Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

De hoofdstelling der axonometrie

https://hdl.handle.net/1874/259723

DE HOOFDSTELLING DER AXONOMETRIE

J. VAN BRUGGEN

qu.
2

A. qu.
192

De Hoofdstelling der Axonometrie.

A 4 192. Phys 7 Dec 1915

De Hoofdstelling der Axonometrie

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. ERNST COHEN

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Dinsdag 7 December 1915 des namiddags te 4 uur

DOOR

JOCHUM VAN BRUGGEN

geboren te TETERINGEN

Electr. drukkerij «de Industrie» J. VAN DRUTEN — Utrecht

1915

UNIVERSITEITS BIBLIOTHEEK UTRECHT

AAN MIJNE OUDERS.

De beeindiging mijner academische studiën geeft mij gereede aanleiding allen, die door hun onderwijs tot mijn vorming hebben bijgedragen, van harte mijn dank te betuigen.

In de eerste plaats geldt dit U, Hoogleeraren der Leidsche faculteit voor de Wis- en Natuurkunde, wier leerling ik mocht zijn.

Hooggeleerde LORENTZ, uwe zeer inductieve lessen zijn mij van zeer veel voordeel geweest; het was mij een voorrecht uwe colleges te kunnen volgen; ook de welwillendheid, die gij mij meerdere malen hebt bewezen, blijft bij mij in dankbare herinnering.

Uwe belangrijke en tot dieper naspeuren opwekkende colleges, Hooggeleerde KLUYVER, hebben sterk medegewerkt mijn voorliefde tot de meer wiskundige richting te bepalen.

De nagedachtenis van Professor ZEEMAN zal mij bijblijven als die van een bekwaam en helder docent.

Niet minder ben ik U dankbaar, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor.

Van het eerste oogenblik af, dat gij U hebt bereid verklaard om mij ter vervanging van uw overleden collega ter zijde te staan, zijt gij mij met groote vriendelijkheid tegemoet getreden.

Een groot deel van uw zeer bezetten tijd hebt gij voor mij, die voor U een vreemde was, beschikbaar gesteld; op velerlei wijze hebt gij door uwe goede zorgen mij den weg tot de promotie geeffend.

Door deze bijzondere voorkomendheid hebt gij recht op mijne blijvende erkentelijkheid.

Met dank wil ik verder memoreeren de welwillende en royale beslissing door HEEREN PROVISOREN EN BESTUURDERS van het Heere GODFRIED of SINT JANSLEEN ten mijnen opzichte genomen.

INHOUD.

Bladz.

Inleiding 1

EERSTE HOOFDSTUK.
Rechtstreeksche Bewijzen. 11

TWEEDE HOOFDSTUK.
Analytische Beschouwingen 34

DERDE HOOFDSTUK.
Beschouwingen, welke met de theorie der traagheidsmomenten van puntenstelsels in verband staan . . 66

VIERDE HOOFDSTUK.
Synthetische Beschouwingen. 88

VIJFDE HOOFDSTUK.
Beschouwingen, welke in verband staan met de bepaling der grensellips van tweedegraadsoppervlakken bij evenwijdige projectie op het beeldvlak 98

ZESDE HOOFDSTUK.
Enkele toepassingen van de hoofdstelling der Axonometrie 135

Chronologisch overzicht van alle publicaties, die in dit werk zijn besproken 139

INLEIDING.

Sedert JULIUS WEISBACH in zijn boek „*Anleitung zum axonometrischen Zeichnen*" [1]) de door hem reeds vroeger [2]) gepubliceerde onderzoekingen over de analytische grondslagen der Axonometrie heeft verzameld, kunnen wij zeggen, dat de Axonometrie als zelfstandige wetenschap voor goed een plaats in de Beschrijvende Meetkunde heeft verworven.

Voorzeker LAMBERT [3]) heeft reeds veel eerder, zij het op eenigzins afwijkende wijze, een met de Axonometrie identieke projectiemethode behandeld, en door FARISH [4]) is onder gebruikmaking van een bij KEPLER [5]) voorkomende eigenschap dat „de loodrechte projectie van een kubus op een vlak, dat loodrecht op een kubusdiagonaal is aangebracht, wordt voorgesteld door een regelmatigen zeshoek, welks hoofddiagonalen de projectie der hoofddiagonalen van den kubus voorstellen", een speciale axonometrische projectiemethode, de *isometrie* ingevoerd, welke door SOPWITH [6]) is uitgebreid; maar de arbeid van geen van deze staat ons zóó na als het werk van WEISBACH, waarin voor het eerst door het invoeren van de verkortingsverhoudingen

[1]) Anleitung zum axonometrischen Zeichnen Freyburg 1857.

[2]) J. WEISBACH, Die monodimetrische und anisometrische Projektionsmethode, Polytechn. Mitt v. Volz Karmasch, 1844.

[3]) J. H. LAMBERT, Freye Perspektive Zürich 1759, in de 2de editie van 1774 Abschnitt 7 pg. 156, „von der perspektivischen Entwerfung aus einem unendlich entfernten Gesichtspunkte".

[4]) FARISH, Isometrical Perspective, Transact. of the Cambridge Math. Soc. 1820.

[5]) J. KEPLER, Harmonia Mundi 1619.

[6]) SOPWITH, A treatise on isometrical drawing London 1834.

der eenheidsmaatstaven een exacte onderverdeeling der Axonometrie in *isometrie, monodimetrie* en *anisometrie* werd gegeven, terwijl door het aangeven van den samenhang dezer verkortingsverhoudingen met de goniometrische functies van de door de geprojecteerde assen ingesloten hoeken de analytische grondslagen der Axonometrie volledig zijn behandeld.

Waar in het voorgaande van Axonometrie sprake was werd steeds de orthogonale Axonometrie bedoeld, iets wat historisch geoorloofd is, omdat ten tijde van WEISBACH onder de Axonometrie alleen de loodrechte werd verstaan en er aan scheeve Axonometrie nog niet werd gedacht. Aangezien wij ons ten doel hebben gesteld de hoofdstelling der scheeve Axonometrie te bespreken, schijnt het ons gewenscht, om het juiste licht over de beteekenis dezer stelling te verspreiden, enkele der door WEISBACH gevonden resultaten in het kort aan te geven.

Op de assen van een rechthoekig assenstelsel $O^0 X_1^0 X_2^0 X_3^0$ zetten wij van af den oorsprong O^0 achtereenvolgens drie stukken $O^0 A_1^0$, $O^0 A_2^0$ en $O^0 A_3^0$ van gelijke lengte af, en noemen, in navolging van STEINER, dit lijnentripel een *driebeen*. Wij projecteeren het assenstelsel en het driebeen vervolgens loodrecht op een willekeurig projectievlak V; drie door het punt O, de projectie van O^0, getrokken lijnen $O X_1$, $O X_2$ en $O X_3$ zullen de projecties der ruimteassen, drie op deze lijnen afgezette stukken de projecties der beenen van het driebeen voorstellen [1]).

De verhoudingen tusschen de lengten der projecties $O A_i$ en die der beenen $O^0 A_i^0$ worden axonometrische verkortingsverhoudingen genoemd. Stellen wij

$$v_i = \frac{O A_i}{O^0 A_i^0} (i = 1, 2, 3)$$

dan wordt iedere lijn van eindige lengte, die op een der assen ligt of aan deze evenwijdig is, volgens v_i verkort. Zijn de coördinaten van een punt P^0 in de ruimte ten opzichte

---

[1]) In het vervolg zullen wij steeds de punten in de ruimte van de overeenkomstige in het projectievlak door een nul in den rechten bovenhoek onderscheiden.

van het assenstelsel x_i^0, dan volgt uit het bovenstaande, dat de coördinaten van het punt P, de projectie van P^0 op V, ten opzichte van de geprojecteerde assen X_i door de betrekkingen

$$x_i = v_i\, x_i^0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

zullen worden aangegeven.

Zijn dus de verkortingsverhoudingen bekend, dan kan men bij ieder gegeven punt de coördinaten zijner projectie op V volgens de aangegeven methode vinden, en omgekeerd. In het bovenstaande werd de projectierichting loodrecht op het projectievlak V gekozen; in dit geval zijn de verkortingsverhoudingen identiek met de sinussen van de hoeken, welke de projecteerende straal door O^0 met de assen van $O^0\, X_1^0\, X_2^0\, X_3^0$ insluit. Hieruit volgt, dat de axonometrische verkortingsverhoudingen aan zekere betrekking gebonden zullen zijn; allereerst zijn het in dit geval positieve grootheden, welke hoogstens één kunnen worden, terwijl bovendien

$$\sum_1^3 v_i^2 = 2$$

is; immers deze betrekking bestaat tusschen de kwadraten der sinussen van de hoeken, welke een straal door den oorsprong met de assen van een rechthoekig assenstelsel vormt.

Noemen wij de hoeken door de geprojecteerde assen gevormd

$$\angle X_1\, O\, X_2 = \alpha_3$$
$$\angle X_2\, O\, X_3 = \alpha_1$$
$$\angle X_3\, O\, X_1 = \alpha_2$$

dan zullen, zooals wij reeds boven vermeldden, ook de goniometrische functies dezer hoeken met de verkortingsverhoudingen in verband staan.

Weisbach [1]) vond

$$\cos 2\alpha_i = -\frac{(v_j^4 + v_k^4 - v_i^4)}{2\, v_j^2\, v_k^2} \qquad \left[\begin{array}{c|c|c} i = 1 & 2 & 3 \\ k = 2 & 3 & 1 \\ j = 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

terwijl bovendien

$$\sum_1^3 \alpha_i = 2\pi.$$

---

[1]) J. Weisbach, Anleitung enz. t. a. p. pg. 11.

Om het in deze formules uitgedrukte resultaat beter te kunnen overzien zullen wij het gevondene in den volgenden, reeds door WEISBACH gegeven, regel samenvatten:

„Beschouwt men de kwadraten der verkortingsverhoudingen v_i als zijden van een driehoek, dan zijn de in dien driehoek tegenover deze zijden gelegen hoeken achtereenvolgens $2\alpha_1 - \pi$, $2\alpha_2 - \pi$, $2\alpha_3 - \pi$."

Hieruit blijkt, dat, als wij van de zes grootheden v_i en α_i ($i = 1, 2, 3$) hetzij twee v's of een v en een α willekeurig kiezen, de overblijvende v's en α's door de gegeven betrekkingen volkomen bepaald zijn.

Bij de boven gegeven opvatting der Axonometrie is men dus wat de afbeelding van het assenkruis en van de op de assen gekozen eenheidsmaatstaven betreft aan zeer bepaalde voorwaarden gebonden.

In verband hiermede rijst vanzelf de vraag: Is het niet mogelijk op eenige wijze grootere vrijheid, wat de afbeelding van assenkruis en eenheidsmaatstaven betreft, te verkrijgen?

Het is de groote verdienste van K. A. POHLKE [1]) geweest op deze vraag een bevestigend antwoord te hebben gegeven. Daartoe moest hij evenwel aan de Axonometrie een eenigzins ruimere opvatting [2]) geven door *óók*, wanneer het assenkruis en de eenheidsmaatstaven in *scheef evenwijdige* richting op het projectievlak geprojecteerd worden, deze scheeve projectie onder de Axonometrie te rekenen. Hij bewees, dat in dit geval de volgende stelling, die „hoofdstelling der Axonometrie" genoemd wordt, zal gelden:

„Worden in een plat vlak door een punt a_1 drie lijnen van willekeurige lengte $a_1 x$, $a_1 y$ en $a_1 z$ getrokken, welke willekeurige hoeken met elkander maken, dan kunnen deze steeds beschouwd worden als de evenwijdige projecties van drie even lange op drie onderling loodrechte assen afgezette stukken $a x$, $a y$ en $a z$. Evenwel mag slechts een der lijnen $a_1 x$ enz. of een der door deze lijnen ingesloten hoeken nul zijn."

---

[1]) K. A. POHLKE, hoogleeraar te Berlijn.

[2]) Zie de voorrede van K. A. POHLKE „Darstellende Geometrie I", Gärtner, Berlin, Aufl. 1, 1860.

Deze eigenschap is door POHLKE in 1853 gevonden en in 1860 in zijn „*Darstellende Geometrie*" gepubliceerd zonder bewijs, met de belofte dit in het tweede deel van zijn werk, dat eerst later verschijnen zou, te geven. Eerst in 1876 verscheen de eerste druk van dit tweede deel, terwijl reeds in 1865 het eerste deel in herdruk was uitgekomen, waarin het door SCHWARZ in 1863 gepubliceerde bewijs was opgenomen. Dit laatste geschiedde waarschijnlijk, omdat dit eenvoudige bewijs in een als leerboek bedoeld werk beter op zijn plaats is dan het niet-elementaire bewijs van den schrijver. Ook in anderen vorm is het oorspronkelijk bewijs nooit gepubliceerd, zoodat het eenige wat hieromtrent bekend is, indirect tot ons is gekomen door SCHWARZ [1]), aan wien POHLKE het bewijs mondeling had medegedeeld: „Pohlke heeft de stelling bewezen met behulp van een schaar confocale hyperboloïden, die het projectievlak snijden volgens een schaar confocale hyperbolen en later uit het bewijs een constructie der stukken afgeleid."

Gebruikmakend van deze gegevens heeft PELZ [2]) eene reconstructie van het oorspronkelijk bewijs van POHLKE beproefd, welke, zooals door SCHWARZ [3]) getuigd wordt, hiermede identiek of nagenoeg identiek moet zijn.

Na deze enkele noodzakelijke opmerkingen zullen wij ons van verdere historische mededeelingen onthouden en voor deze verwijzen naar het werkje van WENDLING [4]), waarin de geschiedenis van de stelling uitvoerig behandeld wordt.

Uit het bovenstaande zal de beteekenis, die de door POHLKE gevonden stelling voor de Axonometrie bezit, reeds duidelijk zijn geworden. Van niet minder belang is het stereometrisch vraagstuk, dat de stelling in kwestie aan de orde stelt.

---

[1]) H. A. SCHWARZ. Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie, Journal von Crelle, Bd. 63, 1864, pg. 309—314.

[2]) C. PELZ. «Über einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke». Sitz. Ber. Wien. Abth. IIa, 1877, Bd. 76 pg. 123—138.

[3]) H. A. SCHWARZ; zie een brief aan Mertens te Graz, welke opgenomen is in de brochure van C. Pelz getiteld Herr Küpper und der Pohlke'sche Beweis des Satzes von Pohlke, 1889, Graz.

[4]) E. WENDLING. Der Fundamentalsatz der Axonometrie, Zürich, Speidel 1912.

Wij kunnen, wanneer wij ons plaatsen op het standpunt der Stereometrie, tevens zonder gewrongenheid een onderscheiding invoeren tusschen de hoofdstelling in ruimeren en in engeren zin, welke laatste als een bijzonder geval van de eerste kan worden beschouwd.

Bovendien merken wij op, dat in beide gevallen de stelling tweeledig kan worden geformuleerd, hetgeen zijn grond vindt in de mogelijkheid, hetzij de figuur in het projectievlak, hetzij de figuur in de ruimte tot uitgangspunt der beschouwingen te kiezen. Wij zullen van het stereometrisch vraagstuk in beide gevallen de tweeledige formuleering geven.

Hoofdstelling in ruimeren zin. [1])

a. Iedere vierhoek $O\,A_1\,A_2\,A_3$, welke in een plat vlak is gelegen, kan worden beschouwd als de evenwijdige projectie van een viervlak $O^0\,A_1{}^0\,A_2{}^0\,A_3{}^0$, dat met een gegeven viervlak $P^0\,Q^0\,R^0\,S^0$ gelijkvormig is.

b. Men kan ieder viervlak $O^0\,A_1{}^0\,A_2{}^0\,A_3{}^0$ in een nader te bepalen richting op een nader te bepalen vlak zoodanig projecteeren, dat de projectie $O\,A_1\,A_2\,A_3$ met een gegeven vierhoek $P\,Q\,R\,S$ gelijkvormig is.

Geven wij aan een viervlak, dat een hoekpunt O^0 bezit, waarin drie onderling loodrechte evenlange ribben samenkomen, den naam *rechtzijdig viervlak*, dan kunnen wij op de volgende wijze een formuleering geven van de:

Hoofdstelling in engeren zin.

a. Iedere vierhoek $O\,A_1\,A_2\,A_3$, welke in een plat vlak is gelegen, kan worden beschouwd als de evenwijdige projectie van een rechtzijdig viervlak $O^0\,A_1{}^0\,A_2{}^0\,A_3{}^0$.

b. Men kan een rechtzijdig viervlak $O^0\,A_1{}^0\,A_2{}^0\,A_3{}^0$ in een nader te bepalen richting op een nader te bepalen vlak zoodanig projecteeren, dat de projectievierhoek met een gegeven vierhoek $P\,Q\,R\,S$ gelijkvormig is.

In elk dezer gevallen geldt de beperking „hoogstens drie punten O, A_1, A_2, A_3 mogen op een rechte lijn gelegen zijn".

[1]) Deze uitbreiding is in 1863 het eerst door SCHWARZ opgesteld en wordt door sommigen (DRASCH, PELZ e. a.) ten onrechte aan Reye (1866) toegeschreven.

Waar WENDLING [1]) uitvoerig de noodzakelijkheid dezer beperking heeft aangetoond, zullen wij dit grensgeval niet nader bespreken. Wel willen wij er met een enkel woord op wijzen, dat wij in het geval dat $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ een rechtzijdig viervlak is op eenvoudige wijze kunnen aantoonen de noodzakelijkheid van het bestaan van vier reeksen viervlakken, wanneer bewezen is, dat er een viervlak bestaat, hetwelk aan de gestelde eischen voldoet.

Wij merken daartoe op, dat, wanneer een *rechtzijdig* viervlak $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ gespiegeld wordt ten opzichte van een bepaald vlak, het spiegelbeeld met het oorspronkelijke niet alleen symmetrisch maar ook congruent is.

Voldoet dus het rechtzijdig viervlak $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ aan den gestelden eisch, dan voldoen eveneens:

I. Alle viervlakken, welke ontstaan door het gevondene langs de projectiestralen $O O^0$ evenwijdig te verschuiven.

II. Alle viervlakken, welke ontstaan bij het spiegelen van de onder I gevondene ten opzichte van een door het punt O loodrecht op de projectiestralen aangebracht spiegelvlak. De richting van de projectiestralen is dezelfde als onder I, de zin echter tegengesteld.

III. Alle viervlakken, welke ontstaan bij het spiegelen van de onder I gevondene ten opzichte van het projectievlak als spiegelvlak. De projectiestralen moeten in dit geval eveneens ten opzichte van het projectievlak gespiegeld worden.

IV. Alle viervlakken, welke ontstaan bij het spiegelen van de onder III gevondene, op de wijze onder II aangegeven, ten opzichte van een vlak door O loodrecht op de projectiestralen als spiegelvlak.

Wij zien, dat de reeks der onder IV aangegeven viervlakken uit de onder I aangegevene door tweemaal herhaalde spiegeling is afgeleid.

Is $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ een algemeen viervlak, dat op V volgens $O A_1 A_2 A_3$ wordt geprojecteerd en met een viervlak $P^0 Q^0 R^0 S^0$

---

[1]) WENDLING t. a. p. pg. 7—9.

gelijkvormig is, dan valt het na het bovenstaande niet moeilijk te bewijzen, dat in dit geval twee reeksen viervlakken, welke met de boven onder I en IV aangegeven reeksen van viervlakken overeenkomen, aan het vraagstuk zullen voldoen, terwijl de onder II en III aangegevene met het oorspronkelijk viervlak symmetrisch zijn en dus niet aan de gestelde eischen kunnen voldoen.

Is de stand van het viervlak $O^0 A_1{}^0 A_2{}^0 A_3{}^0$ in de ruimte gegeven en vraagt men de projectievlakken te bepalen, waarop dit viervlak volgens een met den vierhoek $P Q R S$ gelijkvormigen vierhoek $O A_1 A_2 A_3$ wordt geprojecteerd, dan kunnen wij, wanneer één vlak is gevonden, waarvoor aan deze eischen is voldaan, eveneens bewijzen, dat alle aan dit vlak evenwijdige vlakken eveneens voldoen en voorts alle vlakken, welke met deze ten opzichte van de projectiestralen antiparallel zijn aangebracht.

Beschrijven wij uit den oorsprong O^0 van een rechtzijdig viervlak den bol K^0, die door de punten $A_1{}^0$, $A_2{}^0$ en $A_3{}^0$ gaat, of kiezen wij, wanneer $O^0 A_1{}^0 A_2{}^0 A_3{}^0$ een willekeurig viervlak is, de ribben $O^0 A_1{}^0$, $O^0 A_2{}^0$, $O^0 A_3{}^0$ tot toegevoegde halve middellijnen van een ellipsoïde, dan komen wij met problemen van geheel anderen aard in aanraking, die toch tot de boven besprokene in nauwe betrekking staan.

Bij evenwijdige projectie van den bovengenoemden bol of de bovengenoemde ellipsoïde op V is in beide gevallen de schijnbare omtrek een ellips, die wij grensellips zullen noemen.

Wij zullen nu de volgende vraagstukken, wier verwantschap met de reeds aangegeven duidelijk is, even vermelden.

I. Bepaal de grensellips K van een bol K^0 bij evenwijdige projectie op het vlak V, wanneer gegeven is, dat drie onder willekeurige hoeken in V getrokken lijnen, op welke drie stukken $O A_1$, $O A_2$, $O A_3$ van willekeurige lengte zijn afgezet, de evenwijdige projecties voorstellen van een tripel onderling loodrechte stralen van den bol K^0.

II. Bepaal de grensellips K eener ellipsoïde K^0 bij evenwijdige projectie op het vlak V, wanneer gegeven is, dat drie onder willekeurige hoeken in V getrokken

lijnen, op welke drie stukken OA_1, OA_2 en OA_3 van willekeurige lengte zijn afgezet, de evenwijdige projecties voorstellen van een tripel toegevoegde halve middellijnen $O^0A_1^0$, $O^0A_2^0$, $O^0A_3^0$ eener ellipsoïde, dat met een gegeven tripel P^0Q^0, P^0R^0, P^0S^0 gelijkvormig is.

Lossen wij deze vraagstukken op, dan zullen wij zien, dat de ellips K uit de gegevens der projectiefiguur geheel geconstrueerd kan worden, en steeds dezelfde is, onverschillig op welke wijze wij OA_1, OA_2, OA_3 als evenwijdige projecties van een tripel toegevoegde halve middellijnen interpreteeren.

Is de constructie van deze ellips K geschied, dan zijn de volgende problemen in zekeren zin de omgekeerde van de onder I en II genoemde.

III.[1]) Bepaal alle bollen K^0, wier grensellips bij evenwijdige projectie op V door de ellips K, die boven vermeld is, wordt voorgesteld en bewijs, dat al deze bollen een tripel onderling loodrechte stralen $O^0A_1^0$, $O^0A_2^0$, $O^0A_3^0$ bezitten, waarvan de evenwijdige projecties op V door OA_1, OA_2 en OA_3 worden voorgesteld.

IV.[2]) Bepaal alle ellipsoïden, welke bij evenwijdige projectie op V de bovengevonden ellips K tot grensellips hebben, terwijl zij bovendien de eigenschap bezitten nader bepaald te zijn door een tripel toegevoegde halve middellijnen $O^0A_1^0$, $O^0A_2^0$, $O^0A_3^0$, dat met een gegeven tripel P^0Q^0, P^0R^0, P^0S^0 gelijkvormig is, en waarvan de evenwijdige projectie op V door OA_1, OA_2, OA_3 wordt voorgesteld.

De reeds boven opgemerkte tweeledigheid blijkt ook weder bij deze vraagstukken.

---

[1]) Dit vraagstuk is het eerst behandeld door J. W. VON DESCHWANDEN, Anwendung schiefer Parallelprojektionen zu axonometrischen Zeichnungen I Vierteljahrschr. der Naturf. Gesellschaft Zürich, Bd. 8, 1861, pg. 254—284.

[2]) J. MANDL, Der Pohlke'sche Satz der Axonometrie und eine Verallgemeinerung desselben, Sitz. Ber. Wien. Abth. II^a, Bd. 94, 1886, pg. 60—65, heeft het eerst dit vraagstuk in dezen vorm opgesteld.

Zijn ten slotte twee viervlakken zóó ten opzichte van elkander gelegen, dat de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten evenwijdig loopen, terwijl bovendien de overeenkomstige ribben der viervlakken elkander alle in punten van eenzelfde vlak snijden, dan is de ligging dezer viervlakken perspectief-affien.

Ook in het geval, dat een der viervlakken in een vlakken vierhoek overgaat, blijft deze perspectief-affiniteit bestaan. Uit het karakter dezer verwantschap volgt, dat voor het bewijs van de hoofdstelling de methoden der Synthetische Meetkunde met vrucht kunnen worden gebruikt.

EERSTE HOOFDSTUK.

Rechtstreeksche Bewijzen.

In dit hoofdstuk zijn die bewijzen opgenomen, welke met behulp van eenvoudige meetkundige beschouwingen geleverd kunnen worden.

§ 1. Het door SCHWARZ [1]) gegeven bewijs was het eerste, dat aan de eischen van exactheid voldeed. Aangezien het in wezen berust op een tweetal hulpstellingen, zullen wij deze laten voorafgaan.

Hulpstelling I. [2])

Iedere driehoek $A_1\,A_2\,A_3$ in het projectievlak kan beschouwd worden, als de loodrechte projectie van een driehoek $A_1^0\,A_2^0\,A_3^0$, welke met een gegeven driehoek $B\,C\,D$ gelijkvormig is.

Bewijs.

Laten wij aannemen, dat een driehoek $A_1^0\,A_2^0\,A^0{}_3$, gelegen in een vlak E, waarvan de stand ten opzichte van het projectievlak bekend is, aan de gestelde eischen voldoet. Daar wij zoowel den doorgang X der vlakken E en V, als den standhoek ϕ dezer vlakken kennen, zijn wij na het neerslaan van $\Delta\,A_1^0\,A_2^0\,A_3^0$ in V in staat den neergeslagen $\Delta\,A_{1n}\,A_{2n}\,A_{3n}$ volledig te construeeren. Tusschen de projectie en den in V neergeslagen driehoek bestaat een orthogonale affiniteit, voor welke de doorgang X affiniteitsas, de richting loodrecht op deze de affiniteitsrichting is. Wij verlengen de verbindingslijn

[1]) H. A. SCHWARZ, Elementarer Beweis enz. t. a. p.

[2]) Systematisch zijn alle bewijzen dezer hulpstelling, die zich evenzeer voor tweeledige formuleering leent, besproken door E. WENDLING t. a. p. § 6—§ 8.

der punten A_3 en A_{3n} tot deze de homologe lijnen $A_1 A_2$ en $A_{1n} A_{2n}$ in de homologe punten N_1 en N_{1n} snijdt. Worden door de homologe punten A_3 en A_{3n} lijnen l en l_n evenwijdig met de affiniteitsas getrokken, dan snijden deze lijnen de as in hetzelfde punt n.l. het punt in het oneindige, waaruit volgt, dat zij eveneens homoloog zijn. De lijn $A_1 A_2$ wordt door de lijn l in het punt N_2, de lijn $A_{1n} A_{2n}$ door de lijn l_n in in het punt N_{2n} gesneden; de punten N_2 en N_{2n} zijn dus

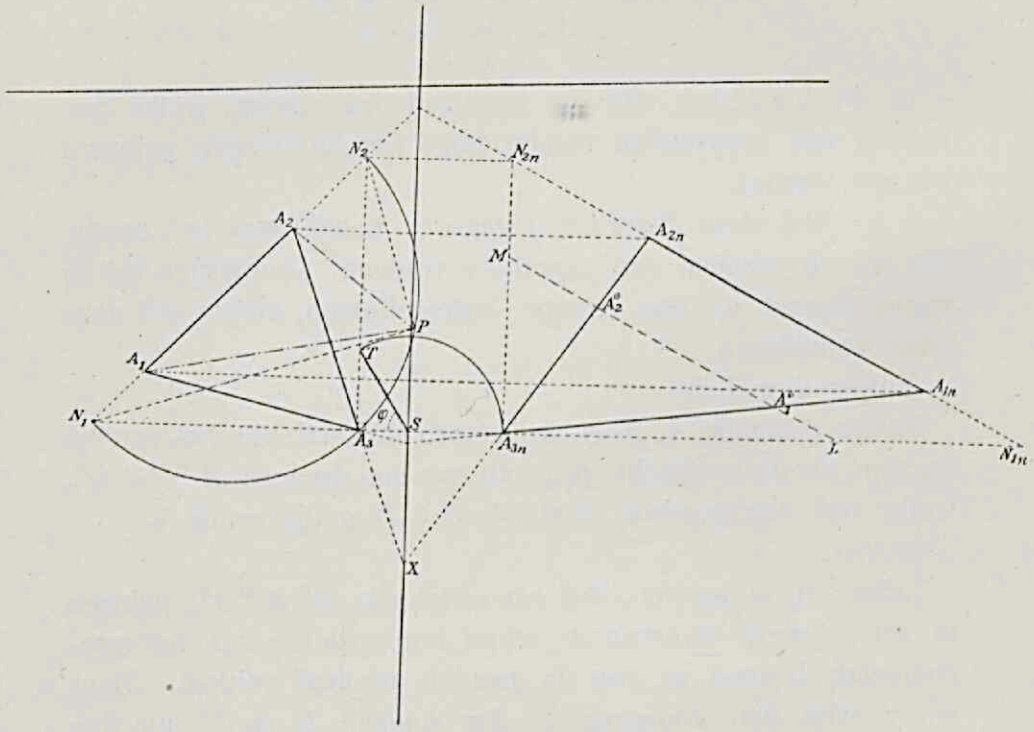


Fig. 1.

homoloog. Omdat de beenen der hoeken $N_1 A_3 N_2$ en $N_{1n} A_{3n} N_{2n}$ met de affiniteitsas en de affiniteitsrichting eener orthogonale affiniteit evenwijdig zijn getrokken, volgt hieruit, dat deze beide hoeken recht zijn. Beschrijven wij dus op de lijn $N_1 N_2$ als middellijn een cirkel, dan is het punt A_3 op den omtrek van dezen cirkel gelegen.

De lijnen $N_1 N_2$ en $N_{1n} N_{2n}$ kunnen in verband met de orthogonale affiniteit in V beschouwd worden als dragers

van projectieve puntenreeksen, wier centrum van projectie het punt in het oneindige op de affiniteitsrichting is.

Projecteeren wij uit de punten A_3 en A_{3n} als projectiecentra de puntenreeksen, wier dragers de lijnen $N_1 N_2$ en $N_{1n} N_{2n}$ zijn, dan zijn de beide stralenbundels, welke op deze wijze ontstaan, projectief. Wordt de stralenbundel, die het punt A_{3n} tot drager heeft door een met $N_{1n} N_{2n}$ evenwijdige lijn $L M$ zoodanig gesneden, dat het op deze lijn door de stralen $A_{3n} A_{1n}$, $A_{3n} A_{2n}$ afgesneden stuk $A_1^* A_2^*$ even lang is als $A_1 A_2$, dan zal de puntenreeks op $L M$, welke door de snijding met den bovengenoemden stralenbundel ontstaan is, niet alleen projectief, maar ook congruent zijn met de puntenreeks, die $N_1 N_2$ tot drager heeft. Hieruit volgt de gelijkheid der segmenten:

$$L A_1^* = N_1 A_1 \text{ en } M A_2^* = N_2 A_2.$$

Verplaatsen wij $\Delta A_{3n} A_1^* A_2^*$, welke met $\Delta A_{3n} A_{2n} A_{1n}$ en dus ook met $\Delta B C D$ gelijkvormig is, zóó, dat $A_1^* A_2^*$ met $A_1 A_2$ samenvalt, dan zullen de punten L en M, wanneer zij aan deze verplaatsing deelnemen met N_2 en N_1 samenvallen, terwijl het punt A_{3n}, dat wij in zijn nieuwen stand door P aangeven, eveneens is gelegen op den omtrek van den cirkel, welke $N_1 N_2$ tot middellijn heeft.

Omgekeerd kunnen wij ter constructie van $\Delta A_{1n} A_{2n} A_{3n}$ van de boven gevonden gegevens gebruik maken.

In het vlak V is dus enkel $\Delta A_1 A_2 A_3$ geteekend. Op de basis $A_1 A_2$ construeeren wij gelijkvormig met den gegeven driehoek $B C D$ een driehoek $A_1 A_2 P$ en brengen door de punten A_3 en P den cirkel, welks middelpunt op $A_1 A_2$ is gelegen. Het verlengde van $A_1 A_2$ wordt door dezen cirkel in de punten N_1 en N_2 gesneden. Wij kiezen nu op het verlengde van $N_1 A_3$, aan de andere zijde van N_1, een *willekeurig* punt A_{3n} en construeeren met dit punt als top $\Delta A_{3n} L M$, welke met $\Delta P N_1 N_2$ congruent is, terwijl wij er voor zorgen, dat de zijde $A_{3n} L$ langs het verlengde van $N_1 A_3$ valt. Bovendien trekken wij in dezen driehoek de lijnen $A_{3n} A_1^*$ en $A_{3n} A_2^*$, welke met $P A_1$ en $P A_2$ overeenkomen. Wij beschouwen de punten P en A_3 als dragers van stralenbundels,

welke de puntenreeks op $N_1 N_2$ projecteeren, zoodat dus $A_3 N_1$, $P N_1$; $A_3 A_2$, $P A_2$ enz. homologe stralenparen vormen en de bundels projectief zijn. De stralenbundel (P), met den drager P, is congruent met (A_{3n}); dus is de laatste projectief met den bundel, welks drager het punt A_3 is; daar evenwel de homologe stralen $A_{3n} L$ en $A_3 N_1$ samenvallen volgt hieruit, dat de snijpunten der andere homologe stralen op een rechte lijn X gelegen zijn, welke, omdat de homologe stralen $A_3 N_2$ en $A_{3n} M$ evenwijdig loopen, met genoemde lijnen evenwijdig zal zijn en dus door constructie gevonden kan worden. Beschouwen wij deze lijn als de affiniteitsas eener orthogonale affiniteit, dan kunnen wij den tot $\Delta A_1 A_2 A_3$ affienen $\Delta A_{1n} A_{2n} A_{3n}$, naar bekend is, construeeren.

Daar in het bovenstaande is aangetoond, dat in dit geval de lijn X beschouwd kan worden als de doorgang van een vlak, waarin een $\Delta A_1^0 A_2^0 A_3^0$ is gelegen gelijkvormig met $\Delta B C D$, welke op V loodrecht volgens $\Delta A_1 A_2 A_3$ kan geprojecteerd worden en om X als doorgang volgens $\Delta A_{1n} A_{2n} A_{3n}$ kan worden neergeslagen, is het gestelde hiermede bewezen. Er zijn twee vlakken E_1 en E_2 symmetrisch ten opzichte van elkander met betrekking tot V mogelijk. De constructie van den standhoek Φ, gevormd door de vlakken E en V, zal na het bovenstaande duidelijk zijn.

Hulpstelling II.

Is $A B C D$ een gegeven vlakke vierhoek, welke loodrecht op een nader te bepalen vlak V zoo geprojecteerd wordt, dat de projectie $A^* B^* C^* D^*$ met een gegeven vierhoek $P Q R S$ gelijkvormig is, dan moet voldaan zijn aan de voorwaarde, dat de verhoudingen der inhouden van drie overeenkomstige driehoeken in de vierhoeken $A B C D$ en $P Q R S$ evengroot zijn.

Bewijs.

Nadat wij in de vierhoeken $A B C D$ en $P Q R S$ de diagonalen hebben getrokken, onderwerpen wij $P Q R S$ aan een gelijkvormigheids-transformatie totdat de diagonalen $A C$ en $P R$ evenlang worden, waarna wij beide vierhoeken in hetzelfde vlak plaatsen en $A C$ met $P R$ laten samenvallen. Laten M en M' de snijpunten der diagonalen respectievelijk

in de vierhoeken $A\,B\,C\,D$ en $P\,Q\,R\,S$ zijn. In de hulpstelling I hebben wij bewezen, dat ieder der driehoeken $A\,B\,M$ enz., waarin de vierhoek $A\,B\,C\,D$ door de diagonalen verdeeld wordt, orthogonaal op een plat vlak zóó kan worden geprojecteerd, dat de projectie $A^*B^*M^*$ met den overeenkomstigen driehoek $P\,Q\,M'$ gelijkvormig is. Zal $A^*\,B^*\,C^*\,D^*$ de vlakke

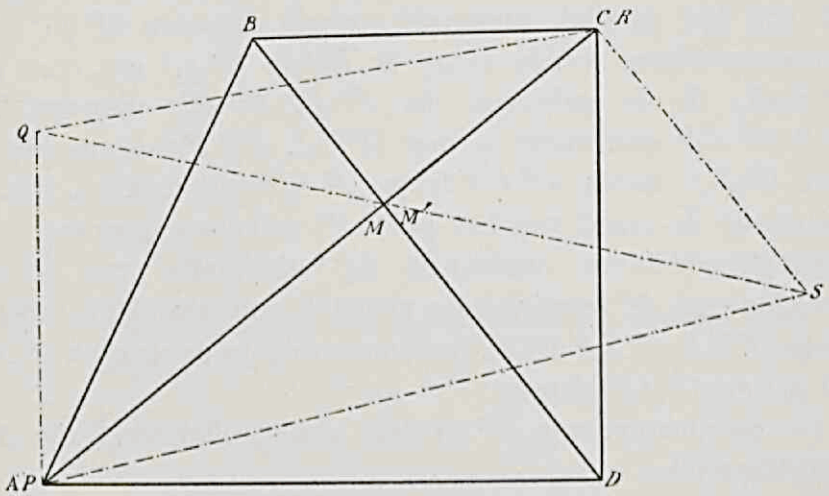


Fig. 2.

vierhoek zijn doch een projectie van $A\,B\,C\,D$, die aan den eisch met $P\,Q\,R\,S$ gelijkvormig te zijn voldoet, dan moeten de driehoeken $A^*\,B^*\,M^*$, $A^*\,D^*\,M^*$ enz. alle in eenzelfde vlak zijn gelegen, hetgeen alleen kan plaats vinden als de snijpunten M en M' der diagonalen in Fig. 2 samen vallen.

Vallen deze punten samen, dan volgt de gelijkheid van de volgende verhoudingen:

$$\frac{A^*M^*}{C^*M^*} = \frac{P\,M'}{R\,M'} = \frac{A\,M}{C\,M}\;;\;\frac{B^*M^*}{D^*M^*} = \frac{Q\,M'}{S\,M'} = \frac{D\,M}{B\,M}.$$

Deze verhoudingen drukken uit, dat de verhoudingen der inhouden van drie paren overeenkomstige driehoeken $A\,B\,M$, $P\,Q\,M'$ enz. dezelfde zijn.

Aangezien deze hulpstelling berust op de vorige en er in dit geval twee vlakken E_1 en E_2 gevonden worden, welke ten opzichte van het projectievlak V symmetrische ligging hebben, en die aan de vraag voldoen, worden in ons geval deze beide vlakken eveneens gevonden.

Na deze inleiding kan het bewijs van SCHWARZ voor de hoofdstelling zelf volgen.

Hierbij is het viervlak $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ als gegeven te beschouwen. Den stand der punten in de ruimte denken wij ons bepaald ten opzichte van een coördinatenstelsel $O^0 X_1^0$, $O^0 X_2^0$, $O^0 X_3^0$, waarvan de oorsprong O^0 met het hoekpunt O^0 van het viervlak samenvalt, terwijl de assen $O^0 X_1^0$ enz. achtereenvolgens vallen langs de ribben $O^0 A_1^0$ enz. van het viervlak. Is de gebroken lijn $P^0 P_2^0 P_1^0 O^0$, waarvan het stuk $P^0 P_2^0$ evenwijdig is met $O^0 X_3^0$, $P_2^0 P_1^0$ evenwijdig is met $O^0 X_2^0$, terwijl $O^0 P_1^0$ langs $O^0 X_1^0$ valt, bekend, dan is daarmede de stand van het punt P^0 volkomen gegeven. Als eenheidsmaatstaven, waarmede de coördinaten van P^0 ten opzichte van de assen worden gemeten, zullen wij bij het meten langs $O^0 X_1^0$, $O^0 X_2^0$, $O^0 X_3^0$ achtereenvolgens de stukken $O^0 A_1^0$, $O^0 A_2^0$ en $O^0 A_3^0$ kiezen.

De coördinaten van P^0 in deze maten uitgedrukt zijn dan respektievelijk:

$$\frac{O^0 P_1^0}{O^0 A_1^0} ; \frac{P_1^0 P_2^0}{O^0 A_2^0} ; \frac{P_2^0 P^0}{O^0 A_3^0}.$$

Projecteeren wij de lijn $O^0 P_1^0 P_2^0 P^0$ en het viervlak $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ in evenwijdige richting op een willekeurig vlak W, waarbij in de projectiefiguren op bekende wijze de projecties der punten worden aangegeven, dan kunnen wij op eenvoudige wijze de gelijkheid der volgende verhoudingen aantoonen:

$$\frac{O^0 P_1^0}{O^0 A_1^0} = \frac{O P_1}{O A_1} ; \frac{P_2^0 P_1^0}{O^0 A_2^0} = \frac{P_2 P_1}{O A_2} ; \frac{P^0 P_2^0}{O^0 A_3^0} = \frac{P P_2}{O A_3}.$$

Is het punt P^0 gelegen op den projectiestraal, die door het punt O^0 gaat, dan wordt de projectie van de gebroken lijn in dit geval een $\Delta P_2 O P_1$, waarbij P met O samenvalt, $O P_1$ langs $O A_1$ valt, $P_1 P_2$ met $O A_2$ evenwijdig is, terwijl $O P_2$ langs de lijn $O A_3$ valt.

Zal het mogelijk zijn het viervlak $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ in evenwijdige richting op een zeker vlak V te projecteeren zoo, dat de projectie $O A_1 A_2 A_3$ aan den gestelden eisch voldoet, dan moeten de hoeken van $\Delta P_2 O P_1$ aan de volgende eischen voldoen,

$\angle O P_2 P_1 = \alpha_1$; $\angle P_2 P_1 O = \alpha_3$; $\angle P_1 O P_2 = \alpha_2 - 180°$,

waarbij in de projectiefiguur

$\angle A_1 O A_2 = \alpha_3$; $\angle A_2 O A_3 = \alpha_1$; $\angle A_3 O A_1 = \alpha_2$

bekende hoeken zijn.

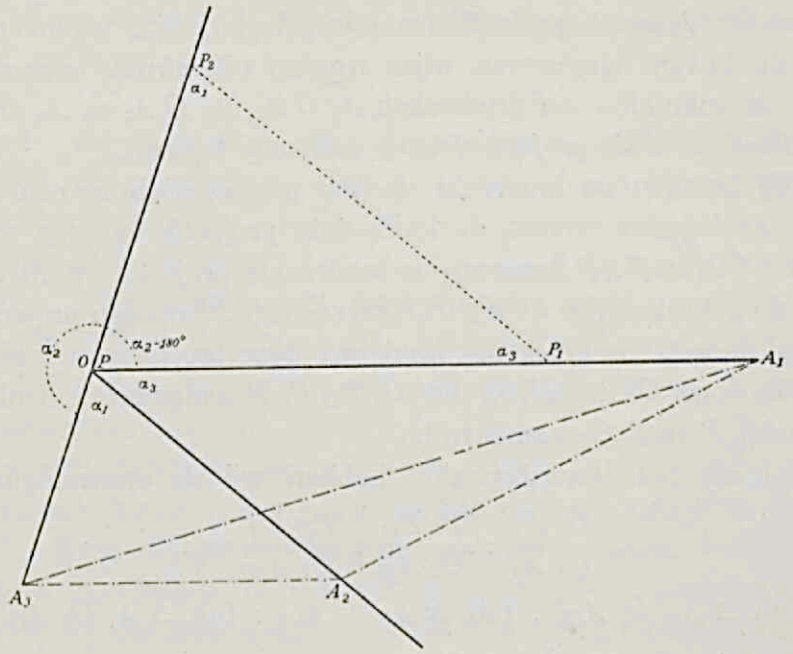


Fig. 3.

