Over de configuraties (8?,8?) van punten en vlakken en de tetraëders van Moebius

https://hdl.handle.net/1874/257391

Utrecht 11 Juli 1913

Over de Configuraties $(8_4, 8_4)$ van punten en - vlakken en de Tetraëders van Moebius. -

H. MULLEMEISTER.

Over de Configuraties $(8_4, 8_4)$ van punten en vlakken en de Tetraëders van Moebius.

Diss. Utrecht 1913

Over de Configuraties $(8_4, 8_4)$ van punten en vlakken en de Tetraëders van Moebius.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. C. EIJKMAN

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag 11 Juli 1913 des namiddags ten 2 ure precies

DOOR

HERMANCE MULLEMEISTER

geboren te APELDOORN

Electr. drukkerij „de Industrie", J. VAN DRUTEN — Utrecht

1913.

AAN MIJNE OUDERS.

Hooggeachte Promotor, Hooggeleerde DE VRIES!

Bij het voltooien mijner dissertatie, die onder Uwe auspiciën is tot stand gekomen, zeg ik U mijn oprechten dank, niet alleen voor de bijzonder gewaardeerde lessen, die mij juist Uw vak boven alle andere deden lief krijgen, maar ook voor de groote welwillendheid, waarmede Gij mij bij het schrijven van dit proefschrift hebt terzijde gestaan.

Ook den Hoogleeraren KAPTEYN, JULIUS, NIJLAND *en wijlen Professor* WIND *ben ik erkentelijk voor het genoten onderricht.*

Ik beschouw het als een voorrecht, aan de Utrechtsche Universiteit mijne opleiding gekregen te hebben.

Ten slotte aan U, Hooggeleerde BOLLAND, *mijn dank. Uwe colleges zullen mij een aansporing zijn tot het bestudeeren der philosophie in den ruimsten zin des woords.*

INHOUD.

Bladz.

INLEIDING.

HOOFDSTUK I.

Het opsporen van alle projectief van elkaar onafhankelijke configuraties $(8_4, 8_4)$ van punten en vlakken 1
Bespreking dier configuraties . . . . , . . 14

HOOFDSTUK II.

De configuratie van MOEBIUS 44
Haar voorkomen bij de kubische ruimtekrommen 44
Haar voorkomen bij het nulstelsel 53
Haar voorkomen bij de lineaire stralencomplexen 70

HOOFDSTUK III.

Bijzondere gevallen der MOEBIUS-configuratie 80
Twee tetraëders van MOEBIUS, waarvan de hoekpunten op vier gegeven rechten liggen 80
Hyperboloïdische liggingen 86
In een bol kan een MOEBIUS-configuratie worden beschreven. 91

INLEIDING.

Dit proefschrift heeft zijn ontstaan te danken aan mijne kennismaking met de verhandeling van V. Martinetti, *Le Configurazioni* $(8_4, 8_4)$ *di punti e piani*, geschreven in het vol. XXXV van *Giornale di Matematiche di Battaglini* 1897 (bl. 81—100). Hij is erin geslaagd, alle mogelijke projectief van elkaar onafhankelijke configuraties $(8_4, 8_4)$ van punten en vlakken op te sporen.

Reeds in 1828 had Moebius de merkwaardigste dezer configuraties, bestaande uit twee in en om elkaar beschreven tetraëders, ontdekt en gepubliceerd in het *Journal von Crelle*, dl. III, bl. 273. Hier toont hij aan, dat het mogelijk is, dat twee tetraëders een dergelijke bijzondere ligging hebben, tenminste als de hoekpunten van den eenen niet gehouden zijn, in de zijvlakken *zelf* van den anderen te liggen, maar als de hoekpunten van den eenen ook in de uitbreiding der zijvlakken van den anderen kunnen gelegen zijn.

In 1884 is in de *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège* 2e série t. XI een verhandeling geschreven over de tetraëders van Moebius door J. Neuberg.

Verder bevinden zich onder de opgaven, uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap „*Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*" te Amsterdam, eenige, die dit onderwerp betreffen: Dl. VIII N°. 67, 71 (opgaven van Dr. P. Zeeman Gz.); Dl. X N°. 129 (opgave van Dr. J. A. Barrau).

Andere werken zullen ter documenteering eventueel in een noot worden vermeld.

Dit proefschrift bestaat uit drie hoofdstukken.

In het eerste worden alle mogelijke configuraties $(8_4, 8_4)$ van punten en vlakken behandeld.

In het tweede hoofdstuk wordt een nadere beschouwing gegeven van de figuur der twee in en om elkaar beschreven tetraëders van MOEBIUS, en in het derde hoofdstuk worden eenige bijzondere gevallen dezer configuratie besproken.

HOOFDSTUK I.

DE CONFIGURATIES $(8_4, 8_4)$ VAN PUNTEN EN VLAKKEN.

§ 1. Op het voetspoor van MARTINETTI zullen we alle mogelijke configuraties $(8_4, 8_4)$ van punten en vlakken opzoeken, d. w. z. figuren van *acht* punten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en van *acht* vlakken $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$, $\bar{6}$, $\bar{7}$, $\bar{8}$, waarin elk punt behoort tot vier — en ook niet meer dan vier — van die vlakken, en omgekeerd elk vlak gaat door vier van die punten.

Allereerst stellen wij alleen de voorwaarde, dat de elementen van de figuur onderscheiden zullen zijn, en dat twee elementen *niet* zullen behooren tot *dezelfde* vier elementen van de duale soort.

Om alle configuraties $(8_4, 8_4)$ te vinden, zullen wij beginnen die configuraties te zoeken, waarin op de doorsnijding van twee vlakken *hoogstens twee punten* van de configuratie liggen — en omgekeerd: door de verbindingslijn van twee punten *hoogstens twee vlakken* gaan.

Onder de configuraties (n_4, n_4), die aan een dergelijke voorwaarde voldoen, zullen volgens MARTINETTI deze de eenvoudigste zijn. Bij handhaving van bovengenoemde beperking is er slechts één Cf. die eenvoudiger is dan een $(8_4, 8_4)$, d. i. de Cf. $(6_4, 6_4)$ samengesteld uit twee drietallen van punten op twee kruisende lijnen en uit de vlakken, die elk der drie punten op de éene lijn zendt door de andere rechte. Zoo liggen de punten vier aan vier in één vlak, en door elk punt gaan vier vlakken: de drie vlakken, die door zijn drager gaan, en het eene, dat dit punt met den anderen drager verbindt.

Bij de bijzondere Cf's, die wij nu willen vinden, bevatten de vier vlakken, die door één punt gaan, minstens zes andere punten, want:

in 't	1^e	vlak	liggen	nog	3	punten
„ „	2^e	„	„	„	3 of 2	„
„ „	3^e	„	„	„	3, 2 of 1	„
„ „	4^e	„	„	„	3, 2, 1 of 0	„

De vier vlakken bevatten dus minstens 6 punten.

Nu zijn er twee gevallen mogelijk:

α. De vier vlakken, die door één punt der Cf. gaan, bevatten de punten der Cf. *op één na.*

β. Die vier vlakken bevatten *alle* punten van de Cf.

In geval α wordt dus door elk punt een ander punt buitengesloten, waarmee het door geen vlak van de Cf. verbonden is, en we zullen twee punten, die zich in een dergelijken toestand bevinden *toegevoegd* noemen. De vlakken, die behooren bij twee toegevoegde punten zijn alle vlakken van de Cf., want dat zijn acht verschillende vlakken. Het gegeven punt zendt door elk der andere punten twee vlakken, alleen door het toegevoegde punt geen vlak.

In geval β. zendt een punt van de Cf. twee vlakken door elk der andere punten op twee na; deze twee uitgezonderde punten zijn elk met het gegeven punt slechts door één vlak verbonden, en worden *het toegevoegde koppel* van het beschouwde punt genoemd. Het is duidelijk dat deze twee punten eveneens in het geval β. verkeeren, want het eerste punt behoort tot het hun toegevoegd koppel: door de verbindingslijn van het beschouwde punt met een van het toegevoegd koppel gaat slechts één vlak van de Cf.

Door duale beschouwingen vindt men, dat zich voor een vlak ook twee gevallen kunnen voordoen, die wij ook als α en β zullen onderscheiden.

α. De vier punten, die in één vlak liggen, dragen alle andere vlakken *op één na*, dat *het toegevoegde* vlak heet.

β. De vier punten, die in één vlak liggen, dragen alle andere vlakken. Twee aan twee liggen de punten ook in elk der andere vlakken, op twee na, die slechts één van de vier punten bevatten, en *het toegevoegde koppel* vlakken genoemd worden.

De schrijfwijze $(i, k, \ldots.)_{\overline{m}}$ moge aanduiden, dat de punten i, k.... van de Cf. behooren tot het vlak $\overline{m}$.

Als 1 het geval α voorstelt, dan kan men schrijven:

$$(1\,2\,3\,4)_{\overline{1}},\ (1\,2\,5\,6)_{\overline{2}},\ (1\,3\,5\,7)_{\overline{3}},\ (1\,4\,6\,7)_{\overline{4}}.$$

Dit zijn vier vlakken door het punt 1, die 8 niet bevatten, dus 8 zal het toegevoegde punt van 1 zijn.

De verbindingslijnen 12, 13, 14, 15, 16, 17 komen alle twee keer voor, d. w. z. er gaan *twee vlakken door de verbindingslijn van twee punten.*

En geen drie punten liggen in twee verschillende vlakken, d. w. z. *Op de snijlijn van twee vlakken liggen slechts twee punten.*

Als 1 het geval β voorstelt, kan men stellen:

$$(1\,2\,3\,4)_{\overline{1}},\ (1\,2\,5\,6)_{\overline{2}},\ (1\,3\,5\,7)_{\overline{3}},\ (1\,4\,6\,8)_{\overline{4}}.$$

Dit zijn vier vlakken door 1, die alle acht punten bevatten. 12, 13, 14, 15. 16, komen tweemaal voor; 17 en 18 slechts eenmaal; 7 en 8 vormen het toegevoegde paar van 1.

§ 2. Laat ons aannemen, dat alle punten van de Cf. in het geval α verkeeren, en dat de vier vlakken, die door 1 gaan, als boven aangeduid zijn door

$$(1\,2\,3\,4)_{\overline{1}},\ (1\,2\,5\,6)_{\overline{2}},\ (1\,3\,5\,7)_{\overline{3}},\ (1\,4\,6\,7)_{\overline{4}},$$

zoodat 1 aan 8 is toegevoegd.

Dan zullen wij de notatie zoo kiezen dat 2 aan 7, 3 aan 6 en 4 aan 5 is toegevoegd.

Om de andere vlakken te vinden, kan men aldus redeneeren: Van de overblijvende vier vlakken, die alle door het punt 8 gaan, zal er een het puntenpaar 2, 3 bevatten, en een ander het paar 2, 4, die beide nog slechts éénmaal zijn voorgekomen. In het vlak $(2\ 3\ 8\ .)_{\overline{5}}$ zal niet 6 of 7 kunnen liggen, daar deze toegevoegd zijn aan 3 en 2, evenmin 4, omdat 2, 3, 4 al in $\overline{1}$ liggen, dus zal 5 in dat vlak liggen: $(2\ 3\ 5\ 8)_{\overline{5}}$.

Op dezelfde wijze vindt men: $(2\ 4\ 6\ 8)_{\overline{6}}$, want in $(2\ 4\ 8\ .)_{\overline{6}}$ kan niet 7 of 5 liggen (toegevoegd aan 2 en 4) evenmin 3 (omdat 2, 3, 4 al in $\overline{1}$ voorkomen); dus moet het 6 zijn.

De twee laatste vlakken bevatten 7 en 8 en het ééne het paar 3, 4, het andere het paar 5, 6: $(3\ 4\ 7\ 8)_{\overline{7}}$ en $(5\ 6\ 7\ 8)_{\overline{8}}$.

De gemaakte onderstelling leidt dus tot één enkel geval, dat, zooals wij zullen zien, te verwezenlijken is.

Deze configuratie zullen wij door I aanduiden.

Schrijven we in eenzelfde kolom de indices van de punten, die in eenzelfde vlak liggen, en naar volgorde in $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ ....., dan hebben we voor de gevonden Cf. het symbool:

	1	1	1	1	2	2	3	5
	2	2	3	4	3	4	4	6
Cf I.	3	5	5	6	5	6	7	7
	4	6	7	7	8	8	8	8

In de acht vlakken komt elk punt viermaal voor, elke twee punten tweemaal, elke drie punten slechts éénmaal.

Zooals we boven hebben opgemaakt, welke vlakken door het punt 1 gaan, kunnen we, duaal daartegenover, nu beschouwen een vlak $(1\ 2\ 3\ 4)_{\overline{1}}$. Dan gaan door de punten 1 2 3 4, twee aan twee, nog zes andere vlakken: $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, maar niet het vlak $\overline{8}$.

Dus is $\overline{1}$ aan 8 toegevoegd, zoo ook $\overline{2}$ aan $\overline{7}$, $\overline{3}$ aan $\overline{6}$ en $\overline{4}$ aan $\overline{5}$.

§ 3. Nu kunnen wij onderstellen, dat 1 het geval β vertegenwoordigt, zoodat men heeft

$$(1\,2\,3\,4)_{\bar 1},\ (1\,2\,5\,6)_{\bar 2},\ (1\,3\,5\,7)_{\bar 3},\ (1\,4\,6\,8)_{\bar 4}$$

en bovendien

$$(7\,.\,.\,.)_{\bar 5}\ (7\,8\,.\,.)_{\bar 6}\ (7\,8\,.\,.)_{\bar 7}\ (8\,.\,.\,.)_{\bar 8}$$

Ook hier moet elk punt viermaal voorkomen, elke twee punten hoogstens tweemaal, elke drie punten slechts éénmaal.

Het punt 4, en zoo ook 6, die elk nog tweemaal moeten voorkomen, kan niet behooren tot twee van de vlakken $\bar 6$, $\bar 7$, $\bar 8$ (die alle het punt 8 bevatten) omdat 4, 8 en ook 6, 8 reeds in $\bar 4$ liggen; dus moeten 4 en 6 in $\bar 5$ liggen: $(4\,6\,7\,.)_{\bar 5}$.

Door een analoge redeneering blijkt dat 3 en 5 in $\bar 8$ moeten liggen: $(3\,5\,8\,.)_{\bar 8}$.

Het punt 2 moet nog in twee vlakken voorkomen, kan niet in $\bar 6$ èn $\bar 7$ liggen, omdat 2, 7, 8 dan tweemaal zou voorkomen, en moet dus in $\bar 5$ of $\bar 8$ liggen. Aangezien het tot zoover gevonden symbool zichzelf gelijk blijft, als men verwisselt (3, 4), (5, 6), (7, 8), kunnen wij de benaming zóó kiezen, dat 2 in $\bar 5$ zal liggen $(2\,4\,6\,7)_{\bar 5}$. Verder kan 2 nog in $\bar 6$ of in $\bar 8$ liggen, en moeten 3, 4, 5, 6 elk nog eenmaal geplaatst worden.

Maken wij de *eerste hypothese*: 2 in $\bar 6$, $(2\,7\,8\,.)_{\bar 6}$, dan zien wij, dat in $\bar 6$ niet kan liggen 4 (want 2, 4 is reeds in $\bar 1$ en $\bar 5$), evenmin 6 (want 2, 6 is reeds in $\bar 2$ en $\bar 5$) dus ligt in $\bar 6$ nog 3 of 5. In $\bar 8$ ligt nog 4 of 6. Maar omdat het tot hiertoe gevonden symbool niet verandert bij de verwisselingen (3, 5) (4, 6) kunnen wij aannemen, dat in $\bar 8$ het punt 4 zal liggen: $(3\,4\,5\,8)_{\bar 8}$, en verder 6 in $\bar 7$: $(6\,7\,8\,.)_{\bar 7}$ waaruit volgt, dat bovendien 5 of 3 in $\bar 7$ zal liggen en dan 3 of 5 in $\bar 6$.

Zoo vinden wij als symbool voor twee nieuwe Cf.

	1	1	1	1	2	2	5	3
Cf. II.	2	2	3	4	4	3	6	4
	3	5	5	6	6	7	7	5
	4	6	7	8	7	8	8	8

	1	1	1	1	2	2	3	3
Cf. III.	2	2	3	4	4	5	6	4
	3	5	5	6	6	7	7	5
	4	6	7	8	7	8	8	8

Ook hier komt in de acht vlakken elk punt viermaal voor.

Maken wij de *tweede hypothese:* 2 in $\overline{8}$: $(2\ 3\ 5\ 8)_{\overline{8}}$, dan moeten de punten 3, 4, 5, 6, die we nog tot onze beschikking hebben, aldus verdeeld zijn: twee in $\overline{6}$ en de andere in $\overline{7}$. Maar in eenzelfde groep kunnen niet optreden de paren 3, 5 en 4, 6, daar deze reeds behooren tot twee andere groepen (tot $\overline{3}$ en $\overline{8}$ resp. tot $\overline{4}$ en $\overline{5}$). Dus zullen in $\overline{6}$ en $\overline{7}$ liggen de paren 3, 4 en 5, 6, of 3,6 en 4, 5; zoo komen wij tot de symbolen

	1	1	1	1	2	3	5	2
Cf. IV.	2	2	3	4	4	4	6	3
	3	5	5	6	6	7	7	5
	4	6	7	8	7	8	8	8

en:

	1	1	1	1	2	3	4	2
Cf. V.	2	2	3	4	4	6	5	3
	3	5	5	6	6	7	7	5
	4	6	7	8	7	8	8	8

§ 4. In de overige configuraties $(8_4, 8_4)$ zullen er *drie punten* moeten zijn, die aan *twee vlakken* minstens toebehooren of *drie vlakken*, die aan *twee punten* minstens toebehooren, d. w. z. drie punten mogen nu tweemaal voorkomen, of ook wel driemaal (meer is onmogelijk).

En: twee punten mogen nu driemaal voorkomen.

Dat vier vlakken dezelfde twee punten bevatten, is onmogelijk b.v.:

(1, 2, 3, 4)
(1, 2, 5, 6)
(1, 2, 7, 8)
(1, 2, 3, 5)

zou eischen dat 1, 2, 3 collineair, en 1, 2, 5 collineair waren, dus zouden dan 1, 2, 3, 5 collineair zijn.

Niet alleen zou hierdoor het vlak 1, 2, 3, 5 onbepaald worden, maar ook zouden dan in de andere vlakken *meer* dan vier punten gelegen zijn.

Omgekeerd is het ook niet mogelijk dat vier punten in dezelfde twee vlakken liggen.

Nu hebben we dus drie gevallen te onderscheiden:

1⁰. Eén drietal punten van de Cf. behoort tot drie vlakken;

2⁰. „ „ „ „ „ „ „ slechts tot twee vlakken;

3⁰. „ „ vlakken „ „ „ „ „ „ „ punten.

De twee laatste gevallen zijn onderling duaal, daarom is het voldoende het 1ᵉ en 2ᵉ geval te onderzoeken.

Als in een Cf. het *1ᵉ geval* zich voordoet, en b.v. 1, 2, 3 het drietal is dat tot drie vlakken behoort, dan kunnen wij stellen:

$$(1\ 2\ 3\ 4)_{\overline{1}},\ (1\ 2\ 3\ 5)_{\overline{2}},\ (1\ 2\ 3\ 6)_{\overline{3}},\ (7\ 8\ .\ .)_{\overline{4}},$$
$$(7\ 8\ .\ .)_{\overline{5}},\ (7\ 8\ .\ .)_{\overline{6}},\ (7\ .\ .\ .)_{\overline{7}},\ (8\ .\ .\ .)_{\overline{8}}.$$

Weer moet elk punt viermaal voorkomen.

Nu moeten nog geplaatst worden: 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.

In $\overline{7}$ *en* $\overline{8}$ liggen òf de drie punten 4, 5, 6 òf in beiden slechts twee van die drie.

Onmogelijk is 't dat in één van deze twee vlakken de drie punten 4, 5, 6 en in de andere slechts twee van de drie liggen, b.v. aldus:

$\overline{4}$	6 7 8
$\overline{5}$	6 7 8
$\overline{6}$	7 8
$\overline{7}$	4 5 7
$\overline{8}$	6 4 5 8

want dan zouden in $\overline{8}$ de vijf punten 6, 7, 8, 4, 5 gelegen zijn.

In de eerste onderstelling: 4, 5, 6 in $\overline{7}$ èn $\overline{8}$, blijven er nu nog over de punten 1, 2, 3, 4, 5, 6. Op zes manieren kunnen 1, 2, 3 met 4, 5, 6 twee aan twee gecombineerd, in groepen van drie tweetallen gerangschikt worden, maar daarmee ontstaat toch slechts één Cf. VI, omdat (1, 2, 3) en (4, 5, 6) onderling verwisseld kunnen worden zonder dat de Cf. verandert. Het symbool is dus:

	1	1	1	1	2	3	4	4
	2	2	2	4	5	6	5	5
Cf. VI.	3	3	3	7	7	7	6	6
	4	5	6	8	8	8	7	8

In de tweede onderstelling: alleen 4,5 in $\overline{7}$ èn $\overline{8}$, komt men tot

	1	1	1	1	4	5	2	3
	2	2	2	6	6	6	4	4
Cf. VII.	3	3	3	7	7	7	5	5
	4	5	6	8	8	8	7	8

§ 5. Als in een Cf. het *2e geval* zich voordoet en b.v. 1, 2, 3 het drietal is, dat slechts tot twee vlakken behoort, dan stellen wij:

$$(1\ 2\ 3\ 4)_{\overline{1}},\ (1\ 2\ 3\ 5)_{\overline{2}}.$$

In de overige zes vlakken zal slechts één van de drie punten 1, 2, 3 liggen, omdat 1, 2, 3 op een rechte liggen, en door deze rechte geen ander vlak gaat dan $\overline{1}$ en $\overline{2}$. Bovendien zouden dan in zulk een vlak vijf punten gelegen zijn.

Verder zullen de drie punten 6, 7, 8 in één enkel vlak liggen of ze zullen twee aan twee over de zes overige vlakken verdeeld zijn. De combinatie 6, 7, 8 kan n.l. niet tweemaal voorkomen, aangezien hieruit volgen zou, dat 6, 7, 8 collineair waren, en dan andere vlakken vijf punten zouden bevatten. Kwam de groep 6, 7, 8 driemaal voor, dan hadden we weer het eerste geval, dat reeds in § 4 behandeld is. Zoo vindt men weer de Cf. VII.

Er kunnen dus twee hypothesen gemaakt worden:

$(6\,7\,8\,.)_{\overline{3}},\ (6\,7\,.\,.)_{\overline{4}},\ (6\,7\,.\,.)_{\overline{5}},\ (6\,8\,.\,.)_{\overline{6}},\ (7\,8\,.\,.)_{\overline{7}},\ (8\,.\,.\,.)_{\overline{8}}\,.\,.\,(a)$

of: $(6\,7\,.\,.)_{\overline{3}},\ (6\,7\,.\,.)_{\overline{4}},\ (6\,8\,.\,.)_{\overline{5}},\ (6\,8\,.\,.)_{\overline{6}},\ (7\,8\,.\,.)_{\overline{7}},\ (7\,8\,.\,.)_{\overline{8}}\,.\,.\,.\,(b)$

In de eerste onderstelling (a) bevatten de drie vlakken $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$ nog de punten 1, 2, 3, 4, 5, want er zijn in die vlakken nog vijf plaatsen open, die door verschillende indices moeten worden ingenomen. Dan hebben we nog te beschikken over: 1, 2, 3, 4,4, 5,5. Aangezien nu de indices (1, 2, 3) en (4, 5) onderling verwisselbaar zijn, mogen we stellen, dat 1, 4, 5 in $\overline{8}$, 2, 5 in $\overline{7}$, en 3, 4 in $\overline{6}$ liggen:

$$(3\,4\,6\,8)_{\overline{6}},\ (2\,5\,7\,8)_{\overline{7}},\ 1\,4\,5\,8)_{\overline{8}}.$$

Nu zijn nog over de eerst afgezonderde 1, 2, 3, 4, 5.

Bovendien kunnen we stellen dat 4 in $\overline{4}$ en 5 in $\overline{5}$ ligt

$$(4\,6\,7\,.)_{\overline{4}},\quad (5\,6\,7\,.)_{\overline{5}}$$

en dat daarom 3 niet in $\overline{4}$ zal liggen, want dan zou volgens $(3\,4\,6\,7)_{\overline{4}}$ en $(3\,4\,6\,8)_{\overline{6}}$ de groep 3, 4, 6 collineair zijn, dus in het vlak $\overline{1}$ meer dan vier punten liggen.

