,

DOOR

PETRUS MARINUS HERINGA,

GEBOREN TE TILBURG.

UTRECHT, — G. A. VAN HOFTEN, — 1876.

AAN MIJNE OUDERS.

Aan het einde van mijne Academische loopbaan, is het mij een aangename plicht, U, Hooggeleerde Heeren, Professoren in de Wis- en Natuurkundige faculteit, mijnen dank te brengen voor de welwillendheid, die ik steeds van U mocht ondervinden.

Inzonderheid dank ik U, Hooggeachte Promotor C. H. C. Grinwis, *voor het uitstekend onderwijs, dat ik zoo lang van U mocht genieten en voor de bereidwilligheid, waarmede gij mij bij de bewerking van dit Proefschrift hebt terzijde gestaan.*

U, Hooggeleerde C. H. D. Buys Ballot, *breng ik* *mijn hartelijken dank voor het degelijk onderricht, dat ik van U heb genoten.*

De welwillende raadgevingen van U Corneille L. Landré *bij mijne wiskundige studie, vooral in den laatsten tijd, zullen bij mij altijd in dankbare herinnering blijven.*

INHOUD.

INLEIDING.

Singuliere oplossingen van de differentiaal-vergelijkingen zijn integralen, die niet uit de algemeene integraal zijn af te leiden door aan de willekeurige constante eene bepaalde waarde te geven.

Van deze bepaling uitgaande, hebben wij getracht zoo nauwkeurig mogelijk het verband aan te toonen tusschen de singuliere oplossing en de algemeene integraal en tusschen de singuliere oplossing en de differentiaal-vergelijking; daarbij hebben wij de theoriën, die door verschillende wiskundigen gegeven zijn, nagegaan en het verband tusschen die theoriën aangetoond. De algemeene integraal en de differentiaal-vergelijking hebben wij daarbij in alle mogelijke vormen voorgesteld.

De resultaten van ons onderzoek hebben wij afzonderlijk medegedeeld aan het einde van de twee hoofdafdeelingen, waarin wij het verdeeld hebben. Wij hopen duidelijk aangetoond te hebben, welke zekerheid ons de theorie geeft.

HOOFDSTUK I.

Geschiedkundig Overzicht.

Daar de singuliere oplossingen nauw samenhangen met de algemeene integralen, is het te begrijpen, dat men reeds bij den aanvang van het onderzoek der algemeene integralen op vraagstukken stuitte, die van de theorie der singuliere oplossingen afhingen.

LEIBNITZ [1]) geeft een weg aan, om de kromme lijn te vinden, die ontstaat door de opeenvolgende snijding van een oneindig aantal kromme lijnen, welke door dezelfde vergelijking worden voorgesteld, terwijl men in die vergelijking de willekeurige constante laat veranderen.

Hij paste dit toe op het vraagstuk: de kromme lijn te vinden, waarbij eene zekere betrekking bestaat tusschen de normaal en het deel, dat door de normaal van de abscis wordt afgesneden. Zooals bekend is kunnen wij de normaal voorstellen door

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

en het deel afgesneden door de normaal van de abscis-as door

1) Nova calculi differentialis applicatio. Act. de Leipzig 1694.

$$x + y\frac{dy}{dx}.$$

Is nu de betrekking tusschen deze beide gegeven, dan komt men in het algemeen tot de differentiaal-vergelijking:

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \varphi\left(x + y\frac{dy}{dx}\right).$$

Stellen wij b. v. het geval, dat de eene in het quadraat gelijk is aan de andere vermenigvuldigd met een constante, dan hebben wij, dat:

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{c\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)};$$

lost men hieruit $2y\frac{dy}{dx}$ op, dan is:

$$2y\frac{dy}{dx} = c + 2\sqrt{\frac{c^2}{y} + cx - y^2},$$

of

$$\frac{c - 2y\frac{dy}{dz}}{2\sqrt{\frac{c^2}{y} + cx - y^2}} + 1 = 0.$$

Hiervan is de integraal

$$\sqrt{\frac{c^2}{4} + cx - y^2} + x = h.$$

of

$$\frac{c^2}{4} + cx - y^2 = (h - x)^2,$$

en als men $h = a - \frac{c}{2}$ stelt, verkrijgt men:

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - ac = 0,$$

zooals men ziet de vergelijking van een cirkel, waarvan het middelpunt op den afstand a van den oorsprong ligt en waarvan de straal $= \sqrt{ac}$ is.

Dit is van de gegeven differentiaal-vergelijking de algemeene integraal met de willekeurige constante a; ten einde hiervan de singuliere oplossing af te leiden, differentieert men ten opzichte van a; dit geeft:

$$-2x + 2a - c = 0,$$

of

$$a = \frac{c + 2x}{2};$$

deze waarde van a gesubstitueerd in de vergelijking des cirkels geeft de vergelijking

$$y^2 = cx + \frac{c^2}{4}$$

die van een parabool.

Zoo lost men nu algemeen het vraagstuk op; men kan ook de singuliere oplossing rechtstreeks uit de differentiaal-vergelijking vinden.

Leibnitz echter lost de differentiaal-vergelijking niet op. Hij neemt dadelijk aan, dat de cirkel eene oplossing van het vraagstuk is, daar de cirkel een constante straal, dus een constante normaal heeft en men deze dus zoo kan nemen, dat zij in een bepaalde verhouding is met den afstand van het middelpunt tot den oorsprong.

Jean Bernouilli [1]) heeft dit vraagstuk weder op eene andere wijze behandeld. Hij beschouwt twee normalen, die oneindig dicht bij elkaâr zijn gelegen en vindt dan, dat de aangroeing van de normaal staat tot de aangroeing van het deel der as, begrepen tusschen het snijpunt der normaal en den oorsprong, gelijk de sub-normaal staat tot de normaal. Noemen wij dus weder de normaal b en het deel der as a dan hebben wij:

$$\frac{db}{da} = \frac{a - x}{b}.$$

1) Oeuvres de Jean Bernouilli. Tome III: Leçon XIV.

Bovendien vormen de normaal, de ordinaat en de subnormaal een rechthoekigen driehoek; daarom is:

$$y^2 + (a - x)^2 = b^2.$$

Uit deze twee vergelijkingen vinden wij nu:

$$x = a - \frac{bdb}{da} \qquad y = b\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{db}{da}\right)^2\right\}}.$$

Nemen wij nu weder aan, dat b en a verbonden zijn door de voorwaarde

$$b = \sqrt{ac},$$

dan hebben wij nog

$$\frac{db}{da} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Substitueeren wij dit in de waarden van x en y dan is:

$$x = a - \frac{c}{2} \text{ en } y = \sqrt{ac - \frac{c^2}{4}}.$$

Waaruit a geëlimineerd zijnde, volgt:

$$y^2 = cx + \frac{c^2}{4}.$$

Dus ook weder het zelfde resultaat.

Bij deze wijze van handelen, evenmin als bij die van Leibnitz, is eenig denkbeeld te vinden van het oplossen van dit vraagstuk door middel van het integreeren van een differentiaal-vergelijking, langs welken weg men juist het ware verband kan opmerken, hetwelk er tusschen de verschillende oplossingen bestaat.

Tailor 1) kwam het eerst rechtstreeks van de differentiaal-vergelijking tot de singuliere oplossing.

Hij was namenlijk tot deze vergelijking gekomen:

$$1 = y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + (1 + x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

1) Methodus incrementorum, 1715.

Ten einde deze te integreeren, differentieerde hij en vond toen:

$$\left[-2xy+2(1+x^2)\frac{dy}{dx}\right]\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Hieraan voldoet zoowel $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ als $xy-(1+x^2)\frac{dy}{dx}=0$; uit deze laatste vindt men:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{1+x^2};$$

welke gesubititueerd in de oorspronkelijke vergelijking geeft:

$$y^2=1+x^2.$$

Dit noemt hij een singuliere oplossing.

Integreeren wij $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, dan vinden wij:

$$y=ax+b.$$

Waarin a en b verbonden zijn door de voorwaarde:

$$b=\sqrt{1-a^2}.$$

Even als TAILOR kwam ook CLAIRAULT [1]) door differentiatie tot eene oplossing.

CLAIRAULT kwam daartoe, toen hij uit de vergelijkingen

$$(x-z)\,f(z)=y-\varphi(z) \text{ en } dy=f(z)\,dx,$$

z wilde elimineeren. Dit deed hij door de eerste te differentieeren en in het resultaat de waarde van dy uit de tweede te substitueeren. Hierdoor verkreeg hij de vergelijking:

$$[f(z)-(x-z)\,f'(z)+\varphi'(z)]\,dz=0.$$

Hieruit ontstaan twee waarden van z, de ééne door de vergelijking:

$$f(z)-(x-z)\,f'(z)+\varphi'(z)=0,$$

de andere door:

1) Mémoires de l'académie des sciences de Paris. (1734).

$$dz = 0 \text{ of } z = a.$$

Welke in de oorspronkelijke vergelijking gesubstitueerd, twee oplossingen geven.

Door differentiatie kan men dus de waarde van z bepalen en daardoor uit de gegevene vergelijkingen elimineeren.

Nemen wij nu het bijzondere geval, dat z gelijk het differentiaal quotient $\frac{dx}{dy} = p$ is, dan is f(z) ook p, en dan wordt de eerste vergelijking:

$$y = xp + \varphi(p) - p^2.$$

$$\text{of } y = xp + \psi(p).$$

Uit welke differentiaal vergelijking wij dus p kunnen elimineeren, door middel van differentiatie. Het resultaat van die eliminatie geeft de twee vergelijkingen.

$$y = cx + \psi(c).$$

$$\text{en } y = xf(x) + \psi(f(x)).$$

Welke laatste een singuliere integraal is.

Clairault beschouwde nog deze differentiaal-vergelijking:

$$\frac{df(x, y)}{f(x, y)} = \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx.$$

waaraan altijd

$$f(x, y) = 0$$

voldoet, daar

$$df(x, y) = f(x, y)\,\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx \text{ is.}$$

Clairault noemt $f(x, y) = 0$ een singuliere oplossing; dat is echter niet altijd waar, daar deze oplossing ook dikwijls uit de algemeene integraal is af te leiden.

Want de algemeene integraal van dezen vorm is:

$$f(x, y) = ae^{\int \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx}$$

voor $a = 0$ wordt deze

$$f(x, y) = 0.$$

Ook EULER [1]) verkreeg door differentiatie twee integralen van differentiaal-vergelijkingen, die hij anders niet kon oplossen. Hij noemde die mogelijkheid een paradox van de integraalrekening.

Zooals men ziet, zijn de verschillende wiskundigen langs verschillende wegen tot deze singuliere integralen geraakt. Geen van allen trachtte echter deze afwijkingen tot de theorie terug te brengen. De theorie van LAPLACE is als eene eerste poging te beschouwen.

LAPLACE heeft zijne theorie gegeven in een verhandeling onder den titel: *Sur les solutions particulières des équations différentielles* [2]). Hij verdeelde zijn onderzoek in de zes volgende problemen:

1e Te bepalen, zonder dat men de algemeene integraal kent, of een oplossing van de differentiaal-vergelijking $dy = pdx$ al of niet begrepen is, in de algemeene integraal; waarin p een functie is van x, y.

2e Al de singuliere oplossingen te vinden van de differentiaal-vergelijking $dy = pdx$.

3e Te bepalen, zonder dat men de algemeene integraal kent, of een oplossing $\mu = 0$ van de differentiaal-vergelijking $d^2y = pdx^2$ een particuliere integraal is, waarin μ en p functies zijn van x, y en $\frac{dy}{dx}$.

4e Al de singuliere oplossingen te bepalen van de differentiaal-vergelijking $d^2y = pdx^2$.

5e Te bepalen of eene oplossing $\mu = 0$ eene singuliere

1) Exposition de quelques Paradoxes du calcul intégral. Recueil de l'Academie de Berlin, 1756.

2) Mémoire de l'academie des sciences de Paris, 1772.

oplossing is, van de differentiaal-vergelijking met drie veranderlijken $dz = pdx + qdy$.

6e Al de singuliere oplossingen van de vergelijking $dz = pdx + qdy$ te vinden.

Zooals wij zien omvat dit, ten eerste een systematisch onderzoek naar een kenmerk, om de singuliere oplossingen van particuliere integralen te onderscheiden en ten tweede een onderzoek naar alle mogelijke singuliere oplossingen.

Het verband echter, dat er bestaat tusschen de singuliere oplossing en de algemeene integraal schijnt LAPLACE niet opgemerkt te hebben.

Zijne verhandeling heeft ook tevens het gebrek, dat de voorbeelden schaarsch zijn; zoo ergens, dan is het zeker bij singuliere oplossingen noodig veel voorbeelden te geven.

De volmaakste theorie, die gegeven is, is die van LAGRANGE. Deze gaf zijne denkbeelden over singuliere oplossingen het eerst in eene verhandeling onder den titel [1]: *Sur les integrales particulières des équations différentielles*. Deze verhandeling munt boven die van LAPLACE uit door de vele voorbeelden. Hij toont in deze verhandeling voor het eerst het ware verband aan, dat er tusschen de singuliere oplossing en de algemeene integraal bestaat. In eene afzonderlijke verhandeling [2]) heeft hij eenige schoone toepassingen van zijne theorie gegeven.

Eindelijk heeft hij in zijne *Calcul des fonctions* [3]) zijn theorie nog eens uiteengezet. De meetkundige beteekenis laat hij hierbij bijna geheel achterwege.

---

1) Oeuvres de LAGRANGE par Serret. Tom. IV pag. 1.

2) Idem pag. 585.

3) Leçon XIV en volgende.

LAPLACE en LAGRANGE kunnen dus aangemerkt worden als de grondleggers van de theorie der singuliere oplossingen.

Vele schrijvers hebben zich na hen bezig gehouden met de theorie nader te bevestigen. De resultaten van hunne onderzoekingen zijn zooveel mogelijk in de volgende hoofdstukken opgenomen.

HOOFDSTUK II.

Verband tusschen de algemeene integraal en de singuliere oplossing.

§ 1. De algemeene integraal onder de vormen $y = f(x, a)$ en $x = f(y, a)$

α. De verschillende kenmerken ter afleiding van de singuliere oplossingen.

Zij

$$(1) \quad y = f(x, a)$$

de algemeene integraal; a is de willekeurige constante, welke bij de integratie is ingevoerd.

De vraag is, of er ook nog een integraal is, die ook aan de differentiaal-vergelijking voldoet, maar geen particuliere waarde is van de algemeene integraal (1).

Stellen wij, dat deze is:

$$(2) \quad y = \varphi(x).$$

Als er zulk een vorm bestaat, kan deze altijd uit (1) afgeleid worden door a gelijk aan eene bepaalde functie van x te stellen, welke functie door de vergelijking

$$(3) \quad f(x, a) = \varphi(x)$$

bepaald wordt.

Uit (1) verkrijgt men de differentiaal-vergelijking door a uit (1) te substitueeren in de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x, a)}{dx}$$

Uit (2) verkrijgt men de differentiaal-vergelijking door alleen (2) te differentieeren; deze is dus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Beide waarden, die men voor $\frac{dy}{dx}$ vindt, moeten gelijk zijn. De tweede bevat echter alleen x, de eerste x en y; wij moeten dus in de eerste y nog vervangen door $\varphi(x)$, of wat hetzelfde is, a vervangen door de waarde uit vergelijking (3) verkregen. Wij komen hierdoor dus tot het resultaat, dat, wanneer wij $a = \psi(x)$ stellen,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df\{x, \psi(x)\}}{dx}$$

en ook dat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df\{x, \psi(x)\}}{dx} + \frac{df\{x . \psi(x)\}}{d\psi} \frac{d\psi}{dx}$$

en deze kunnen alleen in twee gevallen gelijk zijn;

1^e^ . . . . $\frac{df\{x, \psi(x)\}}{d\psi} = 0$

of als wij voor $\psi(x)$ weder a plaatsen:

$$(4) \quad \frac{df(x, a)}{da} = \frac{dy}{da} = 0,$$

2^e^ als die term onmerkbaar is ten aanzien van $\frac{df\{x, \psi(x)\}}{dx}$ en dit kan niet anders, of deze laatste moet oneindig groot zijn.

In het eerste geval is $\frac{df}{da}$ geheel bepaald, in het tweede alleen maar in zooverre, dat $\psi(x)$ het quotient niet oneindig groot mag maken. In het eerste geval is het quotient $\frac{dy}{dx}$ onbepaald, en kan alle waarden hebben; in het tweede geval is het bepaald en heeft slechts de waarde ∞. Hier zullen wij later op terugkomen bij de meetkundige beteekenis. (zie § 4).

Wanneer de algemeene integraal den vorm

$$x = f(y, a)$$

heeft, komt men tot een analoog resultaat, als men dezen op dezelfde wijze behandelt als den vorigen vorm.

Door middel van de vergelijkingen $\frac{dy}{da} = 0$ $\frac{dx}{da} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \infty$ $\frac{dx}{dy} = \infty$ kunnen wij dus de constante a bepalen, zoodat zij, gesubstitueerd in de algemeene vergelijking, een singuliere integraal geeft.

Een singuliere integraal moet ten minste een van deze vergelijkingen voldoen. Wij noemen daarom deze vergelijkingen de kenmerken der singuliere integralen.

β. *Nader onderzoek van de verschillende kenmerken.*

Wij zullen omtrent de kenmerken, waardoor wij singuliere oplossingen kunnen vinden, deze twee vragen trachten te beantwoorden [1]).

1e. Zullen alle oplossingen, die men verkrijgt, singulier zijn?

2e In hoeverre zijn de oplossingen verkregen met de verschillende kenmerken dezelfde?

Wat de eerste vraag aangaat, een paar voorbeelden zijn voldoende, om te doen zien, dat men met de verkregen kenmerken niet altijd singuliere oplossingen verkrijgt.

---

1) Voor de mogelijkheid van een oplossing te verkrijgen, verwijzen wij naar de meetkundige beteekenis, § 4.

1e Voorbeeld: $y = a(x - a)^2$

Gedifferentieerd ten opzichte van a geeft dit,

$$\frac{dy}{da} = (x - a)(x - 3a)$$

Wij kunnen dus voor a de beide waarden x en $\frac{1}{3}x$ substitueeren, dan verkrijgen wij de beide oplossingen

$$y = 0 \text{ en } y = \frac{4x^3}{2y}.$$

De eerste oplossing kan echter ook verkregen worden door $a = 0$ te stellen, dus is deze als een particuliere integraal te beschouwen.

2e Voorbeeld $y = a^2(x - 3a)$

$$\frac{dy}{da} = 2a(x - 3a) - 3a^2$$

dus $\frac{dy}{da} = 0$ voor $a = \frac{2}{9}x$ en voor $a = 0$; de eerste geeft de singuliere oplossing $y = \frac{4}{243}x^3$, de tweede de particuliere integraal $y = 0$.

Het is dus noodzakelijk aan een verkregen oplossing te kunnen onderzoeken, of zij al dan niet singulier is. Daar het onderzoek alle mogelijke oplossingen geldt, zullen wij dit behandelen na de verschillende vormen, waaronder de algemeene integraal kan voorkomen, te hebben nagegaan. (Zie § 5).

Wat de tweede vraag aangaat, daaromtrent kunnen wij dit vaststellen:

1e De singuliere oplossingen, die voortvloeien uit het kenmerk $\frac{dx}{da} = 0$, moeten ook begrepen zijn onder die, welke voortkomen uit de kenmerken $\frac{dy}{da} = 0$ en $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Wanneer men een zelfde integraal oplost ten opzichte van y en ten opzichte van x, kan men in het eerste geval slechts singuliere oplossingen verkrijgen door de kenmerken $\frac{dy}{da} = 0$ en $\frac{dy}{dx} = \infty$ en in het tweede geval door $\frac{dx}{da} = 0$ en $\frac{dx}{dy} = \infty$. De vergelijkingen $\frac{dy}{da} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \infty$ kunnen alleen maar voldaan worden door functies van a en x of x alleen; en iedere functie van a en x, die bij eliminatie van a een singuliere integraal geeft moet $\frac{dy}{da} = 0$ of $\frac{dy}{dx} = \infty$ voldoen.

