



Kenmerkende getallen voor een viervoudig oneindig lineair stelsel van algebraïsche vlakke krommen

<https://hdl.handle.net/1874/269823>

2^e 192

Jhys 5 Mei 1919

KENMERKENDE GETALLEN

VOOR EEN VIERVOLDIG ONEINDIG LINEAIR STELSEL VAN
: ALGEBRAÏSCHE VLAKKE KROMMEN. :



A. M. P. ROCHOLL.

A. qu,
192

KENMERKENDE GETALLEN

VOOR EEN VIERVoudig ONEINDIG LINEAIR STELSEL
VAN ALGEBRAÏSCHE VLAKKE KROMMEN.

KENMERKENDE GETALLEN
VOOR EEN VIERVOLDIG ONEINDIG LINEAIR STELSEL
VAN ALGEBRAÏSCHE VLAKKE KROMMEN.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. G. W. KERNKAMP,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Maandag 5 Mei 1919, des namiddags te 4 uur,

DOOR

ARNOLD MELCHIOR PETER ROCHOLL

geboren te UTRECHT.



Electr. drukkerij «de Industrie» J. VAN DRUTEN — Utrecht.

1919.

AAN MIJNE OUDERS.

Gaarne maak ik van deze gelegenheid gebruik om U, Hoogleeraren en Oud-Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit mijn welgemeenden dank te betuigen voor het onderwijs, dat ik van U mocht ontvangen.

De tijd, Hooggeleerde JULIUS, dien ik als assistent in het Physisch Laboratorium heb doorgebracht, zal mij steeds in aangename herinnering blijven.

Niet minder gevoel ik mij aan U verplicht, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor. Uw duidelijke en boeiende colleges zal ik als docent voortdurend blijven beschouwen als een practisch ideaal. Uw voorlichting en belangstelling bij het vervaardigen van dit proefschrift ondervonden, zullen mij steeds met warme dankbaarheid vervullen.

INHOUD.

	Blz.
Inleiding	1
Geschiedenis.	2
Litteratuur-Overzicht	5
Overzicht van de werkwijze ter bepaling van kenmerkende getallen voor een k-voudig oneindig lineair stelsel van vlakke algebraïsche krommen.	7
Overzicht van kenmerkende getallen voor Bundels, Netten en Complexen.	12
HOOFDSTUK I.	
Afleiding van de aantallen krommen c^n , voorkomende in een stelsel S_B^4 , die in het bezit zijn van een bijzondere raaklijn, waarvan een der raakpunten in B is gelegen.	17
HOOFDSTUK II.	
Afleiding van de aantallen van bijzondere raaklijnen, die uit een willekeurig punt P aan krommen van een algemeen stelsel S^4 kunnen worden getrokken.	31
HOOFDSTUK III.	
Afleiding van de aantallen van bijzondere raaklijnen, die in een S_B^4 uit het basispunt B kunnen worden getrokken.	41
HOOFDSTUK IV.	
Afleiding van de aantallen van krommen, die een bijzondere raaklijn bezitten	52
Overzicht van kenmerkende getallen voor een vier-voudig oneindig lineair stelsel van algebraïsche vlakke krommen	77
Stellingen.	81

INLEIDING.

Onder een *k*-voudig oneindig lineair stelsel van vlakke algebraïsche krommen van den n^{den} graad verstaat men een verzameling van ∞^k vlakke algebraïsche krommen van den n^{den} graad, die de eigenschap heeft, dat er door *k* willekeurig gekozen punten slechts één kromme gaat.

Indien men als grondexemplaren de $(k + 1)$ krommen neemt, die tot symbolische vergelijkingen hebben

$$f_1 = 0, f_2 = 0 \dots f_{k+1} = 0$$

(deze vergelijkingen moeten onafhankelijk zijn), dan is de vergelijking van het meest algemeene stelsel S^k

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \dots + \lambda_{k+1} f_{k+1} = 0,$$

waarin $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{k+1}$ veranderlijke parameters voorstellen.

Voor $k = 0$ heeft men een enkele vlakke algebraïsche kromme van den n^{den} graad, c^n ; waar in het volgende over „een kromme” zonder meer wordt gesproken, wordt steeds een c^n bedoeld.

Voor $k = 1$ heeft men een bundel van c^n , symbolisch door (c^n) voorgesteld; voor $k = 2$ een net van c^n , $[c^n]$, voor $k = 3$ een complex van c^n , $\{c^n\}$.

Een *viervoudig oneindig lineair stelsel* van c^n (S^4) zullen wij door $\|c^n\|$ voorstellen.

Met uitzondering van een bundel zijn er in een lineair stelsel in 't algemeen geen punten (*basispunten*), welker coördinaten aan de vergelijkingen van alle grondexemplaren van het beschouwde stelsel voldoen.

Een lineair stelsel, dat een basispunt bezit, moet als bijzonder stelsel S^k_B worden aangemerkt.

Een *p*-voudig punt van alle grondexemplaren van S^k noemt men een *p*-voudig punt van S^k .

Alle krommen van het stelsel S^k , die door eenzelfde punt P gaan, vormen een stelsel S^{k-1} met P als basispunt.

GESCHIEDENIS.

Tot het midden der 19^{de} eeuw zijn geen kenmerkende getallen voor lineaire stelsels bepaald.

Het oudste kenmerkend getal komt voor in een verhandeling van STEINER, getiteld „Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven” (Journal für Math., 47, 1854, p. 1).

Zonder bewijs vindt men daar vermeld het aantal krommen met een dubbelpunt (*nodale krommen*) in een algemeenen bundel van c^n , n.l. $3(n-1)^2$.

Het bewijs dezer stelling treft men voor het eerst aan bij CREMONA, die, onder verschillende bijzondere gevallen, ook den invloed van een p -voudig basispunt onderzoekt. (Ann. di Mat. (1), 6, 1864, p. 153; zie ook Cremona—Curtze, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven 1865, p. 122 en 261).

Verder is door STEINER de kromme van den graad $(2n-1)$ onderzocht, die de meetkundige plaats is van de aanrakingspunten der uit een willekeurig punt P aan de krommen van een bundel getrokken raaklijnen („äussere Panpolare”; Journal für Math., 47, 1854). Zij wordt door Prof. JAN DE VRIES *poolkromme* van den bundel genoemd. (Archives Teyler, sér. II, 11, p. 99).

Door WEYR (Sitzungsberichte der Akademie in Wien, 61, 1870, p. 82) is zij toegepast bij het afleiden van de klasse der kromme, welke door de buigraaklijnen wordt omhuld.

Prof. JAN DE VRIES (Versl. K. A. v. Wetensch. 13, 1905, p. 749) bepaalde ook den graad der kromme (*satellietkromme*), die de meetkundige plaats is der punten, welke elke uit een punt P getrokken raaklijn nog met haar c^n gemeen heeft, en leidde vervolgens het aantal dubbelraaklijnen af, die uit P kunnen worden ge-

getrokken. Een systematisch onderzoek der poolkromme treft men aan bij GUCCIA (Rend. di Palermo, 7, 1893 en 9, 1895), die haar o.a. toepaste bij de constructie en het onderzoek van de kromme van JACOBI, die de meetkundige plaats is van de dubbelpunten en van de buigpunten der krommen van een net.

De poolkrommen van alle punten in het vlak t.o.v. de exemplaren van een bundel vormen een net.

GUCCIA onderzocht ook de kromme van JACOBI van dit net, die zoowel de meetkundige plaats is der aanrakingspunten van de uit de punten van het vlak naar de overeenkomstige poolkrommen getrokken raaklijnen, als de meetkundige plaats der buigpunten der krommen van den bundel. Deze kromme is van den graad $6(n-1)$ (Rend. di Palermo, 9, 1895, p. 30). Haar klasse is bepaald door BOBEK (Casopis, 11, 1882, p. 283.)

Prof. JAN DE VRIES bepaalde (Versl. K. A. v. Wetensch., 14, 1906, p. 844) met behulp van den graad der kromme van JACOBI het aantal vierpuntige raaklijnen (t_4) en met behulp van den graad der *bitangentialkromme* (P. H. SCHOUTE, Wiskundige opgaven, 2, 1886, p. 307) de aantallen raaklijnen $t_{3,2}$ en $t_{2,2,2}$.

Een bundel met een veelvoudig basispunt wordt beschouwd door CHIZZONI.

In een net komen voor

$\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$ krommen, die in het bezit zijn van twee dubbelpunten (*binodale krommen*) en $12(n-1)(n-2)$ krommen met een keerpunt.

(*cuspidale krommen*).

STEINER (Journal für Math., 47, 1854, p. 4) gaf deze getallen reeds voor het bijzonder net, dat gevormd wordt door de eerste poolkrommen van alle punten van een plat vlak t.o.v. een aangenomen kromme c^n .

DE JONQUIÈRES (Math. Ann., 1, 1869, p. 424) en JAN DE VRIES (Versl. K. A. v. Wetensch., 13, 1905, p. 708)

leidden deze aantallen af voor een algemeen net.

De kromme van JACOBI, als meetkundige plaats der buigpunten van netkrommen, is van den graad $3(n-1)$ (GUCCIA, Rend. di Palermo, 9, 1895, p. 21). Zij is ook de meetkundige plaats der punten, waarvan de pool-rechten met betrekking tot de netkrommen elkaar in eenzelfde punt S snijden (STEINER).

De meetkundige plaats van S is de kromme van STEINER; haar graad is $3(n-1)^2$. Tusschen de punten J der kromme van JACOBI en de punten S der kromme van STEINER bestaat een overeenkomst één aan één. De rechte, die twee overeenkomstige punten J en S verbindt, raakt in de punten J aan alle er doorheengaande netkrommen. De omhulde dezer rechten is de kromme van CAYLEY; zij is van de klasse $3n(n-1)$.

De kromme van JACOBI, als meetkundige plaats van het punt, waarin twee en daarmee oneindig vele krommen van het net elkaar aanraken, is behandeld door KÖRTER (Math. Ann., 34, 1888, p. 123).

Andere kenmerkende getallen vindt men in een verhandeling van Prof. JAN DE VRIES getiteld „Kenmerkende getallen van netten van vlakke algebraïsche krommen” (Versl. K. A. v. Wetensch., 23, 1914, p. 862).

Een onderzoek naar de kenmerkende getallen van een complex van c^n is verricht door den Italiaanschen mathematicus CAPORALI (Collectanea Math. in mem. D. Chelini, Mediol. 1879) en door Prof. JAN DE VRIES (Versl. K. A. v. Wetensch., 23, 1914, p. 907).

Voor zoover mij bekend is, werd het viervoudig oneindig lineaire stelsel S^4 van c^n tot dus verre niet aan een onderzoek onderworpen.

Algemeene eigenschappen van een k -voudig oneindig lineair stelsel van c^n , waarbij tevens de invloed van

een meervoudig basispunt wordt nagegaan, treft men aan bij GUCCIA en DOEHLEMANN.

Tenslotte vermelden wij hier, dat lineaire systemen optreden bij onderzoekingen over puntengroepen, die een rationaal-invariant karakter dragen, d.w.z. bij rationale transformatie onveranderd blijven.

In het bijzonder hebben Italiaansche mathematici (CASTELNUOVO) zich in deze richting met lineaire systemen van krommen beziggehouden.

LITTERATUUR-OVERZICHT.

