



# Over elektrische dubbelbreking

<https://hdl.handle.net/1874/259454>

A<sup>o</sup> 192

Phys  
30 Nov 1914

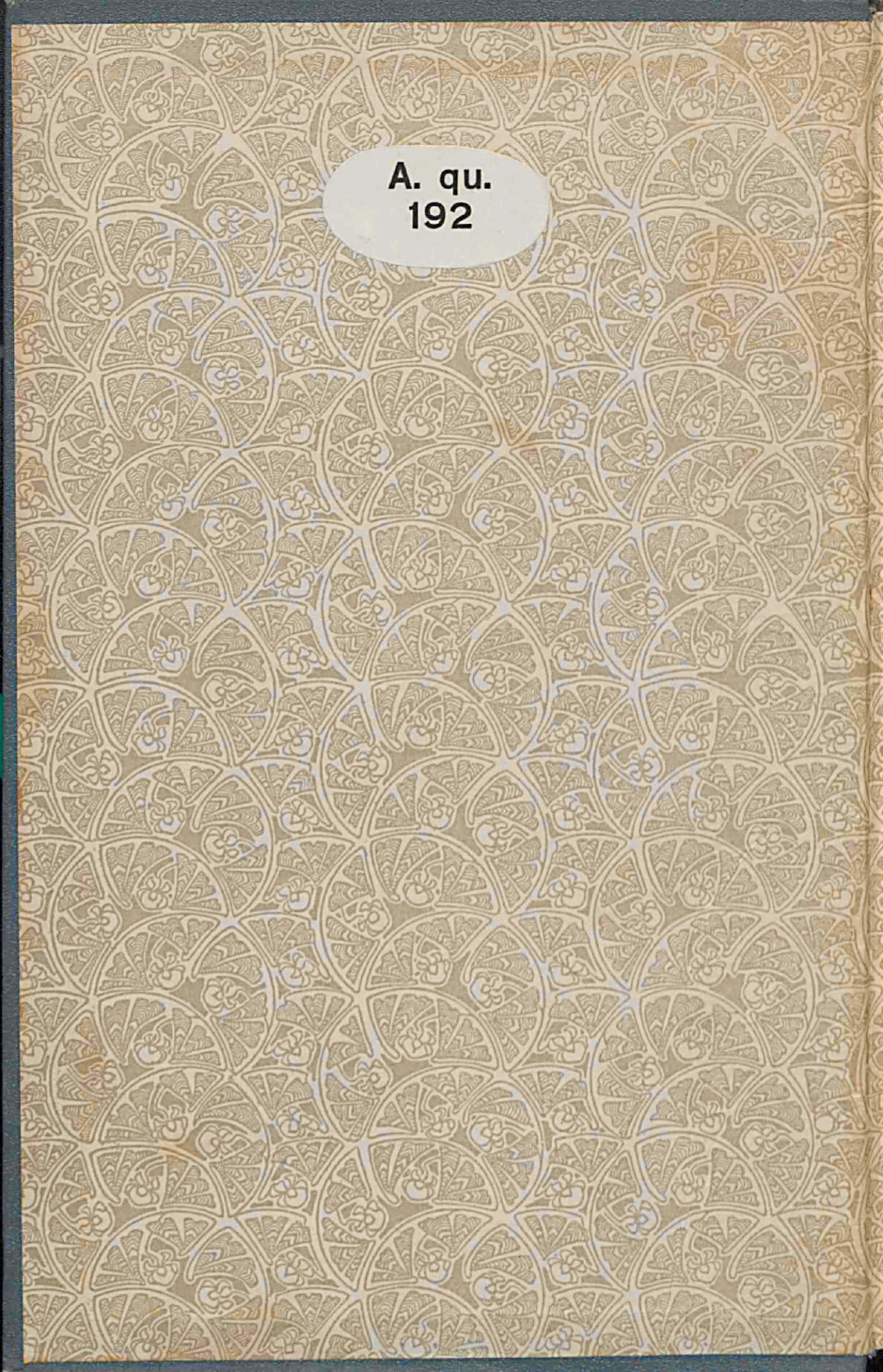
OVER ELECTRISCHE  
DUBBELBREKING ≡

---

J. H. TUMMERS

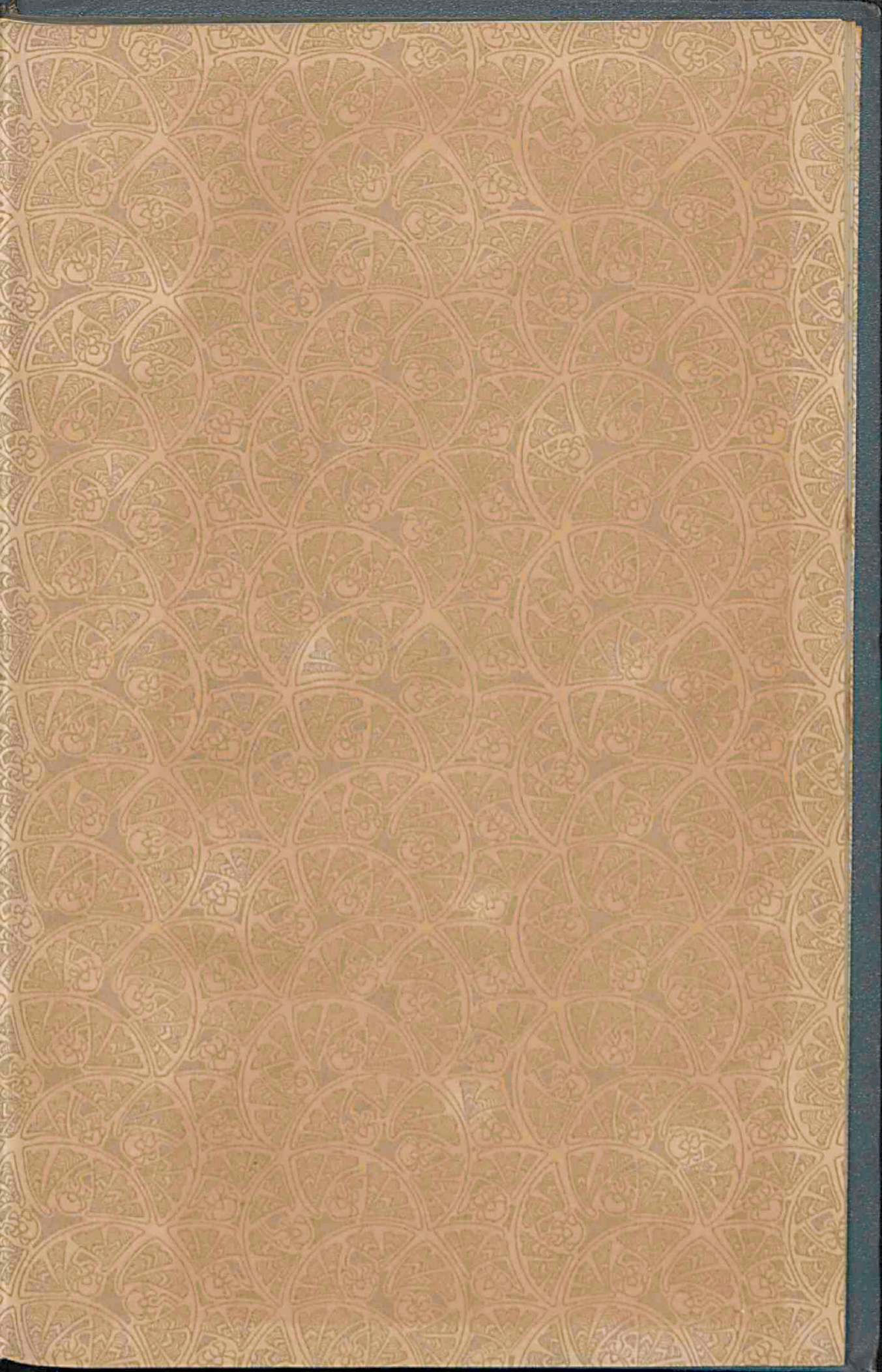
u.  
2





A. qu.  
192









# Over Electriche Dubbelbreking.

PROEFSCHRIFT

om de Doctor's Graad te verkrijgen

in de Wetenschappen der Natuurkunde

door

J. VAN DER WOUDE

geb. te Rotterdam

den 10. April 1868

## Over Electriche Dubbelbreking.

Uitgegeven door de Drukkerij van de Universiteit van Rotterdam

Rotterdam

Verkoopplaats: de Drukkerij van de Universiteit van Rotterdam

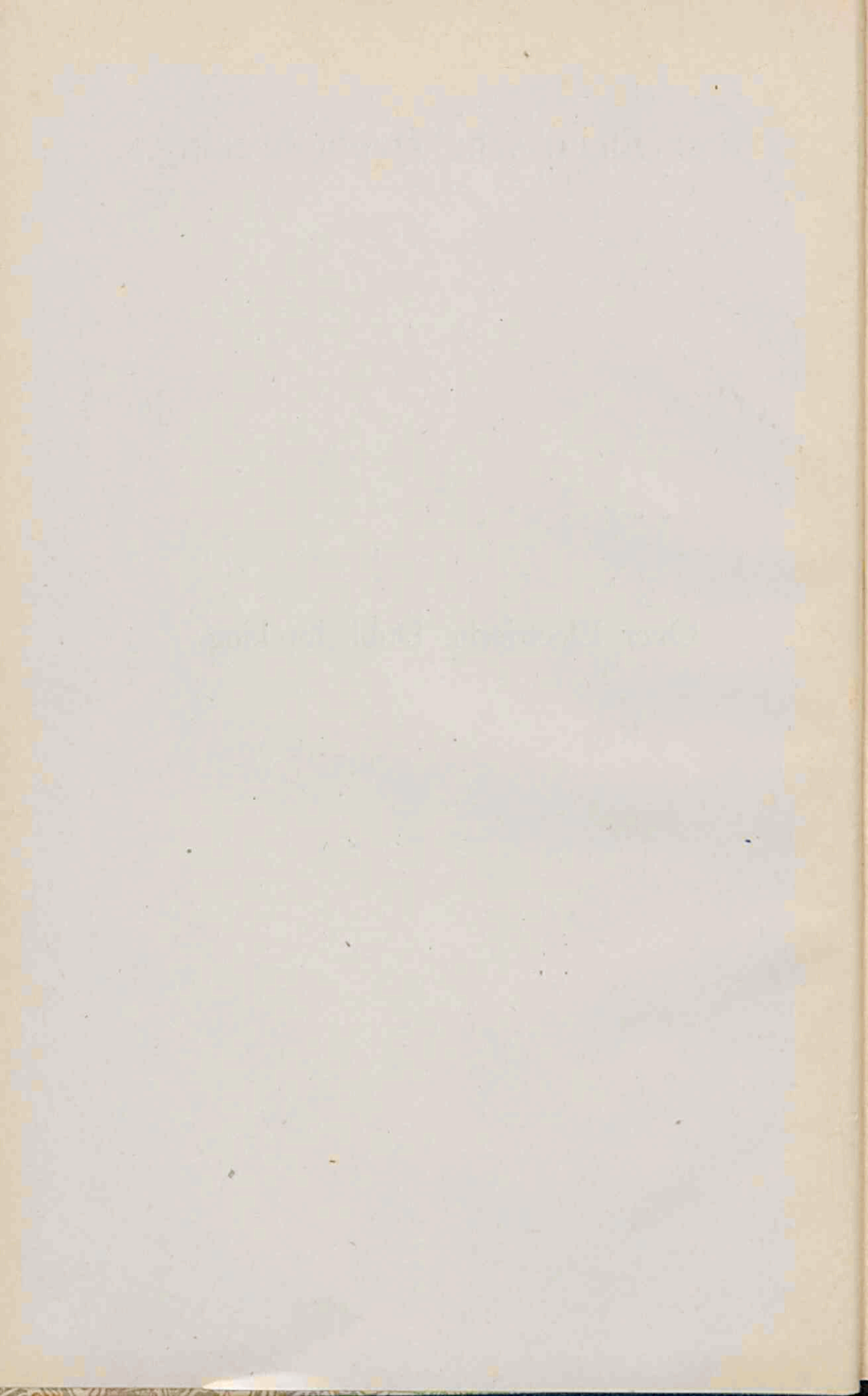
1868

Verkoopplaats: de Drukkerij van de Universiteit van Rotterdam

Rotterdam







# Over Electriche Dubbelbreking.

---

## PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. H. SNELLEN

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Maandag 30 November 1914 des namiddags te 4 uren

DOOR

**JOZEF HENDRIK TUMMERS**

geboren te SITTARD.



---

Electr. drukkerij «de Industrie», J. VAN DRUTEN — Utrecht.

1914.



Über die elektrische Hypothese

PROFESSOR

AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH

Doctor in der Wissenschaften

in der Naturwissenschaftlichen Fakultät

an der Universität Zürich

Dr. phil. phil.

Dr. phil. phil.

Dr. phil. phil.

Dr. phil. phil.

Dr. phil. phil.

Dr. phil. phil.

Dr. phil. phil.

JOSEPH HUBNER JUNIOR

Dr. phil. phil.



AAN MIJNE OUDERS.



THE END OF THE WORLD

Aan het einde mijner Universitaire vorming, zeg ik dank aan U, Hoogleraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit, voor de leiding en het ontvangen onderricht.

Aan U, op de eerste plaats, Hooggeleerde JULIUS, Hooggeachte Promotor, voor de vriendelijkheid dat Gij wegens het vertrek van Professor DEBYE dit proefschrift nadat het reeds gedrukt was, hebt willen aannemen.

U, Hooggeleerde KAPTEIJN, voor Uw kostbaar onderricht in de leer der functiën, voor Uwe lessen van groote wetenschappelijke en paedagogische waarde. U ook, Hooggeleerde NIJLAND, om uw groote welwillendheid en voorkomendheid, en U Hooggeleerde DE VRIES, wiens lessen ik gaarne aanhoorde om Uw volstrekt juiste vertolking der meetkundige gedachte.

Hoe zal ik ten slotte U, Hooggeleerde DEBYE, mijn dank betuigen? U, die mij het eerst in het wiskundige schrift leerde lezen het werkelijk natuurgebeuren. Niet genoeg dankbaar kan ik zijn *vooral* voor den grooten steun en de onafgebroken hulp bij de samenstelling van dit proefschrift, waarin ik aan natuurkundig inzicht heb neergelegd, wat ik van U ontving. Zoodat alle eer op de eerste plaats aan U toekomt. Wees overtuigd, Hooggeleerde DEBYE, dat ik niet vergeten zal Uwe verschijning van karakter en geleerde aan de Academie te Utrecht.





## INHOUD.

---

	Bladz.
HOOFDSTUK I. Het verschijnsel van KERR . . . .	1
HOOFDSTUK II. De theorie van LANGEVIN. . . . .	6
HOOFDSTUK III. Het wisselend veld . . . . .	14
HOOFDSTUK IV. De ruimte . . . . .	24
HOOFDSTUK V. Proeven over den Relaxatietijd . .	39
HOOFDSTUK VI. Algemeene beschouwingen . . . .	49

---



## HOOFDSTUK I.

### Het verschijnsel van KERR.

De proefnemingen van KERR, en van velen na hem, die ze herhaalden, hebben het feit der electriche dubbelbreking, algemeen bekend onder den naam van KERR-effekt buiten twijfel gesteld.

