Eene bijdrage tot de kennis der kettingbreuken van Stieltjes

Eene Bijdrage tot de kennis der Kettingbreuken van Stieltjes.

W. L. van de Vooren.

EENE BIJDRAGE TOT DE KENNIS DER KETTINGBREUKEN VAN STIELTJES.

EENE BIJDRAGE TOT DE KENNIS DER KETTINGBREUKEN VAN STIELTJES.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. H. SNELLEN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP **DONDERDAG 27 MEI 1915**, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR DOOR

WILLEM LOUIS VAN DE VOOREN,

* * * * GEBOREN TE UTRECHT. * * * *

N.V. BOEKHANDEL EN DRUKKERIJ
VOORHEEN E. J. BRILL — LEIDEN
1915.

BOEKHANDEL EN DRUKKERIJ voorheen E. J. BRILL — LEIDEN.

AAN MIJNE OUDERS.

Aan het einde mijner academische studie gekomen, is het mij een behoefte mijn dank te betuigen aan allen, die, op welke wijze ook, hebben medegewerkt tot mijne vorming en ontwikkeling.

In de eerste plaats geldt die dank U, Hoogleeraren in de Faculteit van Wis- en Natuurkunde, wier colleges ik het voorrecht had te mogen volgen.

In het bijzonder U, Hooggeleerde KAPTEYN, Hooggeachte Promotor, mijn dank voor Uwe tegemoetkomende bereidwilligheid bij het bewerken van dit proefschrift.

Uwe colleges, en ook de Uwe, Hooggeleerde DE VRIES, zullen mij als docent steeds in herinnering blijven als een praktisch ideaal.

INLEIDING.

Het is reeds eenige jaren geleden, dat de studie van het standaardwerk van STIELTJES over de naar hem genoemde kettingbreuken (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, T. VIII et IX, 1894 et 1895) mijne belangstelling voor deze tak der wiskunde deed ontwaken. Het ontbreken echter van een leerboek over de algemeene leer der kettingbreuken maakte destijds verdere studie in die richting hoogst bezwaarlijk. Die gaping in de rij der leerboeken werd in 1913 op hoogst verdienstelijke wijze aangevuld door het werk van Prof. Dr. OSKAR PERRON „Die Lehre von den Kettenbrüchen".

Het is dit werk, waaraan dit proefschrift zijn oorsprong dankt.

In 't kort zijn de resultaten van mijn onderzoek de volgende:

Het eerste hoofdstuk geeft, aan de hand van een kettingbreuk van STIELTJES, een merkwaardig soort polynomen, die in eigenschappen groote overeenkomst vertoonen met de geheele getallen, zooals b.v. de ontbinding in factoren aan den eenen kant, en de deelbaarheid der getallen aan den anderen kant. Hierdoor wordt een nieuw verband verkregen tusschen de Getallenleer en Analyse.

In het tweede hoofdstuk heb ik een algemeen bewijs trachten te geven voor de mogelijkheid der ontwikkeling eener functie, die voldoet aan de voorwaarden van DIRICHLET, naar de naderingsnoemers eener kettingbreuk van STIELTJES. (Vergel. PERRON, blz. 382, waar dit probleem gesteld wordt).

Onder de polynomen, die aldus als ontwikkelingselement gebezigd kunnen worden, vallen de in het eerste hoofdstuk behandelde polynomen, verder die van LEGENDRE, van ABEL (vergel. Prof. Dr. A. A. NIJLAND, diss. 1896; Prof. Dr. W. KAPTEYN,

Versl. Kon. Ac. v. W. 27 Mrt. 1913), van HERMITE (vergel. Versl. Kon. Ac. v. W. 10 April, 12 Mei, 17 Juni '14). In deze bijzondere gevallen was het bewijs der ontwikkeling reeds gegeven, zij het dan ook in elk geval langs anderen weg. Een derde hoofdstuk is nu aan de functies van ABEL en HERMITE gewijd, door hen saam te vatten tot eene algemeene polynoomsoort met twee veranderlijken, dat afgeleid kan worden uit de uitgebreide kettingbreuk van LAGUERRE, die behoort tot de groep der kettingbreuken van STIELTJES.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

De B_n-polynomen.

§ 1. **De eenvoudigste kettingbreuk, die men zich denken kan, is zeker wel de volgende:**

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots F(x) = \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1} + \ldots \text{ ad inf.}$$

Zij behoort tot die merkwaardige groep kettingbreuken, die voornamelijk door de werken van STIELTJES op den voorgrond zijn gebracht. Dit blijkt het gemakkelijkst door middel van de substitutie $x \mid \frac{1}{z}$.

Na eene bekende herleiding vindt men:

$$2) \quad \ldots\ldots F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1|}{|z} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \ldots \text{ ad inf.}$$

De algemeene gedaante van een kettingbreuk van STIELTJES is toch:

$$\frac{1\ |}{|b_1\, z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1\ |}{|b_3\, z} + \frac{1|}{|b_4} + \frac{1\ |}{|b_5\, z} + \ldots \text{ ad inf. (Vergel. P. [1]) p. 393)}$$

met reëele, positieve b's.

De groote eenvoud van bovenstaande kettingbreuk $F\left(\frac{1}{z}\right)$ blijkt uit de waarden der b's:

$$b_p = 1 \qquad (p = 1.\ 2.\ 3. \ldots\ldots)$$

Uit het periodiek karakter volgt, dat in het convergentiegebied

---

1) P. beteekent: PERRON: „Die Lehre von den Kettenbrüchen". Teubner, 1913.

(d. i. het geheele complexe vlak, met uitzondering van de negatieve, reëele as)

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{z}}.$$

Het zijn de noemers van de opeenvolgende naderingsbreuken van deze kettingbreuk, die ik in dit hoofdstuk zal behandelen.

In afwijking met de gebruikelijke notatie, schrijf ik in dit hoofdstuk, voor de naderingsnoemer B_i liever B_{i+1}, waardoor de eigenschappen van een polynoom B_ν overeenkomen met die van zijn index, en niet met die van 't getal $\nu + 1$.

Bij de kettingbreuk

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x} = \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1} + \ldots \text{ ad inf.}$$

behooren dan de volgende noemers:

(B) $B_0 = 0$
$B_1 = 1$
$B_2 = 1$
$B_3 = 1 + x$
$B_4 = 1 + 2x$
$B_5 = 1 + 3x + x^2$
$B_6 = 1 + 4x + 3x^3$
$B_7 = 1 + 5x + 6x^2 + x^3$
$B_8 = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3$
$B_9 = 1 + 7x + 15x^2 + 10x^3 + x^4$
$B_{10} = 1 + 8x + 21x^2 + 20x^3 + 5x^4$
$B_{11} = 1 + 9x + 28x^2 + 35x^3 + 15x^4 + x^5$
$B_{12} = 1 + 10x + 36x^2 + 56x^3 + 35x^4 + 6x^5$
$B_{13} = 1 + 11x + 45x^2 + 84x^3 + 70x^4 + 21x^5 + x^6$
$B_{14} = 1 + 12x + 55x^2 + 120x^3 + 126x^4 + 56x^5 + 7x^6$
$B_{15} = 1 + 13x + 66x^2 + 165x^3 + 210x^4 + 126x^5 + 28x^6 + x^7$
etc. etc.

De graad van $B_{2\nu}$ is $\nu - 1$
van $B_{2\nu+1}$ is ν ,

4) in het algemeen is de graad van B_ν gelijk $\left[\frac{N-1}{2}\right]$.

De algemeene gedaante van het polynoom $B_{\nu+1}(x)$ is:

5) . $B_{\nu+1}(x) = 1 + \binom{\nu-1}{1} x + \binom{\nu-2}{2} x^2 + \binom{\nu-3}{3} x^3 + \ldots$

Bewijs: Door directe berekening overtuigt men zich gemakkelijk van de juistheid der formule voor kleine ν-waarden.

Nemen we dus de formule als juist aan voor $\nu \leqq N$, dan moet zij slechts bewezen worden voor $\nu = N+1$.

Hiertoe maak ik gebruik der recurrente betrekking

6) . . . . . $B_{N+1} = B_N + x B_{N-1}$

$$B_N = 1 + \binom{N-2}{1} x + \binom{N-3}{2} x^2 + .. \quad + \binom{N-p}{p-1} x^{p-1} + \ldots$$

$$x B_{N-1} = \qquad x + \binom{N-3}{1} x^2 + .. \quad + \binom{N-p}{p-2} x^{p-1} + \ldots$$

$$B_{N+1} = 1 + \binom{N-1}{1} x + \binom{N-2}{2} x^2 + .. + \binom{N-p+1}{p-1} x^{p-1} + \ldots$$

want $\binom{N-p}{p-1} = \dfrac{(N-p)(N-p-1)..(N-2p+3)(N-2p+2)}{1 \quad 2 \quad (p-2) \quad (p-1)}$

$$\binom{N-p}{p-2} = \frac{(N-p)(N-p-1)..(N-2p+3)}{1 \quad 2 \quad (p-2)}$$

dus $\binom{N-p}{p-1} + \binom{N-p}{p-2} = \dfrac{(N-p)(N-p-1)..(N-2p+3)}{(p-1)!}(N-p+1)$

$$= \frac{(N-p+1)(N-p)(N-p-1)\ldots(N-2p+3)}{(p-1)!} = \binom{N-p+1}{p-1}.$$

Hiermede is ook de juistheid der coëfficienten van de termen van den hoogsten graad aangetoond, daar men „formeel" de polynomen met termen van dezelfde gedaante kan verlengen.

Behalve de zoo even gebruikte recurrente betrekking (6) heeft men de volgende „hoofdformule", die de eerste als bijzonder geval omvat.

Volgens PERRON pg. 18 form. 36^b geldt, bij elke kettingbreuk, de betrekking:

$$B_{\beta-1,\alpha} \cdot B_{\alpha+\beta+\gamma-1} = B_{\beta+\gamma-1,\alpha}\ B_{\alpha+\beta-1}$$
$$+ (-1)^{\beta-1}\ a_{\alpha+1}\ a_{\alpha+2}\ a_{\alpha+3} \ldots\ a_{\alpha+\beta}\ B_{\gamma-1,\alpha+\beta}\ B_{\alpha-1}\ ^{1}).$$

In ons geval wordt deze formule:

$$7) \ldots\ B_\beta \cdot B_{\alpha+\beta+\gamma} = B_{\beta+\gamma}\ B_{\alpha+\beta} + (-1)^{\beta-1}\ x^\beta\ B_\gamma\ B_\alpha,$$

want $B_{\lambda,\mu} \equiv B_\lambda$. Verder is de eerste index met één verhoogd in aansluiting met de nieuwe notatie.

Volledigheidshalve kan ik hieraan de naderingstellers toevoegen. Indien A_ν behoort bij B_ν (index één hooger) heeft men de volgende waarden:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_1 &= 0 \qquad\quad = x\,B_0 \\ A_2 &= x\,1 \qquad\quad = x\,B_1 \\ A_3 &= x\,1 \qquad\quad = x\,B_2 \\ A_4 &= x\,(1+x) = x\,B_3 \end{aligned}$$

etc.

Aangezien voor de A's dezelfde recurrente betrekking geldt als voor de B's, zoo is algemeen:

$$8) \ldots\ldots\ldots\ldots\ A_{\nu+1} = x\,B_\nu,$$

waarmee de studie der tellers teruggebracht is tot die der noemers.

§ 2. **Evenals elk polynoom, zijn ook alle B's bepaald door hun wortels en eene constante. Deze laatste grootheid is onmiddellijk vastgelegd door de algemeene formule:**

$$9) \ldots\ldots\ldots\ldots\ B_\nu(0) = 1.$$

De eigenschappen van een polynoom B_ν zijn dus terug te vinden in die van zijn wortels.

Eigenschap I: Geen enkele wortel van een polynoom B_ν is positief reëel.

Dit volgt onmiddellijk uit de algemeene gedaante (5) der polynomen. Elke coëfficient toch is positief.

---

1) $B_{\alpha,\lambda}$ ontstaat uit B_α, door den index van alle hierin voorkomende grootheden a_p en b_q, met λ te verhoogen, als de kettingbreuk is $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + -$.

Eigenschap II: Alle wortels van elk polynoom B_ν zijn reëel. De wortels van elk paar polynomen $B_{\nu-1}$ en B_ν liggen afwisselend en wel zóó, dat B_ν de grootste (of kleinst negatieve) wortel bezit.

Bewijs[1]): De juistheid der stelling blijkt onmiddellijk voor kleine waarden van ν, bv.:

$B_3 = 1 + x \qquad x_1^{(3)} = -1$

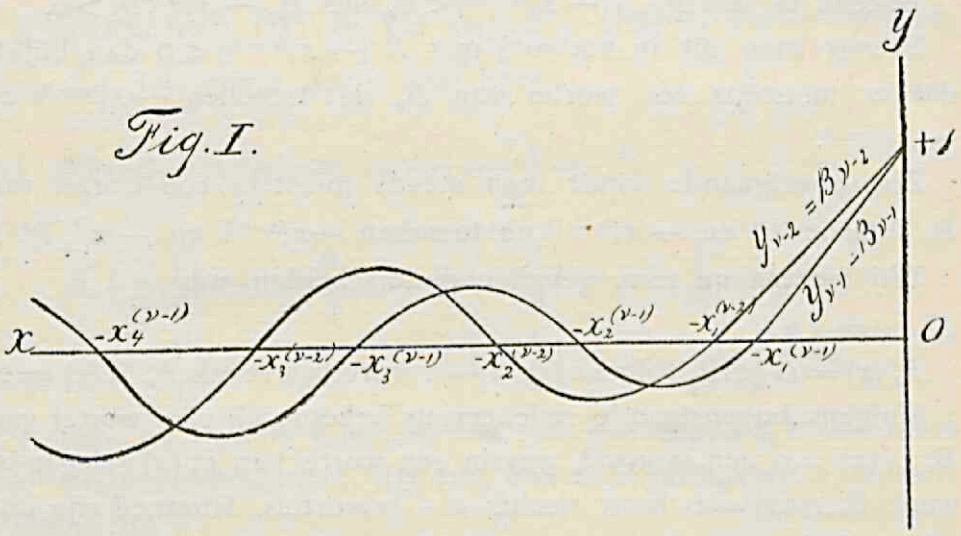
$B_4 = 1 + 2x \qquad x_1^{(4)} = -\frac{1}{2}$

$B_5 = 1 + 3x + x^2 \qquad x_1^{(5)} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},\ x_2^{(5)} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$

Nemen we dus aan, dat de wortels van $B_{\nu-2}$ en $B_{\nu-1}$ elkaar op de reëele as afwisselen, en dat $B_{\nu-1}$ de grootste wortel bezit, dan moet nu bewezen worden, dat hetzelfde geldt voor de wortels van $B_{\nu-1}$ en B_ν.

Gemakshalve kunnen we een grafische voorstelling maken, door te stellen:

$$y_{\nu-2} = B_{\nu-2}(x); \quad y_{\nu-1} = B_{\nu-1}(x); \quad y_\nu = B_\nu(x).$$



Noemen we de wortels van $B_\nu(x) = 0$: $-x_i^{(\nu)}$ dan is volgens Eig. I, indien $x_i^{(\nu)}$ reëel is, $x_i^{(\nu)} > 0$.

De reëele waarden $x_i^{(\nu-2)}$ en $x_i^{(\nu-1)}$ zijn door hun index i gerangschikt volgens opklimmende grootte.

10). Nu is: $B_{(\nu-2)}(0) = B_{(\nu-1)}(0) = B_\nu(0) = +1 > 0$.

---

1) Vergel. STIELTJES. Ann. de Toulouse. T. VIII. 1894.

Volgens (6) is:

$$B_\nu(-x_1^{(\nu-1)}) = B_{\nu-1}(-x_1^{(\nu-1)}) - x_1^{(\nu-1)} B_{\nu-2}(-x_1^{(\nu-1)})$$

of

$$B_\nu(-x_\nu^{(\nu-1)}) = -x_1^{(\nu-1)} B_{\nu-2}(-x_1^{(\nu-1)}).$$

Nu is $x_i^{(\nu-1)} > 0$ en $B_{\nu-2}(-x_1^{(\nu-1)}) > 0$, want $B_{\nu-2}(0) = 1 > 0$, en er is, volgens hypothese, nog geen wortel $-x_i^{(\nu-2)}$ gepasseerd, dus

$$B_\nu(0) > 0 \quad \text{en} \quad B_\nu(-x_1^{(\nu-1)}) < 0.$$

d. w. z. tusschen 0 en $-x_1^{(\nu-1)}$ ligt minstens één wortel van $B_\nu(x) = 0$.

Verder is, volgens (6):

$$B_\nu(-x_1^{(\nu-2)}) = B_{\nu-1}(-x_1^{(\nu-2)}) < 0.$$

Uit $B_\nu(-x_1^{(\nu-1)}) < 0$ en $B_\nu(-x_1^{(\nu-2)}) < 0$ volgt, dat tusschen $-x_1^{(\nu-1)}$ en $-x_1^{(\nu-2)}$ 0, 2, 4, .. wortels van B_ν liggen.

Passen we nu (6) toe, voor $x = -x_2^{(\nu-1)}$

$$B_\nu(-x_2^{(\nu-1)}) = -x_2^{(\nu-1)} . B_{\nu-2}(-x_2^{(\nu-1)}).$$

Bekend is, dat $B_{\nu-2}(-x_2^{(\nu-1)}) < 0$, dus $B_\nu(-x_2^{(\nu-1)}) > 0$.

Brengt men dit in verband met $B_\nu(-x_1^{(\nu-2)}) < 0$ dan blijkt, dat er minstens één wortel van B_ν ligt tusschen $-x_1^{(\nu-2)}$ en $-x_2^{(\nu-1)}$.

Zoo voortgaande vindt men steeds minstens één wortel van B_ν tusschen 0 en $-x_1^{(\nu-1)}$ en tusschen $-x_i^{(\nu-2)}$ en $-x_{i+1}^{(\nu-1)}$.

Wij moeten nu twee gevallen onderscheiden, nml.

A. $\nu = 2\mu$.

$B_\nu(x) = 0$ bezit, volgens (4), $\mu - 1$ wortels, evenals $B_{\nu-1}(x) = 0$.

Volgens bovenstaande redeneering behoort bij elke wortel van $B_{\nu-1}(x) = 0$ een interval, waarin een wortel van $B_\nu(x)$ gelegen is, want $B_{\nu-2}(x) = 0$ bezit slechts $\mu - 2$ wortels. Hiermee zijn dus alle wortels gevonden, en hun ligging voldoet aan de genoemde eigenschappen.

B. $\nu = 2\mu + 1$.

$B_\nu(x) = 0$ bezit, volgens (4), μ wortels, terwijl $B_{\nu-1}$ en $B_{\nu-2}$ er beide $\mu - 1$ bezitten.

Evenals onder A, liggen er $\mu - 1$ wortels in de intervallen $(0, -x_1^{(2\mu)})$, $(-x_1^{(2\mu-1)}, -x_2^{(2\mu)})$ .... $(-x_{\mu-2}^{(2\mu-1)}, -x_{\mu-1}^{(2\mu)})$.

Er blijft nog één wortel van $B_{\nu-2}$ over, die volgens de gemaakte onderstelling omtrent de ligging der wortels van $B_{\nu-2}$ en $B_{\nu-1}$, voorbij de wortel $-x_{\mu-1}^{(2\mu-1)}$ gelegen zal zijn. We kunnen nu bewijzen, dat de μ^e wortel van B_ν ligt in het interval $(-x_{\mu-1}^{2\mu-1}, -\infty)$

$B_{2\mu+1}(-\infty) \equiv (-\infty)^\mu$ met 't teeken van $(-1)^\mu = \varepsilon$.

$B_{2\mu}(-\infty) \equiv (-\infty)^{\mu-1}$, teeken : $-\varepsilon$.

$B_{2\mu-1}(-\infty)$ heeft tot teeken : $-\varepsilon$.

Het teeken van $B_{2\mu}(-x_{\mu-1}^{(2\mu-1)})$ komt overeen met dat van $B_{2\mu}(-\infty)$, dus met $-\varepsilon$, omdat er nog geen wortel gepasseerd is.

Volgens (6) is verder:

$$B_{2\mu+1}(-x_{\mu-1}^{(2\mu-1)}) = B_{2\mu}(-x_{\mu-1}^{(2\mu-1)})$$

dus ook 't teeken van $B_{2\mu+1}(-x_{\mu-1}^{(2\mu-1)})$ is $-\varepsilon$, terwijl dat van $B_{2\mu+1}(-\infty)$ overeenkomt met dat van $+\varepsilon$. d. w. z. de μ^e wortel van $B_{2\mu+1}(x) = 0$ ligt in 't interval $(-x_{\mu-1}^{(2\mu-1)}, -\infty)$.

Eigenschap III: In het negatieve interval $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ heeft geen der polynomen een wortel liggen.

11) Bewijs: Allereerst is $B_\nu\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\nu}{2^{\nu-1}}$

want

$$B_0\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 = \frac{0}{2^{-1}} \; ; \; B_1\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 = \frac{1}{2^0}$$

$$B_2\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 = \frac{2}{2^1} \quad ; \; B_3\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{2^2} \text{ etc.}$$

Nemen we dus de juistheid van (11) aan voor $\nu \leqq i$, dan moet nog aangetoond worden, dat (11) dan ook geldt voor $\nu = i+1$. Volgens (6) is:

$$B_{i+1}(x) = B_i(x) + x\,B_{i-1}(x) \text{ dus voor } x = -\frac{1}{4}$$

$$B_{i+1}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{i}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{i-1}{2^{i-2}} = \frac{i+1}{2^i}.$$

Hiermede is aangetoond, dat elke B_ν in 't punt $x = -\frac{1}{4}$ positief is, evenals in het punt $x = 0$, want $B_\nu(0) = +1$. Dit wil echter voor de wortels zeggen, dat $B_\nu(x) = 0$ in 't interval

$\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ géén of een even aantal wortels bezit. Nemen we nu aan, dat $B_k(x)$ het polynoom met den kleinsten index is, dat twee of meer wortels in bedoeld interval heeft, dan zal $B_{k-1}(x)$ volgens eig. II minstens één wortel daar hebben liggen. Dit nu strijdt met de hypothese, dat k de kleinste index is, waarvoor het bijbehoorende polynoom een wortelpaar tusschen 0 en $-\frac{1}{4}$ heeft. Het getal k is dus niet aan te wijzen, of geen enkel polynoom bezit wortels tusschen 0 en $-\frac{1}{4}$.

Opmerking 1. De mogelijkheid, dat het polynoom B_{k-1} niet zou bestaan, is natuurlijk uitgesloten. De formules B leeren onmiddellijk, dat $k \geqq 4$.

Opmerking 2. Het punt $x = -\frac{1}{4}$ begrenst het wortelgebied werkelijk, want volgens (11) is:

$$\lim_{\nu=\infty} B_\nu\left(-\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Eigenschap IV. Het deel van de reëele as, waarop alle wortels van de polynomen B_ν liggen, wordt ter rechterzijde „werkelijk" begrensd door het punt $x = -\frac{1}{4}$, ter linkerzijde is echter geen eindig grenspunt aanwezig.

Bewijs: Volgens de voorgaande eigenschappen kunnen de wortels uitsluitend gelegen zijn in 't reëele interval $\left(-\frac{1}{4}, -\infty\right)$ of in een gedeelte daarvan. Dit laatste nu wordt door eig. IV ontkend.

Er is dus te bewijzen, dat er steeds een B_ν gevonden kan worden, die een wortel heeft $> -\frac{1}{4} - \varepsilon$ en zoo ook een B_μ, die een wortel heeft $< -N$, als N een willekeurig groot, maar constant getal is.

Het eerste gedeelte volgt uit de Opm. 2, Eig. III.

Het tweede gedeelte kan als volgt bewezen worden:

Volgens form. (5) is:

$$B_{\nu+1}(x) = 1 + \binom{\nu-1}{1} x + \binom{\nu-2}{2} x^2 + \binom{\nu-3}{3} x^3 + \ldots$$

Onderscheiden we nu de twee gevallen:

A. $\nu = 2\mu$

$$12a)\quad B_{2\mu+1}(x) = 1 + \binom{2\mu-1}{1} x + \binom{2\mu-2}{2} x^2 + \ldots + \binom{2\mu-p}{p} x^p + \ldots + \binom{2\mu+1}{\mu-1} x^{\mu+1} + \binom{\mu}{\mu} x^\mu =$$

$$1 + (2\mu-1)x + \frac{(2\mu-2)(2\mu-3)}{1\cdot 2} x^2 + \ldots + \binom{2\mu-p}{p} x^p + \ldots + \frac{\mu\cdot(\mu+1)}{1\cdot 2} x^{\mu-1} + x^\mu.$$

B. $\nu = 2\mu - 1$.

$$12b)\quad B_{2\mu} = 1 + (2\mu-2)x + \frac{(2\mu-3)(2\mu-4)}{1\cdot 2} x^2 + \ldots + \binom{2\mu-p-1}{p} x^p + \frac{(\mu+1)\,\mu\,(\mu-1)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{\mu-2} + \mu\, x^{\mu-1}.$$

Uit $12a$ volgt voor de som der μ wortels van $B_{2\mu+1}$.

$$13a)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{\mu}^{(2\mu+1)} = -\frac{\mu(\mu+1)}{2}$$

Uit $12b$ volgt voor de som der $\mu - 1$ wortels van $B_{2\mu}$

$$13b)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{\mu-1}^{(2\mu)} = -\frac{(\mu-1)(\mu+1)}{6}.$$

Volgens eig. II zijn nu de $\mu - 1$ eerste wortels van $B_{2\mu+1}$ één voor één kleiner dan de $\mu - 1$ wortels van $B_{2\mu}$, wat hun absolute waarde betreft. Hieruit volgt:

$$\frac{\mu(\mu+1)}{2} < \frac{(\mu-1)(\mu+1)}{6} + x_\mu^{(2\mu+1)}$$

of

$$x_\mu^{(2\mu+1)} > \frac{(\mu+1)(2\mu+1)}{6}$$

$$14)\quad \text{en} \qquad -x_\mu^{(2\mu+1)} < -\frac{(\mu+1)(2\mu+1).}{6}$$

Kiest men dus μ zóó, dat $\frac{(\mu+1)(2\mu+1)}{6} > N$, dan hebben alle polynomen met index $> 2\mu+3$ één of meer wortels links van $-N$ liggen.

Opmerking: Een onderste grens voor $-x_\mu^{(2\mu+1)}$ is:

$$-x_\mu^{(2\mu+1)} > -\frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

§ 3. **Gemakshalve voer ik de volgende definitie in.**

Definitie. Een wortel van de vergelijking $B_\nu(x) = 0$ heet primitief, indien hij niet samenvalt met één der wortels van een polynoom met kleineren index.

Het is duidelijk, dat elke B_ν minstens één primitieve wortel zal bezitten van af $\nu = 3$, nml. de grootste (kleinst absoluut gemeten).

Eigenschap V. Is $-x_p$ een wortel van $B_\nu(x) = 0$, dan is deze waarde ook een wortel van alle vergelijkingen $B_{\mu\nu}(x) = 0$.

Bewijs:

Bekend is:

$B_0 = 0.$
$B_1 = 1$
$B_2 = 1.$
$B_3(-x_p) = 1 - x_p.$
$B_4(-x_p) = 1 - 2x_p.$
$B_5(-x_p) = 1 - 3x_p + x_p^2.$
. . . .
$B_{\nu-1}(-x_p) = C_{\nu-1}$, eene bepaalde constante.
$B_\nu(-x_p) = 0 = f_1 B_0$ met $f_1 = -C_{\nu-1}x_p.$
$B_{\nu+1}(-x_p) = B_\nu(-x_p) - x_p B_{\nu-1}(-x_p) = -C_{\nu-1}x_p = f_1 B_1.$
$B_{\nu+2}(-x_p) = B_{\nu+1}(-x_p) - x_p B_\nu(-x_p) = -C_{\nu-1}x_p = f_1 B_2.$
$B_{\nu+3}(-x_p) = -C_{\nu-1}x_p + C_{\nu-1}x_p^2 = f_1 B_3.$
etc.
$B_{\nu+q}(-x_p) = f_1 B_q.$
etc.
$B_{2\nu-1}(-x_p) = f_1 B_{\nu-1} = f_1 C_{\nu-1}.$
$B_{2\nu}(-x_p) = 0 = f_1^2 B_0.$
$B_{2\nu+1}(-x_p) = -f_1 C_{\nu-1}x_p = f_1^2 B_1.$
etc.

$B_{3\nu}(-x_p) = 0$ etc.
$B_{\mu\nu}(-x_p) = 0$. q. e. d.

Een en ander is afhankelijk van het periodieke karakter van de kettingbreuk.

't Voorgaande geldt voor elke wortel van $B_\nu(x) = 0$, m. a. w. B_ν is een factor van alle polynomen $B_{\mu.\nu}$.

Opmerking: Is $-x_p$ een primitieve wortel van B_ν, dan blijkt uit het bewijs, dat $-x_p$ slechts een wortel is van die B-functies, wier index een veelvoud van ν is.

