



Bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen

<https://hdl.handle.net/1874/260413>

1917

A^o 192, 1917

Bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen.



J. DE VRIES.

A. qu.
192

Bilineaire congruenties van kubische
ruimtekrommen.

Bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. P. H. DAMSTÉ

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Woensdag 2 Mei 1917 des namiddags te 4 uur

DOOR

JAN DE VRIES

geboren te KAMPEN

Electr. drukkerij «de Industrie» J. VAN DRUTEN — Utrecht



Eltingse congrege van Katholieke kerk

PROEFSCHRIFT

ter verkrijging van den

Doctor in de Wijs- en Natuurkunde

van de Rijks-Universiteit te Utrecht

door

DE N. H. DAMSTÉ

geboren te Rotterdam den 10. April 1874

Verhandeld voor de Faculteit der Wijs- en Natuurkunde

aan de Rijks-Universiteit te Utrecht

Faculteit der Wijs- en Natuurkunde

te Utrecht

op Woensdag 3 Mei 1917 des namiddags te 4 uur

JAN DE VRIES

gedrukt te Utrecht

Utrecht, gedrukt bij de uitgeverij van de Universiteit



AAN MIJNE OUDERS.

Aan het einde mijner academische opleiding betuig ik U, Hoogleeraren van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde mijn dank voor het onderwijs, dat ik van U mocht ontvangen.

In het bijzonder geldt die dank U, mijn Vader en Promotor, vooral voor de belangstelling, waarmede gij het bewerken van dit proefschrift hebt gevolgd en voor de hulp, die gij mij steeds bij het overwinnen van moeilijkheden hebt verleend.

Ook U, Hooggeleerde KAPTEYN, zal ik steeds erkentelijk blijven voor het vele, dat Uw colleges tot mijn vorming hebben bijgedragen.

INHOUD.

	Bladz.
Inleiding	1
Litteratuuroverzicht	4
HOOFDSTUK I.	
De congruentie van REYE	6
HOOFDSTUK II.	
De eerste algemeene congruentie van VENERONI	22
HOOFDSTUK III.	
De tweede algemeene congruentie van VENERONI	34
HOOFDSTUK IV.	
De derde algemeene congruentie van VENERONI	46
HOOFDSTUK V.	
Bepaling van' het aantal mogelijke soorten van bilineaire congruenties.	50
HOOFDSTUK VI.	
Bijzondere gevallen van de eerste algemeene con- gruentie	62
HOOFDSTUK VII.	
De congruentie van STUYVAERT.	77
HOOFDSTUK VIII.	
De congruentie van STURM	86
HOOFDSTUK IX.	
De congruentie van GODEAUX	94

INLEIDING.

Zooals bekend is, verstaat men onder *congruentie van kubische ruimtekrommen* een tweevoudig oneindig stelsel van ruimtekrommen van den derden graad. De *orde* der congruentie is het getal dat aangeeft, hoeveel exemplaren van het stelsel door een gegeven punt gaan, de *klasse* het getal dat aangeeft, hoeveel exemplaren een gegeven rechte tot koorde hebben.

Wanneer de orde en de klasse beide *één* zijn, dus een willekeurig punt één kromme ρ^3 draagt en een willekeurige rechte koorde van één kromme ρ^3 is, wordt de congruentie *bilineaair* genoemd. Wij zullen een bilineaire congruentie van kubische ruimtekrommen door $[\rho^3]$ voorstellen.

Een punt dat meer dan één exemplaar en dus ∞^1 exemplaren der $[\rho^3]$ draagt, wordt *singulier punt* genoemd. Wanneer de ∞^1 krommen ρ^3 , welke door een singulier punt S gaan, een oppervlak van den graad k vormen, heet S een *singulier punt van de k^{de} orde*.

Onder *hoofdpunten* verstaat men punten, die aan *alle* exemplaren der $[\rho^3]$ gemeen zijn. Een hoofdpunt draagt dus ∞^2 krommen ρ^3 .

Wanneer een rechte koorde is van meer dan één exemplaar der $[\rho^3]$ moet zij koorde zijn van ∞^1 krommen ρ^3 ; zij wordt dan *singuliere koorde* genoemd. Wanneer de quadratische involutie, die door de steunpunten der krommen ρ^3 op een singuliere koorde gevormd wordt, parabolisch is (d. w. z. als alle paren der involutie een gemeenschappelijk punt hebben), zullen wij de koorde *parabolisch singulier* noemen.

De rechten, die door *alle* exemplaren der $[\rho^3]$ tweemaal gesneden worden, kunnen tot drie groepen gebracht worden.

1°. De rechte verbindt twee hoofdpunten; zij wordt dan door alle krommen ρ^3 in *twee vaste punten* gesneden. Zulke rechten noemen wij *hoofdkoorden*.

2°. De rechte gaat door één hoofdpunt; dit vaste punt draagt ∞^2 krommen ρ^3 , elk ander punt der rechte is gemeenschappelijk punt van ∞^1 krommen ρ^3 . Een dergelijke rechte zullen wij *parabolische hoofdkoorde* noemen.

3°. De rechte bevat geen hoofdpunt; elk harer punten draagt ∞^1 exemplaren der $[\rho^3]$. In dit derde geval zullen wij de rechte *gemeenschappelijke koorde* noemen.

De meetkundige plaatsen van singuliere punten duidt men aan als *singuliere lijnen* (singuliere krommen en singuliere rechten).

Een *singuliere lijn van de k^{de} orde* is de meetkundige plaats van singuliere punten van de k^{de} orde.

De eerste publicatie over bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen verscheen in 1868 van de hand van REYE. In „Zeitschrift für Mathematik und Physik” (deel 13) plaatste deze een korte mededeeling: „*Ueber Curvenbündel dritter Ordnung*”, waarin eenige eigenschappen werden besproken van het stelsel van kubische ruimtekrommen, welke door vijf vaste punten gaan. Dit stelsel, thans bekend onder den naam van de congruentie van REYE, werd later eveneens langs meetkundigen weg behandeld door R. STURM en ZEEMAN, terwijl KOENIGS en daarna STUYVAERT deze congruentie met de methoden der analytische meetkunde behandelden.

In 1886 vestigde STURM in zijn verhandeling: „*Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen zweiten Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformieren*” (Mathematische Annalen, 26) de aandacht op een congruentie van kubische ruimtekrommen, welke een gemeenschappelijk osculatieviervlak bezitten.

Deze congruentie werd verder door HEINRICHS, DOEHLE-MANN en STUYVAERT behandeld.

Van groot belang waren de onderzoeken van VENERONI. In een uitvoerige verhandeling: „*Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe*” (Rend. Palermo, 16, 1902) toonde hij aan dat de bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen tot twee groepen kunnen gebracht worden. De eerste groep omvat de congruenties, die voortgebracht kunnen worden door twee bundels van quadratische regelvlakken, welker bases een rechte gemeen hebben. De tweede groep bestaat uit de congruenties, welker exemplaren basis-krommen zijn van de bundels, die behooren tot een net van kubische oppervlakken, waarvan de basis gevormd wordt door een vast punt en een ruimtekromme van den zesden graad en het geslacht drie.

In 1903 vond FERRETTI (Rend. Palermo, 17) dat de kubische involuties in het vlak tot drie groepen konden worden gebracht. Twee dezer groepen kwamen overeen met de involuties, welke door de algemeene congruenties van VENERONI worden ingesneden. Daarna wees VENERONI in 1904 (Rend. Inst. Lomb. 37) nog op een derde groep van bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen, welker doorsnede met een vlak overeen kwam met de involuties van de derde groep van FERRETTI.

Onder de verdere onderzoeken over bilineaire congruenties moet vooreerst het werk van STUYVAERT genoemd worden. Deze behandelde in zijn *Dissertation inaugurale* (Gand, 1902) de [p^3], welke twee hoofdpunten en drie gemeenschappelijke koorden bezit en de congruenties van REYE en STURM tot bijzondere gevallen heeft. Verder gaf hij in 1907 een uitvoerige analytische behandeling van de tweede algemeene congruentie van VENERONI (Bull. de l'Académie royale de Belgique, 1907).

GODEAUX publiceerde in 1908 een mededeeling over een congruentie met één hoofdpunt en vier gemeenschappelijke koorden (Bull. de l'Académie royale de Belgique, 1908). In tegenstelling met de verhandelingen van STUYVAERT maakte GODEAUX slechts gebruik van de meetkundige methode.

Tenslotte noemen wij — als vertegenwoordiger van Nederland — Prof. JAN DE VRIES, die o. a. een kubische transformatie aangaf, waardoor de congruentie van REYE op een stralenschoof wordt afgebeeld (Versl. K. A. W. 17) en drie bijzondere gevallen van de eerste algemeene congruentie van VENERONI langs meetkundigen weg onderzocht (Versl. K. A. W. 23).

LITTERATUURVERZICHT.

- K. DOEHLEMANN: Zur Theorie des Nullsystems. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 3).
- G. FERRETTI: Sulla generazione delle involuzioni piane di classe zero ed uno. (Rend. Palermo, 17).
- L. GODEAUX: Sur une congruence linéo-linéaire de cubiques gauches. (Bull. de l'Académie royale de Belgique, classe des sciences, N^o. 5, 1907).
- : Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches. (Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris, 1909).
- E. HEINRICHS: Ueber den Bündel derjenigen kubischen Raumkurven welche ein gegebenes Tetraeder zum gemeinsamen Schmiegungstetraeder haben. Dissertatie, Münster, 1887.
- G. HUMBERT: Sur un complexe remarquable de coniques. (Journal de l'Ecole polytechnique, 64).
- G. KOENIGS: Sur les cubiques gauches passant par cinq points donnés. (Nouvelles Annales de Mathématiques, III, 2).
- TH. REYE: Ueber Curvenbündel dritter Ordnung. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 13).
- H. SCHRÖTER: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung.
- R. STURM: Erzeugnisse, Elementarsysteme und Charakteristiken von cubischen Raumcurven. (Journal von Crelle, 79).

- R. STURM: Weitere Untersuchungen über cubische Raumcurven. (Journal von Crelle, 80).
- _____ : Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen zweiten Grades oder cubische Raumcurven in sich selbst transformieren (Mathematische Annalen, 26).
- _____ : Ueber höhere räumliche Nullsysteme. (Mathematische Annalen, 28).
- M. STUYVAERT: Notes sur les cubiques gauches. (Bull. de l'Académie royale de Belgique, 1900).
- _____ : Etude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre. (Dissertation inaugurale, Gand, 1902).
- _____ : Une congruence linéaire de cubiques gauches. (Bull. de l'Académie royale de Belgique, classe des sciences, N^o. 5, 1907).
- _____ : Cinq études de géométrie analytique. (Mémoires de Liège, III, 7).
- _____ : Congruences de triangles, de cubiques gauches et d'autres variétés annulant des matrices. (Journal von Crelle, 132).
- E. VENERONI: Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe. (Rend. Palermo, 16).
- _____ : Sui vari tipi di congruenze bilineari di cubiche gobbe. (Rend. Inst. Lomb. 37).
- JAN DE VRIES: Congruenties van kubische ruimtekrommen in verband met een kubische transformatie. (Versl. K. A. W. 17).
- _____ : Kubische involuties in het vlak. (Versl. K. A. W. 22).
- _____ : Eenige bijzondere bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen. (Versl. K. A. W. 23).
- P. ZEEMAN: De kromme lijnen van de derde orde in de ruimte. (Dissertatie, Leiden, 1878).
-

HOOFDSTUK I.

De congruentie van REYE.

§ 1. De congruentie van REYE bestaat uit alle kubische ruimtekrommen ρ^3 , die door vijf gegeven punten H_k gaan. Deze punten, *hoofdpunten* genoemd, moeten zoo gekozen worden, dat er geen vier in één vlak liggen. De tien rechten $d_{kl} \equiv H_k H_l$ worden door alle ρ^3 in twee vaste punten gesneden en zijn derhalve *hoofdkoorden*.

Door ieder zesde punt P van de ruimte gaat in het algemeen één kromme van de congruentie, daar een ρ^3 door zes punten bepaald is. De congruentie is dus van de *eerste orde*.

Ligt P bijv. in het vlak $\phi_{345} \equiv H_3 H_4 H_5$, dan ontaardt de kromme in de rechte d_{12} en een kegelsnede δ^2 in ϕ_{345} , gaande door P , H_3 , H_4 , H_5 en den doorgang B_{12} van d_{12} met ϕ_{345} . Er zijn dus *tien stelsels* van ontaarde krommen, bestaande uit een *rechte* en een *kegelsnede*.

Een bijzonder geval hiervan vormen weer de krommen, die in drie rechten uiteen vallen. De kegelsnede δ^2 , die bijv. $H_1 H_2$ tot een ontaarde ρ^3 aanvult, kan n.l. zelf ontaarden in twee rechten, en wel op drie manieren: in d_{34} en $H_5 B_{12}$, in d_{35} en $H_4 B_{12}$, en in d_{45} en $H_3 B_{12}$. Schijnbaar vindt men dertig dergelijke figuren, daar toch elke der tien rechten d_{kl} met drie lijnenparen in ϕ_{mnp} gecombineerd kan worden. Men heeft dan echter elke ontaarding tweemaal genomen.

De ontaarde krommen d_{12} , d_{45} , $H_3 B_{12}$ en d_{45} , d_{12} , $H_3 B_{45}$ bijv. zijn identiek, want d_{12} snijdt ϕ_{345} in een punt van $H_3 B_{45}$; B_{12} ligt dus op $H_3 B_{45}$, m. a. w. $H_3 B_{12} \equiv H_3 B_{45}$. De genoemde ontaarde figuren vallen dus geheel samen.

Er zijn derhalve slechts *vijftien figuren*, die uit drie rechten bestaan.

Ligt P op d_{kl} , dan gaan door $P \infty^1$ krommen der $[\rho^3]$, die uit d_{kl} en de kegelsneden van een in Φ_{mnp} gelegen bundel bestaan.

§ 2. Wij onderzoeken thans het oppervlak Λ , gevormd door de krommen ρ^3 , die een gegeven rechte l snijden. De doorsnede van Λ met het vlak Φ_{123} bevat de volgende deelen van ontaarde ρ^3 : een kegelsnede δ^2 door H_1, H_2, H_3 , den doorgang B_{45} van d_{45} en den doorgang D van l , en de rechten d_{12}, d_{13} en d_{23} , die elk een ρ^3 vormen met een kegelsnede, welke door l gesneden wordt; deze kegelsneden liggen achtereenvolgens in Φ_{345}, Φ_{245} en Φ_{145} .

De doorsnede is dus van den *vijfden graad*.

Daar een in Φ_{123} gelegen rechte, die door H_1 gaat, het oppervlak Λ^5 nog in twee punten P, P' buiten H_1 snijdt (één dier punten ligt op de kegelsnede δ^2 , het andere op de rechte d_{23}), en ditzelfde geldt voor de rechten door H_1 , gelegen in elk der vlakken $\Phi_{124}, \Phi_{125}, \Phi_{134}, \Phi_{135}, \Phi_{145}$, is H_1 drievoudig punt van Λ^5 .

Het oppervlak Λ^5 heeft dus *vijf drievoudige punten* H_k .

Er is slechts één kromme ρ^3 , die l tot koorde heeft. Immers door drie punten van l en de vijf punten H_k gaat een bundel van quadratische regelvlakken, waarvan de basis bestaat uit l en een ρ^3 , en deze moet l tot koorde hebben.

Hieruit volgt, dat de congruentie ook van de *eerste klasse* en dus *bilineair* is.

Verder merken wij op, dat de kromme ρ^3 l in twee punten snijdt en dus *dubbelkromme* van Λ^5 is.

Het oppervlak Λ^5 bevat de rechte l , de tien rechten d_{kl} en tien kegelsneden δ_{klm}^2 .

§ 3. Een vlak ϕ door l snijdt Λ^5 verder nog in een kromme van den vierden graad, ϕ^4 . Deze gaat door de snijpunten L_1, L_2 van l met ρ^3 en heeft een dubbel-

punt in het derde snijpunt L_3 van ϕ met ρ_1^3 (immers ρ_1^3 is dubbelkromme van Λ^5). Een ρ^3 , die l in P_1 snijdt, moet ϕ nog in twee andere punten P_2 en P_3 van ϕ^4 ontmoeten. Behalve L_1 en L_2 hebben l en ϕ^4 nog twee punten C_1 en C_2 gemeen. In elk dezer beide punten zijn een punt P_1 en een punt P_2 samengevallen; in C_1 en in C_2 wordt ϕ dus door een ρ^3 aangeraakt.

Hieruit volgt, dat de meetkundige plaats van de punten, waarin ϕ door krommen der $[\rho^3]$ aangeraakt wordt, een kegelsnede ϕ^2 is.

Deze kegelsnede is de coïncidentiekromme van de kubische involutie I^3 , welke de congruentie in ϕ bepaalt ¹⁾.

Twee krommen ρ^3 , door de punten H_k gaande, liggen steeds op een quadratisch regelvlak; want een quadratisch regelvlak, gelegd door de vijf punten H_k , twee punten van ρ_1^3 en twee punten van ρ_2^3 bevat zeven punten van elk der krommen, m. a. w. die krommen liggen geheel op dat oppervlak. In een vlakke doorsnede van het quadratisch oppervlak liggen drie punten van ρ_1^3 en drie punten van ρ_2^3 ; d. w. z. elke twee tripels van de in ϕ gelegen I^3 kunnen door een kegelsnede verbonden worden.

Zij $X_1 X_2 X_3$ zulk een tripel. Aan X_1 voegen wij de rechte $x_1 \equiv X_2 X_3$ toe, enz. Daar een rechte in ϕ in het algemeen koorde is van één ρ^3 , dus één paar (Y_2, Y_3) van een tripel bevat, is zij ook aan één bepaald punt toegevoegd, n. l. aan het derde punt Y_1 van dat tripel. Zij nu Y_1 een punt van x_1 ; dan bestaat de kegelsnede door $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ uit x_1 en een tweede rechte, welke X_1, Y_2 , en Y_3 moet bevatten en dus y_1 is.

Beweegt Y_1 zich over x_1 , dan draait y_1 om X_1 . X_k en x_k vormen dus een poolstelsel. Beweegt X_1 zich

¹⁾ Een geheel op zichzelf staande behandeling dezer «kubische involutie van den eersten rang in het platte vlak» door Dr. W. VAN DER WOUDE verscheen in Versl. K. A. W. 18.

nu over y_1 , zoodat x_1 om Y_1 wentelt, dan is het snijpunt X' van x_1 en y_1 projectief toegevoegd aan X_1 . Het zal dus tweemaal gebeuren, dat X_1 met X' samenvalt en dus X_1 op x_1 terechtkomt.

Het poolstelsel (x_k, X_k) heeft dus als incidentiekromme een kegelsnede, n. l. de meetkundige plaats der punten X_1 , die op hun poollijn x_1 liggen.

Laat Z_1 een der snijpunten van y_1 met de incidentiekromme zijn, dan is $z_1 \equiv Y_1 Z_1$. De punten Z_2 en Z_3 liggen op z_1 ; de drie snijpunten van het vlak ϕ met een ρ^3 kunnen niet collineair zijn, dus moet Z_2 met Z_1 samenvallen.

De raaklijn z_3 in Z_1 aan de door dat punt bepaalde ρ^3 kan niet langs z_1 vallen, dus valt z_2 met z_1 samen.

De *incidentiekegelsnede* der punten $Z_1 \equiv Z_2$ is identiek met de reeds gevonden *coïncidentiekromme* ϕ^2 .

§ 4. Beweegt zich nu een punt W_1 over de rechte z_1 die haar pool Z_1 bevat, dan moet de poollijn w_1 om Z_1 draaien. Tusschen W_1 en het snijpunt W' van w_1 en z_1 bestaat een projectiviteit; maar W_1 komt steeds overeen met Z_1 , dus kan W_1 slechts in Z_1 met W' samenvallen en is z_1 raaklijn in Z_1 aan ϕ^2 .

Nemen wij nu een tweede poollijn t_1 met pool T_1 aan en zij W_1 het snijpunt van t_1 en z_1 . De aan W_1 toegevoegde rechte w_1 moet door T_1 en Z_1 gaan, is dus de raakkoorde van W_1 met betrekking tot ϕ^2 .

Het *poolstelsel* (X_k, x_k) bestaat derhalve uit polen en poollijnen ten opzichte van ϕ^2 .

Elk tripel der I^3 bepaalt een pooldriehoek van ϕ^2 , maar omgekeerd bepaalt niet iedere pooldriehoek van ϕ^2 een tripel; immers er zijn ∞^2 tripels en ∞^3 pooldriehoeken.

De rechte $d_{12} \equiv H_1 H_2$ vormt figuren ρ^3 met ∞^1 kegelsneden van het vlak $\phi_{345} \equiv H_3 H_4 H_5$. De doorgang D_{12} van d_{12} met ϕ is dus in de I^3 verbonden met een involutie van puntenparen op den doorgang d_{345} van ϕ_{345} met ϕ . D_{12} is de pool van d_{345} ten opzichte van ϕ^2 .

De *tien* rechten d_{mnp} en de *tien* punten D_{kl} vormen een configuratie $(10_3, 10_3)$ van DES ARGUES.

Wij vonden reeds, dat wanneer een punt P_1 de rechte l in ϕ doorloopt, de rechte $p_1 \equiv P_2 P_3$ om de pool L van l ten opzichte van ϕ^2 wentelt. Komt nu P_1 in een der punten L_1 of L_2 van het op l gelegen paar der I^3 terecht, dus in een der steunpunten van ρ^3 , en is L_3 het derde punt van het tripel, dan moeten $L_1 L_3$ en $L_2 L_3$ door de pool L gaan; d. w. z. L_3 is identiek met L en L is dus het *dubbelpunt* van de kromme ϕ^4 .

Elke rechte door L snijdt dus ϕ^4 , behalve in dit dubbelpunt, in een paar van de I^3 . LL_1 en LL_2 zijn de raaklijnen in L aan ϕ^4 .

Men kan uit L zes raaklijnen naar ϕ^4 trekken; *de raaklijnen der krommen ρ^3 vormen dus een stralencomplex van den zesden graad.*

De in ϕ gelegen raaklijnen omhullen een kromme van de zesde klasse, τ_6 . Deze heeft *tien dubbelraaklijnen* en is dus van het *geslacht nul*. In ϕ_{123} liggen toch twee kegelsneden door H_1, H_2, H_3 en B_{45} , die d_{123} raken en elk met d_{45} een ρ^3 vormen. Men moet dus d_{123} tweemaal als raaklijn van een ρ^3 in rekening brengen. Elk der tien rechten d_{klm} is dus dubbelraaklijn van τ_6 .

§ 5. Beschouwen wij nu nog eens een tripel, waarvan twee punten in $T_{1,2}$ samenvallen.

De meetkundige plaats van $T_{1,2}$ is de coïncidentie-kegelsnede ϕ^2 ; de meetkundige plaats van T_3 noemen wij de *complementaire kromme*. Deze is een kromme van den zesden graad, ϕ^6 ; want T_3 is de pool van t_3 ten opzichte van ϕ^2 , dus ontstaat de meetkundige plaats van T_3 door polarisatie uit de meetkundige plaats τ_6 van t_3 .

De complementaire kromme ϕ^6 heeft *tien dubbelpunten* en is van het *geslacht nul*. De dubbelpunten liggen in de punten D_{kl} , want D_{45} bijv. vormt twee tripels met de raakpunten van elk der beide aan d_{123} rakende kegelsneden, welke in ϕ gelegen zijn.

De krommen ϕ^6 en ϕ^2 kunnen elkaar slechts raken, niet snijden. Want gesteld dat een ρ^3 , die ϕ in een snijpunt S van ϕ^6 en ϕ^2 raakt, het vlak in een ander punt S' van ϕ^2 kon snijden, dan zouden door S' twee ρ^3 gaan, één die daar ϕ raakt en één die daar ϕ snijdt, en dit is onmogelijk.

De krommen ϕ^6 en ϕ^2 raken elkaar dus in zes punten. In zulk een punt heeft een ρ^3 drie opvolgende punten met ϕ gemeen.

Er zijn derhalve zes krommen ρ^3 , die het vlak ϕ osculeeren.

De krommen ρ^3 , welke ϕ aanraken, vormen een oppervlak van den tienden graad, Φ^{10} . Immers de doorsnede van dat oppervlak met ϕ bestaat uit ϕ^6 en uit ϕ^2 , welke laatste als aanrakingskromme tweemaal in rekening gebracht moet worden; tezamen dus een doorsnede van den tienden graad.

De graad van Φ^{10} kan ook aldus gevonden worden: het oppervlak Λ^5 , behoorende bij een rechte m , die niet in ϕ is gelegen, snijdt ϕ^2 in tien punten; er zijn dus tien ρ^3 , die ϕ raken en m snijden, m. a. w. de meetkundige plaats der aan ϕ rakende ρ^3 is een oppervlak van den tienden graad.

De doorsnede van Φ^{10} met ϕ_{123} bestaat vooreerst uit de beide in ϕ_{123} gelegen kegelsneden, die ϕ aanraken; vervolgens uit de rechte d_{12} dubbel geteld, want deze rechte vormt met twee aan ϕ rakende en in ϕ_{345} gelegen kegelsneden een ρ^3 ; evenzoo uit de tweemaal te tellen rechten d_{13} en d_{23} , tezamen een doorsnede van den tienden graad.

Het oppervlak Φ^{10} bevat dus tien dubbelrechten d_{kl} en twintig kegelsneden.

Een rechte van ϕ_{123} door H_1 snijdt Φ^{10} buiten H_1 viermaal; hetzelfde geldt voor een rechte door H_1 in een der vlakken ϕ_{124} enz., dus is H_1 een zesvoudig punt van Φ^{10} en heeft dit oppervlak vijf zesvoudige punten H_k .

Een ander vlak ψ snijdt Φ^{10} in een kromme ψ^{10} , die met de coïncidentiekromme ψ^2 twintig punten gemeen

heeft. In elk dier punten wordt ψ aangeraakt door een ρ^3 , welke tevens ϕ aanraakt.

Er zijn dus twintig krommen ρ^3 , die twee gegeven vlakken ϕ en ψ aanraken.

Wij onderzoeken nog de meetkundige plaats der complementaire krommen ϕ^6 in de vlakken door l .

Door een punt X van l gaat één ρ^3_X ; wanneer nu ϕ om l wentelt, snijden de vlakken van den bundel (ϕ) op ρ^3_X een involutie I^2 in, die twee coïncidenties heeft. Daaruit volgt, dat l door twee raaklijnen van ρ^3_X gesneden wordt, dus dat er twee vlakken van den bundel zijn, waarin X een punt van een kromme ϕ^6 is. Daar X twee ϕ^6 draagt, is l dubbelrechte van de meetkundige plaats (ϕ^6). Elk vlak ϕ bevat dus van de meetkundige plaats één kromme ϕ^6 en de dubbelrechte l , waaruit mag worden afgeleid, dat de complementaire krommen in de vlakken door l een oppervlak van den achtsten graad vormen, dat behalve l nog tien dubbelrechten d_{kl} bezit (want elk punt P van d_{kl} is dubbelpunt van een ϕ^6 , gelegen in het vlak, dat d_{kl} in P snijdt).

Om uit te maken hoe vaak een osculatievlak van een ρ^3 het raakpunt op l heeft, voegen wij in elk vlak ϕ de twee op l gelegen punten C van ϕ^2 toe aan de zes op l gelegen punten C' van ϕ^6 , en beschouwen de verwantschap (C, C').

Een punt C bepaalt één ρ^3 , en haar raaklijn in C bepaalt een vlak ϕ , waarin C een punt van ϕ^2 is. Hieraan worden nu zes punten C' toegevoegd.

