Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Over sterfteformules en lijfrenten

https://hdl.handle.net/1874/263173

1917

4° 192, 197 (Wisk.)

OVER STERFTEFORMULES EN LIJFRENTEN.



UNIVERSITEITS BIBLIOTHEEK UTRECHT

J. du SAAR.

A. qu.
192

OVER STERFTEFORMULES EN LIJFRENTEN.

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT
0386 9892

OVER STERFTEFORMULES EN LIJFRENTEN.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

Dr. P. H. DAMSTÉ,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE.

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

OP MAANDAG 4 JUNI 1917, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

JOHANNES du SAAR,

GEBOREN TE KRALINGEN.



P. NOORDHOFF. — 1917. — GRONINGEN.

Bij het beëindigen van mijn proefschrift voel ik mij gedrongen een woord van oprechte dank te richten tot U, Hooggeleerde KAPTEYN. *De vriendelike wijze, waarop Gij mij zijt tegemoetgetreden, de grote belangstelling, waarmede Gij van mijn werk hebt kennis genomen, hoewel ik geen leerling van de utrechtse unieversieteit was, zal ik nooit vergeten. Zeer heb ik het betreurd, dat Gij door Uw aftreden niet in de gelegenheid waart mijn promotor te zijn. De welwillendheid en steun, die ik ook nog na Uw aftreden in zo grote mate van U mocht ondervinden, zullen mij steeds in dankbare herinnering blijven.*

Niet minder dank ben ik U verschuldigd, Hooggeleerde NIJLAND. *Gij hebt U bereid verklaard mijn promotor te zijn, hoewel ik ook van U geen leerling was. Ik waardeer dit zeer, te meer, omdat het door mij gekozen onderwerp, hoe aantrekkelik ook voor mij, voor U weinig bekoring kon hebben. De aangename, welwillende behandeling, die ik in alle opzichten van U mocht ondervinden, de vele nuttige wenken, die ik met betrekking tot mijn werk van U mocht ontvangen, stemmen mij tot veel groter dankbaarheid dan ik in deze korte woorden kan uitdrukken. Wees overtuigd, dat ik steeds zal blijven onthouden, wat ik aan U te danken heb.*

AAN MIJN VROUW.

INHOUD.

			Bladz.
Hoofdstuk	I.	Inleiding	1
„	II.	Afleiding van de grondformules voor de lijfrente	8
„	III.	Over de oudste sterfteformules	13
„	IV.	Over de sterfteformules na 1860	45
„	V.	Over formules voor invaliedieteit en ziekte	88
„	VI.	Inleiding tot de lijfrenten	99
„	VII.	Lijfrenten volgens de formule van De Moivre	105
„	VIII.	Lijfrenten volgens de formule van Makeham	116

AFKORTINGEN.

J. I. A. = Journal of the Institute of Actuaries.

B. A. F. = Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires français.

Philosophical Transactions = Philosophical Transactions of the Royal Society of London.

HOOFDSTUK I.

INLEIDING.

§ 1. De berekeningen, die zich voordoen op het gebied van de levensverzekeringswetenschap, berusten op de kennis van de menselike sterfte en op de intrestrekening. Veelal wordt uitgegaan van een sterftetafel, waarin wordt aangegeven hoeveel personen uit een oorspronkelik groot, maar overigens geheel willekeurig, aantal gelijktijdig geborenen op de verschillende leeftijden die door gehele getallen worden voorgesteld nog in leven zijn. Of men geeft, eveneens voor gehele jaren, een rij van de levenskansen, d. w. z. van de waarschijnlikheid, dat een persoon van een bepaalde leeftijd na verloop van een jaar nog in leven is; het is duidelik, dat uit de rij van levenskansen die voor het aantal levenden is af te leiden. De eenheid van tijd is in verreweg de meeste gevallen een jaar; bij de afleiding van de verschillende verzekeringswaarden vat men het op alsof het aantal levenden van een bepaalde leeftijd gedurende een jaar evengroot blijft om dan plotseling te verminderen tot het volgende getal uit de sterftetafel, m. a. w. alsof alle sterfgevallen tegelijkertijd plaats vinden aan het einde van dat jaar. Ook bij de intrestrekening wordt dan het jaar als tijdseenheid aangenomen, dit in verband met de voorgaande overweging.

Het is niet te ontkennen, dat het aannemen van deze grondslagen de berekeningen tot zeer eenvoudige matematiese vraagstukken maakt. Maar evenmin kan worden ontkend, dat in die aanname iets geschiedt, hetwelk uit een wiskundig oogpunt minder juist genoemd moet worden. Het aantal levenden verloopt kontienu; en ook de rente kan kontienu worden genomen. Wat dit laatste betreft bedenke men, dat de kontienue rente een uitbreiding kan worden genoemd van de rente betaalbaar in

termijnen. In enkele gevallen wordt, wat het aantal levenden betreft, wel aangenomen, dat dit in de loop van een jaar tot het volgende aantal overgaat evenredig met de tijd. Stelt men de getallen uit de sterftetafel op een assenstelsel voor door punten, dan wordt in die onderstelling het sterfteverloop voorgesteld door een gebroken lijn; neemt men het werkelike sterfteverloop, dan levert dit een kromme.

Gaat men van deze grondslag uit bij de berekening van verzekeringswaarden, dan spreekt men van de kontienue metode.

Op nadere biezonderheden van de kontienue metode wordt in de volgende hoofdstukken ingegaan. We willen hier nog even opmerken, dat deze metode nog zeer weinig wordt toegepast; ongetwijfeld is de eenvoudigheid van de gebruikelike metode vergeleken met de kontienue metode daarvan de voornaamste reden.

Voor de wiskundige bezit de kontienue metode intussen alle aantrekkelikheid; voor hem doet zich vanzelf de vraag voor of die metode, naast en juist tengevolge van de eigenschappen, die die metode oplevert, niet voor de praktijk bruikbaar is. Het ligt dan ook voor de hand, dat men de voorstanders van het gebruik van de kontienue metode aantreft en steeds heeft gevonden onder hen, die in de eerste plaats wiskundige waren en daarnaast geroepen werden tot oplossing van vragen op het gebied van de toepassing.

De Moivre, de eerste schrijver van een bruikbaar werk over lijfrenten [1]), wiskundige van de eerste rang, kon niet laten in zijn werk, dat ook voor leken bestemd was, reeds te zinspelen op de kontienue rente. Een aanwijzing voor de kontienue metode vindt men ook bij zijn leerling Simpson, die een paar vraagstukken over verzekering oplost [2]) op een manier, die hij aangeeft te zijn „very different from that where by they are usualy investigated", welke manier neerkomt op de kontienue

[1]) A. de Moivre. Annuities on lives. 1725. Over het jaartal 1725 zie men: J. du Saar. Een paar opmerkingen bij de werken van De Moivre. (Archief voor de Verzekeringswetenschap XVI) 1916. pag. 49.

[2]) Th. Simpson. Select Exercices for young proficients in the mathematicks. 1752. pag. 323.

metode. Ook DANIËL BERNOULLI [1]) gebruikt bij een sterftekwestie deze metode op onberispelike wijze; hij geeft als voordeel aan „dat het nu mogelik is de differentieaal- en integraalrekening te gebruiken, waardoor de opgaven zeer vereenvoudigd worden"; evenzo doet DUVILLARD [2]). Zo vindt men ook een spoor van de kontienue metode bij A. DE MORGAN [3]).

§ 2. De verdere ontwikkeling van de metode is te danken aan WOOLHOUSE [4]); hij kondigt daarbij een „improved" teorie aan; de bevestiging daarvan heeft hij gevonden in het uitgebreider gebruik, dat na hem de metode heeft verworven, ook op het gebied van de matematiese statistiek (het eerst door ZEUNER) [5]).

In dezelfde tijd wordt echter nog openlik tegen de kontienue metode stelling genomen. Zo o. a. door FISCHER [6]), die de waarnemingen waarop de berekeningen gebazeerd zijn nog te onnauwkeurig vindt om er de kontienue metode aan te verbinden; een zwak standpunt. Hij wordt, zelfs nog in 1884, gesteund door ZIMMERMANN [7]); deze meent, dat men niet met differentiealen van personen mag werken, omdat niet kleine deeltjes van een mens, maar gehele mensen sterven. Voor een wiskundige kan deze uitspraak echter bezwaarlik als steekhoudend worden aangemerkt; zulk een gezegde berust op een bekrompen opvatting van het begrip differentieaal.

---

[1]) D. BERNOULLI. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. (Histoire de l'Académie royale des sciences de Paris. II). 1760.

[2]) E. E. DUVILLARD. Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole sur la mortalité etc. 1806.

[3]) A. DE MORGAN. An essay on probabilities and their application to life-contingencies and insurance-offices. 1838. pag. XXIV.

[4]) W. S. B. WOOLHOUSE. On an Improved Theory of Annuities and Assurances. J. I. A. XV. 1869. pag. 115.

[5]) G. ZEUNER. Abhandlungen der mathematischen Statistik. 1869.

[6]) PH. FISCHER. Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründete Versicherungswesens. I. Bestimmung der Sterblichkeitsverhältnisse. 1860. pag. 22.

[7]) H. ZIMMERMANN. Ueber Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse. 1884. pag. 15.

Breder opvatting heeft o. a. WESTERGAARD [1]); deze geeft wel toe, dat differentiealen van mensen een fiksie is, omdat een bevolking bestaat uit een geheel aantal mensen en slechts met gehele getallen kan toe- en afnemen, maar hij meent daarbij, dat het prakties zonder verkeerde invloed blijft of men zegt, dat een bevolking dageliks met 96 mensen toeneemt of in elke sekonde met $^1/_{900}$ mens. Voor hem is het grote voordeel van de kontienue metode gelegen in de omstandigheid, dat hierbij de differentieaal- en integraal-rekening kan worden gebruikt.

SCHEFFLER leverde het eerste werk, waarin de verzekeringswetenschap sistemáties met behulp van de integraalrekening wordt uiteengezet [2]); in de tegenwoordige tijd treft men de behandeling in enkele leerboeken aan, zij het ook zelden uitvoerig.

§ 3. Men wachte zich evenwel om de kontienue metode voor de enige bruikbare te houden. Voor elke metode is iets te zeggen. We kunnen ons dan ook ten volle aansluiten bij WESTERGAARD [3]), die, hoewel sterk ijveraar voor de metode, toch aanraadt opportunist te blijven.

In dezelfde geest spreekt JÖRGENSEN [4]), eveneens sterk voorstander van de kontienue metode; ook hij waarschuwt voor de „Irrtum, dasz die kontinuierliche Methode die einzig seligmachende sei." En enige regels verder zegt hij: „der Statistiker und der Aktuar musz mehrere Saiten auf der Geige haben, um im gegebenen Falle die vorteilhafteste erwählen zu können, und ein guter Aktuar darf nie in Einseitigkeit und Doktrinarismus verfallen!"

§ 4. De noodzakelike voorwaarde voor het invoeren en toepassen van de kontienue metode bij vraagstukken over de sterfte is gelegen in de, overigens in de rede liggende, aanname dat de

---

1) H. WESTERGAARD. Die Lehre von der Mortalität und Morbilität. 1901. pag. 116.

2) H. SCHEFFLER. Sterblichkeit und Versicherungswesen. 1868.

3) H. WESTERGAARD. l. c. pag. 149.

4) N. R. JÖRGENSEN. Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung. 1913. pag. 62.

funksie l_x voor het aantal levenden een kontienue, differentieëerbare en integreerbare funksie van de leeftijd x is, die voor gehele waarden van x bepaald is door de getallen uit de sterftetafel. Kontienuieteit, onbeperkte differentieeërbaarheid en integreerbaarheid zijn trouwens besliste voorwaarden aan welke alle bieometriese funksies moeten voldoen. De ontwikkeling van de kontienue metode is dan ook voorbereid door de vele pogingen, die de eigenaardige beweging van de volgens de leeftijd gerangschikte sterftekans heeft teweeg gebracht om het verloop van de sterfte weer te geven door een analietiese funksie. Eensdeels vormde de analietiese metode de grondslag voor de analietiese afronding [1]) van sterftetafels; op dit vraagstuk, dat reeds tot zo vergevorderde oplossing is gekomen gaan we hier niet in. Anderdeels heeft de aanname van een analietiese funksie gediend tot grondslag voor hen, die vóór alles er naar zochten om met behulp van de kontienue metode de in de praktijk voorkomende berekeningen te maken, zo mogelik eenvoudiger dan met behulp van de gewone, meest gebruikelike metode.

We kunnen hier ook buiten beschouwing laten de kwestie, die oorspronkelik een punt van strijd uitmaakte, n.l. of de sterfte moest worden beschouwd als te gehoorzamen aan een natuurwet. Bestond deze opvatting vroeger algemeen en nog wel in de laatste tijden ook, deze beschouwing heeft zich tegenover een diepere kennis van de zaken niet kunnen handhaven. De nieuwere opvattingen zien in de sterfteformules niets meer dan analietiese uitdrukkingen, die zich aan de ene reeks waarnemingen beter, aan de andere minder goed aansluiten. Men kan aannemen, dat het nooit zal gelukken een formule te vinden, die aan alle reeksen waarnemingen op een bepaald gebied evengoed aansluit. Een zodanige formule zou daarbij niet slechts moeten berusten op de waarnemingen, maar ook en wel hoofdzakelik op de natuur van het betrokken verschijnsel; de veranderlikheid van het verschijnsel met plaats en tijd verzet zich tegen een

---

[1]) We zullen in dit geval ook voor het vervolg van afronding blijven spreken, omdat die uitdrukking in de verzekeringswiskunde eenmaal gebruikelik is; de benaming is in dit geval echter minder juist.

allesomvattende analietiese formulering. „Das „Gesetz" schreibt nicht die Natur vor, sondern der Rechner" [1]).

§ 5. Tengevolge van de opvatting, dat de sterfte zou gehoorzamen aan een natuurwet, vindt men vaak gebruik gemaakt van de uitdrukking sterftewet, terwijl het beter is te spreken van sterfteformule; het zal echter lastig zijn de woorden sterftewet, law of mortality, Sterblichkeitsgesetz geheel te verbannen, ze hebben daarvoor een te uitgebreide toepassing ondervonden.

Men behoeft niet zo ver te gaan als FORCHER [2]), die aan alle bestaande sterftewetten slechts historiese betekenis toekent. Voor een groot aantal geldt dit zeker; er zijn er evenwel bij die meer dan historiese waarde hebben, voor wie zelfs nog een toekomst is weggelegd. Zolang men intussen ingewikkelde, moeielik hanteerbare analietiese funksies uitdacht, funksies met een groot aantal konstanten, was het van de man van de praktijk te verwachten, dat hij zich bij zijn berekeningen van het gebruik van die funksies afwendde. Alleen een eenvoudige funksie brengt voor zichzelf de mogelikheid van toepassing, en die toepassing is in grotere mate te verwachten, wanneer de funksie voert tot eigenschappen, waardoor de berekeningen in de praktijk vereenvoudiging ondergaan. Het is daardoor, dat de wet van MAKEHAM [3]) vóór alles op de voorgrond is getreden; het uitgebreide veld van toepassing, dat deze wet heeft gevonden schijnt nog niet afgesloten. En juist de toepassing van de kontienue metode brengt hier vele eigenschappen naar voren.

We hebben daarom hier na een korte uiteenzetting van de grondformules, waartoe de kontienue metode voert, een overzicht gegeven van de vele sterfteformules, die in de loop van de tijd zijn uitgedacht om vervolgens na te gaan welke voor toepassing in aanmerking komen. Bij enkele schrijvers vindt men wel een korte,

---

[1]) G. BOHLMANN. Lebensversicherungsmathematik (Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften. I[2]). pag. 870.

[2]) H. FORCHER. Die statistische Methode als. selbständige Wissenschaft 1913. pag. 266.

[3]) W. M. MAKEHAM. On the law of mortality and the construction of annuity tables J. I. A. VIII. 1860. pag. 301.

maar altijd onvolledige, opsomming van die formules zonder diepgaande bespreking; in dit geschrift menen we zo volledig mogelik te zijn geweest.

We hebben ons veroorloofd ook de formules te vermelden, die in de loop van de tijd zijn opgesteld op het gebied van invaliedieteit en ziekte, daar deze van dezelfde aard zijn. Na de bespreking van de sterfteformules is voor diegenen, die daarvoor in aanmerking komen, de toepassing op de in de praktijk voorkomende berekeningen behandeld. Daarbij hebben we ons bepaald tot lijfrenten, geleid door de overweging, dat deze de grondslag vormen voor vrijwel alle andere verzekeringsvormen.

HOOFDSTUK II.

AFLEIDING VAN DE GRONDFORMULES VOOR DE LIJFRENTE.

§ 6. Tussen de funksie l_x voor het aantal levenden aan de ene zijde en de funksies p_x en q_x voor de levenskans en de sterftekans aan de andere zijde bestaat het fundamentele onderscheid, dat de laatste twee een absolute uitspraak aangaande de sterfte doen, terwijl l_x een konstante, maar willekeurige faktor l_0 bezit. Toch is er in de funksies p_x en q_x ook iets willekeurigs, en wel dat als tijdseenheid geheel willekeurig het jaar is aangenomen. We bespraken dit reeds in hoofdstuk I. Men kan dit vermijden door de tijdseenheid oneindig klein te nemen; dit ligt bij de aanname van een analietiese funksie voor het verloop van de sterfte voor de hand. Op die wijze komt men tot het gebruik van de sterfte-intensieteit μ_x voor de leeftijd x. De funksie bezit hetzelfde karakter als q_x, maar is vrij van de aan die funksie vastzittende willekeurigheid; de sterfte-intensieteit is daarom voor de teorie over de sterfte een fundamentele grootheid.

Uit de hiervolgende beschouwingen zal blijken, dat, wanneer de sterfte-intensieteit gegeven is, uitdrukkingen zijn af te leiden voor levenskans, sterftekans, aantal levenden, lijfrenten. Voor praktiese doeleinden is een vereiste, dat de sterfte-intensieteit zich vertoont in een integreerbare gedaante; de grotere of mindere bruikbaarheid van de hierna te behandelen sterfteformules hangt dan ook voor een groot deel af van deze omstandigheid.

De uitdrukking voor de sterfte-intensieteit μ wordt als volgt afgeleid :

Zij het aantal levenden van $x + t$ jaar l_{x+t}, dan is de kans, dat iemand van $x + t$ jaar na verloop van dt jaar nog leeft, gelijk aan

$$\frac{l_{x+t+dt}}{l_{x+t}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en de kans, dat hij in de loop van dat tijdsdeel is overleden,

$$1 - \frac{l_{x+t+dt}}{l_{x+t}} = - \frac{dl_{x+t}}{l_{x+t}}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

dus in de eenheid van tijd — de zo bepaalde grootheid noemt men dan de sterfte-intensieteit —

$$\mu_{x+t} = - \frac{dl_{x+t}}{l_{x+t}dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

of

$$\mu_{x+t} = - \frac{d \,.\, \lg l_{x+t}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hieruit volgt:

$$d \,.\, \lg l_{x+t} = - \mu_{x+t} dt$$

Integreert men tussen de grenzen 0 en t, dan krijgt men

$$\lg \frac{l_{x+t}}{l_x} = - \int_0^t \mu_{x+t}\, dt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

waaruit

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} = e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

of

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

§ 7. Met behulp van de uitdrukking (7) kan men nu een formule afleiden voor de kontienue lijfrente $\bar{a}_x$. Bedenkt men, dat een kapietaal gelijk aan de eenheid, over t jaar betaalbaar, in geval van kontienue intrest — waarbij de rente-intensieteit, zoals bekend wordt ondersteld, gelijk is aan $\delta = - \lg v = \lg (1 + i)$, als i de rentevoet is — een kontante waarde heeft van $e^{-\delta t}$, dan vindt men voor de kontante waarde van een uitkering gelijk aan de

eenheid, uit te betalen wanneer de nu x-jarige de leeftijd $x + t$ heeft bereikt, een bedrag

$$e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_0^t \mu_{x+t}\,dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Als men bedenkt, dat

$$e^{-\delta t} = e^{-\delta \int_0^t \delta t}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

gaat (8) over in

$$e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \delta)dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Men vindt nu voor de gevraagde lijfrente — levenslang genomen —

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \delta)dt}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Stelt men

$$D_x = e^{-\int_0^x (\mu_t + \delta)\,dt}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

dus

$$D_{x+n} = e^{-\int_0^{x+n} (\mu_t + \delta)\,dt},$$

dan wordt

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} = e^{-\int_x^{x+n} (\mu_t + \delta)\,dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$= e^{-\int_0^n (\mu_{x+t} + \delta)\,dt}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

waardoor de uitdrukking (11) voor $\bar{a}_x$ overgaat in

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{D_{x+t}}{D_x}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Stelt men nog

$$\bar{N}_x = \int_0^\infty D_{x+t}\, dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

dan komt (11) te staan in de eenvoudige gedaante

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{N}_x}{D_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Men kan door vergelijking van (17) met (6) nog vinden:

$$\frac{D_{x+t}}{D_x} = e^{-\delta t} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

hetgeen in verband met de waarde voor de diskonteringsfaktor δ [1]) kan geschreven worden

$$\frac{D_{x+t}}{D_x} = v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{v^{x+t} l_{x+t}}{v^x l_x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

waardoor (18) overgaat in

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^x l_x} \int_0^\infty v^{x+t} l_{x+t} dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

of

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^x l_x} \int_x^\infty v^z l_z dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

We hebben de verschillende vormen afgeleid om die alle naar omstandigheden te kunnen toepassen.

Wil men toch de lijfrenten niet kontienu hebben, doch in grotere of kleinere, maar niet oneindig kleine termijnen, dan kan men de daarop betrekking hebbende formules afleiden uit die voor de kontienue lijfrente. Men heeft daarbij de keus uit vele formules, van welke die van EULER—MACLAURIN, ook wel naar WOOLHOUSE genoemd, de voorkeur verdient.

Voor de lijfrente in jaartermijnen is een meer dan voldoende benadering, wanneer men die formule neemt in de vorm

$$\bar{a}_x = a_x + {}^1/_2 - {}^1/_{12}\,(\mu_x + \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

---

[1]) cf. pag. 9.

In de regel is het voldoende om te nemen

$$\bar{a}_x = a_x + {}^1/_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

§ 8. Heeft men te doen met lijfrenten op meer hoofden, betaalbaar tot het eerste sterfgeval, dan vindt men volgens een redenering, geheel analoog aan die voor de lijfrente op één hoofd, voor de levenslange lijfrente als kontante waarde

$$\bar{a}_{xyz\ldots} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+t,\, y+t,\, z+t,\, \ldots} + \delta)\, dt}\, dt \quad . \quad . \quad (26)$$

Daarbij is

$$\mu_{x+t,\, y+t,\, z+t,\, \ldots} = -\frac{d \,.\, \lg l_{x+t,\, y+t,\, z+t\, \ldots}}{dt}$$

$$= -\frac{d \,.\, \lg l_{x+t} \,.\, l_{y+t} \,.\, l_{z+t} \,\ldots}{dt}$$

$$= -\frac{d \,.\, \lg l_{x+t} + d \,.\, \lg l_{y+t} + d \,.\, \lg l_{z+t} + \ldots}{dt},$$

dus

$$\mu_{x+t,\, y+t,\, z+t\, \ldots} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \mu_{z+t} + \ldots = \Sigma\mu_{x+t}. \quad (27)$$

Daardoor gaat (26) over in

$$\bar{a}_{xyz\ldots} = \int_0^\infty e^{-\Sigma \int_0^t \mu_{x+t}\, dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Verder heeft men als vergelijkingen, overeenkomende met (24) en (25)

$$\bar{a}_{xyz\ldots} = a_{xyz\ldots} + {}^1/_2 - {}^1/_{12}\,(\Sigma\mu_x + \delta) \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

en

$$\bar{a}_{xyz\ldots} = a_{xyz\ldots} + {}^1/_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

HOOFDSTUK III.

OVER DE OUDSTE STERFTEFORMULES.

§ 9. Niet lang na de eerste wetenschappelike berekening van de lijfrente, door JOHAN DE WITT [1]), begonnen de pogingen om het verloop van de menselike sterfte door een formule voor te stellen. We merkten reeds op, dat zich bij hen, die zich met het vraagstuk bezighielden, vooral bij de vroegere onderzoekers, sterk de mening opdrong, dat aan het verloop van de menselike sterfte een of andere natuurwet ten grondslag zou liggen.

Er zijn nu onder de onderzoekers twee richtingen te onderscheiden. De meeste, vooral de vroegere, trachtten de wet te vinden langs de weg van de verzameling en bestudering van statistiese gegevens; men zou ze kunnen noemen de ontdekkers van een wet a posteriori. Enkele, voornamelik van de latere, sloegen de omgekeerde weg in en stelden een analietiese betrekking op, van welke zij de juistheid uit de waarnemingen trachtten aan te tonen; hun wetten zijn die a priori te noemen.

Het aantal opgestelde formules is zeer talrijk, er zijn er verscheidene bij die nog slechts historiese betekenis hebben, zelfs van de meeste is dit te zeggen [2]). Hier en daar treft men in werken een opgave van de formules aan, nergens echter vonden we de volledigheid, die we menen hier te kunnen aanbieden. Tussen de verschillende formules bestaat over het algemeen weinig verband, van vele schrijvers kan worden nagegaan, dat ze met de resultaten van hun voorgangers en tijdgenoten weinig bekend waren. Voor een groot deel hebben we dan ook ons overzicht in historiese volgorde gegeven; daar waar het

[1]) JOHAN DE WITT. Waardije van Lijf-renten Naer proportie van Los-renten. 1671.

[2]) cf. pag. 6.

onderling verband dit vroeg, zijn we evenwel van die volgorde afgeweken.

§ 10. In 1693 werd de eerste wetenschappelike sterftetafel in het licht gegeven door HALLEY [1]) naar aanleiding van waarnemingen met betrekking tot de sterfgevallen te Breslau gedurende de jaren 1687 tot en met 1691. Deze sterftetafel maakte een punt van ernstige studie uit voor ABRAHAM DE MOIVRE [2]) en zo treden reeds kort na het opstellen van sterftetafels de pogingen op om, zoals het ook naderhand vaak werd uitgedrukt, „de matematiese sterftewet te ontdekken."

De MOIVRE moet als de eerste vermeld worden, die meende de wet van afsterving te hebben gevonden. Hij merkte op [3]), dat de aantallen levenden voor verschillende groepen van leeftijden in de tafel van HALLEY, die uitgaat van 1000 personen van 1 jaar, volgens een rekenkundige reeks van de eerste orde afnemen. De reden van deze reeks verandert, doch zonder enige regelmaat; van 12 tot 24 jaar bijvoorbeeld is de reden gelijk aan 6, van 24 tot 29 jaar 7, van 54 tot 71 jaar 10. Daar hij de sterftetafel wilde gebruiken ter berekening van lijfrenten, ging hij na, wat het verschil in uitkomst met de door HALLEY in zijn genoemde verhandeling vermelde waarden van lijfrenten was, wanneer hij aannam, dat van 12 jaar af — de leeftijd van welke af volgens hem de sterftekans toeneemt — alle aantallen levenden één rekenkundige reeks vormen. Zijn berekeningen deden hem tot de mening komen, dat de bedoelde verschillen elkander ongeveer opheffen, dat dus zijn uitkomsten met die van HALLEY genoegzaam overeenkwamen om in plaats van deze te treden.

Als oudste leeftijd nam hij 86 jaar. Hij kwam tot dit getal op verschillende gronden. Vooreerst gaf de tafel van HALLEY als

---

1) E. HALLEY. An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind (Philosophical Transactions 1693) pag. 596, herdruk in J. I. A. XVIII. pag. 251.

2) Zie J. DU SAAR. Iets over DE MOIVRE en zijn hoofdwerk, (De Verzekeringsbode. XXXV. 1915/16. pag. 410 en 422; XXXVI. 1916/17. pag. 4), waarin ook uitvoeriger de tafel van HALLEY wordt behandeld.

3) A. DE MOIVRE. Annuities on lives. 1725.

eindleeftijd 84 jaar, waarbij dan nog 20 van de 1000 mensen over waren; verder wist hij, dat in de tafels van GRAUNT[1]) van 100 pasgeborenen er na 86 jaar geen enkel mens meer over was; eindelik beriep hij zich op tafels, die in het begin van de 18e eeuw in Zwitserland uit waarnemingen zouden afgeleid zijn, hoewel van zwitserse zijde BÖSCHENSTEIN[2]) mededeelt, dat hij niet heeft kunnen nagaan welke waarnemingen dit zouden geweest zijn.

De reden van de rekenkundige reeks maakte hij gelijk aan 1, dat wil dus zeggen hij nam $l_{12} = 74$, $l_{13} = 73$ enz.

De onderstelling van DE MOIVRE voert zo tot de formule

$$l_x = 86 - x.$$

Voor $86-x$ voert hij de naam „complement of life" in. Noemt men het „complement of life" n, dan is de kans om na 1, 2, 3 .... jaren nog in leven te zijn gelijk aan

$$\frac{n-1}{n}, \quad \frac{n-2}{n}, \quad \frac{n-3}{n} \ldots ;$$

deze levenskansen vormen dus ook een rekenkundige reeks.

De sterftekans voor een x-jarige is

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{1}{86-x} = \frac{1}{n};$$

de opeenvolgende sterftekansen liggen dus op een gelijkzijdige hyperbool.

DE MOIVRE berekende voor verschillende waarden van de rentevoet op grond van zijn formule lijfrenten op één hoofd en voerde als voordeel van zijn formule aan, dat de berekeningen van de lijfrenten op meer hoofden zo eenvoudig waren. Het eigenaardige van het geval is echter, dat hij die eenvoudigheid verkrijgt door bij de berekening van lijfrenten op meer dan één hoofd de hierboven genoemde sterftewet niet te gebruiken, maar een andere

---

[1]) JOHN GRAUNT. Natural and Political Observations on the Bills of Mortality of London etc. 1662.

[2]) K. BÖSCHENSTEIN. A. de Moivres Abhandlung über Leibrenten. (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 3, 1908) pag. 25.

sterftewet aan te nemen en wel een, waarbij de aantallen levenden een meetkundige reeks vormen [1]).

§ 11. De formule van De Moivre ondervond veel krietiek, het meest wel van de zijde van Price en Morgan. Price beweert [2]), dat De Moivre in de eerste druk van zijn hierboven vermelde werk behalve de hypotese, dat de levenskansen na 1, 2, 3 .... jaren een rekenkundige reeks vormen — welke kansen dan zouden gediend hebben om lijfrenten op één hoofd te berekenen — als tweede hypotese heeft vermeld, dat genoemde kansen een meetkundige reeks vormen [3]) en dat die onderstelling de grondslag zou hebben gevormd voor de berekening van lijfrenten op meer hoofden, omdat deze berekening daardoor vereenvoudigd zou worden. Hij beweert, dat De Moivre echter tengevolge van opmerkingen van Simpson [4]) in latere drukken deze laatste onderstelling heeft teruggenomen. Dit is echter niet juist. Hij heeft ook in latere drukken de tweede onderstelling gehandhaafd, die we in § 10 hebben genoemd.

Toont reeds Simpson aan, dat de uitkomsten van De Moivre voor lijfrenten op drie en meer hoofden naar zijn mening te onnauwkeurig zijn, Price rekent voor, dat reeds voor lijfrenten op twee hoofden de fouten, die men door het aannemen van de formules van De Moivre krijgt, zo aanzienlik zijn, „that it will be best never to use them" [5]).

Morgan, de bewerker van de latere drukken van Price, oordeelt al evenmin gunstig [6]); volgens hem is de hypotese zo inkorrekt in de vroegere en in de latere levensjaren en zijn de gegeven regels voor de berekeningen zo onnauwkeurig, dat het gebruik geen aanbeveling verdient.

---

[1]) Bij Thomas Young (Philosophical Transactions II 1826, pag. 289) is ook sprake van „the arithmetical or geometrical hypothesis of Demoivre."

[2]) R. Price. Observations on reversionary payments etc. 7th edition 1812 (bewerkt door W. Morgan) pag. 204.

[3]) Zie hierover uitvoeriger in Hoofdstuk VII.

[4]) Th. Simpson. The doctrine of annuities and reversions etc. 1742.

[5]) Price. l. c. pag. 209.

[6]) W. Morgan. The principles and doctrine of Assurances, etc. 1821. pag. IV en pag. 20.

Zij hebben te veel over het hoofd gezien, dat de bedoeling van DE MOIVRE was de berekeningen te bekorten, desnoods met opoffering van grote nauwkeurigheid. Dit is ook het oordeel van BAILY [1]), die spreekt van een ingenieuse hypotese en een geheel hoofdstuk wijdt aan de afleiding van formules voor lijfrenten op twee hoofden volgens de formule van DE MOIVRE. Hetzelfde onderwerp wordt o. a. behandeld door MAAS [2]).

Het is zeker aan te nemen, dat DE MOIVRE zelf zich ervan bewust was, dat zijn formule niet streng was, doch voor niet te lange termijnen bruikbare benaderingswaarden gaf. Toch zal in de teorie van de lijfrenten de formule, gelijk BAILY het uitdrukt [3]) „ever remain a monument of the ingenuity and abilities of its illustrious inventor."

§ 12. Er mag hier worden opgemerkt, dat reeds vóór DE MOIVRE een afsterving beschouwd is, waarbij een rekenkundige reeks voorkomt, zij het dan niet voor het gehele leven. ENESTRÖM, die zich veel moeite heeft getroost om de arbeid van JOHAN DE WITT te beschouwen uit het oogpunt van onze hedendaagse wetenschap, behandelt [4]) uitvoerig de door DE WITT aangegeven sterftetafels. In het werk van DE WITT [5]) wordt het leven verdeeld in 4 groepen, van 3 tot 53 jaar, van 53 tot 63 jaar, van 63 tot 73 jaar en van 73 tot 80 jaar (daarboven wordt niet meegeteld) en de aantallen doden per jaar (DE WITT neemt per half jaar) verhouden zich in die groepen als $1 : 1^1/_2 : 2 : 3$. De berekening van de lijfrenten geschiedt met andere getallen, waarbij de aantallen doden de omgekeerde verhouding hebben. Hoe hij aan zijn sterftewet gekomen is, zegt DE WITT niet.

---

[1]) F. BAILY. The Doctrine of Life-annuities and Assurances etc. 1810. pag. 313.

[2]) M. MAAS. Traité élementaire des annuités viagères et des assurances sur la vie. 2e édition. 1868.

[3]) F. BAILY. l. c. pag. 314.

[4]) G. ENESTRÖM. Ett bidrag till mortalitetstabellernas historia före HALLEY. (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar). 1896. pag. 157.

[5]) JOHAN DE WITT. Waerdije van Lijf-renten Naer proportie van Los-renten. 1671.

ENESTRÖM nu geeft aan[1]), dat DE WITT zijn berekeningen had kunnen uitvoeren met behulp van een formule, evenals die van DE MOIVRE een lieneaire funksie. Ter bepaling van het aantal levenden zou dat geweest zijn — in tegenwoordig matematies tekenschrift —

$$l_x = l_3\left(1 - \frac{a_1(x-3) - a_2}{106}\right),$$

waarbij voor de hierboven vermelde tijdvakken a_1 resp. 1, $1^1/_2$, 2 en 3 is en a_2 resp. 0, 25, 55 en 125. Bij de berekening van de lijfrenten zou het aantal levenden zijn gevonden met behulp van de formule

$$l_x = l_3\left(1 - \frac{b_1(x-3) + b_2}{64}\right),$$

waarbij dan b_1 resp. 1, $^2/_3$, $^1/_2$ en $^1/_3$, b_2 resp. 0, $16^2/_3$, $26^2/_3$ en $38^1/_3$.

ENESTRÖM wijst er elders[2]) op, dat, tengevolge van de onduidelikheid van het geschrift van DE WITT, diens bedoeling gewoonlik verkeerd begrepen is. Zelfs in de tegenwoordige tijd begreep niemand minder dan CANTOR hem verkeerd. CANTOR vermeldt namelik[3]), dat volgens DE WITT „gedurende de jaren, dat de mens op volle kracht is — dat is bij hem van 4 tot 53 jaar — het even waarschijnlik is om in het onmiddellik volgende jaar te blijven leven of te sterven". Dat zou dus neerkomen op een levenskans $p_x = {}^1/_2$ voor dat tijdvak; van 100000 personen van 3 jaar, zouden er dan bijvoorbeeld op 20 jaar nog slechts $100000 \cdot ({}^1/_2)^{17} = 0{,}768$ in leven zijn.

§ 13. Het geschrift van DE WITT gaf, eveneens nog vóór DE MOIVRE, aan ISAAK DE GRAAF[4]) aanleiding dit te bespreken en

---

[1]) ENESTRÖM. l. c. pag. 166.

[2]) G. ENESTRÖM. Sur la méthode de JOHAN DE WITT (1661) pour le calcul de rentes viagères. (Archief voor de Verzekeringswetenschap III) 1900. pag. 62.

[3]) M. CANTOR. Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. III. 1894. pag. 43.