- | | |
|-------------------|---|
| J. STEINER: | Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven (Journal für Math., 47, 1854). |
| _____: | Gesammelte Werke, herausgeg. von K. WEIERSTRASS, Berlin, 1882, 2. |
| L. CREMONA: | Questioni nella teoria d. curve piane (Ann. di. mat. (1), 6, 1864). |
| _____: | Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven. Übers v. M. Curtze, Greifswald, 1865. |
| F. DE JONQUIÈRES: | Sur les réseaux de courbes. (Math. Ann., 1, 1869). |
| E. CAPORALI: | Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane. (Collectanea math. in mem. D. CHELINI, Mediol. 1879). |
| E. WEYR: | Ueber Curvenbüschel. (Sitzungsberichte der Akademie in Wien, 61, 1870). |
| K. BOBEK: | (Casopis, Prag, 11, 1882). |
| F. CHIZZONI: | Sopra le involuzioni nel piano. (Mem. Acc. dei Lincei (3), 19, 1883). |
| P. H. SCHOUTE: | Wisk. opgaven, 2, 1886. |
| E. KÖTTER: | Die Hesse'sche Curve in rein geo- |

- metrischer Behandlung. (Math. Ann., 34, 1888).
- K. DOEHLEMANN: Ueber lineare Systeme in der Ebene und über deren Jacobi'sche Curve. (Math. Ann., 41, 1892).
- G. CASTELNUOVO: Ricerche generali sopra sistemi lineari di curve piane. (Mem. d. R. A. di Torino (2), 42, 1892).
- G. B. GUCCIA: Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie. (Rend. d. Circolo matematico di Palermo, 7, 1893 en 9, 1895).
- _____ : Una definizione sintetica delle curve polari. (Rend. di Palermo, 7, 1893).
- CHARLOTTE A. SCOTT: Note on linear systems of curves. (Nieuw Archief voor Wiskunde (2), 3, 1898).
- W. BOUWMAN: Ueber den Ort der Berührungspunkte von Strahlenbüscheln und Curvenbüscheln. (Nieuw Archief voor Wiskunde (2), 4, 1900).
- JAN DE VRIES: Faisceaux de courbes planes. (Archives Teyler, sér. III, 11).
- _____ : Over netten van algebraïsche vlakke krommen. (Versl. K. A. v. Wetensch., 13, bl. 708).
- _____ : Kenmerkende getallen voor netten van algebraïsche vlakke krommen. (Versl. K. A. v. Wetensch., 23, bl. 862).
- _____ : Kenmerkende getallen voor een driedig oneindig stelsel van algebraïsche vlakke krommen. (Versl. K. A. v. Wetensch., 23, bl. 907).

OVERZICHT VAN DE WERKWIJZE TER BEPALING
VAN KENMERKENDE GETALLEN VOOR EEN
K-VOUDIG ONEINDIG LINEAIR STELSEL VAN
VLAKKE ALGEBRAÏSCHE KROMMEN.

Snijdt men de krommen van een stelsel S^k met een willekeurige rechte, dan verkrijgt men een involutie I_n^k van de n^{de} orde en den k^{den} rang.

Daar in het volgende van eenige algemeene formules der involuties een veelvuldig gebruik zal worden gemaakt, volge hier een overzicht dier formules:

Een involutie I_n^k (d.i. een elementenstelsel op een rechte of een rationalen drager, waarbij de elementen in groepen van n gerangschikt zijn, terwijl van zulk een groep k elementen, volkomen willekeurig gekozen, noodig en voldoende zijn om de overige $(n - k)$ elementen te bepalen) bezit: ¹⁾

a. $(k + 1) (n - k)$ groepen met een $(k + 1)$ -voudig element.

b. $2! \binom{n-k}{2} (r_1 + 1) (r_2 + 1)$ groepen, die een $(r_1 + 1)$ -voudig en een $(r_2 + 1)$ -voudig element bevatten [$r_1 + r_2 = k$].

c. $\binom{n-k}{\rho} \rho! \prod_1^{\rho} (r_i + 1)$ groepen, die ρ veelvoudige elementen bezitten, respectievelijk van de orde $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_{\rho} + 1$. [$\sum r_i = k$].

Wij zullen thans een overzicht geven van de methode, die door Prof. Dr. J. DE VRIES ²⁾ is aangegeven en toegepast bij het bepalen van kenmerkende getallen van bundels, netten en complexen en die in dit proefschrift

¹⁾ Zie b.v. FR. DERUYTS. Mémoire sur la théorie de l'involution. (Mém. soc. royale de Liège, 2^e série 17 (1892), p. 58, 60, 63).

²⁾ Zie litteratuur.

op het stelsel $\|c^n\|$ wordt toegepast. (Hoofdstukken I—IV).

Wij beschouwen een k -voudig oneindig lineair stelsel van vlakke algebraïsche krommen van den n^{den} graad, dat in 't bezit is van een enkelvoudig basispunt B. Een rechte, door B getrokken, zal door b worden aangeduid.

Elke rechte b is $(k+1)$ -puntige raaklijn t_{k+1} , waarvan het raakpunt R_{k+1} in B ligt voor één kromme uit S_B^k .

Verder is zij voor eindige aantallen van krommen een der volgende veelvoudige raaklijnen:

$$t_{k,2} \text{ (rkpt } R_k \equiv B)$$

$$t_{k-1,3}; t_{k-1,2,2} \text{ (rkpt } R_{k-1} \equiv B)$$

$$t_{k-2,4}; t_{k-2,3,2}; t_{k-2,2,2,2} \text{ (rkpt } R_{k-2} \equiv B)$$

enz.

Wij kunnen de bovengenoemde raaklijnen algemeen door $t_{\lambda, \mu, \nu, \omega, \dots}$ aanduiden, waarbij het raakpunt $R_\lambda \equiv B$ is. ($\lambda < k+2$).

Daarbij moet men aan $\lambda, \mu, \nu, \omega, \dots$ de waarden geven, die in onderstaand schema vermeld zijn:

$$\lambda = k+1 \quad \mu = \nu = \omega \dots = 0$$

$$\lambda = k \quad \mu = 2; \text{ de overige} = 0$$

$$\lambda = k-1 \quad \mu = 3; \text{ de overige} = 0$$

$$\text{of } \mu = 2; \nu = 2; \text{ de overige} = 0$$

$$\lambda = k-2 \quad \mu = 4; \text{ de overige} = 0$$

$$\text{of } \mu = 3; \nu = 2; \text{ de overige} = 0$$

$$\text{of } \mu = 2; \nu = 2; \omega = 2; \text{ de overige} = 0$$

enz.

Elke raaklijn $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ snijdt de c^n , waartoe zij behoort in $[n - (\lambda + \mu + \nu \dots)]$ punten V.

Voegt men nu aan iedere door B getrokken rechte b de krommen toe, die haar tot raaklijn $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ ($R_\lambda \equiv B$) hebben, dan ontstaan twee stelsels van figuren $|c^n|$ en $|t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}|$, die op een rechte l een verwantschap bepalen tusschen de punten C en T van twee puntenreeksen.

Zij I_c de index [index = het aantal figuren, door een

willekeurig punt P] van het stelsel $|c^n|$, I_b die van het stelsel $|b|$, dan komen met één punt C van l overeen I_c punten T , met één punt T evenwel $I_b \cdot n$ punten C .

Dus zijn er $(I_c + I_b n)$ punten $C \equiv T$.

De stelsels $|c^n|$ en $|t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}|$ brengen derhalve een figuur voort van den graad $(I_c + I_b n)$.

Tot het voortbrengsel van de aan elkaar toegevoegde stelsels $|c^n|$ en $|t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}|$ behooren de krommen

$$(R_\mu)_{B_\lambda, R_\mu, R_\nu, \dots}, (R_\nu)_{B_\lambda, R_\mu, R_\nu, \dots}, \dots$$

[die de meetkundige plaatsen zijn der op $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ gelegen raakpunten $R_\mu, R_\nu, \dots$] respectievelijk $\mu, \nu, \dots$ -maal.

Door dit in aanmerking te nemen, komt men gemakkelijk tot den graad der kromme $(V)_{B_\lambda, R_\mu, R_\nu, \dots}$, die de meetkundige plaats is der punten V , welke elke raaklijn $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$, buiten de raakpunten $R_\lambda \equiv B, R_\mu, R_\nu, \dots$ nog met haar c^n gemeen heeft.

Men kan verder verwantschappen in stralenbundels beschouwen, die verkregen worden, door een willekeurig punt M te verbinden met twee der raakpunten R_μ en R_ν (buiten B op eenzelfde c^n gelegen), of met een dezer raakpunten en de punten V , die de beschouwde raaklijn $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ met haar c^n gemeen heeft, of met de punten V onderling.

Daarmee kan men dan *de aantallen van krommen uit S_B^k afleiden, die een raaklijn $t_{\lambda+1, \mu, \nu, \dots}$ bezitten, waarvan het raakpunt $R_{\lambda+1}$ in B ligt.*

(Hoofdstuk I).

Tot een afleiding van *de aantallen van bijzondere raaklijnen $t_{\lambda+1, \mu, \nu, \dots}$, die uit een willekeurig punt P aan krommen van een algemeen stelsel S^k kunnen worden getrokken*, komt men door S^k te doorsnijden met een willekeurige rechte l . S^k bepaalt dan op l een involutie I_n^k , die (zie blz. 7) in 't bezit is van

$$\binom{n-k}{\rho} \rho! \prod_1^\rho (r_i + 1)$$

groepen met ρ veelvoudige elementen respectievelijk van de orde

$$r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_\rho + 1 \quad [\Sigma r_i = k].$$

Wij bepalen vooreerst de graden van de krommen, die de meetkundige plaatsen zijn van ieder der raakpunten der uit P aan krommen van S^k getrokken raaklijnen $t_{\lambda, \nu, \mu, \dots}$.

Verder kan men den graad bepalen der kromme, die de meetkundige plaats is der punten V , die iedere uit P getrokken raaklijn $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ nog met haar c^n gemeen heeft. Deze kromme is de kromme $(V_{R_{\lambda, \mu, \nu, \dots}})_P$ (*satellietkromme*).

Zijn eenmaal de graden dezer krommen bekend, dan komt men door verwantschapsbeschouwingen in stralenbundels, verkregen door een willekeurig punt M te verbinden met twee der raakpunten R , of een raakpunt R en een punt V , of twee punten V onmiddellijk tot de klasse der kromme door de raaklijnen $t_{\lambda + 1, \mu, \nu, \dots}$ omhuld. (Hoofdstuk II).

Als een S^k in 't bezit is van een basispunt B , kan men door B een rechte b trekken en gebruik maken van de eigenschappen der involutie I_{n-1}^k , die buiten B op b wordt bepaald.

Bepaalt men de graden der krommen, die de meetkundige plaatsen zijn van ieder der raakpunten der uit B aan krommen van S_B^k getrokken raaklijnen $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ be-nevens den graad der kromme, die de meetkundige plaats is der punten V , die iedere uit B getrokken raaklijn $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ nog met haar c^n gemeen heeft, dan komt men door verwantschapsbeschouwingen (als in 't vorige hoofdstuk) gemakkelijk tot de aantallen van raaklijnen $t_{\lambda + 1, \mu, \nu, \dots}$, die door B aan krommen van S_B^k kunnen worden getrokken. (Hoofdstuk III).

Wij kunnen door tusschenkomst van een willekeurige rechte a aan elkaar toevoegen de krommen c^n van S^k , die het raakpunt R_λ eener raaklijn $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ op a

hebben eenerzijds en de beschouwde raaklijn $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ anderzijds. Nu brengen twee projectieve stelsels $|c^r|$ en $|c^s|$ met indices ρ en σ een kromme voort van den graad $r\sigma + \rho s$ (theorema van DE JONQUIÈRES).

Neemt men in aanmerking, dat tot de door bovengenoemde stelsels voortgebrachte figuur de rechte a (een bepaald aantal keeren geteld) en de krommen, die de meetkundige plaatsen zijn van de aan het op a gelegen raakpunt R_λ toegevoegde raakpunten $R_\mu, R_\nu, \dots$ (resp. μ -maal, ν -maal, $\dots$ geteld) behooren, dan vindt men gemakkelijk den graad der meetkundige plaats van de punten V , welke elke raaklijn $t_{\lambda, \mu, \nu, \dots}$ nog met de overeenkomstige c^n gemeen heeft [de kromme $(VR_{\lambda/\lambda, \mu, \nu, \dots})_a$].

