



De spectroscopische dubbelster 'eta' Aquilae benevens eenige algemeene opmerkingen over radiale snelheden

<https://hdl.handle.net/1874/254081>

1940192

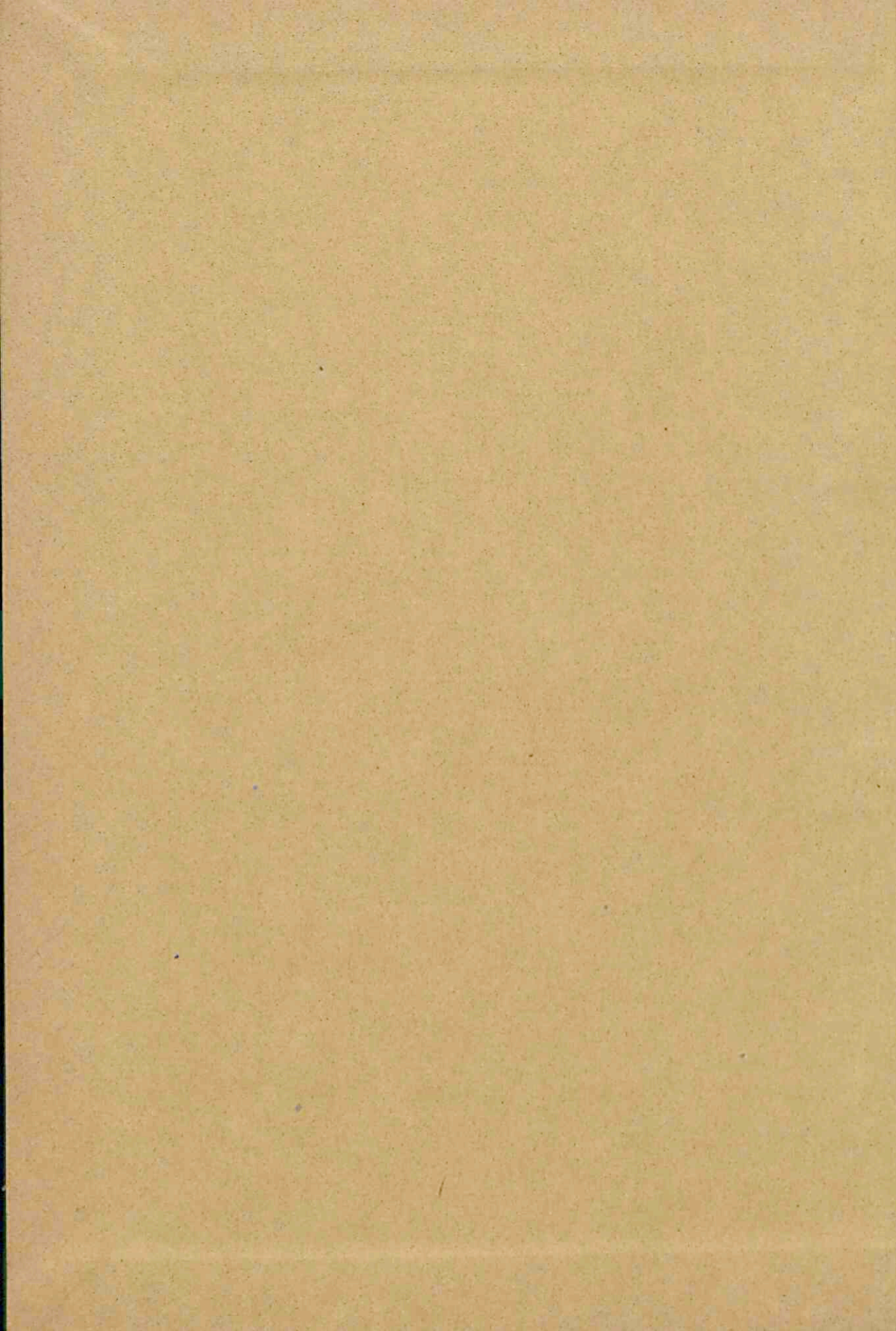
Phap. 20 Feb/1903

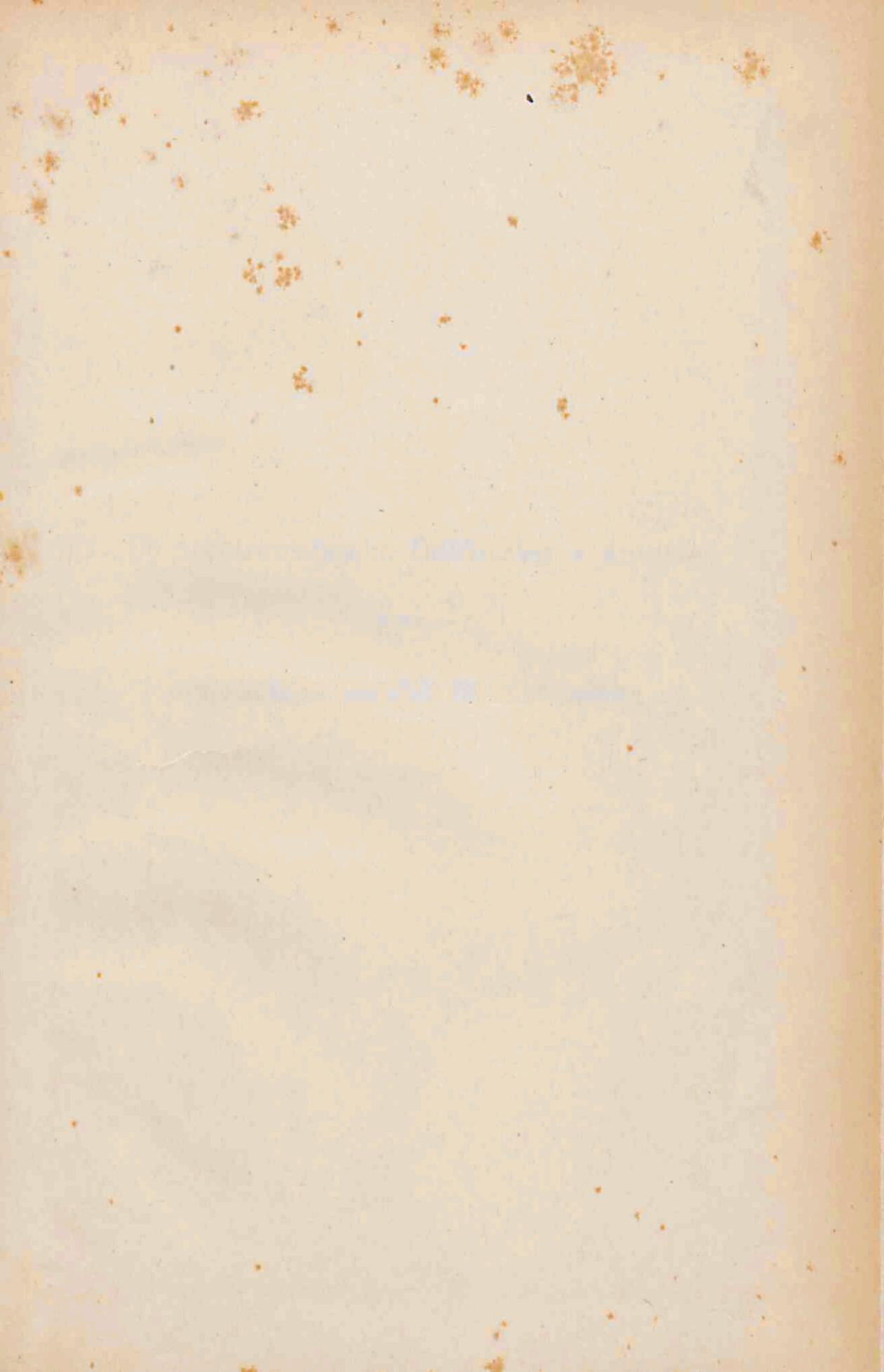
De spectroscopische
dubbelster η Aquilae
benevens eenige algemeene
opmerkingen over verander-
lijke radiale snelheden.

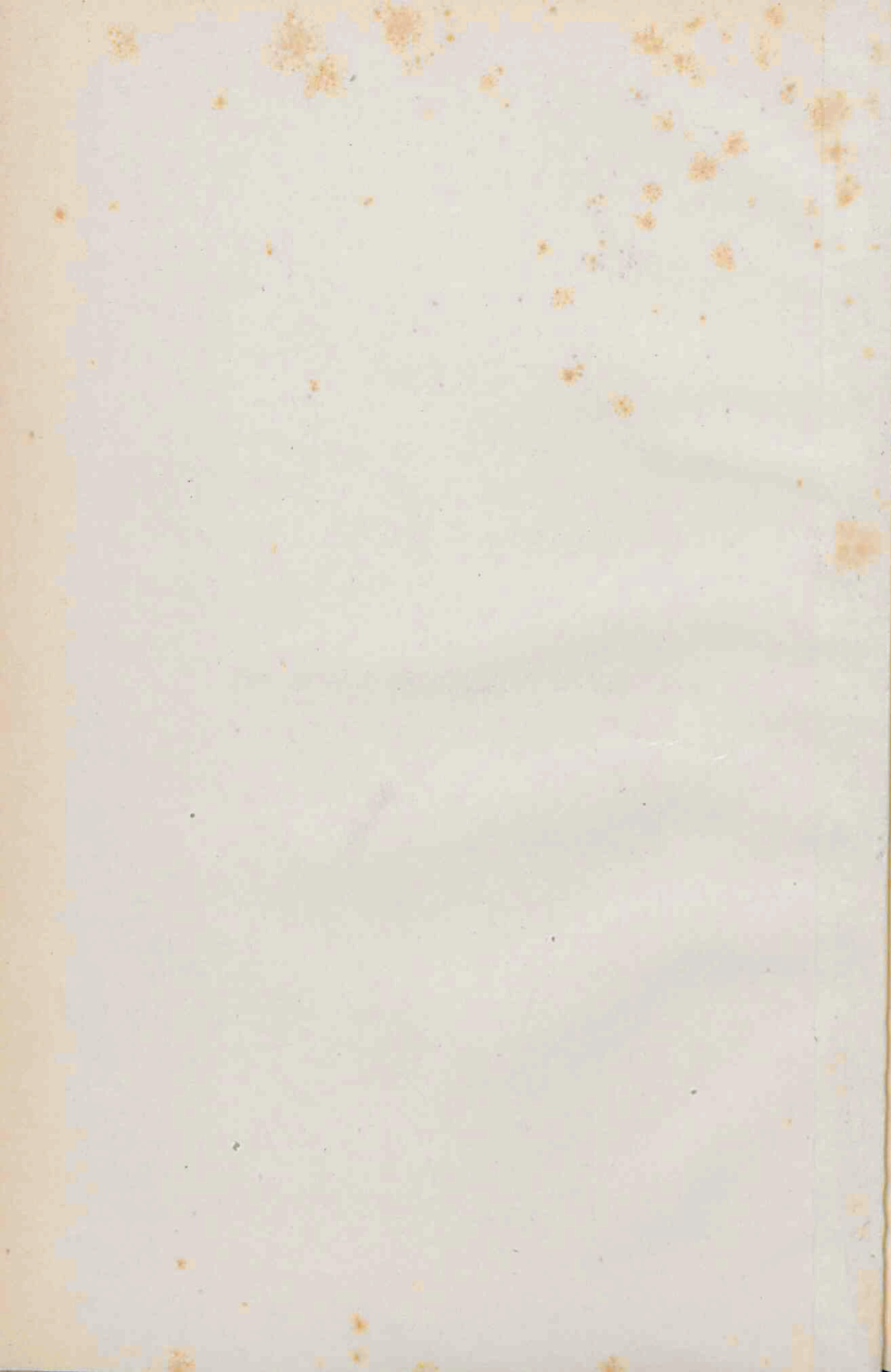
Diss.
Utrecht

1903

H. J. VAN LUMMEL.







De spectroscopische Dubbelster η Aquilae

BENEVENS

eenige algemeene opmerkingen over radiale snelheden.

Diss. Utrecht 1903

De spectroscopische Dubbelster η Aquilae

BENEVENS

eenige algemeene opmerkingen over radiale snelheden.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Sterrekunde

aan de Rijks-Universiteit te Utrecht,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. W. L. P. A. MOLENGRAAFF,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID,

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op **VRIJDAG 20 FEBRUARI 1903**, des namiddags te 4 uur,

DOOR

HENDRIK JAN VAN LUMMEL,

geboren te **DOETINCHEM.**

ROTTERDAM,
C. A. TERNEDEN.
1903.



Aan mijne Ouders.

Zeer gaarne maak ik gebruik van de mij hier aangeboden gelegenheid, om mijnen hartelijken dank te betuigen aan de Hoogleeraren in de faculteit der Wis- en Natuurkunde, wier leiding ik bij mijne studiën mocht genieten.