Evenmin kan 2 in $\overline{5}$ liggen, want dan zou volgens $\overline{5}$ en $\overline{7}$ de groep 2, 5, 7 collineair zijn, en het vlak $\overline{2}$ meer dan vier punten bevatten.

Nu zijn er nog drie mogelijkheden:

Als men 1 in $\overline{3}$ stelt, dus 2 in $\overline{4}$ en 3 in $\overline{5}$, dan komt men tot

	1	1	1	2	3	3	2	1
	2	2	6	4	5	4	5	4
Cf. VIII.	3	3	7	6	6	6	7	5
	4	5	8	7	7	8	8	8

Als men 1 in $\overline{4}$ stelt, dus 2 in $\overline{3}$ en 3 in $\overline{5}$, dan vindt men

	1	1	2	1	3	3	2	1
	2	2	6	4	5	4	5	4
Cf. IX.	3	3	7	6	6	6	7	5
	4	5	8	7	7	8	8	8

Als men 1 in $\bar{5}$ stelt, dus 3 in $\bar{3}$ en 2 in $\bar{4}$, dan heeft men

$$(1\,2\,3\,4)_{\bar{1}},\ (1\,2\,3\,5)_{\bar{2}},\ (3\,6\,7\,8)_{\bar{3}},\ (2\,4\,6\,7)_{\bar{4}},\ (1\,5\,6\,7)_{\bar{5}},$$
$$(3\,4\,6\,8)_{\bar{6}},\ (2\,5\,7\,8)_{\bar{7}},\ (1\,4\,5\,8)_{\bar{8}}$$

hetgeen echter door de substituties (2, 3), (4, 5), (6, 7) overgaat in:

$$(1\,2\,3\,5)_{\bar{1}},\ (1\,2\,3\,4)_{\bar{2}},\ (2\,6\,7\,8)_{\bar{3}},\ (3\,5\,6\,7)_{\bar{4}},\ (1\,4\,6\,7)_{\bar{5}},$$
$$(2\,5\,7\,8)_{\bar{6}},\ (3\,4\,6\,8)_{\bar{7}},\ (1\,4\,5\,8)_{\bar{8}}$$

en dit is identiek met de Cf. IX. De laatste onderstelling levert dus geen nieuwe Cf.

De Cf.'s VIII en IX zijn in zichzelf duaal. Dit is als volgt aan te toonen.

Noemen we de acht vlakken van de Cf. VIII naar volgorde *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, dan kunnen we het hiermee duaal overeenkomende symbool vinden door in kolommen op te schrijven de vlakken, die door één punt gaan.

Dan komt er:

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	b	c	c	c
b	b	b	d	e	d	d	f
c	d	e	f	g	e	e	g
h	g	f	h	h	f	g	h

Ook hier komt één drietal vlakken: *c*, *d*, *e* tweemaal voor, d.i. het 3e geval van § 4: Eén drietal vlakken behoort slechts tot twee punten van de Cf.

Vervangen we nu:	c	d	e	f	g	h	a	b
door:	1	3	2	4	5	8	6	7

dan blijkt uit dit symbool weer de Cf VIII voor den dag te komen.

Doet men hetzelfde met de Cf IX, dan komt er:

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	b	c	c	c
b	b	b	d	e	d	d	f
d	c	e	f	g	e	e	g
h	g	f	h	h	f	g	h

hetgeen door de substitutie: $\dfrac{c\ d\ e\ f\ g\ h\ a\ b}{1\ 2\ 3\ 5\ 4\ 8\ 7\ 6}$ weer het symbool van de Cf IX zelf geeft.

Ook in de tweede veronderstelling (b) in het begin van § 5: Behalve: $(1\,2\,3\,4)_{\overline{1}}$, $(1\,2\,3\,5)_{\overline{2}}$, heeft men

$(6\,7\,.\,.)_{\overline{3}}$, $(6\,7\,.\,.)_{\overline{4}}$, $(6\,8\,.\,.)_{\overline{5}}$, $(6\,8\,.\,.)_{\overline{6}}$, $(7\,8\,.\,.)_{\overline{7}}$, $(7\,8\,.\,.)_{\overline{8}}$

moet er in de vlakken $\overline{3}$, $\overline{4}$ .... $\overline{8}$ één, en niet meer dan één, van de punten 1, 2, 3 liggen, omdat anders 1, 2, 3 collineair zouden zijn, en meer dan vier punten in die vlakken zouden liggen.

Dus moeten deze vlakken afwisselend 4 en 5 bevatten:

$(\,.\,4\,6\,7)_{\overline{3}}$, $(\,.\,5\,6\,7)_{\overline{4}}$, $(\,.\,4\,6\,8)_{\overline{5}}$, $(\,.\,5\,6\,8)_{\overline{6}}$, $(\,.\,4\,7\,8)_{\overline{7}}$, $(\,.\,5\,7\,8)_{\overline{8}}$

Nu kan men stellen, dat 1 in $\overline{3}$ ligt, en bijgevolg niet in $\overline{5}$ en $\overline{7}$ (hetgeen 1, 4, 6 resp. 1, 4, 7 collineair zou maken) maar in een van de drie overblijvende vlakken $\overline{4}$, $\overline{6}$ of $\overline{8}$. En we kunnen voor $\overline{6}$ of $\overline{8}$ aannemen $\overline{6}$, wegens de mogelijke verwisseling der indices 6 en 7. Nu zijn er dus twee mogelijkheden: 1 in $\overline{4}$ òf $\overline{1}$ in $\overline{6}$.

Als 1 in $\overline{4}$ ligt, stellen wij 2 in $\overline{5}$, zooals geoorloofd is: $(2\,4\,6\,8)_{\overline{5}}$; verder 3 in $\overline{7}$ (want 2 in $\overline{7}$ zou 2, 4, 8 collineair maken) en zoo ontstaan er twee gevallen, in de veronderstelling, dat in 't vlak $\overline{6}$ liggen zal 2 òf 3. Dit geeft de

	1	1	1	1	2	2	3	3
	2	2	4	5	4	5	4	5
Cf. X.	3	3	6	6	6	6	7	7
	4	5	7	7	8	8	8	8

en:

	1	1	1	1	2	3	3	2
	2	2	4	5	4	5	4	5
Cf. XI.	3	3	6	6	6	6	7	7
	4	5	7	7	8	8	8	8

Bepalen wij hiervan de duale symbolen. Cf. X geeft:

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	b	c	c	e
b	b	b	c	d	d	d	f
c	e	g	e	f	e	g	g
d	f	h	g	h	f	h	h

Door de substitutie: $\dfrac{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8}$ komt men tot

	1	1	1	1	2	3	3	5
	2	2	2	3	4	4	4	6
Cf. XII.	3	5	7	5	6	5	7	7
	4	6	8	7	8	6	8	8

Zoo gaat Cf. XI over in de tabel

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	b	c	c	e
b	b	b	c	d	d	d	f
c	e	f	e	f	e	g	g
d	h	g	g	h	f	h	h

die door dezelfde substitutie wordt omgezet in

	1	1	1	1	2	3	3	5
	2	2	2	3	4	4	4	6
Cf. XIII.	3	5	6	5	6	5	7	7
	4	8	7	7	8	6	8	8

Als we volgens de tweede mogelijkheid 1 in $\overline{6}$ stellen, dus behalve $(1\ 4\ 6\ 7)_{\overline{3}}$ ook $(1\ 5\ 6\ 8)_{\overline{6}}$ aannemen, en, zooals geoorloofd is, 2 in $\overline{4}$: $(2\ 5\ 6\ 7)_{\overline{4}}$, dan kan 2 ten slotte nog liggen in $\overline{5}$ of in $\overline{7}$ (niet in $\overline{8}$, hetgeen 2, 5, 7 collineair zou maken).

Maar de hypothese, dat 2 in $\overline{5}$ zal liggen, voert tot het symbool:

1	1	1	2	2	1	3	3
2	2	4	5	4	5	4	5
3	3	6	6	6	6	7	7
4	5	7	7	8	8	8	8

dat door de substitutie (1, 3), (6, 8) overgaat in:

1	1	3	2	2	3	1	1
2	2	4	5	4	5	4	5
3	3	7	7	6	6	6	6
4	5	8	8	8	8	7	7

en d. i. juist Cf. XI; dus deze hypothese levert geen nieuwe Cf op.

Wel komt er een nieuw geval, als men 2 in $\overline{7}$ stelt t. w.:

	1	1	1	2	3	1	2	3
	2	2	4	5	4	5	4	5
Cf. XIV.	3	3	6	6	6	6	7	7
	4	5	7	7	8	8	8	8

waaruit weer volgt het hiermee duale symbool:

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	b	c	c	e
b	b	b	c	d	d	d	f
c	d	e	e	f	e	g	g
f	g	h	g	h	f	h	h

Door de substitutie

a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	3	4	5	6	7	8

vindt men hieruit:

	1	1	1	1	2	3	3	5
	2	2	2	3	4	4	4	6
Cf. XV.	3	4	5	5	6	5	7	7
	6	7	8	7	8	6	8	8

Hiermede zijn de symbolen van alle mogelijke Cf. $(8_4, 8_4)$ gevonden; nu zullen wij hunne bestaanbaarheid aantoonen.

§ 6. In de Cf. I (§ 2) stellen al de punten en al de vlakken het geval α voor (§ 1) en zijn de punten en vlakken twee aan twee aldus toegevoegd:

$$1, 8;\ 2, 7;\ 3, 6;\ 4, 5.\ \text{en}\ \bar{1}, \bar{8};\ \bar{2}, \bar{7};\ \bar{3}, \bar{6};\ \bar{4}, \bar{5};$$

Twee toegevoegde punten zijn niet door een vlak van de Cf. verbonden.

Twee toegevoegde vlakken hebben geen punt van de Cf. gemeen.

De Cf. is in zichzelf duaal. Maken we n.l. op de gewone wijze (zooals in § 5) het symbool der vlakken op, dan gaat dit door dezelfde eenvoudige substitutie over in het symbool van Cf. I.

De punten in twee toegevoegde vlakken zijn de hoekpunten van twee volledige vierhoeken, die niet perspectief liggen, maar waarvan de paren overstaande zijden de doorsnede van hun vlakken in dezelfde drie puntenparen ontmoeten. Beschouwen wij bijv.: $(1\,2\,3\,4)_{\bar{1}}$ en $(5\,6\,7\,8)_{\bar{8}}$.

1 2 / 5 6	hebben	een	snijpunt	in	het	vlak	$\bar{2}$
3 4 / 7 8	„	„	„	„	„	„	$\bar{7}$
1 4 / 6 7	„	„	„	„	„	„	$\bar{4}$
2 3 / 5 8	„	„	„	„	„	„	$\bar{5}$
1 3 / 5 7	„	„	„	„	„	„	$\bar{3}$
2 4 / 6 8	„	„	„	„	„	„	$\bar{6}$.

En ook omgekeerd: Heeft men op een rechte drie puntenparen van een involutie, door de rechte twee verschillende vlakken en in deze vlakken twee vierhoeken, die niet perspectief zijn maar waarvan de paren overstaande zijden gaan door de beschouwde puntenparen van de involutie, dan zijn de hoekpunten van die vierhoeken de punten van een Cf. van het hier besproken type, die dus op deze wijze te construeeren is. Het bestaan van deze Cf. is ook nog anders aan te toonen:

De rechten 1 2, 3 5, 4 6, 7 8 ontmoeten tegelijkertijd de lijnen 1 7, 2 8, 3 4, 5 6, want elke lijn van de eene groep snijdt blijkens de volgende tabel alle lijnen van de andere groep.

1 2 snijdt	1 7	in	1	4 6 snijdt	1 7	in het vlak	$\overline{4}$
	2 8	„	2		2 8	„	$\overline{6}$
	3 4	in het vlak	$\overline{1}$		3 4	in	4
	5 6	„	$\overline{2}$		5 6	„	6
3 5 snijdt	1 7	„	$\overline{3}$	7 8 snijdt	1 7	in	7
	2 8	„	$\overline{5}$		2 8	„	8
	3 4	in	3		3 4	in het vlak	$\overline{7}$
	5 6	„	5		5 6	„	$\overline{8}$

Deze acht lijnen liggen dus op een quadratisch oppervlak en vormen de vierhoeken 1 2 8 7 en 3 4 6 5. Toegevoegde punten zijn overstaande hoekpunten van deze vierhoeken.

1 2, 3 5, 4 6, 7 8 zijn lijnen van het eene stelsel op het quadratisch oppervlak.

1 7, 2 8, 3 4, 5 6 lijnen van het andere stelsel.

Nemen wij omgekeerd op een quadratisch oppervlak twee scheeve vierhoeken 1 2 8 7 en 3 4 6 5, waarvan de zijden verschillende rechten van het quadratisch oppervlak zijn, dan zijn hunne hoekpunten de punten van een Cf. I.

De vlakken van de Cf. zijn raakvlakken aan het quadratisch oppervlak, niet in de punten van de Cf., maar in acht andere punten, die de punten zijn van een andere Cf. (S_4, S_4) van hetzelfde type. Dit blijkt dadelijk uit de figuur van vier kruisende lijnen, waarop vier andere kruisende lijnen rusten. Van de zestien snijpunten kan men er acht zoodanig kiezen, dat zij een Cf. I vormen. Zoo liggen op elke lijn twee punten der Cf., en vier aan vier liggen die punten in één vlak, dat het quadratisch oppervlak raakt in het punt, waar de twee lijnen, die dat vlak bepalen, elkaar snijden.

Onze Cf. I kan niet alleen beschouwd worden als bepaald door de hoekpunten van de twee genoemde scheeve vierhoeken 1 2 8 7, 3 4 6 5, maar ook door de hoekpunten der vierhoeken 1 3 8 6, 2 4 7 5, en 1 4 8 5, 2 3 7 6 gelegen op twee andere quadratische oppervlakken. De zes genoemde vierhoeken zijn diegene, die de paren van toegevoegde punten der Cf. als paren van overstaande hoekpunten hebben.

§ 7. Drie punten van een vlak en het toegevoegde van het vierde punt in dat vlak zijn de hoekpunten van een tetraëder, waarvan de zijvlakken vlakken van de Cf. zijn. B.v.: 1 2 3 5 is zulk een tetraëder; de zijvlakken zijn:

$1\,2\,3 = \bar{1}$

$2\,3\,5 = \bar{5}$

$3\,5\,1 = \bar{3}$

$5\,1\,2 = \bar{2}$

Behalve 1 2 3 5 komen uit de punten van het vlak $\bar{1}$ nog drie andere tetraëders: 2 3 4 . 8; 3 4 1 . 7; 4 1 2 . 6.

Er zijn acht vlakken in onze Cf., die dus tezamen 36 tetraëders zouden geven. Maar de vlakken leveren vier aan vier denzelfden tetraëder op, dus zijn er in 't geheel *acht* verschillende tetraëders, n.l. behalve de vier bovengenoemde nog: 2 5 6 . 8; 5 6 1 . 7; 3 5 7 . 8; 4 6 7 . 8.

Duaal hiertegenover staat, dat ook van de vlakken, die door één punt gaan, er drie met het toegevoegde van het vierde vlak een tetraëder vormen, waarvan de hoekpunten punten van de Cf. zijn.

De toegevoegden van de hoekpunten van een dezer tetraëders zijn de hoekpunten van een ander dezer tetraëders, en twee tetraëders, op deze wijze aan elkaar toegevoegd, blijken elk in den ander ingeschreven te zijn, en zoodanig, dat de drie hoekpunten van den éénen, die in de door een gegeven top gaande zijvlakken van den anderen liggen, met dien top in één vlak gelegen zijn.

Dit wordt b.v. voor den tetraëder 1 2 3 5 en den aan hem toegevoegden tetraëder 8 7 6 4 aldus geverifieerd:

1 2 3	met 4	in	vlak	$\overline{1}$	8 7 6	met 5	in	vlak	$\overline{8}$
2 3 5	„ 8	„	„	$\overline{5}$	7 6 4	„ 1	„	„	$\overline{4}$
3 5 1	„ 7	„	„	$\overline{3}$	6 4 8	„ 2	„	„	$\overline{6}$
5 1 2	„ 6	„	„	$\overline{2}$	4 8 7	„ 3	„	„	$\overline{7}$

Deze twee in- en om elkaar beschreven tetraëders vormen de figuur van Moebius, die in het tweede gedeelte van dit proefschrift in het bijzonder zal worden behandeld.

§ 8. Van de punten der Cf. II (§ 3) stellen 3 en 6 het geval α (§ 1) voor, en zijn aan elkaar toegevoegd, zooals men gemakkelijk uit het symbool kan opmaken. De andere punten stellen het geval β voor en de toegevoegde koppels van de punten 1, 2, 4, 5, 7, 8 zijn respectievelijk 78, 58, 57, 24, 14, 12. Hieruit blijkt een verdeeling van deze zes punten in twee groepen: 1 2 4 en 5 7 8, zoodanig dat elk punt van de ééne groep heeft tot toegevoegd koppel de twee niet-homologe punten van de andere groep.

Dat ook deze Cf. in zichzelf duaal is, blijkt aldus:

Noemen we haar vlakken *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, dan wordt haar symbool bij dualiseering:

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	b	b	c	d
b	b	c	d	c	d	e	f
c	e	f	e	g	e	f	g
d	f	h	h	h	g	g	h

Om de substitutie te vinden, die dit symbool omzet in dat van Cf. II, moeten we dit nieuwe symbool nader beschouwen in verband met de duale omzetting der gevallen α en β, die in § 1 ook werd gegeven.

Dan blijkt, dat a is toegevoegd aan g

b	heeft tot toeg. koppel	f, h
c	„ „ „ „	d, e
d	„ „ „ „	c, f
e	„ „ „ „	c, h
f	„ „ „ „	b, d
g	is toegevoegd aan	a
h	heeft tot toeg. koppel	b, e.

De substitutie is dus $\dfrac{a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f\ \ g\ \ h}{6\ \ 1\ \ 5\ \ 2\ \ 4\ \ 8\ \ 3\ \ 7}$

In de Cf. II zijn blijkbaar $\bar{1}$ en $\bar{7}$ de toegevoegde vlakken. De punten van de Cf. die op elk dier vlakken liggen, zijn de hoekpunten van twee vierhoeken, 1 2 3 4 en 5 6 7 8, waarvan de zijden de snijlijn $(\bar{1}, \bar{7})$ ontmoeten in dezelfde punten, zoodat de puntenparen:

$$\underset{(\bar{2})}{12.56},\ \underset{(\bar{8})}{34.58};\quad \underset{(\bar{3})}{13.57},\ \underset{(\bar{5})}{24.67};\quad \underset{(\bar{4})}{14.68},\ \underset{(\bar{6})}{23.78}$$

(gerangschikt naar de paren overstaande zijden van den eersten vierhoek) behooren tot eenzelfde involutie I_1, en de paren:

$$\underset{(\bar{2})}{12.56},\ \underset{(\bar{6})}{23.78};\quad \underset{(\bar{3})}{13.57},\ \underset{(\bar{4})}{14.68};\quad \underset{(\bar{8})}{34.58},\ \underset{(\bar{5})}{24.67}$$

(gerangschikt naar de zijden van den tweeden vierhoek) behooren tot een andere involutie I_2.

Het product $I_1\, I_2$ is een cyclische projectiviteit van de 3e orde, want:

Ten 1°. 12.56 (I_1) 34.58 (I_2) 24.67 (I_1) 13.57 (I_2) 14.68 (I_1) 23.78 (I_2) 12.56.

Dus:

$$12.56\ (I_1 I_2)\ 24.67\ (I_1 I_2)\ 14.68\ (I_1 I_2)\ 12.56.$$

Ten 2^0. $34.58\ (I_1)\ 12.56\ (I_2)\ 23.78\ (I_1)\ 14.68\ (I_2)$
$13.57\ (I_1)\ 24.67\ (I_2)\ 34.58.$

Dus:

$$34.58\ (I_1 I_2)\ 23.78\ (I_1 I_2)\ 13.57\ (I_1 I_2)\ 34.58.$$

De bedoelde cyclische projectiviteit bevat dus de beide kringen:

$$12.56,\quad 24.67,\quad 14.68$$
en
$$34.58,\quad 23.78,\quad 13.57.$$

De gevonden eigenschap leidt tot de volgende constructie der Cf. II:

Men neemt op een rechte a de punten A_1, A_2, A_3 willekeurig aan en bepaalt een tweede groep B_1, B_2, B_3 van de cyclische projectiviteit, die door de groep $A_1\ A_2\ A_3$ is aangewezen.

In een vlak door a construeert men een vierhoek 1 2 3 4, waarvan de zijden 1 2, 1 3, 1 4, 2 3, 2 4, 3 4 respectievelijk gaan door A_1, B_3, A_3, B_2, A_2, B_1 en in een ander vlak door a een vierhoek 5 6 7 8, waarvan de zijden 5 6, 5 7, 5 8, 6 7, 6 8, 7 8 respectievelijk gaan door A_1, B_3, B_1, A_2, A_3, B_2.

De hoekpunten van de twee vierhoeken zijn de punten van een Cf. $(8_4, 8_4)$ van het type II.

§ 9. Wij willen nu onderzoeken, of men uit de elementen van de Cf. II ook tetraëders kan samenstellen.

Als er op deze wijze een tetraëder is samengesteld, dan zullen geen twee van zijn hoekpunten aan elkaar toegevoegd zijn, want twee toegevoegde punten hebben geen verbindingslijn in de Cf. Evenmin zal het éene hoekpunt behooren tot het toegevoegd koppel van het andere, want door de verbindingslijn van een punt met één van zijn toegevoegd koppel gaan geen twee vlakken van de Cf., die zijvlakken van den gezochten tetraëder zouden zijn.

Hieruit volgt, dat de eenig mogelijke tetraëders zijn 1 2 4 6 en 3 5 7 8. Tezamen bevatten zij alle punten van de Cf. en hunne zijvlakken blijken alle vlakken van de Cf. te zijn, n.l.:

1 2 4 met 3 in $\overline{1}$	3 5 7 met 1 in $\overline{3}$
2 4 6 „ 7 „ $\overline{5}$	5 7 8 „ 6 „ $\overline{7}$
4 6 1 „ 8 „ $\overline{4}$	7 8 3 „ 2 „ $\overline{6}$
6 1 2 „ 5 „ $\overline{2}$	8 3 5 „ 4 „ $\overline{8}$

Hieruit blijkt ook aanstonds, dat deze twee tetraëders op de volgende manier in- en om elkaar beschreven zijn:

In de zijvlakken van den eersten, die gaan door 6, liggen drie hoekpunten van den tweeden, welker vlak (5 7 8) door 6 gaat; hetzelfde gebeurt met 3 van den tweeden tetraëder. Daarentegen geldt voor de hoekpunten van den tweeden, die liggen in de zijvlakken van den eersten, respectievelijk gaande door 1, 2, of 4, dat zij behooren tot één vlak, dat respectievelijk door 4, 1, of 2 gaat.

B. v. de drie zijvlakken van den eersten tetraëder gaande door 1 bevatten van den tweeden tetraëder de hoekpunten 3, 8, 5 en deze liggen met 4 in één vlak $\overline{8}$.

Op dezelfde wijze als 1, 2, 4 respectievelijk met 4, 1, 2, zijn de hoekpunten 5, 7, 8 van den tweeden tetraëder verbonden met de hoekpunten 8, 5, 7.

§ 10. De Cf. III is in zichzelf duaal. Dit blijkt weer bij duale omzetting van het symbool; dan komt er: (§ 3)

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	b	b	c	d
b	b	c	d	c	d	e	f
c	e	g	e	f	e	f	g
d	f	h	h	h	g	g	h

Om de substitutie te vinden, door welke dit schema overgaat in het symbool der Cf. III, moeten we dit nieuwe symbool weer nader beschouwen. Dan blijkt, dat:

a	heeft tot toegevoegd koppel	f, g
b	„ „ „ „	g, h
c	„ „ „ „	d, e
d	„ „ „ „	c, f
e	„ „ „ „	c, h
f	„ „ „ „	a, d
g	„ „ „ „	a, b
h	„ „ „ „	b, e

Vergelijken we hiermee de tabel, die geldt voor de Cf. III:

1	heeft tot toegevoegd koppel	7, 8
2	„ „ „ „	3, 8
3	„ „ „ „	2, 6
4	„ „ „ „	5, 7
5	„ „ „ „	4, 6
6	„ „ „ „	3, 5
7	„ „ „ „	1, 4
8	„ „ „ „	1, 2

Dus vinden we voor de gezochte substitutie:

$$\frac{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h}{2\ 1\ 5\ 6\ 4\ 3\ 8\ 7}$$

Alle punten en vlakken der Cf. III verkeeren in het geval β (§ 1).