Een punt C' draagt twee krommen ϕ^6 , komt dus overeen met 2×2 punten C . De verwantschap (C, C') is dus een $(6, 4)$. In een coïncidentie $C \equiv C'$ moeten ϕ^2 en ϕ^6 elkaar raken, zoodat ϕ daar drie samenvallende punten met een ρ^3 gemeen heeft, dus een osculatievlak is met $C \equiv C'$ tot raakpunt.

Op elke rechte l liggen dus vijf punten, waarvan het osculatievlak door l gaat.

Nu kunnen wij ook den graad bepalen van de meet-

kundige plaats der *punten*, die hun osculatievlak door een punt P zenden.

Immers, zal een punt X der meetkundige plaats op l liggen, dan moet zijn osculatievlak door l gaan, en dit geschiedt vijfmaal. Maar ook P behoort tot de meetkundige plaats, want door P gaat een ρ^3_P , en voor het vlak dat deze in P osculeert, is P het raakpunt. Hieruit volgt, dat de gezochte meetkundige plaats een oppervlak van den zesden graad, Ω^6 , is.

Dit oppervlak bevat de tien rechten d_{kl} , want elk vlak door zulk een rechte is te beschouwen als osculatievlak voor elk harer punten.

De punten H_k zijn *drievoudig* op Ω^6 , want een willekeurige ρ^3 zendt drie osculatievlakken door P , heeft dus met Ω^6 drie veranderlijke punten gemeen. De overige vijftien doorsneden liggen in de punten H_k ; deze zijn dus drievoudig.

Dat het oppervlak der punten, die hun osculatievlak door P zenden, van den zesden graad is, volgt ook hieruit: In het vlak ϕ_{123} kunnen slechts deelen van ontaarde figuren ρ^3 liggen en wel rechte deelen, want als osculatievlak van een rechte l kan ieder vlak door l , dus ook het vlak (P, l) beschouwd worden. De in ϕ_{123} gelegen rechte deelen van ontaarde figuren ρ^3 zijn blijkbaar d_{12} , d_{13} , d_{23} , $H_1 B_{45}$, $H_2 B_{45}$ en $H_3 B_{45}$, welke samen een doorsnede van den zesden graad vormen.

De tien punten B_{kl} zijn *biplanaire punten* van Ω^6 , want B_{45} bijv. draagt als rechten van Ω^6 drie rechten in ϕ_{123} en één rechte buiten dat vlak.

Daar op elke rechte l vijf punten liggen, welker osculatievlak door l gaat, en een vlak door l nog in zes punten door krommen ρ^3 geosculeerd wordt, liggen de raakpunten der osculatievlakken door l op een *ruimtekromme van den elfden graad*, ω^{11} , met l als *vijfvoudige snijlijn*.

§ 6. Door een punt P trekken wij koorden naar de krommen der $[\rho^3]$. Een willekeurige straal door P bevat

twee punten S, S' van één ρ^3 . Op elken straal, die P verbindt met een punt der ρ^3 , waarop P ligt, valt S' met P samen; die straal is dus raaklijn in P aan de meetkundige plaats Π der punten S, S' . Al die raaklijnen vormen den quadratischen kegel, welke ρ^3 uit P projecteert. Hieruit volgt dat P een kegelpunt van Π en Π een oppervlak van den *vierden graad* is.

Ieder punt van de rechte PH_k kan als een punt S opgevat worden; S' valt dan in H_k . De vijf rechten PH_k liggen dus geheel op Π_P^4 ; zij behooren verder tot den raakkegel van P en vormen met ρ^3 de doorsnede van dien kegel met Π_P^4 .

Door een willekeurig punt P gaan dus *vijf parabolisch singuliere koorden*, n. l. de rechten PH_k . De parabolisch singuliere koorden vormen vijf stralenschoven met de vijf hoofdpunten als centra.

Als *singuliere koorde* is elke rechte in een der tien vlakken ϕ_{klm} op te vatten. Een zoodanige rechte is toch gemeenschappelijke koorde van alle kegelsneden van den in ϕ_{klm} gelegen bundel.

Hieruit volgt terstond, dat een willekeurig vlak ϕ tien singuliere koorden bevat, n. l. de doorgangen van de tien vlakken ϕ_{klm} .

Tot de doorsnede van een willekeurige ρ^3 met Π_P^4 behooren, behalve de steunpunten van de koorde, die zij door P zendt, alleen de punten H_k ; daaruit leiden wij af dat, naast P , de vijf punten H_k kegelpunten van Π_P^4 zijn, zoodat dit oppervlak *zes kegelpunten* heeft en dus een oppervlak van WEDDLE is.

Een doorsnede van Π_P^4 met een vlak door P is een kromme ϕ^4 met een dubbelpunt; de klasse der kromme moet dus tien zijn. Hieruit blijkt opnieuw dat door P *zes raaklijnen* van ϕ^4 gaan, zoodat de raaklijnen der krommen ρ^3 een *complex van den zesden graad* vormen.

Daar P raakpunt is van ρ^3 met haar raaklijn in dat punt, bevat een vlak door P zeven raakpunten van krommen ρ^3 met rechten door P . De meetkundige plaats

van de raakpunten der raaklijnen door P is dus een *ruimte-kromme van den zevenden graad*, π^7 .

De congruentie bevat één kromme, die de rechte PH_k in H_k aanraakt; π^7 moet dus door de vijf hoofdpunten gaan. Op PH_k kan geen ander punt van π^7 liggen, dus wordt π^7 in H_k door PH_k aangeraakt.

Projecteert men π^7 uit P, dan levert elke koorde door P een dubbelpunt in de centrale projectie; H_k wordt dus een keerpunt en PH_k is een keerribbe van den kegel, die π^7 uit P projecteert.

Ook de tien punten B_{kl} liggen op π^7 , want legt men een vlak door P en d_{45} , welk vlak ϕ_{123} langs b_{45} snijdt, dan is er een kegelsnede door H_1, H_2, H_3 die b_{45} in B_{45} raakt en met d_{45} een ρ^3 vormt; PB_{45} is te beschouwen als raaklijn dezer ρ^3 . Wij zien dus dat π^7 met ϕ_{123} gemeen heeft de zeven punten $H_1, H_2, H_3, B_{12}, B_{23}, B_{13}$ en B_{45} , met ϕ_{124} de zeven punten $H_1, H_2, H_4, B_{12}, B_{14}, B_{24}$ en B_{35} , enz. Nu zijn H_1, B_{23} en B_{45} collineair op de snijlijn van ϕ_{123} met ϕ_{135} ; daar B_{12} op d_{12} en B_{13} op d_{13} ligt, gaan dus door H_1 drie rechten, die elk twee der zes overige snijpunten van π^7 met ϕ_{123} dragen. Een analoog geval doet zich voor in de vlakken ϕ_{124} , enz. De kromme π^7 wordt dus uit elk der punten H_k geprojecteerd door een kegel van den *derden* graad, uit een willekeurig punt door een kegel van den *zesden* graad. Derhalve heeft π^7 , in H_k , *vijf triconische punten*.¹⁾

Andere triconische punten kan zij niet bezitten. Immers de ribben der kegels, die π^7 uit H_k projecteeren, zijn trisecanten en het regelvlak der trisecanten van een kromme van den zevenden graad is van den graad vijftien, kan dus slechts uiteenvallen in vijf kubische kegels.

De kegel met top H_1 wordt langs $H_1 H_2$ geraakt door

¹⁾ Door Dr. P. H. SCHOUTE is aangetoond, dat een dergelijke kromme kan worden voortgebracht door drie halfperspectief gelegen vlakkenbundels. (Nieuw Archief voor Wiskunde, 10).

het vlak, dat de raaklijnen in H_1 en in B_{12} aan π^7 bevat. Dit raakvlak is geheel bepaald door $H_1 H_2$ en de raaklijn in B_{12} , is dus tevens het vlak dat den kegel met top H_2 langs $H_1 H_2$ raakt. Deze beide kegels moeten elkaar dus langs $H_1 H_2$ raken en hebben tot doorsnede π^7 en de dubbelgetelde rechte $H_1 H_2$.

Wij weten dat in een vlak ϕ door P de raakpunten liggen van zes krommen ρ^3 met rechten door P ; deze raakpunten liggen op de coïncidentiekegelsnede ϕ^2 . Hieruit leiden wij af dat *door elke zes met P in één vlak gelegen punten van π^7 een kegelsnede gelegd kan worden.*

Een verder gevolg is, dat men π^7 kan beschouwen als de basiskromme van een net van kubische oppervlakken, die twee aan twee behalve π^7 een ϕ^2 gemeen hebben, welke kegelsnede π^7 in zes punten snijdt. Deze kegelsnede ϕ^2 wordt in de doorsnede van telkens twee der kubische kegels vervangen door een dubbelrechte.

Het punt P worde de *pool* van π^7 genoemd.

Daar in elk vlak ϕ één kegelsnede ϕ^2 ligt, vormen alle coïncidentiekegelsneden een *lineairen complex*.

§ 7. De kegelsneden ϕ^2 , gelegen in de vlakken door een rechte l , vormen een *kubisch oppervlak* Φ^3 , want door elk punt P van l gaat een ρ^3 , en de raaklijn in P aan ρ^3 bepaalt met l een vlak ϕ , waarin een kegelsnede ϕ^2 ligt, die door P gaat. Een vlak door l en een der vijf punten H_k is drievoudig raakvlak aan Φ^3 , waarin de kegelsnede ϕ^2 bestaat uit twee rechten door H_k , n.l. uit twee rechten van den kubischen kegel, die de bij een punt P behorende kromme π^7 uit H_k projecteert.

Het oppervlak Φ^3 bevat de krommen π^7 welker polen P op l liggen. Anders uitgedrukt: de meetkundige plaats der krommen π^7 , die H_k tot triconische punten en hun pool op l hebben, is een kubisch oppervlak, of ook: *de raakpunten van de raaklijnen van de krommen ρ^3 , die een rechte l snijden, vormen een kubisch oppervlak.*

Tenslotte beschouwen wij de vlakken ϕ door een rechte t , die een ρ^3 in P aanraakt. De kegelsneden ϕ^2 , in die vlakken gelegen, moeten dan alle door P gaan en ϕ^3 wordt een kubisch oppervlak met een kegel-punt P .

Alle kegelsneden ϕ^2 die door een punt P gaan, liggen derhalve in de vlakken van een bundel, omhullen a.h.w. een kegel van de eerste klasse. De complex $\{\phi^2\}$ is dus niet alleen van de eerste orde, maar ook van de eerste klasse, en wordt daarom een *bilinaire complex* genoemd. Hij heeft *vijftien hoofdpunten*, n.l. de vijf punten H_k en de tien punten B_{kl} .

Door elk hoofdpunt gaan ∞^2 kegelsneden. Deze vijftien punten zijn tevens hoofdpunten van den complex $\{\pi^7\}$, gevormd door de ∞^3 krommen π^7 die ieder een der punten van de ruimte tot pool hebben.

§ 8. Elke ρ^3 wordt uit H_1 geprojecteerd door een quadrikegel, die door H_2, H_3, H_4 en H_5 gaat, en uit H_2 door een quadrikegel, gaande door H_1, H_3, H_4 en H_5 . Wanneer wij dus *twee bundels van quadrikegels* beschouwen, één met basisribben $d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{15}$ en één met basisribben $d_{21}, d_{23}, d_{24}, d_{25}$, dan zijn alle ρ^3 van de congruentie van REYE te verkrijgen als partieele doorsneden dezer *twee kegelbundels, die een basisribbe gemeen hebben*.

Wij kunnen de congruentie van REYE nog op een andere wijze doen ontstaan. Denken wij ons een *net van quadrinodale kubische oppervlakken*, die de vier kegel-punten $H_1 \dots H_4$ en nog een vijfde punt H_5 gemeen hebben, dan bevatten alle exemplaren van het net de zes ribben van het viervlak $H_1 H_2 H_3 H_4$.

Door een willekeurig punt P gaat nu een tot het net behorende bundel, waarvan de exemplaren naast de zes genoemde rechten nog een ρ^3 gemeen hebben, die door P en de vijf punten H_k gaat. Het samenstel der basiskrommen van alle tot het net behorende bundels is een stelsel ∞^2 van *kubische ruimtekrommen, die door*

vijf vaste punten H_k gaan; maar die krommen vormen juist de congruentie van REYE.

§ 9. Door een bijzondere *kubische transformatie* kan de congruentie van REYE afgebeeld worden op een stralenschoof¹⁾. Langs dezen weg kunnen verschillende der hier afgeleide eigenschappen op eenvoudige wijze gevonden worden.

Wij beschouwen twee punten X en X' als aan elkaar toegevoegd, wanneer voldaan wordt aan:

$$x_1 x_1' = x_2 x_2' = x_3 x_3' = x_4 x_4'$$

of $\frac{x_1}{x_2' x_3' x_4'} = \frac{x_2}{x_1' x_3' x_4'} = \frac{x_3}{x_1' x_2' x_4'} = \frac{x_4}{x_1' x_2' x_3'}.$

Een rechte $x_k = \lambda a_k + \mu b_k$ wordt door deze transformatie omgezet in een kubische ruimtekromme

$$\rho x_k' = \frac{1}{\lambda a_k + \mu b_k}$$

Het hoekpunt $O_4 (0, 0, 0, 1)$ van het coördinatenviervlak gaat over in $x_2' x_3' x_4' = 0$, $x_1' x_3' x_4' = 0$, $x_1' x_2' x_4' = 0$, d. w. z. in elk punt van het overstaande coördinatenvlak $O_1 O_2 O_3 (x_4' = 0)$.

Ligt X op $O_1 O_2 (x_3 = 0, x_4 = 0)$ dan ligt X' ($x_1' x_2' x_4' = 0$, $x_1' x_2' x_3' = 0$ of $x_1' = 0$, $x_2' = 0$) op $O_3 O_4$.

Wanneer dus een rechte een ribbe van het coördinatenviervlak snijdt, moet de beeldkromme de overstaande ribbe snijden; heeft een rechte een punt (buiten de ribben) met een coördinatenvlak gemeen, dan gaat de getransformeerde figuur door het overstaande hoekpunt.

De transformatie zet een plat vlak $\sum_4 a_k x_k = 0$ om in $\sum_4 \frac{a_k}{x_k} = 0$ of $\sum_4 a_1 x_2' x_3' x_4' = 0$, d. i. in een kubisch oppervlak, dat de zes ribben van het coördinatenviervlak bevat en de hoekpunten $O_1 \dots O_4$ tot kegelpunten heeft.

¹⁾ DR. JAN DE VRIES: *Congruenties van kubische ruimtekrommen in verband met een kubische transformatie.* (Versl. K. A. W. 17, blz. 1).

§ 10. De *congruentie* [ρ^3] die door vijf punten O_k gaat wordt getransformeerd in een *stralenschoof*, welker top O_5' aan O_5 is toegevoegd. Met de koorde b' door O_5' naar een willekeurig door $O_1 \dots O_4$ gelegde σ'^3 komt overeen een β^3 door de vijf punten O_k , die de rechte s (beeld van σ'^3) tot koorde heeft. De krommen ρ^3 , die twee rechten l en m snijden, gaan door de transformatie over in de rechten door O_5' , die op de getransformeerde krommen λ'^3 en μ'^3 rusten.

De kubische kegels, die λ'^3 en μ'^3 uit O_5' projecteerden, hebben behalve $O_5' O_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) nog vijf ribben gemeen. Door O_5' gaan dus vijf rechten, die λ'^3 en μ'^3 elk in één punt snijden. Of: er zijn vijf kubische ruimtekrommen, die door vijf gegeven punten gaan en op twee gegeven rechten rusten.

Hieruit volgt dat de krommen ρ^3 , die door vijf gegeven punten gaan en op één rechte l rusten, een oppervlak van den *vijfden graad*, Λ^5 , vormen.

Dit oppervlak heeft tot beeld den kubischen kegel, die λ'^3 uit O_5' projecteert.

De koorde b' van λ'^3 , die door O_5' gaat, is dubbel-ribbe van dezen kegel.

Hieruit volgt: de kromme β^3 , die l tot koorde heeft, is *dubbelkromme* van Λ^5 . (§ 2).

Een rechte m door O_1 heeft tot beeld een rechte m' , eveneens door O_1 gaande. Deze beeldrechte heeft met den genoemden projecteerenden kegel buiten O_1 nog twee punten gemeen, waaruit terstond volgt dat O_1 *drievoudig punt* van Λ^5 is en dat dit oppervlak vijf drievoudige punten O_k bezit (§ 2).

De doorsnede van Λ^5 met het vlak $O_1 O_2 O_3$ bestaat uit de rechten $O_1 O_2$, $O_1 O_3$, $O_2 O_3$ benevens een kegelsnede, die door O_1 , O_2 , O_3 gaat en $O_4 O_5$ snijdt.

Deze kegelsnede vormt met $O_4 O_5$ een ontaard exemplaar der [ρ^3].

Wij zien dat op Λ^5 tien kegelsneden liggen en elf rechten, n.l. de tien rechten $O_k O_1$ en de rechte l . (§ 2).

§ 11. De vraag, hoeveel krommen der $[\rho^3]$ een gegeven vlak ϕ aanraken, wordt omgezet in de vraag, hoeveel rechten r' door O_5' een kubisch oppervlak Φ'^3 met kegelpunten O_k ($k = 1, 2, 3, 4$) aanraken. Het pooloppervlak van O_5' gaat door de vier kegelpunten en heeft tot beeld een quadratisch oppervlak, dat eveneens door die punten gaat. De doorsnede van dit beeldoppervlak met het vlak ϕ is nu de getransformeerde figuur van de meetkundige plaats der punten, waar Φ'^3 door rechten r' wordt aangeraakt.

Deze doorsnede, een *kegelsnede*, bevat dus de punten, waar ϕ door krommen ρ^3 wordt aangeraakt (§ 3).

Het aantal hoofdraaklijnen van Φ'^3 , die door O_5' gaan, bedraagt $1 \times 2 \times 3 = 6$, aangezien de raakpunten der hoofdraaklijnen de doorsnede vormen van Φ'^3 met het eerste en het tweede pooloppervlak van O_5' . Door transformatie volgt hieruit, dat *een gegeven vlak ϕ door zes krommen ρ^3 wordt geosculeerd.* (§ 5).

De krommen ρ^3 , die de vlakken door P osculeeren, gaan over in de hoofdraaklijnen der quadrinodale kubische oppervlakken Φ'^3 , waarin die vlakken worden omgezet, welke hoofdraaklijnen door het beeld P' van P moeten gaan.

De raakpunten dier hoofdraaklijnen liggen op het eerste en het tweede pooloppervlak van P' ten opzichte van elk der betrokken kubische oppervlakken Φ'^3 . De meetkundige plaats dier raakpunten is een oppervlak Ω'^6 met drievoudige punten O_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Dit oppervlak wordt door een ρ^3 in $3 \times 6 - 3 \times 4 = 6$ punten gesneden. Dus is de meetkundige plaats van de raakpunten der osculatievlakken door P een oppervlak van den zesden graad, Ω^6 (§ 5).

De raaklijnen uit O_5' aan Φ'^3 vormen een kegel van den zesden graad, want zij vormen de doorsnijding van Φ'^3 met het eerste pooloppervlak van O_5' .

Deze kegel K'^6 heeft vier dubbelribben $O_5' O_k$. Met een willekeurige, door de vier punten O_k gelegde ρ^3 heeft K'^6 , buiten O_k , nog tien punten gemeen.

Hieruit volgt dat de krommen ρ^3 die het vlak ϕ aanraken een oppervlak van den *tienden graad*, Φ^{10} , vormen; want deze meetkundige plaats heeft met een rechte s tien punten gemeen.

Een willekeurige rechte door O_1 snijdt K'^6 nog in vier punten. Haar beeld is een andere rechte door O_1 , waarop buiten O_1 vier punten van Φ^{10} liggen.

Elk der vijf punten O_k is dus *zesvoudig punt* van Φ^{10} . (§ 5).

De doorsnede van Φ^{10} met $O_1 O_2 O_3$ bestaat uit de dubbelrechten $O_1 O_2$, $O_1 O_3$, $O_2 O_3$ en een kromme van den vierden graad met vier dubbelpunten, n.l. O_1 , O_2 , O_3 en de doorgang van de dubbelrechte $O_4 O_5$. Deze vierdegraadskromme ontgaat dus in twee kegelsneden, welke met $O_4 O_5$ ontgaat exemplaren der $[\rho^3]$ vormen, die ϕ aanraken. Het blijkt dus dat Φ^{10} *tien dubbelrechten en twintig kegelsneden* bevat. (§ 5).

De omhullingskegels $K_1'^6$ en $K_2'^6$ uit O_5' naar twee kubische oppervlakken $\Phi_1'^3$ en $\Phi_2'^3$ met vier gemeenschappelijke kegelpunten O_k hebben gemeen de vier dubbelribben $O_5' O_k$, die voor zestien gemeenschappelijke ribben zijn te tellen, en verder nog twintig ribben.

Door toepassing van de transformatie volgt hieruit dat *twintig* ρ^3 der congruentie *twee gegeven vlakken aanraken*. (§ 5).

HOOFDSTUK II.

De eerste algemeene congruentie van VENERONI.

§ 1. Wij beschouwen twee bundels van quadratische oppervlakken met een gemeenschappelijke basisrechte b . De basis van den bundel (Φ_1^2) bestaat uit een kubische ruimtekromme σ_1^3 met een harer koorden b , de basis van den bundel (Φ_2^2) uit een kubische ruimtekromme σ_2^3 met een harer koorden b , die tevens koorde van σ_1^3 is.

De doorsnede van elk oppervlak Φ_1^2 met elk oppervlak Φ_2^2 bestaat uit b en een kromme ρ^3 , zoodat de beide bundels een $[\rho^3]$ voortbrengen.

Deze congruentie werd het eerst aangewezen door VENERONI.¹⁾

Blijkbaar zijn σ_1^3 , σ_2^3 , b singuliere lijnen der $[\rho^3]$. Elke ρ^3 heeft vier punten met σ_1^3 , vier met σ_2^3 en twee met b gemeen, zoodat b *gemeenschappelijke koorde* is.

Door een willekeurig punt P wordt één oppervlak Φ_1^2 en één oppervlak Φ_2^2 , dus één ρ^3 bepaald.

Op een willekeurige rechte l snijden de bundels (Φ_1^2) en (Φ_2^2) twee quadratische involuties in. Het gemeenschappelijk paar dezer I^2 bestaat uit punten, die zoowel tot een oppervlak Φ_1^2 als tot een oppervlak Φ_2^2 behooren, dus uit punten van een ρ^3 , welke l tot koorde heeft.

De congruentie is dus *bilineair*.

Elk punt S_1 van σ_1^3 draagt één oppervlak Φ_2^2 , maar *alle* oppervlakken Φ_1^2 ; door S_1 gaan derhalve ∞^1 krommen ρ^3 , die op het door S_1 bepaalde oppervlak Φ_2^2 liggen. Elk punt van σ_1^3 is dus singulier en de beide

¹⁾ E. VENERONI: *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe*. (Rend. Palermo, 16, 209).

basiskrommen σ_1^3 , σ_2^3 zijn *singuliere krommen van de tweede orde*.

Door een punt B van b gaan ∞^1 krommen ρ^3 , die ieder met b de doorsnede vormen van een oppervlak Φ_1^2 met een oppervlak Φ_2^2 , welke elkaar in B aanraken, omdat B dubbelpunt hunner doorsnede is.

Voegt men aan elk oppervlak Φ_1^2 het oppervlak Φ_2^2 toe, dat Φ_1^2 in B aanraakt, dan ontstaat een projectiviteit tusschen de bundels van quadratische oppervlakken. Deze brengt als meetkundige plaats der doorsneden (b , ρ^3) een *oppervlak van den vierden graad*, S_B^4 , voort.

Hieruit volgt terstond dat de gemeenschappelijke koorde b *singuliere rechte van de vierde orde* is.

In een willekeurig vlak door B liggen als doorsneden van de bundels (Φ_1^2) en (Φ_2^2) twee bundels van kegelsneden (ϕ_1^2) en (ϕ_2^2), waarvan B en de drie doorgangen van σ_1^3 (σ_2^3) de basispunten zijn. Tot de gemeenschappelijke punten van een willekeurige kegelsnede ϕ_1^2 met het oppervlak S_B^4 behooren B, de twee andere snijpunten van ϕ_1^2 met de toegevoegde ϕ_2^2 , en de drie op σ_1^3 gelegen basispunten van ϕ_1^2 . In B vallen dus drie snijpunten samen, waaruit volgt, dat het oppervlak S_B^4 een *monoïde* is met *drievoudig punt* B.

Daar elk exemplaar der $[\rho^3]$ vier punten met σ_1^3 en vier met σ_2^3 gemeen heeft, bevat S_B^4 de beide singuliere krommen.

§ 2. Een willekeurige kromme ρ^3 snijdt de monoïde S_B^4 in vier punten van σ_1^3 , vier punten van σ_2^3 en twee punten van b . Deze laatste punten moeten dus dubbel geteld worden, waaruit wij zien, dat de monoïde de rechte b tot *dubbelrechte* heeft.

Ook de kubische raakkegel in B aan S_B^4 heeft b tot dubbelrechte en snijdt S_B^4 dus nog in acht rechten. Een dergelijke rechte kan tot een ontaarde figuur ρ^3 behooren.

De rechten d , die bestanddeelen zijn van figuren ρ^3 en b snijden, vormen een regelvlak. In elk vlak ϕ door

b ligt één rechte d ; want zijn S_1, S_2 de doorgangen van σ_1^3, σ_2^3 die niet op b liggen, dan bepaalt een punt Q der rechte $S_1 S_2$ een oppervlak Φ_1^2 en een oppervlak Φ_2^2 , die ieder drie punten van $S_1 S_2$ bevatten (waaronder één punt op b). De doorsnede der oppervlakken moet dan bestaan uit de rechten b en $d \equiv S_1 S_2$ en een kegelsnede δ^2 .

Het regelvlak (d) heeft de singuliere lijnen $b, \sigma_1^3, \sigma_2^3$ tot richtlijnen en zou dus van den graad $2 \times 1 \times 3 \times 3 = 18$ moeten zijn. Het ontgaat echter in vier kubische kegels en een *regelvlak van den zesden graad*, Σ^6 .

Immers uit elk der beide snijpunten van σ_1^3 met b wordt σ_2^3 geprojecteerd door een kubischen kegel, die bestaat uit rechten, welke op de drie singuliere lijnen rusten. Deze kegels behooren, evenals de beide kubische kegels, die σ_1^3 uit de snijpunten van σ_2^3 met b projecteeren, tot de meetkundige plaats der rechten d .

Het vijfde bestanddeel dezer meetkundige plaats is dus een regelvlak Σ^6 , en daar een willekeurig vlak door b slechts één rechte d bevat, is b *vijsvoudige rechte* van Σ^6 ; b wordt dus in elk punt B door vijf rechten d gesneden.

Onder de acht rechten der monoïde S_B^4 , die door den top gaan, bevinden zich dus vijf bestanddeelen van ont-aarde figuren ρ^3 . ¹⁾ Door B gaan derhalve drie singuliere koorden, die *parabolisch* zullen zijn.

§ 3. Ter bepaling van den graad van de meetkundige plaats der kegelsneden δ^2 , die tot ont-aarde figuren ρ^3 behooren, merken wij op, dat elk oppervlak Φ_1^2 met σ_2^3 vier punten S_2 gemeen heeft, die niet op b liggen. Eén der rechten van Φ_1^2 door zulk een punt S_2 rust op b en tevens op σ_2^3 . Daar door die rechte tevens een bepaald oppervlak Φ_2^2 kan gelegd worden, bevat

¹⁾ Dit kan ook aldus worden ingezien: de kegels, die σ_1^3 en σ_2^3 uit B projecteeren, hebben langs b vier rechten gemeen; de overige vijf gemeenschappelijke rechten zijn rechten d .