Passen wij in $\Delta P_2 O P_1$ den sinusregel toe, dan vinden wij de volgende evenredigheid:

$$O P_1 : P_1 P_2 : P_2 O = \sin \alpha_1 : \sin (\alpha_2 - 180^0) : \sin \alpha_3,$$

welke, als wij de overeenkomstige termen in beide leden achtereenvolgens door $O A_1$, $O A_2$ en $O A_3$ deelen, overgaat in een nieuwe evenredigheid:

$$\frac{O P_1}{O A_1} : \frac{P_1 P_2}{O A_2} : \frac{P_2 O}{O A_3} = \frac{\sin \alpha_1}{O A_1} : \frac{\sin (\alpha_2 - 180^0)}{O A_2} : \frac{\sin \alpha_3}{O A_3}$$

of, wanneer wij in het rechterlid alle termen met $O A_1 \times O A_2 \times O A_3$ vermenigvuldigen, en zooals boven is aangegeven in het linkerlid $\frac{O P_1}{O A_1}$ enz. achtereenvolgens door $\frac{O^0 P_1{}^0}{O^0 A_1{}^0}$ enz. vervangen, in de evenredigheid:

$$\frac{O^0 P_1{}^0}{O^0 A_1{}^0} : \frac{P_1{}^0 P_2{}^0}{O^0 A_2{}^0} : \frac{P_2{}^0 O^0}{O^0 A_3{}^0} =$$

$$= \text{Inh. } \Delta\, A_2\, O\, A_3 : \text{Inh. } \Delta\, A_1\, O\, A_3 : \text{Inh. } \Delta\, A_1\, O\, A_2, \quad \text{(a)}$$

waaruit wij de volgende eigenschap afleiden:

De coördinaten van een willekeurig punt P^0, dat op den door O^0 gaanden projectiestraal is gelegen, zijn, wanneer zij op de boven aangegeven wijze worden uitgedrukt, evenredig met de inhouden der driehoeken $A_2\, O\, A_1$, $A_3\, O\, A_1$ en $A_3\, O\, A_2$.

Hierdoor is de projectierichting volkomen bepaald.

Wij brengen nu loodrecht op deze projectierichting een vlak aan en bepalen daarna de loodrechte projectie van het viervlak $O^0 A_1{}^0 A_2{}^0 A_3{}^0$ benevens de loodrechte projectie op dit vlak van de gebroken lijn $O^0 P_2{}^0 P_1{}^0 P^0$, waarbij P^0 op den projectiestraal door O^0 is gelegen. Laat ons deze projecties respectievelijk door $O_I A_I A_{II} A_{III}$ en $O_I P_{II} P_I P$ aangegeven denken, waarbij P met O_I samenvalt.

Volgens het bovenbepaalde hebben wij de evenredigheid:

$$\frac{O_I P_I}{O_I A_I} : \frac{P_I P_{II}}{O_I A_{II}} : \frac{P_{II} O_I}{O_I A_{III}} =$$

$$= \text{Inh. } \Delta\, A_{II}\, O_I\, A_{III} : \text{Inh. } \Delta\, A_I\, O_I\, A_{III} : \text{Inh. } \Delta\, A_I\, O_I\, A_{II}. \quad \text{(b)}$$

Omdat wij gevonden hebben:

$$\frac{O P_1}{O A_1} = \frac{O^0 P_1{}^0}{O^0 A_1{}^0} = \frac{O_I P_I}{O_I A_I} \text{ enz.}$$

worden in de evenredigheden (a) en (b) de termen in de linkerleden achtereenvolgens dezelfde, waaruit volgt:

$$\text{Inh. } \Delta\, A_2\, O\, A_3 : \text{Inh. } \Delta\, A_1\, O\, A_3 : \text{Inh. } \Delta\, A_1\, O\, A_2 =$$

$$= \text{Inh. } \Delta\, A_{II}\, O_I\, A_{III} : \text{Inh. } \Delta\, A_I\, O_I\, A_{III} : \text{Inh. } \Delta\, A_I\, O_I\, A_{II}.$$

Deze evenredigheid drukt de in hulpstelling II vermeldde voorwaarde uit, zoodat wij vinden: Er zijn twee standen voor het vlak V, welke symmetrisch zijn ten opzichte van het door O^0 op de projectierichting loodrecht aangebrachte hulpvlak H, waarbij de vierhoek $O_I A_I A_{II} A_{III}$ een zoodanige evenwijdige projectie $O A_1 A_2 A_3$ op dit vlak V toelaat, dat deze met $P Q R S$ gelijkvormig is.

Evenwel kan $O_I A_I A_{II} A_{III}$ ook als de loodrechte projectie van

het viervlak $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ op H worden beschouwd, maar dan volgt het bewijs van de hoofdstelling zelve nu ook terstond.

Ten slotte merken wij nog op, dat voor het grensgeval, waarbij de punten O, A_1, A_2, A_3 alle vier op één rechte zijn gelegen, aan de voorwaarde van hulpstelling II niet meer voldaan is en het bewijs daarom zijn geldigheid moet verliezen.

§ 2. De in de drie volgende paragrafen gegeven bewijzen hebben alle op de hoofdstelling in engeren zin betrekking.

Bij het bewijs van VON PESCHKA [1]) is de redeneering als volgt:

Is de gegeven vierhoek $O A_1 A_2 A_3$ in V werkelijk de evenwijdige projectie van een driebeen, dan moet, wanneer de projectierichting dezelfde blijft, met een standsverandering van het driebeen in de ruimte een vorm-verandering van den projectievierhoek gepaard gaan.

De veranderingen, welke in den stand van het driebeen in de ruimte kunnen worden gebracht, zijn van tweeërlei aard.

A. Evenwijdige verschuiving van het driebeen, waarmede geen vorm-verandering van den projectievierhoek gepaard gaat, zoodat wij van deze verplaatsing der ruimtefiguur kunnen afzien.

B. Wenteling van het driebeen achtereenvolgens om elk zijner beenen.

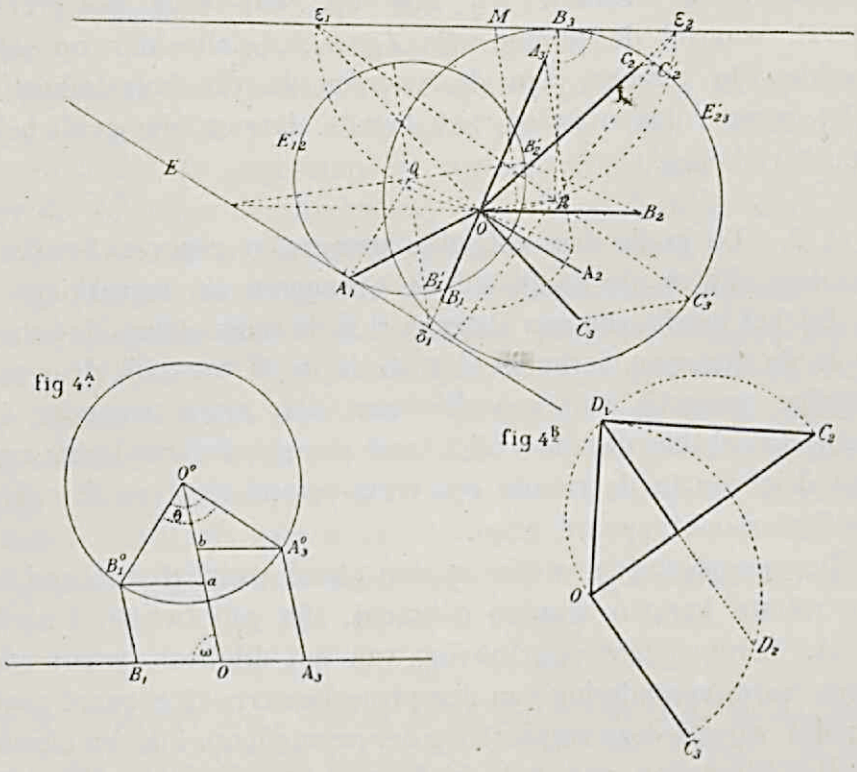
In ieder bijzonder geval zullen wij de vorm-verandering van den projectievierhoek, welke hiermede overeenkomt, nader beschouwen.

Zijn wij in staat aan te toonen, dat door achtereenvolgende wentelingen om de beenen van het driebeen de vorm der projectiefiguur zóó gewijzigd kan worden, dat deze gewijzigde figuur steeds de evenwijdige projectie op het vlak V van een driebeen voorstelt, dan is hiermede bewezen, dat ook omgekeerd de oorspronkelijke vierhoek de projectie moet zijn van een driebeen, dat wij verkrijgen door aan het gevondene de

---

[1]) J. W. VON PESCHKA, Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie, Sitz. Ber. Wien, Abth II^a, Bd. 78, pg. 1043—1055.

wentelingen, welke plaats gevonden hebben, in tegengestelden zin te verrichten.



Zij $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ een der driebeenen, die aan de vraag voldoen. Wordt dit driebeen gewenteld om het been $O^0 A_3^0$, dan zullen de beide andere beenen zich bewegen in het vlak, dat door O^0 loodrecht op $O^0 A_3^0$ kan worden gebracht, terwijl de punten A_1^0 en A_2^0 den omtrek van een in dat vlak gelegen cirkel E_{12}^0 doorloopen. Aangezien $O^0 A_1^0$ en $O^0 A_2^0$ bij deze rotatie steeds twee onderling loodrechte stralen van E_{12}^0 blijven, zullen $O A_1$ en $O A_2$ steeds twee toegevoegde halve middellijnen zijn van de ellips E_{12}, welke bij evenwijdige projectie op V het beeld van E_{12}^0 is. De wenteling om $O^0 A_3^0$ wordt nu voortgezet totdat het punt A_1^0 in het projecteerend vlak, dat door $O^0 A_3^0$ gaat, is gekomen. Wij geven in den nieuwen stand de punten A_1^0 en A_2^0 respectievelijk door B_1^0 en B_2^0 aan. De projectie van B_1^0, het punt B_1, is gelegen op $O A_3$, het punt B_2, de projectie van B_2^0, is een der uiteinden van

de tot $O B_1$ t. o. v. E_{12} toegevoegde middellijn van deze ellips. Om de plaats der punten B_1 en B_2 te bepalen gaan wij als volgt te werk. De ellips E_{12} kan beschouwd worden als de scheeve projectie van een cirkel, welke E_{12} in het punt A_1 raakt en waarvan de straal een lengte $O A_2$ heeft. Het vlak van dien cirkel wordt om den doorgang E met het vlak V neergeslagen. De doorgang E is de raaklijn in het punt A_1 aan E_{12} en dus evenwijdig met $O A_2$. Het middelpunt Q van den neergeslagen cirkel E_{12}' is dan gelegen op de loodlijn in A_1 op E opgericht en wel op een afstand $A_1 Q = O A_2$ van het punt A_1.

Tusschen de ellips E_{12} en den neergeslagen cirkel bestaat een affiene verwantschap. Voor deze affiniteit is E de affiniteitsas, terwijl de verbindingslijn der middelpunten O en Q de affiniteitsrichting bepaalt. Wij kunnen nu door gebruik te maken van de bekende eigenschappen der affiene verwantschap de punten B_1 en B_2, welke overeenkomen met de punten B_1' en B_2' op den cirkelomtrek E_{12}', vinden. De punten B_1' en B_2' vinden wij aldus:

De lijn $O A_3$, op welke B_1 gelegen is, snijdt de affiniteitsas in een punt δ_1; in de affiene figuur komt met $O A_3$ de lijn $Q \delta_1$ overeen, welke den cirkel E_{12}' snijdt o. a. in een punt B_1'. De lijn in Q loodrecht op $Q \delta_1$ opgericht snijdt den cirkel o. a. in een punt B'_2. Hierna kunnen wij de toegevoegde punten B_1 en B_2 zelve vinden. De nieuwe figuur $O B_1 B_2 A_3$ moet, wanneer de in den aanvang gemaakte onderstellingen juist zullen zijn, de evenwijdige projectie voorstellen van een driebeen, dat uit het oorspronkelijke door wenteling om $O A_3^0$ is afgeleid. Deze wenteling kan in tweeërlei zin geschieden, waaruit volgt, dat wij op twee manieren uit de oorspronkelijke projectiefiguur een gewijzigde kunnen afleiden. De beenen $O^0 B_1^0$ en $O^0 A_3^0$ zijn in hetzelfde projecteerend vlak gelegen, het been $O^0 B_2^0$ staat dus loodrecht op dit vlak.

Wij zullen het driebeen vervolgens laten wentelen om $O^0 B_2^0$, waarbij dus $O A_3$ en $O B_1$ alleen in grootte niet in richting veranderen.

In de figuur 4^A is de cirkel, waarop zich in dit geval B_1^0 en A_3^0 bewegen, voorgesteld.

Zij ω de hoek, welke de projectierichting met den doorgang van het projecteerend vlak met V vormt, θ de hoek, dien de projectiestraal door O^0 met $O\,B_1{}^0$ maakt. Verder is $B_1{}^0\,a = B_1\,O$ en $A_3{}^0\,b = A_3\,O$.

In $\Delta\ O^0\,B_1{}^0\,a$ vinden wij $B_1{}^0\,a = \dfrac{r\sin\theta}{\sin\omega}$,

in $\Delta\ O^0\,A_3{}^0\,b$ vinden wij $A_3{}^0\,b = \dfrac{r\cos\theta}{\sin\omega}$.

In verband met het bovenstaande volgt hieruit:

$$O\,B_1{}^2 + O\,A_3{}^2 = \frac{r^2}{\sin^2\omega}.$$

Wordt de wenteling om het been $O^0\,B_2{}^0$ voortgezet, totdat het punt $B_1{}^0$, dat wij in den nieuwen stand door $C_1{}^0$ zullen aangeven, is gelegen op den door O^0 gaanden projectiestraal, dan is de projectie van $O^0\,C_1{}^0$ op V nul, zoodat voor de lengte van $O\,B_3$ gevonden wordt:

$$O\,B_3{}^2 = O\,B_1{}^2 + O\,A_3{}^2.$$

De lengte van $O\,B_3$ is dus volkomen bepaald, terwijl het punt B_3 aan de eene of de andere zijde van O op $O\,A_3$ kan worden gekozen, al naarmate de wenteling om $O^0\,B_2{}^0$ in den eenen of den anderen zin heeft plaats gehad.

De gevonden projectiefiguur $O\,B_2\,B_3$ moet, wil voldaan zijn aan de onderstelling in den aanvang gemaakt, de evenwijdige projectie voorstellen van een door voortgezette wenteling om de as $O^0\,B_2{}^0$ uit het oorspronkelijke afgeleid driebeen. Bij dit driebeen valt een der beenen langs den projectiestraal door O^0. Wentelen wij het driebeen om dit been, dan doorloopen de punten $B_2{}^0$ en $B_3{}^0$ een cirkel $E_{23}{}^0$, welke bij evenwijdige projectie op V door de ellips E_{23}, waarvan $O\,B_2$ en $O\,B_3$ twee toegevoegde halve middellijnen zijn, wordt afgebeeld. De assen van deze ellips vormen het eenige paar toegevoegde middellijnen, welke met elkander rechte hoeken insluiten. Door gebruik te maken van de affiniteit, welke bestaat tusschen de ellips E_{23} en den cirkel E_{23}', die om den raaklijn $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ aan E_{23} in B_3 getrokken in het vlak V is neergeslagen, construeeren wij de assen van E_{23}. Het middelpunt R van bovengenoemden cirkel E_{23}' is gelegen op de

loodlijn, die in B_3 op de lijn $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ is opgericht op een afstand $B_3 R = O B_2$ van het punt B_3, terwijl de straal van dezen cirkel een lengte $O B_2$ bezit.

Door de punten O en R brengen wij den cirkel, waarvan het middelpunt M op de raaklijn $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ is gelegen. De affiniteitsas wordt door dien cirkel in de punten ε_1 en ε_2 gesneden. Tot de lijnen $R \varepsilon_1$ en $R \varepsilon_2$, welke een rechten hoek vormen, zijn dus in de affiniteit de lijnen $O \varepsilon_1$ en $O \varepsilon_2$, voor welke dit eveneens het geval is en die dus de assenrichtingen van de ellips E_{23} aangeven, toegevoegd. De cirkel E_{23}' snijdt $R \varepsilon_2$ en $R \varepsilon_1$ respectievelijk in de punten C_2' en C_3', welke, zooals uit het bovenstaande duidelijk zal zijn, met de uiteinden C_2 en C_3 van de halve assen der ellips E_{23} overeenkomen. Ons rest nu ten slotte aan te toonen, dat de figuur $O C_2 C_3$ steeds de evenwijdige projectie voorstelt van een driebeen, waarvan een been langs den projectiestraal door O^0 valt.

In de afzonderlijke figuur 4^B is $O C_2 C_3$ voorgesteld. Zal de rechte hoek $C_2 O C_3$ inderdaad de evenwijdige projectie voorstellen van een rechten hoek $C_2^0 O^0 C_3^0$, dan moet het kortste (afgebeelde) been $O^0 C_3^0$ evenwijdig met het projectievlak zijn. $O C_3$ stelt dus de ware grootte van dit been voor. Wij brengen door $O^0 C_2^0$ een projecteerend vlak, dat loodrecht staat op V. Uit het punt O kunnen wij op den projectiestraal door C_2^0 een loodlijn $O D^0$ neerlaten, die evenlang zal zijn als het been van het driebeen. Om $O C_2$ slaan wij den driehoek $D^0 O C_2$ in het projectievlak neer. De hoek tusschen de projectierichting en het projectievlak wordt dan door $\angle D_1 C_2 O$ voorgesteld.

Allereerst merken wij op, dat er twee richtingen zijn, welke door de neergeslagen stralen $D_1 C_2$ en $D_2 C_2$ worden aangewezen, waarin men driebeenen op V volgens $O C_2 C_3$ evenwijdig kan projecteeren. Heeft men een dezer projectierichtingen gekozen, dan vindt men twee hierbij passende stellen driebeenen, waarbij een driebeen tot het eerste stel behoorend ten opzichte van een door O loodrecht op de projectierichting aangebracht vlak als spiegelvlak, het spiegelbeeld is van een tot het tweede stel behoorend driebeen.

Wordt een dezer driebeenen aan wentelingen onderworpen om elk zijner beenen, welke in tegengestelde volgorde en in tegengestelden zin als de zooeven beschrevene worden verricht, dan kan men hieruit een driebeen afleiden, welks evenwijdige projectie op V door $O A_1 A_2 A_3$ wordt voorgesteld.

Wij vinden op deze wijze de vier vroeger gevonden stellen van driebeenen terug. Beschouwen wij den bol K^0, waarvan de oorsprong O^0 van een der driebeenen het middelpunt is en die een been tot straal heeft, dan is de ellips K, waarvan $O C_2$ en $O C_3$ de halve assen zijn, de grensellips van dezen bol bij evenwijdige projectie op V; de assenconstructie dezer ellips is hier dus tevens verricht.

§ 3. Een ander rechtstreeksch bewijs is door PELZ [1]) en KÜPPER [2]) geleverd.

Volgens PELZ is het identiek met het oorspronkelijke bewijs van POHLKE. Wij zullen O^0 met O laten samenvallen. De redeneering is hier de volgende. Voldoet $O A_1 A_2 A_3$ aan de onderstelling, dat deze figuur de evenwijdige projectie op V voorstelt van een driebeen, dan moet $\Delta A_1 O A_2$ de afbeelding zijn van een rechthoekig-gelijkbeenigen driehoek $A_1^0 O A_2^0$ en de ellips E_{12}, die $O A_1$ en $O A_2$ tot toegevoegde halve middellijnen heeft, de evenwijdige projectie van een cirkel E_{12}^0, van welke $O A_1^0$ en $O A_2^0$ een rechthoekig stralenpaar vormen, voorstellen. Opdat de cirkel E_{12}^0 bij evenwijdige projectie door de ellips E_{12} zal worden afgebeeld, is het voldoende, dat deze ellips met den cirkel een overigens willekeurige middellijn $B_1 O B_1'$ gemeen hebbe. De cirkel E_{12}^0 kan verder in ieder door $B_1 O B_1'$ gaand vlak zijn gelegen, aangezien dit alleen in de richting, waarin de projectie moet geschieden, verschil oplevert. Is $B_2 O B_2'$ n.l. de tot $B_1 O B_1'$ ten opzichte

---

[1]) C. PELZ, Uber einen neuen Beweis, enz., t. a. p.

[2]) C. KÜPPER, Der Satz von Pohlke, Math. Annal, Bd. 33, 1889, pg. 474—475.

Zie voor de polemiek gevoerd tusschen PELZ en KÜPPER naar aanleiding van de prioriteit der reconstructie van Pohlke's bewijs:
E. WENDLING, t. a. p., pg. 13 en 14.

van E_{12} toegevoegde middellijn, $B_2^0\ O\ B_2^{0\prime}$ de op $B_1\ O\ B_1'$ loodrecht aangebrachte cirkelmiddellijn van E_{12}^0, dan geeft de verbindingslijn der punten B_2^0 en B_2 de richting der projectie aan. Wij denken ons nu voorloopig voor het vlak van den cirkel E_{12}^0 een bepaald vlak aangenomen, richten in O een loodlijn $O\ B_3^0$ ter lengte $O\ B_1$ op dit vlak op en projecteeren B_3^0 op V, volgens de richting door $B_2\ B_2^0$ bepaald, in het punt B_3. De figuren $O\ B_1\ B_2\ B_3$ en $O\ A_1\ A_2\ B_3$ stellen dan de evenwijdige projectie's in de richting $B_2^0\ B_2$ op V voor van de driebeenen $O\ B_1^0\ B_2^0\ B_3^0$ en $O\ A_1^0\ A_2^0\ B_3^0$. In het algemeen vallen de punten B_3 en A_3 niet samen, was dit wel het geval dan zou het bewijs terstond geleverd zijn. Wij stellen de vraag: Kunnen wij door in den stand en in de afmetingen van het driebeen in de ruimte zekere veranderingen aan te brengen, waarmede dus veranderingen in projectierichting en projectiefiguur gepaard gaan, het punt B_3 met A_3 laten samenvallen?

Deze veranderingen mogen, gelijk wij opmerkten, niet willekeurig worden gekozen; slechts een tweetal veranderingen zijn aan te brengen.

A. Aangezien de middellijn $B_1\ O\ B_1'$ van E_{12} geheel willekeurig is aangenomen, kunnen wij $B_1\ O\ B_1'$ alle standen in E_{12} laten innemen.

B. Is een bepaalde middellijn $B_1\ O\ B_1'$ van E_{12} gekozen, dan kunnen wij het door die middellijn gebrachte vlak van den cirkel E_{12}^0 om deze laten wentelen, waarbij wij zorg moeten dragen de projectierichting dienovereenkomstig te wijzigen.

Deze laatste verandering bespreken wij het eerst. Welken stand het wentelende vlak van den cirkel E_{12}^0 ook moge hebben, de punten B_2^0 en B_3^0 zijn steeds gelegen op den omtrek van een cirkel k^0, welke in het vlak door O loodrecht op $B_1\ O\ B_1'$ aangebracht, is gelegen.

Deze cirkel, waarvan de straal de lengte $O\ B_1$ heeft, snijdt V in de punten C_1 en C_1', welke gelegen zijn op de loodlijn $C_1\ O\ C_1'$ op $B_1\ O\ B'$ getrokken op een afstand $O\ C_1 = O\ B_1$ van O. Om de lijn $C_1\ C_1'$ wordt deze cirkel in V neergeslagen volgens C_n.

Zij B_{2n} het neergeslagen punt, het punt B_{3n} kan dan het neergeslagen punt B_3^0 voorstellen ($O\ B_{3n} \perp\!\!\!= O\ B_{2n}$).

In B_{3n} trekken wij een raaklijn aan C_n, welke de rechte $C_1\ C_1'$ in het punt D snijdt.

Nu is $\Delta\, B_{2n}\, O\, B_2 \propto \Delta\, B_{3n}\, D\, B_3$,

omdat de zijden van deze driehoeken twee aan twee evenwijdig loopen.

Het punt B_3 kan dus terstond worden gevonden.

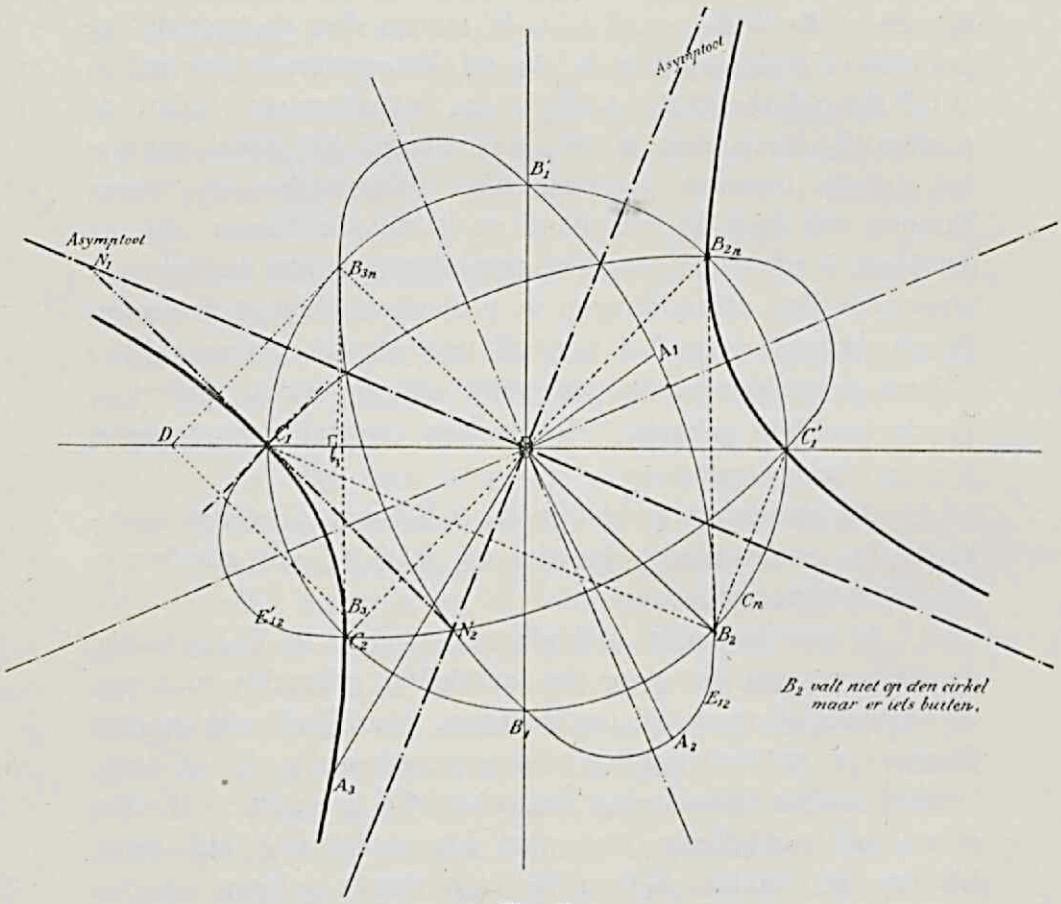


Fig. 5.

Om de meetkundige plaats der punten B_3, welke bij de wenteling van het vlak van den cirkel $E_{12}{}^0$ door deze punten in V wordt doorloopen, nader te bepalen, kiezen wij de rechte $O\, C_1$ tot X-as, $O\, B_2$ tot Y-as van een assenstelsel.

De coördinaten van B_3 ten opzichte van deze assen zijn:

$$\left.\begin{aligned} D\, O &= x \\ D\, B_3 &= y \end{aligned}\right\}$$

Zij $O B_1 = O B_{2n} = O B_{3n} = \alpha$ en $O B_2 = \beta$, dan is in den rechthoekigen $\Delta B_{3n} D O$

$$B_{3n} D = \sqrt{x^2 - \alpha^2}.$$

Daar $\Delta B_{2n} O B_2 \infty \Delta B_{3n} D B_3$ volgt:

$$\frac{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}{y} = \frac{\alpha}{\beta}$$

of na herleiding:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

De gezochte meetkundige plaats is dus een hyperbool, welke naar uit de vergelijking blijkt door de punten $C_1 (\alpha,o)$ en $C_1' (-\alpha,o)$ gaat en in deze punten raaklijnen bezit, die met de Y-as evenwijdig zijn. Is het punt b_3 de loodrechte projectie van B_3^0 op V, dan is de lijn $B_3^0 b_3$ de poollijn van het punt D ten opzichte van k^0 en de lijn $B_{3n} b_3$ de poollijn van D ten opzichte van C_n. De punten D en b_3 worden dus harmonisch gescheiden door C_1 en C_1'. De punten C_1 en C_1' zijn, zooals wij reeds zagen, punten van de hyperbool, terwijl de lijn $D B_3$ met de Y-as evenwijdig is; hieruit kunnen wij afleiden, dat $D B_3$ de poollijn is van b_3 ten opzichte van H en dat de lijn, die het op de hyperbool gelegen punt B_3 met b_3 verbindt, een raaklijn aan deze is. Wordt de ellips E_{12} in haar vlak 90° om O gewenteld en geven wij de nieuwe ellips aan door E_{12}', dan zal deze ellips gaan door de punten C_1 en C_1', terwijl de raaklijnen in deze punten aan E_{12}' getrokken loodrecht zullen staan op $O B_2$, omdat de raaklijnen in de overeenkomstige punten B_1 en B_1' aan de ellips E_{12} met $O B_2$ evenwijdig zijn. De raaklijnen in C_1 en C_1' aan E_{12}' staan dus eveneens loodrecht op de raaklijnen in dezelfde punten aan H getrokken, omdat deze met de Y-as, dus met $O B_2$ evenwijdig zijn.

In de punten C_1 en C_1' snijden de ellips E_{12}' en de hyperbool H elkander orthogonaal.

Uit de vergelijkingen der asymptoten van H

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = O \quad , \quad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = O$$

blijkt, dat deze respectievelijk met de lijn $C_1 B_2$, die van de

assen X en Y de stukken α en β afsnijdt, en met $C_1' B_2$, die van de assen X en Y de stukken $-\alpha$ en β afsnijdt, evenwijdig zijn. Hierin hebben wij een middel ter constructie van de asymptoten. De raaklijn in C_1 aan de hyperbool aangebracht snijdt een der asymptoten van H in de punten N_1 en N_2, welke beide op den afstand β ($C_1 N_1 = C_1 N_2 = \beta$) van het punt C_1 verwijderd zijn.

Verder is

$$O N_1 \times O N_2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

waarbij c de lineaire excentriciteit van de hyperbool voorstelt, terwijl de assen van H den hoek $N_1 O N_2$ en diens supplement halveeren. Een en ander kan langs analytischen weg op eenvoudige wijze worden aangetoond.

Boven hebben wij reeds opgemerkt, dat de in C_1 en C_1' aan de hyperbool getrokken raaklijnen de normalen waren, welke in deze punten op de ellips E_{12}' zijn opgericht. Zet men op de normaal in het punt C_1 op E_{12}' getrokken aan weerskanten van C_1 een stuk β ter lengte van de tot $O C_1$ t. o. v. E_{12}' toegevoegde halve middellijn af, dan deelen volgens een bekende stelling de lijnen $N_1 O$ en $N_2 O$ de hoeken, welke door de assen van E_{12}' gevormd worden, middendoor. Bovendien is

$$N_1 O = \frac{a+b}{2} \qquad N_2 O = \frac{a-b}{2},$$

waarbij a en b de lengte der halve groote en halve kleine as van E_{12}' voorstellen. Stelt c_1' de lineaire excentriciteit van E_{12}' voor, dan is

$$N_1 O \times N_2 O = \frac{a^2 - b^2}{4} = \left(\frac{c'}{2}\right)^2.$$

Hieruit volgt in verband met het vroeger gevondene, dat E_{12}' en H coaxiaal moeten zijn en daar zij bovendien dezelfde lineaire excentriciteiten bezitten ook confocaal zijn.

Laten wij de middellijn $B_1 O B_1'$ van E_{12} achtereenvolgens alle standen in E_{12} innemen, dan vinden wij bij elk van haar standen een hyperbool H, die, zooals wij boven vonden, de meetkundige plaats der punten B_3 is en welke met E_{12}' confocaal

zal zijn. Al deze hyperbolen vormen samen het in V gelegen stelsel der met E_{12}' confocale hyperbolen. Door ieder punt in het vlak, dus ook door het punt A_3, gaat een van deze hyperbolen. De hyperbool door A_3, welke wij ons met de geteekende voor het gemak samengevallen denken, snijdt de ellips E_{12}' in vier punten, de uiteinden van twee evenlange middellijnen $C_1\,C_1'$ en $C_2\,C_2'$. De punten A_3^0, wier evenwijdige projectie op V door A_3 wordt voorgesteld, zijn dus gelegen op twee congruente cirkels k_1^0 en k_2^0, wier vlakken door de middellijnen $C_1\,C_1'$ en $C_2\,C_2'$ respectievelijk loodrecht op V zijn aangebracht.

De raaklijn in A_3 aan H getrokken stelt, zooals gebleken is, de loodrechte projectie van den projectiestraal $A_3\,A_3^0$ voor. Brengen wij dus door deze raaklijn een vlak loodrecht op V, dan zal dit vlak de cirkels k_1^0 en k_2^0 snijden in de punten A_3^0. Er worden dus vier punten A_3^0 gevonden, hetgeen overeenkomt met het vroeger gevonden resultaat, dat er vier driebeenen met den top O zijn.

Om de driebeenen zelf te vinden gaan wij aldus te werk. Door O brengen wij een vlak W loodrecht op het gevonden been $O\,A_3^0$ van een der driebeenen. De snijpunten van dit vlak met de lijnen door A_1 en A_2 evenwijdig aan den projectiestraal $A_3\,A_3^0$ getrokken, zijn de gevraagde punten A_1^0 en A_2^0.

Door evenwijdige verschuiving van elk der gevonden driebeenen langs de projectiestralen, welke gaan door hun eindpunten, kunnen wij bij ieder der vier gevondene een stelsel van driebeenen vinden.

Ten slotte willen wij nog in het kort de waarschijnlijkheid der identiteit van het bovenstaand bewijs met dat van Pohlke nader toelichten. Wordt het driebeen $O\,B_1\,B_2^0\,B_3^0$ om $B_1\,O\,B_1'$ als as gewenteld, dan beschrijven de punten B_2^0 en B_3^0 projectieve puntenreeksen op den cirkelomtrek k^0. Kiezen wij nu k^0 tot basis van een kegel, welks top het in V gelegen punt B_2 is, dan behoort bij ieder punt op den cirkel k^0 een een beschrijvende lijn en omgekeerd.

In iederen stand, dien de lijn $B_2\,B_2^0$ kan innemen, wordt door het bij $B^0{}_2$ passend punt B_3^0 een rechte lijn met

$B_2 B_2^0$ evenwijdig getrokken. Samen vormen deze rechte lijnen de regelschaar der beschrijvende lijnen van een eenbladige hyperboloïde. Het vlak van de richtlijn k^0 staat loodrecht op het projectievlak, de doorsnede hyperbool H van de eenbladige hyperboloïde met dit projectievlak is dus een hoofddoorsnede.

Wordt de middellijn van de ellips E_{12}' om O gewenteld en kiest men in elk der standen van deze middellijn den cirkel op $B\,O\,B_1'$ als middellijn beschreven, welke gelegen is in het door $B_1\,O\,B_1'$ op V loodrecht aangebrachte vlak, tot richtlijn, dan ontstaat op de wijze, zooals boven beschreven is, een schaar confocale hyperboloïden, wier doorsneden met V zijn de hyperbolen H, welke tot de ellips E_{12}' confocaal zijn. Dit is geheel in overeenstemming met het door SCHWARZ [1]) meegedeelde. Kiezen wij de door het punt A_3 gaande hyperboloïde, dan kunnen wij bij deze zooals bij iedere eenbladige hyperboloïde twee congruente cyclische doorsneden aanbrengen, wier vlakken loodrecht zullen staan op het vlak der hoofddoorsnede, die in V gelegen is. Deze doorsneden zijn nu de beide cirkels k_1^0 en k_2^0, welke wij vroeger hebben gevonden.

Naar aanleiding van dit bewijs is een constructie van de lengte van het been r en den door de projectiestralen met het projectievlak gevormden hoek ϕ_1 mogelijk. Wij verwijzen voor deze naar het werkje van WENDLING [2]), waar deze constructie onder eenvoudiger omstandigheden is geleverd.

§ 4. Ten slotte willen wij nog het bewijs van WAELSCH [3]) vermelden.

Zij de figuur P in V een parallelogram, waarvan het punt m middelpunt is. In P is de ellips E_p, welke de zijden van het parallelogram in hun middens a_1, b_1 a_2, b_2 raakt en m tot middelpunt heeft, beschreven. Het punt m wordt met een willekeurig punt M in het vlak verbonden en aan E_p

---

[1]) Zie inleiding pg. 5.

[2]) WENDLING t. a. p. § 4 II^b pg. 42—43.

[3]) E. WAELSCH, Zur Axonometrie, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. Bd. 19, pg. 273—276.

worden de raaklijnen t_1 en t_2, welke met $m\,M$ evenwijdig zijn, geconstrueerd. Wij kunnen een kegelsnede E door de volgende voorwaarden nader bepalen: Het punt M moet middelpunt zijn, zij moet t_1 en t_2 raken, terwijl in de stralen-involutie ten opzichte van E, waarvan het punt m de drager is, zoowel de stralen $m\,a_1$ en $m\,b_1$, als de diagonalen van P een stralenpaar vormen. Aangezien de stralen $m\,a_1$ en $m\,b_1$

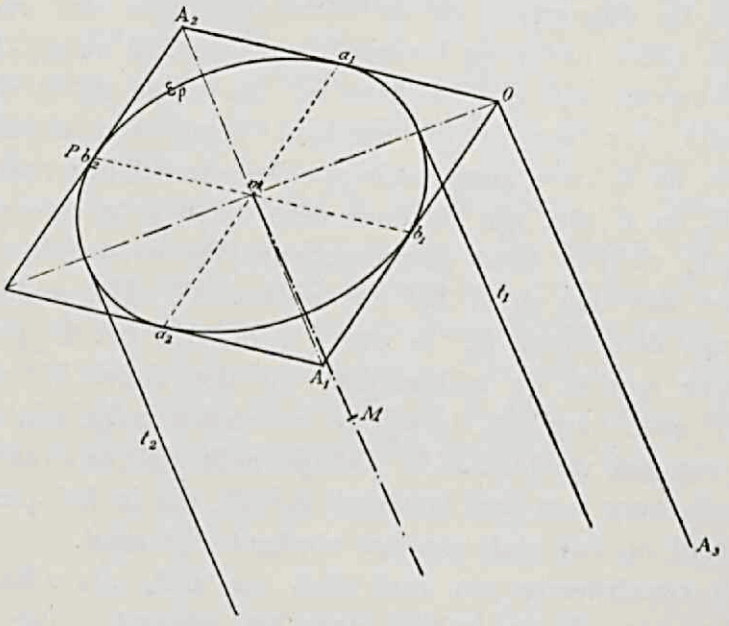


Fig. 6.

door de stralen $m\,O$ en $m\,A_1$ worden gescheiden, zijn de dubbelstralen dezer involutie imaginair, zoodat het punt m binnen de kegelsnede E is gelegen. Bovendien ligt het punt m binnen de aan E getrokken raaklijnen t_1 en t_2, waaruit volgt, dat de kegelsnede een ellips is, immers bij een hyperbool is een *binnen* de kromme gelegen punt niet tusschen twee evenwijdige raaklijnen gelegen. Wij beschouwen de ellips E als den schijnbaren omtrek van een bol E^0 bij evenwijdige projectie op V. Het punt m kan dan beschouwd worden als de evenwijdige projectie van twee op dien bol gelegen punten $m_1{}^0$ en $m_2{}^0$. Brengen wij aan dezen bol in het punt $m_1{}^0$ een raakvlak aan, dan is in dit vlak een parallelogram $P_1{}^0$ gelegen, waarvan het parallelogram P de even-

wijdige projectie op V voorstelt. Aangezien de evenwijdige projecties op V der diagonalen en der verbindingslijnen van de middens van P ten opzichte van de ellips E zijn toegevoegd en alleen de projecties van onderling loodrechte raaklijnen, welke in een punt aan den bol zijn aangebracht, stralenparen opleveren, die ten opzichte van den schijnbaren omtrek aan elkander zijn toegevoegd, moeten in het parallelogram $P_1{}^0$ zoowel de diagonalen als de verbindingslijnen der middens van de zijden onderling loodrecht zijn, waaruit volgt, dat het parallelogram $P_1{}^0$ een vierkant is. De ellips E_p is dus de projectie van een in dit vierkant beschreven cirkel $E_p{}^0$. Daar t_1 en t_2 twee gemeenschappelijke evenwijdige raaklijnen aan E_p en E zijn, zijn de door deze lijnen gebrachte projecteerende vlakken twee gemeenschappelijke evenwijdige raakvlakken aan den cirkel $E_p{}^0$ en den bol E^0. Het middelpunt $m_1{}^0$ van den cirkel $E_p{}^0$ is evenwel op den bol E^0 gelegen, derhalve moeten de middellijnen van den cirkel $E_p{}^0$ en den bol E^0 even lang zijn, terwijl ze bovendien gelijk zijn aan de zijde van het vierkant $P_1{}^0$. De lijn $m\,M$ stelt de evenwijdige projectie voor van den bolstraal $m_1{}^0\,M^0$, die in het punt $m_1{}^0$ loodrecht op het vlak van het vierkant $P_1{}^0$ staat.

Wij construeeren nu met $O\,A_1$ en $O\,A_2$ als zijden een parallelogram P en trekken door het snijpunt m der diagonalen van P een lijn $m\,M$ met $O\,A_3$ evenwijdig, waarvan de lengte de helft van $O\,A_3$ is. Zooals boven is bewezen, kunnen wij het parallelogram P en de rechte $m\,M$ steeds beschouwen, als de evenwijdige projectie van een vierkant en een in het middelpunt m^0 van dit vierkant opgerichte loodlijn $m^0\,M^0$ ter lengte van de halve zijde.

Hieruit volgt, dat $O\,A_3$ de evenwijdige projectie zal voorstellen van een in het punt O^0 op het vlak van dit vierkant opgerichte loodlijn $O^0\,A_3{}^0$, welks lengte evengroot is als de zijde van het vierkant; maar dan is tevens bewezen, dat $O\,A_1\,A_2\,A_3$ de evenwijdige projectie van een driebeen voorstelt.

Wij voegen aan het bovenstaande nog ter completeering het volgende toe. De ellips E kan beschouwd worden als de schijnbare omtrek van twee reeksen bollen bij evenwijdige

projectie. Kiezen wij een bol, die aan de vraag voldoet, dan zijn op deze twee punten m_1^0 en m_2^0 gelegen, waarin de door m gaande projectiestraal dezen bol snijdt. Brengen wij in deze punten raakvlakken aan dien bol aan, dan is in ieder dier vlakken een vierkant P_1^0 of P_2^0 gelegen, dat op V volgens P wordt geprojecteerd. De lijn $m\,M$ kan nu beschouwd worden als de evenwijdige projectie, zoowel van een loodlijn $m_1^0\,M_1^0$ op het vlak van P_1^0, als van een loodlijn $m_2^0\,M_2^0$ op het vlak van P_2^0 opgericht, waaruit volgt, dat $O\,A_3$ beschouwd kan worden als de evenwijdige projectie, zoowel van een loodlijn ter lengte van de middellijn in het hoekpunt O_1^0 van P_1^0 op diens vlak opgericht, als van een anderen loodlijn met dezelfde lengte, welke in het hoekpunt O_2^0 van P_2^0 op diens vlak loodrecht is aangebracht. Bij iederen bol passen dus twee driebeenen, wier evenwijdige projectie op V door $O\,A_1\,A_2\,A_3$ wordt voorgesteld en deze driebeenen zijn symmetrisch ten opzichte van elkander met betrekking tot een vlak, dat op de projectiestralen loodrecht is aangebracht. De vier reeksen driebeenen vinden wij dus weder terug.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Analytische Beschouwingen.