De paren respectievelijk toegevoegd aan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 zijn 7 8, 3 8, 2 6, 5 7, 4 6, 3 5, 1 4, 1 2, dus de punten der Cf. zijn verdeeld in twee groepen: 1 2 6 4, 3 5 7 8 en daarin op zulk een wijze gerangschikt, dat elk punt van de eene groep heeft tot toegevoegd koppel twee opvolgende punten van de andere groep.

De vier rechten 1 3, 2 8, 4 5, 6 7 worden gesneden door drie kruisende rechten 2 4, 5 7, 3 8, want:

2 4 snijdt 1 3 in $\overline{1}$	5 7 snijdt 1 3 in $\overline{3}$	3 8 snijdt 1 3 in 3
2 8 in 2	2 8 in $\overline{6}$	2 8 in 8
4 5 in 4	4 5 in 5	4 5 in $\overline{8}$
6 7 in $\overline{5}$	6 7 in 7	6 7 in $\overline{7}$

Er is dus een quadratisch oppervlak, dat deze zeven rechten bevat.

De lijn 1 6 ligt niet op dit oppervlak en wordt gesneden door de lijnen 2 5 (in $\overline{2}$) en 4 8 (in $\overline{4}$).

De viertallen rechten:

1 5, 2 3, 4 7, 6 8; 1 7, 2 5, 3 6, 4 8; 1 8, 2 7, 3 4, 5 6 gesneden door: 2 6, 3 7, 1 4 ; 3 5, 1 6, 7 8 ; 4 6, 5 8, 1 2 hebben een analoge eigenschap.

Nemen wij op een quadratisch oppervlak, maar niet op een van zijn rechten, twee punten 1 en 6, en trekken door een willekeurig punt van de lijn 1 6 een rechte, die het quadratisch oppervlak moge snijden in 2 en 5, dan is aan $(1\ 2\ 5\ 6)_{\overline{2}}$ voldaan. Noemen wij 4 een van de twee punten van het quadratisch oppervlak, waarin de rechten van dat oppervlak, die gaan door 2 en 5, elkaar snijden.

Laat ons nu door 4 de lijn trekken, die 16 snijdt, en die rechte van het oppervlak, die behalve 2 4 nog gaat door 2, en laat ons zeggen, dat 8 haar snijpunt is met deze laatste rechte. De lijn 16 en deze rechte zijn n.l. kruisende lijnen en hebben dus van uit 4 slechts één transversaal.

Door 8 gaat, behalve 2 8, nog een rechte van het quadratisch oppervlak en evenzoo gaat door 5 nog een beschrijvende lijn behalve 45; deze twee lijnen zullen respectievelijk in 3 en 7 gesneden worden door de rechten van het quadratisch oppervlak, die achtereenvolgens door 1 en 6 gaan.

Men ziet gemakkelijk, dat de punten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die van een Cf. III zijn.

§ 11. Let men op de opmerking van § 9, dan vindt men onmiddellijk, dat 1 2 4 6, 3 5 7 8 de eenige tetraëders zijn, die men uit de elementen van de Cf. III kan samenstellen.

De zijvlakken zijn:

van den eersten 1 2 4 met 3 in $\overline{1}$	van den tweeden 3 5 7 met 1 in $\overline{3}$
2 4 6 „ 7 „ $\overline{5}$	5 7 8 „ 2 „ $\overline{6}$
4 6 1 „ 8 „ $\overline{4}$	7 8 3 „ 6 „ $\overline{7}$
6 1 2 „ 5 „ $\overline{2}$	8 3 5 „ 4 „ $\overline{8}$

In de zijvlakken van den eersten tetraëder, die in 1 samenkomen, liggen 3 8 5 van den tweeden tetraëder, welker vlak gaat door 4.

In de zijvlakken door 2 liggen 3 7 5, in wier vlak ligt 1.
„ „ „ „ 4 „ 3 7 8, „ „ „ „ 6.
„ „ „ „ 6 „ 7 8 5, „ „ „ „ 2.
„ „ „ „ 3 „ 1 6 4, „ „ „ „ 8.
„ „ „ „ 5 „ 1 2 4, „ „ „ „ 3.
„ „ „ „ 7 „ 1 2 6, „ „ „ „ 5.
„ „ „ „ 8 „ 2 6 4, „ „ „ „ 7.

Zij blijken dus in- en om elkaar beschreven te zijn, zoodanig, dat in drie zijvlakken, die samenkomen in een gegeven hoekpunt van den eenen tetraëder, liggen drie hoekpunten van den anderen, welker vlak gaat door het hoekpunt, dat aan het beschouwde in de reeds genoemde groepen 1 2 6 4 en 3 5 7 8 voorafgaat.

§ 12. In de Cf. IV (§ 3) zijn vier punten van het type α (§ 1); zij vormen de twee paren van toegevoegde punten 3, 6 en 4, 5.

De paren, die toegevoegd zijn aan de punten 1, 2, 7, 8 zijn respectievelijk 7 8, 7 8, 1 2, 1 2; dus zijn de punten van het type β gescheiden in twee paren 1 2, 7 8 die wij de paren geconjugeerde punten zullen noemen. Deze Cf. is ook in zichzelf duaal. Haar symbool wordt n.l. bij dualiseering:

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	b	b	c	d
b	b	c	d	c	d	e	f
c	e	f	e	g	e	f	g
d	h	h	f	h	g	g	h

En hieruit blijkt, dat *a* en *b* hebben tot gemeenschappelijk toegevoegd koppel *g* en *f*, en omgekeerd; *d* en *e* staan in dezelfde betrekking tot c en h.

De noodige substitutie is dus:

a	b	c	d	e	f	g	h
6	4	8	1	2	5	3	7

En in de andere notatie zijn de paren toegevoegde vlakken: $\bar{1}$, $\bar{7}$; $\bar{2}$, $\bar{6}$.

Analoog aan de redeneering in § 8 is de volgende:

Op de rechte, die twee toegevoegde vlakken $\bar{1}$ en $\bar{7}$ gemeen hebben, liggen de drie paren van punten:

$$\underset{(\bar{2})}{1\,2.5\,6},\ \underset{(\bar{6})}{3\,4.7\,8};\ \underset{(\bar{3})}{1\,3.5\,7},\ \underset{(\bar{5})}{2\,4.6\,7};\ \underset{(\bar{4})}{1\,4.6\,8},\ \underset{(\bar{8})}{2\,3.5\,8}\ldots.\ (\mathrm{I})$$

die tot dezelfde involutie I_1 behooren.

Tot een andere involutie I_2 behooren de paren:

$$\underset{(\bar{2})}{1\,2.5\,6},\ \underset{(\bar{6})}{3\,4.7\,8};\ \underset{(\bar{3})}{1\,3.5\,7},\ \underset{(\bar{4})}{1\,4.6\,8};\ \underset{(\bar{5})}{2\,4.6\,7},\ \underset{(\bar{8})}{2\,3.5\,8}\ldots.(\mathrm{II})$$

Deze twee involuties zijn harmonisch want $I_1\,I_2 \equiv I_2\,I_1$; zij hebben het paar 1 2 . 5 6, 3 4 . 7 8 gemeen.

Hetzelfde komt voor op de doorsnede der vlakken $\bar{2}$ en $\bar{6}$, waarin respectievelijk de vierhoeken 1 2 5 6 en 3 4 7 8 gelegen zijn.

En nu zijn de punten:

12.34, 56.78; 15.37, 26.47; 16.48, 25.38
$(\bar{1})$ $(\bar{7})$ $(\bar{3})$ $(\bar{5})$ $(\bar{4})$ $(\bar{8})$

paren van een involutie en de punten:

12.34, 56.78; 15.37, 16.48; 26.47, 25.38
$(\bar{1})$ $(\bar{7})$ $(\bar{3})$ $(\bar{4})$ $(\bar{5})$ $(\bar{8})$

paren van een andere involutie, die weer met de vorige harmonisch is.

Weer volgt hieruit een constructie voor de Cf. IV.

Nemen wij op een rechte a twee harmonische involuties met het gemeenschappelijk paar E, F, en zij A, B een paar van de eerste involutie, A, B_1 een paar van de tweede. Als dan A_1, B_1 geconjugeerd zijn in de eerste involutie, dan zullen A_1, B het zijn in de tweede, en de puntenparen, in analogen vorm opgeschreven als boven in (I) en (II), zijn:

van de eerste involutie:

E, F; A, B; B_1, A_1 . . . . (I′)

van de tweede involutie:

E, F; A, B_1; B, A_1 . . . . (II′)

Vergelijken we nu I′ en II′ met I en II, dan kunnen we de Cf. IV construeeren, door in een vlak door a te construeeren een vierhoek 1 2 3 4, waarvan de zijden

12, 13, 14, 23, 24, 34

respectievelijk gaan door:

E, A, B_1, A_1, B, F,

en in een ander vlak door a een vierhoek 5678, waarvan de zijden

56, 57, 58, 67, 68, 78

respectievelijk gaan door:

E, A, A_1, B, B_1, F.

De acht punten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bepalen dan een Cf. IV.

§ 13. De rechten 1 2, 3 5, 7 8 (die noodzakelijk elkaar moeten kruisen, omdat ze niet twee aan twee in één vlak liggen, vormen een stelsel lijnen, die tot richtlijnen hebben de rechten 1 7, 2 8, 3 4, 5 6. Want:

1 2 snijdt	1 7 in 1	3 5 snijdt	1 7 in $\overline{3}$	7 8 snijdt	1 7 in 7
	2 8 in 2		2 8 in $\overline{8}$		2 8 in 8
	3 4 in $\overline{1}$		3 4 in 3		3 4 in $\overline{6}$
	5 6 in $\overline{2}$		5 6 in 5		5 6 in $\overline{7}$

De kruisende rechten 1 2, 4 6, 7 8 vormen een stelsel lijnen met de richtlijnen 1 8, 2 7, 3 4, 5 6, want:

1 2 snijdt	1 8 in 1	4 6 snijdt	1 8 in $\overline{4}$	7 8 snijdt	1 8 in 8
	2 7 in 2		2 7 in $\overline{5}$		2 7 in 7
	3 4 in $\overline{1}$		3 4 in 4		3 4 in $\overline{6}$
	5 6 in $\overline{2}$		5 6 in 6		5 6 in $\overline{7}$

Deze twee stelsels zijn verschillend en hebben slechts de beschrijvende lijnen 1 2, 7 8 en de richtlijnen 3 4, 5 6 met elkander gemeen.

Als wij M_1, M_2 noemen de punten, waarin 12 gesneden wordt door 3 4, 5 6 en N_1, N_2 die, waarin dezelfde rechten de lijn 7 8 snijden, en bedenken, dat op een hyperboloïde twee lijnen van hetzelfde stelsel twee projectieve puntenreeksen vormen, aangezien de punten dier lijnen één aan één aan elkander zijn toegevoegd, en dat dus hun snijpunten met vier transversalen gelijke dubbelverhouding hebben, dan zien wij, dat op de eerste hyperboloïde, gegeven door 1 2, 3 5, 7 8, geldt:

$$1\,2\,M_1\,M_2 \;\pi\; 7\,8\,N_1\,N_2$$

en op de tweede hyperboloïde, bepaald door 1 2, 4 6, 7 8, geldt:

$$1\,2\,M_1\,M_2 \;\pi\; 8\,7\,N_1\,N_2$$

dus zijn de groepen $1\,2\,M_1\,M_2$ en $7\,8\,N_1\,N_2$ harmonisch

$$(1\,2\,M_1\,M_2) = (7\,8\,N_1\,N_2) = -1.$$

De punten 1, 2 en 7, 8 zijn derhalve paren van een axiale involutie, waarvan de assen zijn 3 4 en 5 6. Dat deze axiale involutie de Cf. IV inzichzelf doet overgaan, blijkt, als we in het symbool IV (§ 3) (1, 2) en (7, 8) onderling verwisselen.

Dan wordt gevonden:

1	1	2	2	1	3	5	1
2	2	3	4	4	4	6	3
3	5	5	6	6	7	7	5
4	6	8	7	8	8	8	7

dus krijgt men hetzelfde symbool weer.

Ook met behulp van deze eigenschap is de Cf. IV te construeeren.

§ 14. Uit de elementen van een Cf. IV kan men vier tetraëders opbouwen, n.l.:

1 2 3 5, 1 2 4 6, 7 8 3 5, 7 8 4 6.

De eerste tetraëder 1 2 3 5 en de vierde 7 8 4 6 bevatten samen alle punten en vlakken der Cf.:

1 2 3	met	4	in	$\overline{1}$	7 8 4	met	3	in	$\overline{6}$
2 3 5	„	8	„	$\overline{8}$	8 4 6	„	1	„	$\overline{4}$
3 5 1	„	7	„	$\overline{3}$	4 6 7	„	2	„	$\overline{5}$
5 1 2	„	6	„	$\overline{2}$	6 7 8	„	5	„	$\overline{7}$

En uit deze tabel blijkt, dat de beide tetraëders in- en om elkaar beschreven zijn, zoodanig, dat de drie vlakken van den eenen tetraëder, die in een α-hoekpunt samenkomen, bevatten drie hoekpunten van den anderen tetraëder, welker vlak gaat door het beschouwde hoekpunt van den eersten. Daarentegen drie vlakken van den eenen tetraëder, die in een β-hoekpunt samenkomen, bevatten drie hoekpunten van den anderen tetraëder, welker vlak gaat door het andere β-hoekpunt van den eersten tetraëder. Elk der tetraëders n.l. bevat twee niet aan elkaar toegevoegde punten van het type α (3, 5 of 4, 6) en een toegevoegd paar punten van het type β (1, 2 of 7, 8).

Op dezelfde wijze als de eerste en vierde, zijn ook de tweede en derde tetraëder in- en om elkaar beschreven, hetgeen uit de volgende tabel kan blijken.

1 2 4	met 3	in $\overline{1}$		7 8 3	met 4	in $\overline{6}$
2 4 6	„ 7	„ $\overline{5}$		8 3 5	„ 2	„ $\overline{8}$
4 6 1	„ 8	„ $\overline{4}$		3 5 7	„ 1	„ $\overline{3}$
6 1 2	„ 5	„ $\overline{2}$		5 7 8	„ 6	„ $\overline{7}$

§ 15. In de Cf. V verkeeren alle punten en vlakken in het geval β, zooals blijkt uit het symbool (§ 3).

De toegevoegde paren van de punten:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

zijn resp.: 7, 8; 7, 8; 4, 6; 3, 5; 4, 6; 3, 5; 1, 2; 1, 2

en hieruit volgt weer een groepeering der punten van de Cf. Wij zullen toegevoegd noemen de punten 1 en 2, 3 en 5, 4 en 6, 7 en 8. Ook de paren van toegevoegde punten zijn twee aan twee verbonden: 1, 2 aan 7, 8; 3, 5 aan 4, 6, zóódanig, dat elk punt van de ééne groep de beide punten van de andere groep tot toegevoegd koppel heeft.

Dat de Cf. V ook in zichzelf duaal is, blijkt weer bij dualiseering van het symbool. Dan komt er:

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	b	b	c	d
b	b	c	d	c	d	e	f
c	e	f	e	g	e	f	g
d	h	h	g	h	f	g	h

Hierin zijn aan de vlakken:	a	b	c	d	e	f	g	h
respectievelijk toegevoegd:	f g	f g	d e	c h	c h	a b	a b	d e.

En dit nieuwe symbool gaat in het oorspronkelijke symbool van de Cf. V over, als we

voor:	a	b	c	d	e	f	g	h
substitueeren:	1	2	3	4	6	7	8	5

De rechten 1 6, 2 4, 3 8, 5 7 kruisen elkaar twee aan twee en worden alle gesneden door de rechten: 1 3, 2 5, 4 8, 6 7. Want:

1 6 snijdt 1 3 in 1	2 4 snijdt 1 3 in $\bar{1}$
2 5 in $\bar{2}$	2 5 in 2
4 8 in $\bar{4}$	4 8 in 4
6 7 in 6	6 7 in $\bar{5}$
3 8 snijdt 1 3 in 3	5 7 snijdt 1 3 in $\bar{3}$
2 5 in $\bar{8}$	2 5 in 5
4 8 in 8	4 8 in $\bar{7}$
6 7 in $\bar{6}$	6 7 in 7

Daarom behooren deze twee viertallen van rechten tot eenzelfde quadratisch oppervlak, maar tot verschillende stelsels. De scheeve enkelvoudige achthoek 1 3 8 4 2 5 7 6 heeft zijn zijden op dit quadratisch oppervlak.

Omgekeerd: Een enkelvoudige achthoek, welks zijden rechten van een quadratisch oppervlak zijn, heeft tot hoekpunten de punten van een Cf. V, hetgeen de bestaanbaarheid van deze Cf. aantoont.

Naar aanleiding van het boven behandelde is nu het volgende op te merken:

Heeft men op een quadratisch oppervlak twee viertallen van rechten van verschillende stelsels, en kiest men uit hun zestien snijpunten er acht uit, zóó dat op elk dier rechten twee punten liggen, en niet meer dan twee, dan verkrijgt men de punten van een regelmatige Cf. (8_4, 8_4), die van het type I of V kan zijn (vergelijk § 6).

Dergelijke twee viertallen van rechten vormen twee z.g. *verbonden* quadrupels: vier kruisende lijnen, waarop vier andere kruisende lijnen rusten, die dus zestien snijpunten opleveren. Kiest men de vier punten 1 2 7 8 als hoekpunten van een vierhoek en de punten 3 5 4 6 als hoekpunten van den vierhoek, die de overige vier lijnen tot zijden heeft, dan heeft men een Cf. I.

De overige acht punten vormen ook een Cf. I.

Kiest men de punten 1 3 8 4 2 5 7 6 zoo, dat ze de hoekpunten van een achthoek zijn, dan heeft men een Cf. V.

Ook hier vormen de overige acht punten eveneens een Cf. V. In de eerste figuur zijn 1 2 3 5 en 8 7 6 4 twee in- en om elkaar beschreven tetraëders (§ 7). In de tweede figuur zijn 1 2 3 5 en 4 6 7 8 twee in- en om elkaar beschreven tetraëders (zie § 17).

Elk vlak van de Cf. gaat door twee lijnen, die elkaar snijden in een punt van het quadratisch oppervlak. Dit punt is het raakpunt van dat vlak met het quadratisch oppervlak.

Zoo zijn alle overblijvende snijpunten de aanrakingspunten van de vlakken der Cf. met het quadratisch oppervlak, en zij behooren tot een andere Cf. van hetzelfde type. De twee verbonden quadrupels vormen samen een Cf. (16_7, 16_7).

Er zijn 16 snijpunten:

Elke lijn geeft met elk der vier lijnen van het andere stelsel een snijpunt.

Ook zijn er 16 vlakken:

Elke lijn levert met elk der vier lijnen van het andere stelsel een vlak.

Elk vlak bevat 7 van de snijpunten, die op de twee snijdende lijnen liggen, welke het vlak bepalen.

Door elk punt gaan 7 vlakken:

Vier vlakken bepaald door den éénen drager met elk der vier lijnen van het andere stelsel, en nog drie vlakken bepaald door den anderen drager en elk der drie overige lijnen van het eerste stelsel.

Deze Cf. (16_7, 16_7) bevat de verschillende Cf's I en V, 18 exemplaren van de eerste soort, en 72 van de tweede soort.

§ 16. De drie rechten 1 2, 3 5, 7 8 zijn in het algemeen kruisend, tenminste, als 1 2 7 8 niet in één vlak liggen. Dan vormen deze drie lijnen een stelsel rechten, dat tot richtlijnen heeft 1 7 en 2 8. Want:

1 7 snijdt 1 2 in 1	2 8 snijdt 1 2 in 2
3 5 in $\overline{3}$	3 5 in $\overline{8}$
7 8 in 7	7 8 in 8

Ook de rechten 1 2, 4 6, 7 8 zijn dan kruisend en vormen een stelsel rechten met richtlijnen 1 8, 2 7. Want:

1 8 snijdt 1 2 in 1	2 7 snijdt 1 2 in 2
4 6 in $\overline{4}$	4 6 in $\overline{5}$
7 8 in 8	7 8 in 7

Dus verschilt dit stelsel van het eerste stelsel.

Elk dezer stelsels bepaalt een hyperboloïde. Aangezien nu deze hyperboloïden de lijnen 1 2 en 7 8 gemeen hebben, zullen zij ook nog twee lijnen van het andere stelsel gemeen moeten hebben. Dus bovengenoemde lijnenstelsels zullen een paar richtlijnen gemeen hebben, die de lijn 1 2 in A en B, de lijn 7 8 in in A′ en B′ mogen snijden.

Dan dragen op de eerste hyperboloïde de lijnen 1 2 en 7 8 twee projectieve puntenreeksen; dus is

$$(1\,2\,A\,B) = (7\,8\,A'\,B')$$

Ook op de tweede hyperboloïde dragen 1 2 en 8 7 projectieve puntenreeksen, derhalve is

$$(1\,2\,A\,B) = (8\,7\,A'\,B').$$

Dus is $(7\,8\,A'\,B') = (8\,7\,A'\,B') = -1$ en

$$(1\,2\,A\,B) = -1.$$

De groepen 1 2 A B en 7 8 A′ B′ zijn dus harmonisch.

En ook de andere viertallen van punten, die door dezelfde vier transversalen op 3 5 en 4 6 worden ingesneden, zijn dus harmonisch gelegen.

M.a.w. de richtlijnen A A′, B B′ steunen op de vier rechten 1 2, 3 5, 4 6, 7 8 in puntenparen, die de paren 1, 2; 3, 5; 4, 6; 7, 8; harmonisch verdeelen zoodanig, dat de toegevoegde punten van de Cf. zijn geconjugeerd in eenzelfde axiale involutie met de assen A A′ en B B′, die de Cf. in zichzelf transformeert. Dit blijkt, als we in het symbool V van § 3 de puntenparen (1,2), (3,5) (4,6) (7,8) onderling verwisselen; dan krijgt men hetzelfde symbool weer.

Tot dezelfde conclusie komt men, als 1 2 7 8 in één vlak liggen, maar de punten 3 4 5 6 *niet* complanair zijn.

Dan zijn 1 2, 3 5, 4 6 drie kruisende lijnen met de richtlijnen 3 4 en 5 6.

En 3 5, 7 8, 4 6 vormen een stelsel kruisende lijnen met de richtlijnen 3 6 en 4 5.

Deze twee stelsels moeten een paar richtlijnen gemeen hebben, die steunen op 1 2, 3 5, 7 8, 4 6.

Op de hyperboloïde, door het eerste stelsel bepaald, heeft men

$$(3\,5\,A\,B) = (4\,6\,A'\,B')$$

en op de tweede hyperboloïde

$$(3\,5\,A\,B) = (6\,4\,A'\,B'),$$

als A en B de snijpunten van 35 met de gemeenschappelijke richtlijnen zijn, en A′, B′ die van 4 6 met de beide richtlijnen.

Dus weer zijn de beide groepen harmonisch, en 1 2, 3 5, 4 6, 7 8 zijn paren van eenzelfde axiale involutie met de assen A A′ en B B′.

Als ten slotte de beide groepen 1 2 7 8 en 3 4 5 6 ieder in één vlak liggen, dan zullen zij twee vierhoeken doen ontstaan, die elk twee diagonaalpunten op de doorsnede der twee vlakken hebben, zóódanig, dat door de twee diagonaalpunten van elken vierhoek twee overstaande zijden van den anderen gaan; de beide paren diagonaalpunten scheiden elkaar harmonisch.

Met behulp van deze eigenschap kan men zeer gemakkelijk deze speciale Cf. V construeeren door uit te gaan van een harmonische groep van punten op een rechte. Door deze lijn legt men twee vlakken, waarin men twee volledige vierhoeken construeert, die de bedoelde bijzondere ligging hebben.

De verbindingslijn van de andere twee diagonaalpunten A en B, en de snijlijn der bedoelde vlakken zijn weer assen van een axiale involutie, die (1, 2), (3, 5), (4, 6), (7, 8) aan elkaar toevoegt. Zoo worden b. v. de punten 1 en 2 harmonisch gescheiden door het diagonaalpunt A en het snijpunt van 1 2 met de snijlijn der vlakken. Deze involutie transformeert blijkbaar onze bijzondere Cf. in zichzelf.