Φ_1^2 minstens vier rechten d . Voegen wij nu aan het oppervlak Φ_1^2 de oppervlakken Φ_2^2 toe, die met Φ_1^2 een rechte d gemeen hebben, dan worden de oppervlakken der beide bundels gerangschikt in een verwantschap (4, 4). Hun doorsnede heeft dan tot meetkundige plaats een oppervlak van den zestienden graad, dat uiteenvalt in het regelvlak $\mathcal{S}^6$ en het oppervlak Δ^{10} , gevormd door de kegelsneden δ^2 .

De verwantschap (4, 4) snijdt op b een (4, 4) in; b moet derhalve achtvoudig zijn op de geheele meetkundige plaats, en daar zij vijfvoudige rechte van $\mathcal{S}^6$ is, ligt zij *drievoudig* op Δ^{10} .

Ook σ_1^3 en σ_2^3 zullen drievoudig op Δ^{10} liggen. Immers op een rechte, die σ_1^3 (σ_2^3) snijdt, wordt door de (4, 4) een (8, 4) ingesneden; σ_1^3 (σ_2^3) moet dus viervoudig op de geheele meetkundige plaats en *drievoudig* op Δ^{10} in rekening worden gebracht.

Een rechte g , die deel uitmaakt van een ontaarde figuur ρ^3 en b kruist, moet door twee rechten d, d' , welke g en b snijden, aangevuld worden tot de doorsnede van een oppervlak Φ_1^2 met een oppervlak Φ_2^2 . Nu moeten g, d, d' samen vier punten van elke singuliere kromme bevatten. Hieruit leiden wij af, dat g gemeenschappelijke koorde van σ_1^3 en σ_2^3 moet zijn.

Daar twee kubische ruimtekrommen tien gemeenschappelijke koorden bezitten en b gemeenschappelijke koorde van σ_1^3 en σ_2^3 is, zijn er *negen figuren* ρ^3 , die uit drie rechten bestaan.

§ 4. Trekt men uit een willekeurig punt P koorden naar de krommen der $[\rho^3]$ dan vormen de steunpunten een oppervlak Π_P^4 met kegelpunt P . De raakkegel in P projecteert de kromme ρ_P^3 (die door P gaat). De doorsnede van het oppervlak Π_P^4 met dezen kegel bestaat uit ρ_P^3 en vijf singuliere koorden.

Immers een buiten ρ_P^3 gelegen gemeenschappelijk punt Q draagt een ρ^3 met een koorde langs PQ ; echter is

PQ ook koorde van ρ^3 ; zij is dan koorde van $\infty^1 \rho^3$, dus singulier.

Tot de vijf singuliere koorden door P behoort de koorde k_1 , welke σ_1^3 door P zendt. Deze koorde ligt toch op het oppervlak Φ_1^2 dat door P gaat, en wordt door de exemplaren van den bundel (Φ_2^2) in een quadratische involutie gesneden, draagt dus ∞^1 paren steunpunten van krommen ρ^3 . Hetzelfde geldt voor de koorde k_2 , welke σ_2^3 door P zendt.

De drie andere singuliere koorden s worden door de bundels (Φ_1^2) en (Φ_2^2) in *dezelfde* involutie gesneden; zij behooren tot een *stralencongruentie van de derde orde*.

Wanneer P op b ligt wordt de involutie op b parabolisch. De ∞^1 krommen ρ^3 door P hebben dan allen b tot koorde.

Daar b gemeenschappelijke koorde van σ_1^3 en σ_2^3 is, vervangt zij de twee singuliere koorden k_1, k_2 .

Wij bepalen nog het aantal singuliere koorden in een willekeurig vlak ϕ .

De monoïde S_B^4 , behorende bij den doorgang B van b , snijdt ϕ in een kromme ϕ^4 , waarop de puntenparen liggen, die met B tripels vormen van de involutie, welke de congruentie in ϕ bepaalt.

Een willekeurige rechte l in ϕ snijdt ϕ^4 in vier punten. Wanneer nu een punt P de rechte l doorloopt, gaat de rechte $p \equiv P'P''$, die door de involutie aan P is toegevoegd, viermaal door B; p omhult dus een kromme van de vierde klasse, λ_4 .

De singuliere kromme σ_1^3 snijde ϕ in de punten A_1, A_2, A_3 . De koorde $A_1 A_2$ is singuliere koorde der $[\rho^3]$ en draagt dus ∞^1 paren der I^3 , waarvan het derde punt op $A_3 B$ ligt. Bijgevolg is $A_1 A_2$ raaklijn van elke kromme λ_4 in ϕ , wat eveneens geldt voor $A_1 A_3, A_2 A_3$ en de drie in ϕ gelegen koorden van σ_2^3 .

Onderstellen wij nu dat in ϕ een singuliere koorde s ligt, op welke de bundels (Φ_1^2) en (Φ_2^2) *dezelfde* involutie insnijden. In ϕ vinden wij twee bundels van kegelsneden,

tusschen welke wij een projectief verband leggen door de kegelsneden, die op s hetzelfde puntenpaar insnijden, aan elkaar toe te voegen.

De projectiviteit brengt een figuur van den vierden graad voort; deze figuur bestaat uit de singuliere koorde s en een kromme van derden graad, β^3 , met dubbel-punt B. De kromme β^3 is blijkbaar de meetkundige plaats van het derde punt der tripels, waarvan twee punten op s liggen.

Daar de rechte l drie punten P met β^3 gemeen heeft, draagt s drie paren $P'P''$ en is s drievoudige raaklijn van de kromme λ_4 .

De krommen λ_4 en μ_4 , omhuld door de rechten, welke door de involutie worden toegevoegd aan de punten van twee rechten l en m , hebben 16 gemeenschappelijke raaklijnen. Daartoe behooren: 1^o de gemeenschappelijke raaklijn, die toegevoegd is aan het snijpunt van l en m ; 2^o de zes in ϕ gelegen koorden van σ_1^3 en σ_2^3 ; 3^o één singuliere rechte s , die negenvoudige gemeenschappelijke raaklijn is.

Een willekeurig vlak ϕ bevat dus drie singuliere koorden k_1 , drie singuliere koorden k_2 , en één singuliere koorde s .

Hieruit volgt dat de *singuliere koorden* van de eerste algemeene congruentie van VENERONI twee stralencongruenties (1, 3) en één stralencongruentie (3, 1) vormen.

§ 5. Wij onderzoeken thans het oppervlak Λ , gevormd door de krommen ρ^3 , die een willekeurige rechte l snijden. Het oppervlak Φ_2^2 , gaande door een punt S_1 van σ_1^3 ontmoet l in twee punten; l snijdt dus twee ρ^3 die door S_1 gaan, dus is σ_1^3 , en analoog σ_2^3 , *dubbelkromme* op het oppervlak Λ .

De monoïde S_B^4 snijdt l in vier punten; derhalve ontmoet l vier ρ^3 die door B gaan en is b *viervoudige rechte* op Λ .

Zij x de graad van Λ , dan bestaat de doorsnede van twee dergelijke oppervlakken, behorende bij de rechten

l en m , uit de x krommen ρ^3 die de beide rechten l en m snijden en uit de singuliere lijnen.

Daar b zestienmaal en σ_1^3 , σ_2^3 elk viermaal in rekening gebracht moeten worden, voldoet x aan de vergelijking

$$x^2 = 3x + 16 + 2 \times 3 \times 4$$

$$\text{of } x^2 - 3x - 40 = 0.$$

waaruit volgt $x = 8$.

Het oppervlak Λ is dus van den *achtsten graad*. Het heeft de kromme ρ_1^3 (die l tweemaal snijdt) tot *dubbelskromme*, en bevat, behalve l , *zestien rechten* en *zestien kegelsneden*, daar l zes punten met Σ^6 en tien punten met Δ^{10} gemeen heeft.

Een vlak ϕ door l snijdt Λ^8 nog in een kromme ϕ^7 . Deze heeft een viervoudig punt in den doorgang B van b en zeven dubbelpunten in de doorgangen van σ_1^3 , σ_2^3 en den doorgang van ρ^3 , die niet op l ligt. Zij snijdt l in de steunpunten der dubbelskromme ρ_1^3 en in de raakpunten van vijf krommen ρ^3 .

Hieruit volgt dat de meetkundige plaats der punten, waar een vlak ϕ door krommen der $[\rho^3]$ aangeraakt wordt, een *kromme van den vijfden graad*, ϕ^5 , is.

Deze *aanrakingskromme* heeft drie punten S_1 met σ_1^3 en drie punten S_2 met σ_2^3 gemeen, terwijl zij een *drievoudig punt* B op b bezit.

Is S_1 n.l. een snijpunt van σ_1^3 met ϕ , dan wordt het door S_1 bepaalde oppervlak Φ_2^2 door ϕ in een kegelsnede gesneden. Alle oppervlakken Φ_1^2 snijden Φ_2^2 volgens ∞^1 krommen ρ^3 die door S_1 gaan. De doorgangen dezer ∞^1 krommen ρ^3 met ϕ vormen op de kegelsnede een involutie van puntenparen, die met S_1 puntentripels vormen. Eén der paren bestaat uit S_1 en een ander punt, dus is er één ρ^3 , die ϕ in S_1 aanraakt.

De monoïde S_B^4 wordt door ϕ gesneden in een kromme ϕ^4 met drievoudig punt B. Ook op deze rationale ϕ^4 wordt een involutie ingesneden. Elk der drie in B samenvallende punten bepaalt een paar, dus wordt ϕ

in B door drie krommen ρ^3 aangeraakt en is B drievoudig punt van ϕ^5 .

Daar ϕ^5 met een oppervlak Λ^8 , behoorende bij een niet in ϕ gelegen rechte m , 40 punten gemeen heeft, zou de meetkundige plaats der krommen ρ^3 , die een vlak ϕ aanraken, een oppervlak van den graad 40 zijn. Wij moeten echter bedenken, dat ϕ^5 een drievoudig punt B op b en zes punten S_1, S_2 op de singuliere krommen heeft, terwijl Λ^8 viermaal door b en tweemaal door σ_1^3, σ_2^3 gaat. De punten B, S_1, S_2 vertegenwoordigen daarom $3 \times 4 + 6 \times 2 = 24$ punten van de doorsnede van ϕ^5 en Λ^8 .

Hieruit volgt dat de meetkundige plaats der aan ϕ rakende krommen ρ^3 een *oppervlak van den zestienden graad*, Φ^{16} , is.

Dit oppervlak heeft b tot *achtvoudige rechte*. Immers ϕ snijdt de monoïde van een willekeurig punt B^* in een kromme β^4 , die een dubbelpunt B op b en zes punten S_1, S_2 op de singuliere krommen heeft. Deze β^4 heeft met de aanrakingskromme ϕ^5 (die B tot drievoudig punt heeft en door de zes punten S_1, S_2 gaat) slechts $20 - 6 - 6 = 8$ punten gemeen, die krommen ρ^3 bepalen, welke door B^* gaan en ϕ raken.

Zij nu S_1^* een willekeurig punt van σ_1^3 ; het door S_1^* gelegde oppervlak Φ_2^2 snijdt ϕ in een kegelsnede, die door B en drie punten S_2 gaat en daar ϕ^5 in $3 + 3 = 6$ punten snijdt. Er liggen dus op ϕ^5 slechts vier punten, waar een door S_1^* gaande ρ^3 aan ϕ raakt; m. a. w. σ_1^3 (σ_2^3) is *viervoudige kromme* op Φ^{16} .

De meetkundige plaats $\mathfrak{S}^6$ der rechten d gaat vijfmaal door b en eenmaal door σ_1^3, σ_2^3 . De doorsnede van Φ^{16} met $\mathfrak{S}^6$ bestaat dus uit veertigmaal b , viermaal σ_1^3, σ_2^3 en nog 32 rechten.

Daar de meetkundige plaats Δ^{10} der kegelsneden δ^2 alle singuliere lijnen driemaal bevat, bestaat de doorsnede van Φ^{16} met Δ^{10} uit vierentwintigmaal b , twaalfmaal σ_1^3, σ_2^3 en nog 32 kegelsneden.

Het oppervlak Φ^{16} draagt dus 32 *rechten* en 32 *kegelsneden*; dit is het dubbele aantal van de op Λ^8 voorkomende d en δ^2 .

Een ander vlak ψ snijdt Φ^{16} in een kromme ψ^{16} met een achtevoudig punt op b en zes viervoudige punten op σ_1^3, σ_2^3 . De aanrakingskromme ψ^5 in ψ heeft een drievoudig punt op b en zes enkelvoudige punten op σ_1^3, σ_2^3 .

Van de 80 snijpunten van ψ^{16} met ψ^5 liggen er dus $8 \times 3 + 6 \times 4 = 48$ op de singuliere lijnen. In de overige 32 snijpunten wordt ψ aangeraakt door krommen ρ^3 , die ook ϕ aanraken.

Twee willekeurige vlakken worden dus door 32 krommen der $[\rho^3]$ aangeraakt.

Op analoge wijze als in Hoofdstuk I, § 6, kan bewezen worden, dat de raaklijnen der ρ^3 een *complex van den zesden graad* vormen en dat de raakpunten van de raaklijnen, uit een punt P naar de krommen der $[\rho^3]$ getrokken, op een *ruimtekromme van den zevenden graad*, π^7 , liggen.

De aanrakingskrommen ϕ^5 , gelegen in de vlakken door een rechte l , vormen een *oppervlak van den zesden graad*, Φ^6 , want door elk punt P van l gaat één ρ_P^3 , en de raaklijn in P aan ρ_P^3 bepaalt met l een vlak, waarin een kromme ϕ^5 ligt, die door P gaat.

Anders uitgedrukt: *de raakpunten van de raaklijnen, die een rechte l snijden, vormen een oppervlak van den zesden graad.*

Dit oppervlak heeft b tot *drievoudige rechte*.

§ 6. De doorsnede van het oppervlak Φ^{16} (§ 5) met een vlak ϕ bestaat uit de aanrakingskromme ϕ^5 , die dubbel in rekening gebracht moet worden, en de *complementaire kromme* ϕ^6 , de meetkundige plaats van de doorgangen der ρ^3 , die ϕ aanraken.

In een gemeenschappelijk punt van ϕ^5 en ϕ^6 wordt ϕ door een ρ^3 *geosculeerd* (Hoofdstuk I, § 5). Die punten zijn raakpunten van ϕ^5 met ϕ^6 .

Nu heeft ϕ^6 zeven dubbelpunten B, S_1 , S_2 . Immers de oppervlakken S_B^4 , Φ_1^2 , Φ_2^2 , die bij deze punten behooren, worden door ϕ gesneden in krommen, waarop de ρ^3 involuties I^2 bepalen. De krommen ρ^3 , die ϕ raken in een dubbelpunt dier I^2 , snijden ϕ^6 in B, S_1 of S_2 . Deze zeven punten moeten dus dubbelpunten van ϕ^6 zijn.

Daar ϕ^5 een drievoudig punt B en zes dubbelpunten S_1 , S_2 bezit, hebben ϕ^5 en ϕ^6 in deze zeven punten $3 \times 2 + 6 \times 2 = 18$ punten gemeen.

Verder raken zij elkaar dus in $(30 - 18) : 2 = 6$ punten, waaruit volgt:

Er zijn zes krommen der $[\rho^3]$ die een willekeurig vlak ϕ osculeeren.

Zooals wij zagen, heeft de aanrakingskromme ϕ^5 drie punten in B en zes punten S_1 , S_2 , terwijl de complementaire kromme ϕ^6 zeven dubbelpunten B, S_1 , S_2 bezit. Nu vormen ϕ^5 , tweemaal gerekend, en ϕ^6 de doorsnede ϕ^{16} van Φ^{16} met ϕ . Deze doorsnede moet dan acht punten in B en vier punten in de zes doorgangen van σ_1^3 , σ_2^3 hebben. Dit komt overeen met wat wij in § 5 voor de veelvuldigheid der singuliere lijnen op Φ^{16} vonden.

Wanneer ϕ om l wentelt, beschrijft ϕ^6 een oppervlak van den *achtsten graad*. Immers de vlakken van den bundel met l tot as snijden op de door een punt P van l gaande ρ_P^3 een involutie I^2 in. De coïncidenties dezer involutie bepalen twee raaklijnen van ρ_P^3 , die l snijden, dus twee vlakken, waarin P een punt van ϕ^6 is. Daaruit volgt, dat l *dubbelrechte* van de meetkundige plaats (ϕ^6) is, zoodat deze meetkundige plaats een oppervlak Φ^8 moet zijn.

Voegt men in elk vlak door l de snijpunten C van l met ϕ^5 toe aan de snijpunten C' van l met ϕ^6 , dan ontstaat een verwantschap (C, C') die een (6, 10) blijkt te zijn. Een coïncidentie $C \equiv C'$ bepaalt een punt, waar ϕ drie samenvallende punten met een ρ^3 gemeen

heeft, dus een osculatievlak is met $C \equiv C'$ tot raakpunt.

Op elke rechte l liggen dus *acht punten*, welker osculatievlak door l gaat. Hieruit besluiten wij, dat de meetkundige plaats der punten, die hun osculatievlak door een punt P zenden, een *oppervlak van den negenden graad*, Ω^9 , is.

In het raakvlak ρ van Φ_2^2 in S_1 liggen twee beschrijvenden, waarvan er een (λ) door de eveneens op Φ_2^2 gelegen rechte b wordt gesneden; de andere (l) is, evenals b , koorde van elke op Φ_2^2 gelegen ρ^3 en heeft met zulk een ρ^3 buiten S_1 nog een punt L gemeen. Alle ρ^3 van Φ_2^2 raken ρ in S_1 aan langs een rechte r en snijden ρ op l . De bundel, gevormd door deze ρ^3 , snijdt op l een puntenreeks in, dus zal slechts één ρ^3 het vlak ρ in S_1 osculeeren.

Daar verder elke straal r door S_1 , als raaklijn van een ρ^3 , een ander osculatievlak draagt, gaan door elken straal r twee osculatievlakken, n.l. ρ en het osculatievlak der ρ^3 , die r tot raaklijn heeft. De osculatievlakken omhullen dus een quadriekegel met top S_1 .

Twee dier osculatievlakken gaan door een willekeurig punt P , m. a. w. $\sigma_1^3(\sigma_2^3)$ is *dubbelkromme* op het oppervlak Ω^9 .

Van de snijpunten eener willekeurige ρ^3 met Ω^9 liggen er nu drie in de raakpunten der osculatievlakken, welke ρ^3 door P zendt en zestien in de steunpunten van ρ^3 op σ_1^3, σ_2^3 . De overige acht punten moeten op b liggen, en daar b koorde van ρ^3 is, zal zij *viervoudige rechte* op Ω^9 zijn.

Op een rechte l liggen acht punten, welker osculatievlak door l gaat. Daar in een willekeurig vlak door l nog zes punten liggen, waar het vlak door krommen ρ^3 geosculeerd wordt, liggen de raakpunten der osculatievlakken die door l gaan, op een *ruimtekromme* ω^{14} , welke l tot *achtvoudige snijlijn* heeft.

§ 7. De congruentie van REYE is te beschouwen als

een bijzonder geval dezer algemeene congruentie. Zij wordt n.l. verkregen als partieele doorsnede van twee bundels van quadri kegels, die een ribbe $H_1 H_2$ en drie punten H_3, H_4, H_5 buiten deze gemeen hebben.

Alle aldus verkregen krommen ρ^3 gaan toch door vijf vaste punten $H_1 \dots H_5$.

HOOFDSTUK III.

De tweede algemeene congruentie van VENERONI.

§ 1. De congruentie van REYE kan, zooals in Hoofdstuk I, (§ 8) werd aangetoond, worden beschouwd als het samenstel van de basiskrommen der bundels van quadrinodale kubische oppervlakken, die de vier kegelpunten en nog een vijfde punt gemeen hebben. De doorsnede van twee dier oppervlakken bestaat dan uit de basisfiguur van den zesden graad, gevormd door de zes ribben van het viervlak, dat de kegelpunten tot hoekpunten heeft, en een kubische ruimtekromme ρ^3 .

Beschouwen wij nu, meer algemeen, het *net van kubische oppervlakken* Φ^3 , die door *een vast punt* H en *een kromme van den zesden graad en het geslacht drie*, σ^6 , gaan.

Elke tot dit net behorende bundel (Φ^3) heeft tot basis σ^6 en een ρ^3 . Deze ρ^3 vormen een *bilinéaire congruentie*, want elk punt P bepaalt één bundel (Φ^3), wiens basiskromme ρ^3 door de punten P en H gaat; en de kubische involutie van den tweeden rang, door het net op een rechte l ingesneden, heeft één neutraal paar; dit bestaat uit punten, die tot ∞^1 oppervlakken Φ^3 behooren en dus één ρ^3 dragen, welke l tot koorde heeft.

Deze congruentie werd het eerst aangewezen door VENERONI ¹⁾ en later door STUYVAERT ²⁾ langs analytischen weg uitvoerig behandeld.

Een rechte l door P wordt door één ρ^3 in een punten-

¹⁾ E. VENERONI: *Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe*. (Rend. Palermo, 16, 209).

²⁾ M. STUYVAERT: *Une congruence linéaire de cubiques gauches*. (Bull. de l'Académie royale de Belgique, classe des sciences, n^o. 5, 470, 1907).

paar Q, Q' gesneden. De meetkundige plaats dezer punten is een oppervlak Π_P^4 met kegelpunt P (Hoofdstuk I, § 6). De kegel K^2 , die de door P gaande ρ_P^3 uit P projecteert, heeft met Π_P^4 , behalve ρ_P^3 , vijf rechten door P gemeen.

Daartoe behoort de rechte PH , want elk punt van PH draagt een ρ^3 , die ook door H gaat, dus PH tot koorde heeft.

De rechte PH is blijkbaar een *parabolisch singuliere koorde*.

Op elk der overige vier rechten s moet het net $[\Phi^3]$ een quadratische involutie insnijden, want zooals wij reeds eerder aangetoond hebben, zijn de gemeenschappelijke rechten van Π_P^4 en K^2 *singuliere koorden*. Daartoe is het noodzakelijk, dat de rechten s op de kromme σ^6 rusten.

De kegel, die σ^6 uit P projecteert, en de kegel K^2 hebben twaalf gemeenschappelijke ribben; daartoe behooren de vier rechten s . De overige acht moeten dus gaan door snijpunten van ρ_P^3 met σ^6 , d. w. z. *elke ρ^3 der congruentie rust in acht punten op de kromme σ^6* .

De congruentie omvat derhalve alle krommen ρ^3 , die door het *hoofdpunt* H gaan en ieder in *acht punten* op een *singuliere kromme* van den zesden graad en het geslacht drie rusten.

§ 2. Zal een ρ^3 door een punt S van σ^6 gaan, dan moet zij met σ^6 een basisfiguur vormen, die in S een dubbelpunt heeft. De oppervlakken van den bundel (Φ^3) , die een dergelijke ρ^3 bepaalt, moeten elkaar dan in S raken.

Kiezen wij nu twee willekeurige bundels (Φ_1^3) en (Φ_2^3) uit het net $[\Phi^3]$ en voegen wij aan elk oppervlak Φ_1^3 het oppervlak Φ_2^3 toe, dat Φ_1^3 in S raakt, dan brengen de daardoor projectief geworden bundels een meetkundige plaats van den graad zes voort. Deze meetkundige plaats bestaat uit het oppervlak Φ^3 , dat de bundels gemeen hebben en een oppervlak S^3 , dat een *monoïde* moet zijn.

Immers een willekeurige rechte door S mag dat oppervlak nog slechts in één ander punt snijden, daar zij anders koorde van twee, dus van ∞^1 krommen ρ^3 zou zijn, wat ons tot het besluit zou voeren, dat door S ∞^1 singuliere koorden zouden gaan, hetgeen ongerijmd is.

Daar de door S gaande congruentiekrommen een kubische monoïde vormen, is σ^6 *singuliere kromme van de derde orde*.

Het oppervlak Π_P^4 moet de singuliere kromme σ^6 bevatten, daar ρ_P^3 acht punten met σ^6 gemeen heeft. Van de twaalf gemeenschappelijke punten van Π_P^4 met een willekeurige ρ^3 liggen er dus acht op σ^6 , twee op de koorde, die de ρ^3 door P zendt, en twee in H .

Hieruit blijkt, dat Π_P^4 in H een *tweede kegelpunt* heeft.

Uit de beschouwing van de vlakke doorsnede van Π_P^4 , welke doorsnede een kromme ϕ^4 met dubbelpunt P is, kan weder afgeleid worden, dat de raaklijnen van de krommen der $[\rho^3]$ een *complex van den zesden graad* vormen, en dat de meetkundige plaats van de raakpunten der raaklijnen door een willekeurig punt P een *ruimte-kromme van den zevenden graad*, π^7 , is.

De kegel K^6 , welke π^7 uit een harer punten P projecteert, heeft een *keerribbe* PH en *vier dubbelribben*, n.l. de vier singuliere koorden s door P .

Immers de beide coïncidenties der quadratische involutie I^2 , die door het net $[\Phi^3]$ op een rechte s wordt ingesneden, bepalen de raakpunten van twee raaklijnen uit P , dus twee punten, welke s met π^7 gemeen heeft.

§ 3. Door een punt S van σ^6 gaan zes, op de monoïde S^3 gelegen, rechten. Daartoe behooren de drie trisecanten t van σ^6 , die in S samenkomen. Deze maken deel uit van ontaarde figuren ρ^3 , want door een willekeurig punt van een trisecante t gaan nog ∞^1 oppervlakken Φ^3 , die allen vier punten met t gemeen hebben. De ρ^3 , die door den bundel (Φ^3) wordt aangewezen, moet dan uiteenvallen in de trisecante t en een kegelsnede δ^2 .

De overige drie, in S samenkomende rechten der monoïde S^3 zijn *parabolisch singuliere koorden*.

Door centrale projectie uit S op een vlak ϕ door H gaan de ∞^1 op S^3 gelegen ρ^3 over in een bundel van kegelsneden (ϕ^2); de basispunten van dien bundel zijn H en de doorgangen B_1, B_2, B_3 der op S^3 gelegen parabolisch singuliere koorden.

Het lijnenpaar $B_1 B_2, B_3 H$ is het beeld van een trisecante t in het vlak $B_1 S B_2$ en een kegelsnede δ^2 in het vlak $B_3 S H$. Hieruit volgt, dat door S drie kegelsneden δ^2 gaan, die op de monoïde S^3 liggen, en dat de monoïde nog drie kegelsneden δ^2 bevat, die niet door S gedragen worden; en verder dat, behalve de drie trisecanten t door S , nog drie trisecanten van σ^6 op de monoïde worden gevonden.

Daar elk punt S van σ^6 drie trisecanten t en drie kegelsneden δ^2 draagt, is σ^6 *drievoudige kromme* zoowel op de meetkundige plaats (t) als op de meetkundige plaats (δ^2). Wij kunnen nu den graad dezer meetkundige plaatsen bepalen.

De meetkundige plaats (δ^2) snijdt de monoïde S^3 in zes kegelsneden δ^2 en in de singuliere kromme σ^6 , die enkelvoudig op S^3 en drievoudig op (δ^2) ligt.

Zij x de graad van het oppervlak (δ^2), dan moet x dus voldoen aan de vergelijking

$$3x = 6 \times 2 + 3 \times 6$$

waaruit volgt $x = 10$.

Zij verder y de graad van het oppervlak (t), dan heeft y te voldoen aan

$$3y = 6 + 3 \times 6$$

waaruit volgt $y = 8$.

De kegelsneden δ^2 , die behooren tot ontaarde figuren ρ^3 , vormen dus een *oppervlak van den tienden graad*, Δ^{10} , terwijl de rechten t , welke deze kegelsneden tot figuren ρ^3 aanvullen, een *regelvlak van den achtsten graad*, Σ^8 , vormen.