Eigenschap V^{bis}: $B_{2\nu}(x)$ bezit $B_\nu(x)$ tot factor.

Deze stelling is een bijzonder geval van de algemeene eig. V. Men kan haar ook als volgt bewijzen:

Bewijs: Volgens de hoofdformule (7) is:

$$B_\beta \cdot B_{\alpha+\beta+\gamma} = B_{\beta+\gamma} \cdot B_{\alpha+\beta} + (-1)^{\beta-1} x^\beta \cdot B_\gamma \cdot B_\alpha.$$

Nemen we: $\beta = 2$, $\alpha = \nu - 1$ en $\gamma = \nu - 1$, dan is:

$$B_{2\nu} = B_{\nu+1}^2 - x^2 \cdot B_{\nu-1}^2.$$
$$= (B_{\nu+1} - x B_{\nu-1})(B_{\nu+1} + x B_{\nu-1}).$$

15) of $$B_{2\nu} = B_\nu \cdot \{ B_{\nu+1} + x B_{\nu-1} \}.$$

Tevens is hiermede een nieuw bewijs gevonden voor de algemeene eigenschap V. Het is toch steeds mogelijk $B_{\mu\nu}$ uit te drukken in twee voorafgaande polynomen, bv. $B_{\mu\nu} = g(x) B_\nu + h(x) B_{2\nu}$. Beide bevatten den factor B_ν, dus moet deze ook voorkomen in $B_{\mu.\nu}$.

Gaan we weer uit van de form. (7):

$$B_\beta \cdot B_{\alpha+\beta+\gamma} = B_{\beta+\gamma} \cdot B_{\alpha+\beta} + (-1)^{\beta-1} x^\beta \cdot B_\gamma \cdot B_\alpha.$$

voor $\alpha = \beta = \gamma = \nu$:

$$B_\nu \cdot B_{3\nu} = B_{2\nu}^2 + (-1)^{\nu-1} x^\nu B_\nu^2.$$

of, gebruik makende van (15):

16) $$B_{3\nu} = B_\nu \{ (B_{\nu+1} + x B_{\nu-1})^2 + (-1)^{\nu-1} x^\nu \}.$$

Nemen we nu $\alpha = \beta = \nu$; $\gamma = 2\nu$, zoo is:

$$B_\nu \cdot B_{4\nu} = B_{3\nu} \cdot B_{2\nu} + (-1)^{\nu-1} x^\nu B_{2\nu} \cdot B_\nu$$

17) $$B_{4\nu} = B_\nu \{ B_{\nu+1} + x B_{\nu-1} \} \{ (B_{\nu+1} + x B_{\nu-1})^2 + 2(-1)^{\nu-1} x^\nu \}.$$

etc.

Opmerking: Terwijl het eerst gegeven bewijs een dieper inzicht geeft in het wezen der stelling (b.v. wat betreft de primitieve wortels), doet het tweede bewijs tevens de explicicte vorm van den anderen factor kennen.

We hebben toch de volgende

Eigenschap VI: Schrijven we voor $(-1)^{\nu-1} x^{\nu} : X_1$ en voor $B_{\nu+1} + x B_{\nu-1} : X_2$, dan is

18) . . . . . $B_{\mu.\nu} = B_{\nu} . D_{\mu}$.

als D_{μ} de μ^{e} naderingsnoemer is van de kettingbreuk:

$$X_0 + \frac{X_1|}{|X_2} + \frac{X_1|}{|X_2} + \frac{X_1|}{|X_2} + \ldots\ldots \qquad \text{ad inf.}$$

Bewijs: $D_1 = 1$

$D_2 = X_2$ (de index is weer met één verhoogd).

$D_3 = X_2^{\,2} + X_1$

$D_4 = X_2^{\,3} + 2 X_1 X_2$

$D_5 = X_2^{\,4} + 3 X_1 X_2^{\,2} + X_1^{\,2}$.

etc.

De coëfficienten van deze polynomen zijn dezelfde als bij de B_{ν} functies, en $D_{k+1} = X_2 D_k + X_1 D_{k-1}$.

Nu is: $B_{\nu} = B_{\nu} 1 = B_{\nu} D_1$

$B_{2\nu} = B_{\nu} X_2 = B_{\nu} D_2$ . . . . . (15)

$B_{3\nu} = B_{\nu} \{ X_2^{\,2} + X_1 \} = B_{\nu} D_3$ . . . . . (16)

$B_{4\nu} = B_{\nu} \{ X_2^{\,3} + 2 X_1 X_2 \} = B_{\nu} D_4$ . . . . . (17)

De formule (18) is dus juist voor kleine waarden van μ. Nemen we haar als geldig aan voor $\mu \leqq k$, dan moet nog de juistheid aangetoond worden voor $\mu = k + 1$.

De betrekking (7)

$$B_{\beta} . B_{\alpha+\beta+\gamma} = B_{\beta+\gamma} . B_{\alpha+\beta} + (-1)^{\beta-1} . x^{\beta} B_{\gamma} . B_{\alpha}$$

geeft voor $\alpha = \nu$, $\beta = \nu$ en $\gamma = (k-1)\nu$:

$$B_{\nu} . B_{(k+1)\nu} = B_{k\nu} B_{2\nu} + (-1)^{\nu-1} x^{\nu} B_{(k-1)\nu} B_{\nu}$$

of

$$B_{(k+1)\nu} = B_{k\nu} X_2 + (-1)^{\nu-1} x^{\nu} B_{(k-1)\nu}$$
$$= B_{k\nu} X_2 + B_{(k-1)\nu} X_1 .$$

Nu is reeds $B_{k\nu} = B_{\nu} D_k$ en $B_{(k-1)\nu} = B_{\nu} D_{k-1}$

dus $B_{(k+1)\nu} = B_{\nu} \{ X_2 D_k + X_1 D_{k-1} \} = B_{\nu} D_{k+1}$ q. e. d.

Opmerking 1. De verkregen D_μ groepeert de overblijvende $\left[\frac{\mu\nu-1}{2}\right]-\left[\frac{\nu-1}{2}\right]$ wortels in $\left[\frac{\mu-1}{2}\right]$ groepen van wortels.

Opmerking 2. Vooral deze eigenschap doet nieuwe eigenschappen uit de Getallenleer vermoeden.

Bij de algemeene formule (18)

$$B_{\mu\nu}=B_\nu . D_\mu$$

verdient 't geval $\nu=2$ afzonderlijk vermeld te worden.

$$B_2=1, \text{ dus } B_{2p}=D_p.$$

Nu is $\quad X_1=-x^2 \quad , \quad X_2=1+2x$

zoodat de kettingbreuk is:

$$X_0-\frac{x^2\,|}{|1+2x}-\frac{x^2\,|}{|1+2x}-\frac{x^2\,|}{|1+2x}-\ldots$$

Kiest men nog $X_0=x$, dan ontstaat de kettingbreuk

$$x-\frac{x^2\,|}{|1+2x}-\frac{x^2\,|}{|1+2x}-\ldots$$

die door contractie ontstaat uit $F(x)$, en dus dezelfde waarde heeft als de oorspronkelijke kettingbreuk. Haar naderingsbreuken zijn $\frac{A_{2p}}{B_{2p}}$.

In het algemeen heeft men de volgende:

Eigenschap VII. Zij $X_0=x\,B_{\nu-1}$, $X_1=(-1)^{\nu-1}x^\nu$, $X_2=B_{\nu+1}+x\,B_{\nu-1}$, dan is de kettingbreuk

19) . . $G(x)=X_0+\frac{X_1|}{|X_2}+\frac{X_1|}{|X_2}+\ldots$ ad inf. $=B_\nu(x)\,F(x)$.

Bewijs: Mogen de naderingsbreuken der nieuwe kettingbreuk $G(x)$ voorgesteld worden door $\frac{C_p}{D_p}$ dan moet bewezen worden, dat

$$\lim_{\mu=\infty}\frac{C_\mu}{D_\mu}=B_\nu(x)\lim_{k=\infty}\frac{A_k}{B_k}$$

$F(x)=\lim_{k=\infty}\frac{A_k}{B_k}$ bestaat in het geheele complexe vlak, behalve op de negatieve reëele as, links van $-\frac{1}{4}$.

Hier is dan $$\lim_{k=\infty} \frac{A_k}{B_k} = \lim_{\mu=\infty} \frac{A_{\mu\nu}}{B_{\mu\nu}}.$$

We kunnen nu aantoonen, dat

$$\frac{C_\mu}{D_\mu} = B_\nu \frac{A_{\mu\nu}}{B_{\mu\nu}} \text{ voor elke } \mu\text{-waarde.}$$

Volgens de vorige eig. VI is reeds

$$D_\mu = \frac{B_{\mu\nu}}{B_\nu}$$

zoodat er overblijft te bewijzen:

20) . . . . . $C_\mu = A_{\mu\nu} = x\, B_{\mu\nu-1}$ (volgens 8).

In de eerste plaats geldt deze betrekking voor $\mu = 1$

$$C_1 = X_0 = x\, B_{\nu-1}$$

en in de tweede plaats ook voor $\mu = 2$

$$C_2 = X_0 (B_{\nu+1} + x\, B_{\nu-1}) + (-1)^{\nu-1} x^\nu$$
$$= x \{ B_{\nu-1} (B_{\nu+1} + x\, B_{\nu-1}) + (-1)^{\nu-1} x^{\nu-1} \}.$$

Uitgaande van (7) is:

$$B_\beta \,.\, B_{\alpha+\beta+\gamma} = B_{\beta+\gamma} \,.\, B_{\alpha+\beta} + (-1)^{\beta-1} x^\beta B_\gamma \,.\, B_\alpha$$

voor $\beta = \nu - 1$, $\alpha = \nu$, $\gamma = 1$

$$B_{\nu-1} \,.\, B_{2\nu} = B_\nu \,.\, B_{2\nu-1} + (-1)^{\nu-2} x^{\nu-1} B_\nu$$

of, volgens (15)

$$B_{\nu-1} \,.\, B_\nu (B_{\nu+1} + x\, B_{\nu-1}) = B_\nu B_{2\nu-1} + (-1)^{\nu-2} x^{\nu-1} B_\nu$$

of $$B_{2\nu-1} = B_{\nu-1} (B_{\nu+1} + x\, B_{\nu-1}) + (-1)^{\nu-1} x^{\nu-1}.$$

substitueerende is

$$C_2 = x\, B_{2\nu-1}.$$

Nemen we dus aan, dat

$$C_\mu = x\, B_{\mu\nu-1} \quad \text{voor } \mu \leqq \mu_0$$

dan moet nog bewezen worden, dat ook

$$C_{\mu_0+1} = x\, B_{(\mu_0+1)\nu-1}.$$

Nu is: $C_{\mu_0+1} = (B_{\nu+1} + x\, B_{\nu-1})\, C_{\mu_0} + (-1)^{\nu-1} x^\nu\, C_{\mu_0-1}$

of

$$C_{\mu_0+1} = x \{ (B_{\nu+1} + x\, B_{\nu-1})\, B_{\mu_0\nu-1} + (-1)^{\nu-1} x^\nu\, B_{(\mu_0-1)\nu-1} \}.$$

Ter berekening van de 2e factor in het tweede lid, heeft men:

$$B_\beta \,.\, B_{\alpha+\beta+\gamma} = B_{\beta+\gamma} \,.\, B_{\alpha+\beta} + (-1)^{\beta-1} x^\beta \,.\, B_\gamma \,.\, B_\alpha$$

voor $\beta = \nu$, $\gamma = \nu$, $\alpha = (\mu_0 - 1)\,\nu - 1$.

Dan is:

$$B_\nu \,.\, B_{(\mu_0+1)\nu-1} = B_{2\nu} \,.\, B_{\mu_0\nu-1} + (-1)^{\nu-1} x^\nu \,.\, B_\nu \,.\, B_{(\mu_0-1)\nu-1}.$$

of volgens (15)

$$B_{(\mu_0+1)\nu-1} = (B_{\nu+1} + x\, B_{\nu-1})\, B_{\mu_0\nu-1} + (-1)^{\nu-1} x^\nu \,.\, B_{(\mu_0-1)\nu-1}.$$

Substitueerende is dus:

$$C_{\mu_0+1} = x\, B_{(\mu_0+1)\nu-1}.$$

Hieruit volgt, dat

21) . . . . . $\dfrac{C_\mu}{D_\mu} = B_\nu \,.\, \dfrac{A_{\mu\nu}}{B_{\mu\nu}}$ voor elke μ-waarde

dus $$G(x) = \lim_{\mu=\infty} \frac{C_\mu}{D_\mu} = B_\nu \lim_{\mu=\infty} \frac{A_{\mu\nu}}{B_{\mu\nu}} = B_\nu \,.\, F(x).$$

§ 4. Eigenschap VIII. Wanneer een wortel $-x_p$ van B_N, tevens primitieve wortel is van een B_ν, dan is N een veelvoud van ν en B_ν is een factor van B_N.

Bewijs: Reeds uit de opmerking bij eig. V blijkt, dat de primitieve wortels van $B_\nu = 0$ uitsluitend en noodzakelijk wortels zijn van die polynomen, wier index een veelvoud van ν is, dus $N = \mu.\nu$ volgens de term „uitsluitend" en „elke" wortel van B_ν is tevens wortel van B_N volgens de term „noodzakelijk".

Eigenschap IX. Twee polynomen B_μ en B_ν hebben geen gemeenschappelijken factor ($G.G.D = 1$), indien de $G.G.D\,(\mu.\nu)$ gelijk is aan 1 of 2.

Bewijs: Zoo er een gemeenschappelijke factor is, zij deze $x + x_p$, dan is $-x_p$ een wortel van B_μ en van B_ν.

Zij verder B_λ het polynoom, waarvoor $-x_p$ primitieve wortel is (λ kleiner dan of gelijk aan de kleinste van de waarden μ en ν). Uit de voorgaande eigenschap volgt dan, dat $\mu = \mu'\lambda$ en $\nu = \nu'\lambda$ en tevens, dat B_λ een gemeene deeler is van B_μ en B_ν.

Men ziet: de $G.G.D\,(\mu.\nu) \geqq \lambda$, terwijl $\lambda \geqq 3$ is, want B_λ moet

minstens één factor bezitten. Dit nu is in strijd met het gegeven.

Opmerking verdient, dat het eenige even priemgetal 2, hier heel natuurlijk, eene bijzondere plaats gaat innemen.

Eigenschap X. Is $\lambda = G.G.D\,(\mu.\nu)$, dan is B_λ de $G.G.D$ van B_μ en B_ν.

Bewijs: Volgens eig. V is B_λ zoowel een factor van B_μ als van B_ν, want $\mu = \mu'\lambda$ en $\nu = \nu'\lambda$. Deze factor zal nu $G.G.D$ zijn, zoo B_μ en B_ν buiten B_λ geen factor gemeenschappelijk hebben. Bestond deze factor nu wel, dan zou dit, volgens het bewijs van eig. IX leiden tot een gemeenschappelijke deeler $B_{\lambda'}$, met $\mu = \mu''\lambda'$ en $\nu = \nu''\lambda'$. Nu was gegeven, dat de $G.G.D\,(\mu,\nu) = \lambda$; dus is λ' een deeler van λ. Het feit echter, dat λ een veelvoud van λ' is, zegt, dat $B_{\lambda'}$ een factor is van B_λ m. a. w. de verondersteldе nieuwe factor komt reeds in B_λ voor.

N.B. De wortels van elke B_ν zijn enkelvoudig.

Eigenschap XI: Indien $\nu = 2^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} \ldots\ldots p_k^{\alpha_k}$, dan is

$$B_\nu = B_2^{\alpha_0} \cdot B_{p_1}^{\alpha_1} \cdot B_{p_2}^{\alpha_2} \ldots\ldots B_{p_k}^{\alpha_k} \cdot P_\nu.$$

als p_1 , p_2 . . . p_k de priemfactoren van ν voorstellen.

Bewijs: Aangezien ν een veelvoud is van 2^{α_0}, $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$ ... $p_k^{\alpha_k}$ zullen de polynomen $B_{2^{\alpha_0}}$, $B_{p_1^{\alpha_1}}$, $B_{p_2^{\alpha_2}}$ ... $B_{p_k^{\alpha_k}}$ als factoren van B_ν moeten optreden. Tevens is het onmogelijk, dat de enkelvoudige wortels daarbij dubbel geteld zouden worden, daar de indices der factoren relatief priem zijn.

Opmerking verdient, dat P_ν „niet uitsluitend" de primitieve wortels van B_ν bevat, maar ook nog andere b.v. de primitieve van $B_{2^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1}}$, etc.

§ 5. Eigenschap XII. Het aantal primitieve wortels van $B_\mu = 0$ voor $\mu = p^\alpha$ is:

22$^\alpha$) . . . . . $W(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}$ (p is een priemgetal).

Bewijs: We onderscheiden twee gevallen:

A. $p = 2$.

Is $\alpha \geqq 3$, dan kunnen we schrijven:

$$B_{2^\alpha} = B_{2^{\alpha-1}} \cdot Q_{2^\alpha}.$$

$B_{2^{\alpha-1}}$ is de grootste factor van B_{2^α}, die een volledige B-functie vormt. Zij bevat geen enkelen primitieven wortel van B_{2^α}. Deze zijn alle bevat in Q_{2^α}. Bovendien kan Q_{2^α} geen andere wortels bevatten, daar deze dan tevens wortels van een B_λ zouden zijn, met λ een deeler van 2^α en $< 2^\alpha$, d. w. z. λ zou ook deeler van $2^{\alpha-1}$ moeten zijn, of B_λ is factor van $B_{2^{\alpha-1}}$.

Letten we nu op den graad van bovenstaande vergelijking, dan is:

$$\left[\frac{2^\alpha - 1}{2}\right] = \left[\frac{2^{\alpha-1} - 1}{2}\right] + W(2^\alpha)$$

of $$W(2^\alpha) = \frac{2^{\alpha-1}.(2-1)}{2} = \frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}$$

$\alpha \geqq 3$.

Voor $\alpha = 2$, is $W(2^2) = 1 = \frac{2^{2-1}(2-1)}{2}$, dus de formule is ook juist voor $\alpha = 2$.

B. $p \geqq 3$, maar is een priemgetal.

Voor $\alpha = 1$, zijn alle wortels primitief, dus

$$W(p) = \frac{p-1}{2} = \frac{p^0(p-1)}{2}.$$

Zij nu $\alpha \geqq 2$, dan is

$$B_{p^\alpha} = B_{p^{\alpha-1}} . Q_{p^\alpha}.$$

Evenals bij $p = 2$, bevat Q_{p^α} juist de primitieve wortels, dus

$$\frac{p^\alpha - 1}{2} = \frac{p^{\alpha-1} - 1}{2} + W(p^\alpha)$$

of $$W(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2}.$$

Eigenschap XIII. Het aantal primitieve wortels van $B_\nu = 0$, als $\nu = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1}$, is

22b) . . $W(p_0^{\alpha_0} . p_1^{\alpha_1}) = \frac{1}{2} p_0^{\alpha_0-1} . p_1^{\alpha_1-1} (p_0 - 1)(p_1 - 1)$.

Bewijs: Zij 1°: $\alpha_1 = 1$, dan is

$$B_{p_0^{\alpha_0} p_1} = B_{p_0^{\alpha_0-1} . p_1} Q_\nu^{p_0}.$$

$Q_\nu^{p_0}$ bevat de primitieve wortels van de B-functies, die tot

index hebben $p_0^{\alpha_0}$ en $p_0^{\alpha_0} p_1 = \nu$. Alle andere wortels van B_ν zijn reeds begrepen in $B_{p_0^{\alpha_0}-1 \cdot p_1}$.

De vergelijking van den graad wordt nu:

$$\left[\frac{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 - 1}{2}\right] = \left[\frac{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1 - 1}{2}\right] + W(p_0^{\alpha_0}) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1)$$

of

$$W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1) = \frac{1}{2}\{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 - p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1 - p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot (p_0 - 1)\} \text{ (eig. XII)}$$

$$= \frac{1}{2} p_0^{\alpha_0 - 1} (p_0 - 1)(p_1 - 1).$$

We hebben toch, dat, als N en N' van dezelfde pariteit zijn, dat dan:

$$\left[\frac{N-1}{2}\right] - \left[\frac{N'-1}{2}\right] = \frac{N - N'}{2}.$$

Is toch $N = 2n + 1$, $N' = 2n' + 1$, dan is:

$\left[\frac{N-1}{2}\right] = \left[\frac{2n}{2}\right] = n$. Evenzoo $\left[\frac{N'-1}{2}\right] = n'$, dus

$$\left[\frac{N-1}{2}\right] - \left[\frac{N'-1}{2}\right] = n - n' = \frac{N - N'}{2}.$$

Is $N = 2n$ en $N' = 2n'$, dan is:

$\left[\frac{N-1}{2}\right] = \left[\frac{2n-1}{2}\right] = n - 1$. Evenzoo $\left[\frac{N'-1}{2}\right] = n' - 1$, dus

$$\left[\frac{N-1}{2}\right] - \left[\frac{N'-1}{2}\right] = n - n' = \frac{N - N'}{2}.$$

Nu zijn $p_0^{\alpha_0} p_1$ en $p_0^{\alpha_0 - 1} p_1$ alleen dan niet van dezelfde pariteit, als $p_0 = 2$ en $\alpha_0 = 1$.

Hier is $N = 2n$, $N' = 2n' + 1$

dus $\left[\frac{N-1}{2}\right] - \left[\frac{N'-1}{2}\right] = n - 1 - n' = \frac{1}{2}\{N - N' - 1\}$.

In dit speciale geval moet dus 't tweede lid met $^1/_2$ verminderd worden. Dit kan men nu 't eenvoudigst zoo doen, door voor den nu optredenden term $W(2)$ de formeele waarde te nemen, d. i. $W(2) = \frac{2^0 (2-1)}{2} = \frac{1}{2}$ inplaats van de juiste waarde $W(2) = 0$.

Het gegeven bewijs geldt nu in elk geval.

Voorbeeld: $W(6) = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

de tweede en laatste wortel behoort bij B_3.

2^0. $\alpha_1 = 2$.

$$B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2} = B_{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^2} \cdot Q_v^{p_0}.$$

$Q_v^{p_0}$ bevat de primitieve wortels van $B_{p_0^{\alpha_0}}$, $B_{p_0^{\alpha_0} p_1}$ en $B_{p^{\alpha_0} p_1^2}$, dus

$$\left[\frac{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2 - 1}{2}\right] = \left[\frac{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^2 - 1}{2}\right] + W(p_0^{\alpha_0}) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2)$$

of volgens 't voorgaande gedeelte:

$$\frac{1}{2}\{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2 - p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^2 - p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot (p_0 - 1)\} - W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1) = W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2)$$

dus $$W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2) = \frac{1}{2} p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1 (p_0 - 1)(p_1 - 1).$$

Nemen we aan, dat de juistheid der stelling bewezen is, voor $\alpha_1 = n$, dan zal zij ook gelden voor $\alpha_1 = n + 1$, want

$$B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{n+1}} = B_{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^{n+1}} \cdot Q_v^{p_0}.$$

Nu bevat $Q_v^{p_0}$ al de primitieve wortels der B's met indices

$$p_0^{\alpha_0}, p_0^{\alpha_0} \cdot p_1, p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2, \ldots p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^n \text{ en } p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{n+1}.$$

dus

$$\left[\frac{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} - 1}{2}\right] = \left[\frac{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^{\alpha_1} - 1}{2}\right] + W(p_0^{\alpha_0}) + \sum_{k=1}^{n} W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^k) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1})$$

of $$W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1}) = \frac{1}{2}\{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} - p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^{\alpha_1} - p_0^{\alpha_0 - 1}(p_0 - 1)\}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} p_0^{\alpha_0 - 1}(p_0 - 1)(p_1 - 1) p_1^{k-1} = \frac{1}{2} p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^{\alpha_1 - 1}(p_0 - 1)(p_1 - 1).$$

Eigenschap XIV: Het aantal primitieve wortels van $B_\nu = 0$, als $\nu = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, is

22) $$W(\nu) = \frac{1}{2} p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \ldots p_k^{\alpha_k - 1}(p_0 - 1)(p_1 - 1) \ldots (p_k - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \nu \left(1 - \frac{1}{p_0}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \frac{1}{2} \Phi(\nu)$$

als $\Phi(\nu)$ de functie van EULER aangeeft, indicator genoemd.

Bewijs: Het bewijs is reeds geleverd voor $k = 0$ en 1 (eig. XII en XIII).

Nemen wij nu $k = 3$ met $\alpha_1 = 1$ en $\alpha_2 = 1$, dus $\nu = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 \cdot p_2$.

Nu is: $$B_\nu = B_{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1 \cdot p_2} Q_\nu^{p_0}$$

waarbij $Q_\nu^{p_0}$ de primitieve wortels bevat van $B_{p_0^{\alpha_0}}$, $B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1}$, $B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_2}$ en $B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 \cdot p_2}$, dus lettende op den graad:

$$\left[\frac{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 \cdot p_2 - 1}{2}\right] = \left[\frac{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1 \cdot p_2 - 1}{2}\right] + W(p_0^{\alpha_0}) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_2) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 \cdot p_2).$$

of $$W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 \cdot p_2) = \frac{1}{2} p_0^{\alpha_0 - 1} (p_0 - 1)(p_1 - 1)(p_2 - 1).$$

Nemen we nu aan, dat de formule geldt voor $\nu = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2$, dan geldt zij ook voor $\nu = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1 + 1} \cdot p_2$.

We hebben weer:

$$B_\nu = B_{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^{\alpha_1 + 1} \cdot p_2} Q_\nu^{p_0}.$$

$Q_\nu^{p_0}$ bevat uitsluitend de primitieve wortels van:

$$B_p^{\alpha_0}, \; B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1}, \; B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2}, \; \ldots \; B_{p^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha + 1}}$$

$$B_{p_0^{\alpha_0} p_2}, \; B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 p_2}, \; B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2 p_2}, \; \ldots \; B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1 + 1} \cdot p_2}$$

dus, lettende op den graad, is:

$$\left[\frac{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1 + 1} \cdot p_2 - 1}{2}\right] = \left[\frac{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^{\alpha_1 + 1} \cdot p_2 - 1}{2}\right] + W(p_0^{\alpha_0}) + \sum_{n=1}^{\alpha_1 + 1} W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^n) + \sum_{n=1}^{\alpha_1} W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^n \cdot p_2) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_2) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1 + 1} \cdot p_2).$$

Berekening leert:

$$W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1 + 1} \cdot p_2) = \frac{1}{2} p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^{\alpha_1} (p_0 - 1)(p_1 - 1)(p_2 - 1).$$

Tevens is dus nu:

$$W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 \cdot p_2^{\alpha_2}) = \frac{1}{2} p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2 - 1} (p_0 - 1)(p_1 - 1)(p_2 - 1).$$

Ten slotte nog het bewijs voor $k = 3$, $\alpha_1 = 2$ en $\alpha_2 = 2$.

$$\nu = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2$$

$$B_\nu = B_{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2} \cdot Q_\nu^{p_0}.$$

$Q_\nu^{p_0}$ bevat uitsluitend de primitieve factoren van:

$$B_{p_0^{\alpha_0}} \quad B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1} \quad B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2}$$
$$B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_2} \quad B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 \cdot p_2} \quad B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2 \cdot p_2}$$
$$B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_2^2} \quad B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 \cdot p_2^2} \quad B_{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2}.$$

dus de graadvergelijking wordt:

$$\left[\frac{p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2 - 1}{2}\right] = \left[\frac{p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2 - 1}{2}\right] + W(p_0^{\alpha_0})$$
$$+ \sum_{n=1}^{2} W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^n) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_2) + \sum_{n=1}^{2} W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^n \cdot p_2)$$
$$+ W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_2^2) + W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1 \cdot p_2^2) + W(p^{\alpha_0} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2).$$

Berekening leert nu:

$$W(p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^2 \cdot p_2^2) = \frac{1}{2} p_0^{\alpha_0 - 1} \cdot p_1 \cdot p_2 (p_0 - 1)(p_1 - 1)(p_2 - 1).$$

Zoo voortredeneerende, kan het bewijs geleverd worden voor hoogere exponenten en meerdere factoren.

§ 6. **Gaan we nu de overige niet-primitieve wortels van B_ν nader bestudeeren. Onder hen zullen er misschien voorkomen, die uitsluitend tot één B-polynoom met kleineren index behooren. Deze wortels kunnen we secundaire of wortels van de 2e orde noemen.**

In 't algemeen gaan we uit van de volgende

Definitie: Onder de „orde" van een wortel van $B_\nu = 0$ verstaat men het aantal B-functies met een index, kleiner dan of hoogstens gelijk aan ν, waarvoor bedoelde wortel ook wortel is.

Een primitieve wortel van $B_\nu = 0$ heeft dus een orde gelijk aan één.

Eigenschap XV. Is d een willekeurige deeler van ν, dan bezit $B_\nu = 0$ $W(d)$ wortels van een orde $\frac{\nu}{d}$.