Voegen wij aan de elementen dezer Cf. de twee vlakken der vierhoeken toe, dan ontstaat een Cf. $(8_5, 10_4)$. Immers door elk der 8 punten gaan 5 vlakken, vier van de Cf. V en één van den vierhoek, waarvan het beschouwde punt hoekpunt is, terwijl in elk der 10 vlakken 4 punten liggen.

Voegen wij daarentegen de twee diagonaalpunten A, B, die *niet* op de doorsnede van hun vlakken liggen, toe, dan krijgen wij een Cf. $(10_4, 8_5)$ d.w.z. een figuur van 10 punten, zoodat door elk punt vier vlakken gaan; ook door de diagonaalpunten A en B, waar elk der vlakken bepaald is door een der vierhoekszijden, waarop dit diagonaalpunt gelegen is, en een zijde van den anderen vierhoek.

Voegen wij eindelijk aan de elementen van de Cf. de twee genoemde punten èn vlakken toe, dan krijgen wij een Cf. $(10_5, 10_5)$, die in zichzelf getransformeerd wordt door de boven aangegeven axiale involutie, welke tot assen heeft de doorsnede van de vlakken der vierhoeken en de lijn, die de twee genoemde diagonaalpunten verbindt.

§ 17. Uit de elementen van deze Cf. kunnen slechts vier tetraëders gevormd worden, n.l.

1 2 3 5, 1 2 4 6, 3 5 7 8, 4 6 7 8.

Elk dezer viervlakken wordt bepaald door twee niet gekoppelde paren van toegevoegde punten (§ 15).

De eerste met de vierde, en de tweede met de derde vormen twee paren van tetraëders, die alle elementen van de Cf. bevatten. De tetraëders van elk paar blijken zóódanig in en om elkaar beschreven te zijn, dat de drie hoekpunten van den éénen, gelegen in de drie zijvlakken van den anderen, die door een gegeven hoekpunt gaan, in één vlak liggen met het aan dat beschouwde hoekpunt toegevoegde punt. Dit is uit de volgende tabel gemakkelijk te zien:

1 2 3 met 4 in $\overline{1}$	4 6 7 met 2 in $\overline{5}$
2 3 5 „ 8 „ $\overline{8}$	6 7 8 „ 3 „ $\overline{6}$
3 5 1 „ 7 „ $\overline{3}$	7 8 4 „ 5 „ $\overline{7}$
5 1 2 „ 6 „ $\overline{2}$	8 4 6 „ 1 „ $\overline{4}$

B.v. in de zijvlakken van den eersten tetraëder, die in 1 samenkomen, liggen de hoekpunten 4, 6, 7 van den tweeden tetraëder, welker vlak door 2 (het toegevoegde punt van 1) gaat. Enz.

Zoo heeft men ook

1 2 4 met 3 in $\overline{1}$	3 5 7 met 1 in $\overline{3}$
2 4 6 „ 7 „ $\overline{5}$	5 7 8 „ 4 „ $\overline{7}$
4 6 1 „ 8 „ $\overline{4}$	7 8 3 „ 6 „ $\overline{6}$
6 1 2 „ 5 „ $\overline{2}$	8 3 5 „ 2 „ $\overline{8}$

B.v. in de zijvlakken door 1 liggen 3, 5, 8, wier vlak 2 bevat.

§ 18. In de Cf. VI behooren de drie punten 1, 2, 3 tot drie vlakken, de punten 4, 5, 6 tot twee, en de punten 7, 8 tot drie vlakken van de Cf; dit blijkt uit het symbool in § 4.

De punten 1, 2, 3 zijn dus collineair, evenals de punten 4, 5, 6.

De drie rechten 1 4, 2 5, 3 6 worden gesneden door de rechten 1 2 3, 4 5 6, 7 8; want

1 2 3 snijdt 1 4 in 1	4 5 6 snijdt 1 4 in 4	7 8 snijdt 1 4 in $\overline{4}$
2 5 „ 2	2 5 „ 5	2 5 „ $\overline{5}$
3 6 „ 3	3 6 „ 6	3 6 „ $\overline{6}$

Er is dus een quadratisch oppervlak, dat ze alle bevat.

De vlakken van de Cf. zijn raakvlakken van dit quadratisch oppervlak in de drie punten 1, 2, 3, verder in de punten A, B, C, waar de lijn 7 8 gesneden wordt door 1 4, 2 5, 3 6, en in de punten P en Q, waarin de lijn 4 5 6 gesneden wordt door de rechten van het quadratisch oppervlak, die door 7 en 8 gaan.

Men ziet dadelijk, dat deze Cf. werkelijk bestaat en op de volgende wijze gemakkelijk in teekening te brengen is.

Op drie kruisende lijnen neemt men respectievelijk de punten 1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8 aan.

Over deze lijnen trekt men de drie transversalen 1 4, 2 5, 3 6, die de lijn 78 respectievelijk in de punten A, B, C snijden en bovendien nog twee transversalen door 7 en 8, die de lijn 4 5 6 in P, Q en de lijn 1 2 3 in P', Q' snijden.

Dan blijkt, dat:

vlak $\overline{1}$ raakt in punt 1	vlak $\overline{5}$ raakt in punt B
„ $\overline{2}$ „ „ „ 2	„ $\overline{6}$ „ „ „ C
„ $\overline{3}$ „ „ „ 3	„ $\overline{7}$ „ „ „ P
„ $\overline{4}$ „ „ „ A	„ $\overline{8}$ „ „ „ Q

Deze raakpunten vormen twee nieuwe Cf's VI (VIc en VId) waarvan de symbolen gevonden worden, door in bovengenoemd symbool VIa en in het hierna volgend symbool VIb.

voor 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

te substitueeren resp. 1, 2, 3, A, B, C, P. Q.

Het in § 4 gevonden symbool van de Cf. VI was:

	1	1	1	1	2	3	4	4
	2	2	2	4	5	6	5	5
Cf. VIa.	3	3	3	7	7	7	6	6
	4	5	6	8	8	8	7	8

Hieruit volgt door de genoemde substitutie

	1	1	1	1	2	3	A	A
	2	2	2	A	B	C	B	B
Cf. VIc.	3	3	3	P	P	P	C	C
	A	B	C	Q	Q	Q	P	Q

De vlakken van Cf. VIc raken het quadratisch oppervlak respectievelijk in de punten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 van de oorspronkelijke Cf. VIa.

Nu zijn de punten van de Cf. VIa ook punten van een andere Cf. VIb van hetzelfde type, die men verkrijgt, door in het symbool VIa 1, 2, 3, respectievelijk te vervangen door 4, 5. 6.

Dan komt men tot:

	1	2	3	1	2	3	1	1
	4	4	4	4	5	6	2	2
Cf. VIb.	5	5	5	7	7	7	3	3
	6	6	6	8	8	8	7	8

De raakpunten van deze vlakken zijn 4 5 6 A B C P′ Q′.

Hieruit vindt men door de meer genoemde substitutie het schema

	1	2	3	1	2	3	1	1
	A	A	A	A	B	C	2	2
Cf. VId.	B	B	B	P	P	P	3	3
	C	C	C	Q	Q	Q	P	Q

Deze vlakken raken het quadratisch oppervlak in A B C 4 5 6 P′ Q′ evenals de Cf. VIb.

Deze raakpunten vormen nog twee Cf.'s VI, waarvan de symbolen VIe en VIf gevonden worden, door in die van Cf. VIa en VIb voor 1 2 3 4 5 6 7 8 te substitueeren A B C 4 5 6 P′ Q′.

Dan komt er:

	A	A	A	A	B	C	4	4
	B	B	B	4	5	6	5	5
Cf. VIe.	C	C	C	P′	P′	P′	6	6
	4	5	6	Q′	Q′	Q′	P′	Q′

De raakpunten zijn: A B C 1 2 3 P Q (de punten van de Cf. VId).

En ten slotte:

	A	B	C	A	B	C	A	A
	4	4	4	4	5	6	B	B
Cf. VIf.	5	5	5	P′	P′	P′	C	C
	6	6	6	Q′	Q′	Q′	P′	Q′

De raakpunten zijn: 4 5 6 1 2 3 7 8.

Al deze Cf.'s zijn in éénzelfde Cf. (15_7, 15_7) opgesloten; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, A, B, C, P, Q, P′ Q′ zijn de 15 punten van deze Cf.

De verdeeling dezer punten over de 15 vlakken blijkt uit het schema:

1	1	1	1	2	3	4	4	1	2	3	1	1	A	A
2	2	2	4	5	6	5	5	4	4	4	2	2	B	B
3	3	3	7	7	7	6	6	5	5	5	3	3	C	C
4	5	6	8	8	8	7	8	6	6	6	7	8	P	Q
A	B	C	A	B	C	P	Q	A	B	C	P′	P′	P′	Q′
P′	P′	P′	B	A	A	Q	P	P	P	P	Q′	Q′	7	7
Q′	Q′	Q′	C	C	B	P′	Q′	Q	Q	Q	P	Q	8	8

De Cf. VIa bevat slechts de drie tetraëders:

4 5 7 8, 4 6 7 8, 5 6 7 8,

waarvan de zijvlakken vlakken van de Cf. zijn.

In een onderling verband staan deze tetraëders niet.

De Cf. VIb bevat de tetraëders:

1 2 7 8, 1 3 7 8, 2 3 7 8.

Ook de overige Cf.'s VIc, VId, VIe, VIf bevatten elk drie tetraëders, die uit de vorige te vinden zijn met behulp van dezelfde substituties, waarmee deze Cf.'s boven zijn afgeleid uit de Cf. VIa en VIb.

§ 19. De Cf. VII heeft twee drietalien punten: 1, 2, 3; 6, 7, 8, die op een rechte lijn gelegen zijn en tot drie vlakken behooren.

Verder zijn de punten 2 en 8, en evenzoo 3 en 7, zoodanig gelegen, dat elk dier puntenparen alle vlakken van de Cf. draagt. Immers

2 ligt in $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{7}$ en 8 in $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$,

3 ligt in $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{8}$ en 7 in $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$.

De paren $\overline{1}$, $\overline{6}$, en $\overline{2}$, $\overline{5}$ hebben de duale eigenschap.

Het vlakkenpaar $\overline{1}$ en $\overline{6}$, resp. $(1\,2\,3\,4)_{\overline{1}}$ en $(5\,6\,7\,8)_{\overline{6}}$ bevat alle punten van de Cf.

Evenzoo $\overline{2}$ en $\overline{5}$ of $(1\,2\,3\,5)_{\overline{2}}$ en $(4\,6\,7\,8)_{\overline{5}}$.

De rechten 1 2 3, 4 5, 6 7 8 worden gesneden door de lijnen 2 7 en 3 8. Want

2 7 snijdt 1 2 3 in 2	3 8 snijdt 1 2 3 in 3
4 5 „ $\overline{7}$	4 5 „ $\overline{8}$
6 7 8 „ 8	6 7 8 „ 8

En hieruit volgt weer een eenvoudige constructie.

Wij nemen drie kruisende rechten *a*, *b*, *c* en twee rechten *m*, *n*, die deze snijden, en noemen 2, 3 de snijpunten van *a* met *m* en *n*, 7 en 8 de snijpunten van *b* met *m* en *n*. Nemen wij nog op *c* twee willekeurige punten 4 en 5, op *a* een willekeurig punt 1 en op b een punt 6, dan hebben wij acht punten die een Cf. van het type VII bepalen.

In deze Cf. liggen slechts twee tetraëders, n.l. 2 3 4 5 en 4578, waarvan de zijvlakken vlakken van de Cf. zijn.

§ 20. In de Cf. VIII behoort het paar 6, 7 tot drie vlakken, het drietal 1, 2, 3 tot twee vlakken (zie symbool in § 5).

De rechten 1 8, 2 4, 3 5 worden gesneden door 1 2 3, 4 5 en 6 7:

1 8 snijdt 1 2 3 in 1	2 4 snijdt 1 2 3 in 2	3 5 snijdt 1 2 3 in 3
4 5 „ $\overline{8}$	4 5 „ 4	4 5 „ 5
6 7 „ $\overline{3}$	6 7 „ $\overline{4}$	6 7 „ $\overline{5}$

Deze Cf. kan aldus geconstrueerd worden:

Wij nemen drie kruisende rechten a, b, c en drie rechten m, n, p, die deze snijden. Noemen wij $a.\,m \equiv 1$, $a.\,n \equiv 2$, $a.p \equiv 3$, $b.n \equiv 4$, $b.p \equiv 5$ en zij 8 een willekeurig punt van m; de vlakken 348 $(\overline{6})$ en 258 $(\overline{7})$ snijden c respectievelijk in 6 en 7. Dan heeft men, zooals gemakkelijk blijkt, de acht punten van een Cf. VIII.

Deze Cf. bevat geen enkelen tetraëder.

§ 21. In de Cf. IX (§ 5) zijn twee drietallen 1, 2, 3; 2, 7, 8, die behooren tot twee vlakken, en de twee paren 1 4, 6 7, die behooren tot drie vlakken.

Ook de constructie van deze Cf. is zeer eenvoudig: Men neemt drie kruisende rechten a, b, c, die gesneden worden door de rechten m en n, en stelt $a.m \equiv 1$, $b.m \equiv 2$, $c.m \equiv 3$, $b.n \equiv 7$. Zij 8 een willekeurig punt van b; als het vlak a. 8 de rechte c in 5, en een willekeurig vlak door de lijn 3 8 a in 4 en n in 6 snijdt, dan bepalen de verkregen 8 punten een Cf. IX.

§ 22. In de Cf. X (§ 5) liggen 1, 2, 3 collineair; evenzoo 1, 6, 7; 2, 6, 8 en 3, 7, 8.

Hieruit blijkt, dat er twee viervlakshoeken zijn, die 4 resp. 5 tot hoekpunt hebben, en volgens dezelfde volledige vierzijde gesneden worden. Men heeft n.l.

$$\begin{array}{c|c|c|c}
4 & 4 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 6 & 6 & 7 \\
3 & 7 & 8 & 8 \\
\hline
\alpha & \beta & \gamma & \delta
\end{array}
\quad \text{en} \quad
\begin{array}{c|c|c|c}
5 & 5 & 5 & 5 \\
1 & 1 & 2 & 3 \\
2 & 6 & 6 & 7 \\
3 & 7 & 8 & 8 \\
\hline
\alpha' & \beta' & \gamma' & \delta'
\end{array}$$

In de overige 6 punten komen telkens twee overeenkomstige ribben van deze twee perspectief gelegen viervlakshoeken samen.

1 is snijpunt van 4 1 $(\alpha\,\beta)$ en 5 1 $(\alpha'\,\beta')$
2 „ „ „ 4 2 $(\alpha\,\gamma)$ „ 5 2 $(\alpha'\,\gamma')$
3 „ „ „ 4 3 $(\alpha\,\delta)$ „ 5 3 $(\alpha'\,\delta')$
6 „ „ „ 4 6 $(\beta\,\gamma)$ „ 5 6 $(\beta'\,\gamma')$
7 „ „ „ 4 7 $(\beta\,\delta)$ „ 5 7 $(\beta'\,\delta')$
8 „ „ „ 4 8 $(\gamma\,\delta)$ „ 5 8 $(\gamma'\,\delta')$

Duaal tegenover deze Cf. staat de Cf. XII (Zie § 5). Deze wordt bepaald door de hoekpunten van twee perspectief gelegen vierhoeken 1 3 5 7, 2 4 6 8 met de vlakken dier vierhoeken en de vlakken die de zes paren overeenkomstige zijden verbinden.

De vierhoeken 1 3 5 7 en 2 4 6 8 van de Cf. XII zijn perspectief omdat de overeenkomstige zijden elkaar snijden in punten van de doorsnede der vlakken $\overline{4}$ en $\overline{5}$, waarin die vierhoeken gelegen zijn. Want:

1 3 en 2 4 liggen in $\overline{1}$,
5 7 „ 6 8 „ „ $\overline{8}$,
1 5 „ 2 6 „ „ $\overline{2}$,
3 7 „ 4 8 „ „ $\overline{7}$,
1 7 „ 2 8 „ „ $\overline{3}$,
3 5 „ 4 6 „ „ $\overline{6}$.

Dat ook de eigenschappen der Cf's X en XII duaal tegenover elkaar staan, wordt door de volgende dubbele kolom toegelicht.

Dualiteit in de ruimte:

punt.	vlak.
lijn, als verbinding van twee punten.	lijn, als doorsnede van twee vlakken.
vierhoek uit 4 punten in één vlak.	viervlakshoek uit 4 vlakken door één punt.
zijden van den vierhoek.	snijlijnen der vlakken of ribben.

Twee vierhoeken zijn perspectief als overeenkomstige zijden elkaar snijden in zes punten van een rechte lijn.

Deze rechte is in de Cf. XII de snijlijn der vlakken $\bar{4}$ en $\bar{5}$.

De zes punten zijn:

1 3 / 2 4, 5 7 / 6 8; 1 5 / 2 6, 3 7 / 4 8; 1 7 / 2 8, 3 5 / 4 6.

Twee viervlakshoeken zijn perspectief, als overeenkomstige ribben liggen in zes vlakken door een rechte lijn.

Deze rechte is in de Cf. X de lijn 4 5.

En de zes vlakken zijn:

1 4 5, 8 4 5; 2 4 5, 7 4 5; 3 4 5, 6 4 5.

§ 23. De Cf. XI (§ 5) heeft twee drietallen van punten, die collineair zijn 1 2 3, 1 6 7 en elk in twee vlakken liggen.

Aangezien de lijnen 1 2 3 en 1 6 7 elkaar snijden, liggen 1 2 3 6 7 in het vlak door die snijdende lijnen, dat echter niet een vlak van de Cf. is. Daarom kan de lijn 4 8 niet in dat vlak liggen, maar zal de beide rechten 2 6 en 3 7 snijden volgens $\bar{5}$ en $\bar{7}$, en dus gaan door het punt 2 6 / 3 7.

Volgens een analoge redeneering gaan de rechten 2 7, 3 6, 5 8 door eenzelfde punt.

Wij kunnen een Cf. van dit type construeeren, door uit te gaan van een vierhoek 2 3 6 7, waarvan de diagonaalpunten zijn $1 \equiv 23/67$, $A \equiv 26/37$, $B \equiv 27/36$. Verder neemt men een willekeurig punt 8, en op de rechten A 8 en B 8 respectievelijk de willekeurige punten 4 en 5.

Duaal tegenover de Cf. XI staat de Cf. XIII, zooals in § 5 gebleken is.

§ 24. De drie punten 1, 2, 3 van de Cf. XIV (§ 5) behooren tot twee vlakken.

Zij 6 7 8 een willekeurige driehoek en 1, 2, 3 een drietal punten op een willekeurige lijn. Noemen wij 4 het gemeenschappelijk punt van de drie vlakken 1 6 7, 2 7 8, 3 6 8 (in het symbool resp. de vlakken $\overline{3}$, $\overline{7}$, $\overline{5}$) en 5 het snijpunt van de drie vlakken 1 6 8, 2 6 7, 3 7 8 (dat zijn resp. $\overline{6}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$), dan hebben wij de punten van een Cf. XIV vastgelegd.

In de laatste Cf. eindelijk, XV (§ 5), die de duale figuur is van de vorige, behooren de twee punten 1 en 2 ieder tot drie vlakken. Geen van de Cf.'s van VIII tot en met XV bevat tetraëders, waarvan de hoekpunten punten van de Cf. zijn, en de zijvlakken vlakken van de Cf.

Resumeerende, wat nu gevonden is, blijkt, dat alleen de eerste vijf Cf.'s beschouwd kunnen worden als het samenstel van twee in en om elkaar beschreven tetraëders. Enkele dier Cf.'s bevatten zelfs méér dan één paar zoodanig samengestelde tetraëders, maar in zoo'n geval is de wijze, waarop de een in den ander is beschreven voor alle paren dezelfde. (Zie § 7 voor Cf. I, § 9 voor Cf. II, § 11 voor Cf. III, § 14 voor Cf. IV, § 17 voor Cf. V.) Anderzijds is het duidelijk, dat de hoekpunten en zijvlakken van twee in en om elkaar beschreven tetraëders tegelijk zijn de elementen van een Cf. $(8_4, 8_4)$, zoodat wij kunnen besluiten, dat slechts op vijf manieren twee tetraëders wederkeerig in elkaar beschreven kunnen zijn.

HOOFDSTUK II.

De Configuratie van Moebius. [1])

§ 24. (Zie § 7 en § 15).

Twee in- en om elkaar beschreven tetraëders A B C D en A′ B′ C′ D′ zijn zóódanig gelegen, dat de hoekpunten acht stelsels van vier in één vlak liggende punten vormen. Aldus:

A B C D′ B C D A′ C D A B′ D A B C′
A′ B′ C′ D B′ C′ D′ A C′ D′ A′ B D′ A′ B′ C

Deze ligging kunnen b.v. de acht hoekpunten van een kubus vertoonen.

Rangschikt men de hoekpunten van de kubus zoodanig dat 1, 2, 3, 4 hoekpunten van een regelmatigen tetraëder zijn (twee kruisende diagonalen van overstaande kubusvlakken zijn overstaande ribben van dezen tetraëder), en zijn 5, 6, 7, 8 de kubushoekpunten, die diagonaal tegenover 1, 2, 3, 4 liggen, dan vormen de twee tetraëders 1 2 5 7 en 3 4 6 8 een configuratie van Moebius.

§ 25. Deze bijzondere figuur heeft Moebius het eerst gevonden bij de bestudeering der kubische ruimtekrommen.

De volgende eigenschappen [2]) kwamen hierbij aan het licht:

Eig. I. *Vier punten van een kubische ruimtekromme vormen een viervlak. Denkt men zich in die punten de raaklijnen aan de*

[1]) Journal von Crelle dl. III, blz. 273.

[2]) Langs zuiver meetkundigen weg heeft Prof. P. Zeeman te Leiden deze eigenschappen afgeleid in zijn proefschrift: *De kromme lijnen van de derde orde in de ruimte* (1 8 7 8).

kromme, dan vormen de snijpunten dier raaklijnen met de overstaande zijvlakken weer een viervlak. En die twee viervlakken zijn in en om elkaar beschreven.

Eig. II. *Het viervlak door vier punten van de kromme -- en het viervlak door de osculatievlakken in die vier punten gevormd — zijn in en om elkaar beschreven.*

Deze eigenschap is het, die MOEBIUS eigenlijk gevonden heeft.

§ 26. Om de beide eigenschappen I en II af te leiden, hebben wij allereerst te bedenken, dat:

Door ieder punt in de ruimte gaat één koorde van de kubische ruimtekromme. (Of een ideale koorde, of een raaklijn).

Denkt men zich namelijk een *vlakkenschoof* (∞^2 vlakken door één punt M); deze snijdt de kubische ruimtekromme in de groepen van een *kubische involutie van den 2en rang*, die bestaat uit ∞^2 drietallen snijpunten, waarvoor geldt:

1°. Elk drietal is door *twee* van de *drie* bepaald, want die twee bepalen met het vaste punt M een vlak, dat ook het derde punt der groep oplevert.

2°. Ze bezitten het *involutorische* karakter.

Dit puntenstelsel vormt dus een I_3^2 op de kromme, die op een rechte lijn is af te beelden, door tusschen de punten van de rechte en die van de kromme een overeenkomst (1, 1) vast te leggen, hetgeen meetkundig te bereiken is door middel van een vlakkenbundel met een koorde tot as. Elk vlak van den vlakkenbundel heeft met de kromme nog één snijpunt P en met de rechte ook één snijpunt P′, dat de afbeelding van P is.

Deze I_3^2 is algebraïsch voor te stellen door een trilineaire vergelijking, die symmetrisch is in drie parameters t_1, t_2, t_3 (de abscissen der punten op de rechte lijn). De verwantschapsvergelijking heeft den vorm

(A.) . . . . $\alpha t_1 t_2 t_3 + \beta (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + \gamma (t_1 + t_2 + $
$+ t_3) + \delta = 0.$

Aldus gerangschikt:

$$\{\alpha t_1 t_2 + \beta (t_1 + t_2) + \gamma\} t_3 + \{\beta t_1 t_2 + \gamma (t_1 + t_2) + \delta\} = 0$$

is de vergelijking van den vorm:

$$P t_3 + Q = 0.$$

Nu wordt t_3 onbepaald als $P = 0$ en $Q = 0$ is, dus als men heeft

$$\alpha t_1 t_2 + \beta (t_1 + t_2) + \gamma = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\beta t_1 t_2 + \gamma (t_1 + t_2) + \delta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Deze voorwaarden zijn op te vatten als twee vergelijkingen met de twee onbekenden $(t_1 t_2)$ en $(t_1 + t_2)$.