[4]) ISAAK DE GRAAF. Waardije van Lijfrenten Naar proportie van Losrenten. 1729.

te verbeteren. Hij stelt als postulaten, dat het levensvermogen van de mens bij de geboorte op zijn grootst is en dat de „levenskracht" met de leeftijd voortdurend afneemt. Hij was overtuigd, dat het afsterven van de mensen volgens een vaste wet geschiedt. Hij had het middel gevonden om door afdalende reeksen kapietalen af te lossen en zag in, dat wanneer de afneming van de levenskracht plaats had volgens één van die reeksen alle vraagstukken over lijfrenten zouden kunnen worden opgelost met intresttafels. Hij zocht die reeks; hij begint te onderstellen, dat het een rekenkundige reeks is en leidt daaruit andere reeksen af, welke hij grafies afbeeldt [1]). Hiermede leverde hij de eerste „grafiese tafel van levenskracht". De afbeelding stond echter niet in verband met waarnemingen.

Volgens WESTERGAARD [2]) schijnt de formule, waarmede DE GRAAF moet gewerkt hebben, geweest te zijn

$$y = 1 - \left(\frac{x}{92}\right)^n,$$

waarbij y de levenskracht voorstelt, x de leeftijd en n een konstante; de hoogste leeftijd is dus 92 jaar.

Voor $n = 5$ vindt DE GRAAF een overeenstemming met de opgaven van DE WITT over de levenskansen; daarom wordt de lijn, die daarmede samenhangt, als de voorstelling van de juiste sterftewet aangenomen en worden er verder allerlei berekeningen op gebazeerd.

Zowel bij DE WITT als bij DE GRAAF is op te merken, dat de kindersterfte verkeerd genomen is (DE WITT schakelt nog de leeftijden beneden 3 uit).

§ 14. Hoewel niet bepaald komende tot een sterfteformule, mag hier toch de vermelding volgen van een studie op het gebied van een biezondere oorzaak van sterfte.

---

[1]) ISAAK DE GRAAF. l. c. pag. 6. De grafiese voorstelling is ook te vinden in de „Bouwstoffen voor de Geschiedenis van de Levensverzekeringen en Lijfrenten in Nederland", bijeengebracht door de Algemeene Maatschappij van Levensverzekering en Lijfrente. 1897. pag. 151.

[2]) H. WESTERGAARD. Die Lehre von der Mortalität und Morbilität. 1901. pag. 42.

DANIEL BERNOULLI [1]) ging na, hoe hij in een wiskundige formule de voordelen van de inenting kon aangeven. Hij neemt aan, dat ieder jaar van elke n personen er 1 de pokken zal krijgen en dat van elke m personen, die door de ziekte worden aangegrepen er 1 sterft; dan neemt hij nog aan, dat niemand tweemaal de ziekte krijgt.

Is nu l_x het aantal levenden van x jaar en l_x^n het aantal van hen, die de ziekte nog niet hebben gehad, dan is de waarde van $-dl_x^n$ te bepalen als de som van hen, die in het tijdvak dx de ziekte krijgen zullen en hen, die in datzelfde tijdvak aan andere ziekten sterven. Het eerstgenoemde aantal bedraagt $\frac{1}{n} l_x dx$; van l_x mensen sterven er $\frac{1}{mn} l_x^n dx$ aan pokken, het aantal van hen, die aan andere ziekten sterven, is dus $-dl_x - \frac{1}{mn} l_x^n dx$; het aantal dat van l_x^n mensen aan andere ziekten sterft is dus:

$$-\frac{l_x^n}{l_x}\left(dl_x + \frac{1}{mn} l_x\, dx\right),$$

zodat men heeft:

$$dl_x^n = -\frac{1}{n} l_x^n dx + \frac{l_x^n}{l_x}\left(dl_x + \frac{1}{mn} l_x^n dx\right).$$

Deze differentieaalvergelijking is als volgt op te lossen:

$$\frac{l_x^n}{l_x} dl_x - dl_x^n = \left(\frac{1}{n} l_x^n - \frac{1}{mn} \frac{(l_x^n)^2}{l_x}\right)dx.$$

Vermenigvuldiging met $\frac{l_x}{(l_x^n)^2}$ levert

$$\frac{l_x^n\, dl_x - l_x\, dl_x^n}{(l_x^n)^2} = \left(\frac{1}{n}\frac{l_x}{l_x^n} - \frac{1}{mn}\right) dx.$$

Stelt men nog $\frac{l_x}{l_x^n} = y$,

---

[1]) DAN. BERNOULLI. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir (Histoire de l'Académie royale des sciences de Paris II). 1760. pag. 19.

dan krijgt men

$$dy = \left(\frac{y}{n} - \frac{1}{mn}\right) dx$$

of

$$dx = \frac{mn}{my - 1}\, dy,$$

waaruit

$$x = n \int \frac{m}{my - 1}\, dy$$

of

$$x = n \lg (my - 1) + c$$

of

$$x = n \lg \left(m \frac{l_x}{l_x^n} - 1 \right) + c.$$

Hieruit volgt

$$l_x^n = \frac{m}{e^{\frac{x+c}{n}} + 1}\, l_x.$$

De konstante vindt men door op te merken, dat voor $x = 0$ $l_x^n = l_x$, dus

$$e^{\frac{c}{n}} + 1 = m,$$

waaruit

$$e^{\frac{c}{n}} = m - 1,$$

zodat

$$l_x^n = \frac{m}{(m-1)\, e^{\frac{x}{n}} + 1}\, l_x.$$

Naar hem bekende gegevens nam BERNOULLI $n = m = 8$, waardoor

$$l_x^n = \frac{8}{7e^{\frac{x}{8}} + 1}\, l_x.$$

Hij gaat ook na [1]), hoe groot het aantal levenden L_x zou zijn, indien de pokken niet bestonden. Gedurende de tijd dx is de gehele sterfte $-dl_x$, de sterfte aan pokken $\frac{1}{mn}\, l_x^n\, dx$, dus de

---

[1]) D. BERNOULLI. l. c. pag. 54.

sterfte aan andere ziekten

$$-dl_x - \frac{1}{mn}\, l_x^n\, dx$$

op een aantal l_x; dus op een aantal L_x heeft men:

$$dL_x = \frac{L_x}{l_x}\left(dl_x + \frac{1}{mn}\, l_x^n dx\right),$$

waaruit

$$\frac{dL_x}{L_x} - \frac{dl_x}{l_x} = \frac{1}{mn}\,\frac{l_x^n}{l_x}\,dx.$$

Vult men de hierboven gevonden waarden voor l_x^n in, dan vindt men (voor $x = 0$ is $L_x = l_x$)

$$L_x = \frac{m e^{\frac{x}{n}}}{(m-1)\, e^{\frac{x}{n}} + 1}\, l_x$$

§ 15. Sprak Daniel Bernoulli zich uit vóór de inenting, zijn konklusies werden bestreden door d'Alembert [1]) in een wiskundige nota, gevoegd bij een voordracht, die hij hield in een openbare zitting van de Académie des sciences te Parijs.

Hij bepaalt zich tot de leeftijden van 5 tot 65 jaar; beneden 5 jaar sterven hem te veel kinderen aan andere ziekten (hij spreekt van de helft van het aantal pasgeborenen) en werd er niet ingeënt en boven 65 jaar is het aantal slachtoffers van de pokken niet noemenswaard. Verder neemt hij op grond van hem bekende verhandelingen aan, dat de kans om tussen 5 en 65 jaar aan pokken te sterven $^1/_7$ bedraagt en de kans om tengevolge van de inenting binnen 1 maand te sterven $^1/_{300}$ is.

Neemt men nu aan, dat het aantal mensen du, dat elk ogenblik sterft tengevolge van de pokken, wordt voorgesteld door de formule

$$du = A\,(60 - x)^n\, dx,$$

waarin x voorstelt het aantal jaren na de 5-jarige leeftijd, dan zal men hebben

$$u = A \int_0^x (60 - x)^n\, dx,$$

---

[1]) J. d'Alembert. Opuscules mathématiques. II. 1761. pag. 47.

waaruit

$$u = -\,\mathrm{A}\,\frac{(60-x)^{n+1}}{n+1} + \mathrm{A}\,\frac{60^{n+1}}{n+1}.$$

Voor $x = 60$ wordt dit

$$^1/_7 = \mathrm{A}\,\frac{60^{n+1}}{n+1},$$

waaruit

$$\mathrm{A} = \frac{n+1}{7 \times 60^{n+1}},$$

zodat

$$du = \frac{(n+1)\,dx}{7 \times 60}\left(1 - \frac{x}{60}\right)^n.$$

Het aantal mensen, dat na verloop van x jaar jaarliks aan pokken sterft kan men vinden, wanneer men dx gelijk aan 1 neemt.

De verhouding tussen het aantal mensen, dat sterft tengevolge van de inenting en dat tengevolge van de pokken in dezelfde tijd (dus binnen 1 maand) is dus

$$v = \frac{1}{300} : \frac{n+1}{7 \times 60 \times 12}\left(1 - \frac{x}{60}\right)^n,$$

dat is voor het 1e jaar bij benadering

$$v_1 = \frac{1}{300} : \frac{n+1}{7 \times 60 \times 12},$$

mits n niet te groot wordt genomen.

Voor verdere jaren moet de tweede breuk nog worden vermenigvuldigd met $\frac{a}{z}$, waarin a het aantal levenden van 5 jaar en z dat van $5 + x$ jaar, die nog niet de pokken hebben gehad.

Neemt men $n = 0$ en $n = 1$, dan komt men tot de onderstelling, dat het aantal sterfgevallen per jaar konstant is, $du = \mathrm{A}dx$, resp. dat het afneemt volgens een rekenkundige reeks, $du = \mathrm{A}\,(60 - x)\,dx$, hetgeen herinnert aan de formule van De Moivre. In die gevallen, welke d'Alembert vóóraf had behandeld, vindt men voor v, resp. $^{84}/_5$ en $^{42}/_5$, in elk geval, ook wanneer men inplaats van de vroeger vermelde kans $^1/_7$ bijv. neemt $^1/_{20}$, zoals Dan. Bernoulli voor Basel mededeelde, $v_1 > 1$;

dit doet, met andere overwegingen, d'ALEMBERT een tegenstander zijn van de inenting.

In een noot[1]) zegt hij, dat men nog zou kunnen stellen

$$du = Ae^{-x}\,dx,$$

maar hij voegt er bij: „comme la véritable loi des *du* est inconnue jusqu'ici, toutes ces hypothèses seroient arbitraires."

§ 16. Uit de sterfteregisters van Londen voor de jaren 1753 tot en met 1758 leidt LAMBERT[2]), een sterftetafel af, waarbij de aantallen levenden worden aangegeven bij 0, 2, 5 en 10 jaar en verder om de 10 jaar. Hij maakt er ook een grafiese voorstelling van, waarbij hij op de twee bekende buigpunten in de kromme voor l_x reeds de aandacht vestigt. Hij zoekt een middel om voor tussenliggende leeftijden het aantal levenden te berekenen. De wijze waarop hij die berekening uitvoert is evenwel van wiskundig standpunt bezien aan veel bedenking onderhevig; we zullen er niet dieper op ingaan, omdat hij later zelf van hetgeen hij mededeelt geen gebruik maakt.

De bedoeling zat bij hem voor een kromme te gebruiken van de gedaante

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots.$$

Hij neemt de kromme van de 5e graad en berekent de 6 konstanten uit het stuk van 45 tot 90 jaar, waarbij hij tussen $l_{40} = 31992$ en $l_{50} = 22474$, getallen uit zijn waarnemingen, l_{45} zo maar schat op 26950.

Tot uitkomst krijgt hij:

$$y = 26950 - 985{,}7x + 9{,}70915x^2 - 0{,}03427x^3 - 0{,}0027017x^4 + 0{,}000066635x^5,$$

waarbij x voorstelt de leeftijd verminderd met 45 jaar.

Hij beweert, dat de gevonden vergelijking nog tamelik nauwkeurig is. Er moet evenwel worden opgemerkt, dat al moge zijn metode aannemelik zijn, de keuze van l_{45} als beginpunt niet alleen

---

[1]) J. d'ALEMBERT. l. c. pag. 53.

[2]) J. H. LAMBERT. Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. I. 1765. pag. 479.

onnodig onnauwkeurig is — hij had beter l_{40} of l_{50} kunnen nemen —, maar ook, dat de aanname van $l_{45} = 26950$ de mogelikheid op een dragelike uitkomst uitsluit. Volgens de formule van DE MOIVRE zou hij gevonden hebben $l_{45} = {}^1/_2 (l_{40} + l_{50}) = 27233$; en wil hij deze wet niet volgen, dan mocht hij toch slechts $l_{45} > 27233$ nemen.

§ 17. LAMBERT behandelt echter het bovenstaande slechts als voorbeeld en heeft aan zijn uitkomst — zeer terecht — weinig waarde gehecht. Enige jaren later n.l. [1]) schrijft hij zelf, dat zijn getallen slechts berusten op waarnemingen over een tijdvak van 6 jaar en hij er niet op terugkomt. Hij leidt dan, in zijn interessante verhandeling: „Ueber die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburten und Ehen" [2]) een andere tafel af uit de getallen uit de 10e tabel van SÜSSMILCH [3]), welke intussen verschenen was en zich uitstrekte over een tijdvak van 30 jaar voor de londense bevolking, hetgeen, zoals hij zelf reeds inziet, beter is dan over 6 jaar, hoewel hij aan de andere kant toch weer beweert, dat zijn getallen van vroeger niet veel verschillen van de nieuwe. Hij vond nu [4]) voor de sterftekromme

$$l_x = \mathrm{A}\left(\frac{96 - x}{96}\right)^2 - \mathrm{B}\left(e^{-h_1 x} - e^{-h_2 x}\right),$$

waarbij $\mathrm{A} = 10000$ $\mathrm{B} = 6176$

$$h_1 = \frac{1}{13{,}682} \qquad h_2 = \frac{1}{2{,}43314}.$$

In de Beyträge staat voor $\frac{1}{h}$ de waarde 31,682. Dit berust op een drukfout; in een brief aan GAETA [5]) vermeldt hij 13,682. In deze brief waarschuwt hij meteen, dat men de formule niet moet toe passen

---

[1]) J. H. LAMBERT. Beijträge III. 1772. pag. 483.

[2]) J. H. LAMBERT. l. c. pag. 476.

[3]) J. P. SÜSSMILCH. Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts u.s.w. II 4e druk. 1775. pag. 319.

[4]) J. H. LAMBERT. l. c. pag. 483.

[5]) GAETA et FONTANA. Dottrina degli azzardi di Moivre. 1776. pag. LVI.

boven 96 jaar. Overigens strekt de formule zich over alle leeftijden uit. Het is een merkwaardige kombienatie van een parabool en twee exponentieaalfunksies of, zoals LAMBERT het uitdrukt, „logistische Linien." De paraboliese term geeft volgens hem aan „dat het menselik geslacht afsterft zoals een cylindries vat vol water met een kraan aan den bodem leegloopt", terwijl de twee andere termen volgens hem „veel overeenkomst hebben met de formule, die gebruikt wordt voor het verwarmen en afkoelen van lichamen".

Intussen vermeldt hij niet op welke wijze hij tot deze sterfteformule is gekomen; de overeenkomst tusschen de berekende waarden en die uit de gebruikte sterftetafel is vrij goed en de formule kon bij berekeningen voor Londen dan ook wel gebruikt worden. Hij heeft de weinige bruikbaarheid in het algemeen ingezien, hetgeen hij bewijst door van zijn formule later nergens gebruik te maken; waar het nodig is interpoleert hij met behulp van een grafiese metode.

Op te merken valt nog, dat er voor $x = 1$ uitkomt $l_1 = 8146$, dus $d_0 = 1854$, terwijl $l_2 = 6407$ wordt, dus $d_1 = 1739$. Dit geeft een voor die tijd te laag sterftesijfer voor pasgeborenen en een verkeerde verhouding tussen d_0 en d_1. Waar verder $l_{10} = 5153$ en $l_{20} = 4838$ zou de waarschijnlike levensduur van een pasgeborene — dat is het aantal jaren na hetwelk van het aantal pasgeborenen, 10000, nog de helft is overgebleven — ongeveer 15 jaar zijn, hetgeen bij de door hem aangegeven kindersterfte veel te weinig is.

§ 18. DUVILLARD [1]) meende, dat de formule van LAMBERT voor de londense gegevens met andere konstanten zou kunnen gelden als sterftewet voor elk land. Hij schreef in het algemeen

$$l_x = N\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left(e^{-\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{n}}\right)$$

en zegt, dat de waarden voor N, m, n en k zo zijn, dat de

---

[1]) E. E. DUVILLARD. Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursements. 1788 pag. 81.

formules voor de lijfrenten verscheidene termen bevatten, die men kan verwaarlozen. Het is niet van belang dit te onderzoeken.

QUIQUET [1]) vermeldt, dat DUVILLARD de biezonderheden van deze vergelijking bespreekt in een werk, dat niet gedrukt is [2]); het manuskript bezorgde aan de schrijver het lidmaatschap van het Institut (section d'économie politique) op voorstel van een kommissie, bestaande uit LAGRANGE, LAPLACE en LEGENDRE. Het rapport, dat door LEGENDRE daaromtrent werd uitgebracht in de zitting van 11 vendémiaire an V, heeft DUVILLARD opgenomen achter in zijn in noot 1 van pag. 26 vermelde werk.

Uit het rapport blijkt, dat DUVILLARD beweerde, dat de sterftewet altijd kan worden uitgedrukt door de exponentieaalfunksie

$$z = \left(\frac{y}{y+i}\right)^x$$

waarbij y met gewenste nauwkeurigheid kan worden bepaald door te stellen

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots\ldots$$

Verder stelt de letter i voor de verhouding $-\frac{\Delta z_0''}{z_1}$. De bedoeling is zeer onduidelik.

Bovendien wordt in het rapport vermeld, dat de vergelijking

$$z = 1 - \frac{kx}{y}$$

alles bevat wat de waargenomen sterfte in Frankrijk betreft en dat DUVILLARD met behulp van die vergelijking door in de waarde voor y 10 koëffiesieënten in te voeren de sterftetafel heeft geïnterpoleerd, waarop de berekeningen van al zijn tafels zijn gebazeerd.

Op de formule van LAMBERT gelijken deze vergelijkingen niet. De daarop doelende mededeling van QUIQUET is dan ook niet duidelik.

---

[1]) A. QUIQUET. Aperçu historique sur les formules d'interpolation des tables de survie et de mortalité. 1893. pag. 9.

[2]) E. E. DUVILLARD. Travail pour l'établissement d'une caisse nationale d'économies et d'assurances sur la vie. Manuscrit. 1796.

§ 19. In een brief aan Sir EDWARD HYDE EAST leidt THOMAS YOUNG [1]) een kromme af voor het aantal doden uit het gemiddelde van de getallen van verschillende hem bekende tafels (DEPARCIEUX, FINLAISON, CARLISLE, DE MORGAN, PRICE voor Northampton, londense waarnemingen uit 1815) en vermeldt als de vergelijking, die deze kromme zo nauwkeurig mogelik aangeeft [2])

$$y = 368 + 10x - 11\,(156 + 20x - x^2)^{3/2} + \frac{1}{2{,}85 + 2{,}05x^2 + 2\left(\frac{x}{10}\right)^6} - 5{,}5\left(\frac{x}{50}\right)^{10} + \frac{5{,}5^2}{4000}\left(\frac{x}{50}\right)^{20} - 5500\left(\frac{x}{100}\right)^{40},$$

waarin y het aantal sterfgevallen op 100,000 voorstelt in het jaar, waarin de leeftijd x voltooid wordt.

In de tekst van de brief staat in de noemer van de eerste breuk 285. Dit berust op een drukfout; in de berekening van de getallen, die de formule geeft, gebruikt hij 2,85. Dit is aan MOSER bij de krietiek, die hij op de formule uitoefent [3]), ontgaan.

Hoe hij aan zijn formule gekomen is, geeft YOUNG niet voldoende aan; hij begint met een term $368 + 10x$, die herinnert aan DE MOIVRE; dit gedeelte van de vergelijking geldt voor alle leeftijden. De term $\frac{1}{2{,}85 + 2{,}05x^2 + 2\left(\frac{x}{10}\right)^6}$ heeft grote invloed in de jongste jaren en wordt bij 65 jaar zo klein, dat hij wegvalt. De tweede term geldt van 0 tot 25 jaar, hetwelk uit de vorm tussen haken dadelik is af te leiden. YOUNG zelf geeft al aan [4]), dat de term niet veilig te gebruiken is in algebraiese berekeningen, omdat hij zowel een posietieve als een negatieve waarde kan hebben. MOSER [5]) maakt aanmerking op het gebruik van

---

[1]) THOMAS YOUNG. A formula for expressing the decrement of human life. (Philosophical Transactions II) 1826 pag. 281 (herdrukt in J. I. A. VI. 1857. pag. 351 en VII. 1858. pag. 14.)

[2]) YOUNG. l. c. pag. 288.

[3]) L. MOSER. Die Gesetze der Lebensdauer. 1839. pag. 278.

[4]) YOUNG. l. c. pag. 289.

[5]) MOSER. l. c. pag. 278.

de term, omdat die voor $x > 26$ iemagienair wordt; hij toont daarmede echter, dat hij de bedoeling van YOUNG voor het gebruik van zijn formule niet goed heeft gelezen.

De verdere termen gelden vooral voor de hogere leeftijden; ze beginnen te tellen resp. bij $x = 38$, 61 en 79.

MOSER heeft inzoverre gelijk, dat YOUNG niet alle termen in éénzelfde vergelijking had moeten schrijven, doch voor verschillende leeftijdsgroepen afzonderlik de vergelijking had moeten geven; een uitdrukking zoals die van YOUNG, die niet voor alle leeftijden geldt, mag de naam van formule niet dragen. Doch ook al had YOUNG dit wel gedaan, de formule is een voorbeeld, hoe men op de verkeerde weg was; dergelijke gekomplieseerde uitdrukkingen zijn onbruikbaar.

YOUNG berekende nog, dat lijfrenten tegen 3 % voor leeftijden van 20 tot 70 jaar vrij goed worden voorgesteld door $24{,}45 - {}^1/_4 x$ [1]), uitgaande van zijn formule. Voor een nauwkeuriger uitkomst zou de jaarlikse sterfte volgens hem moeten zijn

$$\frac{0{,}03x + 0{,}066}{100{,}8 - x}.$$

Ook van deze uitdrukkingen geeft hij de afleiding niet.

§ 20. Formules, zoals die van LAMBERT en YOUNG zijn voorbeelden van empieriese formules. De ontdekkers hebben getracht door hun formule een zo groot mogelik aantal waargenomen getallen voor te stellen; door proberen, door voortdurende verandering van de konstanten zijn ze, somtijds natuurlik bij toeval, tot hun doel geraakt. Zij verdienen lof als rekenaars; hun handigheid en hun geduld dient gewaardeerd te worden.

Hun formules kunnen echter slechts gebruikt worden voor de tafels waarvoor ze zijn afgeleid; voor latere onderzoekers, die meer tafels tot hun beschikking hadden, werd de zaak dus steeds lastiger en dat is een gelukkige omstandigheid, die de pogingen om in die richting toch te zoeken tegenhield.

Toch is bij sommige van die onderzoekers wel het streven op te merken om de metode van DE MOIVRE te volgen; vandaar

[1]) YOUNG. l. c. pag. 302.

de metode om, waar de formule van DE MOIVRE, die neerkomt op de vergelijking

$$l_x = a + bx,$$

onvoldoende blijkt, deze uit te breiden met korreksietermen en daartoe l_x voor te stellen door een term van een rekenkundige reeks van hogere orde;

$$l_x = a + bx + cx^2 + \ldots.$$

De eerste formule van LAMBERT [1]) is er reeds een voorbeeld van. Zo geeft BABBAGE een uitdrukking van de 2e graad

$$l_x = 6199{,}8 - 9{,}29\,\frac{x}{1} - 1{,}5767\,\frac{x(x-1)}{1.2}.$$

PETER GRAY deelt in een noot [2]) mede, dat BABBAGE deze formule in 1823 aan BAILY mededeelde.

Ook de astronoom LITTROW [3]) geeft iets dergelijks; volgens hem geldt van het 10e jaar af met voldoende nauwkeurigheid

$$l_x = 598{,}1673 - 8{,}417455x + 0{,}230895x^2 - 0{,}005247x^3 + 0{,}000032x^4.$$

Tot grondslag diende de door BAUMANN verbeterde sterftetafel van SÜSSMILCH [4]). Over de wijze, waarop LITTROW tot zijn formule is gekomen, zegt hij geen woord.

§ 21. Kan men de tot heden behandelde formules beschouwen als te zijn gevonden a posteriori, in dezelfde tijd kwam ook de eerste poging — en nog wel een goedgeslaagde, die voor de ontwikkeling van de teorie van de hoogste waarde is geweest — om te werk te gaan a priori.

Eigenlik heeft DE MOIVRE, toen hij bij zijn tweede hypotese [5])

---

[1]) Zie pag. 24.

[2]) PETER GRAY. On the Tables of single and annual Premiums published by the late Mr. WILLIAM ORCHARD, and on a Theoretical Table of mortality proposed by him. J. I. A. VI. 1857. pag. 181.

[3]) J. J. LITTROW, Ueber Lebensversicherungen und andere Versorgungsanstalten. 1832, pag. 52.

[4]) J. P. SÜSSMILCH. Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts u.s.w. Band II. pag. 319.

[5]) Zie pag 16.

een meetkundige reeks gebruikte, het onderzoek in deze richting voorbereid. We hebben niet kunnen nagaan of GOMPERTZ aan het werk van DE MOIVRE heeft gedacht, toen hij de stelling neerschreef [1]), dat „hoe de ware wet van overleving ook zij, men altijd een interval van m tot n kan kiezen zo klein, dat in dat interval, wanneer de tijd volgens een rekenkundige reeks toeneemt, het aantal levenden volgens een meetkundige reeks afdaalt," zodat voor alle waarden van t tusschen m en n de betrekking geldt:

$$l_{x+t} = l_x \cdot 10^{t \cdot l_x}.$$

In een latere verhandeling [2]) schrijft GOMPERTZ het sterven toe aan 2 hoofdoorzaken. De eerste is slechts toe te schrijven aan het toeval en treft oud en jong met dezelfde kracht; bestond alleen deze oorzaak, dan zou de sterftewet een meetkundige reeks zijn. De tweede oorzaak daarentegen is, dat de kracht, waarmede de mens zich tegen de dood verzet, met de leeftijd afneemt, zodat het aantal levenden sterker afneemt dan volgens een meetkundige reeks. Hij stelde nu de hypotese op, dat die kracht zo afneemt, dat hij in het verloop van elk oneindig klein tijdselement met hetzelfde gedeelte van het oorspronkelik bedrag vermindert. Daardoor kwam hij tot de differentieaalvergelijking voor de sterfte-intensieteit:

$$d\mu_x = a\mu_x dx,$$

waaruit

$$\mu_x = e^{ax+\beta}$$

of

$$\mu_x = -\frac{dl_x}{l_x dx} = bc^x,$$

---

[1]) B. GOMPERTZ. A sketch of an Analysis and Notation applicable to the estimation of the value of Life contingencies. (Philosophical Transactions II. 1820). pag. 214.

[2]) B. GOMPERTZ. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new method of determining the value of Life Contingencies. (Philosophical Transactions). 1825. pag. 513.

waaruit

$$\lg l_x = -\int bc^x dx$$

of

$$\lg l_x = -\frac{b}{\log c} c_x + \log k$$

$$= c^x \log g + \log k,$$

dus

$$l_x = kg^{c^x}.$$

Deze formule geldt algemeen als de Wet van GOMPERTZ en telt 3 konstanten k, g en c. Het aantal konstanten is tot 2 terug te brengen, als men overgaat tot de levenskans. Immers

$$l_{x+1} = kg^{c^{x+1}},$$

zodat

$$p_x = g^{c^x(c-1)}.$$

Ter bepaling van k, g en c moet men dus 3 waarden van l_x kennen; GOMPERTZ noemt dit de „vital rule of three". Overigens ziet hij overeenkomst tussen zijn wet en die voor de luchtverdunning, in de ontvanger van een luchtpomp door de opeenvolgende slagen van de hefboom veroorzaakt.

Door de bijpassende berekening van de konstanten stemde deze formule van GOMPERTZ zeer goed overeen met de toenmaals meest gebruikelike sterftetafels, tussen 15 en 55 jaar met de Northamptontafel en met die van DEPARCIEUX, tussen 10 en 50 jaar met de zweedse tafel, tussen 10 en 60 jaar met de Carlisle-tafel [1]). GOMPERTZ geeft voor de Northamptontafel voor de leeftijden van 15 tot 45 aan

$$\log k = 3{,}9265 \qquad \log g = -1{,}11556 \qquad \log c = 0{,}011213,$$

terwijl

$$l_x = 8441.7404^{0{,}011212^x}.$$

GOMPERTZ zelf deelde mede, dat zijn formule slechts voor bepaalde leeftijdsgroepen geldt, voor kinderleeftijden niet bruikbaar is en boven 60 jaar alleen, wanneer men andere konstanten neemt [2]). Hij erkende ook zelf, dat hij benaderde waarden vond

---

[1]) W. LAZARUS. Die Sterblichkeit als Funktion des Alters. MASIUS' Rundschau. X. 1860. pag. 235.

[2]) W. LAZARUS berekent ze; cf. noot 1.

en wees er op, dat de konstanten weer als funksies van de tijd moeten worden aangezien om een nauwkeuriger aansluiting aan de waarnemingsresultaten te krijgen.

§ 22. De verhandeling van GOMPERTZ ondervond eerst geen opmerkzaamheid en zij die het werk kenden, maakten er òf misbruik van door het zo goed als ongewijzigd als hun eigen vinding bekend te maken, òf oefenden er krietiek op uit.

Van de laatste is het vooral MOSER [1]), die blijk geeft, dat hij GOMPERTZ slecht gelezen heeft. Hij noemt diens formule zeer onnatuurlik en licht dit toe door getallen uit te rekenen voor leeftijden beneden 15 jaar en boven 60 jaar en bijvoorbeeld de aanmerking te maken, dat het aantal levenden volgens de formule nooit 0 kan worden. Hij trok daaruit de gevolgtrekking, dat GOMPERTZ meende, dat het menselik leven geen bepaald doel heeft, zodat, wanneer er maar mensen genoeg waren, enige van hen elke willekeurige leeftijd konden bereiken!

Een verkeerd gebruik van de formule maakt ook — CZUBER [2]) heeft hierop gewezen — BERTRAND [3]). Hij schrijft de formule in de gedaante

$$l_x = Ge^{He^{kx}}$$

en bepaalt de konstanten G, H en k niet met behulp van een bepaalde sterftetafel, maar met behulp van een door hem uit een aantal bekende tafels afgeleide nieuwe tafel; de wijze waarop hij die denkbeeldige tafel afleidt geeft hij niet aan.

§ 23. Kort na GOMPERTZ verscheen een verhandeling van EDMONDS. Hij zegt daarin [4]), dat de sterfte-intensieteit altijd een funksie is

---

[1]) L. MOSER. Die Gesetze der Lebensdauer. 1839, pag. 279.

[2]) E. CZUBER. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung). 1899, pag. 239.

[3]) J. BERTRAND. Calcul des Probabilités. 1889, pag. 317.

[4]) T. R. EDMONDS. Life Tables, founded upon the discovery of a numerical law regulating the existence of every human being etc. 1832. pag. XVII.

van de leeftijd en wel van de vorm αp^x gedurende elk van de 3 perieoden van het menselik leven, de kindsheid, de mannelike leeftijd, de ouderdom, welke tijdvakken resp. van 0 tot 9, van 9 tot 55 en boven 55 jaar gerekend worden.

De grootheid p is de kenmerkende konstante van de perieode en is de reden van de meetkundige reeks, die de sterfte-intensieteiten in elk tijdvak vormen; α is de intensieteit op zekere gegeven leeftijd, terwijl x de tijd is tussen die leeftijd en elk willekeurig ander tijdstip. Eenvoudigheidshalve mag de gegeven leeftijd worden ondersteld samen te vallen met die, waarop de perieode begint.

Uit $$\mu_x = \alpha p^x$$

vindt hij

$$-\frac{d}{dx} \lg l_x = \alpha p^x,$$

dus $$\lg g - \lg l_x = \alpha \int p^x dx,$$

waarbij g een konstante is.

Nu is verder

$$\lg \frac{g}{l_x} = \frac{\alpha}{\lg p} p^x,$$

dus $$\frac{g}{l_x} = e^{\frac{\alpha}{\lg p} p^x}.$$

Onderstelt men, dat voor $x = 0$ $l_x = 1$, dan wordt

$$g = e^{\frac{\alpha}{\lg p}},$$

waardoor $$l_x = e^{\frac{\alpha}{\lg p}} . e^{-\frac{\alpha}{\lg p} p^x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Noemt men de modulus van het gewone log. stelsel M en stelt men de gewone logaritme voor door log., dan vindt men de formule van EDMONDS

$$l_x = 10^{\frac{M^2 \alpha}{\log. p}(1 - p^x)}.$$

Hij noemt dit de kromme voor het aantal levenden voor een van de 3 tijdvakken; desnoods kan men volgens hem nog een zeer klein 4e tijdvak nemen bij ongeveer 10 jaar. Daarvoor is

dan $p = 1$, voor de overige 3 perieoden is p resp. 0,6760832, 1,0299117 en 1,0796923.

Men vindt met de formule van EDMONDS niet dadelik het aantal levenden, dat van 0 jaar, boven 9 jaar is overgebleven; men heeft daarvoor eerst l_9 te berekenen uit de formule voor de eerste perieode, daarna de waarde van het 2e lid voor de 2e perieode, dus met andere konstanten en deze waarde met die van l_9 te vermenigvuldigen.

Hij geeft GOMPERTZ de eer het eerst het verband te hebben gevonden tussen de sterftetafel en de algebraiese uitdrukking a^{b^x}, maar beweert, dat zijn redenering om er toe te komen zozeer verschilt van die van GOMPERTZ, dat zijn ontdekking onafhankelik is van de „onvolmaakte" ontdekking van GOMPERTZ. Dat de laatste zou gemeend hebben, dat zijn formule voor alle leeftijden geldt, schrijft EDMONDS hem ten onrechte toe [1]).

De formule van EDMONDS is geheel dezelfde als die van GOMPERTZ. Stelt men in (β) $e^{\frac{\alpha}{\lg p}} = k$, dan is de vorm van GOMPERTZ gemakkelik terug te vinden.

In latere jaren is een uitvoerige pennestrijd gevoerd over de kwestie aan wie de prieorieteit van de ontdekking toekomt.

De artiekelen van FARR, A. DE MORGAN, SPRAGUE, GOMPERTZ en EDMONDS [2]) geven de indruk, dat de laatste zich in allerlei bochten wringt om zijn goed recht aan te tonen, doch hierin weinig geslaagd is. De enige betekenis van deze pennestrijd, tevens voorname betekenis, lijkt me toe, dat de aandacht op de formule van GOMPERTZ — die tot dusver niet groot was [3]) — sterk gevestigd werd. Waar dit samenviel met een uitgebreider verhandeling van GOMPERTZ, trad hiermede een tijdvak van vruchtbare werkzaamheid op dit gebied in.

Voor de volledigheid dient nog vermeld, dat FARREN [4]) de formule van EDMONDS onveranderd afleidt, zonder tot nieuwe opmerkingen te komen.

---

[1]) Zie pag. 32.
[2]) J. I. A. IX en X, 1860 en 1861.
[3]) Zie pag. 33.
[4]) E. J. FARREN. Life-contingency tables. Part I, 1850, pag. 4.

§ 24. MOSER gaf in zijn hierboven (zie § 22) vermeld, als leerboek bedoelde werk [1]) een krietiek op de hem bekende sterfteformules, die van LAMBERT, YOUNG, LITTROW en GOMPERTZ, welke hem doen menen, „dasz man weit entfernt ist, das mathematische Gesetz zu kennen, welches die Sterblichkeit regiert" [2]). Hij vindt het nodig, dat men „einfache, leicht anwendbare Interpolationsformeln besitze". Hij acht zich gelukkig, dat hij na veelvuldige pogingen, de wet heeft ontdekt, volgens welke de sterfte geregeld is. Voor hem, als natuurkundige namelik, is het een natuurwet in de strengste zin van het woord.

De wet, die hij geeft luidt: Het aantal doden tot aan een bepaalde leeftijd is evenredig met de vierdemachtswortel uit die leeftijd.

Stelt men het aantal 0 jarigen gelijk aan 1, dan geldt dus de vergelijking:

$$l_x = 1 - ax^{1/4}.$$

De waarde van a vindt men, doordat voor $x = 1$ het aantal levenden $l_1 = 1 - a$, dus het aantal doden

$$d_0 = a.$$

Door beschouwing van hem bekende tafels (WARGENTIN, KERSSEBOOM) komt hij tot de waarde $a = {}^1/_5$.

MOSER behoort weer tot de vertegenwoordigers van de metode a posteriori; zijn wet volgt uit de waarnemingen en omdat deze een met de werkelikheid overeenstemmende grote kindersterfte vertoont, schijnt deze laatste hem in de natuur van de dingen te liggen. Of men zonder deze foutieve mening wellicht reeds eerder er aan zou hebben gedacht weerstand te bieden aan de vermeende onveranderlikheid van de natuurwet van een hoge kindersterfte — zooals WAGNER [3]) beweert — is de vraag.

MOSER kan er met zijn wet $l_x = 1 - {}^1/_5 x^{1/4}$ niet komen; want eerst voor $x = 625$ wordt het aantal levenden gelijk aan 0. Voor hogere leeftijden dan 30 bevredigt de wet hem ook niet en hij

---

1) L. MOSER. Die Gesetze der Lebensdauer. 1839.

