Rationale ruimtekrommen van den vierden graad

https://hdl.handle.net/1874/259731

1915

Rationale Ruimtekrommen
= van den vierden graad. =

D. J. E. SCHREK.

Rationale Ruimtekrommen van den vierden graad.

Rationale Ruimtekrommen van den vierden graad

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. ERNST COHEN

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Donderdag 23 September 1915 des namiddags te 4 uur

DOOR

DANIEL JOHAN ENGBERTUS SCHREK

geboren te ZWOLLE

Electr. drukkerij «de Industrie» J. VAN DRUTEN — Utrecht

1915

AAN MIJN MOEDER EN
AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJN VADER.

Bij het voltooien van dit proefschrift is het mij een aangename plicht U, Hoogleeraren van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, mijn dank te betuigen voor het onderwijs dat ik van U heb ontvangen. Hierbij wil ik niet nalaten den naam te noemen van wijlen Prof. Wind, den eenigen van mijn leermeesters, die het tot stand komen van dit geschrift niet heeft mogen beleven.

U, Hooggeleerde de Vries, Hooggeachte Promotor, geldt in de eerste plaats mijn dank. Dat ik in den loop mijner studie een bepaalde voorliefde voor de meetkundige vakken heb gekregen is zeker voor een niet gering deel toe te schrijven aan de boeiende wijze, waarop ik allerlei onderwerpen uit de meetkunde op Uwe colleges hoorde behandelen. In het bijzonder zal ik U steeds erkentelijk blijven voor de welwillendheid en de belangstelling, die ik van U tijdens het samenstellen van dit geschrift mocht ondervinden.

INHOUD.

Bladz.

GESCHIEDENIS EN LITERATUUROVERZICHT 1

HOOFDSTUK I. De algemeene kromme van den vierden graad en de tweede soort 9

1. De voorwaarde voor complanaire ligging van vier punten van de kromme en de eigenschappen, welke daaruit onmiddellijk volgen 9
2. De dubbele osculatiekoorden of hoofdkoorden. 16
3. Eenvoudige parametervoorstelling van de kromme C^4. Toepassingen 20
4. Het raaklijnenoppervlak en eenige andere merkwaardige oppervlakken 26

HOOFDSTUK II. Bijzondere krommen van den vierden graad en de tweede soort 33

1. De kromme C^4 met oneindig vele drietallen in één punt samenkomende raaklijnen 33
2. De kromme C^4 met twee stationnaire raaklijnen 39
3. De kromme C^4 met een dubbelpunt . . 45
4. De kromme C^4 met een keerpunt . . . 52

HOOFDSTUK III. De afbeelding van de algemeene kromme van den vierden graad en de tweede soort 59

1. De involutie der steunpunten van trisecanten. Complanaire groepen op C^4. . 59

—

2. Raakvlakken. Dubbelraakvlakken. Osculatievlakken. Stationnaire raakvlakken . 62
3. De hoofdkoorden. 68
HOOFDSTUK IV. De afbeelding van de bijzondere krommen van den vierden graad en de tweede soort 73
1. De afbeelding van de kromme C^4 met oneindig vele drietallen in één punt samenkomende raaklijnen 73
2. De afbeelding van de kromme C^4 met twee stationnaire raaklijnen 76
3. De afbeelding van de kromme C^4 met een dubbelpunt 80
4. De afbeelding van de kromme C^4 met een keerpunt 86

Geschiedenis en Literatuuroverzicht.

Tot op het midden der 19e eeuw was het bestaan van twee geheel verschillende soorten ruimtekrommen van den vierden graad onbekend. Men kende sinds lang de snijkromme van twee quadratische oppervlakken, door welke dan steeds oneindig vele van dergelijke oppervlakken gaan, die samen een bundel vormen; dergelijke krommen had Monge reeds omstreeks 1800 in bijzondere gevallen bestudeerd. Eerst in het jaar 1850 werd door Salmon [1]) gevonden dat er nog een tweede ruimtekromme van den vierden graad bestaat, welke in verschillende opzichten van de van ouds bekende kromme verschilt. Eenige jaren later, in 1856, deed Steiner [2]), onafhankelijk van zijn voorganger, dezelfde ontdekking. Beiden merken op dat ze hier blijkbaar een geheel onbekende kromme ontmoeten; noch Salmon, noch Steiner schijnt haar echter aan een nader onderzoek te hebben onderworpen.

Het eerst werd de nieuw ontdekte kromme uitvoerig bestudeerd door Cremona. Deze bood in de zitting van 7 Maart 1861 aan de Academie van Bologna een verhandeling aan, getiteld „Intorno alla curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado", waaruit hij de gevonden resultaten

---

[1]) On the classification of curves of double curvature. The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. Vol. 5. 1850. (p. 40).

[2]) Über die Flächen dritten Grades. Journal für Math. (Crelle) 53. 1857 (p. 138). Ook afgedrukt in: Jacob Steiner's Gesammelte Werke. Zweiter Band. Berlin 1882. (p. 656).

voorlas [1]. De verhandeling in haar geheel werd niet in de „Memorie" van genoemde academie opgenomen; ze verscheen echter in hetzelfde jaar in de Annali di Matematica [2].

In de bovengenoemde verhandeling gaat CREMONA uit van de bekende snijkromme van twee quadratische oppervlakken, die hij de vierdegraadskromme „van de eerste soort" noemt. Deze kan klaarblijkelijk geen trisecanten bezitten. Immers de kromme is basiskromme van een bundel quadratische oppervlakken; een trisecante zou met al deze oppervlakken drie punten gemeen hebben, dus erop moeten liggen, ze zou dus ook als deel van de basisfiguur optreden, hetgeen ongerijmd is.

Vervolgens bespreekt CREMONA de kromme van den vierden graad, die men als volgt verkrijgt. Men brengt een hyperboloïde H tot doorsnijding met een cubisch oppervlak dat met de hyperboloïde twee rechten l_1 en l_2 van hetzelfde stelsel gemeen heeft, of wel éene lijn, die dan echter dubbelrechte moet zijn van het cubisch oppervlak. De restdoorsnede is dan een kromme C^4 van den vierden graad. Elke beschrijvende lijn van H zal het cubisch oppervlak in drie punten moeten snijden; behoort nu die lijn tot hetzelfde stelsel als l_1 en l_2 dan zal ze, daar lijnen van eenzelfde stelsel elkaar kruisen, in drie punten op de kromme C^4 rusten, dus *trisecante* zijn. Behoort ze echter tot het tweede stelsel op H, dan snijdt ze l_1 en l_2 elk in één punt en dus de kromme in nog slechts één punt; ze is dan een *unisecante*. C^4 heeft dus oneindig vele trisecanten, ze wordt door CREMONA de vierdegraadskromme „van de tweede soort" genoemd.

Het bezit van trisecanten brengt nu onmiddellijk met zich dat door de kromme van de tweede soort geen

---

[1] Dit uittreksel is opgenomen in: Rendic. dell' Accad. di Bologna 1860—'61.

[2] Ann. di Mat. 4. 1861.

ander quadratisch oppervlak dan H kan gaan. Immers, stel dit was wel het geval, dan zou een trisecante met elk der quadratische oppervlakken drie punten gemeen hebben, dus erop liggen, hetgeen onmogelijk is, daar twee quadratische oppervlakken slechts een figuur van den vierden graad gemeen kunnen hebben.

Het belangrijkste verschil tusschen de kromme van de eerste en de tweede soort is echter dat de laatste *rationaal* is, d.w.z. dat haar punten één aan één kunnen worden toegevoegd aan de punten eener rechte lijn. Dit blijkt onmiddellijk als men een der trisecanten als as kiest van een vlakkenbundel. Elk vlak snijdt de kromme dan nog in één punt; elk punt bepaalt omgekeerd één vlak, en daar men de vlakken weer projectief kan laten overeenkomen met de punten eener rechte kan men dus de kromme punt voor punt op een rechte lijn afbeelden. Dit verschaft het groote voordeel dat alle methoden van de verwantschapstheorie op onze kromme van toepassing zijn.

Samenvattend vinden we dus dat de kromme van de tweede soort zich van die der eerste soort onderscheidt door de volgende eigenschappen:

1°. Door haar gaat slechts één quadratisch oppervlak, de hyperboloïde H.

2°. Ze bezit oneindig vele trisecanten, welke samen de eene regelschaar der hyperboloïde uitmaken.

3°. Ze is rationaal.

Het is echter goed reeds hier op te merken dat de begrippen „rationaal" en „tweede soort" niet steeds synoniem zijn. Zoo ontstaat bij de doorsnijding van twee elkaar rakende quadratische oppervlakken een ruimtekromme van den vierden graad met dubbelpunt, en daar deze als basiskromme van een bundel quadratische oppervlakken kan optreden is ze van de eerste soort. Toch is ze rationaal daar elke lijn, die het dubbelpunt met eenig ander punt van de kromme verbindt, als oneigenlijke trisecante is op te vatten, dus als as van een vlakkenbundel kan worden gekozen.

CREMONA zelf heeft, behoudens een korte beschouwing over eene bijzondere ruimtekromme van den vierden graad (n.l. over die met twee stationnaire raaklijnen) niets meer over hetzelfde onderwerp gepubliceerd. Zijn werk werd aangevuld door BERTINI, die o.a. vond dat elke ruimtekromme van den vierden graad en de tweede soort drie zoogenaamde hoofdkoorden of dubbele osculatiekoorden bezit, welke bovendien door één punt gaan; hierbij is een hoofdkoorde een lijn, die twee zoodanige punten op de kromme verbindt, dat elk gelegen is in het osculatievlak van het andere.

Van niet minder belang was het werk van den Oostenrijkschen wiskundige EMIL WEYR, die in de jaren 1871—'78 een aantal verhandelingen het licht deed zien over de algemeene en bijzondere rationale krommen C^4 en hare afbeelding op een kegelsnede. Hij toonde aan hoe men uit de afbeelding tal van eigenschappen van de kromme kan opsporen en hoe men, zonder een enkele formule te gebruiken, alle resultaten van BERTINI kan terugvinden.

Nadat dus in hoofdzaak door CREMONA, BERTINI en EMIL WEYR de theorie der ruimtekrommen van den vierden graad en de tweede soort was opgebouwd, hebben vele anderen hieraan meer of minder belangrijke onderzoekingen toegevoegd en is een vrij uitgebreide literatuur ontstaan. Bij geen der latere schrijvers is deze literatuur ook slechts eenigszins volledig opgegeven. Wel komt een zeer goede literatuuropgave voor bij GINO LORIA [1]). Aan LORIA is ook de onderstaande lijst gedeeltelijk ontleend; alleen bevat ze nog een tweetal verhandelingen meer van WEYR en zijn enkele foutieve opgaven verbeterd.

Ten slotte moge hier nog met een enkel woord een

---

[1]) Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Torino. 1896. (p. 139).

werk vermeld worden, dat mij bij het doorzoeken der literatuur talrijke diensten heeft bewezen, n.l. Poggendorff's Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Het geeft o.a. van vele wiskundigen tot op het jaar 1904 de volledige lijst hunner publicaties. Voor het verzamelen van de literatuur van een bepaalden schrijver over het onderwerp en voor het opsporen van fouten in andere literatuuropgaven bleek het herhaaldelijk een uitstekend hulpmiddel te zijn.

In onderstaande lijst zijn overal het nummer en het jaartal van het bedoelde deel van een tijdschrift aangegeven. Eventueel voorkomende Romeinsche cijfers hebben betrekking op de reeks.

Cremona. Intorno alla curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. Annali di Matematica. 4. 1861.

Emil Weyr. Über rationale Raumcurven vierter Ordnung. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 63. 1871.

——— Über Raumcurven vierter Ordnung mit einem Cuspidalpunkt. Id. 71. 1875.

——— Über die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt. Id. 72. 1875.

——— Weitere Bemerkungen über die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt. Id. 73. 1876.

——— Über Raumcurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte. Id. 75. 1877.

——— Über Punktsysteme auf rationalen Raumcurven vierter Ordnung. Id. 75. 1877.

——— Über die Abbildung einer mit einem Cuspidalpunkte versehenen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt. Id. 78. 1878.

EMIL WEYR. Über die Abbildung einer Raumcurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte auf einen Kegelschnitt. Id. 78. 1878.

——— Über rationale Curven vierter Ordnung. Math. Ann. 4. 1871.

——— Über Curven vierter Ordnung. Sitzungsberichte der böhm. Gesellsch. d. Wiss. (Prag). 1874.

BERTINI. Sulla curva gobba di 4° ordine e 2ª specie. Rendic. Ist. Lomb. II. 5. 1872.

ARMENANTE. Sulle curve gobbe razionali del quarto ordine. Giorn. di Matematiche (Battaglini). 11. 1873 en 12. 1874.

STURM. Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du 4ᵉ ordre et de la 2ᵉ espèce en quatre points d'un cercle. Annali di Matematica II. 4. 1870—'71.

ADLER. Über Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 86. 1882.

——— Weitere Bemerkungen über Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art. Id. 86. 1882.

——— Über specielle Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art. Id. 86. 1882.

ROBERTS. On unicursal twisted quartics. Proceed. of the London Math. Society. 14. 1883.

JOLLES. Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species synthetisch behandelt. Inaugural-Dissertation. Dresden 1883.

——— Die Theorie der Osculanten und das Sehnensystem der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species. Habilitationsschrift. Aachen. 1886.

BRAMBILLA. Sulla curva gobba del quarto ordine dotata di punto doppio. Rendic. Ist. Lomb. II. 17. 1884.

——— Le omografie che mutano in sè stessa una curva gobba razionale del quarto ordine. Id. II. 20. 1887.

BRAMBILLA. Ricerche analitiche intorno alle curve gobbe razionali del quarto ordine. Atti Ist. Veneto. VI. 3. 1885.

STUDY. Über die Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig). 38. 1886.

STAHL. Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art und die desmische Fläche zwölfter Ordnung vierter Klasse. Journal f. Math. (Crelle). 101. 1887.

MEYER. Über die mit der Erzeugung der Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species verknüpften algebraischen Prozesse. Math. Ann. 29. 1887.

ROHN. Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species. Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. (Leipzig). 42. 1890 en 43. 1891.

BERZOLARI. Sulla curva gobba razionale del quarto ordine. Rendic. Ist. Lomb. II. 23. 1890.

———— Sopra alcuni iperboloidi annessi alla curva gobba razionale del quart' ordine. Id. II. 25. 1892.

———— Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quarto ordine. Ann. di Mat. II. 20. 1892.

FORSYTH. On twisted quartics of the second species. Quart. Journ. of Math. 27. 1895.

Over de ruimtekromme van den vierden graad en de tweede soort, welke twee stationnaire raaklijnen bezit, handelen meer in het bijzonder:

CREMONA. Sopra una certa curva gobba di quart' ordine. Rendic. Ist. Lomb. II. 1. 1868.

EMIL WEYR. Sopra una certa curva gobba di quart' ordine. Id. II. 4. 1871.

Appell. Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre. Comptes rendus (Paris). 83. 1876.

Brambilla. Sopra alcuni casi particolari della curva gobba razionale del quarto ordine. Rendic. dell' Accad. di Napoli. 24. 1885.

Del Re. Omografie che mutano in sè stessa una certa curva gobba del 4° ordine e 2ª specie e correlazioni che la mutano nella sviluppabile dei suoi piani osculatori. Atti dell' Accad. di Torino. 22. 1887.

——— Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti. Rendic. dell' Accad. di Napoli. II. 1. 1887.

——— Su certi sistemi di quartiche e sestiche sviluppabili che si presentano a proposito delle trasformazioni lineari di una certa quartica gobba in sè stessa. Id. II. 2. 1888.

HOOFDSTUK I.

De algemeene kromme van den vierden graad en de tweede soort.

1. *De voorwaarde voor complanaire ligging van vier punten van de kromme en de eigenschappen welke daaruit onmiddellijk volgen.*

Meest algemeene parametervoorstelling.

Uit het feit dat C^4 rationaal is volgt dat het mogelijk moet zijn de homogene coördinaten x_k van elk harer punten uit te drukken als geheele rationale functies van een enkelen parameter u, welke functies dan natuurlijk van den vierden graad moeten zijn. In het algemeen zal men de kromme dus kunnen voorstellen door

$$x_k = a_k u^4 + b_k u^3 + c_k u^2 + d_k u + f_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Voorwaarde voor complanaire ligging van vier punten van C^4.

Snijdt men C^4 met een willekeurig vlak

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

dan worden de parameters der snijpunten geleverd door de vierdegraadsvergelijking:

$$(\Sigma \lambda_k a_k) u^4 + (\Sigma \lambda_k b_k) u^3 + (\Sigma \lambda_k c_k) u^2 +$$
$$+ (\Sigma \lambda_k d_k) u + \Sigma \lambda_k f_k = 0$$

Stelt men nog:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = U_1$$
$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4 = U_2$$
$$u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4 = U_3$$
$$u_1 u_2 u_3 u_4 = U_4$$

dan is:

$$U_1 (\sum \lambda a) = - \sum \lambda b$$
$$U_2 (\sum \lambda a) = \sum \lambda c$$
$$U_3 (\sum \lambda a) = - \sum \lambda d$$
$$U_4 (\sum \lambda a) = \sum \lambda f$$

Men heeft dus:

$$(a_1 U_1 + b_1) \lambda_1 + (a_2 U_1 + b_2) \lambda_2 + (a_3 U_1 + b_3) \lambda_3 + \\ + (a_4 U_1 + b_4) \lambda_4 = 0$$

$$(a_1 U_2 - c_1) \lambda_1 + (a_2 U_2 - c_2) \lambda_2 + (a_3 U_2 - c_3) \lambda_3 + \\ + (a_4 U_2 - c_4) \lambda_4 = 0$$

$$(a_1 U_3 + d_1) \lambda_1 + (a_2 U_3 + d_2) \lambda_2 + (a_3 U_3 + d_3) \lambda_3 + \\ + (a_4 U_3 + d_4) \lambda_4 = 0$$

$$(a_1 U_4 - f_1) \lambda_1 + (a_2 U_4 - f_2) \lambda_2 + (a_3 U_4 - f_3) \lambda_3 + \\ + (a_4 U_4 - f_4) \lambda_4 = 0$$

Elimineert men nu tusschen deze vier vergelijkingen de grootheden λ, dan vindt men een betrekking, die geldt voor *elk* viertal in één plat vlak gelegen punten van C^4. Deze betrekking bevat een determinant, dien men ook aldus mag voorstellen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_1 & a_1 U_1 + b_1 & a_2 U_1 + b_2 & a_3 U_1 + b_3 & a_4 U_1 + b_4 \\ U_2 & a_1 U_2 - c_1 & a_2 U_2 - c_2 & a_3 U_2 - c_3 & a_4 U_2 - c_4 \\ U_3 & a_1 U_3 + d_1 & a_2 U_3 + d_2 & a_3 U_3 + d_3 & a_4 U_3 + d_4 \\ U_4 & a_1 U_4 - f_1 & a_2 U_4 - f_2 & a_3 U_4 - f_3 & a_4 U_4 - f_4 \end{vmatrix} = 0$$

Door de eerste kolom, na doelmatige vermenigvuldiging, van elk der overige af te trekken zal men vinden:

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ U_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ U_2 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ U_3 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ U_4 & -f_1 & -f_2 & -f_3 & -f_4 \end{vmatrix} = 0$$

of ook:

$$(b_1 c_2 d_3 f_4) + (a_1 c_2 d_3 f_4) U_1 + (a_1 b_2 d_3 f_4) U_2 +$$
$$+ (a_1 b_2 c_3 f_4) U_3 + (a_1 b_2 c_3 d_4) U_4 = 0$$

Deze vergelijking is dus van den vorm

$$A_0 u_1 u_2 u_3 u_4 + A_1 (u_1 u_2 u_3 + \ldots + u_2 u_3 u_4) +$$
$$+ A_2 (u_1 u_2 + \ldots + u_3 u_4) + A_3 (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) +$$
$$+ A_4 = 0$$

Zij bepaalt de involutie van den vierden graad en den derden rang I_4^3 waarin de punten van C^4 door de vlakken van de ruimte worden gerangschikt.

Stationnaire raakvlakken.

Onder de groepen dezer I_4^3 zullen er ook voorkomen waarbij alle vier waarden u gelijk zijn. Dit beteekent dan dat een vlak vier opeenvolgende punten van C^4 bevat (*stationnair raakvlak*); het raakpunt zullen we een *planair buigpunt* noemen. De parameters der planaire buigpunten worden klaarblijkelijk gevonden uit de vergelijking

$$A_0 u^4 + 4 A_1 u^3 + 6 A_2 u^2 + 4 A_3 u + A_4 = 0$$

Derhalve:

C^4 bezit vier stationnaire raakvlakken.

De voorwaarde voor complanaire ligging in eenvoudiger gedaante.

Men kan aantoonen dat men elken vorm van den vierden graad door een lineaire substitutie kan omzetten in een anderen vorm waarin slechts even machten voorkomen. Dus kan men door invoering van een anderen parameter, die lineair van u afhangt, bewerken dat de vier buigpunten worden geleverd door eene vergelijking van den vorm

$$t^4 + 6\,m\,t^2 + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dan wordt de overeenkomstige I_4^3 aangewezen door

$$t_1 t_2 t_3 t_4 + m\,(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4) +$$
$$+ 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welke betrekking we voortaan zonder meer als de „voorwaarde voor complanaire ligging” zullen aanduiden.

Osculatie-

Wanneer men een der punten van een complanaire vlakken, uit een punt van C^4 aan C^4 gelegd.

groep als vast aanneemt vormen de drietallen overige punten de groepen van een I_3^2, welke door een vlakkenschoof, met het vaste punt als centrum, op C^4 wordt ingesneden. Kiest men $t_4 = t_0$ als parameter van het vaste punt, dan wordt de I_3^2 voorgesteld door

$$t_0\, t_1\, t_2\, t_3 + m\,(t_1\, t_2 + t_1\, t_3 + t_2\, t_3) + m\, t_0\,(t_1 + t_2 + \\ + t_3) + 1 = 0$$

Hare drievoudige elementen, die betrekking hebben op osculatievlakken, worden geleverd door de vergelijking:

$$t_0\, t^3 + 3\, m\, t^2 + 3\, m\, t_0\, t + 1 = 0$$

Dus, daar deze van den derden graad is:

Door elk punt van C^4 gaan drie vlakken die haar elders osculeeren.

I_3 gevormd door de steunpunten dezer osculatievlakken.

Noemen we t', t'', t''' de parameters der steunpunten dezer osculatievlakken dan volgt uit de laatste vergelijking:

$$t_0\,(t' + t'' + t''') = -3\, m, \quad t'\, t'' + t'\, t''' + t''\, t''' = 3\, m, \\ t_0\, t'\, t''\, t''' = -1$$

De drietallen steunpunten, behoorend bij de punten van C^4, vormen klaarblijkelijk een I_3, waarvan men de voorstelling verkrijgt door t_0 uit de laatste betrekkingen te elimineeren:

$$t' + t'' + t''' = 3\, m\, t'\, t''\, t'''$$
$$t'\, t'' + t'\, t''' + t''\, t''' = 3\, m$$

Ten einde deze I_3 op een meer gebruikelijke wijze voor te stellen vervangen we $t'\, t''\, t'''$ door λ, waardoor $t' + t'' + t''' = 3\, m\, \lambda$. Daar verder $t'\, t'' + t'\, t''' + t''\, t''' = 3\, m$ wordt de vergelijking der I_3:

$$t^3 - 3\, m\, \lambda\, t^2 + 3\, m\, t - \lambda = 0$$

of:

$$(t^3 + 3\, m\, t) - \lambda\,(3\, m\, t^2 + 1) = 0 \quad . \quad . \quad . \; (3)$$

Elk punt P van C^4 ligt in één vlak met de steunpunten der uit P getrokken osculatievlakken.

Indien men de zooeven gevonden uitdrukkingen

$$t_0 t' + t_0 t'' + t_0 t''' = -3m, \quad t't'' + t't''' + t''t''' = 3m,$$
$$t_0 t' t'' t''' = -1$$

in de voorwaarde voor complanaire ligging stelt blijkt dat hieraan wordt voldaan. Derhalve:

Legt men door een punt van C^4 de drie mogelijke osculatievlakken dan liggen de steunpunten met het eerstgenoemde punt in één vlak.

Voor deze eigenschap geeft Weyr nog het volgende eenvoudige meetkundige bewijs. Men projecteere C^4 uit een harer punten P. De projectie is dan een vlakke kromme van den derden graad, die een dubbelpunt bezit ter plaatse waar de door P gaande trisecante het tafereel treft. Een zoodanige kromme bezit drie op één rechte lijn gelegen buigpunten, welke de projecties zijn van de steunpunten der door P gaande osculatievlakken. Deze steunpunten liggen dus met P in één vlak.