*Dit is:* Een vloeistof, die in de gewone omstandigheden enkelbrekend is, gaat zich onder invloed van een sterk electricch veld gedragen als een één-assig kristal en wordt dubbelbrekend. In de proef openbaart zich dit feit als volgt. Een lichtstraal, die rechtlijnig gepolariseerd bij een vloeistof S aankomt, zal bij aanwezigheid van een sterk veld, S verlaten als elliptische gepolariseerde straal. Ondersteld is, dat de trillingsrichting van den invallenden straal een hoek maakt met de richting der krachtlijnen.

Men kan dit natuurverschijnsel wiskundig aldus beschrijven. De aankomende trilling is in twee andere uiteengevallen, wier richtingen evenwijdig met en loodrecht op de krachtlijnen zijn. Zou nu de stof aan elken invloed van het veld ontsnapt zijn, dan zouden de twee componenten zich even snel door de isotrope middenstof moeten voortplanten, zoodat phase-verschil was uitgesloten; na het verlaten der vloeistof zouden ze zich dus behoorlijk weer tot een enkele rechtlijnige trilling hebben vereenigd. De proef vertoont echter iets anders. De straal namelijk verlaat de vloeistof *elliptisch* gepolariseerd. Dus de stof S is niet ontsnapt aan den invloed van het electricch veld. De elliptische polarisatie wijst erop, dat binnen S de eene component den vluggen stap van den anderen niet heeft bijgehouden van wege den minder gunstigen weg, waar langs



hij voortging: vandaar dat de eene component zich *verlaat* heeft in de middenstof en derhalve de vereeniging van den buitengewonen en den gewonen straal — na passage — niet meer onder dezelfde omstandigheden kon plaats hebben als vroeger. De vereeniging tot rechte trilling is onmogelijk geworden van wege het phaseverschil; en de vereeniging der componenten is tot een elliptische trilling aangewezen. De stof namelijk had twee richtingen, de stof was dubbelbrekend geworden en de wiskundige splitsing vertegenwoordigde een reële scheiding.

Wat betreft de grootte der electriche dubbelbreking, deze is uiterst klein. Zij bijvoorbeeld de brekingsindex van den straal evenwijdig aan de krachtlijnen  $n_1$  en die er loodrecht op trilt  $n_2$ , dan zal  $(n_2 - n_1)$  een maat kunnen zijn voor de dubbelbreking.

Neemt men bijvoorbeeld *nitrobenzol*, dat een der meest geschikte stoffen is, dan blijkt de electriche dubbelbreking — ook in geval van de sterkste velden — slechts  $1/100$  te zijn van de dubbelbreking van kwarts.

De experimenteele wet van het KERR-verschijnsel is neergelegd in de formule:

$$n_2 - n_1 = \gamma E^2$$

hierin is  $E$  de electr. kracht, en  $\gamma$  de zoogenaamde constante van KERR. Deze blijkt afhankelijk te zijn van de golflengte  $\lambda$ , van den aard der vloeistof en de temperatuur.

Gedane proeven hebben bevestigd, dat  $\gamma$  vermindert met  $1/200$  van zijn waarde, wanneer de temperatuur  $T$  één graad Celsius stijgt. De proeven zijn genomen tusschen  $15^\circ$  en  $20^\circ$  Celsius, zoodat genoemde afhankelijkheid van de temperatuur binnen dezelfde grenzen geldig is.

Voor zwavelkoolstof heeft men bij gebruik van Natriumlicht ( $D$ -lijn  $t = 20^\circ$  Cls.) voor  $\gamma$  gevonden.

$$\gamma = 3.10^{-7}.$$

Hieruit blijkt genoegzaam de volstrekte kleinheid der electr. dubbelbreking.

Verder blijkt uit de proeven van COTTON en MOUTON<sup>(1)</sup>, dat bij toenemende golflengte de dubbelbreking afneemt.

Ze geven namelijk de volgende tabel.

Golflengten	6563	5779	5461	4861	4358
el. dubbelbreking	0,83	1	1,10	1,26	1,45

Alle waarden der el. dubbelbreking zijn uitgedrukt in de waarde der dubbelbreking voor de gele kwiklijn.

Bij de proeven werd de temperatuur en de veldsterkte constant gehouden.

De proeven van KERR op vaste lichamen hebben vrij lang erover gedaan om een plaatsje te veroveren in het geloof der mannen van de wetenschap. Van de geconstateerde dubbelbreking in het electrisch veld konden nog andere oorzaken dan de electrische kracht de schuldigen zijn en moesten derhalve in verhoor genomen worden. Zoo heeft — gelijk bekend is — de minst eenzijdige druk van een vast lichaam reeds dubbelbreking tengevolge. Het werd beter, toen KERR zijn proeven deed op vloeistoffen. De resultaten, hier verkregen werden spoedig door QUINCKE, BRONGERSMA, ABRAHAM en LEMOINE en vele andere bevestigd.

Nu het feit vast stond, was er een tweede kwestie aan de orde met name de theoretische verklaring. POCKELS eerst en VOIGT later hebben een wiskundige beschrijving van het KERR-effekt gegeven. De theorie van POCKELS rust op de hypothese, dat de dielectrische constante van een isoleerende middenstof afhankelijk verandert met de veldsterkte, maar dat deze verandering uiterst gering is. Wat er ook van deze hypothese zij, de theorie zelf kan men niet hooger aanslaan dan een zuiver phenomelogische.

VOIGT neemt aan, dat de electrische dubbelbreking veroorzaakt wordt door den invloed, die het sterke electrische veld uitoefent op de electronen beweging.

De verklaring van VOIGT heeft echter ernstige bezwaren. Vooreerst waren de proeven van AECKERLEIN — omtrent de

(<sup>1</sup>) Journal de Phys. 5<sup>e</sup> S, 1<sup>e</sup> deel 1913 blz. 1911 blz. 5.



verhouding der absolute vertragingen der stralen in de middenstof — in tegenspraak met de uitkomsten der theorie.

Bovendien vooral ontkende of althans verzweeg de theorie van VOIGT, dat het verschijnsel met de temperatuur afhankelijk veranderde. De temperatuur  $T$  kon langs geen enkelen wiskundigen weg in de formule binnengehaald worden. Hier-tegenover stelde LANGEVIN een moleculaire theorie, die het verband liet zien tusschen optica en warmteleer. LANGEVIN voerde de hypothese in, dat in een molecuul een bijzondere richting was, een richting van minimum weerstand. Langs dien weg zweefden de electromen uiterst licht en gemakkelijk heen en weer. Deze assen van minimum-weerstand werden door de elektrische kracht gericht. Voordat er een elektrisch veld aanwezig was, was de assenverdeeling in de ruimte overal even dicht. Nadat echter de elektrische kracht in werking was gesteld, werd de gelijkmatige beweging gestoord. De assen gingen zich richten naar de elektrische kracht  $K$  — en had *niet* de warmtebeweging zich verzet — het einde ware geweest, dat alle molekulen hun assen hadden uitgestoken in de richting der krachtlijnen. Nu echter werd minder bereikt, maar *toch* de richting van voorkeur bleef  $K$ , zoodat het grootste aantal zich in de *onmiddellijke* nabijheid der elektrische kracht ging ophoopen.

Het physisch gedrag der assen gericht door de electr. kracht onder verzet der warmtebeweging, heeft nu tengevolge eene groepeerings, welke analytisch wordt beschreven door de verdeelingsfunctie van BOLTZMANN. Stelt men zich voor, dat alle assen in een plat vlak liggen, dan komen er per  $d\alpha$ -interval een aantal assen ten bedrage van:

$$dN = C e^{-\frac{w}{kT}} d\alpha \quad (1)$$

hier is  $w$  de potentieelle energie der molekulen ten aanzien van de elektrische kracht,  $T$  is de absolute temperatuur,  $k$  = constante van BOLTZMANN =  $1,346 \times 10^{-16}$  erg en  $C$  is een constante. De formule (1) kan — na een korte wiskundige behandeling — verhalen, dat in  $d\alpha$  gebieden, die op grooteren

afstand van de electr. kracht  $K$  liggen, de dichtheid der assen sterk afneemt.

De theorie van LANGEVIN leverde schitterende resultaten. De proeven van AECKERLEIN werden wonderbaar bevestigd, en de temperatuur drong de formules binnen op een wijze, die met de feiten volmaakt accordeerde.

De theorie van LANGEVIN heeft derhalve wiskundig geregistreerd het optisch wedervaren van een lichtstraal, die aan een *constante* electr. kracht bloot staat.

Men kan echter vragen, wat zouden de optische reacties wel zijn, wanneer we eens te doen kregen met een veranderlijk veld dit is met een kracht die in grootte en richting wisselt? Blijft de dubbelbreking bestaan of niet? Zoo ja, hoe zal ze afhangen van het trillingsgetal? Ziedaar een nieuw vraagstuk, ziedaar ons vraagstuk. Aequivalent met dit vraagstuk is het onderzoek naar den relaxatietijd, dit is de tijd, die verloopt tusschen het verdwijnen der elektrische kracht en het verdwijnen der dubbelbreking.

DEBYE heeft reeds lang dit vraagstuk aangekondigd en den weg der oplossing aangegeven in een stuk getiteld: „Zur theorie der anomalen Dispersion im Gebiete der langwelligen elektrischen Strahlung” (Verhandl. der Deutsch. Physikal-Gesellschaft X v Jahrgang N<sup>o</sup>. 16.) blz. 790.

Wij komen hierop terug.



## HOOFDSTUK II.

### De theorie van LANGEVIN.

§ 1. We wenschen in dit hoofdstuk de theorie van LANGEVIN <sup>1)</sup> te behandelen voor het zeer bijzondere geval, dat alle assen van alle molekulen in éézelfde plat vlak liggen. We meenen op deze wijze de methode LANGEVIN het beste te kunnen toonen. We stellen ons dan voor een molekuul als een oneindig dun plat schijfje, wiens dikte van een hoogere orde klein is dan zijn lengte en breedte.

Van dit molekuul, dat we ons als een vlaktewezentje hebben te denken, onderstellen we met LANGEVIN, dat het eene as bezit, waar langs de electronen — in vergelijking met de richting loodrecht op de as — bijzonder licht en gemakkelijk heen en weer trillen. We stellen ons namelijk voor, dat in een molekuul zich een electronenzwerm beweegt, welke in laatste instantie aansprakelijk wordt gesteld voor alle optische en electriche verschijnselen.

Verder staat — volgens de electronentheorie — elk electron onder invloed van een zoogenaamde quasi-elastische kracht, die de electronen langs hun banen voert, en voorts — om het absorptieverschijnsel te kunnen verantwoorden — aan een dempenden weerstand. We zullen echter dezen weerstandsterm in onze bewegingsvergelijkingen schrappen, hetgeen physisch zich hierin openbaart, dat we ons beperken tot spectraalgebieden zonder absorptie, althans waarneembare.

De hypothese van deze as van minimum weerstand beteekent de verwerping der isotropie van het molekuul. Het verkrijgt twee richtingen, namelijk de richting der as en de

---

<sup>1)</sup> Vergel. Le Radium-Journal de physique. t. VII Sept. 1910.

richting loodrecht op de as, evenals een één-assig kristal, zoodat wisselmatig verwacht wordt, dat het optisch en electricch wedervaren langs genoemde richtingen verschillen gaat.

Men voelt derhalve de electricche dubbelbreking reeds aankomen.

We vragen ten eerste, hoe genoemde hypothese van een as van minimum weerstand zich analytisch afteekent in de bewegingsvergelijkingen van een elektron? Het antwoord is eenvoudig. Nemen we de as van het molekuul als  $X$ -as, dan zijn de vgl<sup>en</sup>:

$$(1) \quad \begin{aligned} m x'' + f x^{(4)} &= 0 \\ m ij'' + g ij^{(4)} &= 0 \end{aligned}$$

We krijgen m. a. w. twee *verschillende* parameters  $f$  en  $g$ , waarvan  $f$  de kleinste is, omdat — krachtens onderstelling — de  $x$ -as de richting van minimum weerstand is geworden. Verder zijn natuurlijk  $f$  en  $g$  positief.

Het stel vergelijkingen (1) heeft tot oplossingen:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= C_1 e^{i \omega_2 t} + C_2 e^{-i \omega_1 t} \\ ij &= C_3 e^{i \omega_2 t} + C_4 e^{i \omega_2 t} \quad \omega_1 = \sqrt{f/m} \\ \omega_2 &= \sqrt{g/m} \end{aligned}$$

De bepaling der constanten  $C$  voor een of ander elektron geschiedt uit beginstand en beginsnelheid van *dat* elektron.

Men kan derhalve voor een willekeurig elektron — onderworpen aan de wet, in de vergelijkingen (1) analytisch gedefinieerd — de plaats vooruit berekenen voor een willekeurig tijdstip.

De gemiddelde plaats is de oorsprong. Komt nu behalve de quasi-elastische kracht nog een constant werkende electricche kracht in het spel, dan wordt de baan der elektronen *niet gestoord*, dit is *niet vervormd*, maar verlegd. Immers, indien de electricche kracht  $K$  een hoek  $\alpha$  met de  $X$ -as maakt, gaan de vergelijkingen over in

$$\begin{aligned} m x'' + f x &= e K \cos \alpha \\ m ij'' + g ij &= e K \sin \alpha \end{aligned}$$

hier is  $e$  de lading van een elektron.



De nieuwe nulstand is geworden:

$$x_0 = \frac{e K \cos \alpha}{f}$$

$$ij_0 = \frac{e K \sin \alpha}{g}$$

Verplaatsen we den oorsprong naar dit punt, dan zien de vergelijkingen er uit als vroeger, namelijk:

$$m x'' + f x = 0$$

$$m ij'' + g ij = 0$$

Dus de baan bleef ongestoord.

Tengevolge der verlegging van den evenwichtsstand krijgt het elektron een moment, met de componenten  $e x_0$ ,  $e ij_0$  en komt in het bezit van potentieele energie. Deze heeft de waarde:

$$W = -\frac{1}{2} (M) (K)$$

( $M$  = moment en  $K$  = elektrische kracht)

Ondersteld is verder, dat de vermenigvuldiging scalaar wordt uitgevoerd.

Zoo komt men aan de uitkomst:

$$W = -\frac{1}{2} K^2 \left[ \frac{e^2}{f} \cos^2 \alpha + \frac{e^2}{g} \sin^2 \alpha \right]$$

Maakt men de som op voor alle elektronen, die binnen het molekuul trillen, dan krijgt men uitdrukkingen  $\sum \frac{e^2}{f}$ ,  $\sum \frac{e^2}{g}$ , hetgeen derhalve geen essentieel verschil in de berekening beteekent.