Bewijs: Elke wortel van B_ν is tevens primitieve wortel voor een polynoom B_d, terwijl dan d een deeler van ν moet zijn (ν zelf medegerekend als deeler). Omgekeerd is elke primitieve wortel van B_d ook wortel van B_ν. Beschouwen we nu alle pri-

mitieve wortels van elke B_d (d deeler van ν), dan hebben we juist alle wortels van B_ν, ieder éénmaal geteld, in formule

$$23) \quad \ldots\ldots\ldots \sum_{\text{deelers } \nu} W(d) = \left[\frac{\mu - 1}{2}\right]$$

waarbij natuurlijk $W(1) = W(2) = 0$ genomen moet worden.

Verder is elke primitieve wortel van B_d tevens en uitsluitend een wortel van een B-polynoom met index: d , $2d$, $3d$, ... of $\frac{\nu}{d} d = \nu$, wanneer we ons bepalen tot indices $\leqq \nu$.

Hun aantal is $\frac{\nu}{d}$, m. a. w. er zijn $W(d)$ wortels van een orde $\frac{\nu}{d}$.

§ 7. **Om een beter inzicht te verkrijgen in het onderling verband der wortels der verschillende polynomen, zal ik hen in teekening brengen [1]).**

Zooals reeds bekend is, liggen alle wortels op de negatieve reëele as. Ter verduidelijking, teeken ik nu meerdere X-assen onder elkaar, zóódanig, dat de correspondeerende punten elk hunner in één loodlijn op hun gemeenschappelijke richting komen te liggen. Dit sluit in zich, dat de eenheidsmaat in alle overeenkomstige punten dezelfde is. Zonder hiermede in strijd te komen, kan ik verder de eenheidsmaat laten afnemen met 't grooter (absoluut genomen) worden van de abscis. Hierdoor wordt verkregen, dat in de omgeving $-\frac{1}{4}$, waar de meeste wortels liggen, de X-assen op grootere schaal worden voorgesteld. Een en ander is analoog met eene afbeelding na eene transformatie, bv.

$$x = \frac{x'}{x' + 1}.$$

Verder gebruik ik de volgende notatie: $-x_\nu^k$ is de k^e wortel van B_ν.

Als eerste wordt de absoluut kleinste genomen, die nadert tot $-\frac{1}{4}$, en verder volgens de grootte [2]). Steeds is $k \leqq \left[\frac{\nu - 1}{2}\right]$.

Op de bovenste of eerste X-as stip ik nu uitsluitend de ligging

---

1) Zie uitslaande plaat achteraan.

2) Hier en in 't vervolg wordt met de grootte steeds de absolute waarde bedoeld.

van al de eerste wortels aan, op de tweede X-as uitsluitend den tweeden wortel van elk polynoom etc., in 't kort op de k^e X-as wordt alleen de k^e wortel van elk polynoom aangegeven, zoo deze bestaat. Schuift men de assen weer ineen, dan is men tot eene gewone afbeelding terug.

Op eenzelfde X-as kunnen nu geen twee wortels samenvallen, daar, volgens eig. II, de k^e wortel van B_ν, bij 't grooter worden van ν, maar bij constante k, afneemt [1]), in de teekening dus naar rechts schuift.

De evengroote wortels, op verschillende assen, liggen op dezelfde loodlijn.

Verder is in de teekening het negatieve teeken weggelaten, evenals de bovenindex (rangorde). Deze toch stemt overeen met den rang van den regel (X-as), waarop de wortel is geplaatst.

Onmiddellijk blijkt, dat op den k^{en} regel, alle getallen grooter dan $2k$ als benedenindex juist in rangorde éénmaal voorkomen. Van af B_{2k+1} toch bezitten alle polynomen een k^{en} wortel.

Eigenschap XVI: De wortelindices (aan den voet) van twee gelijke wortels verhouden zich als de rangorde van die wortels, in de bijbehoorende polynomen.

Bewijs: Gaan we uit van den p^{en} wortel van B_ν. Eenvoudigheidshalve nemen we vooreerst aan, dat deze wortel een primitieve voor B_ν is, d. w. z. in de teekening is x_ν^p het hoofd van een kolom.

Alle wortels, die gelijk zijn aan $-x_\nu^p$ en dus in dezelfde kolom voorkomen, zullen volgens de opmerking bij eig. V, uitsluitend behooren tot polynomen met indices, die veelvouden van ν zijn. Kiezen we er één uit, bv. met index $n\nu$, dan moet bewezen worden, dat de rangorde van den gelijken wortel van $B_{n\nu}$ gelijk is aan np.

Dit leidt tot het volgende vraagstuk:

Gegeven: $B_\nu(-x_\nu^p) = 0$

$B_{n\nu}(-x_{n\nu}^y) = 0$

$x_\nu^p = x_{n\nu}^y$.

Gevraagd: y.

1) Hier en in 't vervolg wordt met de grootte steeds de absolute waarde bedoeld.

Dit vraagstuk kan opgelost worden met behulp van het uitgebreide theorema van STURM. (Vergelijk bv. LOBATTO's Algebra pg. 210).

De te onderzoeken functie X is nu $B_{n\nu}$, terwijl voor de hulpfuncties $V_1 \ldots V_{m-1}$, V_m , $V_{m+1} \ldots V_{n-1}$, V_n de polynomen $B_{n\nu-2}$, $B_{n\nu-4} \ldots B_{m+2}$, B_m , $B_{m-2} \ldots B_2$ of B_1 kunnen genomen worden.

Hiertoe moeten deze B-functies aan de volgende vier voorwaarden voldoen:

1°. Twee opeenvolgende functies B_m en B_{m+2} worden niet nul voor eenzelfde waarde van x.

De *G.G.D* van m en $m+2$ is 1 of 2, dus B_m en B_{m+2} hebben geen gemeenschappelijken factor, volgens eig. IX. (Vergel. 4°).

2°. Als voor een waarde van x de functie B_m nul wordt, verkrijgen de voorafgaande en de volgende functies B_{m+2} en B_{m-2} tegengestelde teekens.

Zij die waarde $-x_m$. Volgens form. (7) is:

$$B_\beta \,.\, B_{\alpha+\beta+\gamma} = B_{\beta+\gamma} \,.\, B_{\alpha+\beta} + (-1)^{\beta-1} \,.\, x^\beta \,.\, B_\gamma \,.\, B_\alpha.$$

Nemen we nu $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\alpha = m-2$, dan is:

$$B_2 \,.\, B_{m+2} = B_4 \,.\, B_m - x^2 \,.\, B_{m-2} \text{ of voor } x = -x_m.$$

24) . . . . . $B_{m+2}(-x_m) = -x_m^2 B_{m-2}(-x_m)$

waaruit blijkt, dat B_{m-2} en B_{m+2} in teeken verschillen voor $x = -x_m$.

3°. De laatste functie B_1 (voor $n\nu$ oneven) of B_2 (voor $n\nu$ even) behoudt voor elke waarde van x hetzelfde teeken, want $B_1 = 1 = B_2$.

4°. Als $-x_{n\nu}$ een wortel van de vergelijking $B_{n\nu}(x) = 0$ is, vormen de teekens van $B_{n\nu}$ en $B_{n\nu-2}$ voor $x = -x_{n\nu} - \delta$ eene variatie, en voor $x = -x_{n\nu} + \delta$ eene permanentie, waarbij δ een zeer kleine positieve grootheid voorstelt.

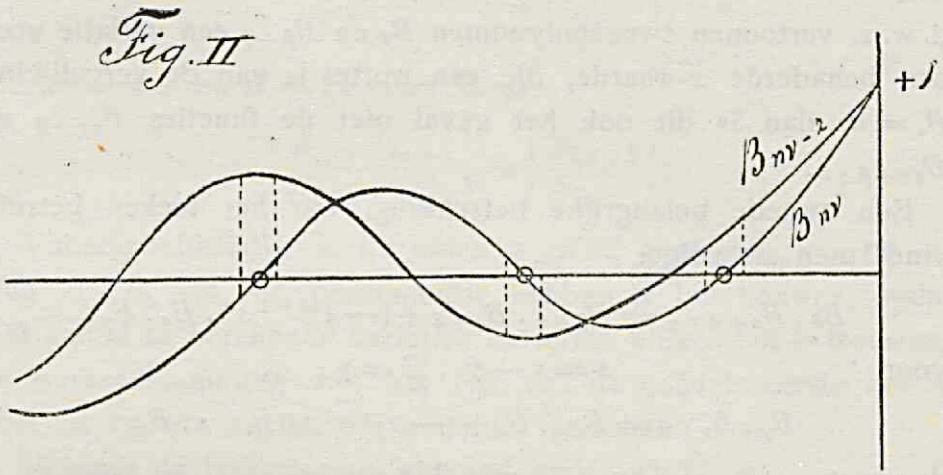
Analoog aan eig. II kan, met behulp der formule

25) . . . . . $B_{\alpha+4}(x) = (1+2x)\, B_{\alpha+2}(x) - x^2 B_\alpha(x)$

bewezen worden, dat de wortels van elke twee opeenvolgende B-polynomen eener rij, hetzij met even, hetzij met oneven index,

afwisselend gelegen zijn, en wel zóó, dat de B met den grooteren index den kleinsten (absoluut gemeten) wortel bezit.

Fig. II



Uit de teekening blijkt ten duidelijkste, dat aan deze 4e voorwaarde voldaan wordt bij elken wortel van $B_{n\nu}$.

De beschouwde reeks polynomen zijn dus Sturmsche functies, waarmee we nu 't aantal wortels van $B_{n\nu} = 0$ gelegen tusschen 0 en $-x_\nu^p - \delta$ kunnen bepalen.

Voor $x = 0$ vertoont de rij niets dan permanenties, want $B_\nu(0) = +1$.

Het verschil in aantal variaties bij de substituties $x = -x_\nu^p - \delta$ en $x = 0$ is dus juist het aantal variaties in de rij na de substitie $x = -x_\nu^p - \delta$.

Dit aantal kan nu als volgt bepaald worden.

Volgens form. (7) is:

$$B_\beta \cdot B_{\alpha+\beta+\gamma} = B_{\beta+\gamma} \cdot B_{\alpha+\beta} + (-1)^{\beta-1} x^\beta \cdot B_\gamma \cdot B_\alpha.$$

Nemen we $\alpha = q\nu$, $\gamma = 2$, dan is:

$$B_\beta \cdot B_{q\nu+\beta+2} = B_{\beta+2} \cdot B_{q\nu+\beta} + (-1)^{\beta-1} \cdot x^\beta \cdot B_{q\nu}.$$

Nu is $-x_\nu^p$ een wortel voor elke vergelijking $B_{q\nu} = 0$, dus $B_{q\nu}(-x_\nu^p - \delta)$ neemt, met δ, af tot elke willekeurige kleine waarde, zoodat bij benadering

$$\frac{B_{q\nu+\beta+2}}{B_{q\nu+\beta}} \equiv \frac{B_{\beta+2}}{B_\beta},$$

Moge nu $\{a\} + 1$ of -1 beteekenen, naarmate a positief of negatief is, dan is

26) . . . . . $\left\{\frac{B_{q\nu+\beta+2}}{B_{q\nu+\beta}}\right\} = \left\{\frac{B_{\beta+2}}{B_{\beta}}\right\} \quad \begin{pmatrix} x = -x_\nu \pm \delta \\ \beta \neq 0 \end{pmatrix}$.

d. w. z. vertoonen twee polynomen B_β en $B_{\beta+2}$ een variatie voor een benaderde x-waarde, die een wortel is van de vergelijking $B_\nu = 0$, dan is dit ook het geval met de functies $B_{q\nu+\beta}$ en $B_{q\nu+\beta+2}$.

Een tweede belangrijke betrekking, wat het teeken betreft, vindt men als volgt:

$$B_\beta \,.\, B_{\alpha+\beta+\gamma} = B_{\beta+\gamma} \,.\, B_{\alpha+\beta} + (-1)^{\beta-1} x^\beta \,.\, B_\alpha \,.\, B_\gamma \,.$$

voor $\alpha = \nu - \gamma \;,\; \beta = \gamma \,;$

$$B_\gamma \,.\, B_{\nu+\gamma} = B_{2\gamma} \,.\, B_\nu + (-1)^{\gamma-1} x^\gamma B_{\nu-\gamma} \,.\, B_\gamma .$$

dus voor $x = -x_\nu \pm \delta < 0$, is

$$\{ B_\gamma \,.\, B_{\nu+\gamma} \} = -\{ B_{\nu-\gamma} \,.\, B_\gamma \}$$

of

27) . . . . . $\{ B_{\nu+\gamma} \} = -\{ B_{\nu-\gamma} \} \quad (x = -x_\nu^p \pm \delta)$.

In het volgende is het argument van de B-functies steeds $-x_\nu^p - \delta$.

We kunnen nu de volgende gevallen onderscheiden:

A. ν is even, gelijk aan 2μ.

Men kan de reeks der B-functies B_2 , B_4 . . . $B_{2\mu}$ als volgt in n-groepen vereenigen.

Eenvoudigheidshalve schrijf ik alleen den index:

$0 \;,\; 2 \;,\; 4 \,, \ldots \quad 2q \,, \quad 2q+2 \,, \ldots \,, 2\mu-2 \,, 2\mu$

$2\mu \,, 2\mu+2 \,, 2\mu+4 \,, \ldots \,, 2\mu+2q \,, 2\mu+2q+2 \,, \ldots \,, 4\mu-2 \,, 4\mu$

$4\mu \,, 4\mu+2 \,, 4\mu+4 \,, \ldots \,, 4\mu+2q \,, 4\mu+2q+2 \,, \ldots \,, 6\mu-2 \,, 6\mu$

. . . . . .

$\ldots \,, 2p\mu+2q \,, 2p\mu+2q+2 \,, \ldots$

. . . . . .

$2(n-1)\mu \,, \ldots \qquad \ldots \,, 2n\mu-2 \,, 2n\mu .$

Gemakkelijk is nu aan te toonen, dat de variaties (en dus ook de permanenties) kolomsgewijze gerangschikt zijn, d.w.z. vertoonen B_{2q} en B_{2q+2} eene variatie, dan is dit ook 't geval met elk paar $B_{2p\mu+2q}$ en $B_{2p\mu+2q+2}$.

Hiertoe substitueere men in (26)

$$\left\{\frac{B_{q\nu+\beta+2}}{B_{q\nu+\beta}}\right\} = \left\{\frac{B_{\beta+2}}{B_{\beta}}\right\}$$

slechts $q = p$ en $\beta = 2q$, dan komt:

$$\left\{\frac{B_{2p\mu+2q+2}}{B_{2p\mu+2q}}\right\} = \left\{\frac{B_{2q+2}}{B_{2q}}\right\}.$$

Volledigheidshalve is de index o er bij geplaatst, waarbij we dan B_0, B_2 als een permanentie hebben te beschouwen, opdat het aantal te berekenen variaties hetzelfde blijve. Dit is trouwens in overeenstemming met het feit, dat de geheele eerste kolom met de tweede slechts permanenties vertoont.

Volgens de redeneering, gevolgd onder 4^0, is

$$\left\{\frac{B_{2q\mu}(-x_\nu-\delta)}{B_{2q\mu-2}(-x_\nu-\delta)}\right\} = -1.$$

en volgens 2^0 is: $\left\{\frac{B_{2q\mu+2}}{B_{2q\mu-2}}\right\} = -1.$

dus, deelende is: $\left\{\frac{B_{2q\mu+2}}{B_{2q\mu}}\right\} = +1.$

Het tellen van het aantal variaties in de rij B_2 , B_4 , ... $B_{n\nu}$ voor $\nu = 2\mu$ is hiermee teruggebracht tot 't tellen van dit aantal tusschen de functies:

$$B_2 \ , \ B_4 \ , \ \ldots \ . \ B_{2\mu}.$$

Het totale aantal variaties is dan n maal zoo groot.

Bepalen we nu 't aantal variaties in de eerste groep:

$$\{B_{2\mu}\} \ . \ \{B_{\nu-2}\} \ . \ \ldots \ . \ \{B_6\} \ . \ \{B_4\} \ . \ \{B_2\}.$$

Al dadelijk is $\left\{\frac{B_\nu}{B_{\nu-2}}\right\} = -1$, want van B_ν liggen er p wortels rechts van $-x_\nu^p - \delta$ en slechts $p-1$ van $B_{\nu-2}$, in verband met $\{B_\nu(o)\} = +1 = \{B_{\nu-2}(o)\}$.

Deze eerste variatie heeft ons tevens gebracht op den $p-1^{en}$ regel van de figuur, want de $p-1^e$ wortel van $B_{\nu-2}$ kwam ter sprake, en met deze rangorde gaan we verder. Ter linkerzijde van den wortel $-x_{\nu-2}^{p-1}$ ligt de $p-1^e$ wortel van $B_{\nu-4}$, hetzij

rechts van de lijn $-x_\nu^p-\delta$, hetzij links. In beide gevallen ligt echter de p^e wortel van $B_{\nu-4}$ links van $-x_\nu^p-\delta$, want elke k^e wortel wordt grooter (absoluut gemeten) als de index van 't polynoom kleiner wordt.

Nemen we nu aan, dat $-x_{\nu-4}^{p-1}$ rechts van $-x_\nu^p-\delta$ ligt, dan liggen er, tusschen o en $-x_\nu^p-\delta$, $p-1$ wortels van $B_{\nu-4}$, evenals van $B_{\nu-2}$, dus $\left\{\frac{B_{\nu-4}}{B_{\nu-2}}\right\}=+1$, want ook $\frac{B_{\nu-4}(o)}{B_{\nu-2}(o)}=+1$.

Zoo zal eveneens $\left\{\frac{B_{\nu-6}}{B_{\nu-4}}\right\}=+1$, als $-x_{\nu-6}^{p-1}$ rechts van de lijn $-x_\nu^p-\delta$ gelegen is.

Is nu $B_{\nu-2s}$ de laatste B-functie met even index, waarvan de $(p-1)^e$ wortel rechts van de lijn $-x_\nu^p-\delta$ ligt, dan zullen $B_{\nu-2s}$ en $B_{\nu-2s-2}$ de tweede variatie vertoonen.

Het aantal wortels van $B_{\nu-2s}$ tusschen o en $-x_\nu^p-\delta$ is nog $p-1$, maar dat van $B_{\nu-2s}$ slechts $p-2$, maar ook niet minder. Dit laatste volgt uit 't feit, dat de $p-2^e$ wortel van $B_{\nu-2s-2}$ rechts van den $p-1^{en}$ wortel van $B_{\nu-2s}$ ligt, dus a fortiori van de lijn $-x_\nu^p-\delta$, dus

$$\left\{\frac{B_{2\nu-2s}(x_\nu-\delta)}{B_{2\nu-2s}(o)}\right\}=-\left\{\frac{B_{2\nu-2s-2}(-x_\nu-\delta)}{B_{2\nu-2s-2}(o)}\right\}.$$

Verder is weer $\{B_{2\nu-2s}(o)\}=\{B_{2\nu-2s-2}(o)\}$

of

$$\left\{\frac{B_{2\nu-2s-2}}{B_{2\nu-2s}}\right\}=-1.$$

Vanzelf zijn we met deze nieuwe variatie een regel hooger gekomen, want de $p-2^e$ wortel kwam ter sprake. Ligt ook de $p-2^e$ wortel van $B_{2\nu-2s-4}$ nog rechts van $-x_\nu^p-\delta$, dan is $\{B_{2\nu-2s-4}\}=\{B_{2\nu-2s}\}$. Zij $B_{2\nu-2s-2t}$ de laatste functie, waarvoor de $p-2^e$ wortel ter rechterzijde gelegen is, dan is

$$\{B_{2\nu-2s-2t-2}\}=-\{B_{2\nu-2s-2t}\}$$

terwijl de $p-3^e$ wortel van $B_{2\nu-2s-2t-2}$ rechts van $-x_\nu^p-\delta$ ligt. Tevens zijn we genaderd tot de wortels met een rangorde $p-3$, die alle gelegen zijn op de naastvolgende X-as.

Het is duidelijk, dat op elken regel één variatie komt, dit zijn totaal p variaties, zoodat het totale aantal variaties in de rij $B_2 . B_4 \ldots . B_{n\nu}$ np bedraagt.

De waarde van y in dit geval is dus np.

N.B. In de figuur is deze redeneering gemakkelijk te volgen, door te nemen: $\nu = 42$. $p = 13$.

Opmerking: Het bewijs blijft gelden, ook al ligt de scheidingslijn $-x_\nu^p - \delta$ links van de vertikaal $-x_3$, mits men slechts in plaats van de uitdrukking „links van de lijn $-x_\nu^p - \delta$" leze „niet rechts van de lijn $-x_\nu^p - \delta$".

B. ν is oneven, gelijk aan $2\mu + 1$.

1°. n is even.

We kunnen nu de B functies als volgt groepeeren:

$$0, \quad +2, .. 2\mu - 2 \quad , 2\mu, \ldots\ldots, 4\mu, 2(2\mu+1)$$

$$2(2\mu+1), 2(2\mu+1)+2 .. 2(2\mu+1)+2\mu-2, ., 4(2\mu+1)-2, 4(2\mu+1)$$

$$4(2\mu+1), 4(2\mu+1)+2, .. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n-2)(2\mu+1) \ , \ldots\ldots \qquad \ldots, n(2\mu+1)$$

Evenals onder A, blijken de variaties kolomsgewijze gerangschikt te zijn, de eerste en tweede kolom vertoonen niets dan permanenties, de laatste en voorlaatste niets dan variaties. We hebben dus $\frac{n}{2}$ groepen, met elk een aantal variaties, dat overeenkomt met dat van de rij:

$$0, 2, 4, ., 2\mu, [2\mu + 1\,(0)], 2\mu + 2, .. 4\mu - 2, 4\mu, 2(2\mu+1)(0).$$

De index $2\mu + 1$ is er bij geplaatst, om 't midden van de rij aan te geven. De nul beteekent, dat de bijbehoorende B functie voor $-x_\nu^p - \delta$ nagenoeg nul wordt.

Volgens form. (27) zijn nu de teekens in deze rij symmetrisch tegengesteld, of 't aantal variaties in de eerste helft is gelijk aan dat in de tweede helft.

Het totale aantal variaties is dus n maal zoo groot als dat in de rij: $B_{2\mu+2}, B_{2\mu}, B_{2\mu-2}, \ldots B_4, B_2$.

Ook hier vindt men p variaties, dus $y = np$.

2^0. n is oneven.

Nu is de groepeering als volgt:

$$\begin{array}{llll}
1, & 3, .. 2\mu-1, & 2\mu+1, 2\mu+3, .., & 2(2\mu+1)-1, 2(2\mu+1)+1. \\
2(2\mu+1)+1, 2(2\mu+1)+3, .. & , 3(2\mu+1), & .., & 4(2\mu+1)-1, 4(2\mu+1)+1. \\
4(2\mu+1)+1, 4(2\mu+1)+3, .. & , 5(2\mu+1), & .., & 6(2\mu+1)-1, 6(2\mu+1)+1. \\
\ldots\ldots\ldots & & & \ldots\ldots\ldots \\
(n-1)(2\mu+1)+1, \ldots\ldots\ldots & , n(2\mu+1). & &
\end{array}$$

Ook hier zijn de variaties kolomsgewijze gerangschikt en is elke volledige regel symmetrisch tegengesteld in teeken. Verder is $\{B_{2\mu+1}\} = \{B_{2\mu+3}\}$, want $B_{2\mu+1}$ en $B_{2\mu+3}$ hebben hetzelfde aantal wortels rechts van de lijn $-x_\nu^p - \delta$ liggen.

Men komt dus tot n groepen, die alle hetzelfde aantal variaties bezitten als de rij:

$$B_{2\mu+1}, B_{2\mu-1}, \ldots . B_3 . B_1.$$

Dit aantal is weer p, dus ook hier is $y = np$.

Opmerking. Het bewijs zou eenvoudiger geweest zijn, indien de polynomen niet in groepen waren gerangschikt. Hiermee zou echter de groote symmetrie, die volgens het gegeven bewijs bestaat, niet te voorschijn zijn getreden.

Gemakkelijk kan de gemaakte beperking, n.m.l. dat één der twee gelijke wortels het hoofd van een kolom is, opgeheven worden.

Mogen de te beschouwen wortels zijn:

$$-x_{n\nu}^{y} \quad \text{en} \quad -x_{n'\nu}^{z}$$

waarbij y en z de onbekende rangorde aangeven.

Resumeerende, moet dan bewezen worden, dat

$$y : z = n\nu : n'\nu$$

als

$$-x_{n\nu}^{y} = -x_{n'\nu}^{z}.$$

Bewijs: Zij $-x_\mu^p$ de wortel, die het hoofd vormt van de

kolom, waarin beide wortels voorkomen. Volgens een reeds meermalen gebruikte eigenschap is dan $n\nu$ en $n'\nu$ een veelvoud van μ, of daar we n en n' als relatief priem mogen beschouwen, is ν een veelvoud van μ.

Zij $\nu = k\mu$ $(k = 1 \text{ of } 2 \text{ of } 3 \ldots)$

Volgens de zooeven bewezen stelling, hebben we dan de evenredigheid:

$$\mu : n\nu = p : y$$

of $$y = np \cdot \frac{\nu}{\mu} = n \cdot p \cdot k.$$

Eveneens:

$$\mu : n'\nu = p : z$$

of $$z = n' \cdot p \cdot k$$

dus $$y : z = n : n' = n\nu : n'\nu.$$ h. t. b. w.

Opmerking: Steeds is $\mu > 2$.

Definitie: Onder den rang van een kolom verstaat men de rangorde van den regel, waarop het hoofd van de kolom voorkomt, d. w. z. de rangorde van dien wortel in het bijbehoorend polynoom.

Onmiddellijk volgt uit de voorgaande eigenschap:

Eigenschap XVII. De rangorde van de kolom van een wortel van den p^{en} regel is steeds een deeler van p (1 en p medegerekend).

Eigenschap XVIII. Een primitieve wortel is steeds het hoofd van een kolom. De rangorde van wortel en kolom is dezelfde.

§ 8. De ontbinding in factoren.

Beginnen we met de polynomen $B_{2\nu}$.

Volgens form. (15) is

$$B_{2\nu} = B_\nu \{ B_{\nu+1} + x B_{\nu-1} \}.$$

Volgens (5) is de eerste factor

$$B_\nu = 1 + \binom{\nu-2}{1} x + \binom{\nu-3}{2} x^2 + \binom{\nu-4}{3} x^3 + \ldots$$

Voor den tweeden factor vindt men

$$B_{\nu+1} = 1 + \binom{\nu-1}{1} x + \binom{\nu-2}{2} x^2 + \binom{\nu-3}{3} x^3 + \dots$$

$$x\,B_{\nu-1} = \quad 1 \,.\, x + \binom{\nu-3}{1} x^2 + \binom{\nu-4}{2} x^3 + \dots$$

28) $$B_{\nu+1} + x\,B_{\nu-1} = 1 + \frac{\nu}{1}.x + \frac{\nu}{2}\binom{\nu-3}{1}x^2 + \frac{\nu}{3}\binom{\nu-4}{2}x^3 + \frac{\nu}{4}\binom{\nu-5}{3}x^4 + \dots$$

$$\left\{ \text{graad} \left[\frac{\nu}{2}\right] \right\}.$$

Gaan we nu over tot het algemeene geval:

$$B_N = B_{\mu.\nu} = B_\mu \,.\, P\,.$$

dan is:

29) $$1 + \binom{N-2}{1} x + \binom{N-3}{2} x^2 + \binom{N-4}{3} x^3 + \dots \quad =$$

$$\left\{1 + \binom{\mu-2}{1} x + \binom{\mu-3}{2} x^2 + \binom{\mu-4}{4} x^3 + \dots\right\} \left\{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p\right\}.$$

Na vermenigvuldiging en gelijkstelling der coëff. van gelijknamige machten van x, volgen de betrekkingen:

$$a_1 = N - \mu = a \text{ uit } a_1 + \binom{\mu-2}{1} = \binom{N-2}{1}$$

$$a_2 = \frac{a}{2}\binom{a-3}{1} \text{ uit } a_2 + a_1\binom{\mu-2}{1} + \binom{\mu-3}{2} = \binom{N-3}{2}$$

$$a_3 = \frac{a}{3}\binom{a-4}{2} \text{ uit } a_3 + a_2\binom{\mu-2}{1} + a_1\binom{\mu-3}{2} + \binom{\mu-4}{3} = \binom{N-4}{3}$$

$$a_4 = \frac{a}{4}\binom{a-5}{3}$$

$$a_5 = \frac{a}{5}\binom{a-6}{4} \text{ etc.}$$

Deze formules zijn zeker juist, zoolang de coëficient $a_0 = 1$ nog bij de berekening gebruikt wordt.