In 1861 gaf H. KINKELIN [1]) een analytische oplossing van de drie volgende vraagstukken.

1) Als de ligging van een driebeen met betrekking tot het projectievlak en de projectierichting gegeven zijn, vraagt men de projectie van het driebeen te bepalen.

2) Als de projectie van een driebeen gegeven is, vraagt men de ligging van dit driebeen ten opzichte van het projectievlak, zijn grootte en de projectierichting te bepalen.

3) Men vraagt te onderzoeken hoeveel reële driebeenen bij een willekeurig aangenomen projectievierhoek behooren.

Het is duidelijk, dat, wanneer wij bij de laatste vraag reële oplossingen vinden, het bewijs voor de hoofdstelling der Axonometrie in engeren zin als geleverd kan worden beschouwd. In de beide eerste vraagstukken weerspiegelt zich reeds het in de inleiding aangewezen dualisme.

Bij de opstelling onzer formules zullen wij den door KINKELIN ingeslagen weg volgen en dus met de oplossing van het eerste vraagstuk beginnen; daarna zullen wij enkele beschouwingen hieraan vastknoopen en de imaginaire oplossingen aanwijzen, welke door KINKELIN niet zijn gevonden; wij hebben dan tevens de gelegenheid enkele door KINKELIN gemaakte fouten te verbeteren.

---

[1]) H. KINKELIN, Die schiefe axonometrische Projektion, Vierteljahrschrift der Naturf. Gesellschaft, Zürich, 6 Jhrg., 1861, pg. 358 en v.v.

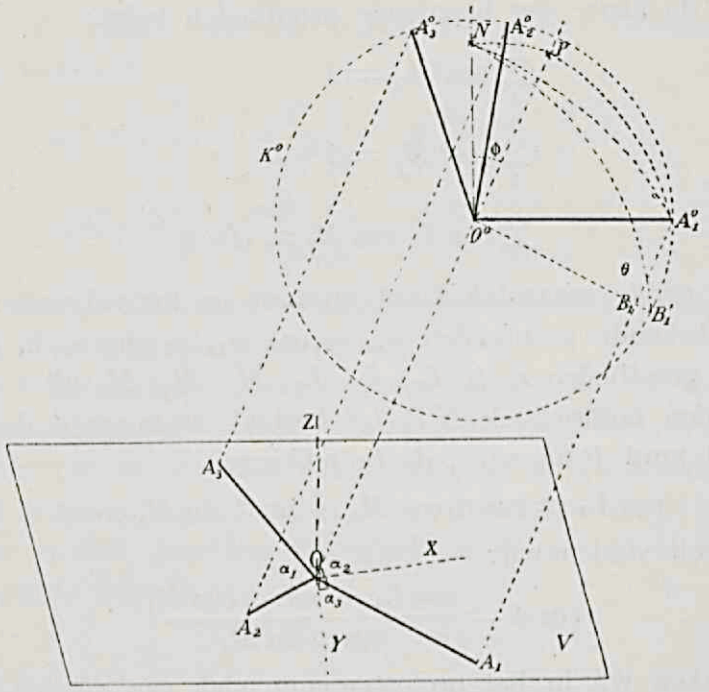


Fig. 7.

In fig. 7 zij V het projectievlak; $O^0\,A_1{}^0\,A_2{}^0\,A_3{}^0$ stelt het driebeen voor, $O\,A_1\,A_2\,A_3$ zijn projectie op V.

$$O^0\,A_1{}^0 = O^0\,A_2{}^0 = O^0\,A_3{}^0 = r,$$

$$O\,A_1 = a_1,\ O\,A_2 = a_2,\ O\,A_3 = a_3.$$

Evenals in Hoofdstuk I § 1 stellen wij:

$\angle A_1\,O\,A_2 = \alpha_3$, $\angle A_2\,O\,A_3 = \alpha_1$, $\angle A_3\,O\,A_1 = \alpha_2$.

$O^0\,N$ zij de normaal op V, $O^0\,P$ geeft de richting der projectie aan:

$$\angle P\,O^0\,N = \phi,\ \text{diens complement } \phi_1.$$

In het volgende schema zijn de door $O^0\,A_i{}^0$ met $O^0\,N$ en $O^0\,P$ gemaakte hoeken aangegeven:

	$O^0\,A_1{}^0$	$O^0\,A_2{}^0$	$O^0\,A_3{}^0$
$O^0\,N$	L_1	L_2	L_3
$O^0\,P$	M_1	M_2	M_3

Uit de keuze der bepalende grootheden volgt:

$$\sum_1^3 \cos^2 L_j = 1 \tag{1}$$

$$\sum_1^3 \cos^2 M_j = 1 \tag{2}$$

$$\sum_1^3 \cos L_j \cos M_j = \cos \phi \tag{3}$$

Het eerste vraagstuk komt nu neer op het volgende: Druk de onbekende grootheden a_1, a_2, a_3, α_1, α_2 en α_3 in de gegeven grootheden r, ϕ, L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3 uit.

In den boldriehoek $N P A_1{}^0$ bestaat, wanneer ψ den hoek bij het punt P aanwijst, de betrekking:

$$\cos L_1 = \cos \phi \cos M_1 + \sin \phi \sin M_1 \cos \psi.$$

Hieruit vinden wij:

$$\cos \psi = \frac{\cos L_1 - \cos \phi \cos M_1}{\sin \phi \sin M_1} \tag{4}$$

Trekken wij in het projecteerende vlak van $O^0 A_1{}^0$ de lijn $O^0 B_1$ evenwijdig met $O A_1$ tot deze den bol in het punt B_1' snijdt, dan is de boldriehoek $N P B_1'$ rechtzijdig en daar de zijde $P B_1' = 180° - \theta$ is, wanneer θ den hoek $O^0 B_1 A_1{}^0$ aanwijst, vinden wij:

$$\cos \psi = \cot \phi \cot \theta \tag{5}$$

Stellen wij $\cos \psi$ uit (4) en (5) aan elkander gelijk, dan volgt:

$$\frac{\cos L_1 - \cos \phi \cos M_1}{\sin \phi \sin M_1} = \cot \phi \cot \theta$$

of

$$\cot \theta = \frac{\cos L_1 - \cos \phi \cos M_1}{\cos \phi \sin M_1} \tag{6}$$

In $\Delta A_1{}^0 O^0 B_1$ passen wij den sinusregel toe en vinden:

$$a_1 = \frac{r \sin M_1}{\sin \theta}$$

of

$$a_1{}^2 = \frac{r^2 \sin^2 M_1}{\sin^2 \theta} = r^2 \sin^2 M_1 (1 + \cot^2 \theta) \tag{7}$$

In verband met (6) volgt na geringe omvorming uit (7):

$$a_1{}^2 = r^2 \left[1 + \frac{\cos^2 L_1}{\cos^2 \phi} - 2 \frac{\cos L_1 \cos M_1}{\cos \phi}\right],$$

terwijl op geheel dezelfde wijze twee andere formules gevonden worden:

$$a_2^2 = r^2\left[1 + \frac{\cos^2 L_2}{\cos^2 \phi} - 2\,\frac{\cos L_2 \cos M_2}{\cos \phi}\right]$$
$$a_3^2 = r^2\left[1 + \frac{\cos^2 L_3}{\cos^2 \phi} - 2\,\frac{\cos L_3 \cos M_3}{\cos \phi}\right] \qquad (8)$$

Wij kunnen om de α's in bekende grootheden uit te drukken de volgende hulpstelling toepassen:

Wordt een vlakke figuur, met een oppervlakte O, in evenwijdige richting op een plat vlak geprojecteerd en is O' de oppervlakte van de projectie, dan bestaat, als de projectierichting met de normalen op de beide vlakken respektievelijk de hoeken n en n' vormt, tusschen de oppervlakten der beide figuren de volgende betrekking:

$$O : O' = \cos n' : \cos n.$$

Beschouwen wij $\Delta\, A_1^0\, O^0\, A_2^0$ en zijn projectie $\Delta\, A_1\, O\, A_2$ op het projektievlak V, dan vinden wij door toepassing van bovenstaande stelling de betrekking:

$$\frac{1}{2} r^2 : \frac{1}{2} a_1\, a_2 \sin \alpha_3 = \cos \phi : \cos M_3$$

of

$$\sin \alpha_3 = \frac{r^2 \cos M_3}{a_1\, a_2 \cos \phi} \quad ,$$

terwijl op geheel dezelfde wijze twee andere formules gevonden worden:

$$\sin \alpha_2 = \frac{r^2 \cos M_2}{a_3\, a_1 \cos \phi}$$
$$\sin \alpha_1 = \frac{r^2 \cos M_1}{a_2\, a_3 \cos \phi} \qquad (9)$$

Maken wij gebruik van de gevonden formules (8) en (9), dan kunnen wij nu overgaan tot de oplossing van het tweede door KINKELIN gestelde vraagstuk, dat neerkomt op het volgende:

Druk de grootheden r, ϕ, L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3, welke onbekend zijn, uit in de grootheden a_1, a_2, a_3, α_1, α_2 en α_3, die verondersteld worden gegeven te zijn.

Tellen wij in (8) de drie vergelijkingen bij elkander op, dan vinden wij:

$$\sum_1^3 a_j^2 = r^2\left(1+\frac{1}{\cos^2\phi}\right) \tag{10}$$

Wij zullen $\sum_1^3 a_j^2$ voorstellen door P, dus:

$$P = r^2\left(1+\frac{1}{\cos^2\varphi}\right) \tag{10a}$$

Zij verder:

$$\sum a_1^2 a_2^2 \sin^2\alpha_3 = Q^2 \text{ of } Q = \pm\sqrt{\sum a_1^2 a_2^2 \sin^2\alpha_3}$$

dan volgt na eenige omvorming uit de drie vergelijkingen van (9) door optelling:

$$Q^2 = \frac{r^4}{\cos^2\phi} \tag{11}$$

of

$$Q = \frac{r^2}{\cos\varphi} \tag{11a}$$

Uit (10a) en (11) elimineeren wij allereerst r^2 en vinden als eliminatieresultaat de vergelijking:

$$Q^2\cos^2\phi - P\cos\phi + Q = 0$$

of

$$\cos\phi = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4Q^2}}{2Q} \tag{12}$$

Worden in den vorm $P^2 - 4Q^2$ de grootheden a_1, a_2 enz., $\sin\alpha_1$, $\sin\alpha_2$ enz. weder ingevoerd, dan kan aan dezen vorm een zoodanige gedaante gegeven worden, dat ze uit de som van eenige kwadraten bestaat en dus steeds positief of nul moet zijn.

Aangezien P steeds positief is volgt hieruit:

$$P \geqq 2Q.$$

Wij zullen voorloopig alleen reëele oplossingen van het vraagstuk moeten beschouwen en dan in de formule (12) het negatieve teeken kiezen, daar anders $\cos\phi > 1$ is.

Wij stellen dus:

$$\cos\phi = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q^2}}{2Q} \tag{13}$$

Uit deze formule blijkt tevens, dat het teeken van $\cos\Phi$ afhankelijk is van het teeken van Q.

In verband met de formule (11a) volgt hieruit:

$$r^2 = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4\,Q^2}}{2} \tag{14}$$

Deze waarde voor r^2 is de kleinste wortel van de vierkantsvergelijking:

$$r^4 - P\,r^2 + Q^2 = 0, \tag{15}$$

welke ontstaat, wanneer wij uit (10) en (11) $\cos\Phi$ elimineeren.

De grootste wortel r^2 past, mede in verband met (11a), bij de waarde:

$$\cos\Phi = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4\,Q^2}}{2\,Q},$$

welke, zooals reeds opgemerkt werd, voorloopig niet nader wordt beschouwd.

Nu $\cos\Phi$ en r blijkens de formules (13) en (14) in bekende grootheden zijn uitgedrukt en dus *een zeer bepaalde waarde hebben ontvangen* kunnen wij overgaan tot de oplossing van $\cos L_1$ enz., $\cos M_1$ enz., waarin wij r en $\cos\Phi$ zullen laten staan teneinde deze uitdrukkingen niet te samengesteld maken.

Uit (9) vinden wij: [1])

$$\begin{aligned}
\cos M_1 &= \frac{a_2\,a_3\sin\alpha_1}{r^2}\cos\Phi \\
\cos M_2 &= \frac{a_3\,a_1\sin\alpha_2}{r^2}\cos\Phi \\
\cos M_3 &= \frac{a_1\,a_2\sin\alpha_3}{r^2}\cos\Phi
\end{aligned} \tag{16}$$

Daar volgens (11a):

$$\frac{r^2}{\cos\Phi} = \pm Q = \pm\sqrt{\Sigma\, a_1^2\, a_2^2 \sin^2\alpha_3}$$

is bijv.

$$\cos M_3 = \frac{a_1\,a_2\sin\alpha_3}{\pm\sqrt{\Sigma\, a_1^2\, a_2^2\sin^2\alpha_3}},$$

[1]) Hier kunnen wij tevens wijzen op een door KINKELIN gemaakte vergissing (trouwens reeds door SCHWARZ opgemerkt) waarbij de projectierichting en de richting van den normaal op V worden verwisseld en dus de formules (16) als betrekking hebbend op met de normaal gevormde hoeken worden geinterpreteerd.

waaruit volgt, dat $\cos M_3$ enz. steeds reëel en kleiner dan één is, zoodat wij mogen besluiten, dat de hoeken M_1 enz. steeds reëel zijn.

Substitueeren wij $\cos M_1$ enz. uit (16) in (2), dan blijkt, dat de gevonden waarden aan de voorwaarden voldoen.

De vergelijkingen (8) kunnen worden opgelost als vierkantsvergelijkingen in $\cos L_j$ $(j = 1, 2, 3)$, waarna wij vinden:

$$\begin{aligned}
\cos L_1 &= \cos\phi \cos M_1 \pm \frac{\cos\phi}{r}\sqrt{a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1} \\
\cos L_2 &= \cos\phi \cos M_2 \pm \frac{\cos\phi}{r}\sqrt{a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2} \qquad (17) \\
\cos L_3 &= \cos\phi \cos M_3 \pm \frac{\cos\phi}{r}\sqrt{a_3^2 - r^2 \sin^2 M_3}
\end{aligned}$$

Wij zullen nagaan hoe de teekens in de formules (17) moeten gekozen worden, opdat door een zoo gevonden stel waarden voor $\cos Lj$ aan de voorwaarde (1) voldaan zij.

Evenwel merken wij te voren reeds op:

$$a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1 > 0.$$

Nu is:

$$\sin^2 M_1 = 1 - \cos^2 M_1 = \frac{a_1^2 (a_2^2 \sin^2 \alpha_3 + a_3^2 \sin^2 \alpha_2)}{Q^2}$$

$$r^2 = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4\,Q^2}}{2} = \frac{2\,Q^2}{P + \sqrt{P^2 - 4\,Q^2}} \quad ,$$

terwijl $(P^2 - 4\,Q^2)$ na substitutie der overeenkomstige waarden van P en Q gebracht kan worden in den vorm:

$$\begin{aligned}
(P^2 - 4\,Q^2) = (a_1^2 + a_2^2 \cos 2\,\alpha_3 + a_3^2 \cos 2\,\alpha_2)^2 + \\
+ (a_2^2 \sin 2\,\alpha_3 - a_3^2 \sin 2\,\alpha_2)^2,
\end{aligned}$$

zoodat wij vinden:

$$a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1 = \frac{a_1^2 [a_1^2 + a_2^2 \cos 2\,\alpha_3 + a_3^2 \cos 2\,\alpha_2 + \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 \cos 2\alpha_3 + a_3^2 \cos 2\alpha_2)^2 + (a_2^2 \sin 2\alpha_3 - a_3^2 \sin 2\alpha_2)^2}]}{P + \sqrt{P^2 - 4\,Q^2}}$$

Aangezien de waarde van den in den bovenstaanden vorm tusschen de haken voorkomenden wortelvorm, welke het

positieve teeken bezit, uit den aard der zaak grooter is dan $(a_1^2 + a_2^2 \cos 2\alpha_3 + a_3^2 \cos 2\alpha_2)$ moet de vorm aan den rechterkant tusschen de vierkante haken en mitsdien het geheele rechter lid positief zijn.

Naar analogie vinden wij:

$$a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2 > 0$$
$$a_3^2 - r^2 \sin^2 M_3 > 0.$$

Substitueeren wij de waarde van $\cos L_j$ $(j = 1, 2, 3)$ uit (17) in (1). Voldoen deze waarden aan de voorwaarde, dan is hiermede tevens aangetoond, dat $\cos L_j$ $(j = 1, 2, 3)$ kleiner dan of hoogstens gelijk aan één zijn.

$$\sum_1^3 \cos^2 L_j = 1 \qquad (1)$$

Het resultaat der substitutie is:

$$\cos^2 \Phi \sum_1^3 \cos^2 M_j + \frac{\cos^2 \Phi}{r^2}\left[\sum_1^3 a_j^2 - r^2 \sum_1^3 \sin^2 M_j\right] +$$
$$+ 2\frac{\cos^2 \Phi}{r}\left[\pm \cos M_1 \sqrt{a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1} \pm\right.$$
$$\left.\pm \cos M_2 \sqrt{a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2} \pm \cos M_3 \sqrt{a_3^2 - r^2 \sin^2 M_3}\right] = 1$$

of na herleiding:

$$\pm \cos M_1 \sqrt{a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1} \pm \cos M_2 \sqrt{a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2} \pm$$
$$\pm \cos M_3 \sqrt{a_3^2 - r^2 \sin^2 M_3} = 0$$

dus:

$$\pm \cos M_1 \sqrt{a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1} \pm \cos M_2 \sqrt{a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2} =$$
$$= \mp \cos M_3 \sqrt{a_3^2 - r^2 \sin^2 M_3}.$$

Verheffen wij beide leden dezer vergelijking in het kwadraat, dan vinden wij:

$$\cos^2 M_1 (a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1) + \cos^2 M_2 (a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2) \pm 2 \cos M_1$$
$$\cos M_2 \sqrt{(a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1)(a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2)} =$$
$$= \cos^2 M_3 (a_3^2 - r^2 \sin^2 M_3)$$

of

$$\cos^2 M_1 (a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1) + \cos^2 M_2 (a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2) -$$
$$- \cos^2 M_3 (a_3^2 - r^2 M_3) = \mp 2 \cos M_1$$
$$\cos M_2 \sqrt{(a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1)(a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2)} \qquad (18)$$

Aan den rechterkant moet het positieve teeken gekozen worden, wanneer in de vergelijkingen (17) $\sqrt{a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1}$ en $\sqrt{a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2}$ hetzelfde teeken hetzij positief of negatief, bezitten, het negatieve daarentegen, als de teekens der genoemde wortelvormen verschillend zijn.

Substitueeren wij in (18) de waarden van r^2, $\cos M_1$ enz., zooals die boven zijn aangegeven, dan volgt na uitvoerige omwerking, wanneer wij stellen:

$$\Delta = (a_1^2 + a_2^2) \cos \alpha_3 + a_3^2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) + \sqrt{P^2 - 4\,Q^2} \cos \alpha_3$$

$$\Delta = \pm \sqrt{\Delta^2} \qquad (19)$$

Daar $\Delta \neq 0$ kan dit alleen een identiteit zijn, hetgeen noodzakelijk is willen de waarden voor $\cos L_1$ enz. kleiner zijn dan één, wanneer in het rechterlid het positieve teeken voorkomt.

Dit involveert evenwel, dat bij alle in (17) voorkomende vergelijkingen het teeken voor den wortelvorm in het rechterlid hetzelfde moet zijn, zoodat er slechts twéé stellen waarden voor $\cos L_1$ enz. gevonden worden, die voldoen n.l.:

$$\left.\begin{aligned}
\cos L_1 &= \cos \phi \cos M_1 + \frac{\cos \Phi}{r} \sqrt{a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1} \\
\cos L_2 &= \cos \phi \cos M_2 + \frac{\cos \Phi}{r} \sqrt{a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2} \\
\cos L_3 &= \cos \phi \cos M_3 + \frac{\cos \Phi}{r} \sqrt{a_3^2 - r^2 \sin^2 M_3}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos L_1 &= \cos \phi \cos M_1 - \frac{\cos \Phi}{r} \sqrt{a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1} \\
\cos L_2 &= \cos \phi \cos M_2 - \frac{\cos \Phi}{r} \sqrt{a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2} \\
\cos L_3 &= \cos \phi \cos M_3 - \frac{\cos \Phi}{r} \sqrt{a_3^2 - r_2 \sin^2 M_3}
\end{aligned}\right\}$$

In dit geval is bovendien voldaan aan de voorwaarde (3).

Immers bij substitutie van de gevonden waarden voor $\cos L_1$ enz., $\cos M_1$ enz. in:

$$\cos \phi = \sum_1^3 \cos L_j \cos M_j \qquad (3)$$

vinden wij:

$$\cos\phi = \cos\phi \sum_1^3 \cos^2 Mj + \frac{\cos\phi}{r} \{ \pm \cos M_1 \sqrt{a_1^2 - r^2 \sin^2 M_1}$$

$$\pm \cos M_2 \sqrt{a_2^2 - r^2 \sin^2 M_2} \pm \cos M_3 \sqrt{a_3^2 - r^2 \sin^2 M_3} \},$$

welke vergelijking tot de gedaante in (18) aangegeven terstond kan worden teruggebracht.

Wij zullen in de volgende paragraaf nog enkele afleidingen voor de formules (10) en (11) geven en daarna in § 3 nader bespreken het aantal reëele driebeenen, welke aan het vraagstuk voldoen, terwijl tevens de imaginaire oplossingen zullen worden aangewezen.

§ 2. De formules (10) en (11) kunnen, zooals WAELSCH [1]) heeft aangetoond, ook met behulp van de vectoranalyse worden afgeleid.

De eenheidsvectoren, loodrecht op V en langs OP, zullen wij achtereenvolgens door de symbolen p en l aangeven; O en O^0 laten wij weer samenvallen.

De vectoren $O^0A_1^0$, $O^0A_2^0$ en $O^0A_3^0$ duiden wij aan met a_1^0, a_2^0 en a_3^0, de vectoren OA_1 enz. door a_1 enz.

Steeds geldt:

$$|a_1^0| = |a_2^0| = |a_3^0| = r.$$

De vroeger gebruikte grootheden P en Q kunnen wij nu aldus aangegeven:

$$P = \sum_1^3 (aj \,.\, aj) = \sum_1^3 |aj|^2$$

$$Q^2 = \sum_1^3 |[a_2\, a_3]|^2.$$

Een vector door O, welke gelegen is in het projecteerend vlak, dat door een der vectoren OAj^0 gebracht kan worden, kunnen wij in het algemeen voorstellen door:

$$aj = aj^0 + qj \,.\, l, \qquad (20)$$

waarbij qj een onbepaalde coëfficiënt is.

[1]) E. WAELSCH, Parallelperspektive enz. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. 21, 1912, pg. 21—26.

Is a_j de vector OA_j, die in V gelegen is, dan wordt de waarde van q_j bepaald; geven wij deze aan door μ_j, dan moet aangezien in dit geval:

$$(a_j \,.\, p) = 0$$

of in verband met (20):

$$(a_j^0 \,.\, p) + \mu_j \,(l \,.\, p) = 0$$

wegens

$$\left.\begin{aligned} (a_j^0 \,.\, p) &= r \cos L_j \\ (l \,.\, p) &= \cos \Phi \end{aligned}\right\}$$

en

de coëfficiënt μ_j de waarde hebben:

$$\mu_j = -\frac{r \cos L_j}{\cos \Phi}.$$

De vector a_j is dus in dit geval nader bepaald als:

$$a_j = a_j^0 - \frac{r \cos L_j}{\cos \Phi} \,.\, l.$$

Hieruit leiden wij af:

$$a_j^2 = a_j^{02} - \frac{2\, r \cos L_j}{\cos \Phi}(a_j^0 \,.\, l) + \frac{r^2 \cos^2 L_j}{\cos^2 \Phi} \qquad (21)$$

en daar:

$$(a_j^0 \,.\, l) = r \cos M_j$$

vinden wij:

$$|\, a_j \,|^2 = r^2 - \frac{2\, r^2 \cos L_j \cos M_j}{\cos \Phi} + \frac{r^2 \cos^2 L_j}{\cos^2 \Phi}$$

of na sommatie over alle waarden $|\, a_j \,|^2$ $(j = 1, 2, 3)$

$$P = 3\, r^2 - \frac{2\, r^2}{\cos \Phi} \sum_1^3 \cos L_j \cos M_j + \frac{r^2}{\cos^2 \Phi} \sum_1^3 \cos^2 L_j.$$

Dus is:

$$P = 3\, r^2 - 2\, r^2 + \frac{r^2}{\cos^2 \Phi} = r^2 \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \Phi}\right) \qquad (10^a)$$

Aangezien de projecties der vectoren a_j en a_j^0 op een vlak, dat loodrecht op OP staat, even groot zijn, volgt hieruit eveneens:

$$([a_2\, a_3] \,.\, l) = ([a_2^0\, a_3^0] \,.\, l) \qquad (22)$$

of

$$|\, [a_2\, a_3] \,| \cos \Phi = r^2 \cos M_1.$$

Wij vinden op deze wijze twee soortgelijke betrekkingen. Na vierkantsverheffing en optelling volgt hieruit:

$$\cos^2\Phi \sum |[a_2\, a_3]|^2 = r^4$$

$$Q^2 \cos^2\Phi = r^4$$

$$\pm\, Q = \frac{r^2}{\cos\Phi} \qquad (11^a)$$

Ook op meer aanschouwelijke wijze is een afleiding der formules (10ª) en (11ª) te geven, wanneer wij den door SOBOTKA [1]) aangewezen weg volgen.

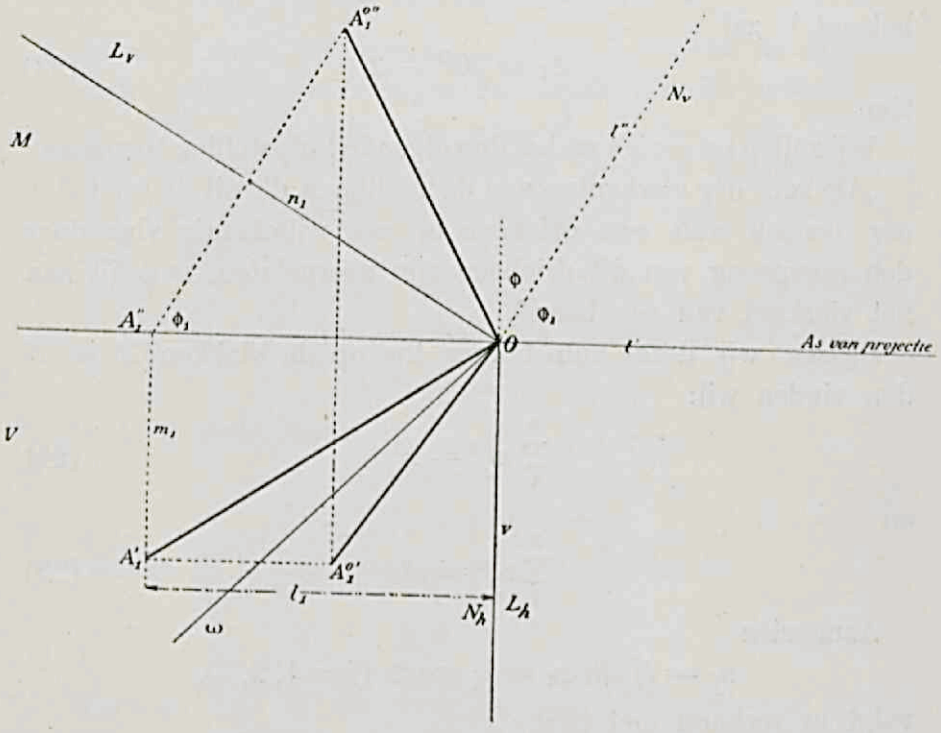


Fig. 8.

Het projectievlak V kiezen wij tot horizontaal projectievlak. Zij l de projectiestraal, die door het punt O gaat. Door deze lijn brengen wij loodrecht op V een vlak M, dat wij kiezen tot vertikaal projectievlak.

Op de bekende wijze kunnen wij dan de horizontale en

[1]) J. SOBOTKA, Zur rechnerischen Behandlung der Axonometrie, Sitz. Ber. der Kön. Böhm. Gesellsch. der Wissensch., 1900, Art. XXXIII.

vertikale projectie van het uiteinde A_1^0 van het been OA_1^0 aangeven. Wij construeeren verder den horizontalen en vertikalen doorgang van een vlak L, dat door O loodrecht op de lijn l is aangebracht en eveneens van een vlak N, gaande door het punt O, dat zoowel op M als op L loodrecht staat.

De loodrechte afstanden van de punten A_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ tot de vlakken M en N gevenwij aan door m_j en n_j $(j = 1, 2, 3)$, de afstanden tot den horizontale doorgang van L door l_j $(j = 1, 2, 3)$.

Den hoek, welke gevormd wordt tusschen de lijn l en zijn horizontale projectie op V, geven wij aan door ϕ_1. Naar bekend is zal

$$\phi_1 = 90^\circ - \phi \tag{23}$$

zijn.

Wij zullen nu eenige malen de volgende hulpstelling toepassen:

„De som der vierkanten van de loodlijnen, die uit de uiteinden der beenen van een driebeen op een willekeurig vlak door den oorsprong van dit driebeen zijn neergelaten, is gelijk aan het vierkant van een been".

Passen wij deze hulpstelling toe op de vlakken M en N dan vinden wij:

$$\sum_1^3 m_j^2 = r^2 \tag{24}$$

en

$$\sum_1^3 n_j^2 = r^2 \tag{25}$$

Aangezien

$$n_j = l_j \sin \phi_1 = l_j \cos \phi \quad (j = 1, 2, 3)$$

volgt in verband met (25)

$$\sum_1^3 l_j^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \phi} \tag{26}$$

In het vlak V bestaat, omdat de doorgangen L en M onderling loodrecht zijn, de betrekking:

$$l_j^2 + m_j^2 = a_j^2 \qquad (j = 1, 2, 3)$$

dus in verband met (24) en (26) vinden wij, daar:

$$P = \sum_1^3 a_j^2 = \sum_1^3 l_j^2 + \sum_1^3 m_j^2$$

$$P = r^2 \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \phi}\right) \qquad (10^a)$$

Om de uitdrukking voor Q te vinden, projecteeren wij de punten A_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ loodrecht op het vlak L. Stel, dat B_j^0 de projecties zijn (deze zijn in de figuur niet voorgesteld).

Wij stellen:

$$O^0 B_j^0 = b_j \text{ en } A_j^0 B_j^0 = c_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$
$$\angle B_1^0 O B_2^0 = \beta_3$$
$$\angle B_2^0 O B_3^0 = \beta_1$$
$$\angle B_3^0 O B_1^0 = \beta_2$$

Het vlak, door de beenen $O A_1^0$ en $O A_2^0$ van het driebeen gebracht, snijdt den vroeger genoemde bol K^0 volgens een cirkel, welke bij evenwijdige projectie op het vlak L in de richting der projectiestralen een ellips, waarvan de halve groote as een lengte r, de halve kleine as een lengte c_3 bezit, tot projectie heeft.

Omdat $O B_1^0$ en $O B_2^0$ twee toegevoegde halve middellijnen zijn, volgt hieruit naar een bekende eigenschap der ellips:

$$b_1 b_2 \sin \beta_3 = r c_3$$

Analoog vindt men:

$$\begin{aligned} b_2 b_3 \sin \beta_1 &= r c_1 \\ b_3 b_1 \sin \beta_2 &= r c_2 \end{aligned} \qquad (27)$$

Volgens de boven aangehaalde hulpstelling is:

$$\sum_1^3 c_j^2 = r^2.$$

Wanneer wij in de vergelijkingen (27), na deze in het kwadraat te hebben gebracht, de linker- en rechterleden optellen, vinden wij dus:

$$\sum b_1^2 b_2^2 \sin^2 \beta_3 = r^4 \qquad (28)$$

Het parallelogram, dat $O B_1^0$ en $O B_2^0$ tot zijden heeft, wordt op V evenwijdig geprojecteerd volgens een parallelogram, waarvan $O A_1$ en $O A_2$ de zijden zijn.

Tusschen de oppervlakken dezer parallelogrammen bestaat dan de betrekking:

$$b_1 b_2 \sin \beta_3 = a_1 a_2 \sin \alpha_3 \cos \phi.$$

Op dezelfde wijze vinden wij:

$$b_2\, b_3 \sin \beta_1 = a_2\, a_3 \sin \alpha_1 \cos \phi$$
$$b_3\, b_1 \sin \beta_2 = a_3\, a_1 \sin \alpha_2 \cos \phi.$$

Substitueeren wij deze waarden in (28), dan worden gevonden:

$$\cos^2 \phi \sum a_1^2\, a_2^2 \sin^2 \alpha_3 = r^4$$

$$Q^2 = \frac{r^4}{\cos^2 \phi} \qquad (11)$$

Door eliminatie van $\cos \phi$ uit de vergelijkingen (10) en (11) vonden wij:

$$r^4 - P\, r^2 + Q^2 = 0 \qquad (15)$$

Wij zullen nu laten zien, dat deze vergelijking ook meer rechtstreeks kan gevonden worden.

A. Beck [1]) heeft de voorwaarde voor de perspectief-affiene ligging van twee viervlakken opgespoord en in analytischen vorm uitgedrukt.

Zijn $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ en $B_1\, B_2\, B_3\, B_4$ twee perspectief-affiene viervlakken; hierbij geven wij homologe punten door gelijke indices aan. Door evenwijdige verschuiving in de affiniteitsrichting laten wij de homologe punten A_4 en B_4 samenvallen. Vervolgens kiezen wij het punt A_4 tot oorsprong van een rechthoekig assenstelsel, waarvan de Z-as de richting der affiniteit heeft, terwijl de X- en Y-as in een door A_4 loodrecht op deze richting aangebracht vlak gelegen zijn.

Omdat homologe punten door met de Z-as evenwijdige lijnen verbonden zijn volgt hieruit, dat de coördinaten van A_j door: x_j, y_j, z_j $(j = 1, 2, 3)$ de coördinaten van B_j door x_j, y_j, ζ_j $(j = 1, 2, 3)$ kunnen voorgesteld worden.

Wij geven $A_1\, A_2$ aan door a_{12}, $B_1\, B_2$ door b_{12} enz.

Uit de keuze dezer grootheden volgt:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= a_{14}^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= a_{24}^2 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 &= a_{34}^2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + \zeta_1^2 &= b_{14}^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + \zeta_2^2 &= b_{24}^2 \\ x_3^2 + y_3^2 + \zeta_3^2 &= b_{34}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

---

[1]) A. Beck, Über perspektive Affinität zweier Räume. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 48, 1899, pg. 487—494.

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = a_{12}^2;\\
&(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = b_{12}^2\\
&(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = a_{23}^2;\\
&(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (\zeta_2 - \zeta_3)^2 = b_{23}^2\\
&(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = a_{31}^2;\\
&(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (\zeta_3 - \zeta_1)^2 = b_{31}^2
\end{aligned} \qquad (30)$$

Wij stellen:

$$\begin{aligned}
a_{14}^2 - b_{14}^2 &= C_1 & \qquad a_{12}^2 - b_{12}^2 &= C_4\\
a_{24}^2 - b_{24}^2 &= C_2 & \qquad a_{23}^2 - b_{23}^2 &= C_5\\
a_{34}^2 - b_{34}^2 &= C_3 & \qquad a_{31}^2 - b_{31}^2 &= C_6
\end{aligned}$$

Uit de formules (29) en (30) volgt na aftrekking:

$$\begin{aligned}
&z_1^2 - \zeta_1^2 = C_1 \quad z_1^2 - \zeta_1^2 + z_2^2 - \zeta_2^2 - 2(z_1 z_2 - \zeta_1 \zeta_2) = C_4\\
&z_2^2 - \zeta_2^2 = C_2 \quad z_2^2 - \zeta_2^2 + z_3^2 - \zeta_3^2 - 2(z_2 z_3 - \zeta_2 \zeta_3) = C_5\\
&z_3^2 - \zeta_3^2 = C_3 \quad z_3^2 - \zeta_3^2 + z_1^2 - \zeta_1^2 - 2(z_3 z_1 - \zeta_3 \zeta_1) = C_6
\end{aligned} \qquad (31)$$

Hieruit leiden wij na herhaalde aftrekking de formules af:

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 - \zeta_1 \zeta_2 &= {}^1/_2 (C_1 + C_2 - C_4)\\
z_2 z_3 - \zeta_2 \zeta_3 &= {}^1/_2 (C_2 + C_3 - C_5)\\
z_3 z_1 - \zeta_3 \zeta_1 &= {}^1/_2 (C_3 + C_1 - C_6)
\end{aligned} \qquad (32)$$

Wij beschouwen het stelsel vergelijkingen, dat gevormd wordt door de eerste vergelijking van (31) en de eerste en derde vergelijking van (32) dus:

$$\begin{aligned}
z_1 z_1 - \zeta_1 \zeta_1 - C_1 &= 0\\
z_2 z_1 - \zeta_2 \zeta_1 - {}^1/_2 (C_1 + C_2 - C_4) &= 0\\
z_3 z_1 - \zeta_3 \zeta_1 - {}^1/_2 (C_3 + C_1 - C_6) &= 0
\end{aligned}$$

Op dezelfde wijze kunnen wij twee andere stelsels vormen. Wij leiden hieruit af:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \zeta_1 & C_1 \\ z_2 & \zeta_2 & {}^1/_2 (C_1 + C_2 - C_4) \\ z_3 & \zeta_3 & {}^1/_2 (C_3 + C_1 - C_6) \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} z_2 & \zeta_2 & C_2 \\ z_1 & \zeta_1 & {}^1/_2 (C_1 + C_2 - C_4 \\ z_3 & \zeta_3 & {}^1/_2 (C_2 + C_3 - C_5) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} z_3 & \zeta_3 & C_3 \\ z_2 & \zeta_2 & {}^1/_2 (C_2 + C_3 - C_5) \\ z_1 & \zeta_1 & {}^1/_2 (C_3 + C_1 - C_6) \end{vmatrix} = 0 \qquad (33)$$

Deze betrekkingen kunnen beschouwd worden als lineaire

vergelijkingen met de determinanten $\begin{vmatrix} x_1 & \xi_1 \\ x_2 & \xi_2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x_2 & \xi_2 \\ x_3 & \xi_3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x_3 & \xi_3 \\ x_1 & \xi_1 \end{vmatrix}$

als onbekenden.

Door eliminatie volgt uit dit stelsel vergelijkingen:

$$\begin{vmatrix} 2C_3 & C_3 + C_1 - C_6 & C_2 + C_3 - C_5 \\ C_3 + C_1 - C_6 & 2C_1 & C_1 + C_2 - C_4 \\ C_2 + C_3 - C_5 & C_1 + C_2 - C_4 & 2C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

Deze vergelijking drukt tevens het verband uit, dat tusschen a_{12}, b_{12} enz. moet bestaan.

Neemt men voor het viervlak $B_1 B_2 B_3 B_4$ een driezijdige pyramide, welke drie onderling loodrechte evenlange ribben $B_4 B_1$, $B_4 B_2$, $B_4 B_3$ bezit, dan kan men de lengte r van ieder der ribben $B_4 B_1$, $B_4 B_2$ en $B_4 B_3$ uit de vergelijking (34) nader bepalen.

Daartoe worde opgemerkt, dat in dit geval:

$$b_{14}^2 = b_{24}^2 = b_{34}^2 = r^2$$
$$b_{12}^2 = b_{23}^2 = b_{31}^2 = 2r^2,$$

zoodat (34) bij substitutie van deze grootheden overgaat in:

$$\begin{vmatrix} 2a_{34}^2 - 2r^2 & a_{34}^2 + a_{14}^2 - a_{31}^2 & a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{23}^2 \\ a_{34}^2 + a_{14}^2 - a_{31}^2 & 2a_{14}^2 - 2r^2 & a_{14}^2 + a_{24}^2 - a_{12}^2 \\ a_{24}^2 + a_{34}^2 - a_{23}^2 & a_{14}^2 + a_{24}^2 - a_{12}^2 & 2a_{24}^2 - 2r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

Wij bepalen het viervlak $A_1 A_2 A_3 A_4$ nader door te stellen:

$$a_{14} = a_1 \qquad \angle A_1 A_4 A_2 = \alpha_3$$
$$a_{24} = a_2 \qquad \angle A_2 A_4 A_3 = \alpha_1$$
$$a_{34} = a_3 \qquad \angle A_3 A_4 A_1 = \alpha_2$$

Dan is:

$$a_{12}^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \alpha_3$$
$$a_{23}^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos \alpha_1$$
$$a_{31}^2 = a_3^2 + a_1^2 - 2a_3 a_1 \cos \alpha_2$$

In verband hiermede gaat (35) over in:

$$\begin{vmatrix} a_3^2 - r^2 & a_1 a_3 \cos \alpha_2 & a_2 a_3 \cos \alpha_1 \\ a_1 a_3 \cos \alpha_2 & a_1^2 - r^2 & a_1 a_2 \cos \alpha_3 \\ a_2 a_3 \cos \alpha_1 & a_1 a_2 \cos \alpha_3 & a_2^2 - r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

Zijn de coördinaten van de hoekpunten van een viervlak

$A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ voor ieder punt $A_j\,(x_j,\ y_j,\ z_j)$ $(j = 1, 2, 3)$, dan heeft men voor den inhoud van dit viervlak:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \qquad (37)$$

Aangezien in bovenstaande beschouwing het punt A_4 tot oorsprong van het assenstelsel gekozen is, heeft men in dit geval:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

dus:

$$36\,V^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_3^2 & a_1\,a_3\cos\alpha_2 & a_2\,a_3\cos\alpha_1 \\ a_1\,a_3\cos\alpha_2 & a_1^2 & a_1\,a_2\cos\alpha_3 \\ a_2\,a_3\cos\alpha_1 & a_1\,a_2\cos\alpha_3 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

Wordt de determinant in de vergelijking (36) ontwikkeld en rangschikt men na substitutie der voor $36\,V^2$ gevonden waarde de termen naar afdalende machten van r^2, dan is:

$$r^6 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,r^4 + (a_1^2\,a_2^2\sin^2\alpha_3 + a_2^2\,a_3^2\sin^2\alpha_1 + a_3^2\,a_1^2\sin^2\alpha_2)\,r^2 - 36\,V^2 = 0 \qquad (38)$$

Daar $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ en $B_1\,B_2\,B_3\,B_4$ perspectief-affiene ligging hebben, bepalen zij twee ruimten, welke op zoodanige wijze met elkander in verband staan, dat bij ieder punt van de eene ruimte een bepaald punt van de andere ruimte behoort en omgekeerd.

Beschouwen wij $A_4\,A_1$, $A_4\,A_2$, $A_4\,A_3$ als toegevoegde halve middellijnen eener ellipsoïde, dan beantwoordt aan deze ellipsoïde in de ruimte, die door het viervlak $B_1\,B_2\,B_3\,B_4$ bepaald is, een bol, waarvan $B_4\,B_1$, $B_4\,B_2$ en $B_4\,B_3$ een tripel onderling loodrechte stralen vormen.

Reëel-perspectieve ligging van dezen bol en deze ellipsoïde is dan alleen mogelijk, wanneer de bolstraal even lang is als de straal der cyclische doorsneden van de ellipsoïde, dus als de halve middelste hoofdas van deze.

Ook, wanneer het punt A_4 in het vlak van $\Delta A_1 A_2 A_3$ is gelegen, blijft deze perspectieve affiniteit bestaan. In dit geval is de ellipsoïde in een ellips overgegaan en de halve kleine as van deze ellips moet dan als halve middelste hoofdas worden beschouwd.

De inhoud van het viervlak $A_1 A_2 A_3 A_4$ wordt nul, zoodat nu (38) na substitutie van $V = 0$ en deeling door r^2 overgaat in:

$$r^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\, r^2 + (a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3 + a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + a_3^2 a_1^2 \sin^2 \alpha_2) = 0 \qquad (39)$$

In dit geval krijgen de grootheden:

$$\sum_1^3 a_j^2 \text{ en } \sum_1^3 a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3$$

dezelfde beteekenis als de vroeger gedefinieerde P en Q^2 en wij vinden:

$$r^4 - P r^2 + Q^2 = 0 \qquad (15)$$

§ 3. *Het aantal driebeenen, dat voldoet.*

Wij laten weder O^0 en O samenvallen.