2) MOSER. l. c. pag. 281.

3) K. WAGNER. Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung 1898, pag. 106.

voegt dan ook nog 2 aanvullingstermen toe, zodat tot ongeveer 80 jaar geldt

$$l_x = 1 - ax^{1/4} - bx^{9/4} - cx^{17/4}.$$

De opvolging van de eksponenten is duidelik. Bij de afleiding van deze vergelijking — hoe hij er toe kwam zet ook hij weer niet nader uiteen — heeft hij veel nut gehad van de sterftetafel van Brune[1]). De konstanten zijn:

$$a = 0{,}2; \quad b = \frac{0{,}7125}{10^5}; \quad c = \frac{0{,}1570}{10^8}.$$

Boven de 80 jaar komen er nog 2 termen bij en wordt

$$l_x = 1 - ax^{1/4} - bx^{9/4} - cx^{17/4} - dx^{25/4} + ex^{33/4}\,^2).$$

De eksponenten klimmen weer op dezelfde wijze op; voor de konstanten vindt hij in een toepassing:

$$a = 0{,}2; \quad b = \frac{0{,}4416}{10^5}; \quad c = \frac{0{,}5243}{10^8}; \quad d = \frac{0{,}1542}{10^{12}}; \quad e = \frac{0{,}6630}{10^{16}}.$$

De overeenstemming, die hij vindt tussen waargenomen en berekende waarden, noemt hij „volkomen". Niettegenstaande dit gezegde schijnt het hem zeer natuurlik, dat de formule in zijn volledigheid een volgens de gegeven opvolging in de eksponenten voortschrijdende oneindige reeks zal zijn; om die reeks te leren kennen zou men in de koëffiesieënten van de eerste termen een of andere wet moeten ontdekken, met behulp waarvan de volgende a priori af te leiden zouden zijn.

§ 25. De gehele wijze van behandeling door Moser geeft blijk van grote uitvoerigheid bij weinig matematiese degelikheid; zijn scherpe krietiek op de formules van anderen moet wellicht dienen om eigen voortreffelikheid naar voren te brengen. Voor zijn opvatting van de sterftewet en voor de wijze waarop hij te werk gaat, is o. a. karakteristiek, dat hij bewijst, dat zijn formule de vraag, hoeveel mensen er b.v. 6 maanden vóór de geboorte zijn,

---

[1]) E. W. Brune. Neue Sterblichkeitstafeln für Wittwencassen. Crelles Journal XVI, 1837.

[2]) $+b$, zooals in zijn werk staat, moet $-b$ zijn.

terugwijst, omdat er voor $x = -1/2$ een iemagienair getal uitkomt! Kenschetsend is ook, dat hij zijn formule toepast op de in het domein Kleinhof bij Tapiau waargenomen sterfgevallen van kalveren en paarden!

Moser ontkomt dan ook niet aan ernstige krietiek. Zo vooral van Chr. Bernoulli[1]). Deze merkt op, dat waar het aantal doden wordt voorgesteld door $ax^{1/4}$, men de verhouding van het aantal doden tot 16 jaar en dat tot 1 jaar vinden moet in de verhouding 2 : 1, — hetgeen Moser ook in zijn uitkomst doet zien —, maar dat dan ook voor dezelfde verhouding voor de tijdvakken van 1 jaar en van 23 dagen of $1/16$ jaar eveneens gevonden wordt 2 : 1, doch dat dit in het geheel niet uitkomt.

Ook de uitgebreide formule van Moser noemt hij onbevredigend en bestrijdt, dat Moser een wet zou ontdekt hebben; hij houdt trouwens formules in het algemeen voor onmogelik. Ook Fenger[2]) beschouwde de formule van Moser als nauweliks bruikbaar; hij helde meer over tot de toen nog weinig bekende formule van Gompertz.

Toch heeft Moser ook wel verdedigers. Fischer[3]) o.a. noemt de formule van Moser een van de aannemelikste; overigens houdt hij in het algemeen pogingen tot het vinden van een sterftewet voor nutteloos.

Aan het werk van Moser mag intussen niet de eer onthouden worden, dat het, waar het te doen is om een overzicht van de toenmalige stand van de statistiese wetenschap, met voordeel kan worden geraadpleegd.

Hoe men echter in de tegenwoordige tijd nog een formule kan opstellen zoals die van Moser is onbegrijpelik. Toch bood Dassy de Lignières aan het Institut des Actuaires français een nota aan[4]), waarin hij als formule voor het aantal sterfgevallen tot de leeftijd x bij een sterftetafel, die begint met

---

[1]) Chr. Bernoulli. Handbuch der Populationistik oder der Völker- und Menschenkunde nach statistischen Erhebnissen. 1841. pag. 424.

[2]) E. Fenger. Om Dödelighedsforholdene i Danmark. Ny Roekke, I, 1848.

[3]) zie noot 6 op pag. 3.

[4]) Zie B. A. F. V. 1895.

$= 1$, aangeeft $^1/_4 x^{1/4}$; dit zou gelden tot 30 à 40 jaar, daarna wordt de formule $^1/_4 x^{1/4} + \frac{x}{300}$. De eerste term is dezelfde als die in de formule van MOSER; inzoverre is dus de hierboven genoemde niet nieuw, slechts in de korreksietermen is hier een vereenvoudiging. Het is natuurlik best mogelik, dat er een sterftetafel is te vinden, die zich bij de genoemde formule ongeveer aansluit. Het aantal formules van deze soort zou dan ook kunnen worden uitgebreid zoveel men wil; ze hebben evenwel niet de minste waarde. De opsteller van de hier bedoelde formule verzuimde trouwens nog te vermelden aan welke tafel hij zijn formule heeft getoetst. Het is dan ook te begrijpen, dat het Institut des Actuaires français het niet nodig vond de daartoe aangeboden nota in zijn Bulletin op te nemen. Het is trouwens niet goed te begrijpen hoe in Frankrijk iemand na de verschijning van het werk van QUIQUET [1]), aan het franse Institut nog met een dergelijke formule te voorschijn komt. De opname alhier is alleen het gevolg van het streven om zo volledig mogelik te zijn bij de vermelding van de sterfteformules die zijn bedacht.

§ 26. Ook GAUSS [2]) heeft als resultaat van waarnemingen bij de tontienen, vermoedelijk van die van DEPARCIEUX, een formule afgeleid. Hij vindt, dat als a het aantal levenden is van 3 jaar, $\frac{a}{x}$ dat van n jaar, $\log x$ bevredigend wordt voorgesteld door

$$\log x = A + Bb^n - Cc^n$$

waarin A, B, C, b en c konstanten.

Uit de vergelijking volgt

$$\log a - \log x = \log a - A - Bb^n + Cc^n.$$

Stelt men

$$\log a - A = \log \alpha;\ B = -\log \beta;\ C = \log \gamma,$$

dan verkrijgt men

$$\log \frac{a}{x} = \log \alpha + b^n \log \beta + c^n \log \gamma,$$

---

[1]) cf. pag. 27. noot 1.

[2]) K. F. GAUSS. Werke. Uitg. 1900. Band 8, pag. 155.

waaruit $$\frac{a}{x} = \alpha\beta^{b^n}\gamma^{c^n}$$

of $$l_n = \alpha\beta^{b^n}\gamma^{c^n},$$

dat is dus een biezonder geval van de formule van LAZARUS [1]), maar niet van die van MAKEHAM, zoals BOHLMANN [2]) beweert, doch LOEWY [3]) met bewijs ontkent.

GAUSS vindt voor de konstanten:

$$A = 0{,}48213;\ \log B = 6{,}66231 - 10;\ \log C = 0{,}67925 - 10;$$

$$\log b = 0{,}03999.7;\ \log c = -0{,}0042325.$$

GAUSS vindt ook nog [4]), dat de kindersterfte voor de tafel van QUETELET zich met verrassende nauwkeurigheid voor de eerste 6 maanden laat uitdrukken door

$$y = 10000 - Ax^{1/3},$$

waarin x het aantal maanden is. De formule is verwant aan die van MOSER [5]), geldt in tegenstelling met deze echter juist beneden de leeftijd van 1 jaar. Voor de tafel van QUETELET [6]) heeft men te nemen

$$\log A = 3{,}98273.$$

§ 27. Weinig opgemerkt — QUIQUET [7]) bepreekt het geval — is een metode van afronding, die in een brief [8]) werd aangegeven door M**** — wellicht MAKEHAM [9]) — en die neerkomt op de

---

[1]) cf. pag. 51.

[2]) G. BOHLMANN. Lebensversicherungs-Mathematik (Encyclopaedie der mathematischen Wisschenschaften I[2]). 1901, pag 870.

[3]) A. LOEWY. Die Gauss'sche Sterbeformel (Zeitschrift für die gesammte Versicherungswissenschaft. VI), 1906, pag. 517.

[4]) PETERS. Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER. Band V, pag. 325.

[5]) Zie pag. 36.

[6]) Annuaire de Bruxelles 1844 en 1846.

[7]) A. QUIQUET. Note sur une loi anonyme de mortalité. B. A. F., V. 1895, pag. 22.

[8]) M**** On a method of adjusting tables of mortality. J. I. A. VI, 1857, pag. 357.

[9]) Zie Bulletin de l'Institut des Actuaires français. Tome V, 1895, pag. 12. In de „Index to the first forty volumes" van J. I. A., 1907, wordt als schrijver van de brief MAKEHAM genoemd.

volgende sterftewet. Men vormt een tafel voor de levenskansen p_x uit de waarneming, daaruit een tafel voor $\lg(-p_x)$ en rondt nu af in de onderstelling, dat de tweede verschillen van deze tafel gelijk zijn.

Schrijft men

$$\lg(-\lg p_x) = b_x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dan volgt uit

$$\Delta^2 b_x = 2A$$

dat

$$b_x = Ax^2 + Bx + C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin A, B en C konstant.

M**** onderstelt nu dat μ_x het eerstvolgende jaar konstant blijft, gelijk dit door meer, vooral door engelse schrijvers, vaak wordt gedaan. Men kan gemakkelik aantonen, dat in dat geval uit (7) van pag. 9 volgt

$$\mu_x = -\lg p_x,$$

zodat dan hier

$$\mu_x = e^{Ax^2 + Bx + C}$$

wordt.

Voor $A = 0$ — in 't algemeen is A klein — krijgt men de wet van GOMPERTZ.

Voor het gebruik is de metode van M**** te omslachtig om aan te bevelen.

PETER GRAY maakt melding[1]) van een studie van ORCHARD. Het was voor ORCHARD een bezwaar tegen alle hem bekende sterfteformules, dat ze voor de berekening van lijfrenten ongeschikt waren (over DE MOIVRE zwijgt hij merkwaardigerwijze). De geschiktheid voor de praktijk was voor hem hoofdzaak; hij liet dan ook teoretiese beschouwingen over de wijze waarop de sterfte-intensieteit verandert, wijken voor zijn pogingen om een eenvoudige algebraiese betrekking te vinden, die hij voor zijn doel kon gebruiken. Hij stelt daartoe een tafel op, beginnende bij 20 jaar met $l_{20} = 3650$, welk getal elk jaar afneemt met het getal, waardoor de leeftijd wordt voorgesteld; dit gaat zo door

---

[1]) PETER GRAY. On the Tables of Single and Annual Assurance Premiums published by the late Mr. WILLIAM ORCHARD, and on a Theoretical Table of Mortality proposed by him. J. I. A. VI, 1857, pag. 186.

tot 80 jaar. De opeenvolgende aantallen doden vormen dus een opklimmende rekenkundige reeks. Van 80 jaar af — l_{80} is, zoals dadelik is af te leiden $3650 - {}^1/_2 \times 60\,(20 + 79) = 680$ — neemt het aantal doden jaarliks met 5 af, waardoor 96 de oudste leeftijd wordt, daar $l_{96} = 0$. Het aantal levenden is dus van 20 tot 80 jaar en eveneens boven 80 jaar een rekenkundige reeks van de 2e orde.

Om een uitdrukking voor l_x te vinden, redeneert ORCHARD — we geven hier zijn omslachtige redenering verkort weer — als volgt:

Boven 80 jaar is $d_x = 5\,(96 - x)$, dus

$$l_x = \Sigma d_x = 5 \sum_x^{96} (96 - x),$$

waaruit

$$l_x = {}^5/_2 (96 - x)\,(97 - x).$$

Beneden 80 jaar is $d_x = x$,

waaruit

$$l_x = C - {}^1/_2 x\,(x - 1). \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Daar l_{80} reeds berekend is op 680 heeft men

$$680 = C - 3160$$
$$C = 3840,$$

zodat

$$l_x = 3840 - {}^1/_2 x\,(x - 1) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Voor 80 en 81 jaar zelf gelden beide vergelijkingen; behalve uit de wijze van afleiding blijkt dit ook nog daaruit, dat de gelijkstelling van de beide formules

$${}^5/_2 (96 - x)\,(97 - x) = 3840 - {}^1/_2 x\,(x - 1)$$

een vierkantsvergelijking is met wortels 80 en 81.

De konstante $C = 3840$ zou volgens de vergelijking (2) voorstellen de waarde van l_0. Echter is de tafel niet bedoeld voor beneden de 20 jaar; de onderstelling voor d_x zou daar niet houdbaar zijn.

§ 29. De vroeger genoemde EDMONDS [1]) gaf later [2]) nog een

---

[1]) cf. pag. 33.

[2]) T. R. EDMONDS. On the Law of Human Mortality expressed by a New Formula. (Philosophical Magazine XXXI. 1866) pag. 1.

andere sterfteformule, echter alweer zonder aan te geven hoe hij er aan komt. Hij drukt nu de sterfte-intensieteit op een bepaalde leeftijd uit in de voor een andere leeftijd bekende sterfte-intensieteit door middel van de betrekking

$$\frac{\mu_{x+t}}{\mu_x} = \left(\frac{a}{a+t}\right)^{\lg 10},$$

waarbij a een konstante is, die de tijdruimte voorstelt van een vast punt af, het zogenaamde „iedeale nulpunt van leven of levenskracht". Er zijn 2 iedeale nulpunten, een behorende bij de jeugdperieode en een behorende bij de volwassen perieode. De sterftekromme bestaat uit 2 takken, een aan elke kant van de puberteitsleeftijd. De volledige uitdrukking voor de sterftewet bestaat uit 2 gelijkvormige formules, een geldig voor de perieode van afname van de sterfte-intensieteit, dat is bij hem van de geboorte af tot ongeveer 9 jaar, en een geldig voor de perieode van toename van dezelfde grootheid, van 12 jaar af tot de hoogste leeftijd.

Door integratie van

$$\mu_{a+t} = \mu_a \left(1 + \frac{t}{a}\right)^{-n}$$

of

$$d \,.\, \lg l_{a+t} = -\,\mu_a \left(1 + \frac{t}{a}\right)^{-n}$$

— wanneer $l_a = 1$ voor de absolute leeftijd a, gemeten van een van de beide nulpunten van leven, en μ_a ondersteld wordt op de leeftijd a gedurende de eenheid van tijd konstant te blijven — verkrijgt men

$$\lg l_{a+t} = -\frac{\mu_a \,.\, a}{n-1}\left\{1 - \left(1 + \frac{t}{a}\right)^{1-n}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

De iedeale nulpunten zijn gelijk aan $-2^1/_4$ jaar en $+$ 102 jaar. Tussen 9 en 12 jaar wordt de sterfte-intensieteit ondersteld konstant te blijven; voor die perieode vindt men derhalve

$$\lg l_{a+t} = -\,\mu_a \,.\, t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

$$l_{a+t} = e^{-\mu_a \,.\, t}.$$

De uitdrukking (γ) is uit (β) af te leiden door (β) te ontwikkelen en alleen de eerste term te beschouwen.

Zonder zijn vroegere formule daarom te verwerpen — zijn

strijd met GOMPERTZ en diens verdedigers was hij niet vergeten — vindt EDMONDS natuurlik zelf zijn nieuwe formule beter; zijn vroegere formule moet men echter, zo zegt hij, als „niet meer dan een empieriese wet beschouwen, ondergeschikt aan en afhankelik van de „ware wet", uitgedrukt door de nieuwe formule".[1])

Hoe echter de nieuwe formule van de oude afhangt, daaromtrent zegt hij niets. Opmerkelik is, dat zijn nieuwe formule juist te voorschijn komt kort nadat GOMPERTZ aan zijn vroegere formule de uitbreiding had gegeven, die hieronder behandeld zal worden; EDMONDS wil niet voor zijn tegenstander onderdoen en zijn nieuwe formule heeft in tegenstelling met de vroegere niets met die van GOMPERTZ gemeen!

Wel komen de volgens EDMONDS berekende waarden vrij goed overeen met die uit de English Life Table no. 3 for Males, afgeleid door FARR uit waarnemingen over 1838—1854 en met die volgens zijn vroegere formule. De rekening met de absolute nulpunten, maar nog meer, het willekeurig aannemen van de perieode van 9 tot 12 jaar, maken de nieuwe formule van EDMONDS tot niet meer dan de vorige formules. Het is dan ook niet te betreuren, dat zijn formule zo goed als onopgemerkt is gebleven; door latere schrijvers wordt er slechts bij hoge uitzondering melding van gemaakt.

---

[1]) EDMONDS. l. c. pag. 14.

HOOFDSTUK IV.

OVER DE STERFTEFORMULES NA 1860.

§ 30. Met het jaar 1860 breekt voor het onderwerp van de sterfteformules een nieuw tijdperk aan, tengevolge van de uitgebreide onderzoekingen van MAKEHAM. Alvorens deze te behandelen dient nog te worden melding gemaakt van een tweetal verhandelingen van GOMPERTZ, waarin hij zijn arbeid van 1820 en 1825[1]) verder uitwerkt. Hij wilde zijn formule geschikt maken voor alle leeftijden, maar was niet tevreden met de handelwijze van „a gentleman" — gelijk hij schrijft (hij doelt natuurlik op EDMONDS) — om het leven in 3 perieoden te verdelen, ieder met afzonderlike konstanten. Hij onderstelde, dat de k en de c in zijn vroegere formule

$$l_x = kg^{c^x}\ ^2)$$

niet konstant waren, maar funksies van x en geeft[3]) de navolgende formule

$$\lg l_x = m + k\varepsilon^x - k_1\varepsilon_1^x x - nq^x - \theta \,.\, \omega^{p^x(x-u)},$$

waarin alle letters van het rechterlid, behalve x, konstanten zijn. De konstanten zijn berekend voor vier verschillende tafels; θ is nagenoeg gelijk aan 1.

Hij schrijft de formule ook in de uit $\lg l_x$ dadelik af te leiden vorm

$$l_x = k \,.\, A^{\varepsilon^x} \,.\, B^{\varepsilon_1^x x} \,.\, C^{q^x} \,.\, D^{P_x} \qquad \left(P_x = \theta \,.\, \omega^{p^x(x-u)}\right).$$

(waarin weer x de enige niet konstante)

---

[1]) cf. pag. 31.

[2]) cf. pag. 32.

[3]) B. GOMPERTZ. On one uniform law of mortality from birth to extreme old age; and on the law of sickness. (Report of the Proceedings of the fourth session of the International Statistical Congress. 1860). pag. 455. Zie ook J. I. A. XVI, pag 18.

De voornaamste term is Cq^x. In alle beschouwde tafels zijn tussen 20 en 60 jaar de overige termen zo weing verschillend van konstanten, dat ze als zodanig te beschouwen zijn.

Van 20 tot 60 jaar kan daarom volstaan worden met

$$l_x = kCq^x$$

en dit is zijn vroegere formule.

Gedurende het eerste levensjaar geldt

$$l_x = k \,.\, A^{\varepsilon^x} \,.\, B^{\varepsilon_1^x} \cdot {}^xCq^x;$$

van 1 tot 20 jaar

$$l_x = k \,.\, A^{\varepsilon^x} \,.\, Cq^x;$$

van 60 jaar af of iets vroeger

$$l_x = k \,.\, Cq^x \,.\, D^{Px}.$$

Korte tijd later [1]) kwam hij nog op de zaak terug; hij zette toen zijn oorspronkelike formule om in de vorm

$$\log l_x = \log k - \text{antilog } [(x - h) \log q]$$

en schreef dan, om de afhankelikheid van k en q van x uit te drukken

$$\log k = C\beta^x$$

$$\log q = \varepsilon_2^x \log q_1,$$

waarbij dan β en ε_1 slechts weinig van 1 kunnen verschillen. De zo ontstaande formule

$$\log l_x = C\beta_x - \text{antilog}\,[\varepsilon_2^x (x - h) \log q_1]$$

geldt van 10 tot 80 jaar. Om voor alle leeftijden een uitdrukking te hebben wordt de formule uitgebreid tot

$$\log l_x = C\beta^x + k\varepsilon^x + k_1\varepsilon_1^x + nq_2^x - \text{antilog}\,[\varepsilon_2^x (x - h) \log q_1].$$

De term $k\varepsilon^x$ heeft betekenis van 0 tot ongeveer 21 jaar; $k_1\varepsilon_1^x$ heeft slechts waarde in het 1e levensjaar, in hoofdzaak zelfs

---

[1]) B. Gompertz. A supplement to the two Papers published in the Transactions of the Royal Society „On the science connected with Human Mortality"; the one published in 1820, and the other in 1825. (Philosophical Transactions 1862) pag. 511.

in de 1e maand; nq_2^x krijgt slechts waarde tegen de 80 jaar en neemt tot het eind van de tafel toe.

Het wil me voorkomen, dat GOMPERTZ door zijn uitbreiding aan zijn oorspronkelike formule schade heeft toegebracht; bovendien gaan in de nieuwe gedaanten de fraaie eigenschappen, die zijn oorspronkelike formule heeft, geheel verloren.

§ 31. De in de vorige paragraaf besproken werken van GOMPERTZ zijn gelukkig, ook voor hem, vrijwel onbekend gebleven en hier dan ook alleen voor de volledigheid vermeld. Zijn oorspronkelike formule bleef zijn glans behouden; dit is het meest te danken aan het werk van MAKEHAM.

Deze merkt op [1]), dat indien de wet van GOMPERTZ juist was, de logaritmen van de kansen, die een x jarige heeft om na een telkens gelijk aantal jaren nog in leven te zijn een meetkundige reeks moesten vormen, dus dat dan

$$\log \log_n p_x, \quad \log \log_{2n} p_x, \quad \log \log_{3n} p_x$$

een rekenkundige reeks moeten vormen, en dit bleek hem uit de waarnemingen met verschillende tafels niet zo te zijn.

In een latere verhandeling [2]) komt hij tot de vorm, onder welke men gewoonlik de wet van MAKEHAM verstaat. Aan de redenering van GOMPERTZ, die de sterfte-intensieteit volgens een meetkundige reeks laat veranderen, brengt hij deze wijziging aan, dat hij de door GOMPERTZ aangenomen waarde voor μ_x vermeerdert met een konstante, onafhankelik van de leeftijd, zodat bij hem de verschillen van de sterfte-intensieteiten een meetkundige reeks vormen.

Hij schrijft dus

$$\mu_x = a + bc^x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (0)$$

---

[1]) W. M. MAKEHAM. On the law of mortality and the construction of annuity-tables. J. I. A. VIII. 1860 p. 301.

[2]) W. M. MAKEHAM. On the principles to be observed in the Construction of Mortality Tables. J. I. A. XII. 1866. pag. 305.

W. M. MAKEHAM. On the law of mortality. J. I. A. XIII. 1867. pag. 325.

waaruit $$\lg l_x = -ax - \frac{b}{\lg c} c^x + \lg k$$

$$= x \lg s + c^x \lg g + \lg k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dus $$l_x = k s^x g^{c^x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welke uitdrukking ook is te schrijven

$$l_x = C e^{-ax - \beta e^{\gamma x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De term bc^x in (0) heeft eerst voor grote waarden van x betekenis tegenover de konstante a; vandaar dat een grotere waarde van c wijst op een mindere sterfte in de leeftijden, die in de praktijk voorkomen.

Voor

$$s = 1, \text{ dus } a = 0$$

gaan de formules (2) en (3) over in die van GOMPERTZ:

$$l_x = k g^{c^x} = C e^{-\beta e^{\gamma x}}.$$

§ 32. GOMPERTZ en MAKEHAM hebben geen van beiden de grenzen aangegeven binnen welke de konstanten zich kunnen bewegen. Aangaande de konstanten is op te merken, dat ze posietief moeten zijn. Daar het aantal levenden met de toename van x voortdurend moet afnemen, moet $\frac{dl_x}{dx}$ voor alle waarden van x negatief zijn; bovendien moet de levenskans p_x met de toename van x tot 0 naderen.

Men heeft:

$$\frac{dl_x}{dx} = k s^x g^{c^x} (\lg s + c^x \lg g \lg c)$$

$$= l_x (\lg s + c^x \lg g \lg c)$$

en $$p_x = s g^{c^x (c-1)}.$$

De grootheid p_x kan voor grote waarde van x slechts tot 0 naderen als $g < 1$ en $c > 1$; in die onderstelling is $\frac{dl_x}{dx}$ negatief, wanneer $s \leqq 1$. Men heeft dus:

$$c > 1 \qquad 0 < g < 1 \qquad 0 < s \leqq 1.$$

Voor tal van sterftetafels zijn de konstanten berekend; daarvoor zijn verschillende metoden aangegeven. Hieronder volgt een opgave van de waarden van de konstanten voor enkele bekende tafels:

	s	g	c
R. F (Rentiers français)	0.9944272	0.9993868	1.1001136
Am (30 amerik. mijen)	0.993696	0.999312	1.099713
H^M (20 eng. mijen, mannen)	0.99358	0.999094	1.09744
H^{MF} (20 eng. mijen, gemengd)	0.99344	0.99906	1.09648
Gothaer Mannentafel .	0.99589	0.99874	1.09553
17 engelse mijen . .	0.993404	0.998934	1.09537
Carlisle	0.99195	0.99902	1.09448
A F (Assurés français)	0.994993	0.998440	1.0916817
M I (23 duitse mijen) .	0.995207	0.99658	1.08229

De waarden lopen dus voor de verschillende tafels al zeer weinig uiteen. Wat c aangaat werd dit verschijnsel het eerst opgemerkt door WOOLHOUSE [1]); het werd opnieuw besproken door MAKEHAM [2]) naar aanleiding van waarnemingen van MEECH [3]). Daarom nam MAKEHAM toen voor $^{10}\log c$ presies 0,04, hetgeen overeenkomt met $c = 1{,}096475$ (zie in de tabel de H^{MF} tafel), en leidde een biezondere sterftetafel af, uitgaande van

$$l_x = kg^{c^x} s^x - k_1 g_1^{c^x} s_1^x + k_2 g_2^{c^x} s_2^x,$$

waarbij de c overal dezelfde, terwijl de overige konstanten zijn berekend in elke term voor een bepaalde perieode; de eerste term past bij alle leeftijden boven 20 jaar, de tweede term is te verwaarlozen boven 20 jaar, de derde reeds boven 7 of 8 jaar. Het aannemen van $^{10}\log c = 0{,}04$ heeft sedert veel navolging gehad.

---

[1]) W. S. B. WOOLHOUSE Explanation of a new Method of Adjusting Mortality Tables; etc. J. I. A. XV. 1870. pag. 389.

[2]) W. M. MAKEHAM. Explanation and example of a method of constructing mortality tables with imperfect data; etc. J. I. A. XVI. 1871. pag. 344.

[3]) L. W. MEECH. Thirteen report of the insurance commissioner of Massachusetts for the year 1868.

De wet van MAKEHAM sluit merkwaardig goed aan bij de meeste sterftetafels van ongeveer 15 jaar af, dus voor de leeftijden die in de praktijk het meest voorkomen en heeft dan ook een uitgebreide toepassing gevonden. De toepassing is bovendien bevorderd door de fraaie eigenschappen die de formule bezit.

De wet van MAKEHAM is door anderen onder vele andere vormen gebracht. Een van de bekendste is die van KING en HARDY [1]; ze schreven

$$\log l_x = \log k s^x g^{c^x} + \log \varkappa \sigma^x \gamma^{c^x}$$

De tweede term moet dienen om de kinderleeftijden in de formule op te nemen; men ziet onmiddellik in, dat de vorm is te schrijven in die van MAKEHAM:

$$l_x = (k\varkappa)\,(s\sigma)^x\,(g\gamma)^{c^x}$$

§ 33. De kromme voor μ_x vertoont in het algemeen een mieniemum ongeveer tussen 12 en 15 jaar.

De formule van MAKEHAM voor μ_x geeft geen mieniemum. LAZARUS [2] zocht dit er in te brengen en de formule bruikbaar te maken voor de kinderleeftijden. Wel gaat hij van de wet van MAKEHAM uit; hij is toch van mening [3] dat GOMPERTZ en MAKEHAM het juiste standpunt innamen, n.l. om μ_x als $f(x)$ te schrijven en niet zoals gewoonlik geschiedt l_x. Deze mening nadert tot die van WESTERGAARD [4]; deze noemt een sterfteformule goed, wanneer μ_x zich gemakkelik laat berekenen.

LAZARUS wilde in elk geval zorgen, dat μ_x integreerbaar bleef. Bij de twee krachten, zoals hij ze noemt, uit welke de sterfteintensieteit bij MAKEHAM bestaat, moet er nog een derde zijn, zodanig, dat die langzamerhand afneemt; de konstanten zijn

---

1) G. KING and G. F. HARDY. Notes on the Practical Application of Mr. MAKEHAM's Formula to the Graduation of Mortality Tables. J. I. A. XXII. 1881. pag. 205.

2) W. LAZARUS. Ueber Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen. 1867. pag 32 (vertaald door T. B. SPRAGUE. J. I. A. 1875. XVIII. pag 212).

3) LAZARUS l. c. pag. 16.

4) H. WESTERGAARD. Die Lehre von der Mortalität und Morbilität. 1901. pag. 201.

daarbij zo te bepalen dat de werking van die derde kracht bij ongeveer 15 jaar ophoudt. Die derde kracht is van dezelfde gedaante als die in de formule van GOMPERTZ; hij krijgt dus:

$$\mu_x = a + bc^x + df^x$$

of, zoals SPRAGUE schrijft [1]),

$$\mu_x = a^{-mx} + b + c^{nx},$$

waaruit

$$l_x = cs^x k^{q^x} g^{w^x}.$$

Een formule dus met 6 konstanten, en dat is een bezwaar; de aansluiting bij vele tafels is vrij goed.

De formule is nog in de laatste jaren toegepast door QUIQUET voor de kindersterfte [2]).

§ 34. De formule van MAKEHAM zou men kunnen vervormen tot een veelterm, bestaande uit een aantal MAKEHAM-termen, en wel

$$\mu_x = (a_1 + a_2 + \ldots.) + (b_1 + b_2 + \ldots.)\, c^x.$$

De wijziging, die LAZARUS aanbrengt, komt hierop neer, dat hij de c voor de verschillende termen ongelijk neemt. Had hij algemeen geredeneerd, dan zou hij — en dit geldt dus ook voor MAKEHAM — hebben geschreven:

$$\mu_x = (a_1 + a_2 + \ldots.) + (b_1 c_1^x + b_2 c_2^x \ldots.)$$

of

$$\mu_x = a + b_1 c_1^x + b_2 c_2^x + b_3 c_3^x + \ldots.$$

Dit is het eerst aangegeven door AMTHOR [3]). Volgens hem is dus

$$l_x = k s^x g_1^{c_1^x} g_2^{c_2^x} \ldots.,$$

van welke uitdrukking de formules van MAKEHAM en van LAZARUS biezondere gevallen zijn [4]). Het gebruik van de formule van AMTHOR

---

[1]) Zie het artiekel Annuities in de Encyclopaedia Britannica. 8th edition, pag. 220.

[2]) A. QUIQUET. Sur la mortalité des enfants en France d'après certaines tables récentes (VIIme Congrès Internationale d'Actuaires. II) 1912. pag. 87.

[3]) A. AMTHOR. Das GOMPERTZ-MAKEHAM'sche Sterblichkeitgesetz und seine Anwendung bei der Lebensversicherungs- und Rentenrechnung. (Festschrift der Kreuzschule in Dresden). 1871. pag. 2.

[4]) Zie ook pag. 78.

brengt echter moeielikheden mede, doordat het aantal konstanten aanzienlik wordt; hij wil dan ook niet verder gaan dan de formule van LAZARUS, die volgens hem voor het gehele leven zeer nauwkeurig is. Hij werkt evenwel verder met de formule van MAKEHAM, omdat die eenvoudiger is en omdat de kinderleeftijden toch in de praktijk bijna niet voorkomen; daardoor neemt hij inderdaad een juist standpunt in.

§ 35. Na zijn eerste uitbreiding van de wet van GOMPERTZ [1]) heeft MAKEHAM nog een tweede uitbreiding daarvan gegeven [2]). Was zijn vroegere onderstelling, dat de tweede verschillen van $\log l_x$ een meetkundige reeks vormen, de uitkomsten voor enkele tafels deden hem zien, dat deze eigenschap beter kan worden toegekend aan de derde verschillen. Het komt hierop neer, dat men schrijft

$$\log l_x = \log k + x \log s + x^2 \log w + c^x \log g ,$$

dus

$$l_x = k s^x w^{x^2} g^{c^x} .$$

Door KARUP [3]) is aangetoond, dat de uitbreiding, die MAKEHAM aan zijn wet gaf, geen verbetering was. Niettemin is de formule toegepast o.a. door NORDENMARK [4]) bij de sterftetafels voor 1840—1900 van het statisties sentraalburo voor Zweden.

§ 36. SCHEFFLER [5]), die voor zijn berekening van lijfrenten en andere waarden volgens de kontienue metode een sterftefunksie van eenvoudige vorm wilde aannemen, verwierp daarom het zoeken naar een exponentieële funksie als sterftewet. Hij maakte gebruik van de vorm.

$$l_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots ,$$

---

[1]) Zie pag. 47.

[2]) W. M. MAKEHAM. On the further development of GOMPERTZ's law. J. I. A. XXVIII 1890. pag 156.

[3]) J. KARUP. Ueber eine angebliche neue Verbesserung der Gompertzschen Sterblichkeitsformel. (Masius' Rundschau der Versicherungen XL. 1890) pag. 114.

[4]) N. V. E. NORDENMARK. Ueber die Bedeutung der Lebensdauer für die Berechnung der Leibrenten. (Berichte, Denkschriften und Verhandlungen des 5ten Internationalen Kongresses für Versicherungs-Wissenschaft. 1906). deel VI. pag. 424.

[5]) H. SCHEFFLER. Sterblichkeit und Versicherungswesen 1868. pag. 19.

maar is overtuigd, dat voor een voldoende nauwkeurigheid een funksie van hoge graad noodzakelik is. Voor groepen van leeftijden echter kan volgens hem een lagere graad voldoende nauwkeurigheid geven en hij bepaalt zich tot de tweede graad. Alvorens zijn berekeningen uit te voeren leidt hij uit 26 hem bekende sterftetafels grafies een gemiddelde sterftetafel af; op 50 jaar zijn de aantallen levenden alle gelijk gemaakt aan die van de Equitable-tafel. Daarna vindt hij voor dit gemiddelde met behulp van de formule

$$l_x = a + bx + cx^2$$

de volgende vergelijkingen:

van 0 tot 6 jaar $100000 - 11402{,}9x + 842{,}4x^2$
„ 6 „ 80 „ $64440 - 395{,}86x - 4{,}331x^2$
„ 80 „ 100 „ $204364 - 4305{,}8x + 22{,}68x^2$.

Hij leidde ook nog vergelijkingen af voor de tafel van BRUNE. Daarbij nam hij 4 perieoden; we zullen de uitkomsten niet vermelden. De overeenkomst tussen berekening en waarneming is trouwens slechts matig. Het is overigens duidelik, dat de metode van SCHEFFLER als zeer onvoldoende, ja als zonderling moet worden betieteld. Een mengsel van allerlei sterftetafels tot grondslag, er zijn er bij voor mannen, voor vrouwen, voor beide, er is zelfs een vroegere gemiddelde van MOSER bij; ze zijn van verschillende landen; er zijn er bij die slechts historiese waarde hebben, zoals die van KERSSEBOOM; het aantal perieoden willekeurig. Zeker kan men elke kromme bij benadering door paraboolbogen vervangen, de benadering ware dan des te beter geworden, naarmate het aantal perieoden groter genomen ware. En dan zou de eenvoudigheid weg zijn. Bovendien maakt SCHEFFLER weer de fout uit te gaan van l_x en in een zodanige vorm, dat de ermede samenhangende grootheden niet in bruikbare gedaante zijn af te leiden, en dit nog wel in een werk, waarvan het hoofddoel is de kontienue metode naar voren te brengen. Hij geeft blijk de grondslagen van de deduksie, die GOMPERTZ levert, niet te beseffen en levert slechts een gewone interpolatieformule.

§ 37. Ook SANG[1]) merkt op, dat algebraiese funkties met

[1]) E. SANG. Address to the Actuarial Society of Edinburgh (1868). J. I. A. XV. 1870. pag. 257.

alleen posietieve machten van de veranderlike het voordeel zouden geven, dat de berekeningen tot de lagere algebra zouden beperkt blijven. Als eigenaardigheid, meer niet, vermeldt hij, dat door de volgende vorm met 6 termen een lijn wordt voorgesteld, die 9 punten met de Carlisle-tafel gemeen heeft en van 8 tot 20 jaar deze tafel vrij goed bepaalt:

$$l_x = 0{,}29493u^2 + 0{,}483016u^3 - 0{,}022718u^4 + 0{,}000430174u^5 - 0{,}00000375557u^6 + 0{,}000000012515u^7,$$

waarin $u = 96 - x.$

Hij deelt verder mede, dat hij een dergelijke vorm ongeschikt vindt en dat in het algemeen slechts beknopte, gemakkelik integreerbare funksies kunnen dienen en diegene het meest bruikbaar zijn, waarbij de afgeleiden terugkeren in de vorm van de oorspronkelike funksie; hij noemt ϵ^x, sin x, $^1/_2(\epsilon^x + \epsilon^{-x})$; $^1/_2(\epsilon^x - \epsilon^{-x})$.