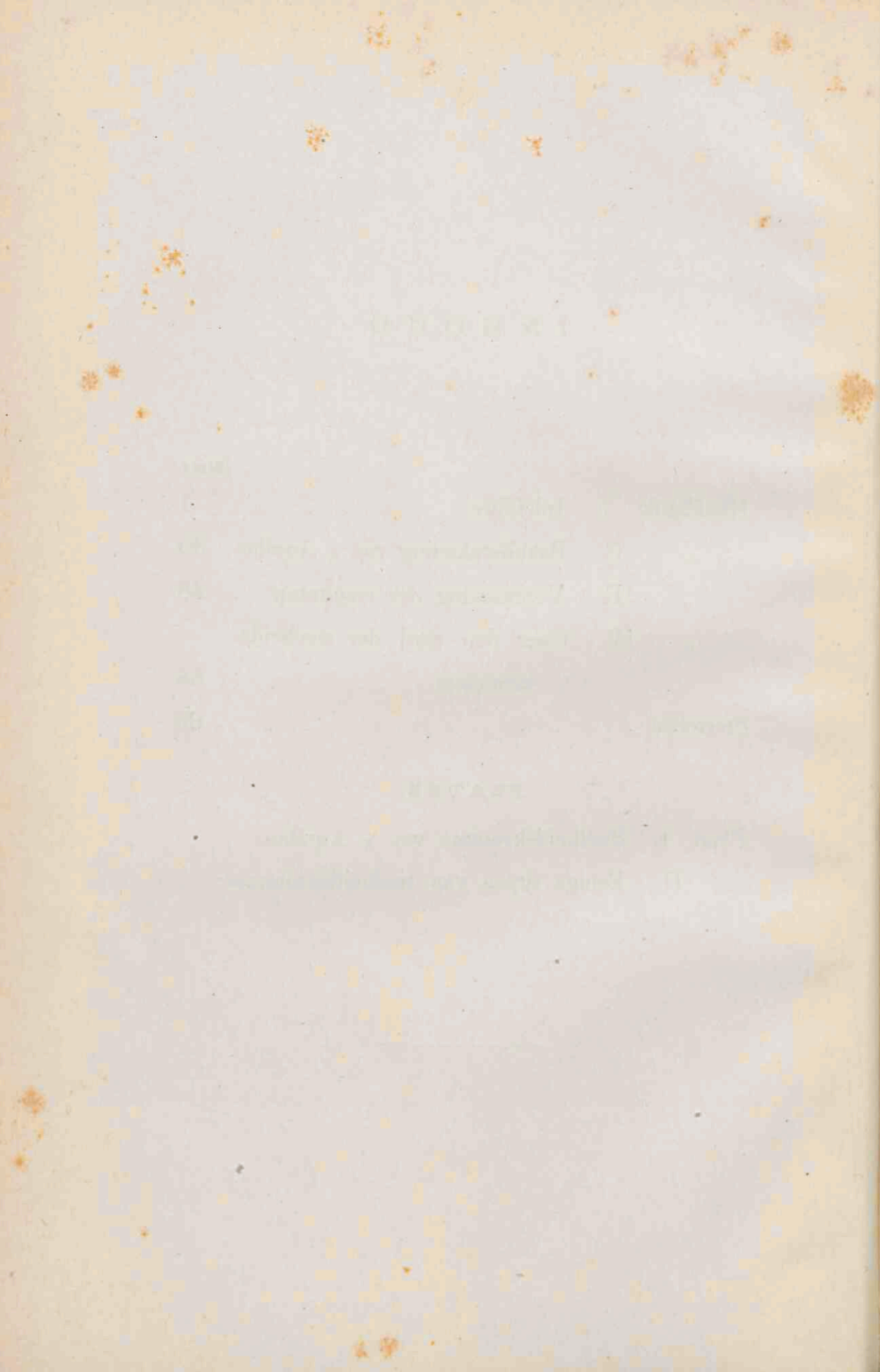
Voor al U, mijnen hooggeachten promotor, breng ik bij dezen mijnen bijzonderen dank voor de hulp en steun mij in zoo ruime mate bij het samenstellen van dit proefschrift verleend.

I N H O U D.

	Bladz.
Hoofdstuk I. Inleiding	1
„ II. Baanberekening van η Aquilae	30
„ III. Vergelijking der resultaten .	48
„ IV. Over den aard der snelheids- krommen	58
Sterrelijst	66

P L A T E N.

Plaat I. Snelheidskromme van η Aquilae.
„ II. Eenige typen van snelheidskrommen.



HOOFDSTUK I.

Inleiding.

Sedert Huggins in 1866 en H. C. Vogel in 1871 de spectroscop het eerst gebruikten, om uit de verandering der golflengten, volgens het principe van Doppler, de beweging der sterren in de gezichtslijn na te gaan, heeft niet alleen het instrument groote verbeteringen ondergaan, doch is ook het aantal waarnemers steeds uitgebreid.

Onder de verbeteringen van het instrument mag wel in de eerste plaats genoemd worden de grootere stabiliteit der toestellen, welke voornamelijk verkregen werd door deze uitsluitend met het oog op bovengenoemde waarnemingen in te richten. Deze verbetering schijnt op de Parijsche sterrewacht, waar de groote telescoop van 1.2 M. opening¹⁾ met de

1) Transformation du grand télescope de l'observatoire de Paris pour l'étude des vitesses radiales des astres. Comptes Rendus CXV pag. 783.

spectroscoop verbonden is, nog niet ingevoerd te zijn. Dit is dan ook een der redenen, waaraan Vogel de betrekkelijk geringe bijdragen van dit observatorium aan de spectroscopische waarnemingen meent te moeten toeschrijven. ¹⁾

Aan dezelfde oorzaak moeten denkelijk ook worden toegeschreven de weinig waarschijnlijke waarden, die Deslandres vindt voor de bewegingen in de gezichtslijn van α Aquilae. ²⁾

Uit zijne waarnemingen van α Aquilae, loopende van Juli 1892 tot October 1895, leidt Deslandres namelijk af, dat genoemde ster een spectroscopische dubbelster moet zijn. Om hiervan een baan te kunnen berekenen, neemt hij eene algemeene periode van 43 dagen aan, waarbij echter eene tweede gevoegd moet worden van omstreeks 5 dagen, om eenigszins overeenstemming tusschen waarneming en berekening te kunnen verkrijgen. De nu nog gevonden verschillen meent hij te kunnen verklaren door amplitude en periode beide veranderlijk aan te nemen.

Vreemd mag het schijnen, dat Deslandres, vooral met het oog op zijne waarnemingen, uit het boven-

1) Ueber die im letzten Decennium in der Bestimmung der Sternbewegungen in der Gesichtslinie erreichten Fortschritte von H. C. Vogel. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1900. XX.

2) On the spectrum of α Aquilae and its velocity in the line of sight. by H. C. Vogel. Astr. Phys. Journal IX. pag. 13.

staande niet heeft afgeleid, dat daarin fouten moesten voorkomen. De waarnemingen toch vertoonen reeds op het eerste gezicht afwijkingen, die moeilijk met de middelbare fout, die hij opgeeft, te rijmen zijn.

Latere waarnemingen van Vogel en wel 29, loopende over de maanden Augustus tot December 1896 en November en December 1897,¹⁾ hebben aangetoond, dat α Aquilae niet behoort tot de sterren, wier snelheden in de gezichtslijn veranderlijk zijn. Van Campbell zijn mij geene waarnemingen van α Aquilae bekend.

Vogel meent de weinig waarschijnlijke waarnemingen van Deslandres aan twee oorzaken te moeten toeschrijven en wel aan de onvoldoende stabiliteit van het instrument en aan het verschil van instellen op breede en diffuse waterstoflijnen bij het uitmeten der spectrogrammen, die op verschillende data verkregen zijn. Deze meening werd door Deslandres in een, niet altijd even gematigde, polemieek bestreden.

In de tweede plaats is de toepassing der fotografie bij de spectroscopische waarnemingen, die Vogel in 1887 met hulp van Scheiner invoerde, van zeer grooten invloed op de nauwkeurigheid der verkregen resultaten geweest. Dit blijkt wel uit het feit, dat

1) Ibidem. Astr. Phys. Journal IX pag. 10.

deze nauwkeurigheid bij de eerste toepassingen ongeveer 8maal vergroot werd, daar de waarschijnlijke fout, die bij de directe waarnemingen te Greenwich ± 2.9 g.M. (21.5 K.M.) bedroeg, bij de Potsdamer spectrografische opnamen tot ± 0.35 g.M. (2.6 K.M.) gereduceerd werd. ¹⁾ Hierbij mag echter niet vergeten worden, dat er ook nog andere oorzaken in het spel kunnen geweest zijn.

Valt de reden van de eerste verbetering dadelijk in het oog, zoo zal die van de tweede wel eenigszins nader verklaard dienen te worden, wil men inzien, dat Scheiner het recht had te schrijven: „Obgleich die Anwendung der Photographie auf die Darstellung der Spectra erst jüngerer Datums ist, ist sie doch schon von höchster Bedeutung für dieselbe gewesen und verspricht eine neue Aera in derselben zu eröffnen.” ²⁾

De verbetering berust, wat de sterrespectra betreft, op twee gronden en wel op het fysiologisch onderscheid tusschen het directe zien en de opname op een lichtgevoelige plaat én op het onderscheid in de werking van de onrust in de lucht op beide.

1) Ueber die im letzten Decennium etc. von H. C. Vogel. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1900. XX.

2) Die Spectralanalyse der Gestirne von Dr. J. Scheiner. Leipzig 1890. pag. 101.

Wat het eerste onderscheid betreft dient te worden opgemerkt, dat men—met het oog lichtintensiteiten waarneemt, terwijl de plaat voor lichtkwantiteiten gevoelig en dus de expositietijd van invloed is. Dit brengt ook nog mede, dat men bij langeren expositieduur van sterker dispersie kan gebruik maken. De cylinderlens, die bij directe waarneming gebruikt moet worden, kan vervallen, waardoor de intensiteit grooter wordt, hetgeen weer grootere dispersie mogelijk maakt.

Maakt de onrust der lucht de instelling bij directe waarneming uiterst moeilijk, zoo niet dikwijls onmogelijk, de fotografische plaat geeft bij langdurige expositie het gemiddelde beeld van ieder moment.

Is de lucht rustig, dan wordt het beeld zoo scherp, als het, de optische instrumenten en de grofheid der zilverkorrel in aanmerking genomen, slechts worden kan.

Trilt de lucht, dan zal er om zoo te zeggen een zwaartepuntsbeeld ontstaan, waarbij de trillingen eene wazigheid te voorschijn roepen, die met hare amplituden overeenkomt; heeft er alleen helderheidsverandering plaats, dan geeft de fotografie de gemiddelde helderheid weer.

Hoewel tegenover deze groote voordeelen ook

wel eenige nadeelen te noemen zijn, overtreffen de eerste de laatste zoozeer, dat men de uitspraak van Scheiner zal moeten billijken, zelfs al verwaarloost men ook het voordeel, dat de platen gevoelig zijn voor violette en ultra-violette stralen. Campbell, wiens bevoegdheid tot oordeelen in deze zaak zeker niet ontkend kan worden, schrijft: „Even with the powerfull telescope at command (36-inch. refractor van het Lick Observatory) it was clear, that the number of stellar spectra suitable for accurate visual measurement was very small.”¹⁾

Na dien tijd heeft men zich zoowel in Europa als ook in Noord-Amerika met ijver op het onderzoek van radiale snelheden toegelegd. In dit laatste land stelden velen door hunne milde bijdragen de astronomen in staat, zich van de meest volmaakte en nauwkeurige toestellen te voorzien. Het zijn dan ook voornamelijk Campbell, Wright en hunne helpers, die het meeste en nauwkeurigste materiaal ter kennis van de beweging der sterren in de gezichtslijn leveren met behulp van de Mills spectrograaf (aldus naar den schenker genoemd).

Pickering, die met Vogel het eerst op de ver-

1) The Mills spectograph of the Lick Observatory. Astr. phys. Journal VIII. pag. 123.

anderlijkheid dier beweging heeft gewezen, behoort eveneens in Noord-Amerika thuis.¹⁾

Belopolsky te Pulkowa heeft op dit gebied ook vele waarnemingen gedaan en gepubliceerd, doch de veel grootere nauwkeurigheid, die bovengenoemde onderzoekers bereiken, schijnt op zijne werkzaamheid in deze richting eenen verlamdenden invloed uit te oefenen, daar in den laatsten tijd niet vele waarnemingen van uit Pulkowa bekend geworden zijn.

In Engeland is het voornamelijk Newall, die zich met onderzoekingen in deze richting bezighoudt. Door het observatorium te Greenwich toch zijn er sedert 1892 geene waarnemingen bekend gemaakt, terwijl ik van Huggins geene waarnemingen van radiale snelheden heb kunnen vinden.

Terwijl Vogel en Scheiner in Duitschland nog steeds de eerste plaats innemen, is Deslandres de eenige in Frankrijk, die af en toe waarnemingen publiceert.

De betrekkelijk groote voorraad gegevens tegenover de weinige bewerkers, die zij gevonden hebben, bracht den schrijver van dit proefschrift er toe, zich met de bewerking van sommige dezer gegevens bezig te houden en zoo mogelijk iets naders omtrent

1) A new class of binaries. Monthly Notices of the R. A. S. L. pag. 296.

den aard der snelheidskromme gewaar te worden.

Reeds spoedig, nadat bovengenoemde methode ter bepaling van de snelheid in de gezichtslijn was ingevoerd, heeft men getracht uit de verandering dier snelheid een baan af te leiden. Zoowel in geometrische als in analytische richting heeft men dit vraagstuk trachten op te lossen, hoewel uit den aard der zaak geen van beide methoden streng volgehouden zijn.

De oudste mij bekende methode is die van A. A. Rambaut,¹⁾ waaraan nu nog alleen historische waarde moet worden toegekend, daar de bewerking veel langer en ingewikkelder is dan die van later gevondene, zonder op grootere nauwkeurigheid te kunnen aanspraak maken.

Rambaut heeft zijne rekenwijze verduidelijkt aan β Aurigae, daarbij gebruik makende van de gegevens van Pickering.

Een kort overzicht van zijne methode zal, in verband met hetgeen later volgt, kunnen doen zien, waarin zij van de andere afwijkt en welke de oorzaak is van hare groote bewerkelijkheid.

Rambaut kiest de gezichtslijn als x-as en als

1) On the Determination of Double Star Orbits from spectroscopic Observations of the Velocity in the Line of Sight. Monthly Notices of the R. A. S. LI. pag. 360.

nulpunt van zijn coördinatenstelsel het middelpunt van de hoofdster, waaruit volgt, dat, als v de relatieve snelheid der beide componenten in de gezichtslijn voorstelt:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

en dus:

$$x = \int v dt.$$

Onder de snelheidskromme verstaat hij de lijn, die gelegd kan worden door de punten, die de tijden tot abscissen en de waargenomen veranderlijke snelheden tot ordinaten hebben.