I_3 gevormd door de steunpunten der trisecanten.

In het algemeen zal door drie punten van C^4 het vierde, daarmee complanaire, punt bepaald zijn, wat trouwens ook uit (2) volgt als men ze schrijft:

$$[t_1 t_2 t_3 + m(t_1 + t_2 + t_3)]\, t_4 + [m(t_1 t_2 + t_1 t_3 +$$
$$+ t_2 t_3) + 1] = 0$$

t_4 zal onbepaald zijn indien gelijktijdig:

$$t_1 t_2 t_3 + m(t_1 + t_2 + t_3) = 0$$
$$m(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + 1 = 0$$

Meetkundig beteekent dit echter dat de punten met parameters t_1, t_2, t_3 op één rechte lijn liggen, dus steunpunten zijn van eene trisecante. Uit de verkregen vergelijkingen volgt dat elke groep bepaald wordt door één harer punten, dus:

De steunpunten der trisecanten vormen een I_3.

Stelt men ook hier weer $t_1 t_2 t_3$ door λ voor, dan wordt $t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{\lambda}{m}$, en daar $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -\frac{1}{m}$ wordt I_3 dus voorgesteld door

$$t^3 + \frac{\lambda}{m} t^2 - \frac{1}{m} t - \lambda = 0$$

of:

$$(m t^3 - t) + \lambda (t^2 - m) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Uit een gegeven punt de overige twee der groep te bepalen.

Wanneer men uit de vergelijking

$$t^2 - (t_1 + t_2)\, t + t_1 t_2 = 0$$

en uit de straks verkregen betrekkingen, geschreven in den vorm

$$m t_3 + (t_1 + t_2)\, m + t_1 t_2 t_3 = 0$$
$$1 + (t_1 + t_2)\, m t_3 + t_1 t_2 m = 0$$

de symmetrische functies $t_1 + t_2$ en $t_1 t_2$ elimineert, dan zal de vergelijking

$$\begin{vmatrix} t^2 & -t & 1 \\ m t_3 & m & t_3 \\ 1 & m t_3 & m \end{vmatrix} = 0$$

de waarden van t leveren, die de punten aanwijzen welke met het door t_3 aangegeven punt op dezelfde trisecante zijn gelegen. Of wel:

$$(m^2 - m t_3^2)\, t^2 + (m^2 t_3 - t_3)\, t + (m^2 t_3^2 - m) = 0 \quad (5)$$

Rakende trisecanten.

Vergelijking (5) zal twee gelijke wortels t bezitten indien

$$(m^2 t_3 - t_3)^2 = 4\, (m^2 - m t_3^2)\, (m^2 t_3^2 - m)$$

Daar deze van den vierden graad is in t_3 heeft men: *C^4 bezit vier raaklijnen, die haar bovendien nog snijden.*

Snijpunten dezer trisecanten.

De parameters der snijpunten der rakende trisecanten worden geleverd door de laatste vergelijking, welke na herleiding de gedaante aanneemt

$$4\, m^3 t^4 - (3\, m^4 + 6\, m^2 - 1)\, t^2 + 4\, m^3 = 0 \quad (6)$$

De kegel, die uit een dezer punten C^4 projecteert, is van den derden graad en bezit een keerribbe; hij is dus van de derde klasse. Derhalve:

Door C^4 gaan vier kegels van den derden graad en de derde klasse; hun keerribben zijn de rakende trisecanten.

Raakpunten dezer trisecanten.

De beide boven gevonden vergelijkingen

$$t_1 t_2 t_3 + m(t_1 + t_2 + t_3) = 0$$
$$m(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + 1 = 0$$

waardoor de I_3 der steunpunten van trisecanten kon worden voorgesteld, gaan voor $t_1 = t_2 = t$ over in

$$(t^2 + m) t_3 + 2 m t = 0 \qquad 2 m t t_3 + (m t^2 + 1) = 0$$

welke bij eliminatie van t_3 de vergelijking geven:

$$(t^2 + m)(m t^2 + 1) - 4 m^2 t^2 = 0$$

of:

$$m t^4 - (3 m^2 - 1) t^2 + m = 0 \quad . \quad . \quad (7)$$

waardoor dus de raakpunten der rakende trisecanten worden aangewezen.

Een involutie van den vierden graad op C^4.

Een aandachtige beschouwing der vergelijkingen (1), (6) en (7) doet ons zien dat deze alle drie liggen opgesloten in de vergelijking

$$\lambda(t^4 + 1) + \mu t^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welke een I_4 op C^4 voorstelt. Derhalve:

De vier buigpunten, de vier raakpunten der rakende trisecanten en de vier snijpunten dezer bijzondere trisecanten vormen drie groepen van eenzelfde I_4.

De zes dubbelpunten dezer I_4 zijn gemakkelijk aan te geven. Immers $\lambda = 0$ geeft een groep die uit $t^2 = 0$ en $t^2 = \infty$ bestaat Verder levert $\mu = -2\lambda$ de groep $(t + 1)^2 (t - 1)^2 = 0$ en $\mu = 2\lambda$ de groep

$$(t + i)^2 (t - i)^2 = 0$$

Onze I_4 heeft dus de bijzonderheid dat ze drie groepen bevat, die elk bestaan uit twee coïncidenties.

Splitsing der I_4 in drie I_2.

Merkt men op dat de vergelijking $\lambda t^4 + \mu t^2 + \lambda = 0$ niet verandert als men substitueert $t = -u$ of $t = \frac{1}{u}$ of $t = -\frac{1}{u}$ dan ziet men in dat elke groep der I_4 op drie wijzen is te splitsen in twee paren, zoodat de I_4 ontstaat door de paren van een der quadratische involuties $\quad t + u = 0, \quad t u = 1, \quad t u = -1$ in paren te rangschikken.

Deze drie I_2 hebben tot dubbelpunten

$$\begin{rcases} t=0 \\ t=\infty \end{rcases} \quad \begin{rcases} t=1 \\ t=-1 \end{rcases} \quad \begin{rcases} t=i \\ t=-i \end{rcases}$$

Dit zijn juist de zes dubbelpunten der I_4, hetgeen ook te verwachten was.

---

2. *De dubbele osculatiekoorden of hoofdkoorden.*

We stellen ons de vraag of twee punten van C^4 zoo gelegen kunnen zijn dat elk van hen het snijpunt is van C^4 met het osculatievlak in het andere punt. De koorde, die twee zoodanige punten verbindt en volgens welke dus twee osculatievlakken elkaar snijden, zullen we een *dubbele osculatiekoorde* of *hoofdkoorde* noemen.

Aantal der dubbele osculatiekoorden.

Ten einde vooreerst het aantal der gezochte punten te vinden denken we ons in eenig punt P van C^4 het osculatievlak aangebracht, dat C^4 nog in Q moge snijden. Het osculatievlak in Q zal evenzoo de kromme in R snijden.

Indien dan R met P samenvalt is het gewenschte geval voorhanden. Nu bestaat er tusschen de punten P en R klaarblijkelijk een verwantschap (1, 9); immers P bepaalt één punt Q en Q weer één punt R. Omgekeerd bepaalt echter R drie punten Q (bl. 12), welke elk weer drie punten P leveren, zoodat R aanleiding geeft tot negen punten P.

Onder de tien coïncidenties zullen, zooals men aanstonds inziet, en ook straks nog nader zal blijken, de vier planaire buigpunten (bl. 11) voorkomen; er blijven er dus nog zes over, welke paarsgewijze een hoofdkoorde bepalen. Derhalve:

C^4 *bezit drie hoofdkoorden.*

Parameterwaarden van de steunpunten der hoofdkoorden.

Uit de voorwaarde voor complanaire ligging leidden we reeds af (bl. 12) dat de parameterwaarden t en u van osculatiepunt en restpunt verbonden zijn door de betrekking

$$u\,t^3 + 3\,m\,t^2 + 3\,m\,u\,t + 1 = 0$$

zoodat

$$u = -\frac{3\,m\,t^2 + 1}{t^3 + 3\,m\,t} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Het osculatievlak, in (u) aan C^4 gelegd, zal evenzoo een restpunt (v) geven, waarbij

$$v\,u^3 + 3\,m\,u^2 + 3\,m\,v\,u + 1 = 0$$

Stelt men hierin de waarde (9) van u en identificeert men v en t dan zullen dus de steunpunten der dubbele osculatiekoorden worden bepaald door de vergelijking

$$-\left(\frac{3\,m\,t^2 + 1}{t^3 + 3\,m\,t}\right)^3 t + 3\,m\left(\frac{3\,m\,t^2 + 1}{t^3 + 3\,m\,t}\right)^2 -$$

$$-\,3\,m\,t\,\frac{3\,m\,t^2 + 1}{t^3 + 3\,m\,t} + 1 = 0$$

Bij uitwerking blijkt deze vergelijking van den negenden graad te zijn, en daar ze volgens het voorgaande tien wortels moet geven, zal één der wortels $t = \infty$ moeten zijn.

Voorts blijkt de vergelijking door t deelbaar te zijn, waardoor een tweede wortel $t = 0$ wordt gevonden. De overblijvende achtstegraadsvergelijking kan dan aldus worden geschreven:

$$(9\,m^2 - 1)\,(t^8 + 6\,m\,t^6 - 6\,m\,t^2 - 1) = 0$$

Onderstellen we voorloopig dat $9\,m^2 - 1$ niet gelijk aan nul is [1]) dan heeft men dus:

$$t^8 + 6\,m\,t^6 - 6\,m\,t^2 - 1 = 0$$

waarvoor men kan schrijven:

$$(t^4 - 1)\,(t^4 + 6\,m\,t^2 + 1) = 0$$

De tweede factor wijst volgens (1) de planaire buigpunten aan; de eerste levert voor t de waarden $\pm\,1$, $\pm\,i$.

Vergelijking (9) leert ons verder hoe de verkregen wortels 0, ∞, $\pm\,1$, $\pm\,i$ bijeenbehooren; men vindt dan:

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ t = \infty \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} t = +1 \\ t = -1 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} t = +i \\ t = -i \end{matrix}\right\}$$

---

[1]) Was $9\,m^2 - 1$ nul dan zou aan de vergelijking door *elke* waarde van t worden voldaan, d.w.z. C^4 zou oneindig vele dubbele osculatiekoorden bezitten. Dit geval zal uitvoeriger behandeld worden in Hoofdstuk II, 2.

Merkt men op dat deze parameterwaarden juist de dubbelelementen aanwijzen van de op bl. 15 besproken I_4 dan heeft men dus:

De steunpunten der dubbele osculatiekoorden zijn de dubbelelementen der I_4, voorgesteld door vergelijking (8).

De hoofdkoorden gaan door één punt.

Wanneer men de drie puntenparen $0, \infty; +1, -1; +i, -i$ op alle drie wijzen twee aan twee combineert dan verkrijgt men telkens een groep van vier punten, wier parameterwaarden aan (2) voldoen en die dus complanair zijn. Of wel: de drie hoofdkoorden snijden elkaar paarsgewijze. Nu kunnen ze echter niet in één vlak liggen; immers dat vlak zou C^4 in zes punten snijden. En dus:

De drie hoofdkoorden gaan door één punt.

Tetraeders, beschreven in C^4.

Keeren we thans terug tot de drie I_2, waarin de I_4, voorgesteld door vergelijking (8), kon worden gesplitst. Het is duidelijk dat elk dezer I_2 wordt ingesneden door een vlakkenbundel met een der hoofdkoorden als as; de beide door de hoofdkoorden gaande osculatievlakken bepalen dan de dubbelelementen der I_2, die hier met de steunpunten samenvallen. Merken we nog op dat de viertallen der I_4 in het algemeen niet in één vlak liggen dan heeft men dus:

Men kan in C^4 oneindig vele tetraeders beschrijven, zoo dat elk der drie paren overstaande ribben door een der drie hoofdkoorden wordt gesneden. De viertallen hoekpunten vormen de I_4, voorgesteld door vergelijking (8).

Om bij een gegeven punt P op C^4 de overige hoekpunten van het door P bepaalde tetraeder te zoeken legge men telkens door P en een der hoofdkoorden een vlak; deze vlakken geven elk nog een snijpunt met C^4 en deze punten vullen P tot een viertal aan.

Als bijzondere tetraeders zijn, behalve die, welke reeds op bl. 15 werden aangeduid, te noemen die, welke een paar trisecanten als overstaande ribben bezitten. Past men (5) toe op de steunpunten van de trisecante, die uit het punt $t_3 = 0$ vertrekt, dan vindt men voor de overige steunpunten

$$m\,t^2 = 1$$

evenzoo voor de steunpunten der trisecante uit $t_3 = \infty$

$$t^2 = m$$

De twee paren steunpunten worden dus voorgesteld door

$$(m\,t^2 - 1)(t^2 - m) = 0$$

of: $$m\,t^4 - (m^2 + 1)\,t^2 + m = 0$$

Het viertal punten, hierdoor aangewezen, behoort blijkens den vorm van de vergelijking ook tot de I_4. Dus:

Onder de in C^4 beschreven tetraeders zijn in het bijzonder te noemen:

1°. *het tetraeder, bepaald door de buigpunten.*

2°. *dat, bepaald door de raakpunten der rakende trisecanten.*

3°. *dat, bepaald door de snijpunten der rakende trisecanten.*

4°. *de drie tetraeders, die elk een paar trisecanten tot overstaande ribben hebben.*

Andere tetraeders met trisecanten als overstaande ribben zijn er natuurlijk niet, daar een trisecante en een koorde elkaar niet anders kunnen snijden dan in een harer steunpunten.

Projectie van C^4 uit het snijpunt der hoofdkoorden.

Wanneer men uit het snijpunt der hoofdkoorden C^4 projecteert krijgt men als projectie een vlakke kromme van den vierden graad welke drie dubbelpunten bezit ter plaatse waar de hoofdkoorden het tafereel treffen. Deze trinodale kromme heeft echter nog de bijzonderheid dat hare dubbelpuntsraaklijnen tevens buigraaklijnen zijn. Evenzoo bezit de projecteerende kegel drie dubbelribben waarlangs de raakvlakken stationnaire raakvlakken zijn.

Emil Weyr [1]) heeft van de genoemde vlakke kromme o. a. de volgende eigenschappen bewezen:

---

[1]) Über rationale ebene Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten Inflexionstangenten sind. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 67. 1873. Zie ook: P. H. Schoute. Über die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. Archiv d. Math. u. Phys. II. 2. 1885.

1°. De raaklijnen in een dubbelpunt worden harmonisch gescheiden door de lijnen die dat dubbelpunt met de overige dubbelpunten verbinden.

2°. Elke door een dubbelpunt D gaande rechte snijdt de kromme in twee punten A en B en de verbindingslijn der andere dubbelpunten in een punt D' zoodanig dat D, D', A en B een harmonische groep vormen.

3°. Een rechte die door een dubbelpunt gaat snijdt de kromme in nog twee punten, zoodanig gelegen dat hunne raaklijnen elkaar snijden op de verbindingslijn der beide andere dubbelpunten.

Hieruit volgen onmiddellijk de overeenkomstige eigenschappen van de ruimtekromme C^4:

1°. De beide door een hoofdkoorde gaande osculatievlakken worden harmonisch gescheiden door de beide vlakken welke die hoofdkoorde met elk der overige hoofdkoorden verbinden.

2°. Elk vlak dat door een hoofdkoorde gaat snijdt C^4 in twee punten welke harmonisch liggen t. o. v. die hoofdkoorde en het vlak der beide overige hoofdkoorden.

3°. Wanneer een vlak, dat door een der hoofdkoorden gaat, C^4 in twee punten A en B snijdt, dan zal de lijn, die door het snijpunt der hoofdkoorden gaat en op de raaklijnen van A en B rust, in één vlak liggen met de beide andere hoofdkoorden.

---

3. *Eenvoudige parametervoorstelling van de kromme C^4. Toepassingen.*

Het coördinatenviervlak.

Ten einde de in den aanhef van Hoofdstuk I bedoelde parametervoorstelling van C^4 zoo eenvoudig mogelijk te verkrijgen zullen we een coördinatenviervlak kiezen waarvan

$x_1 = 0$ het osculatievlak van $t = 0$

$x_2 = 0$ het raakvlak van $t = 0$ door de trisecante van dat punt

$x_3 = 0$ het raakvlak van $t = \infty$ door de trisecante van dat punt

$x_4 = 0$ het osculatievlak van $t = \infty$

voorstelt.

Dan bevat $x_1 = 0$ de punten $t^3 = 0$ en $t = \infty$, $x_2 = 0$ de punten $t^2 = 0$ en $m t^2 = 1$, $x_3 = 0$ de punten $t^2 = \infty$ en $t^2 = m$ en $x_4 = 0$ de punten $t^3 = \infty$ en $t = 0$ (vergelijk bl. 19).

We verkrijgen dus de volgende eenvoudige parametervoorstelling van C^4:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t^3 \\ x_2 &= m t^4 - t^2 \\ x_3 &= t^2 - m \\ x_4 &= t \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Coördinaten van het hoofdpunt.

Om de coördinaten van het snijpunt der hoofdkoorden (voortaan kortweg als *hoofdpunt* aan te duiden) te bepalen, zoeken we eerst de vergelijkingen der vlakken, welke door de hoofdkoorden twee aan twee kunnen worden gelegd. Van die vlakken is het hoofdpunt het snijpunt.

De hoofdkoorden $(+1, -1)$ en $(+i, -i)$ liggen in een vlak dat door $t^4 - 1 = 0$ wordt bepaald. Daar nu $x_2 + x_3 = m\,(t^4 - 1)$ stelt $x_2 + x_3 = 0$ het bedoelde vlak voor.

Verder bevat $x_1 + x_4 = 0$ de punten $t\,(t^2 + 1) = 0$, dus de hoofdkoorden $(0, \infty)$ en $(+i, -i)$.

Eindelijk bevat $x_1 - x_4 = 0$ de punten $t\,(t^2 - 1) = 0$, dus de hoofdkoorden $(0, \infty)$ en $(+1, -1)$.

Het hoofdpunt is nu het snijpunt der vlakken $x_1 + x_4 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ en wordt dus aangewezen door

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -x_3 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Vergelijking van het vlak door drie gegeven punten van C^4.

Onderstellen we dat t_1, t_2 en t_3 de parameterwaarden zijn van drie gegeven punten op C^4. We zoeken dan de vergelijking van het vlak dat door deze punten is bepaald.

Het vlak worde voorloopig voorgesteld door:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

De snijpunten met C^4 worden dan wegens (10) bepaald door:

$$\lambda_1 t^3 + \lambda_2 (m t^4 - t^2) + \lambda_3 (t^2 - m) + \lambda_4 t = 0$$

Hieruit volgen de waarden der symmetrische functies van de wortels, welke men aldus kan schrijven:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 m (t_1 + t_2 + t_3) &= -\lambda_1 - \lambda_2 m t_4 \\
\lambda_2 m (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1) &= \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_2 m (t_1 + t_2 + t_3) t_4 \\
\lambda_2 m (t_1 t_2 t_3) &= -\lambda_4 - \lambda_2 m (t_1 t_2 + t_2 t_3 + \\
&\quad + t_3 t_1) t_4 \\
\lambda_2 (t_1 t_2 t_3) t_4 &= -\lambda_3
\end{aligned}$$

Stelt men $t_1 + t_2 + t_3 = T_1$, $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = T_2$, $t_1 t_2 t_3 = T_3$, dan heeft men dus, met bijvoeging van de vergelijking van het vlak:

$$\begin{array}{lllll}
\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 & + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 & & = 0 \\
\lambda_1 \quad + \lambda_2 m T_1 & & + \lambda_2 m t_4 & = 0 \\
\quad \lambda_2 (1 + m T_2) - \lambda_3 & & + \lambda_2 m T_1 t_4 & = 0 \\
\quad \lambda_2 m T_3 & + \lambda_4 & + \lambda_2 m T_2 t_4 & = 0 \\
\quad \lambda_3 & & + \lambda_2 T_3 t_4 & = 0
\end{array}$$

Als men uit deze vijf vergelijkingen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 en $\lambda_2 t_4$ elimineert verkrijgt men:

$$\begin{vmatrix}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\
1 & m T_1 & 0 & 0 & m \\
0 & 1 + m T_2 & -1 & 0 & m T_1 \\
0 & m T_3 & 0 & 1 & m T_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & T_3
\end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

hetgeen dus de vergelijking is van het gezochte vlak.

Vergelijking van een osculatievlak.

Uit (12) volgt aanstonds de vergelijking van het osculatievlak in eenig punt van C^4. Stelt men daartoe $t_1 = t_2 = t_3 = t$ dan wordt $T_1 = 3t$, $T_2 = 3t^2$, $T_3 = t^3$. Vergelijking (12) wordt voor dit geval, na herleiding,

$$(3 m t^4 + 6 m^2 t^2 - m) x_1 - (t^3 + 3 m t) x_2 - (3 m t^5 + \\ + t^3) x_3 + (m t^6 - 6 m^2 t^4 - 3 m t^2) x_4 = 0 \quad . \ (13)$$

waardoor dus het osculatievlak in het punt met parameter t wordt aangewezen.

Klasse van C^4.

Wanneer men in (13) de grootheden x als vast beschouwt, stelt ze een zesdegraadsvergelijking in t voor. De zes wortels t bepalen dus de zes punten van C^4, wier osculatievlakken door het gegeven punt gaan. Dus:

Door elk punt van de ruimte gaan zes osculatievlakken van C^4, of wel:

C^4 *is van de zesde klasse.*

Hetzelfde resultaat verkrijgt men ook aldus: uit een *op* C^4 gelegen punt kan men drie osculatievlakken aan C^4 leggen. Voegt men hierbij het osculatievlak in het gekozen punt zelf, dat, gelijk bekend is, voor drie samenvallende osculatievlakken is te tellen, dan wordt het algemeene aantal zes hier teruggevonden.

Stelt men in (13) de waarden (11) van de coördinaten van het hoofdpunt dan vindt men:

$$t\,(t^4-1)=0$$

waardoor de zes steunpunten der hoofdkoorden worden aangewezen, wat ook te verwachten was.

Kegel, omhuld door de vlakken, die de steunpunten van uit één punt van C^4 getrokken osculatievlakken verbinden.

We vonden reeds (bl. 13) dat, als men uit een punt van C^4 de drie mogelijke osculatievlakken aan C^4 legt, de drie steunpunten met het eerste punt in één vlak liggen. We vragen thans naar het ontwikkelbaar oppervlak K, dat door deze vlakken wordt omhuld.

Daar de vlakken geen raakvlakken van C^4 zijn, ligt C^4 niet op K en is het, om de klasse van K te weten te komen, voldoende te bepalen hoeveel der vlakken door een willekeurig punt van C^4 gaan. Dit zijn er blijkbaar *twee*, daar het gekozen punt als osculatiepunt en als restpunt kan worden opgevat en als zoodanig telkens één vlak bepaalt. K is dus een ontwikkelbaar oppervlak van de tweede klasse, d.i. een kegel van den tweeden graad. En dus:

De vlakken, die de steunpunten der uit één punt van C^4 *aan* C^4 *gelegde osculatievlakken verbinden, omhullen een kegel* K *van den tweeden graad.*

Vergelijking van den kegel K.

We weten (bl. 12) dat de symmetrische functies der parameters van de steunpunten der uit (t_0) getrokken osculatievlakken de waarden hebben:

$$T_1 = -\frac{3\,m}{t_0},\quad T_2 = 3\,m,\quad T_3 = -\frac{1}{t_0}$$

Stelt men deze uitdrukkingen in (12) dan vindt men na herleiding:

$$(3\,m^2 - m\,t_0^2)\,x_1 + t_0\,(x_2 + x_3) + (m - 3\,m^2\,t_0^2)\,x_4 = 0$$

Merken we op dat hieraan voldaan wordt door de waarden (11), die het hoofdpunt bepalen, en wel onafhankelijk van de waarde van t_0 dan blijkt:

De kegel K heeft het hoofdpunt tot top.

Daar de laatste vergelijking van den tweeden graad is in t_0, vindt men terug dat K van de tweede klasse is. Naar t_0 rangschikkend heeft men:

$$-(m\,x_1 + 3\,m^2\,x_4)\,t_0^2 + (x_2 + x_3)\,t_0 +$$
$$+ (3\,m^2\,x_1 + m\,x_4) = 0$$

Indien deze vergelijking twee gelijke wortels heeft zal het overeenkomstige punt met coördinaten x_1, x_2, x_3, x_4 op K liggen.

De kegel K heeft dus tot vergelijking:

$$4\,(m\,x_1 + 3\,m^2\,x_4)\,(3\,m^2\,x_1 + m\,x_4) + (x_2 + x_3)^2 = 0 \quad (14)$$

Nog eenige eigenschappen van den kegel K.