Dit houdt echter op, zoodra de macht van x gelijk aan $\left[\frac{\mu-1}{2}\right] + 1$ wordt. Dank zij den vorm der coëfficienten kunnen we B_μ formeel met de volgende termen verlengen:

$$\binom{\mu-\left[\frac{\mu-1}{2}\right]-2}{\left[\frac{\mu-1}{2}\right]+1}x^{\left[\frac{\mu-1}{2}\right]+1}+\binom{\mu-\left[\frac{\mu-1}{2}\right]-3}{\left[\frac{\mu-1}{2}\right]+2}x^{\left[\frac{\mu-1}{2}\right]+2}+\ldots$$

$$+\binom{\mu-\mu}{\mu-1}x^{\mu-1},$$

zoodat we de coëfficienten tot en met $a_{\mu-1}$ kunnen berekenen:

30)
$$\begin{cases} a_1 = a = N-\mu \\ a_2 = \frac{a}{2}\binom{a-3}{1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_p = \frac{a}{p}\binom{a-p-1}{p-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{\mu-1} = \frac{a}{\mu-1}\binom{a-\mu}{\mu-2} \end{cases}$$

Deze formules zijn toereikend in 't geval $N = 2\mu$.

Ten einde de volgende coëfficienten a_μ, $a_{\mu+1}$, .. te bepalen, kunnen we B_μ met nog meerdere termen verlengen, van overeenkomstigen bouw. Deze termen bezitten niet meer een nulfactor, waardoor behalve de voortzetting $\frac{a}{\mu}\binom{a-\mu-1}{\mu-1}$ in a_μ een tweede correctie-term optreedt.

Berekening leert:

31)
$$\begin{cases} a_\mu = \frac{a}{\mu}\binom{a-\mu-1}{\mu-1}+(-1)^\mu \\ a_{\mu+1} = \frac{a}{\mu+1}\binom{a-\mu-2}{\mu}+(-1)^\mu\binom{a-2\mu}{1} \\ a_{\mu+2} = \frac{a}{\mu+2}\binom{a-\mu-3}{\mu+1}+(-1)^\mu\frac{b}{2}\binom{b-3}{1} \text{ als } b=a-2\mu=N-3\mu \\ a_{\mu+3} = \frac{a}{\mu+3}\binom{a-\mu-4}{\mu+2}+(-1)^\mu\frac{b}{3}\binom{b-4}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2\mu-1} = \frac{a}{2\mu-1}\binom{a-2\mu}{2\mu-2}+(-1)^\mu\frac{b}{\mu-1}\binom{b-\mu}{\mu-2}. \end{cases}$$

Vervolgens komt er:

$$32)\quad \begin{cases} a_{2\mu} = \frac{a}{2\mu}\binom{a-2\mu-1}{2\mu-1} + (-1)^{\mu}\frac{b}{\mu}\binom{b-\mu-1}{\mu-1} + (-1)^{2\mu} \\ a_{2\mu+1} = \frac{a}{2\mu+1}\binom{a-2\mu-2}{2\mu} + (-1)^{\mu}\frac{b}{\mu+1}\binom{b-\mu-2}{\mu} + (-1)^{2\mu}\frac{c}{1} \\ a_{2\mu+2} = \frac{a}{2\mu+2}\binom{a-2\mu-3}{2\mu+1} + (-1)^{\mu}\frac{b}{\mu+2}\binom{b-\mu-3}{\mu+1} + (-1)^{2\mu}\frac{c}{2}\binom{c-3}{1} \\ a_{2\mu+3} = \frac{a}{2\mu+3}\binom{a-2\mu-4}{2\mu+2} + (-1)^{\mu}\frac{b}{\mu+3}\binom{b-\mu-4}{\mu+2} + (-1)^{2\mu}\frac{c}{3}\binom{c-4}{2} \end{cases}$$

etc. etc.,

terwijl

$$a = N - \mu$$
$$b = a - 2\mu = N - 3\mu$$
$$c = b - 2\mu = N - 5\mu$$
$$d = c - 2\mu = N - 7\mu$$
etc.

Voorbeelden:

$$B_{12} = 1 + 10x + 36x^2 + 56x^3 + 35x^4 + 6x^5 =$$

1^0 $\mu = 6.$ $\nu = 2.$ $N = 12.$ $a = 6.$

$$B_{12} = \left\{1 + 4x + 3x^2\right\}\left\{1 + \frac{6}{1}x + \frac{6}{2}\cdot\frac{6-3}{1}x^2 + \frac{6}{3}\frac{(6-4)(6-5)}{1\ .\ 2}x^3\right\}$$
$$= \{1 + 4x + 3x^2\}\{1 + 6x + 9x^2 + 2x^3\}.$$

2^0 $B_{3.4}$ $\mu = 3.$ $\nu = 4.$ $a = 9.$ $b = 3.$

$$B_{12} = \left\{1 + x\right\}\left\{1 + \frac{9}{1}x + \frac{9}{2}\cdot\frac{9-3}{1}x^2 + \left[\frac{9}{3}\frac{(9-4)(9-5)}{1\ .\ 2} - 1\right]x^3 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{9}{4}\cdot\frac{(9-5)(9-6)(9-7)}{1\ .\ 2\ .\ 3} - \frac{3}{1}\right]x^4\right\} =$$
$$(1 + x)(1 + 9x + 27x^2 + 29x^3 + 6x^4).$$

3^0 $B_{2.6}$ $\mu = 2.$ $\nu = 6.$ $a = 10.$ $b = 6.$ $c = 2.$

$$B_{12} = 1 + \frac{10}{1}x + \frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}x^2 + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5$$
$$= 1\left\{1 + \frac{10}{1}x + \left(\frac{10}{2}\cdot\frac{10-3}{1} + 1\right)x^2 + \left(\frac{10}{3}\frac{(10-4)(10-5)}{1\ .\ 2} + \frac{6}{1}\right)x^3 + \right.$$
$$+ \left(\frac{10}{4}\frac{(10-5)(10-6)(10-7)}{1\ .\ 2\ .\ 3} + \frac{6}{2}\frac{(6-3)}{1} + 1\right)x^4$$
$$\left. + \left(\frac{10}{5}\frac{(10-6)(10-7)(10-8)(10-9)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4} + \frac{6}{3}\frac{(6-4)(6-5)}{1\ .\ 2} + \frac{2}{1}\right)x^5\right\}.$$

§ 9. **De behandelde polynomen staan in nauw verband met de transcendente functies $\sin n\Phi$ en $\cos n\Phi$.**

Bekend is:

$$\sin n\Phi = \sin\Phi\left\{2^{n-1}\cos^{n-1}\Phi - \binom{n-2}{1}(2\cos\Phi)^{n-3} + \right.$$
$$\left. + \binom{n-3}{2}(2\cos\Phi)^{n-5} - \binom{n-4}{3}(2\cos\Phi)^{n-7} + \ldots.\right\}$$

of

$$33)\ \ldots\ \frac{\sin n\Phi}{2^{n-1}\sin\Phi\cos^{n-1}\Phi} = 1 + \binom{n-2}{1}\frac{1}{(-4\cos^2\Phi)} +$$
$$+ \binom{n-3}{2}\frac{1}{(-4\cos^2\Phi)^2} + \binom{n-4}{3}\frac{1}{(-4\cos^2\Phi)^3} + \ldots$$
$$= B_n\left(-\frac{1}{4\cos^2\Phi}\right) = B_n(x) \text{ met } x = -\frac{1}{4\cos^2\Phi}.$$

Doorloopt x 't wortel-interval $-\frac{1}{4}$ tot $-\infty$, dan doorloopt Φ b.v. de waarden van 0 tot $\pi/2$.

Met behulp van deze transcendente functies zijn sommige eigenschappen zeer eenvoudig te bewijzen.

Nemen we, als voorbeeld eigenschap XVI:

De wortels van $\frac{\sin n\Phi}{2^{n-1}\sin\Phi\cos^{n-1}\Phi}$ zijn dezelfde als die van $\sin n\Phi$. Ze zijn: $n\Phi = k\pi$, k willekeurig geheel, dus $\Phi = \frac{k}{n}\pi$.

We hadden aangenomen, dat $0 < \Phi < \pi/2$, dus

$$\Phi_k = \frac{k}{n}\pi \text{ met } k = 1, 2, 3, \ldots\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

De wortels van 't polynoom $B_n(x)$ zijn dan

$$-x_n^k, \text{ met } x_n^k = \frac{1}{4\cos^2\Phi_k} = \frac{1}{4\cos^2\frac{k}{n}\pi};$$

't getal k geeft dus de rangorde aan.

Zij nu van een ander polynoom $B_{n'}$ de k'^e wortel gelijk aan $-x_n^k$, dan is

$$x_n^k = x_{n'}^{k'},$$

dus ook $$\Phi_k = \Phi_{k'}$$

of $$\frac{k}{n}\pi = \frac{k'}{n'}\pi$$

of $$k : k' = n : n' \text{ h. t. b. w.}$$

Evenzoo is

$$\cos n\Phi = 2^{n-1}\cos^n\Phi - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos^{n-2}\Phi + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}2^{n-5}\cos^{n-4}\Phi$$

$$-\frac{n}{3}\binom{n-4}{2}2^{n-7}\cos^{n-6}\Phi + \frac{n}{4}\binom{n-5}{3}2^{n-9}\cos^{n-8}\Phi \ldots.$$

34) of $$\frac{\cos n\Phi}{2^{n-1}\cos^n\Phi} = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{(-2^2\cos^2\Phi)} + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}\frac{1}{(-2^2\cos^2\Phi)^2} +$$

$$+\frac{n}{3}\binom{n-4}{2}\frac{1}{(-2^2\cos^2\Phi)^3} + \ldots.$$

$$= \frac{B_{2\nu}(x)}{B_\nu(x)} \text{ voor } x = -\frac{1}{2^2\cos^2\Phi}.$$

volgens formule (28).

§ 10. **De polynomen laten zich ook schrijven, als een bijzonder geval van de hypergeometrische reeks.**

Maken wij gebruik van de gewone notatie, dan is

35) $$\ldots \begin{cases} F\{\alpha, \beta, \gamma, z\} = 1 + \dfrac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}z + \dfrac{\alpha\,.\,(\alpha+1)\,\beta\,.\,(\beta+1)}{1.\quad 2.\quad \gamma\,(\gamma+1)}z^2 + \ldots \\ \qquad\qquad = \sum_0^\infty A_r z^r \\ \qquad\qquad = \sum_0^\infty u_r. \end{cases}$$

zijnde $$A_r = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+r-1)}{1.\quad 2.\ldots.\quad r.\qquad \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+r-1)}$$

en $$u_r = A_r z^r.$$

Onmiddellijk blijkt, dat

36) $$\begin{cases} 36a & (1+r)(\gamma+r)A_{r+1} = (\alpha+r)(\beta+r)A_r \text{ of ook} \\ 36b & (1+r)(\gamma+r)u_{r+1} = (\alpha+r)(\beta+r)u_r\,.\,z. \end{cases}$$

Nu definieeren wij:

$$37)\ \ldots \begin{cases} \overline{B}_\nu(x) = 1 + \binom{\nu-2}{1} x + \binom{\nu-3}{2} x^2 + \ldots \\ \qquad = \sum_0^\infty C_r x^r \\ \qquad = \sum_0^\infty u_r' \end{cases}$$

zijnde $$C_r = \binom{\nu-r-1}{r}$$

en $$u_r' = C_r x^r$$

terwijl

$$38) \begin{cases} 38a\ (1+r)(\nu-r-1) C_{r+1} = (\nu-2r-1)(\nu-2r-2) C_r \text{ of ook} \\ 38b\ (1+r)(\nu-r-1) u_{r+1}' = (\nu-2r-1)(\nu-2r-2)\, u_r' x. \end{cases}$$

Beide reeksen (35) en (37) moeten nu identiek zijn.

Reeds is $u_0' = u_0 = 1$, zoodat het voldoende is α, β, γ en z zóó te kiezen, dat (36b) overgaat in (38b).

Deze laatste formule mag ook geschreven worden:

$$(1+r)\left\{-(\nu-1)+r\right\} u_{r+1}' = \left\{-\frac{\nu-1}{2}+r\right\}\left\{-\frac{\nu-2}{2}+r\right\} u_r' (-4x)$$

39) dus moet $\gamma = 1-\nu$, $\alpha = -\frac{\nu-1}{2}$, $\beta = -\frac{\nu-2}{2}$ en $z = -4x$ zijn.

Hieruit volgt

$$40)\ \ldots\ \overline{B}_\nu(x) = F\left\{\frac{1-\nu}{2}, \frac{2-\nu}{2}, 1-\nu, -4x\right\}.$$

De oneindig voortloopende reeks $\overline{B}_\nu(x)$ bestaat uit het polynoom $B_\nu(x)$, eene lacune en een reeks:

$$41)\ \ldots \binom{-1}{\nu} x^\nu + \binom{-2}{\nu+1} x^{\nu+1} + \binom{-3}{\nu+2} x^{\nu+2} + \ldots \text{ ad inf.}$$

evenals de functie $F\left\{\frac{1-\nu}{2}, \frac{2-\nu}{2}, 1-\nu, -4x\right\}$.

Het polynoom $B_\nu(x)$ is dus identiek met de eerste ν termen van

$$F\left\{\frac{1-\nu}{2}\,,\ \frac{2-\nu}{2}\,,\ 1-\nu\,,\ -4x\right\}.$$

Beschouwen we nog de reeks

$$(-x)^\nu\left\{\binom{-1}{\nu}(-1)^\nu+\binom{-2}{\nu+1}(-1)^\nu x+\binom{-3}{\nu+2}(-1)^\nu x^2+\ldots.\right\}$$

$$41)\ \ldots\ldots=(-x)^\nu\cdot\sum_0^\infty\binom{-p-1}{\nu+p}(-1)^\nu\cdot x^p.$$

Ook deze nieuwe reeks $\sum_0^\infty t_p$, als $t_p=\binom{-p-1}{\nu+p}(-1)^\nu x^p$ is eene hypergeometrische, want $t_0=1$, terwijl

$$(\nu+p+1)(-p-1)\,t_{p+1}=(-\nu-2p-1)(-\nu-2p-2)\,x\,t_p \text{ of}$$

$$42)\ (1+p)(\nu+1+p)\,t_{p+1}=\left(\frac{\nu+1}{2}+p\right)\left(\frac{\nu+2}{2}+p\right)(-4x)\,t_p.$$

Bij vergelijking met (36b) moet

$$\gamma=\nu+1\,,\ \alpha=\frac{\nu+1}{2}\,,\ \beta=\frac{\nu+2}{2}\ \text{en}\ z=-4x\ \text{zijn,}$$

dus

$$\sum_0^\infty t_p=F\left\{\frac{\nu+1}{2}\,,\ \frac{\nu+2}{2}\,,\ \nu+1\,,\ -4x\right\},$$

zoodat

$$43)\ \ \overline{B}_\nu(x)=B_\nu(x)+(-x)^\nu F\left\{\frac{\nu+1}{2}\,,\ \frac{\nu+2}{2}\,,\ \nu+1\,,\ -4x\right\}$$

$$=F\left\{\frac{1-\nu}{2}\,,\ \frac{2-\nu}{2}\,,\ 1-\nu\,,\ -4x\right\}.$$

Bekend is, dat de differentiaalvergelijking voor $F\{\alpha,\beta,\gamma,x\}$ is:

$$44a)\ \ldots\ x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta y=0$$

met de beide particuliere oplossingen:

$$44b)\ \ldots\ y_1=F\{\alpha,\beta,\gamma,x\}$$

$$y_2=x^{1-\gamma}\cdot F\{\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x\}.$$

Na de substitutie $x\,|\,-4x$ vindt men, dat de differentiaalvergel.:

$$45a)\ \cdot\ x(1+4x)y''+\{\gamma+4(\alpha+\beta+1)x\}y'+4\alpha\beta y=0$$

tot particuliere oplossingen heeft:

$$45b) \quad \begin{cases} y_1 = F\{\alpha, \beta, \gamma, -4x\} \\ y_2 = (-4x)^{1-\gamma} F\{\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, -4x\}. \end{cases}$$

Nemen we nu $\alpha = \frac{1-\nu}{2}$, $\beta = \frac{2-\nu}{2}$, $\gamma = 1-\nu$ (Vergel. (39)), dan zijn

$$46b) \quad \begin{cases} y_1 = F\left\{\frac{1-\nu}{2}, \frac{2-\nu}{2}, 1-\nu, -4x\right\} \\ y_2 = (-x)^{\nu} F\left\{\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \nu+1, -4x\right\} \end{cases}$$

twee particuliere oplossingen van

$$46a) \quad x(1+4x)y'' - \{\nu - 1 + 2(2\nu-5)x\}y' + (\nu-1)(\nu-2)y = 0.$$

Volgens (43) is $B_\nu(x) = y_1 - y_2$, dus ook het polynoom $B_\nu(x)$ is een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking (46*a*).

§ 11. **Ten slotte kunnen we nog een kettingbreuk beschouwen, die door contractie ontstaat uit**

$$(2) \quad F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1|}{|z} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{1|}{|1} + \ldots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4/z}.$$

$$47) \text{ n.m.l. } \frac{1|}{|z+1} - \frac{1|}{|z+2} - \frac{1|}{|z+2} - \frac{1|}{|z+2} - \ldots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4/z}.$$

De naderingsbreuken van deze kettingbreuk zijn identiek met die van even rangorde bij (2).

(Voor de contractieformule vergelijke men *P* p. 201 (7)).

Gemakkelijk bewijst men b.v. analoog als bij formule (5), dat de naderingstellers $K_\nu(z)$ en noemers $L_\nu(z)$ gelijk zijn aan:

$$48a) \quad K_\nu(z) = z^{\nu-1} + \binom{2\nu-2}{1} z^{\nu-2} + \binom{2\nu-3}{2} z^{\nu-3} + \ldots = z^{\nu-1} B_{2\nu}\left(\frac{1}{z}\right)$$

en

$$48b) \quad L_\nu(z) = z^\nu + \binom{2\nu-1}{1} z^{\nu-1} + \binom{2\nu-2}{2} z^{\nu-2} + \ldots = z^\nu B_{2\nu+1}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Bepalen we de differentiaalvergelijking voor

$$L_\nu(z) = z^\nu B_{2\nu+1}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Volgens (46a) is:

$$x(1+4x)\frac{d^2 B_{2\nu+1}(x)}{dx^2} - \left\{2\nu + 2(4\nu-3)x\right\}\frac{d B_{2\nu+1}(x)}{dx} + \\ + 2\nu(2\nu-1) B_{2\nu+1}(x) = 0.$$

Kiest men tot nieuwe onafhankelijk veranderlijke $z = \frac{1}{x}$, dan wordt de differentiaalvergelijking:

$$z^2(z+4)y'' + \left\{2(\nu+1)z^2 + 2(4\nu+1)z\right\}y' + 2\nu(2\nu-1)y = 0$$

met $y_1 = B_{2\nu+1}\left(\frac{1}{z}\right)$ tot particuliere oplossing.

Substitueert men nog:

$$B_{2\nu+1}\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-\nu} L_\nu(z)$$

$$B'_{2\nu+1}\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-\nu} L'_\nu(z) - \nu z^{-\nu-1} L_\nu(z)$$

$$B''_{2\nu+1}\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-\nu} L''_\nu(z) - 2\nu z^{-\nu-1} L'_\nu(z) + \nu(\nu+1) L_\nu(z) z^{-\nu-2},$$

dan krijgt men:

49) . . . . . $z(z+4)y'' + 2(z+1)y' - \nu(\nu+1)y = 0$

met $y_1 = L_\nu(z)$ tot particuliere oplossing.

Ten einde overeenstemming te verkrijgen met de differentiaalvergelijking (44a) van de hypergeometrische reeks, stellen wij nog $z = -4x$. $L_\nu(-4x)$ is dan een oplossing van

49′) . . . $x(1-x)y'' + \frac{1}{2}(1-4x)y' + \nu(\nu+1)y = 0.$

Bij vergelijking met (44a) vindt men, dat

$$\gamma = \frac{1}{2},\ \alpha = -\nu,\ \beta = \nu+1,$$

zoodat

$$L_\nu(-4x) = F\left\{-\nu,\ \nu+1,\ \frac{1}{2},\ x\right\}$$

50) of $$L_\nu(z) = F\left\{-\nu,\ \nu+1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{z}{4}\right\}.$$

De tweede particuliere oplossing van (49′) is volgens (44^b):

$$y_2 = \sqrt{x}\,.\,F\left\{\frac{1-2\nu}{2},\ \frac{3+2\nu}{2},\ \frac{3}{2},\ x\right\}$$

en dus voor (49)

$$y_2 = \sqrt{\frac{-z}{4}}\, F\left\{\frac{1-2\nu}{2}, \frac{3+2\nu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-z}{4}\right\}.$$

Een eigenaardig resultaat vindt men, als men een tweede particuliere oplossing van:

49) . . . . . $z(z+4)y'' + 2(z+1)y' - \nu(\nu+1)y = 0$

als volgt bepaalt.

Stel $y = u L_\nu + w$, u en w zijn nog te bepalen functies van z, dan is

$$y' = u L_\nu' + u' L_\nu + w'$$
$$y'' = u L_\nu'' + 2u' L_\nu' + u'' L_\nu + w''.$$

Na substitutie komt er een differentiaalvergelijking, die vereenvoudigd door de opmerking, dat L_ν eene oplossing van (49) is, wordt:

$$2z(z+4)u' L_\nu' + L_\nu \{z(z+4)u'' + 2(z+1)u'\}$$
$$+ z(z+4)w'' + 2(z+1)w' - \nu(\nu+1)w = 0.$$

Kiezen we nu u zóó, dat de coefficient van L_ν nul wordt:

$$z(z+4)u'' + 2(z+1)u' = 0$$

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{2(z+1)}{z(z+4)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{3}{2}\frac{1}{z+4}$$

$$\lg u' = -\frac{1}{2}\lg z - \frac{3}{2}\lg(z+4) + \lg C$$

$$u' = \frac{C}{\sqrt{z(z+4)^3}} = \frac{1}{\sqrt{z(z+4)^3}}$$ door de constante 1 te nemen.

Verder wordt

$$u = \int \frac{1}{\sqrt{z(z+4)^3}}\, dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{z+4}} - \frac{1}{2}$$

bij geschikte keuze van de integratieconstante.

De differentiaalvergelijking wordt nu:

$$z(z+4)w'' + 2(z+1)w' - \nu(\nu+1)w + 2\sqrt{\frac{z}{z+4}}\, L_\nu' = 0.$$

Stelt men $w = \sqrt{\frac{z}{z+4}}\, t$,

dan moet

$$z(z+4)t'' + 2(z+3)t' - \nu(\nu+1)t + 2L_\nu' = 0.$$

Deze vergelijking heeft tot particuliere oplossing $t_1 = K_\nu$, zooals men gemakkelijk verifieert met behulp van de formules (48).

Wij mogen dus voor w nemen $\sqrt{\frac{z}{z+4}}\, K_\nu(z)$.

Als tweede particuliere oplossing van (49) heeft men nu:

$$y_2 = u L_\nu(z) + w$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{z}{z+4}} - 1\right\} L_\nu(z) + \sqrt{\frac{z}{z+4}}\, K_\nu(z)$$

$$51) \quad \ldots = \frac{-1}{\sqrt{1+{}^4/_z}} \cdot L_\nu(z)\left\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+{}^4/_z} - \frac{K_\nu(z)}{L_\nu(z)}\right\}.$$

Het is merkwaardig, dat in deze particuliere oplossing onverwachts de waarde, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+{}^4/_z}$, van de kettingbreuk (47) optreedt, die tot uitgangspunt diende. Dit is een eigenschap, die ook in andere gevallen geldig is, b.v. bij de polynomen van Legendre. Deze zijn de naderingsnoemers van de kettingbreuk:

$$52) \quad \lg\frac{z+1}{z-1} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z+x} = \frac{2|}{|z} - \frac{\frac{1}{2}|}{|\frac{3}{2}z} - \frac{\frac{2}{3}|}{|\frac{5}{3}z} - \frac{\frac{3}{4}|}{|\frac{7}{4}z} - \frac{\frac{4}{5}|}{|\frac{9}{5}z} \ldots \text{(P. p. 351. (16))}$$

Noemen we de naderingstellers en noemers weer $K_\nu(z)$ en $L_\nu(z)$ ($\equiv$ bolfunctie), dan is de differentiaalvergelijking voor $L_\nu(z)$:

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + n(n+1)y = 0$$

met de tweede particuliere oplossing:

$$53) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y_2 = \frac{1}{2} L_\nu(z)\left\{\lg\frac{z+1}{z-1} - \frac{K_\nu(z)}{L_\nu(z)}\right\}.$$

De vraag, bij welke kettingbreuken van STIELTJES deze eigenschap geldt, heb ik echter nog niet geheel kunnen beantwoorden.

HOOFDSTUK II.

§ 1. **In deze paragraaf wil ik in 't kort eenige formules afleiden.**

Tot uitgangspunt dient een integraal van STIELTJES, een integraal, die de volgende algemeene gedaante heeft:

$$54) \quad \ldots\ldots\ldots F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x},$$

waarbij $\psi(x)$ een niet afnemende functie voorstelt, zoodanig, dat de integralen

$$c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (-x)^{k-1}\, d\psi(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

alle bestaan [1]).

Bekend is, dat omgekeerd $\psi(x)$ tot op eene constante na bepaald is door $F(z)$, n.m.l.

$$55) \quad \frac{1}{2}\Big\{\psi(\xi - 0) + \psi(\xi + 0)\Big\} - \frac{1}{2}\Big\{\psi(a - 0) + \psi(a + 0)\Big\} =$$

$$\lim_{\eta = +0} \Re\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\xi - i\eta}^{-a - i\eta} F(z)\, dz\right) \quad \text{(Vergel. P. pg. 372).}$$

Onder de *geassocieerde* kettingbreuk van $F(z)$ verstaat men een kettingbreuk van de gedaante:

---

1) 't Geval, dat één of beide integraalgrenzen eindig zijn, $\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$, is hierin begrepen, doordat dan $\psi(x) = \psi(b)$ voor $x > b$ en $\psi(x) = \psi(a)$ voor $x > a$ is.

56) . . . . . $\frac{k_1}{|z+l_1} - \frac{k_2}{|z+l_2} - \frac{k_3}{|z+l_3} - \frac{k_4}{|z+l_4} - \ldots,$

die in haar convergentie-gebied gelijk is aan $F(z)$.

Zij is steeds bestaanbaar en altijd is $k_\nu > 0$.

Is $\psi(x) = \psi(0)$ voor alle negatieve x-waarden, dan bestaat ook de *correspondeerende* kettingbreuk:

57) . . . . . $\frac{1}{|b_1 z} + \frac{1}{|b_2} + \frac{1}{|b_3 z} + \frac{1}{|b_4} + \ldots,$ waarbij $b_\nu > 0$,

dit is dus een kettingbreuk van STIELTJES.

De geassocieerde kettingbreuk ontstaat door contractie uit de correspondeerende, indien deze bestaat.

Het zijn de naderingsnoemers van de geassocieerde kettingbreuk, waarmee we ons in dit hoofdstuk zullen bezighouden. Zij worden voorgesteld door de notatie $L_\lambda(z)$, terwijl de tellers door $K_\lambda(z)$ zullen worden aangegeven.

Volgens de algemeene theorie is:

58) $K_{\lambda+1}(z) \cdot L_\lambda(z) - K_\lambda(z) L_{\lambda+1}(z) = k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}$. (P. p. 378).

Deelt men door $L_\lambda(z) \cdot L_{\lambda+1}(z)$, en ontwikkelt vervolgens naar afdalende machten van z, zoo is:

58′) . . . . . $\frac{K_{\lambda+1}}{L_{\lambda+1}} - \frac{K_\lambda}{L_\lambda} = \frac{k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}}{z_{2\lambda+1}} + \text{etc.},$

want K_λ is van den graad $\lambda - 1$, L_λ van den graad λ.

De formule (58′) leert, dat $\frac{K_{\lambda+1}(z)}{L_{\lambda+1}(z)}$ en $\frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)}$, ontwikkeld volgens afdalende machten van z, met elkaar overeenstemmen tot aan de macht $\frac{1}{z^{2\lambda+1}}$. Ontwikkelt men de functie $F(z)$ in een reeks, zoo zal deze met $\frac{K_\lambda}{L_\lambda}$ overeenstemmen tot aan de macht $\frac{1}{z^{2\lambda}}$, en dus met $\frac{K_{\lambda+1}}{L_{\lambda+1}}$ tot aan $\frac{1}{z^{2\lambda+2}}$. Uit (58′) volgt nu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda}{L_\lambda} = \frac{k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}}{z^{2\lambda+1}} + \ldots$$

of na vermenigvuldiging met $L_\lambda(z) = z^\lambda + \ldots$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_\lambda(z)}{z+x}\, d\psi(x) - K_\lambda(z) = \frac{k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}}{z^{\lambda+1}} + \ldots$$

Men mag, wegens het bestaan van de integralen $c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (-x)^{k-1}\, d\psi(x)$, ook schrijven:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_\lambda(z) - L_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x) - K_\lambda(z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x) = \frac{k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}}{z^{\lambda+1}} + \ldots$$

Hieruit volgen de formules:

59) . . $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_\lambda(z) - L_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x) = K_\lambda(z).$$

60) . . $$\int_{-\infty}^{+\infty} (-x)^k L_\lambda(-x)\, d\psi(x) = 0 \qquad \text{voor } k = 0, 1, \ldots, \lambda - 1.$$

61) . . $$\int_{-\infty}^{+\infty} (-x)^\lambda L_\lambda(-x)\, d\psi(x) = k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}.$$

of ook

62) . . $$\int_{-\infty}^{+\infty} L_\mu(-x) L_\lambda(-x)\, d\psi(x) = 0 \qquad \text{voor } \mu \neq \lambda.$$

63) . . $$\int_{-\infty}^{+\infty} L_\lambda^2(-x)\, d\psi(x) = k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}.$$

Dank zij deze beide laatste eigenschappen leenen deze functies zich bijzonder tot de ontwikkeling eener reëele functie [1]).