Uit bovengenoemde integraal volgen de beide volgende eigenschappen dezer snelheidskromme.

1°. de oppervlakte van de kromme boven de t -as moet gelijk zijn aan die onder dezelfde lijn.

2°. de oppervlakte tusschen de kromme, de t -as en de ordinaat van de maximumsnelheid moet gelijk zijn aan die tusschen de kromme, de t -as en de ordinaat van de minimumsnelheid.

Daar de ordinaten $v = \frac{dx}{dt}$ voorstellen en de abscissen de tijden, is $\int v dt$, d. w. z. het vlak tusschen de snelheidskromme, de abscissenas en twee bepaalde coördinaten, gelijk aan het verschil der bij deze coördinaten behorende x . Na eenen geheelen

omloopstijd zal dit verschil $= 0$ zijn, waaruit de eerste eisch volgt.

Op de tijden t_1 en t_2 , d. w. z. op de oogenblikken dat $v = 0$ is, is de beweging van de ster evenwijdig aan de knopenlijn. Noemt men nu het oogenblik, dat de ster de klimmende knoop passeert T en dat waarop zij door de dalende gaat T^1 dan zal:

$$\int_T^{t_1} v \, dt + \int_{t_1}^{T^1} v \, dt = 0$$

moeten zijn, waaruit de tweede eisch volgt.

Hierbij is wel in het oog te houden, dat Rambaut het geval bespreekt, waarbij de baan uit de relatieve snelheid der beide sterren wordt bepaald. Bovengenoemde eischen gelden dus ook alleen voor dit geval. Rambaut kiest als y -as de knopenlijn en gaat ter berekening van de ordinaat als volgt te werk:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$$

hetgeen hij schrijft in den vorm:

$$y = cx \left\{ B + \int \frac{dt}{x^2} \right\}$$

waarin de y bepaald is, als B en c bekend zijn. B . laat zich gemakkelijk uit deze betrekking elimi-

neeren, door bij de integratie uit te gaan van het oogenblik, waarop $y = 0$ is en dat behoort bij eene snelheid, die het gemiddelde is van de maximum- en minimumsnelheid en dus uit de snelheidskromme is af te lezen.

De bepaling van c levert meer moeilijkheden op. Om deze te ontgaan kiest Rambaut eene willekeurige waarde hiervoor en voert daarna de integratie

$y = c \int \frac{dt}{x^2}$ uit. Daarna zet hij de punten, die bij

de nu gevonden coördinaten behooren, uit en trekt daar doorheen, wat hij noemt de „apparent ellipse”.

Deze ellips is een orthografische projectie van de ware baan op een vlak, gaande door de knoopenlijn en waarvan de hoek met dat van de ware baan onbekend is. Uit deze ellips leidt Rambaut nu verder de waarden af, die hij ter berekening van de elementen noodig heeft.

Zooals reeds gezegd is, heeft deze methode voornamelijk door de daarin voorkomende integratie geen algemeene toepassing gevonden. Ik mag niet onopgemerkt laten, dat Rambauts berekening zeker beter met de waarneming zou geklopt hebben, indien hij zijn snelheidskromme meer aan de gegevens had aangepast.

Ofschoon de methode van Wilsing in chronolo-

gischen zin de tweede is, wil ik liever eerst die van Lehmann-Filhés bespreken, daar deze, die wel weer geometrisch mag genoemd worden, beter aan die van Rambaut aansluit. Lehmann-Filhés¹⁾ begint met op te merken, dat zijne methode geschikt is voor de beide gevallen, die zich bij dit vraagstuk kunnen voordoen en wel:

1°. beide sterren zijn helder genoeg om een meetbaar spectrum te geven, zooals dit bijv. bij β Aurigae en ζ Ursae maioris het geval is. Men kan dan aannemen, dat de gemeten snelheden relatieve zijn. De beweging van de eene ten opzichte van de andere, wier massamiddelpunt dan in het nulpunt der coördinaten staat, wordt nu dus nagegaan.

2°. Slechts één der beide sterren geeft een meetbaar spectrum, zooals o.a. bij Algol en α Virginis. Hierbij wordt de beweging nagegaan ten opzichte van het zwaartepunt van het systeem, waarvan nu eerst de snelheid bepaald en van de waargenomen snelheden afgetrokken moet worden.

Lehmann-Filhés kiest een drieassig coördinatenstelsel en wel als z-as de verlenging der gezichtslijn van uit de ster en als xy-vlak het raakvlak aan den

1) Ueber die Bestimmung einer Doppelsternbahn aus spectroscopischen Messungen der im Visionsradius liegenden Geschwindigkeitscomponente. Astr. Nachr. n°. 3242.

hemelbol op de bewuste plaats zonder zich over de ligging der x- of y-as uit laten. De ligging van het nulpunt wordt door het onder 1°. of 2°. genoemde bepaald.

De met de spectrocoop bepaalde snelheden $\frac{dz}{dt}$ zijn dus positief als de heliocentrische afstand van de ster, verminderd met den heliocentrischen afstand van het xy-vlak grooter wordt.

Wanneer i de helling der baan op het xy-vlak, ω de lengte van het periastron, u het argument van breedte, e de excentriciteit, r den radius vector, p den halven parameter en t den tijd beteekent, volgt uit:

$$z = r \sin i \sin u$$

en:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{f}{V_p} \sin i (\cos u + e \cos \omega)$$

waarin f de attractie-constante voorstelt. Hierbij valt nog op te merken, dat deze formule alleen betrekking heeft op het onder 1°. genoemde geval, waartoe dat onder 2°. genoemd echter direct kan worden teruggebracht door te schrijven:

$$\frac{dz}{dt} = V + \frac{f}{V_p} \sin i (\cos u + e \cos \omega).$$

V beteekent hierin de gemiddelde snelheid van het systeem, die, zooals uit het volgende zal blijken, gemakkelijk uit de snelheidskromme kan bepaald worden.

Noemt men de maximum- en minimumwaarden A en B, waarbij B ook positief moet genomen worden, dan volgt uit het bovenstaande:

$$A = \frac{f}{\sqrt{p}} \sin i (1 + e \cos \omega)$$

$$B = \frac{f}{\sqrt{p}} \sin i (1 - e \cos \omega).$$

Hieruit volgt weer:

$$e \cos \omega = \frac{A - B}{A + B}.$$

Nu bespreekt Lehmann-Filhés dezelfde eischen, welke Rambaut ook voor de snelheidskromme gevonden heeft, doch is hiertoe, zooals hij van te voren reeds heeft aangegeven, onafhankelijk van dezen laatste gekomen.

Deze eischen geven ook gelegenheid tot bepaling van bovengenoemde V, de snelheid van het systeem.

Heeft men namelijk met het onder 2^o. besproken geval te doen, dan voldoet de snelheidskromme niet aan de beide gevonden eischen.

Door verlegging van de abscissenas kan men dan echter overeenstemming verkrijgen. De verplaatsing, die deze as hierbij ondergaat, geeft dan de snelheid

van het systeem aan. Ook dit is door beide bewerkers opgemerkt.

Terwijl Rambaut nu $c \int \frac{dt}{x^2}$ gaat bepalen, is Lehmann-Filhés erin geslaagd een veel eenvoudiger methode te vinden. Hij onderscheidt namelijk de grootheden, die betrekking hebben op de beide oogenblikken, dat $\frac{dz}{dt} = 0$ is, door de aanwijzers 1 en 2.

Zoodat dus het oogenblik t_1 de tijd is, waarop de beweging evenwijdig is aan de knopenlijn en de ster van de klimmende naar de dalende knoop gaat, terwijl zij op het oogenblik t_2 zich evenwijdig aan de knopenlijn beweegt, gaande van den dalenden naar den klimmenden knoop, waaruit volgt dat $\sin u_1$ positief, $\sin u_2$ negatief is. Daar $\frac{dz}{dt} = 0$ is, volgt

$$\text{uit } \frac{dz}{dt} = \frac{f}{\sqrt{p}} \sin i (\cos u + e \cos \omega):$$

$$\cos u_1 = \cos u_2 = -e \cos \omega$$

en in verband met het bovenstaande:

$$\cos u_1 = \cos u_2 = -\frac{A-B}{A+B}$$

dus:

$$\sin u_1 = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B} \quad \sin u_2 = -\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}$$

Hieruit volgt:

$$z_1 = r_1 \sin i \sin u_1$$

$$z_2 = r_2 \sin i \sin u_2 = - r_2 \sin i \sin u_1$$

en dus:

$$\frac{r_1}{r_2} = - \frac{z_1}{z_2}.$$

z_1 en z_2 laten zich bepalen door mechanische kwadratuur, als men $\int \frac{dz}{dt} dt$ van de abscis van het maximum tot die van het punt, behoorende bij z_1 integreert, respectievelijk van de abscis van het minimum tot die van het punt behoorende bij z_2 . Gemakkelijker en voldoende is het echter de overeenkomstige vlakken door uittellen op millimeterpapier te bepalen, daar de keuze van de eenheid willekeurig is, omdat men met eene verhouding te doen heeft. Het is voornamelijk deze bewerking, die de methode van Lehmann-Filhés zoo kort maakt en waardoor zij zich vooral van die van Rambaut onderscheidt.

Uit de waarde van r_1 en r_2 laat zich nu afleiden:

$$e \sin \omega = \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1} \sin u_1$$

of:

$$e \sin \omega = \frac{2 \sqrt{AB}}{A+B} \cdot \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1}$$

Uit de eigenschappen van de ellips laten zich nu gemakkelijk de overige elementen bepalen, zoodat Lehmann-Filhés het volgende stel vergelijkingen vindt :

$$\sin u_1 = \frac{2 \sqrt{A B}}{A + B}$$

$$\cos u_1 = - \frac{A - B}{A + B}$$

$$e \sin \omega = \sin u_1 \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1}$$

$$e \cos \omega = - \cos u_1$$

voor groote excentriciteiten:

$$\sqrt{1 - e^2} = \pi \operatorname{tg} u_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t_2 - t_1}{U} \right)$$

$$\mu = \frac{2\pi}{U}$$

$$\operatorname{tg} \frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{u_1 - \omega}{2}$$

$$T = t_1 - \frac{E_1 - e \sin E_1}{\mu}$$

$$a \sin i = 43200 \frac{A + B}{\pi} \sqrt{1 - e^2}.$$

waarin U den omloopstijd aangeeft en μ de gemiddelde snelheid.

De omloopstijd kan uit de getrokken kromme afgeleid worden, of is bekend als de ster tevens een veranderlijke ster is.

Volledigheidshalve moet hier bijgevoegd worden, dat de schrijver terzelfder plaatse formules geeft voor de toepassing van de methode der kleinste kwadrate, hoewel hijzelf schrijft:

„Es wird sich meiner Ansicht nach wohl kaum der Fall ereignen, dass man genähert bekannte Elemente nach der Methode der kleinsten Quadrate zu verbessern sucht.”

In het kader van deze bewerkingen behoort ook nog de methode, die Schwarzschild ¹⁾ aangegeven heeft.

Deze behandelt bij zijne berekening alleen het meer algemeene geval onder 2° in het voorgaande genoemd, uitgaande van de vergelijking:

$$\frac{dz}{dt} = V + \frac{f}{\sqrt{p}} \sin i (\cos u + e \cos \omega)$$

die men, door $D = \frac{f \sin i}{\sqrt{p}}$ en $C = V + D e \cos \omega$ te stellen, kan schrijven:

$$\frac{dz}{dt} = C + D \cos u$$

waaruit volgt, dat, als men M_1 en M_2 de maximum- en minimumwaarden van $\frac{dz}{dt}$ noemt, nu van hun eigen teeken voorzien:

I) Ein Verfahren bei der Bahnbestimmung bei spectroscopischen Doppelsternen.

Astr. Nachr. no. 3629.

$$\begin{aligned} M_1 &= C + D \\ M_2 &= C - D \end{aligned}$$

is.

Door nu op de hoogte C boven de abscissenas, dus ter halver hoogte tusschen maximum en minimum eene lijn evenwijdig aan deze as te trekken en van hieruit nieuwe coördinaten ζ te tellen, vindt men:

$$\frac{dz}{dt} - C = \zeta = D \cos u$$

Nu zoekt Schwarzschild op de snelheidskromme zoodanige puntenparen, dat de abscissen een halven omloopstijd verschillen, terwijl de ordinaten tegengesteld gelijk zijn.

Om zulke paren te vinden moet men de kromme om de laatst getrokken evenwijdige lijn omklappen, over den afstand, die met den halven omloopstijd overeenkomt, verschuiven en de snijpunten van de nieuwgevondene kromme met de oorspronkelijke bepalen.

Schwarzschild toont nu aan, dat men uit de in het algemeen voorkomende vier snijpunten direct dat paar kan aanwijzen, dat met het peri- en het apastron overeenkomt. Er mag hierbij wel opgemerkt worden, dat, zooals uit achterstaande lijnen blijkt, (zie plaat II) de vier snijpunten alleen dan duidelijk te signaleeren zijn, wanneer de lijnen zeer nauwkeurig getrokken zijn en de excentriciteit niet te klein is.

Is deze echter klein of zijn de lijnen niet geheel juist geteekend dan is de plaats der snijpunten niet scherp bepaald.

Is de ligging van het periastron bepaald, dan is hiervoor, daar $v = 0$ en $u = \omega$ is:

$$\frac{\zeta}{D} = \cos \omega$$

terwijl het kwadrant, waarin ω gelegen is, door een eenvoudige redeneering kan bepaald worden.

Om de excentriciteit te bepalen kiest Schwarzschild een punt Q op de kromme met de abscis t en de ordinat ζ ongeveer midden tusschen periastron en bepaalt daarna een punt Q' met de abscis t' en de ordinat $\zeta' = -\zeta$.