§ 2. In de proefnemingen van KERR plantte zich door een vloeistof  $S$  — welke zich bevond binnen het constante veld  $K$  — een lineair gepolariseerde lichtbundel voort. Derhalve zullen de elektronen van  $S$ , behalve aan  $K$ , nog onder invloed komen van eene periodieke elektrische kracht, welke afkomstig is van het lichtveld. KERR vond verschillende waarden voor den



brekingsindex, naar gelang het licht trilde in de richting der krachtlijnen, of loodrecht er op. Derhalve een straal, wiens trillingsrichting een zekeren hoek maakt met  $K$ , zal in twee componenten uiteenvallen, welke zich ongelijk snel door  $S$  zullen voortplanten, hetgeen in andere woorden hetzelfde is als dubbelbreking.

Zoo lang de electronen nog staan onder invloed van  $K$  alleen, blijven hun bewegingsvergelijkingen, — na behoorlijke verlegging van den oorsprong — dezelfde *n.l.*

$$\begin{aligned} m x'' + f x &= 0 \\ m ij'' + g ij &= 0. \end{aligned}$$

We onderwerpen de electronen nu nog aan een periodieke kracht  $\mathcal{E} \varepsilon^{i \omega t}$  [ $\varepsilon$  = basis van het natuurlijke logaritmen stelsel]. We onderstellen, dat deze nieuwe kracht trilt evenwijdig aan  $K$ , dus onder een hoek  $\alpha$  met de  $x$ -as. Zoodoende worden de electronenvergelijkingen:

$$\begin{aligned} m x'' + f x &= e \mathcal{E} \cos \alpha. \quad \varepsilon^{i \omega t} \\ m ij'' + g ij &= e \mathcal{E} \sin \alpha. \quad \varepsilon^{i \omega t} \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen beschrijven derhalve wiskundig het gedrag der electronen in een lichtstraal.

Voor een gegeven oogenblik  $t$ , wordt de gemiddelde stand van een electron gegeven door:

$$\begin{aligned} X &= \frac{e \mathcal{E} \cos \alpha}{f - m \omega^2} \varepsilon^{i \omega t} \\ IJ &= \frac{e \mathcal{E} \sin \alpha}{g - m \omega^2} \varepsilon^{i \omega t} \end{aligned}$$

De verplaatsing in de richting der lichtkracht is nu

$$X \cos \alpha + IJ \sin \alpha = \xi$$

hieruit:

$$(3) \quad e \xi = e^2 \mathcal{E} \varepsilon^{i \omega t} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{a_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{a_2} \right)$$

waarin

$$\begin{aligned} a_1 &= f - m \omega^2 \\ a_2 &= g - m \omega^2 \end{aligned}$$

Het electron verkrijgt natuurlijk ook ten aanzien der lichtkracht een zekere potentiële energie, die evenredig is met  $\mathcal{E}^2$ ; maar deze komt naast het bedrag, dat de kolossaal groote kracht  $K$  levert, — als een grootheid van *hoogere* orde *klein* — niet in aanmerking.

In de onderstelling, dat in een molekuul maar een enkel electron trilt, beteekent vgl. (3) kortweg het moment van een willekeurig molekuul, wiens as een hoek  $\alpha$  maakt met  $\mathcal{E}$  of laten we zeggen met  $K$ .

We moeten echter heen naar het moment van alle molekulen, in een c.M<sup>3</sup>. vervat, de zoogenaamde polarisatie, hetgeen dus blijkbaar gaat neerkomen op een sommatie van *alle* momentbijdragen van *alle* molekulen.

We vragen nu vooreerst, hoeveel molekulen een bijdrage doen van de groote der uitdrukking (3).

Het is duidelijk, dat *alle* molekulen, wier assen een hoek  $\alpha$  maken met  $K$ , hetzelfde bedrag (3) aanbrengen. Volgens de wet van BOLTZMANN is nu het aantal van deze assen evenredig met:

$$\varepsilon^{-\frac{w}{kT}}$$

( $w$  = potent. energie,  $T$  = absol. temperatuur en  $k$  = constante van BOLTZMANN =  $1,346 \cdot 10^{-16}$ )

Eigenlijk hadden we moeten zeggen, dat het aantal assen, liggende in een aangewezen  $d\alpha$  gebied, bedraagt:

$$(4) \quad dN = C \varepsilon^{-\frac{w}{kT}} d\alpha$$

waarin  $C$  wordt bepaald uit:

$$N = C \int_0^{2\pi} \varepsilon^{-\frac{w}{kT}} d\alpha$$

Een aangewezen  $d\alpha$ -gebied levert dus een moment bijdrage van de grootte:

$$(5) \quad C e^2 \mathcal{E} \varepsilon^{i\omega t} \left\{ \frac{1}{a_2} + \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \cos^2 \alpha \right\} \varepsilon^{-\frac{w}{kT}} d\alpha$$



Om echter de polarisatie per c.M<sup>3</sup>. te berekenen, moeten we niet slechts in rekening brengen de molekulen, wier assen een *aangewezen*  $d\alpha$ -gebied vullen, maar we moeten beschouwen alle mogelijke molekulen, wier assen derhalve in willekeurige  $d\alpha$ -gebieden zullen liggen — voor elke waarde van  $\alpha$  tusschen 0 en  $2\pi$  —.

We kunnen ons namelijk voorstellen, dat in den oorsprong  $N$  pijlen zijn geteekend, die verschillende hoeken maken met  $X$ -as, als symbolen der assen.

We krijgen dus de polarisatie door de uitdrukking (5) te integreeren tusschen 0 en  $2\pi$ , zoodat:

$$\text{Polarisatie} = C e^2 \mathcal{E} \varepsilon^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{a_2} + \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \cos^2 d\alpha \right] \varepsilon^{-\frac{w}{kT}} d\alpha$$

We hebben nu als we de polarisatie voorstellen door  $P'$ ;

$$\frac{P'}{N} = \frac{e^2 \mathcal{E} \varepsilon^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{a_2} + \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \cos^2 \alpha \right] \varepsilon^{-\frac{w}{kT}} d\alpha}{\int_0^{2\pi} \varepsilon^{-\frac{w}{kT}} d\alpha}$$

Voor  $\varepsilon^{-\frac{w}{kT}}$  kunnen we schrijven:

$$1 + \frac{e^2 K^2}{2 kT} \left\{ \frac{1}{g} + \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \cos^2 \alpha \right\}$$

omdat de volgende termen — wegens hun volstrekte onbeduidendheid — geen rol spelen.

De noemer levert na integratie:

$$2\pi \left[ 1 + \frac{e^2 K^2}{4 kT} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) \right]$$

Berekent men nog den teller en vermenigvuldigt dezen met:

$$\frac{1}{2\pi} \left[ 1 - \frac{e^2 K^2}{4 kT} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) \right]$$



waartoe we de deeling terugbrengen, — omdat  $\frac{e^2 K^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right)$  zoo klein is ten overstaan van 1 — dan komt er:

$$\frac{P'}{N} = e^2 \mathcal{E}_\varepsilon^{i\omega t} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \frac{K^2 e^2}{16 k T} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \right]$$

hoogere machten dan  $K^2$  zijn niet toegelaten.

Voert men de berekening uit voor loodrecht licht, dan vindt men dezelfde waarde op het teeken na van de term, waarin  $K^2$  voorkomt.

Men heeft derhalve

$$\frac{P'}{N e^2 \mathcal{E}_\varepsilon^{i\omega t}} = A + B K^2 \quad (6)$$

waarin 
$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right)$$

en 
$$B = \pm \frac{e^2}{16 k T} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right);$$

het bovenste teeken geldt voor evenwijdig, het onderste voor loodrecht licht.

Men ziet onmiddellijk, dat bij verdwijnen der electr. kracht  $K$ , de waarde van  $P'$  voor evenwijdig en loodrecht licht niet meer verschilt, zoodat men ook geen 2 brekingsindices voor genoemde richtingen verwachten kan. In dat geval is dus van dubbelbreking geen sprake. Ook ziet men, dat de hypothese LANCEVIN uiterst gevoelig is; laat men ze vallen, dan wordt  $f = g$  en dubbelbreking wordt onmogelijk.

### § 3. Berekening der brekingsindices.

In het speciale geval, door ons beschouwd, mogen we gerust de periodieke kracht  $E' = \mathcal{E}_\varepsilon^{i\omega t}$ , onder wier invloed de electronen feitelijk staan, gelijk stellen aan het uitwendige lichtveld, zoodat de correctie van LORENTZ achterwege kan blijven.

De diëlectrische verschuiving  $D'$  en de electriche kracht  $E'$  hangt nu verder aldus samen:

$$(9) \quad D' = n^2 E' = E' + 4 \pi P'$$

hier is  $n =$  brekingsindex. Er is derhalve gebruik gemaakt van de wet van MAXWELL, die beweert, dat de brekingsindex de wortel is uit de diëlectr. constante.

Nu is blijkens formule (6)

$$(10) \quad \frac{P'}{E'} = N e^2 (A + B K^2) \text{ stel } = M$$

Uit (9) volgt:

$$(n^2 - 1) E' = 4 \pi P'$$

zoodat de eliminatie van  $E'$  tusschen (9) en (10) geeft:

$$n^2 - 1 = 4 \pi M$$

Noemt men den brekingsindex bij evenwijdig licht  $n_1$ , bij loodrecht licht  $n_2$ , en moge  $n_0$  de brekingsindex zijn, voor het geval dat er geen electr. veld aanwezig is, dan heeft men achtereenvolgens:

$$(12) \quad n_0^2 - 1 = 4 \pi N e^2 A$$

$$(13) \quad n_1^2 - 1 = 4 \pi N e^2 (A + B K^2)$$

$$(14) \quad n_2^2 - 1 = 4 \pi N e^2 (A - B K^2)$$

Uit (12) en (13) volgt:

$$n_1^2 - n_2^2 = (n_1 - n_2) (n_1 + n_2) = 8 \pi N e^2 \cdot B \cdot K^2$$

of daar voor  $n_1 + n_2$  — gelet op het uiterst kleine onderlinge verschil van  $n_1$  en  $n_2$  en  $n_0$  — gerust  $2 n_0$  kan geschreven worden, komt er:

$$n_1 - n_2 = \frac{4 \pi N e^2 \cdot B \cdot K^2}{n_0}$$

welke formule niets anders is, dan de empirische wet van KERR.



## HOOFDSTUK III.

### Het wisselend veld.

§ 1. Tot nu toe hielden we ons bezig met het onderzoek naar het optisch reageeren eener middenstof  $S$  wanneer deze geplaatst is in het veld eener constante elektrische kracht.

En het resultaat is geweest, dat — als consequentie eener hoogst eenvoudige hypothese — voor evenwijdig en loodrecht licht verschillende brekingsindices werden gevonden, waaruit tot de dubbelbreking van  $S$  of tot het KERR-effekt kon besloten worden.

Maar de oplossing zal een geheel ander aanzien moeten verkrijgen, wanneer men de voorwaarde  $K = \text{constant}$  loslaat. Vooreerst zullen de dienstprestaties der functie van BOLTZMANN om te komen tot de polarisatie en daarna tot den brekingsindex ophouden. Is immers de electr. kracht  $K$  niet meer constant maar stel wisselend in grootte en richting, dan zal  $K$  op elk *ander* oogenblik een *andere* kracht zijn, die noodwendig een *andere* orientatie der assen zal bewerken. Met andere woorden de asverdeeling wordt een afhankelijk verandering van den tijd, zoodat de functie van BOLTZMANN — als zijnde constant *door alle tijden* heen — niet meer helpen kan.

Ons vraagstuk zal zijn deze functie op te sporen.

We zullen echter de oplossing van dit nieuwe probleem beproeven in aansluiting met de vereenvoudigingen uit het vorige hoofdstuk.

We maken weer de specieële onderstelling van vroeger; alle molekulen hebben als vlaktewezentjes — gelijk het behoort — hun assen in eenzelfde plat vlak liggen, zoodat dit aantal per  $d\alpha$ -interval gegeven wordt door  $F d\alpha$ . De functie  $F$  zal niet slechts van  $\alpha$  maar ook van  $t$  afhangen.



De opsporing der assenfunctie voor het wisselend veld zullen we voorts doen volgens methoden, die DEBYE ontwikkeld heeft in een stuk:

„Zur theorie der anomalen Dispersion im Gebiete der langwelligigen electrischen strahlung (Verhandlungen der Deutsch. Physik-Gesellschaft XV Jahrgang Nr. 16). In dit stuk lezen we bladz. 790, dat de theorie der electr. dubbelbreking in een wisselend veld ontwikkeld kan worden op dezelfde wijze als de theorie der dispersie, die daar gegeven wordt. We zullen daarom de functie gaan opsporen langs den daar aangewezen weg.

### § 2. *Opsporing der differentiaalvergelijking.*

Om de functie te ontdekken, die het gedrag der assen in een wisselend veld analytisch beschrijft, is *niet* de weg bestudeering van het complexe verschijnsel met zijn gewirwar van duizenden oorzaken en omstandigheden, die een getrouwe en rustige analyse onmogelijk maken. Het complexe verschijnsel is te lastig, te weerspannig voor wiskundige behandeling, de omstandigheden zijn te veel en te samengesteld, de splitsing in enkelvoudige te moeielijk. Maar we gaan terug — gelijk trouwens altijd — tot het *elementaire* verschijnsel, en we gaan het betrekkelijk kleine aantal omstandigheden bespieden, die dit initiaal-feit begeleiden.

Daardoor wordt het werkelijk gebeuren van het elementaire feit in een differentiaalvergelijking geregistreerd, terwijl dan verder de kennis van het complexe natuurverschijnsel — als een superpositie van enkelvoudige gedacht — langs *integratie* wordt gewonnen. Zoodat — gegeven de differentiaal vergel. — de wiskunde verder de rol kan overnemen.

Ziehier onze redeneering:

Men stelle zich vooreerst een molekuul voor, wiens as een hoek  $\alpha$  maakt met de electr. kracht.

Op een gegeven tijdstip zij de potentieele energie van het molekuul  $= w$ ; op dat molekuul werkt derhalve een draaimoment  $= -\frac{dw}{d\alpha}$ , dat op slot van rekening evenwicht zal

maken met het *wrijvingsmoment*. We stellen ons n.l. in de vloeistof  $S$  — die aan het wisselend veld wordt blootgesteld — een molekuul voor als een bol, die onder werking van de draaikracht  $-\frac{dw}{d\alpha}$  gaat bewegen, echter niet natuurlijk zonder verzet der omringende middenstof, *dit is* niet zonder wrijving, die op haar beurt een moment in tegengestelden zin schept om evenwicht te maken. Dit laatste heeft de waarde  $\rho \frac{d\alpha}{dt}$  terwijl  $\rho = 8\pi\eta a^3$ , waarin  $\eta =$  wrijvingscoëff. der vloeistof en  $a =$  straal van het molekuul.

Zoodoende krijgt men de evenwichtsvoorwaarde:

$$\frac{dw}{d\alpha} = -\rho \frac{d\alpha}{dt}$$

Wij kunnen deze vgl. brengen in den vorm:

$$\Delta\alpha = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dw}{d\alpha} \Delta t$$

Deze gedaante der evenwichtsconditie zal het physische herkennen voor velen makkelijker maken.