Aan de vergelijking $\frac{dx}{da} = 0$ kan voldaan worden of door a gelijk een functie van y te stellen; of door a een constante waarde te geven, of door y een constante waarde te geven. In het eerste geval kan men y tusschen die functie en de algemeene integraal elimineeren. Verdwijnt a nu niet te gelijk met y dan verkrijgt men a als een functie van x. Geeft nu de eerste waarde van a een singuliere integraal, dan zal deze tweede het ook doen, en die moet dus aan de kenmerken $\frac{dy}{da} = 0$ en $\frac{dy}{dx} = \infty$ voldoen. Verdwijnt a te gelijk met y, dan doet ons dit x als een constante kennen en voldoet altijd aan de voorwaarde $\frac{dx}{dy} = 0$ of $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Het tweede geval, als a constant is, kan geen aanleiding geven tot singuliere oplossingen.

In het derde geval als een constante waarde van y $\frac{dx}{da} = 0$ maakt, geeft eene waarde van y, in de algemeene integraal gesubititueerd, a als een functie van x, die, wanneer zij een singuliere integraal geeft, ook weder aan de kenmerken $\frac{dy}{da} = 0$ en $\frac{dy}{dx} = \infty$ moet voldoen.

2e De singuliere oplossingen, die wij verkrijgen door $\frac{dx}{dy} = \infty$, kunnen niet overeenkomen met die van $\frac{dy}{dx} = \infty$, daar $\frac{dx}{dy}$ niet te gelijk nul en oneindig groot kan zijn; de oplossingen, die daar uit voortvloeien, moeten aan de voorwaarde $\frac{dy}{da} = 0$ voldoen.

Immers uit $\frac{dx}{dy} = \infty$ volgt $\frac{dy}{dx} = 0$ of $y =$ een constante waarde, welke waarde van y in de algemeene integraal gesubitueerd, x als een functie van a doet kennen, welke functie, voor het geval dat zij een singuliere integraal geeft, $\frac{dy}{da} = 0$ moet voldoen, daar zij $\frac{dy}{dx} = \infty$ niet kan voldoen

Wij kunnen dus volstaan met de kenmerken $\frac{dy}{da} = 0$ en $\frac{dy}{dx} = \infty$ te onderzoeken, daar zij tevens, die van $\frac{dx}{da} = 0$ en $\frac{dx}{dy} = \infty$ in zich bevatten.

Passen wij het voorgaande op een paar voorbeelden toe. Zij gegeven de algemeene integraal:

$$y = ax + \sqrt{1 - a^2};$$

dan is
$$\frac{dy}{da} = x - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Opgelost ten opzichte van x, verkrijgt men dan:

$$x = \frac{y}{a} - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a};$$

dan is $$\frac{dx}{da} = -\frac{y}{a^2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{a^2} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Het eerste kenmerk geeft $x = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, het tweede $y = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}$; substitueeren wij deze laatste in de algemeene integraal dan verkrijgen wij de eerste. Beide geven de singuliere oplossing

$$y = \sqrt{x+1}.$$

In dit geval komt dus de singuliere oplossing voortkomende uit $\frac{dx}{da} = 0$ overeen met die van $\frac{dy}{da} = 0$.

Zij nog gegeven de algemeene integraal

$$y = a + \sqrt{x}.$$

Hierbij wordt $\frac{dy}{dx}$ ∞ voor $x = 0$; $x = 0$ is een singuliere oplossing; dezelfde oplossing verkrijgen wij wanneer wij x oplossen en ten opzichte van a differentieeren.

Wij vinden dan

$$\frac{dx}{da} = 2(a-y), \text{ dus } \frac{dx}{da} = 0 \text{ geeft } a = y,$$

hetgeen in de algemeene integraal gesubstitueerd ook $x = 0$ geeft.

In dit geval komt dus de singuliere oplossing voortvloeiende uit $\frac{dx}{da} = 0$ overeen met die van $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Boole [1]) merkt ook op, dat de oplossingen van $\frac{dy}{da} = 0$

1) A treatise on diff. equations 3rd edition.

en $\frac{dx}{da} = 0$ niet altijd overeenkomen, zonder ze echter tot de kenmerken $\frac{dy}{dx} = \infty$ en $\frac{dx}{dy} = \infty$ terug te brengen.

Daar de singuliere oplossingen gegeven door $\frac{dx}{dy} = \infty$ ook gevonden worden onder degenen die voortkomen uit $\frac{dy}{dx} = 0$, is het ook voldoende de kenmerken $\frac{dx}{da} = 0$ en $\frac{dy}{da} = 0$ te onderzoeken.

§ 2. De algemeene integraal onder den vorm $F(x, y, a) = 0$.

α. De verschillende kenmerken ter afleiding van singuliere oplossingen.

Terwijl Boole voornamenlijk den vorm $y = f(x, a)$ aanneemt, zoo behandelt Lagrange alleen dezen vorm

$$(6) \quad F(x, y, a) = 0$$

als algemeene integraal.

Uit (6) verkrijgt men de differentiaal-vergelijking door (6) te differentieeren en tusschen het resultaat en (6) a te elimineeren. Zij a uit (6) opgelost $= f(x, y)$, dan is het resultaat van die bewerking

$$(7). \quad \left[\frac{dF(x, y, a)}{dx}\right]_{a = f(x, y)} dx + \left[\frac{dF(x . y . f)}{dy}\right]_{a = f(x, y)} dy = 0.$$

Ten einde (6) in een singuliere vergelijking te veranderen, moet $a = \varphi(x, y)$ gesteld worden en om dan de differentiaal-vergelijking af te leiden, behoeft men alleen te differentieeren. Men verkrijgt dan de vergelijking

$$\frac{dF(x, y, \varphi)}{dx} dx + \frac{dF(x, y, \varphi)}{dy} dy + \frac{dF(x, y, \varphi)}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy\right) = 0.$$

Opdat nu deze vergelijking dezelfde zij als (7) moet $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ zijn, en moet $f(x, y) = \varphi(x, y)$ gesteld worden.

De vergelijking $\frac{dF}{d\varphi} = 0$, bepaalt de functie φ, en door die waarde in (6) voor a te substitueeren stelt men ook werkelijk $\varphi(x, y) = f(x, y)$.

Nemen wij nu a weder voor φ dan bepaalt de vergelijking $\frac{dF}{da} = 0$ de functiën die (6) tot een singuliere oplossing maken.

Wij hebben gemeend de afleiding van de differentiaalvergelijking uit de algemeene integraal en uit de singuliere oplossing in dezen vorm te moeten geven, daar zoo duidelijk uit komt, dat men werkelijk dezelfde differentiaalvergelijking kan krijgen, hoewel men bij de eerste afleiding a elimineert na de differentiatie, en bij de tweede afleiding a gelijk aan een zekere functie stelt.

Boole slaat, wanneer de vergelijking in dezen vorm gegeven is, den volgenden weg in. De singuliere oplossingen moeten aan de voorwaarden $\frac{dy}{da} = 0$ en $\frac{dx}{da} = 0$ voldoen; zoo men x als standvastig beschouwt, is

$$\frac{dy}{da} = -\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Beschouwt men y als onveranderlijk, zoo is:

$$\frac{dx}{da} = -\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dx}},$$

$\frac{dy}{da}$ en $\frac{dx}{da}$ zijn beide nul wanneer $\frac{dF}{da}=0$ is. Men ziet echter, dat aan de voorwaarden ook voldaan wordt, wanneer $\frac{dF}{dx}=\infty$ en $\frac{dF}{dy}=\infty$ is. Het kan dus zijn, dat uit deze twee laatste vergelijkingen ook eene singuliere oplossing voortkomt.

β. Nader onderzoek der verschillende kenmerken.

LAGRANGE neemt alleen het kenmerk $\frac{dF}{da}=0$ aan; daaruit volgt, dat dan de singuliere oplossingen zoowel $\frac{dy}{da}$ als $\frac{dx}{da}=0$ maken en wij zagen in § 1, dat dit niet altijd het geval is.

BOOLE geeft geen acht op de voorwaarden $\frac{dy}{dx}=\infty$ of $\frac{dx}{dy}=\infty$; daar

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}},$$

ziet men dat het oneindig zijn van $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dy}{dx}=\infty$ maakt; terwijl uit $\frac{dF}{dy}=\infty$ volgt $\frac{dx}{dy}=\infty$; alleen wanneer $\frac{dF}{dx}$ en $\frac{dF}{dy}$ beide oneindig zijn heeft $\frac{dy}{dx}$ een onbepaalde waarde.

Het kan zich voordoen, dat men door middel van de gevonden kenmerken functiën vindt, die noch singuliere oplossingen, noch particuliere integralen zijn.

Nemen wij bijv.

$$x+a-\sqrt{[3a(2y-a)]}=0,$$

hiervan vindt men:

$$\frac{dF}{dy} = \frac{3a}{\sqrt{[3a(2y-a)]}},$$

$\frac{dF}{dy}$ wordt dus voor $2y = a$ oneindig groot. Substitueert men deze uitdrukking voor a in de algemeene integraal, dan vindt men:

$$(8) \qquad x + 2y = 0.$$

De differentiaal-vergelijking is,

$$3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y\frac{dy}{dx} + x + 2y = 0.$$

Hieraan voldoet (8) niet.

Catalan [1]) meent, dat de afwijking alleen plaats heeft bij de kenmerken: $\frac{dF}{dy} = \infty$, $\frac{dF}{dx} = \infty$.

Hij voert hier geene gronden voor aan.

Raabe [2]) heeft aangetoond, waar de oorzaak ligt.

Zooals wij gezien hebben is:

$$\frac{dy}{da} = -\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Is nu $\frac{dF}{da} = 0$, dan zal $\frac{dy}{da}$ niet altijd gelijk nul zijn; evenzoo wanneer $\frac{dF}{dy} = \infty$ is. In het eerste geval hangt dit van den noemer in het tweede geval van den teller af.

Onderzoeken wij nu de vergelijking,

$$x + a - \sqrt{[3a(2y-a)]} = 0,$$

dan is

1) Journal de l'Ecole polytechnique, tom. 31.

2) Journal v. Crelle, Band 98.

$$\frac{dF}{da} = 1 - \frac{3(y-a)}{\sqrt{[3a(2y-a)]}}$$

en

$$\frac{dF}{dy} = -\frac{3a}{\sqrt{[3a(2y-a)]}}$$

dus

$$\frac{dy}{da} = \frac{1 - \frac{3(y-a)}{\sqrt{[3a(2y-a)]}}}{-\frac{3a}{\sqrt{[3a(2y-a)]}}}.$$

Men ziet dus, dat voor $2y - a = 0$ zoowel de noemer als de teller oneindig groot worden. $\frac{dy}{da}$ heeft dus voor $a = 2y$, een onbepaalde waarde. Vermenigvuldigt men echter teller en noemer met

$\sqrt{[3a(2y-a)]}$ dan vindt men:

$$(9)\quad \frac{dy}{da} = -\frac{1}{3a}[\sqrt{\{3a(2y-a)\}} - 3(y-a)].$$

Stelt men nu $y = \frac{1}{2}a$ dan vindt men:

$$\frac{dy}{da} = -\frac{1}{2},$$

$2y = a$ kan dus geen singuliere oplossing leveren.

Raabe stelt daarom dezen regel vast:

Iedere vergelijking, die de quotiënten

$$\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}} \text{ en } \frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}}$$

gelijk nul maakt en waaruit a door middel van $F(x, y, a) = 0$ geelimineerd is, voldoet aan de differentiaal-vergelijking; en die vergelijking zal dan tevens een singuliere oplossing zijn van de differentiaal-vergelijking wanneer zij door geen constante waarde van a uit de algemeene integraal kan afgeleid worden.

Ten einde een waarde van a te verkrijgen, die (9) gelijk nul maakt zoude men a uit de vergelijking

$$\sqrt{\{3a(2y-a)\}}-3(y-a)=0$$

kunnen oplossen. Eenvoudiger is het echter de waarde van den wortelvorm in de algemeene integraal te substitueeren dan verkrijgt men:

$$x+a=3(y-a),$$

$$\text{of } a=\frac{1}{4}(3y-x).$$

Substitueert men deze waarde van a in de algemeene integraal dan volgt:

$$3(y+x)-\sqrt{\{3(3y-x)(5y+x)\}}=0 \text{ of}$$

$$x^2+2xy-3y^2=0.$$

Hetgeen een produkt is van de vergelijkingen,

$$x-y=0 \text{ en } 3y+x=0.$$

welke vergelijkingen de differentiaal-vergelijking voldoen en singulier zijn.

Catalan meent, dat, wanneer de vergelijking niet onafhankelijk is van a, wij dan altijd een singuliere oplossing verkrijgen. Dit mist echter allen grond; de volgende vergelijking is noch een voorbeeld van het tegendeel.

$$(a-x+y)^3-3(x+y)(a-x+y)^2+1=0.$$

Hiervan is:

$$\frac{dF}{da}=3(a-x+y)(a-3x-y)$$

$$\frac{dF}{dx}=-6(a-x+y)(a-2x)$$

$$\frac{dF}{dy}=-6(a-x+y)(x+y)$$

dus:

$$\frac{dy}{da} = \frac{3(a - x + y)(a - 3x - y)}{6(a - x + y)(x + y)} \text{ en } \frac{dx}{da} = \frac{3(a - x + y)(a - 3x - y)}{6(a - x + y)(a - 2x)}.$$

Voor $a - x + y = 0$ wordt noch $\frac{dy}{da}$, noch $\frac{dx}{da}$ gelijk nul, terwijl $\frac{dF}{da}$ wel nul wordt. Niettegenstaande wij hier dus een functie hebben, niet onafhankelijk van a, die $\frac{dF}{da} = 0$ maakt, verkrijgen wij geen oplossing van de differentiaal-vergelijking.

Daarentegen geeft $a - 3x - y = 0$ de singuliere oplossing.

Wij kunnen nu het verband tusschen de kenmerken van een vergelijking onder den vorm $y = f(x, a)$ en van de vergelijking onder den vorm $f(x, y, a) = 0$ nader bepalen.

In (β) van § 1 zijn wij tot het besluit gekomen dat het slechts noodig is de kenmerken

$\frac{dy}{da} = 0$ en $\frac{dy}{dx} = \infty$ te onderzoeken.

Nu hebben wij gezien, dat voor de vergelijkingen onder den vorm $F(x, y, a) = 0$ $\frac{dy}{da} = 0$ is, wanneer $\frac{dF}{da} = 0$ is of $\frac{dF}{dy} = \infty$.

Wanneer $\frac{dF}{da} = 0$ is, moet $\frac{dF}{dy}$ niet gelijk nul zijn.

Is echter $\frac{dF}{dy} = 0$ dan is, daar

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}},$$

$\frac{dy}{dx} = \infty$, wanneer $\frac{dF}{dx}$ tevens niet gelijk nul is.

Om dus de singuliere oplossingen volgens dezen weg te bepalen, zoude men alle drie de kenmerken moeten onderzoeken.

$\frac{dy}{da}$ wordt ook gelijk nul wanneer $\frac{dF}{dy} = \infty$, en als dan tevens $\frac{dF}{da}$ niet oneindig groot is.

Het oneindig zijn van $\frac{dF}{dy}$ maakt $\frac{dy}{dx} = 0$ wanneer niet te gelijk $\frac{dF}{dx} = \infty$ is; de oplossingen, die hieruit voortkomen, komen overeen met die $\frac{dx}{dy} = \infty$ maken.

Wij kunnen dus met deze gegevens nagaan, welke oplossingen van de vergelijkingen onder den vorm $F(x, y, a) = 0$ overeenkomen met de oplossingen van de vergelijkingen onder den vorm $y = f(x, a)$.

De algemeene integraal, op welke wijze van de twee ook gegeven, moet dezelfde singuliere oplossingen geven.

γ. *Onderzoek van* Houtain.

Houtain [1]) geeft aan de theorie van Lagrange een uitbreiding; hij neemt er de kenmerken $\frac{dF}{dx} = \infty$ en $\frac{dF}{dy} = \infty$ bij op. Hij brengt de theorie terug tot deze drie stellingen:

1°. Men verkrijgt al de singuliere oplossingen van een differentiaal-vergelijking van de eerste orde met twee veranderlijken door middel van de eliminatie van a tusschen de algemeene integraal en het partieele differentiaal-quo-

1) Des solutions singulières des équations différentielles. 1854. Mémoire couronné. Extrait des annales des universités de Belgique.

tiënt daarvan ten opzichte van de constante, welk differentiaal-quotiënt gelijk nul gesteld is, of tusschen de algemeene integraal en de partieele differentiaal-quotiënten ten opzichte van x en y, welke gelijk oneindig groot gesteld zijn. Uit de vergelijkingen, die men daaruit verkrijgt, neemt men degene, die de differentiaal-vergelijkingen voldoen en niet de algemeene integraal.

2°. Welke ook de vorm van de algemeene integraal is, van een differentiaal-vergelijking van de eerste orde met twee veranderlijken, de toepassing van de kenmerken, om er de singuliere oplossingen uit af te leiden, geeft altijd dezelfde resultaten.

3°. Wanneer de algemeene integraal van eene differentiaal-vergelijking van de eerste orde met twee veranderlijken een algebraïsche [1]) functie is van x en y, kan men haar altijd onder een zoodanigen vorm brengen, dat de singuliere oplossingen van de veranderde algemeene integraal zijn af te leiden, alleen door de eliminatie van de willekeurige constante tusschen de integraal en het partieele differentiaal-quotiënt ten opzichte van de constante, welk quotiënt gelijk nul gesteld is.

Zooals wij zien, omvat de eerste stelling hetgeen wij in (§ 2 α) in het kort ontwikkeld hebben. Bij de beschouwing, die hij aan het einde van het bewijs dezer stelling toevoegt, komt hij langs een eenigszins anderen weg tot dezelfde resultaten als wij in het eind van (§ 2 β) verkrijgen.

De tweede stelling is alleen bewezen met betrek-

1) Onder Algebraïsche functie verstaan wij een functie, waarin met veranderlijke grootheden, die daarin voorkomen niet anders dan algebraïsche bewerkingen gedaan worden.

Onder algebraïsche bewerkingen verstaan wij optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, deelen en machtsverheffing met constante exponenten dus ook worteltrekking.

king tot de drie kenmerken $\frac{dF}{da} = 0$ $\frac{dF}{dy} = \infty$ en $\frac{dF}{dx} = \infty$ het bewijs zullen wij hier mededeelen.

Wij moeten daartoe eerst de afleiding van de kenmerken zooals HOUTAIN die geeft, vermelden.

De algemeene integraal $F(x, y, a) = 0$ geeft gedifferentieerd als a veranderlijk is:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{da} da = 0$$

zoodat

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} - \frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}} \frac{da}{dx}.$$

Opdat dus nu $\frac{dy}{dx}$ hetzelfde blijve moet

$$(10). \ldots . \quad -\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}} = 0 \text{ zijn;}$$

waaraan voldaan kan worden door $\frac{dF}{da} = 0$ of $\frac{dF}{dy} = \infty$.

Op dezelfde wijze vindt men ook $\frac{dF}{dx} = \infty$.

Het voorname doel is dus, dat het quotiënt (10) nul wordt.

Voor de tweede stelling is het noodig aan te toonen, dat het quotiënt (10) niet verandert, hoe men ook $F(x, y, a)$ verandere, als tevens bij die verandering de betrekking tusschen x, y en a dezelfde blijft.

Wij hebben echter ook gevonden (zie § 2, α) dat

$$\frac{dy}{da} = -\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Quotiënt (10) is dus de verhouding tusschen de veranderingen van y en a. Als dus de verhouding tusschen y en a dezelfde blijft, zal de verhouding tusschen de veranderingen ook dezelfde moeten blijven; anders is het eerste niet mogelijk.

Het quotiënt (10) blijft dus constant voor de verschillende vormen en zal dus ook voor dezelfde vergelijkingen nul moeten worden. Maakt dus die vergelijking $\frac{dF}{da}$ niet nul, dan zal $\frac{dF}{dy}$ oneindig groot moeten zijn.

Wat de 3e stelling betreft, daar er ondersteld is, dat de algemeene integraal $F(x, y, a) = 0$ een algebraische functie is, zoo kan men uit deze de noemers en wortelteekens door met een functie van x, y en a te vermenigvuldigen en door machtsverheffing doen verdwijnen. De vergelijkingen $\frac{dF}{dx} = \infty$ en $\frac{dF}{dy} = \infty$ kunnen dan niet meer door eindige termen voldaan worden, er blijft dus alleen de vergelijking $\frac{dF}{da} = 0$ over.

Hierbij moet echter nog aangetoond worden: 1°. dat, wanneer men de algemeene integraal met een functie van x en y vermenigvuldigt, die toch aan de differentiaal-vergelijking blijft voldoen, 2°. dat wanneer men de algemeene integraal tot een macht verheft, die dan ook aan differentiaal-vergelijking blijft voldoen.