In het algemeen, zullen er twee dergelijke punten Q' bestaan en wel een op denzelfden tak der kromme en het andere op den tweeden tak, dit laatste heeft Schwarzschild voor zijne verdere berekening noodig.

Uit de hierboven genoemde gegevens leidt Schwarzschild in verband met de bekende betrekkingen:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{ en } \operatorname{tg} \frac{1}{2} v' = \operatorname{tg} \frac{1}{2} E' \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

het volgende ter berekening der excentriciteit af:

$$e = \frac{\cos \frac{E' - E}{2}}{\cos \frac{E' + E}{2}}$$

waarin E en E' de excentrische anomalieën zijn, behoorende bij de tijden t en t'

en:

$$e (\sin E' - \sin E) = \sin (E' - E)$$

waaruit weer kan worden afgeleid:

$$E' - E - \sin (E' - E) = 2\pi \frac{t' - t}{U}.$$

En verder:

$$\sin \left(\frac{E' + E}{2} \right) = \cos v \sin \left(\frac{E' - E}{2} \right).$$

Nu stelt hij:

$$\frac{E' - E}{2} = \eta \text{ en } \frac{E' + E}{2} = \xi$$

waarvoor dus η kan bepaald worden uit:

$$2\eta - \sin 2\eta = 2\pi \frac{t' - t}{U}$$

De oplossing dezer transcendentale vergelijking heeft de bewerker in een tafeltje gebracht.

Uit de ordinaat ξ van het punt Q vindt men met behulp van:

$$\frac{\xi}{D} = \cos u$$

het argument van breedte u , waaruit weer de ware

anomalie v bepaald kan worden, zoodat nu de ξ bepaald wordt uit:

$$\sin \xi = \cos v \sin \eta$$

en dus:

$$e = \frac{\cos \eta}{\cos \xi}.$$

a sin i laat zich nu bepalen uit:

$$a \sin i = D \frac{U}{2\pi} \sqrt{(1-e^2)^3}.$$

Nijland merkt hierbij op, dat als men het punt Q niet willekeurig kiest, doch zoo, dat de ware anomalie 90° is, de verdere berekening veel eenvoudiger wordt.

In dit geval is:

$$\frac{\zeta}{D} = \cos u = \cos (90^\circ + \omega) = -\sin \omega$$

waardoor ζ en dus t bepaald is.

$$b \sin E = r \sin v = p$$

$$\sin E = \frac{p}{b} = \sqrt{1-e^2} \text{ of } e = \cos E$$

$$E - e \sin E = \mu (t - t_0)$$

$$2E - \sin 2E = 2M$$

Hieruit E (zie boven) en dan e .

Daargelaten de opmerking over de snijpunten, waaruit blijkt, dat deze niet altijd even nauwkeurig zijn aan te geven, schijnt mij de bewerking van Schwarzschild geene bekorting toe.

In de praktijk wordt deze methode niet veel gebruikt, daar zoover mij bekend, geen der bewerkers van spectroscopische dubbelsterren haar toegepast heeft. Als contrôlebewerking kan zij echter haar nut hebben.

De eerste, die meer analytisch te werk ging was Wilsing, wien de methode van Rambaut te lang en te bewerkelijk toescheen. ¹⁾

Na er op gewezen te hebben, dat Rambaut een schijnbare baan construeert en daaruit de noodige gegevens voor zijne berekeningen vindt, geeft Wilsing den loop zijner methode als volgt aan:

„Bequemer dürfte es jedoch sein wenigstens sobald es sich nicht um sehr excentrische Bahnen handelt, den Ausdruck für die beobachtete Geschwindigkeitscomponente selbst in eine nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen der mittleren Anomalie geordnete Reihe zu entwickeln, deren Coefficienten von den Elementen abhängen. Wird dann die graphische Methode zur Ausgleichung der Beobachtungen herangezogen, so hängt in diesem Falle die Bestimmung der Elemente allein von dem Zuge der Geschwin-

1) Ueber die Bestimmung von Bahn-elementen enger Doppelsterne aus spectroscopischen Messungen der Geschwindigkeits-Componenten. Astr. Nachr. n°. 3198.

digkeitscurve ab, und die Construction der scheinbaren Ellipse wird überflüssig."

Wilsing maakt hierbij gebruik van hetzelfde coördinatenstelsel, dat reeds bij de methode van Lehmann-Filhés genoemd werd, terwijl ook de letters dezelfde beteekenis hebben.

In de reeds meer gebruikte formule:

$$\frac{dz}{dt} = V + \sin i \frac{d.r \sin (v + \omega)}{dt}$$

voert hij in plaats van de ware anomalie v de excentrische E in en vindt dan:

$$\frac{dz}{dt} = V + a \sin i (\sqrt{1 - e^2} \cos E \cos \omega - \sin E \sin \omega) \frac{dE}{dt}.$$

Daarna drukt hij E in de middelbare anomalie μt uit, waardoor, daar alleen de eerste machten der exentriciteit in aanmerking genomen worden bovenstaande formule overgaat in:

$$\frac{dz}{dt} = V + a \mu \sin i \{ \cos (\omega + \mu t) + e \cos (\omega + 2 \mu t) \}.$$

Wordt hierin nu nog μt vervangen door $\mu T + M_0$, waarin M_0 de middelbare anomalie op den tijd $T = 0$ voorstelt, dan vindt hij de volgende betrekking:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & V + a_1 \sin \mu T + b_1 \cos \mu T + a_2 \sin 2 \mu T \\ & + b_2 \cos 2 \mu T. \end{aligned}$$

Zijn uit deze vergelijking de coëfficiënten, a_1 , b_1 , a_2 en b_2 bepaald, dan volgen de elementen uit:

$$a_1 = -a\mu \sin i \sin(\omega + M_0); b_1 = a\mu \sin i \cos(\omega + M_0)$$

$$a_2 = -ea\mu \sin i \sin(\omega + 2M_0); b_2 = ea\mu \sin i \cos(\omega + 2M_0).$$

Wilsing geeft verder nog een methode aan, waardoor deze coëfficiënten kunnen benaderd en de oplossing door de kleinste kwadraten kan ontgaan worden.

Zooals Wilsing zelf opmerkt gaat deze methode alleen door in geval de excentriciteit klein is, daar hij bij de vervanging van E door μ de termen met de kwadraten der excentriciteit weglaat.

De methode van Henry Norris Russell¹⁾ heeft dit bezwaar niet en is dan ook op banen van alle mogelijke excentriciteiten van toepassing.

Russell stelt weer den omloopstijd U en de daarmee overeenstemmende waarde μ , de gemiddelde beweging, bekend. Hij ontwikkelt nu de radiale snelheid in eene reeks van Fourier van den vorm:

$$v = C_0 + C_1 \cos \mu(t - t_0) + C_2 \cos 2\mu(t - t_0) + \dots \\ + S_1 \sin \mu(t - t_0) + S_2 \sin 2\mu(t - t_0) + \dots$$

waarin t den tijd en t_0 den aanvangstijd voorstelt.

Om de coëfficiënten C_0 , C_1 , C_2 ... S_1 , S_2 ... te bepalen, verdeelt Russell den omloopstijd in

1) An improved method of calculating the orbit of a spectroscopic binary. Astr. phys. Journal XV. pag. 252.

2 n gelijke deelen en bepaalt de hiermee overeenkomende radiale snelheden $v_0, v_1, \dots v_{2n-1}$ uit de meergenoemde snelheidskromme.

Acht vergelijkingen van den vorm:

$$C_0 + C_n = \frac{1}{n} (v_0 + v_2 + \dots v_{2n-2})$$

$$C_0 - C_n = \frac{1}{n} (v_1 + v_3 + \dots v_{2n-1})$$

enz. geven gelegenheid bovengenoemde coëfficiënten te bepalen, waarbij Russell nog opmerkt, dat het meerdere werk van de berekening van C_n, C_{n-1}, C_{n-2} enz., hoewel deze voor de eigenlijke berekening niet noodig zijn, wel opweegt tegen de contrôle die deze waarden leveren op de convergentie der gebruikte reeksen.

Zijn deze coëfficiënten bekend, dan kan men de reeks schrijven:

$$y = A_0 + A_1 \cos \{ \mu (t - t_0) + \alpha_1 \} + A_2 \cos \{ \mu (t - t_0) + \alpha_2 \} + \dots$$

door:

$$A_1 \cos \alpha_1 = C_1 \quad A_2 \cos \alpha_2 = C_2$$

$$A_1 \sin \alpha_1 = -S_1 \quad A_2 \sin \alpha_2 = -S_2$$

te stellen.

Russell gaat nu een analytische uitdrukking zoeken van bovenstaanden vorm voor de radiale snelheid, uitgedrukt in de elementen.

De notatie zal weer hetzelfde gekozen worden als in de vroeger behandelde methoden.

Door weer uit te gaan van:

$$z = r \sin(v + \omega) \sin i$$

en, na gedifferentieerd te hebben, $r \cos \omega$ en $r \sin \omega$ uit te drukken in de bekende reeksen voor de elliptische beweging, krijgt hij de volgende formule:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & \mu a \sin i (Y_1 \cos \omega \cos M - X_1 \sin \omega \sin M) \\ & + \mu e a \sin i (Y_2 \cos \omega \cos 2M - X_2 \sin \omega \sin 2M) \\ & + \dots \end{aligned}$$

waarin:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3}{8} e^2 + \frac{5}{192} e^4 - \dots &= X_1 \\ 1 - \frac{5}{8} e^2 - \frac{11}{192} e^4 - \dots &= Y_1 \\ 1 - \frac{2}{3} e^2 + \frac{1}{8} e^4 - \dots &= X_2 \\ 1 - \frac{5}{6} e^2 + \frac{1}{12} e^4 - \dots &= Y_2 \end{aligned}$$

gesteld zijn.

Wordt nu:

$$\begin{aligned} X_1 \sin \omega &= b_1 \sin \beta_1 & X_2 \sin \omega &= b_2 \sin \beta_2 \\ Y_1 \cos \omega &= b_1 \cos \beta_1 & Y_2 \cos \omega &= b_2 \cos \beta_2 \end{aligned}$$

enz.

gesteld en M door $M_0 + \mu(t - t_0)$ vervangen, dan gaat bovengenoemde reeks over in:

$$\begin{aligned} v = & V + \mu a \sin i. b_1 \cos \{\mu(t - t_0) + M_0 + \beta_1\} \\ & + \mu e a \sin i. b_2 \cos \{2\mu(t - t_0) + 2M_0 + \beta_2\} \\ & + \dots \end{aligned}$$

Door vergelijking van deze reeks en die met de coëfficiënten A_0, A_1 enz. vindt men:

$$V = A_0$$

$$b_1 \mu a \sin i = A_1 \quad M_0 + \beta_1 = \alpha_1$$

$$b_2 \mu e a \sin i = A_2 \quad 2 M_0 + \beta_2 = \alpha_2$$

enz.

Laat men bij de berekening van X_1 en volgende de termen met e^2 buiten rekening, dan gaan deze vergelijkingen over in:

$$\mu a \sin i = A_1 \quad M_0 + \omega = \alpha_1$$

$$\mu e a \sin i = A_2 \quad 2 M_0 + \omega = \alpha_2$$

waaruit volgt:

$$a \sin i = \frac{A_1}{\mu} \quad M_0 = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$e = \frac{A_2}{A_1} \quad \omega = 2 \alpha_1 - \alpha_2.$$

Neemt men den tweeden graad van e nog mede, dan kan men aan deze waarden nog eene correctie aanbrengen, die voldoende is, wanneer $e < 0,30$ is.

Hiertoe maakt men gebruik van de volgende formules:

$$a'' = a' \left\{ 1 + \frac{1}{2} e'^2 (1 + \frac{1}{2} \cos 2 \omega') \right\}$$

$$e'' = e' + \frac{1}{4} e'^3 (1 - \frac{1}{2} \cos 2 \omega')$$

$$\omega'' = \omega' - \frac{1}{6} e'^2 \sin 2 \omega'$$

$$M''_0 = M'_0 + \frac{1}{24} e'^2 \sin 2 \omega'$$

waarin de letters met één accent de eerstgevonden waarden beteekenen, die met de dubbel-accenten de gecorrigeerde.

Sluiten deze laatstgevonden waarden nog niet genoeg op de waarnemingen aan, dan moet men daarmede opnieuw b_1 , b_2 , β_1 en β_2 berekenen, waaruit dan als eindresultaat kan worden afgeleid:

$$a \sin i = \frac{A_1}{b_1 \mu} \quad M_0 = \alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1 - \beta_2$$

$$e = \frac{A_2 b_1}{A_1 b_2} \quad \omega = 2 \alpha_1 - \alpha_2 - 2 (\beta_1 - \omega') + (\beta_2 - \omega').$$

Deze vergelijkingen geven waarden van de elementen tot op 0.01 nauwkeurig zelfs als $e = 0.70$ is.

Voor verdere bijzonderheden omtrent deze methode, verwijs ik naar bovengenoemd tijdschrift, daar deze hier achterwege gelaten worden, omdat zij bij de bewerking van dit proefschrift niet gebruikt zijn.

HOOFDSTUK II.

Baanberekening van η Aquilae.

't Was oorspronkelijk mijn plan een zoo volledig mogelijk overzicht te geven van de waargenomen spectroscopische dubbelsterren en daarbij, voor zoo-ver dit niet reeds geschied was, zoo mogelijk een eerste benaderde baan aan te geven.

In den loop der bewerking echter deed zich de vraag voor, of de aard der getrokken snelheidskromme van invloed was op de verkregen resultaten. Deze te onderzoeken en zoo mogelijk te beantwoorden scheen mij van meer belang toe, zoodat hiertoe werd overgegaan.

Daar η Aquilae een object is, dat door twee waarnemers bewerkt was, scheen deze ster zich goed tot het onderzoek te zullen leenen.