Om de acht snijpunten van C^4 met K te bepalen, stelle men in (14) de waarden (10), waardoor men verkrijgt:

$$t^8 + 12\,m\,t^6 + 2\,t^4 + 36\,m^2\,t^4 + 12\,m\,t^2 + 1 = 0$$

of:

$$(t^4 + 6\,m\,t^2 + 1)^2 = 0$$

Wegens (1) heeft men dus:

K raakt C^4 in de vier buigpunten aan.

Beschouwen we ten slotte de ligging der hoofdkoorden t. o. v. K. De hoofdkoorden zijn (bl. 21) de doorsneden der vlakken $x_1 + x_4 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, paarsgewijze genomen.

Stellen we nu: $x_1 + x_4 = z_1$, $x_1 - x_4 = z_2$, $x_2 + x_3 = z_3$ dan wordt K aangewezen door de vergelijking:

$$(3\,m^2 + m)^2\,z_1^2 - (3\,m^2 - m)^2\,z_2^2 + z_3^2 = 0$$

terwijl de hoofdkoorden de doorsneden zijn der vlakken:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0$$

In het vlak $z_3 = 0$ liggen twee ribben van K, aangewezen door $z_1 : z_2 = \pm k$, waar k een zekere constante voorstelt.

De in dat vlak gelegen hoofdkoorden zijn gekenmerkt door $z_1 : z_2 = 0$ en $z_1 : z_2 = \infty$, ze worden dus harmonisch gescheiden door den kegel. Daar voorts voor de vlakken $z_1 = 0$ en $z_2 = 0$ een soortgelijke beschouwing geldt, kan men zeggen:

De hoofdkoorden vormen ten opzichte van K een pooldriestraal.

Vergelijking van de hyperboloïde H.

Om de vergelijking van de eenige door C^4 gaande hyperboloïde H (bl. 2) te verkrijgen gaan we uit van de beide trisecanten, die door de punten $t = 0$ en $t = \infty$ gaan en die we gebruikten ter bepaling van het coördinatenviervlak. Ze kunnen worden voorgesteld door

$$\left.\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_4 = \alpha x_1 \end{matrix}\right\} \quad \text{en} \quad \left.\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = \beta x_1 \end{matrix}\right\}$$

waarbij α en β vooralsnog onbekend zijn. Dan zal

$$x_2 x_3 = \lambda (x_4 - \alpha x_1)(x_4 - \beta x_1)$$

de vergelijking van een quadratisch regelvlak zijn, waarop o. a. ook de genoemde trisecanten zijn gelegen.

Zal nu dit quadratisch regelvlak onze hyperboloïde H voorstellen, dan moet C^4 geheel erop liggen, dan moet dus wegens (10) aan de vergelijking:

$$(m t^4 - t^2)(t^2 - m) = \lambda [t^2 - (\alpha + \beta) t^4 + \alpha \beta t^6]$$

door alle waarden van t worden voldaan. Dus moet:

$$\lambda \alpha \beta = m, \quad \lambda (\alpha + \beta) = m^2 + 1, \quad \lambda = m,$$

waaruit men vindt: $\lambda = m$, $\alpha = m$, $\beta = \frac{1}{m}$. De vergelijking van H wordt dus

$$x_2 x_3 = (x_4 - m x_1)(m x_4 - x_1) \quad . \quad . \quad (15)$$

Trisecanten en unisecanten.

De regelscharen van H worden voorgesteld door:

$$\left.\begin{matrix} m x_4 - x_1 = \lambda x_2 \\ \lambda (x_4 - m x_1) = x_3 \end{matrix}\right\} \quad \text{en:} \quad \left.\begin{matrix} m x_4 - x_1 = \mu x_3 \\ \mu (x_4 - m x_1) = x_2 \end{matrix}\right\}$$

Ten einde uit te maken welk dezer stelsels de trisecanten en welk de unisecanten aanwijst substitueeren we de waarden (10), waardoor we bij het eerste stelsel vinden:

$$\left.\begin{aligned} t^3 + \lambda (m t^4 - t^2) - m t = 0 \\ \lambda m t^3 + (t^2 - m) - \lambda t = 0 \end{aligned}\right\}$$

Deze hebben gemeenschappelijk de wortels der vergelijking:

$$\lambda m t^3 + (t^2 - m) - \lambda t = 0$$

welke de drietallen punten op de trisecanten bepaalt. Inderdaad is deze vergelijking in wezen dezelfde als vergelijking (4), die op bl. 14 werd gevonden. Zoo stellen dus:

$$\left.\begin{aligned} m x_4 - x_1 = \lambda x_2 \\ \lambda (x_4 - m x_1) = x_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

het *stelsel der trisecanten* voor. Natuurlijk wijzen dan:

$$\left.\begin{aligned} m x_4 - x_1 = \mu x_3 \\ \mu (x_4 - m x_1) = x_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

het *stelsel der unisecanten* aan, zooals trouwens ook blijkt als men (10) in (17) substitueert. Want de vergelijkingen

$$t^3 + \mu (t^2 - m) - m t = 0$$

$$\mu m t^3 + (m t^4 - t^2) - \mu t = 0$$

hebben slechts één wortel, n.l. $t = -\mu$, gemeen; deze bepaalt het snijpunt der unisecante.

---

4. *Het raaklijnenoppervlak en eenige andere merkwaardige oppervlakken.*

Het raaklijnenoppervlak V.

Zooals bekend is vormen bij elke ruimtekromme de raaklijnen een ontwikkelbaar regelvlak, het zoogenaamde raaklijnenoppervlak, waarop de gegeven kromme keerkromme is. We willen nu het raaklijnenoppervlak V van C^4 nader onderzoeken.

Klasse van V.

Uit de op bl. 23 gevonden eigenschap dat door een punt van de ruimte zes osculatievlakken naar C^4 gaan, welke tevens raakvlakken zijn van V, volgt:

Het raaklijnenoppervlak V is van de zesde klasse.

Graad van V.

Een vlakkenbundel, welks as geen punt met C^4 gemeen heeft, snijdt C^4 in viertallen punten, die een I_4 vormen. Deze I_4 heeft zes dubbelpunten, welke de zes raaklijnen bepalen, die de as van den vlakkenbundel snijden.

Derhalve:

Een willekeurige rechte van de ruimte wordt door zes raaklijnen van C^4 gesneden, d. w. z. C^4 is van den zesden rang.

Of:

Door een willekeurige rechte van de ruimte kan men zes raakvlakken aan C^4 leggen.

Of wel:

Het raaklijnenoppervlak V is van den zesden graad.

Dubbelkromme D^6 op V.

Elke raaklijn van C^4, als as van een vlakkenbundel gekozen, bepaalt op C^4 een I_2. De twee coïncidenties dezer I_2 wijzen twee raaklijnen aan, die de gegeven raaklijn snijden. Derhalve:

Elke raaklijn van C^4 wordt door twee andere raaklijnen gesneden.

De punten waar twee niet-opeenvolgende raaklijnen van C^4 elkaar snijden vormen op V een dubbelkromme; de raaklijnen van C^4 zijn dus blijkbaar koorden van die kromme.

Den graad der dubbelkromme vindt men op eenvoudige wijze uit een willekeurige vlakke doorsnede van V. Deze is een vlakke kromme van den zesden graad en de zesde klasse met vier keerpunten. Uit de eerste formule van Plücker leidt men af dat de kromme zes dubbelpunten bezit, en dus:

Het raaklijnenoppervlak V bezit een dubbelkromme D^6 van den zesden graad; de raaklijnen van C^4 zijn koorden van D^6.

Eigenschap van de vier in de stationnaire raakvlakken gelegen raaklijnen.

De doorsnede van V met een der stationnaire raakvlakken is een kromme van den derden graad, daar de raaklijn aan C^4 daar ter plaatse voor drie raaklijnen is te tellen.

De kromme is voorts van de vierde klasse, daar het stationnaire raakvlak twee osculatievlakken vertegenwoordigt; ze heeft geen keerpunten, daar C^4 met elk harer stationnaire raakvlakken geen andere punten dan het raakpunt kan gemeen hebben. Volgens de formules van PLÜCKER heeft de kromme dan een dubbelpunt en drie buigpunten. Daar de drie buigpunten van een rationale vlakke kromme van den derden graad steeds op één rechte liggen, terwijl de buigpunten dezer vlakke doorsnede van V de punten zijn, waar de raaklijnen in de overige stationnaire raakvlakken het vlak der doorsnede doorboren, is hiermede dus een rechte gevonden, die op alle vier, in de stationnaire raakvlakken gelegen, raaklijnen gelijktijdig rust. Doch dan zijn er klaarblijkelijk vier zulke rechten, en dus:

De vier raaklijnen, aan C^4 gelegd in de raakpunten der stationnaire raakvlakken, liggen op één hyperboloïde.

Gemeenschappelijke punten van C^4 en D^6.

Uit de omstandigheid dat de raaklijn, die in een der stationnaire raakvlakken ligt, voor drie opeenvolgende raaklijnen telt, waarbij het snijpunt van de eerste en de derde een punt van D^6 is, volgt dat D^6 door C^4 in de vier planaire buigpunten wordt gesneden. Voorts zal D^6 moeten gaan door de snijpunten T der rakende trisecanten. In zulk een punt T wordt een rakende trisecante gesneden door de twee naburige raaklijnen van T, zoodat T als twee opeenvolgende punten van D^6 in rekening is te brengen. T is dus een keerpunt op D^6, derhalve:

D^6 snijdt C^4 in de vier planaire buigpunten en in de vier snijpunten der rakende trisecanten; deze laatste punten zijn keerpunten op D^6.

Projecteert men D^6 uit een van hare keerpunten T dan verkrijgt men een kegel van den vierden graad, waarop de lijnen, die T met de overige keerpunten verbinden, keerribben zijn. Nu kan echter een kegel van den vierden graad met drie keerribben geen veelvoudige ribben meer hebben, en dus:

D^6 bezit, behalve de vier genoemde keerpunten, geen veelvoudige punten.

Het oppervlak W, omhuld door de dubbelraakvlakken.

Elke raaklijn van C^4 wordt door twee andere raaklijnen gesneden (bl. 27); een vlak dat twee snijdende raaklijnen bevat is dubbelraakvlak van C^4. We onderzoeken nu het ontwikkelbaar oppervlak W, dat omhuld wordt door de dubbelraakvlakken van C^4.

Klasse van W.

Om vooreerst de klasse van W te bepalen denken we ons door een willekeurig punt O van de ruimte een vlak gelegd, dat C^4 in P raakt; de snijpunten noemen we Q en R. Indien Q en R samenvallen is het vlak een dubbelraakvlak. Nu bepaalt een willekeurig punt Q vier raakvlakken (aangewezen door de vier coïncidenties van de I_3 welke de vlakkenbundel met $O\,Q$ als as op C^4 insnijdt), dus ook vier punten R; evenzoo levert elk punt R vier punten Q. De acht coïncidenties dezer (4, 4) liggen twee aan twee in de vier dubbelraakvlakken, welke men door O aan C^4 kan leggen. Of wel:

Het oppervlak W is van de vierde klasse.

C^4 is dubbelkromme op W.

Daar elke raaklijn van C^4 door twee andere wordt gesneden gaan door elke raaklijn twee dubbelraakvlakken. Als de raaklijn in A door die der punten B_1 en B_2 wordt gesneden zijn dus $A\,B_1$ en $A\,B_2$ beschrijvende lijnen van het oppervlak. Door elk punt van C^4 gaan dus twee beschrijvende lijnen van W, derhalve:

C^4 is dubbelkromme op het oppervlak W.

Graad van W.

De raakpunten A en B van dubbelraakvlakken vormen op C^4, zooals we zagen, een involutorische verwantschap (2, 2).

Anderzijds bepalen de vlakken van een vlakkenbundel, die een willekeurige rechte van de ruimte tot as heeft, een I_4 op die kromme. De zes gemeenschappelijke paren van deze beide verwantschappen wijzen de zes beschrijvende lijnen van W aan die de as van den bundel snijden, en dus:

Het oppervlak W is van den zesden graad.

Graad van de keerkromme van W.

Daar W een ontwikkelbaar regelvlak is moet het een keerkromme bezitten. Om den graad daarvan te bepalen beschouwen we een willekeurige vlakke doorsnede; deze is een vlakke kromme van denzesden graad en de vierde klasse met vier dubbelpunten. Volgens de eerste formule van PLÜCKER heeft ze dan zes keerpunten, derhalve:

De keerkromme van W is van den zesden graad.

HET REGELVLAK F DER KOORDEN, DIE EEN VASTE KOORDE SNIJDEN.

Wanneer men C^4 snijdt met een vlakkenbundel, die een koorde tot as heeft, zullen de vlakken op C^4 puntenparen bepalen, welke klaarblijkelijk een I_2 vormen.

Omgekeerd kan ook iedere I_2 op C^4 ingesneden worden door de vlakken, die door een koorde gaan. Stel n.l. dat de I_2 bepaald is door de paren A_1, A_2 en B_1, B_2. Vlakken door de koorde $A_1 A_2$ snijden een I_2 in, vlakken door $B_1 B_2$ een andere I_2. Deze beide involuties hebben een paar C_1, C_2 gemeen, dat dus zoowel met A_1, A_2 als met B_1, B_2 in één vlak ligt. De gegeven I_2 wordt dus blijkbaar ingesneden door een vlakkenbundel met as $C_1 C_2$.

Het laatste resultaat is ook aldus weer te geven:

Elk tweetal koorden wordt door een enkele derde koorde gesneden.

Snijden de beide koorden elkaar (buiten C^4) dan gaat de derde koorde door hun snijpunt; ware dit n.l. niet zoo dan zou het vlak der drie koorden zes punten van C^4 bevatten.

Door elk punt van de ruimte gaan drie koorden van C^4.

Wanneer men C^4 uit een willekeurig punt O van de ruimte projecteert, verkrijgt men een kegel van den vierden graad en de zesde klasse, want door een rechte, die O bevat, gaan zes raakvlakken aan C^4 en dus aan den kegel. Deze kegel heeft voorts zes stationnaire raakvlakken, n.l. de zes osculatievlakken die men uit O aan C^4 kan leggen (bl. 23). Volgens de formules van PLÜCKER zijn er dan drie dubbelribben, en daar C^4 in het algemeen geen dubbelpunt bezit, heeft men:

Door elk punt van de ruimte gaan drie koorden van C^4.

Regelvlak der koorden, die een vaste koorde snijden.

Om den graad van het regelvlak F te vinden, dat gevormd wordt door de koorden van C^4, die op een vaste koorde k rusten, merken we vooreerst op, dat die koorde dubbelrechte op het oppervlak moet zijn, daar uit elk harer punten nog twee koorden zijn te trekken. En daar elk vlak door k nog twee punten van C^4, dus één koorde bevat, heeft men:

De koorden, die een vaste koorde snijden, vormen een oppervlak F van den derden graad, waarop de vaste koorde dubbelrechte is.

Een bijzonder geval verkrijgt men als men voor de vaste koorde k de raakkoorde van een dubbelraakvlak kiest. Dan toch valt een der beschrijvende lijnen met de dubbelrechte samen, waardoor een zoogenaamd regelvlak van Cayley ontstaat.

Enkelvoudige richtlijn van F.

Alle beschrijvende lijnen van F snijden ook de enkelvoudige richtlijn e van het oppervlak. Elk vlak door e bevat twee koorden, die in *1* en *2*, *3* en *4* op C^4 rusten; zij bepalen twee punten op e. Beschouwt men alle vlakken door e dan ontstaat aldus op deze lijn een I_2, die twee coïncidenties heeft. Voor elk dezer punten vallen de twee koorden samen tot een torsale ribbe van F; het vlak door zulk een ribbe en e is een torsaal raakvlak. Het punt *1* heeft zich nu vereenigd met *3*, *2* met *4*; de lijnen *1*, *3* en *2*, *4* zijn raaklijnen geworden en het torsale raakvlak is dus een dubbelraakvlak van C^4. Noemt men kortheidshalve de snijlijn van twee dubbelraakvlakken een *as* van C^4, dan heeft men dus:

De enkelvoudige richtlijn van elk oppervlak F is een as van C^4.

Omgekeerd kan men elke as van C^4 als enkelvoudige richtlijn van een oppervlak F beschouwen. Want de beide koorden, die in de door die as gaande dubbelraakvlakken zijn gelegen, worden slechts door één andere koorde gesneden, welke men als dubbele richtlijn van een oppervlak F kan kiezen. Derhalve:

Elke as van C^4 is te beschouwen als enkelvoudige richtlijn van een oppervlak F.

Betrekking tusschen de koorden en de assen van C^4.

Uit het voorafgaande leidt men een betrekking af tusschen de koorden en de assen van C^4, die elk ∞^2 in aantal zijn. Immers elke koorde k geeft aanleiding tot één oppervlak F; de eenige enkelvoudige richtlijn van F is een as van C^4. Omgekeerd kan elke as van C^4 optreden als enkelvoudige richtlijn van een oppervlak F; de dubbele richtlijn van dit oppervlak is een koorde van C^4. En dus:

Er bestaat een betrekking tusschen de stralencongruentie der koorden en de stralencongruentie der assen van C^4, met dien verstande dat elke koorde ééne as en elke as ééne koorde bepaalt.

Het regelvlak der osculatiekoorden.

We bespreken ten slotte het regelvlak, gevormd door de osculatiekoorden, dat zijn de koorden, die in de osculatievlakken steunpunt en restpunt verbinden. Nu bepaalt een steunpunt X één restpunt Y; een restpunt Y bepaalt echter drie steunpunten X (bl. 12). Tusschen de punten X en Y bestaat dus een verwantschap (1, 3). Met de I_4, welke een willekeurige vlakkenbundel op C^4 insnijdt, heeft deze verwantschap twaalf paren gemeen. Elke lijn van de ruimte wordt dus door twaalf osculatiekoorden gesneden en dus:

De osculatiekoorden vormen een oppervlak van den twaalfden graad.

Daar elk punt van C^4 als osculatiepunt en ook als restpunt is op te vatten gaan door elk punt van C^4 vier beschrijvende lijnen van het oppervlak. En daar voorts blijkbaar elk der hoofdkoorden tweemaal als osculatiekoorde zal optreden heeft men:

Op het oppervlak van den twaalfden graad der osculatiekoorden is C^4 een viervoudige kromme, terwijl de hoofdkoorden dubbellijnen zijn.

HOOFDSTUK II.

Bijzondere krommen van den vierden graad en de tweede soort.

1. *De kromme C^4 met oneindig vele drietallen in één punt samenkomende raaklijnen.*

Een vraagstuk betreffende de algemeene C^4.

Ter inleiding bespreken we het volgende vraagstuk over de algemeene C^4. Aangezien door elk punt van de ruimte drie koorden gaan (bl. 30) zal ook door het snijpunt van twee raaklijnen nog één koorde der C^4 mogelijk zijn, welke C^4 in de punten T_1 en T_2 moge snijden. Indien men aldus met alle mogelijke paren snijdende raaklijnen handelt, vraagt men naar de betrekking, die tusschen T_1 en T_2 bestaat.

Geven we de raakpunten der raaklijnen door de parameters u_1 en u_2 aan, de steunpunten T_1 en T_2 der koorde door t_1 en t_2, dan volgt uit (2):

$$u_1^2\, u_2^2 + 2\, m\, u_1\, u_2 + m\,(u_1 + u_2)^2 + 1 = 0$$

terwijl t_1 en t_2 met elke der waarden u zijn verbonden door:

$$(t_1\, t_2 + m)\, u^2 + 2\, m\,(t_1 + t_2)\, u + (m\, t_1\, t_2 + 1) = 0$$

Hieruit volgt dat:

$$u_1 + u_2 = -\frac{2\, m\,(t_1 + t_2)}{t_1\, t_2 + m}, \qquad u_1\, u_2 = \frac{m\, t_1\, t_2 + 1}{t_1\, t_2 + m}$$

Deze waarden, gesubstitueerd in de eerste vergelijking, doen haar overgaan in de betrekking

$$(m\, t_1\, t_2 + 1)^2 + 4\, m^3\,(t_1 + t_2)^2 + 2\, m\,(t_1\, t_2 + m) \times$$
$$\times\,(m\, t_1\, t_2 + 1) + (t_1\, t_2 + m)^2 = 0$$

welke aangeeft dat de punten T_1 en T_2 zijn verbonden door een involutorische verwantschap (2,2).

Een coïncidentie dezer (2,2) zal beteekenen dat door het snijpunt van twee raaklijnen nog een derde raaklijn gaat. Stelt men in de verwantschapsvergelijking $t_1 = t_2 = t$ dan vindt men na herleiding:

$$(3\,m^2 + 1)\,(t^4 + 6\,m\,t^2 + 1) = 0$$

Daar de eerste factor in het algemeen niet nul zal zijn mag men er door deelen; men vindt dus, volgens (1), dat de buigpunten de gezochte coïncidenties zijn.

Een bijzondere C^4.

Geheel anders wordt de zaak echter als $3\,m^2 + 1 = 0$ is. Dan toch wordt aan de laatste vergelijking voldaan door iedere waarde van t, en dus:

Er bestaat een bijzondere C^4, welke oneindig vele drietallen in één punt samenkomende raaklijnen bezit.

Uit vergelijking (1) volgt voor de parameters t_1, t_2, t_3, t_4 der buigpunten:

$$t_1\,t_2 + t_1\,t_3 + t_1\,t_4 + t_2\,t_3 + t_2\,t_4 + t_3\,t_4 = 6\,m,$$
$$t_1\,t_2\,t_3\,t_4 = 1$$

Stelt men deze waarden in (2) dan vindt men dat $3\,m^2 + 1 = 0$ is, waaraan juist in het zooeven beschouwde geval wordt voldaan, zoodat de vier buigpunten complanair zijn. Derhalve:

Indien C^4 oneindig vele drietallen in één punt samenkomende raaklijnen bezit liggen hare vier buigpunten in één vlak.

En omgekeerd:

Indien de vier buigpunten van C^4 in één vlak liggen bezit ze oneindig vele drietallen in één punt samenkomende raaklijnen.

Parametervoorstelling dezer C^4.

Daar in de tot dusver gebruikte notatie m een imaginaire waarde zou verkrijgen verdient het de voorkeur, in navolging van Bertini, C^4 voor te stellen door:

$$\left.\begin{aligned} \rho\,x_1 &= u^3 \\ \rho\,x_2 &= u^4 + 3\,u^2 \\ \rho\,x_3 &= u^2 - 1 \\ \rho\,x_4 &= u \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (18)$$

Voorwaarde voor complanaire ligging.

Snijdt men C^4 met het vlak:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

dan worden haar snijpunten bepaald door:

$$\lambda_1 u^3 + \lambda_2 (u^4 + 3 u^2) + \lambda_3 (u^2 - 1) + \lambda_4 u = 0$$

waaruit o. a. volgt:

$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4 = \frac{3 \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_2},$$

$$u_1 u_2 u_3 u_4 = \frac{-\lambda_3}{\lambda_2}.$$

zoodat:

$$u_1 u_2 u_3 u_4 + (u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4) - 3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

de voorwaarde voor complanaire ligging van vier punten van C^4 voorstelt.

Buigpunten.

Stelt men in (19) $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = w$ dan vindt men dus voor de parameters van de raakpunten der stationnaire raakvlakken (planaire buigpunten):

$$w^4 + 6 w^2 - 3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

De waarden $\sum w_1 w_2 = 6$, $w_1 w_2 w_3 w_4 = -3$, die hieruit volgen, voldoen aan (19); de buigpunten liggen dus in één vlak. Hiermee is aangetoond dat (18) inderdaad de te onderzoeken kromme voorstelt.

Merkt men op dat $x_2 + 3 x_3 = u^4 + 6 u^2 - 3$, dan blijkt dat het vlak der buigpunten wordt aangewezen door:

$$x_2 + 3 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

I_3 gevormd door de steunpunten der trisecanten.