De beteekenis n.l. is:

De as van een molekuul — die een hoek  $\alpha$  maakte met electr. kracht — draait in een tijd  $\Delta t$  over een hoek  $\Delta\alpha$ , van de grootte  $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dw}{d\alpha} \cdot \Delta t$ .

Deze waarde kan ons niet verwonderen. Het moet immers apriori duidelijk zijn, dat de draaiingskracht evenredig zal zijn met den tijd van draaien, vervolgens met de draaikracht  $-\frac{dw}{d\alpha}$ , en verder natuurlijk omgekeerd evenredig met de wrijving.

Bedenkt men verder, dat het aantal assen binnen een  $d\alpha$ -gebied  $F d\alpha$  bedraagt, dan zijn in een tijd  $\Delta t$  over een



vasten streep — die een hoek  $\alpha$  met el-kracht maakt — heengeleden een aantal assen

$$F \Delta \alpha = - \frac{F}{\rho} \cdot \frac{d w}{d \alpha} \Delta t. \quad (1)$$

Maar behalve de draaikracht — die uit den potentiaal werd afgeleid — is er nog een andere kracht werkzaam, die assen over den vasten streep brengt.

Immers tengevolge der warmtebeweging hebben nog moleculaire botsingen plaats, die veroorzaken draaiingen der assen, Het aantal assen nu, dat den vasten streep passeert onder den invloed der warmte-impulsen is berekend volgens een methode van EINSTEIN en bedraagt

$$(2) \quad - \frac{\varepsilon_m^2}{2} \cdot \frac{\delta F}{\delta \alpha}$$

We zullen dit resultaat hier eenvoudig overnemen.  $\varepsilon_m^2$  be- teekent het gemiddelde kwadraat der „Schwankung“.

Door (1) en (2) bij elkaar op te tellen verkrijgt men het geheele aantal assen, die in een tijd  $\Delta t$  den streep  $\alpha$  zijn gepasseerd. Dezen zijn dus allen het interval  $\Delta \alpha$  binnengedrongen. Men bedenke dat  $\Delta \alpha$  hier het geheele hoekinterval is, waarover eene as onder invloed van moment en warmte beide, in een tijd  $\Delta t$  draait.

Men heeft dan voor dit aantal de uitdrukking

$$S = \left[ - \frac{F}{\rho} \cdot \frac{\delta w}{\delta \alpha} \cdot \Delta t - \frac{\varepsilon_m^2}{2} \cdot \frac{\delta F}{\delta \alpha} \right]$$

Maar onderwijl er aan den streep  $\alpha$  een aantal assen  $S$  passeerde en het gebied  $\Delta \alpha$  binnendrong, is er aan den naburigen streep  $\alpha + \Delta \alpha$  in dien zelfden tijd  $\Delta t$  een ander aantal assen  $S'$  — gehoorzamen aan dezelfde beweging als het aantal  $S$  — gepasseerd, en heeft het interval verlaten.

Het verschil van  $S'$  en  $S$  zal derhalve ten slotte de verandering meten, die in een tijd  $\Delta t$  binnen het gebied  $\Delta \alpha$  plaats had. Om  $S'$  te vinden, maken we gebruik van de

reeksontwikkeling van TAYLOR, die de waarde eener functie voor een oneindig kleine aangroeiing van het argument leert vinden uit de functie.

Men heeft namelijk:

$$S' = S + \frac{\delta}{\delta \alpha} \cdot S \cdot d\alpha + \dots$$

Blijven we bij eerste benadering staan, dan zal het finale bedrag der toename aan assen binnen  $\Delta \alpha$  bedragen.

$$(3) \quad \Delta F d\alpha = \frac{\delta}{\delta \alpha} \left\{ + \frac{F}{\rho} \cdot \frac{\delta w}{\delta \alpha}, \Delta t + \frac{\varepsilon m^2}{2} \cdot \frac{\delta F}{\delta \alpha} \right\} d\alpha$$

hieruit resulteert de differentiaalvergelijking:

$$(4) \quad \frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta \alpha} \left\{ + \frac{F}{\rho} \cdot \frac{\delta w}{\delta \alpha} + \frac{\varepsilon m^2}{2 \Delta t} \cdot \frac{\delta F}{\delta \alpha} \right\}$$

Had het bedrag in het 2<sup>e</sup> lid van (4) de waarde nul, dan was de physische zin eenvoudig deze, dat in een aangewezen  $d\alpha$ -gebied in verloop van tijd geen verandering van assendichtheid plaats had. M. a. w. de verdeelingsfunctie zou onafhankelijk van  $t$  worden, en we waren tot het statische geval uit het vorige hoofdstuk teruggevoerd.

Maar in het statische geval is ons de verdeelingswet reeds lang bekend, n.l. de wet, die in de functie van BOLZMANN analytisch wordt beschreven. Dus moet deze functie voldoen aan de v.g.l.

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} \left[ + \frac{F}{\rho} \cdot \frac{\delta w}{\delta \alpha} + \frac{\varepsilon m^2}{2 \Delta t} \cdot \frac{\delta F}{\delta \alpha} \right] = 0$$

of wel aan

$$+ \frac{F}{\rho} \cdot \frac{\delta w}{\delta \alpha} + \frac{\varepsilon m^2}{2 \Delta t} \cdot \frac{\delta F}{\delta \alpha} = 0$$

Substitueert men hierin voor  $F$  de uitdrukking  $F = \text{const.} \times \varepsilon^{-\frac{w}{kT}}$  dan wordt aan de v.g.l. identiek voldaan, indien



$\frac{\varepsilon_m^2}{2 \Delta t} = \frac{k T}{\rho}$ , gelijk een kleine becijfering makkelijk contro-  
leeren kan.

Dus is 
$$\frac{\varepsilon_m^2}{2 \Delta t} = \frac{k T}{\rho}$$

Deze waarde — absoluut juist voor het statische geval — zal in het niet statische geval *althans* een zeer goede benadering zijn. De diff. v. wordt dus:

$$(5) \quad \rho \frac{\delta F}{\delta T} = \frac{\delta}{\delta \alpha} \left[ + F \frac{\delta w}{\delta \alpha} + k T \frac{\delta F}{\delta \alpha} \right]$$

$$w = -\frac{1}{2} e^2 K^2 \left[ \frac{1}{g} + \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \cos^2 \alpha \right]$$

hieruit 
$$-\frac{\delta w}{\delta \alpha} = \frac{e^2 K^2}{2} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \sin 2 \alpha = K^2 A(\alpha)$$

De vergel. (5) wordt:

$$(6) \quad \rho \frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta \alpha} \left[ -K^2 A(\alpha) \cdot F + k T \frac{\delta F}{\delta \alpha} \right]$$

### § 3. *Bizonder geval.*

We beschouwen nu het bijzonder geval, dat de kracht  $K$  — na eenigen tijd gewerkt te hebben — plotseling verdwijnt. Het oogenblik van het verdwijnen der electriche kracht moge zijn  $t = 0$ . De verdeling der assen vanaf  $t = 0$  tot  $t = \infty$  wordt nu beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$(7) \quad \rho \frac{\delta F}{\delta t} = k T \frac{\delta^2 F}{\delta \alpha^2}$$

Stel 
$$F = \sum a_n(t) \cos n \alpha + \sum b_n(t) \sin n \alpha$$

dan moeten  $a_n$  en  $b_n$  voldoen aan de vergelijkingen.

$$\rho \frac{d a_n}{d t} = -n^2 k T a_n$$

$$\rho \frac{d b_n}{d t} = -n^2 k T b_n$$

Hieruit 
$$a_n = C_n \varepsilon^{-\frac{n^2 k T}{\rho} t}$$

$$b_n = D_n \varepsilon^{-\frac{n^2 k T}{\rho} t}$$

Derhalve 
$$F = \sum (C_n \cos n \alpha + D_n \sin n \alpha) \varepsilon^{-\frac{n^2 k T}{\rho} t}$$
  
 ( $\varepsilon =$  basis van het natuurl. logar. stelsel)

Maar op  $t=0$  geldt nog de assengroepering, die door de functie van BOLTZMANN wordt afgebeeld: Derhalve zal voor  $t=0$   $F$  in const.  $\varepsilon^{-\frac{w}{kT}}$  overgaan. Deze voorwaarde levert ons de noodzakelijke betrekkingen ter bepaling der constanten.

Vooreerst is

$$\begin{aligned} \text{const. } \varepsilon^{-\frac{w}{kT}} &= \text{const.} \left\{ 1 + \frac{e^2 K^2}{2 k T} \left[ \frac{1}{g} + \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \cos^2 \alpha \right] \right\} \\ = (A) &= \text{const.} \left\{ 1 + \frac{K^2 e^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) + \frac{K^2 e^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \cos 2 \alpha \right\} \end{aligned}$$

Voor  $t=0$  wordt  $F = C_0 + C_1 \cos \alpha + D_1 \sin \alpha + \dots$  (B)  
 (A) en (B) zullen identiek zijn als

$$C_0 = \text{const.} \left\{ 1 + \frac{e^2 K^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) \right\}$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \text{const.} \left\{ \frac{e^2 K^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \right\}$$

$$C_3 = C_4 = \dots 0$$

en  $D_n = 0$  voor elke waarde van  $n$ .

De finale vorm van  $F$  is dus deze:

$$F = \text{const.} \left\{ 1 + \frac{K^2 e^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) \right\} + \text{const.}$$

$$(7) \quad \left\{ \frac{K^2 e^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \right\} \varepsilon^{-\frac{4 k T}{\rho} t} \cos 2 \alpha$$



Dit is dan de functie, welke de verdeling der assen beschrijft van  $t=0$  tot  $t=\infty$ , nadat de kracht  $K$  opgehouden

heeft te werken; de factor  $\varepsilon^{-\frac{\rho}{4kT}}$  wijst er op, dat na het oogenblik  $t=0$  de dichtheidskromme steile hellingen krijgt.

Op  $t=0$  is de functie

$$F = \text{const.} \left\{ 1 + \frac{e^2 K^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) + \frac{e^2 K^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \cos 2\alpha \right\}$$

Op  $t = \frac{\rho}{4kT}$  wordt — blijkens Substitutie —

$$F = \text{const.} \left\{ 1 + \frac{e^2 K^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) + \frac{e^2 K^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) e^{-1} \cos 2\alpha \right\}$$

Het vermogen van het electr. veld over de assendichtheid wordt gemeten voornamelijk door den term

$$\frac{e^2 K^2}{4 k T} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \cos 2\alpha.$$

Na een tijd  $t = \frac{\rho}{4kT}$  is dus de elektrische dubbelbreking gedaald tot op een derde ( $\varepsilon^{-1}$  is ongeveer  $\frac{1}{3}$ ) van zijn oorspronkelijke waarde.

#### § 4. Berekening der elektrische dubbelbreking.

Bij de bepaling van den relaxatietijd hebben we uit het gedrag der functie na een tijd  $t = \frac{\rho}{4kT}$  besloten tot het gelijk-  
luidend gedrag der electr. dubbelbreking. We willen nu de wettigheid van deze gevolgtrekking laten zien door de berekening der electr. dubbelbreking in een wisselend veld.

Net als vroeger is weer:

$$\frac{P'}{N_e^2 \mathcal{E} \varepsilon^{i\omega t}} = \frac{\int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{a_2} + \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \cos^2 \alpha \right] F d\alpha}{\int_0^{2\pi} F d\alpha}$$

waarin  $F =$  de functie, die gegeven wordt door formule (7):

De teller levert na integratie en deeling door  $2\pi$

$$T = \frac{A}{a_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) A + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) B \cdot \varepsilon^{-\frac{4kT}{\rho} t}$$

$$\text{waarin } A = \text{const.} \left\{ 1 + \frac{e^2 K^2}{4kT} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) \right\}$$

$$B = \text{const.} \cdot \frac{e^2 K^2}{4kT} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right)$$

De noemer levert na integratie en deeling door  $2\pi$  de waarde  $A$ .

$$\text{Derhalve } \frac{P'}{N_e^2 \mathcal{G} \varepsilon^{i\omega t}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \frac{B}{A} \cdot \varepsilon^{-\frac{4kT}{\rho} t}$$

$$\text{voor } \frac{B}{A} \text{ kan men schrijven } \frac{e^2 K^2}{4kT} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \left[ 1 - \frac{e^2 K^2}{4kT} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right) \right]$$

Rekent men dit uit en weert men hoogere machten dan  $K^2$  dan komt er:

$$\frac{P'}{N_e^2 \cdot \mathcal{G} \cdot \varepsilon^{i\omega t}} = A_1 + B_1 K^2$$

voor loodrecht licht vindt men:  $A_1 - B_1 K^2$

$$\text{hierin is } A_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} \right)$$

$$\text{en } B_1 = \frac{e^2}{16kT} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1} \right) \varepsilon^{-\frac{4kT}{\rho} t}$$

Net als vroeger vinden we weer:

$$n^2 - 1 = 4\pi M'$$

$$\text{waarin } M' = N_e^2 [A_1 + B_1 K^2]$$



en men vindt volgens de reeds aangegeven methode voor de dubbelbreking:

$$n_1 - n_2 = \frac{4\pi N_e^2 B_1 K^2}{n_0}$$

Daar de betrekking van LORENTZ verwaarloosd werd, is de elektrische kracht van het uitwendige veld gelijk aan de kracht, die feitelijk de elektrische *beïnvloedt*. In de formule treedt nu natuurlijk op de tijdfunctie.

## HOOFDSTUK IV.

### De Ruimte.

#### § 1. *Afleiding der differentiaalvergelijking in de ruimte.* <sup>1)</sup>

We willen hiermede het vlakke geval vaarwel zeggen en zullen dan ons molekuul van fictief irreëel vlaktewezentje gaan verheffen tot ruimte-werkelijkheid.

Dus *niet* alle assen liggen in een plat vlak, evenmin als alle molekulen; maar de assen wijzen van uit den oorsprong naar alle richtingen der ruimte heen. Ons doel is de functie te vinden, welke de assengroeping in de ruimte analytisch beschrijft, die onder inwerking der electr. kracht en der warmtebeweging tot stand komt.

We stellen ons voor, dat alle assen — ter lengte der eenheid — onder de gedaante van pijlen verschijnen en allen beginnen in eenzelfde punt  $O$ . Hun spitsen spelen derhalve op een boloppervlak met straal = 1. We beschouwen nu op dit boloppervlak een element  $d\sigma$ , en noemen het aantal spitsen in  $d\sigma$

$$f d\sigma$$

waarin  $f$  de gezochte verdeelingsfunctie voorstelt.

We vragen naar de toe- of afname van pijlspitsen, welke na verloop van een tijd  $\delta t$  in het element  $d\sigma$  plaats heeft. De werkzame oorzaken zijn — gelijk reeds werd meegedeeld — de electr. kracht, wier richting moge samenvallen met  $ON$  ( $N$  = noordpool op bol), en de warmtebeweging.

De verandering van spitsen binnen  $d\sigma$ , welke we  $\delta f \cdot d\sigma$  zullen noemen, bestaat uit twee deelen.

---

<sup>1)</sup> Op deze afleiding werd mij gewezen door Prof. DEBYE.



(I) de „Schankungen“.