Hieraan kan worden toegevoegd de vergelijking:

$$t^2 - (t_1 + t_2) t + t_1 t_2 = 0$$

die altijd geldt, als men t_1 en t_2 opvat als wortels eener vierkantsvergelijking.

Of anders gerangschikt:

$$t_1 t_2 - (t_1 + t_2) t + t^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Elimineeren wij nu uit (1), (2) en (3) de grootheden $(t_1 t_2)$ en $(t_1 + t_2)$ dan komt er:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \\ 1 & -t & t^2 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

een vierkantsvergelijking, waaruit t_1 en t_2 zijn op te lossen.

De twee punten der rechte met abscissen t_1 en t_2 noemt men *neutrale punten* N_1 en N_2. Zij vormen met *ieder* punt P' een drietal.

Brengt men dit op de kromme over, dan zullen ook hierop twee punten S_1 en S_2 aan te wijzen zijn, die met ieder ander punt van de kromme in een plat vlak door M liggen. Dan moeten S_1 en S_2 noodzakelijk met M op één lijn liggen, m. a. w.: Door M gaat steeds één koorde.

Nu kunnen van de vierkantsvergelijking (4):

1°. de beide wortels reëel zijn: dan vindt men dus twee reëele punten S_1 en S_2, of door M gaat een werkelijke koorde.

2°. de beide wortels imaginair: S_1 en S_2 zijn imaginair, dan gaat door M een ideale koorde.

3°. de beide wortels vallen samen: S_1 en S_2 zijn samengevallen, of door M gaat een raaklijn.

Dus: Door ieder punt buiten de kromme gaat een koorde, een ideale koorde of een raaklijn.

§ 27. Verder geldt de eigenschap: *Door elk punt in de ruimte gaan drie osculatievlakken aan de kubische kromme.*

Hiervoor stellen wij de vraag: Kan het voorkomen in de I_3^2 van § 27 dat $t_1 = t_2 = t_3$ is?

Dan gaat de vergelijking (A) over in:

(B) . . . . $\alpha t^3 + 3 \beta t^2 + 3 \gamma t + \delta = 0$,

een derdegraadsvergelijking, waaruit volgt, dat er drie *drievoudige* punten zijn, hetgeen beteekent, dat men door M drie vlakken kan leggen, die elk drie samenvallende punten met de kromme gemeen hebben, d. z. drie osculatievlakken. Dus:

Elk punt in de ruimte zendt drie osculatievlakken uit.

Of: Het stelsel osculatievlakken zendt door elk punt in de ruimte drie exemplaren;

d.w.z. *de kubische kromme is van de 3e klasse.*

§ 28. Verder geldt de eigenschap:

De steunpunten der drie osculatievlakken, die door een punt M gaan, liggen met M in één vlak.

Uit de vergelijking (B) van § 27 volgen de symmetrische betrekkingen:

$$(C) \ldots\ldots \begin{cases} \alpha(t_1+t_2+t_3) & = -3\beta \\ \alpha(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1) = & 3\gamma \\ \alpha\, t_1 t_2 t_3 & = -\delta. \end{cases}$$

En de verwantschapsvergelijking der kubische involutie is de trilineaire vergelijking (A):

$$(A) \ldots \alpha\, t_1 t_2 t_3 + \beta(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1) + \gamma(t_1 + t_2 + t_3) + \delta = 0.$$

Nu blijken de waarden uit (C) aan (A) te voldoen.

De drie drievoudige punten, als enkelvoudige punten beschouwd, vormen dus een drietal der kubische involutie I_3^2, liggen dus met M in één vlak. Dit vlak noemt men het *nulvlak* of *poolvlak* van het punt M, dat *nulpunt* of *pool* wordt genoemd.

Omgekeerd kan men op een gegeven vlak Π een punt P vinden, dat de pool is van dit vlak. Zijn A, B, C de drie punten, die het vlak Π met de kromme gemeen heeft, dan legt men in die punten de osculatievlakken; deze snijden elkaar in het gezochte punt P, dat blijkens de bovengenoemde eigenschap in het vlak Π ligt.

§ 29. Analoog aan de wijze, waarop een kegelsnede kan worden voortgebracht door twee projectieve stralenbundels, en een quadratisch regelvlak door twee projectieve vlakkenbundels, kan een *kubische ruimtekromme* worden voortgebracht door *drie projectieve vlakkenbundels*, waarvan de assen drie koorden k_1, k_2, k_3 der kromme zullen blijken te zijn. Het snijpunt P van drie toegevoegde vlakken zal een punt van de kromme zijn, als:

$$(k_1 P) \,\overline{\wedge}\, (k_2 P) \,\overline{\wedge}\, (k_3 P)$$

de drie projectieve vlakkenbundels voorstellen, waarvan de assen k_1, k_2, k_3 drie kruisende lijnen zijn.

Dat de m. pl. van dat snijpunt werkelijk een kubische kromme is kan aldus bewezen worden.

Een willekeurig vlak ω snijde de drie lijnen k_1, k_2, k_3 resp. in A_1, A_2, A_3, dus de drie vlakkenbundels volgens drie projectieve stralenbundels, waarvan A_1, A_2, A_3 de toppen zijn. Nu brengen de projectieve stralenbundels A_1 en A_2 een kegelsnede voort, de projectieve stralenbundels A_2 en A_3 een andere.

Deze beide kegelsneden zullen elkaar, behalve in A_2, nog in drie punten P_1, P_2, P_3 snijden. Hiervoor geldt

$A_1 P_k$ is toegevoegd aan $A_2 P_k$,

$A_2 P_k$ „ „ „ $A_3 P_k$.

waaruit volgt

$$A_1 P_k \;\overline{\wedge}\; A_2 P_k \;\overline{\wedge}\; A_3 P_k$$

dus ook

$$k_1 P_k \;\overline{\wedge}\; k_2 P_k \;\overline{\wedge}\; k_3 P_k\,;$$

dus P_k is een punt van de voortgebrachte kromme.

Aangezien in het vlak ω drie punten P liggen, zoodat de m. pl. met een plat vlak drie punten gemeen heeft, is zij een *kubische* ruimtekromme.

Nu is nog te bewijzen, dat de assen k_1, k_2, k_3 *koorden* van de kubische kromme zijn.

Op k_1 bepalen de andere twee vlakkenbundels twee collocale projectieve puntenreeksen

$$(S_2) \;\overline{\wedge}\; (S_3).$$

Hun twee coïncidenties $(S_2 \equiv S_3)$ zijn punten van de kromme, want door elk dier punten gaan overeenkomstige vlakken van den tweeden en derden bundel en natuurlijk van den eersten bundel. De as k_1 heeft dus twee punten met de kromme gemeen, is derhalve koorde.

§ 31. In duale tegenstelling met deze ontstaanswijze is de kubische kromme ook op te bouwen uit *drie projectieve puntenreeksen*, waarvan de dragers weer drie kruisende lijnen zijn. Als men telkens drie aan elkaar toegevoegde punten door een vlak verbindt, dan krijgt men het stelsel van de osculatievlakken, die een kubische kromme omhullen.

De drie dragers der puntenreeksen blijken hier te zijn *biplanaren*

(d. z. dragers van twee osculatievlakken, dualistisch aequivalent van bisecanten of koorden).

§ 32. Een kubische ruimtekromme is *bepaald* door *zes punten*. Zijn 1, 2, 3, 4, 5, 6 de gegeven punten, dan kan men de punten 1, 2, 3 verbinden door de lijnen k_3, k_1, k_2 en deze beschouwen als assen van drie vlakkenbundels. Deze zijn projectief, als men drie overeenkomstige vlakken door 4, door 5, en door 6 laat gaan

$$k_1 (4, 5, 6) \;\bar{\wedge}\; k_2 (4, 5, 6) \;\bar{\wedge}\; k_3 (4, 5, 6);$$

want door drie groepen is een projectiviteit bepaald. Dan gaat dus de kubische kromme, die door deze drie projectieve vlakkenbundels wordt voortgebracht, door de gegeven punten 1, 2, 3, 4, 5, 6.

De projecteerende quadratische kegel, die ontstaat, als men één punt van de kromme met alle andere punten van de kromme verbindt, wordt bepaald door 5 ribben.

De kegel, die uit 1 als top de kromme projecteert, heeft 5 bekende ribben 12, 13, 14, 15, 16. De kegel, met top 2, die door de punten 1, 3, 4, 5, 6 gaat, heeft met den eersten kegel, behalve de ribbe 12, de ruimtekromme gemeen, welke door de 6 gegeven punten kan gelegd worden.

§ 33. Zooals voor een kegelsnede, die door 5 punten bepaald is, het theorema van Pascal een betrekking geeft, die tusschen 6 punten van de kegelsnede bestaat, zoo is voor de kubische ruimtekromme een analoog theorema te vinden, dat een betrekking tusschen 7 punten der kromme aanwijst.

Zijn 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 de gegeven punten, dan liggen de zes verbindingslijnen 71, 72, 73, 74, 75, 76 op een quadratischen kegel met 7 als top.

Snijdt men dezen kegel door een vlak, dan worden hierop de zes punten 1, 2, 3, 4, 5, 6 met 7 geprojecteerd in zes punten 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ van een kegelsnede.

Voor deze punten geldt de stelling van PASCAL.

Is

$$\alpha \equiv (1'\,2', 4'\,5')$$
$$\beta \equiv (2'\,3', 5'\,6')$$
$$\gamma \equiv (3'\,4', 6'\,1')$$

dan liggen α, β, γ *in één rechte.*

Brengt men de noodige vlakken aan door het punt 7 en de punten 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, dan zijn de doorsneden

$$(7\,1\,2,\ 7\,4\,5) \equiv 7\,\alpha$$
$$(7\,2\,3,\ 7\,5\,6) \equiv 7\,\beta$$
$$(7\,3\,4,\ 7\,6\,1) \equiv 7\,\gamma$$

complanair. Dus geldt de volgende eigenschap (CREMONA):

Beschouwt men zes punten van een kubische ruimtekromme als hoekpunten van een zeshoek, dan zullen de overstaande zijden van den zeshoek, verbonden met een 7e punt, vlakken opleveren, zoodat de drie snijlijnen van de overstaande vlakkenparen in één vlak liggen.

De stelling van CREMONA kan nog anders geformuleerd worden.

Op 7 α liggen de snijpunten (1 2) en (4 5)
„ 7 β „ „ „ (2 3) „ (5 6)
„ 7 γ „ „ „ (3 4) „ (6 1)

Dan liggen de punten: 7, (1 2), (2 3), (3 4), (4 5), (5 6) in één vlak, of, anders geschreven:

$$(1\,2,\ 7\,4\,5)$$
$$(2\,3,\ 7\,5\,6)$$
$$(3\,4,\ 7\,6\,1)$$
$$(4\,5,\ 7\,1\,2)$$
$$(5\,6,\ 7\,2\,3)$$
$$(6\,1,\ 7\,3\,4)$$
$$7$$

zijn zeven in één vlak gelegen punten.

§ 34. Laat men nu de punten twee aan twee samenvallen, dan worden de koorden *raaklijnen*.

$1 \equiv 2 \equiv A \equiv$ raakpunt van raaklijn a.
$3 \equiv 4 \equiv B \equiv$ „ „ „ b.
$5 \equiv 6 = C \equiv$ „ „ „ c.
$7 \equiv D$

Dan geldt de eigenschap

$$\begin{array}{l} (a, B\,C\,D) \equiv A' \\ (b, A\,C\,D) \equiv B' \\ (c, A\,B\,D) \equiv C' \\ \qquad\qquad\quad\; D \\ (A\,B, D\,c) \\ (B\,C, D\,a) \\ (A\,C, D\,b) \end{array}$$

zijn zeven in één vlak gelegen punten.

Beschouwen wij nu het viervlak A B C D, beschreven in de ruimtekromme. De raaklijn a door A snijdt het overstaande zijvlak in A′. Noem $(d, A\,B\,C) \equiv D'$, dan zijn A′, B′, C′, D′, toegevoegd aan A, B, C, D.

De onderlinge ligging van deze acht punten wordt door het volgende schema aangegeven.

D	C	B	A	A′	B′	C′	D′
A′	A′	A′	B′	B	A	A	A
B′	B′	C′	C′	C	C	B	B
C′	D′	D′	D′	D	D	D	C

waarin elke vier punten van één kolom in één vlak gelegen zijn. Het blijkt dus, dat het viervlak, gevormd door vier punten eener kubische ruimtekromme, en het viervlak, gevormd door de snijpunten hunner raaklijnen met de overstaande zijvlakken, in en om elkaar beschreven zijn.

§ 35. Beschouwen we nu de osculatievlakken $\alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0\,\delta_0$ in vier punten A, B, C, D van de kubische kromme.

Volgens de eigenschap van § 29 ligt D_0, het snijpunt der osculatievlakken $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ van A, B, C, *in* het vlak (A B C).

Zoo noemen wij

$$D_0 \equiv \alpha_0\,\beta_0\,\gamma_0,$$
$$C_0 \equiv \alpha_0\,\beta_0\,\delta_0,$$
$$B_0 \equiv \alpha_0\,\gamma_0\,\delta_0,$$
$$A_0 \equiv \beta_0\,\gamma_0\,\delta_0.$$

Van het viervlak, gevormd door A, B, C, D, zijn de zijvlakken

$$\delta \equiv A\,B\,C\,D_0,$$
$$\gamma \equiv A\,B\,D\,C_0,$$
$$\beta \equiv A\,C\,D\,B_0,$$
$$\alpha \equiv B\,C\,D\,A_0.$$

Van het viervlak, gevormd door de osculatievlakken, zijn de zijvlakken

$$\delta_0 \equiv D\,A_0\,B_0\,C_0,$$
$$\gamma_0 \equiv C\,A_0\,B_0\,D_0,$$
$$\beta_0 \equiv B\,A_0\,C_0\,D_0,$$
$$\alpha_0 \equiv A\,B_0\,C_0\,D_0.$$

Hieruit blijkt, dat bij een kubische ruimtekromme elk ingeschreven viervlak met het viervlak der overeenkomstige osculatievlakken een Cf. van Moebius vormt.

§ 36. De configuratie van Moebius komt ook voor den dag in het zoogenaamde *nulstelsel,* dat van statischen oorsprong is, en in nauw verband staat met de theorie der lineaire complexen.

Uit de statica is bekend, dat een krachtenstelsel in de ruimte in het algemeen teruggebracht kan worden tot twee kruisende krachten, terwijl de richting van de eene naar willekeur aangenomen kan worden en door elk gegeven punt kan gaan.

Verder ligt, als de richting van de eene kracht door een gegeven punt gaat, die der andere kracht in een door dat punt gegeven vlak, waarin dit punt ook zelf gelegen is, en omgekeerd: als de eene kracht in één vlak blijft, zal de andere steeds door een vast punt gaan, dat door dit vlak bepaald en daarin gelegen is.

Zijn a en b twee kruisende krachten, dan kan men volgens de verbindingslijn der aangrijpingspunten twee gelijke en tegengestelde krachten aanbrengen en deze met a en b samenstellen, waardoor twee andere kruisende krachten a' en b' verkregen worden, die a en b kunnen vervangen.

Is P nu een vast punt van a, waardoor a' steeds gaan zal, dan zal b$'$ steeds liggen in het vlak π door b en P.

Blijft a' steeds in een vlak π', dan gaat b' steeds door een punt P$'$, dat het snijpunt is van π' en b.

Zoo is er t. o. v. een systeem krachten een overeenkomst (1, 1) tusschen de punten en vlakken van de ruimte.

Aan elk punt is een vlak involutorisch toegevoegd, aan elk vlak een punt; aan elke lijn als richting van één der resultanten, een andere lijn, die de richting van de andere resultante aanwijst. Dit is een involutorische dualiteitsverwantschap of reciprociteit in de ruimte, waarbij nog aan de bijzondere voorwaarde voldaan wordt, dat het aan een punt toegevoegde vlak door dat punt gaat, en het aan een vlak toegevoegd punt daarin ligt, en dit heet een *nulstelsel.*

Het aan eeu vlak toegevoegd punt heet hier het *nulpunt* van dat vlak, het aan een punt toegevoegd vlak het *nulvlak* van dat punt. (Ook wel pool en poolvlak).

De elkaar kruisende rechten der resulteerende krachten zijn toegevoegde lijnen of wederkeerige poollijnen: van de punten op de éene gaan de nulvlakken door de andere, en van de vlakken door de éene liggen de nulpunten op de andere.

Lijnen, die in het krachtenstelsel de assen zijn, t. o. waarvan de som van de momenten der krachten gelijk aan nul is — die lijnen dus, die een punt van de eene resultante met een punt van de andere resultante verbinden, zijn aan zichzelf toegevoegd.

§ 37. Voor het nulstelsel heeft Moebius de volgende stellingen gevonden: [1])

Is π een vlak, waarin een punt Q gelegen is, dan is ook het nulpunt P van π in het nulvlak ϕ van Q gelegen; en aangezien P in π en Q in ϕ zelf ligt, zullen P en Q liggen in de doorsnede van π en ϕ. Dus geldt de stelling

I. Als van twee elkaar snijdende vlakken het nulpunt van het éène in hun doorsnede ligt, dan ligt daarin ook het nulpunt van het andere;

en als van twee punten het nulvlak van het éène het andere punt bevat, dan zal ook het nulvlak van het andere door het eerste punt gaan.

Hieruit volgt direct

II. De nulvlakken van een aantal in één vlak gelegen punten gaan door het nulpunt van dit vlak.

III. De nulpunten van een aantal door één punt gaande vlakken liggen in één vlak, dat door dit punt gaat en zijn nulvlak is.

IV. Alle rechte lijnen in de ruimte kunnen als wederkeerig toegevoegde lijnen gepaard worden, en elk paar lijnen heeft de eigenschap, dat de nulvlakken van alle punten van de éene gaan door de andere lijn, dus dat elk punt van de éene tot nulvlak heeft het vlak, dat door dit punt en de andere lijn gelegd kan worden, en dat omgekeerd elk vlak door de éene lijn zijn nulpunt heeft in het snijpunt met de andere.

V. De verbindingslijn van twee punten heeft dus tot toegevoegde lijn de doorsnede hunner nulvlakken.

---

[1]) *Journal von Crelle* X bl. 317.

Een gevolg van deze eigenschappen is

VI. Van een aantal rechten, die in één vlak liggen, zullen de toegevoegde lijnen elkaar snijden in één punt van dat vlak, n.l. het nulpunt hiervan, en van een aantal door één punt getrokken rechten, zullen de toegevoegde lijnen liggen in één door dat punt gaand vlak, n.l. het nulvlak van dat punt.

§ 38. Een dergelijk systeem van punten en vlakken kan men construeeren door uit te gaan van drie vlakken α, β, γ, die elkaar in een punt M snijden. Neemt men in α als nulpunt aan een willekeurig punt A en in β evenzoo het nulpunt B, en legt men door A B M een vlak μ, dan is dit het nulvlak van M. In de doorsnede hiervan met γ ligt C, het nulpunt van γ, dat men in deze rechte willekeurig kan aannemen.

Nu kan men voor elk ander punt D het bijbehoorend nulvlak construeeren, en heeft men hierbij verschillende gevallen te onderscheiden

a. Als het gegeven punt D, waarvan het nulvlak gezocht wordt, ligt op de doorsnede van β en γ, dus op de lijn $\beta\gamma$, waarvan de toegevoegde lijn B C is, dan is het vlak B C D het nulvlak van D. Evenzoo als D op $\alpha\gamma$ of $\alpha\beta$ ligt.

b. Als D ligt in een der lijnen B C, C A, A B, dan is zijn nulvlak bepaald door D met resp. $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$.

c. Ligt D willekeurig, dan legt men door D en de drie lijnen B C, C A, A B de vlakken D B C, D C A, D A B, die de lijnen $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ respectievelijk mogen snijden in A′, B′, C′, dan zijn dit de nulpunten dier drie door D gaande vlakken (IV), dus liggen (III) A′, B′, C′ met D in één vlak, dat het nulvlak van D, dus het gezochte vlak δ is.

Aangezien D zelf in δ ligt, waren twee der drie punten A′, B′, C′ reeds voldoende geweest om δ te bepalen. Uit het feit, dat dan ook het derde in δ ligt, blijkt, dat de twee tetraëders A′B′C′M en A B C D in en om elkaar beschreven zijn. Immers de eerste, die begrensd wordt door $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ is *om* den anderen beschreven, omdat $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ resp. de punten A, B, C, D als hunne nulpunten bevatten. Maar ook is hij *in* den anderen beschreven, omdat A′B′C′M de nulpunten der zijvlakken B C D, C A D, A B D, A B C van den anderen tetraëder zijn.

Dus geldt de eigenschap:

Als van twee tetraëders A′B′C′M en A B C D de hoekpunten A′, B′, C′, M van den eenen in de zijvlakken B C D, C D A, D A B A B C van den anderen liggen, en drie hoekpunten A, B, C van den laatsten tetraëder in de zijvlakken B′C′M, C′M A′, M A′B′ van den eersten, dan ligt ook het vierde hoekpunt D van den tweeden in het vierde zijvlak A′B′C′ van den eersten, en de twee tetraëders zijn in en om elkaar beschreven.

d. Het nulvlak van D kan ook gevonden worden met behulp van de vlakken die D met de lijnen $\beta\,\gamma$, $\gamma\,\alpha$, $\alpha\,\beta$ verbinden. Snijden deze vlakken de lijnen B C, C A, A B respectievelijk in A″B″C″, dan zijn dit de nulpunten der drie vlakken en het vlak door A″, B″, C″ en D zal het nulvlak δ van D zijn.

Men merke echter op, dat aangezien de drie vlakken $\alpha\,\beta\,\gamma$ het punt M gemeen hebben, zoodat de drie vlakken D $\beta\,\gamma$, D $\gamma\,\alpha$, D $\alpha\,\beta$ elkaar volgens de lijn D M snijden, de nulpunten A″, B″, C″ dezer vlakken ook in een rechte, de toegevoegde lijn van D M, zullen liggen. Dus is door deze punten alleen het nulvlak van D nog niet bepaald, maar wel door twee dier punten met D samen.

Maar een punt D kan slechts één nulvlak δ hebben, dus moeten A″, B″, C″ met A, B, C in één vlak liggen en, daar de eerste drie punten resp. liggen op de lijnen B C, C A, A B, zullen zij niets anders zijn dan de snijpunten der zijden van $\triangle$ A B C met het vlak A′B′C′, waaruit weer volgt, dat A″B″C″ op één rechte liggen, n.l. op de doorsnede van de vlakken ABC en A′B′C′.

§ 39. Nu de omgekeerde opgave: voor een gegeven vlak δ het nulpunt te vinden.

a. Als het vlak δ door één der zes lijnen BC, CA, AB, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ gaat, dan ligt het nulpunt daar, waar het vlak door $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, BC, CA, AB gesneden wordt.

b. Heeft het vlak δ een willekeurige ligging, dan moge het de lijnen $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ snijden in de punten A′, B′, C′. Van deze drie in δ gelegen punten zijn A′BC, B′CA, C′AB de nulvlakken; hun snijpunt ligt ook in δ (II) en is het gezochte nulpunt D van δ.

Omdat δ en deze drie vlakken elkaar in D snijden, zijn reeds twee dezer vlakken met δ voldoende, om D te vinden. Ook blijkt dadelijk, dat hier evenals boven twee in en om elkaar beschreven tetraëders zijn ontstaan.

c. Nog op een andere wijze kan voor een gegeven vlak δ het nulpunt gezocht worden. Als δ de lijnen BC, CA, AB in de punten A″, B″, C″ snijdt, en men legt door deze punten en $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ de vlakken A″$\beta\gamma$, B″$\gamma\alpha$, C″$\alpha\beta$, dan zijn dit de nulvlakken van A″, B″, C″ en deze zullen elkaar dus snijden volgens een rechte, omdat A″, B″, C″ op een rechte, n.l. de doorsnede van δ met ABC, liggen. Elk dezer beide lijnen is dus toegevoegd aan de andere, en omdat de laatste rechte in het vlak δ ligt, moet het snijpunt van de eerste met het vlak δ het nulpunt D van δ zijn.