De oudste waarnemingen hiervan zijn die van

Belopolsky ¹⁾ en wel 13 loopende over Juli en Augustus 1897, de latere zijn van Wright, ²⁾ waarvan een paar door Campbell overgemeten zijn. Wright heeft gedurende de maanden Juni—November 1898 28 waarnemingen verkregen. Beide waarnemers hebben uit hunne waarnemingen banen afgeleid, waarbij de laatste nog de methode der kleinste kwadraten heeft toegepast.

Bovendien heeft William J. S. Lockyer, ³⁾ een overzicht gegeven van alles wat op η Aquilae, als veranderlijke ster, betrekking heeft, waardoor het mogelijk is de op geheel verschillende wijzen verkregen resultaten met elkander te vergelijken.

In de volgende hoofdstukken zal ik eerst mijne berekening bespreken, daarna de resultaten met die van de andere berekenaars vergelijken, om eindelijk nog het een en ander omtrent de snelheidskromme op te merken.

A. *Eerste Benadering volgens Lehmann-Filhès.*

Ik meende wel te mogen beproeven de waarnemingen van Belopolsky en Wright te combineeren,

1) Researches on the spectrum of the variable star η Aquilae. Astr. phys. Journal VI pag. 393.

2) The orbit of η Aquilae. Astr. phys. Journal IX pag. 59.

3) Resultate aus den Beobachtungen des veränderlichen Sternes η Aquilae. W. J. S. Lockyer. Inaugural-Dissertation. Göttingen 1897.

hoewel uit de mededeeling van H. C. Vogel in meergenoemd Sitzungsbericht in de noot op blz. 5 blijkt, dat er tusschen de waarnemingen van de verschillende waarnemers betrekkelijk groote verschillen bestaan. Zoo bijv. leidde hij uit 23 waarnemingen van Belopolsky, Campbell, Newall en Lord een verschil van ± 2.8 KM. met de zijne af, terwijl uit 19 objecten gemiddeld met Campbell ± 2.0 KM. bleef.

Daar Belopolsky zijne tijden van het minimum af, Wright de zijne van het maximum af rekende, werden alle gereduceerd tot het minimum.

Als omloopstijd heb ik gekozen $7.^d177$, welke waarde door Oudemans met behulp der kleinste kwadraten bepaald is uit de waarnemingen van Schmidt en Chandler. ¹⁾

Ik heb gemeend bij het gebruik der minima de lichtvereffening niet te behoeven toe te passen, daar de tijden der minima slechts tot in uren gegeven zijn. ²⁾ Wright schijnt deze wel toegepast of van nauwkeuriger opgave der maxima gebruik gemaakt te hebben.

Uit de opgaven van Belopolsky (Astr. phys.

1) F. Kaiser. De Sterrenhemel IIe deel 1888 pag. 487.

2) De lichtvereffening toch bedraagt slechts enkele minuten, terwijl daarenboven de expositieduur ook niet kan worden in rekening gebracht. Uit het op blz. 6 genoemde stuk van Campbell meen ik echter op te kunnen maken, dat hij wel een half uur kan geweest zijn.

Journal VI pag. 398) en van Wright (Astr. phys. Journal IX pag. 67) leidde ik de volgende gegevens af:

N ^o .	Tijd na 't min.	Waarnemer	KM.	per sec.
1	0 ^d .083	B.	+	1.0
2	0.175	W.	+	2.7
3	0.458	B.	+	4.4
4	0.519	W.	+	9.0
5	0.583	W. en C. (gemiddeld)	+	11.4
6	0.922	W.	+	8.0
7	1.353	W.	—	9.2
8	1.516	W.	—	14.1
9	1.833	B.	—	25.5
10	1.926	W.	—	28.8
11	2.000	B.	—	28.7
12	2.583	B.	—	32.0
13	2.597	W.	—	30.4
14	2.625	B.	—	29.0
15	2.687	W.	—	29.8
16	2.734	W.	—	30.6
17	2.946	W.	—	28.8
18	3.000	B.	—	28.9
19	3.200	W.	—	28.6
20	3.403	W.	—	27.7
21	3.417	B.	—	27.1
22	3.525	W.	—	24.5

N ^o .	Tijd na 't min.	Waarnemer	KM.	per sec.
23	3 ^d .583	B.	—	24.4
24	3.720	W.	—	25.2
25	3.924	W.	—	25.3
26	4.042	B.	—	20.0
27	4.102	W.	—	23.6
28	4.159	W.	—	20.6
29	4.810	W.	—	19.5
30	5.000	B.	—	11.7
31	5.104	W.	—	16.6
32	5.378	W.	—	14.6
33	5.560	W.	—	12.4
34	5.833	B.	—	9.6
35	6.015	W. en C. (gemiddeld)	—	13.9
36	6.588	W.	—	6.7
37	6.756	W.	—	0.3
38	6.833	B.	+	0.2
39	6.941	W.	+	0.1
40	7.012	W.	+	0.8
41	7.114	W. en C. (gemiddeld)	+	1.6

De met B. geteekende waarnemingen zijn van Belopolsky, met W. van Wright, terwijl die met W. en C. zoowel door Wright als Campbell beiden zijn uitgemeten.

Hoewel er door de op m.M. papier uitgezette

punten moeilijk een bevredigende lijn gelegd kon worden, heb ik de berekening toch uitgevoerd en de volgende elementen verkregen:

$$\omega = 80^{\circ}.885$$

$$e = 0.563$$

$$T = 1^d.459 \text{ na 't minimum}$$

$$a \sin i = .1692500 \text{ kM.}$$

$$V = - 13.6 \text{ KM.}$$

die echter bleken niet goed aan de waarnemingen te voldoen; de later uitgevoerde en in Hoofdstuk IV te bespreken berekeningen toonden aan, dat vooral de weinige nauwkeurigheid der maxima en minima, hieraan voornamelijk de schuld had.

Ik moest er dus toe overgaan de waarnemingen van een der beide waarnemers uit te sluiten en mij er toe bepalen diens resultaten later met de mijne te vergelijken.

Het aantal waarnemingen van Belopolsky bedroeg maar 13, tegen dat van Wright 28; daarenboven had de laatste de methode der kleinste kwadraten toegepast, hetgeen ook in mijne bedoeling lag, zoodoende besloot ik de gegevens van Wright te gebruiken.

Bij de berekening heb ik gebruik gemaakt van de methode van Lehmann-Filhés en de formules toegepast, zooals zij in de inleiding gegeven zijn.

Een kleine voorbereiding, waarover later meer gezegd zal worden, had mij 't een en ander omtrent het uiterlijk van de lijn geleerd, zoodat deze vrij goed door de gevonden punten kon gelegd worden. De baan wijkt belangrijk van eene sinusoïde af, daar de lijn in den omtrek van 't apastron eene zeer duidelijke kromming vertoont, die bij de eerstgenoemde kromme niet wordt aangetroffen, zie plaat I. Zooals reeds op blz. 11 is opgemerkt heeft Rambaut met deze eigenaardigheid niet genoeg rekening gehouden.

Met de 28 waarnemingen van Wright (zie de algemeene lijst blz. 33) construeerde ik de snelheidskromme en leidde daaruit af:

$$A = 27.38 \text{ KM.} \quad z_1 = + 428 \text{ mM}^2.$$

$$B = 16.62 \text{ KM.} \quad z_2 = - 1141 \text{ mM}^2.$$

Beide laatste waarden werden door uittelling op mM. papier gevonden.

Door de oppervlakken boven en onder de abscissen-as gelijk te maken, werd als snelheid van 't systeem gevonden $- 14.38 \text{ KM.}$

De berekening leverde als resultaat de volgende waarden:

$$\omega = 60^{\circ}.970$$

$$u_1 = 104^{\circ}.155$$

$$e = 0.504$$

$$\mu = 50^{\circ}.160$$

$$a \sin i = 1875300 \text{ KM}$$

$$T = 1^{\text{d}}.218 \text{ na 't minimum}$$

$$V = -14.38 \text{ KM}$$

Om nu de nauwkeurigheid dezer gevonden waarden na te gaan en tevens zoo noodig materiaal te vinden voor de toepassing van de methode der kleinste kwadraten werden uit de tijden, verlopen na het minimum, en uit de hiergevonden grootheden eerst de ware anomalie en daarna $\frac{dz}{dt}$ afgeleid.

Bij de bepaling van de ware anomalie werd gebruik gemaakt van logarithmen van zes decimalen, hetgeen op 't eerste gezicht vreemd zal schijnen. Ik kwam echter hiertoe, omdat de benadering bij het afleiden der excentrische anomalie uit de middelbare hierdoor zeer verkort werd: het bleek mij namelijk dat bij gebruik van logarithmen van vijf decimalen de benadering, om dezelfde nauwkeurigheid te verkrijgen, eenmaal meer moest plaats hebben, dan bij gebruik van die van zes decimalen.

Het resultaat dezer berekening zal in de volgende lijst worden weergegeven, de eerste kolom geeft de rangcijfers van de algemeene lijst, de tweede kolom bevat de gewichten van de waar-

nemingen door Wright, daaraan toegekend (zie blz. 40), de derde kolom de uit de berekening verkregen waarden der snelheden en de vierde kolom het verschil tusschen de waargenomen en de berekende waarden.

N ^o .	p	$\frac{dz}{dt}$	W — B
2	$\frac{2}{3}$	+ 4.68	— 1.98
4	$\frac{2}{3}$	+ 10.16	— 1.16
5	$\frac{1}{3}$	+ 11.06	+ 0.34
6	1	+ 12.44	— 4.44
7	$\frac{2}{3}$	— 6.82	— 2.38
8	$\frac{2}{3}$	— 16.27	+ 2.17
10	1	— 28.44	— 0.36
13	1	— 30.80	+ 0.40
15	$\frac{2}{3}$	— 30.59	+ 0.79
16	$\frac{2}{3}$	— 30.44	— 0.16
17	$\frac{2}{3}$	— 29.74	+ 0.94
19	$\frac{2}{3}$	— 28.66	+ 0.06
20	$\frac{2}{3}$	— 27.69	— 0.01
22	$\frac{2}{3}$	— 27.08	+ 2.58
24	1	— 26.06	+ 0.86
25	$\frac{2}{3}$	— 24.94	— 0.36
27	1	— 23.94	+ 0.34
28	1	— 23.62	+ 3.02

N ^o .	p	$\frac{dz}{dt}$	W — B
29	1	— 19.65	+ 0.15
31	1	— 17.71	+ 1.11
32	$\frac{2}{3}$	— 15.78	+ 1.18
33	1	— 14.43	+ 2.03
35	1	— 10.72	— 3.18
36	$\frac{2}{3}$	— 7.02	+ 0.32
37	$\frac{2}{3}$	— 3.23	+ 2.93
39	$\frac{2}{3}$	— 0.96	+ 1.06
40	$\frac{2}{3}$	— 0.03	+ 0.83
41	$\frac{2}{3}$	+ 1.36	+ 0.24

B. *Tweede benadering. Toepassing van de methode der kleinste kwadraten.*

Daar de verschillen hierbij betrekkelijk nog al uiteen liepen, weinig systematisch en sommige er van nog vrij groot waren, besloot ik de methode der kleinste kwadraten toe te passen. Onder de bewerking had zich echter, zooals in de inleiding is opgemerkt, de vraag voorgedaan, of de opvatting van de te trekken kromme van invloed was op de resultaten der berekening.

Ik wilde daarom mijne eindwaarden met die van Wright kunnen vergelijken en besloot dus, de ge-

wichten, die hij voor de waarnemingen aangeeft, toe te het spectrum en wel geeft hij 't gewicht $\frac{1}{3}$ aan platen, waarop aantal gemeten lijnen ligt tusschen acht en twaalf en 1 aan

Uit de door Lehmann—Filh s hiervoor berekende formules voorwaardenvergelijkingen, waarin δ K de correctie voorstelt,

0.81650 δ V	+	0.70754 δ K	—	22.75994 δ e	+	6.15012 δ ω
0.81650	+	0.91072	—	14.91011	+	0.91375
0.57735	+	0.66752	—	8.07539	—	0.37648
1.00000	+	1.21926	+	22.13000	—	14.60900
0.81650	+	0.28072	+	14.65373	—	25.78915
0.81650	—	0.07033	—	30.92657	—	24.86732
1.00000	—	0.63898	—	16.81100	—	19.99800
1.00000	—	0.74636	+	16.07600	—	6.73320
0.81650	—	0.60173	+	14.62841	—	4.47564
0.81650	—	0.59608	+	15.38694	—	3.89062
0.81650	—	0.57001	+	17.15630	—	1.91877
0.81650	—	0.52828	+	18.08547	+	0.14766
0.81650	—	0.49406	+	18.36308	+	1.55829
0.81650	—	0.47128	+	18.10425	+	2.32155
1.00000	—	0.53081	+	21.27600	+	4.19960
0.81650	—	0.39215	+	16.26305	+	4.46005
1.00000	—	0.43469	+	18.44800	+	6.45170
1.00000	—	0.41982	+	17.93000	+	6.74920
1.00000	—	0.23970	+	10.63100	+	9.55450
1.00000	—	0.15119	+	6.63190	+	10.51000
0.81650	—	0.05187	+	2.08493	+	9.17419
1.00000	—	0.00207	—	0.33352	+	11.62600
1.00000	+	0.16817	—	8.15420	+	12.23900
0.81650	+	0.27300	—	12.61329	+	9.97518
0.81650	+	0.41367	—	17.23958	+	9.41914
0.81650	+	0.49808	—	20.31125	+	8.80514
0.81650	+	0.53248	—	21.12122	+	8.48752
0.81650	+	0.58407	—	22.08143	+	7.93246

passen. Deze gewichten berusten op 't aantal gemeten lijnen in minder dan acht lijnen gemeten zijn, $\frac{2}{3}$ aan die waarop het platen, waarop twaalf of meer lijnen gemeten zijn. in verband met bovenstaande gewichten, vind ik de volgende

die bij $K = \frac{f}{\sqrt{p}} \sin i$ moet worden toegepast:

- 15.19833 $\delta \mu$	- 713.27807 δT	+ 1.61667 = 0
- 9.50978	- 682.39804	+ 0.94714 = 0
- 5.58413	- 441.11272	- 0.19630 = 0
+ 4.03560	+ 683.89000	+ 4.44000 = 0
- 8.01280	+ 2977.20395	+ 1.94327 = 0
- 13.73581	+ 2352.09155	- 1.77180 = 0
- 11.10500	+ 780.76000	+ 0.36000 = 0
+ 3.09030	- 112.42000	- 0.40000 = 0
+ 3.57954	- 122.23005	- 0.64503 = 0
+ 4.16186	- 137.70272	+ 0.13064 = 0
+ 6.22957	- 180.83025	- 0.76751 = 0
+ 8.30952	- 210.28957	- 0.04899 = 0
+ 10.06908	- 231.15115	+ 0.00816 = 0
+ 11.00479	- 239.26716	- 2.10657 = 0
+ 15.27700	- 306.26000	+ 0.86000 = 0
+ 14.33961	- 259.68766	+ 0.29394 = 0
+ 18.83400	- 327.61000	- 0.34000 = 0
+ 19.38500	- 330.62000	- 3.02000 = 0
+ 26.40600	- 368.75000	- 0.15000 = 0
+ 30.29100	- 390.99000	- 1.11000 = 0
+ 28.19048	- 339.91711	- 0.96347 = 0
+ 37.76400	- 436.26000	+ 2.03000 = 0
+ 47.89900	- 500.87000	+ 3.18000 = 0
+ 50.69893	- 473.57000	- 0.26128 = 0
+ 60.81292	- 550.81090	- 2.39234 = 0
+ 68.51986	- 600.56024	- 0.86549 = 0
+ 71.72463	- 620.94008	- 0.67769 = 0
+ 76.52075	- 650.99545	- 0.19596 = 0

Om de coëfficiënten der hieruit af te leiden normaalvergelijkingen homogeen te maken is δe vervangen door $\delta e' = 100 \delta e$, $\delta \omega$ door $\delta \omega' = 10 \delta \omega$, $\delta \mu$ door $\delta \mu' = 100 \delta \mu$ en δT door $\delta T' = 1000 \delta T$.

Hierdoor worden de volgende normaalvergelijkingen verkregen:

$$\begin{aligned}
 &+ 21.66672 \delta V - 1.04420 \delta K + 0.60921 \delta e' \\
 &\quad + 8.12931 \quad - 1.41051 \\
 &\quad + 0.81541 \\
 &+ 2.66339 \delta \omega' + 4.88691 \delta \mu' - 2.12257 \delta T' - 4.74335 = 0 \\
 &+ 1.18176 \quad + 0.84127 \quad - 0.47435 \quad + 10.37219 = 0 \\
 &- 0.27252 \quad - 0.29628 \quad + 0.11123 \quad + 0.30856 = 0 \\
 &+ 31.23923 \quad + 5.72736 \quad - 21.88552 \quad - 13.71404 = 0 \\
 &\quad + 3.03847 \quad - 3.37651 \quad - 3.85255 = 0 \\
 &\quad + 19.79767 \quad + 7.89596 = 0
 \end{aligned}$$

Bij de oplossing dezer vergelijkingen werd de methode van Encke gevolgd.

In afwijking daarvan stelde ik echter:

$$s = a + b + c + \dots + n \quad \text{enz.}$$

De hierbij verkregen contrôles evenals die bij de oplossing der vergelijkingen klopten goed met de gevonden waarden.

Als resultaat van de oplossing werd gevonden:

$$\begin{aligned}
 \delta T' &= + 0.38112 \text{ met gewicht } 3.98322 \\
 \delta \mu' &= + 0.71022 \quad " \quad " \quad 0.80605 \\
 \delta \omega' &= + 0.62010 \quad " \quad " \quad 4.38326 \\
 \delta e' &= - 3.46819 \quad " \quad " \quad 0.50395
 \end{aligned}$$

$$\delta K = - 2.01642 \text{ met gewicht } 5.62226$$

$$\delta V = + 0.02020 \quad , \quad , \quad 9.24963.$$

Deze waarden in de voorwaardenvergelijkingen ingevoerd, deden mij het verschil tusschen de eerste verschillen en de nieuwe waarden kennen, deze zullen later in vergelijking met de uitkomsten van Wright worden meegedeeld. Alleen wil ik hier vermelden dat [vv] bleek 39.15 te bedragen, welke waarde iets afwijkt van de voor [nn. 6] gevondene n.l. 39.13.

Hoewel de oplossing der vergelijkingen dubbel gerekend was en dus eene foutieve waarde voor een der gevonden grootheden vrijwel uitgesloten is, heb ik toch met 't oog op het bepalen der gewichten de oplossing ook in de omgekeerde volgorde toegepast en de daarbij verkregen waarden in volkomen overeenstemming met de eerste gevonden [nn. 6] bijv. bedroeg hierbij 39.13.

Bij de laatste oplossing moest ik om bijzondere redenen gebruik maken van een logarithmentafel, terwijl ik bij de vorige de rekenaars van Crelle gebruikte en 't komt mij voor, dat het werk door 't gebruik der eerste belangrijk minder wordt.

Uit de voor [vv] gevonden waarde volgt in verband met het aantal (28) waarnemende vergelijkingen en het aantal (6) onbekenden, dat de mid-

delbare fout ϵ , van eene waarneming van het gewicht 1 is:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{39.15}{22}} = 1.334.$$

Hieruit laten zich nu de middelbare fouten van ieder element gemakkelijk afleiden, zoodat mijn eindresultaat wordt:

$$\begin{aligned} V &= -14.36 \text{ KM.} \pm 0.44 \text{ KM.} \\ e &= 0.469 \pm 0.019 \\ \omega &= 64.^{\circ}523 \pm 3.^{\circ}667 \text{ (0.064 radialen)} \\ T &= 1.^d218 \pm 0.^d0007 \text{ na 't minimum.} \\ a \sin i &= 1899200 \text{ KM.} \\ \mu &= 50.^{\circ}567 \pm 0.^{\circ}859 \text{ (0.015 radialen)} \\ K &= 19.98 \pm 0.56 \text{ KM.} \end{aligned}$$

Ik heb gemeend bij mijn eindresultaat hoogstens 3 decimalen te mogen aanzetten, daar de verdere cijfers door de betrekkelijke onnauwkeurigheid der gegevens toch geene beteekenis hebben.

C. *Berekening volgens de methode van H. N. Russell.*

Terwijl ik met mijne berekeningen van η Aquilae bezig was, kwam in het Meinummer van 1902 van de *Astrophysical Journal* eene nieuwe methode voor van H. N. Russell (zie Inleiding blz. 25).

Daar deze methode mij den kortsten weg toescheen om de meest nauwkeurige waarden te verkrijgen, besloot ik ook haar te volgen en door vergelijking met de bij de methode der kleinste kwadraten verkregen waarden hare nauwkeurigheid na te gaan.

Daar de snelheidskromme zeer duidelijk van een sinusoïde verschildte besloot ik in verband met eene opmerking van Russell den omloopstijd in 16 gelijke deelen te verdeelen, waaruit dus 16 waarden voor de v 's volgden, en wel:

$v_0 = + 2.50$ KM.	$v_8 = - 26.25$ KM.
$v_1 = + 9.00$ „	$v_9 = - 24.00$ „
$v_2 = + 10.00$ „	$v_{10} = - 21.25$ „
$v_3 = - 9.00$ „	$v_{11} = - 18.50$ „
$v_4 = - 25.00$ „	$v_{12} = - 15.50$ „
$v_5 = - 30.75$ „	$v_{13} = - 12.50$ „
$v_6 = - 30.25$ „	$v_{14} = - 8.00$ „
$v_7 = - 28.50$ „	$v_{15} = - 3.25$ „

Deze geven voor de verschillende C 's de volgende waarden:

$$C_0 = - 14.45 \quad C_1 = + 16.41 \quad C_2 = + 4.22$$

$$C_3 = + 0.24 \quad C_4 = + 0.30 \quad C_5 = - 0.025$$

De waarden C_3 , C_4 en C_5 , hoewel niet noodig voor de berekening kunnen een denkbeeld geven, omtrent de convergentie der bij de berekening te

gebruiken reeks, daar zij bij een goed convergeerende kleine waarden moeten hebben, waaraan in dit geval blijkbaar voldaan is.

De overeenkomstige waarden van de S'sen zijn als volgt:

$$\begin{array}{ll} S_1 = - 1.13 & S_2 = + 6.24 \\ S_7 = - 0.35 & S_6 = - 0.50 \end{array}$$

waarbij S_7 en S_6 weer aan de gestelde voorwaarden voldoen.

Uit deze waarden laten zich door eene betrekkelijk korte berekening de volgende elementen afleiden:

$$\begin{array}{ll} V = - 14.45 \text{ KM.} \\ e = 0.458 \\ \omega = 63.^{\circ}808 \\ a \sin i = 1623300 \text{ KM.} \\ M_0 = - 59.^{\circ}870 \end{array}$$

Uit deze waarde van M_0 volgt:

$$T = 1.^{\text{d}}164 \text{ na het minimum.}$$

Bepaalt men met behulp van deze elementen de meer nauwkeurige waarden, dan vindt men:

$$\begin{array}{ll} e = 0.484 \\ \omega = 62.^{\circ}222 \\ M_0 = - 59.^{\circ}473 \end{array}$$

Gebruikt men deze waarden ter berekening van

de in de inleiding genoemde grootheden X_1 , Y_1 , X_2 ,
en Y_2 dan vindt men:

$$X_1 = 0.91358 \quad X_2 = 0.85069$$

$$Y_1 = 0.85045 \quad Y_2 = 0.80935$$

waaruit als eindresultaten volgen:

$$V = -14.45 \text{ KM.}$$

$$e = 0.490$$

$$\omega = 61.^{\circ}655$$

$$a \sin i = 1803200 \text{ KM.}$$

$$M_0 = -59.^{\circ}372.$$

Uit deze waarde van M_0 volgt:

$$T = 1.^d 113 \text{ na het minimum.}$$

In het volgende hoofdstuk zullen de hiergevoonden elementen vergeleken worden, met die der andere berekenaars, voornamelijk met het oog op de vraag of de invloed van de getrokken snelheidskromme nog is waar te nemen.

HOOFDSTUK III.

Vergelijking der Resultaten.

Reeds in September 1895 had Belopolsky in de Akademie van Wetenschappen te St. Petersburg eenige onderzoekingen aangaande η Aquilae bekend gemaakt.

Hoewel hij gebruik maakte van een spectrograaf met slechts één prisma, gelukte het hem onder ongunstige omstandigheden, de veranderlijke snelheid vast te stellen. Daar η Aquilae echter eene ster is wier lichtsterkte van de 4.^{de}7 tot de 3.^{de}5 grootte verandert, en de stand zoo laag (meridiaanhoogte 31°) werd, kon hij zijn onderzoek niet voortzetten.

Later toen het instrument verbeterd was, heeft hij in 1897 nieuwe opnamen genomen en twaalf spectrogrammen verkregen, die zijne vroegere conclusies bevestigden.

Uit deze twaalf waarnemingen, die reeds in Hoofdstuk II in de algemeene lijst zijn opgenomen, berekent Belopolsky een baan met de volgende elementen :

$$V = - 13.7 \text{ KM.}$$

$$\omega = 90^{\circ}.0$$

$$e = 0.163$$

$$T = 2^{\text{d}}.0 \text{ na 't minimum.}$$

$$a \sin i = 1382000 \text{ KM.}$$

waarbij $U = 7^{\text{d}}.4^{\text{u}} = 7^{\text{d}}.167$ gesteld is.

Deze elementen wijken veel af van de door Wright en mijzelf bij de eerste benadering gevonden waarden, die ik hieronder ter vergelijking wil afdrucken.

Wright vindt n.l.:

$$V = - 14.09 \text{ KM.}$$

$$\omega = 65^{\circ}.79$$

$$e = 0.47$$

$$T = 6^{\text{d}}.176 \text{ na 't maximum. (1}^{\text{d}}.241 \text{ na 't minimum).}$$

$$a \sin i = 1545000 \text{ KM.}$$

waarbij $U = 7^{\text{d}}.176$ gesteld is,
terwijl mijne berekening geeft:

$$V = - 14.38 \text{ KM.}$$

$$\omega = 60^{\circ}.97^{\circ}$$

$$e = 0.504$$

$$T = 1^{\text{d}}.218 \text{ na 't minimum.}$$

$$a \sin i = 1875300 \text{ KM.}$$

en $U = 7^{\text{d}}.177$ genomen is.

Hierbij moet echter niet over het hoofd gezien

worden, dat beide laatste berekenaars van hetzelfde materiaal gebruik maakten.

Door een later te bespreken onderzoek naar den aard der snelheidskromme bleek mij, dat het groote verschil in de excentriciteit waarschijnlijk zal gelegen zijn in het verschil der waarden A (zie inleiding methode Lehmann Filhés) zooals uit het volgende blijkt: $A_B = 16.3$ KM. $A_W = 23.9$ KM. $A_{VL} = 27.38$ KM. terwijl de B 's nagenoeg gelijk zijn; daar nagenoeg gelijke A en B of op een kleine excentriciteit of op eene periastronlengte van 90° of 270° wijst.

Hierin is de eerste de waarde bij Belopolsky, de tweede die bij Wright, terwijl de derde waarde door mij bij mijne berekening gebruikt is.

Ook de omstandigheid, dat er zoo weinig punten bekend zijn tusschen het minimum en het daarop volgende maximum is van veel invloed op de berekening, vooral wat de lengte van het periastron betreft. Belopolsky heeft overigens de snelheidskromme goed aan zijne gegevens aangepast.