Bewijs van het eerste.

Zij $F(x, y, a) = 0$, de algemeene integraal van $f(x, y, p)$. De vergelijking $f = 0$ ontstaat uit de eliminatie van a tusschen de vergelijkingen.

$$F = 0, \text{ en } \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0.$$

Indien men nu de algemeene integraal met een functie $\varphi(x, y, a) = 0$ vermenigvuldigt, moet $\varphi . F = 0$ ook voldoen aan de vergelijking $f = 0$.

De vergelijking $\varphi . F = 0$ gedifferentieerd geeft:

$$\varphi dF + F d\varphi = 0$$

of daar $F = 0$,

$$(11) \dots \quad \varphi dF = 0.$$

Deze vergelijking moet voor alle waarden van φ voldaan worden dus is $\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = 0$, waar uit volgt $a = \psi(x, y, p)$, hetgeen in (11) gesubstitueerd geeft

$$\varphi(x, y, \psi) \times F(x, y, \psi) = 0,$$

het welk de differentiaal-vergelijking is van de oorspronkelijke integraal vermenigvuldigd met een factor.

Bewijs van het tweede.

Onderstellen wij, dat de algemeene integraal den vorm heeft,

$$\varphi_1(x, y, a) - \varphi_2(x, y, a) \sqrt[m]{\varphi_3(x, y, a)} = 0,$$

deze gedifferentieerd geeft.

$$(11)^\alpha \qquad d\varphi_1 - d\varphi_2 \sqrt[m]{\varphi_3} - \varphi_2 \frac{d\varphi_3}{m\sqrt[m]{\varphi_3^{m-1}}} = 0,$$

Verheffen wij de algemeene integraal tot de m-de macht, dan verkrijgt men:

$$(11)^\beta \qquad \varphi_1^m = \varphi_2^m . \varphi_3,$$

welke gedifferentieerd geeft:

$$m\varphi_1^{m-1} d\varphi_1 = m\varphi_2^{m-1} . \varphi_3 d\varphi_2 + \varphi_2^m d\varphi_3,$$

of $(11)^\gamma \; d\varphi_1 - \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^{m-1} \varphi_3 d\varphi_2 - \frac{\varphi_2^m}{m\varphi_1^{m-1}} d\varphi_3 = 0.$

Uit $(11)^\beta$ vindt men echter ook

$$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^{m-1} \varphi_3 = \sqrt[m]{\varphi_3} \quad \text{en} \quad \frac{\varphi_2}{\sqrt[m]{\varphi_3^{m-1}}} = \frac{\varphi_2^m}{\varphi_1^{m-1}},$$

welke in $(11)^\gamma$ gesubstitueerd ook $(11)^\alpha$ geven.

§ 3. De algemeene integraal onder den vorm $F(x, y) = a$.

α. Afleiding van de singuliere oplossing.

Zij dus (12)..... $F(x, y) = a$

de algemeene integraal.

Van deze vergelijking verkrijgt men de differentiaal-vergelijking eenvoudig door te differentieeren. Dus

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = 0.$$

Hetgeen de zoogenaamde exacte differentiaal-vergelijking is. Hieruit vindt men het differentiaal-quotiënt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Geeft men nu a eene veranderlijke waarde, dan moet steeds de waarde van het differentiaal-quotiënt hetzelfde blijven. Beschouwt men a als veranderlijke, dan geeft (12):

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = da,$$

dan is

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} + \frac{da}{dx} \frac{1}{\frac{dF}{dy}}.$$

Opdat dus deze $\frac{dy}{dx}$ gelijk zij aan de eerste, moet, daar $\frac{da}{dx}$ verondersteld is niet gelijk nul te zijn, $\frac{1}{\frac{dF}{dy}} = 0$ zijn of $\frac{dF}{dy} = \infty$.

Evenzoo is $\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dx}} + \frac{da}{dy}\frac{1}{\frac{dF}{dx}}$ en daar

$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dx}}$ moet blijven, moet $\frac{dF}{dy}$ ook $= \infty$ zijn. In het geval dus dat $\frac{dy}{dx}$ onafhankelijk moet blijven, moet zoowel $\frac{dF}{dx}$ als $\frac{dF}{dy}$ oneindig groot worden. Worden zij niet beide te gelijk oneindig groot bijv. alleen $\frac{dF}{dx}$ dan is $\frac{dy}{dx} = \infty$ en verkrijgt men de singuliere oplossingen, die daarmede overeenkomen; is alleen $\frac{dF}{dy} = \infty$ dan is $\frac{dx}{dy} = \infty$.

Men ziet dus dat de kenmerken $\frac{dF}{dx} = \infty$ en $\frac{dF}{dy} = \infty$ wanneer zij afzonderlijk voorkomen, overeenkomen met de kenmerken $\frac{dy}{dx} = \infty$ en $\frac{dx}{dy} = \infty$ van de vergelijking opgelost ten opzichte van x of y. Komen zij echter beide te zamen voor, dan zijn daarin de singuliere oplossingen opgesloten, die men door $\frac{dx}{da} = 0$ en $\frac{dy}{da} = 0$ verkrijgt.

Voorbeeld:

$$\frac{xy + \sqrt{1 + x^2 - y^2}}{1 + x^2} = a$$

gedifferentieerd, geeft dit:

$$\left[\frac{y+\frac{x}{\sqrt{1+x^2-y^2}}}{1+x^2}-\frac{2x(xy+\sqrt{1+x^2-y^2})}{(1+x^2)^2}\right]dx+$$

$$+\left[\frac{x-\frac{y}{\sqrt{1+x^2-y^2}}}{1+x^2}\right]dy=da.$$

Men ziet dus, dat de coëfficienten van dx en van dy beide oneindig groot worden voor $y=\sqrt{1+x^2}$, terwijl de waarde van $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ is, hetgeen afgeleid is uit $y=\sqrt{1+x^2}$, welke vergelijking dus een singuliere oplossing is, daar zij tevens uit de algemeene integraal kan afgeleid worden door $a=\frac{xy}{1+x^2}$ te stellen.

Lossen wij de algemeene integraal ten opzichte van y op, dan is:

$$y=ax+\sqrt{1-a^2}$$

en

$$\frac{dy}{da}=x-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

$\frac{dy}{da}=0$ geeft dus:

$$a=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

hetgeen in de oorspronkelijke vergelijking gesubstitueerd geeft:

$$y=\sqrt{x^2+1}.$$

Zij verder gegeven de algemeene integraal:

$$y+\sqrt{b-x}=a,$$

door differentiatie verkrijgt men

$$dy-\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{b-x}}=da.$$

Hierbij is alleen $\frac{dF}{dx} = \infty$, wanneer $b = x$ is, hetgeen dus ook tevens $\frac{dy}{dx} = \infty$ maakt.

Uit het voorgaande volgt dus, dat de exacte differentiaal-vergelijkingen wel singuliere oplossingen kunnen hebben Het is immers voor een singuliere oplossing niet noodzakelijk, dat de differentiaal-vergelijking dezelfde is, als die van de algemeene integraal. maar wel, dat het differentiaal-quotiënt van de singuliere oplossing gelijk is aan het differentiaal-quotiënt van de algemeene integraal, wanneer hierin de waarde van de singuliere oplossing is ingevoegd.

Het kan nu zijn, dat dan ook tevens de integreerende factor oneindig groot wordt, hoewel dit niet noodzakelijk is.

Bijvoorbeeld de vergelijking:

$$\left[y\sqrt{1+x^2-y^2}+x-\frac{2x(x+\sqrt{1+x^2-y^2})\sqrt{1+x^2-y^2}}{1+x^2}\right]dx+$$
$$+(x\sqrt{1+x^2-y^2})\,dy=0$$

wordt exact, als men met

$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2-y^2}}$ vermenigvuldigt, en deze factor wordt ook voor $\sqrt{1+x^2-y^2}=0$ oneindig groot.

Daarentegen wordt de vergelijking:

$$\left[y+\frac{x}{\sqrt{1+x^2-y^2}}-\frac{2x(x+\sqrt{1+x^2-y^2})}{1+x^2}\right]dx+$$
$$+\left(2-\frac{y}{\sqrt{1+x^2-y^2}}\right)dy=0$$

exact, wanneer men met $\frac{1}{1+x^2}$ vermenigvuldigt. Deze factor wordt niet oneindig groot voor $\sqrt{1+x^2-y^2}=0$.

β. De integreerende factor.

Na het vermelden van het onderzoek van Houtain in (§ 2 γ) zoude het misschien den schijn hebben als of § 3 geheel overbodig is, daar de vergelijking in den vorm $F(x, y) = a$ zeer gemakkelijk als een verwante vorm van $F(x, y, a)$ kan beschouwd worden. Wij hebben echter deze § 3 vooral gegeven, om de verkeerde meening te bestrijden, als zouden de exacte differentiaal-vergelijkingen geen singuliere oplossingen hebben.

Dit wordt nog bevestigd door het volgende voorbeeld. Van de exacte differentiaal-vergelijking

$$dy - \frac{dx}{2\sqrt{x-a}} = 0$$

is de algemeene integraal

$$y - \sqrt{x-a} = c.$$

Hiervan is $x = a$ een singuliere integraal.

Houtain geeft in het tweede deel van zijne verhandeling, waarin hij toepassingen behandelt, eene geheele § over de vorming van den integreerenden factor door middel van singuliere oplossingen.

Hij bewijst daarin de volgende twee stellingen:

1^e^ Iedere singuliere oplossing geeft eene oneindige waarde aan den integreerenden factor.

2^e^ Indien β of $\frac{1}{\beta}$ de integreerende factor is van de vergelijking $P + \frac{1}{Q}\frac{dy}{dx} = 0$, dan zal $\beta = 0$ deze vergelijking voldoen.

Uit deze laatste leidt hij weder de drie volgende af:

1^e^ Indien de factor, die de vergelijking $Pdx + Qdy = 0$ exact maakt, β is, is $\beta = 0$ een particuliere integraal.

2ᵉ Indien $\frac{1}{\beta}$ de factor is, die de vergelijking $Pdx + Qdy = 0$ exact maakt, is $\beta = 0$ een particuliere of een singuliere oplossing, al naarmate de vergelijkingen $\frac{dF}{dx} = \infty$ en $\frac{dF}{dy} = \infty$ voor F een constante of een veranderlijke waarde geven.

Uit deze twee vereenigd volgt:

3ᵉ De particuliere integralen en singuliere oplossingen zijn factoren van den integreerenden factor.

In de tweede van deze drie laatste stellingen is de uitdrukking: al naar mate de vergelijkingen $\frac{dF}{dx} = \infty$ en $\frac{dF}{dy} = \infty$ voor F een constante of veranderlijke waarde geven, niet duidelijk.

Wij hebben daarom getracht uitgaande van de 2ᵉ stelling van HOUTAIN en steunende op hetgeen wij in (§ 3 α) gezegd hebben, het geheele duidelijker voort te stellen.

Wij plaatsen dus voorop de 2ᵉ stelling:

Indien β of $\frac{1}{\beta}$ de integreerende factor is van de vergelijking $P + \frac{1}{Q}\frac{dy}{dx} = 0$ dan zal $\beta = 0$ deze vergelijking voldoen.

Al naar mate β of $\frac{1}{\beta}$ de integreerende factor is, heeft men de voorwaarde voor de integreerbaarheid:

$$\frac{d(\beta P)}{dy} = \frac{d(\beta Q)}{dx}$$

of

$$\frac{d\left(\frac{P}{\beta}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{Q}{\beta}\right)}{dx}$$

Wanneer men de differentiatie uitvoert en de tweede met $-\beta^2$ vermenigvuldigt, verkrijgt men de twee vergelijkingen

$$(13)\left\{\begin{array}{l} P\dfrac{d\beta}{dy}-Q\dfrac{d\beta}{dx}+\beta\left[\dfrac{dP}{dy}-\dfrac{dQ}{dx}\right]=0 \\ \text{en} \\ P\dfrac{d\beta}{dy}-Q\dfrac{d\beta}{dx}-\beta\left[\dfrac{dP}{dy}-\dfrac{dQ}{dx}\right]=0. \end{array}\right.$$

Voor $\beta=0$ worden beide vergelijkingen

$$(14)\ldots\ldots\quad P\frac{d\beta}{dy}-Q\frac{d\beta}{dy}=0.$$

Maar uit $\beta=0$ volgt:

$$\frac{d\beta}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\frac{dy}{dx}=0 \text{ of } \frac{d\beta}{dy}=-\frac{d\beta}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Hetwelk in (14) gesubstitueerd geeft:

$$P\frac{d\beta}{dy}+Q\frac{d\beta}{dy}\frac{dy}{dx}=0$$

of

$$P+Q\frac{dy}{dx}=0.$$

Dus $\beta=0$ voldoet de differentiaal-vergelijking.

Dit bewijs is van EULER, hij maakte daarbij de opmerking, dat wanneer β de integreerende factor is en $\beta=0$ P of Q oneindig maakt, dat dan de vergelijking (13) zich niet vereenvoudigt tot (14), daar dan ook $\frac{dP}{dy}=\infty$ is en dus $\beta\frac{dP}{dy}$ onbepaald.

JEAN TREMBLEY [1]) heeft echter opgemerkt, dat men die zwarigheid kan vermijden door de differentiaal-vergelijking zoodanig te veranderen, dat P en Q geen noemers hebben.

1) Mém. de l'Ac. des sc. de Turin 1790—91.

EULER maakte ook zwarigheid voor het geval, dat $\beta = 0$, P of Q deed verdwijnen, en $\frac{1}{\beta}$ de integreerende factor is. TREMBLEY heeft echter opgemerkt, dat, wanneer bijv. $P = 0$ is tengevolge van $\beta = 0$, alsdan wel (13) overgaat in

$$Q \frac{d\beta}{dx} = 0,$$

maar dat ook tevens daar Q niet nul is,

$$\frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Dus de vergelijking $\beta = 0$ geeft y = een constante of $\frac{dy}{dx} = o$; aan de differentiaal-vergelijking wordt dan toch voldaan.

Daarentegen is het wel een uitzondering het geval, dat β van den vorm e^u is, waarin u eene functie is zonder noemer; deze factor in de voorwaarde van integreerbaarheid gebracht, geeft

$$P \frac{du}{dy} - Q \frac{du}{dx} + \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = 0$$

Welke vergelijking niet met (13) overeenkomt.

Wanneer men dus P en Q zonder noemers maakt, is de stelling van EULER juist voor algebraische functies.

Hetgeen uit deze stelling volgt, is dus ook alleen maar zeker voor die functies.

Wij hebben nu gezien in (§ 3. α), dat voor singuliere oplossingen $\frac{dF}{dx}$ of $\frac{dF}{dy}$ of beide oneindig groot moeten worden.

Onderstellen wij dus nu, dat in de differentiaal-vergelijking de noemers zijn weggemaakt en zij $\mu = o$ een singuliere oplossing, dan moet deze bijvoorbeeld $\frac{dF}{dx}$ oneindig groot maken en de differentiaal-vergelijking voldoen.

Daar $\frac{dF}{dx} = P\beta$ of $\frac{P}{\beta}$ is, zoo zal, daar P niet oneindig wordt, β of $\frac{1}{\beta}$ oneindig moeten zijn. Wij kunnen dus vaststellen voor algebraïsche functies, dat wanneer de differentiaal vergelijking geheele vormen tot coëfficienten heeft, de singuliere oplossing den integreerenden factor oneindig groot moet maken.

Daar $\beta = o$ de vergelijking voldoet, moet als β de integreerende factor is, β een particuliere integraal zijn.

Omtrent $\frac{1}{\beta}$ is niets met zekerheid te bepalen, of het een particuliere dan wel een singuliere oplossing is.

§ 4. Meetkundige beteekenis.

α. Meetkundige beteekenis van de singuliere oplossing.

Zij $y = f(x, a)$ de vergelijking van een te beschouwen kromme lijn. Laten wij de constante a veranderen, dan verkrijgt men een reeks van gelijksoortige kromme lijnen, die elkaar achtereenvolgens snijden. Voor twee naast elkander gelegen kromme lijnen, zijn voor een zelfde abscis de ordinaten y en $y + \frac{dy}{da} da$. In het snijpunt van die twee krommen moet dus $\frac{dy}{da} = 0$ zijn. Elimineeren wij nu a tusschen $\frac{dy}{da} = 0$, en de vergelijking der kromme, dan verkrijgen wij een vergelijking voor de meetkundige plaats der punten waar de verschillende krommen elkaar achtereenvolgens snijden. Volgens hetgeen wij in § 1 behandeld hebben, zal deze kromme lijn ook de singuliere oplossing voorstellen van de differentiaalvergelijking, waarvan $y = f(x, a)$ de algemeene integraal is. De singuliere oplossing en de algemeene integraal hebben een zelfde differentiaal-quotiënt; de eene en de andere kromme lijn hebben in dat snijpunt dus een zelfde raaklijn.

De differentiaal-vergelijking van een dusdanige vergelijking verbindt dus ten eerste eene oneindige reeks van krommen van dezelfde familie, die niet verschillen dan in de waarde der constante, ten tweede een kromme, die al de eerste krommen raakt, enveloppe genaamd; men kan dus die verschillende krommen beschouwen als eene enkele kromme met een oneindig aantal takken, die onderling verbonden zijn door dezelfde vergelijking. Dus in ieder punt van de rakende kromme zijn twee takken die dezelfde raaklijn hebben, de eene, dat is de rakende kromme zelf, de andere de kromme, die zij in dat punt raakt.

Wij hebben in 't algemeen aangenomen, dat die snijpunten een kromme lijn vormen. Wij zullen nu de gevallen, die kunnen voorkomen, eenigszins nader beschouwen.

De plaats van die punten hangt samen met de eliminatie van a tusschen $y = f(x, a)$ en $\frac{dy}{da} = 0$. Wij kunnen hierbij twee gevallen onderscheiden: de eliminatie kan plaats hebben of kan niet plaats hebben.

Die eliminatie kan plaats hebben, wanneer a als een functie van x uit $\frac{dy}{da} = a$ is op te lossen, en dus gesubstitueerd kan worden in de algemeene integraal. In dit geval hebben wij eene rij van punten, die eene singuliere oplossing voorstellen, indien deze niet met een particuliere integraal samenvalt.

In het tweede geval wordt $\frac{dy}{da}$ of door een constante waarde van a of x gelijk nul, of $\frac{dy}{da}$ kan in het geheel niet gelijk nul zijn. In dit geval zijn er enkele snijpunten of in het geheel geene.

Voor het eerste geval zij gegeven:

$$y = ax + \sqrt{1 - a^2};$$

hier is

$$\frac{dy}{da} = x - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}};$$

waarvan wij de singuliere oplossing vinden:

$$y = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Voor het tweede geval kunnen wij ten eerste dit algemeene voorbeeld geven:

$$y = af(x);$$

hierbij is $\frac{dy}{da} = f(x)$. Substitueeren wij in de algemeene integraal $f(x) = 0$, dan krijgen wij:

$$y = 0.$$

Wij zien dus, dat de vergelijking $y = af(x)$ van a onafhankelijk is voor de punten $(y = 0\ x = x_1)$ $(y = 0\ x = x_2)$ enz. waarbij x_1, x_2 enz. de wortels zijn der vergelijking $f(x) = 0$; al de krommen dus, die men door $y = af(x)$ kan voorstellen, snijden elkaar in die punten.

Zij verder gegeven:

$$y = a^2 f(x);$$

hierbij is $\frac{dy}{da} = 2af(x)$.

Voor $a = 0$ is $\frac{dy}{da} = 0$ en ook voor alle wortels van $f(x) = 0$. De abscisas is dus een particuliere integraal.

Zij verder nog gegeven:

$$y = f(x) + a;$$

hierbij is

$$\frac{dy}{da} = 1.$$

Hier is het dus niet mogelijk, dat $\frac{dy}{da} = 0$ is, en er is dus voor deze kromme langs dezen weg geen enveloppe te vinden.

Ten einde alle singuliere oplossingen te vinden, zouden wij ook nog moeten onderzoeken, of $\frac{dx}{da} = 0$ geene nieuwe kromme lijnen gaf; wij zullen echter, daar het ook voldoende is, $\frac{dy}{dx} = \infty$ onderzoeken.

De vergelijking $\frac{dy}{dx} = \infty$ heeft plaats, wanneer die vergelijking een lijn voorstelt, die evenwijdig loopt met de y-as. Wij zullen dit rechtlijnige enveloppen noemen. In het algemeen wordt op dit kenmerk veel te weinig acht geslagen.