De uitdrukking:

$$l_x = P\epsilon^{-kx} - Q$$

beveelt hij voor onderzoek aan.

De vorm laat zich schrijven

$$l_x = a + bc^x$$

en geeft dus l_x in dezelfde gedaante als MAKEHAM schrijft voor μ_x. De formule bezit een interessante eigenschap, waarop we later terugkomen.

§ 38. OPPERMANN [1]) trachtte in het biezonder een formule te vinden voor de kinderleeftijden; hij geeft [1]), geldig tot ongeveer 20 jaar

$$\mu_x = ax^{-1/2} + b + cx^{1/2}.$$

De uitdrukking herinnert in zijn vorm aan de splitsing van μ_x volgens verschillende oorzaken. Wij hebben het geschrift van OPPERMANN niet kunnen raadplegen en vinden trouwens ook bij andere schrijvers niet meer aangegeven dan het bestaan van de formule en de bron, waar die te vinden is. Mag het geven van μ_x worden toegejuicht, een bezwaar is dat de vorm minder eenvoudig is in de bewerking. Of de formule door hem is toege-

[1]) The Insurance Record. 1870.

past hebben wij niet kunnen vinden; later gebruik is er in ieder geval niet van gemaakt. Wel mag hier nog worden opgemerkt, dat vervanging van x door $\sqrt{x}$ bij meer deense schrijvers wordt aangetroffen.

§ 39. FRANKE [1]) tekent eerst uit de beschouwing van allerlei tafels een kromme voor de sterftekans van 20 jaar af en stelt daarna, zonder echter enigszins toe te lichten hoe hij er toe komt, de hypotese

$$p_x = k(rv_x w_x^2 + nw_x + m)^{w_x},$$

waarbij k, r, n en m konstanten zijn; v en w daarentegen funksies van de leeftijd x. De funksie w wordt zo gekozen, dat die voor het begin van de tafel — dat is hier 20 jaar — gelijk aan 0 is en verder steeds toeneemt. Men heeft overigens vrije keus; exponentieaalfunksies zijn hem met hoge exponenten te moeielik, hij neemt de leeftijd zelf en schrijft:

$$w_x = \frac{x - 20}{10}.$$

De funksie v bepaalt hij zo, dat de sterfte van 64 tot 74 jaar — hij vindt deze getallen uit de door hem getekende kromme — toeneemt en daarboven tot enkele jaren voor het einde van de tafel afneemt; er is in zijn kromme bij 74 jaar een buigpunt. Hij schrijft dan:

$$v_x = 1 + \sqrt{-hx\beta^1} - \sqrt{x\beta - \frac{n^4\beta^2}{c}},$$

waarbij de konstanten zodanig zijn, dat beneden 64 jaar de beide wortelvormen iemagienair zijn, de eerste ook boven 73 jaar, de tweede ook beneden 75 jaar; c wordt zo bepaald, dat voor het hoogste levensjaar de tweede wortel iemagienair wordt. De funksie v, voor welke dan in elk geval alleen de reëele termen in rekening te brengen zijn, omvat zodoende eigenlik slechts 1 of 2 termen. Volgens zijn ervaring is de funksie altijd te gebruiken.

De bepaling van de konstanten k geschiedt eenvoudig: in het jaar waarvoor $w_x = 0$, is $p_x = k$; r, n en m worden gevonden

---

[1]) J. H. FRANKE. Ueber die Ausgleichung von Sterblichkeitsbeobachtungen. (Masius' Rundschau der Versicherungen XX) 1870. pag. 261.

volgens de metode van de kleinste kwadraten. Voor een voorlopige bepaling zet hij, uit zijn formule

$$\frac{\log p_x - \log k}{w_x} = \log (r v_x w_x^2 + n w_x + m) = \log R_x$$

en vindt r, n en m met behulp van 3 waarden voor R_x.

Wanneer men de formule van FRANKE vergelijkt met de vóór hem bestaande van MAKEHAM e. d., dan behoeft geen betoog, dat hij voor het gebruik niet is aan te bevelen. Behalve op een door hem gegeven voorbeeld voor de tafels van een aantal engelse instellingen is de formule dan ook nooit toegepast en is, evenals zovele andere, in de vergetelheid geraakt. Zelf zegt hij [1], — en daarmede velt hij zijn eigen doodvonnis — dat zijn hypotese in elk geval nog te verbeteren is; al verandert men niet de gehele exponentieaalfunksie, dan kan toch de vorm tussen haken gewijzigd worden. Het peil, waarop zijn wetenschap staat, wordt gekenmerkt door de volgende zin [2]: „Es ist jedoch weder möglich noch notwendig, dass bei Ausstellung einer neuen *Theorie* (kursievering van mij) alle Einzelheiten bis zu ihren letzten Consequenzen verfolgt werden; die weitere Ausbildung können wir ganz ruhig der Zeit überlassen."

§ 40. De splitsing van de doodsoorzaken in verschillende groepen wordt ook toegepast door THIELE [3]; daardoor komt ook hij tot een formule voor μ_x, die uit 3 of 4 termen bestaat:

$$\mu_x = \mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x},$$

waarbij de 3 termen gelden resp. voor de jeugd, de middelleeftijd en de ouderdom; somtijds is nog een konstante nodig, die de invloed van het toeval voor alle leeftijden weergeeft.

Indien voor de ouderdom μ_3 geldt, dan moet deze zeer klein zijn voor kleine waarden van x, maar snel toenemen. Hij nam voor μ_3 de formule van GOMPERTZ-MAKEHAM

$$\mu_{1x} = a_3 e^{\cdot b_3 x}.$$

---

[1] FRANKE. l. c. pag. 266.

[2] FRANKE. l. c. pag. 267.

[3] T. N. THIELE. En mathematisk Formel for Dödeligheten. 1871, vertaald door T. B. SPRAGUE. J. I. A. XVI. 1872. pag. 313.

Voor de middelleeftijden nam hij

$$\mu_{2x} = a_2 e^{-1/2 b_2^2 (x-c)^2}.$$

Voor de kinderleeftijden meende hij eerst de formule van OPPERMANN[1]) met enige wijziging te kunnen gebruiken; hij gaf echter de voorkeur aan

$$\mu_{1x} = a_1 \epsilon^{-b_1 x};$$

boven 10 à 20 jaar is deze term te verwaarlozen.

De volledige formule werd zodoende

$$\mu_x = a_1 \epsilon^{-b_1 x} + a_2 e^{-1/2 b_2^2 (x-c)^2} + a_3 e^{b_3 x}.$$

Hij nadert tot de formule van LAZARUS, echter in een vorm, welke, al moge die voor het gehele leven gelden, voor de berekening van lijfrenten ongeschikt is en de eigenschappen van de formule van GOMPERTZ-MAKEHAM mist.

§ 41. Ook door LAURENT is over sterftekrommen en sterfteformules iets medegedeeld. Hij doelt[2]) op een uitdrukking

$$l_x = A e^{\alpha x} + B e^{\beta x} + C \epsilon^{\gamma x} \ldots,$$

waartoe hij komt door uitbreiding van de formule van GOMPERTZ.

De formule wordt door hem gewijzigd in een latere verhandeling[3]). Hij noemt daar de formule van MAKEHAM als goed bruikbaar, schrijft deze — of liever die van GOMPERTZ — in de vorm

$$l_x = l_0 e^{e^{ax+b}},$$

ontwikkelt die in

$$l_x = l_0 \left(1 + \frac{\epsilon^{ax+b}}{1} + \frac{\epsilon^{2ax+2b}}{1.2} + \ldots\right)$$

en laat deze, omdat a en b klein zijn, overgaan in

$$l_x = l_0 (A + B e^{\alpha x} + C e^{\beta x}).$$

Volgens hem is deze formule zelfs nauwkeuriger dan die van MAKEHAM, omdat er meer parameters in zijn; hij geeft echter nergens een getallenvoorbeeld, waaruit de gegrondheid van zijn mening blijkt. Hij heeft verder gelijk, waar hij nog opmerkt,

---

[1]) Zie pag. 54.

[2]) H. LAURENT. Traité du Calcul des Probabilités. 1873. pag. 198.
id. Théorie et Pratique des Assurances sur la vie. z. j. pag. 51.

[3]) H. LAURENT. Note sur les Tables de mortalité. B. A. F. I. 1891. pag. 71.

dat de formule te verkiezen is boven die, waarbij een rekenkundige reeks van hogere orde wordt gebruikt; vooreerst omdat de vorm nadert tot die van MAKEHAM — die opvatting is voor zijn rekening; ons inziens is de overeenkomst slechts zeer gering, hoogstens nadert de vorm voor l_x bij hem die voor μ_x bij MAKEHAM of eigenlik die voor μ_x bij LAZARUS — maar ook, en dit terecht, omdat de formule een oplossing toelaat van de kontienue lijfrente. Die oplossing geeft hij echter niet; we hebben het de moeite waard geacht die wel te geven, de uitkomst vindt men in een volgend hoofdstuk.

§ 42. Na de hierboven vermelde formule gaf LAURENT nog [1]) een formule, die, als algemene interpolatieformule bruikbaar, door hem waarschijnlik is gevonden met het oog op toepassing bij sterftetafels; hij geeft er dan ook een voorbeeld van en spreekt van $f(x)$ als een lieneaire funksie met exponentieële termen.

Stelt men:

$$f(a,\ x) = \frac{f(x) - f(a)}{a^x - a^a},$$

dan is $$f(x) = f(a) + (a^x - a^a)\, f(a,\ x).$$

Beschouwt men dus de funksie

$$f(a) + (a^x - a^a)\, f(a,\ b),$$

dan wordt deze voor $x = a$ gelijk aan $f(a)$, voor $x = b$ gelijk aan $f(b)$.

Stelt men verder:

$$f(a,\ b,\ x) = \frac{f(a,\ x) - f\,a,\ b)}{\beta^x - \beta^b},$$

dan is

$$f(a,\ x) = f(a,\ b) + (\beta^x - \beta^b)\, f(a,\ b,\ x),$$

of

$$\frac{f(x) - f(a)}{a^x - a} = f(a,\ b) + (\beta^x - \beta^b)\, f(a,\ b,\ x),$$

waaruit

$$f(x) = f(a) + (a^x - a^a)\, f(a,\ b) + (a^x - a^a)\,(\beta^x - \beta^b)\, f(a,\ b,\ x).$$

---

[1]) H. LAURENT. Note sur une formule d'interpolation. B. A. F. II. 1892. pag 76.

Beschouwt men dus de funksie

$$f(a) + (a^x - a^a) f(a, b) + (a^x - a^a)(\beta^x - \beta^b) f(a, b, c),$$

dan wordt deze vooreerst gelijk aan $f(a)$ voor $x = a$ en gelijk aan $f(b)$ voor $x = b$, en verder ook gelijk aan $f(c)$ voor $x = c$. Op deze wijze kan men doorgaan.

Men begint nu, uitgaande van

$$f(a) + (a^x - a^a) f(a, b),$$

voor a en b twee willekeurige waarden te nemen en bepaalt daarna α zodanig, dat de vergelijking ook geldt voor een willekeurige derde waarde. LAURENT kiest de tafel van DUVILLARD en $a = 0$, $b = 100$, zodat

$$f(x) = 100.000 - (1 - \alpha^x) \frac{99979}{1 - \alpha^{100}},$$

en berekent α, door $x = 50$ te nemen; zo komt hij tot $\alpha = 0{,}98291$, dus tot

$$f(x) = 100.000 - (1 - 0{,}98921^x) \times 121720.$$

Zijn de met behulp van die uitdrukking verkregen waarden niet voldoende nauwkeurig, dan voegt men de term

$$(a^x - a^a)(\beta^x - \beta^b) f(a, b, c)$$

er aan toe voor een willekeurige c, in het voorbeeld van LAURENT 25, en bepaalt β zo, dat $f(x)$ voor een vierde waarde, bij LAURENT $x = 75$, voldoet; zo komt hij tot

$$f(x) = 100000 - (1 - 0{,}98291^x)\, 121720 - (1 - 0{,}98921^x)$$
$$(0{,}97877^x - 0{,}11693)\, 62570.$$

Zelf vindt hij de uitkomsten bij de tafel van DUVILLARD slechts matig en meent, dat een nieuwe term nodig zou zijn, doch hij moet meteen toegeven, dat dan de eenvoudigheid van de formule verdwenen zou zijn. O. i. is zijn eindformule reeds te ingewikkeld en kan zijn metode slechts met vrucht dienst doen wanneer met a en b kan worden volstaan, hetgeen bij een sterftetafel niet te verwachten is. De vergelijkingen ter bepaling van α, β, enz. worden ook reeds spoedig zodanig, dat ze slechts met moeite en benaderd zijn op te lossen. En zelfs met twee termen is de formule niet eenvoudiger dan andere en is ook voor verdere toepassing niet biezonder geschikt. Als een voordeel bij het gebruik

dat op ander terrein ervan te maken mag zijn, kan gelden, dat bij het toevoegen van een volgende term als korreksie, de reeds bestaande termen onveranderd geldig blijven.

§ 43. Nam EDMONDS [1]) de sterfte-intensieteit van 9 tot 12 jaar konstant aan, DORMOY [2]), die in zijn hoofdstuk over sterfteformules slechts die van GOMPERTZ en MAKEHAM behandelt, noemt als voorbeeld, hoe men uit de sterfte-intensieteit de formule voor het aantal levenden afleidt het geval, dat μ gedurende het gehele leven konstant zou zijn.

Dit geeft

$$\mu_x = a$$

of

$$\frac{d \lg l_x}{dx} = -a,$$

waaruit

$$\lg l_x = -ax + b,$$

dus

$$l_x = ce^{-ax},$$

welke uitdrukking herinnert aan hetgeeen SANG [3]) voorstelde. De uitdrukking komt overeen met de tweede onderstelling van DE MOIVRE [4]).

Voor $x = 0$ vindt men $l_0 = c$, zodat de konstante c het aantal 0-jarigen voorstelt.

Ook noemt DORMOY het geval, dat de sterfte-intensieteit evenredig met de leeftijd zou zijn; dit geeft

$$\mu_x = ax,$$

waaruit

$$\lg l_x = -\tfrac{1}{2}ax^2 + b,$$

dus

$$l_x = ce^{-\frac{1}{2}ax^2}.$$

Dit geval is een biezonder geval van het voorbeeld, dat BROGGI [5]) geeft; deze leidt uit

$$\mu_x = a + bx$$

af

$$l_x = e^{a - a_1 x - a_2 x^2},$$

---

[1]) Zie pag. 43.

[2]) E. DORMOY. Théorie mathématique des Assurances sur la vie. I. 1878. pag. 115.

[3]) Zie pag. 53.

[4]) Zie pag. 16.

[5]) H. BROGGI. Versicherungsmathematik. 1911. pag. 104.

doch alleen om er een fraaie eigenschap uit af te leiden, niet met het oog op toepassing.

Van meer dan voorbeelden mag hier geen sprake zijn. DORMOY doet zelfs al verkeerd, wanneer hij zegt, dat die twee formules slechts een ruwe benadering geven, al is het dan nog maar gedurende een beperkt deel van het leven. Had hij nog gesproken van een zeer klein deel, dan was hij gekomen op de onderstelling van GOMPERTZ [1]); uit de plaats waar de genoemde uitdrukking staat, is wel af te leiden, dat hij het zo ook bedoeld heeft. Zelfs als ruwe benadering kunnen de genoemde funksies niet dienen, ze bezitten o.a. geen buigpunten, die toch in elke kromme voor de waargenomen waarden van l_x voorkomen.

SANG [2]) bij wie we de kwestie omgekeerd aantroffen, gebruikte de funksie dan ook slechts als punt van uitgang.

§ 44. De exponentieaalfunksies vonden een nieuwe aanhanger in WITTSTEIN [3]). Zijn uitgangspunt was de formule van DE MOIVRE

$$l_x = \omega - x,$$

waaruit

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x};$$

ω is de leeftijd waarop geen mensen meer leven. Stelt men nu

$$M = \omega - 1,$$

waarbij dus M de hoogste leeftijd, waarop nog levenden aanwezig zijn, dan wordt

$$\mu_x = \frac{1}{1 + (M - x)}.$$

Voor $x = M$, wordt

$$\mu_M = 1,$$

zoals het ook moet zijn; deze waarde 1 blijft, wanneer $M - x$ een willekeurige konstante faktor α krijgt:

$$\mu_x = \frac{1}{1 + \alpha (M - x)}.$$

---

[1]) Zie pag. 31.

[2]) Zie pag. 54.

[3]) TH. WITTSTEIN. Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit. 1883. pag. 17.

Ook blijft nog $\mu_M = 1$, wanneer $M - x$ voorzien wordt van een willekeurige exponent n. Zo komt hij tot

$$\mu_x = \frac{1}{1 + a(M-x)^n}.$$

De noemer is het begin van een reeksontwikkeling, n.l. van $a^{(M-x)^n}$, indien $a = \lg a$; zo komt hij er toe te schrijven

$$\mu_x = a^{-(M-x)^n},$$

hetwelk eigenlijk niets anders is dan de formule van GOMPERTZ in een wat meer algemene vorm.

Met behulp van deze formule ging WITTSTEIN de mannentafel van BRUNE na; slechts 2 konstanten zijn te bepalen, terwijl $M = 95$. Hij vindt:

$$\mu_x = 1{,}42423^{-(95-x)^{0{,}63033}}.$$

Willekeurig nam hij bij de berekening de leeftijden 37 en 44 tot grondslag, die leeftijden liggen echter in de buurt waar de gewichten het grootst zijn; voor μ_{37} en μ_{44} nam hij om zoveel mogelik tegen de invloed van het toeval te zijn beschermd, resp. $^1/_3(\mu_{36} + \mu_{37} + \mu_{38})$ en $^1/_3(\mu_{43} + \mu_{44} + \mu_{45})$.

§ 45. De kinderleeftijden bleven nu echter, gelijk bij de oorspronkelike formule van GOMPERTZ, buiten beschouwing. Teneinde in zijn funksie een mieniemum te krijgen, roept hij de kettinglijn te hulp, die ook uit exponentieaalfunksies is opgebouwd;

$$y = {}^1/_2 e^x + {}^1/_2 e^{-x}.$$

Naar analogie hiervan schrijft hij:

$$\mu_x = a^{-(M-x)^n} + a^{-x^n}.$$

Om evenwel in de kromme te doen uitkomen, dat deze in de eerste levensjaren sneller daalt dan dat hij later stijgt, maakt hij de tweede term kleiner. Zo komt hij dan eindelik tot de eindformule:

$$\mu_x = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n},$$

waarin m een nieuwe konstante.

Om de waarde van m te bepalen, bepaalt men het mieniemum van deze funksie op de bekende wijze:

$$\frac{d\mu_x}{dx} = (a^{-(M-x)^n}(M-x)^{n-1} - a^{-(mx)^n}(mx)^{n-1})\, n \log a = 0,$$

waaruit $$M - x_0 = mx_0,$$

dus $$m = \frac{M - x_0}{x_0},$$

indien x_0 de leeftijd is, waar het mieniemum ligt.

Met behulp van zijn formule vult WITTSTEIN de tafel van BRUNE aan voor de kinderleeftijden met die van DEPARCIEUX; hij schrijft:

$$\mu_x = 1{,}42423^{-(95-x)^{0{,}63033}} + {}^1/_5 \times 1{,}42423^{-(5x)^{0{,}63033}}.$$

De wijze, waarop hij daarbij komt tot het gebruik van $m = 5$ is vrij zonderling [1]).

§ 46. Later vond hij nog met behulp van de H^M tafel

$$\mu_x = 1{,}41790^{-(97-x)^{0{,}63549}} + {}^1/_6 \times 1{,}41790^{-(6x)^{0{,}63549}},$$

waarbij dezelfde opmerking te maken is. De gehele formule is trouwens zeer gekunsteld en al komt de uitdrukking voor μ_x de door LAZARUS [2]) en AMTHOR [3]) gegeven uitbreiding van de formule van GOMPERTZ-MAKEHAM nabij, bij al deze staat die van WITTSTEIN achter; het gering aantal konstanten kan dit niet goedmaken. Het voornaamste bezwaar tegen de formule is echter — WITTSTEIN oppert dit zelf reeds — dat hij niet in eindige vorm integreerbaar is; ook hierin staat hij bij de zoeven genoemde achter.

Uit

$$\mu_x = -\frac{d \lg l_x}{dx} = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n}$$

volgt

$$\lg l_x = -\int a^{-(M-x)^n} dx - \frac{1}{m} \int a^{-(mx)^n} dx \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Stelt men $$(M - x)^n = u$$

en $$(mx)^n = v,$$

dan verkrijgt men:

$$\lg l_x = \frac{1}{n} \int a^{-u} u^{\frac{1}{n}-1} du - \frac{1}{m^2 n} \int a^{-v} v^{\frac{1}{n}-1} dv.$$

Beide integralen zijn dus van dezelfde vorm, doch zijn slechts op te lossen, indien $\frac{1}{n}$ = geheel is en dit is niet het geval.

---

[1]) WITTSTEIN. l. c. pag. 24.

[2]) Zie pag. 50.

[3]) Zie pag. 51.

§ 47. Past men in (1) reeksontwikkeling toe, dan verkrijgt men

$$\lg l_x = -\int (1 - (\mathrm{M} - x)^n \lg a + \frac{1}{2!}(\mathrm{M} - x)^{2n} (\lg a)^2 \ldots .)\, dx$$

$$- \frac{1}{m} \int (1 - (mx)^n \lg a + \frac{1}{2!} (mx)^{2n} (\lg a)^2 \ldots .)\, dx,$$

waaruit

$$\lg l_x = \mathrm{C} - x - \frac{(\mathrm{M} - x)^{n+1}}{n+1} \lg a + \frac{1}{2!} \frac{(\mathrm{M} - x)^{2n+1}}{2n+1} (\lg a)^2 \ldots .$$

$$- \frac{1}{m^2} \left(mx - \frac{(mx)^{n+1}}{n+1} \lg a + \frac{1}{2!} \frac{(mx)^{2n+1}}{2n+1} (\lg a)^2 \ldots . \right).$$

Beide reeksen (men schrijve $\mathrm{M} - x$ voor $\mathrm{C} - x$) zijn wel konvergent, doch zeer zwak; er zijn dus te veel termen nodig om bruikbare nauwkeurigheid te verkrijgen.

Men kan nu verder schrijven

$$l_x = e^{\mathrm{M} - x \ldots .},$$

als M voor C blijft staan; dit wordt bij ontwikkeling

$$l_x = 1 + \mathrm{M} - x + \ldots .$$
$$= \omega - x + \ldots .$$

Het stuk $\omega - x$ geeft de formule van De Moivre; de overige termen leggen echter veel gewicht in de schaal.

Opmerkelik is nog, dat een groot aantal schrijvers de formule van Wittstein verkeerd weergeven door inplaats van de sterfteintensieteit de sterftekans te zetten; zo Landré [1]), Wagner [2]), Braun [3]), Czuber [4]). Wittstein is hiervan zelf mede de schuld, want hij gebruikt overal voor μ_x de uitdrukking Sterbenswahrscheinlichkeit.

---

[1]) C. L. Landré. Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung. 1905. pag. 56.

[2]) K. Wagner. Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. 1898. pag. 109.

[3]) H. Braun. Die Gesetze der menschlichen Lebensdauer (Loewenbergs Sammlung versicherungstechnischer Arbeiten. Band II) pag. 67.

[4]) E. Czuber. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Band VII). 1899. pag. 242.

§ 48. Enigszins in de lijn van WITTSTEIN blijft ook GROSSE [1]). Deze merkte op, dat μ_x voor de duitse sterftetafel voor mannen M I vrijwel door de kettinglijn wordt aangegeven. Hij schrijft daarom

$$\mu_x = aq^x + bq^{-x}.$$

Daar de gebruikte tafel voor $x = 22$ een mieniemum heeft, moet

$$aq^{22} = bq^{-22}.$$

Met behulp van deze vergelijking en twee passend gekozen waarden voor μ_x, die hij niet noemt, doch die μ_{27} en μ_{44} moeten geweest zijn, komt hij tot de uitkomst

$$a = 0{,}00080 \qquad b = 0{,}01334 \qquad \log q = 0{,}0277742.$$

Over de overeenkomst van zijn berekende waarden met de waargenomen is hij nog al tevreden. De formule noemt hij slechts geldig van 20—79 jaar. Ten onrechte zegt hij, dat ook buiten deze grenzen de resultaten bruikbaar zijn; zelfs van 20—79 jaar mogen we dit in twijfel trekken.

De formule is in eindige vorm integreerbaar; men heeft

$$\lg l_x = \mathrm{A} - \frac{1}{\lg q}\{aq^x - bq^{-x}\},$$

waaruit

$$l_x = kg^{q^x} h^{q^{-x}}.$$

In hetzelfde jaar als GROSSE schijnt ook KAISER een sterfteformule te hebben opgesteld; dit wordt medegedeeld door LEHR [2]). Evenals WAGNER [3]) hebben wij omtrent deze formule niets naders kunnen vinden.

§ 49. Nadat OPPERMANN tevergeefs had getracht om zijn formule voor de kinderleeftijden [4]) te kombieneren met die van

---

[1]) H. GROSSE. Die Versuche zu einer mathematischen Darstellung des Sterblichkeitsgesetzes (Ehrenzweigs Assekuranz-Jahrbuch. V) 1884. pag. 46.

[2]) Zie het artiekel „Sterblichkeit" in MEYER's Konversations-Lexicon, deel 18, pag. 943.

[3]) K. WAGNER. Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. 1898. pag. 110.

[4]) Zie pag. 54.

MAKEHAM of die van THIELE[1]) teneinde zodoende een formule te verkrijgen, die voor het gehele leven geldig is, vestigde hij zijn aandacht op de uitdrukking

$$\mu_x = (\alpha + \beta x)\, e^{-\varkappa x} + \gamma e^{\lambda x},$$

die boven 15 jaar bruikbare waarden kan geven. Voor lagere leeftijden krijgt men echter vaak negatieve, dus onbruikbare waarden voor μ_x. Boven 15 jaar is de formule dus een mededinger voor die van MAKEHAM.

OPPERMANN zelf heeft omtrent zijn formule niets openbaar gemaakt; de vermelding is te danken aan GRAM[2]).

De formule van OPPERMANN bezit de belangrijke eigenschap, dat door sommatie, differentieatie en integratie vormen van nagenoeg hetzelfde karakter te voorschijn komen; men krijgt door integratie

$$\lg l_x = \mathrm{K} + (\mathrm{A} + \mathrm{B}x)^{-\varkappa x} - \mathrm{C}e^{\lambda x},$$

waaruit

$$-\lg p_x = (a + bc)^{-\varkappa x} + ce^{\lambda x}.$$

Substietueert men $x = nt$, dan vindt men voor de kans, dat een $x\,(= nt)$ jarige over n jaar nog in leven is:

$$-\log {}_np_{nt} = (a_n + b_n t)\, e^{-\varkappa nt} + c_n e^{\lambda nt},$$

hetgeen door sommatie uit de formule voor $-\lg p_x$ is af te leiden. Voor het verband tussen de koëffiesieënten vindt men gemakkelik

$$b = \frac{b_n}{n}\,\frac{1 - e^{-\varkappa}}{1 - e^{-n\varkappa}};\quad c = c_n \frac{e^{\lambda} - 1}{e^{n\lambda} - 1},$$

terwijl a het eenvoudigst wordt bepaald uit a_n met behulp van de waarden voor A en B.

Bij de deense „Statsanstalten for Livsforsikring" werd door OPPERMANN deze formule gebruikt; bij de mannentafel voor $x > 27$, bij de vrouwentafel voor $x > 12$. Bij de eerste gebruikte hij voor $x \leqq 27$ de formule

$$\mu_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + fx^4;$$

---

[1]) Zie pag. 56.

[2]) J. P. GRAM. Om Udjevning af Dødelighedsiagttagelser og OPPERMANN's Dødelighedsformel (Tidsskrift for Matematik (5). II). 1884. pag. 113.

bij de vrouwentafel voor $x \leqq 12$ de formule van THIELE

$$\mu_x = \frac{m}{s\sqrt{x}} + n + p\sqrt{x}\,^{1}).$$

§ 50. SELLING [2]) gaat uit van de funksie

$$y\,(= l_{65-x}) = au^x + bv^x + cw^x + \ldots\ldots, \quad (1)$$

waarbij, als men zich tot 3 termen beperkt, de 6 konstanten op sierlike wijze kunnen worden bepaald uit de 6 vergelijkingen, die men krijgt voor $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Eliemienatie van a, b en c uit de 6 vergelijkingen geeft, wanneer men stelt:

$$u + v + w = \mathrm{A}; \quad uv + vw + wu = \mathrm{B}; \quad uvw = \mathrm{C}$$

de 3 vergelijkingen:

$$\begin{aligned} y_3 - \mathrm{A}y_2 + \mathrm{B}y_1 - \mathrm{C}y_0 &= 0 \\ y_4 - \mathrm{A}y_3 + \mathrm{B}y_2 - \mathrm{C}y_1 &= 0 \\ y_5 - \mathrm{A}y_4 - \mathrm{B}y_3 - \mathrm{C}y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Eliemieneert men nu A, B en C, dan krijgt men de derdemachtsvergelijking

$$\begin{vmatrix} z_3 & z_2 & z & 1 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \\ y_5 & y_4 & y_3 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

van welke u, v en w de wortels zijn.

Daarna vindt men uit de vergelijkingen (1) voor $x = 0$, 1 en 2

$$a = \frac{y_2 - (v + w)\, y_1 + vwy_0}{(u - v)\,(u - w)}$$

en analoge waarden voor b en c.

De formule heeft het voordeel, dat hij bij overgang op meer hoofden in een funksie van overeenkomstige vorm overgaat,

---

[1]) L. IVERSEN. Die Sterblichkeit unter den Renten-Versicherten. (Vter Internationaler Kongress für Versicherungs-Wissenschaft I) 1906. pag. 290.

[2]) E. SELLING. Ueber eine Formel für empirische Zahlenreihen, insbesondre zum Ersatz der Sterbe- und Invaliditätstafeln. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle. Band 106) 1890. pag. 193.

terwijl alle voor de berekening van lijfrenten nodige sommaties of integraties in gesloten, eenvoudige vorm mogelik zijn. Daar staat tegenover, dat het rekenwerk aanzienlik is. Er mag echter worden opgemerkt, dat hier, evenals bij de aanname van een polynomium van de graad n voor het aantal levenden geen sprake is van een sterftewet, — zoals BRAUN [1]) zegt — doch van een gewone interpolatieformule; SELLING geeft dit dan ook zelf toe. Wetten zoals die van GOMPERTZ en MAKEHAM bevredigen hem echter, ondanks het kleiner aantal konstanten, niet, omdat ze, wanneer ze voor een bepaalde tafel gelden, voor een andere weigeren. Dat ze slechts voor bepaalde perieoden gelden vindt hij geen bezwaar; ook voor zijn formule beveelt hij aan in de kinderleeftijd een term bij te voegen.

Hij past zijn formule toe op de duitse mannensterftetafel (1871—1881), uitgaande van de leeftijden 65, 57, 49, 41, 33, 25 en voor dezelfde leeftijden ook op een valiedentafel van het duitse spoorwegpersoneel, n.l. die, welke bij SPITZER [2]) voorkomt; verder volgens een enigszins gewijzigde metode ook voor de Tafel MI van de 23 duitse maatschappijen.

WAGNER [3]) geeft nog de konstanten aan voor de tafel van BRUNE-FISCHER; WAGNER vermeldt ook — wij hebben het bewuste geschrift zelf niet kunnen raadplegen — dat SELLING in een andere verhandeling [4]) het algemene karakter van zijn formule zo aangeeft, dat de eerste term de voornaamste is en met de leeftijd toeneemt; de tweede negatief is en naar de jonge leeftijden toe in waarde vermindert; de derde een sterk veranderlike korreksieterm is, voor kleine waarden van x te verwaarlozen, voor $x > 40$ echter van grote invloed.

---

[1]) H. BRAUN. Die Gesetze der menschlichen Lebensdauer (Loewenbergs Sammlung versicherungstechnischer Arbeiten II) pag. 69.

[2]) S. SPITZER. Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. 1881. pag. 146.

[3]) K. WAGNER. Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. 1898. pag. 110.

[4]) E. SELLING. Formeln für die Gesetze der Lebensdauer und der Arbeitsfähigkeit. (Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Gesellschaft zu Würzburg). 1890.

Eindelik valt nog te vermelden, dat de zeer weinige schrijvers, die de formule van SELLING noemen, blijkbaar de door LAURENT [1]) aangegevene niet kennen; geen van hen bemerkt altans, dat die van SELLING daarin is om te zetten.

§ 51. De redenering van ANTON [2]) is, dat men door aan te nemen, dat de gehele getallenrij van de sterftetafel voor alle leeftijd in een matematiese formule als funksie van de leeftijd is voor te stellen, aan die getallenrij te veel dwang oplegt en op die wijze de fijnheden, die in de waargenomen sterfte zijn, doet verloren gaan. Als bewijs voor de redenering voert hij echter alleen een enkel voorbeeld aan, o. a. van SELLING, waarin blijkt dat de aangenomen funksie slechts geldt voor een zekere perieode van jaren. Hij wil elke afgeronde waarde bepalen door een parabool, — hij neemt er een van de 2e graad —, die zo goed mogelik aansluit aan een rij waargenomen waarden; hij noemt dit de paraboliese metode. Hij lost daarmede echter niet de opgaaf op op de wijze, zoals hij die vooropstelt; hij neemt n.l. aan, dat de in zijn gehele verloop transendente sterftekromme bestaat uit stukken, die tot een algebraiese kromme behoren; immers elke afzonderlike afgeronde waarde behoort tot een andere algebraiese kromme. Dit wordt zeer goed aangegeven door BRENDEL [3]); deze geeft er dan ook de voorkeur aan een formule te gebruiken zoals die van MAKEHAM.

§ 52. LANDRÉ [4]) stelde een wijziging voor in de formule van MAKEHAM; hij wil n.l. niet de sterfte-intensieteiten maar de

---

[1]) Zie pag. 57.

[2]) L. ANTON. Ueber ein neues Ausgleichungsverfahren bei der Aufstellung von Sterbetafeln (Zeitschrift für Mathematik und Physik. 38er Jahrgang) 1893. pag. 61.

[3]) M. BRENDEL. Die in Deutschland angewandten Methoden zur Ausgleichung von Sterbetafeln (Ver Internationaler Kongress für Versicherungs-Wissenschaft 1906. II), pag. 286.

[4]) C. L. LANDRÉ. Het afronden van sterftetafels. (Handelingen van het Vierde Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres.) 1893. pag. 175.
C. L. LANDRÉ. Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung. 1905. pag. 100.

sterftekansen doen opklimmen zodanig dat de eerste verschillen een meetkundige reeks vormen.

Hij schrijft daarom

$$q_x = a + bc^x.$$

De konstanten a, b en c laten zich op verschillende manieren op sierlike wijze oplossen. De eenvoudiger wijze waarop bij deze formule de sterftekansen zijn te bepalen, deed LANDRÉ deze metode volgen.

Voor de berekening van lijfrenten in matematies juiste vorm, is de formule evenwel niet geschikt. De eigenschappen, die de formule van MAKEHAM bezit, gaan bij LANDRÉ verloren. Deze omstandigheid, gevoegd bij de hier gemaakte aanmerkingen, maken de nieuwe formule niet aanbevelenswaard; wel is het verschil tussen μ_x en q_x voor de meeste leeftijden niet groot, doch gelijkheid tussen de beide grootheden bestaat slechts voor het geval men de formule van de MOIVRE aanneemt, zoals o. a. LANDRÉ [1]) aantoont, doch dan is de onderstelling te onjuist.

De formule van LANDRÉ is intussen wel toegepast, o. a. door MÖLLER bij het afronden van de waarnemingen bij de hamburgse staatsbeambten [2]), door STOLTZ [3]) bij engelse ondervindingstafels en door FREDHOLM bij een deel van de nieuwe zweedse tafels [4]). Inderdaad geeft de formule wel vereenvoudiging bij kwesties van afronding.

§ 53. Er valt ook nog melding te maken van een uitbreiding

---

[1]) LANDRÉ, l. c. pag. 49.

[2]) F. MÖLLER. Die Sterblichkeits-Heiratsverhältnisse der hamburgischen Staatsbeambten. (Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft. IV). 1905. pag. 73.

[3]) G. STOLTZ. A graduation of the British Offices Life Tables. (1863—1893) (VI^{er} Internationaler Kongress für Versicherungs-Wissenschaft II). 1909. pag. 443.

[4]) Undersökning af dödligheten enligt erfarenheten hos sjutton svenska lifförsäkringsbolag. 1915.