Daar:

$$Q = \pm \sqrt{\sum a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha_3}$$

kan Q zoowel positief als negatief zijn, zoodat wij vinden, in verband met:

$$\cos \phi = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q^2}}{2Q},$$

dat $\cos \phi$ twee waarden kan bezitten.

Zij ϕ^1 de hoek in het eerste kwadrant, die voor Q positief aan:

$$\cos \phi = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4\phi^2}}{2Q}$$

voldoet.

Wij vinden dan:

A. Q positief, dus $\cos \phi$ positief

$$\phi = \phi^1 \qquad \text{I}$$
$$\phi = 2\pi - \phi^1 \qquad \text{II.}$$

Aangezien E_j en $M_j < \pi$ vinden wij bij iedere waarde van

$\cos L_j$ en $\cos M_j$ slechts *een* waarde van L_j en M_j, die voldoet $(j = 1, 2, 3)$

B. Q negatief, dus $\cos \Phi$ negatief:

$$\Phi = \pi - \Phi^1 \quad \text{III}$$
$$\Phi = \pi + \Phi^1 \quad \text{IV}$$

Wij vinden om bovengenoemde reden bij iedere $\cos L_j$ en $\cos M_j$ *een* waarde van L_j en M_j.

De projectierichting I is tegengesteld aan de projectierichting III, daar de beide hoeken Φ ~~elkaars~~ verschillen supplement ~~zijn~~.

Noemen wij I de positieve projectierichting, dan is III de negatieve; omdat de waarden van $\cos M_j$, die bij $\cos \Phi$ negatief behooren, de tegengestelden zijn van de waarden, welke bij $\cos \Phi$ positief passen, kunnen wij zeggen, dat de beenen van het driebeen, dat bij I past dezelfde hoeken maken met de positieve projectierichting, als de beenen van het bij III behoorend driebeen met de negatieve projectierichting.

Aangezien een been $O A_1^0$ van het bij I behoorend driebeen, dezelfde projectie $O A_1$ op V heeft als het overeenkomstig been $O A_1^0$ van het bij III behoorend driebeen, kunnen wij zeggen, dat deze beenen in hetzelfde projecteerend vlak zijn gelegen, zoodat de driebeenen elkaar's spiegelbeelden zijn t. o. v. een vlak door O loodrecht op den door O gaanden projectiestraal.

Hetzelfde vinden wij voor de bij II en IV behoorende driebeenen. Aangezien het punt O^0, de oorsprong der driebeenen, op den door O gaanden projectiestraal willekeurig kan worden aangenomen, vinden wij bij ieder gevonden driebeen een stelsel driebeenen, zooals reeds boven in de inleiding is opgemerkt.

Ons rest aan te toonen, dat de gevonden resultaten met de formules voor $\cos L_j$ in overeenstemming zijn.

Er zijn n.l. twee stellen waarden voor $\cos L_j$:

$$\cos L_j = \frac{\cos \Phi}{r} [r \cos M_j + \sqrt{a_j^2 - r^2 \sin^2 M_j}] \; (a) \text{ en}$$

$$\cos L_j = \frac{\cos \Phi}{r} [r \cos M_j - \sqrt{a_j^2 - r^2 \sin^2 M_j}]. \; (b)$$

Behoort het eene stel (a) bij $\cos\phi$ posititief, dan zal, wil het goed zijn, het andere stel (b) bij $\cos\phi$ negatief moeten behooren. Dit is inderdaad het geval, immers gaat $\cos\phi$ in $-\cos\phi$ over, waarmede de overgang van $\cos M_j$ in $-\cos M_j$ gepaard gaat, dan gaat de rechterkant van de vergelijkingen van het stelsel (a) in de rechterkant der vergelijkingen van het stelsel (b) over.

Imaginaire oplossingen.

Wij nemen nu voor $\cos\phi$ de waarde:

$$\cos\phi = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4Q^2}}{2Q},$$

welke, daar $P^2 - 4Q^2$ essentieel positief is, steeds reëel en bovendien grooter dan één zal zijn.

Stel:

$$\phi = u \pm iv$$

dan is:

$$\cos\phi = \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)\cos u \pm i\left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)\sin u.$$

Opdat dit reëel zij, is noodig, dat het imaginaire gedeelte aan den rechterkant van bovenstaande vergelijking nul wordt, hetgeen alleen mogelijk is voor:

$$\sin u = 0$$
$$u = 0 \text{ of } u = \pi.$$

Is Q positief, dan is $\cos\phi$ positief en moeten wij $u = 0$ kiezen.
Is Q negatief, dan is $\cos\phi$ negatief en moeten wij $u = \pi$ kiezen.
Wij vinden nu de vier volgende oplossingen voor ϕ:

$$Q \text{ positief} \begin{cases} \phi_1 = iv_1 \\ \phi_2 = -iv_1 \end{cases}$$

$$Q \text{ negatief} \begin{cases} \phi_3 = \pi + iv_1 \\ \phi_4 = \pi - iv_1 \end{cases}$$

Waarbij v_1 voldoet aan:

$$\frac{e^{v_1} + e^{-v_1}}{2} = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4Q^2}}{2Q}.$$

Voor r^2 wordt gevonden:

$$r^2 = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4\,Q^2}}{2}$$

dus een reëele waarde.

Om de imaginaire oplossingen, welke aan het vraagstuk voldoen, nader aan te geven, gebruiken wij de formules (17). Er zijn twee stellen waarden voor $\cos L_j$ $(j = 1, 2, 3)$ n.l.:

$$\cos L_j = \frac{\cos \Phi}{r}\,[r \cos M_j + i\sqrt{-a_j^2 + r^2 \sin^2 M_j}] \text{ en}$$

$$\cos L_j = \frac{\cos \Phi}{r}\,[r \cos M_j - i\sqrt{-a_j^2 + r^2 \sin^2 M_j}],$$

want allereerst kunnen wij op dezelfde wijze als op pag. 40 v.v. geschied is bewijzen, dat, wil aan de voorwaarden, (1) en (3) zijn voldaan, de teekens voor de wortelvormen der in (17) voorkomende formules dezelfde moeten zijn en ten tweede blijkt na substitutie in den vorm $a_j^2 - r^2 \sin^2 M_j$ van de waarden, die r^2, $\cos M_j$ enz. thans bezitten, dat deze vorm negatief moet zijn.

Behoort bij Q pos., $\cos \Phi$ pos., en $\Phi_1 = i\,v_1$, het stel waarden van $\cos L_j$

$$\cos L_j = \frac{\cos \Phi}{r}\,[r \cos M_j + i\sqrt{r^2 \sin^2 M_j - a_j^2}],\ (j = 1, 2, 3)$$

dan zal bij Q neg., $\cos \Phi$ neg., en $\Phi_1 = \pi + i\,v_1$, het stel waarden voor $\cos L_j$

$$\cos L_j = \frac{\cos \Phi}{r}\,[r \cos M_j - i\sqrt{r^2 \sin^2 M_j - a_j^2}]\ (j = 1, 2, 3)$$

behooren. Immers gaat $\cos \Phi$ over in $-\cos \Phi$, dan gaat $\cos M_j$ over in $-\cos M_j$ en volgt na substitutie uit de bovenste waarde voor $\cos L_j$ de onderste.

Wij zullen de coördinaten der uiteinden van het driebeen met den oorsprong O, dat behoort bij de waarde $\Phi_1 = i\,v_1$, nader bepalen ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel, waarvan de Z-as samenvalt met de normaal in O op V en de X- en Y-as zijn gelegen in V, terwijl wij den hoek gevormd door de loodrechte projectie van $O\,A_j^0$ op V met de X-as aangeven door ψj.

Wij vinden dan voor de coördinaten der punten A_j^0, die behooren bij:

$$\phi_1 = i\,v_1$$

$$(39^a)\quad \begin{cases} Z_j = r\cos L_j & = r\cos\phi\cos M_j & + i\cos\phi\sqrt{r^2\sin^2 M_j - a_j^2} \\ Y_j = r\sin L_j\sin\psi_j & = r\sin\psi_j\, C_j & - i\,r\sin\psi_j\, B_j \\ X_j = r\sin L_j\cos\psi_j & = r\cos\psi_j\, C_j & - i\,r\cos\psi_j\, B_j \end{cases}$$

waarbij:

$$\sin L_j = \sqrt{1-(\cos\phi\cos M_j + i\frac{\cos\phi}{r}\sqrt{r^2\sin^2 M_j - a_j^2})^2} = C_j - i\,B_j$$

C_j en B_j zijn reëele getallen

en bij $\phi_3 = \pi + i\,v_1$

$$(39^b)\quad \begin{cases} Z_j = r\cos L_j & = r\cos\phi\cos M_j & - i\cos\phi\sqrt{r^2\sin^2 M_j - a_j^2} \\ Y_j = r\sin L_j\sin\psi_j & = r\sin\psi_j\, C_j & + i\,r\sin\psi_j\, B_j \\ X_j = r\sin L_j\cos\psi_j & = r\cos\psi_j\, C_j & + i\,r\cos\psi_j\, B_j \end{cases}$$

waarbij thans:

$$\sin L_j = \sqrt{1-(\cos\phi\cos M_j - i\frac{\cos\phi}{r}\sqrt{r^2\sin^2 M_j - a_j^2})^2} = C_j + i\,B_j$$

De coördinaten van X_j enz. in (39^a) en (39^b) zijn toegevoegd complex, waaruit volgt, dat de driebeenen gelegen zijn in ruimten, welke tot elkander zijn toegevoegd. De verbindingslijnen der punten A_j^0 zijn in dat geval reëel en snijden het vlak V in de punten A_j.

Hetzelfde vinden wij voor de driebeenen, die behooren bij:

$$\phi_2 = -\,i\,v_1 \text{ en } \phi_4 = \pi - i\,v_1.$$

Wij vinden dus vier stellen imaginaire oplossingen, die zoo zijn gelegen, dat bij ieder imaginair driebeen een ander past, welks coördinaten tot die van het eerste toegevoegd complex zijn.

§ 4. Een analytisch-projectief bewijs, dat om zijn sierlijken vorm opmerking verdient, is geleverd door Felix Klein [1]).

Wij kunnen alle punten van de ruimte R afbeelden op een plat vlak V door middel van de volgende lineaire substitutie:

[1]) F. Klein, Elementar-Mathematik von höherem Standpunkte aus. II (Geometrie), 1909, pg. 161—174.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 x_1^0 + b_1 x_2^0 + c_1 x_3^0 \\ x_2 &= a_2 x_1^0 + b_2 x_2^0 + c_2 x_3^0 \\ x_3 &= a_3 x_1^0 + b_3 x_2^0 + c_3 x_3^0 \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Hierbij zijn (x_1^0, x_2^0, x_3^0) coördinaten van een punt P^0 in de ruimte, (x_1, x_2, x_3) bepalen het beeld P van dit punt.

Zooals bekend is moeten de coëfficiënten, welke in de formules (40) voorkomen, voldoen aan de volgende voorwaarden:

De determinant der coëfficiënten:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

terwijl de onderdeterminanten van Δ en de in Δ voorkomende coëfficiënten niet *alle tegelijk* nul mogen worden.

Kiezen wij het coördinatenstelsel, waarvan x_1, x_2, x_3 coördinaten zijn, op zoodanige wijze, dat het vlak $X_1\, O\, X_2$ met het vlak V samenvalt, dan neemt de substitutie den volgenden vorm aan:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 x_1^0 + B_1 x_2^0 + C_1 x_3^0 \\ x_2 &= A_2 x_1^0 + B_2 x_2^0 + C_2 x_3^0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (40^a)$$

De determinant der coëfficiënten is in dit geval uit den aard der zaak nul. Opdat aan de overige condities, welke bij de substitutie gesteld worden, voldaan zij, is het noodzakelijk, dat de gedurige evenredigheid:

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$$

niet besta, daar de onderdeterminanten van Δ in het tegenovergestelde geval alle tegelijkertijd nul zouden worden.

Wij kiezen in de ruimte een vector, waarvan wij de componenten zullen voorstellen door X_1^0, X_2^0, X_3^0. Wordt deze vector op het vlak V afgebeeld, dan is het beeld een vector, waarvan de componenten zijn:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= A_1 X_1^0 + B_1 X_2^0 + C_1 X_3^0 \\ X_2 &= A_2 X_1^0 + B_2 X_2^0 + C_2 X_3^0 \\ X_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Wanneer in de ruimte drie vectoren van gelijke lengte gekozen worden, welke langs de assen van het aangenomen assenstelsel vallen, dan vinden wij de volgende vectoren in V, die hiermede overeenstemmen:

$$\left.\begin{matrix} X_1^0 = 1 & X_1 = A_1 \\ \text{met } X_2^0 = 0 & X_2 = A_2 \\ X_3^0 = 0 & X_3 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} X_1 = 0 & X_1 = B_1 \\ \text{met } X_2 = 1 & X_2 = B_2 \\ X_3 = 0 & X_3 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} X_1^0 = 0 & X_1 = C_1 \\ \text{met } X_2^0 = 0 & X_2 = C_2 \\ X_3^0 = 1 & X_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

d. w. z. wij vinden vectoren in V, welke uitgaan van een punt O naar punten, wier coördinaten t. o. v. de assen van een zeker coördinatenstelsel in V door de coördinaten A_1, A_2; B_1, B_2 en C_1, C_2 zijn bepaald.

Uit de bij de transformatie gestelde voorwaarden volgt, dat van deze punten niet meer dan twee onderling of met het punt O op een rechte lijn gelegen zijn.

Brengen wij het gevonden resultaat onder woorden dan luidt dit aldus:

„Drie vectoren in een plat vlak V door een punt O onder willekeurige hoeken getrokken, op welke willekeurige stukken zijn afgezet en wier eindpunten bovendien niet alle met het punt O op een rechte gelegen zijn, kunnen beschouwd worden, als de afbeelding van drie onderling loodrechte eenheidsvectoren".

Om uit deze stelling het bewijs voor de hoofdstelling te kunnen afleiden moeten wij nog aantoonen, dat de bovenstaande „afbeelding" met een scheef axonometrische projectie aequivalent is.

Dat de projectie een evenwijdige is, kunnen wij aldus inzien. Is een punt P in V bepaald door de coördinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, dan is dit punt beeld van een aantal punten in de ruimte, waarvan de coördinaten x_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ aldus bepaald zijn:

$$\left.\begin{matrix} \xi_1 = A_1 x_1^0 + B_1 x_2^0 + C_1 x_3^0 & \text{(a)} \\ \xi_2 = A_2 x_1^0 + B_2 x_2^0 + C_2 x_3^0 & \text{(b)} \\ \xi_3 = 0 & \end{matrix}\right\} \qquad (41)$$

Omdat elk der vergelijkingen (41a) en (41b) een plat vlak voorstelt, zijn de punten P^0, wier coördinaten hieraan voldoen, alle op een rechte lijn gelegen.

Beweegt het punt P zich in het vlak V, dan gaat hiermede gepaard een evenwijdige verplaatsing der door de vergelijkingen (41a) en (41b) voorgestelde vlakken, zoodat hieruit volgt, dat hun snijlijn, de meetkundige plaats der punten P^0, eveneens met zichzelf evenwijdig wordt verplaatst.

Het eerste gedeelte is hiermede bewezen.

Zij de stand van het assenstelsel in de ruimte vast aangenomen, dan moeten wij nog aantoonen, dat het mogelijk is het vlak V een zoodanigen stand te geven en in dit vlak een rechthoekig assenstelsel $O X_1$ en $O X_2$, voor welks assen de eenheidsmaatstaven even lang zijn, zóó aan te nemen, dat een willekeurige straal, die bepaald is door de waarden $\xi_1 = a_1$, $\xi_2 = a_2$, het vlak V treft in een punt, dat ten opzichte van het assenstelsel in dit vlak a_1 en a_2 tot coördinaten heeft.

KLEIN [1]) heeft om dit te bewijzen de analyse gebruikt; wij volgen den meetkundigen weg, die door WENDLING [2]) is aangewezen, omdat deze sneller tot het doel leidt.

De drie stralen bepaald door $(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0)$; $(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0)$; $(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1)$ kunnen beschouwd worden als de ribben van een driezijdig prisma.

Dit prisma kan door een plat vlak zóó gesneden worden, dat de doorsnede een rechthoekig-gelijkbeenige driehoek [3]) is. Kiezen wij een der vlakken, waarvoor dit het geval is, en noemen wij de snijpunten van dit vlak met de drie boven aangegeven stralen achtereenvolgens O, P_1 en P_2, dan is $\Delta\, O P_1 P_2$ rechthoekig-gelijkbeenig. Het punt O kiezen wij tot oorsprong van het assenstelsel, $O X_1$ laten wij vallen langs $O P_1$, $O X_2$ langs $O P_2$; wij kiezen verder $O P_1 = O P_2$ tot eenheidsmaatstaven. Bij een op deze wijze aangenomen assenstelsel snijdt inderdaad een door de waarden $\xi_1 = a_1$, $\xi_2 = a_2$ bepaalde straal het aangenomen vlak in een punt Q, welks coördinaten t. o. v. $O X_1$ en $O X_2$ beide met denzelfden maatstaf gemeten door a_1 en a_2 worden voorgesteld.

[1]) F. KLEIN, t. a. p., pg. 174.
[2]) WENDLING, t. a. p., § 12, pg. 82—89.
[3]) WENDLING, t. a. p., § 8, pg. 61.

Door het punt O gaan twee vlakken V_1 en V_2, welke symmetrisch met elkander zijn ten opzichte van het vlak door het punt O loodrecht op de projectiestralen aangebracht, zoodat wij ook langs dezen weg de vroegere resultaten terugvinden.

§ 5. Beschouwen wij het projectievlak als drager van complexe getallen, waarin twee door het punt O getrokken onderling loodrechte assen achtereenvolgens de assen der reëele en imaginaire getallen voorstellen, dan kan ieder in dit vlak gelegen punt als het beeld van een richtingsgetal worden opgevat.

Zij $O A_1^0 A_2^0 A_3^0$ een driebeen, waarvan de oorsprong O in het vlak V is gelegen. Dit driebeen wordt *loodrecht* op V geprojecteerd, A_1, A_2 en A_3 stellen de projecties der uiteinden van de beenen van het driebeen voor. Beschouwen wij de punten A_1, A_2 en A_3 als beelden van de richtingsgetallen a_1, a_2 en a_3, dan geldt, zooals Gauss [1]) bewees de volgende stelling:

„Worden de uiteinden der beenen van een driebeen A_1^0, A_2^0 en A_3^0 loodrecht geprojecteerd op een door den oorsprong O van dit driebeen gebracht vlak V en vat men de projecties dezer punten A_1, A_2 en A_3 op als beelden van complexe getallen a_1, a_2 en a_3, dan is de som der vierkanten van deze getallen nul. Hierbij wordt ondersteld, dat de oorsprong O van het driebeen met den oorsprong van het complexe vlak samenvalt."

Blijkens bovenstaande stelling is dus bij *loodrechte* projectie:

$$\sum_1^3 a_j^2 = 0.$$

Is de richting der projectiestralen *scheef* ten opzichte van het projectievlak, dan zal daarentegen bij overigens dezelfde onderstellingen gelden:

$$\sum a_j^2 \neq 0.$$

Koppe [2]) beschouwt dit geval meer van nabij.

---

[1]) Gauss, Sämmtl. Werke, Bd. 8, S. 345.

[2]) M. Koppe, Beweis des Pohlke'schen Satzes, Setz. Ber. d. Berliner Math. Gesellschaft, X, S. 108.

Zij het punt A_j beeld van het richtingsgetal:

$$a_j = \rho_j \, e^{i\,\theta_j}. \quad (j = 1, 2, 3)$$

Bij *scheeve* projectie van het driebeen op het door den oorsprong O gebrachte vlak V geldt:

$$\sum_1^3 a_j^2 = \sum_1^3 \rho_j^2 \, e^{2\,i\,\theta_j} \neq 0. \quad (j = 1, 2, 3)$$

Stellen wij:

$$\sum_1^3 a_j^2 = R^2 \, e^{2\,i\,\psi} \tag{42}$$

Worden de getallenassen in het vlak V over een hoek ψ in een richting tegengesteld aan de beweging der wijzers van een uurwerk gedraaid, dan is ten opzichte van de nieuwe getallen-assen $O\xi$, $O\eta$ het punt A_j beeld van het complexe getal:

$$\rho_j \, e^{i\,(\theta_j - \psi)} = \xi_j + i\,\eta_j. \quad (j = 1, 2, 3)$$

In verband met (42) volgt:

$$\sum_1^3 \rho_j^2 \, e^{2\,i\,(\theta_j - \psi)} = R^2 \tag{43}$$

of

$$\sum_1^3 \xi_j^2 - \sum_1^3 \eta_j^2 + 2\,i \sum_1^3 \xi_j \, \eta_j = R^2 \tag{43a}$$

Door gelijkstelling der reëele en complexe gedeelten in het linker- en rechterlid dezer laatste vergelijking volgt hieruit:

$$\sum_1^3 \xi_j \, \eta_j = 0 \tag{44}$$

$$\sum_1^3 \xi_j^2 - \sum_1^3 \eta_j^2 = R^2.$$

Dus is steeds, omdat R^2 positief is,

$$\sum_1^3 \xi_j^2 > \sum_1^3 \eta_j^2 \tag{45}$$

Wij brengen door de η-as een vlak W, dat met het vlak V een standhoek β vormt (β is de kleinste der beide standhoeken). Ook dit vlak beschouwen wij weder als een complex vlak; de η-as zij weder de as der imaginairen, de loodrechte projectie van de in V gelegen ξ-as op W zij de nieuwe as der reëele getallen.

Worden de in het vlak V gelegen punten A_j op het vlak W in de punten B_j loodrecht geprojecteerd, dan geldt voor de door de punten B_j afgebeelde complexe getallen:

a. Hunne reëele gedeelten zijn ten opzichte van de reëele gedeelten der door de overeenkomstige punten A_j in V afgebeelde getallen in de verhouding $\cos\beta : 1$ verkleind.

b. Hunne imaginaire gedeelten zijn evengroot als die van de door de overeenkomstige punten A_j in V afgebeelde getallen.

Het richtingsgetal b_j, waarvan het punt B_j een beeld is, staat op de volgende wijze met de reëele en complexe gedeelten der getallen A_j t. o. v. ξ en η in verband.

$$b_j = \xi_j \cos\beta + i\,\eta. \quad (j = 1, 2, 3)$$

Wij kunnen de vraag stellen: Kan het vlak W zóó worden aangebracht, dat $\sum_1^3 b_j^2 = 0$ wordt?

$$\sum_1^3 b_j^2 = \cos^2\beta \sum_1^3 \xi_j^2 - \sum_1^3 \eta_j^2 + 2\,i\cos\beta \sum_1^3 \xi_j\,\eta_j$$

of daar volgens (44):

$$\Sigma\,\xi_j\,\eta_j = 0$$

is:

$$\sum_1^3 b_j^2 = \cos^2\beta \sum_1^3 \xi_j^2 - \sum_1^3 \eta_j^2.$$

Opdat dus $\sum_1^3 b_j^2 = 0$ zij, moet de hoek β zoo worden gekozen, dat $\cos\beta$ voldoet aan de voorwaarde:

$$\cos^2\beta \sum_1^3 \xi_j^2 - \sum_1^3 \eta_j^2 = 0$$

of

$$\cos\beta = \pm \sqrt{\frac{\sum_1^3 \eta_j^2}{\sum_1^3 \xi_j^2}} \qquad (46)$$

In verband met de formule (45) blijkt, dat de volstrekte waarde van $\cos\beta$ kleiner dan de eenheid is, zoodat twee waarden voor β gevonden worden, welke overeenkomen met

twee standen W_1 en W_2 van W, voor welke $O\,B_1\,B_2\,B_3$ de loodrechte projectie van een driebeen voorstelt.

Aangezien voor $\sum_1^3 b_j^2 = 0$ twee stellen van driebeenen, welke twee aan twee met betrekking tot het vlak W als spiegelvlak elkanders spiegelbeelden zijn, aan de vraag voldoen, vinden wij nu in het geheel vier stellen driebeenen, die bij orthogonale projectie op W_1 of W_2 de figuur $O\,B_1\,B_2\,B_3$ tot projectie hebben, terwijl ze bij evenwijdige projectie in dezelfde richting op V volgens $O\,A_1\,A_2\,A_3$ geprojecteerd worden.

Hiermede is het bestaan der vier vroeger aangegeven reeksen van driebeenen tevens aangetoond.

Wij zullen van de in deze paragraaf aangegeven methode gebruik maken om de formules (13) en (14) in een sierlijker vorm te brengen.

Stelt a_j weder het door A_j afgebeeldde complexe getal voor, dan is:

$$P = \sum_1^3 |\, a_j \,|^2 = \sum_1^3 |\, a_j^2 \,|$$

$$Q^2 = \Sigma\, |\, [a_1\, a_2] \,|^2$$

Aangezien als $a_j = x_j + i\, y_j$

$$|\, [a_1\, a_2] \,| = |\, x_1\, y_2 - x_2\, y_1 \,|\,,$$

omdat de laatste uitdrukking het oppervlak van het op $O\,A_1$ en $O\,A_2$ als zijden beschreven parallelogram voorstelt, vinden wij:

$$Q^2 = \Sigma\, |\, [a_1\, a_2] \,|^2 = \Sigma\, |\, x_1\, y_2 - x_2\, y_1 \,|^2$$

Wij stellen het tot a_j toegevoegde complexe getal door $\overline{a_j}$ voor en gaan uit van de matrix:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \end{matrix} \right\|$$

Nu is:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_1 + i\, y_1 & x_2 + i\, y_2 & x_3 + i\, y_3 \\ x_1 - i\, y_1 & x_2 - i\, y_2 & x_3 - i\, y_3 \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} 2\, x_1 & 2\, x_2 & 2\, x_3 \\ x_1 - i\, y_1 & x_2 - i\, y_2 & x_3 - i\, y_2 \end{matrix} \right\|$$

$$= 2 \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -i\, y_1 & -i\, y_2 & -i\, y_3 \end{matrix} \right\|$$

waaruit volgt:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\| = i/_2 \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \end{matrix} \right\| \tag{47}$$

Verheffen wij de matrices, die in (47) voorkomen in het kwadraat, dan vinden wij, omdat:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\|^2 = \Sigma \left| \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix} \right|^2 = Q^2$$

$$Q^2 = -\frac{1}{4} \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \end{matrix} \right\|^2$$

of

$$4\,Q^2 = -\left[\sum_1^3 a_j^2 \sum_1^3 \overline{a_j}^2 - \left(\sum_1^3 a_j\, \overline{a_j} \right)^2 \right] \tag{48}$$

Wanneer b_j en $\overline{b_j}$ twee toegevoegde complexe getallen zijn, geldt in het algemeen:

$$b_j \overline{b_j} = |\, b_j \,|^2$$

derhalve is:

$$\sum_1^3 a_j\, \overline{a_j} = \sum_1^3 |\, a_j \,|^2 = P$$

Stellen wij: $$\left| \sum_1^3 a^2{}_j \right| = S$$

dan volgt nu uit (48)

$$4\,Q^2 = P^2 - S^2$$

De vroeger gevonden formules en gaan dan over in:

$$r^2 = \frac{P - S}{2} \tag{49}$$

$$\cos^2 \phi = \frac{P - S}{P + S} \tag{50}$$

Deze formules leenen zich beter voor de discussie van enkele bijzondere gevallen.

Bij loodrechte Axonometrie moet

$$\cos \phi = 1$$

worden.

Dit kan alleen, daar

$$\cos^2 \phi = 1 - \frac{2\,S}{P + S},$$

wanneer $S = 0$ wordt.

Hiermede is de stelling in den door GAUSS aangegeven vorm teruggevonden.

Kiezen wij de projectierichting evenwijdig met het vlak V, dan is:

$$\cos \Phi = 0$$

Hiertoe is blijkens de formule (50) noodig:

$$P = S,$$

maar dit is alleen mogelijk, wanneer alle punten A_j richtingsgetallen afbeelden met hetzelfde argument, d. w. z., wanneer alle punten A_j op dezelfde lijn gelegen zijn, welke door O gaat.

Bovendien vinden wij dan

$$r = 0.$$

Wij hebben dan het door ons tot dusver steeds buitengesloten grensgeval.

DERDE HOOFDSTUK.

Beschouwingen, welke met de theorie der traagheidsmomenten van puntenstelsels in verband staan.

§ 1. Zijn in een plat vlak n punten $A_1, A_2 \ldots A_n$ gelegen, welke alle een massa gelijk aan de massa-eenheid bezitten, dan vormen deze punten samen een vlak puntenstelsel, dat wij in het volgende door de letter S zullen aanwijzen.

Zij OL een willekeurige lijn in het vlak, l_j de afstand van het punt A_j tot deze lijn, dan stelt $I_l = \sum_1^n l_j^2$ het traagheidsmoment van het stelsel S ten opzichte van de lijn OL voor. Stelt men $\sum_1^n l_j^2 = l^2$ en brengt men op een afstand gelijk aan l, evenwijdig aan OL en aan weerskanten dezer lijn twee rechten aan, dan kunnen deze als een grafische voorstelling van het traagheidsmoment I_l worden beschouwd. Wij zullen ze daarom de representeerende lijnen van het traagheidsmoment I_l noemen.

Wanneer de lijn OL in het vlak om het vaste punt O draait, zullen de representeerende lijnen, die bij de verschillende standen van OL behooren, een zekere kromme omhullen. Teneinde na te gaan welke die kromme is, denken wij ons door O twee onderling loodrechte coördinaatassen OX en OY ten opzichte van welke de coördinaten van het punt A_j door x_j en y_j zullen worden voorgesteld.

Het traagheidsmoment van het stelsel S zal dan met betrekking tot de lijn OL, welke met OX een hoek α maakt, worden voorgesteld door:

$$I_l = \sum_1^n l_j^2 = \sum_1^n (y_j \cos\alpha - x_j \sin\alpha)^2$$

$$= \cos^2\alpha \sum_1^n y_j^2 - 2 \sin\alpha \cos\alpha \sum_1^n x_j\, y_j + \sin^2\alpha \sum_1^n x_j^2$$

Stellen wij:

$$\sum_1^n x_j^2 = A^2, \quad \sum_1^n y_j^2 = B^2, \quad \sum_1^n x_j\, y_j = C^2,$$

waarbij naar bekend is A^2 en B^2 de traagheidsmomenten van het stelsel S achtereenvolgens ten opzichte van $O\,Y$ en $O\,X$ voorstellen, dan vinden wij

$$I_l = A^2 \sin^2\alpha - 2\,C^2 \sin\alpha \cos\alpha + B^2 \cos^2\alpha.$$

De beide representeerende lijnen van dit traagheidsmoment worden derhalve bepaald door de vergelijkingen:

$$y \cos\alpha - x \sin\alpha = \pm \sqrt{(A^2 \sin^2\alpha - 2\,C^2 \sin\alpha \cos\alpha + B^2 \cos^2\alpha)}$$

of, in ééne vergelijking, door:

$$(y \cos\alpha - x \sin\alpha)^2 - (A^2 \sin^2\alpha - 2\,C^2 \sin\alpha \cos\alpha + B^2 \cos^2\alpha) = 0$$

Wanneer $O\,L$ om O draait verandert alleen α en vinden wij voor de vergelijking der kromme, die door de representeerende lijnen van de traagheidsmomenten ten opzichte der verschillende door O gaande rechten omhuld wordt:

$$B^2 x^2 - 2\,C^2 x\, y + A^2 y^2 = A^2 B^2 - C^4 \qquad (51)$$

Aangezien $A^2 B^2 - C^4 = \sum_1^n x_j^2 \sum_1^n y_j^2 - \left(\sum_1^n x_j\, y_j\right)^2 > 0$

is deze kromme een ellips.

Hadden wij niet twee willekeurige onderling loodrechte assen $O\,X$ en $O\,Y$ tot coördinaatassen gekozen, maar de beide hoofdtraagheidsassen, welke bij O behooren, zoodat voldaan was aan:

$$\sum_1^n x_j\, y_j = 0,$$

dan zou als vergelijking van de ellips gevonden zijn

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \qquad (52)$$

waarin A^2 en B^2 nu de beide hoofdtraagheidsmomenten voorstellen van het stelsel ten opzichte van het punt O.

Bij elk punt O behoort een dergelijke traagheidsellips, die met den stand van het punt O in het vlak van vorm verandert. Voor twee standen van O zal deze traagheidsellips in een cirkel overgaan.

Om de ligging dezer punten te bepalen merken wij op, dat in dit geval in de vergelijking (51) de coëfficiënten aan de volgende voorwaarden moeten voldoen.

$$\sum_1^n x_j\, y_j = 0, \quad \sum_1^n x_j^2 = \sum_1^n y_j^2 \tag{53}$$

Zij G het zwaartepunt van het stelsel S, $G\,\xi$ en $G\,\eta$ de bij dit punt behoorende hoofdtraagheidsassen, terwijl

$$A_1^2 = \sum_1^n \xi_j^2, \quad B_1^2 = \sum_1^n \eta_j^2$$

de hoofdtraagheidsmomenten van het stelsel ten opzichte van G zijn.

Kiezen wij de coördinaatassen $O\,X$ en $O\,Y$ evenwijdig aan $G\,\xi$ en $G\,\eta$ dan zijn, als ξ_0 en η_0 de coördinaten van O t.o.v. $G\,\xi$ en $G\,\eta$ voorstellen, de coördinaten van een willekeurig punt A_j van het stelsel

$$x_j = \xi_j - \xi_0 \qquad y_j = \eta_j - \eta_0$$

Derhalve:

$$\sum_1^n x_j\, y_j = \sum_1^n \xi_j\, \eta_j - \eta_0 \sum_1^n \xi_j - \xi_0 \sum_1^n \eta_j + n\,\xi_0\,\eta_0 = n\,\xi_0\,\eta_0$$

$$\sum_1^n x_j^2 = \sum_1^n \xi_j^2 - 2\,\xi_0 \sum_1^n \xi + n\,\xi_0^2 = A_1^2 + n\,\xi_0^2$$

$$\sum_1^n y_j^2 = \sum_1^n \eta_j^2 - 2\,\eta_0 \sum_1^n \eta_j + n\,\eta_0^2 = B_1^2 + n\,\eta_0^2$$

Immers, daar G het zwaartepunt, $G\,\xi$ en $G\,\eta$ de bij dat zwaartepunt behoorende hoofdtraagheidsassen zijn is

$$\sum_1^n \xi_j = 0, \quad \sum_1^n \eta_j = 0, \quad \sum_1^n \xi_j\, \eta_j = 0.$$

Zal de bij O behoorende traagheidsellips dus een cirkel zijn,

dan moet in verband met de in (53) gestelde voorwaarden, voldaan zijn aan

$$\xi_0 \eta_0 = 0 \qquad A_1^2 + n\,\xi_0^2 = B_1^2 + n\,\eta_0^2.$$

Voor:

$$A_1^2 > B_1^2$$

voldoen hieraan:

$$\xi_0 = 0 \qquad \eta_0 = \pm \sqrt{\frac{A_1^2 - B_1^2}{n}}.$$

De beide punten O, voor welke de traagheidsellips een cirkel wordt, zijn dus gelegen op de kleinste as van de traagheidsellips, die bij het zwaartepunt G van het stelsel S behoort, en wel symmetrisch t. o. v. dit zwaartepunt en op een afstand gelijk aan $\sqrt{\frac{A_1^2 - B_1^2}{n}}$ er van verwijderd. [1])

§ 2. In figuur 9 is K de traagheidsellips van een massasysteem en NL een raaklijn aan K. Door het punt O is een lijn OX met deze raaklijn evenwijdig getrokken. In verband met het in § 1 besprokene is de raaklijn NL een representeerende lijn van het traagheidsmoment I_x van S t. o. v. OX.

Uit het brandpunt F is de loodlijn FN op deze raaklijn neergelaten.

Zooals uit de figuur blijkt heeft men:

$$I_x = MN^2 = ON^2 - OM^2 = ON^2 - (OF^2 - MF^2),$$

dus:

$$I_x = MF^2 + (ON^2 - OF^2) \qquad (54)$$

---

[1]) Wij willen even met een enkel woord wijzen op het verband, dat bestaat tusschen het boven in § 1 ingesteld onderzoek en de door CULMANN en MOHR ingestelde onderzoekingen over de graphostatica.

Zie hiervoor Encycl. der Math. Wissenschaften, Bd. IV, art. 5.

L. HENNEBERG, Die grafische Statik der starren Körper.

De gevonden ellips K is coaxiaal en homothetisch in de verhouding $\sqrt{n}:1$ met de ellips van CULMANN.

Naar een bekende eigenschap van de ellips is, als wij onderstellen $A > B$:

$$O\,N = A$$

dus:

$$O\,N^2 - O\,F^2 = B^2.$$

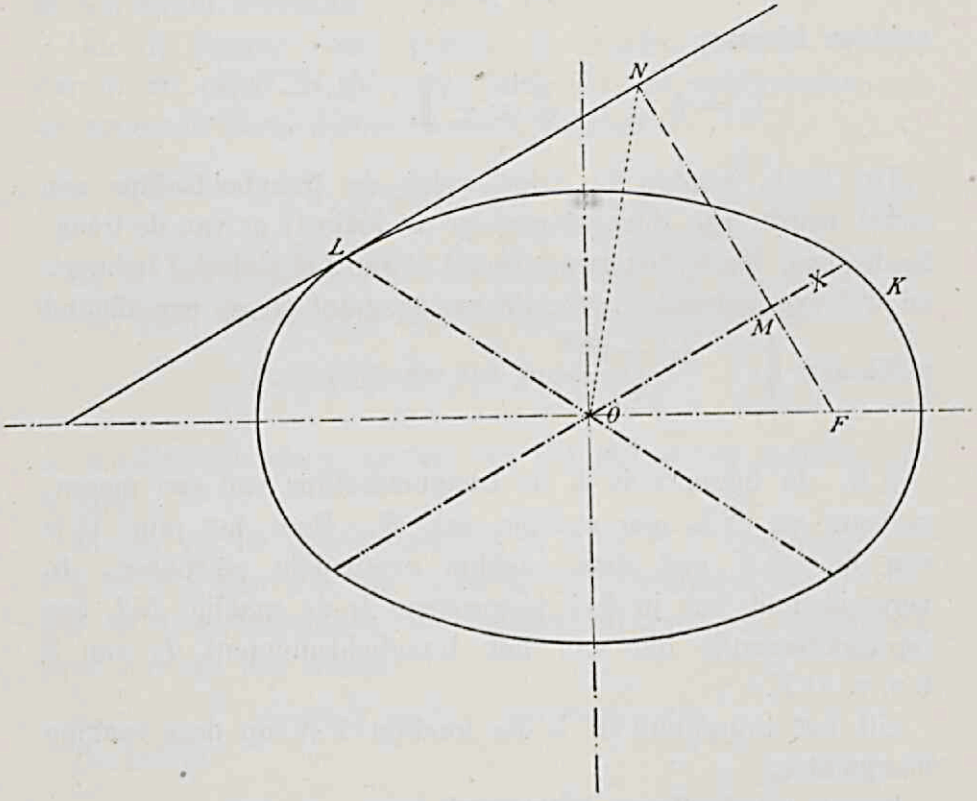


Fig. 9.

Blijkbaar is B^2 de kleinste waarde, welke I_x kan aannemen. Wij zullen deze de „*momentconstante*" voor het punt O noemen, terwijl wij aan het punt F den naam „resultantenpunt bij O behoorende" geven.

De in formule (54) uitgedrukte eigenschap kunnen wij nu aldus formuleeren.

I. Het traagheidsmoment I_x van een puntenstelsel S t. o. v. een as $O\,X$ door den oorsprong O is gelijk aan de momentconstante van S t. o. v. O vermeerderd met het traagheidsmoment van een in het bij O behoorend resultantenpunt geconcentreerde eenheidsmassa.

Beschouwen wij S als de som van eenige deelsystemen $S_1, S_2 \ldots . S_k$ $(k \leqq n)$ en passen wij op ieder dezer deelsystemen de eigenschap I toe, dan volgt, aangezien het traagheidsmoment I_x uit positieve grootheden additief is samengesteld, de eigenschap:

II. Het traagheidsmoment I_x van een puntenstelsel S. t. o. v. een as OX door den oorsprong O is gelijk aan de som der „momentconstanten" van de deelsystemen $S_1, S_2 \ldots S_k$, vermeerderd met het traagheidsmoment van het systeem S_0, dat bestaat uit massa-eenheden, welke in de resultantenpunten der deelsystemen zijn geconcentreerd.

Zij voor S_0 het punt F_0 resultantenpunt, terwijl B_0^2 de momentconstante voorstelt, en is verder voor S het punt F resultantenpunt en B^2 de momentconstante, dan wordt volgens I voor S t. o. v. OX:

$$I_x = I_x F + B^2,$$

maar volgens II is voor S t. o. v. OX eveneens:

$$I_x = I_x F^0 + \sum_1^k B_j^2 + B_0^2,$$

wanneer $I_x F$ en $I_x F^0$ achtereenvolgens voorstellen de traagheidsmomenten van de in de punten F en F^0 geconcentreerde massa-eenheden t. o. v. de as OX.

In verband met het bovenstaande volgt:

$$I_x F + B^2 = I_x F^0 + \sum_1^k B_j^2 + B_0^2 \qquad (55)$$

Deze vergelijking geldt ten opzichte van iedere as OX door het vaste punt O. Bij draaiing van die as om het punt O verandert in het eerste lid enkel $I_x F$, in het tweede lid $I_x F^0$, terwijl de overige grootheden geene verandering ondergaan. Het verschil van $I_x F$ en $I_x F^0$ moet dus constant zijn voor alle door O gaande assen. Dit beteekent evenwel, dat de afstand der beide punten F en F^0 tot die assen steeds dezelfde moet zijn, hetgeen alleen mogelijk is, als F en F^0 samenvallen, maar dan is ook:

$$I_x F = I_x F^0$$

en kunnen wij de beide volgende eigenschappen uit de vergelijking (55) afleiden:

III. De momentconstante van het systeem S is gelijk aan de som der momentconstanten van de deelsystemen $S_1 \ldots S_k$, uit welke men S kan opbouwen, vermeerderd met de momentconstante van het systeem S_0, dat samengesteld is uit massa-eenheden, welke in de resultantenpunten der deelsystemen geconcentreerd zijn.

IV. Het resultantenpunt F van het systeem S valt samen met het resultantenpunt F_0 van het systeem S_0, dat is opgebouwd uit massa-eenheden, welke in de resultantenpunten der deelsystemen geconcentreerd zijn.

§ 3. De in § 2 gevonden resultaten zullen wij nu op enkele bijzondere gevallen toepassen.

Het systeem S bestaat uit één punt A_1.

In dit geval is het traagheidsmoment I_x van dit systeem nul t. o. v. een as door de punten O en A_1, zoodat ook de momentconstante, de kleinste waarde, welke I_x kan aannemen, nul is.

Het punt A_1 en het punt A_1^1, dat op het verlengde van OA_1 t. o. v. O symmetrisch met A_1 is gelegen, zijn resultantenpunten.

De traagheidsellips K is in dit geval in de beide punten A_1 en A_1^1 ontaard.

Het systeem S bestaat uit twee punten A_1 en A_2, welke niet met den oorsprong O op dezelfde rechte zijn gelegen.