Zijn er geen krachten werkzaam, dan zullen de pijlspitsen met constante dichtheid over het boloppervlak verdeeld blijven, ondanks de gedurige verandering in de richting der pijlen.

Van deze spelingen kennen we nu de volgende eigenschap.

Beschouw een aantal spitsen, dat op het oogenblik  $t$  een element  $d\sigma$  vult. Zoek op het oogenblik  $t + \delta t$  dezelfde spitsen weer op, dan zijn ze nu in de omgeving van  $d\sigma$  verstrooid. Karakteristiek voor deze verstrooiing is, dat over elken ring — met het oorspronkelijk element  $d\sigma$  als middelpunt — de spitsen met constante dichtheid verdeeld zullen zijn.

Bespieden we nu een bepaald  $d\sigma$  element op een gegeven oogenblik  $t$ , dan verdwijnen uit  $d\sigma$  in een tijd  $\delta t$  alle spitsen, die er op oogenblik  $t$  in lagen. Dit geeft voor  $d\sigma$  een vermeerdering van

$$(1) \quad \underline{\underline{-f d\sigma \text{ spitsen.}}}$$

Uit de omgeving echter dringen *nieuwe* spitsen het element  $d\sigma$  binnen. Beschouwen we nu een aangewezen element  $d\sigma_1$  — dat oorspronkelijk over  $f_1 d\sigma_1$  spitsen beschikte — dan zal een gedeelte hiervan op het oogenblik  $t + \delta t$  in  $d\sigma$  zijn binnengedrongen. Dit aantal wordt uitgedrukt door

$$\underline{\underline{w f_1 d\sigma_1 d\sigma}}$$

De eigenschap voor de verspreiding der assen — die we zooeven bedoelden — komt nu analytisch tot openbaring hierdoor, dat  $w$  een functie is van de lengte van den boogafstand  $d\sigma_1$  tot  $d\sigma$  en onafhankelijk van de richting, die de verbindingslijn  $d\sigma_1 - d\sigma$  heeft.

Noemen we dezen boogafstand  $\vartheta'$  dan is dus

$$w f_1 d\sigma_1 d\sigma = w(\vartheta') f_1 d\sigma_1 d\sigma$$

en we krijgen het *geheele aantal* pijlspitsen, dat op het oogenblik  $t + \delta t$  van buiten in  $d\sigma$  binnendringt, door deze uitdrukking over alle mogelijke  $d\sigma_1$  te sommeeren.

De gezochte vermeerdering van het aantal spitsen in  $d\sigma$  — tengevolge der warmtebeweging — is dus

$$(2) \quad d\sigma \int w(\vartheta') f_1 d\sigma_1$$

$f_1$  zal in ons geval alleen een functie zijn van den boogafstand tot den Noordpool  $N$  op den bol; noemen we dezen afstand  $\vartheta_1$ , dan kunnen we dus  $f_1$  als functie van  $\vartheta_1$  of ook evengoed als functie van  $\cos \vartheta_1$  opvatten. Verder leggen we ringen om het element  $d\sigma$  met veranderlijken boogafstand  $\vartheta'$  en noemen den hoek, dien een verbindingslijn van  $d\sigma$  en een dergelijken ring met de verbindingslijn ( $N - d\sigma$ ) maakt  $\phi'$ .

Nu kan voor  $d\sigma_1$  gesubstitueerd worden

$$\sin \vartheta' d\vartheta' d\phi'$$

We hebben dus:

$$\int w(\vartheta') f_1 d\sigma_1 = \int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} \int_{\vartheta'=0}^{\vartheta'=\pi} w(\vartheta') f(\cos \vartheta_1) \sin \vartheta' d\vartheta' d\phi'$$

Nu heeft  $w(\vartheta')$  alleen dan behoorlijke waarden indien  $\vartheta'$  klein genoeg is. We trachten dus  $f(\cos \vartheta_1)$  te ontwikkelen naar machten van  $\vartheta'$ , d. w. z. in de omgeving van  $d\sigma$ .

$$\cos \vartheta_1 = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \phi'$$

of ook ontwikkeld

$$\cos \vartheta_1 = \cos \vartheta + \vartheta' \sin \vartheta \cos \phi' - \frac{\vartheta'^2}{2} \cos \vartheta$$

zoodat we vinden:

$$f(\cos \vartheta_1) = f(\cos \vartheta) + \left[ \vartheta' \sin \vartheta \cos \phi' - \frac{\vartheta'^2}{2} \cos \vartheta \right] \frac{df}{d(\cos \vartheta)} + \frac{1}{2} (\vartheta' \sin \vartheta \cos \phi')^2 \frac{d^2 f}{d(\cos \vartheta)^2}$$

nauwkeurig tot en met tweede machten van  $\vartheta'$ .



Samenvattend hebben we dus:

$$\begin{aligned}
 f(\cos \vartheta_1) &= f + \vartheta' \sin \vartheta \cos \phi' \frac{df}{d(\cos \vartheta)} - \\
 &- \frac{\vartheta'^2}{2} \left\{ \cos \vartheta \frac{df}{d(\cos \vartheta)} - \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi' \frac{d^2 f}{d(\cos \vartheta)^2} \right\} \\
 \text{en} \quad \int w(\vartheta') f_1 d\sigma_1 &= f \int_0^{2\pi} \int_0^\pi w(\vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta' d\phi' \\
 &+ \sin \vartheta \frac{df}{d(\cos \vartheta)} \int \int \vartheta' w(\vartheta') \cos \phi' \sin \vartheta' d\vartheta' d\phi' \\
 &- \frac{1}{2} \cos \vartheta \cdot \frac{df}{d(\cos \vartheta)} \int \int \vartheta'^2 w(\vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta' d\phi' \\
 &+ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \frac{df}{d(\cos \vartheta)^2} \int \int \vartheta'^2 w(\vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta' \cos^2 \phi' d\phi'
 \end{aligned}$$

Nu is de eerste integraal 1 (waarschijnlijkheid over den heelen bol gesommeerd), de tweede is 0, omdat  $\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$ .

De derde geeft het gemiddelde quadraat der „Schwankung” in  $\vartheta'$ ; we schrijven daarvoor  $\varepsilon^2$ ; de vierde tenslotte geeft  $\frac{\varepsilon^2}{2}$ , omdat het gemiddelde van  $\cos^2 \phi'$  de waarde  $1/2$  heeft. Zoo vinden we dus:

$$\int w(\vartheta') f_1 d\sigma_1 = f - \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \cos \vartheta \frac{df}{d(\cos \vartheta)} - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \frac{d^2 f}{d(\cos \vartheta)^2} \right\}$$

Tellen we (1) en (2) bij elkaar op, dan vinden we dus voor de vermeerdering van het aantal spitsen in  $d\sigma$  tengevolge der „Schwankungen” de waarde

$$(3) \quad - \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \cos \vartheta \frac{df}{d(\cos \vartheta)} - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \frac{d^2 f}{d(\cos \vartheta)^2} \right\} d\sigma$$

Over den vorm van  $d\sigma$  hebben we tot nu toe niets gezegd; daar  $f$  alleen afhangt van  $\vartheta$ , kunnen we voor  $d\sigma$  het gebied

tusschen twee breedte cirkels kiezen en dus voor  $d\vartheta$  de waarde  $2\pi \sin \vartheta d\vartheta$  substitueeren.

Dan wordt (3)

$$(3') \quad -\frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \cos \vartheta \frac{df}{d(\cos \vartheta)} - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \frac{d^2f}{d(\cos \vartheta)^2} \right\} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$$

of ook anders geschreven

$$(3'') \quad 2\pi \cdot \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{df}{d\vartheta} \right) d\vartheta$$

II. De werking van het koppel  $M$ .

We moeten ons namelijk voorstellen, dat de uitwendige kracht de as van elk molekuul tracht te draaien, evenwijdig aan zich zelf. Het koppel, dat hier ontwikkeld wordt, noemen we  $M$ .

In den tijd  $\delta t$  bewerkt  $M$  voor één deeltje een verandering  $d\vartheta$ , zóó dat

$$M = \rho \frac{\delta \vartheta}{\delta t}$$

of ook

$$\delta \vartheta = \frac{M}{\rho} \delta t$$

Door een breedte cirkel  $\vartheta$ , gaat dus in den tijd  $\delta t$  een zeker aantal spitsen. Dit aantal heeft oorspronkelijk gelegen op de breedte  $\vartheta$  in een gebied van de breedte  $\delta \vartheta = \frac{M}{\rho} \delta t$ . Dus er gaan door:

$$(4) \quad f \cdot 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = f \cdot 2\pi \sin \vartheta \frac{M}{\rho} \delta t$$

spitsen.

Door een cirkel op de breedte  $\vartheta + d\vartheta$  gaan in de zelfde richting

$$(5) \quad 2\pi \frac{M}{\rho} \delta t \cdot \sin \vartheta \cdot f + 2\pi \frac{d}{d\vartheta} \left( \frac{M}{\rho} \cdot f \cdot \sin \vartheta \delta t \right) d\vartheta$$

spitsen.



Een gebied tusschen  $\vartheta$  en  $\vartheta + d\vartheta$  verkrijgt dus in een  $\delta t$  — tijd een aantal spitsen, waarvan het bedrag is:

$$(6) \quad (4) - (5) = -2\pi \frac{\delta t}{\rho} \cdot \frac{d}{d\vartheta} (Mf \sin \vartheta) d\vartheta$$

(3'') en (6) te zamen nemend vindt men:

$$\delta f \cdot 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{df}{d\vartheta} \right) d\vartheta - \frac{2\pi \delta t}{\rho} \frac{d}{d\vartheta} (Mf \sin \vartheta) d\vartheta$$

of ook de differentiaalvergelijking

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1}{\delta t} \cdot \frac{\delta}{\delta \vartheta} \sin \vartheta \frac{\delta f}{\delta \vartheta} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\delta}{\delta \vartheta} (Mf \sin \vartheta)$$

of:

$$(7) \quad \rho \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\delta}{\delta \vartheta} \left[ \sin \vartheta \left( \frac{\varepsilon^2 \rho}{4 \delta t} \cdot \frac{\delta f}{\delta \vartheta} - Mf \right) \right]$$

Met het oog op de wet van BOLTZMANN wordt op de bekende wijze:

$$\frac{\varepsilon^2}{4 \delta t} = \frac{k T}{\rho}$$

zoodat:

$$(8) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\delta}{\delta \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\delta f}{\delta \vartheta} \right) - \frac{\rho}{k T} \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\delta}{\delta \vartheta} \left( \frac{M}{k T} f \sin \vartheta \right)$$

nu is  $M = -\frac{\delta U}{\delta \vartheta}$  zoodat men ook kan schrijven:

$$\rho \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\delta}{\delta \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \left( \frac{\delta U}{\delta \vartheta} \cdot F + k T \frac{\delta F}{\delta \vartheta} \right) \right\}$$

Alvorens verder te gaan, zullen we eerst de potentieele energie bepalen, welke een molekuul — wiens as een hoek  $\vartheta$  maakt met electr. kracht  $K$  — ten aanzien van deze bezit.

Overeenkomstig de uitzettingen in het vlakke geval krijgt het molekuul een moment, waarvan we de componenten in de richting der as en in de richting loodrecht op de as kunnen voorstellen door  $\alpha_1 K \cos \vartheta$  en  $\alpha_2 K \sin \vartheta$ .

Hieruit kan men afleiden de potentieele energie van het molekuul.

Men heeft namelijk:

$$U = -\frac{1}{2} (M) (K) \quad (1)$$

waarin  $M =$  moment en  $K =$  electr. kracht, die definitief op de electronen en het molekuul inwerkt. Volgens LORENTZ hangt  $K$  met  $H$  (<sup>1</sup>) samen door de betrekking:

$$K = H + 4 \frac{\pi}{3} P, \quad (P = \text{polarisatie per } 1 \text{ c.M}^3.)$$

werkt men (1) uit, waarbij de vermenigvuldiging scalaar moet worden uitgevoerd, dan vindt men:

$$U = -\frac{\alpha_2}{2} K^2 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} K^2 \cos^2 \vartheta$$

of als men  $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2 k T} K^2 = \mu$  stelt

$$\underline{U = \text{const.} - \mu k T \cos^2 \vartheta}$$

§ 2. Oplossing der differentiaalvergelijking in het geval dat de electr. kracht plotseling verdwijnt.

We stellen ons voor, dat de elektrische kracht, na een zekeren tijd gewerkt te hebben, plotseling verdwijnt. In dat geval wordt de assenverdeeling, die bij verdwijnende kracht een zekere tijd aanhoudt, beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$(2) \quad \rho \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{k T}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right)$$

(<sup>1</sup>)  $H$  is hier het uitwendige elektrische veld.



Immers bedenkt men dat  $U = \text{const.} - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} K^2 \cos^2 \vartheta$   
 waarin  $K =$  elektrische kracht, dan volgt hieruit voor  $\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$   
 de waarde:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sin 2 \vartheta K^2 = R \sin 2 \vartheta K^2$$

en de oorspronkelijke differentiaalvergelijking wordt:

$$(3) \quad \rho \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \left( R \sin 2 \vartheta K^2 \cdot F + k T \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) \right\}$$

Voor  $K = 0$  ontstaat vergelijking (2)

De oplossing van (2), welke zich aansluit bij ons fysisch vraagstuk, is:

$$(4) \quad F = \frac{N}{4 \pi} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \mu (3 \cos 2 \vartheta + 1) \varepsilon^{-\frac{6 k T}{\rho} t} \right\}$$

waarin

$$\mu = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2 k T} K^2$$

Voor  $t = 0$  gaat deze gelijk het behoort over in de functie van BOLTZMANN, namelijk in:

$$F = \frac{N}{4 \pi} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \mu (3 \cos 2 \vartheta + 1) \right\}$$

Men vindt deze oplossing door te stellen

$$F = c_1 + c_2 (3 \cos 2 \vartheta + 1) f(t)$$

de diff. v. waaraan  $f$  moet voldoen is dan:

$$\rho \frac{df}{dt} = -6 k T f$$

$$\text{hieruit } f = \varepsilon^{-\frac{6 k T}{\rho} t}$$

De constanten  $c_1$  en  $c_2$  worden verder gevonden op de manier, gelijk dit in het vlakke geval is behandeld.

M.a.w. de gezochte verdeelingsfunctie  $F$  moet steeds voor  $t=0$  in de functie van BOLTZMANN, kunnen overgaan. Deze conditie maakt dat  $c_1$  en  $c_2$  de waarde bekomen, welke we hebben meegedeeld.

Uit vergelijking (4) vinden we voor den relaxatietijd de waarde:

$$t = \frac{\rho}{6 k T}$$

In hoeverre de proeven met de uitkomsten der theorie overeenkomen, zullen we in een volgend hoofdstuk bespreken.

### § 3. *Oplossing der differentiaalvergelijking:*

Daar we hier verschillende methoden reproduceeren moeten, die ook in het vlakke geval uitvoerig zijn besproken en toegelicht, kunnen we hier de verantwoording achterwege laten.

In differentiaalvergelijking (3) stelt  $K$  voor een wisselende kracht. We zullen het geval eenvoudig maken, door aan te nemen  $K = K_0 \cos \omega t$ .