Zie ook J. F. STEFFENSEN. The Mortality Experience of 17 Swedish Life Companies. Review. J. I. A. L. 1916. pag. 60.

van de formule van LANDRÉ. VERMEEREN [1]) n.l. schrijft algemener:

$$q_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + mn^x$$

en stelt door proefneming vast, dat vaak

$$q_x = a + bx + cd^x$$

een goede afronding geeft, maar dat

$$q_x = a + bx + cx^2 + de^x$$

zich biezonder daartoe leent.

De bepaling van de 5 konstanten geschiedt op dezelfde wijze, waarop dit gewoonlik bij de formule van MAKEHAM gebeurt; VERMEEREN voert de gehele bewerking in zijn genoemde verhandeling uit.

De bezwaren tegen de formule van LANDRÉ gelden natuurlik des te meer voor de hier beschouwde formule.

Teneinde meer in de gedachtengang van de formule van MAKEHAM te blijven, voert VERMEEREN ook nog [2]) de gehele bewerking uit met behulp van de vergelijking

$$\lg l_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + mn^x,$$

zijnde een algemener vorm van die van MAKEHAM

$$\lg l_x = a + bx + cd^x.$$

Weder door proefneming vindt hij, dat een goede formule is

$$\lg l_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ef^x.$$

Na de bij vroegere wijzigingen van de formule van MAKEHAM gemaakte opmerkingen behoeft het geen afzonderlik betoog, dat ook deze wijziging geen formule oplevert die te verkiezen is boven die van MAKEHAM.

Hij past zijn formules toe, de eerste op de tafel AH_G^M (Oesterr.-ung. Gesellsch. Männer, Gemischte Versich.), de tweede op de tafel AH^{MF} (Oest.-ung. Ges. Gesamtmaterial, Männer und Frauen). Verder past hij ze ook nog toe voor uitgezochte levens.

---

[1]) E. L. VERMEEREN. Ueber eine neue analytische Ausgleichungsmethode von Sterbetafeln. (Oesterreichische Revue XXXVI en Loewenbergs Sammlung versicherungstechnischer Arbeiten I. pag. 41) 1911.

[2]) l. c. pag. 49.

§ 54. Werden tot nu door verschillende schrijvers verschillende sterfteformules aangegeven, die slechts bij uitzondering met elkander enig verband toonden, het is de grote verdienste van QUIQUET, dat hij een algemene sterfteformule heeft afgeleid, waarvan aan de ene zijde een aantal vóór hem bekende formules slechts biezondere gevallen zijn, terwijl aan de andere kant een aantal tot nu toe niet bekende formules te voorschijn komen, die voor toepassing in aanmerking kunnen komen.

QUIQUET [1]) gaat uit van de onderstelling dat de kans, dat een groep van m personen van de leeftijden x, y, $z \ldots . k$, die dezelfde sterftewet volgen [2]), na t jaren nog in leven is in het algemeen een funksie is van t en van de m grootheden x, y, $z \ldots . k$, of van m grootheden, welke funksies zijn van x, y, $z \ldots . k$. Hij stelt nu de vraag, hoe de sterftewet zou moeten zijn, opdat de bedoelde kans een funksie zij van t en van een aantal van n grootheden $\alpha_1\ \beta_1 \ldots . \varkappa$, waarbij $n < m$.

Daar de bedoelde kans gelijk is aan

$$ {}_tp_{xyz\ldots k} = \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+t}}{l_y} \cdot \frac{l_{z+t}}{l_z} \ldots . \frac{l_{k+t}}{l_k}, $$

wordt de vergelijking, die moet worden opgelost

$$ \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+t}}{l_y} \cdot \frac{l_{z+t}}{l_z} \ldots . \frac{l_{k+t}}{l_k} = \mathrm{G}\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots . \varkappa,\ t). $$

Door logaritmies differentieëeren naar t krijgt men

$$ \frac{l'_{x+t}}{l_{x+t}} + \frac{l'_{y+t}}{l_{y+t}} + \frac{l'_{z+t}}{l_{z+t}} + \ldots . \frac{l'_{k+t}}{l_{k+t}} = \frac{\mathrm{G}'\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots . \varkappa,\ t)}{\mathrm{G}\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots . \varkappa,\ t)} $$

of

$$ \mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \mu_{z+t} \ldots . + \mu_{k+t} = \mathrm{F}\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots . \varkappa,\ t), $$

wanneer men $\frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{G}} = -\mathrm{F}$ stelt.

Daar deze betrekking moet gelden voor elke waarde van t kan men de n opvolgende afgeleiden naar t van beide leden gelijk

---

[1]) A. QUIQUET. Représentation algébrique des tables de survie B. A. F. IV. 1893. pag. 97.

[2]) In Proceedings of the Fourth International Congress of Actuaries. 1904. Vol. I. pag. 384 bewijst QUIQUET, dat deze beperking niet nodig is; het bewijs verloopt evenals het hier aangegevene.

stellen; stelt men daarna in alle vergelijkingen $t = 0$, dan verkrijgt men het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} \mu_x + \mu_y + \mu_z + \ldots + \mu_k = F_0 \\ \mu'_x + \mu'_y + \mu'_z + \ldots + \mu'_k = F_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mu_x^{(n)} + \mu_y^{(n)} + \mu_z^{(n)} + \ldots + \mu_k^{(n)} = F_n \end{array}\right\}$$

De $n+1$ funksies $F_0, F_1, \ldots F_n$ hangen volgens onderstelling slechts af van de n veranderliken $\alpha, \beta, \gamma \ldots \varkappa$; er is dus een betrekking tussen de linkerleden van het stel vergelijkingen. Deze leden bevatten $n+1$ funksies van m van elkaar onafhankelike veranderliken $x, y, z \ldots k$. Wil de bedoelde betrekking bestaan, dan is daartoe volgens Jacobi noodzakelik en voldoende, dat de funksieonaaldetermienanten van de $n+1$ funksies met betrekking tot $n+1$ uit de m veranderliken willekeurig gekozen veranderliken, gelijk 0 zijn.

Een van deze determienanten is

$$\left|\begin{array}{cccc} \mu'_x & \mu'_y & \ldots & \mu'_{n+1} \\ \mu''_x & \mu''_y & \ldots & \mu''_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_x^{(n+1)} & \mu_y^{(n+1)} & \ldots & \mu_{n+1}^{(n+1)} \end{array}\right| = 0.$$

Wil deze determienant iedentiek nul zijn, dan is daartoe nodig en voldoende, dat er tussen de elementen van elke rij of kolom eenzelfde lieneaire, homogene betrekking bestaat. Een van de zo ontstaande vergelijkingen is

$$A_0 \mu'_x + A_1 \mu''_x + \ldots + A_n \mu_x^{(n+1)} = 0,$$

waarbij $A_0, A_1 \ldots A_n$ onafhankelik zijn van x en niet alle gelijk 0.

Stelt men $\mu'_x = y$, dan krijgt men de vergelijking

$$A_0 y + A_1 y' + A_2 y'' + \ldots + A_n y^{(n)} = 0, \quad \ldots \quad (1)$$

een lieneaire differentieaalvergelijking van de n^e orde met konstante koëffiesieënten zonder tweede lid. Noemt men de wortels van de vergelijking

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots + A_n r^n = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$r_1, r_2 \ldots . r_n$, dan is de algemene integraal van de genoemde differentieaalvergelijking

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots . + C_n e^{r_n x}, \quad . \quad . \quad . \quad (3)\,^{1})$$

wanneer alle n wortels verschillend zijn. Zijn er meervoudige wortels, zó dat bijv. r_i een λ_i-voudige wortel is, dan komt y in de vorm

$$y = \Sigma e^{r_i x}\, \varphi_i(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

te staan, waarbij het Σ teken zich uitstrekt over alle verschillende wortels van de vergelijking (2); $\varphi_i(x)$ is een veelterm van de graad $\lambda_i - 1$; de grootheden λ zijn verbonden door de betrekking

$$\Sigma\lambda = n.$$

§ 55. Het geval dat de vergelijking (2) komplexe wortels heeft, kan buiten beschouwing blijven, omdat tot heden de praktijk daartoe geen aanleiding heeft gegeven.

Uit (1) volgt:

$$\mu_x = \int \Sigma e^{r_i x}\, \varphi_i(x)\, dx = \Sigma \int e^{r_i x}\, \varphi_i(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

We hebben dus te beschouwen de integraal

$$\int e^{r_i x}\, \varphi_i(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Voor het geval $r_i \gtrless 0$ vindt men door herhaalde integratie de waarde

$$K - e^{r_i x} f_i(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarbij $f_i(x)$ een veelterm is van dezelfde graad als $\varphi_i(x)$, dus van de graad $\lambda_i - 1$. Het minteeken dient hier slechts om in de uitkomst voor l_x een plusteeken te krijgen.

Men heeft dus

$$\mu_x = - B - \Sigma\, e^{r_i x} f_i(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

dus

$$\frac{d \lg l_x}{dx} = B + \Sigma\, e^{r_i x} f_i(x),$$

waaruit

$$\lg l_x = A + Bx + \Sigma\, e^{r_i x} g_i(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

---

[1]) Zie bijv. A. R. Forsyth. A treatise on differential equations. 1903. pag. 64.

Hierbij is, om dezelfde reden als hierboven, $g_i(x)$ een veelterm van dezelfde graad als $f_i(x)$, dus ook van de graad $\lambda_i - 1$.

Uit (9) volgt nu verder

$$l_x = e^{A + Bx + \Sigma e^{r_i x} g_i(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Voor het geval echter $r_i = 0$, gaat integraal (6) over in

$$\int \varphi_i dx = C + f_i(x),$$

waarbij de graad van de veelterm $f_i(x)$, dus ook de graad van μ_x één hoger is dan die van $\varphi_i(x)$, dus gelijk aan λ_i.

Dezelfde redenering volgend vindt men, dat in lg l_x een veelterm $g_i(x)$ van de graad $\lambda_i + 1$ voorkomt.

Het geval dat $r_i = 0$ kan echter, mits men de opmerking omtrent de graad slechts in acht neemt, toch worden geschreven in de gedaante (10).

§ 56. De formule (10) voor l_x noemt QUIQUET overlevingsfunksie van de n^e orde, naar de orde van de differentieaalvergelijking.

Voor kleine waarden van n geeft de formule van QUIQUET een aantal vroeger reeds bekende formules terug.

Voor $n = 0$ gaat (1) van pag. 73 over in

$$y = 0,$$

dus

$$\mu_x = \text{konstant} = -B,$$

waaruit

$$l_x = e^{A + Bx},$$

zijnde de eerste formule van DORMOY [1]).

Voor $n = 1$ gaat (1) over in

$$A_0 + A_1 r = 0.$$

Is hierin de wortel $r = 0$, dus ook $A_0 = 0$, dan wordt (3) van pag. 73

$$y = C_1,$$

dus

$$\mu_x = -B + C_1 x$$

waaruit

$$l_x = e^{A + Bx + Cx^2},$$

zijnde, voor $B = 0$ de tweede formule van DORMOY [1]).

Is de wortel r van 0 verschillend, dan geeft (3) van pag. 73

$$y = C_1 e^{rx},$$

---

[1]) Zie pag. 60.

dus $$\mu_x = -B + \frac{C_1}{r} e^{rx},$$

waaruit $$l_x = e^{A + Bx + Ce^{rx}},$$

zijnde de Wet van MAKEHAM [1]); voor $B = 0$ die van GOMPERTZ [2]).

Voor $n = 2$ gaat (1) over in

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 = 0.$$

Hier zijn 4 gevallen te onderscheiden ten opzichte van de wortels r_1 en r_2:

1e. $$r_1 = r_2 = 0.$$

Dan is in (4) de veelterm $\varphi_i(x)$ van de 1e graad ($\lambda_i = 2$), dus wordt

$$y = C_1 + C_2 x,$$

dus $$\mu_x = -B + C_1 x + {}^1/_2 C_2 x^2,$$

waaruit $$l_x = e^{A + Bx + Cx^2 + Dx^3},$$

zijnde een tot dusver niet bestaande sterfteformule.

2e. $$r_1 = 0;\ r_2 \gtrless 0.$$

Volgens (3) is nu

$$y = C_1 + C_2 e^{rx},$$

dus $$\mu_x = -B + C_1 x + \frac{C_2}{r} e^{rx},$$

waaruit $$l_x = e^{A + Bx + Cx^2 + De^{rx}},$$

zijnde de tweede uitbreiding van de Wet van MAKEHAM [3]).

3e. $$r_1 = r_2 \gtrless 0.$$

Nu geeft (4)

$$y = e^{rx}(C_1 + C_2 x),$$

dus

$$\mu_x = -B + \left(\frac{C_1}{r} - \frac{C_2}{r^2}\right) e^{rx} + \frac{C_2}{r} x e^{rx},$$

waaruit $$l_x = e^{A + Bx + (C + Dx)e^{rx}},$$

zijnde een nieuwe formule.

4e. $$r_1 \gtrless 0 \qquad r_2 \gtrless 0.$$

---

[1]) Zie pag. 48.
[2]) Zie pag. 32.
[3]) Zie pag. 52.

Dit meest algemene geval levert

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

dus

$$\mu_x = -B + \frac{C_1}{r_1} e^{r_1 x} + \frac{C_2}{r_2} e^{r_2 x},$$

waaruit

$$l_x = e^{A + Bx + Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}},$$

zijnde de formule van LAZARUS [1]).

§ 57. Voor $n = 3$ heeft men naar de aard van de wortels in de vergelijking

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 = 0$$

7 gevallen te onderscheiden. Het eenvoudigste hiervan is, dat de 3 wortels r_1, r_2 en r_3 verschillend zijn en niet gelijk aan 0. Men heeft dan

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x},$$

dus

$$\mu_x = \frac{C_1}{r_1} e^{r_1 x} + \frac{C_2}{r_2} e^{r_2 x} + \frac{C_3}{r_3} e^{r_3 x},$$

waaruit

$$l_x = e^{A + Bx + Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} + Ee^{r_3 x}}.$$

Neemt men nog het geval, dat er 3 gelijke wortels 0 zijn, dan is in (4) van pag. 74 $\varphi_i(x)$ een veelterm van de 2e graad en wordt

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2,$$

dus

$$\mu_x = -B + C_1 x + {}^1/_2 C_2 x^2 + {}^1/_3 C_3 x^3,$$

waaruit

$$l_x = e^{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}.$$

In het biezonder nemen we nog het geval, dat er één tweevoudige, van nul verschillende wortel is; dan wordt

$$y = C_1 e^{r_1 x} + e^{r_2 x}(C_2 + C_3 x),$$

waaruit

$$\mu_x = B + Ce^{r_1 x} + e^{r_2 x}(D + Ex)$$

en dit is de formule van OPPERMANN [2]). Blijkbaar heeft QUIQUET deze formule niet gekend; hij verzuimt tenminste er melding van te maken.

---

[1]) Zie pag. 51.

[2]) Zie pag. 66.

In het meest algemene geval, bij de n^e orde, zijn de uiterste gevallen dat, waarbij alle n wortels gelijk 0 zijn, waardoor

$$y = C_1 + C_2 x + \ldots . + C_n x^{n-1},$$

dus $$l_x = c^{A + Bx + Cx^2 + \ldots . + Mx^{n+1}},$$

en dat, waarbij alle wortels ongelijk en van 0 verschillend zijn, zodat

$$y = \Sigma C_1 e^{r_1 x},$$

waaruit $$l_x = e^{A + Bx + Ce^{r_1 x} + \ldots . Me^{r_n x}},$$

zijnde de formule van AMTHOR [1]). QUIQUET heeft vermoedelik het werk van AMTHOR niet gekend; hij schrijft deze formule toe aan JANSE. Deze vermeldt de formule ook [2]) zonder AMTHOR te noemen, was dus waarschijnlik met het werk van AMTHOR ook onbekend.

§ 58. De belangrijke onderzoekingen van QUIQUET hebben, behalve de toepassingen die er van te maken zijn bij de berekening van lijfrenten op meer hoofden, dit voorname belang, dat het mogelik is om door de berekeningen, die men met de waargenomen getallen uitvoert, zelf te doen beslissen welke sterfteformule het meest geschikt is om in het betrokken geval te worden gebruikt, zoals door QUIQUET nader aangetoond wordt.

Het werk van QUIQUET is zo volledig, dat men van diegenen, die na hem nog gebruik blijven maken van sterfteformules, welke niet tot zijn algemene geval behoren, onbekendheid met zijn onderzoekingen moet onderstellen. Evenzeer geldt dit voor hen, die nog nieuwe formules zouden willen bedenken, welke niet in zijn sisteem passen; de vele voordelen die de formule van QUIQUET oplevert zouden daarbij verloren gaan.

§ 59 In dezelfde tijd als die, waarin QUIQUET zijn merkwaardige ontdekkingen bekend maakte, kwam POTERIN DU MOTEL met een zekere wijziging van de wet van MAKEHAM, om te trachten deze geschikt te maken voor uitgezochte tafels (tables

---

[1]) Zie pag. 51.

[2]) J. P. JANSE. Over de constructie en afronding van sterftetafels. 1885. pag. 79.

par âges à l'entrée). Hij beredeneert [1]), dat wanneer de wet van MAKEHAM

$$\mu_x = a + bc^x$$

of

$$l_x = ks^x g^{c^x}$$

moet gelden voor uitgezochte tafels, de grootheden a, b, k, s en g niet alle konstant zullen zijn, maar dat er onder zullen zijn, die funksies zijn van de leeftijd bij toetreding z; de vraag is welke dat zijn. De grootheid a, die bij MAKEHAM onafhankelik van x is en slechts de invloed van het toeval aanwijst, neemt POTERIN DU MOTEL ook onafhankelik van z, hoewel we hier kunnen opmerken, dat die aanname volstrekt niet noodzakelik is. De term $bc^x = e^{\alpha x + \beta}$, afkomstig van de bekende onderstelling voor het tweede deel van de sterfte-intensieteit [2]) dat

$$d\varphi = \alpha\varphi\, dx,$$

waarbij α onafhankelik van x is, doet hem aannemen, dat a ook onafhankelik van z is; ook dit is echter volstrekt niet noodzakelik. Slechts de grootheid b kan dus bij hem in μ_x een funksie van z worden. Nu moet voor een bepaalde waarde van x de waarde van μ_x bij toename van z dalen; hij neemt een exponentieaalfunksie door te stellen:

$$b = df^z,$$

waarbij dan $f < 1$ moet zijn. Nu wordt

$$\mu_x = a + df^z c^x.$$

Daar voor $x = z$

$$\mu_z = a + d(fc)^z$$

en dit met z moet toenemen, moet $fc > 1$ zijn, dus $f > \frac{1}{c}$.

Uit de waarde voor μ_x krijgt men door integratie

$$l_x = e^{a_1 - ax - \frac{df^z}{\lg c} c^x},$$

of, als $e^{a_1} = h$, $e^{-a} = s$ en $-\frac{df^z}{\lg c} = g$,

$$l_x = hs^x g^{c^x},$$

dat is dus de vorm van de wet van MAKEHAM, maar zo dat $g = \varphi(z)$.

---

[1]) H. POTERIN DU MOTEL. Usage et ajustement des tables de mortalité par âges à l'entrée B. A. F. 1893. pag. 208.

[2]) Zie pag. 31.

Men kan ook, door te stellen

$$e^{-\frac{d}{\lg c}} = \sigma \text{ en } \frac{\lg f}{\lg c} = \tau,$$

schrijven

$$l_x = hs^x \sigma^{c^x - \tau z},$$

waarbij nu de grootheden s, c en τ onafhankelik van z zijn.

De koëffiesieënt h bepaalt het aantal levenden bij het begin van de tafel; h kan naar verkiezing konstant of als funksie van z worden gekozen. Neemt men h konstant, dan wordt het aantal levenden bij het begin van de tafel een funksie van z, want voor $x = z$ wordt

$$l_z = hs^z \sigma^{c^{(1-\tau)z}}$$

en dus voor elke tafel anders. Wil men, dat de tafel bij elke leeftijd van toetreding met een evengroot aantal levenden begint, bijvoorbeeld 100.000, dan wordt h een funksie van z; immers dan is

$$100.000 = hs^z \sigma^{c^{(1-\tau)z}},$$

dus

$$h = 100.000\, s^{-z} \sigma^{c^{(\tau-1)z}},$$

zodat men krijgt

$$l_x = 100.000\, s^{x-z} \sigma^{c^x - c^z}.$$

MARIE [1]) schrijft de formule in de gedaante

$$l_x = hs^{x-\varphi(z)} \sigma^{c^x - \varphi(z)}.$$

§ 60. POTERIN DU MOTEL geeft zijn formule slechts als een poging om in de vermelde richting iets te ondernemen; hij is zelf van het onvolmaakte ervan overtuigd [2]). Hij heeft, zeker wel o.a. wegens gebrek aan voldoend waarnemingsmaterieaal, zijn formule niet getoetst aan de waarneming. Dit is voor MARIE [3]) reden om, met alle waardering voor de teoretiese zijde van de formule, er geen absoluut vertrouwen in te stellen. MARIE ver-

---

[1]) L. MARIE. Les surfaces et les courbes de mortalité. (Documents du Premier Congrès International d'Actuaires 1896). pag. 10.

[2]) POTERIN DU MOTEL l. c. pag. 221.

[3]) MARIE l. c. pag. 5.

meldt nog [1]), dat RAFFMANN met dezelfde bedoeling als POTERIN DU MOTEL de formule van MAKEHAM als volgt wijzigde:

$$l_x = ks^x g^{c^x} \epsilon^{1/2(x-z)\mu_z}$$

RAFFMANN zelf deelde op het 1e Kongres van Aktuarissen mede, dat hij deze formule heeft geverifieëerd met behulp van de tafel van de 23 duitse maatschappijen; hoe hij de formule heeft gevonden deelde hij niet mede.

Het eigenaardige van de formule van RAFFMANN is, dat daarbij de sterfte-intensieteit μ_x de vorm

$$\mu_x = -\log s - c^x \log c \log g - {}^1/_2 \mu_z$$
$$= a + bc^x$$

krijgt, zijnde ook de vorm van de formule voor μ_x volgens MAKEHAM. Maar nog eigenaardiger is, dat, waar POTERIN DU MOTEL a als konstant aannam, die grootheid bij RAFFMANN juist de enige is, die van z afhangt. Hoewel er geen reden is om een van beide opvattingen bepaald als foutief aan te merken, neigen we het meest over tot het standpunt van POTERIN DU MOTEL, omdat de grootheid a in de oorspronkelike formule de werking van het toeval uitdrukt en dit bij uitgezochte tafels kan blijven doen.

§ 61. De formule van MAKEHAM bezit de bekende eigenschap van de „uniform seniority", volgens welke het mogelik is bij verzekeringswaarden op twee hoofden ongelijke leeftijden te vervangen door gelijke [2]). Deze eigenschap blijft gelden voor de formule, zoals die door POTERIN DU MOTEL is gewijzigd voor uitzochte levens; het bewijs verloopt op dezelfde wijze als bij de formule van MAKEHAM en behoeft hier niet te worden gegeven.

Eveneens blijft de eigenschap gelden voor een andere gewijzigde formule van MAKEHAM, namelik die van AUTERBE [3]). Deze past de formule toe gedurende de perieode van de invloed van de seleksie.

---

[1]) MARIE l. c. pag. P V 49; zie ook B. A. F. V. 1895. pag. 111.

[2]) Zie bijv. G. KING. Text-Book II. 1887. pag. 206.

[3]) AUTERBE. Essai d'ajustement par age à l'entrée des tables H et H + F 1900. B. A. F. XXII. 1912. pag. 60.

Stelt men de levenskans op $x+t$ jaar bij toetreding op x jaar voor door $p_{x.t}$ (niet te verwarren met ${}_tp_x$ en met p_{x+t}), dan schrijft AUTERBE

$$\lg p_{x.t} = A + BC^{x+t}.$$

Ter bepaling van A, B en C redeneert hij als volgt:

Stel dat tengevolge van de seleksie een x-jarige bij toetreding als $x-m$-jarige moet worden gerekend bij een algemene sterftetafel, dan is

$$A + BC^x = a + bc^{x-m}.$$

Bedraagt de duur van de seleksie n jaar, dan is

$$A + BC^{x+n} = a + bc^{x+n}.$$

Als derde vergelijking neemt AUTERBE

$$BC^{x+n} \lg C = bc^{x+n} \lg c,$$

welke uitdrukt, dat de krommen

$$y = A + BC^x \quad \text{en} \quad y = a + bc^x$$

in hun ontmoetingspunt dezelfde raaklijn hebben.

Neemt men voor de derde vergelijking bij benadering

$$BC^{x+n} = bc^{x+n},$$

dan vindt men

$$A = a \quad B = bc^{-m\left(1+\frac{x}{n}\right)} \qquad C = c^{1+\frac{m}{n}},$$

waardoor

$$\lg p_{x.t} = a + bc^{x+t\left(1+\frac{m}{n}\right)-m}$$

of, als

$$1 + \frac{m}{n} = \alpha \quad \text{en} \quad -m = \beta,$$

$$\lg p_{x.t} = a + bc^{x+\alpha t+\beta} \qquad (0 \leqq t \leqq m).$$

Met deze formule is het mogelik een groep van n personen, toegetreden op leeftijden x_0, $x_1 \ldots . x_{n-1}$ en sedert t_0, $t_1 \ldots . t_{n-1}$ jaren te vervangen door een andere groep van n personen met gelijke x en t; ook hier verloopt het bewijs gelijk dat voor de „uniform seniority" bij MAKEHAM.

§ 62. In Engeland treft men merkwaardig genoeg heel weinig pogingen aan om de wet van MAKEHAM te wijzigen teneinde op

---

1) l. c. pag. 67.

die wijze dienst te doen voor uitgezochte tafels. Alleen HARDY gaf bij een diskussie over de toepassing van de wet van MAKEHAM [1]) als zijn mening te kennen, dat voor het beoogde doel slechts nodig zou zijn termen toe te voegen, die betrekking hebben op het aantal jaren dat de verzekering heeft bestaan.

Als voorbeeld noemt hij dan de formule

$$\mu_{[x]+t} = A + Hx + Bc^{x+t} + \varphi(t) + \psi(t) \cdot c^{x+t}.$$

Gemakkelik valt aan te tonen, dat ook bij deze formule de bekende wet van de „uniform seniority" behouden blijft. Hij vond met de volgens deze formule ruw afgeronde tafel van SPRAGUE jaarpremies voor verzekeringen, die voldoende overeenkwamen met de uitkomsten, welke SPRAGUE vond met behulp van die uitgezochte tafels zelf.

Later behandelde HARDY de kwestie nog nader [2]) bij de bespreking van de franse ondervindingstafels voor uitgezochte levens. Daar deelt hij mede, dat hij de hierboven bedoelde bewerkingen ook heeft uitgevoerd met behulp van de formule

$$\mu_{[x]+t} = (A + Hx + BC^x) - \varphi(t)\,(A + Bc^x),$$

waarbij de vorm binnen de eerste haakjes bij benadering aangeeft de sterfte volgens de $H^{M(5)}$ tafel; voor de waarde van $\varphi(t)$ is genomen: $\varphi(0) = {}^{35}/_{70}$; $\varphi(1) = {}^{20}/_{70}$; $\varphi(2) = {}^{10}/_{70}$; $\varphi(3) = {}^{4}/_{70}$; $\varphi(4) = {}^{1}/_{70}$ en $\varphi(5+y) = 0$ voor alle gehele waarden van y van 0 af.

§ 63. Verschillende schrijvers gebruiken in navolging van HARDY uitdrukkingen, overeenkomende met de formule van MAKEHAM. Men neemt

$$\mu_{[x]+t} = A_t + B_t c^{x+t}$$

of wel

$$-\lg {}_tp_x = \alpha_t + \beta_t \gamma^{x+t},$$

waarbij A, B, α, β funksies van de leeftijd van toetreding zijn,

---

[1]) E. COLENSO. On the Application of MAKEHAM's Modification of GOMPERTZ' Expression for the Law of Mortality to the Practical Calculation of the Values of Survivorship Benefits. J. I. A. XXXI. 1894. pag. 359.

[2]) G. F. HARDY. Mortality Experience of Assured Lives and Annuitants in France. J. I. A. XXXIII. 1898. pag. 493.

c en γ in overeenstemming met de wet van MAKEHAM konstant. Voor die funksies treft men verschillende uitdrukkingen aan. Een ernstige kritiek op de metode van HARDY levert PATZIG[1]). Deze meent, door de funksies α_t en β_t eenvoudig te kiezen en te schrijven

$$-\log {}_tp_x = (k_0 + k_1 t + k_2 t^2) + (\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2)\, 10^{\gamma x}$$

beter werk te leveren. Zijn afronding is echter een mislukking, zooals o.a. door MÖLLER[2]) uitvoerig met sijfers is aangetoond.

FREDHOLM[3]) heeft nog kort geleden een formule voorgesteld, welke neerkomt op

$$\mu_{[x-t]+t} = a_0 - a_1 \varkappa^t - a_2 \lambda^t + (b_0 - b_1 \varkappa^t - b_2 \lambda^t) c.$$

Het aantal konstanten wordt groot; het is de vraag of er wel veel van de formule te verwachten is.

We kunnen hier nog vermelden, dat de gewijzigde formule van MAKEHAM ook onlangs nog is toegepast bij afleiding van een sterftetafel op grond van waarnemingen bij verzekerden zonder geneeskundig onderzoek[4]).

§ 64. Inzake de formules bij uitgezochte tafels blijkt dus het laatste woord nog lang niet gesproken. Terwijl de wet van MAKEHAM zich terecht mag verheugen in veelvuldige toepassing bij gemengde tafels, kan men nog niet met voldoende zekerheid zeggen, dat er een met de wet van MAKEHAM overeenstemmende formule is, die bij uitgezochte tafels eenzelfde dienst zal doen. Wel is begrijpelik dat men bij de onderzoekingen op dit gebied sterk op de wet van MAKEHAM let.

Met de invoering van de tafels voor uitgezochte levens betreedt men het terrein van funksies met 3 veranderliken x, t en n. Het

---

[1]) V. PATZIG. Die exakte Ausgleichung der englischen Selekttafeln (Zeitschrift für die gesammte Versicherungswissenschaft. VIII). 1907. pag. 320).

[2]) F. MÖLLER. Ausgleichung und Warscheinlichkeitstheorie. (Ehrenzweigs Assekuranz Jahrbuch. XXXI) 1910. pag. 181.

[3]) Zie pag. 70, noot 4.

[4]) Undersökning av dödligheten bland karensförsäkrade. Enligt erfarenhet hos svenska livförsäkringsbolag. 1917.

verband tussen deze 3 grootheden is klaarblijkelik kontienu; men kan dus het verloop van het aantal levenden (maar ook de sterfte-intensieteit, de lijfrente, kortom elke daarmede samenhangende grootheid), voorstellen door een kontienu oppervlak, waarvan elk punt wordt bepaald door de waarden x, t en n. Dit oppervlak kan ook worden beschouwd als te zijn de meetkundige plaats van een sterftekromme voor een van de leeftijden bij toetreding, wanneer deze kromme zich beweegt evenwijdig aan zichzelf en aan het vlak XOY, terwijl de kromme zich tevens vervormt om achtereenvolgens samen te vallen met alle sterftekrommen van dezelfde aard. Enkele algemene opmerkingen over de oppervlakken voor het aantal levenden en voor de sterfte-intensieteit behandelt MARIE [1]). Die opmerkingen gaan echter niet verder dan de bepaling van de grenzen binnen welke die oppervlakken liggen opgesloten. Toepassing schijnt voorlopig uitgesloten; de uitkomsten van waarnemingen op het gebied van de sterfte onder uitgezochte levens zijn nog te onvolledig en te weinig in omvang om de vorm van een dergelijk oppervlak te bepalen. En bovendien, de bekende veelal ingewikkelde en moeielik hanteerbare vormen, die men reeds voor de sterftekrommen kent, doen voor de eventueel af te leiden vergelijking van een sterfte-oppervlak voorlopig weinig beters verwachten. In teorie is het einde nog niet bereikt; wanneer men nog andere punten van gewicht, die op de sterfte invloed hebben, als het beroep, het verblijf in ongezonde streken, als veranderliken in de vergelijking wil opnemen, betreedt men het terrein van de meerdiemensieonale meetkunde. Het zal echter nog wel lang duren eer men de grens van dit terrein in het gezicht zal krijgen.

§ 65. THIELE [2]) bleef steeds zijn pogingen voortzetten om een formule te krijgen, die voor het gehele leven geldig is. De omstandigheid, dat de sterfte in de oudere jaren voortdurend bij de door de wet van MAKEHAM bepaalde waarden achterblijft,

[1]) L. MARIE. Les surfaces et les courbes de mortalité (Documents du Premier Congrès International d'Actuaires. 1896). pag. 8.

[2]) Zie pag. 56.

deed hem proberen deze wet te wijzigen. Hij nam nu overal in plaats van x de vorm $x^{1/2}$, waarschijnlik wel in aansluiting met OPPERMANN [1]). Een veelterm volgens machten van $x^{1/2}$ zou echter te veel konstanten ter berekening geven, daarom voert hij ook exponentieaaltermen in; de 2 konstanten in zulk een term vervangen een veel groter aantal koëffiesieënten in de machtreeks. Ter rechtvaardiging van deze handelwijze beroept hij zich op GOMPERTZ en MAKEHAM, die hetzelfde deden. Zo komt hij [2]) tot de formule van de gedaante

$$\lg l_x = f_n(x^{1/2}) + \Sigma ab^{x^{1/2}}.$$

Voor mannentafels is gewoonlik 1 exponentieaalterm voldoende, terwijl voor vrouwentafels meestal 3 van die termen nodig zijn en wel zo, dat a_2 en a_3 en ook b_2 en b_3 toegevoegd komplexe grootheden zijn, waardoor ze samengaan tot een term

$$ab^{1/2} \cos (B + Cx^{1/2}).$$

De Hafnia-tafel is door THIELE met behulp van deze formule afgerond, echter ten koste van zeer langdradige berekeningen. Wel is de overeenstemming tussen berekening en waarneming vrij goed; de vele voordelen, die de eigenschappen van de formule van MAKEHAM aanbieden, gaan echter verloren; daarom is het gebruik van de hier genoemde formule beperkt.

§ 66. Sedert 1901 wordt bij de preuszische Rentenversicherungsanstalt bij de berekening van lijfrenten uitgegaan van een formule, die een uitbreiding is van die van MAKEHAM teneinde die voor het gehele leven te doen gelden. Men neemt [3])

$$\lg p_x = \alpha + \beta_0 c_0^{\,x} + \beta_1 c_1^{\,x} + \beta_2 c_2^{\,(x-12,5)^4}.$$

Voor mannen van $x = 30$ af, voor vrouwen van $x = 33$ af, vallen de laatste twee termen weg en geldt dus de formule van MAKEHAM.

---

[1]) Zie pag. 54.

[2]) T. N. THIELE. Adjustment of Tables of Mortality. (Aktuaren, Heft I). 1904. pag. 1.

[3]) P. HARTUNG. Sterblichkeitstafeln für Rentenversicherungen. (Ver Internationaler Kongress für Versicherungswissenschaft I) 1906. pag. 311.

Een andere uitbreiding aan de wet van MAKEHAM gaf PEEK[1]); deze vermeldt, dat hij bij de berekening en afronding van de 2e sterftetafel voor nederlandse rijksambtenaren heeft toepast

$$p_x = l - sm^{q^x} + ae^{-b(x-c)^2}.$$

Een andere uitbreiding aan de wet van MAKEHAM gaf RAZOUS[2]); deze onderzocht de sterfte onder personen, die een gevaarlik beroep uitoefenen. Hij stelt als hypotese, — volgens hem is deze tot op heden onmogelik te verifieëeren en we menen, dat daarmede aan de betekenis wel veel is ontnomen — dat de vermindering in levenskracht tengevolge van het beroep evenredig is met een zekere macht van de tijd, die verlopen is sedert de persoon het gevaarlike beroep begon uit te oefenen. De jongste leeftijd waarop iemand begint te arbeiden stellende op 13 jaar, breidt hij de formule van MAKEHAM uit tot

$$\mu_x = a + bc^x + m(x-13)^n.$$

Deze formule zou volgens hem de sterfte voorstellen onder glasblazers, maar ook te gebruiken zijn voor elk gevaarlik beroep.

Uit μ_x volgt, dat hier

$$l_x = ke^{-ax} e^{-\frac{bc^x}{\lg c}} e^{\frac{-m(x-13)^{n+1}}{n+1}}$$

of

$$l_x = ks^x g^{c^x} \gamma^{(x-13)^{n+1}},$$

als

$$e^{-a} = s$$

$$e^{-\frac{b}{\lg c}} = g$$

$$e^{-\frac{m}{n+1}} = \gamma.$$

---

[1]) J. H. PEEK. Die neuesten Sterblichkeitstafeln des Pensionfonds für Wittwen und Waisen niederländischer Staatsbeamten. (Archief voor de Verzekeringswetenschap. VI). 1903. pag. 494.

[2]) P. RAZOUS. De la mortalité et la morbidité des professions dangereuses. B. A. F. XIV. 1904. pag. 72.

HOOFDSTUK V.

OVER FORMULES VOOR INVALIEDIETEIT EN ZIEKTE.

§ 67. Ook voor andere dekremententafels heeft men getracht een analietiese formule te vinden, die het verloop aangeeft.