Er is geen enkele as door het punt O gaande aan te wijzen t. o. v. welke het traagheidsmoment I_x van S nul wordt. Kiezen wij tot as OX de lijn, die door de punten O en A_1 gaat, dan levert alleen het punt A_2 een bijdrage tot het traagheidsmoment I_x t. o. v. deze as. Een representeerende lijn, welke met OX evenwijdig is, zal door het punt A_2 gaan. Deze lijn is tevens raaklijn aan de traagheidsellips K_{12}. Werd de in het punt A_1 geconcentreerde massa nul, dan zou in dat geval de representeerende lijn van I_x t. o. v. OX geen standverandering ondergaan. De traagheidsellips zou evenwel

ontaarden in de punten A_2 en A_2^1. Deze punten moeten dus op de ellips K_{12} gelegen zijn, waaruit volgt, dat het punt A_2 het raakpunt is van de raaklijn, welke aan de ellips K_{12} evenwijdig met OX is getrokken. Volgens een bekende eigenschap der ellips zijn OA_1 en OA_2 in dit geval toegevoegde halve middellijnen van K_{12}, waardoor deze ellips volkomen bepaald is.

Het systeem S bestaat uit drie punten A_1, A_2 en A_3, van welke niet meer dan twee onderling of met den oorsprong O op een rechte gelegen zijn.

Dit systeem kan beschouwd worden als de samenstelling van twee deelsystemen n.l. S_1, dat uit de punten A_1 en A_2 en S_2, dat uit het punt A_3 bestaat.

Zij voor S het punt F resultantenpunt, B^2 momentconstante.

S_1 het punt F_1 resultantenpunt, $B_1{}^2$ momentconstante.

Voor S_2 is het punt A_3 uit den aard der zaak resultantenpunt, terwijl de momentconstante nul is.

Het stelsel S_0 der resultantenpunten is dan opgebouwd uit massa-eenheden, welke in de punten F_1 en A_3 zijn geconcentreerd. Zij voor S_0 het punt F_0 resultantenpunt en $B_0{}^2$ de momentconstante. Uit het in § 2 van dit hoofdstuk bewezene volgt, dat de traagheidsellips K van het stelsel S confocaal is met de ellips E, welke OA_3 en OF_0 tot toegevoegde halve middellijnen heeft

Verder is:

$$B^2 = B_1{}^2 + B_0{}^2$$

of in woorden:

De kleine halve as van de ellips K is de hypotenusa van een rechthoekigen driehoek, waarvan de kleine halve assen van de ellipsen E en K_{12} de rechthoekszijden zijn.

Beschouwen wij nu de systemen gevormd door de punten (A_1, A_2, A_3) en (A_1, A_2). Door den oorsprong O en het punt A_3 wordt een as OX gebracht. De traagheidsmomenten der beide systemen zijn t. o. v. deze as gelijk, zoodat de representeerende lijnen van I_x in beide gevallen samenvallen.

Letten wij op de traagheidsmomenten t. o. v. andere assen door het punt O, dan is steeds het traagheidsmoment I_x voor

S grooter dan dat voor S_1, omdat ook A_3 een positieve bijdrage tot het eerste levert. In verband hiermede volgt, dat de representeerende lijnen van I_x voor het systeem S verder van O verwijderd zullen zijn dan de representeerende lijnen van I_x voor het systeem S_1, zoodat de traagheidsellips K de traagheidsellips K_{12} zal omgeven.

Hieruit volgt: De traagheidsellips K van een puntenstelsel, bestaande uit de drie punten A_1, A_2 en A_3 raakt ieder der traagheidsellipsen K_{12}, K_{23} en K_{31} van de puntenstelsels, die respektievelijk uit de punten A_1 en A_2, A_2 en A_3, A_3 en A_1 bestaan, in de uiteinden eener gemeenschappelijke middellijn, die t. o. v. K en de betreffende ellips K_{12} (K_{23}, K_{31}) aan de overblijvende derde richting OA_3 (OA_1, OA_2) is toegevoegd. Al deze traagheidsellipsen behooren bij het zelfde punt O.

§ 4. Wij kunnen onze beschouwingen over traagheidsmomenten verder uitbreiden tot een systeem van n punten A_j^0 in de ruimte, welke punten alle een massa gelijk aan de massa-eenheid bezitten.

Door een vast punt O brengt men een vlak V; zij l_j de lengte der loodlijn uit A_j^0 op V neergelaten.

Het traagheidsmoment van het puntensysteem t. o. v. het vlak V is:

$$I_v = \sum_1^n l_j^2.$$

Stelt men $\sum_1^n l_j^2 = l^2$, en brengt men evenwijdig met V aan weerskanten van dit vlak op een afstand l twee vlakken evenwijdig aan, dan kunnen deze als eene grafische voorstelling van het traagheidsmoment van het puntenstelsel t. o. v. het vlak V worden beschouwd. Deze vlakken noemt men de representeerende vlakken van het traagheidsmoment I_v.

Laat men het vlak V achtereenvolgens alle mogelijke standen door O aannemen, dan zullen de representeerende vlakken van het traagheidsmoment I_v, die bij de verschillende standen van V behooren, een zeker oppervlak omhullen.

Ten einde na te gaan, welk dit oppervlak is, kiezen wij

tot rechthoekige coördinaatassen door O de hoofdtraagheidsassen, welke bij dit punt behooren, voor welke dus, wanneer x_j, y_j en z_j de coördinaten van het punt A_j^0 ten opzichte van deze assen zijn,

$$\sum_1^n x_j\, y_j = \sum_1^n y_j\, z_j = \sum_1^n z_j\, x_j = 0.$$

Voor een vlak V door O, waarvan de vergelijking is:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$$

heeft men nu:

$$I_v = \sum^n l_j^2 = \sum^n | x_j \cos\alpha + y_j \cos\beta + z_j \cos\gamma |^2$$

$$= \cos^2\alpha \sum_1^n x_j^2 + \cos^2\beta \sum_1^n y_j^2 + \cos^2\gamma \sum_1^n z_j^2.$$

Stellen wij:

$$\sum_1^n x_j^2 = A^2,\ \sum_1^n y_j^2 = B^2,\ \sum_1^n z_j^2 = C^2,$$

waarbij A^2, B^2 en C^2 de traagheidsmomenten van het puntenstelsel respectievelijk ten opzichte van de vlakken $Y\,O\,Z$, $Z\,O\,X$ en $X\,O\,Y$ voorstellen, dan is:

$$I_v = A^2 \cos^2\alpha + B^2 \cos^2\beta + C^2 \cos^2\gamma$$

De vergelijkingen der beide representeerende vlakken van dit traagheidsmoment zullen dus zijn:

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma = \pm\sqrt{A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma}$$

Deze vlakken omhullen, wanneer α, β en γ alle mogelijke waarden aannemen, het oppervlak

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1$$

Dit is een ellipsoïde, welke wij de traagheidsellipsoïde behoorende bij het punt O zullen noemen. Bij elk punt O in de ruimte behoort een dergelijke traagheidsellipsoïde, die met den stand van O verandert. Werd in § 1 bewezen, dat er bij een vlak puntenstelsel twee punten zijn, waarvoor de daarbij behoorende traagheidsellips in een cirkel overgaat, op geheel overeenkomstige wijze kunnen wij aantoonen, dat er

twee punten zijn, voor welke de daarbij behoorende traagheidsellipsoïde in een bol overgaat. Deze punten liggen op de kleinste as der traagheidsellipsoïde, welke bij het zwaartepunt behoort, en zijn symmetrisch ten opzichte van dit zwaartepunt. Verder kunnen wij op eenvoudige wijze voor bijzondere gevallen aantoonen:

Bestaat het stelsel uit één punt A_1^0, dan zullen de representeerende vlakken van het traagheidsmoment t. o. v. alle vlakken door O gaan door een der punten A_1^0 of A_1^{01}, waarbij A_1^{01} het punt is, dat met A_1^0 ten opzichte van O symmetrisch is gelegen. De traagheidsellipsoïde van dit stelsel is in beide punten ontaard.

Bestaat het stelsel uit twee punten A_1^0 en A_2^0, dan zullen de representeerende vlakken ∞^1 vlakkenbundels vormen. De assen dier vlakkenbundels zullen zijn de raaklijnen der in het vlak $O A_1^0 A_2^0$ gelegen traagheidsellips, welke bij het stelsel der punten A_1^0 en A_2^0 behoort. Bestaat het stelsel uit drie punten, die wij in dit geval aangeven door A_1^0, A_2^0 en A_3^0, dan zullen de representeerende vlakken een traagheidsellipsoïde omhullen, waarvan $O A_1^0$, $O A_2^0$ en $O A_3^0$ drie toegevoegde halve middellijnen zijn.

§ 5. Worden de punten Aj^0 $(j = 1, 2 \ldots n)$ van een massasysteem S^0 in de ruimte in evenwijdige richting op het projectievlak V in de punten Aj geprojecteerd en concentreert men in elk van deze punten Aj een massaeenheid, dan is de traagheidsellips van het massasysteem S, dat op deze wijze ontstaat, identiek met den schijnbaren omtrek van de traagheidsellipsoïde K^0 van het stelsel S^0.

Zij l de projectiestraal, welke door het middelpunt van de ellipsoïde K^0 gaat. Wij brengen door deze rechte een vlak X en hiermede evenwijdig een raakvlak T aan de ellipsoïde K^0. De vlakken X en T worden door het projectievlak volgens twee evenwijdige rechten x en t gesneden.

De schijnbare omtrek K van de ellipsoïde K^0 bij evenwijdige projectie in de gegeven richting is de omhulde van de rechten t. Is p_0 de loodrechte afstand van de vlakken X en T

en p de loodrechte afstand van de rechte lijnen x en t, dan bestaat het verband

$$\frac{p_0}{p} = \sin \psi, \tag{56}$$

waarbij ψ den hoek voorstelt, welken het vlak X met het projectievlak maakt. Uit een willekeurig punt A_j^0 van het stelsel S^0 laten wij een loodlijn $A_j^0 B_j^0$ neer op het vlak X; de lengte van deze loodlijn zij y_j^0. De loodlijn $A_j^0 B_j^0$ wordt evenwijdig op het projectievlak volgens $A_j B_j$ geprojecteerd, het punt B_j is dan op de rechte x gelegen. De lengte van de loodlijn $A_j B_j$ zij y_j.

Tusschen y_j^0 en y_j bestaat de betrekking

$$\frac{y_j^0}{y_j} = \sin \psi$$

In verband met (56) heeft men dus:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{y_j^0}{y_j}$$

en dus:

$$\frac{p_0^2}{p^2} = \frac{\sum_1^n y^0{}_j^2}{\sum_1^n y_j^2}$$

en daar:

$$p_0^2 = \sum_1^n y^0{}_j^2$$

is:

$$p^2 = \sum_1^n y_j^2$$

De rechte t, welke op een loodrechten afstand p met de rechte x evenwijdig loopt, is dus een representeerende lijn van het traagheidsmoment van het systeem S.

Aangezien de traagheidsellips van het vlak puntensysteem S, die bij O behoort, de omhulde is dezer representeerende lijnen, is daarmede het gestelde bewezen.

Is een punt O in het projectievlak V de oorsprong en zijn in dit vlak drie massapunten A_1, A_2, A_3 gegeven, dan is de

traagheidsellips K van dit stelsel, welke bij O behoort, volkomen bekend. Iedere ellipsoïde K^0, van welke de ellips K den schijnbaren omtrek bij evenwijdige projectie voorstelt, zal dan een tripel toegevoegde halve middellijnen $O^0A_1{}^0$, $O^0A_2{}^0$ en $O^0A_3{}^0$ bezitten, waarvan de rechten OA_1, OA_2 en OA_3 de evenwijdige projecties op het vlak V voorstellen.

Wij maken om dit te bewijzen gebruik van de in § 3 bewezen eigenschap, dat de traagheidsellipsen K en K_{12}, welke laatste OA_1 en OA_2 tot toegevoegde halve middellijnen heeft, elkander inwendig raken in de uiteinden L en M eener middellijn LM, welke t. o. v. beide ellipsen tot OA_3 is toegevoegd (fig. 10).

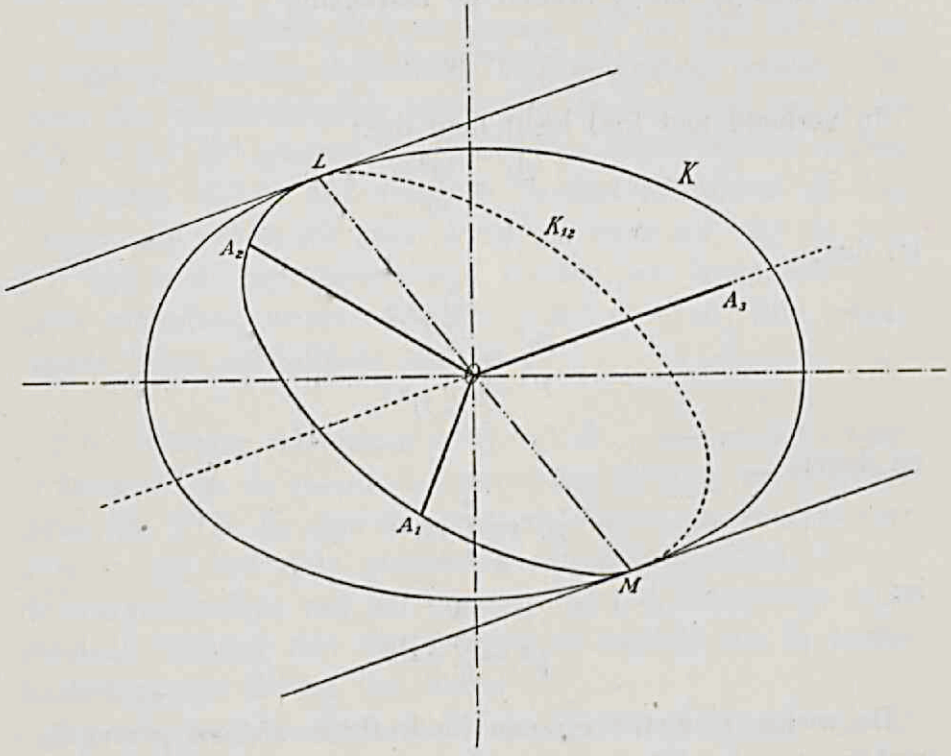


Fig. 10.

Een cylinder, die de ellips K_{12} tot richtlijn heeft en waarvan de beschrijvende lijnen de richting der projectiestralen hebben, zal de ellipsoïde raken in de punten L^0 en M^0, die op V in de punten L en M worden geprojecteerd. De doorsnede van dezen cylinder met de ellipsoïde bestaat derhalve

uit twee ellipsen, van welke de vlakken elkander volgens de rechte $L^0 M^0$ snijden. Wij geven deze ellipsen aan door $E_1{}^0$ en $E_2{}^0$. Aangezien $E_1{}^0$ op V volgens K_{12} wordt geprojecteerd, heeft deze ellips twee toegevoegde halve middellijnen $O^0 A_1{}^0$ en $O^0 A_2{}^0$, welke op V volgens de toegevoegde halve middellijnen $O A_1$ en $O A_2$ worden geprojecteerd. Kiezen wij de ellipsen K_{13} en K_{23} tot richtlijnen van cylinders, wier beschrijvende lijnen de richting der projectiestralen bezitten en beschouwen de doorsneden dezer cylinders met de ellipsoïde, dan vinden wij op dezelfde wijze, dat $O^0 A_1{}^0$ toegevoegd is tot $O^0 A_3{}^0$ t. o. v. een der ellipsen volgens welke de cylinder met de richtlijn K_{13} de ellipsoïden snijdt en dat hetzelfde geldt voor $O^0 A_2{}^0$ tot $O^0 A_3{}^0$ t. o. v. een der ellipsen, in welke de ellipsoïde door den cylinder met de richtlijn K_{23} wordt gesneden. Op deze wijze worden twee tripels toegevoegde halve middellijnen der ellipsoïde gevonden, die bij evenwijdige projectie op V door $O A_1$, $O A_2$ en $O A_3$ worden voorgesteld.

Uit het voorgaande kunnen wij een bewijs van de hoofdstelling afleiden. Immers de ellips K kan ten allen tijde beschouwd worden als grensellips bij evenwijdige projectie van twee stelsels bollen. Kiezen wij een bol van een dezer beide stelsels, dan moeten $O^0 A_1{}^0$, $O^0 A_2{}^0$, $O^0 A_3{}^0$ toegevoegde halve middellijnen van dezen bol zijn en dit is alleen het geval, wanneer zij een tripel onderling loodrechte stralen vormen, waarmede het gestelde bewezen is. In het vervolg zullen wij op deze kwestie nog even terugkomen; voorloopig herinneren wij er aan, dat de projectiestraal, die door het punt O gaat, welke de richting aangeeft, in welke een bol van een der stelsels op V volgens de grensellips K wordt geprojecteerd, gelegen moet zijn in een vlak W, dat door de groote as loodrecht op het vlak van de ellips is aangebracht, terwijl hij met het projectievlak een hoek α maakt, die bepaald is door

$$\sin \alpha = b : a,$$

wanneer a en b respektievelijk de halve groote en halve kleine as van K voorstellen. Er zijn dus twee projectiestralen l_1

[1]) Zie Hoofdstuk V. § 1.

en l_2, die stralen van POHLKE heeten, beide gelegen in het vlak W en gelijke hoeken met de door O gaande normaal op het vlak V makend, volgens welke een stelsel ingeschreven bollen K^0 van twee cylinders op V moet worden geprojecteerd, opdat de ellips K de grensellips zal zijn. Aangezien bij elk van deze bollen twee tripels onderling loodrechte stralen $O^0A_1{}^0$, $O^0A_2{}^0$, $O^0A_3{}^0$ behooren, wier projectie op V door $OA_1A_2A_3$ wordt voorgesteld, vinden wij de vier reeksen driebeenen terug.

De grensellips K der bollen K^0 bij evenwijdige projectie op V kan geconstrueerd worden door van de in § 3 gevonden resultaten gebruik te maken. (Fig. 11).

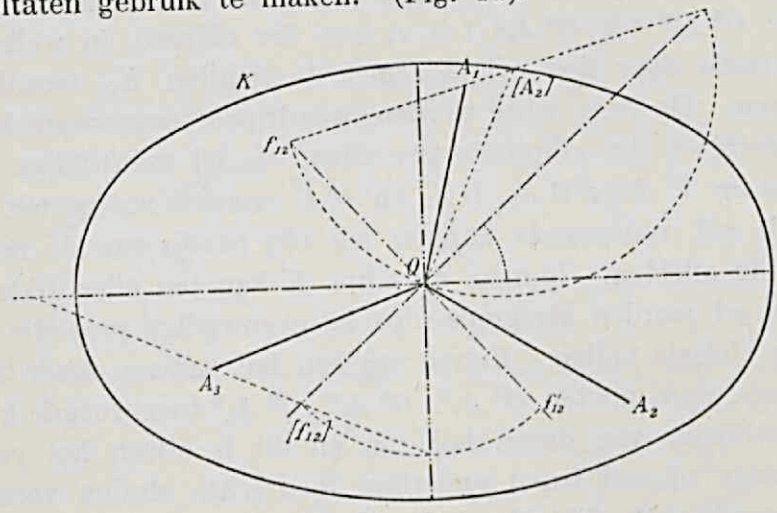


Fig. 11.

Vooreerst bepalen wij met de constructie van RYTZ [1]) de brandpunten f_{12} en f_{12}' van de ellips K_{12}, die OA_1 en OA_2 tot toegevoegde halve middellijnen heeft. Vervolgens kiezen wij OA_3 en Of_{12} tot toegevoegde halve middellijnen van een ellips E, die met K confocaal moet zijn en construeeren een der brandpunten van deze ellips weder op dezelfde wijze.

De lengte van de halve kleine as van K zij B, terwijl B_1 en B_0 respektievelijk de halve kleine assen van K_{12} en E voorstellen. Nu bestaat de betrekking

$$B^2 = B_1{}^2 + B_0{}^2;$$

[1]) Zie voor de constructie van RYTZ bijv. H. DE VRIES, Leerboek der Beschrijvende Meetkunde I, pag. 274.

wij vinden B dus als hypotenusa van een rechthoekigen driehoek, welks rechthoekszijden bekend zijn.

Alle voor de constructie van K vereischte gegevens zijn dus gevonden.

§ 6. Wij zullen nu een vraagstuk bespreken, dat met de hoofdstelling der Axonometrie indirect in verband staat.

Zij $\Delta A_1 A_2 A_3$ een driehoek in het projectievlak en verbindt men een punt O in het vlak met de hoekpunten, dan stellen, naar boven bewezen is, $O A_1$, $O A_2$ en $O A_3$ steeds de evenwijdige projecties der beenen van een driebeen voor. Wij zagen, dat er twee stralen l_1 en l_2 door O gaan, welke de richting aangeven, waarin deze driebeenen op V moeten worden geprojecteerd. Neemt het punt O nu achtereenvolgens alle standen in V in, dan kunnen wij de vraag stellen de congruentie der stralen van Pohlke l_1 en l_2 nader te bepalen. Voorloopig zij O een bepaald punt in V; daar de projectiefiguur $O A_1 A_2 A_3$ geheel bekend is, past bij deze figuur een driebeen $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$, waarvan het been de lengte $O^0 A_j^0 = r$ $(j = 1, 2, 3)$ bezit.

Uit het punt O^0 wordt een bol K_1^0 met een straal $\frac{1}{3} r \sqrt{3}$ beschreven, welke bol het vlak van driehoek $A_1^0 A_2^0 A_3^0$ in het zwaartepunt G^0 van dien driehoek raakt. Zij K_1 de grensellips van dezen bol bij projectie op V in de richting $O O^0$. Om $\Delta A_1^0 A_2^0 A_3^0$ wordt bovendien de omgeschreven cirkel E^0 met een straal ter lengte $r \sqrt{\frac{2}{3}}$ geconstrueerd, welke cirkel op V door de ellips E, de zoogenaamde ellips van Steiner [1]) van $\Delta A_1 A_2 A_3$, wordt afgebeeld. De raaklijnen in het punt G^0 aan den bol K_1^0 vormen een straleninvolutie, waarvan de stralenparen toegevoegd zijn tot alle in het raakvlak gelegen cirkels, wier middelpunt het punt G^0 is, zoodat deze straleninvolutie eveneens tot den cirkel E^0 is toegevoegd. Worden

[1]) De ellips van Steiner van een $\Delta A_1 A_2 A_3$ is de ellips, die door de hoekpunten van den driehoek gaat en in deze punten raaklijnen bezit, welke evenwijdig zijn met de overstaande zijden.

door de lijn $G\,G^0$ en twee toegevoegde stralen der bovengenoemde straleninvolutie platte vlakken gebracht, dan zullen deze vlakken tot elkander ten opzichte van den bol K_1^0 involutorisch zijn toegevoegd. Op deze wijze ontstaat dus een tot den bol K_1^0 toegevoegde vlakkeninvolutie.

Wij maken gebruik van het volgende theorema der projectieve meetkunde:

Wordt een vlakkenbundel, waarvan een rechte lijn L de drager is, en welke involutorisch is toegevoegd tot een oppervlak van den tweeden graad F_2, door een plat vlak gesneden, dan is de daardoor verkregen stralenbundel involutorisch toegevoegd tot alle kegelsneden k^2, volgens welke de omhullende kegels van F_2, wier toppen op de rechte L zijn gelegen, door dit platte vlak worden gesneden.

Hieruit volgt, dat in ons geval de stralenbundel, volgens welke het beeldvlak V den vlakkenbundel, die $G\,G^0$ tot drager heeft, snijdt, involutorisch is toegevoegd tot de grensellips K_1, van den bol K_1^0 bij projectie op V uit een in het oneindige van $G\,G^0$ gelegen projectiecentrum. Aangezien deze stralenbundel de evenwijdige projectie is van den in het raakvlak gelegen stralenbundel, welke tot E^0 involutorisch is toegevoegd, is de geprojecteerde bundel zelf tot de ellips E in V, de projectie van E^0, involutorisch toegevoegd. In deze involutie zijn o. a. $G\,A_1$ en de door G met $A_2\,A_3$ evenwijdig getrokken straal toegevoegde stralen. Op deze wijze kunnen wij drie paren toegevoegde stralen bepalen en daardoor is de involutie geheel bekend.

Brengen wij om den bol K_1^0 een omhullenden cylinder C_1 aan, waarvan de beschrijvende lijnen de richting der projectiestralen bezitten, dan wordt deze door het vlak van $\Delta\,A_1^0\,A_2^0\,A_3^0$ gesneden volgens een ellips K_1^1, terwijl de grensellips K_1, van den bol K_1^0 bij evenwijdige projectie op het beeldvlak, de doorsnede met V voorstelt.

Een tweede omhullende cylinder C_2 van dezen bol K_1^0, welks beschrijvende lijnen op het vlak van $\Delta\,A_1^0\,A_2^0\,A_3^0$ loodrecht staan en die door dit vlak volgens een met den cirkel cirkel E^0 coaxiale en in de verhouding $1 : \sqrt{2}$ homothetischen

cirkel E_1^0 wordt gesneden, heeft met den eersten cylinder C_1 twee evenwijdige raakvlakken gemeen. Is de ellips E_1 de evenwijdige projectie op V van den cirkel E_1^0, welke, zooals uit het bovenstaande volgt, met de in zijn vlak gelegen ellips K_1^1 twee gemeenschappelijke evenwijdige raaklijnen gemeen heeft, dan zullen dus de ellipsen K_1 en E_1 in V eveneens twee gemeenschappelijke evenwijdige raaklijnen bezitten. Bovendien is de straleninvolutie met den drager G zoowel tot K_1 als tot E, dus ook tot E_1 toegevoegd.

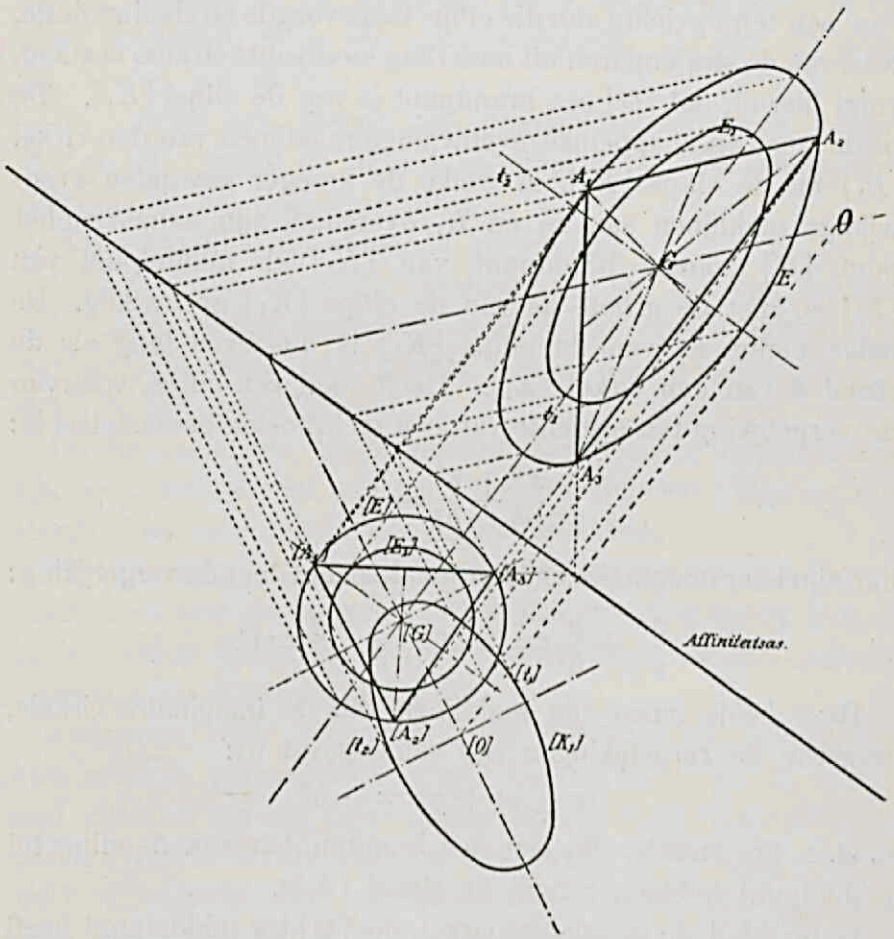


Fig. 12.

Door een affien-orthogonale transformatie in het beeldvlak kunnen wij den driehoek $A_1 A_2 A_3$ in een gelijkzijdigen

$\Delta [A_1][A_2][A_3]$ doen overgaan. [1]) De ellips E gaat bij deze transformatie over in den omgeschreven cirkel $[E]$ van $\Delta [A_1][A_2][A_3]$), de ellips E_1 in een cirkel $[E_1]$, die met $[E]$ concentrisch en in de verhouding $1 : \sqrt{2}$ homothetisch is. In de getransformeerde figuur is de straleninvolutie, waarvan het punt $[G]$, waarin G overgaat, de drager is, toegevoegd tot den cirkel $[E_1]$ en bestaat deze dus uit rechthoekige stralenparen. Deze involutie moet evenwel ook tot de ellips $[K_1]$, waarin K_1 bij de transformatie overgaat, zijn toegevoegd en aangezien alleen de brandpunten van een ellips dragers zijn van een ten opzichte van die ellips toegevoegde straleninvolutie, waarvan de stralenparen uit onderling loodrechte stralen bestaan, volgt hieruit, dat $[G]$ een brandpunt is van de ellips $[K_1]$. De beide gemeenschappelijke evenwijdige raaklijnen van den cirkel $[E_1]$ en de ellips $[K_1]$, in welke de vroeger gevonden evenwijdige raaklijnen aan E_1 en K_1 overgaan, zijn, aangezien het punt $[G]$ zoowel brandpunt van $[K_1]$ als middelpunt van $[E_1]$ is, met de groote as van de ellips $[K_1]$ evenwijdig. De halve kleine as van de ellips $[K_1]$ is dus even lang als de straal b van den cirkel $[E_1]$. Heeft men een ellips, waarvan de vergelijking ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel is:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dan zijn haar imaginaire asymptoten bepaald door de vergelijking:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{x}{a} \pm \frac{i\,y}{b} = 0.$$

Deze beide lijnen zijn raaklijnen van de imaginaire cirkels, waarvan de vergelijkingen zijn samengevat in:

$$(x \pm c) + y^2 = -\,b^2$$

d. w. z. die cirkels, die een der brandpunten van de ellips tot middelpunt hebben, terwijl de straal $i\,b$ is.

Is nu $[E_i]$ de imaginaire cirkel, die $[G]$ tot middelpunt heeft en tot $[E_1]$ is toegevoegd, dan raken de asymptoten van de

---

[1]) In de teekening kan men dit doen door van de bij hulpstelling I Hoofdstuk I § 1 vermeldde constructie gebruik maken.

ellips $[K_1]$, die $[G]$ tot brandpunt heeft, aan den imaginairen cirkel $[E_i]$. Keeren wij tot de oorspronkelijke figuur terug, dan volgt uit het bovenstaande, dat de asymptoten A_i van de ellips K_1 de tot de ellips E_1 toegevoegde imaginaire ellips E_i zullen aanraken. Het poolsysteem van E_i is anti-poolsysteem van E_1. [1])

De stralen van POHLKE l_1 en l_2 zijn assen van cylinders, welke de bollen K_1^0 omhullen, derhalve kunnen zij beschouwd worden als snijlijnen van twee vlakken W_1 en W_2, welke gaan door het middelpunt O^0 van den bol K_1^0 en den imaginairen bolcirkel in het oneindige raken. Ieder van deze vlakken gaat bovendien door een der asymptoten A_i van de ellips K_1, zoodat wij vinden:

De stralen van POHLKE zijn doorsneden van twee vlakken W_1 en W_2, welke de imaginaire ellips E_i en den imaginairen bolcirkel in het oneindige raken.

Wij vermelden de volgende hulpstelling:

Een vlak, dat door een beschrijvende lijn van een der met een gegeven ellips confocale kwadratische oppervlakken gaat, en aan die ellips raakt, raakt tevens den imaginairen bolcirkel in het oneindige aan.

De beschrijvende lijnen der bovengenoemde oppervlakken zijn doorsneden van vlakken, die de gegeven ellips en den imaginairen bolcirkel in het oneindige raken.

Hieruit volgt, dat de congruentie der stralen van POHLKE identiek is met de congruentie, welke gevormd wordt door de beschrijvende lijnen van de met de ellips E_i confocaal gelegen kwadratische oppervlakken F_2.

Aangezien door een willekeurig punt in de ruimte drie kwadratische oppervlakken gaan, die met de ellips E_i confocaal zijn, en op elk dezer oppervlakken twee door dit punt gaande (reëele of imaginaire) beschrijvende lijnen liggen, draagt ieder willekeurig punt *zes* beschrijvende lijnen, waarvan twee reëel zijn. Een willekeurig vlak wordt slechts door een der

---

[1]) Encycl. der Math. Wissenschaften, Bd. IV. G. JUNG, Geometrie der Massen.

met de ellips E_i confocale kwadratische oppervlakken aangeraakt; in dat vlak zijn dus slechts *twee* beschrijvende lijnen gelegen.

Hieruit volgt, dat de congruentie der stralen van POHLKE van den zesden graad en de tweede klasse is.

Daar de ellips E_i tot E_1 is toegevoegd, zijn de brandpunten van deze ellips (dus ook van de confocale oppervlakken) gelegen op de kleine as van E_1, op een afstand van het middelpunt G gelijk aan den brandpuntsafstand.

§ 7. Wij willen nu nog met een enkel woord de mechanische beteekenis dezer stralencongruentie aangeven.

De assen, welke gevormd worden door de snijding van twee onderling loodrechte vlakken t. o. v. welke het deviatiemoment steeds nul is, worden *nulassen* genoemd. De stralen van POHLKE zijn nulassen, zooals wij aldus kunnen aantoonen.

Worden in de eindpunten der beenen van een driebeen, dat aan de vraag voldoet, massa-eenheden geconcentreerd en brengt men door den straal van POHLKE twee onderling loodrechte vlakken X^0 en Y^0, dan is:

$$\sum_1^3 x_j^0 y_j^0 = 0,$$

waarbij x_j^0 en y_j^0 respectievelijk de loodrechte afstanden van een punt A_j^0 tot de vlakken Y^0 en X^0 aangeven.

Immers de vlakken X^0 en Y^0 snijden het door O loodrecht op l aangebrachte vlak volgens twee onderling loodrechte assen OX en OY en daar voor de punten A_j de loodrechte projectie's der punten A_j^0, steeds geldt:

$$\sum_1^3 x_j y_j = 0,$$

zooals uit het op pagina 62 (44) gevondene blijkt en $x_j^0 = x_j$ $y_j^0 = y_j$ is het gestelde bewezen.

Valt het punt O samen met G, dan gaat de ellips K_1 over in E_1. Deze ellips E_1 is dan coaxiaal en homothetisch in de verhouding $1 : \sqrt{3}$ met de ellips K_G, die bij het zwaarte-

punt behoort. [1]) Maken wij gebruik van de in § 1 van dit hoofdstuk gevonden resultaten, dan blijkt, dat op de kleine as van K_G twee punten O_1 en O_2 zijn gelegen, waarvoor de traagheidsellips in een cirkel overgaat. Deze punten zijn gelegen op een afstand $\sqrt{\frac{A_1^2 - B_1^2}{n}}$ van G, waarbij A_1 de halve groote, B_1 de halve kleine as van K_G voorstelt. Zijn a_1 en b_1 respectievelijk de halve groote en halve kleine as van E_1, dan is, in verband met de homothetie tusschen K_G en E_1,

$$A_1 = a_1\sqrt{3} \qquad B_1 = b_1\sqrt{3}$$

en daar in dit geval $n = 3$ is, volgt hieruit:

$$O_1 G = O_2 G = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = c_1,$$

waarbij c_1 de lineaire excentriciteit van E_1 voorstelt.

Hieruit volgt dus, in verband met het in § 6 gevondene, dat de brandpunten der congruentie van confocale oppervlakken liggen in de punten O_1 en O_2, [2]) in welke punten het punt O gelegen moet zijn, wil de traagheidsellips K in een cirkel overgaan. De stralen van POHLKE zijn dus in mechanischen zin *focaalassen*, d. w. z. nulassen, die een congruentie van confocale oppervlakken vormen, voor welke de bovengenoemde punten O_1 en O_2 de brandpunten zijn.

De punten O_1 en O_2, waarvoor de bijbehoorende ellipsen K_1 en K in cirkels overgaan, dragen den naam van *axonometrische brandpunten*. Is O in een dezer punten gelegen, dan is de richting der projectie loodrecht op V, omdat alleen bij loodrechte projectie op een vlak de grensellips van den bol K_1^0 in een cirkel overgaat.

---

[1]) De ellips E_1 is dus identiek met de centraal-ellips van CULMANN, welke bij het zwaartepunt G behoort.

[2]) De punten O_1 en O_2 zijn dus identiek met de brandpunten van MOHR, welke op de kleine as der centraalellips zijn gelegen op een afstand van het punt G gelijk aan de lineaire excentriciteit van deze.

VIERDE HOOFDSTUK.

Synthetische Beschouwingen.

§ 1. In dit hoofdstuk zullen wij de hoofdstelling der Axonometrie in haar meer uitgebreiden vorm tot punt van uitgang kiezen en als inleiding tot meer diepgaande projectieve beschouwingen allereerst het elementaire projectieve bewijs van REYE [1]) behandelen.

Zij een vast viervlak $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ in de ruimte gegeven; wij moeten bewijzen, dat van dit viervlak door evenwijdige projectie in een nader te bepalen richting op een nader te bepalen projectievlak een projectie $O A_1 A_2 A_3$ kan worden ontworpen, welke met een gegeven vierhoek $A B C D$ gelijkvormig is.

Onderstellen wij, dat dit inderdaad mogelijk is, en nemen wij voor een oogenblik projectievlak, projectierichting en dus ook den projectievierhoek bekend aan. De ligging van een punt P op de zijde $O A_1$ van den projectievierhoek en van het overeenkomstig punt P^0 op de ribbe $O^0 A_1^0$ is, wanneer het punt P moet overeenstemmen met een op de zijden $A B$ van den gegeven vierhoek $A B C D$ gelegen punt Q, bepaald door de volgende verhoudingen:

$$\frac{A Q}{A B} = \frac{O P}{O A_1} = \frac{O^0 P^0}{O^0 A_1^0} \quad ; \quad \frac{Q B}{A B} = \frac{P A_1}{O A_1} = \frac{P^0 A^0_1}{O^0 A_1^0},$$

welke uit de onderstelde gelijkvormigheid benevens uit de

[1]) TH. REYE, Der Satz von Pohlke, Vierteljahrschrift der Naturf. Geselsch., Zürich, Bd. 11, 1866, pg. 350—358.

gelijkvormigheid in verband met de projectie terstond voortvloeien.

Zal omgekeerd de projectie $O A_1 A_2 A_3$ met den vierhoek $A B C D$ gelijkvormig zijn, dan moet de vierhoek $O P A_2 A_3$, welke met $A Q C D$ gelijkvormig is, de evenwijdige projectie voorstellen van een op de boven aangegeven wijze uit het oorspronkelijk afgeleid viervlak $O^0 P^0 A_2{}^0 A_3{}^0$. Wij kunnen den vierhoek $A B C D$ in een parallellogram $A B^* C D^*$ veranderen door een lijn $C B^*$ evenwijdig aan $A D$ en een lijn $C D^*$ evenwijdig aan $A B$ te trekken. Het viervlak $O^0 A_1{}^0 A_2{}^0 A_3{}^0$ kunnen wij een daarmede overeenkomende verandering doen ondergaan. Zijn wij in staat aan te toonen, dat van dit veranderd viervlak door evenwijdige projectie op een nader aan te geven vlak een projectie kan worden ontworpen, welke met het parallellogram $A B^* C D^*$ gelijkvormig is, dan is hiermede tevens bewezen, dat bij projectie in dezelfde evenwijdige richting op hetzelfde vlak een projectie van het viervlak $O^0 A_1{}^0 A_2{}^0 A_3{}^0$ mogelijk is, welke met den oorspronkelijken vierhoek $A B C D$ gelijkvormig zal zijn. Zonder aan de algemeenheid van het vraagstuk iets af te doen, mogen wij na, het gegeven viervlak op de boven beschreven wijze in een nieuw te hebben vervormd, het vraagstuk als volgt stellen:

Ieder viervlak $O^0 A_1{}^0 A_2{}^0 A_3{}^0$ kan door evenwijdige projectie in een nader te bepalen richting op een nader te bepalen projectievlak zóó geprojecteerd worden, dat de projectie $O A_1 A_2 A_3$ met een gegeven parallelogram $A B C D$ gelijkvormig is.

Allereerst willen wij de projectierichting nader aangeven. Geldt de stelling inderdaad, dan komt met het snijpunt M der diagonalen $A C$ en $B D$ van het gegeven parallelogram het snijpunt N der diagonalen $O A_2$ en $A_1 A_3$ van de projectie overeen. Het punt N kan evenwel beschouwd worden, zoowel als de projectie van het midden $N_1{}^0$ der ribbe $O^0 A_2{}^0$ als van het midden $N_2{}^0$ der ribbe $A_1{}^0 A_3{}^0$. De lijn $N_1{}^0 N_2{}^0$ bepaalt dus de richting der projectie. Worden door de hoekpunten van het viervlak lijnen evenwijdig met de projectierichting getrokken, dan vormen deze de ribben van een

vierzijdig prisma. Kunnen wij dit prisma door een plat vlak snijden volgens een met $A\,B\,C\,D$ gelijkvormig parallelogram dan is het gestelde bewezen. Opdat een dergelijke doorsnede mogelijk zij, wordt vereischt, dat:

$$\angle A_1\,O\,A_2 = \angle B\,A\,C;\ \angle A_2\,O\,A_3 = \angle C\,A\,D;\ \angle A_3\,O\,A_1 = \angle D\,A\,B.$$

De stralenbundel in het projectievlak met het punt O als als drager, waarvan $O\,A_1$, $O\,A_2$, $O\,A_3$ bekende stralen zijn, moet dus congruent zijn met den stralenbundel, die het punt A tot drager heeft, en waarvan $A\,B$, $A\,C$ en $A\,D$ de overeenkomstige stralen zijn. Op de door O^0 gaande ribbe van het prisma kiezen wij een punt O en brengen door dit punt een vlak loodrecht op deze ribbe, dat de overige ribben respectievelijk in de punten A_1^*, A_2^* en A_3^* snijdt. Beschouwt men het punt O als drager van een stralenbundel, waarvan de stralen $O\,A_1^*$, $O\,A_2^*$ en $O\,A_3^*$ achtereenvolgens met de stralen $O\,A_1$, $O\,A_2$ en $O\,A_3$ van den gezochten bundel homoloog zijn, dan zijn deze beide bundels projectief. De bundels $O\,(A_1^*, A_2^*, A_3^*)$ en $A\,(B, C, D)$ zullen dan eveneens projectief zijn. Wij kennen van deze drie paren homologe stralen. Laten wij, na de beide stralenbundels in een plat vlak te hebben gebracht, de homologe stralen $O\,A_1^*$ en $A\,B$ samenvallen met dien verstande, dat O en A twee verschillende punten van de lijn $A\,B$ zijn, dan zullen, zooals bekend is, de overige homologe stralen elkander snijden in punten van de rechte lijn welke de snijpunten R en S der homologe stralen $O\,A_2^*$ en $A\,C$, $O\,A_3^*$ en $A\,D$ verbindt.