Stel nu verder  $F = F_0 + K^2 F_1$  dan moet  $F_0$  voldoen aan de diff. vergel.

$$(1) \quad \rho \sin \vartheta \frac{\partial F_0}{\partial t} = kT \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial F_0}{\partial \vartheta} \right)$$

en  $F_1$  moet voldoen aan:

$$(2) \quad \rho \sin \vartheta \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \left[ \frac{R}{2} \sin 2\vartheta (1 + \cos 2\omega t) F_0 + kT \frac{\partial F_1}{\partial \vartheta} \right] \right\}$$

De oplossing van diff. (1) hebben we zoo even meegedeeld. We kunnen volstaan met den eersten term; de volgende termen immers zullen van wege de exponentieele functie in den eindtoestand toch geen bijdrage kunnen leveren, die van een orde van grootheid is, welke vergelijkbaar is met den eersten term.

Ter oplossing van (2) stellen we verder:

$$\diamond F_1 = (3 \cos 2\vartheta + 1) \theta \quad \text{waarin } \theta = f(t)$$



De v.g.l. (2) gaat nu over in de volgende:

$$\rho \frac{d\theta}{dt} = \frac{R}{2} F_0 (1 + \cos 2\omega t) - 6 k t \theta$$

Stel  $\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{R F_0}{12 k T} + \theta_2$ , dan moet  $\theta_2$  voldoen aan:

$$(3) \quad \rho \frac{d\theta_2}{dt} + 6 k T \theta_2 = \frac{R F_0}{2} \cos 2\omega t$$

Een soortgelijke diff. v. hebben we ontmoet in het vlakke geval; voor de manier van oplossen kan ik dus verwijzen daarheen.

Aan (3) voldoet:

$$\Theta_2 = \frac{R F_0}{4 \sqrt{\rho^2 \omega^2 + 9 k^2 T^2}} \cos(2\omega t - \phi)$$

waarin:

$$t g \phi = \frac{\rho \omega}{3 k T} \quad F_0 = \frac{N}{4 \pi} \quad R = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$$

Derhalve:

$$\Theta = \frac{R F_0}{12 k T} + \frac{R F_0}{4 \sqrt{\rho^2 \omega^2 + 9 k^2 T^2}} \cos(2\omega t - \phi)$$

of wel:

$$\Theta = \frac{R F_0}{12 k T} [1 + \cos \phi \cos(2\omega_0 t - \phi)]$$

$$\text{of } \Theta = \frac{N}{4 \pi} \cdot \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{24 k T} [1 + \cos \phi \cos(2\omega t - \phi)]$$

We hebben dus voor  $F$

$$F = \frac{N}{4 \pi} \left[ 1 + \mu \left( \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi \cos(2\omega_0 t - \phi) \right) \right]$$

waarin

$$\mu = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2 k T} K_0^2$$

Voor  $\omega = 0$  vinden we  $F = \frac{N}{4\pi} \left[ 1 + \mu \left( \cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) \right]$   
 = functie van BOLTZMANN.

Voor  $\omega = \infty$  vinden we  $F = \frac{N}{4\pi} \left[ 1 + \frac{\mu}{2} \left( \cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) \right]$

Hieruit lezen we derhalve af het volgende fysisch resultaat. Het KERR-effekt bereikt zijn maximum in een statisch veld ( $\omega = 0$ ), en daalt tot de helft van zijn maximale waarde in snel wisselende velden ( $\omega = \infty$ ).

We zullen nu verder gebruik maken van de rekenuitkomsten van LANGEVIN, en in aansluiting daarmede de formules geven voor een *wisselend* veld.

We stellen dan:  $N' = \int_0^\pi dN' = \int_0^\pi \frac{N}{2} \left[ 1 + \mu \left( \cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) f(\omega t) \right] \sin \vartheta d\vartheta$  waarin  $f(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi \cos (2\omega_0 t - \phi)$

$$\text{en } J' = \frac{1}{N'} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta dN'$$

dan blijkt 1<sup>o</sup>) dat  $N' = N$

$$\text{en } 2^{\circ}) J' = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2\mu f(\omega t)}{15} \right)$$

Neemt men in aanmerking, dat

$$J = \frac{1}{N} \int \sin^2 \vartheta dN$$

bij LANGEVIN de waarde heeft  $J = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2\mu}{15} \right)$  dan ziet men, hoe ten allen tijde de mogelijkheid aanhoudt om met verwerping der *veranderlijkheid* der el. kracht [ $f(\omega t) = 1$ ] de formules in zijn geheel en in zijn onderdeelen over te voeren in de formules van LANGEVIN.



§ 4. Werkt nu op de electronen binnen een molekuul behalve de quasi-elastische kracht met componenten  $-c_1 x$  en  $-c_1 ij$ , ook nog de electr. kracht  $h'$ , dan zijn de verplaatsingscomponenten van een elektron

$$x = \frac{e h' \cos \varepsilon}{c_1 - m \omega^2} ij = \frac{e h' \sin \varepsilon}{c_2 - m \omega^2}$$

Ik neem hier over zooveel mogelijk de notaties van LANGEVIN; verder maakt  $h'$  een hoek  $\varepsilon$  met de as van het molekuul.

Hier beteekent  $e$  de lading en  $\omega$  het aantal lichttrillingen in  $2\pi$  seconden.

Het moment van 1 elektron in de richting van  $h'$  is nu  $e(x \cos \varepsilon + ij \sin \varepsilon)$  waarbij  $x$  en  $ij$  de waarde hebben, zoo even gevonden.

Moment van 1 elektron is dus  $\left( \frac{e^2 \cos^2 \varepsilon}{c_1 - m \omega^2} + \frac{e^2 \sin^2 \varepsilon}{c_2 - m \omega^2} \right) h'$

Wil men ten slotte het moment hebben van het molekuul, dan dient men te sommeren de momenten van alle elektronen, die binnen het molekuul zwermen.

Men vindt dus voor dit *molekulaire moment*

$$\sum \left( \frac{e^2 h' \cos^2 \varepsilon}{c_1 - m \omega^2} + \frac{e^2 h' \sin^2 \varepsilon}{c_2 - m \omega^2} \right)$$

of  $\sigma_1 \cos^2 \varepsilon + \sigma_2 \sin^2 \varepsilon) h'$

indien  $\sigma_1 = \sum \frac{e^2}{c_1 - m \omega^2}$  en  $\sigma_2 = \sum \frac{e^2}{c_2 - m \omega^2}$

de polarisatie zal zijn:

$$a = h' \int (\sigma_1 \cos^2 \varepsilon + \sigma_2 \sin^2 \varepsilon) dN' = P h'$$

waarbij  $dN' = \frac{N}{2} \left\{ 1 + \mu \left( \cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right) f(wt) \right\} \sin \vartheta d\vartheta$

Successievelijk hebben we evenals LANGEVIN voor evenwijdig licht:

$$M_1 = \int (\sigma_1 \cos^2 \vartheta + \sigma_2 \sin^2 \vartheta) dN'$$

of ook 
$$M_1 = [ \sigma_1 + J' (\sigma_2 - \sigma_1) ] N \quad (4)$$

voor loodrecht licht:

$$M_2 = [ \sigma_2 + \frac{J'}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) ] N \quad (5)$$

Hieruit vindt men door het welbekende rekenproces — mits ook de betrekking van LORENTZ niet vergeten wordt — de uitkomst:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4 \pi}{3} M \quad (6)$$

Kent men verder aan  $n_0$  de beteekenis toe van brekingsindex der stof ingeval van isotropie — waarbij  $d N = \frac{N}{2} \sin^2 \theta d \theta$  — mogen ook  $n_1$  en  $n_2$  de brekingsindices verbeelden voor den gewonen en den buitengewonen straal, dan komt men door de uitdrukking (6) en de verschillende waarden voor  $M_0$ ,  $M_1$  en  $M_2$  tot de volgende formules.

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} &= \frac{4 \pi}{3} M_0 = \frac{4 \pi}{3} N \cdot \frac{\sigma_1 + 2 \sigma_2}{3} \\ \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2} &= \frac{4 \pi}{3} M_1 = \frac{4 \pi}{3} N \cdot [ \sigma_1 + J' (\sigma_2 - \sigma_1) ] \\ \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} &= \frac{4 \pi}{3} M_2 = \frac{4 \pi}{3} N [ \sigma_2 + \frac{J'}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) ] \end{aligned}$$

Hoeveel de eene straal zich optisch verlaat met betrekking tot den andere, leeren ons de formules van LANGEVIN, mits we  $J$  door  $J'$  vervangen.

Trouwens men kan ze zelf achtereenvolgens reproduceeren, als men maar de gebruiksaanwijzing der formules in acht neemt, die LANGEVIN geeft. Trek slechts de vlg<sup>en</sup> (4) twee aan twee van elkaar af, en breng de omstandigheid, dat  $n_1$  en  $n_2$  slechts weinig verschillen, in rekening.



Men vindt dan

$$\frac{n_0 (n_1 - n_0)}{(n_0^2 + 2)^2} = \frac{2}{3} \pi N (\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{2}{3} - J'\right)$$

$$(8) \quad \frac{n_0 (n_2 - n_0)}{(n_0^2 + 2)^2} = \frac{\pi N}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) (J' - \frac{2}{3})$$

$$\frac{n_0 (n_1 - n_2)}{(n_0^2 + 2)^2} = \pi N (\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{2}{3} - J'\right)$$

Hieruit resulteert — door deeling der twee eerste vergelijkingen — de betrekking:

$$\frac{n_1 - n_0}{n_2 - n_0} = -2$$

Deze betrekking van AECKERLEIN geldt derhalve ook voor een *wisselend* veld.

§ 5. Deelen we de laatste formule van de reeks (5) door de eerste van de reeks (4) dan komt er:

$$\frac{n_0 (n_1 - n_2)}{n_0^2 - 1} \frac{1}{(n_0^2 + 2)} = \frac{9}{4} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \cdot \left(\frac{2}{3} - J'\right)$$

welke — na invoering van de optischen *dyssemetrieconstante*

$$\delta_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2}$$

$$\text{overgaat in: } \frac{n_0 (n_1 - n_2)}{(n_0^2 - 1) (n_0^2 + 2)} = \frac{9}{4} \delta_0 \left(\frac{2}{3} - J'\right) \quad (9)$$

$$\text{Rekent men verder, dat } J' = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{15} \mu f(t)\right)$$

dan komt er ten slotte:

$$\frac{n_0 (n_1 - n_2)}{(n_0^2 - 1) (n_0^2 + 2)} = \frac{\mu f(\omega t) \delta_0}{5}$$

Zoodat dus het KERR-verschijnsel bij een wisselende elektr. kracht aan de volgende wiskundige wet gehoor geeft:

$$(10) \quad n_1 - n_2 = \frac{(n_0^2 - 1)(n_0^2 + 2) \mu f(t) \delta_0}{5 n_0}$$

nu kan  $f(\omega t)$  2 uiterste waarden verkrijgen: nl. de maximale waarde bij  $\omega = 0$  dan is  $f(\omega t) = 1$  en zijn minimale waarde bij  $\omega = \infty$  (dus dan  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ) nl.  $f(\omega t) = \frac{1}{2}$

Hieruit lezen we dus af het fysisch resultaat, dat in een zeer snel *wisselend* veld, het KERR-verschijnsel tot de helft wordt teruggebracht.



## VIJFDE HOOFDSTUK.

### *Proeven over den Relaxatietijd.*

§ 1. Door relaxatietijd verstaan we het tijdsinterval, dat ligt tusschen het verdwijnen der electr. kracht en het verdwijnen van het KERR-effekt. We hebben daarvoor langs theoretischen weg gevonden

$$\tau = \frac{\rho}{6 k T}$$

waarin  $\rho = 8 \pi \eta a^3 \eta =$  wrijvingscoëff. der vloeistof,  $a =$  straal van het molekuul,  $k = 1,3 \cdot 10^{-16}$ ,  $T =$  absol. temp.

Omtrent den relaxatietijd zijn proeven gedaan door R. BLONDLOT <sup>1)</sup>, DESCLOUDRES, H. ABRAHAM en LEMOINE <sup>2)</sup>, verder door J. JAMES <sup>3)</sup> en ten slotte voornamelijk door C. GUTTON <sup>4)</sup>.

Het resultaat, door BLONDLOT bereikt, was het volgende:

Indien de electr. dubbelbreking de electr. kracht niet *instantaan* volgt, dan blijft ze althans niet meer achter dan

$\frac{1}{40.000}$  secunde.

ABRAHAM en LEMOINE naderden heel wat dichter. Zij vonden, dat het KERR-effekt de electr. kracht volgde op geen grooteren afstand in den tijd dan  $\frac{1}{4} \cdot 10^{-8}$  secunde.

Hiermee was natuurlijk niet bewezen, dat die afstand nul was. Ook de proeven van JAMES gaven geen definitieve op-

<sup>1)</sup> Journ. de Phys. 2<sup>e</sup> Serie d. VII, blz. 91 '88.

<sup>2)</sup> J. de Phys. 3<sup>e</sup> Serie d. IX, blz. 262 1900.  
Comptes rendus blz. 206 1899.

<sup>3)</sup> J. JAMES Ann. der Phys. 4<sup>e</sup> Serie, d. XV. 1904 blz. 954.

<sup>4)</sup> J. d. Phys. 5<sup>e</sup> Serie d. II, blz. 51 1912.

J. d. Phys. 5<sup>e</sup> Serie 3<sup>e</sup> deel 1913 blz. 206 en blz. 445.

lossing. Steeds waren de electr. golven, die in de proefnemingen een rol speelden, te lang.

GUTTON was de eerste, die proefondervindelijk aantoonde, dat er een *relaxatietijd* bestond, en hij gaf daarvoor aan een orde van grootheid.

## § 2. De proeven van GUTTON.

Twee condensators staan in twee verschillende vloeistoffen, bij wie de waarden der dubbelbreking hetzelfde teeken hebben.

De opstelling is zoodanig, dat de krachtlijnen van den eersten condensator horizontaal en die van den tweede verticaal loopen.

Heeft derhalve de dubbelbreking der eerste vloeistof *voor zich alleen* de waarde  $\alpha$ , en de tweede *voor zich alleen* de waarde  $\beta$ , dan zal het finale bedrag der dubbelbreking, dat de contrôle van den waarnemer moet passeeren,  $\alpha - \beta$  bedragen.

Laat men nu tusschen de condensatoren licht gaan dat met behulp van een nicol gepolariseerd is in een vlak, makende een hoek van  $45^\circ$  met de richting der electr. kracht en de condensators, dan kan men — ingeval van een *statisch* veld — door verandering van den afstand der bekleedselen van een der condensatoren dit bedrag  $\alpha - \beta$  gelijk nul krijgen; het licht zal dan na passage door de twee vloeistoffen *rechtlijnig gepolariseerd* blijven; een analysator, aangebracht achter den laatsten condensator, en loodrecht op polarisator laat dus geen licht door.

Dit volgt onmiddellijk uit de wet van KERR.