Nadat WITTSTEIN, WIEGAND en vooral HEYM, de invaliedieteitsverzekering hadden getrokken binnen de kring van de verzekeringstechniek en hadden getracht voor deze tak van verzekering een vaste, op waarnemingen rustende grondslag te vinden, werden ook reeds in het begin, toen het waarnemingsmaterieaal nog weinig omvangrijk was, pogingen in het werk gesteld om een „invaliedieteitswet" te vinden. Het is te begrijpen, dat met de uitbreiding en verbetering van de waarnemingen die eerste formules spoedig onhoudbaar bleken.

Zo vinden we vermeld, o.a. door BLASCHKE [1]) en door BRAUN [2]), dat voor leeftijden van 20 jaar af HEYM voor de invaliedieteitskans i in verband met de leeftijd schreef

$$i_{x+20} = 0{,}001 + \frac{1}{50.000}\, s^x,$$

waarbij s een konstante is, die bepaald wordt uit

$$\frac{1}{50.000}\, s^{59} = 1,$$

zodat

$$i_{x+20} = 0{,}001 + 50.000^{\frac{x}{59}-1}.$$

BRAUN heeft, zoals we hebben kunnen nagaan, de formule aan BLASCHKE ontleend; het oorspronkelike werk van HEYM hebben we niet kunnen vinden. Wanneer BLASCHKE inderdaad

---

[1]) E. BLASCHKE. Vorlesungen über Mathematische Statistik. 1906. pag. 159.

[2]) H. BRAUN. Die Gesetze der menschlichen Lebensdauer. (Loewenbergs Sammlung versicherungstechnischer Arbeiten. II). 1912. pag. 67.

HEYM juist aanhaalt, volgt daaruit dat de formule, die HEYM gaf, onjuist is, altans voor de leeftijd van 79 jaar en daarboven. Immers stelt men $x \geqq 59$, dan vindt men

$$i_{79} = 1{,}001$$

en dat kan niet.

BEHM [1]) nam aan, dat de invaliedieteitskans zich van 20 tot 80 jaar om de 5 jaar verdubbelt, zodat

$$i_x = 2^{\frac{x-20}{5}} \cdot i_{20}$$

en bepaalt uit de waarnemingen bij de Knappschaftskassen, dat

$$i_{20} = 0{,}00019036.$$

Deze formule bepaalt de invaliedieteitskans als funksie alleen van de leeftijd. Er is wel reden om de toevallige oorzaak van invaliedieteit als een konstante in de formule op te nemen; daarom schrijft WEBER [2])

$$i_x = \alpha + \beta\gamma^{x-n},$$

dus juist de vorm van de sterfteformule van MAKEHAM; ook de redenering om er toe te komen is dezelfde.

Voor de tafel van ZEUNER vindt hij ter bepaling van α, β en γ, uitgaande van $n = 20$ jaar, door van i_{20}, i_{40} en i_{60} gebruik te maken

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0{,}0003 \\ \alpha + \beta\gamma^{20} &= 0{,}0030 \\ \alpha + \beta\gamma^{40} &= 0{,}0500, \end{aligned}$$

waaruit

$$i_x = 0{,}000135 + 0{,}000165 \,.\, 1{,}15355^{x-20}.$$

§ 68. Kent men de sterftewet voor valieden en de invaliedieteitsformule, dan is daaruit de vergelijking voor het aantal valieden l_x^{aa} af te leiden. Noemt men de sterfte-intensieteit voor valieden μ_x^{aa}, de invaliedieteits-intensieteit v_x, dan is

$$dl_x^{aa} = -l_x^{aa}(\mu_x^{aa} + v_x)dx,$$

---

[1]) G. BEHM. Statistik der Mortalitäts und Invaliditätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen. 1875.

[2]) L. WEBER. Etude sur les tables de mortalité d'invalides et sur les tables d'invalidité. B. A. F. VII. 1897. pag. 188.

waaruit $$l_x^{aa} = e^{-\int_0^x (\mu_x^{aa} + v_x)\, dx},$$

indien men $l_0^{aa} = 1$ neemt.

Neemt men voor v_x evenals voor μ_x en voor μ_x^{aa} de vorm van MAKEHAM aan

$$v_x = \alpha_1 + \beta_1 \gamma_1^{\,x},$$

dan wordt

$$l_x^{aa} = e^{c} \cdot e^{(\alpha + \alpha_1)x + \frac{\beta}{\lg \gamma}\gamma^x + \frac{\beta_1}{\lg \gamma_1}\gamma_1^{\,x}}$$

of $$l_x^{aa} = k s^x t^{\gamma^x} r^{\gamma_1^{\,x}},$$

welke formule geheel analoog is met de sterfteformule van LAZARUS [1]).

WEBER [2]) wil, omdat niet de intensieteiten maar de jaarlikse kansen uit de waarnemingen worden afgeleid, de formule voor die kansen gebruiken voor de intensieteiten; als benadering kan dit zeker plaats vinden, te meer daar het gebruik van een formule bij kwesties over invaliedieteit op zichzelf nog slechts tot matige resultaten leidt en ook wel zal blijven leiden.

§ 69. De sterfte onder invalieden is niet alleen een funksie van de leeftijd, maar is ook afhankelik van de duur van de invaliedieteit, en wel zo, dat de invalieden in de eerste jaren een grotere sterftekans hebben dan later. Volgens WEBER heeft reeds ZIMMERMANN met deze omstandigheid rekening gehouden; we hebben evenwel in de ons bekende werken van ZIMMERMANN er niets over kunnen vinden.

Volgens WEBER verdeelt hij de invalieden in twee klassen, n.l. die welke 2 en meer jaren invaliede zijn en die welke zulks minder dan 2 jaar zijn. Er wordt nu aangenomen, dat de levenskansen van de beide groepen voor alle leeftijden een konstante

---

[1]) Zie pag. 51.

[2]) Zie pag. 89.

verhouding hebben; de formule is

$$p_x^{i_1} = (1 - \varepsilon)\, p_x^i$$

waarbij $\varepsilon = 0{,}09$.

Deze onderstelling heeft blijkbaar geen stand kunnen houden; we vinden er ook later niets meer over.

JÖRGENSEN [1]) vond in de nagelaten papieren van OLSEN een poging om de invaliedieteitssterfte door een analietiese funksie voor te stellen. OLSEN beschouwt de invaliedieteitsduur t als een parameter door welks verandering een reeks van sterftekrommen ontstaat. Als „eindkromme" neemt hij de kromme die ontstaat voor $t = \infty$.

Verder heeft OLSEN de waarnemingen over het eerste invaliedieteitsjaar uitgeschakeld en rekent het tweede invaliedieteitsjaar voor het eerste, het derde voor het tweede enz. Op te merken valt, dat daardoor de kwestie wel vereenvoudigd wordt, doch zijn wetenschappelike waarde in zoverre verliest, dat de formule nu is afgeleid niet uit een werkelik maar uit een gefingeerd waarnemingsmaterieaal.

Wanneer $x - t$ de leeftijd is, waarop de invaliedieteit ontstaat, t de invaliedieteitsduur voor een nu x-jarige invaliede, dan luidt de formule van OLSEN:

$$-\log l^i_{[x-t]+t} = 0{,}003x + 10^{0{,}044x + 6{,}238} + 10^{3{,}2 - 0{,}0006\,(x-t-35)^2 - 1{,}7t - 0{,}017\,.\,2^t}.$$

Voor $t = \infty$

$$-\log l^i_x = 0{,}003x + 10^{0{,}044x + 6{,}238}.$$

Hoe OLSEN tot zijn formule is gekomen, heeft JÖRGENSEN niet kunnen vinden. Laatstgenoemde heeft voor een reeks waarnemingen nog nagegaan [2]) dat de formule goed uitkomt; hij verzuimt echter te vermelden voor welke waarnemingen hij zijn onderzoek deed.

JÖRGENSEN ging ook nog na, in hoeverre een formule van de

---

[1]) N. R. JÖRGENSEN. Ueber HERMANN OLSENS Formel für die Invalidensterblichkeit (VI^{er} Internationaler Kongress für Versicherungswissenschaft II) 1906. pag. 715.

[2]) JÖRGENSEN. l.c. pag. 717.

hiergenoemde aard te gebruiken was, wanneer men de waarnemingen over het eerste invaliedieteitsjaar wel medetelt. Na proberen vond hij:

$$-\log {}^{i}_{[x-t]+t} = a + bx + 10^{cx+d} + 10^{\varphi(x,\,t)+f.g^{t}+f_1.g_1{}^{x-t}},$$

waarin a, b, c, d, f, f_1, g en g_1 konstanten zijn en $\varphi(x, t)$ een veelterm van de 2e graad in t en $x-t$. De waarden van de konstanten geeft hij op. We zullen ze niet vermelden; de formule is niet aan te bevelen in verband met de ingewikkelde gedaante en de vele konstanten. JÖRGENSEN zelf merkt dit trouwens op; bovendien bleek hem de overeenkomst tussen berekening en waarneming niet voldoende [1]). Daarom geeft hij alsnog in overweging de formule:

$$\log {}^{i}_{[x-t]+t} = \varphi_n(\sqrt{x-t}\,.\,\sqrt{t}) + f.g^{\sqrt{x-t}} + f_1 g_1{}^{\sqrt{t}},$$

waarin g en g_1 konstanten zijn, φ_n een veelterm van de n^{e} graad in $x-t$ en t en f en f_1 veeltermen resp. in $\sqrt{x-t}$ en $\sqrt{t}$ of konstanten. De voordelen van een dergelijke formule zouden volgens hem zijn, dat deze gelijkt op die van OPPERMANN voor de kindersterfte [2]) (welke veel overeenkomst heeft met de sterfte in het eerste invaliedieteitsjaar) en evenals de formules van OPPERMANN en THIELE [3]) wortelvormen bevat voor de leeftijd; daardoor wordt ook bereikt, dat de formule een invaliedieteitssterfte vóór het tijdstip, waarop de invaliedieteit intreedt, onmogelik maakt, omdat in dat geval $\log {}^{i}_{[x-t]+t}$ iemagienair wordt.

Zolang JÖRGENSEN niet verder gaat dan deze formule in overweging geven is er weinig meer van te zeggen dan dat de ingewikkelde gedaante niet uitlokt tot verder onderzoek.

§ 70. Naar aanleiding van de verhandeling van WEBER [4]) besprak INSOLERA [5]) de sterfte onder invalieden; we wijzigen zijn redenering, deze tevens bekortende.

---

[1]) JÖRGENSEN. l. c. pag. 719.

[2]) Zie pag. 54.

[3]) Zie pag. 56.

[4]) Zie pag. 89.

[5]) F. INSOLERA. Sulla legge di mortalità degli invalidi (Bollettino dell' associazione degli attuari. 23.) 1909 pag. 43.

De sterfte-intensieteit $\mu^i_{x.z}$ van een invaliede, oud x jaar, invaliede geworden op z jarige leeftijd, is groter dan de gewone sterfte-intensieteit μ_x; het verschil is kort na het invaliede worden groter dan later en na verloop van jaren verdwijnt het. Noemt men het bedoelde verschil $\varphi_{x.z}$, dan is dus

$$\mu^i_{x.z} = \mu_x + \varphi_{x.z}.$$

In verband met het genoemde verloop van $\varphi_{x.z}$ is hiervoor te nemen

$$\varphi_{x.z} = \beta . \gamma^{z-x}.$$

Dus wordt bij de aanname van de formule van MAKEHAM voor μ_x

$$\mu^i_{x.z} = a + bc^x + \beta . \gamma^{z-x}.$$

Het sterfteverloop onder invalieden wordt hieruit gevonden met behulp van de vorm

$$l^i_{x.z} = f(z) . e^{-\int_0^x \mu^i_{x.z}\, dx},$$

waarbij $f(z)$ een willekeurige funksie van z is,
en wel

$$l^i_{x.z} = f(z) . s^x g^{c^x} g_1^{c_1{}^{z-x}}.$$

In het biezondere geval $z = 0$, vindt men door nog $c_1 = c_2{}^{-1}$ te stellen

$$l^i_{x.0} = f(0) . s^x g^{c^x} g_1^{c_2{}^x},$$

welke formule dezelfde is als de sterfteformule van LAZARUS [1]).

Met deze wijze van werken naderen we de metode, die is toegepast bij de sterfte voor uitgezochte levens; daar de kwestie bij die sterfte nog lang niet is opgelost, kan men voor de toepassing bij de invaliedieteitsverzekering slechts spreken van een waarschijnlike overeenkomst, doch is de oplossing nog minder vergevorderd.

§ 71. Tot de gevallen, waarbij getracht is het verloop door een formule voor te stellen, behoort ook de ziekteverzekering. Daar de waarnemingen op dit gebied nog slechts berusten op onderzoekingen over een niet te groot aantal gevallen en daar die waarnemingen uit de aard van de zaak minder nauwkeurig

[1]) Zie pag. 51.

zijn dan die op het gebied van de sterfte, is a priori te verwachten, dat de door verschillenden opgestelde „ziektewetten", al mogen ze voor een bepaald stel waarnemingen enigszins het verloop aangeven, in het algemeen onbruikbaar zijn.

EDMONDS [1]) breidt zijn sterftewet [2]) uit tot de ziekte; volgens zijn opvatting komen voor elke leeftijd met elk sterfgeval twee ziektejaren overeen. Neemt men het jaar als tijdseenheid, dan is het aantal ziektedagen z_x bij een gemiddeld getal personen a van de leeftijd x met een sterfte-intensieteit μ_x te vinden uit de formule

$$z_x = 730\, a\mu_x.$$

SCRATCHLEY [3]) meent ook uit vele waarnemingen de „true law of sickness" te hebben gevonden. Ongeveer van de leeftijd af, waarop de kinderziekten voorbij zijn, dat is volgens hem 15 jaar, is er een zeker konstant mieniemum aantal ziektedagen c per jaar voor alle leeftijden. Dit aantal hangt af van ras, kliemaat e.d. en is voor Engeland 5 à 7 dagen. Daarbij komt nog een verhoging σ_x van dit aantal, dat afhankelik is van de leeftijd en hetwelk zo geregeld is, dat het voor een bepaalde leeftijd gelijk is aan de som van de verhogingen die gelden voor de 5 en 10 jaar jongere leeftijden. Men heeft dus

$$\sigma_x = \sigma_{x-5} + \sigma_{x-10} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Noemt men het aantal ziektedagen per jaar z_x, dan geldt

$$z_x = c + \sigma_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Past men (2) op (1) toe, dan is (1) om te zetten in

$$z_x = z_{x-5} + z_{x-10} - c.$$

Evenzo is

$$z_{x-5} = z_{x-10} + z_{x-15} - c,$$

waaruit door eliemienatie van c volgt

$$z_x - z_{x-5} = z_{x-5} - z_{x-15} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

1) T. R. EDMONDS. Life tables founded upon the Discovery of a universal law regulating the existence of every human being illustrated by a new theory of the causes producing health and longevity. 1832.

2) Zie pag. 33.

3) A. SCRATCHLEY. Treatise on Life Assurance Societies and Friendly Societies etc. 1859. pag. 106 en Appendix. pag. 38.

Uit (1) volgt

$$\sigma_{x+10} = \sigma_{x+5} + \sigma_x$$
$$\sigma_{x+15} = 2\sigma_{x+5} + \sigma_x$$
$$\sigma_{x+20} = 3\sigma_{x+5} + 2\sigma_x,$$

algemeen

$$\sigma_{x+5n} = t_n\sigma_{x+5} + t_{n-1}\sigma_x,$$

waarbij de koeffiesieënten verbonden zijn door de betrekking

$$t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$$

en dus termen zijn van de reeks

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 enz.

We hebben hier dus een voorbeeld van de reeks van FIBONACCI.

§ 72. Geen van beide formules heeft de opmerkzaamheid getrokken en terecht; hetzelfde geldt voor die van GOMPERTZ [1]), die zijn sterftewet ook uitbreidde tot de ziekte en voor het aantal ziekteweken s_x voor de leeftijd x, van 20 tot 60 jaar geldig, schreef

$$s_x = ab^{c^x}.$$

Een andere weg slaat MÖLLER [2]) in; hij vindt in het feit, dat bij de sterfteformules bevredigende resultaten zijn verkregen met exponentieaalfunksies, reden om deze ook bij het zoeken naar een ziektewet te gebruiken. Een reeks waarnemingen deed hem vinden, dat het aantal ziektedagen z_x voor $x = 30$ een mieniemum is en dat de kromme voor z_x symmetries is; daardoor kwam hij er toe voor die kromme de kettinglijn te nemen. Is deze algemeen

$$\eta = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{\xi}{m}} + e^{-\frac{\xi}{m}}\right),$$

dan moet het mieniemum bij $x_0 = 30$ liggen, men verplaatst

---

1) B. GOMPERTZ. On one uniform law of mortality from birth to extreme old age; and on the law of sickness. (Report of the Proceedings of the fourth session of the International Statistical Congress). 1860. pag. 461. Zie ook J. I. A. XVI. 18. pag. 329.

2) F. MÖLLER. Die analytische Ausgleichung von Krankentafeln unter Zugrundlegung einer mathematischen Formel für die Krankheitsdauer. (Ehrenzweigs Assekuranz Jahrbuch XXIX). 1908. pag. 56.

daarom de η-as over een afstand $\xi = x_0$ naar links. Voor het nieuwe stelsel is $\xi = x - x_0$, $\eta = y$ en men heeft, tegelijkertijd $e^{\frac{1}{m}} = r$ stellend, voor de kromme voor z_x

$$z_x = \frac{1}{2 \lg r} (r^{x - x_0} + r^{-(x - x_0)})$$

of

$$z_x = \frac{r^{x_0}}{2 \lg r} (r^{x - 2x_0} + r^{-x})$$

of

$$z_x = c (r^{x - 2x_0} + r^{-x}).$$

§ 73. Er is hier op te merken, dat de wijze waarop MÖLLER zijn formule vindt, weinig geschikt is om vertrouwde uitkomsten te verkrijgen. Vooreerst leert een beschouwing van de door hem medegedeelde waarnemingsgetallen [1]), die zich uitstrekken over het tijdvak 20 tot 71 jaar, en dus slechts van 20 tot 40 jaar voor symmetrie in aanmerking zouden komen, dat die symmetrie allesbehalve bestaat; verder is boven 40 jaar de overeenkomst met de kettinglijn vrij denkbeeldig. MÖLLER zelf vindt dan ook nodig om, alleen teoreties, het geval te behandelen, dat volgens hem vaker zal voorkomen, waarbij het stijgen van de ziekteduur na het mieniemum sneller geschiedt dan daarvóór, zodat de symmetrie verloren gaat. Hij neemt voor dat geval de kromme

$$\eta = br^{\xi} + cs^{-\xi},$$

welke voor $\xi = 0$ een mieniemum heeft. Uit de vergelijking

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = 0 = br^{\xi} \lg r - cs^{-\xi} \lg s$$

volgt dan, dat

$$c \lg s = b \lg r,$$

dus

$$c = b \frac{\lg r}{\lg s}.$$

Dus krijgt men

$$\eta = b \left(r^{\xi} + \frac{\lg r}{\lg s} s^{-\xi} \right).$$

Verplaatst men de η-as weer over de afstand $\xi = x_0$, dan is de

---

[1]) F. MÖLLER l. c. pag. 54 en 55.

formule voor z_x te vinden in de gedaante

$$z_x = c\left(r^{x-x_0} + \frac{\lg r}{\lg s}\, s^{-(x-x_0)}\right).$$

§ 74. We vermelden nog, dat MAKEHAM reeds [1]) meende, dat zijn wet ook bij de kwestie van de ziekte zou kunnen worden gebruikt; hij splitste het aantal levenden in een aantal gezonde personen h_x en een aantal zieke personen en dan zou voor het aantal gezonde personen zijn wet gelden.

Een nieuwe toepassing van de wet maakte SPENCER [2]) bij de afronding van de waarnemingen over 1893—1897 aangaande ziekte en sterfte voor de Manchester Unity Friendly Society. Hij onderzocht namelik of de verhouding tussen het aantal zieken en het aantal levenden, waartoe die zieken behoren, kon worden voorgesteld door de formnle $a + bc^x$. Met dezelfde kwestie hield zich ook PALIN ELDERTON [3]) bezig.

Verder heeft ook JANSE [4]) onderzocht in hoeverre de formule $a + bc^x$ kan worden gebruikt bij afronding van ziektetafels; de uitslag is niet zeer bevredigend.

Er blijkt wel, dat pogingen in de richting van het vinden van een ziektewet tot weinig resultaat hebben gevoerd; een onderzoek omtrent het ziekteverloop over 1912—1914 bij de „Provinciale Bond van Ziekenfondsen in Noord-Holland", door ons onlangs ingesteld [5]), geeft opnieuw aan, dat er in de waarnemingen nog te veel wisselvalligs is om aansluiting aan een formule te verwachten.

---

1) W. M. MAKEHAM. On the laws of Sickness and Invalidism, and their relation to the Law of Mortatily. J. I. A. XVI. 1871. pag. 408.

2) Biometrika III.[1]

3) W. PALIN ELDERTON. Graduation and Analysis of a Sickness Table. (Biometrika, II.[3])

W. PALIN ELDERTON. Notes on Actuarial Functions (Proceedings of the fourth International Congress of Actuaries I). 1904. pag. 394.

4) J. P. JANSE. Ziekte-Statistiek (Archief voor de Verzekeringswetenschap IX) 1907. pag. 101.

5) J. DU SAAR. Een ziektestatistiek (Archief voor de Verzekeringswetenschap XVI). 1917.

We willen hier nog melding maken van een formule van MOSER. Hij neemt aan[1]) dat de ziekte-intensieteit bestaat uit 2 komponenten en van de vorm

$$v_x = a + \frac{b}{(c+x)^2}$$

is, waarin a, b en c konstanten; de formule gelijkt veel op die voor μ_x volgens MAKEHAM.

Is λ_x het aantal zieken van de leeftijd x, dan is

$$v_x = -\frac{d \lg \lambda_x}{dx} = a + \frac{b}{(c+x)^2},$$

waaruit

$$\lambda_x = e^{c_1 - ax + \frac{b}{c+x}}.$$

Stelt men

$$e^{c_1} = k$$

$$e^{-a} = s$$

$$e^{b} = g,$$

dan wordt

$$\lambda_x = k s^x g^{\frac{1}{c+x}}.$$

---

[1]) C. MOSER. Die Intensität der Sterblichkeit und die Intensitätsfunktion. (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. Heft I). 1906. pag. 36.

HOOFDSTUK VI.

INLEIDING TOT DE LIJFRENTEN.

§ 75. Uit de voorgaande hoofdstukken is gebleken, dat het aantal sterfteformules hetwelk is opgesteld, aanzienlik is. Bij velen, die zich met het zoeken naar een dergelijke formule bezig hielden, berustte dit zoeken slechts op de wens, om een afronding van waargenomen getallen ten uitvoer te brengen; de afleiding van formules voor de verschillende verzekeringsvormen geschiedde onafhankelik van de vorm van de sterfteformule. Voor degene, die verband wil leggen tussen teorie en praktijk is evenwel naast de vraag of de te kiezen sterfteformule zich voldoende aansluit niet alleen bij de waarnemingen voor een enkel geval maar in het algemeen, de vraag of de formule zich leent voor de berekening van de kontienue lijfrente, van het hoogste belang. Voorts is van belang de vraag of de formule eigenschappen bezit, waardoor die berekening en de toepassing daarvan op de berekening van andere verzekeringsvormen worden vereenvoudigd.

Met het oog op deze vragen kunnen de besproken sterfteformules tot verschillende rubrieken worden gebracht. Beschouwt men de kwestie a priori, dan ligt voor de hand de metode om l_x voor de gehele levensduur voor te stellen door een polynomium van de graad n, zoals o.a. door BABBAGE, SCHEFFLER, LITTROW en gedeeltelik door LAMBERT is geprobeerd. Bij deze metode is sprake van een gewone interpolatieformule; integratie van de vorm voor de lijfrente is mogelik. Voor een voldoende aansluiting bij de waarnemingen zal de funksie echter van hoge graad moeten zijn, dus veel konstanten bevatten, en daardoor wordt de eenvoudigheid verdrongen door de uitvoerigheid van de bewerking. Eigenschappen, waardoor bijv. lijfrenten op meer hoofden zich gemakkelik laten afleiden komen hier ook niet te voorschijn.

§ 76. Een andere metode, welke het zoeken naar een bepaalde sterfteformule zou kunnen uitsluiten en die ook, na afronding, zou te overwegen zijn, bestaat hierin, dat men wel een eenvoudige funksie aanneemt, die dan echter slechts voor een beperkt deel van de leeftijd geldt. Een eenvoudige onderstelling zou zijn, dat een deel van de sterftekromme werd voorgesteld door

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

waarbij x de leeftijd en $y = l_x$.

Dan zou men hebben:

$$y = Ax + B \pm \sqrt{Cx^2 + Dx + E}$$

en dan zou voor de berekening van de kontienue lijfrente $\bar{a}_x$ o.a. de oplossing vereist worden van

$$\int v^x \sqrt{Cx^2 + Dx + E}\, dx \qquad \left(v = \frac{1}{1+i}\right)$$

of wel

$$\int v^x \sqrt{(x-p)(x-q)}\, dx.$$

Stelt men

$$\sqrt{(x-p)(x-q)} = t(x-p),$$

waaruit

$$x = \frac{pt^2 - q}{t^2 - 1},$$

dus

$$\sqrt{(x-p)(x-q)} = t\,\frac{p-q}{t^2-1}$$

en

$$dx = -\frac{2t(p-q)}{(t^2-1)^2}\, dt,$$

dan wordt de integraal

$$-2(p-q)^2 \int . v^{\frac{pt^2-q}{t^2-1}} \frac{t^2}{(t^2-1)^3}\, dt.$$

Deze is echter in het algemeen niet oplosbaar. Voor een rentevoet gelijk 0, waarbij $\bar{a}_x$ gelijk wordt aan de gemiddelde levensduur $\mathring{e}_x$ is hier de integratie mogelik; men vindt dan

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2-1)^3} = -\frac{t(t^2+1)}{8(t^2-1)^2} + {}^1/_{16} \lg \frac{t+1}{t-1} + c.$$

Voor de praktijk evenwel is de hier gevonden uitkomst niet te gebruiken.

Hieruit is dus te besluiten, dat ook eenvoudige funksies als de hier beschouwde moeten verworpen worden, waar bovendien nog slechts sprake kan zijn van zeer kleine tijdruimten.

Een uitzondering mag worden gemaakt voor de eerste formule van De Moivre [1]); bij de beschouwing van deze mag nooit uit het oog verloren worden, dat het een eerste poging was en dat de bedoeling vooral was het aanbrengen van bekortingen, met opoffering van grote nauwkeurigheid. In dit verband is dan ook de toepassing, die nu nog steeds van de formule wordt gemaakt voor kleine tijdruimten, alleszins begrijpelik en aannemelik. Daar De Moivre bovendien reeds doelt op de kontienue metode, verdient de uitwerking van lijfrenten volgens zijn formule hier opname [2]).

§ 77. Tot een andere rubriek behoren die sterfteformules, waarbij voor de sterfte-intensieteit een eenvoudige uitdrukking gekozen is, hetzij een lieneaire funksie, hetzij een exponentieaalfunksie. Bij beide komt het aantal levenden in de gedaante van een exponentieaalfunksie; beide komen te voorschijn uit de stelling van Quiquet [3]). De enige formule, die op eenvoudige manier integratie toelaat is de slechts als voorbeeld aangenomen uitdrukking van Dormoy [4]), waarbij $\mu_x =$ konstant. Deze onderstelling is echter in het geheel niet juist; niemand heeft er dan ook gebruik van gemaakt. Sang [5]) stelde een exponentieaalfunksie plus een konstante voor, dus eigenlik een som van twee exponentieaalfunksies, hetgeen door Laurent [6]) werd uitgebreid tot een reeks van dergelijke funksies. Stellen we deze voor door de vorm

$$l_x = \Sigma\, ac^x,$$

---

[1]) Zie pag. 15.
[2]) Zie Hoofdstuk VII.
[3]) Zie pag. 72.
[4]) Zie pag. 60.
[5]) Zie pag. 53.
[6]) Zie pag. 57.

dan is

$$\mu_x = -\frac{\Sigma\, ac^x \lg c}{\Sigma\, ac^x},$$

hetgeen voor de hoogste leeftijd, d. i. $x = \infty$, nadert tot de waarde $-\lg c_h$, waarbij c_h de grootste van de verschillende konstanten $c_1\, c_2 \ldots$. is.

Op te merken valt nog, dat, terwijl de grootheden a willekeurige posietieve of negatieve getallen kunnen zijn, de c's moeten zijn posietief en kleiner dan 1, daar het aantal levenden voor $x = \infty$ tot 0 moet naderen.

Men vindt hier voor de kontienue lijfrente [1])

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^x \Sigma\, ac^x} \int_0^\infty v^{x+t}\, \Sigma\, ac^{x+t}\, dt$$

of

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^x \Sigma\, ac^x}\, \Sigma \int_0^\infty a\,(vc)^{x+t}\, dt$$

of

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^x \Sigma\, ac^x}\, \Sigma\, a(vc)^x \int_0^\infty (vc)^t\, dt,$$

dus

$$\bar{a}_x = \frac{-\,\Sigma \dfrac{a\,(vc)^x}{\lg vc}}{v^x \Sigma\, ac^x},$$

waaruit, daar $-\lg v = \delta$, volgt

$$\bar{a}_x = \Sigma \frac{ac^x}{\delta - \lg c} \cdot \frac{}{\Sigma\, ac^x}.$$

Voor de hoogste leeftijd, d. i. voor $x = \infty$ nadert $\bar{a}_x$ tot de waarde $\dfrac{1}{\delta - \lg c_h}$, waarin weer c_h de grootste van alle konstanten $c_1, c_2 \ldots$. is.

§ 78. De levenslange lijfrente is steeds gelijk aan de som van een tijdelike en een uitgestelde,

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{x\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x$$

of

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{x\overline{n}|} + {}_np_x \cdot v^n \cdot \bar{a}_{x+n}.$$

---

[1]) Zie pag. 11, formule (22).

Ook kan men, daar de kontante waarde van een lijfrente altijd kleiner is dan die van een annuïeteit, beide met gelijke duur, schrijven

$$\bar{a}_x < \bar{a}_{x\overline{n}|} + {}_np_x \cdot v^n \cdot \frac{1}{\delta}.$$

Nu dient bij het kiezen van een sterfteformule de levenskans ${}_np_x$ voor grote waarden van x tot 0 te naderen. Dan gaat dus de laatste vergelijking over in

$$\bar{a}_x < \bar{a}_{x\overline{n}|},$$

terwijl in het algemeen geldt

$$\bar{a}_x > \bar{a}_{x\overline{n}|}.$$

Hieruit volgt, dat voor waarden van x, waarbij ${}_np_x$ kleiner wordt dan iedere denkbare grootheid,

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{x\overline{n}|} = 0$$

moet zijn.

Bovendien nadert, wanneer ${}_np_x$ tot 0 nadert, de sterfte-intensieteit μ_x tot ∞; immers bedenkt men, dat μ_x te schrijven is in de volgende vorm

$$\mu_x = \operatorname{Lim}_{n=0} \frac{l_x - l_{x+n}}{nl_x}$$

of

$$\mu_x = \operatorname{Lim}_{n=0} \frac{1 - {}_np_x}{n},$$

dan wordt voor $x = \infty$

$$\mu_x = \frac{1}{n} = \infty.$$

Indien dus bij een sterftewet ${}_np_x$ tot 0 nadert voor $x = \infty$, dan nadert $\bar{a}_x$ tot 0 en μ_x tot ∞. Het bleek reeds, dat bij de formule van LAURENT $\bar{a}_x$ en μ_x niet naderen tot de hier genoemde grenzen; ook ${}_np_x$, waarvoor men heeft

$${}_np_x = \frac{\Sigma a c^{x+n}}{\Sigma a c^x},$$

heeft tot grens c_h^n, waarbij weer c_h de grootste koëffiesieënt, dus niet 0. De formule van LAURENT voldoet dan ook, hoe eenvoudig de berekeningen blijken te zijn, niet aan de gestelde eisen en moet voor het gebruik afgekeurd worden. Eigenaardig is,

dat LAURENT zelf de hier gegeven beschouwingen in het geheel niet geeft en zijn formule ook nergens toepast; wellicht moet hieruit besloten worden, dat hij wel overtuigd was, dat de toepassing niet mag worden aanbevolen.

Een formule, die wel aan de gestelde eisen voldoet, is die van MAKEHAM; daar deze bovendien door zijn bekende fraaie eigenschappen in staat stelt grote vereenvoudiging aan te brengen in de berekening van lijfrenten op meer hoofden, is de grote verbreiding en de velerlei toepassing, die deze formule heeft gekregen, alleszins verklaarbaar. Temeer, omdat — en dat is wel het voornaamste — de formule zoals bekend is de sterfte met vrij grote nauwkeurigheid weergeeft. Men zou groter nauwkeurigheid kunnen verkrijgen door het aannemen van een formule van dezelfde gedaante met meer konstanten — de stellingen van QUIQUET geven daartoe de gelegenheid, — doch men moet dan de vereenvoudigingen prijsgeven, welke hier boven bedoeld zijn.

Ongetwijfeld hebben de vele eigenschappen er toe meegewerkt om de formule van MAKEHAM mutatis mutandis ook toe te passen bij kwesties over invaliedieteit en ziekte; ook voor de sterfte bij uitgezochte levens is de formule van toepassing gebleken en zijn mede de eigenschappen blijven bestaan.

In een volgend hoofdstuk zal de berekening van de lijfrente volgens de formule van MAKEHAM worden behandeld en worden aangetoond, welke uitgebreide toepassingen daarmede kunnen worden verkregen. Daarvóór zullen enige beschouwingen worden gehouden over de lijfrenten volgens de onderstellingen van DE MOIVRE.

HOOFDSTUK VII.

LIJFRENTEN VOLGENS DE FORMULE VAN DE MOIVRE.

§ 79. Men vindt over deze kwestie in de regel weinig vermeld; het werk van DE MOIVRE zelf is weinig bekend [1]), een vertaling door CZUBER [2]) heeft het opnieuw onder veler bereik gebracht. Zijn berekeningen zijn, wat voor zijn tijd begrijpelik is, omslachtig en weinig overzichtelik. We zullen zijn berekeningen in eenvoudiger vorm geven en uitbreiden.

Maken we gebruik van het levenskomplement $\omega - x = n$, dan leven er op x-jarige leeftijd n personen, 1 jaar later $n-1$, 2 jaar later $n-2$, enz.; men vindt daaruit voor de kontante waarde van een lijfrente (in jaartermijnen, postnumerando)

$$a_x = \frac{1}{n}\left[v(n-1) + v^2(n-2) + v^3(n-3) + \ldots + v^n(n-n)\right],$$

dus

$$a_x = (v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n) - \frac{1}{n}(v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots + nv^n)$$

of

$$a_x = a_{\overline{n}|} - \frac{1}{n}(Ia)_{\overline{n}|} \quad [3])$$

of

$$a_x = a_{\overline{n}|} - \frac{1}{n}\left(a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}\right) = \left(a_{\overline{n}|} - \frac{v^n}{i}\right) - a_{\overline{n}|}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{ni}\right).$$

Substietueert men in de eerste term de bekende waarde

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i},$$

---

[1]) Zie noot 1 op pag. 2.

[2]) E. CZUBER. A. DE MOIVRE's Abhandlung über Leibrenten. 1906.

[3]) Zie voor de notatie en voor de waarde van $(Ia)_{\overline{n}|}$ R. TODHUNTER. Institute of Actuaries' Text-Book. Part I. 1901. pag. 41. Zie ook M. VAN HAAFTEN. Beschouwingen over Politieke Rekenkunde. 1912. pag. 27.

dan wordt

$$a_x = \frac{1}{i} - \frac{a_{\overline{n}|}}{nvi},$$

welke uitkomst door DE MOIVRE op omslachtiger wijze ook reeds werd gevonden [1]). Hij behandelt ook reeds de volledige of komplete lijfrente, (in een brief aan JONES [2]), d.w.z. dat voor de tijd van het jaar tussen de laatste uitkering aan de verzekerde en zijn sterfdag nog een evenredig deel wordt uitbetaald; daarbij komt ook voor het eerst de integratie van de algemene exponentieaalfunksie voor. We zullen de redenering van DE MOIVRE volgen, doch passen een eenvoudiger metode van berekening toe. Stel t een zeker deel van het levenskomplement; de kans om die tijd t te leven is, daar men van n personen uitgaat, $\frac{n-t}{n}$ en de kans om in het daaropvolgende tijdsdeel dt te sterven is $\frac{dt}{n-t}$; de kans, dat een persoon de tijd t doorleeft en dan dadelik daarna sterft is dus

$$\frac{n-t}{n} \cdot \frac{dt}{n-t} = \frac{dt}{n}.$$

Men vindt dus voor de komplete lijfrente

$$\mathring{a}_x = \int_0^n \frac{dt}{n} \cdot \frac{1-v^t}{i},$$

waarvoor men vindt

$$\mathring{a}_x = \frac{1}{i} - \frac{1}{ni} \int_0^n v^t \, dt$$

of

$$\mathring{a}_x = \frac{1}{i} + \frac{1-v^n}{ni \lg v}$$

of

$$\mathring{a}_x = \frac{1}{i} + \frac{a_{\overline{n}|}}{n \lg v}.$$

Een andere, doch veel omslachtiger afleiding geeft o.a. LANDRÉ [3]).

---

[1]) A. DE MOIVRE. Annuities on Lives. 3rd edition. 1750. pag. 85.

[2]) E. CZUBER. l.c. pag. 69.