Van de 30 snijpunten eener willekeurige ρ^3 met Δ^{10}

liggen er 8×3 in de acht punten, waar ρ^3 op σ^6 rust. De zes andere punten vallen in H samen, dus is het hoofdpunt H *zesvoudig punt* van Δ^{10} .

Het hoofdpunt H is echter niet op $\mathfrak{S}^8$ gelegen, want de 24 snijpunten eener willekeurige ρ^3 met dit regelvlak vallen drie aan drie in de acht punten, waar de ρ^3 op de singuliere kromme σ^6 steunt.

Een koorde uit H naar σ^6 getrokken snijdt $\mathfrak{S}^8$ in acht punten, waarvan er zes in de beide steunpunten der koorde samenvallen (want σ^6 is drievoudige kromme van $\mathfrak{S}^8$). De koorde snijdt dus twee trisecanten t en vormt met hen een ontaarde figuur ρ^3 .

Daar σ^6 van het geslacht drie is en dus zeven schijnbare dubbelpunten bezit, kan men uit H zeven koorden naar σ^6 trekken.

Er zijn derhalve *zeven figuren ρ^3 , die uit drie rechten bestaan.*

§ 4. In een vlak ϕ snijdt de congruentie een kubische involutie in, die de zes doorgangen S_k van σ^6 tot singuliere punten van de derde orde heeft; want de monoïde met top S_k snijdt ϕ in een nodale kubische kromme ϕ^3 , die S_k tot dubbelpunt heeft en door de overige vijf punten S gaat.

Zij $Q_1 Q_2 Q_3$ een tripel dezer involutie. Wanneer Q_1 een rechte l doorloopt beschrijven de beide toegevoegde punten Q_2, Q_3 een kromme ϕ , die driemaal door elk singulier punt S_k gaat. De krommen ϕ, ϕ' behorende bij de rechten l, l' hebben in de punten S_k $6 \times 9 = 54$ punten gemeen; verder de beide punten, behorende bij een coïncidentie $Q_1 \equiv Q_1'$ en tenslotte zooveel punten als de graad van ϕ bedraagt. Want door een snijpunt Q_1 van l met ϕ' wordt een tripel der involutie aangegeven, waarvan een punt Q_2 op l' ligt; het derde punt Q_3 moet dan gemeenschappelijk punt van ϕ en ϕ' zijn.

De graad x van ϕ wordt nu gevonden uit de vergelijking

$$x^2 = x + 56$$

$$\text{of } (x - 8)(x + 7) = 0.$$

Dus is ϕ een kromme van den achtsten graad.

Hieruit volgt verder, dat de meetkundige plaats der krommen ρ^3 , die de rechte l snijden, een *oppervlak van den negenden graad*, Λ^9 , is; immers met een vlak door l heeft zij nog een kromme ϕ^8 gemeen.

De graad van het oppervlak Λ kan ook op de volgende wijze bepaald worden.

Daar l drie punten gemeen heeft met elke monoïde S^3 , dus elk punt S van σ^6 drie krommen ρ^3 draagt, die l snijden, moet σ^6 *drievoudige kromme* op het oppervlak Λ zijn.

De doorsnede van twee oppervlakken Λ en Λ' , behoorende bij de rechten l en l' , zal bestaan uit de x krommen ρ^3 , die l en l' snijden en uit negenmaal de singuliere kromme σ^6 .

Uit de vergelijking $x^2 = 3x + 54$
volgt dan $x = 9$.

Beschouwen wij twee bundels (Φ_1^3) en (Φ_2^3) uit het net $[\Phi^3]$. Aan elk oppervlak Φ_1^3 voegen wij de drie exemplaren Φ_2^3 toe, welke Φ_1^3 op de rechte l ontmoet. De bundels worden daardoor in een verwantschap (3,3) gerangschikt.

Op een andere rechte m bepaalt deze een verwantschap (9,9), zoodat de in een (3,3) gerangschikte bundels een meetkundige plaats van den achttienden graad voortbrengen.

Daar de bundels tot een net behooren, hebben zij één exemplaar Φ^3 gemeen.

Zij P_k een zijner snijpunten met de rechte m . De drie in de (3,3) aan dit oppervlak Φ^3 toegevoegde exemplaren vallen met Φ^3 samen, zoodat het oppervlak driemaal voor de meetkundige plaats in rekening gebracht moet worden.

Als meetkundige plaats van de krommen ρ^3 , welke l snijden, blijft dus over een oppervlak van den negenden graad, Λ^9 .

Het oppervlak Λ^9 bevat de rechte l , heeft de kromme ρ_1^3 (welke l tweemaal snijdt) tot *dubbelkromme* en bezit

voorts *achttien trisecanten* t van σ^6 en *achttien kegelsneden* δ^2 , daar l acht punten met Σ^8 en tien punten met Δ^{10} gemeen heeft.

Van de 27 snijpunten eener willekeurige ρ^3 met Λ^9 liggen er 8×3 in de punten, waar de ρ^3 op σ^6 rust; de drie overige punten vallen in H samen. Het hoofdpunt H is dus *drievoudig punt* van Λ^9 .

De kromme ϕ^8 , welke een vlak door l op Λ^9 bepaalt, snijdt l in de steunpunten der dubbelkromme ρ_1^3 en in zes andere punten, waar ϕ door krommen ρ^3 wordt aangeraakt.

De meetkundige plaats dezer raakpunten is dus een kromme van den *zesden graad*, ϕ^6 , die zes dubbelpunten S_k op σ^6 heeft.

Met een ander oppervlak Λ^9 heeft de aanrakingskromme 54 punten gemeen, waarvan er $6 \times 6 = 36$ op σ^6 liggen, want de zes doorgangen S_k van σ^6 zijn drievoudige punten van Λ^9 en dubbelpunten van ϕ^6 .

Wij besluiten hieruit dat de meetkundige plaats der krommen ρ^3 , die een vlak ϕ aanraken, een *oppervlak van den achttienden graad*, Φ^{18} , is.

Dit oppervlak snijdt een ander vlak ψ in een kromme ψ^{18} , die met de in ψ gelegen aanrakingskromme ψ^6 108 punten gemeen heeft. Nu is σ^6 zesvoudige kromme op Φ^{18} , want ϕ snijdt de monoïde S^3 , behoorende bij een willekeurig punt S^* van σ^6 in een kromme γ^3 , die door de zes punten S_k gaat; in die punten hebben ϕ^6 en γ^3 6×2 punten gemeen, dus liggen op ϕ^6 zes punten, waar ϕ door op S^3 gelegen krommen ρ^3 geraakt wordt; m. a. w. σ^6 is *zesvoudige kromme* op Φ^{18} .

Daar de zes punten S_k dubbelpunten van ψ^6 en zesvoudige punten van ψ^{18} zijn, vertegenwoordigen zij 72 snijpunten dezer krommen. Er blijven dus 36 punten over, waar ψ geraakt wordt door krommen ρ^3 , die tevens ϕ aanraken.

Er zijn derhalve 36 *krommen der* $[\rho^3]$, *die twee gegeven vlakken* ϕ *en* ψ *aanraken.*

Een willekeurige ρ^3 snijdt Φ^{18} in 54 punten, waarvan $8 \times 6 = 48$ in de punten, die ρ^3 met σ^6 gemeen heeft, en de overige in H liggen.

Het hoofdpunt H is dus *zesvoudig punt* van Φ^{18} .

Behalve de singuliere kromme σ^6 , welke zesmaal op Φ^{18} en driemaal op Δ^{10} ligt, hebben deze oppervlakken nog 36 *kegelsneden* δ^2 gemeen.

Op dezelfde wijze blijkt, dat Φ^{18} met Σ^8 36 *trisecanten* t van σ^6 gemeen heeft.

§ 5. De doorsnede van het oppervlak Φ^{18} met het vlak ϕ bestaat uit de aanrakingskromme ϕ^6 , welke tweemaal in rekening gebracht moet worden, en uit de *complementaire kromme* ϕ_0^6 , die zes dubbelpunten S_k bezit.

Op de bekende wijze wordt hieruit afgeleid, dat het vlak ϕ *osculatievlak is voor zes krommen* ρ^3 .

Verder wordt voor de meetkundige plaats der complementaire krommen in de vlakken door een rechte l een oppervlak van den *achtsten graad* met *dubbelrechte* l gevonden.

De verwantschap tusschen de snijpunten C van l met de aanrakingskrommen en de snijpunten C' van l met de complementaire krommen in de vlakken door l is een (6, 12). De negen coïncidenties $C \equiv C'$ bepalen *negen osculatievlakken* door l , welker raakpunt op l ligt.

Hieruit volgt weer dat de raakpunten van de osculatievlakken door l op een *ruimtekromme van den vijftienden graad*, ω^{15} , liggen, en dat de meetkundige plaats der punten, die hun osculatievlak door een punt P zenden, een *oppervlak van den tienden graad*, Ω^{10} , is.

De kromme ω^{15} heeft l tot *negenvoudige snijlijn*.

Het oppervlak Ω^{10} moet door de singuliere kromme σ^6 en het hoofdpunt H gaan. Zij σ^6 α -voudig en H β -voudig op Ω^{10} , dan moet, daar een willekeurige ρ^3 drie osculatievlakken door P zendt, tusschen α en β de betrekking bestaan

$$3 \times 10 = 3 + 8\alpha + \beta$$

$$\text{of } 8\alpha + \beta = 27$$

waaruit als eenig bruikbare oplossing volgt $\alpha=3$, $\beta=3$.

Dus is σ^6 *drievoudige kromme* en H *drievoudig punt* van Ω^{10} .

§ 6. Door een bijzondere *kubische transformatie* wordt de hier besproken congruentie afgebeeld op een *stralenschoof*.¹⁾

De determinant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_x' & b_x' & c_x' & d_x' \\ a_x'' & b_x'' & c_x'' & d_x'' \end{vmatrix} = 0$$

bepaalt een complex van kubische oppervlakken Φ^3 , die allen door een ruimtekromme σ^6 van het geslacht drie gaan; twee oppervlakken Φ^3 hebben verder nog een kubische ruimtekromme ρ^3 gemeen, die σ^6 in acht punten snijdt; drie oppervlakken Φ^3 ontmoeten elkaar in één punt.

Zij nu $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 + \mu_4 y_4 = 0$ de vergelijking van een willekeurig vlak ϕ .

Wij beschouwen twee punten X, Y als aan elkaar toegevoegd, wanneer voldaan is aan

$$\frac{y_1}{(b_x c_x' d_x'')} = \frac{y_2}{(c_x d_x' a_x'')} = \frac{y_3}{(d_x a_x' b_x'')} = \frac{y_4}{(a_x b_x' c_x'')}$$

Elk oppervlak Φ^3 wordt dan afgebeeld op een vlak ϕ , en omgekeerd komt met elk vlak ϕ een oppervlak Φ^3 overeen.

Met de punten van een rechte (snijlijn van twee vlakken) komen overeen de punten van een kubische ruimtekromme ρ^3 (doorsnede van twee oppervlakken Φ^3).

Omgekeerd wordt een ρ^3 door een rechte afgebeeld.

De rechten van een stralencongruentie zijn afbeeldingen van de krommen ρ^3 eener congruentie van kubische ruimtekrommen. Is m de orde en k de klasse der

¹⁾ L. GODEAUX: *Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches*. (Nouvelles annales de mathématiques, 1909).

stralencongruentie, dan is blijkbaar ook de orde van de congruentie van $\rho^3 m$. De klasse der afgebeelde congruentie, d. w. z. het aantal krommen ρ^3 , die een rechte l tweemaal snijden, is gelijk aan het aantal stralen der congruentie (m, k) , die een kromme λ^3 (beeldkromme van l) tweemaal snijden, dus gelijk aan het aantal gemeenschappelijke stralen van een (m, k) en een $(1, 3)$, dus $(m + 3k)$.

Een *bilineaire congruentie* $[\rho^3]$ zal dus afgebeeld worden door een $(1, 0)$, d. i. door een *stralenschoof*.

Omgekeerd wordt deze omgezet in een $[\rho^3]$, bestaande uit de kubische ruimtekrommen, die door een *vast punt* (beeldpunt van den top der stralenschoof) gaan en in *acht punten* op een *kromme van den zesden graad* en het *geslacht drie* rusten.

§ 7. Van deze bijzondere kubische transformatie kan men gebruik maken om eenige eigenschappen der $[\rho^3]$ op andere wijze af te leiden.

Het aantal ρ^3 , die twee rechten l, l' snijden, is gelijk aan het aantal stralen van een schoof, welke twee kubische ruimtekrommen λ^3, λ'^3 snijden, dus gelijk aan het aantal gemeenschappelijke ribben van twee kubische kegels, die λ^3, λ'^3 uit den top der stralenschoof projecteeren. Hieruit volgt terstond, dat twee willekeurige rechten l, l' door negen krommen ρ^3 gesneden worden, m. a. w. dat het oppervlak Λ van den *negenden graad* is. (§ 4).

De meetkundige plaats der punten, waar een vlak ϕ door krommen ρ^3 aangeraakt wordt, heeft tot beeld de meetkundige plaats van de raakpunten van de stralen der schoof, die een kubisch oppervlak Φ^3 (beeld van ϕ) aanraken.

Daar de laatstgenoemde meetkundige plaats de doorsnede van het oppervlak Φ^3 met zijn eerste pooloppervlak, dus een kromme van den zesden graad is, moet de gezochte *aanrakingskromme* eveneens een kromme van den *zesden graad* zijn. (§ 4).

Het aantal hoofdraaklijnen van Φ^3 door den top der stralenschoof bedraagt zes, daar immers de raakpunten der hoofdraaklijnen de doorsnede vormen van Φ^3 met het eerste en het tweede pooloppervlak van den top.

De gevolgtrekking is, dat het vlak ϕ door zes krommen ρ^3 *geosculeerd* wordt. (§ 5).

De stralen der schoof, die Φ^3 aanraken, vormen een kegel van den zesden graad, welke met een willekeurige kubische ruimtekromme λ^3 18 punten gemeen heeft. De rechte l , die door de transformatie in de kubische ruimtekromme λ^3 wordt omgezet, snijdt dus het oppervlak, gevormd door de krommen ρ^3 , welke het vlak ϕ aanraken, in 18 punten.

Derhalve is dit oppervlak van den *achttienden graad*. (§ 4).

§ 8. Bijzondere gevallen van de tweede algemeene congruentie van VENERONI kunnen ontstaan, doordat de singuliere kromme σ^6 ontaardt.

Het aantal mogelijke ontaardingën van een ruimtekromme van den zesden graad is zeer groot; echter komen niet alle ontaardingën in aanmerking, daar de ontaarde figuur *zeven schijnbare dubbelpunten* moet bezitten.

Wij zullen volstaan met de opsomming van eenige gevallen.

1^o. Een ruimtekromme van den vijfden graad en het geslacht twee, σ_2^5 , met een harer koorden k . Door een willekeurig punt P gaan $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 - 2 = 4$ koorden van σ_2^5 en drie transversalen over σ_2^5 en k .

2^o. Een biquadratische ruimtekromme van het geslacht één, σ_1^4 , met twee harer koorden, k_1 en k_2 . Een willekeurig punt P draagt $\frac{1}{2} \times 3 \times 2 - 1 = 2$ koorden van σ_1^4 , twee transversalen over σ_1^4 en k_1 , twee over σ_1^4 en k_2 en één transversaal over k_1 en k_2 , tezamen zeven koorden van de ontaarde figuur (σ_1^4, k_1, k_2) .

3^o. Twee kubische ruimtekrommen σ_1^3, σ_2^3 die vier

punten gemeen hebben. Door P gaan één koorde van σ_1^3 , één koorde van σ_2^3 en vijf gemeenschappelijke ribben van de kegels, die σ_1^3 en σ_2^3 uit P projecteeren, en deze krommen in verschillende punten snijden.

4°. Een kubische kromme σ^3 met drie harer koorden k_1, k_2, k_3 .

De zeven koorden door P zijn: de koorde van σ^3 , drie transversalen over σ^3 en een der koorden k , en drie transversalen over $k_1 k_2, k_1 k_3, k_2 k_3$.

5°. Zes rechten, die de ribben zijn van een tetraëder (§ 1). De zeven koorden door P zijn de rechten, die P met de hoekpunten van het tetraëder verbinden en de transversalen naar de drie paren overstaande ribben.

6°. Vier rechten h_1, h_2, h_3, h_4 met hunne transversalen t_1, t_2 . (Zie Hoofdstuk IX).

7°. Drie rechten h_1, h_2, h_3 met de drie transversalen, uit één punt naar de paren h_k, h_l getrokken. (Zie Hoofdstuk VII).

HOOFDSTUK IV.

De derde algemeene congruentie van VENERONI.

§ 1. Gegeven zij een bundel van quadratische oppervlakken (Φ^2), die tot basis heeft een kubische ruimtekromme σ^3 en een harer koorden b , en voorts een biquadratisch oppervlak Ψ^4 met σ^3 als enkelvoudige kromme en b als dubbelrechte. Uit twee oppervlakken Φ_1^2 , Φ_2^2 van den bundel (Φ^2) stellen wij een tweede oppervlak Ψ^4 samen. De beide oppervlakken Ψ^4 bepalen een bundel, waarvan alle exemplaren tweemaal door b gaan, elkaar langs σ^3 raken ¹⁾, en de kubische ruimtekrommen C_1^3 , C_2^3 bevatten, die met b en σ^3 de doorsnede vormen van het gegeven oppervlak Ψ^4 met de samengestelde figuur (Φ_1^2 , Φ_2^2).

Brengen wij nu alle oppervlakken Φ^2 tot doorsnijding met alle oppervlakken Ψ^4 , dan ontstaat naast de vaste bestanddeelen σ^3 , die enkelvoudig, en b , die dubbel in rekening gebracht moet worden, een congruentie [ρ^3].

Daar een willekeurig punt P één oppervlak Φ^2 en één oppervlak Ψ^4 bepaalt, draagt P één kromme ρ^3 , en is de congruentie van de eerste orde.

Op een willekeurige rechte l snijdt de bundel (Φ^2) een quadratische, de bundel (Ψ^4) een biquadratische involutie in. Tot de drie gemeenschappelijke paren dezer beide

¹⁾ De figuur (Φ_1^2 , Φ_2^2) wordt door een vlak φ gesneden in twee kegelsneden, welke elkaar op b en in drie punten S_k van σ^3 snijden. Daar elk der punten S_k dus een dubbelpunt is van een der krommen φ^4 , welke φ met den bundel (Ψ^4) gemeen heeft, zullen alle niet-samengestelde krommen φ^4 elkaar in S_k moeten raken, dus in S_k een vaste raaklijn moeten hebben.

Alle oppervlakken Ψ^4 hebben dus in S_k hetzelfde raakvlak.

involuties behooren de paren, die op Φ_1^2 en Φ_2^2 gelegen zijn.

Op l ligt dus één paar, dat zoowel tot een oppervlak Φ^2 als tot een oppervlak Ψ^4 behoort; l is dus koorde van één kromme ρ^3 , m. a. w. de congruentie is ook van de eerste klasse, dus *bilineair*.

Zij werd door VENERONI aangewezen ¹⁾, die haar echter niet verder behandeld heeft.

Alle krommen dezer $[\rho^3]$ hebben b tot *gemeenschappelijke koorde* en *raken de singuliere kromme σ^3 in vier punten*.

In een vlak ϕ vormen de doorgangen van den bundel (Ψ^4) een bundel (ϕ^4), waarvan alle exemplaren een dubbelpunt in B (doorgang van b) en een vaste raaklijn in elk der drie punten S_1, S_2, S_3 (doorgangen van σ^3) hebben.

De bundel (Φ^2) geeft als doorsnijding een bundel van kegelsneden (ϕ^2) met basispunten B, S_1, S_2, S_3 .

Elke ϕ^2 heeft, buiten de basispunten, nog drie veranderlijke punten X_1, X_2, X_3 met elke ϕ^4 gemeen. Deze punten X vormen een kubische involutie I^3 .

Gaat een ρ^3 door S_1 , dan moet bijv. X_1 met S_1 samenvallen; de kegelsnede ϕ^2 moet dan in S_1 aan een der krommen ϕ^4 raken. Deze kegelsnede ϕ^2 is de doorgang van het oppervlak Φ_0^2 , dat in S_1 het gemeenschappelijk raakvlak van alle oppervlakken Ψ^4 aanraakt. Denkt men zich nu het vlak ϕ veranderlijk om S_1 , dan blijkt dat alle ρ^3 door S_1 gelegen zijn op het oppervlak Φ_0^2 ; dit is dan de meetkundige plaats der krommen ρ^3 , die in het punt S_1 der singuliere kromme σ^3 samenkomen.

Wij zien hieruit, dat σ^3 *singuliere kromme van de tweede orde* is.

Gaat een ρ^3 door B, dan moet een kegelsnede ϕ^2 een kromme ϕ^4 in B raken. Voegen wij nu aan elke ϕ^4 de beide krommen ϕ^2 toe, die in B aan de beide takken

¹⁾ E. VENERONI: *Sui vari tipi di congruenze bilineare di cubiche gobbe*. (Rend. Inst. Lomb. 37.)

der ϕ^4 raken, dan ontstaat een verwantschap (1, 2) tusschen de bundels (ϕ^4) en (ϕ^2) . De snijpunten der toegevoegde krommen brengen een meetkundige plaats van den achtsten graad voort, waartoe de kegelsneden ϕ_1^2 , ϕ_2^2 behooren, die de doorgangen zijn van de oppervlakken Φ_1^2 , Φ_2^2 welke tot een oppervlak Ψ^4 vereenigd werden.

De eigenlijke meetkundige plaats is dus een kromme van den vierden graad, γ^4 . Met een willekeurige ϕ^2 heeft γ^4 twee punten X_2 , X_3 van een tripel der I^3 en de basispunten S_1 , S_2 , S_3 gemeen. De drie overige punten zijn in B samengevallen, m. a. w. B is drievoudig punt van γ^4 , en de meetkundige plaats der krommen ρ^3 , die door een punt B van b gaan, is een *monoïde* S_B^4 met drievoudig punt B. De gemeenschappelijke koorde b is dus *singuliere rechte van de vierde orde*.

§ 2. Voegt men aan elk oppervlak Ψ^4 de vier oppervlakken Φ^2 toe, die Ψ^4 op een rechte l snijden, dan ontstaat een verwantschap (4, 2) tusschen de bundels (Ψ^4) en (Φ^2) . Deze verwantschap bepaalt een verwantschap (8, 8) op een andere rechte m , dus zullen de in een (4, 2) gerangschikte bundels een meetkundige plaats van den zestienden graad voortbrengen.

Terwijl nu een willekeurig oppervlak Φ^2 door zijn snijpunten met l aan twee oppervlakken Ψ^4 wordt toegevoegd, ontmoet het oppervlak Φ_1^2 (Φ_2^2) in elk zijner snijpunten met l slechts het bijzondere oppervlak (Φ_1^2, Φ_2^2) .

Zoowel Φ_1^2 als Φ_2^2 moet dus tweemaal tot de meetkundige plaats gerekend worden. Hieruit volgt dat de meetkundige plaats der krommen ρ^3 , welke de rechte l snijden, een *oppervlak van den achtsten graad*, Λ^8 , is.

Wij kunnen dit resultaat ook op andere wijze verkrijgen.

De rechte l snijdt de *monoïde* S_B^4 in vier punten. Door B gaan dus vier krommen ρ^3 , welke l snijden, m. a. w. de rechte b is *viervoudige rechte* op het oppervlak Λ .

Daar l het oppervlak Φ_0^2 , dat de singuliere kromme σ^3 in een punt S aanraakt en de meetkundige plaats der krommen ρ^3 door S is, in twee punten snijdt, draagt S twee krommen ρ^3 , die l snijden, m. a. w. de singuliere kromme σ^3 is *dubbelkromme* op het oppervlak Λ .

Twee oppervlakken Λ , Λ' zullen nu een doorsnede opleveren, waartoe de rechte b zestienmaal gerekend moet worden en de kromme σ^3 achtmaal, omdat Λ en Λ' elkaar langs σ^3 zullen raken.

Zij nu x de graad van Λ , dan bestaat de doorsnede verder nog uit x krommen ρ^3 . Wij vinden dus voor x de vergelijking

$$x^2 = 3x + 16 + 8 \times 3$$

waaruit volgt $x = 8$.

HOOFDSTUK V.

Bepaling van het aantal mogelijke soorten van bilineaire congruenties.

§ 1. In zijn verhandeling: „*Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe*” leidt VENERONI ¹⁾ uit een beschouwing eener bilineaire congruentie van krommen ρ_p^n van den graad n en het geslacht p de volgende algemeene eigenschappen af:

1°. De meetkundige plaats van de steunpunten der ρ_p^n op hare koorden door een willekeurig punt P is een oppervlak Π_P van den graad $n + 1$ met een $(n - 1)$ voudig punt P .

2°. De raaklijnen in P aan Π_P zijn de rechten, die de door P gaande ρ_p^n uit P projecteeren.

3°. De singuliere koorden vormen een stralencongruentie van de orde $(n^2 - n - 1)$.

4°. Alle oppervlakken Π_P bevatten alle singuliere lijnen.

5°. Het oppervlak Λ , gevormd door de krommen ρ_p^n , welke een rechte l snijden, heeft de ρ_p^n , die l tweemaal snijdt, tot dubbelkromme.

6°. Het oppervlak S_P , gevormd door de krommen ρ_p^n , die door een singulier punt P gaan, is een monoïde, welker graad hoogstens $n + 1$ is.

7°. Wanneer m de graad is van het oppervlak Λ en d_k de graad der singuliere lijnen, die k -voudig op Λ liggen, geldt de betrekking:

$$m(m - n) = \sum_1^{n+1} k^2 d_k \dots \dots \dots (1).$$

¹⁾ Rend. Palermo, 16, 209. De notatie is gewijzigd, om de overeenstemming met de andere Hoofdstukken zooveel mogelijk te behouden.

8°. Een willekeurige kromme ρ_p^n steunt, wanneer er geen hoofdpunten zijn, in $2(2n + p - 1)$ punten op het samenstel der singuliere lijnen.

Hieruit volgen terstond de volgende algemeene eigenschappen van de bilineaire congruenties van *kubische ruimtekrommen* ρ^3 :

1°. Elk oppervlak Π_P is van den vierden graad en heeft een kegelpunt P.

2°. De raaklijnen in P aan Π_P^4 zijn de rechten, die de door P gaande ρ^3 uit P projecteeren.

3°. De singuliere koorden vormen een stralencongruentie van de vijfde orde.

4°. Alle oppervlakken Π_P^4 bevatten alle singuliere lijnen.

5°. Elk oppervlak Λ heeft tot dubbelkromme de ρ^3 , die l tweemaal snijdt.

6°. De monoïde S_P , behoorende bij een singulier punt P, is hoogstens van den vierden graad.

7°. De formule (1) wordt:

$$m(m - 3) = d_1 + 4d_2 + 9d_3 + 16d_4 \dots (2).$$

8°. Elke kromme ρ^3 rust, wanneer er geen hoofdpunten zijn, in *tien* punten op het samenstel der singuliere lijnen.

Daar een ρ^3 der congruentie juist door tien voorwaarden bepaald is, volgt hieruit:

Een bilineaire congruentie $[\rho^3]$ omvat die krommen ρ^3 , welke tienmaal rusten op een groep singuliere lijnen, wanneer de congruentie geen hoofdpunten bezit. Een hoofdpunt is dubbelpunt op elk oppervlak Π_P^4 , daar het gaan door een vast punt twee voorwaarden vertegenwoordigt.

Heeft de congruentie één hoofdpunt, dan steunt iedere kromme ρ^3 nog slechts in *acht* punten op de singuliere lijnen.

In het algemeen zijn er $h \leq 5$ hoofdpunten; iedere kromme ρ^3 ontmoet dus de singuliere lijnen in $(10 - 2h)$ punten.