Uit verwantschapsbeschouwingen in stralenbundels, die verkregen worden door een willekeurig punt M te verbinden met twee der raakpunten op een veelvoudigeraaklijn, of met een der raakpunten en de snijpunten V , of met de punten V onderling, wordt nu afgeleid het aantal raaklijnen $t_{\lambda+1, \mu, \nu, \dots}$, die het raakpunt $R_{\lambda+1}$ op a hebben, dus tevens de graad der kromme $(R_{\lambda+1})t_{\lambda+1, \mu, \nu, \dots}$, die de meetkundige plaats is van het raakpunt $R_{\lambda+1}$ van de raaklijn $t_{\lambda+1, \mu, \nu, \dots}$, die in het lineaire stelsel S^k voorkomt.

Wij voegen nu aan elke kromme, die een raaklijn $t_{\lambda+1, \mu, \nu, \dots}$ bezit, die raaklijn toe; zij heeft met haar kromme buiten de raakpunten $R_{\lambda+1}, R_\mu, R_\nu, \dots$ nog een aantal punten V gemeen.

Wij bepalen den graad der kromme, die het voortbrengsel is van de projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_{\lambda+1, \mu, \nu, \dots}|$.

Wordt deze graad verminderd met de graden der krommen, die de meetkundige plaatsen zijn der raakpunten $R_{\lambda+1}, R_\mu, R_\nu, \dots$ (resp. $(\lambda+1)$ -maal, μ -maal, ν -maal, $\dots$ geteld), dan verkrijgt men den graad der kromme $(VR_{\lambda+1, \mu, \nu, \dots})$.

Ten slotte worden de stralen-verwantschappen beschouwd, die verkregen worden door een willekeurig punt M te verbinden met twee der op eenzelfde

$t_{\lambda+1, \mu, \nu, \dots}$ gelegen raakpunten R, of met een der raakpunten R en de punten V, of met de punten V onderling.

Daaruit worden *de aantallen van bijzondere raaklijnen* $t_{\lambda+2, \mu, \nu, \dots}$ *afgeleid*, of, wat hetzelfde is, *de aantallen van krommen uit* S^k , *die een bijzondere raaklijn* $t_{\lambda+2, \mu, \nu, \dots}$ *bezitten.*

(Hoofdstuk IV).

OVERZICHT VAN KENMERKENDE GETALLEN VOOR BUNDELS, NETTEN EN COMPLEXEN.¹⁾

KENMERKENDE GETALLEN VOOR BUNDELS.

Tabel I.

Een enkelvoudig basispunt B is:

Raakpunt R_3 van 3	raaklijnen t_3
" R_2 " $(n-3)(n+4)$	" $t_{2,2}$

Tabel II.

Graad van $(R_2)_P$	$2n-1$
---------------------	--------

Tabel III.

Aantal t_3 door P	$3n(n-2)$
" $t_{2,2}$ " "	$2n(n-2)(n-3)$

Tabel IV.

Graad van $(R_2)_B$	$2n-1$
---------------------	--------

Tabel V.

Aantal t_3 door B	$3(n+1)(n-3)$
" $t_{2,2}$ " "	$2(n+1)(n-3)(n-4)$

¹⁾ Voor de afleiding verwijzen we naar de geschriften van Prof. Dr. J. DE VRIES. (Zie blz. 6).

Tabel VI.

Graad $(R_3)_{t_3}$	$6(n-1)$
" $(R_2)_{t_{2,2}}$	$(n-3)(2n^2+5n-6)$

Tabel VII.

Aantal t_4	$6(n-3)(3n-2)$
" $t_{3,2}$	$3(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$
" $t_{2,2,2}$	$(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)$

KENMERKENDE GETALLEN VOOR NETTEN.

Tabel I.

Een enkelvoudig basispunt B is:

Raakpunt R_4 van 6		raaklijnen t_4
" R_3	" $(n-4)(n+9)$	" $t_{3,2}$
" R_2	" $3(n-4)(n+3)$	" $t_{3,2}$
" R_2	" $2(n-4)(n-5)(n+3)$	" $t_{2,2,2}$

Tabel II.

Graad van $(R_3)_P$	$3(n-1)$
" $(R_{2/2,2})_P$	$(n-3)(5n-4)$

Tabel III.

Aantal t_4 door P	$6n(n-3)$
" $t_{3,2}$ " "	$9n(n-3)(n-4)$
" $t_{2,2,2}$ " "	$2n(n-3)(n-4)(n-5)$

Tabel IV ¹⁾.

Graad van $(R_3)_B$	$3(n-1)$
" $(R_{2/2,2})_B$	$(n-4)(5n-3)$

Tabel V ¹⁾.

Aantal t_4 door B	$6(n+1)(n-4)$
" $t_{3,2}$ " "	$9(n+1)(n-4)(n-5)$
" $t_{2,2,2}$ " "	$2(n+1)(n-4)(n-5)(n-6)$

¹⁾ Deze getallen komen niet in de verhandeling van Prof. DE VRIES voor.

Tabel VI.

Graad van	$(R_4)_{t_4}$	$3(6n - 11)$
"	$(R_3)_{t_{3,2}}$	$3(n - 4)(n^2 + 6n - 13)$
"	$(R_2)_{t_{3,2}}$	$3(n - 4)(n + 4)(2n - 3)$
"	$(R_2)_{t_{2,2,2}}$	$\frac{3}{2}(n - 4)(n - 5)(3n^2 + 5n - 14)$

Tabel VII.

Aantal	t_5	$15(n - 4)(4n - 5)$
"	$t_{4,2}$	$6(n - 4)(n - 5)(n^2 + 11n - 14)$
"	$t_{3,3}$	$\frac{9}{2}(n - 4)(n - 5)(n^2 + 17n - 9)$
"	$t_{3,2,2}$	$\frac{3}{2}(n - 4)(n - 5)(n - 6)(5n^2 + 23n - 30)$
"	$t_{2,2,2,2}$	$(n - 4)(n - 5)(n - 6)(n - 7)(n^2 + 3n - 4)$

KENMERKENDE GETALLEN VOOR COMPLEXEN.

Tabel I.

Een enkelvoudig basispunt B is:			
Raakpunt	R_5 van 10		raaklijnen t_5
"	R_4	" $(n - 5)(n + 16)$	" $t_{4,2}$
"	R_3	" $3(n - 5)(n + 6)$	" $t_{3,3}$
"	R_3	" $2(n - 5)(n - 6)(n + 6)$	" $t_{3,2,2}$
"	R_2	" $2(n - 5)(3n + 8)$	" $t_{2,4}$
"	R_2	" $3(n - 5)(n - 6)(3n + 8)$	" $t_{2,3,2}$
"	R_2	" $\frac{2}{3}(n - 5)(n - 6)(n - 7)$	
		$(3n + 8)$	" $t_{2,2,2,2}$

Tabel II.

Graad van	$(R_4)_P$	$2(2n - 3)$
"	$(R_{3/3,2})_P$	$(n - 4)(7n - 9)$
"	$(R_{2/3,2})_P$	$9(n - 4)(n - 1)$
"	$(R_{2/2,2,2})_P$	$6(n - 4)(n - 5)(n - 1)$

Tabel III.

Aantal t_5	door P	$10 n (n - 4)$
" $t_{4,2}$	" "	$16 n (n - 4) (n - 5)$
" $t_{3,3}$	" "	$9 n (n - 4) (n - 5)$
" $t_{3,2,2}$	" "	$12 n (n - 4) (n - 5) (n - 6)$
" $t_{2,2,2,2}$	" "	$\frac{4}{3} n (n - 4) (n - 5) (n - 6) (n - 7)$

Tabel IV. ¹⁾

Graad van $(R_4)_B$	$2 (2 n - 3)$
" " $(R_{3/3,2})_B$	$(n - 5) (7 n - 8)$
" " $(R_{2/3,2})_B$	$3 (n - 5) (3 n - 2)$
" " $(R_{2/2,2,2})_B$	$2 (n - 5) (n - 6) (3 n - 2)$

Tabel V. ¹⁾

Aantal t_5	door B	$10 (n + 1) (n - 5)$
" $t_{4,2}$	" "	$16 (n + 1) (n - 5) (n - 6)$
" $t_{3,3}$	" "	$9 (n + 1) (n - 5) (n - 6)$
" $t_{3,2,2}$	" "	$12 (n + 1) (n - 5) (n - 6) (n - 7)$
" $t_{2,2,2,2}$	" "	$\frac{4}{3} (n + 1) (n - 5) (n - 6) (n - 7) (n - 8)$

Tabel VI.

Graad $(R_5)_{t_5}$	$5 (8 n - 21)$
" $(R_4)_{t_{4,2}}$	$2 (n - 5) (2 n^2 + 23 n - 69)$
" $(R_3)_{t_{3,3}}$	$3 (n - 5) (3 n^2 + 13 n - 45)$
" $(R_3)_{t_{3,2,2}}$	$\frac{1}{2} (n - 5) (n - 6) (13 n^2 + 45 n - 168)$
" $(R_2)_{t_{2,4}}$	$4 (n - 5) (3 n^2 + 10 n - 33)$
" $(R_2)_{t_{2,3,2}}$	$3 (n - 5) (n - 6) (7 n^2 + 13 n - 54)$
" $(R_2)_{t_{2,2,2,2}}$	$\frac{1}{3} (n - 5) (n - 6) (n - 7) (15 n^2 + 19 n - 96)$

¹⁾ Deze getallen komen niet in de verhandeling van Prof. DE VRIES voor.

Tabel VII.

Aantal t_6	$30 (n - 5) (5n - 9)$
" $t_{5,2}$	$10 (n - 5) (n - 6) (n^2 + 18n - 33)$
" $t_{4,3}$	$6 (n - 5) (n - 6) (3n^2 + 29n - 54)$
" $t_{4,2,2}$	$2 (n - 5) (n - 6) (n - 7) (7n^2 + 51n - 96)$
" $t_{3,3,2}$	$9 (n - 5) (n - 6) (n - 7) (2n^2 + 11n - 21)$
" $t_{3,2,2,2}$	$(n - 5) (n - 6) (n - 7) (n - 8)$ $(9n^2 + 37n - 72)$
" $t_{2,2,2,2,2}$	$\frac{2}{3} (n - 5) (n - 6) (n - 7) (n - 8) (n - 9)$ $(n^2 + 3n - 6)$

HOOFDSTUK I.

Afleiding van de aantallen krommen c^n , voorkomende in een stelsel S_B^4 , die in het bezit zijn van een bijzondere raaklijn, waarvan een der raakpunten in B is gelegen.

§ 1. Elke rechte b , die in een stelsel S_B^4 door het basispunt B kan worden getrokken, is vijfpointige raaklijn t_5 , waarvan het raakpunt R_5 in B is gelegen.

Voegt men nu aan iedere rechte b de kromme toe, die haar tot raaklijn t_5 heeft, met 't raakpunt R_5 in B, dan ontstaan twee stelsels $|c^n|$ en $|t_5|$, die op een rechte l een verwantschap vastleggen tusschen de punten C en T van twee puntenreeksen. Als I_c en I_b de indices der genoemde stelsels voorstellen, dan heeft de bedoelde verwantschap $(I_c + I_b n)$ coïncidenties $C \equiv T$.

De index van het stelsel $|c^n|$ is gelijk aan het aantal c^n door een willekeurig punt P, die B tot raakpunt R_5 eener t_5 hebben.