Door de punten O en A wordt de cirkel gebracht, waarvan het middelpunt op de lijn $R\,S$ is gelegen. Door dezen cirkel wordt de lijn $R\,S$ in de punten T en U gesneden. De beide hoeken $T\,O\,U$ en $T\,A\,U$ zijn recht. De stralen $O\,T$ en $A\,T$, $O\,U$ en $A\,U$ zijn achtereenvolgens homoloog. Aangezien de gezochte stralenbundel $O\,(A_1, A_2, A_3)$ met den stralenbundel $A\,(B, C, D)$ congruent is, kunnen wij de stralen $O\,X$ en $O\,Y$ bepalen, die met de stralen $A\,T$ en $A\,U$ overeenstemmen. Wij beschouwen den vlakkenbundel, waarvan de door het punt O^0 gaande projectiestraal o de drager is. Deze vlakken-

bundel moet zoo met een plat vlak, dat door het punt O gaat, gesneden kunnen worden, dat de straal OX gelegen is in het vlak (o, OT), de straal OY in het vlak (o, OU), terwijl $\angle XOY$ recht moet zijn. Een dergelijke snijding kan alleen geschieden, wanneer, òf de stralen OX en OT, òf de stralen OY en OU samenvallen. Laat ons nagaan, hoe uit te maken is, met welk geval wij te doen hebben. De stralen OA_1^* en OA_1, de doorsnede van het gezochte vlak met het tot den vlakkenbundel behoorend vlak (o, OA_1^*) zijn homoloog. Naar bekend is moet $\angle XOA_1 = \angle TAB$ en $\angle A_1OY = \angle BAU$ worden; is dus $\angle TAB$ grooter dan $\angle TOA_1^*$, dan is evenzeer $\angle XOA_1$ grooter dan $\angle TOA_1^*$ en omgekeerd. Stel, dat wij met het eerste geval te doen hebben, dan kan, als wij OX en OT hebben laten samenvallen, de hoek XOA_1 om het been OX op tweeërlei wijze zoover worden gewenteld, dat het been OA_1 terecht komt in het vlak (o, OA_1^*). De beide op deze wijze gevonden standen van het vlak zijn dan de gezochte. Deze constructie kan steeds worden doorgevoerd en daarmede is tevens het bewijs van bedoelde stelling geleverd. Een in hoofdzaak hiermede overeenkomend bewijs is afkomstig van FIEDLER [1]), met welk bewijs een in horizontale en vertikale projectie uitgevoerde constructie der standen van het gezochte projectievlak is verbonden.

§ 2. Een dieper inzicht in het wezen van de hoofdstelling der Axonometrie wordt eerst verkregen, wanneer wij deze in haar meest algemeene projectieve gedaante omzetten. Hierbij dienen twee zaken naar voren te worden gebracht. Allereerst herinneren wij aan het feit, dat een centraal-collineaire verwantschap tusschen twee stelsels in de ruimte o. a. bepaald is voor het geval, dat *vijf* vlakken van het eerste stelsel, waarvan niet meer dan *drie* door *één* punt gaan, één voor één overeenstemmen met *vijf* punten van het tweede stelsel, van welke niet meer dan *drie* in een zelfde vlak zijn gelegen en omgekeerd. Een bijzondere verwantschap, de affiniteit,

[1]) FIEDLER, Darst. Geometrie I, Aufl. 3, S. 334.

treedt op, wanneer de elementen in het oneindige van beide stelsels homoloog zijn. In het algemeen is deze volkomen bepaald, wanneer *vier* vlakken van het eerste stelsel, welke niet alle door *een* punt gaan, met *vier* punten van het tweede stelsel overeenstemmen, welke punten in het algemeen niet alle in *een* plat vlak gelegen zullen zijn. Maar ook, wanneer de vier punten van het tweede stelsel wel alle in een plat vlak zijn gelegen, blijft het bovenstaande van kracht. Dit is evenwel juist het geval, waarop de hoofdstelling betrekking heeft, zoodat deze een bijzondere affiene verwantschap veronderstelt. In de tweede plaats wijzen wij er op, dat volgens de hoofdstelling de vierhoek $O A_1 A_2 A_3$ met een gegeven vierhoek $A B C D$ gelijkvormig moet zijn. Deze eisch moet in projectieven vorm worden overgebracht.

Aangezien met de punten O, A_1, A_2 en A_3 van het vlak E_1 de punten A, B, C en D van een vlak E_2 overeenkomen, is de projectieve verwantschap tusschen de beide stelsels in E_1 en E_2 volkomen bepaald. Zijn de lijnen in het oneindige der beide vlakken homoloog, dan gaat de verwantschap in *affiniteit* over, welke laatste voor het geval, dat de beide imaginaire cirkelpunten in het oneindige in beide vlakken met elkander overeenstemmen, in *gelijkvormigheid* overgaat.

Elke projectieve eigenschap, die tusschen lijnen- of puntenstelsels in de platte vlakken E_1 en E_2 bestaat, kan meer algemeen gemaakt worden, wanneer men hetzij in één of in beide vlakken door een projectieve transformatie de imaginaire cirkelpunten doet overgaan in bepaalde punten P_1 en Q_1 in het vlak E_1, P_2 en Q_2 in het vlak E_2 en daarna den eisch stelt, dat de punten P_1 en P_2, Q_1 en Q_2 homoloog zullen zijn. Rekening houdend met dit tweevoudig karakter der projectieve verwantschap, kunnen wij dus in navolging van Schur [1]) de volgende stelling als de meest algemeene formuleering van de hoofdstelling beschouwen:

„*Vier punten* O^0, A_1^0, A_2^0 *en* A_3^0 *in de ruimte kunnen steeds,*

---

[1]) F. Schur. Ueber den Pohlke'schen Satz, Math. Annalen, Bd. 25, 1885, pg. 596—597.

hetzij door evenwijdige hetzij door centrale projectie uit een bepaald in een gegeven vlak ω gelegen projectiecentrum S, zóó op een nader te bepalen vlak E_1 geprojecteerd worden, dat, wanneer men de vier projecties O, A_1, A_2 en A_3 laat overeenstemmen met vier gegeven punten A, B, C en D, van een gegeven vlak E_2, de beide snijpunten P_2 en Q_2 van het vlak E_2 met een gegeven (hetzij reëele of imaginaire) in het vlak ω gelegen kegelsnede k^2 overeenkomen met de beide snijpunten P_1 en Q_1 van het vlak E_1 met deze kegelsnede. Evenwel mogen niet meer dan drie der gegeven punten A, B, C en D op één rechte lijn zijn gelegen."

Om het bewijs van bovenstaande stelling te leveren merken wij op, dat iedere vlakkenschoof, waarvan een willekeurig punt P in de ruimte de drager is, in zoodanig projectief verband moet staan tot het stralenveld in een vlak E_2, dat de vlakken, die gebracht kunnen worden door het punt P en de lijnen $O^0 A_1^0$, $A_1^0 A_2^0$ en $A_2^0 A_3^0$ en $A_3^0 A_1^0$, achtereenvolgens homoloog zijn met de in het vlak E_2 gelegen lijnen $A B$, $B C$, $C D$ en $D A$.

Schur noemt de verzameling der hierdoor bepaalde vlakkenschoven een *bos*. In de te bewijzen stelling wordt ondersteld, dat het vlak ω moet overeenkomen met de snijlijn der vlakken ω en E_2. Schur heeft nu op algemeene wijze in een vroegere verhandeling [1]) aangetoond, dat aan dien eisch slechts door één bepaalde tot den bos behoorende vlakkenschoof wordt voldaan. Laten wij aannemen, dat deze vlakkenschoof, die een bepaald punt S in de ruimte tot drager heeft, is gevonden, dan kan het verdere bewijs der stelling aldus worden geleerd. Wij zoeken de stralen p en q gaande door het punt S, welke overeenstemmen met de snijpunten P_2 en Q_2, van het vlak E_2, met de kegelsnede k^2. Willen wij bijvoorbeeld den straal p bepalen, dan gaan wij aldus te werk. Door het punt P_2 wordt behalve genoemde snijlijn $P_2 Q_2$ nog een tweede willekeurige lijn l getrokken. Met de lijn $P_2 Q_2$ komt in de schoof het vlak ω

[1]) F. Schur. Ueber die durch collineare Grund gebilde erzeugten Curven und Flächen, Math. Annalen, Bd. 18, pg. 15 en v.v.

overeen; een bepaald vlak V van die schoof is met de lijn l homoloog. De snijlijn dier vlakken, welke uit den aard der zaak door het punt S gaat is de gezochte straal p; evenzoo kan de straal q worden bepaald. Wanneer wij de snijpunten der stralen p en q met de kegelsnede k^2 (hetzij deze dan reëel of imaginair zijn) P_1 en P_1^1, Q_1 en Q_1^1 noemen en wij trekken de vier verbindingslijnen dezer punten $P_1 Q_1$, $P_1 Q_1^1$, $P_1^1 Q_1$, $P_1^1 Q_1^1$, dan voldoet ieder willekeurig vlak, dat door een dezer lijnen gebracht kan worden aan den eisch, dat het de kegelsnede k^2 snijdt in twee punten, die overeenkomen met de beide punten, waarin genoemde kegelsnede door het vlak E_2 wordt gesneden. Ieder dergelijk vlak kan dan als een der gezochte projectievlakken E_1 worden beschouwd en hiermede is de stelling zelf bewezen.

§ 3. Het door KRUPPA [1]) gegeven bewijs, dat wij nu meer uitvoerig zullen bespreken, is tot op zekere hoogte het omgekeerde van in § 2 geleverde. Was bij SCHUR's bewijs een vast viervlak in de ruimte gegeven en moest de ligging van de projectievlakken nader bepaald worden, in deze paragraaf zullen wij uitgaan van een gegeven vierhoek $O A_1 A_2 A_3$ en bewijzen, dat deze als scheef-evenwijdige projectie van een viervlak, dat met een eveneens gegeven viervlak $A^0 B^0 C^0 D^0$ gelijkvormig is, kan worden beschouwd. Als methode van behandeling wordt door KRUPPA gebruik gemaakt van het door E. MÜLLER [2]) aangegeven algemeen beginsel, waarbij alle metrische problemen der Beschrijvende Meetkunde worden opgelost door ze met de door LAGUERRE gegeven projectieve definitie van een hoek in verband te brengen. KRUPPA toont verder aan, dat er in het geheel acht stellen viervlakken gevonden kunnen worden, welke aan de vraag voldoen en van welke er vier imaginair zijn. Kiezen wij het hoekpunt A^0 van het gegeven viervlak $A^0 B^0 C^0 D^0$ tot top van

[1]) E. KRUPPA. Ueber den Pohlkeschen Satz, Sitz. Ber. der kaiserl. Akad. Wien, Abth. IIa, Bd 116, 1907, pg. 931—936.

[2]) E. MÜLLER. Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten Geometrie der Lage. 1905. Jahresberichte der Deutschen Math. Vereinigung, Bd 14.

een minimaalkegel en wordt deze kegel door het vlak W van $\Delta\, B^0\, C^0\, D^0$ gesneden, dan is de doorsnede een imaginaire cirkel k_i.

Aan $\Delta\, B^0\, C^0\, D^0$ in het vlak W wordt $\Delta\, A_1\, A_2\, A_3$ in het beeldvlak V affien toegevoegd. De affiene betrekking tusschen de lijnen- en puntenstelsels in de vlakken V en W is dan volkomen bepaald, omdat met de drie rechten $B^0\, C^0$, $C^0\, D^0$, $D^0\, B^0$ in het vlak W achtereenvolgens overeenstemmen de rechten $A_1\, A_2$, $A_2\, A_3$, $A_3\, A_1$ in het vlak V, terwijl van beide drietallen rechten niet meer dan twee door een punt gaan. Bovendien stemmen de lijnen in het oneindige van beide vlakken overeen. Uit de affiene betrekking, die tusschen het vlak W en het beeldvlak bestaat, volgt, dat met den imaginairen cirkel k_i in W een imaginaire kegelsnede k_i^1 in het beeldvlak zal overeenkomen. Men kan het punt O kiezen tot drager van een straleninvolutie, welke bestaat uit paren van tot elkander ten opzichte van k_i^1 toegevoegde stralen. Omdat k_i^1 imaginair is, zijn de beide dubbelstralen der involutie imaginair, het loodrecht stralenpaar der involutie is rëeel. Volgens een bekende eigenschap der projectieve meetkunde vallen twee straleninvoluties met denzelfden drager samen, wanneer hun dubbelstralen samenvallen.

Aan alle reëele en imaginaire cirkels, welke de door O gaande dubbelstralen der involutie aanraken, is dus de straleninvolutie met den drager O toegevoegd. De centra der imaginaire cirkels, welke aan de vraag voldoen, zijn gelegen op den eenen straal van het loodrecht stralenpaar, de meetkundige plaats van de centra der reëele cirkels, welke voldoen, is de andere straal. Wij kiezen een der imaginaire cirkels D_i, welke dus in het punt O dezelfde involutie van toegevoegde stralen als de kromme k_i^1 bezit. Tusschen k_i^1 en D_i bestaat een perspectieve verwantschap, waarbij het punt O centrum der perspectiviteit is, terwijl de beide kegelsneden uithoofde van hun bijzondere verwantschap twee *reeele* gemeenschappelijke koorden bezitten. Ieder van deze koorden kan tot as van perspectiviteit worden aangenomen, zoodat de kegelsneden D_i en k_i^1 met elkander in twee reëele perspectieve collineaties

overeenkomen. Wij kunnen door den imaginairen cirkel D_i twee minimaalkegels brengen, waarvan de toppen reëel zijn. Kiezen wij een van deze, dan kan k_i^1 beschouwd worden als de scheef-evenwijdige projectie van twee vlakke doorsneden k_1 en k_2 van dezen minimaalkegel. De projectierichting is hierdoor bepaald, dat het oneigenlijk punt op de lijn, die den reeelen top 0° van den minimaalkegel met het punt O verbindt, het projectiecentrum moet zijn. De reëele vlakken, waarin de imaginaire cirkels k_1 en k_2 zijn gelegen, zullen wij aanduiden door ω_1 en ω_2. Deze vlakken snijden het projecteerend prisma van $\Delta\, A_1\, A_2\, A_3$ in twee driehoeken $\Delta\, A_1^0\, A_2^0\, A_3^0$.

Het vlak W van $\Delta\, B^0\, C^0\, D^0$ was, zooals boven vermeld is, affien toegevoegd tot het projectievlak V. Wegens de juist ingevoerde evenwijdige projectie is het vlak W ook verwant met de beide vlakken ω_1 en ω_2. Bij deze affiniteit zal de imaginaire cirkel D_i in het beeldvlak met den imaginairen cirkel k_1 in het vlak ω_1 overeenstemmen. De affiene stelsels in het beeldvlak en in het vlak ω_1 zijn gelijkvormig. Immers de snijpunten van de lijn in het oneindige met den imaginairen cirkel D_i in het beeldvlak, d. w. z. de imaginaire cirkelpunten in het oneindige van het beeldvlak, komen overeen met de punten, waarin de lijn in het oneindige van het vlak ω_1 den imaginairen cirkel k_1 snijdt, d. w. z. met de imaginaire cirkelpunten in het oneindige van het vlak ω_1, waaruit de gelijkvormigheidsbetrekking voortvloeit. In verband met de projectieve definitie van een hoek, zooals deze door Laguerre gegeven is, blijkt, dat de hoeken, welke door de overeenkomstige zijden der driehoeken $B^0\, C^0\, D^0$ en $A_1^0\, A_2^0\, A_3^0$ gevormd worden, gelijk zijn, m. a. w. dat deze driehoeken gelijkvormig zijn. Men verbindt de hoekpunten van den in het vlak ω_1 gelegen $\Delta\, A_1^0\, A_2^0\, A_3^0$ met den reëelen top O^0 van den minimaalkegel, welke door D_i gebracht kan worden.

Bij het aldus gevonden viervlak ontstaan aan den top de hoeken $\angle\, A_1^0\, O^0\, A_2^0 = \alpha$, $\angle\, A_2^0\, O^0\, A_3^0 = \beta$ enz., welke achtereenvolgens gelijk zullen zijn aan de hoeken $\angle\, B^0\, A^0\, C^0 = \alpha$, $\angle\, C^0\, A^0\, D^0 = \beta$ enz., welke aan den top van het viervlak $A^0\, B^0\, C^0\, D^0$ worden gevormd. Om dit aan te toonen wordt

het volgende opgemerkt. De dubbelverhoudingen der punten B^0, C^0 en de snijpunten van de rechte B^0C^0 met den imaginairen cirkel k_i zijn gelijk aan de overeenkomstige dubbelverhoudingen, welke door de hiermede overeenkomende punten $A_1{}^0$, $A_2{}^0$ en de snijpunten van de rechte $A_1{}^0A_2{}^0$ met den imaginairen cirkel k_1 worden gevormd. Bovendien zijn de laatste dubbelverhoudingen gelijk aan de overeenkomstige dubbelverhoudingen der vier stralen $O^0A_1{}^0$, $O^0A_2{}^0$ en de verbindingslijnen van het punt O^0 met de imaginaire cirkelpunten in het oneindige, in welke het vlak ω_1 den imaginairen bolcirkel in het oneindige snijdt. Ook thans volgt uit de door LAGUERRE gegeven projectieve definitie van een hoek het gestelde terstond. Het viervlak $O^0\,A_1{}^0\,A_2{}^0\,A_3{}^0$ voldoet dus aan de voorwaarde, dat het met het viervlak $A^0\,B^0\,C^0\,D^0$ gelijkvormig is. Hetzelfde geldt voor het viervlak II, waarvan het punt O^0 de top is, terwijl de driehoek $A_1{}^0\,A_2{}^0\,A_3{}^0$ der overige hoekpunten in het vlak ω_2 is gelegen. Omdat door den imaginairen cirkel D_i twee minimaalkegels gebracht kunnen worden, verkrijgt men verder twee reëele oplossingen, welke met de reeds gevondene t. o. v. het beeldvlak symmetrisch gelegen zijn. Het viervlak II is het spiegelbeeld van het viervlak I t. o. v. een door het punt O^0 loodrecht op den projectiestraal gebracht spiegelvlak. Gebruiken wij in plaats van den imaginairen cirkel D_i een reëelen cirkel D_r, welke in het punt O dezelfde involutie van toegevoegde stralen doet ontstaan als $k_i{}^1$, dan kan men den zelfden gedachtengang bezigen. De top van den door D_r gebrachten minimaalkegel is in dit geval imaginair en wij vinden nu vier imaginaire oplossingen.

VIJFDE HOOFDSTUK.

Beschouwingen, welke in verband staan met de bepaling der grensellips van tweedegraadsoppervlakken bij evenwijdige projectie op het beeldvlak.

§ 1. De volgende stelling ga aan onze beschouwingen vooraf: *Iedere ellips K, die in het projectievlak V is gelegen, kan beschouwd worden als grensellips, bij evenwijdige projectie op V, van twee stelsels bollen, welke omhuld worden door het volgende tweetal cylinders C_1 en C_2. De ellips K is hun richtlijn, de assen l_1 en l_2, die beide door het punt O gaan, zijn gelegen in het door de groote as van K loodrecht op V aangebrachte vlak. De hoek ϕ door deze assen met de door O gaande normaal op V is bepaald door de betrekking $\cos\phi = B : A$, waarbij A en B achtereenvolgens de lengten der halve groote en halve kleine as van K voorstellen. Uit den aard der zaak is de halve kleine as van K even lang als de straal der bollen.*

Laat ons aannemen, dat een gegeven vierhoek $O A_1 A_2 A_3$ in het vlak V de scheef-evenwijdige projectie van een rechtzijdig viervlak $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ voorstelt. Kiezen wij het hoekpunt O^0 van dit viervlak tot middelpunt van een bol, met straal r, die door de overige hoekpunten A_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ gaat, dan kunnen wij de grensellips K van dezen bol bij evenwijdige projectie in de door den straal van Pohlke aangegeven richting $O O^0$ bepalen.

Zijn A en B respectievelijk de lengte der halve groote en halve kleine as van K, dan is blijkens bovenstaande stelling:

$$\left.\begin{aligned} B &= r \\ A &= r : \cos\phi \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Zijn wij in staat, op grond van de gegevens der projectiefiguur, de ellips K te construeeren, dan zijn alle gegevens gevonden, die noodzakelijk zijn om den stand van een rechtzijdig viervlak, dat aan de vraag voldoet, te bepalen.

Bij de verdere behandeling wordt dit hoofdstuk in drie onderafdeelingen gesplitst.

In de § 2—§ 8 bespreken wij de methoden voor de constructie van K.

In § 8 en § 9 bewijzen wij, dat de constructies ook doorgaan, wanneer K wordt opgevat als grensellips eener ellipsoïde, die aan speciale voorwaarden voldoet.

Ten slotte vinden wij in § 10 de gelegenheid na te gaan, hoe, nadat de constructie van de ellips K is geleverd, het existentie-bewijs voor driebeenen en lijnentripels van bepaalden vorm kan worden geleverd, waarbij tevens in verband met dit bewijs een constructie dezer driebeenen bij afbeelding in horizontale en vertikale projectie zal worden gegeven.

In § 11 geven wij het bewijs van Ruth, dat tot de overige in dit hoofdstuk behandelde in een meer verwijderd verband staat.

§ 2. Een tweetal constructies voor de grensellips K kunnen worden afgeleid uit de bij de vroegere analytische onderzoekingen gevonden resultaten.

Blijkens de formules (10) en (11) is:

$$P = r^2\left(1 + \frac{1}{\cos^2\phi}\right); \quad Q^2 = \frac{r^4}{\cos^2\phi}.$$

Daar volgens de vorige paragraaf:

$$A = \frac{r}{\cos\phi} \qquad B = r$$

volgt hieruit:

$$P = A^2 + B^2 \qquad Q^2 = A^2 B^2.$$

Dus A^2 en B^2 zijn de wortels x van de volgende vierkantsvergelijking:

$$x^2 - Px + Q^2 = 0.$$

Zijn in de projectiefiguur $O A_1$, $O A_2$ en $O A_3$ gegeven in

richting en grootte, dan zijn de lijnen a_j $(j = 1, 2, 3)$ lijnen van bekende lengte.

Stellen wij:

$$P = p^2$$
$$\xi_1 + \xi_2 = p$$

dan is:

$$A^2 = p\,\xi_1 \qquad B^2 = p\,\xi_2 \tag{58}$$

Daar $p^2 = \sum_1^3 a_j^2$ kan p op bekende wijze geconstrueerd worden. Laten wij uit het punt A_2 een loodlijn ter lengte q_1 neer op OA_1, uit het punt A_3 een loodlijn ter lengte q_2 op OA_2 en uit het punt A_1 een loodlijn ter lengte q_3 op OA_3, dan is:

$$Q^2 = \Sigma\, a_1^2\, a_2^2 \sin^2 \alpha_3 = \sum_1^3 a_j^2\, q_j^2.$$

Deelen wij door p^2, dan vinden wij in verband met (58):

$$\xi_1\, \xi_2 = \sum_1^3 \left(\frac{a_j\, q_j}{p}\right)^2 = l^2.$$

De lijn l is eveneens met elementaire hulpmiddelen te vinden. ξ_1 en ξ_2 zijn wortels van de vierkantsvergelijking:

$$\xi^2 - p\,\xi + l^2 = 0.$$

Aangezien $P : Q = p : l$ en $(P^2 - 4\,Q^2)$ essentieel positief is, zal dit eveneens met $(p^2 - 4\,l^2)$ het geval zijn. Wij vinden nu:

$$\xi_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4\,l^2}}{2},$$

waarbij ξ_1 en ξ_2 lijnen voorstellen, die op eenvoudige wijze kunnen worden bepaald. Zijn ξ_1 en ξ_2 bekend, dan is blijkens (58) de constructie van A en B eveneens zonder moeite te verrichten.

Nu blijft, daar de groote en kleine as van de ellips K in absolute grootte zijn gevonden, alleen over, de ligging dezer assen in het vlak V nader aan te geven. Blijkens § 1 van dit hoofdstuk valt de groote as van K samen met den doorgang van het vlak door de stralen van Pohlke op het vlak V. De richting van een dezer stralen l_1 zij projectierichting. Een willekeurig vlak W door deze lijn l_1 snijdt het vlak V volgens den doorgang ω. In het algemeen is de afstand van

een willekeurig niet op de lijn ω gelegen punt P in V tot het vlak W kleiner dan de afstand van dit punt P tot de lijn ω. Alleen, wanneer het vlak W loodrecht staat op V, zijn deze afstanden even groot. Het vlak W staat slechts in twee gevallen loodrecht op het vlak V; vooreerst, wanneer l_1 loodrecht staat op V, d. w. z. bij loodrechte projectie, hetgeen voorloopig buiten beschouwing blijft, en in de tweede plaats, wanneer de lijn ω met de loodrechte projectie van l_1 op V, d. w. z. met de groote as van de ellips K samenvalt, het geval, dat nader onderzocht moet worden. Om dit grensgeval te benaderen handelen wij als volgt. Voorloopig valle ω niet samen met de gezochte groote as. Uit de punten A_j $(j = 1, 2, 3)$ laten wij achtereenvolgens loodlijnen neer op de lijn ω en het vlak W; laten wij de lengten dezer loodlijnen respectievelijk voorstellen door m_j en M_j; dan is steeds

$$m_j > M_j \qquad (59)$$

Wordt het vlak W om de lijn l_1 gedraaid, dan draait de lijn ω om het punt O. De ongelijkheid (59) blijft steeds gelden, behalve, wanneer de lijn ω met de groote as van de ellips K samenvalt. Worden bij dezen stand van het vlak W en de lijn ω de loodlijnen uit A_j neergelaten achtereenvolgens door M_j^1 en m_j^1 aangegeven, dan is

$$m_j^1 = M_j^1$$

De loodlijnen uit de punten A_j en de overeenkomstige punten A_j^0 op het vlak W neergelaten zijn evenlang; M_j en M_j^1 stellen dus eveneens voor de lengten der loodlijnen uit de uiteinden der beenen van een driebeen op een door den oorsprong van dit driebeen gebracht vlak. Volgens een bekende stelling is dan:

$$\sum_1^3 M_j^2 = r^2,$$

waarbij r de lengte van het been van het driebeen voorstelt.

Stellen wij:

$$s^2 = \sum_1^3 m_j^2,$$

dan is in verband met (59) steeds

$$s^2 > r^2$$

Alleen voor het gezochte grensgeval is $s^2 = r^2$.

In den gezochten grensstand is dus s^2 een minimum.

Trekken wij in het vlak V loodrecht op de lijn ω door het punt O een lijn v en stellen wij de lengten der loodlijnen, die uit de punten A_j op deze lijn kunnen worden neergelaten door n_j voor, dan is, omdat:

$$m_j^2 + n_j^2 = a_j^2$$

als wij stellen:

$$t^2 = \sum_1^3 n_j^2$$

$$s^2 + t^2 = \sum_1^3 a_j^2 = P$$

Omdat, wanneer de projectiefiguur gegeven is, P een constante grootheid is, zal, wanneer s^2 minimum wordt, t^2 een maximum worden en omgekeerd.

Zij z de veranderlijke hoek door de lijn ω met de lijn OA_1 ingesloten, waarbij deze hoek gemeten wordt in de richting der beweging van de wijzers van een uurwerk.

De hoeken door de lijn ω met OA_2 en OA_3 gevormd, gemeten in dezelfde richting, kunnen dan achtereenvolgens door $z + \alpha_3$ en $z + \alpha_3 + \alpha_1$ worden voorgesteld. Daar $\alpha_1 + \alpha_3 = 2\pi - \alpha_2$ kan voor den laatsten hoek eveneens $z + 2\pi - \alpha_2$ worden genomen.

Wij vinden dan:

$$s^2 = a_1^2 \sin^2 z + a_2^2 \sin^2 (z + \alpha_3) + \alpha_3^2 \sin^2 (z - \alpha_2)$$
$$t^2 = a_1^2 \cos^2 z + a_2^2 \cos^2 (z + a_3) + a_3^2 \cos^2 (z - \alpha_2)$$

Valt de lijn ω met de groote as van K samen, dan moet s^2 een minimum worden, derhalve is de eerste voorwaarde:

$$\frac{d(s^2)}{dr} = \{a^2 \sin 2\alpha + a_2^2 \sin 2(z+\alpha_3) + \alpha_3^2 \sin 2(z-a_2)\} = 0, (60)$$

waaruit volgt:

$$tg\, 2z = \frac{a_3^2 \sin 2\alpha_2 - a_2^2 \sin 2\alpha_3}{a_1^2 + a_2^2 \cos 2\alpha_3 + a_3^2 \cos 2\alpha_2} \qquad (60^a)$$

Hieraan voldoen twee waarden van z, welke 90° van elkander verschillen. Wij kiezen van deze waarden die, waarvoor $d^2(s^2) \mid dz^2$ positief wordt. De andere waarde van z, welke

aan (60^a) voldoet, maakt $d^2(s^2) \mid d z^2$ *negatief*, hetgeen op een *maximum* van s^2 wijst.

Het vinden van twee waarden voor z in (60^a) hangt samen met het feit, dat bij het opstellen van de *maximum*-voorwaarden voor t^2 eveneens de vergelijking (60^a) wordt gevonden. Dit is trouwens duidelijk, daar wij boven hebben gevonden, dat een minimum van o^2 steeds van een maximum van t^2 vergezeld gaat en omgekeerd.

Ten slotte willen wij met een enkel woord het geval bespreken, waarbij de projectierichting loodrecht op V staat. Ieder vlak door l_1 staat dan loodrecht op V; de afstanden der punten A_j tot een dergelijk vlak en tot zijn doorgang met het vlak V zijn steeds evengroot, s^2 en t^2 zijn constante grootheden.

Onafhankelijk van de waarde van z moeten $d(s^2) \mid d z$ en $d(t^2) \mid d z$ nul worden. Dit kan alleen, wanneer $t g\ 2 z$ een onbepaalde waarde aanneemt. Voeren wij door teller en noemer in de formule (60^a) door r^2 te deelen „verkortingsverhoudingen" in en stellen wij teller en noemer nu gelijk aan nul, dan vinden wij de volgende formules:

$$\begin{aligned} v_3^2 \sin 2\alpha_2 - v_2^2 \sin 2\alpha_3 &= 0 \\ v_1^2 + v_2^2 \cos 2\alpha_3 + v_3^2 \cos 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (61)$$

Wij kunnen aantoonen, dat deze formules ten nauwste samenhangen met de door Weisbach voor de orthogonale Axonometrie gevonden formules. Gaan wij uit van de meetkundige interpretatie van deze, [1]) volgens welke, wanneer v_1^2, v_2^2 en v_3^2 als zijden van een driehoek beschouwd worden, de overstaande hoeken in dezen driehoek door $2\alpha_1 - \pi$, $2\alpha_2 - \pi$ en $2\alpha_3 - \pi$ worden voorgesteld, dan volgt door toepassing van den sinusregel:

$$v_3^2 : v_2^2 = \sin(2\alpha_3 - \pi) : \sin(2\alpha_2 - \pi)$$

of:

$$v_3^2 \sin 2\alpha_2 - v_2^2 \sin 2\alpha_3 = 0$$

Projecteeren wij de zijden met de lengten v_2^2 en v_3^2 beide op de zijde v_1^2, dan volgt:

$$v_1^2 = v_2^2 \cos(2\alpha_3 - \pi) + v_3^2 \cos(2\alpha_2 - \pi)$$

of:

$$v_1^2 + v_2^2 \cos 2\alpha_3 + v_3^2 \cos 2\alpha_2 = 0$$

---

[1]) Zie Inleiding pag. 4.

Van de resultaten, welke in het tweede hoofdstuk verkregen zijn bij de daar ontwikkelde theorie over de afbeelding van complexe getallen als punten van het beeldvlak, kan met vrucht gebruik gemaakt worden bij het zoeken van een constructie voor de ellips K.

Wij vonden:

$$\cos^2 \phi = \frac{P - S}{P + S}$$

$$r^2 = \frac{P - S}{2}$$

In verband met (57) volgt hieruit:

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= \frac{P + S}{2} \\ B^2 &= \frac{P - S}{2} \\ C^2 &= S^2 \end{aligned}\right] \qquad (62)$$

De absolute grootte van de halve assen en de lineaire excentriciteit van de ellips K zijn blijkens het bovenstaande bekend. Zijn wij in staat de ligging van de groote as nader aan te geven, dan hebben wij alle voor de constructie van de ellips K vereischte gegevens gevonden. Wederom maken wij gebruik van de omstandigheid, dat de groote as van K samenvalt met de loodrechte projectie op het vlak V van de door het punt O getrokken stralen van Pohlke l_1 en l_2. Blijkens de in het derde hoofdstuk gehouden onderzoekingen behooren genoemde stralen tot de congruentie der beschrijvende lijnen van de confocale oppervlakken van den tweeden graad, die de axonometrische brandpunten O_1 en O_2 tot brandpunten hebben. Hieruit volgt, dat de loodrechte projectie van l_1 en l_2 op het vlak V de normaal is in het punt O op die ellips, welke O_1 en O_2 tot brandpunten heeft en door het punt O gaat. Aangezien deze lijn den hoek O_1OO_2 halveert volgt hieruit, dat *de gezochte groote as de bissectrix van hoek* O_1OO_2 *is.*

Zijn ten opzichte van het punt O als oorsprong de punten A_1, A_2, A_3, O_1 en O_2 achtereenvolgens beelden der complexe

getallen a_1, a_2, a_3, z_1 en z_2, dan zijn ten opzichte van O_1 of O_2 als oorsprong de punten A_j beelden der complexe getallen $(a_j - z_1)$ of $(a_j - z_2)$.

Volgens het theorema van GAUSS moeten z_1 en z_2 dan voldoen aan de vergelijking:

$$\sum_1^3 (a_j - z)^2 = 0,$$

welke uitgewerkt als volgt luidt:

$$3\,z^2 - 2\,z \sum_1^3 a_j + \sum_1^3 a_j^2 = 0;$$

hieruit volgt:

$$z_1\,z_2 = \frac{1}{3} \sum_1^3 a_j^2. \tag{63}$$

Zijn de argumenten der complexe getallen z_1 en z_2 achtereenvolgens Φ_1 en Φ_2, dan is uit (63) terstond af te leiden:

$$e^{\frac{i(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}} = \left[\frac{\sum_1^3 a_j^2}{\left| \sum_1^3 a_j^2 \right|} \right]^{\frac{1}{2}}$$

of

$$\left(\sum_1^3 a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left| \sum_1^3 a_j^2 \right|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}}.$$

Het getal $\left(\sum_1^3 a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ heeft dus den modulus $\left| \sum_1^3 a_j^2 \right|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{S}$, terwijl zijn argument de halve som der argumenten van de punten O_1 en O_2 voorstelt; dit getal is dus beeld van een punt, dat op een afstand $\sqrt{S}$ van O is gelegen op de lijn, die den hoek $O_1 O O_2$ halveert. Hieruit volgt evenwel, dat dit beeldpunt een der brandpunten van de ellips K moet zijn, m. a. w.

De brandpunten van de ellips K zijn beelden der getallen $\pm \left(\sum_1^3 a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

De constructie, die de lezer zelf gelieve uit te voeren, kan nu volgen. Het punt O beschouwen wij als den oorsprong van het complexe vlak, het punt A_1 als beeld van het getal

$a_1 = +1$. Dit punt is tevens beeld van het getal a_1^2. De punten A_2 en A_3 zijn beelden der getallen a_2 en a_3. Gebruikmakend van de evenredigheid:

$$1 : a_2 = a_2 : a_2^2$$

kan men op de bekende wijze het beeld van het getal a_2^2 vinden.

Evenzoo wordt het beeld van het getal a_3^2 nader bepaald. Door herhaalde parallelogram-constructie kan het beeld B_1 van het getal $\sum_1^3 a_j^2$ worden gevonden. De lijn, die den hoek A_1OB_1 halveert, stelt de groote as van K voor.

Aangezien:

$$A^2 = \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_1^2 + a_2^2 + a_3^2|}{2}$$

en

$$B^2 = \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 - |a_1^2 + a_2^2 + a_3^2|}{2}$$

vinden wij de lengte van A en B uit de gegevens van de figuur zelf door herhaalde constructies, die met den rechthoekigen driehoek verband houden en daarmede is alles, wat gezocht moest worden, gevonden.

§ 3. Na deze op de analyse berustende constructies zullen nu de zuiver meetkundige volgen, waarbij wij eenerzijds de historische prioriteit, anderzijds den essentieelen samenhang meer bijzonder naar voren hebben gebracht.

Beschouwen wij de lijnen OA_1 en OA_2; OA_1 en OA_3; OA_2 en OA_3 achtereenvolgens als toegevoegde halve middellijnen van ellipsen, die wij door E_{12}, E_{13} en E_{23} aangeven, dan kunnen wij vooreerst vragen of er een ellips K bestaat, welke ieder dezer ellipsen insluit en dubbel aanraakt.

Het eerst is deze vraag gesteld door VON DESCHWANDEN, [1])

[1]) J. W. VON DESCHWANDEN: Anwendung schiefer Parallelprojektionen zu axonometrischen Zeichnungen I t. a. p. Het vervolgartikel II in den volgenden jaargang behandelt alleen bijzondere gevallen en geeft voor deze de constructies. Dit artikel blijft daarom buiten beschouwing.

die haar in bevestigenden zin beantwoordde en vervolgens, door de ellips K als grensellips van een bol te beschouwen, een existentie-bewijs voor de driebeenen kon leveren.

Hoewel de beschouwingen van VON DESCHWANDEN alleen historische beteekenis bezitten, zullen wij toch in het kort zijn betoog aangeven om te laten zien, hoe men, aanknoopend aan het door hem gevondene en dit op de juiste wijze interpreteerend, volkomen exacte en ter constructie bruikbare resultaten verkrijgen kan.

De lijnen $O A_j$ $(j = 1, 2, 3)$ worden door het punt O heen verlengd; vervolgens worden uit het punt O op de verlengde lijnen achtereenvolgens stukken $O A_j^1$ ter lengte $O A_j$ $(j = 1, 2, 3)$ afgezet. Naar bekend is, zijn de raaklijnen in de punten A_2 en A_2^1 aan de ellips E_{12} en de raaklijnen in de punten A_3 en A_3^1 aan de ellips E_{13} met $O A_1$ evenwijdig, terwijl zich, wat hun afstanden tot het punt O betreft, twee gevallen kunnen voordoen.

a. Beide paren raaklijnen zijn even ver van O verwijderd.

b. Het eene stel raaklijnen is verder van O verwijderd dan het andere.

Het verst verwijderde stel sluit de ellipsen E_{12} en E_{13} geheel in en raakt minstens een van deze ellipsen aan. De ellips E_{23} wordt door ieder der vier genoemde raaklijnen in twee punten gesneden. Hieruit volgt, dat evenwijdig met $O A_1$ twee raaklijnen t_1 en t_1^1 aan de ellips E_{23} kunnen worden getrokken, die verder van het punt O zijn verwijderd dan de vier bovengenoemde. Deze raaklijnen t_1 en t_1^1 sluiten de ellipsen E_{12}, E_{23} en E_{31} geheel in. De verbindingslijn van de op de ellips E_{23} gelegen raakpunten T_1 en T_1^1 is tot de lijn $O A_1$ ten opzichte van de ellips E_{23} toegevoegd. Wij vinden op volkomen dezelfde wijze twee andere paren raaklijnen, n.l.

De raaklijnen t_2 en t_2^1 aan de ellips E_{13} evenwijdig met $O A_2$ getrokken, wier raakpunten T_2 en T_2^1 de eindpunten zijn der tot $O A_2$ ten opzichte van de ellips E_{13} toegevoegde middellijn $T_2 T_2^1$ en de raaklijnen t_3 en t_3^1, die evenwijdig met $O A_3$ zijn, terwijl de verbindingslijn hunner raakpunten

$T_3\,T_3^1$ ten opzichte van de ellips E_{12} tot $O\,A_3$ is toegevoegd. Deze drie paren raaklijnen vormen een zeshoek, welke de ellipsen E_{12}, E_{23} en E_{31} geheel insluit. Tot hiertoe is het bewijs volkomen exact; daarna verliest het verdere betoog de noodzakelijke strengheid.

Allereerst bewijst VON DESCHWANDEN, dat er een tweetal ellipsen in het vlak V wordt gevonden, waarvan de eene ellips E_1 twee der ellipsen E_{12}, E_{23} en E_{31} aanraakt en de derde insluit, terwijl de tweede ellips, die wij door E_2 voorstellen, eveneens een tweetal der ellipsen E_{12}, E_{23} en E_{31} aanraakt en de derde snijdt. Beschouwen wij E_1 en E_2 als de begin- en eindellips eener oneindige reeks van vloeiend veranderende ellipsen, van welke iedere ellips steeds aan het bovengenoemde tweetal ellipsen blijft raken, dan moet er onder die reeks een ellips voorkomen, die de derde ellips raakt en dus aan den bovengestelden eisch voldoet.

Natuurlijk kunnen tegen deze redeneering verschillende bezwaren worden ingebracht, van welke wij er enkele zullen noemen. Er is niet bewezen, dat het inderdaad mogelijk is een reeks vloeiend veranderende ellipsen te vinden, die de beide aangeraakte ellipsen blijven aanraken; verder gaat de schrijver niet na, of er meer ellipsen zijn, die aan de vraag voldoen, wat toch van belang is voor het existentiebewijs der driebeenen, dat met het bestaan dezer als grensellips van een bol op te vatten omhullende ellips ten nauwste samenhangt. Ten slotte wordt niet aangewezen, hoe de ellipsen E_{12}, E_{23} en E_{31} door de ellips K worden aangeraakt, wat toch voor de constructie noodzakelijk is. Vandaar, dat er geen sprake is bij VON DESCHWANDEN van een constructie, zooals door hem trouwens zelf wordt toegestemd; [1]) alleen onder bijzondere omstandigheden, voor zoover den vorm der projectiefiguur betreft, kan deze constructie in stricten zin door hem worden uitgevoerd.

§ 4. Om den raaklijnenzeshoek nader te onderzoeken

[1]) VON DESCHWANDEN, t. a. p. I pag. 277.
«Es ist mir gegenwärtig unmöglich eine allgemeine anwendbare Construction an zu geben.»

moeten wij de ruimtefiguur te hulp roepen en maken wij daartoe gebruik van de volgende hulpstelling:

Een cylinder C, die een ellipsoïde omhult, wordt in evenwijdige richting op het beeldvlak geprojecteerd. Is K de grensellips van de ellipsoïde bij deze projectie, dan wordt de schijnbare omtrek van den cylinder voorgesteld door een ellips E, die K inwendig dubbel aanraakt in de uiteinden eener gemeenschappelijke middellijn L M en tevens raakt aan de raaklijnen, welke in de punten L en M aan de ellipsen E en K kunnen worden getrokken.

Als omhullende cylinder van den bol K^0, welks schijnbaren omtrek wij moeten bepalen, kiezen wij een cylinder, die $O^0 A_1{}^0$ tot as heeft en dus den bol volgens den grooten cirkel $E_{23}{}^0$ aanraakt. Blijkens bovenstaande hulpstelling bestaat de schijnbare omtrek van dezen cylinder uit de ellips E_{23}, die de grensellips K aanraakt in de uiteinden eener gemeenschappelijke middellijn, welke ten opzichte van K en E_{23} tot $O A_1$ is toegevoegd en bovendien uit een tweetal raaklijnen t_1 en $t_1{}^1$, welke in de uiteinden van deze middellijn de ellipsen K en E_{23} aanraken en met $O A_1$ evenwijdig zijn. Herhalen wij hetzelfde voor de omhullende cylinders van den bol, die $O^0 A_2{}^0$ en $O^0 A_3{}^0$ tot assen hebben, dan vinden wij voor den schijnbaren omtrek achtereenvolgens de ellips E_{31}, welke de ellips K inwendig dubbel aanraakt volgens een middellijn, die ten opzichte van beide ellipsen tot $O A_2$ is toegevoegd benevens twee raaklijnen t_2 en $t_2{}^1$ aan deze ellipsen beide met $O A_2$ evenwijdig en verder de ellips E_{12}, welke eveneens met de ellips K inwendig dubbele aanraking heeft in de uiteinden eener ten opzichte van de ellipsen K en E_{12} tot $O A_3$ toegevoegde middellijn, benevens een tweetal raaklijnen t_3 en $t_3{}^1$ aan deze ellipsen beide met $O A_3$ evenwijdig. Het zestal bovengenoemde raaklijnen vormt den bovengenoemden zeshoek, thans is evenwel de wijze van aanraking met de ellips K volkomen aangegeven.

Gebruik makend van deze omstandigheid heeft VON PESCHKA [1]) het eerst een constructie van de ellips K verricht.

[1]) G. A. VON PESCHKA. Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie, Sitz. Ber. Wien, Abth. IIa, Bd. 78, 1878, pg. 1043—1055.