De weinige overeenstemming tusschen de verschillende elementen leidde mij er toe van de vergelijking tusschen de waargenomen waarden van Belopolsky en de door mij berekende af te zien, daar deze toch geen bevredigende uitkomsten zouden geven.

Van belang is wel de opmerking van Belopolsky,

dat de tijden van minimumhelderheid en die waarop de snelheid in de gezichtslijn 0 is, niet samenvallen. Hij besluit hieruit, dat de veranderlijke helderheid niet door eene eclips verklaard kan worden; 't zelfde is hem opgevallen bij de berekening van δ Cephei. ¹⁾

Daar Wright evenals ik de methode der kleinste kwadraten heeft toegepast, wilde ik, vooral met het oog op de vraag of het karakter der getrokken snelheidskromme van invloed is op de berekening met de kleinste kwadraten, ook deze bewerking doorvoeren.

Eer ik echter eene vergelijking der verkregen elementen geef, moet er nog op eenige verschillen bij de berekening zelf gewezen worden.

Bij Wright vertoont No. 26 van zijne lijst een fout van — 4,8 KM., waarom hij deze waarneming verwerpt.

Hoewel het verschil tusschen waarneming en berekening bij mij nog — 3.18 KM. bedraagt, (zie No. 35 van de algemeene lijst) heb ik deze behouden daar zij door Campbell en Wright beiden uitgemeten is en nog wel het gewicht 1 verkregen heeft, hetgeen op minstens 12 gemeten lijnen wijst. Bovendien komen

1) Astr. Phys. Journal I, pag. 160.

in mijne lijst nog twee andere verschillen van ongeveer dezelfde grootte voor.

De overige 27 waarnemingen worden nu tot groepen vereenigd, waardoor Wright 10 voorwaardenvergelijkingen krijgt, wier gewichten uit de vroeger aangegeven kunnen worden afgeleid. De coëfficiënten dezer voorwaardenvergelijkingen werden volgens de opgaven van Lehmann-Filhés berekend, waarbij de correctie van den omloopstijd werd weggelaten, doch die voor de snelheid van het systeem ingevoerd.

De verschillende wijzen van berekenen tusschen Wright en mij zijn dus de volgende:

1°. N°. 35 (n°. 26 van Wright) wordt door dezen verwaarloosd, terwijl ik haar behoud.

2°. Wright verwerpt de correctie van den omloopstijd, terwijl ik haar invoer.

3°. Wright bepaalt door combinaties van verschillende waarnemingen (meestal 3) 10 voorwaardenvergelijkingen, terwijl ik iedere waarneming haar volle gewicht toeken en daardoor 28 voorwaardenvergelijkingen verkrijg.

Beide nemen wij de gewichten in aanmerking en voeren als nieuwe onbekende de correctie van de snelheid van het systeem in.

Ter vergelijking van de met de methode der kleinste kwadraten verkregen resultaten, laat ik

deze hier volgen met hunne middelbare fouten.

Die van Wright zijn:

$$\begin{aligned} V &= -14.16 \text{ KM. } \pm 0.25 \\ e &= 0.489 \quad \pm 0.020 \\ \omega &= 68^{\circ}.91 \quad \pm 2.89 \text{ (radialen).} \\ T &= 6.^{\text{d}}210 \quad \pm 0.042 \text{ na het maximum} \\ &\quad (1.^{\text{d}}275 \text{ na 't minimum).} \end{aligned}$$

$$K = 20.59 \text{ KM. } \pm 0.51 \frac{f}{V_p} \sin i$$

Mijne resultaten zijn:

$$\begin{aligned} V &= -14.36 \text{ KM. } \pm 0.44 \\ e &= 0.469 \quad \pm 0.^{\circ}019 \\ \omega &= 64.^{\circ}523 \quad \pm 3.^{\circ}667 \\ T &= 1.^{\text{d}}218 \quad \pm 0.0007 \text{ na 't minimum.} \\ K &= 19.98 \text{ KM. } \pm 0.56 \end{aligned}$$

Door het betrekkelijk groote verschil der ω 's er toe gebracht besloot ik na te gaan of Wright bij de oplossing der normaalvergelijkingen ook eene vergissing in het teeken kon begaan hebben. Om dit na te gaan loste ik de door hem gegeven normaalvergelijkingen op, doch kwam tot een ander resultaat dan Wright. Bij substitutie bleken mijne waarden wel, die van Wright niet aan de eerste normaalvergelijking te voldoen. Uit het onder-

staande zal het verschil der beide oplossingen duidelijk blijken.

$\delta V = - 0.065 \text{ KM.}$	$- 0.007 \text{ KM.}$
$\delta e = + 0.0187$	$+ 0.034$
$\delta \omega = + 3.^{\circ}12$	$+ 8.^{\circ}424$
$\delta T = + 0.034$	$+ 0.120$
$\delta K = + 0.50 \text{ KM.}$	$+ 0.82 \text{ KM.}$

waar in de eerste kolom de oplossingen van Wright, in de tweede de mijne geplaatst zijn.

Voer ik mijne oplossingen bij Wright's benaderde waarden in, dan verkrijg ik de volgende resultaten:

$$\begin{aligned}
 V &= - 14.10 \text{ KM.} \\
 e &= 0.504 \\
 \omega &= 74^{\circ}.214 \\
 T &= 6^{\circ}.998 \text{ na het maximum (2.^{\circ}063} \\
 &\hspace{10em} \text{na het minimum).}
 \end{aligned}$$

$$K = 20.91 \text{ KM.}$$

De groote afwijkingen tusschen deze resultaten en de mijne wijzen er volgens mijne meening op, dat er reeds in de normaalvergelijkingen zelf of misschien wel in de voorwaardenvergelijkingen fouten moeten gemaakt zijn.

Dit ongunstige resultaat van het onderzoek maakt het onmogelijk de vraag, of de fouten in de getrokken snelheidskromme nog van invloed zijn bij de toebassing der kleinste kwadraten, proefondervindelijk

na te gaan. A priori ligt het evenwel voor de hand te veronderstellen, dat zij hunnen invloed niet zullen doen gevoelen, wanneer de snelheidskromme niet al te veel afwijkt van de ware.

Ik moet mij dus vergenoegen met het eindresultaat van mijne berekening alleen mede te deelen, daar volgens het bovenstaande de verschillen, die Wright tusschen waarneming en berekening vindt nu geene waarde meer kunnen hebben. Het onderstaande lijstje bevat de verschillen tusschen waarneming en berekening. De nummers zijn die van de algemeene lijst op blz. 33.

N ^o .	W—B.	N ^o .	W—B.
2	— 1.00 KM.	24	+ 0.26 KM.
4	+ 0.63	25	— 0.82
5	+ 1.48	27	— 0.33
6	— 0.62	28	+ 2.34
7	— 0.36	29	— 0.62
8	+ 1.29	31	+ 0.30
10	— 1.23	32	+ 0.28
13	— 0.13	33	+ 1.17
15	+ 0.22	35	— 4.05
16	— 0.55	36	— 0.44
17	+ 0.34	37	+ 1.81
19	— 0.39	39	+ 0.35
20	— 0.46	40	+ 0.20
22	+ 1.64	41	— 0.20

Laten wij hierbij n°. 35 weg, dan blijkt slechts één der verschillen grooter te zijn, dan 2 KM., wat Campbell ¹⁾ als grens stelt voor de bepaling of eene ster eene veranderlijke snelheid heeft of niet; hieruit meen ik te mogen besluiten, dat mijne elementen goed aan de waarneming voldoen.

Ook de sommen der kwadraten van de fouten bij de 1^e benadering en de toepassing der kleinste kwadraten vertoonen een vrij groot verschil, deze is n.l. in het eerste geval 83.39 en in het tweede 39.15.

Vergelijkt men de resultaten bij de oplossing volgens de methode van Russell (zie blz. 46) verkregen met de hier besprokene, dan stemmen de op beide wijzen gevonden elementen goed overeen, waardoor ik tot de conclusie kom, dat laatstgenoemde methode wegens hare mindere bewerkelijkheid bij even groote nauwkeurigheid de voorkeur verdient.

W. J. S. Lockyer heeft van η Aquilae de baan niet berekend, zoodat eene vergelijking der baan-elementen achterwege moet blijven. De omloopstijd is door de vrij groote middelbare fout in de waarde van de μ uit mijne berekening niet nauwkeuriger af te leiden, zoodat deze zeker wel op 7.^d176 zal mogen gesteld worden, zooals Lockyer die aangeeft.

1) Some recent results secured with the Mills spectrograph. Astr. phys. Journal XIV pag. 141.

Van belang is evenwel, dat de snelheidskromme geene afwijking vertoont, die de aanwezigheid van eene derde ster zou aanwijzen, wat in besliste tegenspraak is met Lockyer's uitkomsten. Nijland's waarnemingen over η Aquilae als veranderlijke ster, bevestigen mijne resultaten in dit opzicht. Hoewel zijne waarnemingen nog niet geheel bewerkt zijn en de eerste bewerking op overeenkomstige afwijkingen, als die van Lockyer wezen, heeft een uitvoeriger onderzoek geene afwijkingen meer kunnen aanduiden.

Daar Lockyer de eclipsverklaring voor de veranderlijkheid van η Aquilae verwerpt, voornamelijk op grond van de onsymmetrische gedaante der lichtkromme schijnt dit verschil mij van zeer veel belang.

HOOFDSTUK IV.

Over den aard der snelheidskrommen.

Reeds Rambaut vond uit zijne berekeningen, zooals in de inleiding is meegedeeld, twee eischen, waaraan de snelheidskromme moest voldoen. Deze maken het mogelijk de getrokken krommen te verbeteren, ook al zijn er betrekkelijk weinig punten van bekend. Daar echter de aard aan de krommen overigens niet bekend was, heb ik getracht langs analytischen weg iets meer daaromtrent te vinden. Het ingewikkelde verband tusschen de elementen maakte het mij echter onmogelijk langs dezen weg iets naders te weten te komen.

Hierna bleef nog de grafische methode over en ik besloot eenige snelheidskrommen te berekenen, die bij gefingeerde banen behoorden.

Als excentriciteiten koos ik:

$$e_1 = 0.00 \quad e_2 = 0.20 \quad e_3 = 0.40 \quad e_4 = 0.60.$$

Grootere excentriciteiten behoefde ik hierbij niet aan

te nemen, daar er tot nog toe geen baan van een spectroscopische dubbelster bekend is, wier excentriciteit deze waarde overtreft.

De lengten van het periastron klimmen van 0° uitgaande, telkens met 18° op.

Om nu de noodige radiale snelheden te bepalen, maakte ik gebruik van de formule:

$$\frac{dz}{dt} = K (\cos u + e \cos \omega),$$

waarin $K = \frac{f \sin i}{\sqrt{p}}$ ¹⁾, terwijl ik hierin $K = 20,00$

stelde; als omlooptijd werd gekozen $U = 7^d.177$. Deze beide laatste waarden maakten het mogelijk de door mij bij de berekening van η Aquilae getrokken snelheidskromme met deze lijnen te vergelijken.

Daar voor $e = 0.00$ de middelbare, de excentrische en de ware anomalie gelijk zijn, levert in dit geval de bepaling der laatste weinig bezwaar op.

In de overige gevallen zal het zeker wel het minst bewerkelijk zijn van bepaalde excentrische anomalieën uit te gaan en daarbij behorende ware anomalieën en de tijden te bepalen.

De achterstaande typen van radiale snelheidskromme bevatten in 6 figuren de krommen, die voor de gegeven excentriciteiten behooren bij de lengte van

1) Meergenoemd stuk van Lehmann-Filhés.

het periastron van 0° — 90° met 18° opklimmende. Zij geven echter een afdoend overzicht over alle mogelijke voorkomende typen, daar de lijnen behorende bij $\omega = 108^\circ$ tot $\omega = 198^\circ$ de spiegelbeelden zijn, verkregen door een spiegel links van de omgekeerde figuren behorende bij $\omega = 72^\circ$ tot en met $\omega = 0^\circ$ te plaatsen, de lijnen behorende bij $\omega = 198^\circ$ tot $\omega = 288^\circ$ de spiegelbeelden, verkregen door den spiegel rechts van de omgekeerde figuren behorende bij $\omega = 18^\circ$ tot $\omega = 108^\circ$ te zetten, terwijl eindelijk de lijnen behorende bij $\omega = 288^\circ$ tot $\omega = 360^\circ$ de eveneens gevormde spiegelbeelden zijn van de lijnen behorende bij $\omega = 72^\circ$ tot $\omega = 0^\circ$.

De snelheidskrommen bij $e = 0.00$ zijn sinusoiden, die voor de verschillende ω 's eene verschuiving van de ordinatenas hebben ondergaan. Dit laat zich ook uit de gebruikte formule aantoonen. Immers:

$$\frac{dz}{dt} = K (\cos u + e \cos \omega)$$

gaat voor $e = 0.00$ over in:

$$\frac{dz}{dt} = K \cos u = K \cos (v + \omega)$$

wat voor $\omega = 0^\circ \dots 90^\circ$ neerkomt op dezelfde sinusoiden, waarbij echter de ordinatenas eene verplaatsing ondergaan heeft.

De overige drie lijnen zijn geen van alle sinusoiden,

doch verschillen onderling des te meer in maxima en minima naarmate de ω kleiner is.

De lijnen zijn over 't algemeen zóó sprekend, dat eene eerste benadering omtrent excentriciteit en lengte van het periastron nauwkeurig genoeg mogelijk is, om een paar hulplijnen te trekken, waardoor de getrokken snelheidskromme nog verbeterd kan worden, ofschoon vooral in den omtrek van $\omega = 90^\circ$ het schatten der excentriciteit eenige moeilijkheid oplevert; bij grootere excentriciteiten, zie de lijnen voor $e = 0.40$ en $e = 0.60$, vertoonen de lijnen echter weer zeer eigenaardige krommingen.