Gaan wij nu na, of wij in de vergelijkingen, waar wij geen singuliere oplossingen vonden, ze nu wel kunnen vinden.

Ten eerste:

$$y = af(x),$$

dit geeft:

$$\frac{dy}{dx} = af^1(x);$$

ten tweede:

$$y = a^2f(x);$$

dit geeft:

$$\frac{dy}{dx} = a^2f^1(x);$$

ten derde:

$$y = f(x) + a;$$

dit geeft:

$$\frac{dy}{dx} = f^1(x).$$

De wortels van de vergelijking $\frac{1}{f^1(x)} = 0$ maken in alle drie de gevallen $\frac{dy}{dx} = \infty$. Dit zal daarom echter niet altijd aanleiding geven tot de rechtlijnige enveloppen. Nemen wij bijv. de vergelijking:

$$y = a\sqrt{1 + x};$$

hierin is:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{1 + x}}.$$

Voor $x = -1$ wordt $\frac{dy}{dx} = \infty$, maar wij zien ook dat y dan nul is; dus hoe men a ook laat veranderen, altijd is $\frac{dy}{dx}$ alleen maar oneindig in het punt ($x = -1$, $y = 0$.)

Zoo wordt van de vergelijking

$$y = \sqrt{1 + x} + a,$$

wanneer $x = -1$ is, $\frac{dy}{dx} = \infty$ en $y = a$; dan is dus voor alle waarden van a, als men deze van $-\infty$ tot $+\infty$ laat veranderen, het punt waarin $\frac{dy}{dx} = \infty$ wordt op de lijn $x = -1$ gelegen. In dit geval verkrijgen wij dus wel zulk een rechtlijnige enveloppe, een enveloppe namenlijk van de parabolen voorgesteld door de algemeene integraal.

Stellen wij echter in de algemeene integraal $a = f(x)$, dan zien wij, dat voor $x = -1$ $f(x)$ een bepaalde waarde verlangt en dat aan het punt $\{x = -1, y = f(-1)\}$ de plaats is, waar $\frac{dy}{dx} = \infty$ wordt.

Al de krommen dus, die door

$$y = \sqrt{1 + x} + f(x),$$

worden voorgesteld, zullen op de lijn $x = -1$ een punt hebben, waarvoor $\frac{dy}{dx}$ oneindig groot is.

In dit geval is dus $x = -1$ geen enveloppe, maar een raaklijn, die een reeks krommen van verschillende soorten raakt.

Een algemeene regel, wanneer $\frac{dy}{dx} = \infty$ aanleiding geeft tot een rechtlijnige enveloppe, is niet te geven. Uit den eersten vorm

$$y = af(x),$$

is wel te besluiten, dat, wanneer het oneindig worden van $f'(x)$ samengaat met het nul worden van $f(x)$, er dan niet zulk een enveloppe ontstaat.

Zooals wij gezien hebben, geeft het kenmerk $\frac{dy}{dx} = \infty$ slechts aanleiding tot rechtlijnige enveloppen. Het differentiaal-quotiënt is dus voor die oplossingen constant. Laten wij de coördinaat-assen draaien, dan maakt de lijn, die de singuliere oplossing voorstelt, met de abscis-as geen rechten hoek meer, maar een hoek gelijk aan het complement van den draaiings-hoek; noemen wij de nieuwe coördinaten y' en x', dan is voor de rechtlijnige enveloppe

$$\frac{dy'}{dx'} = \text{cotg. } \alpha,$$

als α de draaiingshoek is van de assen.

Nemen wij bijv. de vergelijking:

$$y = \sqrt{x - b} + a;$$

$x = b$ is de vergelijking van zulk een rechtlijnige enveloppe van de kromme lijnen door de eerste voorgesteld. Laten wij nu de coördinaat-assen draaien; noemen wij den sinus van den draaiingshoek α en den cosinus β, dan is

$$y = x'\alpha + y'\beta \quad \text{en} \quad x = x'\beta - y'\alpha;$$

de vergelijking wordt dus (de accenten zijn verder weggelaten):

$$x\alpha + y\beta = \sqrt{x\beta - y\alpha - b} + a;$$

lost men hier y uit op, dan vindt men:

$$y = -\frac{1}{2\beta^2}[\alpha - 2a\beta + 2x\alpha\beta \mp$$
$$\mp \sqrt{(\alpha^2 - 4a\alpha\beta + 4x\beta - 4b\beta^2)}];$$

beschouwen wij hierin a ook als variabel, dan is

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\beta^2}\left[\alpha\beta \mp \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - 4a\alpha\beta + 4x\beta - 4b\beta^2)}} - \right.$$
$$\left. - \left(\beta \mp \frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 - 4a\alpha\beta + 4x\beta - 4b\beta^2)}}\right)\frac{da}{dx}\right].$$

Stellen wij hierin $a = \dfrac{x - b\beta}{\alpha}$ dan wordt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Men ziet dus, dat het oneindig worden van $\dfrac{dy}{dx}$, hetgeen deze soort van singuliere oplossingen geeft, niets anders is dan een bijzonder geval van de rechte lijnen, die men verkrijgt door $\dfrac{dy}{dx}$ een bepaalde waarde te geven.

Dit volgt ook daaruit, dat die enveloppe, van $\dfrac{dy}{dx} = \alpha$, ontstaan doordat men de krommen evenwijdig aan de y-as laat bewegen; maar men kan ze ook langs iedere willekeurige rechte lijn laten bewegen.

β. *Meetkundige beteekenis van de kenmerken. Theorie van* TIMMERMANS.

HOUTAIN behandelt de meetkundige beteekenis van de vergelijking in den vorm $F(x, y, a) = 0$. Hij voegt daar nog aan toe de beteekenis van de vergelijkingen

$\frac{dF}{da}=0$ $\frac{dF}{dx}=\infty$, $\frac{dF}{dy}=\infty$. Dit laatste zullen wij hier overnemen, daar het een bevestiging is van hetgeen wij vroeger behandelden en wij tevens eene bedenking tegen de bewering van Houtain kunnen mededeelen.

Indien vergelijking $F(x, y, a) = 0$ een algebraïsche is, dan is $\frac{dF}{da}=0$ een kenmerk om de gelijke waarden te vinden van de oplossingen der vergelijking $F = 0$, het zij, dat deze oplossingen singuliere of particuliere integralen zijn.

$\frac{dF}{dy}=\infty$ bepaalt de waarde van a, die voor een zelfde x, y een maximum of minimum doet worden; evenzoo bepaalt $\frac{dF}{dx}=\infty$ de waarde van a, die voor een zelfde y, x een maximum of een minimum doet worden.

Deze meening van Houtain steunt hierop. Wij vonden namelijk zie (§ 2, γ):

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}-\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{dy}}\frac{da}{dx};$$

$\frac{dF}{dy}=\infty$ maakt dus $\frac{dy}{dx}=0$, de voorwaarde voor een mogelijk maximum van y. Evenzoo ook wordt $\frac{dx}{dy}=0$, voor $\frac{dF}{dx}=\infty$; wanneer dan echter in het eerste geval niet tevens $\frac{dF}{dx}=\infty$ is, en in het tweede geval $\frac{dF}{dy}=\infty$.

Wij hebben echter gezien, dat, wanneer slechts éen van beide oneindig groot is, wij rechtlijnige enveloppen hebben. Dan is dus y eigenlijk geen maximum.

Voor de niet rechtlijnige enveloppen moeten beide te gelijk oneindig groot zijn, daar $\frac{dy}{dx}$ onbepaald moet zijn.

Op de meetkundige beteekenis van $\frac{dF}{da}$ zooals Houtain die gegeven heeft, steunt de theorie van Timmermans [1]).

Zij $F(x, y, a) = 0$ de algemeene integraal van de differentiaal-vergelijking $f(x, y, p) = 0$. Wij onderstellen, dat de vorm der integraal algebraïsch is, en geen wortels en noemers bevat, en dat μ de hoogste macht van a is, die er in voorkomt. Men kan dan de integraal onder den volgenden vorm brengen:

$$(a - a_1)(a - a_2)(a - a_3) \ldots\ldots (a - a_\mu) = 0,$$

waarin $a_1 \ldots\ldots a_\mu$ de wortels van de vergelijking voorstellen. Wanneer men de vergelijking $F = 0$ vereenigt met de vergelijking $\frac{dF}{da}$, drukt men de gelijkheid van meerdere wortels van a uit. Zij komen dus vereenigd overeen met de vergelijking $a_i = a_k$, waarin men i en k door $1, 2, 3 \ldots \mu$ achtereenvolgens kan vervangen, en de vergelijking $a_i = a_k$ is die van de snijpunten der krommen $a - a_i = 0$ en $a - a_k = 0$, waarin a gelijk is.

De vergelijking dus, ontstaan door de eliminatie van a tusschen $F = 0$ en $\frac{dF}{da} = 0$, behoort aan de snijpunten der integralen:

$$a - a_1 = 0,\ a - a_2 = 0 \ \ldots\ldots\ a - a_\mu = 0.$$

Als de verschillende wortels rationeel zijn, stellen zij

---

1) Mémoire de l'académie des sciences de Bruxelles. 1842.

verschillende soorten van krommen voor; daar wij echter reeds gevonden hebben, dat de singuliere oplossingen door een vergelijking moeten verbonden worden, kunnen deze alleen voorkomen, als er wortelvormen zijn, en deze wijzen aan, dat de verschillende krommen door een vergelijking verbonden zijn.

Die vormen onder het wortelteeken gelijk nul gesteld, stellen een kromme voor, die de opeenvolgende snijpunten bepaalt, van de twee krommen $a - a_i = 0$ en $a - a_k$. Men kan echter een wortel doen verdwijnen zoowel door de functie φ er binnen, gelijk nul te stellen, als door een factor ψ er buiten gelijk nul te stellen. Men kan dus de vergelijking $a_i = a_k$ vervangen door $\varphi = 0$ en $\psi = 0$. Voldoen nu ook de vergelijkingen $\varphi = 0$ en $\psi = 0$ aan de differentiaal-vergelijking, dan zijn de vergelijkingen singuliere oplossingen of particuliere integralen, wanneer zij de algemeene integraal niet of wel voldoen. Daar de vergelijking $\frac{dF}{da} = 0$ al de vergelijkingen $a_i - a_k$ in zich bevat, kan men den volgenden regel vaststellen:

Ten einde de singuliere oplossingen te verkrijgen van een differentiaal-vergelijking van de eerste orde met twee veranderlijken, waarvan de algemeene integraal een algebraïsche functie is, moet men deze integraal ten opzichte van de constante oplossen. Indien de waarde van a geen wortel bevat, zal er geen singuliere oplossing zijn; is er wel een wortel, dan moet men de functies, die onder de verschillende wortels staan, gelijk nul stellen, of ook de functies, die door die wortels vermenigvuldigd worden; en indien deze vergelijkingen de differentiaal-vergelijking voldoen en niet de algemeene integraal, dan is dit een singuliere oplossing.

Voorbeeld:

Van de differentiaal-vergelijking

$$\frac{2}{\sqrt{y-x}}\frac{dy}{dx}+1\pm\sqrt{1+\frac{4\sqrt{y-x}}{x-m}}=o$$

is de algemeene integraal

$$a\sqrt{x-m}+\sqrt{y-n}-a^2=o.$$

Deze opgelost ten opzichte van a, geeft:

$$a=\tfrac{1}{2}[\sqrt{(x-m)}\pm\sqrt{x-m+\sqrt{y-n}}]=0.$$

Hieruit vindt men de drie singuliere oplossingen.

$$x-m+4\sqrt{y-n},$$
$$x-m=0,$$
$$y-n=0.$$

§ 5. Criterium voor de singuliere oplossingen.

α. Wanneer de algemeene integraal bekend is.

Wanneer men de algemeene integraal kent, kan men dezen regel geven:

Ten einde te bepalen, of een integraal een singuliere oplossing of een particuliere integraal is, moet men een van de veranderlijken x of y tusschen de verkregen integraal en de algemeene integraal elimineeren. Indien men de andere veranderlijke van de dan verkregen vergelijking kan doen verdwijnen door aan de constante een bepaalde waarde te geven, dan is de verkregen oplossing een particuliere integraal; indien men dit echter niet kan, een singuliere oplossing.

Voorbeeld:

Van de differentiaal-vergelijking:

$$(x^2-y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4xy\frac{dy}{dx}-x^2=0,$$

is de algemeene integraal:

$$y^2 - 2ay + x^2 - a^2 = 0.$$

Aan de vergelijking voldoen:

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ en } x^2 + 2y^3 = 0.$$

Elimineert men tusschen beide en de algemeene integraal x, dan verkrijgt men de vergelijkingen:

$$2ay + a^2 = 0 \text{ en } 2ay + y^2 + a^2 = 0;$$

de eerste wordt door $a = 0$ voldaan, de tweede door geen één waarde van a. Ten einde zeker te bepalen, dat geen waarde van a voldoet, kan men dit nog opmerken. Wanneer de eene veranderlijke bijv. x geelimineerd is, krijgt men in het algemeen een functie van dezen vorm:

$$y\, f(y\,, a) + \varphi(a) = 0;$$

daar wij y onbepaald moeten laten, moeten $\varphi(a)$ en $f(y\,, a)$ afzonderlijk nul worden, of de wortels van $\varphi(a) = 0$ moeten $f(y\,, a)$ nul maken, anders is het niet mogelijk, dat elke waarde van a beide nul maakt.

Bij enkele gevallen volgt de beslissing spoediger; 1e indien $\frac{dF}{da} = 0$ van de algemeene integraal $F(x, y, a) = 0$ aan a een constante waarde geeft.

2e Indien a slechts in den eersten graad voorkomt in $F(x\,, y\,, a) = 0$; zij komt dan niet voor in $\frac{dF}{da} = 0$, welke vorm dan slechts uit x en y bestaat; in dit geval is $\frac{dF}{da} = 0$ een particuliere integraal. Immers heeft het substitueeren van $a = 0$ of van de verkregen functie van x en y in de algemeene integraal hetzelfde resultaat.

Deze laatste opmerkingen zijn van Houtain; zij komen overeen met hetgeen wij in § 4 gegeven hebben. Wanneer de algemeene integraal bekend is, heeft Houtain uit de theorie van Timmermans nog eene andere methode afgeleid, om singuliere oplossingen te herkennen. Wij zullen die hier achterwege laten, daar zij alleen voor algebraïsche functies van toepassing is en de methode boven gegeven van algemeene strekking is. Bovendien is de redeneering geheel overeenkomstig hetgeen wij later geven (zie II. III. § 3). Hier volgt alleen kort het resultaat.

De regel van Timmermans (zie § 4 β) onderstelt twee gevallen, dat de functie onder den wortel zelf en de functies, die met den wortel vermenigvuldigd zijn, gelijk nul gesteld, de differentiaal vergelijking voldoen. Namenlijk $\psi = 0$ en $\varphi = 0$.

Hij toont nu aan, dat de vergelijkingen $\psi = 0$ slechts particuliere integralen kunnen zijn, terwijl de vergelijkingen $\varphi = 0$ de singuliere oplossingen moeten bevatten.

β. *Wanneer de algemeene integraal niet bekend is.*

Voordat wij tot de beschouwing van de verschillende methoden, die men gevolgd heeft, overgaan, dienen wij op te merken, dat die beschouwing in twee deelen verdeeld is, waarvan het eerste deel handelt over dat criterium, dat geheel onafhankelijk is van de wijze, waarop men die oplossingen heeft gevonden en waarbij de herkenning geheel steunt op het verschil, dat er bestaat tusschen de singuliere oplossing en de algemeene oplossing. Dit hebben wij hier gegeven; het tweede deel kan eerst behandeld worden in het volgende hoofdstuk, wijl daarbij de kennis van de afleiding der singuliere oplossingen uit de differentiaal-vergelijkingen vereischt wordt.

Zooals uit het eerste Hoofdstuk blijkt, heeft Laplace zich voornamelijk met het eerste deel bezig gehouden. Drie van de zes problemen, waarover hij in zijne mémoire handelt, zijn ter herkenning van gevonden oplossingen. Wij zullen hier kort de methode van LAPLACE uiteenzetten.

Wanneer men een particuliere integraal door een kromme lijn voorstelt en de gegeven oplossing $\mu = 0$ evenzoo, dan kan men de eerste kromme lijn zoo bepalen, dat zij de tweede in een bepaald punt snijdt. Is $\mu = 0$ nu een particuliere integraal, dan moeten de twee kromme lijnen geheel samenvallen; vallen de twee kromme lijnen dus niet samen, dan is het geen particuliere integraal, maar een singuliere oplossing.

Zijn y' en Y' de ordinaten van de beide kromme lijnen voor de abscis $x + \alpha$, terwijl x en y de coördinaten van het snijpunt zijn, dan is:

$$y' = y + \alpha \frac{\delta y}{dx} + \frac{\alpha^2}{1\,.\,2} \frac{\delta^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha^3}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{\delta^3 y}{dx^3} + \ldots\ldots$$

$$Y' = y + \alpha \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha^2}{1\,.\,2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha^3}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{d^3 y}{dx^3} + \ldots\ldots$$

Voor het geval dus, dat $\mu = 0$ eene particuliere integraal is, moet steeds $y' = Y'$ zijn, waaruit de volgende voorwaarden volgen:

$$\frac{\delta y}{dx} = \frac{dy}{dx}, \; \frac{\delta^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \; \frac{\delta^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ enz.}$$

Zij gegeven de vergelijking:

$$y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + (1 + x^2) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1,$$

of

$$(15) \ldots\ldots\ldots \frac{dy}{dx} = \frac{xy \pm \sqrt{1 + x^2 - y^2}}{1 + x^2}.$$

Hiervan is de algemeene integraal $y = ax + \sqrt{1 - a^2}$.

Ook voldoen de vergelijkingen:

$$y - x = 0 \text{ en } y = \sqrt{x^2 + 1}.$$

De eerste verkrijgt men door $a = 1$ te stellen, de tweede door $a = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ te stellen.

Wanneer men (15) differentieert, verkrijgt men:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

De eerste vergelijking $y - x = 0$ geeft ook $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

en de tweede $y = \sqrt{x^2+1}$ geeft:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Men ziet dus, dat de differentiaal-quotiënten van de eerste altijd met die van de differentiaal-vergelijking zullen samenvallen, terwijl de tweede bij het tweede differentiaal-quotiënt reeds afwijkt.

De eerste is dus een particuliere integraal, de tweede een singuliere oplossing.

Zij nog gegeven:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy^{\frac{1}{2}}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4y^{\frac{3}{2}} = 0$$

of

$$(16) \ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x^2y - 4y^{\frac{3}{2}}},$$

De algemeene integraal hiervan is $y = a^2(x-a)^2$; ook voldoen de vergelijkingen $y = (x-1)^2$ en $y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}$.

De eerste verkrijgt men door $a = 1$, de tweede door $a = \frac{x}{2}$ te stellen.

Wanneer men (16) differentieert, zoo komt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2y^2 + x^2 - \frac{x^3y^{\frac{1}{2}} - 4xy}{\sqrt{x^2y - 4y^{\frac{3}{2}}}}.$$

Substitueert men hierin $y = (x - 1)^2$ dan wordt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2;$$

hetgeen overeenkomt met het tweede differentiaal-quotiënt van $y = (x - 1)^2$. Ten einde nu zeker te kunnen besluiten, of $y = (x - 1)^2$ een particuliere integraal is, moet men ook nog de hoogere differentiaal-quotiënten van (16) onderzoeken; het geval kan zich dus voordoen, dat men nooit met zekerheid kan zeggen, van welke soort een integraal is. Substitueert men $y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}$ dan verkrijgt men:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4}x^2 - \frac{0}{0}.$$

De waarde van de onbepaalde breuk blijkt nul te zijn; dus is

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4}x^2,$$

hetgeen overeenkomt met het tweede differentiaal-quotiënt van $y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}$. Deze vergelijking is een singuliere oplossing, om dit echter op deze wijze aan te toonen, zoude men nog verder moeten differentieeren.

Ten einde de onzekerheid van deze methode te vermijden, zoekt Laplace, steunende op het behandelde kenmerk eene andere eigenschap van de singuliere oplossingen.

Hij gaat daarbij van de onderstelling uit, dat $y = 0$ een integraal is. Wanneer dit het geval is, moeten ν', ν', ν'', enz. $= 0$ zijn (ν ν' ν'' zijn de differentiaal-quotiënten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ enz. afgeleid uit de integraal, hier $y = 0$ en door p p', p'', p''' enz. stellen wij dezelfde differentiaal quotiënten voor, maar afgeleid uit de differentiaal-vergelijking.)