[3]) C. L. LANDRÉ. Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung. 1905. pag. 153.

§ 80. Men treft ook bij DE MOIVRE reeds de gedachte aan de kontienue rente; hij vindt dat de kontienue annuïeteit $\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{v^n - 1}{\lg v}$ [1]). Had hij die bij de berekening van de komplete lijfrente gebruikt, dan zou hij ook tot de waarde voor de kontienue lijfrente $\bar{a}_x$ zijn gekomen en wel

$$\bar{a}_x = -\frac{1}{\lg v} - \frac{\bar{a}_{\overline{n}|}}{n \lg v}.$$

De kontienue lijfrente laat zich natuurlik ook afleiden uit de algemene formule [2]); deze levert hier (ω = de hoogste leeftijd uit de sterftetafel):

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^x(\omega - x)} \int_x^\omega v^x (\omega - x)\, dx$$

of

$$\bar{a}_x = \frac{1}{v^{x-\omega}(\omega - x)} \int_x^\omega v^{x-\omega}(\omega - x) dx.$$

Zet men hierin de bekende waarde $v = e^{-\delta}$, dan krijgt men

$$\bar{a}_x = \frac{1}{e^{\delta(\omega - x)}(\omega - x)} \int_x^\omega e^{\delta(\omega - x)} (\omega - x)\, dx.$$

Neemt men als nieuwe veranderlike $t = \delta(\omega - x)$, dan krijgt men

$$\delta \bar{a}_x = \frac{1}{te^t} \int_0^t te^t\, dt, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

hetgeen door integratie bij gedeelten neerkomt op

$$\delta \bar{a}_x = 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{te^t},$$

en daar $\delta = -\lg v$ en $\omega - x = n$, dus $t = \delta n$, wordt

$$\bar{a}_x = -\frac{1}{\lg v} + \frac{1 - v^n}{n \lg^2 v}$$

of

$$\bar{a}_x = -\frac{1}{\lg v} - \frac{\bar{a}_{\overline{n}|}}{n \lg v}.$$

---

[1]) DE MOIVRE l. c. pag. 113.

[2]) Zie pag. 11, formule (22). (23)

§ 81. Uit de integraal (β) volgt, dat $\delta\bar{a}_x$ alleen van t afhangt. Wanneer dus δ verandert, maar tevens x, zodanig dat $\delta(\omega-x)$ konstant blijft, dan blijft ook $\delta\bar{a}_x$ konstant. Door deze eigenschap is het mogelik om uit de lijfrenten bij gegeven rentevoet de lijfrenten te berekenen voor een willekeurige andere rentevoet. Men heeft daarvoor slechts te nemen de vergelijking

$$\delta(\omega - x) = \delta_1(\omega - x_1),$$

waarin δ en x passen bij de gevraagde rente, terwijl δ_1 de rentevoet van het bekende sisteem is. De onbekende x_1 geeft dan aan, voor welke leeftijd men met het bekende sisteem moet werken in de vergelijking

$$\delta \,.\, \bar{a}_x = \delta_1 \,.\, \bar{a}_{x_1}.$$

Men bedenke daarbij, dat bij benadering

$$\bar{a}_x = a_x + {}^1/_2 - {}^1/_{12}(\mu_x + \delta)\ ^1),$$

terwijl in de regel voldoende is te schrijven

$$\bar{a}_x = a_x + {}^1/_2.$$

Bedenkt men nog, dat de komplete gemiddelde levensduur, die in het algemeen is

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_x^\infty l_x\,dx,$$

bij De Moivre, wanneer men ∞ vervangt door ω, oplevert

$$\mathring{e}_x = {}^1/_2(\omega - x),$$

dan gaat de vergelijking ter bepaling van x_1 over in

$$\delta \,.\, \mathring{e}_x = \delta_1 \,.\, \mathring{e}_{x_1}.$$

Als voorbeeld berekenen we $\bar{a}_{36}$ voor $3^1/_2\,\%$, als het sisteem voor $4\,\%$ bekend is. Hier is:

$$\omega = 86$$
$$\delta_{3^1/_2} = 0{,}03440$$
$$\delta_4 = 0{,}03922$$
$$\mathring{e}_{36} = 25,$$

dus heeft men $$\mathring{e}_{x_1} = \frac{0{,}03440 \times 25}{0{,}03922} = 21{,}9,$$

---

1) Zie pag. 12 formule (24) en (25).

waaruit

$$x_1 = 86 - 2 \times 21{,}9 = 42{,}2.$$

Nu is dus

$$\delta \,.\, \bar{a}_{36} = \delta_1 \, \bar{a}_{42{,}2}.$$

Daar bij $4\,\%$ $\bar{a}_{42} = 13{,}35$ en $\bar{a}_{43} = 13{,}18$ vinden we met behulp van eenvoudige interpolatie $a_{42{,}2} = 13{,}316$, waardoor de gevraagde

$$\bar{a}_{36} = \frac{0{,}03922 \times 13{,}316}{0{,}03440} = 15{,}18.$$

De werkelike waarde is 15,21.

Door ACHARD [1]) is aangetoond, dat het hier behandelde geldt voor de sterftewet $l_x = (\omega - x)^m$ [2]), van welke die van DE MOIVRE voor $m = 1$ een biezonder geval is. Dat de door ACHARD genoemde wet de enige zou zijn, die de vermelde eigenschap bezit, gelijk hij beweert, is niet juist. Dit is opgemerkt door POTERIN DU MOTEL [3]); ook

$$l_x = e^{-kx} (\omega - x)^m$$

vertoont dezelfde eigenschap; een lijfrente voor de rentevoet δ bij deze formule is gelijk aan een lijfrente voor de rentevoet $k + \delta$ bij de formule van ACHARD. Hier is dus

$$(k + \delta)(\omega - x) = (k + \delta_1)(\omega - x_1)$$

en na bepaling van x_1

$$\bar{a}_{x_1} = \frac{k + \delta}{k + \delta_1} \, \bar{a}_x.$$

§ 82. Lijfrenten op twee hoofden leidt DE MOIVRE volgens zijn onderstelling niet af; we geven hier onze afleiding.

Om de kontante waarde van een lijfrente op twee hoofden, betaalbaar tot het eerste sterfgeval, te berekenen denken we ons twee personen met leeftijden x en y, waarbij bijvoorbeeld $x < y$,

---

1) M. A. ACHARD. Note sur le changement de taux dans le calcul des annuités viagères. B. A. F. II. 1892. pag. 39.

2) Deze uitdrukking werd ook reeds gebruikt door d'ALEMBERT; zie pag. 22. De formule geeft overigens de sterfte volstrekt niet voldoende aan, is dan ook nooit toegepast.

3) H. POTERIN DU MOTEL. Théorie des Assurances sur la vie. 1899. pag. 201.

hun levenskomplementen zijn m en n, wanneer $x + m = 86$ en $y + n = 86$.

Gaat men uit van mn paren, dan heeft men:

$$a_{xy} = \frac{1}{mn}[v(m-1)(n-1) + v^2(m-2)(n-2) + \ldots . \\ \ldots . + v^n(m-n)(n-n)]$$

of

$$a_{xy} = \frac{1}{mn}[mn(v + v^2 + \ldots . + v^n) \\ + (m+n)(v + 2v^2 + \ldots . + nv^n) \\ + (v + 4v^2 + \ldots . + n^2v^n)]$$

of

$$a_{xy} = a_{\overline{n}|} - \frac{m+n}{mn}(Ia)_{\overline{n}|} + \frac{1}{mn}(IIa)_{\overline{n}|},$$

wanneer

$$v + 4v^2 + \ldots . + n^2v^n = (IIa)_{\overline{n}|}$$

gesteld wordt.

De waarde van $(IIa)_{\overline{n}|}$ vindt men als volgt:

$$(IIa)_{\overline{n}|}(1-v)^2 = v + 2v^2 + 2v^3 + \ldots . \\ + 2v^n - (n^2 + 2n - 1)v^{n+1} + n^2v^{n+2},$$

dus

$$(IIa)_{\overline{n}|} = \frac{2a_{\overline{n}|} - v - (n^2 + 2n - 1)v^{n+1} + n^2v^{n+2}}{i^2v^2}.$$

Men vindt na substietutie hiervan en van de uit de desbetreffende vorm op pag. 104 gemakkelik af te leiden waarde

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n}|}}{iv} - \frac{nv^n}{i}$$

de formule

$$a_{xy} = a_{\overline{n}|} - \frac{m+n}{mn}\left(\frac{a_{\overline{n}|}}{iv} - \frac{nv^n}{i}\right) + \\ \frac{2a_{\overline{n}|} - v - (n^2 + 2n - 1)v^{n+1} + n^2v^{n+2}}{mni^2v^2},$$

welke na enige omwerking is te schrijven

$$a_{xy} = \frac{1}{i} - \frac{a_{\overline{n}|}[(m-n-1)i - 2] + 2n}{mnvi^2}.$$

Zijn de personen van gelijke leeftijd, dan is $m = n$, en heeft men

$$a_{xx} = \frac{1}{i} + \frac{(2+i)a_{\overline{n}|} - 2n}{n^2i^2v}.$$

Het gevonden antwoord voor a_{xy} is langs andere weg ook bepaald o.a. door BAILY [1]), door MAAS [2]) en door BÖSCHENSTEIN [3]).

§ 83. DE MOIVRE heeft wel getracht lijfrenten op twee hoofden op eenvoudige wijze te berekenen; daartoe ging hij echter van een andere sterfteformule uit, al komt hij hier niet rond voor uit. Hij neemt [4]) een fiktieve persoon, voor wie de levenskans na verloop van elk jaar konstant is, hetgeen dus neerkomt op een sterftewet waarbij het aantal levenden volgens een meetkundige reeks afneemt. Is die levenskans p — we schrijven in hedendaags tekenschrift — dan is bij de genoemde onderstelling

$$a_x = pv + p^2v^2 + \ldots.$$

of

$$a_x = \frac{pv}{1-pv},$$

waaruit

$$p = \frac{a_x}{(a_x+1)v}.$$

Voor een levenskans p_1 krijgt men

$$p_1 = \frac{a_y}{(a_y+1)v}.$$

Nu neemt hij aan, dat de kombienatie van twee of meer werkelike levens en de daarbij behorende lijfrente bij benadering gelijk is aan die van de fiktieve levens. Gelden voor deze de levenskansen p en p_1, dan wordt

$$a_{xy} = pp_1v + p^2p_1^2v^2 + \ldots.$$

of

$$a_{xy} = \frac{pp_1v}{1-pp_1v}$$

of

$$a_{xy} = \frac{\dfrac{a_xa_y}{(a_x+1)(a_y+1)v}}{1-\dfrac{a_xa_y}{(a_x+1)(a_y+1)v}},$$

dus

$$a_{xy} = \frac{a_xa_y}{(a_x+a_y+1-ia_xa_y)v}.$$

---

[1]) F. BAILY. The doctrine of Life-annuities and Assurances etc. 1810. pag. 317.

[2]) M. MAAS. Théorie élémentaire des Annuités viagères et des Assurances sur la vie. 1868. pag. 108.

[3]) K. BÖSCHENSTEIN. A. DE MOIVRES Abhandlung über Leibrenten. (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. Heft III. 1908) pag. 34.

[4]) DE MOIVRE. l.c. pag. 87.

Deze formule wijzigt hij nog en schrijft, zonder aan te geven hoe hij er toe komt, bij benadering

$$a_{xy} = \frac{a_x a_y}{a_x + a_y - i a_x a_y}.$$

Het is echter gemakkelik af te leiden.

Men kan n.l. voor de uitdrukking voor a_{xy} aan de voet van pag. 111 zetten:

$$a_{xy} = \frac{a_x a_y (1+i)}{a_x + a_y + 1 - i a_x a_y} = \frac{a_x a_y}{a_x + a_y - i a_x a_y}$$

$$+ i \frac{a_x a_y}{a_x + a_y - i a_x a_y} - \frac{a_x a_y}{(a_x + a_y - i a_x a_y)^2} + \ldots.$$

en nu de termen na de eerste verwaarlozen. De Moivre meent, dat de benadering nauwkeurig is; dit is niet het geval; zie ons voorbeeld.

De formules gaan bij gelijke leeftijden over in

$$a_{xx} = \frac{a_x^2}{v + (2 - i a_x) a_x v}$$

en

$$a_{xx} = \frac{a_x}{2 - i a_x}.$$

Zowel volgens de eerste onderstelling van De Moivre ($l_x = 86 - x$) als volgens de tweede ($p_x =$ konstant) blijken dus de berekeningen voor lijfrenten op twee hoofden teruggebracht te kunnen worden tot die op één hoofd, dus in verband met § 79 tot annuïeteiten. Berekening van kommutatietafels [1]) is niet nodig; voor elke gegeven kombienatie is de uitkomst ineens te berekenen. Als voorbeeld zullen we nemen het geval $x = 30$, $y = 50$; de rentevoet zij 3 %. Men vindt dan

	1e onderstelling	2e onderstelling	2e onderst. benaderd
$a_{30\cdot50}$	9,2991	9,4428	10,1815.

Voor $x = y = 40$ vindt men:

$a_{40\cdot40}$	9,4225	9,5447	10,7765.

---

[1]) Onder kommutatietafels verstaat men, voor zover de berekening van lijfrenten op één hoofd betreft, tafels voor $D_x = v^x l_x$ en $N_x = \Sigma D_x$; voor de berekening van lijfrenten op twee hoofden moeten tafels worden berekend voor $D_{xy} = D_x \cdot l_y$ en $N_{xy} = \Sigma D_{xy}$ en wel voor alle mogelike kombienaties van x en y.

Uit deze voorbeelden ziet men — en deze opmerking blijkt bij onderzoek algemeen te gelden — dat de tweede onderstelling van De Moivre bij lijfrenten op twee hoofden een iets hogere uitkomst geeft dan de eerste; het verschil is klein genoeg om het gebruik van de tweede onderstelling in dit geval aan te bevelen, waar de berekening eenvoudiger is. De benaderingsformule, afgeleid uit de uitkomst volgens de tweede onderstelling moet als te onnauwkeurig worden verworpen.

§ 84. De Moivre geeft nog bij zijn tweede onderstelling, zonder afleiding, de formule voor de lijfrente op drie hoofden, betaalbaar tot het eerste sterfgeval. We leiden die af op dezelfde wijze als die op twee hoofden; we vinden

$$a_{xyz} = pp_1p_2v + p^2p_1^2p_2^2v^2 + \ldots,$$

dus

$$a_{xyz} = \frac{pp_1p_2v}{1 - pp_1p_2v}$$

of

$$a_{xyz} = \frac{\dfrac{a_xa_ya_z}{(a_x+1)(a_y+1)(a_z+1)v^2}}{1 - \dfrac{a_xa_ya_z}{(a_x+1)(a_y+1)(a_z+1)v^2}}$$

of

$$a_{xyz} = \frac{a_xa_ya_z}{a_xa_y + a_ya_z + a_za_x + a_x + a_y + a_z + 1 - (2i+1)\,a_xa_ya_z},$$

waarvoor De Moivre bij benadering schrijft

$$a_{xyz} = \frac{a_xa_ya_z}{a_xa_y + a_ya_z + a_za_x - 2ia_xa_ya_z}.$$

Voor $x = y = z$ krijgt men resp.

$$a_{xxx} = \frac{a_x^3}{3a_x^2 + 3a_x + 1 - (2i+1)a_x^3}$$

en

$$a_{xxx} = \frac{a_x^3}{3a_x^2 - 2ia_x^3}.$$

§ 85. Volgens zijn eerste onderstelling wordt het vraagstuk veel ingewikkelder. Zijn de leeftijden x, y en z, de levenskomplementen m, n en s en zij $m > n$ en $s > n$.

Gaat men uit van mns groepen, dan is

$$a_{xyz} = \frac{1}{mns}\Big[v(m-1)(n-1)(s-1) + v^2(m-2)(n-2)(s-2) + \ldots . \\ \ldots . + v^n(m-n)(n-n)(s-n)\Big]$$

of

$$a_{xyz} = \frac{1}{mns}\Big[mns\,(v + v^2 + v^3 + \ldots . + v^n) \\ - (mn + ns + sm)(v + 2v^2 + 3v^3 + \ldots . + nv^n) \\ + (m + n + s)(v + 2^2v^2 + 3^2v^3 + \ldots . + n^2v^n) \\ - (v + 2^3v^2 + 3^3v^3 + \ldots . + n^3v^n)\Big]$$

of

$$a_{xyz} = \frac{1}{mns}\Big[mns\,a_{\overline{n}|} - (mn + ns + sm)(\mathrm{I}a)_{\overline{n}|} + (m + n + s)(\mathrm{II}a)_{\overline{n}|} \\ - (\mathrm{III}a)_{\overline{n}|}\Big],$$

wanneer

$$v + 2^3v^2 + 3^3v^3 + \ldots . + n^3v^n = (\mathrm{III}a)_{\overline{n}|} \text{ wordt gesteld.}$$

Men vindt nu na enige bewerking, dat

$$\frac{1-v}{v}(\mathrm{III}a)_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + 2(\mathrm{I}a)_{\overline{n}|} + \frac{1}{v}(\mathrm{I}a_n) - (n+1)^2nv^n$$

waaruit, omdat $\frac{1-v}{v} = i$ en $2 + \frac{1}{v} = 3 + i$,

$$(\mathrm{III}a)_{\overline{n}|} = \frac{a^n + (3+i)(\mathrm{I}a)_{\overline{n}|} - (n+1)^2nv^n}{i}.$$

De uitkomst voor a_{xyz} is dus op die wijze te schrijven in $a_{\overline{n}|}$. Overzichteliker is de uitkomst in de vorm

$$a_{xyz} = a_{\overline{n}|} - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{s}\right)(\mathrm{I}a)_{\overline{n}|} + \left(\frac{1}{mn} + \frac{1}{ns} + \frac{1}{sm}\right)(\mathrm{II}a)_{\overline{n}|} - \\ \frac{1}{mns}(\mathrm{III}a)_{\overline{n}|}.$$

Voor $x = y = z$ heeft men

$$a_{xxx} = a_{\overline{n}|} - \frac{3}{n}(\mathrm{I}a)_{\overline{n}|} + \frac{3}{n^2}(\mathrm{II}a)_{\overline{n}|} - \frac{1}{n^3}(\mathrm{III}a)_{\overline{n}|}.$$

Als voorbeeld kiezen we $x = 30$, $y = 40$, $z = 50$ bij een rentevoet van $3\,\%$; na berekening van $a_{\overline{n}|}$, $(\mathrm{I}a)_{\overline{n}|}$, $(\mathrm{II}a)_n$ en $(\mathrm{III}a)_{\overline{n}|}$ vindt men:

	1e onderstelling	2e onderst. benaderd
$a_{30.40.50}$	= 8,164	6,803.

Voor $x = y = z = 46$ vindt men

$a_{46.46.46}$	= 7,542.	6,158.

De opmerkingen betreffende de uitkomst en het gebruik van de formules bij twee hoofden gelden ook hier.

Over de berekeningen bij drie hoofden vindt men een en ander bij BAILY [1]) en bij BÖSCHENSTEIN [2]); beider uitkomst is minder overzichtelik, maar laat zich herleiden tot de onze.

§ 86. De formule

$$l_x = a + bx, \qquad \text{(waarbij } b \text{ negatief)}$$

tot welke die van de MOIVRE behoort, geeft nog aanleiding tot een merkwaardige eigenschap. Beschouwen we m personen met leeftijden x_1, x_2 enz., dan is de waarschijnlikheid, dat alle na verloop van t jaar zijn overleden,

$${}_tQ_{x_1} \cdot {}_tQ_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_tQ_{x_m} = \frac{l_{x_1} - l_{x_1+t}}{l_{x_1}} \cdot \frac{l_{x_2} - l_{x_2+t}}{l_{x_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{l_{x_m} - l_{x_m+t}}{l_{x_m}}$$

of

$${}_tQ_{x_1} \cdot {}_tQ_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_tQ_{x_m} = \frac{(bt)^m}{(a + bx_1)(a + bx_2) \ldots (a + bx_m)}.$$

Beschouwen we m andere personen, van gelijke leeftijd ξ, dan is de overeenkomstige waarschijnlikheid gelijk aan

$$({}_tQ_\xi)^m = \frac{(bt)^m}{(a + b\xi)^m}.$$

Men kan nu ξ zodanig bepalen, dat de twee waarschijnlikheden gelijk zijn. Dit geeft aanleiding tot de vergelijking

$$(a + b\xi)^m = (a + bx_1)(a + bx_2) \ldots (a + bx_m).$$

Deze vergelijking is onafhankelik van de tijd t; hieruit volgt, dat indien men ξ bepaalt met behulp van de genoemde betrekking, de beide groepen dezelfde kans zullen hebben na een willekeurige tijd geheel te zijn uitgestorven. Bij berekeningen o. a. aangaande lijfrenten, betaalbaar tot het laatste sterfgeval kan

---

[1]) BAILY. l. c. pag. 319.

[2]) BÖSCHENSTEIN. l. c. pag. 37.

de eigenschap worden gebruikt om door het omzetten van de ongelijke leeftijden in éénzelfde leeftijd ξ vereenvoudiging te verkrijgen. De eigenschap is een dergelijke als die bij de wet van MAKEHAM bekend is als de wet van de uniform seniority.

Bij de formule van DE MOIVRE vindt men voor 2 levens door te stellen $a = \omega$, $b = -1$, $m = 2$, na uitwerking

$$\xi = \omega - \sqrt{n_1 n_2},$$

waarbij n_1 en n_2 de levenskomplementen van de beide personen.

§ 87. Dezelfde eigenschap komt toe aan de formules die een exponentieaalterm bevatten,

$$l_x = a + b\,c^x,$$

de vorm, die werd voorgesteld door SANG [1]).

Men heeft hier voor de oorspronkelike groep

$${}_tQ_{x_1} \cdot {}_tQ_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_tQ_{x_m} = \frac{b(c^{x_1} - c^{x_1+t})}{a + bc^{x_1}} \cdot \frac{b(c^{x_2} - c^{x_2+t})}{a + bc^{x_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{(c^{x_m} - c^{x_m+t})}{a + bc^{x_m}}$$

of

$${}_tQ_{x_1} \cdot Q_{x_2} \cdot \ldots \cdot {}_tQ_{x_m} = b^m (1-c^t)^m \frac{c^{x_1+x_2 \ldots + x_m}}{(a + bc^{x_1})(a + bc^{x_2}) \ldots (a + bc^{x_m})}$$

en voor de groep van gelijke leeftijd

$$({}_tQ_\xi)^m = b^m (1 - c^t)^m \frac{c^{m\xi}}{(a + bc^\xi)^m},$$

zodat

$$\frac{c^{m\xi}}{(a + bc^\xi)^m} = \frac{c^{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}}{(a + bc^{x_1})(a + bc^{x_2}) \ldots (a + bc^{x_m})},$$

welke betrekking weer onafhankelik van t is.

De formule van DE MOIVRE is trouwens een grensgeval van die van SANG en van LAURENT, hetgeen men gemakkelik bewijst door reeksontwikkeling.

---

[1]) Zie pag. 54.

HOOFDSTUK VIII.

LIJFRENTEN VOLGENS DE FORMULE VAN MAKEHAM.

§ 88. De formule van MAKEHAM heeft tengevolge van zijn vele biezondere eigenschappen de meest verbreide toepassing gevonden. Een belangrijke toepassing vinden we in het volgende.

We gaan uit van de formule voor μ_x in de gedaante

$$\mu_x = \alpha + \beta e^{\gamma x}.$$

Heeft men een andere sterftetafel, voor welke β en γ dezelfde zijn, terwijl alleen α verschillend is, zodat

$$\mu_{1_x} = \alpha_1 + \beta e^{\gamma x},$$

dan ziet men dadelik in, dat

$$\mu_{1_x} = \mu_x + (\alpha_1 - \alpha).$$

De kromme voor μ_{1_x} is dus uit die voor μ_x gemakkelik af te leiden door een verschuiving langs de Y-as.

Zijn voor die andere sterftetafel α en γ dezelfde, terwijl alleen β verschillend is, zodat

$$\mu_{2_x} = \alpha + \beta_1 e^{\gamma x},$$

dan is te schrijven

$$\mu_{2_x} = \alpha + \beta e^{\lg \beta_1 - \lg \beta + \gamma x}.$$

Stelt men

$$\frac{\lg \beta_1 - \lg \beta}{\gamma} = \varepsilon,$$

dan wordt

$$\mu_{2_x} = \alpha + \beta e^{\gamma(x+\varepsilon)},$$

dus

$$\mu_{2_x} = \mu_{(x+\varepsilon)}$$ onderl

Men ziet nu gemakkelik in, dat de beide krommen voor μ_x volgens MAKEHAM in dit geval evenwijdig lopen.

Zijn voor die andere sterftetafel α en β dezelfde, terwijl alleen γ verschillend is, zodat

$$\mu_{3_x} = \alpha + \beta e^{\gamma_1 x}$$

en stelt men gelijktijdig

$$\gamma_1 = \lambda\gamma \text{ en } x = \frac{z}{\lambda},$$

dan krijgt men

$$\mu_{3_x} = \alpha + \beta e^{\gamma z},$$

dus

$$\mu_{3_x} = \mu_z.$$

In dit geval zijn, met verandering van de leeftijd door de faktor λ, de krommen kongruent.

Met behulp van deze opmerkingen is het mogelik om een willekeurige MAKEHAM-kromme voor de sterfte-intensieteit om te zetten in een met gegeven konstanten. Heeft men toch

$$\mu^{\circ}{}_x = \alpha_1 + \beta_1 e^{\gamma_1 x},$$

dan krijgt men voor een andere sterftetafel, waarvan α, β en γ bekend zijn, door te stellen

$$\gamma_1 = \lambda\gamma \quad x = \frac{z}{\lambda} \quad \text{en} \quad \frac{\lg \beta_1 - \lg \beta}{\gamma} = \varepsilon,$$

dat

$$\mu^{\circ}{}_x = (\alpha_1 - \alpha) + \mu_{z+\varepsilon}.$$

De omzetting vindt dus plaats door:

1e verandering van de leeftijd door de faktor λ;

2e verschuiving van de nieuwe leeftijd met een konstant bedrag ε;

3e vergroting van μ met een konstant bedrag $\alpha_1 - \alpha$.

§ 89. Nemen we nu de kontienue lijfrente $\bar{a}_x$ in de gedaante

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \delta) dt} dt, \text{ [1]}$$

[1] Zie pag. 10, formule (11).

dan wordt dit voor de formule van MAKEHAM

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\alpha + \delta + \beta e^{\gamma(x+t)})\, dt}\, dt.$$

Met behulp van de hierboven besproken reduksie is het nu mogelik om $\bar{a}_x$ voor een willekeurige formule van MAKEHAM en een willekeurige rentevoet te berekenen uit die voor een andere. De waarde van de integraal hangt alleen af van μ_x en δ; de vraag komt dus hierop neer, dat in $\bar{a}_{1_x}$

$$\mu^\circ{}_x + \delta_1 = \alpha_1 + \delta_1 + \beta_1 e^{\gamma_1 x}$$

of

$$\mu^\circ{}_x + \delta_1 = \sigma_1 + \tau_{1x}$$

moet worden uitgedrukt met behulp van

$$\mu_x + \delta = \alpha + \delta + \beta e^{\gamma x}$$

of

$$\mu_x + \delta = \sigma + \tau_x.$$

Nu heeft men volgens de hierboven besproken reduksie

$$\tau_{1x} = \tau_{\lambda x + \varepsilon},$$

dus

$$\bar{a}_{1x} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\sigma_1 + \tau_{1x+t})\, dt}\, dt$$

gaat over in

$$\bar{a}_{1x} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \sigma_1 + \tau_{\lambda(x+t)+\varepsilon}\, dt}\, dt.$$

Stelt men nu nog

$$y = \lambda t \quad \sigma_1 = \lambda\sigma$$

en

$$\zeta = \varepsilon - \frac{\lg \lambda}{\gamma} = \frac{\lg \beta_1 - \lg \beta - \lg \lambda}{\gamma},$$

dan krijgt men

$$\bar{a}_{1x} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\int_0^y (\sigma + \tau_{(\lambda x + \zeta) + y}\, dy}\, dy,$$

dus

$$\bar{a}_{1x} = \frac{1}{\lambda}\, \bar{a}_z,$$

waarbij $$z = \lambda x + \zeta,$$

terwijl de rentevoet δ, bepaald wordt door

$$\sigma_1 = \lambda \sigma,$$

dus door $$\alpha_1 + \delta_1 = \lambda (\alpha + \delta).$$

GRAM [1]) geeft een analoge afleiding voor de tijdelike lijfrente $\bar{a}_{x\overline{n}|}$; hiervoor vindt men

$$\bar{a}_{1\,x\overline{n}|} = \frac{1}{\lambda}\, \bar{a}_{z\overline{m}|},$$

wanneer $$m = \lambda n.$$

De grootheid $\bar{a}_x$ komt echter in ons betoog meer in aanmerking; trouwens GRAM zelf geeft zijn voorbeelden ook voor $\bar{a}_x$.

§ 90. Uit onze beschouwingen ziet men, dat het voldoende is om voor één formule van MAKEHAM een „unieversaaltafel" — de naam is van GRAM — te berekenen, een tabel voor $\bar{a}_x$ met twee ingangen, n.l. de leeftijd en de rentevoet. Op verzoek van GRAM is door BERTELSEN een tabel berekend voor log $\bar{a}_x$ voor leeftijden van 21 tot 70 jaar, met behulp van de formule

$$\mu_x = 10^{-4} \,.\, e^{0{,}1x} = 10^{-4 + 0{,}043429 \ldots . x}$$

en van de rentevoet $0{,}1\, s$, zo, dat $s = \frac{\sigma}{\gamma}$; dus neemt hij

$$\mu_x + \delta = 0{,}1\, s + 10^{-4}\, e^{0{,}1x}.$$

Hij doet dit voor s van 0 tot 1 met opklimming van 0,02 [2]).

Voor tussenliggende waarden van x en s kan de waarde van log $\bar{a}_x$ door interpolatie worden gevonden, in het algemeen zijn eerste verschillen voldoende om 4 desiemalen nauwkeurig te krijgen.

Was er bij de grootheid μ_x sprake van omzetting van de ene kromme in de andere, bij de grootheid $\bar{a}_x$ zou men door oppervlakken een meetkundige voorstelling kunnen geven. X en Y-as zouden dienen voor leeftijd en rentevoet, de Z-as voor de lijfrente; elk van de drie grootheden met verschillende eenheid gemeten.

---

[1]) J. P. GRAM. Om MAKEHAMS Dødelighedsformel. (Aktuaren Heft I). 1904. pag. 74.

[2]) GRAM. l. c. pag. 86.

De omzetting van de ene formule van MAKEHAM in de andere zou tot hetzelfde oppervlak kunnen voeren door 1e een evenwijdige verschuiving van de assen om de oorsprong in een passend punt te krijgen, 2e een verandering van de eenheden op de 3 assen. Deze beschouwing is zuiver van teoretiese waarde, van praktiese toepassing kan hier geen sprake zijn, zowel vanwege de vorm van een dergelijk oppervlak als vanwege de moeielikheid van de omzetting.

§ 91. Wil men van de hier besproken omzetting kunnen gebruik maken, dan is daarvoor een noodzakelike eis, dat het mogelik is voor de formule van MAKEHAM de waarde voor de kontienue lijfrente te berekenen in een zodanige vorm, dat de uitkomst kan worden gebruikt voor praktiese doeleinden.

De uitdrukking voor $\bar{a}_x$ op pag. 118 leent zich daartoe minder goed. Beter slaagt men, wanneer men uitgaat van l_x, zoals hieronder blijken zal.

Neemt men de formule van MAKEHAM in de gedaante

$$l_x = ks^x g^{c^x},$$

waarin dan voor $s = 1$ de formule van GOMPERTZ is begrepen, dan stelle men

$$s = e^{-\alpha},$$

zodat

$$l_x = ke^{-\alpha x} g^{c^x}.$$

Bedenkt men verder, dat voor de kontienue rente geldt

$$\frac{1}{1+i} = v = e^{-\delta},$$

dan komt de kontienue lijfrente te staan in de gedaante

$$\bar{a}_x = \frac{1}{g^{c^x} e^{-(\alpha+\delta)x}} \int_x^\infty g^{c^x} e^{-(\alpha+\delta)x} dx \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

MAKEHAM zelf merkt reeds op, dat om deze funksie in tabel te brengen nodig zou zijn het vervaardigen van een tafel met 4 veranderliken, g, c, $\alpha + \delta$ en x; met 3 veranderliken zou het

zijns inziens nog gaan [1]), al is het bewerkelik, omdat de ruimte 3 afmetingen heeft; 4 afmetingen, zegt hij, „involve a difficulty which would puzzle the genius of Euclid himself to surmount". Hij had dienen te zeggen, dat EUCLIDES reeds bij 3 veranderliken de door hem bedoelde moeilikheden zou hebben gehad.

MAKEHAM stelt nu [2]) — we brengen in zijn werk bekortingen aan —:

$$-c^x \lg g = \eta$$

en

$$-\frac{\alpha+\delta}{\lg c} = m,$$

dus

$$g^{c^x} = e^{-\eta}$$

en

$$e^{-(\alpha+\delta)x} = e^{mx \lg c} = e^{m \lg c^x} = e^{m \lg \eta - m \lg \lg \frac{1}{g}} = \frac{\eta^m}{\left(\lg \frac{1}{g}\right)^m}.$$

Nu is dus

$$d\eta = -c^x \lg c \lg g \, dx = \eta \lg c \, . \, dx,$$

waaruit

$$dx = \frac{d\eta}{\eta \lg c}.$$

Daar voor $x = \infty$, in verband met $c > 1$ [3]), ook $\eta = \infty$, gaat de uitdrukking (1) onder aan pag. 121 over in

$$\bar{a}_x = \frac{e^\eta \eta^{-m}}{\lg c} \int_\eta^\infty e^{-\eta} \eta^{m-1} \, d\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

§ 92. De in (2) voorkomende integraal is een onvolledige gammafunksie. Schrijft men hiervoor $\Gamma_\eta(m)$, dan heeft men dus:

$$\bar{a}_x = \frac{e^\eta \eta^{-m}}{\lg c} \Gamma_\eta(m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Stelt men het slechts van η en m afhankelik gedeelte

$$e^\eta \eta^{-m} \Gamma_\eta(m)$$

---

[1]) W. M. MAKEHAM. On the method of calculating the differential coëfficients of a function from its differences etc. J. I. A. XVI. 1871. pag. 98.

[2]) W. M. MAKEHAM. On the law of mortality. J. I. A. XIII. 1867. pag. 349.

[3]) Zie pag. 48.

voor door $f(\eta, m)$, dan heeft men

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\lg c} f(\eta, m), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

waarbij de afhankelikheid van de lijfrente van c slechts daarin bestaat, dat de lijfrente het produkt is van een funksie alleen van c met een funksie van η en m.

Men heeft dus nog slechts met 3 grootheden, c, η en m te maken.

MAKEHAM spreekt niet over de grenzen tussen welke η en m zich bewegen. Hieromtrent valt op te merken, dat

$$\eta = -\lg g^{c^x},$$

zodat voor $x = 0$ $\eta = -\lg g$, voor $x = \infty$, d. i. de leeftijd voor welke de levenskans gelijk 0 is, $\eta = \infty$.

Verder is $m = -\frac{\alpha + \delta}{\lg c}$ afhankelik van de rentevoet. Voor een rentevoet 0 % is bij de H^M tafel $m = -0{,}06784$, bij 5 % $m = -0{,}60227$, bij 8 % nagenoeg $m = -1$; voor dezelfde tafel is de laagste waarde voor η 0,00101.

De laagste waarde die voor m voorkomt is die bij de Gothaer tafel, n.l. 0,044494 bij 0 %.

Is er dus een middel om $f(\eta, m)$ in tabel te brengen, dan zijn de grenzen hierboven aangegeven.

§ 93. Door partieële integratie vindt men voor (2)

$$\bar{a}_x = \frac{e^{\eta}\eta^{-m}}{\lg c} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta}\eta^{m-1}\, d\eta$$

$$= \frac{1}{\lg c} + \frac{(m-1)\, e^{\eta}\eta^{-m}}{\lg c} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta}\eta^{m-2}\, d\eta.$$

Hieruit blijkt, dat wanneer $\bar{a}_x$ eenmaal bekend is voor zekere waarde van m, de waarde ook te vinden is voor $m \pm 1$. Wil men dus een tabel maken, dan zou in elk geval voldoende zijn dit te doen voor waarden van m van 1 tot 2; in zijn genoemde

verhandeling komt MAKEHAM evenwel nog niet tot een praktiese uitkomst.