§ 2. Wij onderstellen nu, dat de congruentie een *singuliere lijn* bezit, die *viervoudig* is op elk oppervlak Λ . Zij P een willekeurig punt dezer lijn, dan valt het oppervlak S_P samen met het oppervlak Π_P^4 . Immers is P een singulier punt, dan bestaat Π_P^4 uit de ρ^3 , die minstens één koorde door P zenden, maar aan die voorwaarde voldoen ook de ρ^3 , die door P gaan.

In het algemeen zal dus voor een singulier punt S_P deel uitmaken van Π_P^4 .

Is nu P een punt van een viervoudige singuliere lijn, dan gaan door P vier krommen ρ^3 , die een rechte l snijden. Dan is S_P een oppervlak van den vierden graad, en moet S_P^4 met Π_P^4 samenvallen.

Dit oppervlak is nu een monoïde met drievoudig punt P .

Een koorde door P naar een ρ^3 , welke niet door P gaat, moet op Π_P^4 liggen, dus of singuliere koorde, of gemeenschappelijke koorde zijn.

Er zijn dus twee gevallen denkbaar:

1°. Alle ρ^3 der congruentie hebben een gemeenschappelijke koorde door P .

2°. De door P gaande koorden der ρ^3 zijn ribben van een kegel.

In het tweede geval onttaardt Π_P^4 in twee quadriekogels, n.l. in den kegel, die een ρ^3 door P projecteert en den genoemden kegel. De laatste moet nu de steunpunten van ∞^2 krommen ρ^3 bevatten, elk zijner ribben dus de steunpunten van ∞^1 krommen ρ^3 ; de kegel moet dan geheel uit singuliere koorden bestaan, maar dan kan P geen *willekeurig* punt van de viervoudige singuliere lijn zijn, wat tegen de veronderstelling is.

Een singuliere lijn, die *viervoudig* op alle oppervlakken Λ ligt, is dus een *gemeenschappelijke koorde*.

Van de tien punten, waarin een ρ^3 de singuliere lijnen ontmoet, liggen er nu twee op de gemeenschappelijke koorde h en de acht andere buiten h .

Kiest men P op h , dan heeft Π_P^4 met een willekeurige ρ^3 acht punten buiten h , dus vier op h gemeen, en daar

deze in de punten moeten liggen, waarin de ρ^3 op h steunt, is h *dubbelrechte* van Π_P^4 (wanneer P op h ligt).

Door elke twee punten van de gemeenschappelijke koorde gaan dus *twee* krommen der $[\rho^3]$.

Zijn P en Q punten van de gemeenschappelijke koorde, dan bestaat de doorsnede van Π_P^4 en Π_Q^4 uit de koorde, die voor beide oppervlakken dubbel telt, twee krommen ρ^3 en een *kromme van den zesden graad*, σ^6 , welke de meetkundige plaats der *singuliere punten* is.

Immers Π_P^4 en Π_Q^4 bestaan in dit geval uit de ρ^3 , die door P , resp. door Q gaan; ieder punt van σ^6 draagt dus twee ρ^3 en is *singulier*.

Behalve de dubbelrechte h gaan door P nog acht enkelvoudige rechten van Π_P^4 ; ¹⁾ projecteert men nu de monoïde uit P op een vlak, dan wordt elke vlakke doorsnede afgebeeld door een kromme ϕ^4 met een dubbelpunt A en acht vaste punten B .

De krommen ϕ^4 vormen een complex, daar zij ∞^3 in aantal zijn.

Elke ρ^3 van Π_P^4 gaat door P en wordt dus afgebeeld door een kegelsnede ϕ^2 . De drie snijpunten van een ρ^3 met een vlakke doorsnede van Π_P^4 worden afgebeeld door gemeenschappelijke punten van een ϕ^4 en een ϕ^2 . De vijf andere gemeenschappelijke punten van ϕ^4 en ϕ^2 zijn basispunten van den complex $\{\phi^4\}$; twee hiervan liggen in A , de andere in drie punten B_1, B_2, B_3 . Deze drie punten zijn dan de beelden van gemeenschappelijke koorden van alle ρ^3 door P .

Door ieder punt van de gemeenschappelijke koorde h gaan dus *drie singuliere koorden* b_1, b_2, b_3 . Deze zijn *parabolisch singulier*, daar telkens één steunpunt in P ligt.

Daar de singuliere koorden een stralencongruentie van

¹⁾ Heeft een monoïde Π_P^4 een dubbelrechte h , die door den top gaat, dan is deze ook dubbelrechte van den raakkegel in P . In de doorsnede van monoïde en raakkegel moet h viermaal geteld worden, zoodat de verdere doorsnede uit acht, door den top gaande rechten bestaat.

de vijfde orde vormen, is de gemeenschappelijke koorde h dubbelstraal dezer congruentie.

De overige vijf punten B_k ($k=4 \dots 8$) zijn beelden van rechten, die tot ontaarde figuren ρ^3 behooren.

Het beeld der singuliere kromme σ^6 heeft met elke ϕ^4 24 punten gemeen. Daaronder bevinden zich zes veranderlijke punten, n.l. de beelden van de snijpunten van σ^6 met een willekeurig vlak; 18 snijpunten van de beeldkromme met ϕ^4 zijn dus vaste punten.

Het beeld van σ^6 kan de singuliere koorden b_1, b_2, b_3 niet snijden; het gaat dus α -maal door A en β -maal door B_k ($k=4 \dots 8$).

Uit $2\alpha + 5\beta = 18$ volgt $\alpha = 4, \beta = 2$.

De gemeenschappelijke koorde h en σ^6 hebben dus vier punten gemeen.

Het beeld van σ^6 moet in A een viervoudig punt en vijf dubbelpunten B hebben, wat met elf dubbelpunten gelijk staat; daar een kromme van den zesden graad niet meer dan tien dubbelpunten kan bezitten, moet de beeldkromme dus ontaarden.

Wanneer een van de bestanddeelen een viervoudig punt A bezat, zou dat deel een C^5 moeten zijn, die dan geen verder singulier punt kan hebben.

De vijf punten B zouden dan de snijpunten van een C^5 met een C^1 moeten zijn. Maar dan zou het vlak PC^1 de monoïde Π_P^4 in vijf rechten snijden, hetgeen niet mogelijk is.

Is A drievoudig punt van een C^5 , dan moet C^1 door A gaan en C^5 nog in twee punten B snijden. De overige punten B^* zouden dan op C^5 liggen, maar dan zou de kegel (P, C^5) met Π_P^4 zesmaal h en tweemaal elk der drie rechten PB^* gemeen hebben, dus verder nog een ρ^8 . Deze zou dus uit P in een C^5 geprojecteerd worden.

Bestond de beeldkromme C^6 uit een C^4 met drievoudig punt A en een C^2 door A, dan moesten C^4 en C^2 nog vijf punten gemeen hebben, die dubbelpunten van C^4 zouden zijn. Dan had echter de kegel, die C^2 uit P

projecteert, met Π_P^4 tweemaal h en vijf rechten b gemeen; zij zouden dan nog een rechte b gemeen hebben, wat uitgesloten is, omdat de overige drie rechten b singuliere koorden zijn, dus niet door de singuliere lijn gesneden kunnen worden.

Bestond eindelijk C^6 uit een C^4 met dubbelpunt A en twee rechten door A , dan zouden op deze rechten nog vier dubbelpunten B liggen.

Het vijfde dubbelpunt B_8 moest dan het tweede dubbelpunt van C^4 zijn. Dan had de kegel (P, C^4) met Π_P^4 gemeen achtmaal h , tweemaal b_8 en vier andere rechten b , dus nog een ρ^6 , die uit P in een C^4 geprojecteerd zou worden.

Wij moeten dus besluiten dat de ontaarding alleen kan geschieden in *twee kubische krommen* C_1^3, C_2^3 , gaande door B_k ($k=4 \dots 8$), elk met een dubbelpunt in A .

De singuliere punten liggen dan op *twee kubische ruimtekrommen* σ_1^3, σ_2^3 , die ieder de gemeenschappelijke koorde h tot koorde hebben.

De kegelsnede, die een op Π_P^4 gelegen ρ^3 afbeeldt, heeft in A twee punten met C_1^3 (C_2^3) gemeen en snijdt C_1^3 (C_2^3) nog in vier punten.

Hieruit volgt dat elke ρ^3 in vier punten op elk der singuliere krommen σ_1^3, σ_2^3 en in twee punten op de gemeenschappelijke koorde h rust.

Door (σ_1^3, h) als basis leggen wij een bundel van quadratische oppervlakken, door (σ_2^3, h) een analogen bundel. Brengen wij elk exemplaar van den eersten bundel tot doorsnijding met elk exemplaar van den tweeden, dan ontstaat een $[\rho^3]$, welker exemplaren de krommen σ_1^3, σ_2^3 elk viermaal en de rechte h tweemaal snijden.

Wij vinden dus hier de *eerste algemeene congruentie* (Hoofdstuk II) terug.

§ 3. Wanneer de singuliere krommen σ_1^3, σ_2^3 samenvallen ontstaat een $[\rho^3]$, welker exemplaren twee punten

met de gemeenschappelijke koorde gemeen hebben en en de singuliere kromme σ^3 in vier punten aanraken.

Deze $[\rho^3]$ is de derde algemeene congruentie, die in Hoofdstuk IV behandeld werd.

§ 4. In de tweede plaats onderstellen wij dat de congruentie een singuliere lijn bezit, die *drievoudig* is op elk oppervlak Λ . Daar het oppervlak S_P nu van den derden graad is en een bestanddeel moet zijn van het oppervlak Π_P^4 , behoorend bij een willekeurig punt P van de singuliere lijn, valt Π_P^4 uiteen in de monoïde S_P^3 en een vlak ϕ door P .

De monoïde S_P^3 moet een dubbelpunt P hebben, anders zou iedere rechte door P singuliere koorde zijn.

Dat het vlak ϕ door P moet gaan volgt hieruit, dat zoo dit niet het geval was, een rechte door P een punt P_1 met ϕ en een punt P_2 met S_P^3 gemeen zou hebben. Dan zou $P_1 P_2$ koorde zijn van een ρ^3 , die niet door P ging en moest P_2 een singulier punt wezen; dit zou dan voor alle punten van S_P^3 gelden, wat ongerijmd is.

Een willekeurige ρ^3 snijdt ϕ in drie punten, waarvan er twee collineair met P zijn. Elke straal van den waaier (P, ϕ) bevat dus ∞^1 paren steunpunten en is singulier, waaruit volgt dat ieder punt van de drievoudige singuliere lijn top is van een *waaier van singuliere koorden*.¹⁾

Beelden wij de kubische monoïde door projectie uit P op een vlak af, dan worden de ρ^3 , die zij bevat, afgebeeld door kegelsneden ϕ^2 en de vlakke doorsneden van S_P^3 door krommen ϕ^3 , welke gaan door de doorgangen van de zes rechten, welke S_P^3 en haar raakkegel in P gemeen hebben.

Nu snijdt een ρ^3 een vlakke doorsnede van S_P^3 in drie

¹⁾ In Hoofdstuk III, § 1 is aangetoond, dat de singuliere koorden van deze congruentie een stralencongruentie van de vierde orde vormen. Thans blijkt dat deze congruentie van de zesde klasse is.

punten, dus gaan de kegelsneden ϕ^2 door drie van de zes hoofdpunten der afbeelding.

Deze drie hoofdpunten zijn de doorgangen van drie singuliere koorden door P, die niet tot den waaier (P, ϕ) behooren.

De kegelsneden ϕ^2 vormen, evenals de op S_P^3 gelegen ρ^3 , een bundel en hebben dus nog een vierde punt gemeen, dat het beeld is van een punt H der monoïde, waardoor alle ρ^3 van S_P^3 gaan.

Daar elke rechte door H de monoïde nog in twee punten snijdt, is zij koorde van twee ρ^3 , dus singuliere koorde. De ρ^3 snijden op haar een quadratische involutie in, en daar H tot twee, dus tot alle paren behoort, is de involutie parabolisch.

Wij zien hieruit dat H een *hoofdpunt* is; immers elke rechte door H is singulier.

Een willekeurige ρ^3 snijdt S_P^3 in negen punten, waarvan één in H ligt; de acht andere punten zijn singulier, want wanneer de congruentie een hoofdpunt bezit, rusten de ρ^3 in acht punten op de singuliere lijnen.

Hieruit volgt dat alle singuliere lijnen, ook de drievoudige, op S_P^3 liggen.

Zij nu Q een tweede punt van de drievoudige singuliere lijn, dan gaat door Q en P één ρ^3 , die op S_P^3 ligt, want de ρ^3 op S_P^3 vormen een bundel. De doorsnede van S_P^3 en S_Q^3 bestaat uit deze ρ^3 en een *kromme van den zesden graad*, σ^6 , die de drievoudige singuliere lijn moet zijn, waarop alle exemplaren der $[\rho^3]$ in acht punten rusten.

De congruentie bestaat dus uit de krommen ρ^3 , die door het hoofdpunt H gaan en in acht punten op de singuliere kromme σ^6 steunen.

De krommen ρ^3 zijn de partieele doorsnijdingen van de exemplaren van een net van kubische oppervlakken, dat H en σ^6 tot basis heeft.

De onderstelling, dat de congruentie een drievoudige singuliere lijn bezit, voert ons dus terug tot de *tweede algemeene congruentie* (Hoofdstuk III).

§ 5. Een derde mogelijkheid is, dat de congruentie een singuliere lijn bezit, die *dubbellijn* op elk oppervlak Λ is. Zij P weer een willekeurig punt dezer dubbellijn, dan vormen de door P gaande ρ^3 een quadratisch oppervlak S_P^2 , waarop zij gerangschikt liggen in een bundel met P en drie andere punten der dubbellijn tot basispunten.

Immers door centrale projectie uit P gaan de ρ^3 over in kegelsneden ϕ^2 en de vlakke doorsneden van S_P^2 in kegelsneden ψ^2 door twee vaste punten, n.l. de doorgangen van de beide beschrijvenden van S_P^2 , welke door den top P gaan.

Nu heeft een willekeurige ρ^3 van S_P^2 met een vlakke doorsnede drie punten gemeen; de kegelsneden ϕ^2 en ψ^2 snijden elkaar dus ook in drie punten.

De kegelsneden ϕ^2 gaan derhalve door één der hoofdpunten van de afbeelding en moeten nog drie andere punten gemeen hebben, die beelden zijn van punten Q van S_P^2 .

De op S_P^2 gelegen ρ^3 gaan dus door vier vaste punten, n.l. P en drie punten Q , en snijden de dubbellijn in vier punten, want de ∞^1 krommen ρ^3 door Q vormen een oppervlak S_Q^2 , dat met S_P^2 samenvalt.

Laten wij nu P de singuliere dubbellijn doorloopen, dan beschrijft S_P^2 een stelsel ∞^1 . Twee exemplaren van dit stelsel hebben een kromme σ^4 of een kromme σ^3 en een rechte gemeen.

In het eerste geval draagt elk punt van σ^4 twee ρ^3 en is σ^4 dus singulier. Dan vormen de oppervlakken S_P^2 een bundel, en elk oppervlak draagt een bundel (ρ^3) met vier basispunten. Singuliere punten der congruentie zijn dan de punten van σ^4 en de basispunten der bundels (ρ^3).

Deze basispunten vormen in het algemeen een tweede singuliere lijn, die elk oppervlak S_P^2 in vier punten snijdt.

Is Q een punt van deze tweede singuliere lijn, dan valt het oppervlak Π_Q^4 uiteen in S_Q^2 en een quadriekegel met top Q ; immers elke rechte door Q kan slechts

één punt van S_Q^2 bevatten, tenzij alle punten van S_Q^2 singulier waren.

De tweede singuliere kromme ligt op den quadriegel en is, daar zij uit elk harer punten door een quadriegel geprojecteerd wordt, een *kubische ruimtekromme* σ_1^3 .

De kromme σ^4 kan slechts dubbelkromme of enkelvoudige kromme op Λ zijn. Het laatste is onmogelijk, daar dan formule (2) herleid wordt tot

$$m(m-3) = 4 + 4 \times 3 = 16$$

waaraan niet door geheele waarden van m kan voldaan worden. ¹⁾

Onderstellen wij nu, dat σ^4 dubbelkromme en R een harer punten is, dan wordt Π_R^4 gesplitst in Ψ_R^2 (de meetkundige plaats der ρ^3 door R) en een quadriegel met top R . Daar σ_1^3 niet door R gaat, kan zij niet op den quadriegel liggen, maar behoort zij tot Ψ_R^2 .

Is S een tweede punt van σ^4 , dan bestaat de doorsnede van Ψ_R^2 en Ψ_S^2 uit σ_1^3 en een singuliere rechte s . Daar s een deel van σ^4 moet zijn, ontgaat σ^4 in een *kubische ruimtekromme* σ_2^3 en s .

Daarmede komen wij weer terug tot de *eerste algemeene congruentie*.

Wanneer σ^4 ontgaat in een σ_2^3 en een rechte, bestaat de doorsnede van S_P^2 en S_Q^2 uit een ρ^3 der congruentie en een singuliere rechte.

Daar deze niet kan veranderen, wanneer P en Q de singuliere dubbellijn doorlopen, moet deze rechte *gemeenschappelijke koorde* zijn.

Laat men nu Q de dubbellijn doorlopen terwijl P onveranderd blijft, dan snijdt S_Q^2 op S_P^2 een bundel (ρ^3) in. Hieruit volgt dat de oppervlakken S_Q^2 een bundel vormen, waarvan de gemeenschappelijke koorde en een kromme σ^3 de basis vormen.

Ook deze onderstelling brengt ons tot de eerste algemeene congruentie terug.

¹⁾ In formule (2) moet n.l. d_2 door σ_1^3 en d_1 door σ^4 vervangen worden.

§ 6. Er blijft nu nog over het geval te beschouwen, dat de congruentie alleen singuliere lijnen bezit, die *enkelvoudig* op elk oppervlak Λ liggen.

Het oppervlak S_p , gevormd door de ρ^3 , die door een punt P van zulk een singuliere lijn gaan, wordt nu een plat vlak, zoodat de ρ^3 door P moeten ontaarden in een vast en een veranderlijk bestanddeel; het laatste doorloopt een vlakken bundel, het eerste is de meetkundige plaats der singuliere punten.

De enkelvoudige singuliere lijnen zullen dus bestaan uit kegelsneden en uit rechten. Haar gezamenlijke graad kan niet hooger zijn dan 16 en uit de formule

$$m(m-3) = d_1$$

volgen als mogelijke gevallen

$$m \equiv 4, d_1 = 4 \text{ en } m = 5, d_1 = 10.$$

Stellen wij $d_1 = 4$, dan kunnen de singuliere lijnen bestaan uit:

- 1°. Twee rechten en een kegelsnede.
- 2°. Twee kegelsneden.
- 3°. Vier rechten.

Bij een singuliere rechte s behoort een bundel van kegelsneden (∂^2); het vlak van dien bundel snijdt Λ^4 in een kegelsnede ∂^2 , die door den doorgang van s gaat, en in een singuliere kegelsnede of een paar singuliere rechten.

Bij een singuliere kegelsnede σ^2 behoort een waaier (d); zijn vlak snijdt Λ^4 in een straal van den waaier en in een singuliere figuur, die uit een kegelsnede en een rechte of uit drie rechten bestaat.

Wanneer nu de singuliere lijnen uit een kegelsnede en twee rechten bestonden, zouden deze over drie vlakken verdeeld moeten zijn, wat onmogelijk is.

Om dezelfde reden moet het tweede geval uitgesloten worden.

* Zijn er vier singuliere rechten s_1, s_2, s_3, s_4 , die dus een scheeve vierzijde vormen, dan moet Λ^4 een regelvlak zijn, daar het de ρ^3 (die l tot koorde heeft) als

dubbelkromme en voorts de vierzijde moet bevatten.

De rechte l en de vierzijde zijn dus richtlijnen van Λ^4 .

Daar elke rechte, die de dubbelkromme ρ^3 , de rechte l en twee kruisende lijnen s snijdt, tot Λ^4 behoort, bestaat dit regelvlak uit twee quadratische regelvlakken (l, s_1, s_3) , en (l, s_2, s_4) , die een ρ^3 gemeen hebben.

Laat men nu l veranderen, dan bepalen de beide quadratische regelvlakken telkens een ρ^3 , die l tot koorde heeft.

Het aldus verkregen stelsel $\{\rho^3\}$ is evenwel geen congruentie, maar een *complex*.

Stellen wij daarentegen $m=5$, $d_1=10$, dan snijdt een vlak ϕ door l het oppervlak Λ^5 in een kromme ϕ^4 met dubbelpunt buiten l .

De puntenparen, die met een punt van l de doorgangen der ρ^3 met ϕ vormen, zijn collineair met het dubbelpunt van ϕ^4 ; want een ϕ^4 van geslacht twee bevat slechts één pareninvolutie.

De puntenparen worden op ϕ^4 ingesneden door de stralen van een waaier met top in het dubbelpunt van ϕ^4 , d. w. z. in het punt, dat de doorgang is van de ρ^3 , die l tot koorde heeft.

Door toevoeging van elk punt van l aan de rechte, die de beide andere doorgangen der ρ^3 verbinden, ontstaat een *poolstelsel*.

De drietallen snijpunten van ϕ met de krommen ρ^3 vormen pooldriehoeken van een kegelsnede, welke bestaat uit de raakpunten der krommen ρ^3 , die ϕ aanraken.

Dan zijn wij echter tot de *congruentie van REYE* (Hoofdstuk I) teruggekomen, die een bijzonder geval is van de eerste en tevens van de tweede algemeene congruentie.

Uit dit onderzoek blijkt dus dat de in de Hoofdstukken II, III en IV behandelde algemeene congruenties de *eenig mogelijke* zijn.

HOOFDSTUK VI.

Bijzondere gevallen van de eerste algemeene congruentie.

§ 1. Denken wij ons gegeven vier punten H_1, H_2, H_3, H_4 en twee rechten, s_1 door H_1 en s_2 door H_2 . Door $H_1 H_2, H_1 H_3, H_1 H_4$ en s_1 leggen wij een bundel van quadriekogels (K_1^2), door $H_2 H_1, H_2 H_3, H_2 H_4$ en s_2 een tweeden bundel van quadriekogels (K_2^2).

Deze bundels hebben de basisribbe $H_1 H_2$ gemeen en brengen dus een *bilineaire congruentie* [ρ^3] voort.¹⁾

De congruentie heeft vier hoofdpunten H_1, H_2, H_3, H_4 , zes hoofdkoorden $H_k H_l$ en twee singuliere rechten s_1, s_2 , welke ook als *parabolische hoofdkoorden* kunnen opgevat worden.

De kegel K_2^2 , gaande door een punt S_1 van s_1 , snijdt alle kegels K_1^2 , dus draagt S_1 ∞^1 krommen ρ^3 ; elk punt van s_1 is singulier en het oppervlak, gevormd door de ρ^3 , die door S_1 gaan, is de kegel K_2^2 , welke door S_1 bepaald wordt.

Wij besluiten hieruit dat s_1 (en analoog s_2) *singuliere rechte van de tweede orde* is.

De ontaarde figuren, die uit een rechte d en een kegelsnede δ^2 bestaan, kunnen tot vier groepen gebracht worden.

1^o. De rechte $d_{12} \equiv H_1 H_2$ vormt een ρ^3 met elke kegelsnede, die door H_3 en H_4 gaat en op d_{12}, s_1 en s_2 rust. Dergelijke kegelsneden vormen een oppervlak van den vierden graad, waarvan de vlakken $H_1 H_3 H_4$ en $H_2 H_3 H_4$ deel uitmaken. Het vlak $H_1 H_3 H_4$ toch bevat

¹⁾ Dr. JAN DE VRIES: *Eenige bijzondere bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen*. (Versl. K. A. W. 23, blz. 1232).

een bundel van kegelsneden met H_1, H_3, H_4 en den doorgang van s_2 tot basispunten; in het vlak $H_2 H_3 H_4$ ligt een analoge bundel.

Deze beide vlakken mogen echter niet in rekening gebracht worden voor de meetkundige plaats (δ^2), want wanneer d_{12} met δ^2 een ρ^3 vormt, moeten de kegels, welke die ontaarde figuren voortbrengen, d_{12} tweemaal bevatten, dus elkaar langs d_{12} aanraken. Ontaardt nu de kegel K_1^2 in de vlakken $H_1 H_3 H_4$ en $s_1 H_1 H_2$, dan levert hij een ontaarde figuur met den kegel K_2^2 , die het vlak $s_1 H_1 H_2$ langs d_{12} aanraakt. Er is slechts één kegel K_2^2 , die daaraan voldoet. Van de ∞^2 kegelsneden in $H_1 H_3 H_4$ behoort dus slechts ééne tot de meetkundige plaats (δ^2), dus kan het vlak $H_1 H_3 H_4$, en analoog het vlak $H_2 H_3 H_4$ niet meegeteld worden.

Als meetkundige plaats der kegelsneden δ^2 blijft dan de *hyperboloïde* Δ^2 over, die door d_{12}, s_1, s_2, H_3 en H_4 gaat.

Dit resultaat kan ook op de volgende wijze verkregen worden.

Kiest men een punt op d_{12} , twee punten op s_1 en twee punten op s_2 , dan wordt door deze vijf punten en de vier hoofdpunten een hyperboloïde Δ^2 bepaald.

Elk vlak door de rechte $d_{34} \equiv H_3 H_4$ snijdt de hyperboloïde in een kegelsnede δ^2 , die door H_3, H_4 gaat en op d_{12}, s_1, s_2 rust; dus is Δ^2 de meetkundige plaats der kegelsneden, die met d_{12} figuren ρ^3 vormen.

2°. De rechte $d_{24} \equiv H_2 H_4$ vormt figuren ρ^3 met de kegelsneden van een bundel, gelegen in het vlak (H_3, s_1) , welke bundel H_1, H_3 en de doorgangen van d_{24} en s_2 tot basispunten heeft. Evenzoo moeten d_{13}, d_{23} en d_{14} gecombineerd worden met kegelsneden in de vlakken $(H_4, s_2), (H_4, s_1)$ en (H_3, s_2) .

3°. De transversaal g_3 uit H_3 over s_1 en s_2 levert ontaarde figuren met de kegelsneden van een bundel in het vlak $H_1 H_2 H_4$, welke bundel H_1, H_2, H_4 en den doorgang van g_3 tot basispunten heeft.

Hetzelfde geldt voor de transversaal g_4 uit H_4 over s_1 en s_2 ; deze wordt aangevuld door een bundel van kegelsneden in het vlak $H_1 H_2 H_3$.

4^o. In het vlak $H_1 H_3 H_4$ ligt een bundel van kegelsneden met basis H_1, H_3, H_4 en den doorgang van s_2 ; elke dezer kegelsneden moet gecombineerd worden met een straal van den waaier, welke H_2 tot top heeft en in het vlak (H_2, s_1) gelegen is.

Analoog worden de kegelsneden van den bundel in $H_2 H_3 H_4$ tot figuren ρ^3 aangevuld door de stralen van den waaier (H_1, s_2) .

In dit vierde geval zijn de *beide* bestanddeelen der ontaarde figuren veranderlijk.

De kegelsneden δ^2 vormen een meetkundige plaats van den *tienden graad*, die uiteenvalt in de *hyperboloïde* Δ^2 en *acht vlakken*.

Daar een willekeurige rechte l de hyperboloïde Δ^2 in twee punten en elk der acht vlakken, waarin de bundels (δ^2) liggen, in één punt snijdt, ontmoet l tien ontaarde figuren (d, δ^2).

Een ontaarding in drie rechten ontstaat, doordat een kegelsnede δ^2 in twee rechten uiteenvalt. Vooreerst kan d_{12} aangevuld worden door een lijnenpaar van de hyperboloïde Δ^2 , dus door een rechte van het stelsel (s_1, s_2) met een rechte van het stelsel d_{12} . Van deze beide aanvullende rechten moet de eene door H_3 , de andere door H_4 gaan.