De figuren leveren ook nog de grafische bevestiging van de opmerking door André ¹⁾ gemaakt dat gelijke maxima en minima óf op cirkelvormige banen óf op eene lengte van het periastron van 90° wijzen, $\omega = 270^\circ$ is hierbij echter ook mogelijk zooals trouwens ook uit de analytische beschouwing blijkt.

Beide kenmerken, die Schwarzschild geeft ter onderscheiding van het peri- en apastron n.l.:

1°. In het periastron verloopt de snelheidskromme steiler tegen de abscissenas dan in het apastron.

2°. De kromme blijft korter tijd aan die zijde van de hulpas, waar het periastron ligt worden door de figuur bevestigd.

1) *Traité d'astronomie stellaire*. Ch. André IIe partie. 1900, § 370.

Als derde kenmerk zou men hier nog bij kunnen voegen:

3°. Het apastron ligt steeds in dat gedeelte, dat concaaf naar de abscissenas gekeerd is, tenzij het juist in een buigpunt valt.

Hoewel zich bij excentriciteiten boven 0.40 gelegen, zooals uit de figuren 4, 5 en 6 der tweede plaat blijkt, in het gedeelte tusschen het minimum en de abscissenas eene duidelijke buiging vertoont, is Campbell mijns inziens volkomen gerechtigd uit den eigenaardigen vorm van de snelheidskromme van ζ Geminorum, ¹⁾ de aanwezigheid eener derde ster af te leiden.

De beste wijze van bewerken der spectroscopische dubbelsterren schijnt mij toe:

1°. Uit de getrokken snelheidskromme de excentriciteit en de lengte van het periastron te benaderen.

2°. Een paar snelheidskrommen te bepalen voor gefingeerde banen, met excentriciteiten en lengten van het periastron, die weinig van de benaderde verschillen.

Dit laat zich gemakkelijk doen, als men gebruik maakt van de rekenwijze, die ik hierboven aangegeven heb.

1) The Motion of ζ Geminorum in the Line of Sight. Astr. phys. Journal. XIII pag. 90.

3°. Door vergelijking met de nu geconstrueerde het karakter der getrokken snelheidskromme te verbeteren.

4°. De methode van Russell op deze verbeterde kromme toe te passen.

Dit laatste heeft het voordeel, dat men daarbij de baan van eene derde ster, zoo deze zich voordoet, analytisch kan bepalen, wat bij de toch al kleine afwijkingen van de hoofdkromme zeker een voordeel zal zijn.

Neemt men bovengenoemde voorzorgen in acht, dan zal de methode van Russell met veel minder bewerkelijkheid zeker een stel elementen geven even nauwkeurig als door de toepassing van de kleinste kwadraten bij de methode van Lehmann-Filhès kan verkregen worden langs veel langeren weg. Dit laatste zal zeker van niet weinig belang zijn als de veronderstelling van Campbell juist is, dat langzamerhand de spectroscopische dubbelsterren geen uitzonderingen, maar juist normale gevallen, zullen blijken te zijn:

Hij zegt n. l.: ¹⁾

„Before the discovery of the thirty-eight spectroscopic binaries with the Mills spectrograph, three

1) Six stars whose velocities in the Line of Sight are variable. Astr. phys. Journal. pag. 116.

had been discovered in the same list of stars by Belopolsky, making forty-one binaries in about 350 stars observed. The proportion is therefore one binary star for every eight observed, not taking into account a considerable list of suspected cases awaiting confirmation. The variable velocity of our Sun, due to its revolving planets, has a double amplitude of only a few hundredths of a kilometer. As the work progresses, and the degree of accuracy attainable increases, we shall probably find that there is a regular gradation of double amplitudes from that of the Sun up to those of the spectroscopic binaries already discovered, and it is possible that the star which is not a spectroscopic binary will prove to be the rare exception."

Ter vergelijking met de besproken snelheidskrommen wil ik de kromme, die ik bij de berekening van η Aquilae gebruikte op plaat I afdrukken. De eerste figuur daarop stelt de kromme voor, waaruit de voor de berekening noodige gegevens werden afgeleid. De vorm wijst op een vrij groote excentriciteit, daar het maximum vrij stijl verloopt en het verschil tusschen maximum en minimum nog vrij groot is. De lijn vertoont groote overeenkomst met fig. 4 van plaat II, waaruit kan worden afgeleid, dat de lengte van het periastron tusschen

54° en 72° gelegen moet zijn. Ook blijkt er nog uit, dat dit dichtër bij 54° dan bij 72° moet liggen, daar bij de vrij groote excentriciteit (± 0.50) het gedeelte tusschen het minimum en de abscissenas eene buiging zou moeten vertoonen wanneer $\omega \pm 72^{\circ}$ was. Het coördinatenstelsel met de assen AB en AC komt met dat der krommen op plaat II overeen, daar hierin de abscissenas zoodanig getrokken is, dat aan de eischen van Rambaut voldaan is, terwijl de ordinatenas door het periastron gaat.

De tweede lijn is uit de laatst gevonden elementen afgeleid en voldoet behoudens twee uitzonderingen goed aan de waarnemingen van Wright, terwijl die van Belopolsky alleen in het minimum er door worden voorgesteld.

Hoewel het berekenen en teekenen van eenige snelheidskrommen mij geen middel aan de hand gedaan heeft om uit de getrokken krommen direct de elementen van de bijbehorende baan af te leiden, meen ik hierboven te hebben aangetoond hiermede geen noodeloos werk verricht te hebben.

STERRELIJST.

Hoewel het mijn plan was hierbij eene lijst van spectroscopische dubbelsterren te voegen, en de grondstoffen hiervoor reeds verzameld waren, heb ik daarvan afgezien. Miss. Agnes M. Clerke toch heeft inmiddels het licht doen zien „Problems in Astrophysics”, waarin op pag. 548 de door mij bedoelde lijst gegeven wordt, die in verband met de bijbehorende hoofdstukken XVII en XIX, moeilijk zou zijn te verbeteren.

STELLINGEN.

I.

De methode van Russell, verdient onder zekere omstandigheden, bij de baanberekening van spectroscopische dubbelsterren de voorkeur.

II.

De waarnemingen van Deslandres, op het gebied der radiale snelheden, verdienen weinig vertrouwen.

III.

De snelheidskromme, die Hartmann (Astr. Phys. Journal XIV pag. 56) voor α Ursae minoris trekt, sluit niet voldoende aan op de waarnemingen.

IV.

Ten onrechte ziet W. J. S. Lockyer (Inaugural-Dissertation pag. 92) in η Aquilae eene bevestiging van de meteoren-theorie van zijn vader.

V.

De lichtkromme van η Aquilae is glad.

VI.

Kometenstaarten ontstaan door drukking van het licht.

VII.

De temperatuur van de zon ligt tusschen 5000° en 10000° .

VIII.

Het verdient aanbeveling, evenals voor de eenheid van snelheid, voor de eenheid van versnelling eenen bepaalden naam in te voeren.

IX.

De betrekking:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

is alleen door integratie af te leiden.

X.

Een der tastbaarste bewijzen voor de bolrondheid van de aarde is het feit, dat groote watervlakten (meer van Genève, de zee bij Palermo) als bolvormige spiegels kunnen optreden.

L'Astronomie 10^{me} Année N°. 7.

XI.

De maan heeft merkbaren invloed op den barometerstand.

XII.

De formule voor de koopsom van weduwepensioen R_b — $R_{a. b.}$ (notatie Dr. A. Zillmer) kan alleen als volkomen juist beschouwd worden, als door de statistiek aangetoond is, dat de sterftekans van de vrouwen in het algemeen dezelfde is als van de gehuwde vrouwen en van weduwen.

XIII.

Het is gewenscht, dat de geschiedenis der Natuurwetenschappen aan de universiteiten gedoceerd wordt.

XIV.

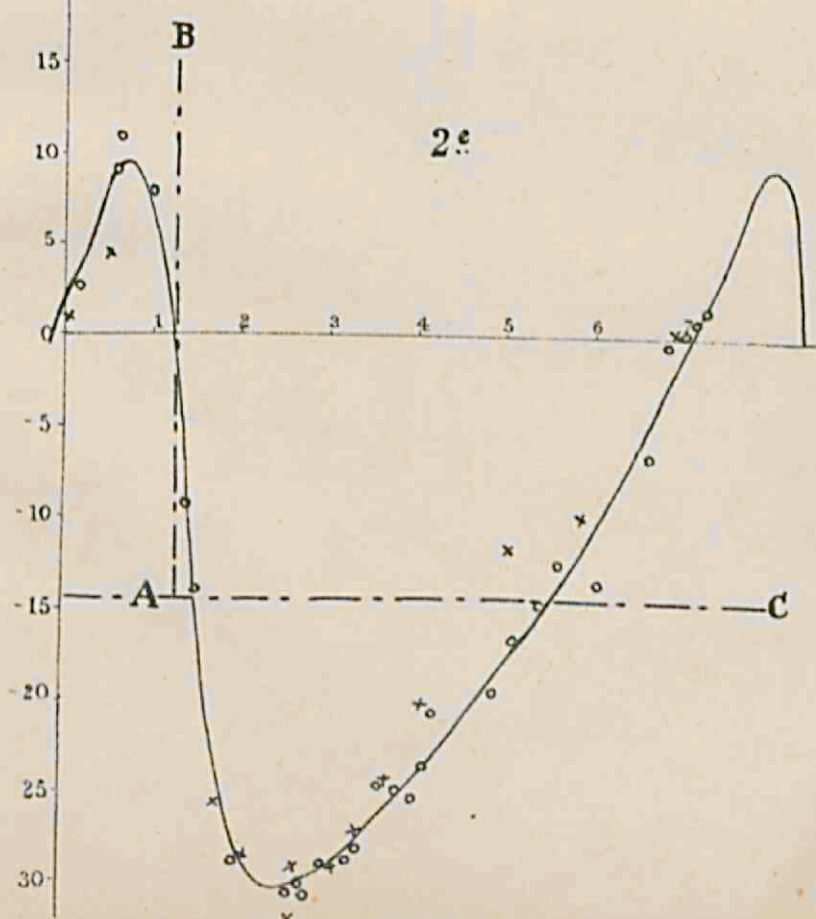
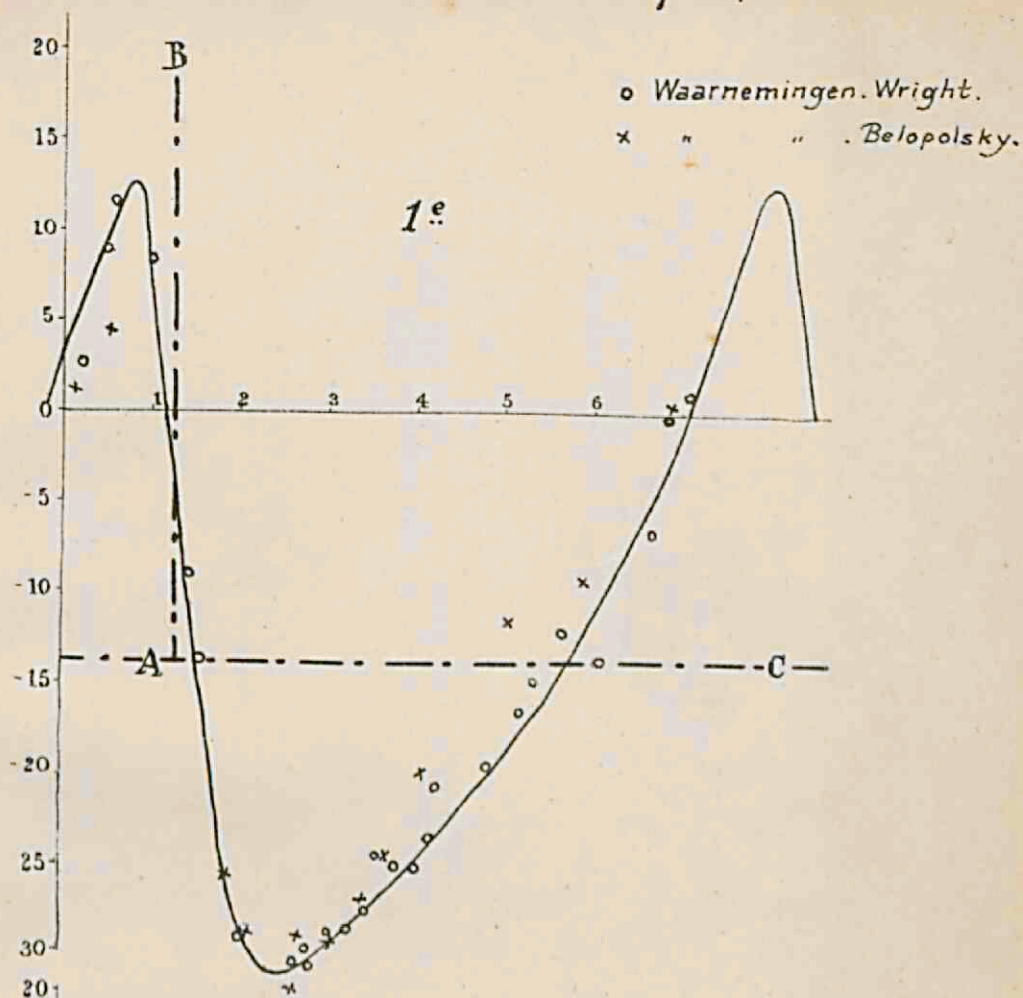
De toelatings-examens aan de Hoogere Burgerscholen en de Gymnasia moeten niet worden afgeschaft.

XV.

It is the universal law, that whatever pursuit, whatever doctrine becomes fashionable, shall lose a portion of that dignity which it had possessed while it was confined to a small but earnest minority, and was loved for its own sake alone.

Macaulay. History of England.

Snelheids kromme van η Aquilae.



$e = 0.00$
 $e = 0.20$

Typen van radiale snelheidskrommen.

$e = 0.60$