Onderstellen wij nu, dat p ontwikkeld is, volgens de opklimmende positieve machten van y dus

$$(17)\ldots\ldots\quad p = fy^n + f'y^{n'} + f''y^{n''} \text{ enz.}$$

f, f', f'' zijn functies van x.

Differentieert men (17) dan heeft men:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\left[nfy^{n-1} + n'f'y^{n'-1} + \text{ enz.}\right] + y^n\frac{df}{dx} + y^{n'}\frac{df'}{dx} + \text{ enz.}$$

Substitueert men hierin voor $\frac{dy}{dx}$ zijn waarde dan heeft men:

$$p' = nf^2y^{2n-1} + (n+n')ff'y^{n+n'-1} + \text{enz.} + y^n\frac{df'}{dx} + y^{n'}\frac{df'}{dx} + \text{enz.}$$

Op dezelfde wijze vindt men:

$$p'' = n(2n-1)f^3y^{3n-2} + \text{ enz.}$$

en zoo ook de volgende differentiaal-quotiënten. Deze quotiënten kunnen dus gelijk nul zijn, wanneer n gelijk aan of grooter dan 1 is, $y = 0$ is dan een particuliere integraal; is dit niet het geval, dan hebben wij met eene singuliere oplossing te doen, daar dan de hoogere differentiaal-quotiënten uiteenloopen.

Tot dit bijzondere geval dat $y = 0$ eene oplossing is, brengt hij nu het algemeene geval, $\mu = 0$ terug. Hetgeen, eenigszins gewijzigd, hierop neêrkomt.

Wanneer $\mu = 0$ eene oplossing is, kan men tusschen de differentiaal-vergelijking en $\mu = 0$, y elimineeren, zoodat de vergelijking van den vorm $\frac{d\mu}{dx} = f(x, \mu)$ wordt.

Ontwikkelt men nu $f(x, \mu)$ volgens de opklimmende positieve machten van μ, zoodat:

$$(18)\ldots\ldots\quad \frac{d\mu}{dx} = \mu^n l + \mu^{n'} l' + \text{enz.},$$

waarbij l, l'.... functies zijn van x, dan komt men, evenals bij het vorige onderzoek naar $y = 0$, tot het besluit, dat $\mu = 0$ een singuliere oplossing is, als $n < 1$ en een particuliere als $n > 1$ is. Want, wanneer men (18) differentieert, ziet men, dat $\dfrac{d\dfrac{d\mu}{dx}}{dx} \infty$ wordt, wanneer $n < 1$, en 0, wanneer $n > 1$ is.

Daar

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{d\mu}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{d\mu}{dy},$$

moet, wanneer $\mu = 0$ een singuliere oplossing is, het differentiaal quotiënt ten opzichte van x, van

$$\frac{d\mu}{dx} + p\frac{d\mu}{dy} = \infty \text{ zijn},$$

of

$$(19) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{\dfrac{d^2\mu}{dx^2} + p\dfrac{d^2\mu}{dy^2} + \dfrac{dp}{dx}\dfrac{d\mu}{dy}} = 0.$$

Bijvoorbeeld:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ny + \sqrt{1 + x^2 - y^2}}{1 + x^2}.$$

Stellen wij hierin $\mu = \sqrt{x^2 + 1}$ dan verkrijgt men:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{x\mu + \mu^{\frac{1}{2}}\sqrt{1 - \mu - \sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}.$$

Hierin is $\frac{1}{2}$ de laagste exponent van μ; de vergelijking $y - \sqrt{x^2 + 1} = 0$ is dus een singuliere oplossing.

Stellen wij echter $\mu = y - x$, dan is

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{x\mu - 1 + \sqrt{1 - \mu^2 - 2\mu x}}{1 + x^2}.$$

Ontwikkelen wij den wortelvorm, dan is

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{x\mu - x\mu - \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{3}{4}\mu^2 x^2 \text{ enz.}}{1 + x^2}$$

De laagste macht van μ is > 1, dus is $y - x = 0$ eene particuliere integraal.

Substitueeren wij ook de verschillende waarden van μ in (19), dan vinden wij voor de eerste vergelijking, dat de noemer oneindig groot wordt, dus de breuk $= 0$, hetgeen ook bevestigt, dat het een singuliere oplossing is. Substitueeren wij daarentegen $y - x = 0$, dan is de noemer nul, dus de geheele breuk oneindig groot; dit bevestigt dus ook, dat het een particuliere oplossing is. Deze wijze van LAPLACE, om singuliere oplossingen te herkennen, steunt op het ontwikkelen van functies volgens de opklimmende positieve machten van een der veranderlijke. Is dit niet mogelijk dan is het ook niet mogelijk hiermede te bepalen of een oplossing singulier is.

De eigenschap, welke wij zooeven bewezen hebben, namelijk dat, wanneer de differentiaal-vergelijking onder den vorm $\frac{d\mu}{dx} + f(x, \mu) = 0$ is, en $\mu = 0$ een singuliere integraal is, alsdan de exponent van μ tusschen 0 en 1 moet liggen, gebruikt POISSON [1]), om den factor te vinden, waarmede men de differentiaal-vergelijking moet vermenigvuldigen; opdat de singuliere oplossing er niet meer aan voldoet.

BOOLE leidt uit dit bewijs van POISSON een ander kenmerk af, om de singuliere oplossing te herkennen, hetgeen echter inderdaad hetzelfde is als hetgeen LAPLACE gebruikt.

BOOLE [2]) komt daarbij tot den regel: Wanneer de vergelijking $\mu = 0$ aan de differentiaal-vergelijking voldoet, dan brengt men de differentiaal-vergelijking onder den vorm

$$\frac{d\mu}{dx} + f(x, \mu) = 0.$$

1) Sur les solutions particulières etc. Journal de l'Ecole Polytechnique Tom. VI.

2) Zie supplementarey volume pag. 30.

Bepaal dan de integraal $\int_0^\mu \frac{d\mu}{M}$ waarin M gelijk is aan $f(x, \mu)$ of aan $f(x, \mu)$ met weglating der factoren, die voor $\mu = 0$ niet verdwijnen of oneindig groot worden.

Is deze integraal $= 0$ dan is $\mu = 0$ een singuliere oplossing.

Hebben wij namelijk voor de algemeene integraal:

$$F(x, \mu) = C.$$

Dan is

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\mu}\frac{d\mu}{dx} = 0,$$

of

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{d\mu}};$$

dus:

$$\int_0^\mu \frac{d\mu}{f(x, \mu)} = -\int_0^\mu \frac{\frac{dF}{d\mu}}{\frac{dF}{dx}} d\mu.$$

Wanneer $\mu = 0$ een singuliere oplossing is, is $F(x, 0)$ niet constant, want, als dit het geval was, dan behoefde men C maar die waarde te geven om $\mu = 0$ als een particuliere integraal te vinden. $\frac{dF}{dx}$ is dus niet gelijk nul, wanneer $\mu = 0$ is.

Nu is:

$$\int_0^\mu \frac{\frac{dF}{d\mu}}{\frac{dF}{dx}} d\mu = H \int_0^\mu \frac{dF}{d\mu} d\mu$$

Hierbij is H de gemiddelde waarde van $\frac{1}{\frac{dF}{dx}}$ tusschen de grenzen der integratie, en in dit geval is dus $H = \frac{1}{\frac{dF(x,0)}{dx}}$; dus heeft H geen oneindige waarde, en daar

$$\int_0^\mu \frac{dF}{d\mu} d\mu = \{F(x, \mu) - F(x, 0)\} \text{ is,}$$

verdwijnt de geheele integraal voor $\mu = 0$.

Voor een particuliere integraal, zegt BOOLE nu, is $F(x, 0)$ een constante, dus verdwijnt $\frac{dF}{dx}$ voor $\mu = 0$, dus $H = \frac{1}{F(x,0)} = \infty$ en dan zoude de integraal niet gelijk nul zijn. BOOLE vergeet echter, dat men die gemiddelde waarde H alleen kan invoeren, wanneer geene der waarden van $\frac{1}{F(x, \mu)}$ oneindig groot is, dat men dus in dat geval geheel anders zoude moeten integreeren. Bovendien is toch altijd $\int_0^0 F(x)\, dx = 0$; men kan uit de bovenbeschouwde integraal dus niets anders dan nul verkrijgen.

Het criterium van BOOLE schijnt ons derhalve van geen waarde te zijn.

Daarenboven geeft hij niet den weg aan, om in $f(x, \mu)$ den factor te vinden, die voor $\mu = o$ verdwijnt; de eenige weg, om zulk een factor te vinden, is de methode van LAPLACE; door $f(x, \mu)$ volgens de opklimmende machten van μ te ontwikkelen; ten einde dus het criterium van BOOLE te gebruiken, moet men ook eerst dat van LAPLACE bezigen.

Cauchy komt langs een anderen weg tot hetzelfde resultaat als Poisson en Boole; om dezelfde reden kunnen wij zijne wijze van herkennen niet billijken.

§ 6. Resultaat afgeleid uit de vorige beschouwingen.

Wij kunnen het resultaat der vorige § § kort samenvatten.

1e Is van een differentiaal-vergelijking de algemeene integraal bekend in den vorm $y = f(x, a)$, dan kan men al de singuliere oplossingen niet alleen afleiden maar ook scheiden van de particuliere integralen, die met de singuliere oplossingen tegelijk verkregen worden. [§ 1. § 5α]

2e Is van een differentiaal-vergelijking de algemeene integraal bekend in den vorm $F(x, y, a) = o$ of $F(x, y) = a$, dan kan men al de singuliere oplossingen niet alleen afleiden, maar ook scheiden van de particuliere integralen, die met de singuliere oplossingen tegelijk verkregen worden, indien men daarbij echter oplet, of aan den eisch van Raabe voldaan wordt. [§ 2. § 3. § 5α.]

3e De singuliere oplossing is de vergelijking van de enveloppe aan de krommen, waarvan de algemeene integraal de vergelijking is. [§ 4α.]

4e Is van een differentiaal-vergelijking de algemeene integraal bekend en is die algemeene integraal een algebraïsche vorm, dan geeft de theorie van Timmermans een zekeren weg, om de singuliere oplossing te vinden. [§ 4β.]

5e Is van een differentiaal-vergelijking de algemeene integraal niet bekend, dan kunnen wij uit het voorgaande nog geen weg vinden, om de singuliere oplossingen te bepalen; wel kan men een vergelijking toetsen, of het al of niet een singuliere oplossing is, wanneer die oplossing aan de eischen van § 5β voldoet.

HOOFDSTUK III.

Verband tusschen de differentiaal-vergelijking en de singuliere oplossing.

---

§ 1. De differentiaal-vergelijking onder den vorm $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = o$,

Ten einde de singuliere oplossing uit de algemeene integraal

$$F(x, y, a) = o$$

af te leiden, elimineeren wij a tusschen deze integraal en

$$\frac{dF}{da} = o.$$

De differentiaal-vergelijking verkrijgen wij door a te elimineeren tusschen

$$(1) \ldots\ldots\ldots \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = o.$$

en de algemeene integraal.

Stellen wij a opgelost uit (1) $= \varphi(x, y, p)$ dan is de differentiaal-vergelijking

$$(2) \ldots\ldots\ldots F(x, y, \varphi) = o.$$

Differentieeren wij deze, dan verkrijgt men

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = o.$$

Het eerste gedeelte verdwijnt, wij verkrijgen dus:

$$\frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = o.$$

Aan deze differentiaal-vergelijking van de tweede orde voldoen de vergelijkingen (2), $\varphi = a$ en $\frac{dF}{d\varphi} = o$.

Elimineert men p tusschen (2) en $\varphi = a$, dan verkrijgt men de algemeene integraal $F(x, y, a) = 0$.

Elimineert men p tusschen (2) en $\frac{dF}{d\varphi} = o$ dan komt een singuliere oplossing. Immers is in beide vergelijkingen p alleen begrepen in de functie φ; men kan dus p elimineeren door φ te elimineeren; daar nu $\varphi = a$ is, is de eliminatie dezelfde als of men a tusschen

$$\frac{dF}{da} = o \text{ en } F(x, y, a) = o$$

elimineert, hetgeen, zooals wij vroeger gezien hebben, een singuliere oplossing kan geven.

Uit het voorgaande blijkt dus, dat de mogelijkheid bestaat, om de vergelijking die men verkrijgt door de differentiaal-vergelijking, in twee factoren te ontbinden, waarvan de eene $\frac{d\varphi}{dx}$ de andere $\frac{dF}{d\varphi}$ is, door welke factoren men zoowel de algemeene als de singuliere oplossing kan vinden.

Voorbeeld:

$$(3) \ldots\ldots\ldots \quad x^2 - \frac{2xy}{p} - \frac{x^2}{p^2} - b = 0$$

dit gedifferentieerd geeft:

$$-\frac{y}{p} + \frac{xyp'}{p^2} - \frac{x}{p^2} + \frac{x^2p'}{p^3} = 0$$

of

$$\left(\frac{y}{p} + \frac{x}{p^2}\right)\left(\frac{xp'}{p} - 1\right) = 0;$$

dus $$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{xp'}{p} - 1, \quad \frac{dF}{d\varphi} = \frac{y}{p} + \frac{x}{p^2}.$$

Uit $$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{xp' - p}{p} = 0 \text{ volgt:}$$

$$\varphi = \frac{x}{p} = a.$$

Elimineert men tusschen deze en (3) p, dan verkrijgt men de algemeene integraal:

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

en elimineert men p tusschen (3) en

$$\frac{dF}{d\varphi} = \frac{y}{p} + \frac{x}{p^2} = 0;$$

dan komt: $$x^2 + y^2 - b = 0,$$

hetgeen de singuliere oplossing is.

Het heeft echter bezwaren de vergelijking, die men verkrijgt door de differentiaal-vergelijking te differentieeren, in de verlangde factoren te ontbinden; op de volgende wijze kan men echter die zwarigheid vermijden.

Stellen wij de gegeven differentiaal-vergelijking voor door $f(x, y, p) = o$, dan kan deze van (2) slechts door een factor verschillen; wij hebben dus:

$$f(x, y, p) = \beta F(x, y, \varphi);$$

deze gedifferentieerd geeft:

$$(4) \ldots \quad \frac{df}{dp} p' + \frac{df}{dy} p + \frac{df}{dx} = \beta \frac{dF}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} + \beta' F(x, y, \varphi).$$

β' is het differentiaalquotiënt van β ten opzichte van x.

Daar $F(x, y, \varphi) = \dfrac{f(x, y, p)}{\beta}$ is, wordt (4), als men die waarde daarin substitueert

$$\frac{df}{dp} p' + \frac{df}{dy} p + \frac{df}{dx} = \beta \frac{dF}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\beta'}{\beta} f(x, y, p).$$

In het tweede lid is p' opgesloten in $\dfrac{d\varphi}{dx}$; dit tweede lid kan dus door middel van $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ verdwijnen, onafhankelijk van de waarde van p'; dit moet in het eerste lid, dat met het tweede identiek moet zijn, ook plaats kunnen hebben, en dit kan het niet anders dan door middel van de vergelijkingen.

$$\frac{df}{dp} = 0 \text{ en } \frac{df}{dy}p + \frac{df}{dx} = 0.$$

De eliminatie van p tusschen $\frac{df}{dp} = 0$ en de differentiaal-vergelijking geeft nu de singuliere oplossing evenals de vergelijkingen:

$$\frac{dF}{d\varphi} = 0 \text{ en } F(x, y, \varphi) = 0.$$

Voorbeeld.

Uit de differentiaal-vergelijking

$$p^2(x^2 - b) - 2xyp - x^2 = 0$$

volgt:

$$2\,[p(x^2 - b) - xy]\,p' - 2(yp + x) = 0.$$

Elimineert men nu p tusschen $p(x^2 - b) - xy = 0$ en de differentiaal-vergelijking, dan vindt men de oplossing:

$$x^2 + y^2 - b = 0.$$

Ten einde na te gaan, of dit een singuliere oplossing kan zijn, kan men dezen weg volgen

Wanneer $\frac{df}{dp} = 0$ overeenkomt met $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ moet $\frac{df}{dy}p + \frac{df}{dx}$ overeenkomen met $f(x, y, p)$ en zal de eliminatie van p tusschen $\frac{df}{dp} = 0$ en $\frac{df}{dy}p + \frac{df}{dx} = 0$ ook dezelfde singuliere oplossing moeten opleveren; krijgt men dus niet dezelfde vergelijking, dan heeft men ook geen singuliere oplossing.

Voor de singuliere oplossing verkrijgt p′ dus den vorm

$$p' = \frac{0}{0}.$$

Voorbeeld.

$$(xp - y)(xp - 2y) + x^3 = 0;$$

hieruit volgt:

$$x(2\,xp - 3y)\,p' - xp^2 + yp + 3x^2 = 0,$$

waaruit:

$$p' = \frac{xp^2 - yp - 3x^2}{x(2xp - 3y)}.$$

Stellen wij dus teller en noemer van deze breuk gelijk nul, en elimineeren wij p tusschen beiden dan verkrijgen wij:

$$\frac{3y^2}{4x} - 3x^2 = 0.$$

Dezelfde vergelijking krijgen wij, als wij p tusschen $2xp - 3y = 0$ en de differentiaal-vergelijking elimineeren.

Wanneer wij uit

$$p' = -\frac{\frac{df}{dy} + p\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dp}},$$

de hoogere differentiaal-quotiënten bepalen, zien wij, dat $p'\,p''$ enz. $\frac{0}{0}$ zijn, wanneer het de singuliere oplossing geldt.

Deze methode, waarop wij de singuliere oplossingen uit de differentiaal-vergelijking afleiden is, eenigszins gewijzigd, die van Lagrange.

Wij hebben daarbij gezien, dat de singuliere oplossingen, die uit de algemeene integraal door het kenmerk $\frac{dF}{da} = 0$ verkregen worden, dezelfde zijn, die de waarde p′ onbepaald maken. Lagrange beweert hierbij niet, dat wanneer eene vergelijking aan deze voorwaarde voldoet, die vergelijking dan singulier is, maar alleen dat zulks mogelijk is.

De theorie van Poisson steunt op de volgende stelling: Iedere differentiaal-vergelijking van de eerste orde met twee veranderlijken, kan veranderd worden in een differentiaal-vergelijking, bestaande uit twee factoren, waarvan de eerste al de singuliere oplossingen bevat en de tweede niet voldaan wordt door die oplossingen.

Zij
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
de differentiaal-vergelijking. Hieruit kunnen wij y elimineeren, door y gelijk een functie te stellen van x en een nieuwe in te voeren veranderlijke z. Zij dus
$$y = \varphi(x, z).$$
Dan is
$$\frac{d\varphi}{dx} = f\Big(x, \varphi(x, z)\Big) = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx},$$
of
$$\frac{d\varphi}{dx} - f\Big(x, \varphi(x, z)\Big) + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx} = 0.$$
Om deze nu in twee factoren te ontbinden, waarvan de eene het differentiaal-quotiënt niet bevat en de andere wel, zoude $\frac{d\varphi}{dz}$ een factor moeten zijn van $\frac{d\varphi}{dx} - f\Big(x, \varphi(x, z)\Big)$.

Eenvoudiger echter is het dit verschil gelijk nul te stellen en dus de vergelijking te ontbinden in twee factoren.
$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \text{ en } \frac{dz}{dx} = 0.$$

Men ziet dus, dat, wanneer men voor $y = \varphi(x, z)$ de algemeene integraal neemt van $\frac{d\varphi}{dx} - f(x, y)$, waarin z de arbitraire constante is, dat dan, de differentiaal-vergelijking zich ontbindt in de twee vergelijkingen:

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \text{ en } \frac{dz}{dx} = 0.$$

De eerste beter bekend onder den vorm $\frac{dy}{da}$ weten wij, bevat al de singuliere oplossingen.

Uit deze stelling van POISSON leidt men nu de twee volgende regels af.

I. Om de singuliere oplossingen te vinden, van eene differentiaal-vergelijking van de eerste orde met twee factoren, waarvan de eene $\frac{dy}{dx}$ niet en de andere wel bevat. Deze eerste factor, gelijk nul gesteld, zal al de singuliere oplossingen van de differentiaal-vergelijking bevatten.