Reeds HEINE [2]) stelde zich het volgende

Minimumprobleem: Is $f(x)$ een continue, reëele functie, $\psi(x)$ een niet afnemende functie met oneindig vele punten,

---

1) De ontwikkeling eener analytische functie is behandeld door PINCHERLE. Atti Acc. dei Lincei, IV, 5, 1889; Annali di Matematica 1884; Acta Mathematica 16.

2) HEINE. E. Handbuch der Kugelfunktionen. 2 Aufl. 1878—1881.

waarin $\psi(x)$ toeneemt, zoo wordt een polynoom $P_n(x)$ van ten hoogste n^{en} graad gevraagd, waarvoor de integraal

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x) - P_n(x)\}^2 \, d\psi(x) \quad \text{minimum is.}$$

De oplossing is:

64) . . . $$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{L_\nu(-x)}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) L_\nu(-u) \, d\psi(u)$$

waarin L_ν de ν^e naderingsnoemer voorstelt van de kettingbreuk behoorende bij $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$ eene formule, die door O. BLUMENTHAL [1]) als volgt, herleid is.

Allereerst is $$P_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{L_\nu(-x) L_\nu(-u)}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}} \right) f(u) \, d\psi(u).$$

Volgens de recurrente betrekking is:

$$\left.\begin{aligned} L_{\nu+1}(-x) &= (-x + l_{\nu+1}) L_\nu(-x) - k_{\nu+1} L_{\nu-1}(-x) \\ L_{\nu+1}(-u) &= (-u + l_{\nu+1}) L_\nu(-u) - k_{\nu+1} L_{\nu-1}(-u) \end{aligned}\right\} (\nu \geqq 0)$$

zijnde $L_0(z) = 1$ en $L_{-1}(z) = 0$.

Vermenigvuldigt men de eerste formule met $L_\nu(-u)$, de tweede met $L_\nu(-x)$, en trekt ze van elkaar af, zoo komt:

$$L_{\nu+1}(-x) L_\nu(-u) - L_{\nu+1}(-u) L_\nu(-x) =$$
$$= (u-x) L_\nu(-x) L_\nu(-u) + k_{\nu+1} \{L_\nu(-x) L_{\nu-1}(-u) - L_\nu(-u) L_{\nu-1}(-x)\}.$$

Na deeling door $k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}$ en sommatie van $\nu = 0$ tot n, verkrijgt men:

$$\frac{L_{n+1}(-x) L_n(-u) - L_{n+1}(-u) L_n(-x)}{k_1 k_2 \ldots k_{n+1}} =$$
$$= (u-x) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{L_\nu(-x) L_\nu(-u)}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}}.$$

---

1) BLUMENTHAL. O. Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für $\int_{-\infty}^{0} \frac{\Phi(\xi) \, d\xi}{z - \xi}$. Diss. Göttingen 1898.

Hierdoor gaat (64) over in:

$$65)\quad P_n(x)=\frac{1}{k_1 k_2 .. k_{n+1}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\frac{L_{n+1}(-x)\,L_n(-u)-L_{n+1}(-u)\,L_n(-x)}{u-x}\,d\psi(u)$$

of

$$P_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u),$$

zijnde $\mathfrak{L}_n(u.x)=\frac{1}{k_1 k_2 .. k_{n+1}}.\frac{L_{n+1}(-x)\,L_n(-u)-L_{n+1}(-u)\,L_n(-x)}{u-x}$

eene symmetrische functie van u en x.

Het ligt voor de hand te vermoeden, dat, aangezien het minimum van J_n met grootere n-waarden blijkbaar afneemt, $\lim_{n=\infty} P_n(x)=f(x)$.

In het volgende zal ik nu trachten te bewijzen, dat elke functie, die voldoet aan de voorwaarden van DIRICHLET, eene ontwikkeling in de gedaante

$$66)\quad \ldots\ldots\ f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu\,.\,L_\nu(-x)$$ toelaat, als

$$k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}\,g_\nu\,.=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,L_\nu(-u)\,d\psi(u).$$

§ 2. **Ik zal twee gevallen onderscheiden, nml.**

1°. de integraal, geschreven als $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\psi(x)}{z+x}$, heeft werkelijk eindige grenzen, b.v.

$$47)\quad -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1+{}^4/_z}=\int_0^4\frac{\sqrt{{}^4/_x-1}}{2\pi(z+x)}\,dx=\frac{1}{|z+1}-\frac{1}{|z+2}-\frac{1}{|z+2}\cdots$$

met $L_\nu(-2^2\cos^2\varphi)=(-1)^\nu\,\frac{\sin(2\nu+1)\varphi}{\sin\varphi}$ (Vergel. Hoofdstuk I, § 11).

$$67)\quad \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}=\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{dx}{z+x}=\frac{1}{|z}-\frac{1}{|2z}-\frac{1}{|2z}-\frac{1}{|2z}\cdots$$

met $L_\nu(\cos\varphi)=\cos\nu\varphi$. (Fourier-ontwikkeling).

52) . . $\lg \frac{z+1}{z-1} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z+x} = \frac{2|}{|z} - \frac{\frac{1}{2}|}{|\frac{3}{2}z} - \frac{\frac{2}{3}|}{|\frac{5}{3}z} - \frac{\frac{3}{4}|}{|\frac{7}{4}z} - \frac{\frac{4}{5}|}{|\frac{9}{5}z} \ldots$

met $L_\nu(z)$, die niets anders zijn dan de bolfuncties van Legendre. (Vergel. Hoofdstuk I, § 11).

2^0. de integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$ bezit ook werkelijk een oneindige grens,

b.v. de uitgebreide kettingbreuk van Laguerre ($\alpha = 1$)

68) $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} . x^{\alpha-1}}{z+x} dx = \frac{1|}{|z+\alpha} - \frac{1 . \alpha|}{|z+\alpha+2} - \frac{2.(\alpha+1)|}{|z+\alpha+4} - \frac{3.(\alpha+2)|}{|z+\alpha+6} \ldots$

met $L_\nu(z, \alpha)$, die voor $\alpha = 1$ de polynomen van Abel leveren.

In nauw verband hiermede staat de kettingbreuk:

69) $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{z+x} . (x^2)^{\alpha-1/2} dx = \frac{1|}{|z} - \frac{\alpha|}{|z} - \frac{1|}{|z} - \frac{\alpha+1|}{|z} - \frac{2|}{|z} - \frac{\alpha+2|}{|z} - \frac{3|}{|z} \ldots$

met $N_\nu(z, \alpha)$, die voor $\alpha = {}^1/_2$ de polynomen van Hermite geven, nml. $N_\nu(z, {}^1/_2) = \frac{H_\nu(z)}{2^n}$.

§ 3. Geval A: De integraal bezit eindige grenzen: $\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$.

Wij zagen reeds, dat de formeele ontwikkeling van een functie $f(x)$ was:

66) . . . . . $f(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu L_\nu(-x)$

met $k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1} g_\nu = \int_a^b f(u) L_\nu(-u) d\psi(u)$

terwijl de eerste $n+1$ termen van de reeks geschreven kunnen worden als:

65) . . . $P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu L_\nu(-x) = \int_a^b f(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$,

zijnde $\mathfrak{L}_n(u \,.\, x) = \frac{1}{k_1 k_2 \,.\, k_{n+1}} \,.\, \frac{L_{n+1}(-x) L_n(-u) - L_{n+1}(-u) L_n(-x)}{u - x}$.

Er moet dus bewezen worden, dat $\lim_{n=\infty} P_n(x) = f(x)$.

Voor $f(x) = x^m$, m een geheel positief getal, is het bewijs eenvoudig. Volgens form. (60) is elke g_ν voor $\nu > m$ nul, zoodat de ontwikkeling eindig is, en voor elke x-waarde gelijk is aan x^m.

Onmiddellijk volgt hieruit, dat ook elk polynoom van „eindigen" graad volgens $L_\nu(-x)$ functies ontwikkeld kan worden.

Gaan we nu over tot het geval $f(x) = \sin k x$ (k eindig). Deze functie kan in een machtreeks ontwikkeld worden, die een oneindig grooten convergentiecirkel bezit en als machtreeks ook in dat gebied uniform convergent is, dus

$$\sin k x = S_N(x) + R_N(x),$$

zijnde $$S_N(x) = \frac{k x}{1} - \frac{(k x)^3}{\underline{|3}} + \frac{(k x)^5}{\underline{|5}} \ldots . \pm \frac{(k x)^N}{\underline{|N}},$$

een polynoom van eindigen graad, terwijl N zoo gekozen kan worden dat, zoo ε een willekeurig kleine positieve waarde voorstelt, voor elke eindige x-waarde geldt $| R_N(x) | < \varepsilon$.

Bij substitutie wordt

$$P_n(x) = \int_a^b \sin k u \,.\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi\, u =$$

$$\int_a^b S_N(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) + \int_a^b R_N(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u).$$

De eerste term is gelijk aan $S_N(x) = \sin k x - R_N(x)$, terwijl de limietwaarde van den restterm nul is.

Dit laatste kan als volgt bewezen worden.

De integraal $\lim_{n=\infty} \int_a^b | \mathfrak{L}_n(u \,.\, x) |\, d\psi(x)$ heeft eene positieve waarde, hetzij eindig, hetzij oneindig.

In het eerste geval, is het zonder meer duidelijk dat de restterm, dank zij de ongelijkheid $| R_N(x) | < \varepsilon$, tot nul nadert.

Ook in het tweede geval, is de restterm van dezelfde orde als ε.

Dit vindt zijne verklaring in het feit, dat de negatieve waarden van $\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)$ de positieve opheffen.

Beschouwen we de functie $\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)$ eens wat nauwkeuriger.

$$\mathfrak{L}_n(u \,.\, x) = \frac{1}{k_1 k_2 \ldots k_{n+1}} \cdot \frac{L_{n+1}(-x) L_n(-u) - L_{n+1}(-u) L_n(-x)}{u - x}.$$

De hoofdfactor is: $L_{n+1}(-x) L_n(-u) - L_{n+1}(-u) L_n(-x)$ of daar x constant gedacht wordt:

$$\Phi(-u) = h L_n(-u) - k L_{n+1}(-u).$$

De functie Φ bezit een wortel, tusschen elke twee opeenvolgende wortels van $L_n(-u)$, zooals blijkt uit de beschouwing der grafische voorstelling der L_n polynomen, welke berust op de algemeene eigenschap, dat de wortels van elk paar polynomen $L_n(-u)$ en $L_{n+1}(-u)$ afwisselend gelegen zijn.

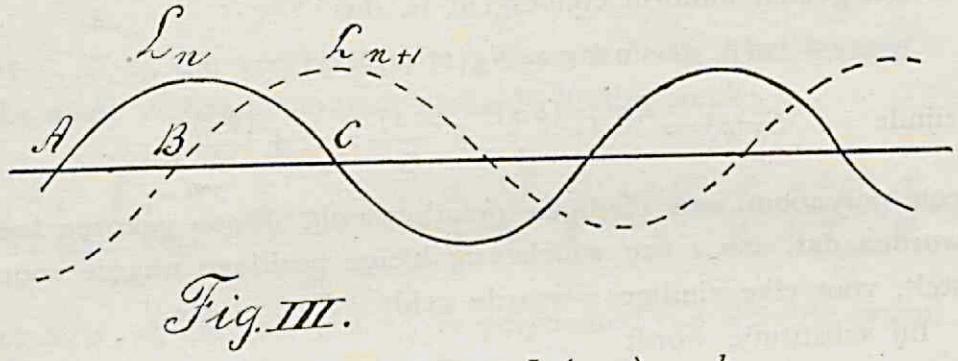


Fig. III.

$$\Phi_n(-u) = 0, \text{ als } \frac{L_n(-u)}{L_{n+1}(-u)} = \frac{k}{h}.$$

A en C zijn twee opeenvolgende wortels van L_n, B de tusschenliggende wortel van L_{n+1}. Men ziet, vanaf A neemt de verhouding $\frac{L_n}{L_{n+1}}$ af van 0 tot $-\infty$, om vervolgens van $+\infty$ weer te verminderen tot 0 in C. Van A tot C is dus elke reëele waarde éénmaal gepasseerd, of $\frac{L_n(-u)}{L_{n+1}(-u)}$ is eens gelijk aan $\frac{k}{h}$ geweest, d. w. z. er ligt een nul tusschen elke twee opeenvolgende wortels van $L_n(-u)$.

De functie $\Phi_n(-u)$ bezit dus n wortels, die evenals de wortels van $L_n(-u)$, voor $n = \infty$ over het integratieinterval verdeeld liggen.

De factor $\frac{1}{u-x}$ neemt slechts den wortel $u=x$ weg, zoodat ook $\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)$ een golflijn is, met onbepaald afnemende golflengte in elk punt van het integratieinterval.

Gaan we over tot de waardebepaling van den restterm

$$\int_a^b R_N(u)\,\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u), \qquad \text{zijnde } |R_N(u)|<\varepsilon.$$

Allereerst echter deze beide opmerkingen:

1°. x wordt willekeurig in het interval (a, b) aangenomen, doch is dan gedurende de geheele redeneering constant. Hierdoor mag $\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)$ als eene functie met slechts één veranderlijke beschouwd worden. De voorwaarde, dat x in het integratieinterval ligt, is in overeenstemming met de vraag naar de waarde van de reeks in dat gebied.

2°. n is willekeurig groot, doch steeds eindig.

Nu zagen we reeds aan het begin van deze paragraaf, dat de ontwikkeling van een polynoom wegens het eindig aantal termen, convergeert, zoodat

$$I_p=\int_a^b p(u)\,\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)=p(x).$$

voor elk polynoom $p(u)$ van een graad kleiner dan n.

In het bijzonder is voor $p(u)=1$.

$$I_1=\int_a^b \mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)=1.$$

Bestudeeren we deze integraal eens wat nader.

In overeenstemming met het reeds besproken geval, nml. $\lim_{n=\infty}\int_a^b |\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)|\,d\psi(u)$ is *eindig*, waar onmiddellijk bleek, dat de restterm van dezelfde grootte orde is als ε, willen we trachten de integraal I_1 te splitsen in een willekeurig groot aantal integralen van de gedaante $\int_k^l \mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)$, terwijl de integraalsom van de absolute waarden van al deze integralen eindig blijft. Elk interval (k, l) kan willekeurig klein gemaakt worden, zoodat met elke gewenschte nauwkeurigheid $R(u)$ in elk interval constant genomen mag worden.

Hieruit volgt dan:

$$\left|\int_a^b R(u)\,\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)\right| = \left|\sum\int_k^l R(u)\,\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)\right|$$

$$< \sum\left|R(k)\int_k^l \mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)\right|$$

$$< \varepsilon\sum\left|\int_k^l \mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)\right|$$

$$< \varepsilon \times \text{een eindige waarde} < \eta.$$

Boven bedoelde intervallen worden nu als volgt gevonden.

Het interval (a, b) kan gesplitst worden in μ *eindige* intervallen (p_i, p_{i+1}) en in ν *eindige* intervallen (q_i, q_{i+1}). Deze intervallen zijn zóó bepaald, dat in elk interval (p_i, p_{i+1}) elke amplitude van $\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)$, *wat n ook is*, eindig is, dus absoluut gemeten, kleiner dan eene constante A. In elk interval (q_k, q_{k+1}) daarentegen neemt minstens één amplitude met n toe, elke vaste grens overschrijdend.

Hieruit volgt:

$$I_1 = \int_a^b \mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) = \sum_1^\mu \int_{p_i}^{p_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) + \sum_1^\nu \int_{q_i}^{q_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u).$$

De eerste som is eindig, want

$$\left|\sum_1^\mu \int_{p_i}^{p_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)\right| < \sum_1^\mu \int_{p_i}^{p_{i+1}} \left|\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\right| d\psi(u) <$$

$$A\sum_1^\mu \int_{p_i}^{p_{i+1}} d\psi(u) < A\,k_1.$$

Volgens het uitgangspunt in § 1 toch is $\psi(u)$ eene niet afnemende functie, zoodat in het integratiegebied $d\psi(u) > 0$.

De factor $\sum_1^\mu \int_{p_i}^{p_{i+1}} d\psi(u)$ is dus kleiner dan $\int_a^b d\psi(u)$ en deze integraal is gelijk aan k_1 volgens formule (63) voor $\lambda = 0$.

Aangezien I_1 zelf eindig is (nml. gelijk aan 1), zoo moet ook de tweede groep termen $I_1' = \sum_1^{\nu} \int_{q_i}^{q_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$ eindig zijn.

Het totaal van deze ν intervallen wordt nu onderverdeeld in m intervallen, (r_i, r_{i+1}).

Het getal m is veranderlijk met n, en wel evenredig met $\sqrt{n}$ (b.v. $m = [\sqrt{n}]$). De deelpunten r_i voldoen aan de voorwaarde, dat elk interval willekeurig klein gemaakt kan worden, door n en dus ook m maar groot genoeg te nemen. Aan deze voorwaarde kan steeds voldaan worden, daar het interval (a, b) eindig is.

Op blz. 50 en 51 is reeds aangetoond, dat $\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)$ een golflijn is, met $n - 1$ wortels. Deze liggen over de m intervallen verspreid, zoodat er meerdere intervallen moeten zijn, die onbepaald veel wortels bevatten. (Bij gelijkmatige verdeeling bevat elk interval er ongeveer $[\sqrt{n}]$, als $m = [\sqrt{n}]$).

De eindige integraal I_1' valt dus nu als volgt uiteen:

$$I_1' = \sum_1^{m} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u).$$

Beschouwen we elken term $\int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$ eens afzonderlijk.

We zagen reeds, dat $d\psi(u)$ steeds positief is, zoodat we de eerste middelwaardestelling [1]) mogen toepassen:

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\; d\psi(u) = B_{r_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u),$$

waarin B_{r_i} de waarde van $\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)$ voor een waarde van u inliggende tusschen r_i en r_{i+1} beteekent.

Bij elke m kunnen we de termen verdeelen in twee groepen, nml.

groep I bevat alle termen, waarvoor $|B_{r_i}| \leqq C$,

groep II bevat alle termen, waarvoor $|B_{r_i}| > C$,

waarbij C een aangenomen positieve constante is.

---

1) Vergel.: bv. GOURSAT. Cours d'Analyse Math. I p. 181. 2de druk.

De integraal I_1' valt nu uiteen in twee reeksen:

$$I_1' = \sum_{\text{Gr. I}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\; d\psi(u) + \sum_{\text{Gr. II}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$$

waarin de s_i de intervallen van groep II begrenzen.

$$I_1' = \sum_{\text{I}} B_{r_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u) + \sum_{\text{II}} B_{s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} d\psi(u)$$

zijnde $$|B_{r_i}| \leqq C \text{ en } |B_{s_i}| > C.$$

De reeks, behoorende bij groep I heeft een eindige waarde, want

$$\Big|\sum_{\text{I}} B_{r_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u)\Big| < \sum_{\text{I}} |B_{r_i}| \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u) < C \sum_{\text{I}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u) < k_1 C$$

een eindige waarde, die *onafhankelijk* is van n.

Ook de waarde van I_1', in zijn geheel, was eindig, en de bovenste grenswaarde, nml. $1 + k_1 A$ *onafhankelijk* van n, zoodat ook $\Big|\sum_{\text{II}} B_{s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} d\psi(u)\Big|$ een eindige bovenste grenswaarde bezit, die onveranderlijk is, hoe groot n ook wordt.

Gaan we nu over tot de beschouwing van de meer algemeene integraal

$$I_p = \int_a^b p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = p(x).$$

We zullen nu uitsluitend die polynomen $p(u)$ beschouwen, waarvoor, in het interval (a, b)

$$\text{Max. supr. } |p(u)| \leqq M,$$

waarin M een constante, willekeurig aangenomen, grootheid aangeeft, onafhankelijk van n.

Ook I_p is steeds kleiner dan M, omdat x een waarde is in het integratieinterval (a, b), zooals op blz. 51 aangenomen is.

Splitsen we nu de integraal I_p in dezelfde deelen als I_1:

$$1^0. \Big|\sum_{1}^{\mu} \int_{p_i}^{p_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)\Big| < \sum_{1}^{\mu} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \Big|p(u)\Big|\,\Big|\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\Big|\, d\psi(u) < k_1 A.M;$$

deze som blijft dus, wat n ook is, beneden een vaste grens.

2^0. $$\sum_{\text{Gr. I}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u).$$

We zagen reeds, dat voor elken term van groep I geldt:

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = B_{r_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u), \qquad \text{zijnde} \quad |B_{r_i}| \leqq C.$$

Het is duidelijk, dat elk integraal $\int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$ gesplitst kan worden in twee (of drie) deelen, die *hetzelfde* teeken hebben, dat overeenkomt met dat van B_{r_i}, dus

$$\left| \int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| = \left| \int_{r_i}^{\xi} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| + \left| \int_{\xi}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right|$$

$$= |B_{r_i}| \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u).$$

Het polynoom $p(u)$ is in het willekeurig kleine interval, $(r_i,\ r_{i+1})$, monotoon, tenzij het daar juist een maximum of minimum bezit.

In het eerste geval kan men onmiddellijk de tweede middelwaardestelling [1]) toepassen:

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) =$$

$$p(r_i) \int_{r_i}^{\xi} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) + p(r_{i+1}) \int_{\xi'}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u),$$

zijnde ξ' een waarde, inliggende tusschen r_i en r_{i+1}.

Laten we nu $p(r_i)$ en $p(r_{i+1})$ constant, dan zal ξ' continu met het polynoom $p(u)$ veranderen. We kiezen $p(u)$ nu in elk interval zóó, dat elke ξ' samenvalt met een ξ waarde d. w. z. de integralen $\int_{r_i}^{\xi} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$ en $\int_{\xi}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$ komen overeen in teeken.

---

1) Vergel.: bv. GOURSAT. Cours d'Analyse Math. I p. 182. 2de druk.

Nu volgt:

$$\left| \int_{r_i}^{r_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| < \left| p(r_i) \right| \left| \int_{r_i}^{\xi} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right|$$

$$+ \left| p(r_{i+1}) \right| \left| \int_{\xi}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right|$$

$$< M \left\{ \left| \int_{r_i}^{\xi} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| + \left| \int_{\xi}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| \right\}$$

$$= M \left| \int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right|$$

(dank zij de overeenstemming in teeken)

$$= M \left| B_{r_i} \right| \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u) \leqq M\, C \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u),$$

dus

$$\left| \sum_{1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| < \sum_{1} \left| \int_{r_i}^{r_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right|$$

$$< M\, C \sum_{1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u) < k_1\, M\, C = S_2,$$

een eindige waarde, onafhankelijk van n.

Ook het optreden van meerdere intervallen, waarin $p(u)$ een maximum of minimum bezit, biedt geen nieuwe moeilijkheden, zooals uit het volgende zal blijken.

Resumeerende komen we tot het volgende resultaat:

Elke integraal I_p kan in drie stukken gesplitst worden, die ook in hun verdere onderverdeeling geheel overeenkomen met de verdeeling van de integraal I_1.

De beide eerste stukken, nml. de μ eindige intervallen ($| \mathfrak{L}_n(u \,.\, x) | < A$) en de r-intervallen ($| B_r | \leqq C$) hebben steeds een eindige waarde, waarvan het absolute bedrag beneden een vaste grens blijft, die onafhankelijk is van n.

Aangezien de geheele integraal I_p een eindige waarde heeft,

nml. $p(x)$, zijnde $|p(x)| < M$, zoo moet ook het derde stuk eindig zijn.

We gaan nu over tot de studie van:

$$3^0. \qquad \sum_{\text{Gr. II}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u),$$

zijnde $$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = B_{s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$$

met $$|B_{s_i}| > C.$$

Tot dusverre was de keuze der deelpunten r_i en s_i alleen beperkt door de voorwaarde, dat elk interval willekeurig klein gemaakt kan worden. We mogen dus de deelpunten nog nader bepalen.

Nemen we aan, dat bij een willekeurige verdeeling, men tot twee intervallen komt, behoorende bij groep II, die aan elkaar grenzen, b.v. s_i tot s_{i+1}, en s_{i+1} tot s_{i+2}, en waarvan de bijbehoorende B_{s_i} en $B_{s_{i+1}}$ in teeken verschillen.

Veranderen we nu het deelpunt s_{i+1} in het punt w, als w een naastliggende wortel van s_{i+1} is van $\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)$. Hierdoor ontstaan twee nieuwe integralen

$$\int_{s_i}^{w} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \quad \text{en} \quad \int_{w}^{s_{i+2}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u).$$

Deze verandering in de deelpunten wordt overal, waar het noodig is, aangebracht [1]), zoodat ook de onderste grens s_i van de eerste en de bovenste grens s_{i+2} van de tweede integraal veranderd kunnen zijn.

Bij deze nieuwe verdeeling passen wij op de integraal I_p dezelfde redeneering toe, als bij de geheel willekeurige verdeeling.

We gebruiken dezelfde notatie, nml. een r met index ter begrenzing van een interval van groep I, een s met index ter begrenzing van een interval van groep II.

---

1) Het is misschien eenvoudiger te zeggen, dat alle deelpunten, zoowel de r- als s-punten steeds wortels van de bijbehoorende $\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)$ moeten zijn. Dit aantal voorwaarden is echter in 't algemeen grooter.

Het is mogelijk, dat ook nu twee s-intervallen aan elkaar grenzen, waarvoor de bijbehoorende B_s verschillen in teeken. Zijn deze integralen weer:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = B_{s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} d\psi(u) \text{ en } \int_{s_{i+1}}^{s_{i+2}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = B_{s_{i+1}} \int_{s_{i+1}}^{s_{i+2}} d\psi(u),$$

dan is nu tevens $\mathfrak{L}_n(s_{i+1}, x) = 0$.

Het deelpunt $s_{i+1} = w$ wordt nu vervangen door twee deelpunten: $w - \tau_1$ en $w + \tau_2$, waarin τ_1 en τ_2 positieve waarden voorstellen.

τ_1 en τ_2 voldoen aan de voorwaarde, dat $|\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)|$ voor $w - \tau_1 \leqq u \leqq w + \tau_2$ eindig is, b.v. kleiner dan D.

Evenals bij de μ intervallen, waar $|\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)| < A$ (zie blz. 52), zoo zal de integraalsom

$$\sum \int_{w-\tau_1}^{w+\tau_2} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$$

kleiner zijn dan een eindig getal. Het ligt voor de hand beide deelen te vereenigen, zoodat dan de som kleiner is dan $k_1 M$ vermenigvuldigd met het maximum van A en D.

Deze wijziging wordt overal in de deelpunten aangebracht, waar twee integralen van de groep II aan elkaar grenzen, of komen te grenzen tengevolge van deze verandering.

Hierdoor is verkregen, dat elke twee opeenvolgende integralen uit groep II gescheiden worden door eene tusschenruimte, $w - \tau_1$ tot $w + \tau_2$.

Gaan we nu verder met de studie van

3^0. $$\sum_{\text{Gr. II}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u),$$

zijnde $$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = B_{s_i} \int_{s_i}^{s_{i+1}} d\psi(u)$$

met $$|B_{s_i}| > C. \quad \text{(Zie blz. 57).}$$

We leggen nu aan $p(u)$ de volgende voorwaarden op:

a. in elk interval (s_i, s_{i+1}) is het teeken van $p(u)$ hetzelfde als dat van B_{s_i};

b. in elk interval (s_i, s_{i+1}) is $|p(u)| > s$ een eindige positieve waarde, b.v. 1;

c. in elk interval (s_i, s_{i+1}) bezit $p(u)$ één maximum of één minimum.

Noemen we de u-waarde, waarvoor $p(u)$ max. of min. is g, dan is:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} p(u)\,\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) = \int_{s_i}^{g} p(u)\,\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) + \int_{g}^{s_{i+1}} p(u)\,\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u).$$

Beschouwen we den integrand als het product van $p(u)$ en $\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)$, dan mogen we de tweede middelwaardestelling toepassen, omdat $p(u)$ in elke integraal monotoon is.