§ 40. Uit de stellingen I tot IV volgen nog andere.

a. Aangezien volgens III de nulpunten van vlakken, die door één punt gaan, met dit punt in één vlak liggen, waarvan dit punt nulpunt is, en vlakken, die elkaar volgens evenwijdige lijnen snijden zijn te beschouwen als gaande door een punt in het oneindige, moeten dus de nulpunten dezer vlakken in één vlak liggen, dat ook evenwijdig is met de evenwijdige snijlijnen, en het in deze richting oneindig ver gelegen punt is nulpunt van dit vlak.

b. Daar verder van vlakken, die door één lijn gaan, de nulpunten ook op één lijn liggen (IV), moeten, ook als de eerste rechte in het oneindige ligt, dus de vlakken onderling evenwijdig zijn, de nulpunten der vlakken op één lijn liggen.

c. Wij beschouwen nu twee stelsels van vlakken, zoodanig dat de vlakken van elk dier stelsels onderling evenwijdig, maar niet met die van het andere stelsel evenwijdig zijn.

De rechte, waarin de nulpunten van het eene stelsel liggen, zij a; de rechte voor het nulpunt van het andere stelsel b. Aangezien nu ook elke twee vlakken van verschillende stelsels elkaar volgens evenwijdige lijnen snijden, moeten ook volgens (a) de nulpunten der verschillende vlakken, en dus ook de twee rechten a en b in één vlak liggen, dus elkaar snijden of evenwijdig zijn.

Sneden a en b elkander echter in een punt C, dan zou dit het gemeenschappelijk nulpunt van twee vlakken van verschillende stelsels zijn. Dan zouden deze twee elkaar snijdende vlakken de nulvlakken van één en hetzelfde punt C zijn, en dit is onmogelijk.

Derhalve moeten a en b onderling evenwijdig zijn, en daarmee dus ook elke andere rechte, die de nulpunten van een derde stelsel evenwijdige vlakken bevat. Dus geldt de stelling

VII. De nulpunten van drie of meer onderling evenwijdige vlakken liggen op een rechte lijn, en de rechte lijnen, waarin de nulpunten van twee en dus ook van meer stelsels evenwijdige vlakken liggen, zijn alle onderling evenwijdig.

De gemeenschappelijke richting dezer evenwijdige lijnen noemen wij de *hoofdrichting* van het systeem.

d. Omgekeerd: van twee punten A en B, die op een lijn evenwijdig aan de hoofdrichting liggen, zijn de nulvlakken α en β onderling evenwijdig. Want waren zij dit niet, dan zou men door B een vlak β' kunnen leggen evenwijdig aan α. Het nulpunt van β' zou dan dat punt zijn, waarin β' door een lijn door A evenwijdig aan de hoofdrichting gesneden wordt, dus het punt B zelf. Dan zou dus B twee verschillende nulvlakken β en β' hebben, hetgeen onmogelijk is.

e. Elk met de hoofdrichting evenwijdig vlak γ heeft een nulpunt in het oneindige. Want als A en B twee punten in γ zijn, die op een lijn evenwijdig aan de hoofdrichting liggen, dan zijn de nulvlakken α en β van A en B onderling evenwijdig; dus zijn de lijnen a en b, waarin γ door α en β gesneden wordt, evenwijdig.

Volgens I moet nu het nulpunt van γ zoowel in a als in b liggen, derhalve oneindig ver in de door deze evenwijdige lijnen bepaalde richting. Dus geldt

VIII. Elk met de hoofdrichting evenwijdig vlak heeft een oneindig ver gelegen nulpunt; en omgekeerd is het nulvlak van een punt in het oneindige met de hoofdrichting evenwijdig.

Men kan hierbij nog opmerken, dat alle vlakken, wier nulpunten liggen in een vlak γ evenwijdig aan de hoofdrichting, dit vlak snijden volgens evenwijdige lijnen; want elk dezer vlakken moet door het oneindig ver gelegen nulpunt van γ gaan.

f. Is de richting gegeven, waarin een oneindig ver verwijderd punt ligt, en moet het nulvlak van dit punt gevonden worden, dan legge men drie vlakken α, β, γ evenwijdig aan deze richting en bepale de nulpunten A, B, C daarvan; dan is A B C het gezochte nulvlak.

Neemt men, zooals hierbij mogelijk is, α en β onderling evenwijdig, dan wordt A B met de hoofdrichting evenwijdig; dus is A B C een vlak evenwijdig met de hoofdrichting.

Evenals dus elk met de hoofdrichting evenwijdig vlak een oneindig ver nulpunt heeft, zoo is ook omgekeerd het nulvlak van een oneindig ver gelegen punt evenwijdig aan de hoofdrichting. Dus geldt

IX. Van twee of meer vlakken, die met eenzelfde rechte evenwijdig zijn, liggen de nulpunten in een en hetzelfde vlak, dat met deze rechte en met de hoofdrichting van het systeem evenwijdig is.

Wij voegen hieraan nog toe

X. Van een in de hoofdrichting oneindig ver gelegen punt M is het nulvlak eveneens oneindig ver; het heeft echter geen bepaalde ligging.

Omgekeerd ligt van elk oneindig ver gelegen vlak μ het nulpunt oneindig ver verwijderd in de hoofdrichting.

Het eerste deel van deze stelling blijkt daaruit, dat, als α een willekeurig niet met de hoofdrichting evenwijdig vlak, en A zijn nulpunt is, de lijn A M beschouwd kan worden als evenwijdig met de hoofdrichting; dus het vlak gelegd door M evenwijdig met α is het nulvlak van M.

Het omgekeerde van deze stelling blijkt hieruit, dat, als α een met μ evenwijdig niet oneindig ver gelegen vlak en A zijn nulpunt is, het nulpunt van het vlak μ het snijpunt met een rechte is, die door A evenwijdig aan de hoofdrichting gaat.

§ 41. Nu zullen wij het duaal verband tusschen aan elkaar toegevoegde lijnen nader beschouwen. In VI is gebleken, dat van een aantal in één vlak gelegen lijnen de toegevoegde lijnen alle gaan door het nulpunt van dit vlak.

Zijn nu $a, b, c \ldots\ldots$ een aantal lijnen evenwijdig aan een vlak, en legt men evenwijdig aan dit vlak door $a, b, c \ldots\ldots$ de vlakken $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$, waarvan A, B, C ..... de nulpunten zijn, dan gaan (IV) de aan $a, b, c \ldots\ldots$ toegevoegde lijnen resp. door A, B, C ..., en A, B, C ..... liggen op een rechte evenwijdig aan de hoofdrichting (VII). Dus:

XI. Zijn een aantal lijnen evenwijdig aan een bepaald vlak, dan worden de toegevoegde lijnen door éénzelfde rechte gesneden. Deze rechte is evenwijdig aan de hoofdrichting en snijdt het vlak in zijn nulpunt.

Is a' de aan a toegevoegde lijn, en legt men door a en door het oneindig ver gelegen punt A van a' een vlak, dus een vlak evenwijdig aan a', dan is dit het nulvlak van A (IV) en evenwijdig aan de hoofdrichting. Dus:

XII. Elk vlak, dat met een lijn en tegelijk met de aan haar toegevoegde lijn evenwijdig loopt, is ook evenwijdig aan de hoofdrichting.

XIII. Van elke rechte evenwijdig aan de hoofdrichting is de toegevoegde rechte oneindig ver gelegen.

Want een vlak door zulk een rechte gelegd heeft een oneindig ver gelegen nulpunt.

§ 42. Lijnen, die met hunne toegevoegde lijnen samenvallen, zullen wij dubbellijnen noemen.

Van een gegeven lijn a wordt de toegevoegde lijn gevonden, door van twee vlakken α en β door a de nulpunten A en B te zoeken. De lijn AB is dan de gezochte toegevoegde lijn. Als nu het nulpunt A van een der beide vlakken α in de lijn a zelf ligt, dan ligt volgens I ook het nulpunt B van β — evenals het nulpunt van elk ander vlak door a — in a. Dus valt dan de lijn met de haar toegevoegde lijn samen.

Voor dubbellijnen gelden de volgende stellingen.

XIV. Van elk vlak door een dubbellijn ligt het nulpunt in die dubbellijn, en een dubbellijn ligt in het nulvlak van elk harer punten.

XV. Elke lijn in een vlak, door zijn nulpunt getrokken, is dubbellijn; ook is elke lijn, die door een punt gaat en tevens in zijn nulvlak gelegen is, dubbellijn.

XVI. Als twee dubbellijnen in een vlak liggen, dan is hun snijpunt, dat ook oneindig ver kan zijn, het nulpunt van het vlak. Immers volgens XIV moet dit nulpunt zoowel in de éene als in de andere dubbellijn liggen.

XVII. Alle in één vlak gelegen dubbellijnen gaan door één punt en omgekeerd alle door één punt gaande dubbellijnen liggen in één vlak.

Want anders zou volgens XVI dit éene punt meer dan één nulvlak hebben.

Het systeem dubbellijnen vult dus de geheele ruimte, want door elk punt van de ruimte gaan oneindig vele dubbellijnen, die echter alle in één vlak liggen, en in elk vlak liggen oneindig vele dubbellijnen, die alle door één punt gaan. Dit systeem dubbellijnen vormt een lineairen complex. (Zie § 47.)

Als a een lijn is, waarvan a' de toegevoegde lijn is, en A, A' zijn twee op a resp. a' aangenomen punten, dan heeft A tot nulvlak A a' (volgens IV), dus is A A' een dubbellijn (XV). Dus:

XVIII. Elke transversaal over twee toegevoegde lijnen is dubbellijn.

Is nu l een dubbellijn en a een enkelvoudige lijn, die door l gesneden wordt, dan moet van het vlak (l a), daar dit door l gaat, het nulpunt in l liggen (XIV). Ook moet het nulpunt van het vlak (l a), omdat het door a gaat, liggen in de toegevoegde lijn a' (IV); dus moet deze toegevoegde lijn ook l snijden, d. w. z.:

XIX. Een dubbellijn, die een enkelvoudige lijn snijdt, ontmoet ook de toegevoegde lijn van deze laatste.

Zijn nu a, b twee enkelvoudige lijnen, a', b' de aan haar toegevoegde lijnen, en l een rechte, die a, b, a' tegelijk snijdt, dan is l, omdat ze a en a' snijdt, een dubbellijn, en als zoodanig moet ze, daar ze b ontmoet, ook b' snijden. Dus:

XX. Heeft men twee lijnen en de aan haar toegevoegde lijnen, dan zal elke transversaal over drie dezer lijnen ook de vierde ontmoeten. Vier zulke lijnen liggen dus hyperboloïdisch.

§ 43. Om nu den samenhang van deze involutorische reciprociteit met stellingen uit de statica aan te toonen, dienen de volgende beschouwingen:

Zijn α, β, γ drie vlakken, die elkaar in M snijden (§ 38), A, B twee willekeurige punten in α, β, en C een willekeurig punt op de doorsnede der vlakken γ en M A B, dan kan men zich twee krachten denken langs $\alpha \beta$ en A B (langs twee toegevoegde lijnen dus), die door $[\alpha \beta]$ en [A B] zullen worden aangeduid.

Nu kan men de kracht $[\alpha \beta]$ ontbinden volgens M A en $\alpha \gamma$ in twee andere krachten [M A] en $[\alpha \gamma]$, want deze richtingen liggen met $\alpha \beta$ in één vlak en snijden elkaar in M.

Hiermee zijn de oorspronkelijke twee krachten $[\alpha \beta]$ en [A B] door drie vervangen: $[\alpha \gamma]$, [M A], [A B]. De beide laatste hebben nu een resultante, die door A gaat en in het vlak M A B gelegen is. Haar richting hangt af van de intensiteitsverhouding der oorspronkelijk gegeven krachten $[\alpha \beta]$ en [A B]. Stel, dat deze zoodanig is, dat A C de richting der resultante is, dan zijn de oorspronkelijke krachten $[\alpha \beta]$ en [A B] teruggebracht tot $[\alpha \gamma]$ en [A C]. Hieruit volgen deze stellingen:

a. Heeft men twee krachten, welker richtingen $\alpha \beta$, A B niet in één vlak liggen, en een richting $\alpha \gamma$, die met de eene $\alpha \beta$ der beide gegeven richtingen in een vlak α ligt, en dus met $\alpha\beta$ een punt M gemeen heeft, dan is het altijd mogelijk, de twee krachten door twee andere te vervangen, waarvan de eene de richting $\alpha\gamma$ heeft. De richting van de tweede gaat dan door het punt A, waarin het vlak α door de richting A B gesneden wordt, en is in het vlak door M en A B gelegen.

b. Zijn van de vlakken α, β, γ de nulpunten A, B, C, en dus A B de toegevoegde lijn van $\alpha\beta$, en A C van $\alpha\gamma$, dan is het altijd mogelijk, volgens de richtingen $\alpha\beta$ en A B twee krachten in zulk een verhouding te laten werken, dat zij vervangen kunnen worden door twee andere in de richtingen $\alpha\gamma$ en A C.

Hebben nu de krachten $[\alpha\beta]$ en [A B] een zoodanige onderlinge verhouding, dan blijkt verder, dat:

c. Als van twee willekeurige met de gegeven krachten gelijkwerkende krachten R en R′ de éene in een gegeven vlak δ ligt, de andere door het nulpunt van dit vlak gaat.

Want als C′ en B′ twee willekeurige punten in $\alpha\beta$ en $\alpha\gamma$ zijn, dan kunnen $[\alpha\beta]$ en [A B] vervangen worden door twee andere krachten Q en Q′, waarvan, als de éene Q de richting C′ B′ heeft en dus $\alpha\beta$ in C′ snijdt, de andere Q′ in het vlak C′ A B volgens (*a*), dus in het nulvlak van C′ ligt.

Aangezien nu $[\alpha\beta]$ en [A B] aequivalent zijn met $[\alpha\gamma]$ en [A C], en $\alpha\gamma$ door C′ B′ in B′ gesneden wordt, is Q′ om dezelfde reden in het vlak B′ A C of het nulvlak van B′ gelegen.

De kracht Q′ heeft dus tot richting de doorsnede der vlakken C′A B en B′ A C, d. i. de toegevoegde lijn van C′ B′ of van de richting van Q.

Laat nu van de twee krachten R en R′, die met $[\alpha\beta]$ en [A B], dus ook met Q en Q′ aequivalent moeten zijn, de eene R in een willekeurig gegeven vlak δ gelegen zijn, en dit vlak de lijnen $\alpha\beta$ en $\alpha\gamma$ in C′ en B′ snijden, en R dus door de richting C′ B′ van Q gesneden worden. Dan gaat volgens (*a*) de richting van R door het punt, waarin het vlak δ, dat R en Q beide bevat, door Q′ gesneden wordt.

Daar echter Q′ de toegevoegde lijn van Q is, zal dit punt het nulpunt van het vlak δ zijn, hetgeen te bewijzen was.

Hieruit volgt:

d. Van twee krachten R en R′, die met $[\alpha\beta]$ en [A B] of met P en P′, zooals wij van nu af $[\alpha\beta]$ en [A B] zullen noemen, aequivalent moeten zijn, kan de richting van de éene in het algemeen willekeurig genomen worden.

e. Van de richtingen van twee met P en P′ aequivalente krachten R en R′ is de een de toegevoegde lijn van de andere in het door P en P′ bepaalde nulstelsel. Want legt men door R twee vlakken δ en ε, waarvan de nulpunten D en E zijn, dan moet volgens (*c*) de kracht R′ zoowel door D als door E gaan; D E is echter de toegevoegde lijn van R.

Evenzoo blijkt:

f. dat omgekeerd, als a' de toegevoegde lijn van a is, er altijd twee volgens a en a' gerichte krachten aan te geven zijn, die met P en P′ aequivalent zijn.

En ten slotte, dat

g. als R in een gegeven vlak ligt, R′ door het nulpunt van dit vlak gaat en ook omgekeerd, als R door een gegeven punt D gaat, R′ in het nulvlak van dit punt gelegen is.

Want aangezien R′ de toegevoegde lijn van R is, is het vlak door D en R′ gelegd het nulvlak van D.

§ 44. Er zijn nu nog eenige betrekkingen te vinden tusschen de statische en de geometrische verwantschap.

Dat van de richtingen der twee krachten R en R′, die met P en P′ aequivalent zijn, de eene naar willekeur genomen kan worden, geldt alleen in het algemeene geval. De richtingen evenwijdig aan de hoofdrichting maken hierop een uitzondering, want als R daaraan evenwijdig was, zou R′ ∞ ver liggen en dus niet te construeeren zijn (XIII).

De statische beteekenis der hoofdrichting komt uit, als wij bedenken, dat volgens XII de beide vlakken, die met P en P′, respectievelijk met R en R′ evenwijdig loopen, evenwijdig aan de hoofdrichting zijn; dit geldt dan ook van de doorsnede dier vlakken.

Worden dus de vier krachten P, P′, R, R′ evenwijdig aan zichzelf naar één punt overgebracht, dan zal de doorsnede der vlakken P P′ en R R′ ook met de hoofdrichting evenwijdig zijn. Dan is echter, volgens een bekende stelling uit de statica, de resultante van P en P′ dezelfde als de resultante van R en R′, en heeft dus de doorsnede der vlakken P P′ en R R′ tot richting. Statisch gesproken is dus de hoofdrichting die richting, waaraan de resultante der krachten P en P′ of van twee daarmee aequivalente krachten evenwijdig loopt, als deze krachten evenwijdig aan zichzelf naar één punt worden overgebracht.

Hieruit volgt nog op een andere wijze, dat het onmogelijk is, R evenwijdig aan de hoofdrichting te nemen. Want als R deze richting had, dan zouden R en R′, naar één punt overgebracht, in dezelfde lijn evenwijdig aan de hoofdrichting vallen, en zouden dan in hun oorspronkelijken stand òf tot één kracht teruggebracht kunnen worden, òf onderling gelijk, evenwijdig en tegengesteld zijn, dus een koppel vormen; geen van beide gevallen is mogelijk, omdat P en P′ elkaar kruisen.

§ 45. Voor de richtingen, die twee krachten, aequivalent aan twee gegeven kruisende krachten P en P′ kunnen hebben, zijn in de tweede plaats uitgezonderd de dubbellijnen, d. w. z. de lijnen, die P en P′ of twee andere krachten R en R′, die P en P′

vervangen kunnen, tegelijkertijd snijden (XVIII). Want zijn de twee krachten S en S′ aequivalent met P en P′, dus ook met R en R′, dan kunnen R, R′, — S teruggebracht worden tot één enkele kracht, die gelijk is aan S′. Maar dit is niet mogelijk, als de richting van S R en R′ tegelijk snijdt, want de resultante van R en — S kruist dan de kracht R′.

De dubbellijnen hebben echter nog een andere statische eigenschap, n.l. dat t. o. v. elk dezer lijnen als as, de som der momenten van P en P′ gelijk aan nul is. Want als s een dubbellijn is, r een rechte, die s snijdt, dan wordt volgens XIX ook de toegevoegde lijn r' door s gesneden.

Nu kunnen volgens § 43f. de krachten P en P′ vervangen worden door twee krachten R en R′ langs r en r'.

Aangezien de richtingen van R en R′ beide door s gesneden worden, is voor s als as het moment van R en dat van R′ nul, dus ook de som dezer momenten nul en dan ook de som der momenten van de daarmee aequivalente krachten P en P′ gelijk aan nul.

Onder alle in één vlak gelegen assen is dus voor diegene, die door het nulpunt van dat vlak gaan, de som der momenten gelijk aan nul. Evenzoo onder alle door één punt gaande assen is dit het geval voor diegene, die in het nulvlak van dit punt gelegen zijn (XVII).

§ 46. Als twee niet in één vlak gelegen krachten P en P′ evenwijdig aan zichzelf naar één punt verplaatst, en dan tot één kracht T samengesteld worden, dan ontstaat hierbij een koppel (U, — U), dat tezamen met T dezelfde uitwerking zou hebben als P en P′. Legt men nu in het vlak van (U, — U) door het punt D, waarin dit vlak door T gesneden wordt, een willekeurige rechte, dan zal deze de krachten T, U, — U tegelijkertijd snijden. Ten opzichte van zulk een rechte is dus de som der momenten van T, U en —U nul, dùs ook de som der momenten van P en P′. Daarom is (§ 45) deze rechte een dubbellijn en het punt D het nulpunt van het vlak van het koppel. Hoe ook de krachten P en P′ in een kracht en een koppel worden omgezet, altijd zal deze kracht het vlak van het koppel in zijn nulpunt snijden. Ook is de richting van de eerste kracht altijd evenwijdig aan de hoofdrichting, want als T, U en —U naar één punt verplaatst worden, dan zullen U en —U elkaar opheffen en T blijft als resultante over (§ 44).

Een koppel kan men niet alleen in zijn vlak willekeurig verplaatsen, maar ook naar elk ander daarmee evenwijdig vlak overbrengen. Doet men dit met het koppel U, —U, dan zal ook dit nieuwe vlak door T in zijn nulpunt gesneden worden. Hiermee komt overeen de stelling VII, dat de nulpunten van evenwijdige vlakken op een rechte evenwijdig aan de hoofdrichting liggen.

Ook de stelling XX kan aldus statisch geinterpreteerd worden. Als twee krachten aequivalent zijn met twee andere, of als vier krachten met elkaar in evenwicht zijn, dan zal elke rechte, die drie dezer richtingen snijdt, ook de vierde ontmoeten.

Dit is gemakkelijk te bewijzen met behulp der momentenstelling; want t. o. v. een as, die de richtingen van drie krachten snijdt, is het moment van elke dezer krachten nul. Daar nu de vier krachten in evenwicht zijn, en dus de som hunner momenten t. o. v. elke as nul is, moet ook het moment van de vierde t. o. v. die as nul zijn. En dit is alleen mogelijk, als deze as ook de richting van de vierde kracht snijdt.

§ 47. Het *nulsysteem*, [1] een polair stelsel in de ruimte, waarbij

[1] Het eerst is het nulsysteem onderzocht door Giorgini (*Memorie della Società italiana della Scienze* Bd. 20, 1827). Toen door Moebius in 1833 en later nog door von Staudt (*Geometrie der Lage*) in 1847.

elk punt in het toegevoegde vlak ligt, — zooals dit in § 36 werd beschouwd — hangt ook nauw samen met de theorie der *lineaire stralencomplexen*.

Het aantal lijnen in de ruimte is ∞^4. Bestaat er nu een lineaire betrekking, waaraan de lijncoördinaten moeten voldoen, dan heeft men een lineairen complex, bestaande uit ∞^3 stralen.

In het nulstelsel nu is elke straal van den door een punt en zijn nulvlak bepaalden stralenbundel aan zichzelf toegevoegd. Want, om van zulk een lijn de toegevoegde lijn te vinden, zoeken wij van twee harer punten de nulvlakken, en bepalen hiervan de snijlijn. Het nulvlak van het nulpunt is het gegeven vlak zelf. Aangezien dit door den bedoelden straal gaat, zal het nulvlak van elk ander punt in dien straal ook door den straal moeten gaan, en is deze dus dubbellijn (nulstraal). (Vergelijk § 42.)

Ofschoon er ∞^3 dergelijke stralenbundels zijn, bevatten zij tezamen toch niet ∞^4 maar ∞^3 stralen, omdat voor *elk* punt van een straal het nulvlak door dezen straal gaat, zoodat elke straal tot ∞^1 bundels behoort. De ∞^3 nulstralen van het nulstelsel vormen een complex, die van den eersten graad is, omdat een willekeurige stralenbundel (X, η) één complexstraal bevat, n.l. de snijlijn van het vlak η met het nulvlak ξ van X, dat immers door X gaat. Daar ook η door X gaat, moet, volgens de eigenschap der correlatie, het aan η toegevoegde punt Y liggen in ξ, en als nulpunt van η ook in η, dus op $\xi\eta$, die hier dus weer blijkt samen te vallen met XY.

Voor den lineairen complex geldt de stelling:

Door elk punt in de ruimte gaan ∞^1 complexstralen, die in een plat vlak liggen, dus een waaier vormen. Dit vlak is het nulvlak van dat punt. En:

In elk vlak liggen ∞^1 complexstralen, die een waaier vormen. De waaiertop is het nulpunt van het vlak.

Dit komt overeen met de stelling XVII van MOEBIUS (§ 42). Ook aldus kan deze stelling worden uitgedrukt:

De complexkegel van den lineairen complex der nulstralen in een punt X is de stralenbundel (X, ξ) in het nulvlak ξ van X. De complexkromme van een vlak ξ is de stralenbundel in dit vlak om haar nulpunt X.