II. Om de singuliere oplossingen van een differentiaal-vergelijking van de eerste orde met twee veranderlijken te vinden, lost men deze vergelijking ten opzichte van $\frac{dy}{dx}$ op, en zoekt men den grootsten gemeenen deeler van den teller en noemer der breuk, die men voor $\frac{dy}{dx}$ heeft verkregen; deze grootste gemeene deeler tot nul herleid bevat de gezochte oplossingen.

Zooals men ziet, steunt deze wijze van oplossen van POISSON op het onbepaald worden van $\frac{dy}{dx}$. De oplossingen, die $\frac{dy}{dx}$ bepalen, worden hierdoor buiten gesloten; de methode van POISSON is dus verre van algemeen, hetgeen ook nog blijkt uit het feit, dat wij vroeger ook reeds aantoonden, dat $\frac{dy}{da} = 0$ niet alle oplossingen bevat.

De theoriën van LAGRANGE en POISSON zijn alleen van toepassing als de differentiaal-vergelijking algebraïsch is·

§ 2. De differentiaal-vergelijking van den vorm $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

α. Oplossing van Laplace.

Laplace zoekt de singuliere oplossingen van de differentiaal-vergelijking gebracht onder den vorm

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Hij gaat hierbij van de bekende eigenschap uit, dat de integreerende factor β door de singuliere oplossing oneindig groot wordt en dat dus de singuliere oplossing een factor moet zijn van $\frac{1}{\beta}$. Gesteld dus, dat men den integreerenden factor gevonden heeft, zoo komt het er op aan, dien factor van $\frac{1}{\beta}$ te bepalen, die tot nul herleid, oplossingen zijn van $dy = pdx$.

Indien men μ een van deze factoren noemt, en indien men de vergelijking $\frac{1}{\beta} = 0$ differentieert, verkrijgt men $dy = \gamma dx$; $\mu = 0$ moet dan aan deze differentiaal-vergelijking voldoen, evenzoo aan $dy = pdx$, en dus ook aan

$$dy - pdx - dy + \gamma dx = 0$$

of aan

$$\gamma - p = 0.$$

μ moet dus een factor zijn van $\gamma - p$, bijgevolg is de gemeene factor van $\frac{1}{\beta}$ en $\gamma - p$ een integraal van $dy = pdx$. Men dient daarna dan nog te bepalen, of het een singuliere oplossing dan wel een particuliere integraal is.

In de meeste gevallen kent men de algemeene integraal en den integreerenden factor niet, men moet dus een anderen weg zoeken, om de singuliere oplossing onafhankelijk daarvan te bepalen. LAPLACE gebruikt daartoe de getransformeerde vergelijking (18) [zie β. § 5 Hoofdst. II.]

$$d\mu = \mu^n h dx.$$

Waarin $h = l + l'\mu^{n'-n} + \text{enz.}$, μ een singuliere oplossing en $n < 1$ is. Daar nu ook

$$d\mu = \frac{d\mu}{dx} dx + \frac{d\mu}{dy} dy.$$

Zoo is

$$\frac{d\mu}{dy} dy = \mu^n h dx - \frac{d\mu}{dx} dx$$

en daar $$dy = p dx$$

heeft men

$$(5) \ldots \ldots \quad p = \frac{\mu^n h}{\frac{d\mu}{dy}} - \frac{\frac{d\mu}{dx}}{\frac{d\mu}{dy}}.$$

Nu onderstelt men verder, dat μ van den vorm $y - \chi$ is, zijnde χ een functie van x, dan is $\frac{d\mu}{dy} = 1$ en $\frac{d\mu}{dx} = -\frac{d\chi}{dx}$, dan verkrijgen wij voor het differentiaal-quotiënt van (5) ten opzichte van y

$$\frac{dp}{dy} = n\mu^{n-1} h + \mu^n \frac{dh}{dy}.$$

Wanneer dus $n < 1$, hetgeen plaats heeft als $\mu = 0$ een singuliere oplossing is, dan is $\frac{dp}{dy} = \infty$ of $\frac{1}{\frac{dp}{dy}} = 0$,

μ is dus een factor van $\frac{1}{\frac{dp}{dy}} = 0$.

Ten einde dien factor te vinden, differentieert hij $\frac{1}{\frac{dp}{dy}} = 0$;

gesteld, dat dit geeft:

$$dy = q dx.$$

Hieraan moet μ voldoen. Daar μ ook tevens aan $dy = p dx$ moet voldoen, erlangen wij op dezelfde wijze als boven, dat μ te gelijk een factor moet zijn van $p - q = 0$ en van $\dfrac{1}{\frac{dp}{dy}} = 0$. Wij kunnen hieruit μ bepalen.

Laplace geeft hierbij het voorbeeld:

$$dy = \frac{-x dx}{y - \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} \quad \text{hiervan is}$$

$$\frac{1}{\frac{dp}{dy}} = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\left[y - \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\right]}{x}$$

$$\text{en } p - q = \frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}\left[y^2 - a^2 - y\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right]}{x\left[y - \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\right]^2}.$$

Men ziet, dat $\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$ de eenige gemeene factor is; het is dus een singuliere oplossing en de eenigste. Laplace neemt hierbij de eigenschap van den integreerenden factor aan; wij hebben echter in (§ 4 H. II) doen uitkomen, dat de integreerende factor alleen dan oneindig groot wordt, wanneer de coëfficiënten in de vergelijking geheele vormen zijn.

In zijne verhandeling zegt hij, dat men op dezelfde wijze zal vinden, dat $\dfrac{1}{\frac{dp}{dx}} = 0$ moet zijn; hij bedoelt hier echter zeker $\dfrac{1}{\frac{d\frac{1}{p}}{dx}} = 0$ hetgeen uit het voorgaande gemakkelijk is af te leiden. HOUTAIN geeft de theorie van LAPLACE vereenigd met die van LEGENDRE [1]).

Hij geeft de theorie in de volgende drie stellingen:

I. Men verkrijgt al de singuliere oplossingen van een differentiaal-vergelijking van de eerste orde met twee veranderlijken, wanneer van de oplossingen, die men verkrijgt door de eliminatie van p tusschen de differentiaal-vergelijking $f(x, y, p) = 0$ en de vergelijkingen $\frac{df}{dp} = 0$, $\frac{df}{dx} = \infty$, $\frac{df}{dy} = \infty$, diegene neemt, welke de differentiaal-vergelijking voldoen en niet in de algemeene integraal begrepen zijn.

II. Welke ook de vorm van de differentiaal-vergelijking zij, de singuliere oplossingen zullen altijd dezelfde zijn.

III. Men kan een differentiaal-vergelijking, welke een algebraïschen vorm heeft, altijd onder een zoodanigen vorm brengen, dat de singuliere oplossingen alleen door het kenmerk $\frac{df}{dp} = 0$ uit de differentiaal-vergelijking zijn af te leiden.

Van de eerste stelling geeft hij drie bewijzen, het eerste bewijs is algemeen, de twee laatsten alleen van toepassing als de differentiaal-vergelijking een algebraïschen vorm heeft. De twee laatste bewijzen geeft hij ook ieder voor de twee gevallen, dat de vergelijking is onder de vormen $F(x, y, p) = o$ en $p = F(x, y)$.

Ten einde niet al te uitvoerig te worden hebben wij die bewijzen niet medegedeeld. De stellingen hebben wij alleen medegedeeld als een bevestiging van het voorgaande.

De tweede stelling is ook een noodzakelijk gevolg van de tweede stelling van (γ § 2 H. II).

1) Mémoires de l'académie des sciences de Paris. 1842.

Wij hebben dus deze drie kenmerken $\frac{df}{dp} = 0$, $\frac{df}{dx} = \infty$, $\frac{df}{dy} = \infty$.

Het kenmerk van LAGRANGE is op de wijze in het eind van (β) te geven in de beide laatste te herleiden.

β. *Oplossing van* BOOLE.

Bij den weg, dien BOOLE volgt, om de singuliere oplossing uit de differentiaal-vergelijking af te leiden stelt hij zich ook de differentiaal-vergelijking voor, onder den vorm $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Zij (6) ..... $y = f(x, a)$

de algemeene integraal, dan verkrijgen wij de differentiaal-vergelijking door a uit (6) in

$$(7) \ldots\ldots p = \frac{df(x, a)}{dx}$$

te substitueeren, zoodat men verkrijgt

$$(8) \ldots\ldots p = \varphi(x, y).$$

Verder hebben wij

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{da} \frac{da}{dy},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d^2y}{dxda} : \frac{dy}{da},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dx} \log \frac{dy}{da}.$$

Op dezelfde wijze vindt men:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{d}{dy} \log \frac{dx}{da}.$$

De vraag is nu, wat de waarde van de differentiaal-quotiënten is, wanneer $\frac{dy}{da} = 0$ en $\frac{dx}{da} = 0$ is, dus de logarithmen van deze functies oneindig groot zijn.

Als $\frac{dy}{da} = \psi(x, a)$ is, wordt

$$\frac{d}{dx}\log\frac{dy}{da} = \text{de limiet van } \frac{\log\psi(x+h, a) - \log\psi(x, a)}{h},$$

als h tot nul nadert.

Wanneer $\psi(x, a)$ gelijk nul is, moeten x en a tegelijk veranderen, opdat de waarde nul blijve; verandert dus x alleen, dan blijft de functie niet nul; dus $\log\psi(x + h, a)$ niet gelijk ∞ maar wel $\psi(x, a)$; de geheele waarde blijft dus oneindig groot; daar dus bij een singuliere oplossing of $\frac{dx}{da} = 0$ of $\frac{dy}{da} = 0$ of beide tegelijk plaats heeft, moet er ook altijd of aan $\frac{dp}{dy} = \infty$, of aan $\frac{d\frac{1}{p}}{dx} = \infty$, of aan beide vergelijkingen voldaan worden.

Omgekeerd is het echter niet zeker, dat iedere vergelijking die of $\frac{dp}{dy}$ of $\frac{d\frac{1}{p}}{dx}$ oneindig groot maakt, een singuliere oplossing is.

Boole tracht aan te toonen, dat behoudens enkele uitzonderingen de gevonden kenmerken zekerheid geven; in hoeverre dit beweren gegrond is, zullen wij in een der volgende § § onderzoeken. Zooals wij zien, komen Boole en Laplace tot dezelfde kenmerken.

De kenmerken van Boole onderscheiden zich in zooverre gunstig van het kenmerk van Lagrange, dat zij berusten op de beide kenmerken $\frac{dy}{da} = 0$ en $\frac{dx}{da} = 0$, welke beide kenmerken, zooals wij gezien hebben, alle oplossingen in zich bevatten.

Lagrange heeft ook nog op de volgende wijze twee andere kenmerken afgeleid, die bijna geheel met die van BOOLE overeenkomen.

In § 1 van dit hoofdstuk hadden wij de differentiaalvergelijking onder den vorm

$$F(x, y, \varphi) = 0.$$

Lossen wij hier p uit op, zoodat $p = -f(x, y)$ is, en substitueeren wij deze in de vergelijking zelf, dan verkrijgen wij een identieke vergelijking; de verschillende partieele differentialen moeten dus verdwijnen. Wij vinden dus:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx} = 0.$$

en
$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dy} = 0.$$

Hieruit vindt men:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dp}}, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dp}}$$

daar nu bij singuliere oplossingen $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ is, zoo worden dan

$$\frac{dp}{dx} = \infty \quad \text{en} \quad \frac{dp}{dy} = \infty.$$

Volgens BOOLE zoude $\frac{d\frac{1}{p}}{dx} = \infty$ moeten zijn, maar daar $\frac{d\frac{1}{p}}{dx} = -\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$ is, zoo komen de kenmerken als p zelf niet gelijk nul is, overeen.

γ. *Oplossing van* TIMMERMANS.

TIMMERMANS heeft uit de verschillende wortels der differentiaal-vergelijking ten opzichte van p een weg gevonden, om de singuliere oplossingen uit de differentiaal-vergelijking af te leiden.

Zij $$f(x, y, p) = o$$
een differentiaal-vergelijking van de eerste orde met twee veranderlijken; wij onderstellen den vorm algebraïsch; zij μ de hoogste macht van p. Zijn nu $p_1, p_2, p_3 \dots p_\mu$ de waarden van p, dan kan men de differentiaal-vergelijking schrijven onder den vorm:

$$(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3) \dots (p - p_\mu) = 0.$$

De vergelijking

$$\frac{df}{dp} = 0.$$

onderstelt dus de gelijkheid van twee of meer wortels.

Is de waarde der wortels rationeel, dan geeft $\frac{df}{dp} = 0$ de vergelijking der raakpunten van twee krommen van verschillende soort.

Komen er echter wortelvormen in voor, dan omvat $\frac{df}{dp} = 0$ ook de vergelijking der raakpunten van de krommen die door een vergelijking verbonden zijn.

Timmermans leidt hieruit den volgenden regel af:

Ten einde de singuliere oplossingen te verkrijgen van een differentiaal-vergelijking, die een algebraïschen vorm heeft, moet men deze vergelijking ten opzichte van p oplossen

Indien p geen wortel bevat, is er geen singuliere oplossing; in het tegenovergestelde geval stelt men de functies onder de wortelteekens gelijk nul, of ook de functies, die de wortels vermenigvuldigen; en indien deze vergelijkingen aan de waarde van p voldoen, en niet aan de algemeene integraal, dan zullen dit singuliere oplossingen zijn.

Daar sommige differentiaal-vergelijklngen van transcendente functies algebraïsche vormen zijn, zoo omvat deze regel nog meer singuliere oplossingen dan de regel van (§ 4, β, H II).

Voorbeeld.

De singuliere oplossingen te bepalen van de differentiaal-vergelijking

$$y^2\left[1+2\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]-x-y=0.$$

De algemeene integraal hiervan is:

$$a^2-2a\,ly+(ly)^2=x+y.$$

Hierop is dus de regel van (§ 4β, H II) niet van toepassing. Lossen wij de differentiaal-vergelijking ten opzichte van $\frac{dy}{dx}$ op, dan heeft men,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y\pm\sqrt{x+y}}{y}.$$

§ 3. Criterium voor de singuliere oplossing. Onderzoek van Timmermans.

Zooals wij gezien hebben zijn bij een differentiaalvergelijking van algebraïschen vorm, de oplossingen begrepen in de vergelijkingen, die men verkrijgt door de vormen onder het wortelteeken gelijk nul te stellen of ook door hunne factoren gelijk nul te stellen. De eerste vergelijkingen zullen wij door $\varphi=0$ aanduiden, de tweede door $\psi=0$.

Beschouwen wij eerst de vergelijkingen $\psi=0$. Wanneer zij aan de differentiaal-vergelijking voldoen, stellen zij de vergelijking voor van een kromme, die aan twee krommen raakt, waarvan zij de vergelijkingen gelijk maken.

Zij $p=\pi(x, y)$ één van de vergelijkingen. Ontwikkelen wij deze naar de opklimmende machten van ψ dan hebben wij

$$p = A_0 + A_1\psi + A_2\psi^2 + \ldots\ldots$$

Als $\psi = 0$ hieraan voldoet, moet

$$A_0 = -\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}}.$$

Dit gesubstitueerd geeft:

$$p\left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dy}\,[A_1\psi + A_2\psi^2 + \ldots.]$$

maar $$d\psi = \left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)p\right]dx,$$

dus

$$d\psi = \psi\,\frac{d\psi}{dy}\,[A_1 + A_2\psi + A_3\psi^2 + \ldots.]\,dx,$$

of

$$d\psi = \psi M\,dx$$

als wij

$$M = \left(\frac{d\psi}{dy}\right)[A_1 + A_2\psi + A_3\psi^2 + \ldots.]$$

stellen.

Differentieeren wij nu, terwijl wij A_0 weder kortheidshalve opnemen en ook voor $d\psi$ steeds zijne waarde substitueeren, dan verkrijgen wij

$$\frac{dy}{dx} = A_0 + A_1\psi + A_2\psi^2 + \ldots.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dA_0}{dx} + A_1M\psi + \frac{dA_1}{dx}\psi + 2A_2\psi^2M + \frac{dA_2}{dx}\psi + \ldots.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2A_0}{dx^2} + A_1M^2\psi + \ldots.;$$

Aan al deze opvolgende vergelijkingen voldoet $\psi = 0$; deze vergelijking kan dus niets anders dan een particuliere integraal zijn, daar zij geheel met $p = \pi(x, y)$ samenvalt.

Onderzoeken wij nu de vergelijking $\varphi = 0$. Noemen wij μ de exponent van den wortel. Ontwikkelen wij p volgens de opklimmende machten van $\varphi^{\frac{1}{\mu}}$ dan heeft men:

$$p = A'_0 + A'_1\varphi^{\frac{1}{\mu}} + A'_2\varphi^{\frac{2}{\mu}} + \ldots.$$

Opdat nu $\varphi = 0$ aan deze vergelijking voldoe, moet:

$$A'_0 = -\frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}$$

zijn, dus verkrijgt men:

$$p\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \varphi^{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\left[A'_1 + A'_2\varphi^{\frac{1}{\mu}} + A'_3\varphi^{\frac{2}{\mu}} + \ldots\right]$$

daar echter

$$d\varphi = \left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)p + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\right]dx.$$

Zoo is

$$d\varphi = \varphi^{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\left[A'_1 + A'_2\varphi^{\frac{1}{\mu}} + A'_3\varphi^{\frac{2}{\mu}} + \ldots\right]dx$$

of

$$d\varphi = \varphi^{\frac{1}{\mu}} M'dx,$$

als wij stellen

$$M' = \frac{d\varphi}{dy}\left[A'_1 + A'_2\varphi^{\frac{1}{\mu}} + A'_3\varphi^{\frac{3}{\mu}} + \ldots\right];$$

differentieeren wij nu p op dezelfde wijze als boven, dan vinden wij:

$$\frac{dy}{dx} = A'_0 + A'_1\varphi^{\frac{1}{\mu}} + A'_2\varphi^{\frac{2}{\mu}} + \ldots.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dA'_0}{dx} + \frac{dA'_1}{dx}\varphi^{\frac{1}{\mu}} + \frac{1}{\mu}\frac{A'_1M'}{\varphi^{1-\frac{2}{\mu}}} + \frac{dA'_2}{dx}\varphi^{\frac{2}{\mu}} + \frac{2}{\mu}\frac{A'_2M'}{\varphi^{1-\frac{3}{\mu}}} + \ldots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2A'_0}{dx^2} - \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{2}{\mu}\right)\frac{A'_1M'^2}{\varphi^{2-\frac{3}{\mu}}} + \ldots.$$

$$\frac{d^iy}{dx^i} = \frac{d^{i-1}A'_0}{dx^{i-1}} +$$

$$+ (-1)^i\frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{2}{\mu}\right)\left(1 - \frac{3}{\mu}\right)\ldots.\left(1 - \frac{i-1}{\mu}\right)\frac{A'_1M'^{\,i-1}}{\varphi^{i-1-\frac{i}{\mu}}} + \ldots..$$

φ zal aan deze vergelijkingen niet voldoen, wanneer de exponent van φ in den noemer positief is.

φ zal dus met een der krommen niet geheel samenvallen.

Of $\varphi = 0$ een singuliere oplossing is, hangt dus van den exponent af.

Indien de functie φ een geheele macht is van een functie φ_1, zoodat $\varphi = \varphi_1^\nu$, dan is φ een singuliere oplossing of een particuliere integraal al naarmate $\mu > \nu$ of $\mu < \nu$. In het tweede geval komt de functie φ, buiten het wortelteeken en is zoodoende een particuliere integraal.