Hieruit volgt:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} p(u)\,\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) =$$

$$p(s_i)\int_{s_i}^{\xi}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) + p(g)\int_{\xi}^{g}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) + p(g)\int_{g}^{\xi'}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)$$

$$+ p(s_{i+1})\int_{\xi'}^{s_{i+1}}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) =$$

$$p(s_i)\int_{s_i}^{\xi}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) + p(g)\int_{\xi}^{\xi'}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) + p(s_{i+1})\int_{\xi'}^{s_{i-1}}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u).$$

De ligging van de grenspunten ξ en ξ' verandert continu met het polynoom $p(u)$ (b.v. door wijziging in de grootte en ligging van het punt g), zoodat we bij meerdere polynomen mogen aannemen, dat de drie integralen

$$\int_{s_i}^{\xi}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u),\quad \int_{\xi}^{\xi'}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)\quad \text{en}\quad \int_{\xi'}^{s_{i+1}}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u)$$

in teeken overeenstemmen, en dus ook met hun som

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}}\mathfrak{L}_n(u\,.\,x)\,d\psi(u) = B_{s_i}\int_{s_i}^{s_{i+1}} d\psi(u).$$

Uit voorwaarde a volgt nu, dat ook $p(s_i)$, $p(g)$ en $p(s_{i+1})$ hetzelfde teeken hebben, d. w. z. elk der drie deelen van de integraal

$$u_i = \int_{s_i}^{s_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u)$$

is positief, of ook u_i zelf is positief.

Nu was op blz. 57 reeds bewezen, dat het derde stuk van I_p, d. i. Σu_i steeds eindig is, zoo $|p(u)|$ slechts kleiner is dan M. Dit geldt dus ook in het bovenstaande geval, waar elke u_i positief is.

Deze reeks zal a fortiori convergeeren, indien we elken term vervangen door een kleinere waarde.

Nu was:

$$u_i = \int_{s_i}^{s_{i+1}} p(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) =$$

$$|p(s_i)| \left| \int_{s_i}^{\xi} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| + |p(g)| \left| \int_{\xi}^{\xi'} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| + |p s_{i+1}| \left| \int_{\xi'}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right|$$

of volgens voorwaarde (b) blz. 59.

$$u_i > s \left\{ \left| \int_{s_i}^{\xi} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| + \left| \int_{\xi}^{\xi'} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| + \left| \int_{\xi'}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| \right\}$$

$$= s \left| \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right|,$$

dus $$\sum s \left| \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| \text{ convergeert}$$

of ook de reeks $$\sum \left| \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \right| \text{ convergeert,}$$

een reeks, die onafhankelijk is van de gebruikte $p(u)$.

We hebben nu het volgende resultaat verkregen. De integraal I_1 kan gesplitst worden in drie gedeelten.

$$1^0. \qquad \Big| \sum_1^{\mu} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) + \sum \int_{w-\tau_1}^{w+\tau_2} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \Big| < S_1$$

zijnde $\quad | \mathfrak{L}_n(u \,.\, x) | < A$ in de eerste som

en $\quad | \mathfrak{L}_n(u \,.\, x) | < D$ in de tweede som.

$$2^0. \qquad \Big| \sum_{\text{Gr. I}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \Big| < \sum_{\text{I}} \Big| B_r \Big| \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\psi(u) < S_2$$

zijnde $\quad | B_r | \leqq C.$

$$3^0. \qquad \Big| \sum_{\text{Gr. II}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \Big| < \sum_{\text{II}} \Big| \int_{s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \Big| < S_3.$$

Hierin zijn S_1, S_2 en S_3 eindige waarden, die alle onafhankelijk van n zijn.

Bepalen we nu den restterm:

$$\Big| \int_a^b R(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \Big| <$$

$$\sum_1^{\mu} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \Big| R(u) \Big| \Big| \mathfrak{L}_n(u \,.\, x) \Big| d\psi(u) + \sum \int_{w-\tau_1}^{w-\tau_2} \Big| R(u) \Big| \Big| \mathfrak{L}_n(u \,.\, x) \Big| d\psi(u)$$

$$+ \sum_{\text{I}} \Big| \int_{r_i}^{r_{i+1}} R(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \Big| + \sum_{\text{II}} \Big| \int_{s_i}^{s_{i+1}} R(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \Big|.$$

In elk interval (r_i, r_{i+1}) en (s_i, s_{i+1}) mag, met elken gewenschten graad van nauwkeurigheid $R(u)$ constant gesteld worden, dus

$$\Big| \int_a^b R(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) \Big| < \varepsilon S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon S_3 < \eta'$$

een grootheid, die met ε willekeurig klein wordt, hoe groot n ook is, dus

$$P_n(x) = \sin k x + \eta,$$

zijnde $\quad | \eta | < \varepsilon + \eta'$, hoe groot n ook is

of $\quad \lim_{n=\infty} P_n(x) = \sin k x.$

Eveneens is

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \cos k u\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = \cos k x.$$

Deze resultaten zijn in overeenstemming met het werk van PINCHERLE [1]). Deze bewees, dat elke analytische functie, die geen singulariteiten in 't integratie-interval bezit, ontwikkelbaar is volgens de naderingsnoemers.

§ 4. **Het integratiegebied (a, b) kan uiteenvallen in meerdere gedeelten:**

$$(a, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \ldots . (a_q, b)$$

m. a. w. $d\psi(u) \neq 0$ uitsluitend in een interval (a_p, b_p).

Een reëele functie $f(x)$, die in deze intervallen zóó bepaald is, dat zij overal eindig is, geen discontinuiteiten en een eindig aantal maxima en minima bezit, moet nu ontwikkeld kunnen worden, volgens $L_\nu(-x)$ polynomen. Voorloopig is ook $f(a) = f(b)$.

Een functie $f_1(u)$ wordt nu als volgt gedefinieerd: $f_1(a) = f(a)$. In 't interval (a, b_1) is $f_1(u) = f(u)$

$$(b_1, a_2) \quad f_1(u) = f(b_1) + \frac{u - b_1}{a_2 - b_1}\left\{f(a_2) - f(b_1)\right\}$$

$$(a_2, b_2) \quad f_1(u) = f(u)$$

$$(b_2, a_3) \quad f_1(u) = f(b_2) + \frac{u - b_2}{a_3 - b_2}\left\{f(a_3) - f(b_2)\right\}$$

etc. etc.

De functie $f_1(u)$ kan nu in 't interval (a, b) in een Fourierreeks ontwikkeld worden, die absoluut en uniform convergent is, wanneer men nog onderstelt dat deze functie eene afgeleide heeft die eindig is en voldoet aan de voorwaarden van DIRICHLET [2]).

Zij

$$f_1(u) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{2\pi m u}{b - a} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{2\pi m u}{b - a},$$

dan is $$|a_m| \precsim \frac{1}{m^2} \text{ en } |b_m| \precsim \frac{1}{m^2}.$$

De notatie $a_m \sim b_m$ beteekent, dat de verhouding $\frac{a_m}{b_m}$ eindig blijft, en niet steeds nul is, terwijl $a_m \prec b_m$ aangeeft, dat $\lim_{m=\infty} \frac{a_m}{b_m} = 0$.

---

1) PINCHERLE, Atti Acc. dei Lincei, IV, 5, 1889. Annali di Matematica, 1884. Acta Mathematica, 16.

2) PICARD, Traité d'Analyse, I, p. 235.

Wegens de uniforme convergentie mogen we, wat het integreeren betreft, de functie $f_1(u)$ benaderen, door de eerste $(2m+1)$ termen van haar reeks, dus

$$f_1(u) = \sum_{p=0}^{m} \left\{ a_p \cos \frac{2\pi p u}{b-a} + b_p \sin \frac{2\pi p u}{b-a} \right\} + R(u)$$

met $| R(u) | < \varepsilon$, een willekeurig kleine positieve waarde, terwijl m steeds eindig blijft.

Bij substitutie in de integraal $P_n(x)$ (65) vindt men:

$$\lim_{n=\infty} P_n(x) = \lim_{n=\infty} \int_a^b \left\{ \sum_{p=0}^{m} a_p \cos \frac{2\pi p u}{b-a} + b_p \sin \frac{2\pi p u}{b-a} \right\} \mathfrak{L}(u.x)\, d\psi(u)$$

$$+ \lim_{n=\infty} \int_a^b R(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u).$$

$$= \sum_{p=0}^{m} \left(a_p \cos \frac{2\pi p x}{b-a} + b_p \sin \frac{2\pi p x}{b-a} \right) + \eta'$$

want de restterm is, evenals in § 3, van dezelfde orde als ε,

of $$\lim_{n=\infty} P_n(x) = f_1(x) + \eta.$$

Laten we nu m grooter worden, dan neemt η af,

dus $$\lim_{n=\infty} P_n(x) = f_1(x),$$

of de reeks $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu L_\nu(-x)$ stelt in elk interval (a_p, b_p) de functie $f(u)$ voor.

Het is niet noodzakelijk, dat $f(a) = f(b)$.

Zij toch $f(u)$ de te ontwikkelen functie, met $f(a) \neq f(b)$. We kunnen nu een functie $\Phi(u)$ als volgt definieeren:

$$\Phi(u) = \frac{u-a}{b-a} \left\{ f(b) - f(a) \right\}, \text{ dus}$$

$$\Phi(a) = 0 \text{ en } \Phi(b) = f(b) - f(a).$$

Het is duidelijk, dat de functie $F(u) = f(u) - \Phi(u)$ ook de voorwaarde $F(a) = F(b)$ vervult, dus

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = F(x).$$

Eveneens is $\lim_{n=\infty} \int_a^b \Phi(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = \Phi(x)$,

dus

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \Big\{ F(u) + \Phi(u) \Big\}\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = F(x) + \Phi(x)$$

of $$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = f(x).$$

Tot dusverre hebben wij aangenomen, dat de functie continu is. Ook dit is niet noodzakelijk.

Gaan we uit van een continue functie $f(u)$, die in het interval $A_1\ B_1$ de onderstaande gedaante heeft:

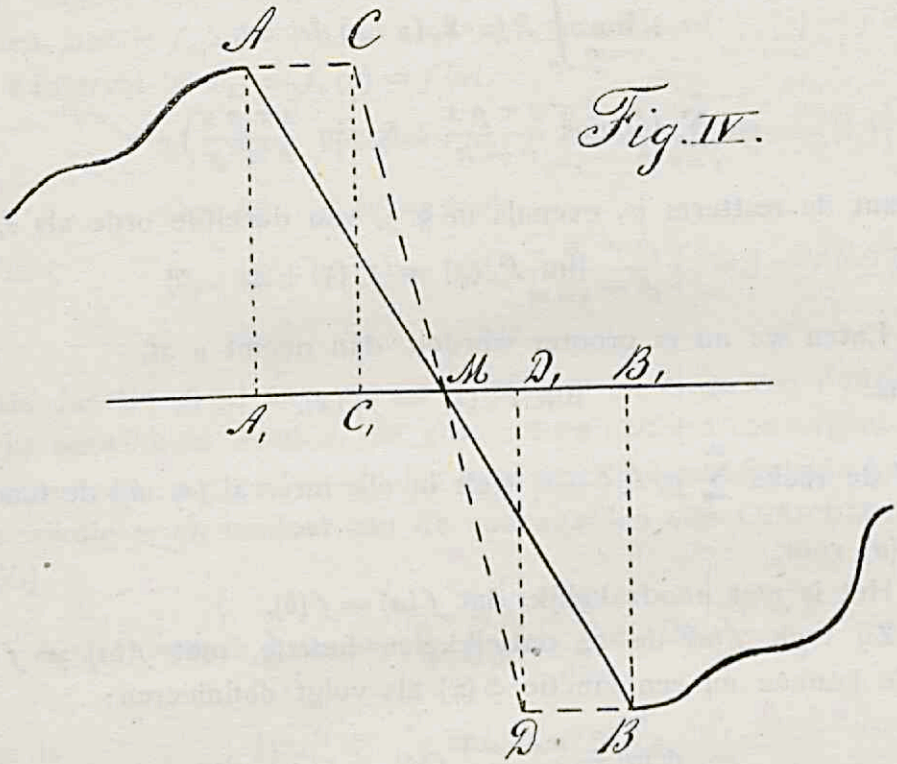


Fig. IV.

terwijl x op eindigen afstand van M ligt.

De integraal $P_n(x)$ zal voor $n = \infty$ de waarde $f(x)$ aannemen, zelfs al is 't interval $A_1\ B_1$ zeer klein, want zoolang $A_1\ B_1 \neq 0$ is, is $f(u)$ continu. Laten we nu $A_1\ B_1$ onbepaald afnemen, dan zal $\lim_{n=\infty} P_n(x)$ alleen kunnen veranderen door de bijdrage uit 't interval $(M - 0,\ M + 0)$. Deze nu is nul, wanneer we aanne-

men, dat $f(u)$ in A_1 en B_1 tegengestelde waarde heeft, evenals in C_1 en D_1, de begrenzingspunten van een nieuw, kleiner geworden interval $A_1 B_1$. Steeds blijft het verloop van $f(u)$ in 't interval $A_1 B_1$ symmetrisch. De functie $\mathfrak{L}_n(u \,.\, x)$ zal nu in elk punt van dit oneindig kleine interval tot dezelfde grenswaarde naderen, evenals $d\psi(u)$, zoodat

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ A_1 B_1 = 0}} \int_{A_1}^{B_1} f(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, d\psi(u) = 0.$$

Hiermede zijn wij gekomen tot een functie $f(u)$, die discontinu is in M, maar zóó, dat $f(x_M + 0) = -f(x_M - 0)$. Deze laatste beperking laat zich als volgt opheffen. Zij $f(u)$ de zoo juist beschouwde functie, dan is:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, du = f(x)$$

en

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \Phi(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, du = \Phi(x),$$

waarin Φ een continue functie is.

Hieruit volgt:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F(u)\, \mathfrak{L}_n(u \,.\, x)\, du = F(x),$$

als

$$F(u) = f(u) + \Phi(u).$$

$F(u)$ is nu een functie, die in M een eindige discontinuiteit bezit, want $F(x_M + 0) = f(x_M + 0) + \Phi(x_M)$ en $F(x_M - 0) = f(x_M - 0) + \Phi(x_M)$.

Langs denzelfden weg kunnen ook meerdere eindige discontinuiteiten ingevoerd worden.

Vanzelf dringt zich nu de vraag op, welke de waarde van limiet $P_n(x)$ is, als $f(u)$ in x discontinu is. Analogie met de Fourierreeks doet vermoeden, dat

$$\lim_{n=\infty} P_n(x) = \frac{1}{2}\left\{ f(x - 0) + f(x + 0) \right\}.$$

Dit kan als volgt bewezen worden:

Volgens het voorgaande, is bij een functie $f(u)$, die discontinu in $u = x$ is:

$$\lim_{n=\infty} P_n(x) = \lim \int_a^b f(u)\, \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) =$$

$$\lim \left\{ \int_{x-\varepsilon}^{x} f(u)\, \mathfrak{L}_n\, d\psi\, u + \int_{x}^{x+\eta} f(u)\, \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) \right\},$$

waarbij ε en η willekeurig klein genomen mogen worden.

In de eerste integraal mag voor $f(u)$ de waarde $f(x-0)$ gesubstitueerd worden, in de tweede $f(x+0)$, zoodat, met elken gewenschten graad van nauwkeurigheid

$$\lim_{n=\infty} P_n(x) = \lim \left\{ f(x-0) \int_{x-\varepsilon}^{x} \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) + f(x-0) \int_{x}^{x+\eta} \mathfrak{L}_n\, d\psi(u \right\}.$$

Nemen we $f(x-0) = f(x+0)$, dan is:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{x-\varepsilon}^{x} \mathfrak{L}_n\, d\psi\, u + \int_{x}^{x+\eta} \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) \right\} = 1.$$

Verder is:

$$\lim \int_{x-\varepsilon}^{x} \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) = \lim \int_{x}^{x+\eta} \mathfrak{L}_n\, d\psi(u)$$

mits $d\psi(u)$ in x continu is, b.v. $= \psi'(u)\, du$.

De factor $d\psi(u)$ heeft dus in beide integralen dezelfde waarde. Zoo ook de factor $\mathfrak{L}_n(x \,.\, u)$. Volgens blz. 47 is:

$$\mathfrak{L}_n(x \,.\, u) = \frac{1}{k_1 k_2 \,..\, k_{n+1}} \cdot \frac{L_{n+1}(-x) L_n(-u) - L_{n+1}(-u) L_n(-x)}{u - x}.$$

Wij zagen, dat $L_{n+1}(-x) L_n(-u) - L_{n+1}(-u) L_n(-x)$ een golflijn is, met een nul in $u = x$, wat n ook zij. Onmiddellijk volgt hieruit, dat voor kleine waarde van θ:

$$L_{n+1}(-x) L_n(-x+\theta) - L_{n+1}(-x+\theta) L_n(-x) =$$
$$-\{ L_{n+1}(-x) L_n(-x-\theta) - L_{n+1}(-x-\theta) L_n(-x) \}.$$

Ook de factor $\frac{1}{u-x}$ heeft voor $u = x \pm \theta$ tegengestelde waarden, dus

$\mathfrak{L}_n(x \,.\, x-\theta) = \mathfrak{L}_n(x \,.\, x+\theta)$, wat n ook is voor $\theta \leqq$ Max. van ε en η,

zoodat de integranden in overeenkomstige punten gelijk zijn, waaruit dan de gelijkheid van beide integralen volgt.

Uit beide vergelijkingen volgt:

$$\lim \int_{x-\varepsilon}^{x} \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u) = {}^1/_2. \qquad \lim \int_{x}^{x+\eta} \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u) = {}^1/_2,$$

zoodat

$$\lim P_n(x) = \frac{1}{2}\Big\{ f(x-0) + f(x+0) \Big\}.$$

Opmerking: is $d\psi(u)$ ook in x discontinu, b.v.

$d\psi(x-0) = p\, du$ en $d\psi(x+0) = q\, du$, met $p \neq q$,

dan zal, volgens dezelfde redeneering

$$\lim P_n(x) = \frac{p}{p+q} f(x-0) + \frac{q}{p+q} f(x+0).$$

Resumeerende zijn we tot 't volgend theorema gekomen:

Elke functie, die in 't integratiegebied van de integraal $\int_a^b \frac{d\psi\, x}{z+x}$ aan de voorwaarden van DIRICHLET voldoet, kan in dit gebied volgens de naderingsnoemers van de kettingbreuk, die bij deze integraal behoort, ontwikkeld worden, mits de verschillende integratieintervallen alle eindig zijn.

§ 5. **Geval B: De integraal bezit een oneindige grens:** $\int_a^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$.

In het voorgaande geval A berustte het geheele betoog op de reeksontwikkeling volgens FOURIER van de functie $f(u)$. Deze ontwikkeling vervalt nu door het oneindig worden van het integratieinterval. Zooals bekend is, treedt in de plaats van de reeks de volgende dubbelintegraal:

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-b}^{+b} f(\lambda) \cos \alpha (u - \lambda)\, d\lambda,$$

tusschen de grenzen $\pm b$. Daarbuiten is de integraal nul.

Overigens is de gang van het bewijs dezelfde als onder A.

Voor $f(u) = u^m$ (m een positief geheel) breekt de ontwikkeling $P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu L_\nu(-x)$ na $\nu = m$ af.

Zij bestaat dus uit een eindig aantal termen en geeft voor elke x waarde de functie x^m volkomen nauwkeurig aan.

Beschouwen we nu de functie

$$\cos kx = 1 - \frac{(kx)^2}{\underline{|2}} + \frac{(kx)^4}{\underline{|4}} - \ldots \pm \frac{(kx)^N}{\underline{|N}} + R_N(x).$$

$$= S_N(x) + R_N(x),$$

waarin $S_N(x)$ een polynoom van den N^{en} graad is, terwijl N eindig is met $| R_N(x) | < \varepsilon$, omdat de reeks uniform convergeert. Dit geldt voor alle kx waarden, die kleiner zijn dan een willekeurig groot getal G.

Nu is reeds bekend, dat

$$x^m = \int_a^\infty u^m \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u) \qquad \text{voor } n > m$$

$$= \int_a^G u^m \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u) + \eta_m$$

$$\text{met } | \eta_m | < \eta \text{ en } \lim_{G=\infty} \eta = 0.$$

Dan is ook:

$$\lim_{n=\infty} P_n(x) = \lim \int_0^\infty \cos k u\, \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) =$$

$$\lim \left[\int_0^G \cos k u \,.\, \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u) + \int_G^\infty \cos k u \,.\, \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) \right]$$

$$= I_1 + I_2.$$

$$| I_1 | = \lim \left| \int_0^G \cos k u \,.\, \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) \right| \leqq$$

$$\lim \left[\left| \int_0^G S_N(u)\, \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) \right| + \left| \int_0^G R_N(u)\, \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) \right| \right]$$

$$\leqq | S_N(x) | + \eta \left\{ 1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \ldots \frac{1}{\underline{|N}} \right\} + \varepsilon.$$

(Vergelijk Geval A, blz. 49)

$$< | S_N | (x) + \eta e + \varepsilon.$$

Eveneens is

$$| I_2 | = \left| \int_G^\infty \cos k u\, \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) \right| < \eta',$$

want het is niet mogelijk, dat de nullen van de functie $\cos k u$, die onafhankelijk is van n, alle steeds zouden samenvallen met die van $\mathfrak{L}_n(x \,.\, u)$ en dit is de eenige manier, waardoor de oneindig kleine integraal $\int_G^\infty \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u)$ een eindige waarde zou kunnen aannemen.

We vinden dus, dat

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\infty \cos k u\, \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u) = \cos k x \,.$$

voor willekeurig groote waarden van x.

Gaan we nu over tot een functie $f(x)$, die in het interval (a, ∞) reëel en continu is, dan kunnen we als volgt de waarde van $\lim_{n=\infty} \int_a^\infty f(u)\, \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u)$ bepalen.

Volgens de integraal van Fourier is:

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-b}^{+b} f(\lambda) \cos \alpha (u - \lambda)\, d\lambda$$

in het interval $\pm b$

of
$$f(u) = \lim_{G=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^G d\alpha \int_{-b}^{+b} f(\lambda) \cos \alpha (u - \lambda)\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^G d\alpha \int_{-b}^{+b} f(\lambda) \cos \alpha (u - \lambda)\, d\lambda + R(u),$$

zijnde
$$| R(u) | < \varepsilon.$$

Na substitutie vindt men:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^\infty f(u)\, \mathfrak{L}_n\, d\psi(u) = \lim_{n=\infty} \int_a^\infty \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u) \frac{1}{\pi} \int_0^G d\alpha \int_{-b}^{+b} f(\lambda) \cos \alpha (u - \lambda)\, d\lambda$$

$$+ \lim_{n=\infty} \int_a^\infty R(u)\, \mathfrak{L}_n(x \,.\, u)\, d\psi(u) =$$

(aangezien de grenzen constant zijn, en de functies continu zijn, mogen de integraties verwisseld worden)

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^G d\alpha \int_{-b}^{+b} f(\lambda)\, d\lambda \int_a^{\infty} \cos \alpha (u-\lambda)\, \mathfrak{L}_n (x\,.\,u)\, d\psi (u) + \eta$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^G d\alpha \int_{-b}^{+b} f(\lambda)\, d\lambda \cos \alpha (x-\lambda) + \eta$$

$= f(u) + \eta'$ in het interval $\pm b$, hoe groot b ook is. Nemen we G steeds grooter, dan nadert η' tot nul, dus ten slotte

$$\lim_{n=\infty} \int_a^{\infty} f(u)\, \mathfrak{L}_n (x\,.\,u)\, d\psi (u) = f(x)$$

voor willekeurig groote waarde van x.

Ook het invoeren van een eindig aantal eindige discontinuteiten levert geen bezwaren meer op. Geheel het betoog, dat daartoe onder A gehouden is (vergel. blz. 64, 65) kan hier woordelijk herhaald worden. Nergens toch kwam de hoegrootheid van de integraalgrenzen ter sprake, en dit is het eenige onderscheid met het nu besproken geval B.

Het zal tevens duidelijk zijn, dat het oneindig worden van beide grenzen in de integraal van STIELTJES, geen nieuwe beschouwingen zal vereischen, zoodat ik het resultaat van dit hoofdstuk als volgt mag formuleeren:

Theorema: Elke functie, die in het integratiegebied van de integraal van STIELTJES $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$ [1]) aan de voorwaarden van DIRICHLET voldoet, kan in dit gebied volgens de naderingsnoemers van de kettingbreuk, die bij deze integraal behoort, ontwikkeld worden.

Is $d\psi(u)$ voor $u = x - 0$ gelijk aan $p\,du$ en voor $u = x + 0$ gelijk aan $q\,du$, dan is de reeks $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu L_\nu(-x) = \frac{p}{p+q} f(x-0) + \frac{q}{p+q} f(x+0)$, mits x niet in een oneindig klein integratie-interval gelegen is.

1) Het geval, dat één of beide integratiegrenzen eindig zijn, $\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$, is hierin begrepen, doordat dan $\psi(x) = \psi(b)$ voor $x > b$ en $\psi(x) = \psi(a)$ voor $x < a$.

HOOFDSTUK III.

§ 1. In dit hoofdstuk heb ik eenige resultaten samengevat, die ik verkregen heb uit de studie van de volgende kettingbreuk van Stieltjes:

$$70)\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-x}.x^{\alpha-1}}{z+x}\,dx = \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha+1|}{|1} + \frac{2|}{|z} + \frac{\alpha+2|}{|1} + \frac{3|}{|z} + \ldots$$

(voor $\alpha > 0$ en z niet negatief reëel) [1])

$$71)\quad \ldots = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{\Gamma(\alpha)}{z} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^2} + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{z^3} - \ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{z}\,\Omega\left(\alpha,\ 1,\ \frac{1}{z}\right),$$

zijnde

$$72)\quad \ldots \Omega(\alpha,\ \beta,\ x) = 1 - \alpha\beta\frac{x}{1} + \alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\frac{x^2}{2!} -$$

$$- \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)\frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ etc.}$$

De kettingbreuk:

$$70)\ .\quad K = \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha+1|}{|1} + \frac{2|}{|z} + \frac{\alpha+2|}{|1} + \frac{3|}{|z} + \frac{\alpha+3|}{|1} + \ldots$$

komt voor $\alpha = 1$ reeds voor bij TSCHEBYSCHEFF [2]) en LAGUERRE [3]).

Uitgaande van deze kettingbreuk kan men langs twee verschil-

---

1) Voor het bewijs van bovenstaande formules vergelijke men PERRON, blz. 313 en 392.

2) TSCHEBYSCHEFF, P. Sur le développement des fonctions à une seule variable. Bull. Pet. 1. 1860.

3) LAGUERRE, E. Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$. Bull. S. M. F. 7. 1879

lende wegen tot een geassocieerde kettingbreuk komen van de gedaante:

$$\frac{k_1}{|z+l_1} - \frac{k_2}{|z+l_2} - \frac{k_3}{|z+l_3} - \ldots \qquad k_\nu > 0.$$

1°. door contractie (P. blz. 200):

68) . . $K_1 = \frac{1}{|z+\alpha} - \frac{1 \cdot \alpha}{|z+\alpha+2} - \frac{2(\alpha+1)}{|z+\alpha+4} - \frac{3(\alpha+2)}{|z+\alpha+6} - \ldots$

Deze kettingbreuk heeft tot naderingsbreuken die van K van even rangorde, zoodat ook

68) . . . . $K_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{z+x} dx$ met $\alpha > 0$

71) . . . $= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha)}{z} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^2} + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{z^3} - \frac{\Gamma(\alpha+3)}{z^4} + \ldots \right\}$

in overeenstemming met $\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} x^m dx = \Gamma(\alpha+m)$.

2°. door de substitutie $z \mid -z^2$ en vermenigvuldiging met $-z$:

$$K(z) = \frac{1}{|z} + \frac{\alpha}{|1} + \frac{1}{|z} + \frac{\alpha+1}{|1} + \frac{2}{|z} + \ldots$$

dus $K_2(z) = -zK(-z^2) = \frac{-z}{|-z^2} + \frac{\alpha}{|1} + \frac{1}{|-z^2} + \frac{\alpha+1}{|1} + \frac{2}{|-z^2} + \ldots$

69) . . . . . $K_2 = \frac{1}{|z} - \frac{\alpha}{|z} - \frac{1}{|z} - \frac{\alpha+1}{|z} - \frac{2}{|z} - \ldots$

73) . . . . . $= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha)}{z} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^3} + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{z^5} + \ldots \right\}$

terwijl de bijbehoorende integraal wordt:

69) . . . . . $I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{z+x} (x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} dx.$

Dit kan als volgt bewezen worden:

$$\frac{1}{z+x} = \frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} - \frac{x^3}{z^4} + \ldots$$

dus de coëfficient van $\frac{1}{z^{2p+1}}$ is:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}.(x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.(x^2)^p\,dx = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}.(x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}.(x^2)^p\,dx =$$

na $x \mid \sqrt{y}$

$$= \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-y}\,y^{\alpha-\frac{1}{2}}\,y^p\,\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-y}.y^{\alpha-1}.y^p\,dy =$$

$$\Gamma(\alpha+p).$$

De coëfficient van $\frac{1}{z^{2p}}$ is:

$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,x^{2p+1}\,dx = 0$, want de integrand is een oneven functie, dus:

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{\Gamma(\alpha)}{z} + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^3} + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{z^5} + \ldots\right\} = K_2.$$

De naderingsnoemers èn van K_1 èn van K_2 kunnen dus volgens het tweede hoofdstuk als ontwikkelingselement voor functies die voldoen aan de voorwaarden van DIRICHLET, dienst doen. Bij K_1 behoort het interval nul-pos. oneindig, bij K_2 de geheele reëele as. Een en ander herinnert aan de Fourier-ontwikkelingen.