Daar door P, als basispunt van een in S_B^4 begrepen complex, 10 c^n gaan, die het raakpunt R_5 eener t_5 in B hebben (complexen Tabel I), is de index van $|c^n|$ gelijk aan 10.

Daar door P slechts één raaklijn t_5 kan worden getrokken, die het raakpunt R_5 in B heeft, is de index van het stelsel $|t_5|$ gelijk aan 1.

De stelsels $|c^n|$ en $|t_5|$ brengen diensgevolge een meetkundige plaats $(V)_{B_5}$ voort, die tot graad $(n + 10)$ heeft.

Elke rechte t_5 snijdt $(V)_{B_5}$, buiten B, in $(n - 5)$ punten V.

De kromme $(V)_{B_5}$ heeft derhalve B tot $(n + 10) - (n - 5)$ of 15-voudig punt.

Er zijn dus in een S_B^4 15 krommen, die het basispunt B tot raakpunt R_5 eener t_5 hebben.

§ 2. Wij beschouwen de symmetrische verwantschap tusschen de stralen $v = MV$ en $v' = MV'$, die twee tot dezelfde c^n behoorende punten V en V' met het punt M verbinden.

Elke straal v bevat $(n - 6)$ punten V , bepaalt dus even zoo vele stralen v' ; evenzoo bepaalt elke straal v' $(n - 6)$ stralen v .

Daar de kromme $(V)_{B_5}$ tot graad $(n + 10)$ heeft, vindt men voor het kenmerkend getal der verwantschap $(n + 10)(n - 6)$.

De straal MB vervangt $(n - 5)(n - 6)$ coïncidenties; voor het aantal coïncidenties $v \equiv v'$ vindt men:

$$(n - 6)[2(n + 10) - (n - 5)] = (n - 6)(n + 25).$$

Er zijn in een S_B^4 $(n - 6)(n + 25)$ krommen, die een raaklijn $t_{5,2}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_5 in B is gelegen.

§ 3. De krommen c^n uit S_B^4 , die met een door B getrokken rechte b vier punten gemeen hebben, vormen een bundel, bepalen dus op b een involutie I_{n-4} van de $(n - 4)^{de}$ orde en den 1^{sten} rang.

Daar deze $2(n - 5)$ groepen met een tweevoudig element bezit, zijn er $2(n - 5)$ krommen c^n , die b tot $t_{4,2}$ hebben, waarvan B het raakpunt R_4 is.

Het raakpunt R_2 valt met B samen, als b zespuntige raaklijn wordt.

Dit geschiedt 15 maal (§ 1).

Daaruit volgt, dat de meetkundige plaats $(R_2)_{B_4, R_2}$ der raakpunten R_2 , die niet in B liggen, een kromme van den graad $2(n - 5) + 15$ of $(2n + 5)$ is. Zij heeft B tot 15-voudig punt.

§ 4. Als men aan elke rechte b door B de $2(n - 5)$ krommen toevoegt, die b tot $t_{4,2}$ hebben met het raakpunt R_4 in B , ontstaan twee stelsels $|c^n|$ en $|t_{4,2}|$.

In den complex, dien een punt P uit S_B^4 afzondert, komen $(n - 5)(n + 16)$ krommen voor, die het raak-

punt R_4 eener $t_{4,2}$ in B hebben (complexen Tabel I)
Daaruit volgt, dat de index van het stelsel $|c^n|$ gelijk
is aan $(n-5)(n+16)$.

De graad van de voortgebrachte figuur bedraagt nu
 $(n-5)(n+16) + 2(n-5)n$ of $(n-5)(3n+16)$.

Hiertoe behoort de kromme $(R_2)_{B_4, R_2}$ tweemaal.

Voor den graad van $(V)_{B_4, R_2}$ vindt men dus $(n-5)$
 $(3n+16) - 2(2n+5)$ of $3(n+5)(n-6)$.

Daar elke rechte b $2(n-5)(n-6)$ buiten B gelegen
punten V bevat, zal $(V)_{B_4, R_2}$ in B een veelvoudig punt
hebben van de orde

$(n-6)[3(n+5) - 2(n-5)]$ of $(n-6)(n+25)$.

Hiermee is teruggevonden het reeds in § 2 genoemde
feit, dat er in een S_B^4 $(n-6)(n+25)$ krommen zijn,
die een $t_{5,2}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_5 in B is
gelegen.

§ 5. Wij beschouwen de verwantschap (MR_2, MV) ,
die in een stralenbundel met top M wordt bepaald door
de aan elkaar toegevoegde punten R_2 en V .

Elke straal MR_2 bevat $(n-6)$ punten V , bepaalt dus
even zoo vele stralen MV ; elke straal MV bevat 1 punt
 R_2 , bepaalt dus 1 straal MR_2 .

Daar de graden der krommen $(R_2)_{B_4, R_2}$ en $(V)_{B_4, R_2}$
zijn $(2n+5)$ en $3(n+5)(n-6)$, heeft de verwant-
schap tot kenmerkende getallen $(2n+5)(n-6)$ en
 $3(n+5)(n-6)$.

De straal MB bevat $2(n-5)$ punten R_2 , vertegen-
woordigt derhalve

$2(n-5)(n-6)$ coïncidenties.

De overige, ten getale van

$(n-6)[(2n+5) + 3(n+5) - 2(n-5)]$ of $3(n-6)$
 $(n+10)$ gaan door punten $R_2 \equiv V$.

In een S_B^4 komen dus $3(n-5)(n+10)$ krommen voor,
die een $t_{4,3}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_4 in B is
gelegen.

Verder beschouwen wij de symmetrische verwantschap

der stralen, welke twee tot dezelfde c^n behorende punten V met M verbinden.

Daar bij 1 punt V ($n - 7$) punten V' behooren en omgekeerd, heeft de verwantschap, mede in verband met den graad der kromme $(V)_{B_1, R_2}$ tot kenmerkend getal $3(n + 5)(n - 6)(n - 7)$.

De straal MB vervangt $2(n - 5)(n - 6)(n - 7)$ coïncidenties.

De overige, ten getale van $(n - 6)(n - 7)[6(n + 5) - 2(n - 5)]$ of $4(n - 6)(n - 7)(n + 10)$ liggen in paren op $t_{4,2,2}$, die het raakpunt R_4 in B hebben.

Hieruit volgt, dat er in een S_B^4 $2(n - 6)(n - 7)(n + 10)$ krommen zijn, die een $t_{4,2,2}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_4 in B is gelegen.

§ 6. De krommen c^n uit S_B^4 , die een door B getrokken rechte b als buigraaklijn hebben, terwijl haar buigpunt in B ligt, vormen een net, bepalen dus op b een involutie I_{n-3}^2 van de $(n - 3)^{de}$ orde en den 2^{den} rang.

Daar deze $3(n - 5)$ groepen met een drievoudig element bezit, zijn er evenveel krommen c^n , die b tot $t_{3,3}$ hebben, waarvan B een der raakpunten R_3 is.

Het tweede raakpunt R'_3 valt met B samen, als b een t_6 is, waarvan het raakpunt R_6 in B ligt.

Nu zijn er 15 krommen, die het raakpunt R_6 eener t_6 in B hebben (§ 1), bijgevolg is de kromme $(R_3)_{B_3, R_3}$ van den graad $3(n - 5) + 15$ of $3n$; zij heeft B tot 15-voudig punt.

§ 7. Elke rechte b snijdt de c^n , welke zij in B en in een tweede punt R'_3 osculeert nog in $(n - 6)$ punten V.

Om den graad der meetkundige plaats $(V)_{B_3, R_3}$ dezer punten V te bepalen, voegen wij elken straal b toe aan de $3(n - 5)$ krommen c^n , waarbij hij behoort en beschouwen de figuur, die door de aldus bepaalde stelsels $|c^n|$ en $|t_{3,3}|$ wordt voortgebracht.

In den complex, dien een punt P uit S_B^4 afzondert,

komen $3(n-5)(n+6)$ krommen voor, die een der raakpunten R_3 eener $t_{3,3}$ in B hebben.

(Complexen Tabel I).

Daaruit volgt, dat de index van het stelsel $|c^n|$ gelijk is aan $3(n-5)(n+6)$.

De figuur, die de stelsels $|c^n|$ en $|t_{3,3}|$ voortbrengen, heeft nu tot graad

$$3(n-5)(n+6) + 3(n-5)n \text{ of } 6(n-5)(n+3).$$

Hiertoe behoort de kromme $(R_3)_{B_3, R_3}$ driemaal.

De graad van $(V)_{B_3, R_3}$ is dus

$$6(n-5)(n+3) - 9n \text{ of } 3(n-6)(2n+5).$$

Elke lijn b snijdt deze meetkundige plaats in $3(n-5)(n-6)$ buiten B gelegen punten V .

Zij heeft dus B tot veelvoudig punt van de orde $(n-6)[3(2n+5) - 3(n-5)]$ of $3(n-6)(n+10)$.

Hiermee is teruggevonden het in § 5 afgeleide aantal krommen, die een $t_{4,3}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_4 in B ligt.

§ 8. Wij beschouwen de verwantschap (MR_3, MV) als R_3 en V op denzelfden straal door B liggen.

Daar bij 1 punt R_3 behooren $(n-6)$ punten V en bij 1 punt V behoort 1 punt R_3 , vindt men in verband met de graden der krommen $(R_3)_{B_3, R_3}$ en $(V)_{B_3, R_3}$ voor haar kenmerkende getallen $3n(n-6)$ en $3(n-6)(2n+5)$.

De straal MB bevat $3(n-5)$ punten R_3 , vertegenwoordigt derhalve $3(n-5)(n-6)$ coïncidenties.

Dus vinden we voor het aantal coïncidenties

$$MR_3 \equiv MV \quad (n-6)[3n + 3(2n+5) - 3(n-5)] = 6(n-6)(n+5).$$

Een S_B^4 bezit dus $6(n-6)(n+5)$ krommen, die een $t_{3,4}$ hebben, waarvan het raakpunt R_3 in B is gelegen.

Beschouwen wij nu de symmetrische verwantschap der stralen, welke twee tot dezelfde c^n behorende punten V met M verbinden.

Zij heeft tot kenmerkend getal

$$3(n-6)(2n+5)(n-7).$$

De straal MB vervangt

$$3(n-5)(n-6)(n-7) \text{ coïncidenties.}$$

Dus wordt voor het aantal coïncidenties $MV = MV'$ gevonden

$$(n-6)(n-7)[6(2n+5) - 3(n-5)] = \\ 9(n-6)(n-7)(n+5).$$

Er zijn dus in een S_B^4 $9(n-6)(n-7)(n+5)$ krommen, die een $t_{3,3,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten R_3 in B is gelegen.

§ 9. De involutie I_{n-3}^2 , die door de krommen c^n uit S_B^4 , welke B tot raakpunt R_3 eener $t_3(b)$ hebben, op b wordt bepaald, bezit $2(n-5)(n-6)$ groepen met twee tweevoudige elementen.

Evenveel krommen c^n hebben b tot $t_{3,2,2}$, waarvan B het raakpunt R_3 is.

Een der raakpunten R_2 valt met B samen als b een $t_{5,2}$ is, waarvan het raakpunt R_5 in B is gelegen.

Daar $(n-6)(n+25)$ krommen een $t_{5,2}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_5 in B ligt (§ 2), is de kromme $(R_2)_{B_3, 2 R_2}$ van den graad

$$2(n-5)(n-6) + (n-6)(n+25) \text{ of } 5(n-6)(n+1).$$

Zij gaat met $(n-6)(n+25)$ takken door B.

§ 10. Als men aan elke rechte b door B de $2(n-5)(n-6)$ krommen toevoegt, die b tot $t_{3,2,2}$ hebben, waarvan het raakpunt R_3 in B is gelegen, ontstaan twee stelsels $|c^n|$ en $|t_{3,2,2}|$.