§ 48. Het verband tusschen wederkeerige poollijnen hebben wij reeds in § 36 gevonden. De poollijnen van de lijnen in het oneindig ver gelegen vlak heeten middellijnen van het nulsysteem. Zij zijn onderling evenwijdig, omdat zij alle gaan door het nulpunt van het vlak in het oneindige.

De nulvlakken van de punten op een middellijn zijn onderling evenwijdig, want zij gaan alle door de oneindig ver gelegen wederkeerige poollijn.

De middellijn, waarop de nulvlakken harer punten normaal zijn heet *as* of *hoofdas* van het nulsysteem (hetgeen (§ 40 VII) door MOEBIUS de hoofdrichting is genoemd).

Elke nulstraal van het nulsysteem, die één van twee poollijnen snijdt, snijdt ook de andere (XIX).

Deze stelling is ook nog anders te bewijzen, dan in § 42 gedaan is. Alle stralen n.l., die rusten op één der poollijnen d, vormen een specialen complex, die d tot as heeft.

De complexenbundel, die door dezen specialen en den gegeven complex bepaald wordt, bevat nog een tweeden specialen complex; zijn as is de toegevoegde poollijn d'. Immers alle stralen, die de eerste twee complexen gemeen hebben — d.z. dus de ∞^2 stralen der lineaire basiscongruentie, volgens welke ze elkaar snijden — moeten ook behooren tot de andere complexen van den bundel, dus ook tot den tweeden specialen complex, waaruit volgt, dat elke straal, die d snijdt, ook op d' moet rusten.

Elke lijn, die op twee poollijnen rust, is nulstraal of straal van den complex, want zij behoort tot bovengenoemde congruentie, die een deel van den complex uitmaakt (XVIII).

Aangezien de transversalen over drie kruisende lijnen een regelschaar vormen, zal nu elk der ∞^1 stralen, die twee toegevoegde poollijnen en daarbij nog één van een ander paar toegevoegde poollijnen snijdt, ook de andere van dit paar snijden.

Derhalve zijn twee paren poollijnen van het nulsysteem altijd vier rechten van een regelschaar, omdat zij oneindig vele transversalen hebben. Deze transversalen zijn nulstralen of complexstralen. Dus de toegevoegde regelschaar bestaat geheel uit nulstralen. Verder heeft elke andere rechte van de eerste regelschaar haar toegevoegde poollijn ook in die regelschaar, omdat deze poollijn de nulstralen ook moet snijden. Daar de poollijnen twee aan twee aan elkaar toegevoegd zijn, wordt de eerste regelschaar door de paren van poollijnen involutorisch. De twee dubbelstralen dezer involutie zijn nulstralen, omdat deze lijnen zelf zijn te beschouwen als transversal over twee samengevallen poollijnen. Beide regelscharen zijn door drie stralen van de tweede schaar (die der nulstralen) bepaald, dus:

De regelschaar, die door drie nulstralen van een nulsysteem wordt bepaald, bestaat uit enkel nulstralen en behoort dus geheel tot den complex.

De verbonden regelschaar bestaat uit een involutie van toegevoegde poollijnen, en bevat twee nulstralen, die de coïncidenties der involutie zijn.

Zooals boven reeds gebleken is, zijn elke twee poollijnen de richtlijnen van een lineaire congruentie (1, 1) (schoofgraad 1 en veldgraad 1), die geheel uit nulstralen bestaat en dus geheel tot den complex behoort.

Er zijn dus ∞^4 zulke lineaire congruenties, omdat er ∞^4

lijnen in de ruimte zijn, en men bij elke lijn de toegevoegde poollijn kan vinden.

Daarentegen zijn er ∞^6 regelscharen van nulstralen, want van de ∞^3 nulstralen van het nulsysteem (of ∞^3 stralen van den complex) kan men op ∞^9 wijzen drie stralen kiezen, om de regelschaar te bepalen. Elke regelschaar kan echter op ∞^3 wijzen uit drie harer rechten worden afgeleid, omdat de drie noodige transversalen op ∞^3 wijzen zijn te kiezen.

§ 49. Het geheele nulstelsel, dus ook de lineaire complex, is volkomen bepaald door drie punten met hunne nulvlakken, mits er nog een betrekking bestaat tusschen deze gegevens, n.l. dat in het vlak der drie punten A, B, C ook gelegen is het snijpunt hunner nulvlakken α, β, γ.

Zooals ook in § 38 gebleken is, vormen vier willekeurige punten A, B, C, D en hunne nulvlakken α, β, γ, δ twee tetraëders T en T′, die in en om elkaar beschreven zijn.

Worden de vlakken B C D, C D A, D A B, A B C aangeduid door α', β', γ', δ' en hunne nulpunten $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$ door A′, B′, C′, D′, dan liggen B, C, D, A′, in $\alpha' \equiv$ B C D, B′, C′, D′, A in $\alpha \equiv$ B′ C′ D′. Dus het vlakkenpaar α, α' bevat alle acht hoekpunten der beide tetraëders. Deze liggen evenzoo in elk der paren β, β'; γ, γ'; δ, δ'. De acht hoekpunten der beide tetraëders zijn dus de acht basispunten van een net van quadratische oppervlakken of acht geassocieerde punten; de acht vlakken acht geassocieerde vlakken, dus de raakvlakken aan een tangentiaal net.

De verdeeling der acht punten in de acht vlakken is aldus:

α	B′ C′ D′ A	α'	B C D A′
β	C′ D′ A′ B	β'	C D A B′
γ	D′ A′ B′ C	γ'	D A B C′
δ	A′ B′ C′ D	δ'	A B C D′

De eerste drie punten zijn telkens de hoekpunten van den tetraëder, waartoe het vlak behoort, het vierde is zijn nulpunt.

Twee hoekpunten, zooals A en A′, die tot verschillende tetraëders behooren, terwijl het eene tegenover het nulvlak van het andere is gelegen, zullen wij homologe hoekpunten noemen. Evenzoo hunne nulvlakken α en α' homologe zijvlakken.

§ 50. Bij een tetraëder nu, zooals A B C D, geldt de stelling van von Staudt: [1])

Het viertal punten, waarin een willekeurige rechte de zijvlakken van een tetraëder snijdt, is steeds projectief met het vierial vlakken, waardoor de overstaande hoekpunten uit dezelfde rechte axiaal geprojecteerd worden.

Bewijs: Als de rechte g de vlakken $\alpha' \equiv$ B C D, β', γ', δ' in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ snijdt en dit viertal punten uit D op δ' in de punten $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}$ geprojecteerd wordt, dan liggen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ respectievelijk op B C, C A, A B.

Dit nieuwe viertal projecteert men uit A op B C in $\mathfrak{A}'$ C B $\mathfrak{D}''$; dan is:

$$g(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \equiv \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \barwedge \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D} \barwedge \mathfrak{A}' \mathrm{C\,B}\, \mathfrak{D}''.$$

Uit het vlakkenviertal g (A, B, C, D) ontstaat door snijding met δ' het stralenviertal $\mathfrak{D}$ (A, B, C, $\mathfrak{A}'$); want D $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}'$ ligt in g D. Dit stralenviertal snijdt B C in de punten $\mathfrak{D}''$ B C $\mathfrak{A}'$, aangezien $\mathfrak{D}''$ op A $\mathfrak{D}$ ligt. Dus is:

$$g(\mathrm{A, B, C, D}) \barwedge \mathfrak{D}(\mathrm{A, B, C}, \mathfrak{A}') \barwedge \mathfrak{D}''\,\mathrm{B\,C}\,\mathfrak{A}' \barwedge \mathfrak{A}\ \mathrm{C\,B}\,\mathfrak{D}''$$

derhalve

$$g(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \barwedge g(\mathrm{A, B, C, D})$$

§ 51. Keeren we nu terug tot de beide tetraëders T en T′ van § 49, en nemen aan, dat g een straal van het nulsysteem

[1]) v. Staudt, *Beiträge zur geometrie der Lage* N°. 35.

(of complexstraal) is, dan zijn $g(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ de nulpunten van $g(A', B', C', D')$, want g is dubbele poollijn en A', B', C', D' zijn de nulpunten van $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$. Dus, ingevolge het correlatief verband, is ook:

$$g(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \overline{\wedge} g(A', B', C', D').$$

Dus:

$$g(A, B, C, D) \overline{\wedge} g(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \overline{\wedge} g(A', B', C', D') \overline{\wedge} g(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

De hoekpunten der beide tetraëders T en T′ worden dus uit de nulstralen van het nulsysteem of de stralen van den lineairen complex door projectieve vlakkenviertallen geprojecteerd, waarbij homologe vlakken der beide viertallen door homologe punten gaan.

Duaal hiertegenover staat: De vlakken der beide tetraëders snijden eenzelfden complexstraal in projectieve puntenviertallen, waarbij evenzoo homologe punten in homologe vlakken liggen.

Alle vier viertallen, die zich bij een nulstraal of complexstraal voordoen, zijn projectief.

Nu is echter de volledige meetkundige plaats der stralen, waarop de beide tetraëders T en T′ met hunne vlakken projectieve puntenviertallen insnijden en die tevens volgens von Staudt's stelling door de hoekpunten dier tetraëders projectieve vlakkenviertallen zenden, een complex van den vierden graad.

Immers in een plat vlak omhullen alle stralen, die door een in dat vlak gelegen volledige vierzijde gesneden worden in een puntenviertal, dat met een gegeven puntenviertal projectief is, een kegelsnede.

Zoo ontstaat in een stralenbundel (P, Π), waarvan het vlak Π de beide tetraëders in de vierzijden $a\,b\,c\,d$ en $a'\,b'\,c'\,d'$ snijdt, een verwantschap [2, 2], waarin twee stralen x en x' aan elkaar zijn toegevoegd, als men heeft

$$x\,(a\,b\,c\,d) \overline{\wedge} x'\,(a'\,b'\,c'\,d').$$

Volgens het correspondentiebeginsel van Chasles heeft deze verwantschap vier coïncidenties; dus vier stralen van den stralenbundel (P, Π) behooren tot den complex, die daarom van den vierden graad is.

Tot dezen complex van den vierden graad behoort in ons geval de lineaire complex der nulstralen van het nulsysteem.

§ 52. Een rechte lijn op een oppervlak ρ, dat behoort tot een net quadratische oppervlakken, wordt door een ander oppervlak van dit net gesneden in twee punten, die liggen op alle oppervlakken van den door deze twee bepaalden bundel van het net. De rechte wordt dus door alle oppervlakken van het net gesneden in ∞^1 puntenparen, m. a. w. in een involutie, die een bundel van het net, welke ρ niet bevat, op die rechte insnijdt. Bijgevolg wordt elke rechte u op een oppervlak van het net met de acht basispunten A, B, C, ... D′ door de vier vlakkenparen α, α'; β, β'; γ, γ'; $\delta\, \delta'$, die immers tot het net behooren, in vier puntenparen van een involutie gesneden. Dus is

$$u\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \,\overline{\wedge}\, u\,(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

d. w. z. De kubische complex der rechten op de oppervlakken van het net is het overblijvende deel van den boven bedoelden complex van den vierden graad.

En aangezien deze in zichzelf duaal is, bestaat de kubische complex tevens uit de rechten op de oppervlakken van het tangentiaal net (α, β ...... δ').

Tusschen het net van quadratische oppervlakken ρ, die door de acht hoekpunten van twee tetraëders van MOEBIUS gaan, en het tangentiaal net der oppervlakken φ, die hunne acht zijvlakken aanraken, bestaat dus de betrekking, dat elke rechte op een oppervlak van het eene systeem ook behoort tot een oppervlak van het andere. M. a. w.:

Den kubischen complex hunner rechten hebben zij gemeen.

§ 53. Tot de beide systemen der oppervlakken F en Φ blijken drie eenvlakkige hyperboloïden te behooren.

A B en $\alpha\beta \equiv$ C′ D′, C D en $\gamma\delta \equiv$ A′ B′ zijn twee paren toegevoegde poollijnen van het nulsysteem; dus behooren de twee homologe paren overstaande ribben A B, C D; A′ B′, C′ D′ van T en T′ tot een regelschaar. Het oppervlak, dat deze regelschaar draagt, gaat door alle acht hoekpunten en raakt alle acht zijvlakken aan. De andere regelschaar bestaat dus uit nulstralen (§ 48). De door A getrokken rechte dezer regelschaar moet in α ($\equiv$ B′ C′ D′) liggen en het snijpunt B′ van A′ B′ met α bevatten, dus in het vlak β' (A C D) vallen.

Dus behooren tot deze tweede regelschaar de rechten

A B′, B A′, C D′, D C′,

die ook aangeduid kunnen worden door:

$$\alpha\beta', \quad \beta\alpha', \quad \gamma\delta', \quad \delta\gamma'.$$

De drie bedoelde hyperboloïden bevatten in hunne beide regelscharen de volgende rechten:

(H_1) A B, C D, A′ B′, C′ D′; A B′, B A′, C D′, D C′;
(H_2) A C, B D, A′ C′, B′ D′; A C′, C A′, B D′, D B′;
(H_3) A D, B C, A′ D′, B′ C′; A D′, D A′, B C′, C B′.

§ 54. Aangezien de vierzijde A B A′ B′ op H_1 ligt, zijn hare diagonalen A A′, B B′ wederkeerige poollijnen t. o. v. H_1; C C′, D D′ verkeeren in hetzelfde geval.

Wij beschouwen nu de transversalen q, q' over de vier verbindingslijnen $a \equiv$ A A′, $b \equiv$ B B′, $c \equiv$ C C′, $d \equiv$ D D′ van homologe hoekpunten der beide tetraëders.

De poolvlakken der vier punten $q\,(a\,b\,c\,d)$ t. o. v. H_1 gaan door b, a, d, c; want a en b zijn wederkeerige poollijnen, d. w. z. het poolvlak van punt $(q\,a)$ gaat door b, enz.

Dus de poollijn van q t. o. v. H_1 is q'; want de poolvlakken der punten $q\,(a\,b\,c\,d)$ gaan door één lijn, die de wederkeerige poollijn van q is. Deze is dus de andere transversaal q' over a, b, c, d.

Evenzoo zijn q en q' wederkeerige poollijnen t. o. v. H_2 en H_3. De twee transversalen zijn dus gemeenschappelijke poollijnen voor alle oppervlakken $\digamma$ en Φ van bovengenoemd net en tangentiaal net van quadratische oppervlakken. Zij verdeelen dus de afstandan A A′, B B′, C C′, D D′ *harmonisch*.

Zij ontmoeten echter ook de vier snijlijnen $a_1 \equiv \alpha\,\alpha'$, $b_1 \equiv \beta\,\beta'$, $c_1 \equiv \gamma\,\gamma'$, $d_1 \equiv \delta\,\delta'$, en scheiden de vlakkenparen $\alpha\,\alpha'$, enz. *harmonisch*.

Want aangezien deze vlakkenparen tot het net der $\digamma$ behooren, moeten de poolvlakken van een willekeurig punt van q, die elkaar immers volgens q' snijden resp. door a_1, b_1, c_1, d_1 gaan, dus worden deze vier rechten door q en q' gesneden. Hieruit blijkt, dat voor de tetraëders A B C D, A′ B′ C′ D′ van Moebius de verbindingslijnen der homologe hoekpunten A, A′; B, B′; C, C′; D, D′ en de doorsneden der homologe zijvlakken α, α'; β, β'; γ, γ'; δ, δ' acht rechten zijn, die een gemeenschappelijk paar transversalen hebben. [1])

Uit de acht geassocieerde punten kunnen vier paren tetraëders van Moebius gevormd worden.

A B C D, A′ B′ C′ D′;
A B C′ D′, A′ B′ C D;
A B′ C D′, A′ B C′ D;
A B′ C′ D, A′ B C D′,

waarvan het eerste paar uit de bovengenoemde tetraëders T en T′

[1]) Dit is door Schröter bewezen in zijn verhandeling „*Ueber eine Raumkurve vierter Ordnung und erster Species.*" Journal von Crelle 93, bl. 143. Zie ook de „*Introduzione alla teoria dello spazio rigato*" van Caporali en del Pezzo (N°. 46).

bestaat. Door hunne zijvlakken worden zij aldus aangeduid:

$$\begin{array}{llll} \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta', \\ \beta & \alpha & \delta' & \gamma', \\ \gamma & \alpha & \delta' & \beta', \\ \delta & \alpha & \gamma' & \beta', \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \alpha & \beta & \gamma & \delta; \\ \beta' & \alpha' & \delta & \gamma; \\ \gamma' & \alpha' & \delta & \beta; \\ \delta' & \alpha' & \gamma & \beta. \end{array}$$

Dat bijv. het tweede paar uit twee tetraëders van MOEBIUS bestaat, blijkt aldus: In de zijvlakken $\beta, \alpha, \delta', \gamma'$ van den eenen liggen de hoekpunten A', B', C, D van den anderen, en in de zijvlakken $\beta', \alpha', \delta, \gamma$ van dezen laatsten liggen de hoekpunten A, B, C', D' van den eersten.

Men kan dus eenvoudig de homologe letters twee aan twee van rol laten verwisselen.

HOOFDSTUK III.

Bijzondere gevallen der configuratie van Moebius.

§ 55. Neuberg [1]) zoekt de betrekkingen tusschen de tetraëders van Moebius $A_1 A_2 A_3 A_4$ en $B_1 B_2 B_3 B_4$, waarvan de hoekpunten op vier gegeven rechten gelegen zijn. Wij noemen de tetraëders **A** en **B**.

Moebius heeft in zijn „*Barycentrische Kalkül*" bewezen, dat de acht voorwaarden, die in de definitie zijn opgesloten, teruggebracht kunnen worden tot zeven. Dit is in § 38 reeds gebleken.

Gemakkelijker kan dit echter worden aangetoond met behulp van de theorie der transversalen. Stel, dat de vier punten B_1, B_2, B_3, B_4 resp. gelegen zijn in de zijvlakken $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$ van een tetraëder **A**. Opdat het vlak $B_1 B_2 B_3$ door A_4 zal gaan, is het noodzakelijk en voldoende, dat de lijnen $A_4 B_1$, $A_4 B_2$, $A_4 B_3$ resp. de zijden $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ in drie punten M_1, M_2, M_3 van een rechte snijden.

De voorwaarde hiervoor is:

$$\frac{M_1 A_2}{M_1 A_3} \cdot \frac{M_2 A_3}{M_2 A_1} \cdot \frac{M_3 A_1}{M_3 A_2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zoo bestaan er nòg drie vergelijkingen, die uitdrukken, dat de vlakken $B_2 B_3 B_4$, $B_3 B_4 B_1$, $B_4 B_1 B_2$ gaan door A_1, A_2, A_3.

Maar deze vier betrekkingen (1) zijn niet onafhankelijk van elkaar, want voor elk zijvlak van tetraëder **A** geldt een betrekking als de volgende, waar N_2, N_3, M_1 de punten zijn waarin $A_2 B_1$,,

---

[1]) *Sur les tétraèdres de Möbius* par J. Neuberg.
Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège 2e série, t. XI.

$A_3 B_1$, $A_4 B_1$ resp. de zijden $A_3 A_4$, $A_4 A_2$, $A_2 A_3$ snijden

$$\frac{M_1 A_2}{M_1 A_3} \cdot \frac{N_2 A_3}{N_2 A_4} \cdot \frac{N_3 A_4}{N_3 A_2} = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

En het product der vier vergelijkingen van den vorm (2) is gelijk aan het product der vier vergelijkingen (1). Dus slechts drie vergelijkingen (1) zijn onafhankelijk van elkaar.

§ 56. Om twee tetraëders van Moebius te construeeren, kan men den eersten **A** willekeurig aannemen, en in de twee zijvlakken $A_2 A_3 A_4$, $A_4 A_1 A_2$ de hoekpunten B_1, B_3 van den tweeden tetraëder **B**.

Nu moet B_2 tegelijkertijd in de vlakken $A_4 A_1 A_3$ en $A_4 B_1 B_3$ liggen, dus op de doorsnede $A_4 M_2$ van deze twee vlakken; evenzoo B_4 op de snijlijn $A_2 R$ der vlakken $A_1 A_2 A_3$ en $A_2 B_1 B_3$.

B_2 kan men op $A_4 M_2$ nog willekeurig kiezen, dan is B_4 bepaald als het snijpunt van $A_2 R$ en het vlak $A_3 B_1 B_2$. Inderdaad volgt uit de constructie, dat de tetraëder $B_1 B_2 B_3 B_4$ in **A** is beschreven, terwijl de drie zijvlakken $B_1 B_2 B_3$, $B_4 B_1 B_3$, $B_4 B_1 B_2$ resp. door A_4, A_2, A_3 gaan; dus, volgens het theorema van § 55, gaat ook het vierde zijvlak $B_4 B_2 B_3$ door A_1.

§ 57. Zijn de tetraëder **A** en de punten B_1 en B_3 vast, dan zal de ribbe $B_4 B_2$ een hyperboloïde beschrijven, want deze lijn beweegt zich, steunende op vier kruisende lijnen $A_4 M_2$, $A_2 R$, $A_3 B_1$, $A_1 B_3$, waarop eveneens rusten de lijnen $A_2 A_4$, $A_1 A_3$, $B_1 B_3$. Deze alle zijn dus lijnen van dezelfde hyperboloïde. Zoo geven twee tetraëders van Moebius aanleiding tot drie hyperboloïden; van de zes ribben van **B** kan men drie maal een paar overstaande ribben kiezen.

Deze hyperboloïden hebben dan tot beschrijvende lijnen van het éene stelsel twee homologe paren overstaande ribben, b. v. $A_2 A_4$, $A_1 A_3$, $B_2 B_4$, $B_1 B_3$ en tot beschrijvende lijnen van het andere stelsel de lijnen, die de niet-homologe tetraëderhoekpunten verbinden: $A_4 B_2$, $A_2 B_4$, $A_3 B_1$, $A_1 B_3$. De lijnen $A_4 M_2$ en $A_2 R$, als meetkundige plaatsen der hoekpunten B_2 en B_4 beschouwd, dragen dus projectieve puntenreeksen. [1])

§ 58. Van twee tetraëders van Moebius kan men niet twee homologe zijvlakken willekeurig aannemen. Want als $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ gegeven zijn, moeten de vlakken $A_1 A_2 B_3$, $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$ en $B_1 B_2 B_3$ door hetzelfde punt A_4 gaan. Zoo ook moeten de vlakken $B_1 B_2 A_3$, $B_2 B_3 A_1$, $B_3 B_1 A_2$ en $A_1 A_2 A_3$ elkaar in hetzelfde punt B_4 snijden. Volgens het voorgaande zijn deze twee voorwaarden terug te brengen tot één.

De stelling van § 55 is nu als volgt te interpreteeren als een eigenschap analoog aan die van homologe driehoeken.

Als twee driehoeken $A_1 A_2 A_3$ en $B_1 B_2 B_3$ — niet in eenzelfde vlak — zoodanig gelegen zijn, dat de vlakken $A_1 A_2 B_3$, $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$ door een hoekpunt van den tweeden en een zijde van den eersten driehoek, elkaar snijden in een punt A_4 van het vlak $B_1 B_2 B_3$, dan zullen ook de vlakken $B_1 B_2 A_3$, $B_2 B_3 A_1$, $B_3 B_1 A_2$, door een hoekpunt van den eersten en een zijde van den tweeden driehoek, elkaar snijden in een punt B_4 van het vlak $A_1 A_2 A_3$.

In dezen vorm geeft zij aanleiding tot een involutie. Immers volgens onderstelling gaan de snijlijnen van het vlak $B_1 B_2 B_3$ met $A_1 A_2 B_3$, $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$ door eenzelfde punt A_4. De zijden en diagonalen van de vierzijde $B_1 B_2 B_3 A_4$ snijden de doorsnede der vlakken $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ in drie paren M_1, P_1; M_2, P_2; M_3, P_3 van een involutie. M_1, M_2, M_3 liggen n. l. op de zijden van driehoek $A_1 A_2 A_3$ en P_1, P_2, P_3 zijn de punten, waarin de doorsnede der vlakken $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ gesneden wordt door de

[1]) Deze hyperboloïden zijn door Steiner aangegeven in zijne „*Systematische Entwickelungen*" § 58.

lijnen, die B_4 met de hoekpunten van driehoek $A_1 A_2 A_3$ verbinden. Dus M_1, P_1; M_2, P_2; M_3, P_3 zijn puntenparen van een involutie. De driehoeken $A_1 A_2 A_3$ en $B_1 B_2 B_3$ zouden involutief genoemd kunnen worden.