§ 2. **De kettingbreuk:**

$$K_1 = \frac{1\ |}{|z+\alpha} - \frac{1.\alpha\ |}{|z+\alpha+2} - \frac{2.(\alpha+1)|}{|z+\alpha+4} - \ldots = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}.x^{\alpha-1}}{z+x}\,dx.$$

De naderingsnoemers zal ik voorstellen door $L_n(z, \alpha)$.

De recurrente betrekking is:

74) $L_{n+1}(z, \alpha) = (z+\alpha+2n)\,L_n(z, \alpha) - n(n+\alpha-1)\,L_{n-1}(z, \alpha)$.

Hieruit volgt, dat

75) $L_n(z, \alpha) = z^n + \binom{n}{1}(n+\alpha-1)\,z^{n-1} + \binom{n}{2}(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\,z^{n-2} +$

$$+ \ldots + \binom{n}{p}(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots(n+\alpha-p)\,z^{n-p} + \ldots$$

$$+ \binom{n}{1}(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)\,z + (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\ldots(\alpha+1)\,\alpha.$$

Om dit eenvoudig te bewijzen, voer ik de volgende hulpfuncties in, gedefinieerd door:

$$76) \ldots\ldots\ldots \Phi_n(z,\alpha) = z^{\alpha-1}\cdot\frac{L_n(z,\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)},$$

of $$L_n(z,\alpha) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{z^{\alpha-1}}\cdot\Phi_n(z,\alpha),$$

zoodat (74) overgaat in:

$$\Gamma(n+\alpha+1)\,\Phi_{n+1}(z,\alpha) = (z+\alpha+2n)\,\Gamma(n+\alpha)\,\Phi_n(z,\alpha) - \\ - n(n+\alpha-1)\,\Gamma(n+\alpha-1)\,\Phi_{n-1}(z,\alpha)$$

$$77) \text{ of } (n+\alpha)\,\Phi_{n+1}(z,\alpha) = (z+\alpha+2n)\,\Phi_n(z,\alpha) - n\,\Phi_{n-1}(z,\alpha).$$

Uit (75) volgt voor $\Phi_n(z,\alpha)$

$$78) \quad \Phi_n(z,\alpha) = \frac{z^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)} + \binom{n}{1}\frac{z^{n+\alpha-2}}{\Gamma(n+\alpha-1)} + \binom{n}{2}\frac{z^{n+\alpha-3}}{\Gamma(n+\alpha-2)} + \ldots \\ + \binom{n}{p}\frac{z^{n+\alpha-p-1}}{\Gamma(n+\alpha-p)} + \ldots + \binom{n}{1}\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

$$78') \ldots\ldots\ldots \Phi_n(z,\alpha) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)}.$$

Met behulp van (77) zal ik nu (78′) bewijzen, waarmee dan tevens de juistheid van (75) is aangetoond.

Voor kleine n-waarden geeft de directe berekening:

$$L_0(z,\alpha) = 1 \qquad \Phi_0(z,\alpha) = \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$L_1(z,\alpha) = z+\alpha \qquad \Phi_1 = \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$L_2 = z^2 + 2(\alpha+1)z + (\alpha+1)\alpha \qquad \Phi_2 = \frac{z^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + 2\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

in overeenstemming met (75) resp. (78).

Nemen we dus aan, dat (78′) juist is voor $n \leqq m$, dan moeten we aantoonen, dat de formule ook juist is voor $n = m+1$.

Met het oog op (77) bereken ik:

$$(z+\alpha+2m)\,\Phi_m - m\,\Phi_{m-1} =$$

$$\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}\frac{z^{p+\alpha}}{\Gamma(p+\alpha)} + \sum_{p=0}^{m}(2m+\alpha)\binom{m}{p}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)}$$

$$-\sum_{p=0}^{m-1} m\binom{m-1}{p}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} =$$

$$\sum_{p=1}^{m+1}(p+\alpha-1)\binom{m}{p-1}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} + \sum_{p=0}^{m}(2m+\alpha)\binom{m}{p}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)}$$

$$-\sum_{p=0}^{m-1} m\binom{m-1}{p}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} =$$

$$(m+\alpha)\frac{z^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha+1)} + (m+\alpha-1)\binom{m}{m-1}\frac{z^{m+\alpha-1}}{\Gamma(m+\alpha)} +$$

$$+(2m+\alpha)\binom{m}{m}\frac{z^{m+\alpha-1}}{\Gamma(m+\alpha)} +$$

$$+\sum_{p=1}^{m-1}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)}\left\{(p+\alpha-1)\binom{m}{p-1}+(2m+\alpha)\binom{m}{p}-m\binom{m-1}{p}\right\}$$

$$+(2m+\alpha)\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - m\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} =$$

$$(m+\alpha)\left[\frac{z^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha+1)}+\binom{m+1}{m}\frac{z^{m+\alpha-1}}{\Gamma(m+\alpha)}\right]$$

$$+\sum_{p=1}^{m-1}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)}\cdot\frac{m(m-1)..(m-p+2)}{p!}\{p(p+\alpha-1)+(2m+\alpha)(m-p+1)$$

$$-(m-p)(m-p+1)\}$$

$$+(m+\alpha)\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} =$$

$$(m+\alpha)\sum_{p=0}^{m+1}\binom{m+1}{p}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} = (m+\alpha)\,\Phi_{m+1}(z,\ \alpha),$$

dus ook

$$\Phi_{m+1}(z,\ \alpha) = \sum_{p=0}^{m+1}\binom{m+1}{p}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)}.$$

§ 3. **Wij zagen, dat** $\Phi_n(z,\ \alpha) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)}$.

Zooals reeds is opgemerkt, gaan deze polynomen voor $\alpha = 1$ over in die van ABEL [1]).

$$79) \quad \ldots\ldots\ldots \varphi_n(-x, 1) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{x^p}{p!}.$$

Tal van eigenschappen van $\varphi_n(-x, 1)$ kunnen gemakkelijk uitgebreid worden tot eigenschappen der polynomen $\varphi_n(z, \alpha)$.

Allereerst voer ik nog in:

$$80) \quad \ldots \chi_n(z, \alpha) = \frac{\varphi_n(z, \alpha)}{z^{\alpha-1}} = \frac{L_n(z, \alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{z^p}{\Gamma(p+\alpha)}$$

en

$$81) \quad \ldots\ldots\ldots \Phi(\beta, \gamma, z) = \lim_{\alpha=\infty} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{\alpha}\right)$$

$$= 1 + \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{z}{1} + \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{z^2}{\lfloor 2} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \cdot \frac{z^3}{\lfloor 3} + \ldots$$

zoodat

$$82) \quad \ldots\ldots\ldots \chi_n(z, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Phi(-n, \alpha; -z)$$

de p^e term van $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Phi(-n, \alpha; -z)$ toch is:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{-n(-n+1)(-n+2)\ldots(-n+p-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \quad \ldots (\alpha+p-1)} \cdot \frac{(-z)^p}{p!} = \binom{n}{p} \frac{z^p}{\Gamma(p+\alpha)}.$$

Een der meest voor de hand liggende eigenschappen is:

$$83) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi_n'(z, \alpha) = \varphi_n(z, \alpha - 1).$$

Bewijs: $\varphi_n(z, \alpha) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)}$, dus

$$\varphi_n'(z, \alpha) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{z^{p+\alpha-2}}{\Gamma(p+\alpha-1)} = \varphi_n(z, \alpha - 1), \text{ met } \alpha > 1.$$

Verder is:

$$84) \quad \ldots\ldots \varphi_n(z, \alpha) + \varphi_n'(z, \alpha) = \varphi_{n+1}(z, \alpha - 1)$$

of volgens (83):

$$85) \quad \ldots\ldots\ldots \varphi_n(z, \alpha) = \varphi'_{n+1}(z, \alpha) - \varphi_n'(z, \alpha).$$

---

1) Vergel. A. A. NIJLAND, diss. 1896 en Prof. Dr. W. KAPTEYN, Versl. Kon. Ac. v. W., 27 Maart 1913.

Bewijs: $\Phi_n(z,\ \alpha) + \Phi_n'(z,\ \alpha) =$

$$\sum_{p=0}^{n} \left\{ \binom{n}{p} \frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} + \binom{n}{p} \frac{z^{p+\alpha-2}}{\Gamma(p+\alpha-1)} \right\} =$$

$$\frac{z^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)} + \sum_{p=0}^{n-1} \left\{ \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \right\} \frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} + \frac{z^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} =$$

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p+1} \frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} + \frac{z^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \frac{z^{p+\alpha-2}}{\Gamma(p+\alpha-1)} =$$

$$\Phi_{n+1}(z,\ \alpha-1). \qquad \text{q. e. d.}$$

Vermenigvuldigt men beide leden van (84) met $e^z\,dz$, dan is:

86) . . . . . $d(e^z\,\Phi_n(z,\ \alpha)) = e^z\,\Phi_{n+1}(z,\ \alpha-1)\,dz.$

of ook:

87) . . $d(e^z \cdot z^{\alpha-1} \cdot L_n(z,\ \alpha)) = e^z \cdot z^{\alpha-2} \cdot L_{n+1}(z,\ \alpha-1)\,dz.$

Nog is:

88) . . . . . $L_n^{(p)}(z,\ \alpha) = \frac{n!}{(n-p)!}\,L_{n-p}(z,\ \alpha+p).$

Bewijs: $\Phi_n(z,\ \alpha) = z^{\alpha-1} \cdot \frac{L_n(z,\ \alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{z^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)}$

of $$\frac{L_n(z,\ \alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{z^p}{\Gamma(p+\alpha)},$$

dus $$\frac{L_n'(z,\ \alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} = \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} \cdot p \cdot \frac{z^{p-1}}{\Gamma(p+\alpha)} =$$

$$n \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} \frac{z^{p-1}}{\Gamma(p+\alpha)} = n \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} \frac{z^q}{\Gamma(q+\alpha+1)}$$

$$= n\,\frac{L_{n-1}(z,\ \alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha)}$$

88′) . . . . . of $L_n'(z,\ \alpha) = n\,L_{n-1}(z,\ \alpha+1).$

Zoo ook:

$$L_n''(z,\ \alpha) = n\,L'_{n-1}(z,\ \alpha+1) = n(n-1)\,L_{n-2}(z,\ \alpha+2).$$

etc.

Differentiaalvergelijkingen:

1°. voor $L_n(z, \alpha)$

89) . . . $z L_n''(z, \alpha) + (z + \alpha) L_n'(z, \alpha) - n L_n(z, \alpha) = 0.$

Bewijs: (87) wordt na $\alpha \mid \alpha + 1$ en $n \mid n - 1$:

$$d(e^z z^\alpha L_{n-1}(z, \alpha + 1)) = e^z \cdot z^{\alpha-1} \cdot L_n(z, \alpha)\, dz.$$

of volgens (88′):

$$\frac{d}{dz}\{e^z \cdot z^\alpha \cdot L_n'(z, \alpha)\} = e^z \cdot z^{\alpha-1} \cdot n L_n(z, \alpha).$$

Uitvoering der differentiatie levert (89):

2°. voor $\chi_n(z, \alpha)$:

89′) . . . $z \chi_n''(z, \alpha) + (z + \alpha) \chi_n'(z, \alpha) - n \chi_n(z, \alpha) = 0,$

omdat $$\chi_n(z, \alpha) = \frac{L_n(z, \alpha)}{\Gamma(n + \alpha)}.$$

3°. voor $\Phi_n(z, \alpha)$:

89″) $z \Phi_n''(z, \alpha) + (z + 2 - \alpha) \Phi_n'(z, \alpha) - (n + \alpha - 1) \Phi_n(z, \alpha) = 0,$

omdat $$\Phi_n(z, \alpha) = z^{\alpha-1} \chi_n(z, \alpha).$$

Recurrente betrekkingen: Vergel. (74) en (77):

74) . . $L_{n+1}(z, \alpha) = (z + 2n + \alpha) L_n(z, \alpha) - n(n + \alpha - 1) L_{n-1}(z, \alpha)$

77) $\begin{cases} (n+\alpha)\chi_{n+1}(z, \alpha) = (z + 2n + \alpha)\chi_n(z, \alpha) - n \Phi_{n-1}(z, \alpha) \\ (n+\alpha)\Phi_{n+1}(z, \alpha) = (z + 2n + \alpha)\Phi_n(z, \alpha) - n \Phi_{n-1}(z, \alpha). \end{cases}$

Uit (88′) volgt:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Phi_n(z, \alpha)}{z^{\alpha-1}}\right) = n \cdot \frac{\Phi_{n-1}(z, \alpha + 1)}{z^\alpha}$$

na uitvoering der differentiatie vindt men:

90) . . . $z \Phi_n'(z, \alpha) - (\alpha - 1) \Phi_n(z, \alpha) = n \Phi_{n-1}(z, \alpha + 1)$

of volgens (83)

90′) . . $z \Phi_n(z, \alpha - 1) - (\alpha - 1) \Phi_n(z, \alpha) = n \Phi_{n-1}(z, \alpha + 1)$

of ook

90″) . . $z \Phi_n'(z, \alpha) - n \Phi'_{n-1}(z, \alpha + 2) = (\alpha - 1) \Phi_n(z, \alpha)$

en volgens (85)

90‴) . . $z \Phi_n'(z, \alpha) + n \Phi_{n-1}(z, \alpha) = (n + \alpha - 1) \Phi_n(z, \alpha).$

Nog is:

91) . . $z\,\Phi_n'(z,\ \alpha) = (n+\alpha)\,\Phi_{n+1}(z,\ \alpha) - (z+n+1)\,\Phi_n(z,\ \alpha)$

92) . . $z\,\Phi_n''(z,\ \alpha) + (2-\alpha)\,\Phi_n'(z,\ \alpha) - n\,\Phi_{n-1}(z,\ \alpha) = 0.$

Uit (85) volgt:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \Phi_2' - \Phi_1' \quad \text{voor argumenten } z,\ \alpha\\
\Phi_2 &= \Phi_3' - \Phi_2'\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\Phi_n &= \Phi'_{n+1} - \Phi_n'
\end{aligned}$$

dus

$$\sum_{p=0}^{n} \Phi_p = \Phi'_{n+1} - \Phi_1' = \Phi'_{n+1} - 1$$

93) . . . . . of ook $\sum_{p=0}^{n} \Phi_p = \Phi'_{n+1}.$

Uit (92) volgt:

$$i\,\Phi_{i-1} = z\,\Phi_i'' + (2-\alpha)\,\Phi_i'$$

dus

$$\sum_{1}^{n} i\,\Phi_{i-1} = z\sum_{1}^{n}\Phi_i'' + (2-\alpha)\sum_{1}^{n}\Phi_i'$$

$$= z\,\Phi'''_{n+1} + (2-\alpha)\,\Phi''_{n+1} \quad \text{volgens (93)}$$

$$= (n+1)\,\Phi'_n - \Phi''_{n+1} \quad \text{volgens (92).}$$

Nu is $\sum_{i=1}^{n} i\,\Phi_{i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} i\,\Phi_i + \sum_{i=0}^{n-1}\Phi_i =$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i\,\Phi_i + \Phi'_n = (n+1)\,\Phi'_n - \Phi''_{n+1}$$

94) . . . . . of $\sum_{i=1}^{n-1} i\,\Phi_i = n\,\Phi'_n - \Phi''_{n+1}.$

94') . . . $\sum_{i=1}^{n-1} i\,\Phi_i(z,\ \alpha) = n\,\Phi_n(z,\ \alpha-1) - \Phi_{n+1}(z,\ \alpha-2).$

§ 4. **De genetische functie voor $\Phi_n(z,\ \alpha)$.**

Volgens de definitie der Abelsche functies is:

95) . . . . . $\frac{1}{1-v}\cdot e^{\frac{x\,v}{1-v}} = \sum_{0}^{\infty}\Phi_n(x,\ 1)\,v^n.$

De genetische functie der algemeene polynomen $\Phi_n(x, \alpha)$ kan nu gevonden worden, door gebruik te maken van de definitie van RIEMANN [1]) van de integratie en differentiatie met gebroken en onmeetbaren index.

RIEMANN definieert een α herhaalde integratie van $f(x)$, symbolisch $D^{\alpha} f(x) = x^{\alpha} \cdot R^{\alpha}(x)$ geschreven, als volgt:

$$R^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{f(t\,x)\,dt}{(1-t)^{1-\alpha}}, \qquad \alpha > 0.$$

Als $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dan is $R^{\alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\alpha)} a_n x^n$

of $$D^{(\alpha)} f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+\alpha)} \cdot a_n x^{p+\alpha}.$$

In ons geval is:

$$f(x) = \Phi_n(x, 1) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{x^p}{\Gamma(p+1)} \quad \ldots\ldots (78'),$$

96) dus $$D^{\alpha-1} \Phi_n(x, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{p} \frac{x^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} = \Phi_n(x, \alpha).$$

Deze formule geldt ook voor $\alpha - 1$ negatief, als men definieert

$$R^{\alpha-1} f(x) = x^k \frac{d^k R^{k+\alpha-1} f(x)}{d x^k}, \qquad \alpha > 0$$

waarbij k 't kleinste geheel is, waarvoor $k + \alpha - 1 \geqq 0$. In ons geval is dus $k = 1$ voor $0 < \alpha < 1$.

Nu is:

$$\sum_0^{\infty} \Phi_n(x, 1)\, v^n = \frac{1}{1-v} \cdot e^{x v/1-v}$$

dus

97) $$\ldots\ldots \sum_0^{\infty} \Phi_n(x, \alpha)\, v^n = \frac{1}{1-v} \cdot D^{\alpha-1} e^{x v/1-v}.$$

Het convergentiegebied is de eenheidscirkel.

---

1) B. RIEMANN, Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, 1847. Mathematische Werke, 2te Auflage, p. 353.

Voor $\varkappa$ geheel (1, 2, 3, . k) vindt men onmiddellijk:

$$\sum_0^\infty \varphi_n(x, .k)\, v^n = \frac{1}{1-v} \cdot \left(\frac{1-v}{v}\right)^{k-1} e^{xv/1-v} - p(x)$$

$$= \frac{(1-v)^{k-2}}{v^{k-1}} \cdot e^{xv/1-v} - p(x)$$

waarbij $p(x)$ een polynomium is, waardoor de termen met $x^0, x^1, \ldots x^{k-2}$ worden weggenomen, zoodat

98) $$\sum_0^\infty \varphi_n(x, k)\, v^n = \frac{(1-v)^{k-2}}{v^{k-1}} \cdot \left\{ e^X - 1 - \frac{X}{\lfloor 1} - \frac{X^2}{\lfloor 2} - \frac{X^3}{\lfloor 3} \cdots \frac{X^{k-2}}{\lfloor k-2} \right\}$$

zijnde $X \equiv \dfrac{x\,v}{1-v}$.

§ 5. **De kettingbreuk:**

69) $$\ldots K_z = \frac{1\rfloor}{\lfloor z} - \frac{\alpha\rfloor}{\lfloor z} - \frac{1\rfloor}{\lfloor z} - \frac{\alpha+1\rfloor}{\lfloor z} - \frac{2\rfloor}{\lfloor z} - \frac{\alpha+2\rfloor}{\lfloor z} - \ldots$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{z+x} (x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\, dx.$$

De naderingsnoemers zal ik voorstellen door $N_n(z, \alpha)$, dan zijn de recurrente betrekkingen:

99a) $N_{2n+1}(z, \alpha) = z\, N_{2n}(z, \alpha) - n\, N_{2n-1}(z, \alpha)$

99b) $N_{2n+2}(z, \alpha) = z\, N_{2n+1}(z, \alpha) - (n+\alpha)\, N_{2n}(z, \alpha)$.

Het ligt voor de hand, om afzonderlijk de recurrente betrekking te berekenen voor alle functies met even, en met oneven index.

Bij substitutie van (99a) in (99b) komt:

$$N_{2n+2} = -(-z^2 + n + \alpha)\, N_{2n} - n\, z\, N_{2n-1},$$

maar volgens 99b voor $n \mid n-1$ is,

$$-z\, N_{2n-1} = -N_{2n} - (n+\alpha-1)\, N_{2n-2}$$

dus

$$N_{2n+2} = -(-z^2 + 2n + \alpha)\, N_{2n} - n(n+\alpha-1)\, N_{2(n-1)}$$

of

100) $$(-1)^{n+1} N_{2(n+1)}(z, \alpha) = (-z^2 + 2n + \alpha)(-1)^n N_{2n}(z, \alpha) - n(n+\alpha-1)(-1)^{n-1} N_{2(n-1)}(z, \alpha).$$

Deze formule herinnert aan (74) voor $z = -z^2$

$$L_{n+1}(-z^2, \alpha) = (-z^2 + 2n + \alpha) L_n(-z^2, \alpha) - n(n+\alpha-1) L_{n-1}(-z^2, \alpha)$$

zoodat

101) . . . . . $N_{2n}(z, \alpha) = (-1)^n L_n(-z^2, \alpha)$,

want tevens is

$$N_0 = 1 = (-1)^0 . L_0(-z^2, \alpha)$$

en $N_2 = z^2 - \alpha = (-1)^1 L_1(-z^2, \alpha) = -(-z^2 + \alpha)$.

Een zelfde berekening leidt tot een formule voor $N_{2n+1}(z, \alpha)$.

Volgens (99*b*) is: $N_{2n} = z N_{2n-1} - (n + \alpha - 1) N_{2n-2}$.

Substitueerende in (99*a*):

$$N_{2n+1} = (z^2 - n) N_{2n-1} - z(n + \alpha - 1) N_{2n-2}.$$

Verder is:

$$(n+\alpha-1) N_{2n-1} = z(n+\alpha-1) N_{2n-2} - (n-1)(n+\alpha-1) N_{2n-3}$$

dus

$$N_{2n+1} = (z^2 - 2n - \alpha + 1) N_{2n-1} - (n-1)(n+\alpha-1) N_{2n-3},$$

of

102) $(-1)^n N_{2n+1}(z, \alpha) = (-z^2 + 2n + \alpha - 1)(-1)^{n-1} N_{2n-1} -$
$$- (n-1)(n+\alpha-1)(-1)^{n-2} N_{2n-3}.$$

Vergelijken wij met (74) na $z \mid -z^2$, $n \mid n-1$, $\alpha \mid \alpha+1$:

$$L_n(-z^2, \alpha+1) = (-z^2 + 2n + \alpha - 1) L_{n-1}(z, \alpha+1) - (n-1)(n+\alpha-1)$$
$$L_{n-2}(z, \alpha+1)$$

zoodat

103) . . . . . $N_{2n+1}(z, \alpha) = (-1)^n z L_n(-z^2, \alpha+1)$

want tevens is:

$N_1(z, \alpha) = z = (-1)^0 . z . L_0$.

$N_3(z, \alpha) = z^3 - (\alpha+1) z = (-1)^1 z \{-z^2 + (\alpha+1)\} = (-1)^1 z . L_1(-z^2, \alpha+1)$.

Nu was $L_n(z, \alpha) = \Gamma(n+\alpha) \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{z^p}{\Gamma(p+\alpha)}$

dus

$$104)\begin{cases} N_{2n}(z,\alpha)=(-1)^n L_n(-z^2,\alpha)=(-1)^n\Gamma(n+\alpha)\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{z^{2p}}{\Gamma(p+\alpha)} \\ N_{2n+1}(z,\alpha)=(-1)^n z\,L_n(-z^2,\alpha+1)= \end{cases}$$

$$=(-1)^n z\,\Gamma(n+\alpha+1)\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}\frac{z^{2p}}{\Gamma(p+\alpha+1)}.$$

Deze formules kunnen ook als volgt geschreven worden:

$$N_{2n}(z,\alpha)=z^{2n}-\frac{n}{1}(n+\alpha-1)z^{2(n-2)}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)z^{2n-4}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)(n+\alpha-3)z^{2n-6}+\ldots \text{ etc.}$$

Voor $\alpha=\frac{1}{2}$ is:

$$N_{2n}(z,\tfrac{1}{2})=z^{2n}-\frac{2n}{1}\cdot\frac{(2n-1)}{2^2}\cdot z^{2n-2}+\frac{2n(2n-2)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)}{2^4}z^{2n-4}$$

$$-\frac{2n(2n-2)(2n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2^6}z^{2n-6}+\ldots$$

of $$N_{2n}(z,\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2^{2n}}\left\{(2z)^{2n}-\frac{2n(2n-1)}{1!}(2z)^{2n-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{2!}(2z)^{2n-4}-\ldots.\right\}=\frac{H_{2n}(z)}{2^{2n}}$$

als $H_n(z)$ de functies van HERMITE aangeeft [1]).

Evenzoo is:

$$N_{2n+1}(z,\tfrac{1}{2})=\frac{H_{2n+1}(z)}{2^{2n+1}}$$

105) . . . . of algemeen $N_\nu(z,\tfrac{1}{2})=\frac{H_\nu(z)}{2^\nu}$.

Eenvoudiger is dit te bewijzen, met behulp van (99). Deze formules zijn voor $\alpha=\frac{1}{2}$:

$$N_{2n+1}(z,\tfrac{1}{2})=z\,N_{2n}-n\,N_{2n-1}$$

$$N_{2n+2}=z\,N_{2n+1}-(n+\tfrac{1}{2})N_{2n}.$$

---

1) Vergelijk: Versl. Kon. Ac. v. W., Prof. Dr. W. KAPTEYN, „Over de functies van HERMITE. 1ste ged. 10 April 1914. form. (5).

Vermenigvuldigen we respectievelijk met 2^{2n+1} en 2^{2n+2}, dan is:

$$2^{2n+1} N_{2n+1} = 2z \cdot 2^{2n} N_{2n} - 2 \cdot 2n \cdot 2^{2n-1} N_{2n-1}$$
$$2^{2n+2} N_{2n+2} = 2z \cdot 2^{2n+1} N_{2n+1} - 2(2n+1) 2^{2n} N_{2n}$$

of in één formule:

$$2^{\nu} N_{\nu} = 2z \cdot 2^{\nu-1} N_{\nu-1} - 2 \cdot (\nu - 1) 2^{\nu-2} N_{\nu-2},$$

terwijl voor H_n geldt:

$$H_n = 2z H_{n-1} - 2(n-1) H_{n-2}\ ^{1}).$$

Tevens is:

$$H_0 = 1 = 2^0 \cdot N_0(z, {}^1/_2)$$
$$H_1 = 2z = 2^1 \cdot N_1(z, {}^1/_2)$$

zoodat weer

105) . . . . . $H_{\nu}(z) = 2^{\nu} N_{\nu}(z, {}^1/_2)$

§ 6. **Volgens het voorgaande bestaat er een zeer eenvoudig verband tusschen de functies van Abel en Hermite.**

Uit (105) en (103) volgt:

$$H_{2n+1}(z) = 2^{2n+1} N_{2n+1}(z, {}^1/_2) = (-1)^n 2^{2n+1} \cdot z L_n(-z^2, {}^3/_2)$$
$$= (-1)^{n+1} 2^{2n+1} \cdot i \Gamma(n + {}^3/_2) \Phi_n(-z^2, {}^3/_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76).$$

Nu is verder volgens (96):

$$\Phi_n(x, {}^3/_2) = D^{1/2} \Phi_n(x, 1) = x^{1/2} R^{1/2} \Phi_n(x, 1)$$
$$= \frac{x^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{\Phi_n(xt, 1)}{(1-t)^{1/2}} dt$$

dus

$$\Phi_n(-z^2, {}^3/_2) = \frac{iz}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\Phi_n(-z^2 t, 1)}{(1-t)^{1/2}} dt$$

en

106) $$H_{2n+1}(z) = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \cdot \frac{\Gamma(n + {}^3/_2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot z \int_0^1 \frac{\Phi_n(-z^2 t, 1)}{(1-t)^{1/2}} dt.$$

Het is nu eenvoudig $H_{2n+1}(z)$ in een reeks van Abelsche polynomen te ontwikkelen.

---

1) Vergelijk: Versl. Kon. Ac. v. W., Prof. Dr. W. KAPTEYN, „Over de functies van HERMITE. 1ste ged. 10 April 1914. form. (5).