De complex, dien een punt P uit S_B^4 afzondert, bezit $2(n-5)(n-6)(n+6)$ krommen, die het raakpunt R_3 eener $t_{3,2,2}$ in B hebben.

(Complexen Tabel I).

Daaruit volgt, dat de index van het stelsel $|c^n|$ $2(n-5)(n-6)(n+6)$ is.

De figuur, die door de stelsels $|c^n|$ en $|t_{3,2,2}|$ wordt voortgebracht, heeft nu tot graad

$$2(n-5)(n-6)(n+6) + 2(n-5)(n-6)n \text{ of} \\ 4(n-5)(n-6)(n+3).$$

Hiertoe behoort de kromme $(R_2)_{B_3, 2R_2}$ tweemaal.

De graad van $(V)_{B_3, 2R_2}$ is dus

$$4(n-5)(n-6)(n+3) - 10(n-6)(n+1) \text{ of} \\ 2(n-6)(n-7)(2n+5).$$

Elke rechte b snijdt deze kromme in $2(n-5)(n-6)(n-7)$ punten V , die buiten B liggen.

Zij heeft dus in B een veelvoudig punt van de orde

$$(n-6)(n-7)[2(2n+5) - 2(n-5)] \text{ of} \\ 2(n-6)(n-7)(n+10).$$

Hiermee is teruggevonden het in § 5 afgeleide aantal krommen uit een S_B^4 , die een $t_{4,2,2}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_4 in B is gelegen.

§ 11. De beschouwing van de symmetrische verwantschap (MR_2, MR_2') tusschen de stralen van een stralenbundel, die verkregen wordt, door een willekeurig punt M met de punten R_2 en R_2' te verbinden, levert opnieuw het aantal krommen, die een $t_{3,4}$ bezitten, waarvan $R_3 \equiv B$ is. (§ 8).

Uit de verwantschap (MR_2, MV) kan men opnieuw afleiden het aantal exemplaren, die een $t_{3,3,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten $R_3 \equiv B$ is. (§ 8).

Een nieuw resultaat levert de beschouwing van de symmetrische verwantschap der stralen, welke twee tot dezelfde c^n behorende punten V met M verbinden.

Bij 1 punt V behooren $(n-8)$ punten V' en omgekeerd.

In verband met den graad der kromme $(V)_{B_2, 2R_2}$ heeft de verwantschap tot kenmerkend getal

$$2(n-6)(n-7)(2n+5)(n-8).$$

De straal MB vervangt $(n-7)(n-8)$ coïncidenties.

Dus wordt voor het aantal coïncidenties $MV \equiv MV'$ gevonden:

$$(n-7)(n-8)[4(n-6)(2n+5)-2(n-5)(n-6)] = 6(n-6)(n-7)(n-8)(n+5).$$

Neemt men in aanmerking, dat deze drie aan drie op rechten $t_{3,2,2,2}$ zijn gelegen, dan vindt men voor *het aantal krommen in een S_B^4 , die een $t_{3,2,2,2}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_3 in B is gelegen*

$$2(n-6)(n-7)(n-8)(n+5).$$

§ 12. De krommen c^n van een S_B^4 , die aan een door het basispunt getrokken rechte b in B raken, vormen een complex, bepalen dus op b een involutie I_{n-2}^3 van de $(n-2)^{de}$ orde en den 3^{den} rang.

Daar deze $4(n-5)$ groepen met een viervoudig element bezit, zijn er evenveel krommen c^n , die b tot $t_{2,4}$ hebben, waarvan het raakpunt R_2 in B is gelegen.

Het raakpunt R_4 valt met B samen, als b een t_6 is, waarvan het raakpunt R_6 in B ligt.

Nu bezit een S_B^4 15 rechten t_6 , waarvan $R_6 \equiv B$ is (§ 1), bijgevolg is de kromme $(R_4)_{B_2, R_4}$ van den graad $4(n-5) + 15$ of $4n-5$.

Zij heeft B tot 15-voudig punt.

§ 13. Elke rechte b snijdt de c^n , welke zij in B tweepuntig en in R_4 vierpuntig raakt, in $(n-6)$ punten V .

Om den graad der meetkundige plaats $(V)_{B_2, R_4}$ dezer punten V te bepalen, voegen wij elken straal b toe aan de $4(n-5)$ krommen c^n , waarbij hij behoort en beschouwen de figuur, die door de aldus bepaalde stelsels $|c^n|$ en $|t_{2,4}|$ wordt voortgebracht.

De index van het stelsel $|c^n|$ is gelijk aan het aantal c^n , die een $t_{2,4}$ bezitten, waarvan $R_2 \equiv B$ is, voorkomende in den complex, dien een punt P uit S_B^4 afzondert, dus $= 2(n-5)(3n+8)$

(Complexen Tabel I).

De figuur, door de stelsels $|c^n|$ en $|t_{2,4}|$ voortgebracht heeft nu tot graad

$$2(n-5)(3n+8) + 4(n-5)n = \\ 2(n-5)(5n+8).$$

Hiertoe behoort de kromme $(R_4)_{B_2, R_4}$ blijkbaar viermaal.

Dus is de graad van $(V)_{B_2, R_4}$ gelijk aan

$$2(n-5)(5n+8) - 4(4n-5) \text{ of} \\ 10(n-6)(n+1).$$

Elke rechte b snijdt $(V)_{B_2, R_4}$ in $4(n-5)(n-6)$ buiten B gelegen punten V .

Zij heeft dus in B een veelvoudig punt van de orde $(n-6)[10(n+1) - 4(n-5)]$ of $6(n-6)(n+5)$.

Hiermee is teruggevonden het in § 8 gevonden resultaat, dat er in een S_B^4 $6(n-6)(n+5)$ krommen zijn, die een $t_{3,4}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_3 in B ligt.

§ 14. Wij beschouwen de verwantschap (MR_4, MV) , welke in een stralenbundel met M als top wordt bepaald door de aan elkaar toegevoegde punten R_4 en V .

Voor haar kenmerkende getallen vindt men

$$(4n-5)(n-6) \text{ en } 10(n-6)(n+1).$$

De straal MB bevat $4(n-5)$ punten R_4 , vertegenwoordigt dus $4(n-5)(n-6)$ coïncidenties.

Voor 't overige aantal coïncidenties $MR_4 \equiv MV$ wordt gevonden

$$(n-6)[(4n-5) + 10(n+1) - 4(n-5)] = \\ 5(n-6)(2n+5).$$

Dus zijn er in een S_B^4 $5(n-6)(2n+5)$ krommen c^n , die een $t_{2,5}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_2 in B is gelegen.

Beschouwen wij nu de symmetrische verwantschap der stralen, welke twee tot dezelfde c^n behorende punten V met M verbinden.

Zij heeft tot kenmerkend getal

$$10(n-6)(n+1).$$

Daar MB $4(n-5)(n-6)(n-7)$ coïncidenties vangt, vindt men voor het aantal coïncidenties $MV \equiv MV'$

$$(n-6)(n-7)[20(n+1) - 4(n-5)] = \\ 8(n-6)(n-7)(2n+5).$$

Dus zijn er in een S_B^4 $8(n-6)(n-7)(2n+5)$ krommen c^n , die een $t_{2,4,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten R_2 in B ligt.

§ 15. De involutie I_{n-2}^3 , welke door de krommen c^n , die in een basispunt B aan een rechte b raken, op b wordt bepaald, bezit $6(n-5)(n-6)$ groepen met een drievoudig element, waarnaast een tweevoudig element voorkomt.

Er zijn dus evenveel krommen c^n , die b tot $t_{2,3,2}$ hebben, waarvan B een der raakpunten R_2 is.

Het raakpunt R_3 valt met $R_2 (\equiv B)$ samen, als b een $t_{5,2}$ is met R_5 in B gelegen.

Daar er in een S_B^4 $(n-6)(n+25)$ krommen zijn, die een $t_{5,2}$ bezitten, waarvan $R_5 \equiv B$ is (§ 2), heeft de kromme $(R_3)_{B_2, R_3, R_2}$ tot graad $6(n-5)(n-6) + (n-6)(n+25)$ of $(n-6)(7n-5)$.

Zij heeft B tot $(n-6)(n+25)$ -voudig punt.

Het raakpunt R_2' valt met $R_2 (\equiv B)$ samen, als b een $t_{4,3}$ is, met R_4 in B gelegen.

Nu bedraagt het aantal krommen, die een $t_{4,3}$ bezitten, waarvan $R_4 \equiv B$ is, $3(n-6)(n+10)$ (§ 7). Daaruit volgt dat de kromme $(R_2)_{B_2, R_3, R_2}$ van den graad $6(n-5)(n-6) + 3(n-6)(n+10)$ of $9(n-6)n$ is.

Zij heeft B tot $3(n-6)(n+10)$ -voudig punt.

§ 16. Als men aan elke rechte b de $6(n-5)(n-6)$ krommen toevoegt, die haar tot $t_{2,3,2}$ hebben, waarvan een der raakpunten R_2 in B is gelegen, ontstaan twee stelsels $|c^n|$ en $|t_{2,3,2}|$.

De index van het stelsel $|c^n|$ is gelijk aan het aantal c^n met een $t_{2,3,2}$ (waarvan een der raakpunten R_2 in B ligt) voorkomende in den complex, dien een punt P

uit S_B^4 afzondert, dus $3(n-5)(n-6)(3n+8)$. (Complexen Tabel I).

Voor den graad der figuur, die door de stelsels $|c^n|$ en $|t_{2,3,2}|$ wordt voortgebracht, vindt men nu

$$3(n-5)(n-6)(3n+8) + 6(n-5)(n-6)n \text{ of} \\ 3(n-5)(n-6)(5n+8).$$

Hiertoe behoort de kromme $(R_3)_{B_2, R_3, R_2}$ driemaal en de kromme $(R_2)_{B_2, R_3, R_2}$ tweemaal.

Voor den graad der kromme $(V)_{B_2, R_3, R_2}$ wordt dus gevonden

$$(n-6)[3(n-5)(5n+8) - 3(7n-5) - 18n] \text{ of} \\ 15(n-6)(n-7)(n+1).$$

Elke rechte b snijdt $(V)_{B_2, R_3, R_2}$ in $6(n-5)(n-6)(n-7)$ buiten B gelegen punten V .

Zij heeft derhalve B tot veelvoudig punt van de orde

$$(n-6)(n-7)[15(n+1) - 6(n-5)] \text{ of} \\ 9(n-6)(n-7)(n+5).$$

Hiermee is teruggevonden het reeds in § 8 afgeleide aantal krommen van een S_B^4 , die een $t_{3,3,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten R_3 in B is gelegen.

§ 17. De beschouwing van de verwantschap $(M R_3, M R_2)$, waarbij R_3 en R_2 op denzelfden straal door B liggen, levert opnieuw het aantal exemplaren die een $t_{2,5}$ bezitten, waarvoor $R_2 \equiv B$ is. (§ 14).

Uit de verwantschap $(M R_3, M V)$ volgt opnieuw het aantal krommen, die een $t_{2,4,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten $R_2 \equiv B$ is. (§ 14).

Wij beschouwen nu de verwantschap $(M R_2, M V)$, als R_2 en V op denzelfden straal door B liggen.

Bij 1 punt R_2 behooren $(n-7)$ punten V en bij 1 punt V behoort 1 punt R_2 .

In verband met de graden van $(R_2)_{B_2, R_3, R_2}$ en $(V)_{B_2, R_3, R_2}$ vinden we voor haar kenmerkende getallen

$$9(n-6)n(n-7) \text{ en } 15(n-6)(n-7)(n+1).$$

De straal MB vervangt $(n-7)$ coïncidenties.