Uit het punt O als middelpunt wordt met een straal ter lengte $O A_1$ een cirkel C beschreven, die affien verwant is met de ellipsen E_{12} en E_{13}. Loodrecht op $O A_1$ wordt in dezen cirkel de middellijn $[A_2]\, O\, [A_3]$ getrokken. In de af-

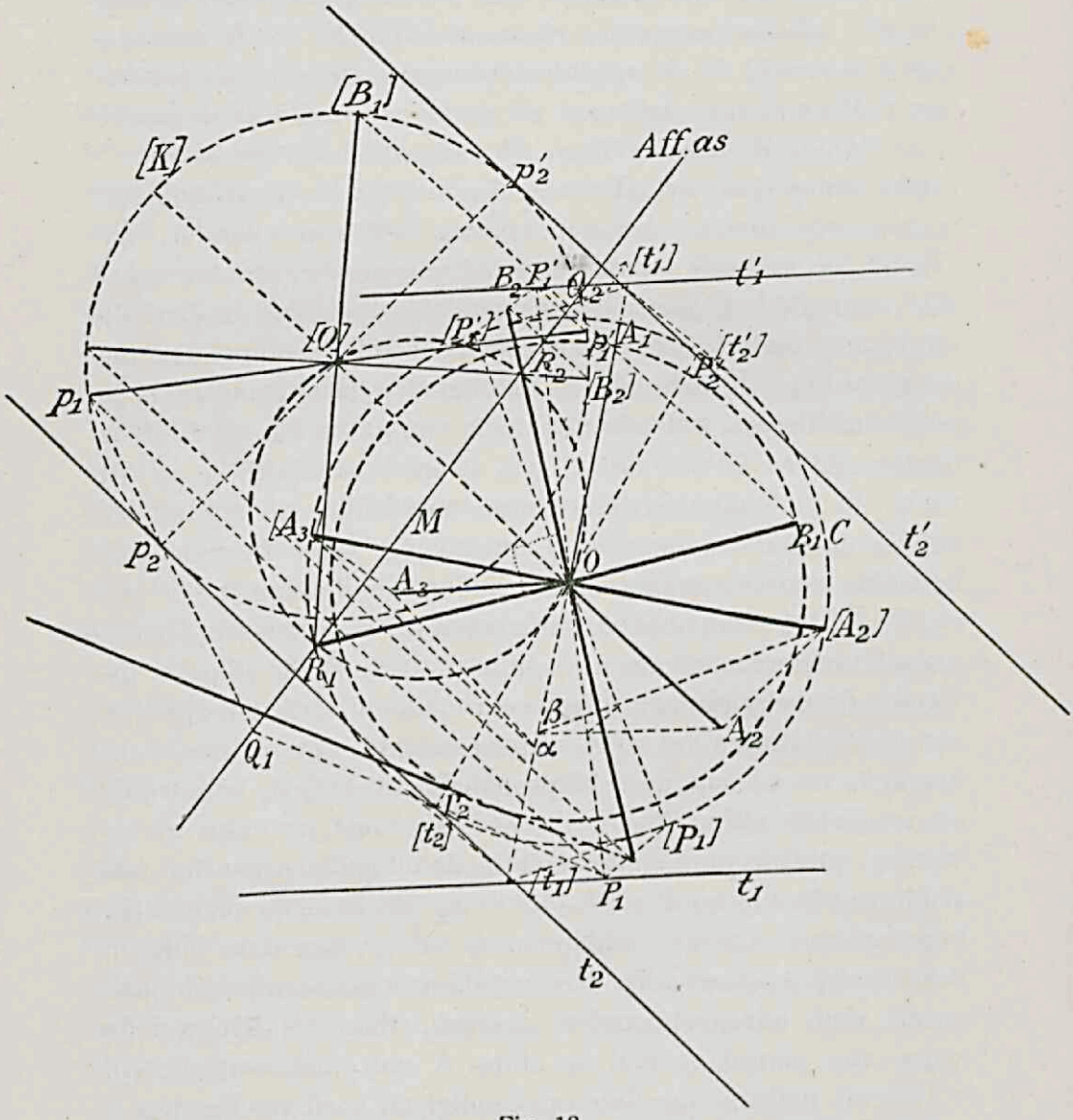


Fig. 13.

finiteit tusschen den cirkel C en de ellips E_{12} is de lijn $O A_1$ affiniteitsas, terwijl de verbindingslijn der punten A_2 en $[A_2]$ de affiniteitsrichting bepaalt. Daarentegen is voor de tusschen

den cirkel C en de ellips E_{13} bestaande affiniteit de lijn $O A_1$ eveneens affiniteitsas; de lijn A_3 $[A_3]$ bepaalt voor deze de affiniteitsrichting.

Blijkens het bovenstaande zullen de raaklijnen t_1 en t_1^1, die evenwijdig met $O A_3$ aan de ellips E_{12} zijn getrokken, deze ellips raken in de punten P_1 en P_1^1, welke tevens de op de ellips K gelegen raakpunten van deze raaklijnen met genoemde ellips K zijn. Evenzoo vinden wij, dat de raaklijnen t_2 en t_2^1, welke evenwijdig met $O A_2$ aan de ellips E_{13} zijn getrokken en die deze ellips achtereenvolgens in de punten P_2 en P_2^1 raken, tevens raaklijnen zijn in genoemde punten aan de ellips K. Wij willen door constructie de raaklijnen t_1 enz. en de hierop gelegen punten P_1 enz. nader bepalen. Hiertoe gebruiken wij de eigenschap, dat in de affiniteit tusschen de ellips E_{12} en den cirkel C met de door het punt A_2 aan $O A_3$ evenwijdig getrokken lijn, welke de affiniteitsas in het punt β snijdt, de lijn $[A_2]\,\beta$ overeenkomt. Deze lijn bepaalt de in de affiene figuur met $O A_3$ overeenkomende richting. De raaklijnen $[t_1]$ en $[t_1^1]$ aan den cirkel C, welke met $[A_2]\,\beta$ evenwijdig zijn getrokken, en dezen cirkel in de punten $[P_1]$ en $[P_1^1]$ raken, komen dus omgekeerd overeen met de gezochte raaklijnen t_1 en t_1^1, die evenwijdig met $O A_3$ aan de ellips E_{12} zijn getrokken en deze ellips in de gezochte punten P_1 en P_1^1 raken. Op dezelfde wijze vinden wij de raaklijnen t_2 en t_2^1 en de op deze gelegen raakpunten P_2 en P_2^1.

Letten wij op het door constructie bepaalde, dan hebben wij nu de vraag te stellen: *Wanneer van een ellips gegeven zijn twee paren evenwijdige raaklijnen benevens de op deze raaklijnen gelegen raakpunten, wordt gevraagd de assen van deze ellips te bepalen.*

Wij beschrijven tusschen de raaklijnen t_2 en t_2^1 een rakenden cirkel $[K]$, welke met de gezochte ellips K affien is verwant. De richting der raaklijnen t_2, t_2^1 geeft de richting der affiniteit aan, de raakpunten p_2 en p_2^1 der raaklijnen t_2 en t_2^1 met den cirkel $[K]$ komen met de punten P_2 en P_2^1 op K overeen. Zijn p_1 en p_1^1 de punten, die met P_1 en P_1^1 in de affiniteit tusschen de ellips K en den cirkel $[K]$ overeenkomen, dan

snijden de homologe lijnen $P_1 P_2$ en $p_1 p_2$, $P_1^1 P_2^1$ en $p_1^1 p_2^1$ (welke om de figuur niet onduidelijk te maken zijn weggelaten) elkander achtereenvolgens in de punten Q_1 en Q_2, die op de affiniteitsas zijn gelegen, zoodat deze bepaald is.

De cirkel gaande door de punten O en $[O]$, het middelpunt van den cirkel $[K]$, en welks middelpunt M op de affiniteitsas is gelegen, snijdt deze as in de punten R_1 en R_2. De rechten $R_1 O$ en $R_1 [O]$, $R_2 O$ en $R_2 [O]$ zijn dus homoloog en omdat $\angle R_1 O R_2 = \angle R_1 [O] R_2 = 90°$ vallen de assen van K langs $O R_1$ en $O R_2$. Zijn $[B_1]$ en $[B_2]$ de snijpunten der lijnen $[O] R_1$ en $[O] R_2$ met den cirkel $[K]$, dan komen deze punten overeen met de uiteinden B_1 en B_2 der halve assen van K, welke alzoo gevonden zijn.

§ 5. De in § 4 vermeldde stelling aangaande den schijnbaren omtrek van een omhullenden cylinder van een bol wordt gebruikt door MANDL [1]) om de ellips K nader te bepalen. Hij kiest daartoe den cylinder, welks as de richting der projectie heeft. De bol wordt door dezen cylinder aangeraakt volgens een grooten cirkel, waarvan het vlak loodrecht op de projectierichting staat. De evenwijdige projectie van dezen cirkel op het beeldvlak is de ellips K. Zijn wij in staat de projectie te bepalen van twee onderling loodrechte stralen van dezen cirkel, dan zijn dit twee toegevoegde halve middellijnen van de ellips K, en kunnen de assen van deze bepaald worden.

Evenals in § 4 maken wij ook thans gebruik van de affiniteit tusschen de ellips E_{12} en den cirkel C, uit het middelpunt O met den straal $O A_1$ beschreven. Met behulp van deze affiniteit bepalen wij de halve middellijn $O B_1$ van E_{12}, welke langs $O A_3$ valt, benevens de tot $O B_1$ ten opzichte van E_{12} toegevoegde halve middellijn $O B_2$. Door het punt A_2 trekken wij een lijn $A_2 \alpha$ evenwijdig met $O A_3$, die de affiniteitsas in een punt α snijdt. De lijn $[A_2] \alpha$ is met deze lijn homoloog en deze bepaalt tevens de met $O A_3$ overeenkomstige richting

[1]) J. MANDL, Der Pohlke'sche Lehrsatz der Axonometrie und eine Verallgemeinerung desselben t. a. p.

in de affiene figuur. In den cirkel C trekken wij de stralen $O[B_1]$ evenwijdig met $[A_2]\,\alpha$ en $O[B_2]$ loodrecht op $O[B_1]$. De met deze stralen homologe halve middellijnen OB_1 en OB_2 van E_{12} zijn de gezochte. De lijnen OB_1 en OA_3 stellen

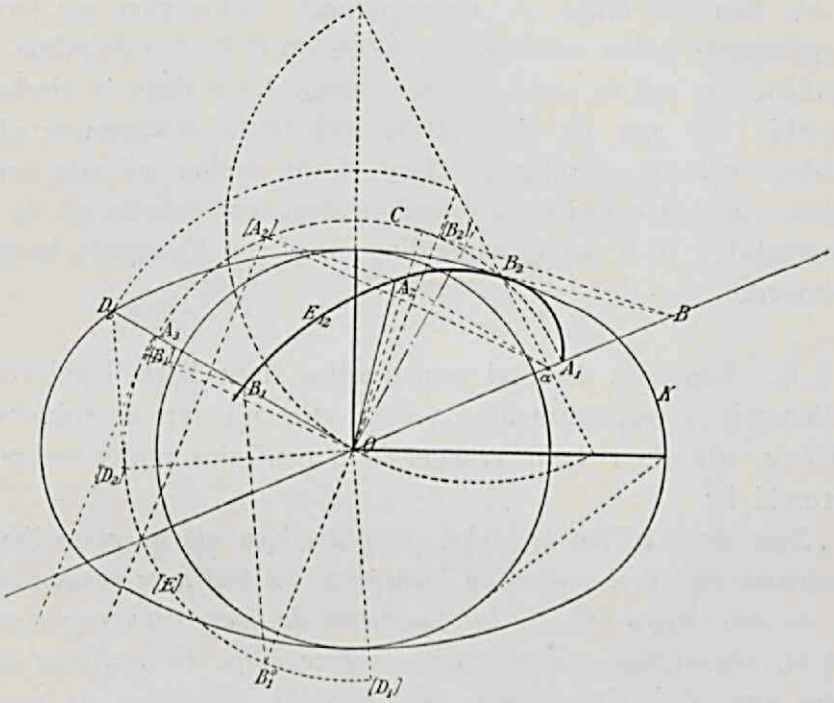


Fig. 14.

de evenwijdige projecties voor van twee onderling loodrechte bolstralen, die gelegen zijn in het door $O^0 A_3{}^0$ gebrachte projecteerend vlak. Zijn wij in staat twee onderling loodrechte stralen $O^0 D_1{}^0$ en $O^0 D_2{}^0$ van den cirkel, volgens welke dit vlak den bol snijdt, te bepalen, waarvan de eene, $O D_1{}^0$, langs den door O^0 gaanden projectiestraal valt, dan zijn $O^0 D_2{}^0$ en $O^0 B_2{}^0$ twee onderling loodrechte stralen van den cirkel op den bol, welks vlak door O^0 loodrecht op de projectierichting is gebracht. Wij moeten OD_2 construeeren en bedenken daartoe, dat de projectie OD_1 de lengte nul heeft. In de affiniteit tusschen den cirkel $[E]$, die uit het middelpunt O met de straal OA_3 is beschreven en de ellips E, welks samenvallende halve toegevoegde middellijnen door OA_3 en OB_1 worden voorgesteld, is OA_3 de affiniteitsas,

terwijl de verbindingslijn der punten B_1 en B_1^* ($O B_1^* \perp O A_3$) de affiniteitsrichting aangeeft. Evenwijdig met $B_1 B_1^*$ wordt in den cirkel de straal $O[D_1]$ getrokken en loodrecht op deze de straal $O[D_2]$, welke met de gezochte halve middellijn $O D_2$ van de ellips K overeenkomt. Aangezien wij twee toegevoegde halve middellijnen $O D_2$ en $O B_2$ van de ellips K kennen, zijn wij in staat de halve assen dezer ellips te vinden, waarbij wij van de door RYTZ geleverde assenconstructie hebben gebruik gemaakt. Ten slotte willen wij nog even wijzen op den samenhang tusschen deze constructie en de in Hoofdstuk I § 2 naar aanleiding van VON PESCHKA's bewijs geleverde.

§ 6. Van een tweetal constructies door PELZ [1]) geleverd zullen wij er een vermelden. PELZ gaat uit van de volgende stelling, die door hem vroeger [2]) in eenigzins ander verband vermeld is:

„*Zijn drie in het beeldvlak gelegen lijnen als de evenwijdige projecties van drie onderling loodrechte bolstralen te beschouwen en is een ellips K in het beeldvlak de grensellips van dezen bol bij evenwijdige projectie, dan is deze ellips K confocaal met ieder van de drie ellipsen, die bepaald zijn door de paren toegevoegde halve middellijnen $O A_i$ ($i = 1, 2, 3$) en $O f_{jk}$ ($j k = 23, 31, 12$), waarbij f_{jk} een der brandpunten van de ellips E_{jk} ($j k = 23, 31, 12$) voorstelt.*"

Tweemaal achter elkander passen wij de assenconstructie van CHASLES toe en bepalen daardoor eerst de brandpunten f_{12} en f_{12}^1 van de ellips E_{12} en vervolgens de brandpunten van de ellips, die de lijnen $O A_3$ en $O f_{12}^1$ tot toegevoegde halve middellijnen heeft. De brandpunten F_1 en F_2 van de ellips K zijn dan blijkens bovenstaande hulpstelling gevonden.

---

[1]) C. PELZ. Zur klinogonalen Darstelling der Rotationsflächen, Sitz. Ber. der Kön. Böhm. Gesellsch. der Wissenschaften. Math. Naturw. Klasse., 1895, Art. VII, pg. 13.

[2]) C. PELZ. «Ueber eine allgemeine Art der Bestimmung der Brennpuncte von Contouren der Flächen zweiten Grades.» Sitz. Ber. der Kaiserl. Akad. Wien, Abth. II*a*., Bd. 75, pg. 177.

Wanneer wij bovendien nog in staat zijn de lengten der assen van de ellips K op te sporen, dan kan deze ellips geconstrueerd worden. Hiertoe kan de volgende stelling te hulp worden geroepen:

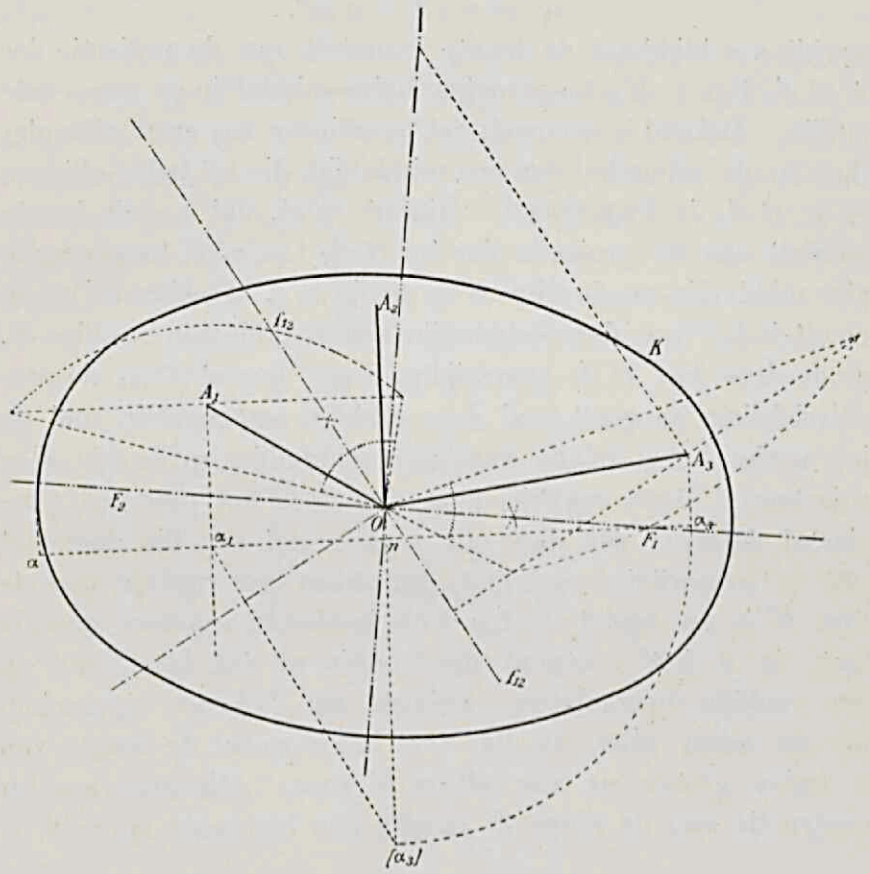


Fig. 15.

Worden twee toegevoegde halve middellijnen eener ellips in evenwijdige richting op een rechte lijn geprojecteerd en bepaalt men tevens de projectie in dezelfde richting op de lijn L van die halve middellijn van de ellips, welke tot de projectierichting ten opzichte van de ellips is toegevoegd, dan bestaat, wanneer de lengten der genoemde projecties achtereenvolgens door m_1, m_2 en m worden voorgesteld tusschen deze de betrekking

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2$$

Uit het brandpunt F_1 laten wij op $O A_2$ een loodlijn neer, waarvan n het voetpunt is, en projecteeren vervolgens de

toegevoegde halve middellijnen $O A_1$ en $O A_3$ van de ellips E_{13} in de richting $O A_2$ op genoemde loodlijn. Stellen $n \alpha_1$ en $n \alpha_3$ de lengten dezer projecties voor, dan bestaat de betrekking:

$$n \alpha^2 = n \alpha_1^2 + n \alpha_3^2,$$

waarbij $n \alpha$ blijkbaar de lengte voorstelt van de projectie der tot $O A_2$ t. o. v. E_{13} toegevoegde halve middellijn op genoemde loodlijn. Bekend is evenwel, dat de ellipsen E_{13} en K elkander raken in de uiteinden van een middellijn, die tot beide ellipsen t. o. v. $O A_2$ is toegevoegd. Hieruit volgt, dat $n \alpha$ de lengte voorstelt van de projectie der tot $O A_2$ t. o. v. K toegevoegde halve middellijn van de ellips K op de lijn $F_1 n$. Trekken wij in een der uiteinden van deze middellijn een raaklijn aan de ellips K, dan is deze met $O A_2$ evenwijdig, maar, omdat $O A_2$ de projectierichting aangeeft, zal deze raaklijn samenvallen met de lijn, welke het uiteinde van deze middellijn op de lijn $F_1 n$ projecteert. Deze raaklijn gaat dus door het punt α. Omgekeerd kunnen wij dan ook zeggen, dat een lijn door het punt α evenwijdig aan $O A_2$ getrokken een raaklijn aan de ellips K is en omdat de lijn $F_1 n$ loodrecht op deze raaklijn staat, is n het voetpunt der loodlijn uit het brandpunt op deze raaklijn neergelaten. Volgens een bekende eigenschap van de ellips stelt de lijn $O \alpha$ in dit geval de lengte van de halve groote as der ellips K voor. Alle gegevens ter constructie van de ellips K noodig zijn hiermede bepaald.

§ 7. A. Beck [1]) heeft een constructie gegeven, die in de bepaling der assenrichtingen met de constructie van Pelz overeenstemt, maar in de bepaling van de lengten der assen van de laatste afwijkt. Beck neemt enkele door Chasles bewezen stellingen [2]) uit de theorie der assenbepalingen van confocale oppervlakken van den tweeden graad als bekend aan.

I. *Is in een punt P van het oppervlak eener ellipsoïde een*

---

[1]) A. Beck. Ueber die Fundamentalaufgabe der Axonometrie. Journal von Crelle, Bd. 106, 1890, pg. 121—124.

[2]) Salmon-Fiedler. Analytische Geometrie des Raumes, 4 Aufl., § 177 en § 178.

raakvlak aangebracht en wordt door het middelpunt O der ellipsoïde een vlak V evenwijdig met het raakvlak gelegd, dan zijn de assen van de doorsnede evenwijdig met de normalen in P op de beide door P gelegde met de ellipsoïde confocale oppervlakken.

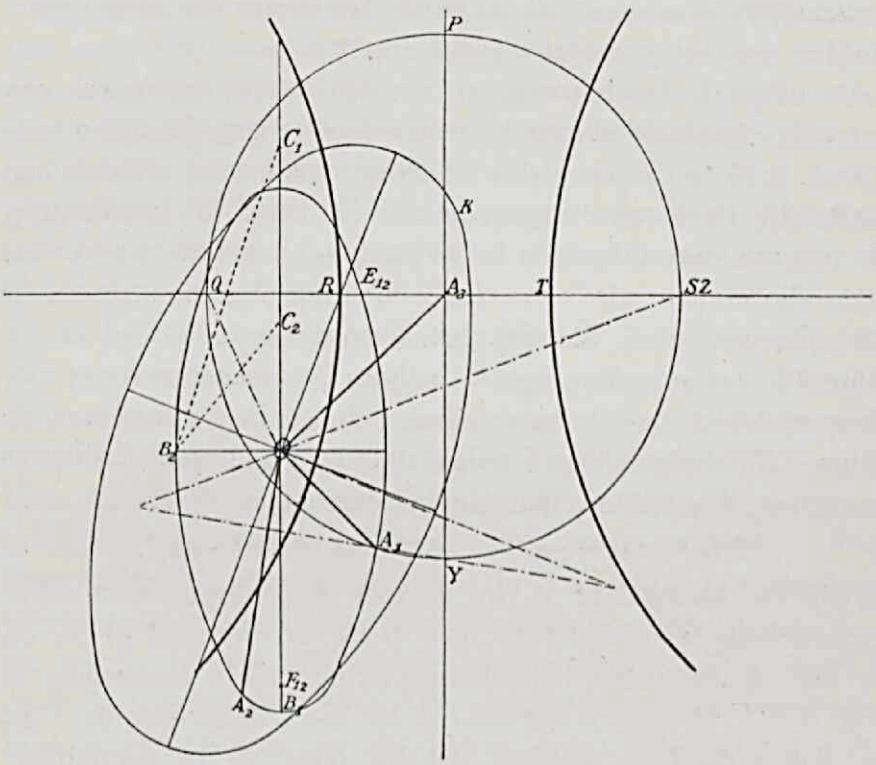


Fig. 16.

Worden de lengten der eerste halve assen van de door het punt P gaande confocale ellipsoïde, een- en tweebladige hyperboloïde achtereenvolgens door a, a_1 en a_2 voorgesteld, dan zijn de kwadraten der halve assen van de genoemde ellips respectievelijk $a^2 - a_1^2$ *en* $a^2 - a_2^2$.

Is een punt P een der snijpunten van drie confocale oppervlakken, welke hetzelfde punt O tot middelpunt hebben, dan kunnen wij omgekeerd dit punt P tot middelpunt kiezen van drie nieuwe confocale oppervlakken, welke door het punt O gaan. Het eerste drietal vormt dan het primaire, het tweede

drietal het secundaire systeem van confocale oppervlakken. In dit geval geldt de volgende stelling.

II. *De hoofdassen van het secundaire systeem vallen samen met de normalen van de drie door O gelegde oppervlakken van het primaire systeem. De assen van de ellipsoïde in het primaire systeem zijn even groot als de eerste hoofdassen der drie oppervlakken van het secundaire systeem.*

De ellips K beschouwen wij als den grensovergang van een oneindig afgeplatte ellipsoïde, welke de drie gegeven lijnen OAj $(j = 1, 2, 3)$ in het beeldvlak tot toegevoegde halve middellijnen heeft. Bij deze opvatting kunnen wij het beeldvlak beschouwen als een aan deze ellipsoïde in het punt A_3 aangebracht raakvlak, maar bovendien als een vlak, dat door het middelpunt O der ellipsoïde aan dit raakvlak evenwijdig is gelegd en de ellipsoïde volgens de ellips E_{12} snijdt. De assenconstructie van CHASLES levert ons de halve assen OB_1 en OB_2 der genoemde ellips. Uit hulpstelling I volgt, dat de kwadraten der halve assen van E_{12} voldoen aan de betrekkingen:

$$OB_1^2 = a^2 - a_2^2 \qquad OB_2^2 = a^2 - a_1^2,$$

terwijl de normaal in A_3 op de met K confocale eenbladige hyperboloïde evenwijdig is met OB_2, de normaal in A_3 op de met K confocale tweebladige hyperboloïde evenwijdig is met OB_1. De eerste normaal is de Z-as, de tweede de Y-as van het secundaire systeem, dat het punt A_3 tot middelpunt heeft, terwijl de X-as loodrecht op het projectievlak staat.

Uit de combinatie der stellingen I en II volgt, dat de halve assen van de ellipsoïde van het secundaire systeem de lengte a, a_1 en a_2 bezitten. De focaalkegelsneden in de vlakken XY en XZ zijn reëel en de kwadraten van hun halve assen zijn gelijk aan ~~aan~~:

$$a^2 - a_2^2,\ a_1^2 - a_2^2 \text{ en } a^2 - a_1^2,\ a_2^2 - a_1^2.$$

Aangezien:

$$OB_1^2 - OB_2^2 = a_1^2 - a_2^2$$

is de lijn OF_{12}, waarvan het kwadraat gelijk is aan $a_1^2 - a_2^2$, terstond te bepalen.

De halve assen van de focaal-ellips, welker vlak wij om de lijn

Y in het beeldvlak neerslaan, zijn nu blijkbaar $A_3 P = O B_1$ en $A_3 Q = O F_{12}$.

De focaalhyperbool, welker vlak om de lijn Z in het beeldvlak is neergeslagen, heeft tot kleine as $A_3 R = O B_2$, terwijl de excentriciteit door $O B_1$ wordt voorgesteld.

De ellipsoïde en de eenbladige hyperboloïde van het secundaire systeem worden door het beeldvlak gesneden volgens een ellips en een hyperbool, welke uit den aard der zaak beide door O gaan, terwijl Q en S hunne brandpunten voorstellen. De normalen van deze beide kromme lijnen in het punt O zijn de lijnen, die den hoek $Q\,O\,S$ en diens supplement halveeren. Blijkens hulpstelling II stellen deze deellijnen de richtingen der assen van K voor.

Ons rest dus nog de assenlengten van K nader te bepalen. Bij de beide gevonden confocale kegelsneden valt de Y-as met de hoofdassen samen. De lengten dezer hoofdassen zijn gelijk aan de halve som en het halve verschil van $O S$ en $O Q$. Het vlak $X Y$ snijdt de ellipsoïde en de eenbladige hyperboloïde volgens twee nieuwe confocale kegelsneden. Voor deze vallen de nevenassen langs de Y-as. De gemeenschappelijke brandpunten dezer kegelsneden zijn gelegen op de X-as en wel in punten, die op een afstand $R A_3 = T A_3$ van het punt A_3 verwijderd zijn. Wij construeeren nu twee rechthoekige driehoeken, in de figuur door $O B_2 C_1$ en $O B_2 C_2$ voorgesteld.

De rechthoekszijden, van $\Delta\, O B_2 C_1$ zijn $O B_2 = O B_2$ en $O C_1 = \frac{1}{2}(O S + O Q)$.

De rechthoekszijden van $\Delta\, O B_2 C_2$ zijn $O B_2 = O B_2$ en $O C_2 = \frac{1}{2}(O S - O Q)$.

De hypotenusa's dezer driehoeken stellen dan de lengten voor van de hoofdassen der oppervlakken in het secundaire systeem, dus blijkens hulpstelling II tevens de lengten van de halve assen van de ellips K, welke hiermede bepaald zijn.

§ 8. Tot dusver werden alleen de voornaamste constructies

van de ellips K besproken; wij willen nu een meer algemeen probleem nader behandelen.

Door de punten A_1, A_2, en A_3 worden drie evenwijdige lijnen in de ruimte getrokken en op ieder dezer lijnen wordt een overigens geheel willekeurig punt gekozen, dat wij respectievelijk door A_1^0, A_2^0 en A_3^0 zullen aangeven. Verbinden wij deze punten met het punt O, dan ontstaat een lijnentripel, welks evenwijdige projectie op het vlak V in de richting door de evenwijdige lijnen aangegeven door OA_1, OA_2, OA_3 wordt voorgesteld. Wij kunnen OA_1^0, OA_2^0 en OA_3^0 beschouwen als drie toegevoegde halve middellijnen eener ellipsoïde. Aangezien zoowel de richting der evenwijdige lijnen als elk der op deze lijnen gelegen punten A_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ geheel willekeurig kunnen worden aangenomen, is het duidelijk, dat wij ∞^5 lijnentripels kunnen vormen, welke alle in de door de verbindingslijnen der punten A_j en A_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ aangegeven richting op het vlak V volgens OA_1, OA_2, OA_3 worden geprojecteerd. In elk dezer gevallen kunnen wij het oppervlak van den tweeden graad aangeven, dat het drietal lijnen OA_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ tot toegevoegde halve middellijnen heeft en den schijnbaren omtrek van dit oppervlak bij evenwijdige projectie in de geeigende projectierichting $A_j A_j^0$ op het vlak V bepalen. Wij vermelden nu de volgende algemeene stelling, die door Drasch [1]) het eerst is bewezen:

„*De schijnbare omtrek van alle oppervlakken van den tweeden graad F_2, welke een tripel toegevoegde halve middellijnen OA_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ bezitten, waarvan de evenwijdige projecties op het beeldvlak door OAj $(j = 1, 2, 3)$ worden voorgesteld, is bij evenwijdige projectie op dit vlak, in een richting, welke door de verbindingslijn der punten Aj en A_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ wordt aangegeven, een ellips K, welke voor alle gevallen dezelfde is.*"

Bewijs. [2]) Wij denken ons een geheel willekeurig lijnentripel,

---

[1]) H. Drasch, Neuer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes sammt Construction, Zeitschrift für das Realschulwesen VIII, 1883, pg. 516—519.

[2]) De met dit bewijs hand aan hand gaande constructie gelieve de lezer zelf te ontwerpen.

dat aan de vraag voldoet en het hierbij behoorend oppervlak van den tweeden graad F_2. Het punt O wordt door de rechte lijn L verbonden met het in het oneindige gelegen projectiecentrum S_∞. Brengen wij door deze lijn L en het punt A_1^0 een vlak, dan is het oneigenlijk punt van de rechte $A_2^0 A_3^0$ de pool van dit vlak ten opzichte van F_2; derhalve is een vlak door de lijn L en deze pool toegevoegd tot het vlak door de lijn L en het punt A_1^0 ten opzichte van F_2.

Wij kunnen op dezelfde wijze twee andere paren van toegevoegde vlakken vinden n.l. het vlak door de lijn L en het punt A_2^0, dat ten opzichte van F_2 tot het door L met $A_1^0 A_3^0$ evenwijdig gebrachte vlak is toegevoegd en het vlak door de lijn L en het punt A_3^0, waaraan ten opzichte van F_2 het door de lijn L met $A_1^0 A_2^0$ evenwijdige vlak is toegevoegd.

De lijn L is dus de drager eener vlakkeninvolutie, waarvan drie paren ten opzichte van F_2 toegevoegde vlakken bekend zijn.

Wij vermelden de volgende stelling der projectieve meetkunde:

Wordt een vlakkeninvolutie met den drager G, welke behoort bij een oppervlak van den tweeden graad F_2, door een plat vlak gesneden, dan is de daardoor gevormde stralenbundel involutorisch toegevoegd tot alle kegelsneden k^2, volgens welke de omhullende kegels van F_2, wier toppen op de rechte lijn G zijn gelegen, door het platte vlak gesneden worden.

Hieruit volgt, dat de straleninvolutie met het punt O als drager, volgens welke het projectievlak V de gegeven vlakkeninvolutie snijdt, toegevoegd is tot de doorsnede van den omhullenden cylinder van F_2, welks as met L samenvalt, met dit projectievlak, d. w. z. tot de grensellips K. Uit het bovenstaande volgt tevens, dat wij drie stralenparen dezer straleninvolutie kennen nl. $O A_1$ en $O A_1^*$, evenwijdig aan $A_2 A_3$; $O A_2$ en $O A_2^*$, evenwijdig aan $A_1 A_3$;; $O A_3$ en $O A_3^*$, evenwijdig aan $A_1 A_2$. Op bekende wijze bepalen wij het loodrecht stralenpaar dezer involutie, dat, aangezien het punt O het middelpunt van K is, tevens de assenrichtingen van K nader aangeeft. Brengen wij in het punt A_1^0 een raakvlak aan, dan vormen de raak-

lijnen in dit punt een straleninvolutie met betrekking tot de in het raakvlak gelegen kegelsnede, welke bestaat uit twee imaginaire lijnen, die elkander in het dubbelpunt A_1^0 snijden; deze imaginaire lijnen zijn de dubbelstralen der involutie.

Op grond van het boven aangegeven theorema zal de evenwijdige projectie van deze raaklijneninvolutie op het vlak V, welke het punt A_1 tot drager heeft, bij de grensellips K behooren. De stralenbundel, die de projectie voorstelt, is congruent met de straleninvolutie ten opzichte van de ellips E_{23}, waarvan het punt O de drager is. De straleninvolutie met de drager A_1 is dus geheel bepaald. Wij trekken door A_1 een straal p evenwijdig met een der gevonden asrichtingen $O B_2$. Tot deze is in de straleninvolutie met drager A_1 een straal p_1 toegevoegd. De stralen p en p_1 snijden de andere as $O B_1$ in twee punten P en P_1, welke tot elkander zijn toegevoegd in de punteninvolutie op die as, waarvan de uiteinden der halve as dubbelpunten zijn. Wordt het eene uiteinde der as door B_1 aangegeven, dan is:

$$O B_1^2 = O P . O P_1,$$

waaruit wij dus $O B_1$ vinden.

Op een geheel overeenkomstige wijze, welke wij dus niet nader behoeven aan te geven, kunnen wij de lengte $O B_2$ van de andere halve as vinden en daarmede is de ellips K bepaald. Uit het bovenstaande blijkt, dat dit bewijs en de daarmede gepaard gaande constructie volkomen onafhankelijk zijn van de keuze van het oppervlak F_2. Zelfs, wanneer wij in plaats van evenwijdige projectie centrale projectie kiezen, zullen wij dezelfde grensellips K vinden, mits wij er maar voor zorgen, dat de ellipsoïde bepaald is door een drietal toegevoegde halve middellijnen, welks centrale projectie door het lijnentripel $O A_1$, $O A_2$ en $O A_3$ in het beeldvlak wordt voorgesteld.

§ 9. Theodor Schmidt [1]) behandelt een meer algemeen

[1]) Th. Schmidt, Zur Konturbestimmung der Flächen zweiten Grades (Pohlke's Satz t. a. p.) Sitz. Ber. der Kaiserl. Akad. Wien, Abth. IIa, Bd. 48, 1903, pg. 1423-1431.

probleem der contourbepaling van tweedegraadsoppervlakken, waarvan de hoofdstelling der Axonometrie weliswaar een bijzonder geval is, maar dat toch te ver afligt van het door ons besprokene, dan dat het voor een zelfstandige bespreking in aanmerking zou komen. Het probleem door SCHMIDT gesteld kan als volgt worden geformuleerd:

Wanneer gegeven is de centrale projectie van een poolviervlak, dat bij een tweedegraadsoppervlak behoort, benevens de centrale projectie der nevenbeelden van een punt P (d. w. z. de projecties van het punt P uit de hoekpunten van het viervlak op de tegenoverliggende zijvlakken) en de beelden der doorsneden van de zijvlakken van het poolviervlak met het bij P behoorend poolvlak, wordt gevraagd de schijnbare omtrek van het tweedegraadsoppervlak bij centrale projectie uit het projectiecentrum S op het beeldvlak te bepalen.

Zonder bewijs vermelden wij de volgende eigenschappen, welke bij SCHMIDT voorafgaan:

I. *Uit de gegevens der projectiefiguur is de polariteit van den schijnbaren omtrek volkomen bepaald, zonder dat omtrent de ligging van het projectiecentrum S iets naders bekend behoeft te zijn.* [1])

II. *Zijn X en U de projecties der snijpunten X^0 en U^0 van een poolvlak W met twee kruisende ribben van het poolviervlak en stellen X_x en U_x de projecties voor der tot de punten X^0 en U^0 in de punteninvoluties op de ribben toegevoegde punten $X_x{}^0$ en $U_x{}^0$, dan gaat de lijn X_xU_x door de pool der snijlijn van het vlak W met het beeldvlak V ten opzichte van den schijnbaren omtrek.* [2])

De wijze, waarop de hoofdstelling der Axonometrie in haar meest algemeenen vorm zich hier als bijzonder geval doet kennen, is de volgende. Als poolviervlak kiezen wij den tetraeder, welks hoekpunten gevormd worden door het middelpunt O^0 van de ellipsoïde en de punten in het oneindige der toegevoegde halve middellijnen $O^0A_1{}^0$, $O^0A_2{}^0$, $O^0A_3{}^0$ dezer ellip-

[1]) TH. SCHMIDT, t. a. p. § 2, pg. 1426.
[2]) TH. SCHMIDT, t. a. p. § 2, pg. 1426.

soïde. In dit geval zijn de punten A_j^0 $(j = 1, 2, 3)$ dubbelpunten in de punteninvoluties, welke op deze ribben bestaan. Wij projecteeren uit een projectiecentrum in het oneindige gelegen. Laten OA_1, OA_2, OA_3 de projecties der toegevoegde halve middellijnen van de ellipsoïde voorstellen. De punten A_j $(j = 1, 2, 3)$ zijn in de punteninvoluties op OA_j dubbelpunten.

Wij zullen bewijzen, dat de schijnbare omtrek van de ellipsoïde bij projectie op het beeldvlak enkel door de gegevens der projectie-figuur bepaald wordt, zonder dat omtrent de ellipsoïde iets naders bekend behoeft te zijn, dan dat ze een volgens OA_1, OA_2 en OA_3 op V geprojecteerd tripel van toegevoegde halve middellijnen bezit.

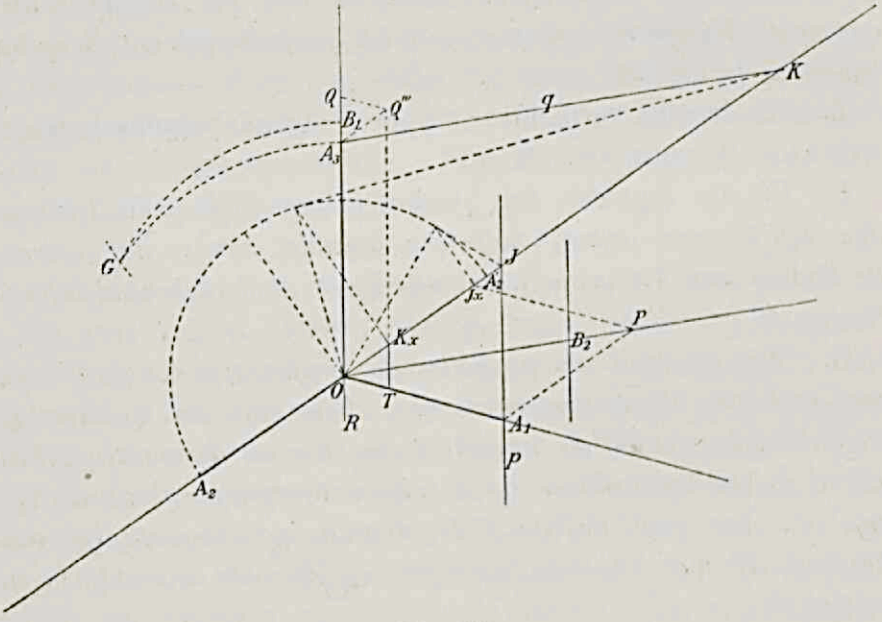


Fig. 17.

Door het punt A_1 wordt een lijn p evenwijdig met OA_3 getrokken, welke als doorgang van een projecteerend vlak kan worden beschouwd. Deze lijn snijdt OA_2 in een punt J, waaraan in de involutie op OA_2 het punt J_x is toegevoegd. De lijn OA_3 wordt door p in het oneindige gesneden, aan het punt in het oneindige is het punt O in de involutie op OA_3 toegevoegd; het punt A_1, waardoor de lijn p is getrokken is in de involutie op OA_1 tot zichzelf toegevoegd.

Trekken wij door het punt J_x een lijn evenwijdig met $O A_1$ en door het punt A_1 een lijn met $O A_2$ evenwijdig, dan moeten blijkens hulpstelling II genoemde lijnen gaan door het punt P, de pool van de lijn p ten opzichte van den gezochten schijnbaren omtrek d. w. z. hets nijpunt van deze lijnen is de gezochte pool. De richting $O P$ is dus tot $O A_3$ ten opzichte van den schijnbaren omtrek toegevoegd. Wij brengen thans door het punt A_3 evenwijdig met $O P$ een lijn q, welke $O A_2$ snijdt in een punt K, waartoe in de involutie op $O A_2$ een punt K_x is toegevoegd. Wordt deze lijn als doorgang van een projecteerend vlak beschouwd en trekken wij de lijnen $K_x Q^{111}$ evenwijdig aan $O A_3$ en $A_3 Q^{111}$ evenwijdig aan $O A_2$, dan is hun snijpunt een punt Q^{111}. Dit punt is de projectie van een punt Q^{0111}, het nevenbeeld der pool Q^0 van het door q gaand projecteerend vlak ten opzichte van de ellipsoïde, bij projectie op het tetraedervlak $O^0 A_2^0 A_3^0$, uit het punt in het oneindige op $O^0 A_1^0$. De pool Q van de lijn q ten opzichte van den schijnbaren omtrek vinden wij door uit het punt Q^{111} een lijn evenwijdig met $O A_1$ te trekken, welke $O A_3$ in het genoemde punt snijdt. Om de eindpunten van de toegevoegde halve middellijnen van den schijnbaren omtrek, welke langs $O P$ en $O A_3$ vallen, te vinden, gaan wij op eenigzins afwijkende wijze te werk. In het verlengde van $O A_3$ wordt een stuk $O R = Q A_3$ afgezet, zoodat $O Q = R A_3$ is. Met een straal $R G = R A_3$ beschrijven wij uit het punt R een cirkel, eveneens met een straal $Q G = R A_3$ een cirkel uit het punt Q. De lengte $O G$ voldoet nu aan de voorwaarden:

$$O G^2 = O A_3 . O Q$$

d. w. z. $O G$ is evenlang als $O B_1$, de gezochte halve middellijn van K, die langs $O A_3$ valt.

Op dezelfde wijze kunnen wij het eindpunt B_2 der langs $O P$ gelegen halve middellijn $O B_2$ vinden. Aangezien van den schijnbaren omtrek een tweetal toegevoegde halve middellijnen gevonden zijn, kunnen wij de assen van de ellips K vinden. Uit het bovenstaande blijkt, dat alleen de gegevens van de projectiefiguur bij de constructie van belang zijn en

dat deze geheel onafhankelijk is van eenige speciale onderstelling aangaande de ellipsoïde, waarvan een tripel toegevoegde halve middellijnen door $O^0 A_1^0$, $O^0 A_2^0$, $O^0 A_3^0$ wordt voorgesteld.