Op geheel dezelfde wijze als op bl. 13 kan men afleiden dat de I_3, gevormd door de steunpunten der trisecanten, wordt voorgesteld door de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{r} u_1 u_2 u_3 + u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = 3 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (22)$$

en dat de parameters der punten, die met het door u_3 aangewezen punt op dezelfde trisecante liggen, worden bepaald door:

$$(u_3^2 - 1) u^2 - 4 u_3 u - (u_3^2 + 3) = 0$$

Dubbele os-

Uit (19) volgt voor de betrekking tusschen de paraculatiekoorden. Hoofdpunt.

meters u en v van steunpunt en restpunt van een osculatievlak:

$$u^3 v + 3 u^2 + 3 u v - 3 = 0$$

Zal (u, v) dubbele osculatiekoorde zijn, dan moet tevens voldaan zijn aan

$$v^3 u + 3 v^2 + 3 v u - 3 = 0$$

Door aftrekking vindt men:

$$(u^2 - v^2)(uv + 3) = 0$$

Hieraan wordt voldaan 1°. door $u = v$, waardoor de buigpunten worden bepaald, 2°. door $u = -v$, waaruit volgt: $u^4 + 3 = 0$, 3° door $u v = -3$, welke de waarden $u = 0$, $u = \infty$ levert. Wegens (18) wordt de hoofdkoorde $(0, \infty)$ voorgesteld door $x_1 = 0$, $x_4 = 0$. De andere twee, bepaald door $u^4 + 3 = 0$, liggen klaarblijkelijk in het vlak $x_2 = 3 x_3$, zoodat het hoofdpunt is aangewezen door

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 3 x_3 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Ligging van het coördinatenviervlak.

Na het voorafgaande is het aanstonds duidelijk dat het coördinatenviervlak hier geheel dezelfde ligging heeft als in het algemeen geval (bl. 20). Ook hier zijn twee hoekpunten de steunpunten der hoofdkoorde $(0, \infty)$, en de vlakken $x_1 = 0$ en $x_4 = 0$ de door die hoofdkoorde gaande osculatievlakken. Voorts zijn volgens een zooeven afgeleide formule de steunpunten der trisecante uit $u = 0$ bepaald door $u^2 + 3 = 0$, en die der trisecante uit $u = \infty$ door $u^2 - 1 = 0$. Beschouwt men in verband daarmee de parametervoorstelling (18) dan blijkt dat $x_2 = 0$ het raakvlak is in $u = 0$, dat gaat door de trisecante daar ter plaatse, en dat $x_3 = 0$ de overeenkomstige ligging heeft in het punt $u = \infty$.

Vergelijking van de hyperboloïde H.

Uit het voorgaande volgt dat de vergelijking van de hyperboloïde H geheel als op bl. 25 kan worden afgeleid. Stelt men aanvankelijk:

$$x_2 x_3 = \lambda (x_4 - \alpha x_1)(x_4 - \beta x_1)$$

dan blijkt dat men $\lambda = -3$, $\alpha = -{}^1/_3$, $\beta = 1$ moet kiezen, zoodat de vergelijking van H wordt:

$$x_2 x_3 = (x_1 + 3 x_4)(x_1 - x_4) \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Eigenschap van het hoofdpunt en het vlak der buigpunten.

Bepaalt men het poolvlak van het hoofdpunt t. o. v. H dan vindt men uit (23) en (24):

$$x_2 + 3 x_3 = 0$$

welke vergelijking volgens (21) het vlak der buigpunten voorstelt. Derhalve:

Het vlak der buigpunten is het poolvlak van het hoofdpunt ten opzichte van de hyperboloïde H.

I_3 der punten, wier raaklijnen in één punt samenkomen.

Stelt men in (19) $u_1 = u_2 = u$ en $u_3 = u_4 = v$ dan heeft men:

$$u^2 v^2 + u^2 + 4 u v + v^2 - 3 = 0$$

Bij gegeven u levert de vergelijking de parameterwaarden v der beide punten, wier raaklijnen de raaklijn van u snijden (hier, zooals we weten, in hetzelfde punt). Noemt men de wortels v en w dan heeft men:

$$v + w = -\frac{4u}{u^2+1}, \qquad v w = \frac{u^2-3}{u^2+1}$$

zoodat:

$$u + v + w = \frac{u^3 - 3u}{u^2+1}, \qquad u v w = \frac{u^3 - 3u}{u^2+1},$$

$$u v + u w + v w = -\frac{4u^2}{u^2+1} + \frac{u^2-3}{u^2+1} = -3$$

Dus stellen:

$$\left.\begin{aligned} u + v + w &= u v w \\ u v + u w + v w &= -3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

de I_3 van de raakpunten der in één punt samenkomende raaklijnen voor.

I_3 der punten, wier osculatievlakken door één punt van C^4 gaan.

De betrekking tusschen steunpunt (u) en snijpunt (t) van een osculatievlak wordt aangewezen door:

$$u^3 t + 3 u^2 + 3 u t - 3 = 0$$

Zijn u, v en w de wortels, dan is:

$$u + v + w = -\frac{3}{t}, \quad u v + u w + v w = 3, \quad u v w = \frac{3}{t}$$

zoodat:

$$\left.\begin{aligned} u + v + w + u v w &= 0 \\ u v + u w + v w \quad &= 3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

de I_3 voorstellen der punten, wier osculatievlakken door één punt van C^4 gaan.

Vergelijkt men nu (26) met (22) dan blijken deze involuties identiek te zijn, hetgeen ons dus tot de volgende eigenschappen voert:

De drie osculatievlakken, in de steunpunten van een trisecante aan C^4 gelegd, gaan door één punt van C^4, en omgekeerd:

Als men uit een punt van C^4 de drie mogelijke osculatievlakken aan C^4 legt dan liggen de steunpunten dier vlakken op één rechte lijn.

Meetkundige plaats der punten, waarin de drietallen raaklijnen samenkomen.

Bij de algemeene kromme C^4 vonden we voor de meetkundige plaats der snijpunten van twee niet-opeenvolgende raaklijnen een kromme D^6, de dubbelkromme van het raaklijnenoppervlak (bl. 27). In het hier beschouwde geval vertegenwoordigt elk snijpunt van raaklijnen drie snijpunten van het algemeene geval; de kromme D^6 gaat in verband hiermee over in een driemaal te te tellen kegelsnede. Daar de buigpunten ook als snijpunten van drietallen raaklijnen in rekening zijn te brengen (bl. 34) liggen ze ook op die kegelsnede, en dus:

De punten, waar de drietallen raaklijnen samenkomen, hebben tot meetkundige plaats een driemaal te tellen kegelsnede, die door de vier buigpunten gaat.

Uit (21) volgt nog dat die kegelsnede gelegen is in het vlak $x_2 + 3\,x_3 = 0$.

Oppervlak, omhuld door de vlakken, die de raakpuntentripels verbinden.

We stellen ons voor dat het snijpunt A van een raaklijnentripel zich over de kegelsnede beweegt en vragen ons af welk oppervlak omhuld wordt door het verbindingsvlak α der raakpunten. Aangezien de raaklijnen van C^4 tevens de hyperboloïde H aanraken, zijn A en α pool en poolvlak ten opzichte van H. Daar voorts het vlak der buigpunten poolvlak is van het hoofdpunt ten opzichte van H, en A voortdurend in eerstgenoemd vlak blijft, zullen de vlakken α alle door het hoofdpunt gaan, dus een kegel omhullen, met het hoofdpunt als top. Ten slotte is duidelijk dat, daar A een kegelsnede doorloopt, α een kegel van den tweeden graad moet omhullen. Derhalve:

De vlakken, die de raakpunten der raaklijnentripels verbinden, omhullen een kegel van den tweeden graad, die het hoofdpunt tot top heeft.

---

2. *De kromme C^4 met twee stationnaire raaklijnen.*

Stationnaire raaklijnen.

Bij de behandeling der algemeene C^4 werd (bl. 13) voor de I_3 van de steunpunten der trisecanten gevonden:

$$\left.\begin{array}{r} t_1 t_2 t_3 + m(t_1 + t_2 + t_3) = 0 \\ m(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

We gaan nu onderstellen dat deze I_3 een drievoudig element bezit, waarvoor $t_1 = t_2 = t_3 = u$, zoodat dan aan:

$$\left.\begin{array}{r} u^3 + 3mu = 0 \\ 3mu^2 + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

gelijktijdig moet worden voldaan. Nu is dit blijkbaar slechts mogelijk als $3m = \frac{1}{3m}$, d. w. z. als $9m^2 - 1 = 0$ is. Wanneer m aan deze betrekking voldoet zullen er dus twee drievoudige elementen zijn, waarbij nog de beide gevallen zijn te onderscheiden: 1°. $3m = +1$, in welk geval de drievoudige elementen worden aangewezen door $u^2 = -1$, en 2°. $3m = -1$, waarbij de drievoudige elementen door $u^2 = +1$ worden bepaald.

Meetkundig beteekent dit, dat er twee trisecanten zijn, waarop de drie snijpunten met de kromme in één punt zijn vereenigd, of wel dat C^4 twee *stationnaire raaklijnen* bezit. De raakpunten zelf zullen als *lineaire buigpunten* worden aangeduid.

Eigenschap der C^4 met twee stationnaire raaklijnen.

Klaarblijkelijk zal nu het bezit van de stationnaire raaklijnen steeds samengaan met een andere eigenschap der C^4. Want we vonden (bl. 17 noot) dat C^4 oneindig vele dubbele osculatiekoorden bezit indien $9m^2 - 1 = 0$, hetgeen juist de voorwaarde is, die we zooeven vonden voor het aanwezig zijn van lineaire buigpunten. En dus:

Indien C^4 twee stationnaire raaklijnen bezit, heeft ze oneindig vele dubbele osculatiekoorden.

En omgekeerd:

Indien C^4 oneindig vele dubbele osculatiekoorden bezit, heeft ze twee stationnaire raaklijnen.

De planaire buigpunten vallen met de lineaire samen.

Van de beide bovengenoemde gevallen $3m = \pm 1$ beschouwen we nader het geval $3m = -1$, waarbij $u^2 = +1$, zoodat de raakpunten der stationnaire raaklijnen worden bepaald door:

$$u_1 = +1 \quad \text{en} \quad u_2 = -1 \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

en deze dus reëel zijn. De planaire buigpunten worden gevonden uit (1), welke in dit geval de gedaante aanneemt:

$$u^4 - 2u^2 + 1 = 0$$

of:

$$(u^2 - 1)^2 = 0$$

Dus:

De vier planaire buigpunten vallen twee aan twee met de lineaire buigpunten samen.

Betrekking tusschen de parameters der steunpunten van dubbele osculatiekoorden.

Stelt men in de voorwaarde (2) voor complanaire ligging, welke thans

$$u_1 u_2 u_3 u_4 - {}^1\!/_3 (u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + \\ + u_3 u_4) + 1 = 0$$

is, $u_1 = u_2 = u_3 = u$, $u_4 = v$, dan vindt men:

$$u^3 v - u^2 - u v + 1 = 0$$

of:

$$(u^2 - 1)(u v - 1) = 0$$

of:

$$u v = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

waardoor dus het verband wordt aangewezen tusschen de parameters van steunpunt en restpunt van een osculatievlak. Daar u en v op dezelfde wijze in (28) voorkomen blijkt hieruit opnieuw het bestaan van oneindig vele dubbele osculatiekoorden, waarvan de steunpunten de I_2 vormen, die door (28) wordt voorgesteld.

Regelvlak der dubbele osculatiekoorden.

De dubbele osculatiekoorden vormen een regelvlak, dat we thans nader gaan onderzoeken. Noemen we de lineaire buigpunten (27) U_1 en U_2, de steunpunten eener willekeurige osculatiekoorde U en V, dan leidt men gemakkelijk uit de voorwaarde voor complanaire ligging

$$u_1 u_2 u_3 u_4 - {}^1/_3 (u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + \\ + u_3 u_4) + 1 = 0,$$

in verband met (27) en (28) af, dat de vier punten U_1, U_2, U en V in één vlak liggen, zoodat de koorde $U_1 U_2$ door elke der dubbele osculatiekoorden wordt gesneden. Ook vindt men uit de voorwaarde voor complanaire ligging dat twee dubbele osculatiekoorden $U\,V$ en $U'\,V'$ elkaar zullen snijden als voldaan wordt aan

$$u\,v\,u'\,v' - {}^1/_3 [u\,v + u'\,v' + (u+v)(u'+v')] + 1 = 0$$

of, wegens (28), indien men heeft

$$(u+v)(u'+v') = 4;$$

hieruit blijkt dat elke dubbele osculatiekoorde door één, en slechts één, andere zoodanige koorde wordt gesneden.

Uit de beide laatstgevonden resultaten volgt dat telkens twee dubbele osculatiekoorden $U\,V$ en $U'\,V'$ en de koorde $U_1\,U_2$ door één punt gaan (ze kunnen n.l. niet in één vlak liggen, daar zulk een vlak zes punten met C^4 gemeen zou hebben); dus:

De dubbele osculatiekoorden snijden elkaar twee aan twee op de lijn die de lineaire buigpunten verbindt.

Elk vlak door de lijn $U_1\,U_2$ bevat nog slechts één dubbele osculatiekoorde, en daar $U_1\,U_2$ zelf dubbelrechte is van het gezochte regelvlak heeft men blijkbaar:

De dubbele osculatiekoorden vormen een regelvlak van den derden graad, waarop de verbindingslijn der lineaire buigpunten dubbelrechte is.

Om de enkelvoudige richtlijn van dit regelvlak te bepalen zoeken we de snijlijn van twee vlakken, die elk twee snijdende dubbele osculatiekoorden bevatten.

Het eenvoudigst is het de vlakken te nemen, waarin de koorden $U\,V$ en $U'\,V'$ samenvallen. Wegens de straks gevonden betrekking $(u+v)(u'+v') = 4$ zullen deze koorden samenvallen voor $u + v = \pm 2$. In verband met (28) kan hieraan slechts voldaan worden door de lineaire buigpunten (27).

Men heeft dus:

De enkelvoudige richtlijn van het regelvlak der dubbele osculatiekoorden is de snijlijn der beide stationnaire raakvlakken.

Parameter-voorstelling volgens CREMONA.

Voor de kromme met twee stationnaire raaklijnen heeft CREMONA [1]) een zeer eenvoudige parametervoorstelling gegeven. Hij kiest het coördinatenviervlak als volgt: $x_1 = 0$ stelt het stationnaire raakvlak in U_1 voor, $x_4 = 0$ dat in U_2; $x_2 = 0$ is het vlak dat door de stationnaire raaklijn in U_1 en het punt U_2 gaat, terwijl het vlak $x_3 = 0$ door de raaklijn van U_2 en het punt U_1 gaat. Indien men dan aan de punten U_1 en U_2 de parameterwaarden 0 en ∞ toekent, verkrijgt men klaarblijkelijk de volgende parametervoorstelling:

$$\left.\begin{aligned} \rho\, x_1 &= u^4 \\ \rho\, x_2 &= u^3 \\ \rho\, x_3 &= u \\ \rho\, x_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Voorwaarde voor complanaire ligging.

Snijdt men C^4 met het vlak:

$$\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \lambda_3\, x_3 + \lambda_4\, x_4 = 0,$$

dan worden de snijpunten bepaald door

$$\lambda_1\, u^4 + \lambda_2\, u^3 + \lambda_3\, u + \lambda_4 = 0,$$

waaruit men dadelijk afleidt dat:

$$u_1\, u_2 + u_1\, u_3 + u_1\, u_4 + u_2\, u_3 + u_2\, u_4 + u_3\, u_4 = 0 \quad (30)$$

de voorwaarde voor complanaire ligging van vier punten van C^4 voorstelt.

Steunpunten van dubbele osculatie-koorden.

Voor $u_1 = u_2 = u_3 = u$, $u_4 = v$ geeft (30):

$$u + v = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

waardoor dus het verband wordt aangewezen tusschen de parameters u en v van steunpunt en restpunt van een osculatievlak. De betrekking is, zooals te verwachten

---

[1]) Sopra una certa curva gobba di quart'ordine. (Rend. Ist. Lomb. II, 1, 1868).

was, symmetrisch, daar alle osculatiekoorden dubbele osculatiekoorden zijn.

Vergelijking van een vlak, bepaald door vier complanaire punten.

De snijpunten van C^4 met het vlak:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

worden gevonden uit de vergelijking:

$$\lambda_1 u^4 + \lambda_2 u^3 + \lambda_3 u + \lambda_4 = 0.$$

Men heeft dus

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

$$u_1 u_2 u_3 u_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_1}$$

Het vlak der complanaire groep u_1, u_2, u_3, u_4 heeft dus tot vergelijking:

$$x_1 - (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) x_2 - (u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + \\ + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4) x_3 + u_1 u_2 u_3 u_4 x_4 = 0 \quad (32)$$

Vergelijking van een osculatievlak.

Stelt men $u_1 = u_2 = u_3 = u$, $u_4 = v$ en houdt men rekening met (31) dan gaat (32) over in:

$$x_1 - 2 u x_2 + 2 u^3 x_3 - u^4 x_4 = 0 \quad . \quad . \quad (33)$$

waardoor dus het osculatievlak in (u) wordt aangewezen.

Klasse van C^4.

Bij gegeven waarden van x_1, x_2, x_3 en x_4 stelt (33) een vierdemachtsvergelijking in u voor; door een willekeurig punt van de ruimte gaan dus vier osculatievlakken, of wel:

De kromme C^4 met twee stationnaire raaklijnen is van de vierde klasse.

Eigenschappen betreffende de uit een willekeurig punt aan C^4 te leggen osculatievlakken.

Merkt men op dat uit (33), opgevat als vierdemachtsvergelijking in u, volgt

$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4 = 0$$

dan blijkt, wegens (30), dat de steunpunten der vier osculatievlakken, die men door een willekeurig punt der ruimte aan C^4 kan leggen, complanair zijn. Derhalve:

Legt men uit een willekeurig punt van de ruimte de vier mogelijke osculatievlakken aan C^4, dan liggen de vier steunpunten dezer vlakken in één vlak.

En omgekeerd:

De osculatievlakken, in vier complanaire punten van C^4 aan de kromme gelegd, gaan door één punt.

Er is echter nog een bijzonderheid op te merken. Een willekeurig vlak:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

snijdt, zooals we weten, C^4 in vier punten, bepaald door:

$$\lambda_1 u^4 + \lambda_2 u^3 + \lambda_3 u + \lambda_4 = 0$$

Denkt men zich nu in elk dezer punten het osculatievlak aangebracht dan snijden deze osculatievlakken elkaar in één punt Y, welks coördinaten men bepaalt door de laatste vergelijking te identificeeren met (33), aldus geschreven:

$$- y_4 u^4 + 2 y_3 u^3 - 2 y_2 u + y_1 = 0;$$

men heeft dan

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = - y_4 : 2 y_3 : - 2 y_2 : y_1$$

Nu blijkt echter dat $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4$ identiek nul is, zoodat Y in het gegeven vlak ligt. Alles samenvattend kan men dus zeggen:

Legt men door een willekeurig punt van de ruimte de vier mogelijke osculatievlakken aan C^4 dan liggen de vier steunpunten dezer vlakken met het gegeven punt in één vlak.

En omgekeerd:

De osculatievlakken, in vier complanaire punten van C^4 aan de kromme gelegd, gaan door één punt, dat in het vlak der vier punten ligt.

Vergelijking van de hyperboloïde H.

Door combinatie leidt men uit (29) nog af:

$$x_1 x_4 = x_2 x_3 \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Daar dit de vergelijking van een quadratisch regelvlak is, waarop C^4 geheel is gelegen, stelt (34) blijkbaar de eenige door C^4 gaande hyperboloïde H voor.

Vergelijking van het regelvlak der dubbele osculatiekoorden.

We zullen, om de vergelijking van het regelvlak der dubbele osculatiekoorden te zoeken, zulk een koorde $U V$ voorstellen als snijlijn van het vlak, dat door $U V$ en $U_1 U_2$ gaat (bl. 41) met het vlak, dat door $U V$ en de haar snijdende koorde $U' V'$ kan worden gelegd. Stelt men dus in (32) $u_1 = 0$, $u_2 = \infty$, $u_3 = v$ en houdt rekening met (31) dan wordt het eerste dezer vlakken:

$$x_2 = u^2 x_3$$

Voor het vlak, dat door de snijdende dubbele osculatiekoorden UV en $U'V'$ gaat, geeft (32), eveneens in verband met (31):

$$x_1 = -u^2 u'^2 x_4$$

waarbij echter de snijding dezer koorden moet worden uitgedrukt door de betrekking (30), welke geeft:

$$u^2 + u'^2 = 0$$

Elimineert men u en u' uit het laatste drietal vergelijkingen dan verkrijgt men:

$$x_1 x_3^2 - x_2^2 x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

welke vergelijking dus het regelvlak der dubbele osculatiekoorden voorstelt.

---

3. *De kromme C^4 met een dubbelpunt.*

Voorwaarde voor complanaire ligging van vier punten op C^4.

We zagen op bl. 11 dat de voorwaarde voor complanaire ligging van vier punten op C^4 in de meest algemeene parametervoorstelling aldus kan worden geschreven:

$$A_0 u_1 u_2 u_3 u_4 + A_1 (u_1 u_2 u_3 + \ldots + u_2 u_3 u_4) + \\ + A_2 (u_1 u_2 + \ldots + u_3 u_4) + A_3 (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + \\ + A_4 = 0$$

We gaan nu onderstellen dat C^4 een dubbelpunt bezit en kennen aan de op elkaar vallende punten in het dubbelpunt de parameterwaarden $u = 0$ en $u = \infty$ toe. Deelt men de bovenstaande vergelijking door u_4 en stelt men daarna $u_3 = 0$, $u_4 = \infty$, dan heeft men:

$$A_1 u_1 u_2 + A_2 (u_1 + u_2) + A_3 = 0$$

Daar nu hieraan door iedere waarde van u_1 en u_2 moet worden voldaan — immers elk tweetal punten ligt met het dubbelpunt in één vlak — moeten de coëfficienten A_1, A_2 en A_3 nul zijn, zoodat de voorwaarde voor complanaire ligging deze eenvoudige gedaante aanneemt:

$$u_1 u_2 u_3 u_4 = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Stationnaire raakvlakken. Voor $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u$ geeft (36):

$$u^4 = k \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

De wortels dezer vergelijking bepalen de raakpunten van vier stationnaire raakvlakken. De kromme C^4 met dubbelpunt bezit dus, evenals de algemeene C^4, vier planaire buigpunten.

Eigenschappen der osculatievlakken. Stelt men in (36) $u_1 = u_2 = u_3 = u$, $u_4 = v$ dan heeft men:

$$u^3 v = k \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Bij een gegeven waarde van v vindt men drie waarden voor u, dus:

Door elk punt der C^4 met dubbelpunt gaan drie vlakken, die haar elders osculeeren.

De waarden u, die bij een gegeven waarde van v behooren, zijn volgens (38):

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{k}{v}}, \quad u_2 = \alpha \sqrt[3]{\frac{k}{v}}, \quad u_3 = \alpha^2 \sqrt[3]{\frac{k}{v}},$$

waarbij $\alpha = {}^1/_2 (-1 \pm i\sqrt{3})$ is. Merkt men op dat $u_1 u_2 u_3 v = k$, dan blijkt dus, evenals bij de algemeene C^4:

Legt men door een punt der kromme C^4 met dubbelpunt de drie mogelijke osculatievlakken, dan liggen de steunpunten met het eerstgenoemde punt in één vlak.

Wanneer men in vier complanaire punten van de kromme de osculatievlakken aanbrengt gelden volgens (38) en (36) de betrekkingen:

$$u_1^3 v_1 = k, \quad u_2^3 v_2 = k, \quad u_3^3 v_3 = k, \quad u_4^3 v_4 = k,$$

$$u_1 u_2 u_3 u_4 = k$$

waaruit men afleidt

$$v_1 v_2 v_3 v_4 = k$$

Derhalve:

De osculatievlakken, in vier complanaire punten aan de kromme C^4 met dubbelpunt gelegd, snijden haar in vier andere punten, die eveneens complanair zijn.

Dubbele osculatiekoorden. Onderstelt men dat het osculatievlak in u de kromme in v snijdt en dat het osculatievlak in v evenzoo w tot restpunt heeft, dan heeft men:

$$u^3 v = k \quad \text{en} \quad v^3 w = k$$

Door eliminatie van v vindt men de volgende betrekking tusschen u en w:

$$u^9 = k^2 w$$

Identificeert men w met u dan zullen dus de parameterwaarden der steunpunten van dubbele osculatiekoorden worden gevonden uit:

$$u^9 - k^2 u = 0$$

Deze vergelijking kan gesplitst worden in de volgende:

1°. $u = 0$, waarbij volgens (38) als tweede steunpunt behoort $u = \infty$.

Een der hoofdkoorden is dus de snijlijn der beide osculatievlakken, in het dubbelpunt aan C^4 gelegd.

2°. $u^4 - k = 0$, waardoor volgens (37) de planaire buigpunten worden bepaald.

3°. $u^4 + k = 0$, welke nog vier punten, dus twee dubbele osculatiekoorden, bepaalt. De wortels zijn $(^1/_2\sqrt{2} \pm {}^1/_2 i\sqrt{2})\sqrt[4]{k}$, $(-{}^1/_2\sqrt{2} \pm {}^1/_2 i\sqrt{2})\sqrt[4]{k}$. Door aftrekking van $u^3 v = k$ en $u v^3 = k$ leidt men gemakkelijk af dat telkens twee tegengestelde waarden bijeenbehooren.