Dus bedraagt het aantal coïncidenties $M R_2 \equiv M V$
 $(n-6)(n-7)[9n+15(n+1)-6(n-5)] =$
 $9(n-6)(n-7)(2n+5).$

Hiervan de helft, dus $\frac{9}{2}(n-6)(n-7)(2n+5)$, stelt voor het aantal krommen in een S_B^4 , die een $t_{2,3,3}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_2 in B ligt.

De symmetrische verwantschap der stralen, welke twee tot dezelfde c^n behorende punten V met M verbinden, heeft tot kenmerkend getal

$$15(n-6)(n-7)(n+1)(n-8).$$

Voor het aantal coïncidenties $M V \equiv M V'$ vindt men, daar $M B$ hier $(n-7)(n-8)$ coïncidenties vervangt,

$$(n-6)(n-7)(n-8)[30(n+1)-6(n-5)] =$$

$$12(n-6)(n-7)(n-8)(2n+5).$$

Hiervan de helft, dus $6(n-6)(n-7)(n-8)(2n+5)$ stelt voor het aantal krommen in een S_B^4 , die een $t_{2,3,2,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten R_2 in B ligt.

§ 18. De I_{n-2}^3 , die door de krommen c^n , die in een punt B aan een rechte b raken, op b wordt bepaald, bezit $\frac{4}{3}(n-5)(n-6)(n-7)$ groepen met drie tweevoudige elementen.

Er zijn dus evenveel krommen c^n , die b tot $t_{2,2,2,2}$ hebben, waarvan B een der raakpunten R_2 is.

Een der raakpunten R_2 valt met het raakpunt $R_2 (\equiv B)$ samen, als b een $t_{4,2,2}$ is, waarvan R_4 in B ligt.

Dit geschiedt $2(n-6)(n-7)(n+10)$ maal. (§ 5).

Daaruit volgt, dat de meetkundige plaats $(R_2)_{B_2,3R_2}$ der raakpunten R_2 (verschillend van B) een kromme is, die tot graad heeft

$$\frac{12}{3}(n-5)(n-6)(n-7) + 2(n-6)(n-7)(n+10)$$

$$\text{of } 6(n-6)(n-7)n.$$

Zij heeft B tot $2(n-6)(n-7)(n+10)$ -voudig punt.

§ 19. Als men aan elke rechte b de $\frac{4}{3}(n-5)$ ($n-6$) ($n-7$) krommen toevoegt, die b tot $t_{2,2,2,2}$ hebben met een der punten R_2 in B gelegen, ontstaan twee stelsels $|c^n|$ en $|t_{2,2,2,2}|$.

De index van het stelsel $|c^n|$ is gelijk aan het aantal c^n , die een $t_{2,2,2,2}$ bezitten, waarvan een der punten R_2 in B ligt, voorkomende in den complex, dien een punt P uit S_B^4 afzondert, dus $\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(3n+8)$

(Complexen Tabel I).

De figuur, die door de stelsels $|c^n|$ en $|b|$ wordt voortgebracht, heeft nu tot graad $\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(3n+8)$

$$+ \frac{4}{3}(n-5)(n-6)(n-7)n =$$

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(5n+8)$$

Hiertoe behoort de kromme $(R_2)_{B_2,3R_2}$ tweemaal.

Voor den graad van $(V)_{B_2,3R_2}$ wordt dus gevonden

$$(n-6)(n-7)\left[\frac{2}{3}(n-5)(5n+8)-12n\right] \text{ of}$$

$$\frac{10}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(n+1).$$

Elke rechte b snijdt $(V)_{B_2,3R_2}$ in

$$\frac{4}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$$

buiten B gelegen punten V .

Derhalve is B een veelvoudig punt der kromme $(V)_{B_2,3R_2}$ van de orde

$$(n-6)(n-7)(n-8)\left[\frac{10}{3}(n+1)-\frac{4}{3}(n-5)\right] \text{ of}$$

$$2(n-6)(n-7)(n-8)(n+5).$$

Hiermee is teruggevonden het reeds in § 11 gevonden resultaat, dat er in een S_B^4 2 ($n-6$) ($n-7$) ($n-8$) ($n+5$) krommen zijn, die een $t_{3,2,2,2}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_3 in B is gelegen.

§ 20. De beschouwing van de verwantschap (MR_2 , MR'_2), waarbij de punten R_2 en R'_2 op denzelfden straal door B liggen, levert opnieuw het aantal exemplaren, die een $t_{2,4,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten $R_2 \equiv B$ is. (§ 14).

Verder volgt uit een beschouwing van de verwantschap (MR_2 , MV), waarbij de punten R_2 en V op denzelfden straal door B liggen, opnieuw het aantal exemplaren, die een $t_{2,3,2,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten $R_2 \equiv B$ is. (§ 17).

Een nieuw resultaat wordt verkregen uit de symmetrische verwantschap der stralen, welke twee tot dezelfde c^n behoorende punten V met M verbinden.

Voor het kenmerkend getal dezer verwantschap vindt men

$$\frac{10}{3} (n-6) (n-7) (n-8) (n-9) (2n+5).$$

Neemt men in aanmerking, dat de straal $MB(n-8)(n-9)$ coïncidenties vervangt, dan vindt men voor het aantal coïncidenties $MV \equiv MV'$

$$\frac{8}{3} (n-6) (n-7) (n-8) (n-9) (2n+5).$$

Hieruit volgt, dat er in een S_B^4

$$\frac{2}{3} (n-6) (n-7) (n-8) (n-9) (2n+5)$$

krommen zijn, die een $t_{2,2,2,2,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten R_2 in B ligt.

HOOFDSTUK II.

**Afleiding van de aantallen van bijzondere raaklijnen,
die uit een willekeurig punt P aan krommen
van een algemeen stelsel S^4 kunnen
worden getrokken.**

§ 21. Een algemeen stelsel S^4 bepaalt op een willekeurige rechte l een involutie I_n^1 . Daar deze in 't bezit is van $5(n-4)$ groepen, ieder met een vijfvoudig element, is l vijfpuntige raaklijn t_5 voor evenveel krommen uit S^4 .

Bij wenteling van l om een van haar punten P wordt door de raakpunten R_5 een kromme $(R_5)_P$ doorloopen, waarvan wij den graad zullen bepalen.

Als basispunt van een in S^4 gelegen complex ligt P op 10 krommen c^n (complexen Tabel I), die ieder in P door een van haar raaklijnen t_5 vijfpuntig worden aangeraakt.

Daaruit volgt, dat de kromme $(R_5)_P$ 10-maal door P gaat.

$(R_5)_P$ is dus van den graad $5(n-4) + 10$ of $5(n-2)$.

§ 22. Elke kromme c^n , die een rechte l in R_5 vijfpuntig aanraakt, snijdt haar nog in $(n-5)$ punten V .

Wij beschouwen de meetkundige plaats der punten V , die op deze wijze bij $(R_5)_P$ behooren.

Ieder der $5(n-4)$ punten R_5 , op l gelegen, geeft $(n-5)$ punten V (verschillend van P).

Op l liggen dus $5(n-4)(n-5)$ punten V buiten P .

Om te vinden met hoeveel takken de kromme $(V_{R_5})_P$ door P gaat, merken we op, dat P als basispunt van een in S^4 begrepen complex kan worden beschouwd.

Nu geeft elke t_5 , die uit P in dezen complex kan

worden getrokken, een punt V , dat met P samenvalt.

Daar verder het aantal raaklijnen t_5 , die uit een basispunt in een complex kunnen worden getrokken, $10(n+1)(n-5)$ bedraagt (complexen Tabel V), gaat de kromme $(VR_5)_P$ evenveel malen door P .

Voor den graad van $(VR_5)_P$ vindt men dus:

$$(n-5)[5(n-4) + 10(n+1)] \text{ of } 5(n-5)(3n-2).$$

§ 23. Wij beschouwen de verwantschap, welke in een stralenbundel, met top M , wordt bepaald door de paren aan elkaar toegevoegde punten R_5 en V .

Elke straal MR_5 bevat $5(n-2)$ punten R_5 , bepaalt dus $5(n-2)(n-5)$ punten V ; elk straal MV bevat $5(n-5)(3n-2)$ punten V , levert dus even zooveel stralen MR_5 .

Tot de $5(n-2)(n-5) + 5(n-5)(3n-2)$ of $20(n-5)(n-1)$ coïncidenties behoort de straal MP $5(n-4)(n-5)$ maal; immers op MP liggen $5(n-4)$ punten R_5 , dus $5(n-4)(n-5)$ punten V .

De overige coïncidenties ontstaan door samenvallen van een punt R_5 met een der overeenkomstige punten V .

Dit geschiedt in het raakpunt R_6 van een c^n met een zespuntige raaklijnen t_6 .

Hieruit volgt, dat door een willekeurig punt P $20(n-5)(n-1) - 5(n-4)(n-5)$ of $15n(n-5)$ zespuntige raaklijnen t_6 gaan, m.a.w. *de klasse der kromme door de t_6 omhuld is gelijk aan $15n(n-5)$.*

Wij beschouwen nu de symmetrische verwantschap, welke in een stralenbundel met M als top bepaald wordt door de aan elkaar toegevoegde punten V op de raaklijnen door P .

Daar aan 1 punt V $(n-6)$ punten V' zijn toegevoegd, en omgekeerd, vindt men in verband met den graad der kromme $(VR_5)_P$ voor het kenmerkend getal van deze verwantschap $5(n-5)(3n-2)(n-6)$.

Elk der lijnen t_4 , die langs MP vallen, vervangt $(n-5)(n-6)$ coïncidenties.

Voor het overblijvende aantal coïncidenties $MV \equiv MV$ wordt gevonden

$$10(n-5)(3n-2)(n-6) - 5(n-4)(n-5)(n-6) = 25n(n-5)(n-6).$$

Dit getal stelt voor de klasse der kromme door de raaklijnen $t_{5,2}$ omhuld.

§ 24. Een rechte l is $t_{4,2}$ voor $8(n-4)(n-5)$ krommen c^n van S^4 ; immers de involutie I_n^4 , die door de krommen van S^4 op l wordt bepaald, bevat $8(n-4)(n-5)$ groepen, waarin naast een viervoudig ook een tweevoudig element voorkomt.

Bij wenteling van l om een van haar punten P wordt door ieder der raakpunten R_4 en R_2 een kromme beschreven, waarvan wij den graad zullen bepalen.

Daar P , als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_4 eener $t_{4,2}$ is voor $(n-5)(n+16)$ krommen (complexen Tabel I), gaat de kromme $(R_4/_{4,2})_P$ $(n-5)(n+16)$ -maal door P .

Voor den graad van $(R_4/_{4,2})_P$ vinden wij dus:

$$8(n-4)(n-5) + (n-5)(n+16) \text{ of } (n-5)(9n-16).$$

Als basispunt van een in S^4 begrepen complex is P raakpunt R_2 eener $t_{4,2}$ voor $2(n-5)(3n+8)$ krommen. (Complexen Tabel I.)

De kromme $(R_2/_{4,2})_P$ gaat dus $2(n-5)(3n+8)$ -maal door P .

Voor den graad van $(R_2/_{4,2})_P$ vindt men dus

$$8(n-4)(n-5) + 2(n-5)(3n+8) = 2(n-5)(7n-8).$$

§ 25. Elke rechte l , die raaklijn $t_{4,2}$ is, snijdt de c^n , waartoe zij behoort nog in $(n-6)$ punten V .

Wij beschouwen de meetkundige plaats $(VR_{4,2})_P$ der punten V .

Daar P , als basispunt van een in S^4 begrepen complex, op $16(n+1)(n-5)(n-6)$ raaklijnen $t_{4,2}$ ligt

(complexen Tabel V) heeft de kromme $(V_{R_4,2})_P$ in P een $16(n+1)(n-5)(n-6)$ -voudig punt.