§ 10. Na de algemeene methoden der constructie van de grensellips K te hebben besproken rest ons alleen nog het reëele bestaan der driebeenen aan te toonen, opdat het bewijs der hoofdstelling der Axonometrie in engeren zin als volkomen geleverd kan worden beschouwd. Een dergelijk existentiebewijs, dat in hoofdzaak met het van SCHUR [1]) afkomstige overeenkomt, is reeds vroeger [2]) vermeld; wij herhalen dit bewijs niet, maar behandelen liever dat van SCHILLING [3]), omdat dit ons de gegevens verschaft tot constructie in horizontale en vertikale projectie van de driebeenen, die aan de gestelde eischen voldoen. Doch eerst vermelden wij de volgende hulpstelling:

Zijn $O A_1$, $O A_2$, $O A_3$ drie lijnen in het beeldvlak V en stellen E_{12}, E_{23} en E_{31} de ellipsen voor, die achtereenvolgens $O A_1$ en $O A_2$, $O A_2$ en $O A_3$, $O A_3$ en $O A_1$ tot toegevoegde halve middellijnen hebben, dan zal voor het geval, dat de groote assen dezer ellipsen alle dezelfde lengte hebben, terwijl de kleine assen van deze bovendien met de overblijvende derde lijn samenvallen, de figuur gevormd door de lijnen $O A_1$, $O A_2$ en $O A_3$ de orthogonale projectie voorstellen van een tweetal driebeenen, die het punt O tot top hebben. [4])

Bij het bewijs nemen wij aan, dat de drie lijnen $O A_j$ $(j = 1, 2, 3)$ alle verschillende richting bezitten. Zij $B_2 B_3$ de groote as van de ellips E_{23}. Met het punt O als middelpunt construeeren wij een bol, die door de punten B_2 en B_3 gaat. Wij kunnen in dit geval de ellips E_{23} beschouwen als de

---

[1]) SCHUR, Ueber den Pohlke'schen Satz, Journal von Crelle, Bd. 117, 1896, pg. 24—28.

[2]) Hoofdstuk III, § 5.

[3]) F. SCHILLING, Ueber den Pohlke'schen Satz, Zeitschrift für Math. und Phys., Bd. 48, 1903, pg. 487—494.

[4]) Voor teekening zie rechterbovenhelft van fig. 18.

orthogonale projectie van twee op dien bol gelegen groote cirkels, wier vlakken met elkander symmetrisch zijn ten opzichte van het beeldvlak en die beide door de lijn $B_2\,B_3$ gaan. Kiezen wij een dezer cirkels $E_{23}{}^0$. Aangezien de punten A_2 en A_3 de uiteinden zijn van twee toegevoegde halve middellijnen van de ellips E_{23}, stellen zij de loodrechte projectie voor van de uiteinden $A_2{}^0$ en $A_3{}^0$ van twee onderling loodrechte stralen van den cirkel $E_{23}{}^0$. Op dezelfde wijze vinden wij, dat het punt A_1 de loodrechte projectie voorstelt van twee punten $A_1{}^0$ op den bol, terwijl tevens blijkt, dat voor een der punten $A_1{}^0$ geldt $O\,A_1{}^0 \perp O\,A_2{}^0 \perp O\,A_3{}^0$. Verbinden wij de gevonden punten $A_j{}^0$ met het punt O, dan kunnen wij de zes verbindingslijnen groepeeren tot een tweetal driebeenen en daarmede is het gestelde bewezen.

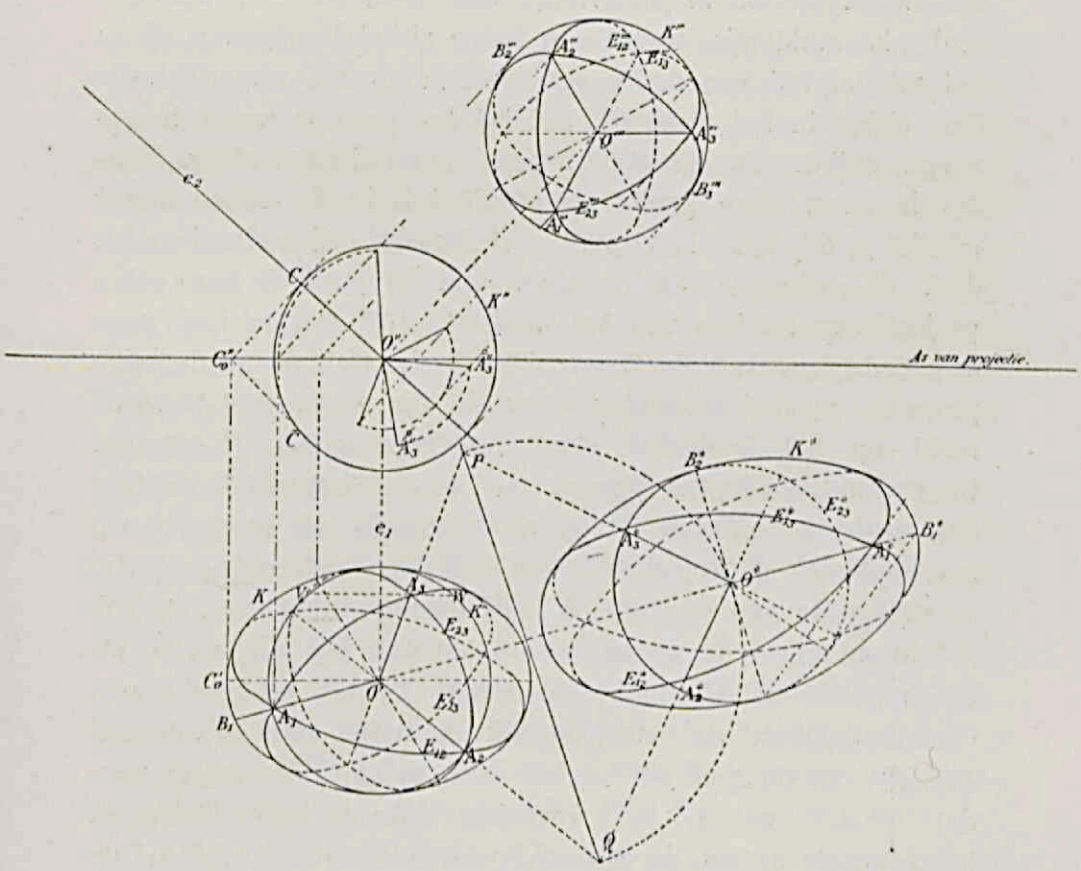


Fig. 18.

Wanneer wij overgaan tot het algemeene existentiebewijs der driebeenen, is het noodzakelijk de grensellips K allereerst te construeeren. Bij deze constructie wordt de methode van SCHUR gevolgd, bij welke methode wordt gebruik gemaakt van de eigenschap, dat de grensellips K steeds ieder der ellipsen E_{jk} $(j\,k = 12,\ 23,\ 31)$ dubbel aanraakt in de uiteinden eener middellijn, die, zoowel ten opzichte van K als van de ellips E_{jk} tot de overblijvende derde richting $O\,A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ is toegevoegd, welke eigenschap behouden blijft ook wanneer de figuur aan een affiene transformatie wordt onderworpen.

SCHUR kiest een bijzondere affiniteit, die op de volgende wijze wordt bepaald. Vooreerst is de lijn $P\,Q$, welke met $A_2\,A_3$ evenwijdig is, affiniteitsas. Op het stuk $P\,Q$ (P en Q zijn de snijpunten respectievelijk van $O\,A_2$ en $O\,A_3$ met deze lijn) als middellijn wordt een halve cirkel beschreven en in het middelpunt van dezen een loodlijn op $P\,Q$ opgericht, die den cirkel in het punt O^*, dat tot het punt O wordt toegevoegd, snijdt. De lijn $O\,O^*$ bepaalt de affiniteitsrichting. Tengevolge van deze keuze der affiniteit is in de affiene figuur $O^*\,A_2^* \perp O^*\,A_3^*$. Het punt A_1^* kunnen wij nader bepalen door de volgende beschouwing. Zal dit punt de loodrechte projectie voorstellen van het uiteinde A_1^{*0} van het been eens driebeens, waarvan de figuur $O^*\,A_1^*\,A_2^*\,A_3^*$ de evenwijdige projectie op het beeldvlak voorstelt, dan moet $O\,A_1^{*0}$ loodrecht op het beeldvlak staan en evenlang als $O^*\,A_2^*$ zijn. De verbindingslijn der punten A_1^* en A_1^{*0} bepaalt de richting der projectie. Wordt deze verbindingslijn zelf loodrecht op het beeldvlak geprojecteerd, dan stelt deze loodrechte projectie de groote as van de ellips K^* althans in richting voor, waarbij K^* in dit geval de grensellips is van den bol K^0, welke uit het middelpunt O^* met den straal $O^*\,A_1^*$ is beschreven. Omdat $\Delta\, O^*\,A_1^*\,A_1^{*0}$ rechthoekig is in het punt O^*, terwijl $O^*\,A_1^{*0} = r$ en $\angle\, O^*\,A_1^{*0}\,A_1^* = \phi$ is $A_1^*\,A_1^{*0} = r \sec \phi$, zoodat $O^*\,A_1^{*0}$ en $A_1^*\,A_1^{*0}$ respectievelijk de halve kleine en halve groote as van de ellips K^* voorstellen en dus $O_1^*\,A_1^*$ de lineaire excentriciteit van deze ellips aangeeft, waaruit dan

volgt, dat het punt A_1^* een brandpunt van de ellips K^* is. De ellips K^* kan dus volledig geconstrueerd worden. Wordt de affiene transformatie in tegengestelden zin verricht, dan gaan de assen van K^* over in twee toegevoegde halve middellijnen van K, waaruit op bekende wijze de assen van K kunnen worden bepaald.

Een lijn evenwijdig met de groote as van de ellips K zij de as van projectie; de ellips K grensellips van een bol K^0 bij evenwijdige projectie op het horizontale vlak. De grenscirkels van dezen bol, waarvan de straal een lengte heeft gelijk aan de kleine as van K, zijn in horizontale en vertikale projectie door K^1 en K^{11} voorgesteld. Uit een der uiteinden C_0 (C_0^1, C_0^{11}) van de groote as worden raaklijnen $C_0\,C$ en $C_0\,\overline{C}$ aan den grenscirkel K^{11} getrokken. Deze met het vertikale vlak evenwijdig loopende lijnen geven de richting aan, waarin de bol K^0 op het horizontale vlak geprojecteerd moet worden, wil de ellips K de grensellips voorstellen. Wij kiezen de richting $C_0\,C$. De omhullende cylinder van den bol, welke de ellips K tot richtlijn heeft en waarvan de richting der beschrijvende lijnen met $C_0\,C$ evenwijdig is, raakt den bol volgens een grooten cirkel, gelegen in het vlak $e_2\,O\,e_1$, dat door het punt O loodrecht op de lijn $C_0\,C$ is aangebracht. Slaan wij dit vlak om den doorgang $e_2\,O^{11}$ in het vertikale vlak neer, dan stelt de cirkel K^{111}, van welke het middelpunt O^{111} op een afstand $O^{11}\,O^{111} = O^1\,O^{11}$ van de as $e_2\,O^{11}$ is verwijderd, deze neergeslagen doorsnede voor.

De in het horizontale vlak gelegen ellipsen E_{12}, E_{23} en E_{31} worden op het vlak $e_2\;O\;e_1$ in de richting $C_0\,C$ evenwijdig volgens de ellipsen E_{12}^{111}, E_{23}^{111} en E_{31}^{111} geprojecteerd; hierbij merken wij op, dat de afstand van een punt A_j^{111} ($j = 1, 2, 3$) tot de as $e_2\,O^{11}$ even groot is, als die van het punt A_j^1 ($j = 1, 2, 3$) tot de as van projectie. De projectiefiguur in het vlak $e_1\,O\,e_2$, welke in het vertikale vlak is neergeslagen, voldoet aan de in de hulpstelling vermeldde eischen. Hieruit volgt, dat $O^{111}\,A_1^{111}$, $O^{111}\,A_2^{111}$ en $O^{111}\,A_3^{111}$ de loodrechte projecties voorstellen van twee driebeenen met den top in O op het vlak door de doorgangen $e_1\,O^{11}$ en $e_2\,O^{11}$

aangewezen, welke driebeenen ten opzichte van dit vlak symmetrische ligging hebben. Het punt A_3 stelt de evenwijdige projectie op het horizontale vlak voor van twee op den bol gelegen punten A_3^0. Deze punten zelf liggen in het vlak, dat door het punt A_3 evenwijdig met het vertikale vlak kan worden gebracht, dus op den kleinen cirkel, volgens welke dit vlak den bol snijdt en waarvan de middellijn een door $V\,W$ voorgestelde lengte bezit. Om de vertikale projecties der beide punten A_3^0 te vinden laten wij uit het punt A_3^{111} een loodlijn neer op de as $O^{11}\,e_2$; de gezochte vertikale projecties zijn de snijpunten van den bovengenoemden cirkel met de bovengenoemde loodlijn. De horizontale projecties der punten A_3^0, die op de lijn $V\,W$ gelegen zijn, kunnen nu eveneens worden aangegeven. Op dezelfde wijze worden de horizontale en vertikale projecties der punten A_1^0 en A_2^0 bepaald en zijn tevens de driebeenen, die aan de gestelde eischen voldoen, zelve gevonden. Was de projectie in de richting $C_0\,\overline{C}$ geschied, dan waren eveneens twee andere driebeenen, welke aan de gestelde eischen voldeden, gevonden.

Wij zullen met een enkel woord wijzen op het artikel van Mandl, [1]) waarin de hoofdstelling der Axonometrie in meer uitgebreiden vorm wordt besproken. Daar dit bewijs en de daarmede gepaard gaande constructie zeer gecompliceerd zijn, volstaan wij met een schets van den gedachtengang. Het viervlak $P\,Q\,R\,S$, waarmede het volgens den vierhoek $O\,A_1\,A_2\,A_3$ op V geprojecteerde viervlak $O^0\,A_1^0\,A_2^0\,A_3^0$ gelijkvormig moet zijn, wordt bij bijzonderen stand in horizontale en vertikale projectie afgebeeld en vervolgens in een rechtzijdig viervlak veranderd. De hiermede verband houdende veranderingen van de projectiefiguur in een vierhoek $O\,B_1\,B_2\,B_3$ worden nu aangebracht. Van de projectiefiguur $O\,B_1\,B_2\,B_3$ kan steeds aangetoond worden, dat deze de evenwijdige projectie van een rechtzijdig viervlak is; omgekeerd zal dan ook volgen, dat de projectiefiguur $O\,A_1\,A_2\,A_3$ bij projectie in dezelfde

---

[1]) J. Mandl. Der Pohlke'sche Lehrsatz der Axonometrie und eine Verallgemeinerung desselben t. a. p.

richting de projectie van een viervlak $O^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$, dat aan de gestelde eischen voldoet, moet voorstellen.

§ 11. In dit hoofdstuk zullen wij tenslotte nog het artikel van RUTH [1]) behandelen, omdat naar aanleiding van het hierin geleverd bewijs, dat wel een zeer bijzonder karakter draagt, indirect een constructie der grensellips K kan worden afgeleid.

Het bewijs berust op de volgende hulpstelling:

„Zij in het beeldvlak een ellips E en een punt O gegeven, dan kunnen deze beschouwd worden als de scheef-evenwijdige projectie van de basis en den top van een willekeurigen cirkelkegel, maar ook meer in het bijzonder als de scheef-evenwijdige projectie van een gelijkzijdigen rechten cirkelkegel, waarbij onder dezen laatsten een rechte cirkelkegel verstaan wordt, welke door ieder vlak loodrecht op een der beschrijvende lijnen volgens een gelijkzijdige hyperbool wordt gesneden, zoodat op deze kegel oneindig veel tripels onderling loodrechte lijnen zijn gelegen."

Bewijs. Uit een willekeurig punt P in het beeldvlak worden aan de ellips E de raaklijnen t_1 en t_2 getrokken, welke deze ellips in de punten T_1 en T_2 raken. Er is een ellips k in het beeldvlak, die aan de volgende voorwaarden voldoet. Het punt O is het middelpunt der ellips k, terwijl deze ellips de gegeven ellips E uitwendig raakt in de punten T_1 en T_2. Wij beschouwen de ellips k als grensellips van een bol k^0 bij evenwijdige projectie op het beeldvlak. Bij deze opvatting mag de ellips E als de evenwijdige projectie van twee op dezen bol gelegen kleine cirkels worden beschouwd.

Kiezen wij n.l. de ellipsen E en k tot basis van cylinders C_1 en C, wier assen de richting der projectie bezitten, dan hebben deze beide cylinders twee gemeenschappelijke raakvlakken, welke den bol k^0 eveneens raken, waaruit volgt, dat de cylinder C_1 den bol in twee vlakke doorsneden snijdt. Het punt O en de ellips E kunnen in dit geval als de evenwijdige projecties van het middelpunt van een bol en

[1]) F. RUTH. «Uber einen neuen Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie», Sitz. Ber. Wien, Abth. IIa, Bd. 100, 1891, pg. 1088—1092.

een op dien bol gelegen kleinen cirkel worden opgevat, d. w. z. als evenwijdige projecties van den top en de basis van een rechten cirkelkegel, zooals allereerst bewezen moest worden. Tot het tweede gedeelte van het bewijs overgaande zullen wij nagaan, hoe het punt P ten opzichte van het punt O en de ellips E moet zijn gelegen, opdat, wanneer bovengenoemde ellips k wordt beschouwd als de grensellips van een bol, het punt O en de ellips E samen de evenwijdige projectie van den top en de basis van een *gelijkzijdigen* cirkelkegel voorstellen, welke door het middelpunt en een kleinen cirkel van dien bol worden gevormd.

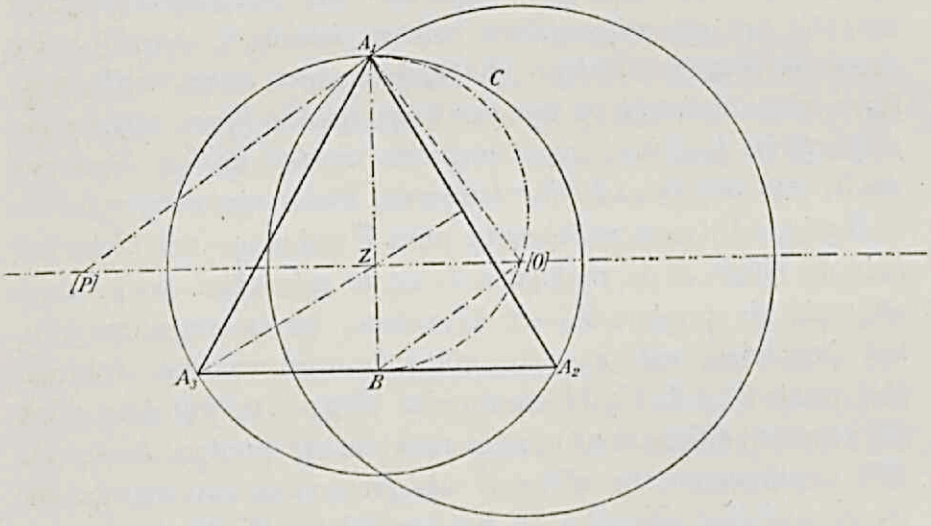


Fig. 19.

Wij beschouwen den in het teekenvlak gelegen cirkel C als basis van een gelijkzijdigen cirkelkegel; $\Delta A_1 A_2 A_3$ is een in dezen cirkel ingeschreven gelijkzijdige driehoek. Wordt de top O^0 van den gelijkzijdigen cirkelkegel met de hoekpunten van den driehoek verbonden, dan vormen deze verbindingslijnen samen een driebeen. Hieruit volgt, dat de lijn $O^0 A_1$ loodrecht zal staan op het vlak $A_2 O^0 A_3$ en dus ook op de lijn $O^0 B$, die het punt O^0 verbindt met het voetpunt B der loodlijn uit het punt A_1 op de zijde $A_2 A_3$. Om de zijde $A_1 B$ slaan wij $\Delta A_1 O^0 B$ in het teekenvlak neer. Het neergeslagen punt $[O]$ is dan het snijpunt van een halven

cirkel op de lijn $A_1 B$ als middellijn beschreven met de loodlijn $Z[O]$ in het zwaartepunt van $\Delta A_1 A_2 A_3$ op de lijn $A_1 B$ opgericht. Uit het punt O^0 wordt de bol beschreven, welke door de punten A_1, A_2 en A_3 gaat. De cirkel C is een op dien bol gelegen kleine cirkel. De rechte cirkelkegel, welke dezen bol volgens den cirkel C aanraakt, heeft tot top een punt P gelegen op het verlengde van de lijn $O^0 Z$. Wij snijden dien kegel door het vlak, dat door $A_1 B$ loodrecht op het teekenvlak is gebracht, de doorsnede is dan een meridiaandoorsnede. Slaan wij het aangebrachte vlak om de lijn $A_1 B$ neer in het teekenvlak, dan stelt het punt $[P]$ den neergeslagen top voor. Dit punt vinden wij op de volgende wijze. Uit het punt $[O]$ als middelpunt wordt met een straal ter lengte $[O] A_1$ een cirkel beschreven en aan dezen cirkel in het punt A_1 een raaklijn getrokken. De lijn $[O] Z$ snijdt deze raaklijn in het punt $[P]$.

In de figuur zien wij:

$$\Delta A_1 Z[P] \infty \Delta Z B[O],$$

terwijl $2 Z B = A_1 Z$, waaruit volgt, dat $2 Z[O] = [P] Z$, dus in de ruimtefiguur $2 Z O^0 = P Z$. Wordt de ruimtefiguur in evenwijdige richting op een plat vlak geprojecteerd, dan bestaat tusschen de projecties der stukken $P Z$ en $Z O^0$ dezelfde betrekking. Kiezen wij dus op de lijn, die het gegeven punt O met het middelpunt Z van de gegeven ellips E verbindt, een aan de andere zijde van Z gelegen punt P zoodanig, dat $2 Z O = P Z$, en trekken wij uit dit punt de raaklijnen aan de ellips E, welke deze ellips in de punten P_1 en P_2 raken, dan kunnen wij een ellips K bepalen met het middelpunt O, welke de ellips E in de gevonden punten P_1 en P_2 raakt, en die aan den gestelden eisch voldoet. Immers blijkens het bovenstaande zijn, wanneer deze ellips als grensellips van een bol K^0 wordt beschouwd, het punt O en de ellips E als de projecties van den top en de basis van een gelijkzijdigen cirkelkegel te beschouwen.

Het bewijs van de hoofdstelling der Axonometrie kan na het voorafgaande op eenvoudige wijze worden geleverd. Laten $O A_1$, $O A_2$ en $O A_3$ de gegeven projecties in het beeldvlak

voorstellen. Wij construeeren de ellips van STEINER voor $\Delta A_1 A_2 A_3$, d. w. z. de ellips E met het zwaartepunt Z van dien driehoek tot middelpunt, die door ieder der punten A_1, A_2 en A_3 gaat en in deze punten raaklijnen bezit, welke achtereenvolgens met $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ en $A_1 A_2$ evenwijdig zijn.

Blijkens de boven bewezen hulpstelling mogen de ellips E en het punt O steeds als de evenwijdige projectie van de basis E^0 en den top O^0 van een gelijkzijdigen cirkelkegel worden beschouwd, terwijl wegens de bijzondere keuze van de ellips ten opzichte van $\Delta A_1 A_2 A_3$ deze driehoek in dit geval de evenwijdige projectie van een in de cirkelvormige basis beschreven gelijkzijdigen driehoek zal voorstellen. De verbindingslijnen van den top O^0 met de hoekpunten van den gelijkzijdigen driehoek zijn onderling loodrecht en evenlang. Zij vormen dus samen een driebeen en hiermede is het gestelde bewezen.

De in verband met dit bewijs staande constructie van de ellips K kan na het bovenstaande gevoegelijk aan den lezer worden overgelaten.

ZESDE HOOFDSTUK.

Enkele toepassingen van de hoofdstelling der Axonometrie.

§ 1. Wij zullen in dit hoofdstuk nagaan hoe van enkele stellingen der nieuwere Meetkunde zeer eenvoudige bewijzen geleverd kunnen worden door uit te gaan van de hoofdstelling der Axonometrie in engeren zin.

Daartoe zullen wij, om genoemde stelling voor ons doel beter bruikbaar te maken, de stelling in eenigzins gewijzigden vorm nader formuleeren: *Worden de hoekpunten van een driehoek $A_1 A_2 A_3$ met een willekeurig punt O in het vlak van dien driehoek verbonden, dan kunnen deze verbindingslijnen steeds beschouwd worden als de evenwijdige projecties der beenen van een driebeen.*

Zij $\Delta A_1 A_2 A_3$ de gegeven driehoek; den stand van het eveneens gegeven punt O zullen wij nader bepalen.

Door het punt A_1 wordt de lijn $A_1 A_4$ evenwijdig met $O A_2$ en de lijn $A_1 A_5$ evenwijdig met $O A_3$ getrokken, eveneens door het punt A_2 de lijn $A_2 A_4$ evenwijdig met $O A_1$ en de lijn $A_2 A_6$ evenwijdig met $O A_3$, terwijl ten slotte door het punt A_3 de lijnen $A_3 A_5$ evenwijdig met $O A_1$ en $A_3 A_6$ evenwijdig met $O A_2$ getrokken zijn.

Uit de punten A_4, A_5 en A_6, welke wij op deze wijze vinden, worden achtereenvolgens lijnen met $O A_3$, $O A_2$ en $O A_1$ evenwijdig getrokken, die elkander in een gemeenschappelijk punt P snijden.

Nemen wij het boven vermelde in aanmerking, dan volgt, dat de vlakke figuur, waarvan de punten O, P, A_j $(j = 1, 2 \ldots 6)$ hoekpunten zijn, beschouwd kan worden als de evenwijdige projectie van een kubus.

De lijnen $O\,P$, $A_1\,A_6$ en $A_2\,A_5$ snijden elkander in één punt M, dat gelegen is op het midden van ieder dier lijnen; dit punt kan beschouwd worden als de evenwijdige projectie van het snijpunt M^0 der hoofddiagonalen van den kubus. De hoofddiagonaal $O^0\,P^0$ van den kubus snijdt de vlakken der driehoeken $A_1{}^0\,A_2{}^0\,A_3{}^0$ en $A_4{}^0\,A_5{}^0\,A_6{}^0$ respectievelijk in de punten S^0 en T^0, de zwaartepunten dezer driehoeken. Deze punten worden dus door de zwaartepunten S en T der driehoeken $A_1\,A_2\,A_3$ en $A_4\,A_5\,A_6$ afgebeeld. Naar bekend is, zijn de vier punten O^0, M^0, S^0 en P^0 en eveneens de vier punten O^0, T^0, M^0 en P^0 harmonisch gelegen op de diagonaal $O^0\,P^0$ van den kubus. Worden deze punten evenwijdig op het teekenvlak geprojecteerd, dan zijn de punten $(O,\ M,\ S$ en $P)$, $(O,\ T,\ M$ en $P)$ eveneens harmonisch op $O\,P$ gelegen. Ten slotte kunnen wij nog in ieder zijvlak van den kubus de diagonalen teekenen; hun middens zullen door de punten $M_1{}^0$, $M_2{}^0 \ldots . M_6{}^0$ worden voorgesteld. De projecties dezer punten worden op bekende wijze door M_1, $M_2 \ldots . M_6$ aangegeven.

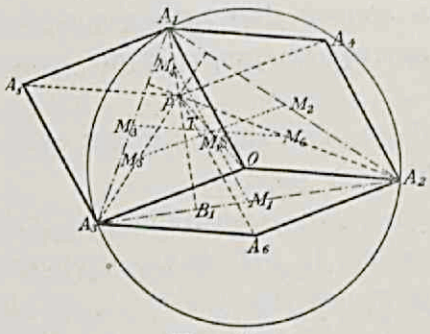


Fig. 20.

In de eerste plaats kiezen wij voor het punt O *het middelpunt van den omgeschreven cirkel van* $\Delta\,A_1\,A_2\,A_3$. Uit deze keuze volgt:

$$O\,A_1 = O\,A_2 = O\,A_3.$$

Alle beelden der ribben van den kubus zijn dus evenlang; de zijvlakken van den kubus worden door ruiten afgebeeld.

Worden de middens der projecties van twee tegenover elkander gelegen zijvlakken met elkander verbonden, dan gaan deze verbindingslijnen $M_1\,M_4$, $M_2\,M_5$, $M_3\,M_6$ alle drie door het punt M, dat in het midden van ieder dier lijnen gelegen is.

Bovendien vinden wij in dit geval:

$$M_1\,M_4 = M_2\,M_5 = M_3\,M_6 = O\,A_1.$$

De punten M_j $(j = 1, 2 \ldots . 6)$ zijn dus alle gelegen op den omtrek van een cirkel, welke uit het punt M met een straal ter lengte $M\,M_1$ is beschreven. Van deze punten zijn M_1, M_2 en M_3 middens der zijden van $\Delta\,A_1\,A_2\,A_3$; de betee-

kenis der punten M_4, M_5, M_6 zullen wij nader aangeven.

Omdat de vierhoek $O\,A_2\,A_6\,A_3$ een ruit is, staat $O\,A_6 \perp A_2\,A_3$ en daar $A_1\,P$ met $O\,A_6$ evenwijdig is vinden wij:

$$A_1\,P \perp A_2\,A_3.$$

Op dezelfde wijze vinden wij:

$$A_2\,P \perp A_1\,A_3$$
$$A_3\,P \perp A_1\,A_2,$$

waaruit volgt, dat het punt P hoogtepunt van $\Delta\,A_1\,A_2\,A_3$ is. Het punt M_4 is het midden van $A_1\,P$ dus van het bovenste stuk der uit het punt A_1, op de zijde $A_2\,A_3$ neergelaten hoogtelijn. Is B_1 het voetpunt dezer loodlijn, dan is de hoek $M_1\,B_1\,M_4$ recht en het punt B_1 dus gelegen op den cirkel, die de lijn $M_1\,M_4$ tot middellijn heeft.

Hiermede vinden wij, *dat in een driehoek* $A_1\,A_2\,A_3$ *de middens der zijden* (M_1, M_2, M_3), *de middens van de bovenste stukken der hoogtelijnen* (M_4, M_5, M_6) *en de voetpunten der hoogtelijnen* (B_1, B_2, B_3) *op een cirkel zijn gelegen d. w. z. wij hebben hiermede de bekende stelling van Feuerbach bewezen.*

Een tweede bekende stelling volgt evenzeer terstond. Op de lijn $O\,P$ zijn gelegen het punt O d. w. z. het middelpunt van den omgeschreven cirkel van $\Delta\,A_1\,A_2\,A_3$, het punt P d. w. z. het hoogtepunt van genoemden driehoek en het punt S, dat naar wij boven vonden het zwaartepunt van $\Delta\,A_1\,A_2\,A_3$ is. Hiermede is de *bekende stelling van Euler* uitgesproken; de lijn $O\,P$ is de *zoogenaamde rechte van Euler.*

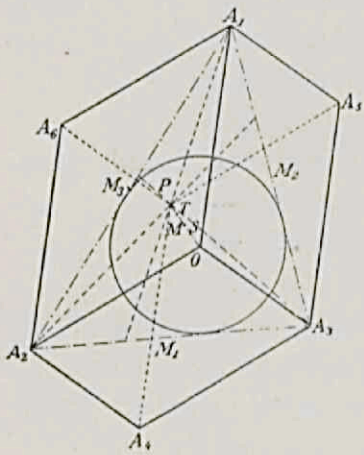


Fig. 21.

In het kort behandelen wij nog een tweede bijzonder geval, waarbij wij voor *het punt O kiezen het middelpunt van den ingeschreven cirkel van* $\Delta\,A_1\,A_2\,A_3$.

Volgens een bekende stelling der planimetrie gaat de rechte door het punt A_1 evenwijdig met de lijn, welke het punt O met het midden M_1 van de zijde $A_2\,A_3$ verbindt, door het middelpunt van den aangeschreven

cirkel aan de zijde $A_2 A_3$. Dit is blijkbaar de lijn $A_1 P$ uit de figuur. Op dezelfde wijze vinden wij, dat de lijnen $A_2 P$ en $A_3 P$ gaan door de raakpunten van de aangeschreven cirkels aan de zijden $A_1 A_3$ en $A_1 A_2$ en wij kunnen het aldus gevonden resultaat als volgt formuleeren: *De drie lijnen, welke de hoekpunten van* $\Delta A_1 A_2 A_3$ *verbinden met de raakpunten der aangeschreven cirkels aan de tegenover gelegen zijden, gaan door een punt.* Dit punt draagt, naar bekend is, den naam van het punt van NAGEL. De lijn $O P$ gaat weer door het zwaartepunt S van $\Delta A_1 A_2 A_3$. Het punt M de projectie van het middelpunt M^0 van den kubus ligt op het midden van $O P$. De dubbelverhouding $(O M S P)$ is weder gelijk aan -1. Vervangen wij $\Delta A_1 A_2 A_3$ door $\Delta A_4 A_5 A_6$, dan heeft men, als T het zwaartepunt van laatstgenoemden driehoek is, weder $(O M T P) = -1$ een bekend resultaat van de meetkunde van den driehoek.

Ten slotte hadden wij voor het punt O ook kunnen kiezen het middelpunt van een der aangeschreven cirkels van $\Delta A_1 A_2 A_3$. Wij hadden dan analoge resultaten als in het tweede geval gevonden, met welke vermelding wij zullen volstaan.

Chronologisch overzicht der publicaties over de hoofdstelling der Axonometrie.

1861. J. W. von Deschwanden, Anwendung schiefer Parallelprojektionen zu axonometrischen Zeichnungen I. Vierteljahrschrift der Naturf. Gesellschaft, Zürich. Bd 6, pg. 254—284.

1861. H. Kinkelin, Die schiefe axonometrische Projektion. Vierteljahrschrift der Naturf. Gesellschaft, Zürich, Bd. 6, pg. 358—367.

1862. J. W. von Deschwanden, Anwendung schiefer Parallelprojektionen zu axonometrischen Zeichnungen II, Vierteljahrschrift der Naturf. Gesellschaft, Zürich, Bd. 7, pg. 159—176.

1863. H. A. Schwarz, Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. Journal von Crelle, Bd. 63, pg. 309—314.

1864. J. W. von Deschwanden, Eine graphische Auflösung der drei axonometrischen Hauptaufgaben. Vierteljahrschrift der Naturf. Gesellschaft, Zürich. Bd. 9, pg. 223—226.

1866. Th. Reye, Beweis von Pohlke's Fundamentalsatz der Axonometrie. Vierteljahrschrift der Naturf. Gesellschaft, Zürich, Bd. 11, pg. 350—358.

1867. Afdruk van Reye's artikel in Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 12, pg. 433—437.

1877. C. Pelz, Ueber einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke. Sitz. Ber. Wien., Abth. II^a, Bd. 76, pg. 123—138.

1878. G. Ad. von Peschka, Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. Sitz. Ber. Wien, Abth. IIa, Bd. 78, pg. 1043—1055.

1883. H. Drasch, Neuer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes sammt Construction.
Zeitschrift für das Realschulwesen, VIII, pg. 516-519.

1885. F. Schur, Ueber den Pohlke'schen Satz.
Mathematische Annalen, Bd. 25, pg. 596—597.

1886. J. Mandl, Der Pohlke'sche Lehrsatz der Axonometrie und eine Verallgemeinerung desselben.
Sitz. Ber. Wien, Abth. IIa, Bd. 94, pg. 60—65.

1889. C. Küpper, Der Satz von Pohlke.
Mathematische Annalen, Bd. 33, pg. 474—475.
C. Pelz, Herr Küpper und der Pohlke'sche Beweis des Satzes von Pohlke, Selbstverlag, Styria, Graz.

1890. A. Beck, Ueber die Fundamentalaufgabe der Axonometrie.
Journal von Crelle, Bd. 117, pg. 24—28.

1891. F. Ruth, Ueber einen neuen Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie.
Sitz. Ber. Wien, Abth. IIa, Bd. 100, pg, 1088—1092.

1896. F. Schur, Ueber den Pohlke'schen Satz.
Journal von Crelle, Bd. 117, pg. 24—28.

1899. A. Beck, Ueber perspektive Affinität zweier Räume.
Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 44, pg. 85—101.

1900. J. Sobotka, Zur rechnerischen Behandlung der Axonometrie.
Sitz. Ber. der Kön. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften Art. XXXIII.

1903. F. Schilling, Ueber den Pohlke'schen Satz.
Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 48, pg. 487—494.

1904. Th. Schmidt, Zur Konturbestimmung der Flächen zweiten Grades (Pohlke's Satz).
Sitz. Ber. Wien, Abth. IIa, Bd. 113, pg. 1423—1431,

1905. C. Heuman, Ueber Trägheitsmomente von Punktsystemen und über eine fundamentale Aufgabe in der Theorie der axonometrischen Abbildung.

Arkiv för Matematik, Astronomie och Fysik, t. II, Art. 16.

1907. E. Kruppa, Ueber den Pohlke'schen Satz.
Sitz. Ber. Wien, Abth. IIa, Bd. 116, pg. 931—936.

1910. E. Waelsch, Zur Axonometrie.
Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereingung, Bd. 19, pg. 273—276.

1910. W. Weber, Anwendungen des Pohlke'schen Satzes.
Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 15, pg. 314—318.

1911. M. Koppe, Beweis des Pohlke'schen Satzes.
Sitz. Ber. der Berliner Math. Gesellsch. Jahrg. 10, pg. 108—109, opgenomen in Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 16.

1911. E. Waelsch, Parallelperspektive, komplexe Zahlen und Trägheit ebener Massen.
Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Bd. 20, pg. 21—26.

Leerboeken, waarin de hoofdstelling der Axonometrie wordt behandeld.

K. Pohlke, Darstellende Geometrie I, pg. 113, 1860, Gärtner, Berlin.

W. Fiedler, Darstellende Geometrie, Bd. I, pg. 334, Aufl. 3, 1883.

Chr. Wiener, Darstellende Geometrie, Bd. I, pg. 448, 1884.

K. Rohn und E. Papperitz, Darstellende Geometrie, Aufl. 3, 1906, Bd. II, pg. 7—11. Bd. III, pg. 177—180.

G. Loria, Darstellende Geometrie, deutsch Fr. Schütte, Teil I, 1907, pg. 191—194.

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil II, 1909, Geometrie pg. 161—174.

E. Wendling, Der Fundamentalsatz der Axonometrie, Speidel, Zurich, 1912.

ERRATA.

pg. 2, noot 1, 2de regel, rechter in plaats van rechten.

pg. 4, 6de regel van onderen, $a_1 x_1$, $a_1 y_1$ en $a_1 z_1$ in plaats van $a_1 x$, $a_1 y$ $a_1 z$.

pg. 4, 2de regel van onderen, $a_1 x_1$ in plaats van $a_1 x$.

pg. 25, 2de regel van onderen, zij B_{2n} het neergeslagen punt $B_2{}^0$.

pg. 30, 9de en 10de regel van boven, $C_1\ O\ C_1'$ in plaats van $B_1\ O\ B_1'$.

pg. 38, 11de regel van boven, (11a) in plaats van (11).

15de regel van boven, $Q\cos^2\phi$ in plaats van $Q^2\cos^2\phi$.

pg. 41, formule (18) onder aan de bladzijde te lezen als volgt:

$$-\cos^2 M_1\,(a_1{}^2 - r^2\sin^2 M_1) - \cos^2 M_2\,(a_2{}^2 - r^2\sin^2 M_2) +$$
$$+\cos^2 M_3\,(a_3{}^2 - r^2\sin^2 M_3) = \pm 2\cos M_1$$
$$\cos M_2 \sqrt{(a_1{}^2 - r^2\sin^2 M_1)\,a_2{}^2 - r^2\sin^2 M_2)} \qquad (18)$$

pg. 47, 11de regel van boven, genoemden in plaats van genoemde.

pg. 60, noot 2, Sitz. in plaats van Setz.

pg. 62, 12de regel van boven, a_j in plaats van A_j.

pg. 63, 25ste regel van boven, $\bar{a}_j$ in plaats van a_j.

pg. 75, 22ste regel van boven $\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1$ in plaats van $\frac{x^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1$.

pg. 102, 10de regel van onderen te lezen als volgt:

$$s^2 = a_1{}^2\sin^2 z + a_2{}^2\sin^2(z+\alpha_3) + a_3{}^2\sin^2(z-\alpha_2^1)$$

pg. 103, 7de regel van boven, s^2 in plaats van o^2.

pg. 104, in formule 62, $C^2 = S$ in plaats van $C^2 = S^2$.

STELLINGEN.

I.

Het is gewenscht den naam „stelling van POHLKE" te vervangen door dien van hoofdstelling der Axonometrie.

II.

De methode, die WENDLING [1]) aangeeft ter vereenvoudiging van uit de verschillende bewijzen van de hoofdstelling der Axonometrie voortvloeiende constructies, berust op beginselen, die reeds door VON PESCHKA en MANDL zijn aangegeven.

III.

De hoofdstelling der Axonometrie is te beschouwen als een bijzonder geval eener algemeene evenwijdige projectie van een n-been in R_n op een projectieruimte R_m, waarbij n en m aan bepaalde voorwaarden zijn gebonden.

IV.

Het verdient aanbeveling naast de formuleering van de hoofdstelling der orthogonale Axonometrie, zooals WEISBACH deze geeft, de formuleering van GAUSS meer naar voren te brengen.

---

[1]) WENDLING, Der Fundamentalsatz der Axonometrie, § 4.

V.

De verschillende definities, welke gegeven worden voor den kromtecirkel, welke in een punt eener vlakke kromme kan worden aangebracht, mogen niet als gelijkwaardig worden beschouwd.

VI.

De wijze, waarop LORIA [1]) de grensgevallen behandelt, die zich bij het samenvallen der richtlijnen van een scheef regelvlak voordoen, is minder juist te achten.

VII.

Het bewijs voorkomend bij KIEPERT van de betrekking

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

is onjuist.

KIEPERT, Grundriss der Differential und Integralrechnung I, pg. 250, (10e druk).

VIII.

De stelling 22 in SERRET-SCHEFFERS, Lehrbuch der Differential- und Integral-rechnung II (4 und 5 Aufl.) pg. 183 is onjuist.

IX.

De formuleering in LOBATTO-RAHUSEN „Lessen over de Hoogere Algebra" 6de druk, pg. 160, gegeven van het theorema van BUDAN is onvoldoende; hierbij moet worden opgemerkt, dat q geen wortel van de hoogere machtsvergelijking mag zijn.

---

[1]) G. LORIA, Vorlesungen über Darstellende Geometrie II, pg. 226.

X.

Ten onrechte beweert W. Ribl [1])
De uitslag (van het Rayleighspiegeltje), welke een maat is voor de amplitude van de resonantietrilling, moet dus evenredig zijn met de sterkte van het door de geluidsbron voortgebrachte geluid.

XI.

Ter verklaring van het optreden van dubbelbanden bij reststralen van twee-atomige vaste lichamen is de aanname van een rotatie der moleculen te verkiezen boven die van F. Koref [2]) een eigen trilling van elk der beide atomen.

XII.

In de elementaire vlakke meetkunde wordt de theorie der gelijkvormig gelegen figuren ten onrechte verwaarloosd.

XIII.

Het aannemen van het horizontale vlak als vlak van teekening, zooals dit in sommige leerboeken der Beschrijvende Meetkunde bij de methode van Monge geschiedt, verdient geen aanbeveling.

XIV.

Het is gewenscht, dat een algemeen encyclopaedisch college in de Wiskunde gegeven worde.

---

[1]) Annalen der Physik, Bd. 36, 1911, pg. 652.
[2]) F. Koref. Physikalische Zeitschrift, 1912, Bd. 13, pg. 183 en v.v.