Samenvattend vindt men dus dat de steunpunten van de niet door het dubbelpunt gaande dubbele osculatiekoorden worden voorgesteld door

$$u^4 + k = 0 \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

terwijl de drie hoofdkoorden $P_1 P_2$, $P_3 P_4$ en $P_5 P_6$ zijn gekenmerkt door de volgende parameterwaarden hunner steunpunten:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} p_1 = 0 \\ p_2 = \infty \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} p_3 = (^1/_2\sqrt{2} + {}^1/_2 i\sqrt{2})\sqrt[4]{k} \\ p_4 = (-{}^1/_2\sqrt{2} - {}^1/_2 i\sqrt{2})\sqrt[4]{k} \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} p_5 = (^1/_2\sqrt{2} - {}^1/_2 i\sqrt{2})\sqrt[4]{k} \\ p_6 = (-{}^1/_2\sqrt{2} + {}^1/_2 i\sqrt{2})\sqrt[4]{k} \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad . \quad (40)$$

De kromme C^4 met dubbelpunt als basiskromme van een

Reeds op bl. 3 werd opgemerkt dat de kromme C^4 met dubbelpunt, hoewel rationaal, ook als vierdegraadskromme van de eerste soort kan worden beschouwd. Ze is toch de basiskromme van een bundel quadratische bundel quadratische oppervlakken. oppervlakken, die elkaar in één punt (het dubbelpunt van de kromme) aanraken.

We vragen thans naar de kegels, die in dezen bundel voorkomen. Vooreerst is duidelijk dat hiertoe behoort de kegel Γ, die C^4 uit het dubbelpunt projecteert. Deze toch is van den tweeden graad, daar elk vlak door het dubbelpunt nog twee snijpunten met C^4 bevat. De beschrijvende lijnen van Γ zijn blijkbaar als oneigenlijke trisecanten op te vatten, zoodat onder alle exemplaren van den bundel de kegel Γ in het bijzonder het trisecantenoppervlak H van het algemeene geval vervangt.

Twee andere kegels, Γ_1 en Γ_2, worden als volgt verkregen. Zij Z het vlak der hoofdkoorden $P_3 P_4$ en $P_5 P_6$. Daar ook hier de drie hoofdkoorden door één punt gaan, zal het snijpunt C van $P_3 P_4$ en $P_5 P_6$ het punt zijn, waar $P_1 P_2$ het vlak Z doorboort. We stellen nu het snijpunt van $P_3 P_5$ en $P_4 P_6$ voor door A, dat van $P_3 P_6$ en $P_4 P_5$ door B; A, B en C zijn dan de nevenhoekpunten van den volledigen vierhoek $P_1 P_2 P_3 P_4$.

Voor elke koorde $(u\,v)$, die $P_3 P_5$ snijdt, is $p_3\, p_5\, u\, v = k$; daar blijkens (40) $p_3\, p_5 = p_4\, p_6$ is, zal dan ook $p_4\, p_6\, u\, v = k$ zijn, zoodat die koorde dan ook $P_4 P_6$ zal snijden. Derhalve: elke koorde, die $P_3 P_5$ snijdt, zal ook $P_4 P_6$ snijden, en dus, daar geen drie koorden in één vlak kunnen liggen, door A gaan. Een soortgelijke beschouwing geldt voor het punt B; A en B zijn dus de toppen van twee kegels Γ_1 en Γ_2, welke door koorden van C^4 worden gevormd.

Men heeft dus:

Onder de quadratische oppervlakken van den bundel, die door C^4 wordt bepaald, komen drie kegels voor: de kegel Γ, welke C^4 uit het dubbelpunt projecteert en de kegels Γ_1 en Γ_2, die elk C^4 dubbel projecteeren.

Eigenschappen van de dubbelpuntsraaklijnen. Noemt men de raaklijnen in het dubbelpunt t_0 en t_∞ dan zullen de osculatievlakken in het dubbelpunt den kegel Γ raken volgens t_0 en t_∞. De snijlijn der genoemde osculatievlakken is dan poollijn van het vlak der lijnen t_0 en t_∞ ten opzichte van Γ. Daar echter de snijlijn der osculatievlakken van het dubbelpunt de hoofdkoorde $(0, \infty)$ voorstelt (bl. 47) volgt hieruit:

De hoofdkoorde $P_1 P_2$ is de poollijn van het vlak der dubbelpuntsraaklijnen ten opzichte van den kegel Γ.

Merkt men op dat in de doorsnede met vlak Z het punt C en de lijn AB pool en poollijn zijn ten opzichte van de kegelsnede, volgens welke Z den kegel Γ snijdt, en dat C het punt is, waar $P_1 P_2$ vlak Z doorboort, dan blijkt dat het vlak van t_0 en t_∞ het vlak Z moet snijden volgens AB; dus:

Het vlak der dubbelpuntsraaklijnen gaat door de toppen der dubbelprojecteerende kegels Γ_1 en Γ_2.

Parameter-voorstelling der kromme C^4 met een dubbelpunt.

Een eenvoudige parametervoorstelling der kromme C^4 met dubbelpunt verkrijgt men door het coördinatenviervlak als volgt te kiezen. Het vlak $x_1 = 0$ zij het osculatievlak in $u = \infty$, $x_2 = 0$ het vlak der dubbelpuntsraaklijnen, $x_3 = 0$ het osculatievlak in $u = 0$, en $x_4 = 0$ het vlak Z der hoofdkoorden $P_3 P_4$ en $P_5 P_6$. Men heeft dan, in verband met (39):

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1 &= u \\ \rho x_2 &= u^2 \\ \rho x_3 &= u^3 \\ \rho x_4 &= u^4 + k \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Vergelijking van den bundel quadratische oppervlakken, waarvan C^4 de basiskromme is.

Door combinatie leidt men aanstonds uit (41) de vergelijkingen van twee quadratische oppervlakken af, welke men door C^4 kan leggen:

$$x_3^2 + k x_1^2 = x_2 x_4$$

en:

$$x_1 x_3 = x_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

van welke de laatste een kegel met O_4 als top, dus klaarblijkelijk den kegel Γ voorstelt. De vergelijking van den bundel wordt nu:

$$(k x_1^2 - x_2 x_4 + x_3^2) + \lambda (x_1 x_3 - x_2^2) = 0 \quad . \quad (43)$$

Vergelijkingen der dubbelprojectee-

Zoekt men op de bekende wijze de kegels in dezen bundel op, dan blijkt dat $\lambda^2 = 4k$ moet zijn. Men vindt, rende kegels Γ_1 en Γ_2. als men in (43) achtereenvolgens $\lambda = + 2 \sqrt{k}$ en $\lambda = - 2 \sqrt{k}$ kiest:

$$\left.\begin{array}{ll} & (x_3 + x_1 \sqrt{k})^2 = x_2 (x_4 + 2 x_2 \sqrt{k}) \\ \text{en:} & (x_3 - x_1 \sqrt{k})^2 = x_2 (x_4 - 2 x_2 \sqrt{k}) \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (44)$$

waardoor dus de kegels Γ_1 en Γ_2 worden aangewezen.

Verdere eigenschappen der kegels. De toppen der laatstgenoemde kegels worden voorgesteld resp. door;

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = - x_1 \sqrt{k} \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{en:} \quad \left.\begin{array}{l} x_3 = + x_1 \sqrt{k} \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

Ze liggen dus beide in het vlak Z der hoofdkoorden $P_3 P_4$ en $P_5 P_6$ en ook in het vlak der dubbelpuntsraaklijnen, welke resultaten reeds langs anderen weg werden gevonden.

Zoekt men het poolvlak van de lijn $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ ten opzichte van den kegel Γ dan vindt men $x_2 = 0$. Het poolvlak der hoofdkoorde $P_1 P_2$ ten opzichte van Γ is dus het vlak der dubbelpuntsraaklijnen. Ook dit resultaat was reeds langs anderen weg gevonden.

Vergelijking van een osculatievlak. Snijdt men C^4 met een willekeurig vlak:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$

dan worden volgens (41) de snijpunten aangewezen door:

$$\lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3 + \lambda_4 u^4 + \lambda_4 k = 0$$

waaruit men afleidt:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = - \frac{\lambda_3}{\lambda_4}$$

$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_1 u_4 + u_2 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_4 = \frac{\lambda_2}{\lambda_4}$$

$$u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4 = - \frac{\lambda_1}{\lambda_4}$$

Stelt men $u_1 = u_2 = u_3 = u$, $u_4 = v$, dan heeft men:

$$3 u + v = - \frac{\lambda_3}{\lambda_4}, \quad 3 u^2 + 3 u v = \frac{\lambda_2}{\lambda_4}, \quad u^3 + 3 u^2 v = - \frac{\lambda_1}{\lambda_4}$$

Elimineert men, met behulp van (38), v, dan vindt men na een korte herleiding voor de vergelijking van het osculatievlak in het punt met parameter u:

$$(u^6 + 3ku^2)x_1 - (3u^5 + 3ku)x_2 + (3u^4 + k)x_3 - \\ - u^3 x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Klasse der C^4 met dubbelpunt.

Wanneer men de grootheden x als vast aanneemt stelt (45) een zesdegraadsvergelijking in u voor. De wortels bepalen de zes punten van C^4, waarvan de osculatievlakken door het gegeven punt gaan. Dus geldt hier, evenals bij de algemeene kromme C^4 (bl. 23):

Door elk punt van de ruimte gaan zes osculatievlakken naar de kromme C^4 met dubbelpunt.

Of wel:

De kromme C^4 met dubbelpunt is van de zesde klasse.

Ook is, evenals bij de algemeene kromme C^4, dit resultaat af te leiden uit het feit, dat uit een *op* C^4 gelegen punt drie osculatievlakken mogelijk zijn, terwijl het osculatievlak in het gekozen punt voor drie samenvallende osculatievlakken is te tellen.

Raaklijnenoppervlak.

Door geheel dezelfde beschouwingen als in Hoofdstuk *I*, *4* komen we tot het inzicht dat het raaklijnenoppervlak van den zesden graad en van de zesde klasse is en dat het een dubbelkromme van den zesden graad bezit.

Dubbelkromme van het raaklijnenoppervlak.

Voor deze dubbelkromme vindt men echter hier iets bijzonders. Door differentiatie vindt men uit (45):

$$(6u^5 + 6ku)x_1 - (15u^4 + 3k)x_2 + 12u^3 x_3 - \\ - 3u^2 x_4 = 0.$$

Nu stelt deze vergelijking, met (45), de raaklijn in u voor. Deze ligt dus ook in het vlak, welks vergelijking men verkrijgt door uit beide vergelijkingen x_4 te elimineeren. Door

$$u^2 x_1 - 2u x_2 + x_3 = 0$$

wordt dus het vlak voorgesteld dat de raaklijn uit O_4 projecteert.

Een tweede raaklijn, in v, is evenzoo gelegen in het vlak:

$$v^2 x_1 - 2v x_2 + x_3 = 0$$

Indien deze raaklijnen elkaar snijden ligt hun snijpunt in het vlak, waarvan de vergelijking verkregen wordt door uit de laatste twee vergelijkingen x_2 te elimineeren. Men vindt

$$u\,v\,x_1 = x_3$$

waarbij echter volgens (36) de parameters u en v worden verbonden door de betrekking:

$$u^2\,v^2 = k$$

Hieruit volgt dat het snijpunt van twee elkaar snijdende raaklijnen moet gelegen zijn in een der beide vlakken

$$x_3 = +\,x_1\sqrt{k} \qquad \text{en} \qquad x_3 = -\,x_1\sqrt{k}$$

De kromme van den zesden graad is dus ontaard in twee vlakke kubische krommen. Haar vlakken gaan door de ribbe $O_2\,O_4$, d. w. z. door de snijlijn der osculatievlakken in het dubbelpunt, of wel door de hoofdkoorde $P_1\,P_2$. Ook gaan deze vlakken blijkbaar elk door een der op bl. 50 gevonden kegeltoppen. En dus: *De meetkundige plaats der snijpunten van twee niet op elkaar volgende raaklijnen bestaat uit twee vlakke krommen van den derden graad; de vlakken dezer krommen gaan door de hoofdkoorde $P_1\,P_2$ en ieder door een der toppen A en B van de dubbelprojecteerende kegels Γ_1 en Γ_2.*

---

4. *De kromme C^4 met een keerpunt.*

Voorwaarde voor complanaire ligging van vier punten op C^4.

We gaan weer uit van de op bl. 11 gevonden voorwaarde voor complanaire ligging, welke bij de meest algemeene parametervoorstelling van C^4 geldt, dus van

$$A_0\,u_1\,u_2\,u_3\,u_4 + A_1\,(u_1\,u_2\,u_3 + \ldots\ldots + u_2\,u_3\,u_4) +$$
$$+\,A_2\,(u_1\,u_2 + \ldots\ldots + u_3\,u_4) +$$
$$+\,A_3\,(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + A_4 = 0$$

We nemen thans aan dat C^4 een keerpunt bezit en kennen daaraan de parameterwaarde $u = \infty$ toe. Elk vlak door het keerpunt heeft daar twee snijpunten met C^4.

Deelt men de bovenstaande vergelijking door $u_3\,u_4$ en stelt vervolgens $u_3 = \infty$, $u_4 = \infty$, dan heeft men:

$$A_0\,u_1\,u_2 + A_1\,(u_1 + u_2) + A_2 = 0$$

Aan deze vergelijking moet nu worden voldaan door iedere waarde van u_1 en u_2, daar elk tweetal punten van C^4 met het keerpunt in één vlak ligt. Derhalve moeten de coëfficienten A_0, A_1 en A_2 nul zijn en de voorwaarde voor complanaire ligging wordt eenvoudig:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = k$$

Stationnair raakvlak.

Stelt men $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u$, dan gaat de verkregen vergelijking over in: $u = {}^1/_4\, k$. En dus, daar hier slechts één waarde van u wordt gevonden:

De kromme C^4 met een keerpunt bezit slechts één stationnair raakvlak.

We kennen aan het gevonden planaire buigpunt gemakshalve de parameterwaarde 0 toe; k wordt dan nul, en de voorwaarde voor complanaire ligging gaat over in:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Eigenschappen der osculatievlakken.

Voor $u_1 = u_2 = u_3 = u$, $u_4 = v$ wordt (46):

$$3\,u + v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Bij een bepaalde waarde van v behoort slechts één waarde van u, dus:

Door elk punt der C^4 met een keerpunt gaat slechts één vlak, dat haar elders osculeert.

Brengt men in vier punten van C^4 het osculatievlak aan, dan heeft men volgens (47):

$$v_1 = -3\,u_1,\quad v_2 = -3\,u_2,\quad v_3 = -3\,u_3,\quad v_4 = -3\,u_4$$

Wanneer nu $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ is, zal ook $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ zijn, derhalve:

De osculatievlakken, in vier complanaire punten aan de kromme C^4 met een keerpunt gelegd, snijden haar in vier andere punten, die eveneens complanair zijn.

Klaarblijkelijk is ook het omgekeerde waar:

Wanneer men uit vier complanaire punten van de kromme C^4 met een keerpunt telkens het eenig mogelijke osculatievlak aan C^4 legt, dan liggen de vier steunpunten dezer vlakken eveneens in één vlak.

De kromme C^4 met een keerpunt bezit geen dub-

Onderstelt men dat het osculatievlak in u de kromme in v snijdt en dat bij v als osculatiepunt weer w als restpunt behoort, dan heeft men:

bele osculatiekoorden.

$$3u + v = 0 \quad \text{en} \quad 3v + w = 0$$

dus

$$w = 9u$$

Voor een dubbele osculatiekoorde moet w met u samenvallen, dus heeft men

$$u = 9u.$$

Hieraan voldoet slechts $u = 0$, waardoor het planaire buigpunt wordt aangewezen. Behalve deze oneigenlijke oplossing bestaan er dus geen dubbele osculatiekoorden.

De kromme C^4 met een keerpunt als basiskromme van een bundel quadratische oppervlakken.

We gaan thans aantoonen dat de kromme C^4 met een keerpunt, evenals die met een dubbelpunt, hoewel rationaal, toch als vierdegraadskromme van de eerste soort kan worden beschouwd. Dit zal bewezen zijn zoodra men twee quadratische oppervlakken heeft gevonden, die beide door C^4 kunnen worden gelegd.

Wanneer men C^4 uit het keerpunt projecteert, verkrijgt men een kegel Λ van den tweeden graad; immers elk vlak door het keerpunt geeft nog twee snijpunten met C^4, dus twee ribben van den kegel. De beschrijvende lijnen van Λ kunnen als oneigenlijke trisecanten worden beschouwd; de kegel Λ vervangt dus weer de hyperboloïde H van het algemeene geval.

Voorts bestaat er nog een dubbelprojecteerende kegel Λ_1, waartoe men als volgt komt. We zullen kortheidshalve twee punten u_1 en u_2, waarvoor $u_1 + u_2 = 0$ is, twee harmonische punten van C^4 noemen, daar ze blijkbaar harmonisch liggen ten opzichte van het keerpunt ($u = \infty$) en het buigpunt ($u = 0$). Uit (46) volgt dan dadelijk, dat twee paren harmonische punten steeds in één vlak liggen, of, als men de verbindingslijn van twee harmonische punten een harmonische koorde noemt, dat elke harmonische koorde door elke andere harmonische koorde wordt gesneden. Het regelvlak der harmonische koorden is dus een kegel Λ_1, die blijkbaar van den tweeden graad is; immers elk vlak door zijn top geeft vier snijpunten met C^4, dus twee harmonische koorden.

Trachten we nog de ligging van den top van Λ_1 te bepalen. De raaklijn in het buigpunt is klaarblijkelijk als oneigenlijke harmonische koorde te beschouwen; zoo ook de lijn, die de punten $u = \infty$, $u = \infty$ in het keerpunt verbindt. Weliswaar is de richting dezer laatste lijn onbepaald, doch ze moet in het osculatievlak van het keerpunt liggen en dus:

Er bestaat een kegel Λ_1 van den tweeden graad, die de kromme C^4 met keerpunt dubbel projecteert; zijn top ligt in het punt, waar de raaklijn van het buigpunt het osculatievlak van het keerpunt snijdt.

De kromme C^4 met een keerpunt is dus werkelijk snijkromme van twee quadratische oppervlakken (vierdegraadskromme van de eerste soort), doch in een zeer bijzonder geval. Want beide kegels Λ en Λ_1 hebben blijkbaar tot raakvlak het osculatievlak in het keerpunt, terwijl de top van Λ op Λ_1 ligt.

Terwijl de vierdegraadskromme met dubbelpunt ontstaat als doorsnede van elkaar rakende quadratische oppervlakken in het algemeen heeft men dus hier:

Elke kromme C^4 met een keerpunt is te beschouwen als doorsnede van twee quadratische kegels, die beide aan eenzelfde plat vlak raken, terwijl de top van een dezer kegels op den anderen kegel is gelegen.

Raaklijnen-oppervlak.

Het ontwikkelbare regelvlak der raaklijnen, dat bij de algemeene C^4 van den zesden graad is (bl. 27), blijkt bij de kromme C^4 met een keerpunt slechts van den vijfden graad te zijn. Want beschouwt men ook hier de I_4 der punten, die op C^4 door een willekeurigen vlakkenbundel worden ingesneden, dan vindt men weliswaar, evenals vroeger, zes coïncidenties, maar hiervan is het keerpunt er één. De overige vijf bepalen elk een raaklijn der kromme, die de as van den bundel snijdt, dus:

Het raaklijnenoppervlak der kromme C^4 met een keerpunt is van den vijfden graad.

Dubbelkromme van het raaklijnen-oppervlak.

Kiest men als as van een vlakkenbundel een raaklijn van C^4, dan bepalen de vlakken van den bundel op C^4 een I_2. Deze bezit twee coïncidenties, waarvan het keerpunt weer één vertegenwoordigt. De tweede bepaalt de eenige raaklijn, die de gekozen raaklijn snijdt, en dus:

Elke raaklijn der kromme C^4 met een keerpunt wordt door slechts één andere raaklijn gesneden.

De snijpunten van alle paren elkaar snijdende raaklijnen vormen op het raaklijnenoppervlak een dubbelkromme, waarvan we thans den graad gaan zoeken. Het raaklijnenoppervlak is van den vijfden graad en rationaal; een willekeurige vlakke doorsnede is dus een rationale kromme van den vijfden graad, die dus zes singuliere punten moet bezitten. Nu zijn er blijkbaar reeds vier keerpunten, immers C^4 is keerkromme op het raaklijnenoppervlak en zij doet dus in de doorsnede vier keerpunten ontstaan.

Er zijn dus in elke vlakke doorsnede twee dubbelpunten en de gezochte dubbelkromme is derhalve een kegelsnede. Daar voorts het keerpunt en het buigpunt als oneigenlijke snijpunten van raaklijnen zijn te beschouwen kan men zeggen:

De meetkundige plaats der snijpunten van twee niet op elkaar volgende raaklijnen is een kegelsnede, die door het keerpunt en het buigpunt gaat.

Oppervlak, omhuld door de dubbelraakvlakken.

Stelt men in (46) $u_3 = u_1$, $u_4 = u_2$, dan verkrijgt men:

$$u_1 + u_2 = 0$$

welke dus de betrekking tusschen de parameters van de raakpunten van een dubbelraakvlak is. Nu zijn dit blijkbaar harmonische punten; omgekeerd kunnen elke twee harmonische punten als raakpunten van een dubbelraakvlak optreden. Doch dan zijn alle dubbelraakvlakken van C^4 raakvlakken van den kegel Λ_1 en omgekeerd, dus:

Het oppervlak, omhuld door de dubbelraakvlakken der kromme C^4 met een keerpunt is de kegel Λ_1, die C^4 dubbel projecteert.

Parametervoorstelling der kromme C^4 met een keerpunt.

Een eenvoudige parametervoorstelling van de kromme C^4 met een keerpunt verkrijgt men als volgt: $x_1 = 0$ zij het stationnaire raakvlak, d.i. het osculatievlak in het buigpunt; $x_2 = 0$ het vlak door de raaklijn van het buigpunt en door het keerpunt gaande; $x_3 = 0$ het vlak, dat door de raaklijn van het keerpunt en door het buigpunt kan worden gelegd; eindelijk stelle $x_4 = 0$ het osculatievlak in het keerpunt voor. In verband met de parameterwaarden $u = \infty$ voor het keerpunt en $u = 0$ voor het buigpunt heeft men dan:

$$\left.\begin{aligned} \rho\, x_1 &= u^4 \\ \rho\, x_2 &= u^2 \\ \rho\, x_3 &= u \\ \rho\, x_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Vergelijking van den bundel quadratische oppervlakken, waarvan C^4 de basiskromme is.

Door combinatie leidt men uit (48) af:

$$x_2\, x_4 = x_3^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

en:

$$x_1\, x_4 = x_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

welke dus twee quadratische oppervlakken voorstellen, die door de kromme kunnen worden gelegd. De eerste vergelijking stelt een kegel voor met O_1, d.w.z. het keerpunt, als top, dus blijkbaar den kegel Λ, terwijl (50) een kegel voorstelt, die O_3 tot top heeft, d.i. het punt, waar de raaklijn van het buigpunt het osculatievlak van het keerpunt doorboort. Dus is (50) de vergelijking van den dubbelprojecteerenden kegel Λ_1.

De vergelijking van den bundel kan nu worden geschreven in den vorm

$$x_2\, x_4 - x_3^2 + \lambda\,(x_1\, x_4 - x_2^2) = 0 \quad . \quad . \quad (51)$$

Vergelijking van een osculatievlak.

Snijdt men C^4 met een willekeurig vlak:

$$\lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \lambda_3\, x_3 + \lambda_4\, x_4 = 0$$

dan worden wegens (48) de snijpunten bepaald door:

$$\lambda_1\, u^4 + \lambda_2\, u^2 + \lambda_3\, u + \lambda_4 = 0$$

waaruit volgt:

$$u_1\, u_2 + u_1\, u_3 + u_1\, u_4 + u_2\, u_3 + u_2\, u_4 + u_3\, u_4 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$u_1\, u_2\, u_3 + u_1\, u_2\, u_4 + u_1\, u_3\, u_4 + u_2\, u_3\, u_4 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

$$u_1\, u_2\, u_3\, u_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_1}$$

Voor $u_1 = u_2 = u_3 = u$, $u_4 = v$ heeft men:

$$3u^2 + 3uv = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad u^3 + 3u^2 v = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \quad u^3 v = \frac{\lambda_4}{\lambda_1}$$

Uit deze betrekkingen leidt men, met behulp van (47), gemakkelijk voor het osculatievlak in het punt met parameter u deze vergelijking af:

$$x_1 - 6u^2 x_2 + 8u^3 x_3 - 3u^4 x_4 = 0 \; . \quad . \quad (52)$$

Klasse der C^4 met een keerpunt.