Verder bevat elke straal, buiten P om, $8(n-4)(n-5)(n-6)$ punten V.

Derhalve is $(V_{R_4,2})_P$ een kromme van den graad

$$(n-5)(n-6)[8(n-4) + 16(n+1)] \text{ of } 8(n-5)(n-6)(3n-2).$$

§ 26. Uit de verwantschap (MR_4, MR_2) kan men opnieuw afleiden, dat de t_6 een kromme van de klasse $15n(n-5)$ omhullen (§ 23); verder levert de verwantschap (MR_4, MV) opnieuw, dat de $t_{5,2}$ een kromme omhullen, waarvan de klasse $25n(n-5)(n-6)$ is. (§ 23).

Voegen wij elk punt R_2 toe aan elk der tot dezelfde c^n behorende punten V, dan wordt in den stralenbundel met top M een verwantschap bepaald, welke tot kenmerkende getallen heeft

$$2(n-5)(7n-8)(n-6) \text{ en } 8(n-5)(n-6)(3n-2).$$

Tot de $(n-5)(n-6)[2(7n-8) + 8(3n-2)]$ of $2(n-5)(n-6)(19n-16)$ coïncidenties behoort de straal MP $8(n-4)(n-5)(n-6)$ -maal; immers op MP liggen $8(n-4)(n-5)$ puntenparen R_4 en R_2 , dus $8(n-4)(n-5)(n-6)$ punten V.

De overige coïncidenties ontstaan door samenvallen van een punt R_2 met een der overeenkomstige punten V.

Dit geschiedt in een raakpunt R_3 van een c^n met een $t_{4,3}$.

Voor de klasse der door de $t_{4,3}$ omhulde kromme vindt men dus

$$(n-5)(n-6)[2(19n-16) - 8(n-4)] \text{ of } 30n(n-5)(n-6).$$

Verder beschouwen wij de symmetrische verwantschap tusschen de stralen van (M), die twee tot dezelfde c^n behorende punten V en V' bevatten.

Voor haar kenmerkend getal vindt men

$$8(n-5)(n-6)(3n-2)(n-7).$$

Op MP liggen $8(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ paren

van punten V en V' ; evenveel coïncidenties zijn in MP vereenigd.

De overige coïncidenties, in aantal

$$(n-5)(n-6)(n-7)[16(3n-2)-8(n-4)] \text{ of } 40n(n-5)(n-6)(n-7),$$

ontstaan door samenvallen van een punt V met een punt V' , zijn dus afkomstig van raaklijnen $t_{4,2,2}$.

Men vindt hieruit dat *de raaklijnen $t_{4,2,2}$ een kromme van de klasse $20n(n-5)(n-6)(n-7)$ omhullen.*

§ 27. De involutie I_n^4 , die door een S^4 op een willekeurige rechte l wordt bepaald, bevat $\frac{9}{2}(n-4)(n-5)$ groepen met twee drievoudige elementen.

Daaruit volgt, dat l raaklijn $t_{3,3}$ is, voor evenveel krommen c^n uit S^4 .

Laat men l om een punt P wentelen, dan beschrijven de raakpunten R_3 en R_3' een kromme $(R_{3/3,3})_P$, die $3(n-5)(n+6)$ -maal door P gaat; immers P ligt, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, op $3(n-5)(n+6)$ krommen, die ieder in P een der raakpunten R_3 eener $t_{3,3}$ hebben (complexen Tabel I).

Hieruit volgt voor den graad van $(R_{3/3,3})_P$

$$9(n-4)(n-5) + 3(n-5)(n+6) \text{ of } 6(n-5)(2n-3).$$

§ 28. Bepalen wij nu den graad der meetkundige plaats van de groepen van $(n-6)$ punten V , welke l gemeen heeft met de $\frac{9}{2}(n-4)(n-5)$ krommen c^n , waarvoor l dubbel-osculeerende rechte is.

In den door P bepaalden complex komen $9(n+1)(n-5)(n-6)$ krommen voor, die een $t_{3,3}$ door P zenden.

(Complexen Tabel V).

Evenveel maal gaat nu de kromme $(V_{R_3,3})_P$ door P ; voor haar graad vinden wij dus

$$(n-5)(n-6) \left[\frac{9}{2}(n-4) + 9(n+1) \right] \text{ of} \\ \frac{9}{2}(n-5)(n-6)(3n-2).$$

§ 29. Uit de verwantschap $(M R_3, M R_3)$ kan men opnieuw de klasse der kromme afleiden, die door de t_6 wordt omhuld (§ 23).

Verder levert de verwantschap $(M R_3, M V)$ opnieuw de klasse der kromme, die door de $t_{4,3}$ wordt omhuld. (§ 26).

Een nieuw resultaat wordt verkregen uit de beschouwing van de verwantschap tusschen twee punten V en V' , die bij eenzelfde paar R_3 en R_3' behooren.

De symmetrische verwantschap tusschen de stralen $M V, M V'$ heeft tot kenmerkend getal

$$\frac{9}{2}(n-5)(n-6)(3n-2)(n-7).$$

Daar op $M P$ $\frac{9}{2}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ paren V, V' liggen, zijn evenveel coïncidenties in $M P$ verenigd.

De overige, die ontstaan door samenvallen van een punt V met een punt V' , zijn afkomstig van raaklijnen $t_{3,3,2}$.

Dit aantal coïncidenties bedraagt

$$(n-5)(n-6)(n-7) \left[9(3n-2) - \frac{9}{2}(n-4) \right] \text{ of} \\ \frac{45}{2}n(n-5)(n-6)(n-7).$$

Hieruit volgt, dat de raaklijnen $t_{3,3,2}$ een kromme van de klasse $\frac{45}{2}n(n-5)(n-6)(n-7)$ omhullen.

§ 30. De involutie I_n^4 , door een S^4 op een willekeurige rechte l bepaald, bezit $6(n-4)(n-5)(n-6)$ groepen, waarin naast één drievoudig twee tweevoudige elementen voorkomen.

Daaruit volgt dat l raaklijn $t_{3,2,2}$ is, voor evenveel krommen uit S^4 .

Bepalen wij de graden der krommen, die beschreven worden door de raakpunten R_3 en R_2 , als l om een van haar punten wentelt.

De kromme $(R_3/_{3,2,2})_P$ gaat $2(n-5)(n-6)(n+6)$ maal door P , want in een complex is een basispunt B raakpunt R_3 voor $2(n-5)(n-6)(n+6)$ krommen, die in 't bezit zijn van een $t_{3,2,2}$. (Complexen Tabel I).

Dus is $(R_3/_{3,2,2})_P$ van den graad
 $6(n-4)(n-5)(n-6) + 2(n-5)(n-6)(n+6)$ of
 $4(n-5)(n-6)(2n-3)$.

Daar in een complex een basispunt B raakpunt R_2 is voor $3(n-5)(n-6)(3n+8)$ krommen, die een $t_{2,3,2}$ bezitten, gaat $(R_2/_{3,2,2})_P$ $3(n-5)(n-6)(3n+8)$ maal door P . (Complexen Tabel I).

Dus heeft $(R_2/_{3,2,2})_P$ tot graad
 $12(n-4)(n-5)(n-6) + 3(n-5)(n-6)(3n+8)$ of
 $3(n-5)(n-6)(7n-8)$.

§ 31. De raaklijn $t_{3,2,2}$ snijdt haar c^n nog in $(n-7)$ punten V .

De meetkundige plaats $(V_{R_3,2,2})_P$ heeft, buiten P om, $6(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ punten met l gemeen.

Daar verder P , als basispunt van een in S^4 begrepen complex, op $12(n+1)(n-5)(n-6)(n-7)$ raaklijnen $t_{3,2,2}$ ligt (complexen Tabel V), is P een

$12(n+1)(n-5)(n-6)(n-7)$ -voudig punt op $(V_{R_3,2,2})_P$.

Dus is de graad dezer kromme

$6(n-5)(n-6)(n-7)[2(n+1) + n-4]$ of
 $6(n-5)(n-6)(n-7)(3n-2)$.

§ 32. De verwantschappen (MR_3, MR_2) , (MR_2, MR_2') (MR_3, MV) en (MR_2, MV) leveren opnieuw de klassen der krommen, resp. door de $t_{5,2}$ (§ 23), de $t_{4,3}$ (§ 26), de $t_{4,2,2}$ (§ 26) en de $t_{3,3,2}$ (§ 29) omhuld.

Een nieuw resultaat wordt verkregen door een beschouwing van de symmetrische verwantschap tusschen de stralen van (M), die twee bij dezelfde c^n behorende snijpunten V en V' bevatten.

Voor haar kenmerkend getal vindt men

$$6(n-5)(n-6)(n-7)(3n-2)(n-8).$$

Op MP liggen $6(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$ paren V, V'; evenveel coïncidenties zijn in P vereenigd.

De overige coïncidenties ontstaan door samenvallen van een punt V met een punt V', zijn dus afkomstig van raaklijnen $t_{3,2,2,2}$.

Dit aantal coïncidenties bedraagt

$$6(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)[2(3n-2)-(n-4)] \text{ of } 30n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8).$$

Daar deze drie aan drie opraaklijnen $t_{3,2,2,2}$ liggen, vindt men hieruit dat *de raaklijnen $t_{3,2,2,2}$ een kromme van de klasse $10n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$ omhullen.*

§ 33. Daar de door S^4 op een willekeurige rechte l bepaalde $I_n^4 \frac{2}{3}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ groepen met vier tweevoudige elementen bevat, is l raaklijn $t_{2,2,2,2}$ voor evenveel krommen uit het stelsel S^4 .

Als l om een harer punten P wentelt, dan beschrijft het raakpunt R_2 een kromme, die

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(3n+8)\text{-maal}$$

door P gaat; want P ligt, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, op

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(3n+8)$$

krommen, die ieder in P door een harer $t_{2,2,2,2}$ worden aangeraakt. (Complexen Tabel I).

Hieruit volgt, dat de kromme $(R_2/_{2,2,2,2})_P$ van den graad

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)[4(n-4) + \frac{2}{3}(3n+8)] \text{ of}$$

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(7n-8) \text{ is.}$$

§ 34. Bepalen wij verder den graad der meetkundige plaats van de groepen van $(n-8)$ punten V , welke l nog gemeen heeft met de c^n , welke zij tot $t_{2,2,2,2}$ heeft.

Als basispunt van een in S^4 begrepen complex, ligt P op $\frac{4}{3}(n+1)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$ raaklijnen $t_{2,2,2,2}$. (Complexen Tabel V).

De kromme $(VR_{2,2,2,2})_P$ gaat dus met evenveel takken door P .

Zij heeft verder met l , buiten P om,

$$\frac{2}{3}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$$

punten gemeen.

De graad van $(VR_{2,2,2,2})_P$ bedraagt bijgevolg

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)[2(n+1) + n-4] \text{ of}$$

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(3n-2).$$

§ 35. Uit de verwantschappen (MR_2, MR_2') en (MR_2, MV) kan men opnieuw de klasse terugvinden der krommen, resp. door de raaklijnen $t_{4,2,2}$ (§ 26) en $t_{3,2,2,2}$ (§ 32) omhuld.

Verder beschouwen wij de symmetrische verwantschap der stralen, welke twee tot eenzelfde c^n behorende punten V en V' met M verbinden.

Deze verwantschap heeft tot kenmerkend getal

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(3n-2)(n-9).$$

Daar op MP

$$\frac{2}{3}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$$

paren V en V' liggen, zijn evenveel coïncidenties in MP vereenigd.

Er blijven over

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)[2(3n-2)-(n-4)]$$

$$\text{of } \frac{10}{3}n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$$

coïncidenties.