Men heeft n.l. voor de 1<sup>e</sup> vloeistof  $n_1 - n_2 = \gamma_1 K_1^2 = \alpha$   
 en voor de 2<sup>e</sup> vloeistof  $n_1' - n_2' = \gamma_2 K_2^2 = \beta$

Het varieeren van den afstand der bekleedselen bijvoorbeeld van den tweeden condensator, komt neer op het veranderen der electr. kracht  $K_2$ . De betrekking  $\alpha - \beta = 0$  wordt dus verkregen door  $\gamma_2 K_2^2 = \gamma_1 K_1^2$  te maken.

Nadat de afstand der bekleedselen van condensator II was ingesteld op nul, dit is, zoodat aan de voorwaarde  $\alpha - \beta = 0$  was voldaan, ging GUTTON over tot proefnemingen in een wisselend veld. Hij bemerkte, dat het licht weer te voor-



schijn kwam. Bij varieeren van den afstand der platen van condensator II bleek er een *nieuwe* stand te bestaan, waarbij het licht weer verdween. <sup>1)</sup>

GUTTON kon aldus een kromme construeeren, wiens punten tot abscissen hadden de afstandsverandering der platen en tot ordinaten de golflengte. GUTTON merkte zoodoende op dat — hoe langzamer de electr. trillingen plaats hadden — des te *geringer* wijziging in den afstand der platen bleek noodig te zijn.

Eindelijk wist hij zulke lengte van golven te vinden, waarbij geen wijziging meer noodig was. De oude nulstand — die dateerde uit het statische veld — gold ook hier. We moeten echter opmerken, dat in de proeven van GUTTON een afstandsverandering kleiner dan  $\frac{1}{1000}$  onmerkbaar is, zoodat van een absoluut nul zijn vanwege de waarnemingsfouten geen sprake is.

De voorstelling, die zich GUTTON maakte van den gang der verschijnselen was de volgende:

De twee vloeistoffen volgden ongelijk snel de veranderingen der electr. kracht. Had zich de eerste vloeistof reeds ingesteld, dit is in den zin van LANGEVIN waren alle assen reeds geörienteerd, de tweede vloeistof had meer tijd noodig om hiermee klaar te komen.

Toen echter de golven lang genoeg werden, dit is derhalve, toen maar de electr. kracht er lang genoeg over deed om in een bepaalde richting de assen te beïnvloeden, kwam ook de orientatie der tweede vloeistof tot stand. De tijd, noodig voor de electr. kracht, om op haar maximum te komen, is  $\frac{\lambda}{4c}$  ( $\lambda$  = golflengte en  $c$  = snelheid van het licht =  $3 \cdot 10^{10}$  c.M.)

Deze tijd was derhalve ook noodig om de tweede vloeistof haar normaal dubbelbrekend vermogen te verschaffen. Naar aanleiding van deze redeneering willen we het volgende in het midden brengen.

---

<sup>1)</sup> We zullen echter bewijzen, dat er alleen sprake was van een *minimum* lichtintensiteit in de proef van GUTTON.

We merken op, dat — zoo het wisselend veld door een zuivere sinusfunctie wordt afgebeeld nl.  $K = K_0 \cos \omega t$  — het finale bedrag der dubbelbreking nl.  $\alpha - \beta$  nooit nul kan worden. Daar bestaat naast verschil in amplitude, ook nog phaseverschil waarmee bewezen is, dat er geen sprake kan zijn van  $\alpha - \beta = 0$ .

We kunnen echter de waarnemingen van GURTON toch aanpassen aan onze theorie. We zullen laten zien dat bij een bepaalden stand der condensatorplaten *een minimum* mogelijk is.

Alvorens we hiertoe overgaan, willen we nog opmerken, dat de proeven van GURTON afdoende bewijzen, dat er een *relaxatietijd* bestaat.

Immers was er geen relaxatietijd, dan zouden de twee vloeistoffen zich momentaan instellen. Ze zouden de elektrische kracht *onmiddellijk op den voet* volgen, zoodat — wanneer  $\alpha - \beta$  eenmaal nul was — de waarde nul bleef.

§ 3. We hebben erop gewezen, hoe — ingeval de electr. kracht door een zuivere sinusfunctie werd afgebeeld — de dubbelbrekingen der twee vloeistoffen elkaar nooit geheel zullen opheffen; er kan slechts sprake zijn van een minimum hoeveelheid licht. Dit willen we laten zien.

Voor  $K = K_0 \cos \omega t$  wordt het KERR-verschijnsel beheerscht door de wet:

$$(1) \quad n_1 - n_2 = \gamma_1 K_1^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi_1 \cos (2 \omega_0 t - \phi_1) \right]$$

De tweede vloeistof moge gehoorzamen aan de formule:

$$(2) \quad n_1' - n_2' = \gamma_2 K_2^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi_2 \cos (2 \omega_0 t - \phi_2) \right]$$

Nadat het licht is gegaan door eerste nicol en door de twee vloeistoffen, zal de intensiteit van het licht, dat eindelijk door den analysator passeert, evenredig zijn met  $(\delta_1 - \delta_2)^2$ , waarbij  $\delta_1$  en  $\delta_2$  de phaseverschillen zijn der componenten in de twee vloeistoffen.



Nu is  $\delta_1$  evenredig met  $n_1 - n_1'$   
 $\delta_2$  „ „ „  $n_2 - n_2'$

Dus  $(\delta_1 - \delta_2)^2$  met  $[(n_1 - n_1') - (n_2 - n_2')]^2 =$   
 $[(n_1 - n_2) - (n_1' - n_2')]^2$

Hiervoor substitueere men de waarden, uitgedrukt in  $\phi_1$  en  $\omega_0 t$ , uit de vergelijkingen (1) en (2).

Dus de lichtintensiteit, gedurende zekeren tijd doorgelaten, vindt men door te integreeren over dien tijd:

$$\int \left\{ \frac{\gamma_1 K_1^2}{2} [1 + \cos \phi_1 \cos (2 \omega_0 t - \phi_1)] - \frac{\gamma_2 K_2^2}{2} [1 + \cos \phi_2 \cos (2 \omega_0 t - \phi_2)] \right\} dt$$

Stellen we nu  $\frac{\gamma_2 K_2^2}{\gamma_1 K_1^2} = x$ , integreeren tusschen 0 en  $\pi$ , en nemen het gemiddelde der lichtintensiteit, wat neerkomt op deeling door  $\pi$ , en schrappen ten slotte den evenredigheidsfactor, dan komt er:

$$1 + \frac{1}{2} \cos^2 \phi_1 + x^2 (1 + \frac{1}{2} \cos^2 \phi_2) -$$

$$2x (1 + \frac{1}{2} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \overline{\cos \phi_1 - \phi_2})$$

We willen nu onderzoeken het minimum, bij variatie van  $K_2$ : dit komt neer op het veranderen van  $x$ :

Men vindt dan voor  $x$

$$X = \frac{1 + \frac{1}{2} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \overline{\cos \phi_1 - \phi_2}}{1 + \frac{1}{2} \cos^2 \phi_2}$$

We hadden ook kunnen vragen naar het minimum licht,

bij verandering van  $K_1$ . In dit geval hadden we — na  $\frac{\gamma_1 K_1^2}{\gamma_2 K_2^2} = x$  gesteld te hebben — voor gevonden:

$$X = \frac{1 + \frac{1}{2} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos (\phi_1 - \phi_2)}{1 + \frac{1}{2} \cos^2 \phi_1}$$

Voor  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ , wordt — gelijk het behoort —  $x = 1$ .  
Beschouwen we het geval  $\phi$  heel klein, dan mogen we stellen

$$\phi = \frac{\rho \omega}{3 k T}$$

Er komt dan in het eene geval, bij verandering van  $K_2$  eerst:

$$X = \frac{1}{3} [3 - \phi_2^2 + \phi_1 \phi_2]$$

en daarna:

$$X = 1 + \frac{\omega^2 \rho_2}{27 k^2 T^2} (\rho_1 - \rho_2)$$

Voor het minimum — bij verandering van  $K_1$  — hadde men gevonden:

$$X = 1 + \frac{\omega^2 \rho_1}{27 k^2 T^2} (\rho_2 - \rho_1)$$

Analoge gevallen zijn derhalve:

$\rho_1 = 0$  bij verandering van  $K_1$  en  $\rho_2 = 0$  bij verandering van  $K_2$  in beide gevallen  $X = 1$ .

Analoge gevallen zijn ook

$\rho_1 = 0$  bij verandering van  $K_2$  en  $\rho_2 = 0$  bij verandering van  $K_1$ .



Men vindt dan successievelijk:

$$X = 1 - \frac{\omega^2 \rho_2^2}{27 k^2 T^2}$$

$$X = 1 - \frac{\omega^2 \rho_1^2}{27 k^2 T^2}$$

Niet *analoge* maar *disparate* gevallen zijn verder:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 0 \text{ bij verandering van } K_2 \text{ en} \\ \rho_1 &= 0 \text{ bij verandering van } K_2. \end{aligned}$$

Men vindt derhalve *disparate* uitkomsten.

§ 4. We willen nog meer aansluiting beproeven met de uitkomsten van GURTON, die bij zijn verschillende proefnemingen sterk gedempte golven had. Om den invloed van het tijdelijk verloop van het electr. veld te kunnen schatten, heb ik op voorstel van prof. DEBYE een tijdfunctie genomen, die sterk afwijkt van een sinussoide.

We denken ons een electr. kracht, die op  $t = 0$  plotseling ontstaat en op  $t = \tau$  plotseling verdwijnt. Naar aanleiding hiervan kunnen we de electr. dubbelbreking over den weg  $0 - \tau$  voorstellen door:

$$n_1 - n_2 = \gamma_1 K_1^2 (1 - e^{-at}) \quad (3)$$

en over den weg  $\tau - \infty$  door:

$$n_1 - n_2 = \gamma_1 K_1^2 (1 - e^{-a\tau}) e^{-a(t-\tau)} \quad (4)$$

hierin is

$$a = \frac{6 k T}{\rho}$$

We hebben derhalve te rekenen met de volgende integralen:

$$I_1 = \int_0^\tau (\delta_1 - \delta_2)^2 dt \quad \text{en}$$

$$I_2 = \int_\tau^\infty (\delta_1 - \delta_2)^2 dt$$

waarin  $(\delta_1 - \delta_2)^2$  wordt uitgedrukt in de waarden voor  $n_1 - n_2$  uit (3) en (4) volgens de substitutieformule  $\delta_1 = n_1 - n_1'$   
 $\delta_2 = n_2 - n_2'$

$I_2$  is evenredig met

$$A = \int_0^{\tau} \{ (1 - e^{-a_1 t}) - x (1 - e^{-a_2 t}) \}^2 dt$$

en  $I_2$  met:

$$B = \int_0^{\infty} \{ (e^{a_1 \tau} - 1) e^{-a_1 t} - x \cdot (e^{a_2 \tau} - 1) e^{-a_2 t} \}^2 dt$$

$$x = \frac{\gamma_2 K_2^2}{\gamma_1 K_1^2}$$

Voert men de integraties uit en bepaalt de waarde van  $x$  voor het geval, dat  $A + B$  minimum is, dan krijgt men een zeer gecompliceerde uitdrukking. Beschouwen we daarentegen het geval, dat  $a \tau$  zeer groot is ten aanzien van 1, dan komt er:

$$X = \frac{\tau - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \frac{2}{a_1 + a_2}}{\tau - \frac{1}{a_1}} = 1 + \frac{a_1 - a_2}{a_1 (a_1 + a_2) \tau}$$

Wanneer we met een eerste benadering tevreden zijn.

Schrijven we nog  $\tau = \frac{\lambda}{4c}$  ( $\lambda =$  golflengte  $c = 3.10^{10}$  c.M.)

dan komt er:

$$X = 1 + \frac{4c}{\lambda} \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 (a_1 + a_2)} \quad (5)$$

Deze formule geldt, wanneer we  $K_1$  constant houden en  $K_2$  variëren. Houden we  $K_2$  constant en variëren  $K_1$ , dan is

$X = \frac{\gamma_1 K_1^2}{\gamma_2 K_2^2}$  en we vinden:

$$X = 1 + \frac{4c}{\lambda} \cdot \frac{a_2 - a_1}{a_2 (a_1 + a_2)} \quad (6)$$



Bedenken we, dat  $a = \frac{6 k T}{\rho}$  dan komt er:

$$X = 1 + \frac{2 c}{\lambda} \cdot \frac{\rho_2}{3 k T} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \text{ bij } K_2 \text{ variabel}$$

$$\text{en } X = 1 + \frac{2 c}{\lambda} \cdot \frac{\rho_1}{3 k T} \cdot \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \text{ bij } K_1 \text{ variabel.}$$

§ 5. Noemen we de afstandsverandering  $X - 1 = IJ$  en voeren we in plaats van de golflengte het trillingsgetal  $\omega$  in, dan vinden we, omdat

$$\omega = \frac{2 \pi c}{\lambda}$$

$$IJ = \frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{\rho_2}{3 k T} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (7)$$

Dit is een rechte lijn, waarvan de tangens

$$= \frac{\rho_2}{3 k T \cdot \pi} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

Bestudeeren we nu de kromme door GUTTON bij zijn proefnemingen gevonden. Deze kromme geeft de afstandsverandering in functie der golflengte. We zullen echter een groothed  $\omega_0$  invoeren, die met  $\lambda$  samenhangt door de formule  $\frac{1000}{\lambda_2} = \omega_0$

GUTTON vond de volgende getallen:

golflengte $\lambda/2$	afstandsverandering $IJ$
95 c.M.	0,085
225 "	0,052
350 "	0,045
575 "	0,020
765 "	0,008
850 "	0,000

De gebezigde vloeistoffen waren  $C S_2$  en bromo-naphtaline.

Hiervoor schrijven wij de volgende tabel:

$\omega_0$	<i>IJ</i>
10,5	85
4,45	52
2,85	45
1,74	20
1,31	8
1,18	

De laatste waarde 0 zullen we echter niet gebruiken, omdat — gelijk we reeds toelichtten — de subjectieve waarneming GUTTON niet veroorloofde 0 te naderen dichter dan op één duizendste.

Een rechte lijn blijkt bij onderzoek het beste de getallen der tabel te verantwoorden. De rechte lijn gaat door den oorsprong en geeft tot vergelijking  $ij = \alpha \omega$ . Bij becijfering blijkt  $\alpha = 8$  te zijn.

Nu is 
$$\omega = \frac{\pi c}{\lambda/2} \quad \text{waaruit}$$

$$\omega = \omega_0 \cdot \pi c$$

de vergelijking (7) in  $\omega_0$  uitgedrukt is derhalve:

$$IJ = \omega_0 \cdot \frac{c}{3 k T} \cdot \frac{\rho_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}$$

Derhalve moeten we de betrekking hebben

$$\frac{c}{3 k T} \cdot \frac{\rho_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2} = 8$$

Substitueeren we  $\rho = 8 \pi \eta a^3$  en schrijven we voor

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\frac{M_2}{\sigma_1} \eta_2 - \frac{M_1}{\sigma_1} \eta_1}{\frac{M_1}{\sigma_1} \eta_1 + \frac{M_2}{\sigma_2} \eta_2}$$

dan komt er ongeveer  $a = 6.3 \cdot 10^{-8}$

Dit resultaat is volstrekt niet onbevredigend. Hieruit mogen we besluiten — dunkt ons — dat de tijdfunctie van Prof. DEBIJE zeer wel met de proefnemingen van GUTTON overeenstemt.