Voor vaste waarden der coördinaten x stelt (52) een vierdegraadsvergelijking in u voor. Er zijn dus vier punten op de kromme, wier osculatievlakken door een gegeven punt gaan, derhalve:

Door elk punt van de ruimte gaan vier osculatievlakken naar de kromme C^4 met een keerpunt.

Of wel:

De kromme C^4 met een keerpunt is van de vierde klasse. Dit resultaat is weer in overeenstemming met het feit dat uit een *op* C^4 gelegen punt slechts één osculatievlak mogelijk is, daar het osculatievlak in het gekozen punt voor drie samenvallende osculatievlakken is te tellen.

Eigenschap van het vlak door de keerpuntsraaklijn en het buigpunt.

Uit vergelijking (52), op de laatstbesproken wijze opgevat, leidt men nog af dat voor de parameters u_1, u_2, u_3 en u_4 van de steunpunten der uit een zeker punt X aan C^4 gelegde osculatievlakken de betrekking geldt:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{8x_3}{3x_4}$$

Voor $x_3 = 0$ wordt dus ook $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$. Houdt men in het oog wat de beteekenis is van het vlak $x_3 = 0$ en let men op (46), dan kan men dus zeggen:

Alle punten X van het vlak, dat door de keerpuntsraaklijn en door het buigpunt gaat, bezitten de eigenschap, dat de steunpunten der vier uit X aan C^4 te leggen osculatievlakken complanair zijn.

HOOFDSTUK III.

De afbeelding van de algemeene kromme van den vierden graad en de tweede soort.

1. *De involutie der steunpunten van trisecanten. Complanaire groepen op C^4.*

Afbeelding van eene rationale kromme op eene andere.

Zooals bekend is kan men twee rationale krommen steeds zoodanig met elkaar in verband brengen dat de punten der eene kromme projectief overeenkomen met die der andere. Algebraïsch kan dit verband dan worden uitgedrukt door een bilineaire vergelijking tusschen de parameters van de overeenkomstige punten der beide krommen. Het is duidelijk dat deze projectieve overeenkomst in sommige gevallen van nut kan zijn bij de studie van minder eenvoudige rationale krommen; men kan deze n.l. punt voor punt „afbeelden" op een eenvoudiger rationale kromme, en allerlei eigenschappen der gegeven kromme uit de afbeelding afleiden.

Afbeelding der algemeene kromme C^4 op een kegelsnede.

Emil Weyr [1]) heeft de hier bedoelde methode toegepast op de studie der rationale ruimtekromme van den vierden graad. Hij beeldt haar daartoe af op een kegelsnede; deze zal in het volgende steeds C^2 genoemd worden. Weliswaar is onder de rationale krommen de rechte lijn de allereenvoudigste, maar de theorie der involuties laat zich veel beter op een kegelsnede dan op een rechte lijn behandelen. Weyr heeft dit zelf uitvoerig voor de cubische involuties aangetoond. [2])

---

[1]) Über die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt. Sitzungsberichte der Wiener Akademie 72. 1875 en 73. 1876.

[2]) Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen. Abhandlungen der böhmischen Gesellsch. d. Wiss. (Prag) VI. 7. 1874.

Eerste onderstelling: de kegelsnede C^2 is vooraf gegeven.

Het is nu vooreerst mogelijk dat de kegelsnede C^2 in vorm, grootte en ligging van tevoren is bepaald. In dit geval kan men zich de afbeelding op de volgende wijze denken.

Daar de hyperboloïde H, waarop C^4 ligt, door C^2 in vier punten wordt gesneden en daar een der regelscharen van H uit de trisecanten van C^4 bestaat, zullen vier dezer trisecanten C^2 snijden. Projecteert men dan C^4 uit eenig punt O van een van die vier trisecanten op het vlak van C^2 dan is de projectie een vlakke kromme van den vierden graad, die een drievoudig punt bezit ter plaatse waar de gekozen trisecante het vlak van C^2 (en C^2 zelf) snijdt. Een punt X van C^4 wordt in X' op het vlak van C^2 geprojecteerd; de lijn, die X' met het drievoudige punt verbindt, snijdt de kegelsnede nog in Y. Het is nu duidelijk dat met elk punt X van C^4 één punt Y van C^2 overeenkomt en omgekeerd.

Tweede onderstelling: de kegelsnede C^2 kan willekeurig worden gekozen.

Veel eenvoudiger wordt het afbeelden wanneer de kegelsnede willekeurig is te kiezen. Men kiest dan voor C^2 een willekeurige doorsnede van de hyperboloïde H. Een der regelscharen van H bestaat uit unisecanten, en de punten, waar deze unisecanten C^2 snijden, kan men als de beelden beschouwen van de punten van C^4.

De I_3 der steunpunten van trisecanten.

Op bl. 13 werd reeds besproken dat de steunpunten der trisecanten op C^4 een I_3 vormen. Wordt nu C^4 op C^2 afgebeeld dan is het duidelijk dat met elke groep X, X', X'' van de I_3 op C^4 een groep Y, Y', Y'' op C^2 zal overeenkomen. De punten Y vormen dus op C^2 eveneens groepen van een cubische involutie.

Verbindt men de punten van elke groep onderling dan zijn dus in C^2 oneindig vele driehoeken beschreven. Volgens een bekende eigenschap omhullen de zijden dezer driehoeken een tweede kegelsnede, de involutiekegelsnede, die door J^2 zal worden voorgesteld. De kegelsneden C^2 en J^2 vertoonen dus de ligging van Poncelet.

Men kan nu in de afbeelding dadelijk de punten Y'

en Y'' vinden, die met Y op dezelfde trisecante liggen. Daartoe heeft men slechts uit Y de beide raaklijnen aan J^2 te leggen; waar deze lijnen C^2 voor de tweede maal snijden liggen Y' en Y''. Daarbij zal, zooals we zagen, de lijn $Y'Y''$ eveneens raaklijn zijn van J^2.

Het punt van C^4 te bepalen, dat met drie gegeven punten van C^4 complanair is.

Bij de behandeling der algemeene C^4 in Hoofdstuk *I* werd een veelvuldig gebruik gemaakt van de voorwaarde voor complanaire ligging van vier punten der kromme. We zullen evenzoo hier onderzoeken aan welke voorwaarde vier punten Y_1, Y_2, Y_3 en Y_4 op C^2 moeten voldoen, die de beelden zijn van vier complanaire punten van C^4.

Hiervoor beantwoorden we eerst nog de volgende vraag: wanneer gegeven zijn de beelden Y_1, Y_2, Y_3 van drie punten X_1, X_2, X_3 van C^4 vraagt men het beeld Y_4 van het punt X_4 te vinden, dat met de drie gegeven punten in één vlak ligt.

Denkt men zich een vlakkenbundel met $X_1 X_2$ als as dan bepaalt deze op C^4 een I_2. In deze I_2 is het gezochte punt X_4 toegevoegd aan het bekende punt X_3. Kende men het centrum dezer I_2 dan zou X_4 dus aanstonds te vinden zijn.

Nu kan men echter twee bijzondere groepen der I_2 gemakkelijk aangeven, n.l. het paar X_1', X_1'' dat met X_1, en het paar X_2', X_2'' dat met X_2 op eenzelfde trisecante ligt.

Past men het bovenstaande toe op de afbeelding dan heeft men dus:

Om het beeld Y_4 te vinden van het punt, dat met drie, door hun beelden Y_1, Y_2, Y_3 gegeven, punten complanair is, legge men uit Y_1 en Y_2 de raaklijnen aan J^2, die C^2 in Y_1' en Y_1'', Y_2' en Y_2'' nogmaals snijden. De verbindingslijnen $Y_1' Y_1''$ en $Y_2' Y_2''$ snijden elkaar in een punt O_{12}; het punt, waar de lijn $Y_3 O_{12}$ nogmaals C^2 snijdt, is het gezochte punt Y_4.

Het is duidelijk dat men in het voorafgaande vraagstuk ter bepaling van een I_2 ook de paren X_1, X_3 of

X_2, X_3 had kunnen gebruiken. Men zou dan als centrum der I_2 het snijpunt O_{13} van $Y_1' Y_1''$ en $Y_3' Y_3''$ of het snijpunt O_{23} van $Y_2' Y_2''$ en $Y_3' Y_3''$ hebben verkregen. Zoowel de lijn $Y_2 O_{13}$ als $Y_1 O_{23}$ zou het gezochte punt Y_4 op C^2 hebben bepaald.

Ligging van vier punten op C^2, die de beelden zijn van vier complanaire punten van C^4.

Tot dusver werd nog steeds ondersteld dat de punten X_1, X_2, X_3 bekend waren, terwijl X_4 gezocht werd. Men kan echter voor een complanaire groep elk punt als door de overige drie bepaald beschouwen. Doet men dit ook in de afbeelding dan komt, behalve de driehoeken $Y_1 Y_1' Y_1''$, $Y_2 Y_2' Y_2''$ en $Y_3 Y_3' Y_3''$, ook nog de driehoek $Y_4 Y_4' Y_4''$ in aanmerking. Voorts treden nu nog op de punten O_{14}, O_{24} en O_{34}, waarin $Y_1' Y_1''$, $Y_2' Y_2''$ en $Y_3' Y_3''$ door $Y_4' Y_4''$ worden gesneden. De zes punten O_{kl} zijn de hoekpunten van de door $Y_1' Y_1''$, $Y_2' Y_2''$, $Y_3' Y_3''$ en $Y_4' Y_4''$ gevormde volledige vierzijde, terwijl door elk dezer punten een van de zes zijden gaat van den volledigen vierhoek $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$, met dien verstande dat $Y_1 Y_2$ gaat door O_{34}, enz.

We zullen kortheidshalve de verbindingslijn der punten Y' en Y'', die met Y een groep der I_3 vormen, welke lijn, evenals $Y Y'$ en $Y Y''$, raaklijn is van J^2, de „toegevoegde raaklijn" van Y noemen. Men kan dan het gevonden resultaat aldus uitspreken:

Vier punten Y_1, Y_2, Y_3 en Y_4 van C^2 zijn dan de beelden van vier complanaire punten van C^4 als de verbindingslijn van telkens twee dezer punten door het snijpunt der toegevoegde raaklijnen van de overige twee gaat.

---

2. *Raakvlakken, Dubbelraakvlakken, Osculatievlakken, Stationnaire raakvlakken.*

Raakvlak.

Als eerste toepassing van het algemeene vraagstuk: „het beeld te construeeren van het punt, dat met drie, door hun beelden gegeven, punten complanair is" onderstellen we dat, op C^4, X_1 en X_2, dus in de afbeelding Y_1 en Y_2 samenvallen. Het vlak der groep raakt dan

C^4 in één punt X_1 en snijdt haar nog in twee andere punten X_3 en X_4. Het is onmiddellijk in te zien dat in dit geval O_{12} het punt wordt, waar de toegevoegde raaklijn $Y_1' \, Y_1''$ van Y_1 de involutiekegelsnede J^2 raakt. Derhalve:

Twee punten X_3 en X_4 liggen met de raaklijn in het punt X_1 in één vlak indien de lijn $Y_3 \, Y_4$ door het raakpunt O_{12} van de toegevoegde raaklijn van Y_1 gaat.

Dubbelraakvlak. Elke lijn door O_{12} bepaalt in het voorafgaande geval twee punten Y_3 en Y_4, die de beelden zijn van paren X_3 en X_4, welke met de raaklijn in X_1 in één vlak liggen. Indien ook X_3 en X_4 samenvallen gaat het bedoelde vlak in een dubbelraakvlak over; het spreekt vanzelf dat daartoe in de afbeelding Y_3 en Y_4 eveneens moeten samenvallen. Nu kan men uit het punt O_{12} twee (reëele of imaginaire) raaklijnen aan C^2 leggen, hetgeen ons onmiddellijk doet zien dat door elke raaklijn van C^4 twee dubbelraakvlakken kunnen worden gelegd, of wel dat elke raaklijn door twee andere raaklijnen wordt gesneden (bl. 27).

Daar de beide in een dubbelraakvlak gelegen raaklijnen gelijkwaardig zijn geldt blijkbaar in het algemeen de eigenschap:

Wanneer Y_1 en Y_2 de beelden zijn van de raakpunten van een dubbelraakvlak, dan gaat de raaklijn, in een dezer punten aan C^2 gelegd, door het punt, waar de involutiekegelsnede J^2 door de toegevoegde raaklijn van het andere punt wordt geraakt.

Osculatievlak. Onderstellen we thans dat de punten X_1, X_2 en X_3 op C^4 samenvallen, dan gaat het vlak over in het osculatievlak in X_1; X_4 moge het punt zijn, waar C^4 het osculatievlak snijdt. In de afbeelding vallen dan de punten Y_1, Y_2 en Y_3 samen en is Y_4 het beeld van het snijpunt. We trachten nu de volgende vraag te beantwoorden: als het beeld van een punt, waar een osculatievlak C^4 raakt, gegeven is, het beeld te construeeren van het snijpunt van C^4 met dat vlak.

Ter beantwoording van deze vraag herinneren we ons dat twee punten X_3 en X_4 met de raaklijn van X_1, in één vlak liggen als de lijn $Y_3 Y_4$ door het punt gaat, waar de toegevoegde raaklijn van Y_1 de involutiekegelsnede J^2 raakt. Nu is klaarblijkelijk de ligging der punten in een osculatievlak een bijzonder geval; het is slechts noodig dat nog X_3 hiervan met X_1 samenvalle. Dit levert ons de volgende eenvoudige constructie:

Om in de afbeelding het beeld Y_4 van X_4 te construeeren, waar het osculatievlak in een gegeven punt X_1 C^4 snijdt, verbindt men Y_1 met het punt O, waar de toegevoegde raaklijn van Y_1 J^2 raakt; het tweede snijpunt van Y_1 O met C^2 is dan het gezochte punt Y_4.

Aantal osculatievlakken uit een punt van C^4 aan C^4.

Wanneer in het voorafgaande geval een punt X_4 op C^4 gegeven is, kan men omgekeerd vragen hoeveel osculatievlakken van C^4 in X_4 hun snijpunt zullen hebben, m.a.w. hoeveel osculatievlakken door X_4 aan C^4 kunnen worden gelegd. In de afbeelding is nu Y_4 gegeven, Y_1 gevraagd. Legt men door Y_4 een willekeurige rechte dan snijdt deze C^2 in een punt Y_1 en J^2 in twee punten O_1 en O_2, welke men kan beschouwen als de punten, waar de toegevoegde raaklijnen van Z_1 en Z_2 de involutiekegelsnede raken. Elk punt Y_1 bepaalt twee punten Z, elk punt Z bepaalt daarentegen slechts één punt Y_1.

Tusschen de punten Y_1 en Z bestaat dus een verwantschap (1, 2); de coïncidenties dezer verwantschap leveren juist de gewenschte gevallen. Men kan dus door elk punt van C^4 drie vlakken leggen, welke C^4 elders osculeeren (bl. 12).

Constructie der osculatiepunten, behoorend bij een gegeven restpunt.

Nu gevonden is dat men uit elk punt X_4 van C^4 drie osculatievlakken aan C^4 kan leggen, doet zich de vraag voor hoe men in de afbeelding de beelden der drie steunpunten dezer vlakken kan construeeren.

We denken ons dus weer gegeven de kegelsneden C^2 en J^2 en op C^2 het punt Y_4. Elke lijn door Y_4 snijdt, zooals we zagen, C^2 nog in een punt Y_1 en J^2 in twee punten O_1 en O_2; de raaklijnen in O_1 en O_2 aan J^2 zijn toegevoegd aan de punten Z_1 en Z_2 van C^2. Daar voor elken stand van $Y_4 Y_1$ één paar Z_1, Z_2 gevonden wordt vormen al deze paren een I_2; alle lijnen $Z_1 Z_2$ gaan dus door één punt S. De stralenbundels (Y_4) en (S) zijn nu projectief; zij brengen een kegelsnede K^2 voort, die C^2, behalve in Y_4 nog in drie punten snijdt, welke volgens het voorafgaande juist de gezochte punten Y_1 zullen zijn.

Het komt er dus nog slechts op aan deze kegelsnede K^2 nader te bepalen, hetgeen gebeuren kan door op bijzondere standen der waaierstralen te letten. Trekt men uit Y_4 de raaklijnen $Y_4 Y_4'$ en $Y_4 Y_4''$ aan J^2 dan raakt, zooals bekend is, $Y_4' Y_4''$ eveneens de involutiekegelsnede J^2 aan. Het is nu duidelijk dat, zoodra een straal van (Y_4) den stand $Y_4 Y_4'$ gaat innemen, de raakpunten O_1 en O_2 samenvallen, dus ook de punten Z_1 en Z_2, en wel zullen deze punten samenvallen in Y_4'', zoodat de raaklijn daar ter plaatse aan C^2 den overeenkomstigen straal van (S) voorstelt. Evenzoo komt met den straal $Y_4 Y_4''$ van (Y_4) de raaklijn in Y_4' aan C^2 als straal van (S) overeen. Hierdoor is de ligging van S bekend geworden en zijn nog twee punten van K^2 gevonden, n.l. het snijpunt van $Y_4 Y_4'$ met de raaklijn in Y_4'' aan C^2 en dat van $Y_4 Y_4''$ met de raaklijn in Y_4' aan C^2. Daarbij komt natuurlijk nog de waaiertop Y_4, die van den aanvang af bekend was.

Het vijfde gegeven ter bepaling van K^2 vindt men door te letten op den waaierstraal van (S), die door Y_4 gaat. Y_4 vertegenwoordigt nu een der punten Z, het raakpunt van J^2 en $Y_4' Y_4''$ een der punten O, en de lijn, die dat raakpunt met Y_4 verbindt, den toegevoegden straal van (Y_4).

Met den straal $S Y_4$ van (S) komt dus overeen $Y_4 O$ van (Y_4), zoodat K^2 in Y_4 de lijn $Y_4 O$ zal raken. Nu is K^2 bepaald door vier punten en de raaklijn in een dezer punten; men heeft dus:

Om op C^4 de punten te vinden, waarvan de osculatie-

vlakken door een gegeven punt X_4 van C^4 gaan bepaalt men in de afbeelding een kegelsnede K^2 op de volgende wijze. Men construeert de punten Y_4' en Y_4'', die Y_4 tot een groep der I_3 aanvullen en het raakpunt O van $Y_4'\,Y_4''$ met J^2. Vervolgens bepaalt men nog het snijpunt S der raaklijnen, in Y_4' en Y_4'' aan C^2 gelegd, en ook de punten waar de raaklijn aan C^2 in Y_4'' de lijn $Y_4\,Y_4'$, en die in Y_4' de lijn $Y_4\,Y_4''$ snijdt. De kegelsnede K^2, die door deze laatste twee punten, door S en door Y_4 gaat, en in Y_4 de lijn $Y_4\,O$ aanraakt, snijdt, behalve in Y_4, C^2 in nog drie punten, die de beelden der gezochte punten zullen zijn.

Stationnaire raakvlakken.

Wanneer de raakpunten van een dubbelraakvlak samenvallen, gaat dit vlak over in een stationnair raakvlak, d.i. een vlak, dat met C^4 vier samenvallende punten gemeen heeft. Teneinde te weten te komen hoeveel van zulke raakvlakken C^4 bezit, herinneren we ons hoe men uit één raakpunt X_1 van een dubbelraakvlak het tweede raakpunt X_3 vindt. Men moet dan (bl. 63) de toegevoegde raaklijn van Y_1 construeeren, die de involutiekegelsnede in O moge raken; uit O zijn dan twee raaklijnen naar C^2 te trekken, wier raakpunten de gezochte punten Y_3 zullen zijn. Klaarblijkelijk vormen dus de punten Y_1 en Y_3 een involutorische verwantschap (2, 2) op C^2. De directiekromme van een dergelijke verwantschap is een kegelsnede, die door D^2 zal worden voorgesteld. Wanneer een punt Y_1 met een van zijn toegevoegde punten Y_3 samenvalt, is Y_1 raakpunt van een stationnair raakvlak; tevens wordt echter de lijn $Y_1\,Y_3$, die reeds raaklijn was van D^2, eveneens raaklijn van C^2. Nu hebben echter C^2 en D^2 vier gemeenschappelijke raaklijnen, dus: C^4 bezit vier stationnaire raakvlakken (bl. 11).

Constructie van de raakpunten der stationnaire raakvlakken.

We stellen ons tot taak de beelden van de raakpunten dezer stationnaire raakvlakken te zoeken, waarvoor we de kegelsnede D^2 moeten kennen. We keeren daartoe terug tot de I_3 der steunpunten van trisecanten. Deze

I_3 bezit vier groepen welke bestaan uit een dubbelelement d en een vertakkingselement v. Men ziet gemakkelijk in dat de punten v de snijpunten zijn van C^2 en J^2 en dat d de punten zijn, waar de gemeenschappelijke raaklijnen van C^2 en J^2 de kegelsnede C^2 raken. Voorts gaat telkens de raaklijn aan J^2 in elk der punten v door het punt d, dat met v een groep der I_3 vormt. Het is uit het vroeger behandelde (bl. 14) duidelijk dat de punten d de beelden zijn van de raakpunten en v van de snijpunten der vier rakende trisecanten.

We gaan nu de beteekenis na der punten d en v voor de involutorische verwantschap (2,2) der raakpunten van dubbelraakvlakken. Denkt men zich Y_1 in een der punten d gekomen dan is dv de toegevoegde raaklijn aan J^2, en haar raakpunt O komt te liggen in v. Nu ligt v echter op C^2; de beide raaklijnen uit v aan C^2 vallen dus samen, v is dus een dubbelelement van de bovenbedoelde verwantschap (2,2). Men komt dus tot dit bijzondere resultaat:

De I_3 der steunpunten van trisecanten en de involutorische verwantschap (2,2) der raakpunten van dubbelraakvlakken staan in een zoodanig verband dat de dubbelelementen van de eerste de vertakkingselementen van de tweede zijn, en omgekeerd.

Hieruit volgt nu aanstonds dat de kegelsnede D^2 door de vier punten d gaat en daar de vier lijnen dv tot raaklijnen heeft. Men heeft dus het volgende voorschrift:

Om de beelden van de raakpunten der stationnaire raakvlakken te vinden construeere men een kegelsnede D^2, die C^2 snijdt in de vier punten, waar C^2 door de gemeenschappelijke raaklijnen van C^2 en J^2 wordt geraakt, en die in deze punten de overige vandaar aan J^2 te leggen raaklijnen raakt. De gemeenschappelijke raaklijnen der kegelsneden C^2 en D^2 raken C^2 in de gezochte punten.

3. *De hoofdkoorden.*

Dubbele osculatiekoorden.

We stellen thans weer de vraag of twee punten op de kromme C^4 zoo gelegen kunnen zijn dat elk hunner gelegen is in het osculatievlak van het andere. De planaire buigpunten, die als oneigenlijke oplossingen van deze vraag zijn te beschouwen, zonderen we daarbij uit.

Wanneer X en Z de beelden zijn van osculatiepunt en restpunt van een osculatievlak en wanneer men alle punten X met de bijbehoorende punten Z verbindt omhullen al deze lijnen een kromme, die we thans nader gaan bepalen. In de leer der verwantschappen wordt bewezen dat de directiekromme van een verwantschap (m, n) een kromme is van de klasse $m+n$ en van den graad $2\,m\,n$, die $^1/_2\,m\,(m-1)+{}^1/_2\,n\,(n-1)$ dubbelraaklijnen heeft. Nu bepaalt in ons geval elk punt X één punt Z, terwijl elk punt Z drie punten X levert (bl. 64); de lijnen $X\,Z$ omhullen dus een kromme van de vierde klasse en den zesden graad, met drie dubbelraaklijnen.