Hiertoe gaan wij uit van:

$$107)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^\mu = \sum_0^\mu A_i^\mu \, \Phi_i(-x, 1) \\ \text{met} \\ A_i^\mu = \int_0^\infty x^\mu \cdot e^{-x} \cdot \Phi_i(-x, 1)\, dx = (-1)^i \frac{\mu!\,\mu!}{i!\,(\mu-i)!} \end{array} \right.$$

Volgens (78′) is:

$$\Phi_n(-r\,x, 1) = \sum_0^n (-1)^p \binom{n}{p} \frac{x^p}{p!} (+r)^p = \text{(wegens 107)}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} r^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \Phi_k(-x, 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \Phi_k(x, 1)\ ^1)$$

$$108)\ \ldots \text{ of } \Phi_n(t\,x, 1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \cdot (1-t)^{n-k} \Phi_k(x, 1)$$

zoodat

$$\int_0^1 \frac{\Phi_n(t\,x, 1)}{(1-t)^{1/2}}\, dt =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Phi_k(x, 1) \int_0^1 t^k \cdot (1-t)^{n-k-1/2}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Phi_k(x, 1)\ B(k+1,\ n-k+1/2)$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n-k+1/2)}{\Gamma(n-k+1)} \Phi_k(x, 1)$$

dus

$$109)\ H_{2n+1}(z) = (-1)^n \cdot 2^{2n+1}\, n! \frac{z}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n-k+1/2)}{\Gamma(n-k+1)} \Phi_k(-z^2, 1).$$

Voor $H_{2n}(z)$ vind ik:

$$H_{2n}(z) = 2^{2n} N_{2n}(z, 1/2) = 2^{2n} (-1)^n L_n(-z^2, 1/2)$$
$$= (-1)^n 2^{2n} \cdot i\, z\, \Gamma(n+1/2)\, \Phi_n(-z^2, 1/2).$$

---

1) Zie blz. 87 voor de volledige afleiding.

Nu is:

$$\Phi_n(x, {}^1/_2) = D^{-1/2}\,\Phi_n(x, 1) = x^{-1/2}\,R^{-1/2}\,\Phi_n(x, 1)$$

$$= x^{-1/2}\cdot\frac{x^1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{\Phi_n(x\,t, 1)}{(1-t)^{1/2}}\,dt$$

$$= \frac{x^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 \frac{\Phi_n'(x\,t, 1)}{(1-t)^{1/2}}\,dt.$$

Differentieert men (108) naar t:

$$x\,\Phi_n'(tx, 1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{k\,t^{k-1}.(1-t)^{n-k} - (n-k)\,t^k\,(1-t)^{n-k-1}\right\}\Phi_k(x, 1)$$

en substitueert, dan is:

$$\Phi_n(x, {}^1/_2) = -{}^1/_2\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+{}^1/_2)}\sum_0^n\frac{\Gamma(n-k-{}^1/_2)}{\Gamma(n-k+1)}\Phi_k(x, 1)$$

dus

110) $$H_{2n}(z) = (-1)^{n+1}.2^{2n-1}.n!\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_0^n\frac{\Gamma(n-k-{}^1/_2)}{\Gamma(n-k+1)}\Phi_k(-z^2, 1)$$ [1].

Langs denzelfden weg kunnen alle functies $\Phi_n(x, \alpha)$ en $N_n(x, \alpha)$ ontwikkeld worden in reeksen volgens Abelsche polynomen.

Bepaalt men deze ontwikkeling direct volgens form. (66), dan geeft de vergelijking tal van integralen.

In het voorgaande nemen de functies van ABEL blijkbaar een bevoorrechte plaats in. Men mag verwachten, dat dit slechts schijnbaar is, wat als volgt kan worden aangetoond.

Wij hadden:

107) . . . . . $$\frac{x^\mu}{\Gamma(\mu+1)} = \sum_0^\mu(-1)^i\binom{\mu}{i}\Phi_i(-x, 1)$$

of $$(-1)^\mu\cdot\frac{x^\mu}{\Gamma(\mu+1)} = \sum_0^\mu(-1)^i\binom{\mu}{i}\Phi_i(+x, 1).$$

Passen we op beide leden de operatie $D^{\alpha-1}$ toe, dan is:

$$(-1)^\mu\cdot\frac{x^{\mu+\alpha-1}}{\Gamma(\mu+\alpha)} = \sum_0^\mu(-1)^i\binom{\mu}{i}\Phi_i(x, \alpha),$$

---

1) Deze formule voor $H_{2n}(z)$ is langs anderen weg afgeleid door den heer N. G. W. H. BEEGER. Versl. Kon. Ac. v. W. 17 Juni 1914, blz. 95.

of, lettende op (80):

$$(-1)^{\mu}\frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu+\alpha)}=\sum_{0}^{\mu}(-1)^{i}\binom{\mu}{i}\chi_{i}(x,\alpha)$$

111) of ook $\frac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu+\alpha)}=\sum_{0}^{\mu}(-1)^{i}\binom{\mu}{i}\chi_{i}(-x,\alpha)$.

Ontwikkelen we nu

$$\chi_{n}(-tx,\alpha)=\sum_{0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\frac{x^{i}}{\Gamma(i+\alpha)}\cdot t^{i}$$

dus, volgens (111)

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}t^{i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{k}\binom{i}{k}\chi_{k}(-x,\alpha).$$

In 't algemeen is:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}u_{ik}=\sum_{k=0}^{k=n}\sum_{i=k}^{i=n}u_{ik}=u_{00}+$$

$$+u_{10}+u_{11}+$$
$$+u_{20}+u_{21}+u_{22}+$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$
$$+u_{n0}+u_{n1}+\ldots\ldots+u_{nn},$$

dus

$$\chi_{n}(-tx,\alpha)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\chi_{k}(-x,\alpha)\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{k}t^{i}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}B_{k}^{n}\chi_{k}(-x,\alpha)$$

waar

$$B_{k}^{n}=\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{n}{i}\binom{i}{k}t^{i}=t^{k}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}t^{i-k}=$$

$$t^{k}\binom{n}{k}\sum_{0}^{n-k}(-1)^{i}\binom{n-k}{i}t^{i}=t^{k}\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}$$

ten slotte is dus:

112) . . . . $\chi_{n}(tx,\alpha)=\sum_{0}^{n}\binom{n}{k}t^{k}(1-t)^{n-k}\chi_{n}(x,\alpha)$.

Het zal duidelijk zijn, dat deze formule en die voor de integratie, respect., differentiatie voor gebroken of onmeetbaren index, evenals in het bijzondere geval, dat voorafgaat, ons in staat stellen elke functie $\chi_n(z, \alpha)$ of $N_n(z, \alpha)$ volgens een reeks met willekeurige α, hetzij bestaande uit χ-, hetzij uit N-functies te ontwikkelen. Hierin ligt een schat bepaalde integralen opgesloten.

Ik wil niet verzuimen te wijzen op een eigenaardige symmetrie in form. (111) en (80).

80) . . . is $$\frac{L_n(-z, \alpha)}{\Gamma(n+\alpha)} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{(+z)^p}{\Gamma(p+\alpha)}.$$

111) . . . . . $$\frac{(+z)^n}{\Gamma(n+\alpha)} = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{L_p(-z, \alpha)}{\Gamma(p+\alpha)}.$$

Hieruit volgt deze stelling[1]): Als een naar opklimmende machten van z gerangschikte functie naar $L_n(-z, \alpha)$ ontwikkeld kan worden, zoodat symbolisch

$$f(z) = F(L)$$

is, dan is ook

$$f(L) = F(z).$$

L^k is hierin steeds te vervangen door L_k.

§ 7. Het verband met de functies van Bessel.

Voor alle waarden van n en z is

$$I_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r+n}}{2^{n+2r} r!\, \Gamma(n+r+1)}$$

of voor $n = \alpha - 1$, $z = 2\sqrt{xy}$:

$$I_{\alpha-1}(2\sqrt{xy}) = (xy)^{\frac{\alpha-1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\, \Gamma(r+\alpha)} (xy)^r.$$

Zoo is:

$$e^x I_{\alpha-1}(2\sqrt{xy}) = (xy)^{\frac{\alpha-1}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^r}{r!\, \Gamma(r+\alpha)} y^r$$

$$= (xy)^{\frac{\alpha-1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \left\{ \frac{(-y)^m}{\Gamma(m+\alpha)} + \binom{m}{1} \frac{(-y)^{m-1}}{\Gamma(m+\alpha-1)} + \binom{m}{2} \frac{(-y)^{m-2}}{\Gamma(m+\alpha-2)} + \ldots \right\}$$

$$= (xy)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \frac{L_m(-y, \alpha)}{\Gamma(m+\alpha)}$$

---

1) LAGUERRE. Bull. de la Soc. math. de France. Tome VII, p. 81.

dus

113) . . $(xy)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^x I_{\alpha-1}(2\sqrt{xy}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \frac{L_m(-y,\alpha)}{\Gamma(m+\alpha)}$.

Vermenigvuldigen we beide leden met $e^{-y} y^n y^{\alpha-1} dy$ en integreeren tusschen o en ∞, dan is:

$$e^x . x^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^n y^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{\alpha-1}(2\sqrt{xy})\, dy = \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!} \int_0^{\infty} e^{-y} y^n y^{\alpha-1} . \frac{L_m(-y,\alpha)}{\Gamma(m+\alpha)} dy.$$

Nu is volgens (111):

$$y^n = \Gamma(n+\alpha) \left\{ \sum_0^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{L_i(-y,\ \alpha)}{\Gamma(i+\alpha)} \right\}$$

dus
$$\int_0^{\infty} e^{-y} . y^n y^{\alpha-1} . \frac{L_m(-y,\ \alpha)}{\Gamma(m+\alpha)} dy =$$

$$\Gamma(n+\alpha)(-1)^m \binom{n}{m} \frac{1}{\Gamma^2(m+\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-y} . y^{\alpha-1} . L_m^2(-y,\ \alpha)\, dy$$

volgens (62)

$$= \Gamma(n+\alpha)(-1)^m \binom{n}{m} . \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha)}, \text{ volgens (63).}$$

Het tweede lid wordt dus:

$$\Gamma(n+\alpha) \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{(-x)^m}{\Gamma(m+\alpha)} = L_n(-x,\ \alpha),$$

114) of $L_n(-x,\ \alpha) = e^x . x^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-y} . y^{n+\frac{\alpha-1}{2}} I_{\alpha-1}(2\sqrt{xy})\, dy,$

of na
$$y \left| \frac{\beta^2}{4} \right. \text{ en } x \mid x^2$$

114') $2^{2n+\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x^2} . L_n(-x^2,\ \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\beta^2/4} . \beta^{2n+\alpha} I_{\alpha-1}(\beta x)\, d\beta.$

Gebruik makende van (101) en (103), vind ik

115) $N^n(x,\alpha) = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{1-\alpha}}{2^{n+\alpha}} . e^{x^2} \int_0^{\infty} e^{-\beta^2/4} \beta^{n+\alpha} I_{\alpha-1/2}\{1+(-1)^n\}(\beta x)\, d\beta.$

Uit (113) volgt nog:

$$(x\,y)^{\frac{1-\alpha}{2}}\, e^{x+y}\, I_{\alpha-1}(2\sqrt{x\,y}) = e^{y} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\, \frac{L_m(-y,\ \alpha)}{\Gamma(m+\alpha)}$$

en

$$(x\,y)^{\frac{1-\alpha}{2}}\, e^{x+y}\, I_{\alpha-1}(2\sqrt{x\,y}) = e^{x} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\, \frac{L_m(-x,\ \alpha)}{\Gamma(m+\alpha)}$$

dus

$$116)\ \ldots\ e^{y} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\, \frac{L_m(-y,\ \alpha)}{\Gamma(m+\alpha)} = e^{x} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\, \frac{L_m(-x,\ \alpha)}{\Gamma(m+\alpha)},$$

een vergelijking, die herinnert aan de symmetrie, waarop aan 't einde van de voorgaande paragraaf gewezen werd.

§ 8. **De N-functies kunnen ook nog als volgt geschreven worden:**

$$117)\ \ldots\ \begin{cases} N_{2n}(x,\ \alpha) = \dfrac{1}{2^{2n}} \cdot e^{x^2}\, {}_{\alpha}\Delta_x^{(n)}\, e^{-x^2} \\ N_{2n+1}(x,\ \alpha) = \dfrac{-1}{2^{2n+1}} \cdot e^{x^2} \dfrac{d}{d\,x}\, {}_{\alpha}\Delta_x^{(n)}\, e^{-x^2}, \end{cases}$$

waarin ${}_{\alpha}\Delta_x$ de operator $\dfrac{1}{x^{2\alpha-1}} \dfrac{d}{d\,x}\left(x^{2\alpha-1} \dfrac{d}{d\,x}\right)$ voorstelt.

Bewijs:

$$N_{2n}(z,\ \alpha) = (-1)^n\, L_n(-z^2,\ \alpha) \ \ldots\ (101)$$

dus

$$\frac{d}{d\,z} N_{2n}(z,\ \alpha) = (-1)^n\,(-2\,z)\, L_n'(-z^2,\ \alpha) = \text{volgens (88')}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot 2\,n \cdot z\, L_{n-1}(-z^2,\ \alpha+1) = \text{volgens (103)}$$

$$= 2\,n\, N_{2n-1}(z,\ \alpha)$$

of

$$118)\ \ldots\ \frac{d}{d\,z} N_{2n}(z,\ \alpha) = 2\,n\, N_{2n-1}(z,\ \alpha).$$

Evenzoo is:

$$N_{2n+1}(z,\ \alpha) = (-1)^n \cdot z\, L_n(-z^2,\ \alpha+1) \ \ldots\ (103)$$

$$\frac{d}{d\,z} \cdot z^{2\alpha-1} N_{2n+1}(z,\ \alpha) = \frac{d}{d\,z}(-1)^{n+\alpha} \cdot (-z^2)^{\alpha} L_n(-z^2,\ \alpha+1)$$

$$= (-1)^{n+\alpha} \frac{d}{dz} . \Gamma(n+\alpha+1) \Phi_n(-z^2, \alpha+1) = \text{volgens (83)}$$

$$= (-1)^{n+\alpha} (n+\alpha) \Gamma(n+\alpha) (-2z) \Phi_n(-z^2, \alpha)$$

$$= (-1)^n 2 (n+\alpha) z^{2\alpha-1} L_n(-z^2, \alpha) = 2 (n+\alpha) z^{2\alpha-1} N_{2n}(z, \alpha)$$

119) dus $\frac{d}{dz}(z^{2\alpha-1} N_{2n+1}(z, \alpha)) = -2 (n+\alpha) z^{2\alpha-1} N_{2n}(z, \alpha)$.

Verder is:

$$\frac{d}{dz}\left\{e^{-z^2} N_{2n}(z, \alpha)\right\} = e^{-z^2}\{-2z N_{2n} + 2n N_{2n-1}\} = \text{volgens (99}a\text{)}$$

$$= -2 e^{-z^2} N_{2n+1}(z, \alpha)$$

dus

120a) . . $N_{2n+1}(z, \alpha) = -\frac{1}{2} . e^{+z^2} . \frac{d}{dz}\left\{e^{-z^2} N_{2n}(z, \alpha)\right\}$.

Eveneens

$$\frac{d}{dz}\left\{e^{-z^2} . z^{2\alpha-1} N_{2n+1}(z, \alpha)\right\} = e^{-z^2}\{-2z^{2\alpha} . N_{2n+1} + 2(n+\alpha) z^{2\alpha-1} N_{2n}\}$$

$$= -2 e^{-z^2} . z^{2\alpha-1} N_{2n+2}(z, \alpha) \ldots \text{ (99}b\text{)}$$

dus

120b) $N_{2n+2}(z, \alpha) = -\frac{1}{2} e^{z^2} \frac{1}{z^{2\alpha-1}} . \frac{d}{dz}\left\{e^{-z^2} . z^{2\alpha-1} N_{2n+1}(z, \alpha)\right\}$.

Nu is $N_0 = 1$, dus volgens (120b)

$$N_1 = -\frac{1}{2^1} . e^{z^2} \frac{d}{dz}(e^{-z^2})$$

$$N_2 = \frac{1}{2^2} . e^{z^2} . \frac{1}{z^{2\alpha-1}} \frac{d}{dz}\left(z^{2\alpha-1} . \frac{d}{dz}(e^{-z^2})\right)$$

$$= \frac{1}{2^2} . e^{z^2} . {}_{\alpha}\Delta_z^{(1)} e^{-z^2}$$

etc.

§ 9. De bijbehoorende differentiaalvergelijkingen.

Een der vele manieren om te komen tot de differentiaalvergelijking voor $N_{2n}(z, \alpha)$ en $N_{2n+1}(z, \alpha)$ is de volgende:

$$N_{2n+2} = z N_{2n+1} - (n+\alpha) N_{2n} \ldots . \text{ (99}b\text{)}$$

volgens (120) is:

$$N_{2n+2} = +\frac{1}{2^2} e^{z^2} \frac{1}{z^{2\alpha-1}} \frac{d}{dz} \left\{ z^{2\alpha-1} \frac{d}{dz} e^{-z^2} N_{2n} \right\}$$

$$\text{en } N_{2n+1} = -\frac{1}{2} e^{z^2} \frac{d}{dz} e^{-z^2} N_{2n}.$$

Na uitwerking en substitutie komt er:

121 *a*) . . . $z\{y'' - 2zy' + 2 \cdot 2ny\} + (2\alpha - 1)y' = 0$

een differentiaalvergelijking, waarvan $N_{2n}(z, \alpha)$ een particuliere oplossing is.

Langs denzelfden weg of door de opmerking, dat $\frac{d}{dz} N_{2n} = 2n N_{2n-1}$, vindt men voor de differentiaalvergelijking voor $N_{2n-1}(z, \alpha)$:

121 *b*) $z^2\{y'' - 2xy' + 2(2n - 1)y\} + (2\alpha - 1)(xy' - y) = 0.$

Ook kan men uitgaan van de differentiaalvergelijking voor $L_n(z, \alpha)$:

89) . . . $z L_n''(z, \alpha) + (z + \alpha) L_n'(z, \alpha) - n L_n(z, \alpha) = 0.$

Kiest men tot onafhankelijk variable x, zóó dat $z = -x^2$, dan vindt men direct (121 *a*).

Deze methode verdient vermelding, omdat de studie der differentiaalvergelijking (89) die der vergelijkingen (121*a*) en (121*b*) omvat.

Is toch een tweede particuliere oplossing van (89) bekend, dan voert dezelfde substitutie tot een tweede particuliere oplossing van (121 *a*) en na differentiatie tot een van (121 *b*).

In het volgende bepaal ik mij dus tot de vergelijkingen:

89) . . . . . $z y'' + (z + \alpha) y' - n y = 0.$

Zij ψ_n een tweede particuliere oplossing, dan is:

$$z L_n'' + (z + \alpha) L_n' - n L_n = 0$$

$$z \psi_n'' + (z + \alpha) \psi_n' - n \psi_n = 0.$$

Na eliminatie van L_n en ψ_n:

$$z(\psi_n L_n'' - \psi_n'' L_n) + (z + \alpha)(\psi_n L_n' - \psi_n' L_n) = 0$$

$$z\frac{d}{dz}\left\{\psi_n L_n' - L_n \psi_n'\right\} + (z+\alpha)\left\{\psi_n L_n' - L_n \psi_n'\right\} = 0$$

$$\frac{d}{dz}\log\left(\psi_n L_n' - L_n \psi_n'\right) = -1 - \frac{\alpha}{z},$$

$$\log\left(\psi_n L_n' - L_n \psi_n'\right) = -z - \alpha \log z + C'$$

$$\psi_n L_n' - L_n \psi_n' = C' e^{-z} \cdot z^{-\alpha}.$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\psi_n}{L_n}\right) = C\frac{e^{-z}}{z^\alpha L_n^2}$$

of

122) . . . . . $\psi_n(z, \alpha) = L_n(z, \alpha) \int_z^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z^\alpha \cdot L_n^2(z, \alpha)} dz.$

Het is mogelijk deze functie in een anderen vorm te schrijven. Daartoe stel ik in

$$z y'' + (z+\alpha) y' - n y = 0$$

$$y = u L_n + w$$

dan is:

$$\left\{z u'' + (z+\alpha) u'\right\} L_n + z w'' + (z+\alpha) w' - n w + 2 z u' L_n' = 0.$$

Kiest men u zóó, dat de coëfficient van L_n nul wordt, dus

$$u' = C\frac{e^{-z}}{z^\alpha} \quad \text{en} \quad u = C_1 + C \int_z^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z^\alpha} dz,$$

dan moet:

$$z w'' + (z+\alpha) w' - n w + 2\frac{e^{-z}}{z^{\alpha-1}} L_n' = 0.$$

Na de substitutie $w = e^{-z} \cdot t$, gaat deze differentiaalvergelijking over in:

$$z t'' - (z-\alpha) t' - (n+\alpha) t = -2 z^{1-\alpha} L_n'.$$

Stelt men nu weer:

$t = z^{1-\alpha} y$, dan is

123) . . . $z y'' - (z+\alpha-2) y' - (n+1) y + 2 L_n' = 0.$

Deze differentiaalvergelijking heeft nu $K_n(z, \alpha)$ (de naderingsteller van de kettingbreuk K_1) tot particuliere oplossing, zoodat

124) . . $\psi_n(z, \alpha) = L_n(z, \alpha) \int_z^{\infty} \frac{e^{-z}}{z^\alpha} dz + \frac{e^{-z}}{z^{\alpha-1}} \cdot K_n(z, \alpha).$

In de vergel. (123) heeft men een nieuw aanknoopingspunt voor de studie der tellers $K_n(z, \alpha)$. Tal van eigenschappen, o. a. getalbetrekkingen voor de Γ functie kunnen gevonden worden met behulp van de differentiaalvergelijking, de algemeene formule:

$$125) \ldots K_n(z, \alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \frac{L_n(z, \alpha) - L_n(-x, \alpha)}{z+\alpha} dx$$

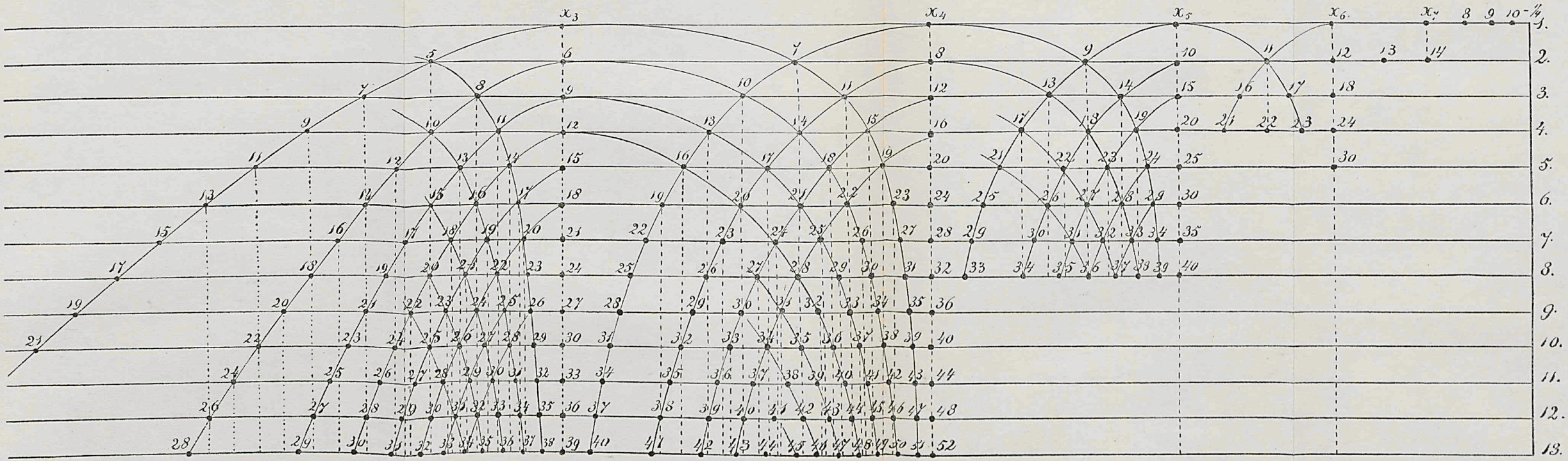
en de recurrente betrekking:

$$126) \; K_{n+1}(z, \alpha) = (z + 2n + \alpha) K_n(z, \alpha) - n(n + \alpha - 1) K_{n-1}(z, \alpha).$$

Het is waarschijnlijk, dat tal van eigenschappen van de polynomen L_n en N_n niet alleen gelden voor deze, maar karakteristiek zijn voor de naderingsnoemers van de kettingbreuken van STIELTJES.

ERRATA.

Blz.	9,	regel	6 v. b.	staat: $x^{\mu+1}$, moet zijn: $x^{\mu-1}$.
„	16,	„	16 v. b.	staat: p^{α_2}, moet zijn: $p_2^{\alpha_2}$.
„	21,	„	7 v. b.	staat: p^{α_0}, moet zijn: $p_0^{\alpha_0}$.
„	43,	„	1 v. o.	staat: $x > \alpha$, moet zijn: $x < \alpha$.
„	80,	„	6 v. b.	staat: $R^{\alpha}(x)$, moet zijn: $R^{\alpha} f(x)$.


x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
8 9 10 11
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Het is van belang de functies $\Phi_n(z, \alpha)$ ook als functies van α te bestudeeren.

(definitie van $\Phi_n(z, \alpha)$: blz. 74, form. (76)).

II.

In de theorie der algebraïsche kettingbreuken, moet de benaderingswet van LAGRANGE [1]) meer op den voorgrond gebracht worden.

III.

In de leer der kettingbreuken neemt men als eerste naderingsnoemer, B_0, steeds $B_0 = 1$. Deze aanname, die op analogie met de regelmatige kettingbreuken berust, zal waarschijnlijk bij de verdere ontwikkeling van de theorie der kettingbreuken van STIELTJES (blz. 1) vervangen moeten worden door $B_0 = f(z)$, terwijl de eerste noemer $b_1 z\, g(z)$ wordt.

($f(z)$ en $g(z)$ zijn functies van z).

IV.

Het kriterium voor algebraïsche getallen van MINKOWSKI is van weinig praktische waarde.

Göttinger Nachrichten. 1899. S. 64—88.

Ges. Abh. Bd. I XIV. S. 293 ff.

---

1) Vergel. b.v.: „PERRON. Die Lehre von den Kettenbrüchen" Teubner, 1913. S. 42.

V.

De ontwikkeling der wiskunde vereischt de vervanging van elk formeel bewijs door een bewijsvoering, die duidelijk laat zien, hoe het theorema uit de gegevens volgt; in dit opzicht verdient b.v. het bewijs van STIELTJES voor de stelling, dat de wortels van de naderingsnoemers van zijne kettingbreuken alle reëel, enkelvoudig en niet positief zijn de voorkeur boven dat van PERRON.

STIELTJES. Ann. de Toulouse. T. VIII. 1894.

PERRON. „Die Lehre von den Kettenbrüchen" Teubner 1913. S. 394—395.

VI.

De ontwikkeling van de taal en de methoden der meerdimensionale meetkunde is van het hoogste belang voor de analyse en de mathematische physica (b.v. statistische mechanica).

VII.

De meetkundige behandeling der logarithme zooals KLEIN deze voorstelt is niet te verkiezen boven de gebruikelijke algebraïsche methode.

F. KLEIN. Elementar Mathematik vom höheren Standpunkte aus. Bd. I S. 319 ff.

Zijne methode is nader uitgewerkt in het „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", 44 J. 1913 door

FRENZEL. Zur Kleinschen Einführung in die Lehre von den Logarithmen. S. 1. en

FUNK-DÖRRIE. Die Kleinsche Einführung in die Lehre von den Logarithmen. S. 463.

VIII.

Het is zeer te betreuren dat in de leerboeken der stereometrie de kegelsneden niet of bijna niet worden behandeld.

IX.

De cosmogonie van LAPLACE verdient de voorkeur boven die van FAYE.

H. FAYE. Sur l'Origine du Monde. 4e edit. Paris G. V. 1907. Chap. XIII et XIV.

X.

De gronden, die ARRHENIUS in zijne cosmogonie aanvoert voor het betoog, dat de ontwikkeling van de sterrenwereld een eeuwige herhaling zou zijn, zijn onbevredigend.

S. ARRHENIUS. Das Werden der Welten. 1907.

XI.

De wijze, waarop PLANCK uitgaande van de eigenschappen der ideale gassen, de tweede hoofdwet der thermodynamica afleidt, is te verkiezen boven de methode van BRYAN.

MAX PLANCK: Vorlesungen über Thermodynamik. 3 Aufl. 1911.

G. H. BRYAN: Thermodynamics. Teubner 1907.

XII.

Bij de behandeling der eigenschappen der geconcentreerde oplossingen dient men uit te gaan van de theorie der ideale geconcentreerde oplossingen [1]), berustende op de thermodynamische potentiaal en niet van de theorie van VAN 'T HOFF.

---

1) Voor de theorie der „ideale" geconcentreerde oplossingen vergelijke men b.v. K. IKEDA. The Journal of the College of Science. Imperial University. Japan. (Tokio) 25. Art. 10 (1908).

XIII.

Het begrip „stof" is even onbegrijpelijk als het begrip „onstoffelijk" (in de beteekenis van „geest").

XIV.

Het wordt tijd, dat bij het onderwijs in de natuurkunde op de H.B.S. meer rekening gehouden wordt met de vorderingen der wetenschap.