Uit de gegeven ontwikkeling kan men ook den graad van de raking der enveloppe bepalen Zoolang $i - 1 < \frac{i\nu}{\mu}$, is het differentiaal-quotient van de enveloppe en de geënveloppeerde kromme gelijk; is dan bij het volgende quotient $i < \frac{(i+1)\nu}{\mu}$, dan zijn die quotiënten ongelijk en legt de graad van raking tusschen

$$\frac{\mu}{\mu - \nu} \text{ en } \frac{\nu}{\mu - \nu}.$$

Wanneer een differentiaal-vergelijking $f(x; y, p) = 0$ een algebraïschen vorm heeft, kan men haar algemeen onder den volgenden vorm plaatsen

$$p = \chi(x, y) + \psi(x, y) \left[\varphi(x, y)\right]^{\frac{\nu}{\mu}}$$

en al de singuliere oplossingen zijn begrepen in de vergelijking $\varphi = 0$; differentieeren wij nu ten opzichte van x en y dan hebben wij de partieele differentiaal-quotienten:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{d\chi}{dx}\right) + \left[\varphi(x, y)\right]^{\frac{\nu}{\mu}} \frac{d\psi}{dx} + \frac{\nu}{\mu} \frac{\psi(x, y)}{\left[\varphi(x, y)\right]^{\frac{\mu - \nu}{\nu}}} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{d\chi}{dy}\right) + \left[\varphi(x, y)\right]^{\frac{\nu}{\mu}} \frac{d\psi}{dy} + \frac{\nu}{\mu} \frac{\psi(x, y)}{\left[\varphi(x, y)\right]^{\frac{\mu - \nu}{\mu}}} \frac{d\varphi}{dy},$$

of

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\mu\left[\varphi(x, y)\right]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}} \frac{d\chi}{dx} + \mu\left[\varphi(x . y)\right]\left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \nu\left[\psi(x, y)\right]\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)}{\mu\left[\varphi(x, y)\right]^{\frac{\eta - \nu}{\mu}}},$$

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \frac{\mu\left[\varphi(x, y)\right]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}} \left(\frac{d\chi}{dy}\right) + \mu\left[\varphi(x, y)\right]\left(\frac{d\psi}{dy}\right) + \nu\left[\psi(x, y)\right]\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)}{\mu\left[\varphi(x, y)\right]^{\frac{\mu - \nu}{\mu}}}.$$

deze waarden worden door $\varphi = 0$ tegelijk nul; indien φ alleen een functie van x is, is $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ en dan is alleen $\frac{dp}{dx} = \infty$ evenzoo is alleen $\frac{dp}{dy} = \infty$, als φ alleen een functie van y is, $\frac{dp}{dx}$ en $\frac{dp}{dy}$ worden echter niet alleen voor $\varphi = 0$ oneindig.

De differentiaal-vergelijking kunnen wij ook onder den volgenden algemeenen vorm plaatsen:

$$f = [p - \chi(x . y)]^{\mu} - [\psi(x, y)]^{\mu} \; [\varphi(x, y)]^{\nu} = 0$$

hieruit vindt men:

$$\frac{df}{dp} = \mu[p - \chi(x, y)]^{\mu - 1}.$$

Voor $\varphi = 0$ wordt $p = \chi(x, y)$ dus dan is $\frac{df}{dp} = 0$.

Houtain wil uit de theorie van Timmermans nog het kenmerk van Lagrange afleiden, dat $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$ wordt.

Wanneer wij namenlijk uit p het tweede differentiaalquotiënt afleiden, vinden wij:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\chi}{dx} + \frac{d\chi}{dy}p + \Big[\varphi(x, y)\Big]^{\frac{\nu}{\mu}} \left\{\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)p\right\} +$$
$$+ \frac{\nu[\psi(x, y)]}{\mu\Big[\varphi(x, y)\Big]^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}} \left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)p\right\}$$

en indien wij voor p zijn waarde plaatsen en alles tot denzelfden noemer brengen krijgen wij:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\begin{aligned}&\mu\left\{\left(\frac{d\chi}{dx}\right) + \left(\frac{d\chi}{dy}\right)\chi(x, y) + \left(\frac{d\chi}{dy}\right)\psi(x, y)\,[\varphi(x, y]^{\frac{\nu}{\mu}}\right\}\varphi(x,y)^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}\\ &+\mu\left\{\left(\frac{d\psi}{dx}\right) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)\chi(x, y) + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)\psi(x, y)\,[\varphi(x, y)]^{\frac{\nu}{\mu}}\right\}\varphi(x, y)\\ &+\nu\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\chi(x, y) + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\psi(x, y)\,[\varphi(x, y)]^{\frac{\nu}{\mu}}\right\}[\psi(x, y)]\end{aligned}}{\mu[\varphi(x, y)]^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}}$$

Opdat voor $\varphi = 0$ de teller nul worde moeten $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ en $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$ beide nul zijn, en dit kan niet of er moet noch x noch y in de singuliere oplossing voorkomen.

§ 4. Onderzoek naar de verschillende kenmerken.

Wij zullen trachten omtrent de gevondene kenmerken de volgende twee vragen te beantwoorden.

α. *In hoeverre kan men verwachten, dat de verge-*

lijkingen, die men door middel van de kenmerken vindt, aan de differentiaal-vergelijking zullen voldoen.

β. Zullen de vergelijkingen, die men door de kenmerken vindt, en die aan de differentiaal-vergelijking voldoen, singuliere oplossingen zijn.

α. DE MORGAN [1]) heeft getracht aan te toonen, dat de vergelijkingen, die $\frac{dp}{dx}$ en $\frac{dp}{dy}$ oneindig groot maken, of aan de differentiaal-vergelijking voldoen of de meetkundige plaats aanduiden van de punten, waarvan de kromming oneindig groot is.

Zij de differentiaal-vergelijking

$$p = f(x, y)$$

dan vindt men uit $\frac{df}{dx} = \infty$ en $\frac{df}{dy} = \infty$,

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dxdy}\,p = 0 \qquad\qquad \frac{d^2f}{dxdy} + \frac{d^2f}{dy^2}\,p = 0$$

of

$$(9) \ldots\ldots p = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}}{\frac{d^2f}{dxdy}} = -\frac{\frac{d^2f}{dxdy}}{\frac{d^2f}{dy^2}}.$$

Differentieert men de differentiaal-vergelijking zelf, dan verkrijgt men:

$$(10) \ldots\ldots p' = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,p$$

of

$$p = \frac{p' - \frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

1) Transactions of the Cambridge Philosophical Society vol. IX. part. 2.

Wanneer p' verdwijnt ten opzichte van $\frac{df}{dx}$, hetgeen plaats heeft als p' eindig is, dan is

$$(11) \ldots\ldots p = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}},$$

en dan zal dus de waarde van p uit (9) de differentiaal-vergelijking voldoen, daar p in (11) onbepaald is en men dus door middel van (9) de waarde kan bepalen.

Verdwijnt daarentegen p' niet, dan kan dit niet anders dan wanneer p' oneindig groot is en dus, wanneer de gevonden vergelijking de meetkundige plaats van de punten van oneindige kromming voorstelt.

Het kan daarbij ook voorkomen, dat p', hoewel oneindig groot, toch ten aanzien van $\frac{df}{dx}$ of $\frac{df}{dy}$ verdwijnt en dat dus de vergelijking te gelijker tijd een enveloppe voorstelt en tevens de punten van oneindige kromming.

Darboux [1]) maakt in eene mededeeling over het oppervlak, waarin de middelpunten van kromming van een algebraïsch oppervlak liggen de volgende opmerking:

Wanneer wij een differentiaal-vergelijking beschouwen bijv. van den tweeden graad van p

$$Ap^2 + Bp + C = 0$$

waarin A, B en C functiën van x en y zijn, dan neemt men in het algemeen aan, dat de kromme, voorgesteld door deze vergelijking, een enveloppe heeft en dat deze enveloppe gegeven wordt door de vergelijking:

$$R = B^2 - 4AC = 0.$$

Juist het tegenovergestelde heeft plaats; in het alge-

1) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Tome LXX, pag. 1331.

meen hebben de krommen geen enveloppe en de kromme $R = 0$ is de plaats van de keerpunten.

Indien de krommen een enveloppe hadden, moest de vergelijking $R = 0$ de differentiaal-vergelijking voldoen, dus hebben wij de vergelijkingen:

$$\frac{dR}{dx} + \frac{dR}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \text{ en } \frac{dy}{dx} = -\frac{B}{2A}$$

of

$$\frac{dR}{dx} - \frac{B}{2A}\frac{dR}{dy} = 0.$$

Deze laatste vergelijking moet voldaan worden en daar R en $\frac{B}{2A}$ onafhankelijk van elkaar zijn, zal dat meestentijds niet plaats hebben.

Tegen deze bewering geeft Catalan [1]) eenige voorbeelden dat $R = 0$ wel de enveloppe voorstelt, zooals bij de vergelijkingen.

$$(2x^2 + 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 + 2xy + y^2 + 2)\frac{dy}{dx} + 2y^2 + 1 = 0$$

en

$$3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y\frac{dy}{dx} + x + 2y = 0.$$

Darboux [2]) heeft daarop zijne stelling nog algemeener bewezen

Zij namelijk gegeven de differentiaal-vergelijking:

$$f(x, y, p) = 0.$$

Nemen wij hiervan het differentiaal-quotiënt ten opzichte van p, dan neemt men algemeen aan, dat, wanneer men tusschen dit differentiaal-quotiënt gelijk nul gesteld en tusschen de differentiaal-vergelijking p elimineert men dan een singuliere oplossing zal hebben.

---

1) C. R. Tome LXXI, pag 59.
2) C. R. Tome LXXI, pag 267.

Hieruit volgt, dat wanneer men uit de differentiaal-vergelijking p oplost en uit de singuliere oplossing y; dat dan p het differentiaal-quotient moet zijn van y. Hetgeen in het algemeen niet zal plaats hebben, daar de samenstelling van x in de differentiaal-vergelijking geheel willekeurig is, en men in de formule een constante door een functie van x kan vervangen, zonder dat er iets veranderd wordt, daar de differentiaal-vergelijking niet ten opzichte van x gedifferenteerd wordt.

Uit deze opmerkingen en van DE MORGAN en van DARBOUX blijkt dus, dat omtrent de gestelde vraag niets met zekerheid is te zeggen; wij kunnen dus alleen de waarschijnlijkheid bespreken van de gevallen, die voor kunnen komen. DE MORGAN en DARBOUX behandelen te samen die drie kenmerken, die wij hebben gevonden $\frac{dp}{dx} = \infty$; $\frac{dp}{dy} = \infty$, en $\frac{df}{dp} = 0$, waarbij wij dan nog moeten voegen $\frac{df}{d\frac{1}{p}} = 0$.

MANSION [1]) behandelde in een verhandeling over de singuliere oplossingen van de differentiaal-vergelijkingen van de eerste orde dezelfde vragen als DE MORGAN en DARBOUX, en komt daarbij tot geheel andere resultaten.

Tegen DE MORGAN maakt hij de gegronde aanmerkingen, dat uit (10) blijkt dat, wanneer $\frac{df}{dx}$ en $\frac{df}{dy}$ oneindig groot zijn, p′ ook oneindig groot is, dus dat het geval, dat p′ oneindig groot is, meestal zal voorkomen; bovendien zijn de differentiaal-quotiënten van $\frac{df}{dx}$ en $\frac{df}{dy}$, zooals DE MOR-

1) Bulletins de l'Academie de Brux. 1872, Tome 34.

GAN ze geeft, verkeerd, maar moeten zijn;

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^{-2}\left[\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{d^2f}{dxdy}p\right]=0 \text{ en } \left(\frac{df}{dy}\right)^{-2}\left[\frac{d^2f}{dxdy}+\frac{d^2f}{dy^2}p\right]=0.$$

Welke vergelijkingen ten gevolge van het oneindig zijn van $\frac{df}{dx}$ en $\frac{df}{dy}$ gelijk nul zijn, maar niets geen zekerheid geven, dat de andere factoren dit zijn. MANSION heeft daarom een uitvoerig onderzoek ingesteld omtrent deze vraag:

Gegeven zijnde een serie van krommen voorgesteld door de vergelijking

$$\varphi(x, y, a) = 0 \text{ of } y = F(x, a),$$

ten eerste te zoeken de enveloppe van deze krommen en ten tweede de meetkundige plaats van de punten waar de kromming oneindig groot is.

De vergelijking van de enveloppe van de krommen voorgesteld door $\varphi(x, y, a) = 0$ vindt men door a te elimineeren tusschen

$$\varphi = 0 \text{ en } \frac{d\varphi}{da} : \frac{d\varphi}{dx} = 0$$

en tusschen

$$\varphi = 0 \text{ en } \frac{d\varphi}{da} : \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

De plaats van de punten, waar de kromming oneindig groot is, vindt men door a te elimineeren tusschen

$$\varphi = 0 \text{ en } \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}p + \frac{d^2\varphi}{dy^2}p^2\right) : \frac{d\varphi}{dy} = \infty$$

en tusschen

$$\varphi = 0 \text{ en } \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}\frac{1}{p} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{1}{p^2}\right) : \frac{d\varphi}{dx} = \infty$$

Hieruit ziet men dadelijk, dat, indien men heeft:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \infty \text{ en } \frac{d\varphi}{dy} = \infty$$

men dan in 't algemeen een oplossing zal hebben van het eerste vraagstuk, welke echter niet het tweede vraagstuk zal voldoen; daarentegen, wanneer wij hebben

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ en } \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

dat dan het tweede vraagstuk opgelost kan zijn.

In het algemeen zullen die twee oplossingen niet samenvallen.

Daar

$$p = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}.$$

Zoo is

$$\frac{dp}{dx} = p' = -\frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dxdy}p + \frac{d^2\varphi}{dy^2}p^2}{\frac{d\varphi}{dy}}$$

dus $p' = 0$, wanneer $\frac{d\varphi}{dy}$ oneindig groot is. Wij zien dus, dat het kan voorkomen, dat de enveloppe samenvalt met de plaats der buigpunten; daar in die punten $p' = 0$ moet zijn [1]).

Indien wij den tweeden vorm onderzoeken:

(12) . . . . $y = F(x, a)$,

dan kan men het eerste vraagstuk oplossen door a te elimineeren tusschen (12) en

$$\frac{dF}{da} = 0.$$

Ten einde het tweede vraagstuk op te lossen, moet men a elimineeren tusschen (12) en

---

1) Zie Lobatto, Diff. en Integr. Deel I, pag. 128.

$$\frac{1}{\frac{d^2F}{dx^2}} = 0.$$

Uit (12) leidt men de differentiaal-vergelijking af, door a te elimineeren tusschen (12) en

(13). . . . . $p = \frac{dF}{dx} = F'(x, a).$

Zij (14) . . . . . $y = f(x, p)$ de differentiaal-vergelijking.

Als men nu (p) uit (13) in (14) substitueert, dan heeft men:

(15) . . . . . $y = f\{x, F'(x, a)\} = F(x, a).$

Bij eene singuliere oplossing kunnen wij a vervangen door een functie van x bijv. $\chi(x)$ dan is:

(16) . . . . $y = f\{x, F'(x, \chi(x))\}.$

Differentieert men nu (15) en (16) en noemt men de differentiaal-quotiënten p en $p_{,}$, dan is:

$$p_{,} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dF'}\,\frac{dF'}{dx} + \frac{df}{dF'}\,\frac{dF'}{d\chi}\,\frac{d\chi}{dx}$$

en

$$p = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dF'}\,\frac{dF'}{dx}.$$

In de punten, die de twee krommen gemeen hebben, zijn x en y dezelfde en is ook $a = \chi(x)$, dus dan is:

(17) . . . . $p_{,} - p = \frac{df}{dF'}\,\frac{dF'}{d\chi}\,\frac{d\chi}{dx}.$

Voor een singuliere oplossing moet dus:

$$\frac{df}{dF'}\,\frac{dF'}{d\chi} = 0 \text{ zijn.}$$

Dit kan zijn, ten eerste tengevolge dat:

$$\frac{df}{dF'} \text{ of } \frac{dy}{dp} = 0 \text{ of } \frac{dp}{dy} = \infty \text{ is;}$$

wanneer niet tevens $\frac{dF'}{d\chi} = \infty$; men zal dus een singuliere oplossing kunnen verkrijgen, wanneer men p elimineert tusschen $\frac{dp}{dy} = \infty$ en (14).

Wanneer dan ook tevens $\frac{dF'}{dx}$ niet oneindig groot is, komt dit overeen met het kenmerk van LAGRANGE, want dan is:

$$p_{,} = p = \frac{df}{dx} \text{ en daar}$$

$$p = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dp} p'$$

zoo is:

$$p' = \frac{p - \frac{df}{dx}}{\frac{df}{dp}}$$

dus

$$p' = \frac{0}{0}.$$

Door middel van deze vergelijking van LAGRANGE ziet men dan ook tevens, dat $p' = \infty$ is, wanneer p niet gelijk $\frac{df}{dx}$ is en wanneer $\frac{df}{dp} = 0$ is of $\frac{df}{dx} = \infty$ of $p = \infty$.

In deze gevallen kan dus de kromming oneindig groot zijn.

Is $\frac{dF'}{d\chi} = \infty$ dan zal er ook een singuliere oplossing kunnen zijn, wanneer

$$\lim. \frac{dy}{dp} \times \frac{dF'}{d\chi} = 0.$$

Is dit produkt verschillend van nul, dan is er geen singuliere oplossing. Is $\frac{dF'}{dx}$ of $p' = \infty$, dan kan er wel een singuliere oplossing zijn, maar daar p dan niet gelijk aan $\frac{df}{dx}$ is, is de vergelijking van LAGRANGE niet voldaan, en de enveloppe is dan tevens de meetkundige plaats van singuliere punten.

Lagrange leidt zijn kenmerk ook alleen uit de vergelijking $\frac{dF}{dx}=0$ af. Wij hebben reeds vroeger opgemerkt, dat hij daardoor niet alle rechtlijnige enveloppes in zijne beschouwing opneemt.

Het produkt $\frac{df}{dF'}\times\frac{dF'}{d\chi}$ kan ten tweede ook nul zijn wanneer $\frac{dF'}{d\chi}=0$ is; dan heeft de enveloppe een raking van de tweede orde met de omhulde kromme; want de vergelijking der enveloppe is:

$$y=F(x,\chi(x))$$

dus

$$p=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{d\chi}\frac{d\chi}{dx}$$

of daar $\frac{dF}{d\chi}$ of $\frac{dF}{da}=0$, zoo is

$$p=\frac{dF}{dx},$$

dus

$$p'=\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dxd\chi}\frac{d\chi}{dx} \text{ en ten gevolge van } \frac{dF'}{d\chi}=0$$

$$p'=\frac{d^2F}{dx^2}.$$

Uit dit onderzoek zou men dus kunnen afleiden, dat in het algemeen de eliminatie van p tusschen $\frac{dp}{dy}=\infty$ en $\frac{dp}{dx}=\infty$ aanleiding geeft tot singuliere oplossingen en slechts bij uitzondering tot de meetkundige plaats der punten, waar de kromming y oneindig groot is.

DARBOUX laat dus in zijne beschouwingen, daar hij alleen het kenmerk $\frac{df}{dp} = 0$ opneemt, ook vele rechtlijnige enveloppes buiten behandeling.

Wij kunnen uit dit alles besluiten, dat wij niet met zekerheid kunnen bepalen, of men met de bekende kenmerken de singuliere oplossingen kan verkrijgen.

Omtrent het kenmerk van LAGRANGE is gebleken, dat dit niet voor alle singuliere oplossingen van kracht is.

LAGRANGE beschouwt bij zijne theorie ook slechts een contact van de eerste orde. Hetgeen ook blijkt uit de meetkundige beteekenis, die hij aan de singuliere oplossingen geeft. Wij gaven in (§ 4 α H. II.) de volgende bepaling, die wij aan hem ontleend hebben: men kan dus die verschillende krommen beschouwen als een enkele kromme met een oneindig aantal takken, die onderling verbonden zijn door dezelfde vergelijking. Dus in ieder punt van de rakende kromme zijn twee takken, die dezelfde raaklijn hebben, de eene is de rakende kromme zelf, de andere de kromme, die in dat punt raakt. LAGRANGE [1]) zegt verder in zijne theorie, dat aan iedere waarde van $\frac{dy}{dx}$ nu een dubbele waarde van $\frac{d^2y}{dx^2}$ moet beantwoorden en dat dus $\frac{d^2y}{dx^2}$ een onbepaalde waarde moet hebben, dus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

op dezelfde wijze als bij dubbele punten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$$

moet zijn.

1) Oeuvres de L. par Serret. Tome IV. page 39.

Men kan zich echter enveloppes denken, die met de omhulde een raking van de n-de orde hebben, de voorwaarden daarvoor zou men kunnen vinden, wanneer men de vergelijking (17) differentieert.

Voordat wij tot de volgende vraag overgaan moeten wij eerst nog eene verhandeling van Darboux [1]) vermelden, waar hij eene opmerking maakt, die de geheele theorie der singuliere oplossingen nog onzekerder maakt.

Nadat hij nog eens de kenmerken van Lagrange heeft afgeleid en bepaald, dat de eliminatie tusschen

$$f(x, y, p) = 0 \text{ en } \frac{df}{dx} = 0 \text{ (zie § 1)}$$

en tusschen

$$\frac{df}{dp} = 0 \text{ en } \frac{df}{dy} p + \frac{df}{dx} = 0$$

dezelfde moet zijn, en daarbij erkent, dat de singuliere oplossingen waarbij p en $p' = \infty$ zijn, daarbij niet zijn opgenomen, maakt hij de opmerking, dat men verkeerd doet, om van alle differentiaal-vergelijkingen aan te nemen, dat zij integralen hebben, die over het geheele vlak continu zijn.