Noemen we de dubbelraaklijnen Δ_1, Δ_2 en Δ_3; haar snijpunten met C^2 zullen door X_1 en Z_1, X_2 en Z_2, X_3 en Z_3 worden voorgesteld. Een dubbelraaklijn der directiekromme kan slechts ontstaan doordat een paar, b.v. X_1, Z_1, involutorisch is, zoodat $X_1\,Z_1$ tweemaal als raaklijn der directiekromme voorkomt. Herinneren we ons nu hoe uit het beeld van een osculatiepunt het beeld van het bijbehoorende restpunt wordt verkregen dan is het duidelijk dat de punten X_1 en Z_1 de volgende bijzondere ligging moeten hebben. Bij X_1 construeert men de toegevoegde raaklijn $X_1'X_1''$, die J^2 in O_1 raakt; bij Z_1 evenzoo de toegevoegde raaklijn $Z_1'Z_1''$, die J^2 in Q_1 raakt. Nu onderstelden we dat bij X_1 als osculatiepunt Z_1 als restpunt wordt gevonden en wederkeerig bij Z_1 als osculatiepunt X_1 als restpunt. De raaklijnen $X_1\,O_1\,Z_1$ en $Z_1\,Q_1\,X_1$ der directiekromme hebben de punten X_1 en Z_1 gemeen en vallen dus samen; de vier punten X_1, Z_1, O_1 en Q_1 liggen nu op één lijn Δ_1, die dus inderdaad als dubbelraaklijn van de directiekromme optreedt. Wanneer de genoemde toegevoegde raaklijnen $X_1'X_1''$ en $Z_1'Z_1''$ elkaar in D_1 snijden is D_1 dus de pool van Δ_1 ten opzichte van de kegelsnede J^2.

Op de ruimtekromme beantwoorden aan het paar X_1, Z_1 twee punten A_1, B_1, die elk het snijpunt zijn van C^4 met het osculatievlak van het andere punt. De vlakkenbundel met $A_1 B_1$ als as bepaalt op C^4 dus een I_2, waarvan A_1 en B_1 zelf de dubbelpunten zijn. Keeren we nu tot de afbeelding terug; elke lijn door D_1 bepaalt op C^2 twee punten, die de beelden zijn van twee punten, die met A_1 en B_1 in één vlak liggen (bl. 62). De genoemde I_2 wordt dus afgebeeld door de paren snijpunten van C^2 met alle lijnen door D_1. Nu zijn echter A_1 en B_1 zelf de dubbelpunten der I_2; in de afbeelding moeten dus de lijnen, die D_1 met X_1 en Z_1 verbinden, in de laatstgenoemde punten aan C^2 raken, zoodat D_1 en Δ_1 niet slechts voor J^2, maar ook voor C^2 als pool en poollijn optreden. Daar hetzelfde voor de overige dubbelraaklijnen geldt kan men zeggen:

Wanneer men in alle driehoeken, die in C^2 en om J^2 beschreven zijn, de hoekpunten verbindt met de raakpunten der overliggende zijden, dan omhullen deze lijnen een kromme van de vierde klasse, die de zijden van den aan beide kegelsneden gemeenschappelijken pooldriehoek tot dubbelraaklijnen heeft.

We zagen reeds wat de beteekenis van het voorgaande voor de ruimtekromme is. Deze bezit drie koorden $A B$, volgens welke telkens twee osculatievlakken elkaar snijden; ze worden de hoofdkoorden of dubbele osculatiekoorden genoemd (bl. 16).

De drie hoofdkoorden gaan door één punt.

De zijde $X_2 Z_2$ of Δ_2 van den driehoek $D_1 D_2 D_3$ gaat door het punt D_1; dit beteekent echter dat X_2 en Z_2 met X_1 en Z_1 beelden zijn van een complanaire groep. Derhalve wordt $A_1 B_1$ door $A_2 B_2$ gesneden. Elke hoofdkoorde wordt dus door elk der overige hoofdkoorden gesneden en daar ze niet alle drie in één vlak kunnen liggen gaan de drie hoofdkoorden dus door één punt.

Een I_4 op C^4. Reeds werd opgemerkt dat elke lijn door D_1 de kegelsnede C^2 in twee punten snijdt, die met X_1 en Z_1 de afbeelding van een complanaire groep zijn. Daardoor wordt op C^2 een I_2 bepaald, welke de afbeelding is der I_2, die de vlakkenbundel met $A_1 B_1$ als as op C^4 insnijdt. Merkt men op dat, zoowel ten opzichte van C^2 als van J^2, Δ_1 de poollijn is van D_1 dan blijkt dat de vier snijpunten van C^2 en J^2 de hoekpunten van een volledigen vierhoek zijn, waarvan de paren overliggende zijden telkens door een der punten D gaan. Deze vier punten vormen dus, twee aan twee genomen, paren der bovenbedoelde quadratische involuties. Nu zijn echter de snijpunten van C^2 en J^2 de vertakkingspunten der fundamentale I_3. d. w. z. de beelden van de snijpunten der rakende trisecanten. Derhalve:

De vier snijpunten van C^4 met hare rakende trisecanten liggen twee aan twee in vlakken, die door de hoofdkoorden gaan. Door elk der hoofdkoorden gaan twee dezer vlakken.

De punten d, waar C^2 geraakt wordt door de gemeenschappelijke raaklijnen van C^2 en J^2, zijn de dubbelelementen der fundamentale I_3 (bl. 67), d. w. z. zij zijn de beelden van de vier punten, waar C^4 door de rakende trisecanten wordt geraakt. Uit het feit dat D_1 en Δ_1 pool en poollijn zijn, zoowel ten opzichte van C^2 als van J^2, volgt nu dat van den volledigen vierhoek der punten d eveneens $D_1 D_2 D_3$ de diagonaaldriehoek is. Dit beteekent echter in verband met het voorgaande:

De vier raakpunten van C^4 met hare rakende trisecanten liggen twee aan twee in vlakken, die door de hoofdkoorden gaan. Door elk der hoofdkoorden gaan twee dezer vlakken.

We bewijzen nu nog dat ook de vier raakpunten der stationnaire raakvlakken de eigenschap bezitten, die boven voor de snijpunten en de raakpunten der rakende trisecanten werd gevonden. De beelden van de raakpunten der stationnaire raakvlakken worden bepaald als de raakpunten van C^2 met de gemeenschappelijke raaklijnen van C^2 en een zekere kegelsnede D^2, die door de vier punten d gaat (bl. 67). De kegelsneden C^2 en D^2 hebben dus eveneens $D_1 D_2 D_3$ tot gemeenschappelijke pooldriehoek, die dus ook diagonaaldriehoek zal zijn van den volledigen vierhoek, welks hoekpunten de raakpunten van C^2 met de gemeenschappelijke raaklijnen van D^2 en C^2 zijn. Derhalve:

De vier raakpunten van C^4 met hare stationnaire raakvlakken liggen twee aan twee in vlakken, die door de hoofdkoorden gaan. Door elk der hoofdkoorden gaan twee dezer vlakken.

We kunnen nu, wanneer de ligging der punten D_1, D_2 en D_3 eenmaal bekend is, oneindig vele volledige vierhoeken $u_1 u_2 u_3 u_4$ construeeren, die in C^2 beschreven zijn en alle $D_1 D_2 D_3$ tot diagonaaldriehoek bezitten. Men kan n.l. uitgaan van een willekeurig punt u_1; de lijnen, die u_1 met D_1, D_2 en D_3 verbinden, bepalen op C^2 de overige punten u_2, u_3 en u_4. Aangezien de punten u volkomen verwisselbaar zijn, terwijl de groep door één harer punten is bepaald, ontstaat aldus op C^2 een I_4. Daar de verbindingslijnen der punten u door de punten D_1, D_2 en D_3 gaan bestaat de I_4 eigenlijk uit drie quadratische involuties I_2, waarvan de zes dubbelpunten tevens de dubbelelementen van I_4 zijn. Past men deze resultaten op de ruimtekromme C^4 toe dan heeft men dus:

Op C^4 bestaat een I_4, die op de volgende wijze is bepaald: als men een punt P van een groep geeft vindt men de overige punten der groep als snijpunten van C^4 met de drie vlakken, die men door P en telkens een hoofdkoorde kan leggen. Deze I_4 heeft als dubbelpunten de zes steunpunten der drie hoofdkoorden en bestaat eigenlijk uit drie quadratische involuties I_2. Bijzondere groepen der I_4 worden gevormd door de raakpunten der stationnaire raakvlakken, de raakpunten der rakende trisecanten en de snijpunten dezer trisecanten.

Tetraëders, beschreven in C^4.

Verbindt men de punten eener groep van I_4 onderling dan ontstaat een viervlak, dat in C^4 is beschreven en welks overstaande ribben telkens door een hoofdkoorde worden gesneden. Men kan derhalve het laatstgevonden resultaat ook aldus weergeven:

In C^4 kunnen oneindig vele tetraëders worden beschreven, waarvan elk paar overstaande ribben door een der hoofdkoorden wordt gesneden.

HOOFDSTUK IV.

De afbeelding van de bijzondere krommen van den vierden graad en de tweede soort.

1. *De afbeelding van de kromme C^4 met oneindig vele drietallen in één punt samenkomende raaklijnen.*

Een bijzondere C^4. Op bl. 66 werd gevonden dat de raakpunten van de dubbelraakvlakken der algemeene C^4 paren eener involutorische verwantschap (2, 2) vormen. Nu wordt in de verwantschapstheorie bewezen dat een involutorische verwantschap in een involutie overgaat wanneer in één groep de elementen volkomen verwisselbaar zijn. Indien dus in ons geval één groep van drie punten is aan te wijzen, zoodanig dat ieder met elk der overige een paar raakpunten van een dubbelraakvlak voorstelt, dan zal de verwantschap geheel uit zulke groepen bestaan, m.a.w. de involutorische verwantschap (2, 2) zal in een I_3 zijn overgegaan. In de afbeelding wordt dan de directiekegelsnede D^2 een involutiekegelsnede.

Om de beteekenis van de bedoelde bijzonderheid voor onze ruimtekromme na te gaan onderstellen we dat A_1, A_2 en A_3 drie punten op C^4 voorstellen, die paarsgewijze raakpunten van dubbelraakvlakken zijn; de raaklijnen van C^4 in die punten zullen a_1, a_2 en a_3 worden genoemd. Dan liggen a_1 en a_2 in één vlak, het dubbelraakvlak in A_1, A_2; ze snijden elkaar dus, en daar hetzelfde voor de beide andere combinaties geldt wordt elk der raaklijnen a_1, a_2 en a_3 door elk der overige gesneden. De drie raaklijnen kunnen echter niet in één vlak liggen, daar dat vlak met C^4 zes punten gemeen zou hebben; ze moeten dus door één punt gaan. In verband met het voorafgaande hebben we dus aanstonds de eigenschap:

Wanneer een C^4 één drietal in één punt samenkomende raaklijnen bezit zijn al hare raaklijnen in zulke drietallen gerangschikt; de raakpunten dezer raaklijnen vormen op C^4 een I_3.

Bewijs dat de bijzondere C^4 inderdaad bestaat.

Bij de voorafgaande beschouwingen is nog steeds in het midden gelaten of werkelijk een C^4 één drietal in één punt samenkomende raaklijnen kan bezitten. Men kan echter gemakkelijk aantoonen dat dit inderdaad het geval is. Cayley toch heeft bewezen dat men van een ruimtekromme van den vierden graad en de tweede soort acht punten willekeurig kan aannemen. [1]) Kiest men nu drie lijnen, die in één punt samenkomen en op elk dezer een punt en voorts nog twee punten willekeurig in de ruimte dan is er blijkbaar een C^4 mogelijk, die de drie lijnen in de gegeven punten raakt en nog door de overige twee punten gaat. Derhalve:

Er bestaat een bijzondere C^4, welke oneindig vele drietallen in één punt samenkomende raaklijnen bezit.

Deze bijzondere kromme is ons reeds van vroeger bekend; ze werd uitvoerig in Hoofdstuk II, 1 behandeld. Aldaar werd ook gevonden dat ze steeds gekenmerkt is door de eigenschap dat haar vier buigpunten in één vlak liggen.

De snijpunten der rakende trisecanten vallen samen met de buigpunten.

Uit de afbeelding dezer bijzondere C^4 leidt men nog een nieuwe eigenschap af. We weten (bl. 67) dat de I_3 der steunpunten van trisecanten en de I_3 der raakpunten van dubbelraakvlakken (waarin thans de (2, 2) van vroeger is overgegaan) aldus met elkaar in verband staan dat de vertakkingselementen van de eene de dubbelelementen van de andere zijn, en omgekeerd. Nu zijn

[1]) Zie hiervoor b.v.: Salmon. Analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Fiedler. Zweiter Theil. Leipzig 1880. § 113.

de vertakkingselementen der I_3 van de steunpunten van trisecanten de snijpunten der rakende trisecanten; de dubbelelementen der I_3 van de raakpunten van dubbelraakvlakken zijn de raakpunten der stationnaire raakvlakken. En dus:

Als een C^4 oneindig vele drietallen in één punt samenkomende raaklijnen bezit vallen de snijpunten harer rakende trisecanten samen met de raakpunten der stationnaire raakvlakken.

Hierbij kan worden opgemerkt dat dit resultaat inderdaad slechts geldt voor de hier besproken bijzondere kromme. Immers zoolang de involutorische verwantschap (2, 2) der raakpunten van dubbelraakvlakken nog geen I_3 is zal een dubbelelement dezer verwantschap geen planair buigpunt aanwijzen, aangezien de samenvallende elementen niet *met elkaar* overeenkomen.

Ander bewijs dezer eigenschap.

Nu het zooeven gevonden resultaat eenmaal bekend is kan het gemakkelijk worden gecontroleerd met behulp van de formules. Want volgens (1) worden de planaire buigpunten aangewezen door:

$$t^4 + 6\,m\,t^2 + 1 = 0$$

terwijl de snijpunten der rakende trisecanten worden gevonden uit vergelijking (6):

$$4\,m^3\,t^4 - (3\,m^4 + 6\,m^2 - 1)\,t^2 + 4\,m^3 = 0$$

Kiest men nu $3\,m^2 = -1$, of $m = {}^1/_3\,i\sqrt{3}$, waardoor de bovenbesproken C^4 is gekenmerkt (bl. 34) dan nemen de beide vergelijkingen dezelfde gedaante aan, n.l.

$$t^4 + 2\,i\,t^2\sqrt{3} + 1 = 0$$

zoodat ons resultaat is teruggevonden.

Toepassing van het voorgaande op de afbeelding.

Zooeven werd reeds opgemerkt, dat de elementen, die in een dubbelpunt van de I_3 der raakpunten van dubbelraakvlakken (d. i. een vertakkingspunt v van de I_3 der steunpunten van trisecanten) samenvallen, thans aan elkaar zijn toegevoegd, hetgeen in het algemeene geval niet zoo is. Dit leidt, in verband met Hoofdstuk III, nog tot de volgende eigenschap voor de afbeelding:

De raaklijnen, in de punten v aan de kegelsnede C^2 gelegd, zijn tevens raaklijnen aan de involutiekegelsnede D^2.

2. *De afbeelding van de kromme C^4 met twee stationnaire raaklijnen.*

Stationnaire raaklijnen.

In Hoofdstuk II, 2 werd het geval besproken dat de I_3 der steunpunten van trisecanten twee drievoudige elementen bezit; elk drievoudig element vertegenwoordigt dan twee der dubbelelementen. Voor de ruimtekromme C^4 beteekent dit dat ze in plaats van vier rakende trisecanten twee stationnaire raaklijnen bezit, d. w. z. lijnen, die drie opeenvolgende punten met C^4 gemeen hebben; C^4 heeft dan twee lineaire buigpunten.

Eigenschap der kromme C^4 met twee stationnaire raaklijnen.

De theorie der cubische involuties geeft voor de hier bedoelde bijzondere C^4 nog een merkwaardig resultaat. We zagen (bl. 39) dat de raakpunten der stationnaire raaklijnen òf beide reëel òf toegevoegd imaginair zijn. Nu heeft Weyr [1]) voor de I_3 met twee drievoudige elementen de volgende eigenschappen bewezen:

„Heeft een I_3 twee reëele drievoudige elementen dan bestaat elk van haar groepen uit één reëel element en twee toegevoegd imaginaire elementen."

„Heeft een I_3 twee toegevoegd imaginaire drievoudige elementen dan bestaan haar groepen uitsluitend uit reëele elementen."

Dit brengt ons aanstonds tot de volgende eigenschappen voor de ruimtekromme:

Wanneer een C^4 twee reëele stationnaire raaklijnen bezit, dan snijdt elke trisecante de kromme in één reëel punt en in twee imaginaire punten.

Wanneer een C^4 twee imaginaire stationnaire raaklijnen bezit, dan snijdt elke trisecante de kromme in drie reëele punten.

---

[1]) Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen. Abhandlungen der böhmischen Gesellsch. d. Wiss. (Prag). VI. 7. 1874. § 12.

Ligging van de involutie-kegelsnede J^2 in dit geval.

Bij het afbeelden der algemeene C^4 op een kegelsnede C^2 werden de dubbelelementen van de I_3 der steunpunten van trisecanten gevonden als de punten waar C^2 geraakt wordt door de gemeenschappelijke raaklijnen van C^2 en J^2 (bl. 67).

Deze raakpunten moeten hier twee aan twee samenvallen; de involutiekegelsnede J^2 moet C^2 dus in twee punten aanraken, welke de beelden van de lineaire buigpunten zijn.

Nadere beschouwing van het geval, waarin de lineaire buigpunten imaginair zijn.

Wanneer de raakpunten der stationnaire raaklijnen imaginair zijn kan men met voordeel C^4 op de volgende wijze afbeelden. Men kiest voor C^2 een cirkel en beschouwt zijn oneindig verre punten als beelden van de raakpunten der stationnaire raaklijnen. De involutiekegelsnede J^2, die C^2 in de bedoelde punten moet raken, is dan eveneens een cirkel, concentrisch met C^2. Aangezien C^2 en J^2 nog steeds de ligging van Poncelet moeten vertoonen is de straal van J^2 de helft van dien van C^2 en zullen de driehoeken, die men *in* C^2 en tevens *om* J^2 kan beschrijven, in dit geval gelijkzijdig zijn. De hoekpunten A_1, A_2 en A_3 van een dezer driehoeken zijn dus de beelden van drie op eenzelfde trisecante gelegen punten van C^4. Hiermee vinden we bevestigd dat de trisecanten eener C^4 met imaginaire stationnaire raaklijnen de kromme steeds in drie reëele punten snijden. Gemakkelijk vindt men nu uit de boven beschreven wijze van afbeelden een aantal, grootendeels reeds uit Hoofdstuk II bekende, eigenschappen van C^4 met stationnaire raaklijnen.

Op bl. 64 werd aangegeven hoe men, wanneer eenig punt van C^4 door zijn beeld A_1 is gegeven, het beeld kan construeeren van het punt, waar het osculatievlak in het gegeven punt C^4 snijdt. Men moet dan door A_1 de beide raaklijnen aan J^2 leggen, waardoor men de toegevoegde raaklijn $A_2 A_3$ verkrijgt, die J^2 in O_1 raakt; de lijn, die A_1 met O_1 verbindt, snijdt C^2 ten tweeden male in een punt B_1, dat het beeld van het gezochte restpunt is. Blijkbaar is nu B_1 eenvoudig het andere uiteinde der door A_1 gaande middellijn van den cirkel C^2.

Dubbele osculatiekoorden.

Nu zijn echter A_1 en B_1 gelijkwaardig, d.w.z. als B_1 het beeld van een osculatiepunt is zal A_1 dat van het bijbehoorende restpunt zijn. Elke verbindingslijn van een osculatiepunt met zijn restpunt is dus dubbele osculatiekoorde en de kromme heeft de bijzonderheid dat ze oneindig vele dubbele osculatiekoorden bezit. Inderdaad werd op bl. 39 bewezen dat de beide eigenschappen: het bezit van twee stationnaire raaklijnen en het voorkomen van oneindig vele dubbele osculatiekoorden, steeds samengaan.

Wanneer men om A_1 als hoekpunt een rechten hoek laat wentelen verkrijgt men een quadratische straleninvolutie, waarin de raaklijn, in A_1 aan C^2 gelegd, aan $A_1 B_1$ is toegevoegd, en die de isotrope lijnen als dubbelelementen bezit. Derhalve:

De steunpunten eener dubbele osculatiekoorde worden harmonisch gescheiden door de lineaire buigpunten.

Dit resultaat kan men ook langs anderen weg gemakkelijk vinden. Immers in de parametervoorstelling volgens Cremona (bl. 42) worden de lineaire buigpunten door de waarden 0 en ∞ gekenmerkt, terwijl de parameterwaarden van de steunpunten eener dubbele osculatiekoorde door de betrekking (31) zijn verbonden. Hieruit volgt de bedoelde harmonische ligging onmiddellijk.

Projecteert men de punten A_1, A_2, A_3 en B_1 uit A_1 op de raaklijn in B_1 dan blijkt nog gemakkelijk de waarheid der volgende stelling:

De steunpunten eener dubbele osculatiekoorde worden harmonisch gescheiden door de punten, die met een dezer steunpunten op dezelfde trisecante liggen.

Door een punt der C^4 met twee stationnaire raaklijnen is

Voor het construeeren der beelden van de steunpunten der osculatievlakken, die in een gegeven punt van C^4 samenkomen, werd op bl. 65 een methode aangegeven. Men maakt daarbij gebruik van een zekere kegelsnede slechts één osculatievlak aan C^4 te leggen.

K^2, die C^2 behalve in het gegeven punt in nog drie punten snijdt, die de beelden der gezochte punten zullen zijn. Het blijkt gemakkelijk, wanneer men hier voor een punt B_1 op C^2 deze methode tracht te volgen, dat de kegelsnede K^2 ontaardt, en wel in de lijn in het oneindige en in de door B_1 gaande middellijn. Het andere uiteinde A_1 dezer middellijn levert dus de eenige oplossing van ons vraagstuk; de beide overige komen steeds overeen met de imaginaire cirkelpunten, welke de beelden zijn der lineaire buigpunten. Dat deze hier worden gevonden wordt aanstonds duidelijk als men bedenkt dat elk vlak, dat door een stationnaire raaklijn gaat, drie opeenvolgende punten met C^4 gemeen heeft, dus als een oneigenlijk osculatievlak is op te vatten.

Daar uit elk punt van C^4 één osculatievlak aan C^4 is te leggen en daar het osculatievlak in het gekozen punt voor drie samenvallende osculatievlakken is te tellen vindt men dat de C^4 met twee stationnaire raaklijnen van de vierde klasse is, hetgeen ook reeds in Hoofdstuk II was afgeleid.

De planaire buigpunten vallen met de lineaire buigpunten samen.

Om de beelden van de raakpunten der stationnaire raakvlakken te construeeren werd gebruik gemaakt van een zekere kegelsnede D^2, die C^2 snijdt in de vier punten, waar C^2 door de gemeenschappelijke raaklijnen van C^2 en J^2 wordt aangeraakt (bl. 67). In ons geval raken C^2 en J^2 elkaar in de oneindig verre imaginaire cirkelpunten en zal D^2 dus eveneens daar ter plaatse C^2 en J^2 aanraken. De kegelsnede D^2 is dan een met C^2 en J^2 concentrische cirkel. De gemeenschappelijke raaklijnen van C^2 en D^2 raken C^2 in de beelden der gezochte planaire buigpunten, welke dus hier twee aan twee met de lineaire buigpunten samenvallen (vergelijk bl. 40).

Elke raaklijn van C^4 wordt in dit geval door twee imaginaire raaklijnen gesneden.

In Hoofdstuk III, 2 werd gevonden dat elke raaklijn van C^4 door twee andere raaklijnen wordt gesneden, en dat men, als het raakpunt A_1 van de eerste raaklijn is gegeven, de raakpunten der beide andere als volgt kan bepalen: men zoekt het punt O_1, waar de toegevoegde raaklijn van A_1 de involutiekegelsnede J^2 raakt, en trekt uit O_1 de beide raaklijnen aan C^2. De raakpunten dezer raaklijnen zijn dan de beelden der punten, wier raaklijnen de raaklijn van A_1 snijden. Aangezien nu in ons geval J^2 geheel binnen C^2 ligt en de raaklijnen uit eenig punt van J^2 aan C^2 dus imaginair zijn heeft men:

Als een C^4 twee imaginaire stationnaire raaklijnen bezit wordt elk harer raaklijnen door twee imaginaire raaklijnen gesneden.

De dubbelkromme D^6 van het raaklijnenoppervlak is dus in dit geval imaginair.

---

3. *De afbeelding van de kromme C^4 met een dubbelpunt.*

Algemeene opmerkingen. Wanneer een C^4 een dubbelpunt bezit is, zooals men gemakkelijk inziet, de methode van afbeelden, die in Hoofdstuk III voor de algemeene C^4 werd uiteengezet en die ook voor de tot dusver behandelde bijzondere krommen kon worden gebezigd, niet langer van toepassing. Immers haar uitgangspunt was de I_3 van de steunpunten der trisecanten; deze I_3 werd op de kegelsnede C^2 afgebeeld door drietallen punten, wier verbindingslijnen raaklijnen waren van een andere kegelsnede, de involutiekegelsnede J^2. Nu bezit een kromme C^4 met een dubbelpunt geen eigenlijke trisecanten; deze zijn thans vervangen door de lijnen, die het dubbelpunt met de punten van C^4 verbinden. Van alle groepen der I_3 zijn dus twee punten vast, terwijl de overige een enkelvoudige puntenreeks vormen. Het is duidelijk dat hiermee de tot dusver gevolgde wijze van afbeelden voor de C^4 met een dubbelpunt vervalt.