Daartoe stelt hij later [1]) in (1)

$$z = x \log c + \log\log \frac{1}{g}, \quad (\log = \text{Briggse log})$$

waaruit $$dz = dx \log c,$$

en $$\alpha + \delta = m \log c,$$

waardoor

$$g^{c^x} = 10^{\log g \,.\, 10^{x \log c}} = 10^{\log g \,.\, 10^z - \log\log \frac{1}{g}} = 10^{-10^z}$$

en

$$e^{-(\alpha+\delta)x} = e^{-m \log c \,.\, \frac{z - \log\log \frac{1}{g}}{\log c}} = e^{-mz}\, e^{m \log\log \frac{1}{g}},$$

zodat men vindt

$$\bar{a}_x = \frac{10^{10^z} \,.\, e^{mz}}{\log c} \int_z^\infty 10^{-10^z}\, e^{-mz}\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

MAKEHAM heeft een tabel berekend voor de waarden van

$$\log 10^{10^z}\, e^{mz} \int_z^\infty 10^{-10^z}\, e^{-mz}\, dz$$

en de partieële afgeleiden naar z en naar m voor z van -4 af tot 0 met opklimming van 0,1 en voor m van 1 af tot 1,9, eveneens met opklimming van 0,1. Het gebruik van het grondtal 10 voor de logaritmen tegelijk met het gebruik van $e^{-\delta x}$ is slecht verklaarbaar en absoluut onnodig; de bewerking is met het grondtal e niet lastiger, wel regelmatiger en meer in overeenstemming met de afleiding. In elk geval is en blijft het gebruik van de tabel biezonder gekomplieseerd en toch nog beperkt.

§ 94. Mc. CLINTOCK [2]) werkt de integraal

$$\int_z^\infty e^{-z}\, z^{m-1}\, dz,$$

---

[1]) W. M. MAKEHAM. On the integral of GOMPERTZ's Function for expressing the values of sums depending upon the Contingency of Life. J. I. A. XVII. 1873. pag. 305.

[2]) E. Mc. CLINTOCK. On the Computation of Annuities on MAKEHAM's Hypothesis. J. I. A. XVIII. pag. 242.

verder uit; zijn bewerking wordt, evenals die van MAKEHAM, overgenomen door M' LAUCHLAN [1]), die wel enkele onduidelikheden wegneemt — de verhandelingen van MAKEHAM en MC. CLINTOCK zijn bij uitstek onduidelik (ook BOHLMANN [2]) voelt dit als een bezwaar) — maar onnodig omslachtige afleidingen geeft. We geven een kortere afleiding die tot hetzelfde resultaat voert. Door integratie bij gedeelten vindt men

$$\int_z^\infty e^{-z} z^{m-1} dz = -\frac{1}{m} e^{-z} z^m + \frac{1}{m} \int_z^\infty e^{-z} z^m dz,$$

zie 2 blg 122

waardoor

$$\bar{a}_x = -\frac{1}{m \lg c} \left[1 - e^z z^{-m} \int_z^\infty e^{-z} z^m dz\right] \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De integraal in de laatste term laat zich voor niet te grote waarde van z als volgt uitwerken:

$$\int_z^\infty e^{-z} z^m dz = \int_0^\infty e^{-z} z^m dz - \int_0^z e^{-z} z^m dz \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

De eerste integraal is $\Gamma(m+1)$; de tweede vindt men door reeksontwikkeling:

$$\int_0^z z^m e^{-z} dz = \int_0^z z^m \left(1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) dz$$

$$= \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{z^{m+2}}{m+2} + \frac{z^{m+3}}{2!\,(m+3)} - \ldots$$

$$= z^{m+1}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{z}{m+2} + \frac{z^2}{2!\,(m+3)} \ldots\right).$$

Vermenigvuldigt men deze vorm met z^{-m} en met de reeks voor e^z, dan krijgt men

$$z\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right)\left(\frac{1}{m+1} - \frac{z}{m+2} + \frac{z^3}{2!\,(m+3)} \ldots\right),$$

---

1) J. J. M' LAUCHLAN. On joint life-annuities. (Transactions of the actuarial Society of Edinburgh) 1886. pag. 44.

2) G. BOHLMANN. Lebensversicherungsmathematik (Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften. I^2) 1901. pag. 878.

hetgeen neerkomt op

$$z\left(\frac{1}{m+1}+\frac{z}{(m+1)(m+2)}+\frac{z}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\ldots.\right).$$

Men verkrijgt daardoor na uitwerking van (6):

$$\bar{a}_x=-\frac{1}{m\lg c}\left[1-e^z z^{-m}\Gamma(m+1)+\frac{z}{m+1}+\frac{z^2}{(m+1)(m+2)}+\ldots.\right] \quad (8)$$

§ 95. Bedenkt men dat de hypergeometriese funksie

$$F(a, b, c, x)=1+\frac{a\,.\,b}{1\,.\,c}x+\frac{(a+1)\,a\,.\,(b+1)b}{1\,.\,2\,.\,c(c+1)}x^2+\ldots.$$

voor $b=1$, $c=m+1$, $x=\frac{z}{a}$ overgaat in

$$F\left(a, 1, m+1, \frac{z}{a}\right)=1+\frac{z}{m+1}+\left(1+\frac{1}{a}\right)\frac{z^2}{(m+1)(m+2)}+\ldots,$$

hetgeen voor $\lim a=\infty$ oplevert

$$\lim_{a=\infty} F\left(a, 1, m+1, \frac{z}{a}\right)=\varphi(m+1, z)=$$

$$=1+\frac{z}{m+1}+\frac{z^2}{(m+1)(m+2)}+\ldots.,$$

dan kan men (8) overbrengen in de gedaante

$$\bar{a}_x=\frac{\varphi(m+1, z)-e^z z^{-m}\Gamma(m+1)}{m\lg c} \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

Door vergelijking met (4) blijkt dus, dat de aldaar ingevoerde $f(m, z)$ wordt bepaald door de vergelijking

$$f(m, z)=\frac{\varphi(m+1, z)-e^z z^{-m}\Gamma(m+1)}{m}.$$

Nu blijkt $m=-\frac{a+\delta}{\lg c}$ voor alle bekende sterftetafels en voor elke rentevoet beneden ongeveer 8 % tussen 0 en -1 te liggen ($m=0$ voor $a=\delta=0$, d. i. voor $s=1$ en $i=0$, dus wanneer de tafel de wet van Gompertz volgt en de rentevoet 0 bedraagt; $m=-1$ voor $a+\delta=\lg vs=-\lg c$, d. i. voor $vs=\frac{1}{c}$ of voor $i=cs-1$, dat is voor een rentevoet van 8 % of daar boven). Maken we gebruik van de bekende betrekking

$$\Gamma(m+2)=(m+1)\Gamma(m+1),$$

dan gaat (8) over in

$$\bar{a}_x = \frac{1}{m \lg c}\left[\frac{e^z z^{-m}\,\Gamma(m+2)}{m+1} - \left(1 + \frac{z}{m+1} + \frac{z^2}{(m+1)(m+2)} + \ldots\right)\right] \quad (9)$$

(Een tabel voor $\Gamma(1+x)$ in 12 desiemalen voor waarden van x opklimmend met 0,001 van 1 tot 2 vindt men o.a. in het 2e deel van LEGENDRE. Traité des fonctions elliptiques).

De reeks konvergeert blijkbaar voor alle mogelike waarden van z en m, maar is voor enigszins grote waarden van z en voor waarden van m, die weinig verschillen van -1 voor berekening ongeschikt. Grote waarden van z komen bij hogere leeftijden spoedig te voorschijn, een waarde van m dicht bij -1 ontstaat eerst bij een rentevoet, hoger dan de in de praktijk gebruikelike. Het laatste bezwaar is dus niet groot, het eerste dient nader beschouwd te worden.

§ 96. BLASCHKE vermeldt[1]) de volgende poging van LAUDI om ook voor grote waarden van z een bruikbare reeks te verkrijgen:

Vervangt men in (6) z door $z(1+t)$, dan wordt de onderste grens gelijk aan 0 en de uitdrukking (6) gaat over in

$$\bar{a}_x = -\frac{1}{m \lg c}\left[1 - z^{m+1}\int_0^\infty (1+t)^m e^{-z(1+t)}\,dt\right] \quad . \quad . \quad (10)$$

We beschouwen nu de in (10) voorkomende integraal

$$z^{m+1}\int_0^\infty (1+t)^m e^{-z(1+t)}\,.\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Bedenkt men, dat men voor $w = pu$ heeft

$$\int_0^\infty u^{-m-1} e^{-pu}\,du = p^m \int_0^\infty w^{-m-1} e^{-w}\,dw$$

$$= p^m\,\Gamma(-m),$$

dan is

$$(1+t)^m = \frac{1}{\Gamma(-m)}\int_0^\infty u^{-m-1} e^{-(1+t)u}\,du.$$

---

[1]) E. BLASCHKE. Ueber eine Anwendung des Sterbegesetzes von GOMPERTZ-MAKEHAM (Mitteilungen des Verbandes der oesterr. und ungar. Versicherungstechniker. Heft IX). 1903. pag. 5.

Daardoor gaat (11) over in

$$\frac{z^{m+1}}{\Gamma(-m)}\int_0^\infty e^{-z(1+t)}\int_0^\infty u^{-m-1}e^{-u(1+t)}\,du\,dt$$

$$=\frac{z^{m+1}e^{-z}}{\Gamma(-m)}\int_0^\infty u^{-m-1}e^{-u}\,du\int_0^\infty e^{-t(z+u)}\,dt$$

$$=\frac{z^{m+1}e^{-z}}{\Gamma(-m)}\int_0^\infty \frac{u^{-m-1}e^{-u}}{z+u}\,du.$$

§ 97. Past men de ontwikkeling toe [1])

$$\frac{1}{z+u}=\frac{1}{z}-\frac{u}{z(z+1)}+\frac{u(u-1)}{z(z+1)(z+2)}\cdots\cdots,$$

dan wordt

$$\int_z^\infty e^{-z}z^m dz=\frac{z^m e^{-z}}{\Gamma(-m)}\Big[\int_0^\infty e^{-u}u^{-m-1}\,du$$

$$-\frac{1}{z+1}\int_0^\infty e^{-u}u^{-m}\,du+\frac{1}{(z+1)(z+2)}\int_0^\infty e^{-u}u^{-m}(u-1)\,du$$

$$-\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}\int_0^\infty e^{-u}u^{-m}(u-1)(u-2)\,du+\ldots\Big]. \quad (12)$$

Daarbij is

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{-m-1}\,du=\Gamma(-m)$$

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{-m}\,du=\Gamma(-m+1)=(-m)\,\Gamma(-m)$$

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{-m}(u-1)\,du=\Gamma(-m+2)-\Gamma(-m+1)$$

$$=(-m+1)(-m)\,\Gamma(-m)+m\,\Gamma(-m)$$

$$=m^2\,\Gamma(-m)$$

---

[1]) O. Schlömilch. Compendium der höheren Analysis II, 1874. pag. 264.

$$\int_0^\infty e^{-u}u^{-m}(u-1)(u-2)\,du = \Gamma(-m+3)-3\Gamma(-m+2)+2\Gamma(-m+1)$$
$$= -m(m^2+1)\,\Gamma(-m)$$

enz.

Brengt men deze uitkomsten in (12) over, dan vindt men

$$\int_z^\infty e^{-z}z^m\,dz = z^m e^{-z}\left[1+\frac{m}{z+1}+\frac{m^2}{(z+1)(z+2)}\right.$$
$$\left.+\frac{m(m^2+1)}{(z+1)(z+2)(z+3)}+\frac{m(m^3+4m+1)}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}+\ldots\right].$$

Voor de lijfrente $\bar{a}_x$ vindt men nu in verband met (6)

$$\bar{a}_x = \frac{1}{(z+1)\lg c}\left[1+\frac{m}{z+2}+\frac{m^2+1}{(z+2)(z+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{m^3+4m+1}{(z+2)(z+3)(z+4)}\ldots\right].$$

Voor $x=80$ vindt men voor de H^M tafel $\bar{a}_x = 4{,}612$; de werkelike waarde is 4,630. De hier gevormde reeks is konvergent juist voor de gevallen waarin (9) onvoldoende was.

§ 98. Langs een andere, omslachtiger weg komen TODHUNTER [1]), GRAM [2]) en VAN DEN BELT [3]) tot een uitdrukking die neerkomt op (8). Voor zover ons bekend heeft BOHLMANN [4]) het eerst gewezen op het voorkomen van de hypergeometriese funksies. De afleiding in dit geval geeft BROGGI [5]); hij schrijft zijn resultaat echter in een vorm, die voor het gebruik te ingewikkeld is, maar hij had deze gemakkelik kunnen vereenvoudigen tot onze vorm (8*a*); de afleiding die BROGGI geeft is eveneens onnodig omslachtig.

---

[1]) R. TODHUNTER. On the Approximate Evaluation of the Integral for the compound Survivorship Annuity. J. I. A. XXXIII. 1898. pag. 311.

[2]) J. P. GRAM. Om MAKEHAMS Dødelighedsformel (Aktuaren. Heft I). 1904. pag. 80.

[3]) Archief voor de Verzekeringswetenschap. VIII. 1906. pag. 381.

[4]) G. BOHLMANN. Lebensversicherungs-Mathematik (Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften. I^2). pag. 878.

[5]) H. BROGGI. Versicherungsmathematik. 1911. pag. 215.

§ 99. Keren we terug tot de uitdrukking (4) van pag. 123, en schrijven

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\lg c} f(z, m).$$

Hierin hangt bij een bepaalde sterftetafel z alleen af van de leeftijd, m alleen van de rentevoet. Bezit men nu een tabel $f(z, m)$ voor verschillende waarden van z en m, dan is de berekening van de kontienue lijfrenten eenvoudig. Men vindt een dergelijke tabel aangegeven door VAN DEN BELT [1]) en wel $f(z, 1-m)$ voor waarden van z van 0,0060 tot 0,0200, opklimmend met 0,0005 en voor waarden van $1-m$ van 1,340 tot 1,525, dus voor m van $-0{,}340$ tot $-0{,}525$, opklimmend met 0,05. Hij blijft dus ver binnen de door ons aangegeven grenzen. We hebben nagegaan welke bij hem de grenzen zijn; voor de leeftijden en voor de rentevoet vonden we bij gebruik van de H^M tafel, uit de bekende betrekkingen voor z en m, dat zijn tabel geldt voor leeftijden van ongeveer 20 tot 33 jaar, voor een rentevoet van ongeveer $2^1/_2$ tot $4^1/_4$ %.

Wil men nu voor een bepaalde sterftetafel, die afgerond is volgens de wet van MAKEHAM de waarde van de kontienue lijfrente berekenen voor een gegeven leeftijd en voor een gegeven persent, dan berekent men eerst uit de konstanten van de sterftetafel de grootheden z en m. Ligt de gevonden waarde voor z tussen twee opvolgende waarden uit de tabel en evenzo die voor m, dan bepaalt men de gezochte waarde van $f(z, m)$ door interpolatie, waarbij kan worden ondersteld, dat de aangroeiingen van de funksie evenredig zijn met die van de veranderlike.

Daarna heeft men de gevonden waarde voor $f(z, m)$ nog te delen door lg c.

Berekenen we als voorbeeld $\bar{a}_{30}$ voor de H^M tafel tegen 4 %.

Voor die tafel zijn de konstanten:

$$s = 0{,}99358 \qquad \alpha = -\lg s = 0{,}0061923$$
$$g = 0{,}999094 \qquad \beta = -\lg g = 0{,}0010518$$
$$c = 1{,}09744 \qquad \gamma = +\lg c = 0{,}0913133.$$

---

[1]) Archief voor de Verzekeringswetenschap. Deel IX. 1907. pag. 65.

Verder is $\delta = \lg(1+i) = \lg 1{,}04 = 0{,}0392207$.
Men vindt nu [1])

$$z = -c^x \lg g = 0{,}0162794$$

$$m = -\frac{a+\delta}{\lg c} = -0{,}4973317.$$

In de tabel van VAN DEN BELT vindt men voor:

	z	
m	0,0160	0,0165
— 0,495	1,6196	1,6142
— 0,500	1,6090	1,6038

waaruit door interpolatie, eerst voor m, daarna voor z

$$f(z,\ m) = 1{,}6117$$
$$\log f(z,\ m) = 0{,}20728$$
$$\log \bar{a}_{30} = \log f(z,\ m) - \log\lg c = 0{,}20728 - (0{,}96053 - 2)$$
$$= 1{,}24675,$$

dus
$$\bar{a}_{30} = 17{,}650.$$

§ 100. Juist omdat $\bar{a}_x$ voor een bepaalde sterftetafel evenredig is met $f(z,\ m)$, kan uit de tabel voor $f(z,\ m)$ onmiddellik een tabel voor $\bar{a}_x$ worden afgeleid voor verschillende leeftijden en voor verschillende persenten.

We zullen nu nog bewijzen, dat een zodanige tabel, eenmaal afgeleid voor een willekeurige tafel, bijvoorbeeld de H^M tafel, ook te gebruiken is voor elke andere tafel, die afgerond is volgens de wet van MAKEHAM.

Laten voor twee verschillende tafels de volgende tekens bestaan:
$\bar{a}_x$ en $\bar{a}_{x_1}$ voor de lijfrenten,
x en x_1 voor de leeftijden,
$s,\ g,\ c,\ a$ en $s_1,\ g_1,\ c_1,\ a_1$ voor de konstanten,
$\delta,\ v$ en $\delta_1,\ v_1$ voor de diskonteringsfaktoren,
dan zullen we onder „overeenkomstige" waarden verstaan zodanige waarden voor de lijfrenten, de leeftijden en de persenten, waarbij

[1]) Zie pag. 122.

voor de beide tafels de waarden van z en m beide, dus ook de waarden van $f(z, m)$ gelijk worden.

Men heeft dan: $$\bar{a}_x = \frac{f(z, m)}{\lg c}$$

en $$\bar{a}_{x_1} = \frac{f(z, m)}{\lg c_1},$$

dus $$\bar{a}_x \lg c = \bar{a}_{x_1} \lg c_1,$$

waaruit $$\bar{a}_{x_1} = \frac{\lg c}{\lg c_1} \bar{a}_x = \frac{1}{\lambda} \bar{a}_x,$$

dus de lijfrenten in het ene sisteem zijn veelvouden van die in het andere sisteem.

Uit de gelijkheid van de waarden voor z volgt:

$$c^x \lg \frac{1}{g} = c_1^{x_1} \lg \frac{1}{g_1},$$

waaruit

$$x = x_1 \frac{\lg c_1}{\lg c} + \frac{\lg \lg \frac{1}{g_1} - \lg \lg \frac{1}{g}}{\lg c}$$

of

$$x = \lambda x_1 + \varepsilon,$$

dus de leeftijden van het ene sisteem zijn lieneaire funksies van van de leeftijden van het andere.

Uit de gelijkheid van de waarden voor m volgt de uitdrukking

$$\frac{\alpha + \delta}{\lg c} = \frac{\alpha_1 + \delta_1}{\lg c_1}$$

of

$$\frac{\lg s + \lg v}{\lg c} = \frac{\lg s_1 + \lg v_1}{\lg c_1},$$

waaruit

$$\lg vs = \frac{1}{\lambda} \lg v_1 s_1$$

of $$\lg v = \frac{1}{\lambda} \lg v_1 + \frac{1}{\lambda} \lg s_1 - \lg s$$

of $$\lg v = \frac{1}{\lambda} \lg v_1 + \varrho,$$

dus de logaritmen van de diskonteringsfaktoren van het ene sisteem zijn eveneens lieneaire funksies van die van het andere.

Tevens blijkt, dat de in de beide lieneaire funksies optredende faktoren elkanders omgekeerden zijn.

We vinden hier de eigenschappen terug, die we op pag. 119 en 120, langs andere weg hebben gevonden.

§ 101. De vraag is nu nog te stellen welke unieversaaltafel de meeste aanbeveling verdient, die van GRAM voor log $\bar{a}_x$ of die van VAN DEN BELT voor $f(z, m)$. Beide tafels hebben gemeen, dat ze vrijwat berekening vorderen voor hun samenstelling, verder dat ook hun toepassing vrij veel berekening kost. De samenstelling van een unieversaaltafel evenwel is een werk, dat slechts eenmaal behoeft te geschieden. Eenmaal berekend is hij voor altijd van nut; verandering van rentevoet, verandering van sterftetafel brengt niet mede, dat alle kommutatietafels [1]) moeten worden vervangen door nieuwe. Dit kunnen we daarom tevens hier inlassen als een voordeel van de kontienue metode en van de afronding volgens de wet van MAKEHAM. Vooral zal dit voordeel worden erkend, wanneer men bedenkt, dat op die wijze mogelik is voor een enkel geval bij willekeurige sterftetafel en rentevoet een uitkomst voor $\bar{a}_x$ te vinden zonder dat het nodig is volledige kommutatietafels te berekenen.

Wil men de jaarrente a_x hebben, dan is die te vinden uit [2])

$$\bar{a}_x = a_x + {}^1/_2 - {}^1/_{12}(\mu_x + \delta)$$

of voor prakties gebruik bij benadering uit

$$\bar{a}_x = a_x + {}^1/_2.$$

De tafel voor log $\bar{a}_x$ zou boven die voor $f(z, m)$ te verkiezen zijn, indien men voor μ_x had aangenomen een uitdrukking, passende bij een bestaande, veel toegepaste sterftetafel, bijvoorbeeld de H^M tafel; de waarde voor μ_x toch, door GRAM aangenomen, is wel tamelik eenvoudig van vorm, doch die eenvoudigheid brengt in de berekeningen geen bekorting en heeft dus geen zin. De tafel voor $f(z, m)$ gaat niet van één bepaalde formule uit, is daarom algemener en verdient daarom aanbeveling.

§ 102. Van groot nut voor de praktijk is ook de afleiding van

---

[1]) Zie pag. 112.

[2]) Zie pag. 12 formule (24) en (25).

een tabel voor $\bar{a}_x$ zelf; we vinden bij BLASCHKE [1]) een uitvoerige tabel volgens de H^M tafel voor alle leeftijden van 25 tot 100 en een rentevoet van 0,1 % tot 5,5 % met opklimming van 0,1 %; de tabel bevat echter de waarden van de jaarrente a_x, praenumerando en voor jaartermijnen. Dit hangt samen met het volgende:

Vervangt men in de uitdrukking

$$\bar{a}_{x_1} = \frac{1}{\lambda}\,\bar{a}_x$$

de lijfrenten door hun benaderde waarde [2]), dan vindt men na omwerking

$$a_x + {}^1/_2 = \frac{1}{\lambda}\,(a_{x_1} + {}^1/_2) + {}^1/_{12}\left(\mu_x - \frac{1}{\lambda}\,\mu_{x_1} + \delta - \frac{1}{\lambda}\,\delta_1\right).$$

Nu blijkt bij onderzoek, dat voor verschillende tafels de waarde van de vorm

$$\mu_x - \frac{1}{\lambda}\,\mu_{x_1} + \delta - \frac{1}{\lambda}\,\delta_1$$

voor de leeftijden tot 70 jaar beneden 0,0008 blijft, voor leeftijden tot 90 jaar nog geen 0,003 wordt. Voor alle leeftijden is, wanneer men met een uitkomst nauwkeurig tot in 3 desiemalen tevreden is, te schrijven

$$a_x + {}^1/_2 = \frac{1}{\lambda}\,(a_{x_1} + {}^1/_2).$$

Deze laatste uitdrukking wordt op elementaire maar minder strenge wijze ook afgeleid door ACHARD. [3])

Als voorbeeld zullen we uit de tafel van BLASCHKE voor a_x volgens de H^M tafel afleiden de waarde van a_{60} bij $3^1/_2$ % voor de A.Ftafel. We hebben dan

H^M	$\log s = 0{,}0026893$	$\log g = 0{,}0004568$	$\log c = 0{,}0396569$
A.F	$\log s_1 = 0{,}0021800$	$\log g_1 = 0{,}0006780$	$\log c_1 = 0{,}0380960$

---

[1]) E. BLASCHKE. Ueber eine Anwendung des Sterbegesetzes von GOMPERTZ-MAKEHAM (Mitteilungen des Verbandes der oesterr. und ungar. Versicherungstechniker. Heft IX). 1903. pag. 16.

[2]) Zie pag. 12 formule (24) en (25).

[3]) M. A. ACHARD. Note sur la deuxième propriété de la formule de MAKEHAM. B. A. F. XXI. 1911. pag. 201.

zodat

$$\lambda = \frac{0{,}0380960}{0{,}0396569} = 0{,}9606380$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}0006780 - 0{,}0004568}{0{,}0396569} = 4{,}32$$

$$x = 0{,}960838 \times 60 + 4{,}32 = 61{,}962$$

$$\delta = 0{,}0344014.$$

Uit $a_1 + \delta_1 = \lambda(a + \delta)$ volgt na berekening

$$i = 0{,}035458.$$

Dus om a_{60} bij $3^1/_2\,\%$ voor A.F te vinden, heeft men te nemen $a_{61,962}$ bij $3{,}5458\,\%$ voor H^M; uit de waarden voor a_{61} en a_{62} bij $3{,}5\,\%$ en $3{,}6\,\%$ vindt men door interpolatie voor de gevraagde waarde 9,119.

Nu is de gevraagde waarde

$$a_{60} = \lambda \times 9{,}619 - 0{,}5 = 9{,}513.$$

De juiste waarde bedraagt 9,511.

§ 103. De 3 vergelijkingen, die met de unieversaaltafel verband houden

$$\bar{a}_{x_1} = \frac{1}{\lambda}\,\bar{a}_x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$x = \lambda x_1 + \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\lg v = \frac{1}{\lambda}\lg v_1 + \varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

kunnen, zoals men zal inzien, ook worden gebruikt tot afleiding van vraagstukken, die als omgekeerden van de door ons behandelde kunnen worden aangemerkt, bijvoorbeeld om bij een voor een gegeven sterftetafel gegeven leeftijd en gegeven kontante waarde van een lijfrente de gebruikte rentevoet af te leiden. Men bepaalt hier eerst met behulp van de konstanten van de unieversaaltafel de waarde $\lambda = \frac{\lg c_1}{\lg c}$, daarna ε; dan brengt men $\bar{a}_{x_1}$ en x_1 over naar de unieversaaltafel, dus in $\bar{a}_x$ en x, waaruit de rentevoet v wordt gevonden en deze is met behulp van (3) om te zetten in v_1.

Zijn x'_1 en x'_2 de in de unieversaaltafel met de leeftijden x_1 en x_2 van een andere tafel korresponderende leeftijden, dan heeft men

$$x'_2 = \lambda x_2 + \varepsilon$$

$$x'_1 = \lambda x_1 + \varepsilon,$$

waaruit

$$x'_2 - x'_1 = \lambda(x_2 - x_1).$$

Evenzo vindt men

$$\lg v_2 - \lg v_1 = \lambda\,(\lg v'_2 - \lg v'_1).$$

Men heeft dus:

$$\frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} = \frac{\lg v_2 - \lg v_1}{\lg v'_2 - \lg v'_1} = \frac{\bar{a}'_{x_1}}{\bar{a}_{x_1}} = \frac{\bar{a}'_{x_2}}{\bar{a}_{x_2}}.$$

Deze betrekkingen, nog uit te breiden door voor $\bar{a}_x$ bij benadering $a_x + {}^1/_2$ te schrijven, openen de weg voor een uitgebreid veld van toepassing.

§ 104. Een andere toepassing die van de unieversaaltafel is te maken berust op de vergelijking:

$$\bar{a}_x = \frac{e^z z^{-m}}{\lg c} \int_z^\infty e^{-z} z^{m-1}\, dz = \frac{e^z z^{-m}}{\lg c}\, \Gamma_z(m)\,[1]).$$

Hieruit volgt, dat:

$$\Gamma_z(m) = e^{-z} z^m \bar{a}_x \lg c,$$

d. w. z. wanneer een unieversaaltafel gegeven is, kan daaruit een tabel voor de onvolledige gammafunksie worden afgeleid, en wel voor die grenzen van z en m, die volgen uit de verschillende waarden voor de rentevoet welke in de unieversaaltafel voorkomen.

§ 105. Bekend is de eigenschap, waardoor het mogelik is lijfrenten op meer hoofden bij sterftetafels, afgerond volgens de wet van GOMPERTZ of van MAKEHAM, op eenvoudige wijze te berekenen. De vele bewijzen die daarvoor zijn gegeven behoeven hier niet te worden vermeld. We willen alleen herinneren aan het belangrijke verschil, dat er tussen de beide formules bestaat.

Zie pag. 122.

De wet van GOMPERTZ brengt de lijfrenten op meer hoofden terug tot die op één hoofd, zodat het afleiden van nieuwe kommutatietafels onnodig is; de wet van MAKEHAM daarentegen maakt alleen de leeftijden gelijk, eist dus wel de berekening van kommutatietafels voor 2, 3 en eventueel meer levens. Het schijnt van weinig bekendheid — in de gebruikelike leerboeken vinden we er tenminste niet veel over — dat het, ook wanneer de sterfte de wet van MAKEHAM volgt, mogelik is lijfrenten op meer hoofden terug te brengen tot die op één hoofd, wanneer men tevens de rentevoet wijzigt. Men wil dus trachten te voldoen aan de vergelijking

$$\bar{a}_{xyz\ldots.(m)}\ (\text{rentevoet}\ \delta) = \bar{a}_{w}\ (\text{rentevoet}\ \delta_1).$$

In de integraal voor $\bar{a}_{xyz\ldots.(m)}$ [1]) komt voor

$$\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \ldots. + \delta.$$

Tracht men hiervoor te schrijven

$$\mu_{w+t} + \delta_1,$$

dan moet, daar volgens MAKEHAM

$$\mu_{x+t} = a + bc^{x+t},$$

voldaan worden aan de vergelijking:

$$ma + b(c^{x+t} + c^{y+t} + \ldots.) + \delta = a + bc^{w+t} + \delta_1.$$

Hieraan wordt voldaan door:

$$\begin{cases} c^{w} = c^{x} + c^{y} + \ldots. \\ a + \delta_1 = ma + \delta \end{cases}$$

en

of

$$\begin{cases} \mu_{w} = \Sigma\mu_{x} - (m-1)\,a \\ \delta_1 = (m-1)\,a + \delta. \end{cases}$$

en

Na de eenvoudige berekening van w en δ_1 brengt men deze op de gewone wijze tot hun korresponderende grootheden voor de unieversaaltafel over.

§ 106. Tot slot willen we in dit hoofdstuk nog melding maken van een poging om de kontienue lijfrente te berekenen met behulp van een formule, die de gedaante heeft van de formule van

---

[1]) Zie pag. 12, formule (26).

MAKEHAM. Dit is gedaan door STEFFENSEN [1]). Deze meent, dat men de sterfte-intensieteit van een bevolking — waarvoor men de waarde $\frac{1}{\bar{e}_x}$ vindt, wanneer $\bar{e}_x$ de gemiddelde levensduur voorstelt — wel mag voorstellen door een funksie van dezelfde gedaante als de sterfte-intensieteit μ_x van een groep personen die alle x jaar zijn. En dan gaat hij nog een stap verder, beschouwt $\bar{a}_x$ als de gemiddelde levensduur voor de leeftijd x, indien de oorspronkelike μ_x voor alle leeftijden wordt vermeerderd met de konstante δ en neemt daarom aan, dat $\frac{1}{\bar{a}_x}$ ook kan worden voorgesteld door een funksie van dezelfde gedaante als μ_x. Hij schrijft daarom:

$$\frac{1}{\bar{a}_x} = \alpha + \beta\gamma^x.$$

Door proefneming vond hij, dat in deze formule de waarde van γ — gelijk ook in de formule van MAKEHAM met de grootheid c het geval is — voor verschillende tafels nagenoeg konstant is; hij geeft op $\gamma = 10^{0,026}$. Er zijn dus nog 2 konstanten α en β te bepalen; daarvoor worden verschillende metoden aangegeven. De ingewikkeldheid van de berekeningen doet evenwel twijfelen of er voor de praktijk van de hier besproken formule veel te verwachten is; trouwens STEFFENSEN zelf spreekt slechts van een poging en meent dat de door hem opgeworpen kwestie nadere bestudering vereist. Zijn biezondere onderstellingen maken dit alleszins noodzakelik.

§ 107. Voor zoover ons bekend, is die verdere bestudering slechts door STEFFENSEN zelf geschied. Hij vermeldt later [2]), dat hij heeft getracht ook de kontienue lijfrente bij uitgezochte tafels door een formule voor te stellen. Hij wil daartoe een formule gebruiken van de gedaante van die van MAKEHAM, maar zo, dat deze een

---

[1]) J. F. STEFFENSEN. Notes on the practical graduation of life insurance tables. (Ver Internationaler Kongress für Versicherungs-Wissenschaft). 1905. pag 247.

[2]) J. F. STEFFENSEN. On a formula facilitating the application of select mortality for all durations (Svenska Actuarieföreningens Tidskrift IV) 1917. pag. 78.

funksie is zowel van de leeftijd x als van de verzekeringsduur t en schrijft

$$\frac{1}{\bar{a}_{[x]+t}} = \alpha_x + \beta_x c^t$$
$$= \alpha_t + \beta_t c^x,$$

waarbij α_x en β_x alleen afhangen van x, α_t en β_t alleen van t. Hij stelt nu

$$\alpha_x = \alpha - \varkappa c^x$$
$$\beta_x = \beta c^x - \lambda$$

en

$$\alpha_t = \alpha - \lambda c^t$$
$$\beta_t = \beta c^t - \varkappa,$$

zodat men heeft

$$\frac{1}{\bar{a}_{[x]+t}} = \alpha + \beta c^{x+t} - \varkappa c^x - \lambda c^t.$$

Aangaande de konstanten valt op te merken, dat $c > 1$ moet zijn. Hij vond weer, dat ook hier $c = 10^{0.026}$ genomen kan worden.

Schrijft men de formule in de gedaante

$$\frac{1}{\bar{a}_{[x]+t}} = (\beta c^x - \lambda)\left(c^t - \frac{\varkappa}{\beta}\right) + \alpha - \frac{\lambda\varkappa}{\beta},$$

dan moet nog $\beta > 0$ en $\beta > \varkappa$ zijn; ook moet $\beta c^x > \lambda$ zijn of wel $\beta_x > 0$. Is aan deze voorwaarden niet voldaan, dan zou het namelik kunnen voorkomen, dat voor bepaalde waarden van x en t de uitkomst van $\frac{1}{\bar{a}_{[x]+t}}$ negatief werd.

Ook hier zullen we op de berekening van de konstanten niet ingaan; het oordeel over de formule moet eveneens worden opgeschort tot later. Wel mag nog even worden opgemerkt, dat STEFFENSEN zelf mededeelt[1]), dat men evengoed een tafel kan gebruiken, die ontstaat door $\varkappa = \lambda = 0$ te nemen, zodat dan zijn vroegere formule van pag. 138 terugkomt. Hij vond n.l. bij onderzoek, dat de waarde van $\varkappa c^x + \lambda c^t$ ten opzichte van $\alpha + \beta c^{x+t}$ gering is en, wat voor de praktijk van belang is, dat op die wijze, de waarde voor $\bar{a}_x$ kleiner wordt dan bij de uitgebreide formule.

---

[1]) STEFFENSEN l. c. pag. 97.

STELLINGEN.

I.

Het gebruik van een sterfteformule is slechts onder bepaalde voorwaarden goed te keuren.

II.

Een algemeene toepassing van de kontienue metode in de verzekeringswetenschap is niet te verwachten.

III.

De unieversele notatie voor de verzekeringswiskunde (Transactions of the Second International Actuarial Congress. 1899, pag. 633) behoort te worden uitgebreid tot het gebied van de ziekte- en de invaliedieteitsverzekering.

IV.

De afleiding van de formule voor log l_x door JÖRGENSEN (Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung, pag. 79) is onjuist.

V.

De berekening, die RENFER (Beiträge zur Krankenversicherung, pag. 69) geeft voor de reduksiefaktor, met behulp van de waarnemingen van HEYM (Anzahl und Dauer von Krankheiten) is in strijd met de door hem vooraf (Beiträge, pag. 65) afgeleide formule.

VI.

De oplossing, die LAURENT (Théorie et pratique des assurances sur la vie, pag. 51) geeft van de integraal $\int_1^\infty e^{qt} t^{-\varepsilon}\, dt$ is voor het betrokken vraagstuk ongeschikt.

VII.

De afleiding van mej. SNETHLAGE (Moleculair-Kinetische verschijnselen in gassen, inzonderheid de Brown'sche beweging, pag. 29, en Over de Brown'sche beweging in gassen. Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. XXIV. pag. 1539) voor de uitwijking van een in een gas of een vloeistof gesuspendeerd deeltje is aan bedenking onderhevig.

VIII.

De uiteenzettingen van ZURHELLEN (Zur Frage der astronomischen Kriterien für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Astron. Nachrichten. Band 198. pag. 1) over de invloed van de snelheid van een bewegende lichtbron op de voortplantingssnelheid van het licht zijn weinig overtuigend.

IX.

De afleiding van de gemiddelde en van de middelbare afwijking zoals die in de regel wordt gegeven (zie bijv. CZUBER. Wahrscheinlichkeitsrechnung. I. pag. 125) is door een elementaire te vervangen.

X.

Aan het doktoraat in de wis- en natuurkunde behoort de bevoegdheid te zijn verbonden tot het geven van onderwijs in rechtlijnig tekenen.

XI.

Het verdient aanbeveling tabellen aan te leggen van reeds opgeloste differentieaalvergelijkingen.

XII.

De behandeling van het hoofdstuk over samengestelde intrestrekening laat in de gebruikelike leerboeken over de algebra veel te wensen over.

XIII.

Het is in hoge mate wenselik, dat de hollandse instellingen voor ziekteverzekering samenwerken tot verkrijging van een bruikbare ziektestatistiek.

XIV.

Het gebruik van de uitdrukking „beeldende wiskunde" door SCHOENMAEKERS (Beginselen der Beeldende Wiskunde, en Het Nieuwe Wereldbeeld) mag niet worden goedgekeurd.

XV.

De oprichting van de zogenaamde „volksunieversiteit" verdient alle steun.