Voorzeker is het waar, dat dit niet altijd het geval is; maar men zal mijns inziens toch bij het afleiden van de singuliere oplossing uit de differentiaal-vergelijking die hypothese omtrent de algemeene integraal moeten stellen, want daar de singuliere oplossing met de algemeene integraal samenhangt, moet men bij het nagaan van de kenmerken altijd aannemen, dat er zulk eene algemeene integraal is.

β_1. *Onderzoek van* Boole.

Met de tweede vraag houdt voornamelijk Boole zich

1) Bulletin des sciences math. et astr. tome IV.

bezig. Dat onderzoek is verdeeld in zijne *treatise on diff. equations* en in het *supplement* daarop, waardoor het geen goed geheel is geworden.

Wanneer men kan bewijzen, dat een particuliere integraal nooit aanleiding kan geven, dat $\frac{dp}{dy} = \infty$ wordt, zou daaruit volgen, dat alle oplossingen van de differentiaal-vergelijking, die $\frac{dp}{dy} = \infty$ maken, singuliere oplossingen zijn.

Boole [1]) heeft maar getracht aan te toonen, dat de particuliere integralen, die $\frac{dy}{dx} = 0$ maken, nooit $\frac{dp}{dy}$ oneindig groot kunnen maken.

Gesteld, dat $\frac{dy}{da} = \psi(x, a)$ is en dat deze voor een constante waarde van a nul wordt, dan zal deze functie voor een verandering van x steeds dezelfde waarde nul behouden, dus in de vergelijking.

$$\frac{dp}{dy} = \lim \frac{\log \psi(x + h, a) - \log \psi(x, a)}{h}$$

zijn beide de functies $\psi(x + h, a)$ en $\psi(x, a)$ nul, dus de logarithmen er van $-\infty$; de twee termen vernietigen elkaar, de limiet is dus nul. Boole [2]) heeft echter een voorbeeld gegeven, waarbij de redeneering niet doorgaat; wanneer namelijk $\psi(x, a)$ van den vorm $e^{\varphi(a)\psi(x, a)}$ is, waarin $\varphi(a)$ voor een waarde van a oneindig groot wordt, dan is

$$\frac{dp}{dy} = \lim \frac{\varphi(a)\{\psi(x + h, a) - \psi(x, a)\}}{h}$$

1) Supplement pag. 14.

2) Treatise pag. 159.

en daar $\varphi(a)$ niet verandert, wordt die limiet wel degelijk oneindig groot. Daarbij vergeet hij geheel die particuliere integralen, die $\frac{dy}{da}$ niet gelijk nul maken, maar toch samenvallen met een integraal, die ontstaat, als men voor a een functie van x substitueert, zooals:

$$y = a(a - x)^2.$$

Voor $a = 0$ en $a = x$ verkrijgt men dezelfde integraal $y = 0$ en maakt $\frac{dp}{dy} = \infty$, en toch noemt men $y = 0$ geen singuliere oplossing.

Uit deze feiten blijkt al voldoende, dat het niet mogelijk is, vooruit met zekerheid te bepalen, of de oplossing singulier, dan wel particulier zal zijn.

Boole beproeft echter ook omgekeerd te bepalen, welke vormen aanleiding kunnen geven tot het oneindig worden van $\frac{dp}{dy}$.

Hij beschouwt daartoe de vergelijking

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dx} \log \frac{dy}{da}.$$

en leidt uit het oneindig worden van het tweede lid het oneindig worden van het eerste af. Wij worden daardoor dus teruggebracht tot de beschouwing van de kenmerken $\frac{dy}{da}$ en $\frac{dx}{da}$.

Ten eerste, zegt hij, kan die vorm oneindig groot worden ten gevolge van een functie onafhankelijk van a, dus een functie van x, maar, omdat $\frac{dp}{dy}$ alleen tot oplossingen met y kan leiden, zoo moet men dit geval maar overslaan; op het ongerijmde van deze redeneering is de aanmerking gemaakt, dat men juist nu van die functiën van x moet zien, wat voor een oplossing dit is. Boole verbetert dit dan ook eenigszins door te beweren, dat, daar het eene oplossing is van x, men het kenmerk $\frac{d\frac{1}{p}}{dx}$ moet onderzoeken, omdat daarmede alleen oplossingen met x kunnen gevonden worden. Hij kan hieruit dus alleen maar afleiden, dat men beide kenmerken moet onderzoeken, omdat dan alle singuliere oplossingen te verkrijgen zijn, maar hieruit blijkt nog niet, dat alle oplossingen singulier zullen zijn.

Evenzoo kan het tweede lid oneindig groot worden voor een functie van a en x dus als $a = f(x)$ is. Dit geeft ook volstrekt geen zekerheid, dat wij met een singuliere oplossing te doen hebben.

Eindelijk komt hij tot het geval, dat het tweede lid oneindig groot kan worden tengevolge van een constante waarde van a, en hij leidt hier zelfs een bijzonder soort van singuliere oplossingen uit af.

Hij stelt dan $\frac{d}{dx} \log \frac{dy}{da} = \varphi(a)\, \psi(x, a)$,

dus $\log \frac{dy}{da} = \int \varphi(a)\, \psi(x, a)\, dx = \varphi(a) \int \psi(x, a) dx.$

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \text{ of } \frac{dy}{da} = e^{\varphi(a)\, \chi(x, a)}$$

Hierin wordt $\varphi(a)$ voor een bepaalde waarde van $a = -\infty$. Wij kunnen (18) ook eenvoudiger schrijven op deze wijze

$$(19) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{da} = e^{a\chi(x, a)}$$

$\frac{dy}{da}$ verdwijnt dus voor $a = -\infty$, wanneer $\chi(x, a)$ voor die zelfde a een eindige waarde heeft.

Uit (19) vinden wij:

$$y = f(x, a)e^{a\chi(x, a)} + F(x).$$

Zien wij nu, wat voor een lijn deze vergelijking voorstelt, terwijl $a = -\infty$ is.

Nemen wij x zoo, dat $\chi(x, a)$ steeds positief is, dan is altijd $y = F(x)$. Zoodra echter $\chi(x, a) = 0$ is; stel dat dit plaats heeft voor $x = x_{,}$ dan is

$$y_{a=-\infty} = f(x_{,}, a) + F(x_{,}),$$

en zoodra $\chi(x, a)$ door het nulpunt heen aan den negatieven kant is, verdwijnt het beschrijvende punt in het oneindige Is daarentegen $a = \infty$, dan zal zoolang $\chi(x, a)$ negatief is, $y = F(x)$ zijn; deze tweede particuliere waarde sluit zich dus onmiddellijk aan de andere particuliere waarde aan.

Voor de positieve waarde van $\chi(x, a)$ verdwijnt het punt weder in het oneindige. Voor dezelfde waarde $x_{,}$ is ook

$$y_{a=\infty} = f(x_{,}, a) + F(x_{,}).$$

Deze y komt niet overeen met de vorige, tenzij $f(x_{,}, a)$ voor $a = -\infty$ of $+\infty$ dezelfde waarde heeft; dan hebben de beide particuliere integralen een punt gemeen, anders niet.

Er bestaat dus niet de minste reden om dit singuliere oplossingen te noemen, het zijn zuiver particuliere integralen; $\frac{dy}{da}$ is alleen maar nul, zoolang als $a\chi(x, a) = -\infty$ is.

Gaan wij nog de voorbeelden na, die Boole geeft.

$$1^e \; y = e^{ax}.$$

Voor $a = -\infty$ en x positief is $y = 0$, dus deze particuliere waarde valt met de positieve x-as samen; voor x negatief is $y = \infty$. Wanneer $a = +\infty$, is $y = 0$

zoolang als x negatief is, dus dan wordt deze particuliere integraal door de negatieve x-as voorgesteld; wordt x positief dan is $y = \infty$.

Voor $x = 0$ is in beide $y = 0$, dus in het punt $(x = 0, y = 0)$ vallen de beide particuliere integralen samen.

$$2^e \quad y = e^{ax - a_2}$$

Dit is geheel hetzelfde voorbeeld als het eerste, als men $x - a = x^1$ stelt, dan is:

$$y = e^{ax^1}$$

Wij verplaatsen dus de geheele voorgaande constructie tot in het oneindige, waar wij ons bij het al verder en verder wegdenken van den oorsprong, toch nog de voorgaande twee particuliere integralen kunnen voorstellen.

Het onderzoek van Boole geeft ons dus geen zekerheid, dat de oplossingen, die wij door $\frac{dp}{dy} = \infty$ verkrijgen, singulier zijn; integendeel het kan voorkomen, dat zij particulier zijn. De bijzondere verdeeling van *non envelope en envelope species of singular solutions* kan geheel achterwege gelaten worden. Er zijn niet anders dan singuliere oplossingen, die tevens enveloppes zijn; wij kunnen immers geene andere singuliere oplossingen verkrijgen, dan door een veranderlijke constante en die veranderlijke constante geeft in de graphische voorstelling, of een reeks van snijpunten, of enkele, of geene; die reeks van snijpunten hebben wij leeren kennen als de graphische voorstelling van de singuliere oplossingen; de voorwaarde, dat daarbij steeds het differentiaal-quotiënt hetzelfde is, maakt dat die reeks van snijpunten een kromme lijn voorstelt, die de opeenvolgende kromme lijnen raakt en deze noemen wij de enveloppe.

β_2. *Onderzoek van* ZAJACRKOWSKI [1]).

ZAJACRKOWSKI heeft getracht aan te toonen, dat de oplossingen der differentiaal-vergelijking, die aan de kenmerken van LAPLACE

$$\frac{dp}{dy} = \infty \text{ en } \frac{d\frac{1}{p}}{dx} = \infty.$$

voldoen, altijd singulier zijn.

Eenigszins gewijzigd toont hij dit op de volgende wijze aan.

Wij hebben gevonden (zie § 5β H II) dat, indien $\mu = 0$ een singuliere oplossing is, in $\frac{d\mu}{dx}$ volgens de opklimmende machten van μ, de laagste macht van μ kleiner dan 1 moet zijn, dus dan moet

$$\frac{d\frac{d\mu}{dx}}{d\mu} = \infty.$$

worden.

Wanneer dus ZAJACRKOWSKI bewijst, dat een vorm $\mu = 0$, die de differentiaal-vergelijking $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ en ook tevens de vergelijking $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dy} = \infty$ voldoet, ook moet voldoen aan $\frac{d\frac{d\mu}{dx}}{d\mu} = \infty$,

dan moet $\mu = 0$ een singuliere oplossing zijn.

Als dus $\mu = 0$ een vorm is, die $\frac{dp}{dx} = \infty$ maakt, dan is

1) GRUNERTS Archiv 1874 Theil 56 Pag. 175.

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\delta\mu}{\delta x} + \frac{\delta\mu}{\delta y} p;$$

(δ duidt partieele differentiaal-quotiënten aan)

$$\text{of } p = \frac{\frac{d\mu}{dx} - \frac{\delta\mu}{\delta x}}{\frac{\delta\mu}{\delta y}},$$

waaruit volgt

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{\delta\mu}{\delta y}\left(\frac{\delta\frac{d\mu}{dx}}{\delta\mu}\frac{\delta\mu}{\delta y} - \frac{\delta^2\mu}{\delta x\delta y}\right) - \left(\frac{d\mu}{dx} - \frac{\delta\mu}{\delta x}\right)\frac{\delta^2\mu}{\delta y^2}}{\left(\frac{\delta\mu}{\delta y}\right)^2},$$

en daar $\quad \frac{d}{dx} l \frac{\delta\mu}{\delta y} = \frac{\frac{\delta\mu}{\delta y}\frac{\delta^2\mu}{\delta y\delta x} + \frac{\delta^2\mu}{\delta y^2}\left(\frac{d\mu}{dx} - \frac{\delta\mu}{\delta x}\right)}{\left(\frac{\delta\mu}{\delta y}\right)^2},$

zoo is

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\delta\frac{d\mu}{dx}}{\delta\mu} - \frac{d}{dx} l \frac{\delta\mu}{\delta y}.$$

Daar het eerste lid voor $\mu = 0$ oneindig groot wordt, moet dit met het tweede ook het geval zijn.

$\frac{d}{dx} l \frac{\delta\mu}{\delta y}$ kan niet oneindig worden, omdat $l \frac{\delta\mu}{\delta y}$ niet oneindig kan worden, daar $\frac{\delta\mu}{\delta y}$ niet gelijk nul kan zijn; dit kan alleen gebeuren tengevolge dat in μ, y niet voorkomt en zooals wij zagen, is $\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dx} l \frac{dy}{da}$ en $\frac{dy}{da}$ kan nooit nul zijn, dan ten gevolge van een functie van x en a of van een van beiden, hetgeen gesubstitueerd in de algemeene integraal altijd eene functie met y geeft.

Daar dus $\dfrac{d\,l\dfrac{\delta\mu}{\delta y}}{dx}$ niet oneindig kan zijn, moet $\dfrac{\delta\dfrac{d\mu}{dx}}{\delta\mu}$ oneindig groot zijn.

Wij hebben dus hier een zuiver kenmerk voor de gevallen, dat $\dfrac{d\mu}{dx}$ ontwikkelbaar is volgens de opklimmende machten van μ. Uitgezonderd echter nog die gevallen, waarin een singuliere oplossing en een particuliere integraal samenvallen, zooals bij de vergelijking

$$y = a(x - a)^2.$$

De vergelijking $y = e^{ax}$ heeft tot differentiaal-vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \log y}{x}$$

dit is niet ontwikkelbaar in de opklimmende positieve machten van y, terwijl $y = 0$, $\dfrac{dp}{dy} = \infty$ maakt. Dit is dus een negatieve bevestiging van den regel van ZAJACZKOWSKI.

§ 5. Resultaat afgeleid uit de voorgaande beschouwingen.

1e Onder welken vorm ook de differentiaal vergelijking gegeven is, altijd is het mogelijk de singuliere oplossingen af te leiden § 1 en § 2.

2e Bij het afleiden van die oplossingen verkrijgt men echter tevens particuliere integralen. Die singuliere oplossingen en particuliere integralen van elkander te scheiden is zonder de hulp van de algemeene integraal slechts mogelijk voor vergelijkingen, die gebracht onder den vorm $\dfrac{d\mu}{dx} + f(x, \mu) = 0$, waarin $\mu = 0$ een oplossing is, ontwikkelbaar zijn volgens de opklimmende positieve machten van μ. Hierin stemmen de onderzoekingen van LAPLACE (§ 5β H II) en TIMMERMANS § 3 volmaakt overeen. Het onderzoek van ZAJACRKOWSKI heeft dat soort van oplossingen ook tot de kenmerken $\frac{dp}{dy} = \infty$ en $\frac{dx}{d\frac{1}{p}} = \infty$ terug gebracht (§ 4β_2).

3ᵉ Aangaande de vraag, of men in 't geheel wel oplossingen zal verkrijgen door de verschillende kenmerken, meenen wij voldoende bewijzen te hebben medegedeeld, dat daaromtrent niets met zekerheid vooruit kan gezegd worden. Integendeel de opmerking van DARBOUX heeft de resultaten nog onzekerder gemaakt. Deze heeft daar over een nieuwen arbeid aangekondigd (§ 4α).

4ᵉ Ook meenen wij uit het vorige te mogen besluiten, dat alle singuliere oplossingen een enveloppe voorstellen, en dat de bijzondere soort van BOOLE voor particuliere integralen moet gehouden worden (§ 4β_1).

STELLINGEN.

I.

Voor de theorie der singuliere oplossingen dient als beginsel te worden aangenomen, dat iedere differentiaalvergelijking een algemeene integraal heeft.

II.

De methode van den integreerenden factor heeft meer en belangrijker resultaten opgeleverd dan eenige integreer-methode.

III.

De draaiing, die een rechte lijn moet ondergaan om in de richting van een andere lijn te komen, is de hoek, dien deze lijnen maken.

IV.

De methode om de verhouding van rechthoeken met ongelijke hoogten en gelijke basis te bepalen door deze als dikke lijnen te beschouwen is af te keuren.

V.

De leer der Quaternions behoort meer toegepast te worden.

VI.

Wiskunde is een natuur-wetenschap.

VII.

De theorie der capillaire-verschijnselen steunt op verkeerde gronden.

VIII.

De opstijging in een capillaire buis wordt veroorzaakt door den benedenrand der buis.

IX.

Door de theorie van FARADAY omtrent de inductie van Electriciteit komt men niet verder; zij is in werkelijkheid dezelfde als de theorie van de werking op afstand.

X.

Wat MAXWELL (Electricity and Magnetisme) bedoelt met displacement of Electricity is zeer onduidelijk.

XI.

Ten onrechte antwoordt LAMÉ op de vraag of de inwendige samenstelling der vaste lichamen altijd een raadsel zal blijven: »Oui, si l'on ne veut admettre que la matière pondérable, non, si l'on admet en outre l'existence de l'éther."

XII.

De verklaring, die CROOKE van den radiometer geeft is in strijd met de ondulatie-theorie.

XIII.

Bij de nasporing der planeten binnen de loopbaan van Mercurius is vooral veel te verwachten van de photographie.

XIV.

De theorie omtrent het ontstaan der planeten-wereld wordt ten onrechte naar LAPLACE genoemd.

XV.

De onjuiste uitkomst van de theorie van HERMANN, omtrent de verbrandingswarmte van samengestelde stoffen, is geen bewijs tegen de constitutie-theorie.

XVI.

Het is gewaagd als algemeenen regel te stellen, dat de natuur een afkeer heeft van zelfbevruchting.

XVII.

Onjuist zijn de benamingen Kiem en Dojerstok in de vrouwelijke generatie-organen der Plerelmia.

ERRATA.

1.	Blz. 3	reg. 11 en 13	v. b.	*staat:*	$\frac{c^2}{y}$	*lees:* $\frac{c^2}{4}$.
2.	„ 3	„ 13	„	„	$\frac{dy}{dz}$	„ $\frac{dy}{dx}$.
3.	„ 14	„ 6	„	„	$\frac{4x^3}{2y}$	„ $\frac{4x^3}{27}$.
4.	„ 17	„ 7	„	„	$\sqrt{x+1}$	„ $\sqrt{x^2+1}$.
5.	„ 18	„ 6	„	„	$\frac{dy}{da}$	„ $\frac{dy}{dx}$.
6.	„ 21	noot		„	98	„ 43.
7.	„ 28	reg. 4	v. o.	„	$f(x, y, p)$	„ $f(x, y, p) = 0$.
8.	„ 29	„ 19	v. b.	„	$\sqrt[m]{\varphi_3 - \varphi_2}$	„ $\sqrt{\varphi_3} - \varphi_2$.
9.	„ 29	„ 2	v. o.	„	$\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^{m-1}$	„ $\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^{m-1}$.
10.	„ 31	„ 2	v. b.	„	$\frac{dF}{dy}$	„ $\frac{dF}{dx}$.
11.	„ 33	„ 10	v. o.	„	$2x(x +$	„ $2x(xy +$.
12.	„ „	„ 9	„	„	$x\sqrt{1 + x^2 - y^2dy}$	„ $(x\sqrt{1 + x^2 - y^2} - y)dy$.
13.	„ „	„ 4	„	„	$2x(x +$	„ $2x(xy +$.
14.	„ „	„ 3	„	„	$2 -$	„ $x -$.
15.	„ 35	„ 7	„	„	$\frac{1}{Q}$	„ Q
16.	„ 36	„ 8	v. b.	„	$Q\frac{d\beta}{dy}$	„ $Q\frac{d\beta}{dx}$.
17.	„ „	„ 10	„	„	of $\frac{d\beta}{dy}$	„ of $\frac{d\beta}{dx}$.
18.	„ 48	„ 3	„	„	$\frac{2}{\sqrt{y-x}}$	„ $\frac{2}{\sqrt{y-n}}$.
19	„ „	„ „	„	„	$4\sqrt{y-x}$	„ $4\sqrt{y-n}$.
20.	„ „	„ 7	„	„	$\sqrt{y-n}$	„ $4\sqrt{y-n}$.
21.	„ 9	„ 9	„	„	$x - m + 4\sqrt{y-n}$	„ $x - m - 4\sqrt{y-n} = 0$.
22.	„ 79	„ 10	v. o.	„	tegelijk nul	„ tegelijk oneindig.
23.	„ 90	„ 4	„	„	$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$	„ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$.