Wij moeten dus d_{12} samenstellen met de transversaal g_3 uit H_3 over s_1 en s_2 en de transversaal h_4 uit H_4 over g_3 en d_{12} of met de transversalen g_4 en h_3 .

Verder vormt elk der rechten $d_{24}, d_{13}, d_{23}, d_{14}, g_3, g_4$ ontaarde figuren met de drie lijnenparen van den toegevoegden bundel van kegelsneden.

Hieronder vinden wij de eerstgenoemde ontaarding d_{12}, g_3, h_4 en d_{12}, g_4, h_3 terug.

Eindelijk vormen de drie lijnenparen van elk der bundels (δ^2) in $H_1 H_3 H_4$ en $H_2 H_3 H_4$ ontaarding met

telkens een straal van den waaier (H_2, s_1) of den waaier (H_1, s_2).

De congruentie bevat dus in het geheel 24 *figuren*, die uit drie rechten bestaan.

§ 2. De krommen ρ^3 welke een willekeurige rechte l snijden, vormen een oppervlak Λ , waarvan de graad gemakkelijk te bepalen is door de beschouwing van een vlakke doorsnede, bijv. met $H_1 H_2 H_3$. In dat vlak liggen de volgende bestanddeelen van ontaarde krommen: de kegelsnede door H_1, H_2, H_3 en de doorgangen van g_1 en l ; de rechte d_{12} , welke tweemaal in rekening gebracht moet worden, daar l op Δ^2 twee δ^2 snijdt, die met d_{12} ontaarde figuren ρ^3 vormen; tenslotte de rechten d_{13} en d_{23} , die elk behooren tot een figuur, waarvan de δ^2 door l gesneden wordt.

Deze bestanddeelen vormen samen een doorsnede van den zesden graad.

Het gezochte oppervlak is dus een Λ^6 met twee viervoudige punten H_1, H_2 , twee drievoudige punten H_3, H_4 , drie dubbelrechten d_{12}, s_1, s_2 en negen enkelvoudige rechten, waaronder $d_{13}, d_{23}, d_{14}, d_{24}, g_3, g_4$, die op alle oppervlakken Λ^6 liggen en drie veranderlijke rechten, n. l. l en een straal van elk der beide waaiers (H_2, s_1) en (H_1, s_2).

Dat s_1 en s_2 dubbelrechten moeten wezen volgt hieruit, dat zij singuliere rechten van de tweede orde zijn.

Eindelijk vindt men op Λ^6 tien kegelsneden, waarvan acht elk met een der enkelvoudige rechten en twee met de dubbelrechte d_{12} ontaarde figuren ρ^3 vormen, en de dubbelkromme ρ^3 , die l tot koorde heeft.

De veelvoudigheid der hoofdpunten kan als volgt bevestigd worden.

Een willekeurige ρ^3 snijdt Λ^6 in 18 punten; op de dubbelrechten s_1, s_2 heeft ρ^3 twee punten, die tweemaal gerekend moeten worden. De veertien overige punten liggen in de hoofdpunten, en wel vertegenwoordigen H_1, H_2 ieder vier, H_3, H_4 ieder drie punten.

Twee oppervlakken Λ^6 , behoorende bij de rechten l en l' hebben gemeen de zes krommen ρ^3 , die op beide rechten rusten, de drie dubbelrechten en zes enkelvoudige rechten. Hun doorsnede is dus naar behooren van den graad $6 \times 3 + 3 \times 2 \times 2 + 6 = 36$.

§ 3. De kromme ϕ^5 , die met l de doorsnede vormt van Λ^6 met een vlak ϕ door l , gaat door de steunpunten van l op de dubbelkromme ρ_1^3 en heeft dubbelpunten in de doorgangen D_{12} , S_1 , S_2 van d_{12} , s_1 , s_2 en in den derden doorgang van ρ_1^3 . Zij snijdt l verder nog in drie punten, waar ϕ door krommen ρ^3 aangeraakt wordt.

De aanrakingskromme is dus een *kubische kromme* ϕ^3 , welke door D_{12} , S_1 , S_2 gaat.

Met een oppervlak Λ^6 , behoorende bij een niet in ϕ gelegen rechte m , heeft ϕ^3 18 punten gemeen. Nu bevat Λ^6 de rechten d_{12} , s_1 , s_2 tweemaal en heeft ϕ^3 op elk dezer rechten een enkelvoudig punt.

Behalve deze bijzondere punten zijn er dus twaalf punten, waar ϕ geraakt wordt door krommen ρ^3 , welke m snijden.

De meetkundige plaats der aan ϕ rakende ρ^3 is dus een *oppervlak van den twaalfden graad*, Φ^{12} .

De vlakke doorsnede van Φ^{12} bestaat uit tweemaal de aanrakingskromme ϕ^3 en de *complementaire kromme* ϕ^6 .

Het vlak ϕ snijdt de hyperboloïde Δ^2 in een kegelsnede, waarop de δ^2 van Δ^2 een quadratische involutie bepalen. Daar deze I^2 twee dubbelpunten heeft, (de raakpunten der raakvlakken door H_3 , H_4) is D_{12} dubbelpunt der complementaire kromme. Hetzelfde geldt voor S_1 en S_2 .

De vlakke doorsnede van Φ^{12} moet nu viermaal door D_{12} , S_1 , S_2 gaan; m. a. w. d_{12} , s_1 , s_2 zijn *viervoudige rechten* van Φ^{12} .

Elk der acht bundels (δ^2) snijdt het vlak ϕ volgens een quadratische involutie; elke bundel bevat dus twee exemplaren, die ϕ aanraken.

Hieruit volgt dat de rechten d_{13} , d_{14} , d_{23} , d_{24} , g_3 , g_4 *dubbelrechten* van Φ^{12} zijn, terwijl dit oppervlak nog *vier enkelvoudige rechten* bezit, n. l. twee stralen van elk der waaiers (H_2, s_1) en (H_1, s_2) .

De ontaarde figuur, bestaande uit de rechte d_{12} en een kegelsnede δ^2 van Δ^2 , snijdt Φ^{12} in $12 + 24$ punten. De kegelsnede bevat een punt van elk der viervoudige rechten d_{12} , s_1 , s_2 , heeft dus 12 punten in H_3 , H_4 , zoodat H_3 , H_4 *zesvoudige punten* van Φ^{12} zijn.

Dit kan als volgt bevestigd worden. De rechte h_4 , die deel uitmaakt van een ontaarde ρ^3 , snijdt Φ^{12} in 12 punten, waarvan zes samenvallen in H_4 , vier in het snijpunt met d_{12} en twee in het snijpunt met g_3 .

Onderzoeken wij nu de snijpunten van Φ^{12} met de ontaarde figuur, die bestaat uit d_{24} en een kegelsnede door H_1 , H_3 , D_{24} en S_2 .

Zij S_1^* het snijpunt der kegelsnede met s_1 . Van de 24 snijpunten der kegelsnede met Φ^{12} liggen er zes in H_3 , twee in D_{24} , vier in S_1^* , vier in S_2 , dus acht in H_1 .

Dan zijn H_1 , H_2 *achtvoudige punten* van Φ^{12} .

Dit blijkt ook hieruit, dat een kegelsnede, welke g_3 tot een figuur ρ^3 aanvult, Φ^{12} snijdt in 24 punten, waarvan twee in den doorgang van g_3 , zes in H_4 en zestien in H_1 , H_2 samenvallen.

Daar bij een m -voudige rechte op Φ^{12} , die deel uitmaakt van een ontaarde ρ^3 , m kegelsneden behooren, die ϕ raken, en Φ^{12} één viervoudige rechte, zes dubbelrechten en vier enkelvoudige rechten draagt, welke aan dien eisch voldoen, bezit dit oppervlak $4 + 6 \times 2 + 4 = 20$ kegelsneden.

Alle multipliciteiten van Φ^{12} zijn het dubbele van de multipliciteiten van Λ^6 .

De aanrakingskromme ψ^3 in een vlak ψ snijdt Φ^{12} in 36 punten; daar ψ^3 enkelvoudige punten op d_{12} , s_1 , s_2 heeft en Φ^{12} deze rechten viervoudig draagt, vertegenwoordigen deze punten $3 \times 4 = 12$ snijpunten, zoodat wij vinden:

Er zijn 24 krommen der $[\rho^3]$, die twee gegeven vlakken ϕ en ψ aanraken.

De meetkundige plaats van de raakpunten der raaklijnen, die een rechte l snijden, is een oppervlak van den vierden graad.

Een vlak ϕ is *osculatievlak* voor zes krommen der $[\rho^3]$.

De raakpunten der osculatievlakken door een rechte l liggen op een *ruimtekromme van den twaalfden graad*, ω^{12} , met *zesvoudige snijlijn* l .

De punten, die hun osculatievlak door een punt P zenden, vormen een oppervlak van den zevenden graad, Ω^7 .

Dit blijkt ook hieruit dat de doorsnede van dit oppervlak met het vlak $H_1 H_2 H_3$ van den zevenden graad is. Is G_4 de doorgang van g_4 , dan bestaat deze doorsnede uit de dubbelrechte d_{12} en de rechten d_{13} , d_{23} , $H_1 G_4$, $H_2 G_4$ en $H_3 G_4$. Verder zien wij hieruit dat H_1 , H_2 *viervoudige punten* en H_3 , H_4 *drievoudige punten* van Ω^7 zijn; en daar een willekeurige ρ^3 , behalve drie veranderlijke punten, slechts de hoofdpunten en een punt op s_1 , s_2 met Ω^7 gemeen kan hebben, zijn s_1 , s_2 *dubbelrechten* van Ω^7 .

Het oppervlak Π_P^4 heeft *vijsf kegelpunten* P , H_1 , H_2 , H_3 , H_4 .

Een willekeurig punt P draagt *vijsf singuliere koorden*; hiertoe behooren de vier rechten $P H_k$, die *parabolisch singulier* zijn.

De raaklijnen der krommen ρ^3 vormen een *complex van den zesden graad*.

De complexkegel met top P bezit *vier keerribben* $P H_k$ en *één dubbelribbe*.

Al deze eigenschappen kunnen gemakkelijk gevonden worden met de in Hoofdstuk II, § 4—6 aangegeven methoden.

In een willekeurig vlak ϕ bepaalt de hier besproken $[\rho^3]$ een kubische involutie met drie singuliere punten van de tweede orde (de doorgangen van d_{12} , s_1 , s_2) en

zes singuliere punten van de eerste orde (de doorgangen van d_{13} , d_{14} , d_{23} , d_{24} , g_3 , g_4).

§ 4. In de tweede plaats denken wij ons gegeven drie punten H_1 , H_2 , H_3 en vier rechten, waarvan twee (s_1, s_1') door H_1 en twee (s_2, s_2') door H_2 gaan.

De bundels van quadri kegels (K_1^2) met basisribben $H_1 H_2$, $H_1 H_3$, s_1 , s_1' en (K_2^2) met basisribben $H_2 H_1$, $H_2 H_3$, s_2 , s_2' hebben de basisribbe $H_1 H_2$ gemeen en brengen dus weer een *bilineaire congruentie* $[\rho^3]$ voort.

Deze heeft drie hoofdpunten H_1 , H_2 , H_3 , drie hoofdkoorden $H_k H_l$ en vier singuliere rechten van de tweede orde s_1 , s_1' , s_2 , s_2' .

De exemplaren der $[\rho^3]$, die in een rechte en een kegelsnede ontaarden, kunnen ook hier tot vier groepen gebracht worden.

1°. Beschouwen wij het *kubisch regelvlak* Δ^3 , dat d_{12} tot dubbelrechte en de tweede transversaal t der vier rechten s tot enkelvoudige richtlijn heeft.

Het is geheel bepaald door de vier rechten s en de transversaal g uit H_3 over d_{12} en t , want de beschrijvende bepalen op d_{12} en t een verwantschap (1, 2) die door vijf puntenparen vastgelegd wordt.

Een willekeurig vlak door H_3 en een beschrijvende snijdt Δ^3 nog in een kegelsnede, welke door H_3 gaat en d_{12} , s_1 , s_1' , s_2 , s_2' ontmoet.

Het oppervlak Δ^3 is dus de meetkundige plaats der kegelsneden δ^2 , die d_{12} tot ontaarde figuren ρ^3 aanvullen.

2°. De rechte $d_{13} \equiv H_1 H_3$ wordt samengesteld met de δ^2 van een bundel, gelegen in het vlak (s_2, s_2') , welke bundel H_2 en de doorgangen van d_{13} , s_1 en s_1' tot basispunten heeft. Analoog behoort bij d_{23} een bundel (δ^2) in het vlak (s_1, s_1') .

3°. De transversaal t moet vereenigd worden met de exemplaren van een bundel (δ^2) in het vlak $H_1 H_2 H_3$, van welken bundel H_1 , H_2 , H_3 en de doorgang van t de basispunten zijn.

4°. Tenslotte worden de kegelsneden in het vlak (H_3, s_1) , welke een bundel vormen met H_1, H_3 en de doorgangen van s_2 en s_2' tot basispunten, gecombineerd met de stralen van den waaier (H_3, s_1') .

Evenzoo vindt men in de vlakken (H_3, s_1') , (H_3, s_2) en (H_3, s_2') bundels van kegelsneden; de aanvullende rechten zijn de stralen der waaiers (H_2, s_1) , (H_1, s_2') en (H_1, s_2) . Deze vierde groep bestaat uit ontaardingen, welker *beide* bestanddeelen veranderlijk zijn.

De meetkundige plaats (δ^2) is ook bij deze congruentie van den *tienden graad*; zij bestaat uit het *kubisch regelvlak* Δ^3 en *zeven vlakken*.

Een willekeurige rechte l snijdt het kubisch regelvlak in drie punten en de vlakken, waarin de bundels (δ^2) gelegen zijn, ieder in één punt. Zij ontmoet derhalve tien ontaarde figuren (d, δ^2).

De zeven bundels van kegelsneden, die deel uitmaken van de meetkundige plaats (δ^2), bevatten ieder drie lijnenparen. Deze kunnen met d_{13}, d_{23}, t of een straal van de waaiers (H_2, s_1') , (H_2, s_1) , (H_1, s_2) en (H_1, s_2') tot ontaarde figuren ρ^3 gecombineerd worden.

Elke op het oppervlak Δ^3 gelegen kegelsnede vormt met een beschrijvende b een volledige doorsnede. Het vlak der rechten g en t bevat nog een beschrijvende b_0 , die met de ontaarde $\delta^2(t, g)$ een volledige doorsnede vormt.

Nu rust t op de vier rechten s , terwijl g door H_3 en d_{12} door H_1 en H_2 gaat, dus vormen t, g en d_{12} een ontaarde figuur ρ^3 .

De congruentie bezit bijgevolg 22 figuren, welke uit drie rechten bestaan.

§ 5. Ter bepaling van den graad van het oppervlak Λ beschouwen wij weer de doorsnede met het vlak $H_1 H_2 H_3$. Deze bestaat uit de kegelsnede door H_1, H_2, H_3 en de doorgangen van t en l ; uit de rechte d_{12} , driemaal gerekend, omdat l in hare drie snijpunten met Δ^3 drie kegelsneden δ^2 ontmoet, die met d_{12} ontaarde figuren

ρ^3 geven; en uit de rechten d_{13}, d_{23} , welke tot figuren ρ^3 worden aangevuld door kegelsneden δ^2 , die l snijden.

De doorsnede is van den *zevendenden graad*. Het oppervlak is dus een Λ^7 met *twee vijfvoudige punten* H_1, H_2 , een *drievoudig punt* H_3 , een *drievoudige rechte* d_{12} , vier *dubbelrechten* s en *acht enkelvoudige rechten*, waaronder d_{13}, d_{23}, t , die op *alle* oppervlakken Λ^7 liggen en vijf veranderlijke rechten, n. l. l en één straal van elk der vier waaiers.

Eindelijk draagt Λ^7 de *dubbelkromme* ρ^3_1 en *tien kegelsneden*.

De meetkundige plaats der punten, waar een vlak ϕ door krommen der $[\rho^3]$ wordt aangeraakt, is een kromme van den *vierden graad*, ϕ^4 , met een dubbelpunt in den doorgang van d_{12} en vier enkelvoudige punten in de doorgangen der vier rechten s .

De *complementaire kromme*, ϕ^6 , is weder een kromme van den *zesden graad* met vijf dubbelpunten in de doorgangen der rechten $d_{12}, s_1, s_1', s_2, s_2'$.

De krommen ρ^3 , welke ϕ aanraken, vormen een oppervlak van den *veertienden graad*, Φ^{14} , met een *zesvoudige rechte* d_{12} , vier *viervoudige rechten* s , drie *dubbelrechten* d_{13}, d_{23}, t en *acht enkelvoudige rechten*, n. l. twee stralen van elken der vier waaiers.

Daar de zesvoudige rechte d_{12} , de drie dubbelrechten en de acht enkelvoudige rechten tot ontaarde figuren ρ^3 behooren, draagt Φ^{14} $6 + 3 \times 2 + 8 = 20$ kegelsneden.

Om de veelvoudigheid der hoofdpunten te bepalen beschouwen wij de snijpunten van Φ^{14} met een kegelsnede δ^2 van Δ^3 .

Van de 28 snijpunten vallen er zes samen in een punt van d_{12} en 4×4 in de steunpunten van δ^2 op de singuliere rechten. De overige zes punten liggen in H_3 , dus is H_3 *zesvoudig punt* van Φ^{14} .

Een willekeurige ρ^3 snijdt Φ^{14} in 42 punten; daarvan liggen er zes in H_3 , zestien op de singuliere rechten, dus twintig in H_1, H_2 .

De hoofdpunten H_1 en H_2 zijn dus *tienvoudige punten* van Φ^{14} .

De vlakke doorsnede ψ^{14} van Φ^{14} met een vlak ψ heeft een zesvoudig punt D_{12} en vier viervoudige punten S ; de aanrakingskromme ψ^4 bezit een dubbelpunt D_{12} en vier enkelvoudige punten S . Hieruit leiden wij af, dat ψ in $56 - 6 \times 2 - 4 \times 4 = 28$ punten wordt aangeraakt door krommen ρ^3 , die ook ϕ aanraken.

Er zijn dus 28 krommen ρ^3 , die twee gegeven vlakken ϕ en ψ aanraken.

Ieder vlak ϕ is *osculatievlak* voor zes krommen ρ^3 .

De complementaire krommen in de vlakken ϕ door l vormen een oppervlak van den *achtsten graad* met dubbelrechte l .

Door l gaan *zeven* osculatievlakken, welker raakpunt op l ligt.

De meetkundige plaats van de raakpunten der osculatievlakken door l is een kromme van den *dertienden graad*, ω^{13} , met *zevenvoudige snijlijn* l .

De raakpunten van de osculatievlakken door een punt P vormen een oppervlak van den *achtsten graad*, Ω^8 .

Zij T de doorgang van t met het vlak $H_1 H_2 H_3$, dan bestaat de doorsnede van Ω^8 met dit vlak uit de drievoudige rechte d_{12} en de rechten d_{13} , d_{23} , $H_1 T$, $H_2 T$ en $H_3 T$, welke tezamen naar behooren een doorsnede van den achtsten graad vormen.

Hieruit volgt verder dat H_1 , H_2 *viervoudige punten* van Ω^8 zijn, H_3 *drievoudig punt* is en de vier rechten s als dubbelrechten op te vatten zijn.

De meetkundige plaats van de raakpunten der raaklijnen, die een rechte l snijden, is een oppervlak van den *vijsden graad*.

Het oppervlak Π_P^4 heeft *vier kegelpunten* P , H_1 , H_2 , H_3 .

Door een punt P gaan *vijs* singuliere koorden, onder welke de drie rechten $P H_k$, die *parabolisch singulier* zijn.

De raaklijnen der ρ^3 vormen een *complex van den zesden graad*.

De complexkegel met top P heeft *drie keerribben* $P H_k$ en *twee dubbelribben*.

In een willekeurig vlak ϕ bepaalt deze congruentie een kubische involutie met één singulier punt van de derde orde (de doorgang van d_{12}), vier singuliere punten van de tweede orde (de doorgangen der vier rechten s) en drie singuliere punten van de eerste orde (de doorgangen van d_{13} , d_{23} en t).

§ 6. In de derde plaats nemen wij twee vaste punten H_1 , H_2 aan en zes rechten, van welke s_1 , s_1' , s_1'' door H_1 en s_2 , s_2' , s_2'' door H_2 gaan.

De partieele doorsneden van twee bundels van quadri-kegels, welke achtereenvolgens tot basisribben hebben $H_1 H_2$, s_1 , s_1' , s_1'' en $H_2 H_1$, s_2 , s_2' , s_2'' vormen een *bilineaire congruentie* $[\rho^3]$, die H_1 , H_2 tot *hoofdpunten*, $H_1 H_2$ tot *hoofdkoorde* en de zes rechten s tot *singuliere rechten van de tweede orde* heeft.

Ter bepaling van de ontaarding (d, δ^2) beschouwen wij het *biquadratisch regelvlak* Δ^4 , dat de rechte $d_{12} \equiv H_1 H_2$ tot *drievoudige richtlijn* en de zes rechten s tot beschrijvenden heeft. Leggen wij vlakken door telkens twee beschrijvenden, die elkaar op d_{12} ontmoeten, dan snijden deze vlakken het oppervlak nog in een kegelsnede δ^2 , die op d_{12} en de zes rechten s rust, en dus met d_{12} een ontaarde figuur ρ^3 vormt.

In het vlak (s_1, s_1') ligt een bundel van kegelsneden, waarvan H_1 en de doorgangen van s_2 , s_2' , s_2'' de basispunten zijn. Door combinatie met stralen van den waaier (H_2, s_1'') leveren deze kegelsneden ontaarde figuren ρ^3 , waarvan *beide* bestanddeelen veranderlijk zijn.

Er zijn vijf analoge stelsels, die ieder uit een bundel van kegelsneden en een waaier bestaan.

De meetkundige plaats der kegelsneden δ^2 is wederom van den *tienden graad*; zij bestaat uit het *biquadratisch regelvlak* Δ^4 en *zes vlakken*.

Een willekeurige rechte l snijdt Δ^4 in vier punten en de vlakken der zes bundels (δ^2) elk in één punt, dus ontmoet l tien ontaarde figuren (d, δ^2).

Elk der zes bundels (δ^2) bevat drie lijnenparen, die met stralen van den toegevoegden waaier ontaarding in drie rechten leveren.

Het biquadratisch regelvlak Δ^4 kan in het algemeen geen ontaarde figuren, die uit drie rechten bestaan, bevatten; want iedere, op Δ^4 gelegen kegelsnede vormt met twee beschrijvenden b_1, b_2 een volledige doorsnede.

Indien δ^2 ontaardt, moet haar vlak drie beschrijvenden bevatten, benevens een rechte r , die dan richtlijn van Δ^4 is, en dit is in het algemeen niet het geval.

De congruentie bezit dus *achttien figuren, die uit drie rechten bestaan*.

Wat het oppervlak Λ betreft merken wij op, dat het de rechte d_{12} tot *viervoudige rechte* moet hebben (daar l het oppervlak Δ^4 in vier punten snijdt en dus op vier kegelsneden δ^2 rust, die met d_{12} ontaarde figuren ρ^3 vormen), en dat de zes rechten *s dubbelrechten* zijn.

Noemen wij x den graad van Λ , dan bestaat de doorsnede van twee oppervlakken Λ , behoorende bij de rechten l en l' , uit x krommen ρ^3 , die l en l' snijden, en uit de veelvoudige rechten d_{12} en s .

Uit de vergelijking

$$x^2 = 3x + 16 + 6 \times 4$$

volgt dan $x = 8$.

Het oppervlak is dus van den *achtsten graad*. Het heeft twee *zesvoudige punten* H_1, H_2 ; immers een willekeurige ρ^3 snijdt Λ^8 in 24 punten, waarvan twaalf op de dubbelrechten s liggen, dus twaalf in de hoofdpunten.

Behalve de reeds genoemde veelvoudige rechten draagt Λ^8 nog zeven enkelvoudige rechten, n. l. l en een straal van elken der zes waaiers; tenslotte heeft het oppervlak *tien kegelsneden* en de *dubbelkromme* ρ^3 .

§ 7. De meetkundige plaats der punten, waar een

vlak ϕ door krommen ρ^3 wordt aangeraakt, is een kromme van den *viijfden graad*, ϕ^5 , met een drievoudig punt D_{12} en zes enkelvoudige punten S in de doorgangen der singuliere rechten.

De *complementaire kromme* ϕ^6 heeft zeven dubbelpunten in D_{12} en de zes punten S .

De meetkundige plaats der krommen ρ^3 , die een vlak ϕ aanraken, is een oppervlak van den *zestienden graad*, Φ^{16} , met een *achtvoudige rechte* d_{12} , *zes viervoudige rechten* s en *twaalf enkelvoudige rechten* (twee stralen van elken der zes waaiers).

Daar de achtvoudige rechte d_{12} en de twaalf waaierstralen deel uitmaken van ontaarde figuren ρ^3 , draagt Φ^{16} $8 + 12 = 20$ kegelsneden.

Van de 48 snijpunten van een willekeurige ρ^3 met Φ^{16} vallen er $6 \times 4 = 24$ samen in de punten, waar de ρ^3 op de singuliere rechten rust; de overige 24 punten liggen in de hoofdpunten.

Het oppervlak Φ^{16} heeft dus *twee twaalfvoudige punten* H_1, H_2 .

De doorsnede ψ^{16} van Φ^{16} met een vlak ψ heeft een achtvoudig punt D_{12} en zes viervoudige punten S ; de aanrakingskromme ψ^5 bezit een drievoudig punt D_{12} en zes enkelvoudige punten S .

Van de 80 snijpunten van ψ^{16} en ψ^5 liggen er dus 24 in D_{12} en 6×4 in de punten S .

Hieruit volgt dat er 32 krommen ρ^3 zijn, welke twee gegeven vlakken ϕ en ψ aanraken.

Elk willekeurig vlak ϕ is *osculatievlak* voor zes krommen ρ^3 .

De complementaire krommen in de vlakken door l vormen een oppervlak van den *achtsten graad* met dubbelrechte l .

Door l gaan acht osculatievlakken, welker raakpunt op l ligt.

De raakpunten van de osculatievlakken door l liggen op een kromme van den *veertienden graad*, ω^{14} , met *achtvoudige snijlijn* l .

De meetkundige plaats van de raakpunten der osculatievlakken door een punt P is een oppervlak van den negenden graad, Ω^9 .

Zij α de veelvoudigheid der rechten s en β de veelvoudigheid der hoofdpunten, dan volgt uit een beschouwing van de snijpunten eener willekeurige ρ^3 met Ω^9 , dat α en β moeten voldoen aan de vergelijking

$$3 \times 9 = 3 + 6\alpha + 2\beta$$

of $3\alpha + \beta = 12$.

De oplossing $\alpha = 3$, $\beta = 3$ is onbruikbaar, daar de rechte $d_{12} \equiv H_1 H_2$ in haar geheel op Ω^9 moet liggen.

Wij moeten dus nemen $\alpha = 2$, $\beta = 6$; m. a. w. de zes rechten s zijn *dubbelrechten* en de beide hoofdpunten *zesvoudige punten* van Ω^9 .

De meetkundige plaats van de raakpunten der raaklijnen, die een rechte l snijden, is een oppervlak van den zesden graad.

Het oppervlak Π_P^1 heeft drie kegelpunten P , H_1 , H_2 .

Door een punt P gaan vijf singuliere koorden; de koorden $P H_1$ en $P H_2$ zijn echter *parabolisch singulier*.

De raaklijnen der krommen ρ^3 vormen een complex van den zesden graad.