Wel blijft gelden wat in den aanvang van Hoofdstuk III is gezegd over het al of niet willekeurig aannemen van de kegelsnede C^2. Daarbij heeft men slechts de hyperboloïde H te vervangen door den kegel Γ, die C^4 uit het dubbelpunt projecteert (bl. 48) en die thans het regelvlak der trisecanten vertegenwoordigt.

De reciproke involuties.

Alvorens tot het afbeelden van C^4 over te gaan beschouwen we eenige quadratische involuties, die bij de verschillende constructies worden toegepast.

In Hoofdstuk II, 3 werd gevonden dat in den bundel van quadratische oppervlakken, waarvan C^4 de basiskromme is, behalve de bovengenoemde kegel Γ, nog twee kegels Γ_1 en Γ_2 voorkomen, die C^4 dubbel projecteeren. De ribben van elken dezer kegels bepalen op C^4 een quadratische punteninvolutie. We zullen twee punten van C^4, die op dezelfde kegelribbe liggen, „reciproke punten" noemen, hun verbindingslijn een „reciproke koorde" en de I_2, door de paren gevormd, de „reciproke involutie". Er bestaan dus twee dergelijke reciproke involuties op C^4.

Aangezien een raakvlak aan Γ_1 of Γ_2 een dubbelraakvlak van C^4 is blijkt hieruit tevens dat er twee stelsels van dubbelraakvlakken zijn; de vlakken van het eene stelsel omhullen den kegel Γ_1, die van het andere stelsel den kegel Γ_2. De paren raakpunten van het eene stelsel vormen de eerste, die van het andere de tweede reciproke involutie.

Stelt men in (36) $u_3 = u_1$ en $u_4 = u_2$ dan verkrijgt men

$$u_1^2\, u_2^2 = k$$

Deze betrekking geeft het verband aan tusschen de parameters van de raakpunten van een dubbelraakvlak. Ze wordt gesplitst in:

$$u_1\, u_2 = +\sqrt{k} \qquad \text{en} \qquad u_1\, u_2 = -\sqrt{k}$$

Deze vergelijkingen bepalen dus de beide stelsels raakpuntenparen van dubbelraakvlakken; ze zijn de verwantschapsvergelijkingen der beide reciproke involuties.

De dubbelpunten B_1 en B_1' der eerste reciproke involutie worden bepaald door $u^2 = +\sqrt{k}$, hun parameters zijn dus $+\sqrt[4]{k}$ en $-\sqrt[4]{k}$; die der tweede reciproke involutie, B_2 en B_2', worden aangewezen door $u^2 = -\sqrt{k}$, hun parameters zijn dus $+i\sqrt[4]{k}$ en $-i\sqrt[4]{k}$. Nu zijn $+\sqrt[4]{k}$, $-\sqrt[4]{k}$, $+i\sqrt[4]{k}$ en $-i\sqrt[4]{k}$ juist de wortels van (37), derhalve:

De vier dubbelpunten der beide reciproke involuties liggen in de planaire buigpunten.

Voorts vindt men voor de dubbelverhouding dezer vier punten:

$$(B_1 B_1' B_2 B_2') = \frac{i\sqrt[4]{k} - \sqrt[4]{k}}{i\sqrt[4]{k} + \sqrt[4]{k}} : \frac{-i\sqrt[4]{k} - \sqrt[4]{k}}{-i\sqrt[4]{k} + \sqrt[4]{k}} =$$

$$= \frac{(i-1)^2}{(i+1)^2} = -1\,;$$

dus:

De vier buigpunten vormen een harmonische groep.

Uit de vergelijkingen der reciproke involuties of ook uit de beschouwing der dubbelprojecteerende kegels volgt nog:

Elke reciproke koorde wordt door elke andere reciproke koorde van hetzelfde stelsel gesneden.

De harmonische involutie.

Behalve de beide reciproke involuties kan men op C^4 nog de involutie beschouwen, die tot vergelijking heeft:

$$u_1 + u_2 = 0$$

Haar puntenparen worden harmonisch gescheiden door de punten $u = 0$ en $u = \infty$, die de op elkaar vallende punten van het dubbelpunt kenmerken (bl. 45); ze zal de „harmonische involutie" worden genoemd. Blijkbaar zijn B_1, B_1' en B_2, B_2' paren dezer involutie, dus:

De dubbelpunten der reciproke involuties vormen twee puntenparen van de harmonische involutie.

De harmonische involutie onderscheidt zich van de reciproke involuties doordat de verbindingslijnen harer puntenparen („harmonische koorden") elkaar niet snijden. Deze opmerking is van belang met het oog op de toepassing van deze involuties in het volgende.

De afbeelding van de merkwaardige punten en de fundamentale involuties op C^2.

We onderstellen thans dat op de kegelsnede C^2 de beelden D_1 en D_2 der naburige punten van het dubbelpunt zijn gegeven alsmede die der buigpunten B_1 en B_1'. Deze punten mogen niet geheel willekeurig worden aangenomen, daar ze een harmonische groep vormen (zie boven); de verbindingslijn b_1 van B_1 en B_1' gaat dus door het snijpunt O der raaklijnen, die in D_1 en D_2 aan C^2 kunnen worden gelegd.

Wanneer men nu nog in B_1 en B_1' eveneens de raaklijnen aan C^2 trekt dan ligt haar snijpunt P_1 (de pool van b_1) op de verbindingslijn d van D_1 en D_2. Teneinde nu nog de beelden B_2 en B_2' der overige buigpunten te vinden kan men opmerken dat deze zoowel door B_1 en B_1' als door D_1 en D_2 harmonisch worden gescheiden (zie boven). De lijn b_2, waarop B_2 en B_2' liggen, gaat dus zoowel door O als door P_1 en is dus de verbindingslijn dezer punten; waar zij C^2 snijdt liggen de punten B_2 en B_2'.

Het snijpunt P_2 van b_1 en d is nu blijkbaar de pool van b_2; de driehoek OP_1P_2 is een pooldriehoek van C^2.

Uit het voorgaande volgt nog dat, als D_1, D_2, B_1 en B_1' reëel zijn, b_2 buiten de kegelsnede valt, zoodat B_2 en B_2' imaginair worden. Van de vier buigpunten zullen dus steeds twee reëel en twee imaginair zijn.

Als we de verkregen resultaten samenvatten vinden we dus dat elk puntenpaar van de harmonische involutie op een rechte door O ligt, dat elk paar van de eerste reciproke involutie op een rechte door P_1 en elk paar van de tweede reciproke involutie op een rechte door P_2 ligt.

Het punt van C^4 te zoeken, dat met drie gegeven punten van C^4 complanair is.

We gaan thans over tot het hoofdprobleem: wanneer gegeven zijn de beelden Y_1, Y_2 en Y_3 van drie punten X_1, X_2 en X_3 van C^4 vraagt men het beeld Y_4 van het punt X_4 te vinden, dat met de drie gegeven punten in één vlak ligt.

Denkt men zich weer, evenals in het algemeene geval, een vlakkenbundel met $X_1 X_2$ als as dan bepaalt deze op C^4 een I_2, waarin het gezochte punt X_4 aan X_3 is toegevoegd. Kende men in de afbeelding het centrum C_{12} dezer I_2 dan zou de vraag dadelijk kunnen worden beantwoord. Nu is het echter mogelijk twee bijzondere groepen aan te wijzen. Vooreerst zal D_1, D_2 een paar van elke I_2 als boven bedoeld voorstellen, zoodat C_{12} op d moet liggen. Wanneer men voorts het punt Y_1' bepaalt, dat in de eerste reciproke involutie aan Y_1 is toegevoegd, en het punt Y_2', dat in diezelfde involutie met Y_2 overeenkomt, dan zal Y_1', Y_2' eveneens een paar der bedoelde I_2 zijn, aangezien twee reciproke koorden van hetzelfde stelsel elkaar snijden (zie boven) en dus Y_1, Y_2, Y_1', Y_2' een complanaire groep voorstelt.

Men heeft nu blijkbaar het volgende:

Om het beeld Y_4 te vinden van het punt, dat met drie, door hun beelden Y_1, Y_2 en Y_3 gegeven, punten complanair is, bepaalt men de snijpunten Y_1' en Y_2' van C^2 met de lijnen die Y_1 en Y_2 met P_1 verbinden. De lijn Y_1' Y_2' snijdt d in een punt C_{12}; het punt, waar de lijn Y_3 C_{12} nogmaals C^2 snijdt, is het gezochte punt Y_4.

Het is duidelijk dat men hier en in het volgende in plaats van de eerste reciproke involutie ook de tweede kan bezigen. De harmonische involutie is niet bruikbaar omdat twee harmonische koorden elkaar niet snijden.

Verder valt weer op te merken dat men als as van den vlakkenbundel ook X_1 X_3 of X_2 X_3 had kunnen nemen. Men zou dan als centrum der I_2 het snijpunt C_{13} van d met Y_1' Y_3' of het snijpunt C_{23} van d met $Y_2'Y_3'$ hebben verkregen. Zoowel de lijn Y_2 C_{13} als Y_1 C_{23} zou het gezochte punt Y_4 op C^2 hebben bepaald.

Ligging van vier punten op C^2, die de beelden zijn van vier complanaire punten op C^4.

Wanneer men niet in het bijzonder X_4 door X_1, X_2 en X_3, doch telkens elk der vier punten door de overige drie bepaald denkt verkrijgt men nog drie punten C_{14}, C_{24} en C_{34} op d. Men komt dan tot den volgenden algemeenen regel:

Vier punten Y_1, Y_2, Y_3 en Y_4 van C^2 zijn dan de beelden van vier complanaire punten van C^4 als telkens de verbindingslijn van twee dezer punten en de lijn, die door de reciproke punten der overige twee gaat, elkaar op de lijn d snijden.

Indien men groepen neemt, waarin punten zijn samen-gevallen, verkrijgt men nog uit het voorafgaande eenige bijzondere resultaten.

Raakvlak.

Laat men X_2 men X_1 samenvallen dan vindt men:

Twee punten X_3 en X_4 liggen met de raaklijn in het punt X_1 in één vlak indien de lijn $Y_3 Y_4$ en de raaklijn, in het reciproke punt van Y_1 aan C^2 gelegd, elkaar op de lijn d snijden.

Dubbelraakvlak.

Valt bovendien nog X_4 met X_3 samen, zoodat het vlak der groep dubbelraakvlak van C^4 wordt, dan heeft men nog:

Twee punten Y_1 en Y_3 zijn dan de beelden van de raakpunten van een dubbelraakvlak als de raaklijn in één dezer punten en de raaklijn, in het reciproke punt van het andere aan C^2 gelegd, elkaar op de lijn d snijden.

Osculatievlak.

Wanneer van een complanaire groep de punten X_1, X_2 en X_3 samenvallen wordt het vlak der groep osculatievlak in X_1. Wil men het snijpunt van C^4 met dat osculatievlak bepalen dan zal men, zooals gemakkelijk blijkt, aldus moeten handelen:

Om het beeld Y_4 van het punt X_4 te construeeren, waar C^4 het osculatievlak in een gegeven punt X_1 nog snijdt, verbindt men Y_1 met het punt C, waar de raaklijn aan C^2 in het reciproke punt van Y_1 de lijn d snijdt; het tweede snijpunt van $Y_1 C$ met C^2 is dan het gezochte punt Y_4.

Aantal osculatievlakken uit een punt van C^4 aan C^4.

We denken ons ten slotte in het voorafgaande geval X_4 op C^4 gegeven en vragen naar het aantal osculatievlakken dat door X_4 aan C^4 kan worden gelegd. We onderstellen dus dat in de afbeelding Y_4 gegeven is en vragen naar het aantal der punten Y_1, die met Y_4 een ligging vertoonen als zooeven is besproken.

Wanneer men een punt P willekeurig op C^2 kiest, in het reciproke punt van P een raaklijn aan C^2 legt, en door het snijpunt van deze raaklijn met de lijn d een lijn naar Y_4 trekt, dan zal deze lijn C^2 nog in Q snijden. Indien Q met P samenviel zou juist het gewenschte geval voorhanden zijn. Nu bepaalt, zooals boven blijkt, elk punt P één punt Q; met elk punt Q

komen echter twee punten P overeen, daar men uit het snijpunt van $Q\,V_4$ met d twee raaklijnen aan C^2 kan trekken. De verwantschap (1, 2) die aldus tusschen de punten P en Q ontstaat, heeft drie coïncidenties. Men kan dus door elk punt der C^4 met een dubbelpunt drie vlakken leggen, die haar elders osculeeren (bl. 46).

---

4. *De afbeelding van de kromme C^4 met een keerpunt.*

Algemeene opmerkingen. Evenmin als bij de kromme C^4 met een dubbelpunt is bij die met een keerpunt de algemeene methode van afbeelden bruikbaar en wel om dezelfde redenen. Ook hier is het trisecantenregelvlak overgegaan in een quadratischen kegel, n.l. in den kegel Λ, die C^4 uit het keerpunt projecteert (bl. 54).

De harmonische involutie. Reeds op bl. 54 werd bewezen dat de bundel van quadratische oppervlakken, waarvan C^4 de basiskromme is, behalve den zooeven genoemden kegel Λ nog een kegel Λ_1 bevat, die C^4 dubbel projecteert. De ribben van dezen kegel bepalen op C^4 een quadratische punteninvolutie. De puntenparen dezer I_2 zijn zoogenaamde harmonische punten, d. w. z. hun parameters u_1 en u_2 voldoen aan de betrekking:

$$u_1 + u_2 = 0$$

De dubbelelementen der I_2 zijn het keerpunt ($u = \infty$) en het buigpunt ($u = 0$). We vermelden met het oog op hetgeen volgt nog in het bijzonder de beide resultaten:

1°. Elk puntenpaar der harmonische involutie ligt harmonisch ten opzichte van het keerpunt en het buigpunt.

2°. Elke harmonische koorde wordt door elke andere harmonische koorde gesneden.

De afbeelding van de merkwaardige punten en de har- Denken we ons thans weer de kegelsnede C^2 en daarop de beelden B en K van het buigpunt en het keerpunt gegeven. De raaklijnen, in B en K aan C^2 gelegd, snijden elkaar in een punt O. Elke lijn door O

monische involutie op C^2.

snijdt nu C^2 in twee punten, die met B en K een harmonische groep vormen en dus een paar der harmonische involutie zijn. Aldus blijkt dat de harmonische involutie op C^2 wordt afgebeeld door de puntenparen, wier verbindingslijn door O gaat.

Het punt van C^4 te bepalen, dat met drie gegeven punten van C^4 complanair is.

We onderstellen thans weer dat drie punten X_1, X_2 en X_3 van C^4 door hun beelden Y_1, Y_2 en Y_3 zijn gegeven en vragen naar het beeld Y_4 van het punt X_4, waar het vlak der gegeven punten C^4 nogmaals snijdt.

De vlakkenbundel met $X_1 X_2$ als as bepaalt op C^4 een I_2, waarin X_4 aan X_3 is toegevoegd. Het vraagstuk zou dus opgelost zijn indien men in de afbeelding het centrum dezer I_2 kon aanwijzen. Nu zijn echter weer twee paren der I_2 dadelijk te vinden. Vooreerst toch zal, daar het keerpunt dubbelpunt is van elke involutie met een koorde als as, het centrum C_{12} op de raaklijn k moeten liggen, die in K aan C^2 is getrokken. Voorts kan men in de afbeelding het punt Y_1' bepalen, dat aan Y_1 en het punt Y_2', dat aan Y_2 in de harmonische involutie is toegevoegd; daar elke twee harmonische koorden elkaar snijden is dan het paar Y_1', Y_2' ook het beeld van een groep der boven bedoelde I_2.

Men heeft dus blijkbaar het volgende:

Om het beeld Y_4 te vinden van het punt, dat met drie door hun beelden Y_1, Y_2 en Y_3 gegeven punten complanair is, bepaalt men de snijpunten Y_1' en Y_2' van C^2 met de lijnen, die Y_1 en Y_2 met O verbinden. De lijn $Y_1' Y_2'$ snijdt k in een punt C_{12}; het punt, waar de lijn $Y_3 C_{12}$ nogmaals C^2 snijdt, is het gezochte punt Y_4.

Natuurlijk had men weer evenals in alle dergelijke gevallen als as van den vlakkenbundel ook $X_1 X_3$ of $X_2 X_3$ kunnen kiezen. Men zou dan als centrum der I_2 het snijpunt C_{13} van k met $Y_1' Y_3'$ of het snijpunt C_{23} van k met $Y_2' Y_3'$ hebben verkregen. Zoowel de lijn $Y_2 C_{13}$ als $Y_1 C_{23}$ zou het gezochte punt Y_4 op C^2 hebben bepaald.

Ligging van

Wanneer men beurtelings elk der vier punten X_1, X_2, vier punten op C^2, die de beelden zijn van vier complanaire punten van C^4.

X_3 en X_4 als door de overige drie bepaald denkt verkrijgt men nog drie punten C_{14}, C_{24} en C_{34} op de lijn k; men heeft dus in het algemeen:

Vier punten Y_1, Y_2, Y_3 en Y_4 van C^2 zijn dan de beelden van vier complanaire punten van C^4 als telkens de verbindingslijn van twee dezer punten en de lijn, die door de harmonische punten der beide andere gaat, elkaar op de lijn k snijden.

Voorts onderscheidt men ook hier weer eenige bijzondere gevallen.

Raakvlak.

Als X_2 met X_1 samenvalt verkrijgt men:

Twee punten X_3 en X_4 liggen met de raaklijn in het punt X_1 in één vlak indien de lijn $Y_3\,Y_4$ en de raaklijn, in het harmonische punt van Y_1 aan C^2 gelegd, elkaar op de lijn k snijden.

Dubbelraakvlak.

Wanneer men in het voorafgaande geval uitgaat van Y_1, vervolgens het punt C_1 bepaalt, waar de raaklijn aan C^2 in het harmonische punt Y_1' de lijn k snijdt, en door C_1 de eenige (buiten k) nog mogelijke raaklijn aan C^2 trekt, dan zal het raakpunt Y_3 dezer raaklijn het beeld zijn van het eenige punt X_3 van C^4, waarvan de raaklijn die van X_1 snijdt. Nu valt blijkbaar Y_3 met Y_1' samen, hetgeen ook zoo moest zijn, daar elk paar der harmonische involutie als een raakpuntenpaar van een dubbelraakvlak kon worden beschouwd. Door elke raaklijn van C^4 gaat dus slechts één dubbelraakvlak; het vlak, dat door de raaklijn en het keerpunt gaat, is de tweede, oneigenlijke oplossing, wat trouwens ook uit de afbeelding blijkt.

Osculatievlak.

Voor het bepalen van het restpunt, dat bij een gegeven osculatiepunt behoort, leidt men nog gemakkelijk af:

Om het beeld Y_4 van het punt X_4 te construeeren, waar C^4 het osculatievlak in een gegeven punt X_1 nog snijdt, verbindt men Y_1 met het punt C, waar de raaklijn aan C^2 in het harmonische punt van Y_1 de lijn k snijdt; het tweede snijpunt van $Y_1\,C$ met C^2 is dan het gezochte punt Y_4.

Aantal osculatievlakken uit een punt van C^4 aan C^4.

Wanneer in het voorafgaande geval X_4 door zijn beeld Y_4 gegeven is kan men omgekeerd vragen naar het aantal der osculatievlakken, die in X_4 hun snijpunt met C^4 hebben. Daartoe moet men nagaan hoeveel punten Y_1 met Y_4 de zooeven vermelde ligging vertoonen.

Wanneer men een punt P willekeurig op C^2 kiest, in het harmonische punt van P een raaklijn aan C^2 legt en door het snijpunt van deze raaklijn met de lijn k een lijn naar Y_4 trekt zal deze lijn C^2 nog in Q snijden. Indien Q met P samenviel zou juist het gewenschte geval voorhanden zijn. P bepaalt aldus één punt Q; Q eveneens één punt P, want men kan weliswaar uit het snijpunt van $Q\,Y_4$ met k twee raaklijnen aan C^2 trekken, maar hiervan is k er een. P en Q komen nu projectief met elkaar overeen; er zijn dus twee coïncidenties. Een dezer coïncidenties is het beeld K van het keerpunt; dit kan uit de afbeelding worden afgeleid, maar is ook onmiddellijk duidelijk als men bedenkt dat elk vlak door de keerpuntsraaklijn als oneigenlijk osculatievlak van C^4 is op te vatten. Hiermee is derhalve het bekende resultaat teruggevonden dat men door elk punt der C^4 met een keerpunt slechts één vlak kan leggen dat haar elders osculeert.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Op bl. 51 en 52 van dit proefschrift is langs algebraïschen weg bewezen dat de dubbelkromme van het raaklijnenoppervlak der ruimtekromme van den vierden graad met een dubbelpunt ontaard is in twee vlakke krommen van den derden graad.

Deze eigenschap kan meetkundig worden afgeleid uit de beschouwingen van BRAMBILLA over de om een dergelijke kromme beschreven scheeve vierhoeken.

BRAMBILLA. Rend. Ist. Lomb. II. 17. 1884. (§ 7).

II.

De bewering van CREMONA, dat de ruimtekromme van den vierden graad en de tweede soort geen veelvoudige punten of keerpunten kan hebben, is niet in tegenspraak met het bestaan van de in dit proefschrift besproken vierdegraadskromme met een dubbelpunt of keerpunt.

CREMONA. Ann. di Mat. 4. 1861. (§ 2).

III.

Dat de functie 1^x voor $x = \infty$ onbepaald wordt mag niet als vanzelfsprekend worden aangenomen.

Vgl. GROTENDORST. Begins. der Diff. en Int. rek. Breda. 1904. (p. 117).

IV.

Voor de indeeling der stelkunde in „lagere" en „hoogere" algebra, zooals die thans gebruikelijk is, bestaan geen voldoende gronden.

V.

De door Reindersma toegepaste methode van meetkunde-onderwijs verdient geen aanbeveling.

Reindersma. Nieuw Leerboek der Vlakke Meetkunde. Groningen. 1912—'14.

VI.

De argumenten, die Max Simon aanvoert om aan te toonen dat aanleg voor wiskunde in even groote mate bij vrouwen als bij mannen voorkomt, zijn van geen waarde.

Max Simon. Methodik und Didaktik des Rechnens und der Mathematik. München. 1908. (p. 50).

VII.

Tegen de redeneering van Bertrand in het vraagstuk der gouden en zilveren munten bestaan ernstige bezwaren.

Bertrand. Calcul des Probabilités. Paris. 1907. (p. 2).

VIII.

De oplossing, welke Barbier gegeven heeft voor het naaldprobleem uit de waarschijnlijkheidsrekening, heeft alleen zin als naar de mathematische hoop, niet als naar kans gevraagd wordt.

Barbier. Journ. d. Math. (Liouville) II. 5. 1860. (p. 273).
Vgl. b.v. Bertrand. Calcul des Probabilités. Paris. 1907. (p. 52).

IX.

De gebruikelijke, o. a. door Young gegeven verklaring voor de schijnbare vergrooting der zon- en maanschijf nabij den horizon wordt teniet gedaan door de proeven van Filehne en van Zoth.

Young. General Astronomy. Boston 1900. (p. 63).
Filehne. Arch. f. d. ges. Physiol. (Pflüger). 59. 1895. (p. 279).
Zoth. ibidem. 78. 1899. (p. 363).

X.

Voor het meten van geringe gasspanningen is de vacuummeter van Mac Leod te verkiezen boven den thermoëlectrischen vacuummeter.

Mac Leod. Phil. Mag. IV. 48. 1874. (p. 110).
Voege. Phys. Zeitschr. 7. 1906. (p. 498).

XI.

De bewering van Smoluchowski, dat de tweede hoofdwet der thermodynamica theoretisch slechts als een „zeer bij benadering geldige regel" mag worden beschouwd, is overdreven.

Smoluchowski. Math. Vorles. a. d. Univ. Göttingen. 6. 1914. (p. 90).

XII.

De verklaring van J. J. Thomson voor het optreden van persisteerende stroomen in supra-geleiders is gezocht.

J. J. Thomson. Phil. Mag. VI. 30. 1915. (p. 192).
Vgl. Kamerlingh Onnes. Versl. Kon. Ac. v. Wet. Deel 22 (p. 1413) en Deel 23 (p. 167).