Wij kunnen nu de tetraëders **A** en **B** aldus beschouwen:

De hoekpunten bepalen twee vlakke vierzijden $A_1 A_2 A_3 B_4$ en $B_1 B_2 B_3 A_4$, waarvan de zijden twee aan twee elkaar snijden in punten op eenzelfde rechte.

$A_1 A_2$	en	$B_3 A_4$	snijden	elkaar	in	M_3
$A_1 A_3$	„	$B_2 A_4$	„	„	„	M_2
$A_1 B_4$	„	$B_2 B_3$	„	„	„	P_1
$A_2 A_3$	„	$B_1 A_4$	„	„	„	M_1
$A_2 B_4$	„	$B_1 B_3$	„	„	„	P_2
$A_3 B_4$	„	$B_1 B_2$	„	„	„	P_3

En $M_3, M_2, P_1, M_1, P_2, P_3$ liggen op één lijn, die de doorsnede is der vlakken $A_1 A_2 A_3$ en $B_1 B_2 B_3$.

De driehoeken $A_1 A_2 A_3$ en $B_1 B_2 B_3$ blijven involutief, als men een hunner laat draaien om de doorsnede hunner vlakken.

Eindelijk geldt de stelling:

Als de vijf hoekpunten A_1, A_2, A_3, B_1, B_3 van twee tetraëders van Moebius gegeven zijn, dan bewegen zich de punten B_4, A_4 langs gegeven rechten, en B_2 beschrijft een hyperboloïde; want B_4 is een willekeurig punt van de doorsnede $A_2 R$ der vlakken $A_1 A_2 A_3$ en $A_2 B_1 B_3$; en A_4 ligt op de doorsnede der vlakken $B_3 A_1 A_2$ en $B_1 A_2 A_3$.

De rechte $B_2 B_4$ is beschrijvende lijn van de hyperboloïde, die bepaald is door de rechten $A_2 R, A_1 B_3, A_3 B_1$ (of door $A_1 A_3$, $B_1 B_3, A_2 A_4$ zie § 57).

§ 59. Van twee tetraëders van MOEBIUS kan men ook niet twee triëders A_1 en B_1 willekeurig aannemen, zooals gemakkelijk blijkt.

De ribben van een der triëders moeten de overeenkomstige vlakken van den anderen snijden in drie punten, welker vlak door den top van den laatsten triëder gaat. Als hieraan voldaan is door de ribben van den triëder A_1, dan zullen volgens § 55 ook de ribben van B_1 daaraan voldoen.

Twee dergelijke triëders kunnen involutief genoemd worden.

§ 60. Gaan wij nu over tot het probleem, om op vier gegeven rechten m_1, m_2, m_3, m_4 vier puntenparen $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4)$ te vinden, die hoekpunten van twee tetraëders van MOEBIUS zijn.

In § 54 hebben wij gevonden, dat bij twee tetraëders van MOEBIUS $A_1 A_2 A_3 A_4$ en $B_1 B_2 B_3 B_4$ de verbindingslijnen van homologe hoekpunten $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4$ harmonisch verdeeld worden door de twee transversalen t, t' over die vier rechten, waarvan wij de steunpunten noemen C_1, C_2, C_3, C_4 en D_1, D_2, D_3, D_4.

Dan is

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2) = (A_3 B_3 C_3 D_3) = (A_4 B_4 C_4 D_4) = -1.$$

Wij zoeken dus eerst de twee rechten t en t', die op de vier gegeven rechten m_1, m_2, m_3, m_4 rusten.

Elk der rechten $C_1 C_2$ en $D_1 D_2$ stelt reeds een oplossing van het probleem voor. Men kan b.v. de punten $C_1 C_2 C_3 C_4$ beschouwen als de hoekpunten van twee tetraëders, die samengevallen zijn, aangezien de richtingen der zijvlakken toch onbepaald zijn.

Andere oplossingen leveren de volgende paren tetraëders:

$$C_1 C_2 D_3 D_4 \text{ en } D_1 D_2 C_3 C_4;$$

$$C_1 C_3 D_2 D_4 \text{ en } D_1 D_3 C_2 C_4;$$

$$C_1 C_4 D_2 D_3 \text{ en } D_1 D_4 C_2 C_3.$$

Als vier punten der rechten m_1, m_2, m_3, m_4 in één vlak zullen liggen, dan moet er tusschen hun coördinaten een betrekking bestaan, die lineair is in de coördinaten van elk der punten, want drie van deze punten bepalen ondubbelzinnig het vierde.

Men kan nu een punt op m_1 vastleggen, door de verhouding x_1 van de afstanden tot C_1 en D_1 als fundamentaalpunten; evenzoo een punt op m_2 t. o. v. C_2 en D_2, enz.

Zijn aldus x_1, x_2, x_3, x_4 de coördinaten der hoekpunten A_1, A_2, A_3, A_4 van den eersten tetraëder, dan zijn wegens de genoemde harmonische verdeeling de coördinaten der hoekpunten B_1, B_2, B_3, B_4 van den tweeden tetraëder $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$.

Zullen nu de puntenviertallen A_1, A_2, A_3, B_4; A_2, A_3, A_4, B_1; A_3, A_4, A_1, B_2; A_4, A_1, A_2, B_3 in één vlak liggen, dan moet voldaan worden aan vier betrekkingen, die echter tot drie kunnen worden teruggebracht. Dus zijn alleen de verhoudingen der onbekenden x_1, x_2, x_3, x_4 bepaald. Hieruit volgt:

Op vier gegeven rechten kan men op ∞ vele manieren de hoekpunten van twee tetraëders van Moebius aannemen. Als deze punten zich verplaatsen, teekenen zij op de vier rechten homografische verdeelingen af.

Ten slotte luidt nu de oplossing van het gestelde probleem als volgt:

Om op vier gegeven rechten m_1, m_2, m_3, m_4 de hoekpunten van twee tetraëders van Moebius te vinden, zoeken we eerst de rechten die in C_1, C_2, C_3, C_4 en D_1, D_2, D_3, D_4 op de gegeven lijnen rusten.

Worden nu voor A_1, B_1 twee punten op m_1 genomen, die door C_1, D_1 harmonisch gescheiden zijn, dan brengen we door A_1 de rechten $A_1 E_2 E_3$, $A_1 E_2' E_4$, $A_1 E_3' E_4'$, die op m_2 en m_3, m_2 en m_4, m_3 en m_4 rusten.

Van de involuties, die bepaald zijn door de paren (C_2, D_2; E_2, E_2') op m_2; (C_3, D_3; E_3, E_3') op m_3; (C_4 D_4; E_4, E'_4) op m_4, bepalen we de dubbelpunten (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4); deze zijn de gezochte punten, omdat in een involutie elk puntenpaar door de dubbelpunten harmonisch wordt gescheiden.

De punten A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3; A_4, B_4 kunnen nu op vier manieren in twee groepen van vier punten worden ingedeeld, die respectievelijk de hoekpunten van de gezochte tetraëders zijn, zooals in § 53 reeds gebleken is.

§ 61. Behalve de in § 53 genoemde hyperboloïdische liggingen, die bij elke figuur van Moebius plaats vinden, kunnen nog andere hyperboloïdische liggingen voorkomen, die dan gepaard gaan met bijzondere standen van de figuur van Moebius.[1])

Echter kunnen twee tetraëders van Moebius op niet meer dan negen verschillende wijzen hyperboloïdisch gelegen zijn, hetgeen in het volgende zal worden aangetoond.

Twee tetraëders A B C D en A′ B′ C′ D′ liggen hyperboloïdisch, als vier elkaar kruisende rechten, die elk een hoekpunt van den eenen met een hoekpunt van den anderen verbinden, gelegen zijn op een quadratisch regelvlak. Uit deze bepaling volgt direct, dat twee tetraëders van Moebius minstens op drie verschillende wijzen hyperboloïdische ligging hebben. Elk viertal van ongelijknamige hoekpunten, zóódanig gecombineerd, dat er in elke groep een oneven aantal geaccentueerden voorkomt, stelt vier in één vlak gelegen punten voor; want elk hoekpunt van den eenen tetraëder ligt in het zijvlak van den anderen, dat tegenover het homologe hoekpunt gelegen is.

---

[1]) *Wisk. opg.* de VIII n°. 67 (opgave van Dr. P. Zeeman Gz).

Hieruit volgt dus, dat de drie paren van lijnenviertallen:

A B	A B'	A C	A C'	A D	A D'
A' B'	B A'	A' C'	C A'	A' D'	D A'
C D	C D'	B D	B D'	B C	B C'
C' D'	D C'	B' D'	D B'	B' C'	C B'

die in § 53 de hyperboloïden (H_1), (H_2), (H_3) bepaalden, hyperboloïdisch gelegen zijn. Want in elk paar viertallen snijden de lijnen van de eene groep alle lijnen van de andere groep, en elk van beide groepen bestaat uit vier elkander kruisende lijnen. En van elk paar viertallen bevat alleen de tweede groep lijnen, die een hoekpunt van den eenen tetraëder met een hoekpunt van den tweeden verbinden.

§ 62. Nu zijn er ook nog andere wijzen van hyperboloïdische ligging mogelijk.

Op 24 verschillende manieren kan men vier punten A, B, C, D één aan één met vier punten A', B', C', D' verbinden, omdat het aantal permutaties van vier elementen 24 is; zij zijn in verschillende typen te rangschikken, die in het volgende schema met het aantal daarin begrepen viertallen zijn aangegeven.

1	6	3	8	6
A A'	A A'	A B'	A A'	A B'
B B'	B B'	B A'	B C'	B C'
C C'	C D'	C D'	C D'	C D'
D D'	D C'	D C'	D B'	D A'
I	II	III	IV	V

Deze type I, II, III, IV, V zullen wij, op het voetspoor van Dr. P. H. Schoute, [1]) afzonderlijk behandelen.

Type I. Als A A', B B', C C', D D' hyperboloïdisch gelegen

[1]) t. a. p. bl. 129.

zijn, is er door A een lijn te trekken, die op $B B'$, $C C'$, $D D'$ rust. Worden nu $B B'$, $C C'$, $D D'$ uit A op het vlak $B C D$ in $B B_0$, $C C_0$, $D D_0$ geprojecteerd, dan zullen de drie projecteerende vlakken $A B B'$, $A C C'$, $A D D'$ elkaar snijden volgens de transversaal door A. Dus moeten de projecties $B B_0$, $C C_0$, $D D_0$ door één punt gaan, n.l. door het snijpunt van die transversaal met het vlak $B C D$.

Dit is echter niet het geval, omdat $A B' C' D'$ in één vlak liggen en de projecties $B_0 C_0 D_0$ dus de snijpunten zijn van een rechte — d. i. de snijlijn van het vlak $A B' C' D'$ en het vlak $B C D$ — met de zijden $C D$, $D B$, $B C$ van driehoek $B C D$. Want $A B'$ en $C D$ moeten elkaar snijden, omdat B', A, C, D in één vlak liggen; evenzoo $A C'$ en $B D$, en ook $A D'$ en $B C$.

Dus is dit geval I onmogelijk.

Type II. Deze zes gevallen zijn alle mogelijk. Gaat men b.v. uit van een willekeurig viervlak $A B C D$ en kiest voor A' het zwaartepunt van $\triangle B C D$, en $A B'$, $A C'$, $A D'$ achtereenvolgens evenwijdig en gelijkgericht met $C D$, $D B$, $B C$, dan heeft men een geval van het type II.

Als men voor $A B C D$ een regelmatig viervlak kiest, dan is de orthogonale projectie van $B' C' D'$ op het vlak $B C D$ een om $B C D$ beschreven gelijkzijdige driehoek, waarvan de zijden $B' C'$, $C' D'$, $D' B'$ respectievelijk loodrecht staan op $B C$, $C D$, $D B$.

Het bestaan van het eerste hyperboloïdisch quadrupel van type II blijkt nu aldus:

De loodlijn uit C' op het vlak $B C D$ wordt gesneden door $A A'$, $B B'$, $C D'$ en $D C'$, want zij is evenwijdig aan $A A'$, ligt in een (projecteerend) vlak met $B B'$, en met $C D'$, en snijdt natuurlijk $D C'$.

Deze vier rechten rusten ook (bij *elke* Moebius cf.) op $A B$, en $A' B'$, dus liggen ze op de hyperboloïde bepaald door $A B$, $A' B'$ en de loodlijn uit C' op $B C D$.

Voor het tweede hyperboloïdisch quadrupel heeft men te bedenken, dat C D evenwijdig loopt met A B′, en gesneden wordt door B A′, C C′ en D D′. Deze vier rechten, die ook door C′ D′ worden gesneden, zullen nu hyperboloïdisch liggen, als er nog een transversaal is.

De overige vier hyperboloïdische quadrupels van dit type vindt men, door (analoog aan de redeneering voor het eerste quadrupel) als transversalen te beschouwen de loodlijnen uit D′ en B′ op het vlak B C D, en (analoog aan die voor het tweede quadrupel) de rechten B C en B D.

Bovengenoemd tweede quadrupel C C′, D D′, A B′, A′ B heeft hyperboloïdische ligging, als de vlakken A C C′, A D D′, A A′ B door eenzelfde lijn gaan, of, in de aangenomen notatie, als de lijnen C C_0, D D_0, A′ B door één punt gaan.

Zoo hangt de hyperboloïdische ligging der viertallen D D′, B B′, A C′, A′ C en B B′, C C′, A D′, A′ D af van het al of niet door één punt gaan der lijnendrietallen D D_0, B B_0, A′ C en B B_0, C C_0, A′ D.

Noemt men de tegenover B B_0, C C_0, D D_0 gelegen hoekpunten van den door deze lijnen gevormden driehoek β, γ, δ, dan zijn de driehoeken B C D en $\beta\, \gamma\, \delta$ perspectief gelegen, omdat de paren overeenkomstige zijden:

$$B\,C / \beta\,\gamma \equiv D_0$$
$$C\,D / \gamma\,\delta \equiv B_0$$
$$D\,B / \delta\,\beta \equiv C_0$$

elkaar snijden in de punten $B_0\, C_0\, D_0$ van een rechte. Dus de verbindingslijnen van homologe hoekpunten B β, C γ, en D δ gaan door één punt, en dit punt moet A′ zijn, want:

Volgens de eerste voorwaarde moeten $\beta\,\delta$, $\beta\,\gamma$ en A′ B door één punt gaan.

Volgens de tweede voorwaarde moeten $\beta\,\gamma$, $\gamma\,\delta$ en A′ C door één punt gaan.

Volgens de derde voorwaarde moeten $\gamma\,\delta$, $\beta\,\delta$ en A′ D door één punt gaan.

De ligging is dus zoodanig, dat de volledige vierhoek $\beta\,\gamma\,\delta$ A′ den driehoek B C D tot diagonaaldriehoek heeft.

De snijlijn $B_0\,C_0\,D_0$ der vlakken B C D en B′ C′ D′ is de harmonische poollijn van A′ t. o. v. $\beta\,\gamma\,\delta$ en eveneens t. o. v. B C D [1]) en, om redenen van symmetrie, ook van A t. o. v. B′ C′ D′.

In het boven vermelde bijzondere geval was het vlak B C D evenwijdig aan het vlak B′ C′ D′, dus de snijlijn $B_0\,C_0\,D_0$ in het oneindige gelegen, hetgeen door een projectieve transformatie uit het algemeene geval kan verkregen worden.

Kiest men n.l. het projectiecentrum in een vlak door de lijn $B_0\,C_0\,D_0$, en plaatst het tafereel evenwijdig aan dit vlak, dan levert een centrale projectie de bedoelde transformatie, waarbij $B_0\,C_0\,D_0$ in het oneindige verdwijnt, en A′ zwaartepunt wordt van driehoek B C D zoowel als van driehoek $\beta\,\gamma\,\delta$.

Type III. Dit type omvat de in § 61 besproken, voor de hand liggende, drie gevallen, die een onmiddellijk gevolg zijn van de eigenaardige ligging van twee tetraëders van Moebius.

Type IV. Als A A′, B C′, C D′, D B′ hyperboloïdisch gelegen zijn, moeten weer B C_0, C D_0, D B_0 — ontstaan door projectie van uit A op het vlak B C D A′ — door één punt gaan.

Dit doen ze echter niet, want:

C_0 ligt op B D, omdat A, B, D, C′ in één vlak liggen;
B_0 „ „ C D, „ A, C, D, B′ „ „ „ „
D_0 „ „ B C, „ A, B, C, D′ „ „ „ „
dus B C_0, C D_0, D B_0 zijn de drie zijden van driehoek B C D.

---

[1]) Door projectie uit γ ontstaat uit de harmonische groep C_0 C $\beta\,\delta$ de harmonische groep C_0 C″ D B; enz. Hieruit volgt, dat $B_0 C_0 D_0$ de harmonische poollijn — met betrekking tot B C D — is van het snijpunt A′ der rechten B B″, C C″, D D.

Type IV blijkt dus ook onmogelijk te zijn.

Type V. Als A B', B C', C D', D A' hyperboloïdisch gelegen zijn, dan moeten, als B C', C D' en D A' van A uit geprojecteerd worden op het vlak B C D A', B C_0, C D_0 en D A' of B D, B C en D A' door één punt gaan. Dus A' moet op B D liggen, hetgeen tengevolge heeft, dat D A' en B C' elkaar snijden, — omdat B D en B C' dit doen, — en de vier gestelde lijnen dus *geen* kruisende lijnen zijn.

Uit het voorgaande blijkt, dat naast de steeds voorkomende drie gevallen van type III alleen de zes gevallen van type II mogelijk zijn, waarmede bewezen is, dat twee tetraëders van Moebius op niet meer dan negen verschillende wijzen hyperboloïdisch kunnen liggen.

§ 63. Ten slotte kan nog worden aangetoond, dat in een bol een Moebiusconfiguratie kan worden beschreven. [1])

De vier cirkels, die elk drie hoekpunten eener vierzijde bevatten (de omgeschreven cirkels der vier gevormde driehoeken), gaan door één punt Q, waarvan de projecties op de vier zijden in een rechte w liggen. (Rechte van Simson of van Wallace).

Neemt men omgekeerd het punt Q en de rechte w willekeurig aan, verbindt Q met vier punten P_k van w en trekt door elk punt P_k een rechte a_k loodrecht op P_k Q, dan sluiten de rechten a_k vier driehoeken in, waarvan de omgeschreven cirkels door Q gaan. Geeft men het snijpunt van a_k met a_l aan door A_{kl}, dan ligt Q op de vier cirkels $\mathfrak{A}_{klm} \equiv A_{kl}\, A_{lm}\, A_{mk}$.

Door inversie in de ruimte t. o. v. een centrum M

---

[1]) Jan de Vries „*Over eenige groepen van cirkels.*"
Zittingsverslagen der kon. akad. v. wet. deel VI bl. 418—421 (1898).

gaat:	over in:
een willekeurig *plat vlak*	een *bol door* M en de doorsnijdingscirkel van dat vlak met de eenheidsbol om M;
een willekeurige *rechte* (doorsnede van twee vlakken)	een *cirkel door* M (doorsnede van twee bollen door M);
een willekeurige *bol*	een andere *bol*;
een willekeurige *cirkel* (doorsnede van twee bollen)	een andere *cirkel* (doorsnede der inverse bollen);
een willekeurig *punt*	een ander *punt* (dat t. o. v. de eenheidsbol polair is toegevoegd aan het gegeven punt).

Wordt nu de figuur, gevormd door de vier rechten a_k en de vier cirkels $\mathfrak{A}_{klm}$, t. o. v. een willekeurig punt M der ruimte als pool geïnverteerd, dan gaan de vier rechten a_k over in vier cirkels a'_k door M; de vier cirkels $\mathfrak{A}_{klm}$ in vier cirkels $\mathfrak{A}'_{klm}$; en de punten Q, A_{kl} in de punten Q', A'_{kl}.

Er ontstaan dus 8 cirkels a'_k, $\mathfrak{A}'_{klm}$ en 8 punten M, Q', A'_{kl}, die alle gelegen zijn op den bol, waarin het vlak der gegeven vierzijde overgaat.

De vlakken α_k en α_{klm} van deze cirkels vormen met de genoemde 8 punten een configuratie van Moebius.

De verdeeling der punten in de 8 vlakken wordt door het volgende schema aangewezen.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_{123}	α_{124}	α_{134}	α_{234}
M	M	M	M	A'_{12}	A'_{12}	A'_{13}	A'_{23}
A'_{12}	A'_{12}	A'_{13}	A'_{14}	A'_{13}	A'_{14}	A'_{14}	A'_{24}
A'_{13}	A'_{23}	A'_{23}	A'_{24}	A'_{23}	A'_{24}	A'_{34}	A'_{34}
A'_{14}	A'_{24}	A'_{34}	A'_{34}	Q'	Q'	Q'	Q'

De gevormde Cf $(8_4, 8_4)$ van punten en cirkels is, evenals de cf. van Moebius, volkomen regelmatig. Zij bestaat uit 8 punten, die blijkens bovenstaande tabel vier aan vier op één cirkel liggen, en uit 8 cirkels, die vier aan vier door één punt gaan, zoals uit het volgende schema duidelijk wordt.

M	Q'	A'_{12}	A'_{13}	A'_{14}	A'_{23}	A'_{24}	A'_{34}
a_1'	$\mathfrak{A}'_{123}$	a_1'	a_1'	a_1'	a_2	a_2'	a_3'
a_2'	$\mathfrak{A}'_{124}$	a_2'	a_3'	a_4'	a_3'	a_4'	a_4'
a_3'	$\mathfrak{A}'_{134}$	$\mathfrak{A}'_{123}$	$\mathfrak{A}'_{123}$	$\mathfrak{A}'_{124}$	$\mathfrak{A}'_{123}$	$\mathfrak{A}'_{124}$	$\mathfrak{A}'_{134}$
a_4'	$\mathfrak{A}'_{124}$	$\mathfrak{A}'_{124}$	$\mathfrak{A}'_{134}$	$\mathfrak{A}'_{134}$	$\mathfrak{A}'_{234}$	$\mathfrak{A}'_{234}$	$\mathfrak{A}'_{234}$

STELLINGEN.

Stellingen.

I

Het bestaan der elementen in het oneindige kan geheel in het midden worden gelaten. Ze worden ingevoerd ter wille van de continuïteit der meetkundige wetten.

II.

Er worde in de elementaire wiskunde reeds op gewezen, dat bij vraagstukken drie soorten van onmogelijke oplossingen kunnen voorkomen.

III.

Er dient in de leerboeken met nadruk op gewezen te worden, dat, terwijl totale differentiaalquotienten desnoods als breuken beschouwd kunnen worden, de partieele differentiaalquotiënten in het algemeen slechts symbolische beteekenis hebben.

IV.

Voor het inzicht in de beteekenis van het completeeren van een systeem lineaire partieele differentiaalvergelijkingen van de eerste orde kunnen meetkundige beschouwingen van grooten dienst zijn.

V.

Dat de ware fouten dezelfde foutenwet volgen als de afwijkingen van het arithmetisch gemiddelde, mag niet als van zelf sprekend worden aangenomen.

VI.

De gronden der planetesimaalhypothese van Moulton en Chamberlin zijn weinig overtuigend.

VII.

Uit het ontbreken in het zonnespectrum van lijnen van een zeker element mag niet tot de afwezigheid van dat element op de zon worden besloten.

VIII.

Het begrip entropie heeft in zooverre nog geen tastbare physische beteekenis, als het nog niet in alle gevallen mogelijk is, de door Boltzmann ingevoerde waarschijnlijkheid — een grootheid, waarvan de logarithmus met de entropie evenredig is — te berekenen.

IX.

Ten onrechte zegt Heinrich Hertz, dat d' Alembert's principe onafhankelijk is van de mechanische grondprincipes van Newton.

H. Hertz. *Prinzipiën der mechanik* Ges. Werke III.

X.

Het bezwaar van HERTZ tegen de mechanische verklaring der centrifugaalkracht, die optreedt bij het aan een koord rondslingeren van een steen, is overdreven. t. a. p.

XI.

Het ingewikkeld klokkenapparaat, door COHN uitgedacht, om het relativiteitsprincipe te demonstreeren, verduidelijkt dit niet.
EMIL COHN. *Physikalisches über Raum und Zeit.*
Naturwiss. Monatschr. „*Himmel und Erde*" XXIII 1911.

XII.

Nichts lähmt das Interesse der studierenden Jugend so sehr, als der Eindruck, es sei das vorgetragene fertig und abgeschlossen.

HAMEL *Elementare Mechanik.*