De complexkegel met top P heeft twee *keerribben* $P H_k$ en drie *dubbelribben*.

In een willekeurig vlak ϕ bepaalt deze congruentie een kubische involutie met één singulier punt van de vierde orde (de doorgang van d_{12}) en zes singuliere punten van de tweede orde (de doorgangen der zes rechten s).

HOOFDSTUK VII.

De congruentie van STUYVAERT.

§ 1. De congruentie, bestaande uit de kubische ruimtekrommen, welke door twee vaste punten gaan en drie gegeven rechten tot koorden hebben, is door STUYVAERT langs analytischen weg onderzocht ¹⁾. Later heeft Dr. JAN DE VRIES aangetoond ²⁾ dat zij kan voortgebracht worden door een net van nodale kubische oppervlakken.

Noemt men de hoofdpunten der $[\rho^3]$ H_1, H_2 , de gemeenschappelijke koorden h_1, h_2, h_3 , en stelt men de transversalen uit H_1 over h_k, h_l door t_{kl}' , de transversalen uit H_2 over h_k, h_l door t_{kl}'' voor, dan bestaat er een net van kubische oppervlakken $[\Phi^3]$, die door h_1, h_2, h_3 en H_2 gaan en in H_1 een kegelpunt hebben.

Immers een kubisch oppervlak, dat drie gegeven rechten en een gegeven punt moet bevatten en in een ander gegeven punt een kegelpunt moet hebben, heeft aan $3 \times 4 + 1 + 4 = 17$ voorwaarden te voldoen, dus zijn er ∞^2 zulke oppervlakken, die een net vormen.

Alle exemplaren van het net bevatten de transversalen t_{kl}' , die met elk oppervlak Φ^3 vier punten gemeen hebben. De basis van het net bestaat derhalve uit het punt H_2 en de zes rechten $h_1, h_2, h_3, t_{12}', t_{13}', t_{23}'$, die een ont-aarde kromme van den zesden graad met zeven schijnbare dubbelpunten vormen. (Door een willekeurig punt P gaan n.l. de koorden PH_1 , de drie transversalen naar de paren h_k, h_l en de drie transversalen naar de paren t_{kl}', t_{km}').

¹⁾ M. STUYVAERT: *Etude de quelques surfaces algébriques*. Dissertation inaugurale, Gand, 1902.

²⁾ Dr. JAN DE VRIES: *Kubische involuties in het vlak*. (Versl. K. A. W. 23, blz. 878).

Elke tot het net behorende bundel (Φ^3) heeft behalve de zes genoemde rechten nog een ρ^3 tot basiskromme. Deze krommen vormen een *bilineaire congruentie*, zooals op de bekende wijze kan aangetoond worden (zie Hoofdstuk III, § 1).

§ 2. Wij zullen thans een andere meetkundige afleiding van de $[\rho^3]$ van STUYVAERT geven. De vierzijde $h_1, t_{12}', h_2, t_{12}''$ vormt de basis van een bundel van quadratische regelvlakken (Φ^2), de vierzijde $h_1, t_{13}', h_3, t_{13}''$ de basis van een soortgelijken bundel (Ψ^2). Deze beide bundels brengen, daar zij de basisrechte h_1 gemeen hebben, een $[\rho^3]$ voort, waarvan alle exemplaren door H_1, H_2 gaan, h_1, h_2, h_3 tot koorden hebben en op de rechten t rusten.

Een punt S van h_2 draagt één oppervlak Ψ^2 , maar alle oppervlakken Φ^2 .

De ∞^1 krommen ρ^3 door het singuliere punt S vormen dus het oppervlak Ψ_S^2 , dat door S bepaald is. Hieruit volgt, dat h_2 en analoog h_3 *singuliere rechte van de tweede orde* is.

Daar Ψ_S^2 nog een punt S' met h_2 gemeen heeft, moeten de ∞^1 krommen ρ^3 , die door S gaan, ook door S' gedragen worden. De punten S, S' zijn in een involutie gerangschikt.

Wordt S op h_1 gekozen, dan wordt een ρ^3 door S bepaald door de oppervlakken Φ^2 en Ψ^2 , die elkaar in S aanraken. [Een analoog geval hebben wij in Hoofdstuk II, § 1 beschouwd. De oppervlakken Φ_1^2 (met basis σ_1^3, b) en Φ_2^2 (met basis σ_2^3, b), welke een ρ^3 bepalen, die door een punt B van b gaat, moeten elkaar in B raken. De aldus voortgebrachte ∞^1 krommen ρ^3 snijden σ_1^3, σ_2^3 elk in vier punten].

Alle ρ^3 door S zullen nu twee vaste punten op h_2 , één op t_{12}' , één op t_{12}'' en analoog twee vaste punten op h_3 , één op t_{13}' en één op t_{13}'' insnijden.

Een willekeurig vlak door h_1 bepaalt nu met h_2 en

met h_3 twee rechten b_2, b_3 . De door b_2 (b_3) gelegde oppervlakken Φ^2 (Ψ^2) hebben in S hetzelfde raakvlak. Hierdoor wordt een projectiviteit van elkaar in S rakende oppervlakken tot stand gebracht, welke een *monoïde* S^4 voortbrengt, die gevormd wordt door de ∞^1 door S gaande ρ^3 .

Schijnbaar neemt nu h_1 een bijzondere positie in tegenover h_2 en h_3 .

Men kan echter op de volgende wijze aantoonen, dat ook h_1 *singuliere rechte van de tweede orde* is. In de projectiviteit komt het vlak $h_1 H_1$, behoorend tot het vlakkenpaar $h_1 t_{12}'$, $h_2 t_{12}''$ met zichzelf overeen, daar het ook tot het vlakkenpaar $h_1 t_{13}'$, $h_2 t_{13}''$ behoort. Dit vlak moet dus evenals het vlak $h_1 H_2$ terzijde gelegd worden, zoodat als meetkundige plaats der door S gaande ρ^3 geen *monoïde* S^4 , maar een *hyperboloïde* gevonden wordt.

§ 3. De *ontaardingen** in een rechte en een kegelsnede kunnen tot twee groepen gebracht worden.

1°. De rechte t_{12}' vormt *ontaarde figuren* ρ^3 met den bundel van kegelsneden, die in het vlak $H_2 h_3$ liggen en H_2 en de doorgangen van h_1, h_2, t_{12}' tot basispunten hebben.

De vijf andere rechten t', t'' vormen analoge stelsels.

2°. Elke kegelsnede ∂^2 door H_1, H_2 , die op h_1, h_2, h_3 rust, vormt een figuur ρ^3 met een rechte d , welke h_1, h_2, h_3 snijdt.

De meetkundige plaats (∂^2) is een *biquadratisch oppervlak* Δ^4 , want de doorsnede met een willekeurig vlak door $H_1 H_2 \equiv d_{12}$ bestaat een kegelsnede door H_1, H_2 en de doorgangen van h_1, h_2, h_3 en uit de rechte d_{12} , die *dubbelrechte* is, daar zij met elk der transversalen g_1, g_2 over h_1, h_2, h_3, d_{12} een *ontaarde kegelsnede* vormt.

Het oppervlak Δ^4 heeft blijkbaar *twee drievoudige punten* H_1, H_2 . Het bevat de rechten h_1, h_2, h_3 en de zes rechten t', t'' ; de laatsten toch hebben ieder met Δ^4

vijf punten gemeen (drie in H_1 of H_2 , één op h_k , één op h_l).

De meetkundige plaats (d) is een *hyperboloïde* $\mathfrak{S}^2$ met richtlijnen h_1, h_2, h_3 .

De ontaarde figuren dezer tweede groep bestaan uit telkens een kegelsnede van Δ^4 met telkens een beschrijvende van $\mathfrak{S}^2$.

Wij merken nog op dat alle kegelsneden, die tot ontaarde figuren ρ^3 behooren, een meetkundige plaats van den *tienden graad* vormen, welke bestaat uit het *biquadratisch oppervlak* Δ^4 en *zes vlakken*.

Om het aantal figuren ρ^3 , die uit drie rechten bestaan, te vinden bedenken wij, dat de drie samenstellende rechten de punten H_1, H_2 en twee punten van elk der gemeenschappelijke koorden moeten bevatten.

Deze ontaardingën kunnen als volgt ingedeeld worden:

1°. Twee der rechten gaan ieder door één hoofdpunt en snijden twee rechten h , de derde rust op de drie rechten h (zes gevallen).

2°. De eerste rechte gaat door het ééne hoofdpunt en snijdt één der rechten h , de tweede gaat door het andere hoofdpunt en snijdt de twee andere rechten h , de derde rust op de drie rechten h (zes gevallen).

3°. Een der rechten is $d_{12} \equiv H_1 H_2$, de beide anderen zijn de transversalen g_1, g_2 .

Men vindt op deze wijze *dertien ontaardingën in drie rechten*.

§ 4. Wij onderzoeken thans het oppervlak Λ , gevormd door de krommen ρ^3 , die een willekeurige rechte l snijden.

Het oppervlak Ψ_S^2 (de meetkundige plaats der ρ^3 door een punt S van h_2) wordt door l in twee punten gesneden. Door S gaan dus twee ρ^3 , welke l snijden, m. a. w. h_2 is *dubbelrechte* van Λ .

De doorsnede van Λ met het vlak $H_1 h_2$ bestaat nu uit de dubbelrechte h_2 , de rechten t_{12}', t_{23}' en de kegelsnede door H_1 en de doorgangen van h_1, h_3, t_{13}'' en l . De vlakke doorsnede is blijkbaar van den zesden graad.

Het gezochte oppervlak is dus een oppervlak van den zesden graad, Λ^6 ; het bezit twee drievoudige punten H_1, H_2 , drie dubbelrechten h_1, h_2, h_3 en de dubbelkromme ρ^3_1 (welke l tot koorde heeft).

Behalve de rechte l liggen op Λ^6 nog twaalf rechten (waaronder de zes transversalen t', t'') en twaalf kegelsneden, want l heeft met elken der zes bundels (δ^2) één punt, met Δ^4 vier en met Σ^2 twee punten gemeen, ontmoet dus twaalf ontaardingën (d, δ^2).

De drievoudige punten, de dubbelrechten en de zes transversalen t', t'' liggen op alle oppervlakken Λ^6 .

Een vlak ϕ door l snijdt Λ^6 verder nog in een kromme ϕ^5 , die door de steunpunten L_1, L_2 van l op de dubbelkromme gaat en dubbelpunten heeft in de doorgangen van h_1, h_2, h_3 en den derden doorgang L_3 van ρ^3_1 .

Behalve L_1, L_2 hebben ϕ^5 en l nog drie punten gemeen, in welke ϕ door krommen ρ^3 aangeraakt wordt. De aanrakingskromme is dus een vlakke kubische kromme ϕ^3 , welke door de doorgangen van h_1, h_2, h_3 gaat.

Wentelt het vlak ϕ om l , dan beschrijven de aanrakingskrommen een oppervlak van den vierden graad, dat de meetkundige plaats is van de raakpunten der raaklijnen, die de rechte l snijden.

Een oppervlak Λ^6 wordt door de aanrakingskromme ϕ^3 in 18 punten gesneden; maar daar Λ^6 de rechten h_k tot dubbelrechten heeft en ϕ^3 op elke h_k een enkelvoudig punt bezit, moeten de doorgangen (h_k, ϕ) als dubbelpunten en dus samen als zes punten van de doorsnede geteld worden.

Hieruit volgt dat de krommen ρ^3 , die een vlak ϕ aanraken, een oppervlak van den twaalfden graad, Φ^{12} , vormen.

Het oppervlak Ψ^2_S , behoorende bij een punt S van h_2 , wordt door ϕ gesneden in een kegelsnede, die door de doorgangen van h_1 en h_3 gaat en in die doorgangen twee punten met ϕ^3 gemeen heeft. Op ϕ^3 liggen dus $3 \times 2 - 2 = 4$ punten, waar een door S gaande ρ^3 het

vlak ϕ raakt; m. a. w. h_2 en analoog h_1, h_3 is *viervoudige rechte* van Φ^{12} .

Daar ϕ door twee kegelsneden van elken bundel (δ^2) aangeraakt wordt, zijn de zes transversalen t', t'' *dubbel-rechten* van Φ^{12} .

Een willekeurige ρ^3 heeft met Φ^{12} zes viervoudige punten op h_1, h_2, h_3 gemeen; de overige twaalf snijpunten vallen in de hoofdpunten samen; H_1 en H_2 zijn dus *zes-voudige punten* van Φ^{12} .

De doorsnede van Φ^{12} met Σ^2 bestaat uit viermaal h_1, h_2, h_3 en verder dus uit *twaalf rechten* d .

Met Δ^4 heeft Φ^{12} viermaal h_1, h_2, h_3 en tweemaal de zes rechten t', t'' gemeen, dus verder nog *twaalf kegelsneden*.

Daar ϕ door twee kegelsneden van elken der zes bundels (δ^2) geraakt wordt, draagt Φ^{12} in het geheel $12 + 6 \times 2 = 24$ *kegelsneden*.

De doorsnede ψ^{12} van Φ^{12} met een ander vlak ψ heeft drie viervoudige punten in de doorgangen der gemeenschappelijke koorden, terwijl de aanrakingskromme ψ^3 die punten enkelvoudig bevat. De krommen ψ^{12} en ψ^3 hebben dus nog 24 snijpunten, waar ψ geraakt wordt door krommen ρ^3 , welke ook ϕ aanraken.

De congruentie bezit dus 24 *krommen, die twee gegeven vlakken ϕ en ψ aanraken*.

Dit resultaat kan ook op de volgende wijze gevonden worden. Twee oppervlakken Φ^{12} en Ψ^{12} hebben gemeen zestienmaal de drie gemeenschappelijke koorden en viermaal de zes rechten t', t'' ; hun doorsnede bestaat dus verder nog uit $(144 - 3 \times 16 - 6 \times 4) : 3 = 24$ krommen ρ^3 , die zoowel ϕ als ψ aanraken.

§ 5. Een vlakke doorsnede van het oppervlak Φ^{12} bestaat uit tweemaal de aanrakingskromme ϕ^3 en uit de *complementaire kromme* ϕ^6 , welke dubbelpunten in de doorgangen van h_k heeft. In de 18 gemeenschappelijke punten van ϕ^3 en ϕ^6 moeten deze elkaar raken; na afzondering van de doorgangen van h_k , die elk twee

gemeenschappelijke punten vertegenwoordigen, blijven er $(18 - 6) : 2 = 6$ punten over, waar ϕ door krommen ρ^3 geosculeerd wordt.

Het vlak ϕ is dus *osculatievlak voor zes krommen der* $[\rho^3]$.

Wanneer nu ϕ wentelt om l , beschrijft de complementaire kromme een oppervlak van den *achtsten graad* met *dubbelrechte* l .

De verwantschap (C, C') tusschen de in de vlakken ϕ gelegen snijpunten C van l met ϕ^3 en de snijpunten C' van l met ϕ^6 blijkt een $(6, 6)$ te zijn.

Een coïncidentie $C \equiv C'$ wijst een punt aan, waar ϕ osculatievlak eener ρ^3 is met raakpunt $C \equiv C'$; derhalve draagt l zes punten, welker osculatievlak door l gaat.

Hieruit volgt weer dat de punten, die hun osculatievlak door l zenden, op een kromme van den *twaalfden graad*, ω^{12} , met *zesvoudige snijlijn* l liggen; en verder dat de meetkundige plaats van de raakpunten der osculatievlakken door een punt P een oppervlak van den *zevendenden graad*, Ω^7 , is.

Daar een willekeurige ρ^3 drie osculatievlakken door P zendt, liggen 18 van de 21 snijpunten van een ρ^3 met Ω^7 in H_k of op h_k .

Zij α de veelvoudigheid der hoofdpunten en β de veelvoudigheid der gemeenschappelijke koorden op Ω^7 , dan heeft men $2\alpha + 6\beta = 18$.

De doorsnede van Ω^7 met het vlak $H_1 h_1$ bestaat uit h_1 en zes rechten, die bestanddeelen zijn van ontaarde figuren ρ^3 ; daaruit volgt dat $\beta = 1$, dus $\alpha = 6$ is.

Het oppervlak Ω^7 heeft dus *twee zesvoudige punten* H_1, H_2 en *drie enkelvoudige rechten* h_1, h_2, h_3 .

§ 6. Het oppervlak Π_P^4 , de meetkundige plaats van de steunpunten der ρ^3 op hun koorden door P , heeft een *kegelpunt* P en bevat de rechten h_k .

Dit laatste volgt hieruit dat de rechte, die een punt S van h_2 met P verbindt, het oppervlak Ψ_S^2 nog in een tweede punt snijdt, zoodat SP koorde van een ρ^3 door S is.

Van de twaalf snijpunten van Π_P^4 met een willekeurige ρ^3 liggen er zes op h_k , twee op de koorde door P en vier in de hoofdpunten; H_1, H_2 zijn dus *kegelpunten* van Π_P^4 .

De kegel K_P^2 , die ρ_P^3 uit P projecteert, heeft behalve ρ_P^3 vijf rechten met Π_P^4 gemeen, die *singuliere koorden* moeten zijn.

Tot deze behooren de rechten PH_1 en PH_2 , welke *parabolisch singulier* zijn.

De transversaal uit P over h_1 en h_2 ligt op het oppervlak Φ_P^2 , dat door P bepaald is, wordt door de exemplaren van den bundel (Ψ^2) in een quadratische involutie gesneden, en is dus singuliere koorde. Hetzelfde geldt voor de transversaal uit P over h_1 en h_3 , die op het oppervlak Ψ_P^2 ligt.

Om redenen van symmetrie zal dus de derde eigenlijke singuliere koorde door P op de hyperboloïde liggen, welke door P, H_1, H_2, h_2, h_3 bepaald wordt.

De singuliere koorden blijken dus te liggen op de hyperboloïden van drie bundels, die door H_1, H_2 en twee der rechten h_k bepaald worden; zij behooren derhalve tot *drie stralencongruenties* (1, 3).

Evenals bij de vroeger behandelde congruenties vormen ook bij de $[\rho^3]$ van STUYVAERT de raaklijnen der ρ^3 een *complex van den zesden graad*.

De complexkegel met top P heeft *twee keerribben* PH_1, PH_2 en *drie dubbelribben*, n.l. de drie singuliere koorden door P.

§ 7. De congruentie van STUYVAERT kan op drie manieren door twee bundels van quadratische regelvlakken voortgebracht worden. Men kan toch de vierzijden, uit welke de bases der bundels bestaan, zoo kiezen, dat zij elke der drie gemeenschappelijke koorden gemeen hebben.

De congruentie bepaalt in een willekeurig vlak ϕ een kubische involutie met drie singuliere punten van de tweede orde (de doorgangen der koorden h_k) en zes

singuliere punten van de eerste orde (de doorgangen der transversalen t' , t'').

Wanneer de drie gemeenschappelijke koorden in één vlak liggen en dus een driehoek $H_3 H_4 H_5$ vormen, moeten alle ρ^3 door de hoekpunten van dien driehoek gaan, daar het vlak drie punten van elke ρ^3 moet bevatten en iedere zijde van den driehoek koorde van elke ρ^3 moet zijn.

Dan zijn de punten H_3 , H_4 , H_5 *hoofdpunten* en is de congruentie van STUYVAERT overgegaan in de congruentie van REYE.

Wanneer de rechte h_1 door H_1 , de rechte h_2 door H_2 gaat en $h_3 \equiv H_1 H_2$ is, moet elke ρ^3 de rechte h_1 in H_1 en de rechte h_2 in H_2 raken, en in H_1 , H_2 drie samenvallende punten hebben.

Het osculatievlak, dat H_1 tot raakpunt heeft, kan niet door h_3 gaan, evenmin als het osculatievlak, dat H_2 tot raakpunt heeft.

Alle ρ^3 hebben dan een gemeenschappelijk osculatievlak; m. a. w. de congruentie van STURM (zie Hoofdstuk VIII) is een bijzonder geval van de congruentie van STUYVAERT.

HOOFDSTUK VIII.

De congruentie van STURM.

§ 1. De congruentie van STURM bestaat uit de kubische ruimtekrommen, die een *gemeenschappelijk osculatieviervlak* hebben, dat door *twee hoofdpunten* A_1, A_2 bepaald is.

Zij $A_1 B_1 A_2 B_2$ dit viervlak. $A_1 B_2 \equiv a_1$ is de gemeenschappelijke raaklijn in A_1 , $A_2 B_1 \equiv a_2$ de gemeenschappelijke raaklijn in A_2 , $A_1 A_2 \equiv a_{12}$ de *hoofdkoord*, $B_1 B_2 \equiv b_{12}$ de *as*, toegevoegd aan de koord a_{12} , het vlak $A_1 B_1 B_2 \equiv \alpha_1$ het gemeenschappelijk osculatievlak in A_1 , het vlak $A_2 B_1 B_2 \equiv \alpha_2$ het gemeenschappelijk osculatievlak in A_2 .

Verder zullen wij het vlak $A_1 A_2 B_1 (A_1, a_2)$ door β_1 , het vlak $A_1 A_2 B_2 (A_2, a_1)$ door β_2 , de rechte $A_1 B_1$ door b_1 en de rechte $A_2 B_2$ door b_2 voorstellen.

Beschouwen wij nu alle krommen ρ^3 , die in A_1 tot raaklijn a_1 en tot osculatievlak α_1 , in A_2 tot raaklijn a_2 en tot osculatievlak α_2 hebben.

De quadriekegel K_1^2 , welke een willekeurige ρ^3 uit A_1 projecteert, heeft tot ribben a_1 (met raakvlak α_1) en a_{12} (met raakvlak β_1); de quadriekegel K_2^2 , die haar uit A_2 projecteert, heeft tot ribben a_2 (met raakvlak α_2) en a_{12} (met raakvlak β_2).

De bundels van quadriekegels (K_1^2), die α_1 langs a_1 en β_1 langs a_{12} raken, en (K_2^2), die α_2 langs a_2 en β_2 langs a_{12} raken, hebben de basisribbe a_{12} (maar niet de raakvlakken langs a_{12}) gemeen en brengen dus een congruentie van kubische ruimtekrommen voort.

Dat deze *bilineair* is volgt alweer hieruit, dat een willekeurig punt P één kegel K_1^2 en één kegel K_2^2 , dus één kromme ρ^3 draagt, en dat de twee bundels op een

willekeurige rechte l twee quadratische involuties insnijden, welker gemeenschappelijk paar de steunpunten vormt der eenige ρ^3 , die l tot koorde heeft.

De bundel (K_1^2) bezit twee ontaarde kegels, n. l. het vlakkenpaar α_1, β_1 en het dubbelvlak β_2^2 . Eveneens komen in den bundel (K_2^2) twee ontaardingën voor, n. l. het vlakkenpaar α_2, β_2 en het dubbelvlak β_1^2 .

Zondert men de gemeenschappelijke basisribbe a_{12} af, dan blijkt de doorsnede van de vlakkenparen α_1, β_1 en α_2, β_2 te bestaan uit de rechten b_{12}, a_1 en a_2 , terwijl de doorsnede der dubbelvlakken β_1^2 en β_2^2 uit driemaal de rechte a_{12} bestaat.

De krommen ρ^3 , die de doorsneden zijn van de bundelschaar (K_2^2) met het vlakkenpaar α_1, β_1 , ontaarden in de rechte a_2 en een bundelschaar van kegelsneden δ_1^2 in het vlak α_1 , welke kegelsneden de rechte a_1 in A_1 en de rechte b_{12} in B_1 aanraken.

De krommen ρ^3 , die worden voortgebracht door de bundelschaar (K_1^2) en het vlakkenpaar α_2, β_2 , vallen uiteen in de rechte a_1 en een bundelschaar van kegelsneden δ_2^2 in het vlak α_2 , welke kegelsneden de rechte a_2 in A_2 en de rechte b_{12} in B_2 raken.

Eindelijk vindt men als doorsnede van den bundel (K_1^2) met het dubbelvlak β_1^2 en als doorsnede van den bundel (K_2^2) met het dubbelvlak β_2^2 telkens driemaal de rechte a_{12} .

De kegelsneden, die tot ontaarde figuren ρ^3 behooren, zijn dus in twee bundelscharen gerangschikt, terwijl men als ontaardingën in drie rechten kan opvatten de figuur b_{12}, a_1, a_2 en de figuur $(a_{12})^3$.

§ 2. Het oppervlak Λ , gevormd door de krommen ρ^3 , welke de rechte l snijden, bevat één kegelsnede δ_1^2 en één kegelsnede δ_2^2 , dus ook de rechten a_1 en a_2 . Daar alle krommen ρ^3 de rechten a_1 en a_2 aanraken, zullen ook twee oppervlakken Λ elkaar langs a_1 en a_2 aanraken.

Zij x de graad van Λ , dan bestaat de doorsnede van

twee dergelijke oppervlakken uit tweemaal a_1 , tweemaal a_2 en x krommen ρ^3 .

Uit de vergelijking $x^2 = 3x + 4$
volgt $x = 4$.

Het oppervlak Λ is dus van den *vierden graad*.

De kromme ρ^3 , welke l tot koorde heeft, is *dubbelkromme* op Λ^4 .

Uit elk punt P van Λ^4 kan men een koorde k naar ρ^3 trekken; deze koorde heeft vijf punten met Λ^4 gemeen en ligt dus geheel op het oppervlak; m. a. w. het oppervlak Λ^4 is een *regelvlak*.

De congruentie van STURM wordt analytisch voorgesteld door de vergelijkingen

$$\frac{\alpha x_1}{x_2} = \frac{\beta x_2}{x_3} = \frac{\gamma x_3}{x_4} \dots \dots \dots (1),$$

wanneer $A_1 B_2 B_1 A_2$ als coördinatenviervlak wordt aangenomen, zoodat $x_1 = 0$ het vlak α_2 , $x_2 = 0$ het vlak β_1 , $x_3 = 0$ het vlak β_2 en $x_4 = 0$ het vlak α_1 voorstelt.

Hier zijn α , β , γ parameters, zoodat (1) inderdaad ∞^2 krommen ρ^3 bepaalt.