## HOOFDSTUK VI.

We willen ons onderzoek omtrent het KERR-verschijnsel besluiten met de volgende algemeene beschouwingen, waarop Prof. DEBIJE mij opmerkzaam maakte. De differentiaalvergelijking, waartoe we kwamen, was:

$$(1) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) - \frac{\rho}{k T} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{M}{k T} f \sin \vartheta \right)$$

Zooals te verwachten was komen als bijzondere eenvoudige oplossingen van (1) niet gewone sinus- en cosinus-functies, maar bolfuncties in aanmerking.

§ 1.  $M = 0$ .

Bekend is, dat een functie  $P_n$  van  $\vartheta$  welke voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d P_n}{d \vartheta} \right) + n(n+1) P_n = 0$$

een bolfunctie is. Voor  $\cos \vartheta = x$  wordt deze vergelijking:

$$\frac{d}{d x} (1 - x^2) \frac{d P_n}{d x} + n(n+1) P_n = 0$$

indien  $P_n$  als functie van  $x$  wordt opgevat.

Aan twee dingen zij herinnerd:

a. De  $P_n$ , die wij noodig hebben zijn de ontwikkelingscoëfficiënten van

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \rho x + \rho^2}}$$

naar machten van  $\rho$ , zoodat we dus hebben:

$$P_0 = 1 \quad P_1 = x \quad P_2 = \dots \text{ enz.}$$

$$P^n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2n-1} \cdot \frac{x^{n-2}}{2} + \dots \right]$$

b.) Iedere willekeurige functie van  $\vartheta$  kan op den bol ontwikkeld worden naar bolfuncties in den vorm

$$f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a^n P_n(\vartheta).$$

De coëfficiënten worden op de bekende wijze gevonden.  
De vergelijking

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} - \frac{\rho}{kT} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

heeft als algemeene oplossing

$$f = \sum_{n=0}^{n=\infty} a^n P_n(\vartheta) e^{-n(n+1) \frac{kT}{\rho} t}.$$

De coëfficiënten  $a_n$  zijn willekeurig en kunnen volgens het algemeen ontwikkelings-theorema er toe dienen de oplossing aan te passen aan een bepaalde verdeling der assen, die op het oogenblik  $t=0$  bestaat.

In het geval LANGEVIN (KERR-effekt) is onder inwerking van een constante kracht

$$f = \alpha + \beta \cos^2 \vartheta = \alpha + \beta x^2$$

hiervoor kunnen we ook schrijven:

$$f = \left( \alpha + \frac{\beta}{3} \right) P_0(x) + \frac{2}{3} \beta \cdot P_2(x).$$

Verdwijnt op het oogenblik  $t=0$  deze constante kracht plotseling, dan wordt dus voor alle  $t > 0$

$$f = \left( \alpha + \frac{\beta}{3} \right) P_0(x) + \frac{2}{3} \beta P_2(x) \cdot e^{-6 \cdot \frac{kT}{\rho} t}.$$



§ 2. *Oplossing* voor het algemeen geval, dat  $M$  als functie van  $t$  en  $\vartheta$  willekeurig gegeven is, echter onder de bijzondere voorwaarde, dat  $M$  klein is.

$$\text{Stel} \quad f = f_0 + f_1 + \dots$$

zoodat  $f_0$  eindig,  $f_1$  van de orde  $M$  is, en laat in het vervolg alle termen van hoogere orde weg, dan moet

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vartheta} - \frac{\rho}{kT} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial f_1}{\partial \vartheta} - \frac{\rho}{kT} \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{M}{kT} f_0. \end{array} \right.$$

$M$  denken we gegeven als functie van  $t$  en wel van  $t = -\infty$  tot  $t = +\infty$ .

De eerste vergelijking van (2) heeft de algemeene oplossing:

$$f_0 = \sum a_n \cdot P_n \cdot e^{-n(n+1) \frac{kT}{\rho} t}.$$

Daar nu echter  $f$  nooit oneindig kan worden ook niet voor  $t = -\infty$ , kan  $f_0$  alleen constant zijn, alle andere termen vallen weg. We hebben dus

$$f_0 = \text{const} = A.$$

We stellen verder

$$M = - \frac{\partial U}{\partial \vartheta}$$

en nemen aan, dat we  $U$  ontwikkeld hebben in den vorm

$$U = \sum Z_n(t) P_n(\vartheta)$$

waar  $Z_n$  dus gegeven functies van den tijd zijn.

Nu stellen we ten slotte

$$f_1 = \sum \Theta_n P_n$$

waar  $\Theta_n$  gezochte functies van  $t$  zijn, dan moeten we voldoen aan de vergelijking

$$\begin{aligned} \sum \frac{\Theta_n}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cdot \sin \vartheta \frac{\partial P_n}{\partial \vartheta} - \frac{\rho}{kT} \sum \frac{d \theta_n}{dt} P_n = \\ - \frac{A}{kT} \sum \frac{Z_n}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} P_n. \end{aligned}$$

Met het oog op de differ. vergel. van  $P_n$  wordt dit voor alle  $n$ :

$$n(n+1)\theta_n + \frac{\rho}{kT} \frac{d\theta_n}{dt} = -n(n+1) \frac{A}{kT} \cdot Z_n(t)$$

De algemeene oplossing hiervan is:

$$\Theta_n = -\frac{A}{\rho} n(n+1) \cdot e^{-n(n+1)k\frac{Tt}{\rho}} \int_{-\infty}^{\tau=t} Z_n(\tau) e^{n(n+1)\frac{kT}{\rho}\tau} d\tau$$

indien wij de willekeurige constante, die in de oplossing voorkomt, bepalen door de integraal bij  $\tau = -\infty$  te laten beginnen. (Dit geschiedt om de volgende reden. Is bijv.  $Z_n(t) = 0$  van  $t = -\infty$  tot een bepaalde tijd  $t = t_1$ , dan moet van  $t = -\infty$  tot  $t = t_1$ ,  $\theta_n = 0$  zijn en dat is werkelijk het geval). We kunnen ons vraagstuk en de oplossing ervan op de volgende wijze samenvatten.

*Vraagstuk:* Gegeven de potentiële energie  $U$  voor de draaiing der molekulen als functie van  $t$  en  $\vartheta$ . Wat is de verdeelingsfunctie  $f$  in eerste benadering voor kleine waarden van  $U$ ?

*Oplossing:* Ontwikkel  $U$  naar bolfunctie  $P_n$  van  $\cos \vartheta$  in den vorm

$$U = \sum Z_n(t) \cdot P_n$$

dan is

$$f = A \left[ 1 - \sum_0^{\infty} \frac{n(n+1)}{\rho} P_n \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} Z_n(\tau) e^{-n(n+1)\frac{kT}{\rho}(t-\tau)} d\tau \right]$$



De constante  $A$  wordt bepaald uit:

$$2\pi \int_0^\pi f \sin \vartheta d\vartheta = N = \text{Aantal molekulen.}$$

We kunnen er nog op attent maken, dat de formule mooi laat uitkomen, hoe een potentieele energie  $Z_n$  na werkt van het oogenblik  $\tau$  af met een intensiteit, die exponentieel afneemt bij toenemende waarden van den tijd  $(t - \tau)$  die na het oogenblik  $\tau$  verlopen is.

§ 3. Aan het slot een voorbeeld als toepassing der theorie.

De molekulen zijn van  $t = -\infty$  tot  $t = 0$  volkomen vrij. Op het oogenblik  $t = 0$  komt plotseling een kracht  $K$ , die als tijdfunctie gegeven is door de formule

$$K = F \cdot e^{-at} \sin \omega t \quad (\text{gedempte golf})$$

Gevraagd de verdeelingsfunctie van het KERR-effekt.

*Oplossing.* 
$$U = e^2 K^2 \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{f} + \frac{\sin^2 \vartheta}{g} \right)$$

waarin  $K =$  electr. kracht en  $\vartheta$  is de hoek die de as van het molekuul maakt met electr. kracht,  $f$  en  $g$  zijn de twee verschillende parameters, die hun ontstaan te danken hebben aan de hypothese LANGEVIN.  $U$  kunnen we ontwikkelen naar bolfuncties. Er komt:

$$U = \frac{e^2 K^2}{3} \left( \frac{1}{f} + \frac{2}{g} \right) P_0 + \frac{2}{3} e^2 K^2 \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) P_2$$

We hebben dus

$$Z_0 = \frac{e^2 F^2}{3} \left( \frac{1}{f} + \frac{2}{g} \right) e^{-2at} \sin^2 \omega t = \alpha e^{-2at} \sin^2 \omega t$$

$$Z_2 = 2 \cdot \frac{e^2 F^2}{3} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) e^{-2at} \sin^2 \omega t = \beta e^{-2at} \sin^2 \omega t$$

Alle andere  $Z_n = 0$ .

We berekenen nu de integralen, die in de uitdrukking voor  $f$  voorkomen.

1.  $n = 0$

$$\int_{\tau=\infty}^{\tau=t} Z_n(\tau) \cdot e^{-n(n+1)\frac{kT}{\rho}(t-\tau)} d\tau \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ voor } -\infty < t < 0 \\ = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \alpha e^{-2a\tau} \sin^2 \omega t d\tau \text{ voor } 0 < t < \infty \end{array} \right.$$

2.  $n = 2$ .

$$\int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} Z_n(\tau) \cdot e^{-n(n+1)\frac{kT}{\rho}(t-\tau)} d\tau \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ voor } -\infty < t < 0 \\ = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \beta e^{-2a\tau} \sin^2 \omega \tau e^{-\frac{6kT}{\rho}(t-\tau)} d\tau \text{ voor } 0 < t < \infty \end{array} \right.$$

Beteekent  $R$ , dat men van een volgende uitdrukking het reële gedeelte moet nemen, dan is

$$\int_0^t e^{-2a\tau} \sin^2 \omega t d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2a\tau} (1 - \cos 2\omega\tau) d\tau =$$

$$\frac{1}{2} R \int_0^t e^{-2a\tau} (1 - e^{2i\omega\tau}) d\tau = \frac{1}{2} R \left[ \frac{1 - e^{-2at}}{2a} - \frac{1 - e^{-2(a-i\omega)t}}{2(a-i\omega)} \right]$$

en verder:

$$\int_0^t e^{-2\left(a - \frac{2kT}{\rho}\right)\tau} \sin^2 \omega \tau d\tau = \frac{1}{2} R \left[ \frac{1 - e^{-2\left(a - \frac{3kT}{\rho}\right)t}}{2\left(a - \frac{3kT}{\rho}\right)} - \frac{1 - e^{-2\left(a - \frac{3kT}{\rho} - i\omega\right)t}}{2\left(a - \frac{3kT}{\rho} - i\omega\right)} \right]$$



We vinden dus voor  $f$ :

$$f = A \left[ 1 - \frac{3\beta}{\rho} P_2(\cos \vartheta) e^{-\frac{6kT}{\rho}t} R \left\{ \frac{1 - e^{-2\left(a - \frac{3kT}{\rho}\right)t}}{2\left(a - \frac{3kT}{\rho}\right)} - \frac{1 - e^{-2\left(a - \frac{3kT}{\rho} - i\omega\right)t}}{2\left(a - \frac{3kT}{\rho} - i\omega\right)} \right\} \right]$$

na het oogenblik  $t=0$ ; voor  $t < 0$  is  $f = \text{const.}$

Is  $a=0$ , dan hebben we het plotseling inzetten bij  $t=0$  van een ongedempte golf. Dan wordt

$$f = A \left[ 1 - \frac{3\beta}{\rho} P_2 \cdot e^{-\frac{6kT}{\rho}t} \left\{ \frac{e^{\frac{6kT}{\rho}t} - 1}{\frac{6kT}{\rho}} + R \cdot \frac{1 - e^{\frac{6kT}{\rho}t} e^{2i\omega t}}{\frac{6kT}{\rho} + 2i\omega} \right\} \right]$$

Wachten we eenigen tijd, totdat  $\frac{6kT}{\rho}t$  groot genoeg is, dan blijft het resultaat van een gewone periodieke kracht over en wij vinden voor  $\lim. \frac{6kT}{\rho}t = \infty$  de formule

$$f = A \left[ 1 - \frac{e^2 F^2}{3kT} \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \right) \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2} \{ 1 - \cos \phi \cos(2\omega t - \phi) \} \right]$$

Waarbij

$$\text{tg } \phi = \frac{\rho \omega}{3kT}$$





STELLINGEN.





## STELLINGEN.

---

### I.

De proeven van GUTTON omtrent het KERR-verschijnsel in wisselende velden, bewijzen het bestaan van den zoogenaamden relaxatietijd.

J. de Phys., 5<sup>e</sup> serie dl. 3 1913  
blz. 206 en blz. 445.

### II.

GUTTON beweert, dat ook in wisselende velden een stand der condensators mogelijk is, waarbij *alle* licht verdwijnt. Deze uitspraak moet vervangen worden door de volgende: Er is mogelijk een stand der condensators, waarbij een *minimum* hoeveelheid licht optreedt.

J. de Phys., 1. c.

## III.

Het begrip „oneindig getal” dat in de wiskunde veelvuldig voorkomt, levert geen ernstige bezwaren tegen de bekende stelling der Scholastieke wijsbegeerte: „Oneindig getal is een repugnantie”.

## IV.

BROUWER (over de Grondslagen der Wiskunde blz. 125) zegt:  
*Wiskunde is onafhankelijk van logica:*

Deze stelling kan slechts waar zijn ten koste eener opzettelijke en willekeurige beperking van het begrip logica. Zonder deze kunstmatige verenging van het begrip logica zou de stelling er anders uitzien.

## V.

Het zou de wijsbegeerte en de exacte wetenschappen *beide* zeer te stade komen, wanneer het onderricht in de eene wetenschap werd ondersteund door onderricht in de andere.

## VI.

KANT meent ten onrechte, dat we onze ervaringen niet kunnen losdenken van de empirische ruimte.

(Kritik der reinen Vernunft pag. 50 en volgende.)



## VII.

Terecht zegt BROUWER (Grondslagen der Wiskunde blz. 117).  
Er is niet één bepaalde empirische ruimte: We kunnen alle  
verschijnselen plaatsen in elke ruimte met zooveel dimensies,  
als we willen.

## VIII.

Ruimte kan geen forma a priori in den zin van KANT zijn.

## IX.

In de natuurkunde is het begrip tijd niet onafhankelijk van  
het begrip gelijkmatige beweging, en het begrip gelijkmatige  
beweging niet onafhankelijk van het begrip tijd.

## X.

De wetenschap is niet minder objectief al verandert haar vorm.

## XI.

De zoogenaamde paradox van Sint Petersburg verliest veel

van het wonderspreukige, wanneer men aan het begrip „oneindig getal” het absolute zijn van realiteit ontzegt.

## XII.

De kansrekening heeft zonder het theorema van BERNOUILLE alleen speculatieve waarde.





















A