Zij $P (p_1, 0, p_3, p_4)$ een punt van β_1 , $Q (q_1, q_2, 0, q_4)$ een punt van β_2 , dan voldoen de coördinaten van het snijpunt X eener ρ^3 met de rechte PQ aan

$$\frac{\alpha (p_1 + \lambda q_1)}{\lambda q_2} = \frac{\beta \lambda q_2}{\lambda p_3} = \frac{\lambda p_3}{p_4 + \lambda q_4} \dots \dots (2).$$

Door eliminatie van α , β , γ tusschen (1) en (2) vinden wij als vergelijkingen voor de kromme ρ^3_X :

$$\frac{p_1 x_2 + \lambda q_1 x_2}{\lambda q_2 x_1} = \frac{\lambda q_2 x_3}{p_3 x_2} = \frac{p_3 x_4}{p_4 x_3 + \lambda q_4 x_3}$$

$$\text{of } \left. \begin{aligned} q_2^2 x_1 x_3 \lambda^2 - p_3 q_1 x_2^2 \lambda - p_1 p_3 x_2^2 &= 0 \\ q_2 q_4 x_3^2 \lambda^2 + p_4 q_2 x_3^2 \lambda - p_3^2 x_2 x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3).$$

Elimineeren wij λ tusschen de vergelijkingen (3) dan wordt als vergelijking van het oppervlak Λ gevonden:

$$\begin{vmatrix} q_2^2 x_1 x_3 & -p_3 q_1 x_2^2 & -p_1 p_3 x_2^2 & 0 \\ 0 & q_2^2 x_1 x_3 & -p_3 q_1 x_2^2 & -p_1 p_3 x_2^2 \\ q_2 q_4 x_3^2 & p_4 q_2 x_3^2 & -p_3^2 x_2 x_4 & 0 \\ 0 & q_2 q_4 x_3^2 & p_4 q_2 x_3^2 & -p_3^2 x_2 x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Deelt men de eerste kolom door $q_2 x_3$ en de vierde kolom door $p_3 x_2$, en ontwikkelt men den determinant volgens de elementen der eerste kolom, dan wordt gevonden:

$$q_2 x_1 \begin{vmatrix} q_2^2 x_1 x_3 & - p_3 q_1 x_2^2 & p_1 x_2 \\ p_4 q_2 x_3^2 & - p_3^2 x_2 x_4 & 0 \\ q_2 q_4 x_3^2 & p_4 q_2 x_3^2 & p_3 x_4 \end{vmatrix} - q_4 x_3 \begin{vmatrix} p_3 q_1 x_2^2 & p_1 p_3 x_2^2 & 0 \\ q_2^2 x_1 x_3 & - p_3 q_1 x_2^2 & p_1 x_2 \\ q_2 q_4 x_3^2 & p_4 q_2 x_3^2 & p_3 x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

De eerste kolom van den eersten determinant kan nu door $q_2 x_3$, de eerste rij van den tweeden door $p_3 x_2^2$ gedeeld worden. Na weglating van den factor x_3 wordt de vergelijking:

$$q_2^2 x_1 \begin{vmatrix} q_2 x_1 & - p_3 q_1 x_2^2 & p_1 x_2 \\ p_4 x_3 & - p_3^2 x_2 x_4 & 0 \\ q_4 x_3 & p_4 q_2 x_3^2 & p_3 x_4 \end{vmatrix} - p_3 q_4 x_2^2 \begin{vmatrix} q_1 & p_1 & 0 \\ q_2^2 x_1 x_3 & - p_3 q_1 x_2^2 & p_1 x_2 \\ q_2 q_4 x_3^2 & p_4 q_2 x_3^2 & p_3 x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Na ontwikkeling der determinanten blijkt de vergelijking door x_2 deelbaar te zijn; zij verkrijgt na rangschikking de gedaante:

$$p_3^2 q_2^2 (2 p_1 q_4 + p_4 q_1) x_1 x_2 x_3 x_4 - p_3^3 q_2^3 x_1^2 x_4^2 + \\ + p_1 p_3 q_2 q_4 (p_4 q_1 - p_1 q_4) x_2^2 x_3^2 + p_1 p_4^2 q_2^3 x_1 x_3^3 + \\ + p_3^3 q_1^2 q_4 x_2^3 x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

is dus van den vorm:

$$A x_1 x_2 x_3 x_4 + B x_1^2 x_4^2 + C x_2^2 x_3^2 + D x_1 x_3^3 + \\ + E x_2^3 x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

waaruit opnieuw blijkt, dat Λ een oppervlak van den vierden graad is.

Rangschikken wij (5) naar x_1 , dan volgt uit

$$B x_1^2 x_4^2 + (A x_2 x_3 x_4 + D x_3^3) x_1 + (C x_2^2 x_3^2 + \\ + E x_2^3 x_4) = 0$$

dat A_1 een dubbelpunt van Λ^4 is, waarvan de raakkegel wordt voorgesteld door $x_1^2 = 0$.

Men vindt dus dat A_1 en A_2 *uniplanaire punten* zijn en alle oppervlakken Λ^4 in A_1 (A_2) hetzelfde dubbel te tellen raakvlak α_1 (α_2) hebben.

Uit $x_1 = 0$ volgt $x_2^2 = 0$ met $C x_3^2 + E x_2 x_4 = 0$; dus wordt Λ^4 door α_2 langs de ribbe a_2 en analoog door α_1 langs de ribbe a_1 aangeraakt.

Het oppervlak Λ^4 bevat slechts de ribben a_1 en a_2 van het osculatieviervlak.

Een willekeurige kromme ρ^3 heeft met Λ^4 zes punten in A_1 en zes punten in A_2 gemeen.

§ 3. Een vlak ϕ door l heeft met Λ^4 naast l nog een kromme van den derden graad, ϕ^3 , gemeen, welke l in de steunpunten der dubbelkromme ρ^3 en in een derde punt snijdt. In dit laatste punt wordt ϕ door een kromme ρ^3 aangeraakt.

De meetkundige plaats der punten, waar een vlak door krommen der $[\rho^3]$ wordt aangeraakt, is dus een *rechte* f .

Een oppervlak Λ^4 , behoorende bij een niet ϕ gelegen rechte m , wordt door f in vier punten gesneden; hieruit volgt dat de krommen ρ^3 , welke een vlak ϕ aanraken, een oppervlak van den *vierden graad*, Φ^4 , vormen.

De kromme ψ^4 , volgens welke dit oppervlak door een vlak ψ gesneden wordt, heeft vier punten gemeen met de in ψ gelegen aanrakingsrechte. In die vier punten wordt ψ aangeraakt door krommen ρ^3 , die tevens aan ϕ raken.

Er zijn dus *vier krommen* ρ^3 , die *twee gegeven vlakken* ϕ en ψ aanraken.

De meetkundige plaats der rechten f in de vlakken ϕ door l is een *quadratisch oppervlak*, dat bestaat uit de raakpunten der raaklijnen, die l snijden.

Het oppervlak Φ^4 wordt door een vlak ϕ gesneden in de rechte f , die als aanrakingsrechte tweemaal in rekening moet gebracht worden, en in de *complementaire kromme* ϕ^2 .

In het raakpunt van ϕ^2 met f wordt ϕ door een kromme ρ^3 geosculeerd.

Een willekeurig vlak ϕ is dus slechts *osculatievlak* voor *één kromme* der $[\rho^3]$.

De complementaire krommen in de vlakken door l vormen een oppervlak van den *vierden graad* met *dubbel-rechte* l .

De verwantschap (C, C') tusschen de snijpunten C van l met f en de snijpunten C' van l met ϕ^2 blijkt een $(2, 2)$ te zijn.

Door l gaan derhalve *twee* osculatievlakken, welker raakpunt op l ligt.

De meetkundige plaats van de raakpunten der osculatievlakken door een rechte l wordt nu een *kubische ruimtekromme* ω^3 met l tot *koorde*.

§ 4. De congruentie van STURM kan ook worden voorgesteld door de vergelijkingen:

$$x_1 = t^3, \quad x_2 = \alpha t^2, \quad x_3 = \alpha \beta t, \quad x_4 = \alpha \beta \gamma.$$

Het osculatievlak eener kromme $x_k = f_k(t)$ wordt aangewezen door:

$$|y_k \quad f_k(t) \quad f'_k(t) \quad f''_k(t)| = 0.$$

Een willekeurige ρ^3 van de hier beschouwde congruentie heeft dus tot osculatievlak:

$$\begin{vmatrix} y_1 & t^3 & 3t^2 & 6t \\ y_2 & \alpha t^2 & 2\alpha t & 2\alpha \\ y_3 & \alpha \beta t & \alpha \beta & 0 \\ y_4 & \alpha \beta \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zal dit vlak door P gaan, dan moet voldaan worden aan:

$$\begin{vmatrix} p_1 & t^3 & 3t^3 & 6t^3 \\ p_2 & \alpha t^2 & 2\alpha t^2 & 2\alpha t^2 \\ p_3 & \alpha \beta t & \alpha \beta t & 0 \\ p_4 & \alpha \beta \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

of aan:

$$\begin{vmatrix} p_1 & x_1 & 3x_1 & 6x_1 \\ p_2 & x_2 & 2x_2 & 2x_2 \\ p_3 & x_3 & x_3 & 0 \\ p_4 & x_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hiervoor kan geschreven worden:

$$\begin{aligned} p_1 x_2 x_3 x_4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &- p_2 x_1 x_3 x_4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \\ + p_3 x_1 x_2 x_4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &- p_4 x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{of} \quad -2 p_1 x_2 x_3 x_4 + 6 p_2 x_1 x_3 x_4 - 6 p_3 x_1 x_2 x_4 + \\ + 2 p_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

$$\text{of} \quad \frac{p_1}{x_1} - \frac{3 p_2}{x_2} + \frac{3 p_3}{x_3} - \frac{2 p_4}{x_4} = 0.$$

Uit de laatste vergelijking blijkt, dat de raakpunten der osculatievlakken, die door een punt P gaan, op een *quadrinodaal kubisch oppervlak* Ω^3 liggen.

De hoekpunten van het osculatieviervlak $A_1 B_2 B_1 A_2$ zijn *kegelpunten* van dit oppervlak.

§ 5. De kromme ρ^3 , die door het punt Y gaat, moet voldoen aan de vergelijkingen:

$$\frac{\alpha x_1}{x_2} = \frac{\beta x_2}{x_3} = \frac{\gamma x_3}{x_4}$$

$$\text{en} \quad \frac{\alpha y_1}{y_2} = \frac{\beta y_2}{y_3} = \frac{\gamma y_3}{y_4},$$

$$\text{dus aan} \quad \frac{y_2 x_1}{y_1 x_2} = \frac{y_3 x_2}{y_2 x_3} = \frac{y_4 x_3}{y_3 x_4}.$$

Om den projecteerenden kegel met top Y te vinden, moet men x_k door $y_k + \lambda p_k$ vervangen en daarna λ elimineeren. Men heeft dan het stelsel

$$\frac{y_2 (y_1 + \lambda p_1)}{y_1 (y_2 + \lambda p_2)} = \frac{y_3 (y_2 + \lambda p_2)}{y_2 (y_3 + \lambda p_3)} = \frac{y_4 (y_3 + \lambda p_3)}{y_3 (y_4 + \lambda p_4)} = -\omega$$

te beschouwen.

Hieruit volgt

$$\left. \begin{aligned} \lambda y_2 p_1 + (1 + \omega) y_1 y_2 + \omega \lambda y_1 p_2 &= 0 \\ \lambda y_3 p_2 + (1 + \omega) y_2 y_3 + \omega \lambda y_2 p_3 &= 0 \\ \lambda y_4 p_3 + (1 + \omega) y_3 y_4 + \omega \lambda y_3 p_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{dus} \quad \begin{vmatrix} y_2 p_1 & y_1 y_2 & y_1 p_2 \\ y_3 p_2 & y_2 y_3 & y_2 p_3 \\ y_4 p_3 & y_3 y_4 & y_3 p_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Beschouwt men nu p_k als vaste en y_k als loopende coördinaten, dan is

$$p_1 p_4 y_2^2 y_3^2 + p_3^2 y_1 y_2^2 y_4 + p_2^2 y_1 y_3^2 y_4 - p_2 p_3 y_1 y_2 y_3 y_4 - \\ - p_1 p_3 y_2^2 y_3 y_4 - p_2 p_4 y_1 y_2 y_3^2 = 0$$

de vergelijking van het oppervlak Π_P^4 met pool P.

Schrijft men hiervoor

$$(p_2^2 y_1 y_3^2 - p_2 p_3 y_1 y_2 y_3 + p_3^2 y_1 y_2^2 - p_1 p_3 y_2^2 y_3) y_4 + \\ + (p_1 p_4 y_2^2 y_3^2 - p_2 p_4 y_1 y_2 y_3^2) = 0$$

dan blijkt dat A_2 en dus ook A_1 *drievoudig punt* van Π_P^4 is.

Uit

$$(p_1 p_4 y_2^2 - p_2 p_4 y_1 y_2 + p_2 y_1 y_4) y_3^2 + (p_3^2 y_1 y_2^2 y_4 - \\ - p_2 p_3 y_1 y_2 y_3 y_4 - p_1 p_3 y_2^2 y_3 y_4) = 0$$

volgt dat B_1 , dus ook B_2 , *dubbelpunt* van Π_P^4 is.

Het oppervlak Π_P^4 bevat dus de ribben $a_1, a_2, a_{12}, b_1, b_2$ van het osculatieviervlak, maar *niet* de ribbe b_{12} .

De raaklijn aan een kromme ρ^3 is bepaald door:

$$x_1 = t^3 + 3 \lambda t^2, \quad x_2 = \alpha t^2 + 2 \lambda \alpha t, \quad x_3 = \alpha \beta t + \lambda \alpha \beta, \\ x_4 = \alpha \beta \gamma.$$

Berekent men de lijncoördinaten der raaklijn, dan vindt men:

$$p_{12} = -\alpha t^4, \quad p_{13} = -2 \alpha \beta t^3, \quad p_{14} = -3 \alpha \beta \gamma t^2, \\ p_{23} = -\alpha^2 \beta t^2, \quad p_{24} = -2 \alpha^2 \beta \gamma t, \quad p_{34} = -\alpha^2 \beta^2 \gamma.$$

Dus is

$$p_{12} p_{34} = \alpha^3 \beta^2 \gamma t^4 \\ p_{31} p_{24} = -4 \alpha^3 \beta^2 \gamma t^4.$$

Hieruit blijkt dat

$$4 p_{12} p_{34} + p_{13} p_{24} = 0 \text{ is.}$$

De raaklijnen der krommen ρ^3 vormen dus een *tetraëdralen complex*.

HOOFDSTUK IX.

De congruentie van GODEAUX.

§ 1. De congruentie van GODEAUX ¹⁾ omvat alle kubische ruimtekrommen, welke door een *hoofdpunt* H gaan en vier gemeenschappelijke koorden h_1, h_2, h_3, h_4 bezitten.

De transversalen b_{12} uit H over h_1, h_2 en b_{34} uit H over h_3, h_4 bepalen een vlak β . Zij B_k het snijpunt van h_k met β .

Wij kiezen een willekeurige rechte b in het vlak β en beschouwen twee hyperboloïden, Φ^2 met richtlijnen h_1, h_2, b en Ψ^2 met richtlijnen h_3, h_4, b .

De doorsnede van Φ^2 met Ψ^2 bestaat uit de rechte b en een kromme ρ^3 , die h_1, h_2, h_3, h_4 en b tot koorden heeft.

Aan elke rechte b in het vlak β wordt op deze wijze een kromme der $[\rho^3]$ toegevoegd, welke b tot koorde heeft.

Een willekeurige ρ^3 snijdt β in H en twee punten B', B'' . Wanneer nu in β een rechte b ligt, die bij deze ρ^3 behoort, moeten twee der punten H, B', B'' op b liggen.

Ging b door H en B' , dan zouden Φ^2 en Ψ^2 het vlak β in H aanraken, dus zou ook de kromme ρ^3 in H aan β raken en B'' met H samenvallen.

Dit is in strijd met de onderstelling, dat ρ^3 een willekeurig exemplaar der congruentie is.

De rechte b gaat dus door B' en B'' , tenzij de toegevoegde ρ^3 in H aan β raakt.

¹⁾ L. GODEAUX: *Sur une congruence linéo-linéaire de cubiques gauches*. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, classe des sciences, n^o. 4, p. 531, 1908).

Laten wij b een waaier (O, β) doorloopen, dan verkrijgen wij ∞^1 krommen ρ^3 , die een *kubisch oppervlak* Φ^3 vormen. Immers de hyperboloïden Φ^2 en Ψ^2 brengen dan een meetkundige plaats van den vierden graad voort, waartoe het vlak β behoort (meetkundige plaats der rechten b) en verder dus een kubisch oppervlak als meetkundige plaats der krommen ρ^3 .

De verschillende in β gelegen waaiers (O, β) , (O', β) , ... bepalen ieder een oppervlak Φ^3 , dat door H gaat en de vier rechten h_k , dus ook de beide transversalen t_1, t_2 der vier rechten h_k bevat.

Deze oppervlakken Φ^3 behooren tot een *net*; want aan een kubisch oppervlak, dat door een vast punt moet gaan en vier gegeven rechten moet bevatten, worden 17 voorwaarden opgelegd.

De basis van dit net $[\Phi^3]$ bestaat uit de zes rechten h, t , die een ontaarde ruimtekromme van den zesden graad met zeven schijnbare dubbelpunten vormen. Immers de zeven koorden, uit een punt P naar deze ontaarde kromme getrokken, zijn de transversaal over t_1, t_2 en de transversalen over de paren h_k, h_l .

Op dezelfde wijze als bij de eerste algemeene congruentie van VENERONI wordt bewezen, dat de congruentie van GODEAUX *bilineair* is.

§ 2. Zij S een willekeurig punt van de gemeenschappelijke koorde h_1 . De transversaal uit S over h_3, h_4 snijdt β in een punt Q . Met elke rechte b van den waaier (Q, β) komt een ρ^3 overeen, die door S gaat.

Alle ρ^3 , die de stralen van dezen waaier tot koorden hebben, vormen een kubisch oppervlak met dubbelpunt S , daar er anders krommen ρ^3 zouden zijn, die met een rechte door S drie punten gemeen hadden.

De ∞^1 krommen ρ^3 door S vormen dus een *kubische monoïde* S^3 ; m. a. w. de vier rechten h_k zijn *singuliere rechten van de derde orde*.

Het oppervlak Π_P^4 heeft een kegelpunt $\dot{P}$ en wordt

door den kegel K_P^2 , welke ρ_P^3 uit P projecteert, gesneden in ρ_P^3 en vijf singuliere koorden.

Eén dezer is de koorde PH , welke *parabolisch singulier* moet zijn.

Uit de beschouwing van de punten, waarin het oppervlak Π_P^4 door een willekeurige ρ^3 gesneden wordt, volgt wederom, dat H *kegelpunt* van dit oppervlak is.

Verder kan men op de bekende wijze afleiden, dat de raaklijnen der krommen ρ^3 een *complex van den zesden graad* vormen en dat de complexkegel met top P een *keerribbe* PH en *vier dubbelribben* bezit.

§ 3. Wordt de rechte b door B_1 gelegd, dan valt de hyperboloïde Φ^2 uiteen in de vlakken (h_2, H) en (h_1, b) . De hyperboloïde Ψ^2 snijdt het vlak (h_1, b) volgens b en een beschrijvende d der hyperboloïde (h_1, h_3, h_4) .

Met het vlak (h_2, H) heeft Ψ^2 een kegelsnede δ^2 gemeen, welke door H, B_1 en de doorgangen van h_3, h_4, d gaat.

De kegelsneden van den bundel, die in (h_2, H) gelegen is en H, B_1 en de doorgangen van h_3 en h_4 tot basispunten heeft, vormen dus ontaarde figuren ρ^3 met de beschrijvenden d van de hyperboloïde (h_1, h_3, h_4) .

Er zijn drie analoge stelsels van ontaarde figuren (d, δ^2) .

De transversaal t_1 vormt een ontaarde figuur met elke kegelsnede, die door H gaat en op de vier rechten h_k rust. Alle zoodanige kegelsneden vormen een *kubisch oppervlak* Δ_1^3 met dubbelrechte t_1 .

Immers zij T_1 de doorgang van t_1 met β, b een rechte in β door T_1 en τ een vlak door t_1 , dat β volgens de rechte b_0 snijdt. De hyperboloïden Φ^2 en Ψ^2 door b snijden τ volgens rechten p, q , welke door de doorgangen B_{12}, B_{34} van b_{12}, b_{34} met τ gaan. B_{12} en B_{34} liggen op b_0 .

Wentelt nu b om T_1 , dan beschrijven p en q projectieve waaiers; valt b langs b_0 , dan vallen ook p en q met b_0 samen.

De projectieve waaiers brengen dus een lijnenpaar b_0 , r voort en r vormt met t_1 de volledige doorsnede van Δ_1^3 met τ ; dus is t_1 dubbelrechte van Δ_1^3 .

Analoog vormt de transversaal t_2 ontaarde figuren met de kegelsneden δ^2 van een kubisch oppervlak Δ_2^3 met dubbelrechte t_2 .

De meetkundige plaats der kegelsneden δ^2 is ook bij deze congruentie een figuur van den *tienden graad*; zij valt uiteen in *twee kubische oppervlakken* Δ_1^3 , Δ_2^3 en *vier vlakken*.

De rechten d vormen, evenals bij de tweede algemeene congruentie van VENERONI een meetkundige plaats van den *achtsten graad*, welke hier echter uiteenvalt in *vier hyperboloïden*.

Een willekeurige rechte l snijdt achttien ontaarde figuren (d , δ^2), waarvan zij tien op de kegelsnede en acht op de rechte ontmoet.

De figuren ρ^3 , welke uit drie rechten bestaan, kunnen op de volgende wijze gevonden worden:

1^o. De eerste rechte gaat door H en snijdt twee koorden h_k , h_l ; de tweede rechte verbindt de doorgangen van h_m , h_n met het vlak (H, h_l); de derde is een beschrijvende der hyperboloïde (h_k , h_m , h_n). Deze groep omvat zes ontaarde figuren.

2^o. De transversalen t_1 , t_2 vormen een figuur ρ^3 met de transversaal uit H over t_1 en t_2 .

De congruentie bezit dus slechts *zeven figuren, welke uit drie rechten bestaan*.

§ 4. Wij bepalen verder den graad van het oppervlak Λ .

Daar de rechte l de monoïde S^3 , gevormd door de krommen ρ^3 , welke door een punt S van h_k gaan, in drie punten snijdt, draagt S drie krommen ρ^3 , die l ontmoeten; m. a. w. de vier rechten h_k zijn *drievoudige rechten* van het oppervlak Λ .

De doorsnede van dit oppervlak met het vlak (h_1 , H) bestaat nu uit de drievoudige rechte h_1 , de kegelsnede door H en de doorgangen van h_2 , h_3 , h_4 en l , en de

twee kegelsneden door H , de doorgangen van h_2, h_3, h_4 en den doorgang van telkens een der transversalen over h_2, h_3, h_4 en l .

De doorsnede is dus van den negenden graad en heeft een drievoudig punt H .

De krommen ρ^3 , welke l snijden, vormen dus een oppervlak van den *negenden graad*, Λ^9 , met een *drievoudig punt* H en *vier drievoudige rechten* h_k .

Daar de doorsnede van twee oppervlakken Λ^9 naast negen krommen ρ^3 en de rechten h_k slechts uit de transversalen t_1, t_2 kan bestaan, zullen ook t_1, t_2 *drievoudige rechten* van Λ^9 zijn.

Verder draagt dit oppervlak de *dubbelkromme* ρ^3 , de rechte l , *achttien kegelsneden* en *twaalf rechten* d .

Door toepassing van de bekende methoden vinden wij nog de volgende eigenschappen van de congruentie van GODEAUX.

De punten, waar een vlak ϕ door krommen ρ^3 wordt aangeraakt, liggen op een kromme van den *zesden graad*, ϕ^6 , met zes dubbelpunten in de doorgangen der rechten h, t .

De krommen ρ^3 , welke een vlak ϕ aanraken, vormen een oppervlak van den *achttienden graad*, Φ^{18} , met *zes zeshoudige rechten* h, t en een *zeshoudig punt* H .

Dit oppervlak heeft blijkbaar met elke hyperboloïde (h_k, h_l, h_m) behalve de singuliere rechten en de transversalen t nog zes beschrijvende gemeen; het bevat dus ook de 24 kegelsneden, welke deze rechten tot figuren ρ^3 aanvullen; eindelijk heeft het zes kegelsneden met $\Delta_1^3 (\Delta_2^3)$ gemeen.

Φ^{18} draagt dus 24 enkelvoudige rechten en 36 kegelsneden.

De raakpunten der raaklijnen, die een rechte l snijden, liggen op een oppervlak van den *zevendenden graad*.

Er zijn 36 krommen ρ^3 , welke twee gegeven vlakken ϕ en ψ aanraken.

De *complementaire kromme* ϕ_0^6 heeft zes dubbelpunten in de doorgangen der rechten h, t .

Een vlak ϕ wordt door zes krommen ρ^3 *geosculeerd*.

Door een rechte l gaan *negen* osculatievlakken, welker raakpunten op l liggen.

De meetkundige plaats van de raakpunten der osculatievlakken door een rechte l is een kromme van den *vijftienden graad*, ω^{15} , met *negenvoudige snijlijn* l .

De punten, die hun osculatievlak door een punt P zenden, liggen op een oppervlak van den *tienden graad*, Ω^{10} , met *zes drievoudige rechten* h , t en een *drievoudig punt* H .

§ 5. Wij vonden in § 1 dat met een rechte b door H een ρ^3 overeenkomt, die het vlak β in H aanraakt. Hieruit volgt terstond dat de krommen ρ^3 , welke β in H aanraken, een *kubisch oppervlak* vormen, dat β in H aanraakt.

Met β heeft dit oppervlak een vlakke kubische kromme met dubbelpunt H gemeen. Door H gaan twee raaklijnen aan deze kromme; d. w. z. er zijn *twee* krommen ρ^3 , welke het vlak β in H *osculeeren*.

In een willekeurig vlak ϕ bepaalt de congruentie van GODEAUX een kubische involutie met zes singuliere punten van de derde orde in de doorgangen der rechten h , t .

De congruentie van REYE kan ook als een bijzonder geval van de congruentie van GODEAUX beschouwd worden.

Wanneer de gemeenschappelijke koorden een scheeve vierzijde vormen, moeten alle krommen ρ^3 door de toppen dezer vierzijde gaan en heeft de congruentie dus *vijf hoofdpunten*.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

1.

De figuur, waardoor F. KLEIN (Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig, Teubner, 1902, blz. 52, 78) de eigenaardigheden der functie $y = \frac{1}{\sin x}$ graphisch wil doen uitkomen, is onjuist ontworpen.

2.

BOOLE (A treatise on differential equations, 4th ed., p. 60) geeft als theorema: „Als een der functies $Mx + Ny$ en $Mx - Ny$ nul is, zal het omgekeerde der andere functie integreerende factor zijn van de vergelijking $Mdx + Ndy$ ”. Dit theorema heeft voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen geen waarde.

3.

R. STURM komt in zijn werk: „Die Lehre von den Geometrischen Verwandtschaften” (IV, 286) tot de bekende afbeelding van een kubisch oppervlak op een vlak door de afbeelding met behulp van een bilineaire congruentie te combineeren met een quadratische transformatie. Men kan het beeldvlak zoo kiezen, dat men tot de bedoelde afbeelding komt zonder gebruik te maken van een quadratische transformatie.

4.

Het oppervlak Λ^5 (congruentie van REYE, zie blz. 7) bevat, behalve ∞^1 congruentiekrommen, nog 10 stelsels van kubische ruimtekrommen.

5.

Terwijl de tweede algemeene congruentie van VENERONI door de transformatie van GODEAUX (zie blz. 42) op een stralenschoof wordt afgebeeld, kunnen bijzondere gevallen dezer congruentie door eenvoudiger kubische transformaties in een stralenschoof worden omgezet.

6.

De hoofdkoorden en de gemeenschappelijke koorden van de bilineaire congruenties van kubische ruimtekrommen kunnen ook als singuliere rechten beschouwd worden.

7.

De derde algemeene congruentie van VENERONI kan geen ontaarde figuren bezitten.

8.

De congruentie van STUYVAERT bezit slechts 13 figuren, die uit drie rechten bestaan. De bewering van STUYVAERT (Dissertation inaugurale, Gand, 1902, blz. 41), dat het aantal dezer ontaarding en 25 bedraagt, is onjuist.

9.

Ten onrechte beweert GODEAUX (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1908, blz. 536) dat de door hem onderzochte congruentie 15 ontaarding en in drie rechten bezit.

10.

In den exponentieelen vorm voor de kansfunctie volgens het theorema van BAYES $G e^{-H^2 z^2}$ moet men $G = (m + n + 1) \sqrt{\frac{m + n}{2 \pi m n}}$ en $H = G \sqrt{\pi} = (m + n + 1) \sqrt{\frac{m + n}{2 m n}}$ stellen.

11.

De proeven van MILLIKAN (Ann. d. Physik [4], 50, blz. 729—769) hebben de bewering van EHRENFEST, dat er een subelectron zou bestaan, zeer onwaarschijnlijk gemaakt.

12.

De conclusies, die THIEME (Ber. der Deutschen Physikal. Gesellschaft, 1916, blz. 187 en 221) uit zijn proeven trekt over de geldigheid van de wet van FARADAY voor vlamelectrolyten, zijn te zwak gefundamenteerd.