Deze coïncidenties zijn, vijf aan vijf genomen, raakpunten van vijfvoudige raaklijnen $t_{2,2,2,2,2}$ zoodat *de raaklijnen $t_{2,2,2,2,2}$ een kromme omhullen van de klasse*

$$\frac{2}{3}n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9).$$

HOOFDSTUK III.

**Afleiding van de aantallen van bijzondere raaklijnen,
die in een S_B^4 uit het basispunt B kunnen
worden getrokken.**

§ 36. Onderstellen wij, dat een S^4 is 't bezit is van een basispunt B. Op een door B getrokken rechte b bepaalt S_B^4 dan een involutie I_{n-1}^4 , waarvan de groepen buiten het basispunt liggen.

De I_{n-1}^4 bezit $5(n-5)$ groepen, die ieder een vijfvoudig element bezitten.

De lijn b is dus vijfpuntige raaklijn voor $5(n-5)$ krommen uit S_B^4 .

Als b om B wentelt, beschrijft het raakpunt R_5 een meetkundige plaats, waarvan wij den graad zullen bepalen.

B ligt op 15 krommen met een t_5 , die het raakpunt R_5 in B hebben (zie § 1).

De kromme $(R_5)_B$ gaat dus 15-maal door B en zij is van den graad $5(n-5) + 15 = 5(n-2)$.

§ 37. Elke kromme c^n , die b tot t_5 heeft met 't raakpunt R_5 niet in B gelegen, snijdt haar nog in $(n-6)$ punten V.

Elke uit B getrokken raaklijn t_5 , die bovendien in B aan een exemplaar van S_B^4 raakt, geeft een punt V in B.

Het aantal malen, dat de meetkundige plaats $(VR_5)_B$ door B gaat, is dus gelijk aan het aantal raaklijnen $t_{2,5}$, waarvan het raakpunt R_2 in B ligt.

Dit aantal raaklijnen bedraagt $5(n-6)(2n+5)$ (§ 14).

Verder behooren bij ieder der $5(n-5)$ raakpunten R_5 , buiten B, $(n-6)$ punten V, eveneens buiten B gelegen.

Daaruit volgt voor den graad der kromme $(V_{R_5})_B$ $5(n-6)(2n+5) + 5(n-5)(n-6)$ of $15n(n-6)$.

§ 38. Wij beschouwen de verwantschap, welke in een stralenbundel, die M als top heeft, wordt bepaald door de paren aan elkaar toegevoegde punten R_5 en V.

Daar bij 1 punt R_5 $(n-6)$ punten V en bij 1 punt V 1 punt R_5 behooren, vindt men, in verband met de graden der krommen $(R_5)_B$ en $(V_{R_5})_B$ voor de kenmerkende getallen der verwantschap

$$5(n-2)(n-6) \text{ en } 15n(n-6).$$

Ieder der $5(n-5)$ raaklijnen t_5 langs MB vervangt $(n-6)$ coïncidenties.

De overige, ten getale van

$$5(n-2)(n-6) + 15n(n-6) - 5(n-5)(n-6) \text{ of } 15(n+1)(n-6),$$

gaan door punten $R_5 \equiv V$.

Voor het aantal raaklijnen t_6 door B vindt men dus $15(n+1)(n-6)$.

Daar door een willekeurig punt P in een S^4 $15n(n-5)$ raaklijnen t_6 kunnen worden getrokken (§ 23), kan men door een basispunt $15n(n-5) - 15(n+1)(n-6)$ of 90 raaklijnen t_6 minder trekken.

Nu zijn er in een S_B^4 $15c^n$, die een t_6 bezitten, waarvan het raakpunt R_6 met B samenvalt (§ 1). Ieder dezer 15 raaklijnen t_6 moet dus zesmaal in rekening worden gebracht.

Wij beschouwen nu de symmetrische verwantschap, welke twee tot dezelfde c^n behorende punten V met M verbinden.

Aan 1 punt V zijn $(n-7)$ punten V' toegevoegd en omgekeerd.

Met behulp van den graad der kromme $(V_{R_5})_B$ vinden we voor het kenmerkend getal der verwantschap

$$15n(n-6)(n-7).$$

Ieder der $5(n-5)$ raaklijnen t_5 langs MB vervangt $(n-6)(n-7)$ coïncidenties.

Het overige aantal coïncidenties ($MV \equiv MV'$) bedraagt dus

$$(n-6)(n-7)[30n-5(n-5)] \text{ of} \\ 25(n+1)(n-6)(n-7).$$

Het getal $25(n+1)(n-6)(n-7)$ stelt voor het aantal raaklijnen $t_{5,2}$ door B .

Voor het aantal $t_{5,2}$, die men door een willekeurig punt P in een S^4 kan trekken is in § 23 afgeleid $25n(n-5)(n-6)$.

Door een basispunt kan men derhalve $25(n-6)(n+7)$ raaklijnen $t_{5,2}$ minder trekken.

Verder is gevonden, dat er in een S_B^4 $(n-6)(n+25)$ c^n een $t_{5,2}$ hebben, waarvan het raakpunt $R_5 \equiv B$ is (§ 2) en $5(n-6)(2n+5)$ c^n een $t_{2,5}$, waarvan het raakpunt $R_2 \equiv B$ is. (§ 14).

Men vindt hieruit, dat de raaklijnen $(t_{5,2})_{R_5 \equiv B}$ vijfmaal en de raaklijnen $(t_{2,5})_{R_2 \equiv B}$ tweemaal in rekening moeten worden gebracht.

§ 39. Een rechte b , in een S_B^4 door het basispunt B getrokken, is $t_{4,2}$ voor $8(n-5)(n-6)$ c^n . De I_{n-1}^4 toch, die door S_B^4 op b wordt bepaald, bezit $8(n-5)(n-6)$ groepen van puntenparen R_4 en R_2 , buiten B gelegen.

Laten we b om B wentelen, dan beschrijven de raakpunten R_4 en R_2 krommen, wier graden wij zullen bepalen.

De kromme $(R_{4/4,2})_B$ gaat door de $8(n-5)(n-6)$ raakpunten R_4 , die op l liggen.

Daar verder het basispunt B op $(n-6)(n+25)$ c^n ligt, die een raaklijn $t_{5,2}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_5 in B ligt (§ 2), is B $(n-6)(n+25)$ -voudig punt van de kromme $(R_{4/4,2})_B$.

De kromme $(R_{4/4,2})_B$ is dus van den graad $8(n-5)(n-6) + (n-6)(n+25)$ of $3(n-6)(3n-5)$.

De kromme $(R_{2/4,2})_B$ gaat door de $8(n-5)(n-6)$ raakpunten R_2 , die op l liggen.

Daar verder het basispunt B op $6(n-6)(n+5)c^n$ ligt, die een raaklijn $t_{4,3}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_3 in B ligt (§ 8), is B $6(n-6)(n+5)$ -voudig punt van de kromme $(R_{2/4,2})_B$.

De kromme $(R_{2/4,2})_B$ is dus van den graad

$$8(n-5)(n-6) + 6(n-6)(n+5) \text{ of} \\ 2(n-6)(7n-5).$$

§ 40. Elke kromme c^n , die b tot raaklijn $t_{4,2}$ (raakpunten R_4 en R_2 verschillend van B) heeft, snijdt b in $(n-7)$ punten V.

Elke uit B getrokken raaklijn $t_{4,2}$, die bovendien aan een exemplaar van het stelsel S_B^4 in B raakt, geeft een punt V in B.

Het aantal malen, dat de meetkundige plaats $(V_{R_{4,2}})_B$ door B gaat, is dus gelijk aan het aantal lijnen $t_{2,4,2}$ in S_B^4 , waarvan een der raakpunten R_2 in B is gelegen.

Dit aantal raaklijnen is gelijk aan

$$8(n-6)(n-7)(2n+5) \text{ (§ 14).}$$

Verder behooren bij ieder der $8(n-5)(n-6)$ groepen van paren van punten R_4 en R_2 (buiten B gelegen) $(n-7)$ punten V, eveneens buiten B liggende.

Voor den graad der kromme $(V_{R_{4,2}})_B$ wordt dus gevonden:

$$8(n-6)(n-7)(2n+5) + 8(n-5)(n-6)(n-7) \\ \text{of } 24n(n-6)(n-7).$$

§ 41. Uit de verwantschap $(M R_4, M R_2)$ kan opnieuw worden afgeleid het aantal t_6 , die door B kunnen worden getrokken (§ 38).

Verder levert de verwantschap $(M R_4, M V)$ opnieuw het aantal $t_{5,2}$, die door B kunnen worden getrokken (§ 38).

Voegen wij elk punt R_2 toe aan elk der tot dezelfde c^n behorende punten V, dan wordt in den stralenbundel met top M een verwantschap bepaald, welke tot kenmerkende getallen heeft

$$2(n-6)(7n-5)(n-7) \text{ en } 24n(n-6)(n-7).$$

Ieder der $8(n-5)(n-6)$ raaklijnen $t_{4,2}$ langs MB vervangt $(n-7)$ coïncidenties.

Voor het aantal coïncidenties $MR_2 \equiv MV$ wordt dus gevonden:

$$(n-6)(n-7)[2(7n-5) + 24n - 8(n-5)] \text{ of} \\ 30(n+1)(n-6)(n-7).$$

Het aantal $t_{4,3}$ door B bedraagt $30(n+1)(n-6)(n-7)$.

Dit aantal is $30(n-6)(n+7)$ minder dan het aantal raaklijnen $t_{4,3}$, die men uit een willekeurig punt P aan krommen van een algemeen S^4 kan trekken. (§ 26).

Daar een S_B^4 $3(n-6)(n+10)$ krommen bezit met een raaklijn $t_{4,3}$, waarvan het raakpunt $R_4 \equiv B$ is (§ 5) en $6(n-6)(n+5)$ krommen met een raaklijn $t_{3,4}$, waarvan het raakpunt $R_3 \equiv B$ is (§ 8), vindt men hieruit dat de raaklijnen $(t_{4,3})_{R_4 \equiv B}$ viermaal en de raaklijnen $(t_{3,4})_{R_3 \equiv B}$ driemaal in rekening moeten worden gebracht.

Verder beschouwen wij de symmetrische verwantschap tusschen de stralen van (M) , die twee tot dezelfde c^n behorende punten V en V' bevatten.

Voor haar kenmerkend getal vindt men

$$24n(n-6)(n-7)(n-8).$$

Ieder der $8(n-5)(n-6)$ raaklijnen $t_{4,2}$ langs MB vervangt $(n-7)(n-8)$ coïncidenties.

Het overige aantal coïncidenties bedraagt dus

$$(n-6)(n-7)(n-8)[48n - 8(n-5)] \text{ of} \\ 40(n+1)(n-6)(n-7)(n-8).$$

Men vindt hieruit voor *het aantal raaklijnen $t_{4,2,2}$, die door B kunnen worden getrokken*

$$20(n+1)(n-6)(n-7)(n-8).$$

Dit aantal is $40(n-6)(n-7)(n+4)$ minder dan het aantal raaklijnen $t_{4,2,2}$, die men uit een willekeurig punt P aan krommen van een algemeen S^4 kan trekken (§ 26).

Daar het basispunt B van een S_B^4 raakpunt R_4 is van $2(n-6)(n-7)(n+10)$ raaklijnen $t_{4,2,2}$ (§ 5) en raakpunt R_2 van $8(n-6)(n-7)(2n+5)$ raaklijnen $t_{4,2,2}$ (§ 14), vindt men hieruit, dat de raaklijnen $(t_{4,2,2})_{R_4 \equiv B}$

viermaal en de raaklijnen $(t_{4,2,2})_{R_2 \equiv B}$ tweemaal moeten worden geteld.

§ 42. De involutie I_{n-1}^4 , die op een rechte b door een S_B^4 wordt bepaald, bezit $\frac{9}{2}(n-5)(n-6)$ groepen met twee drievoudige elementen, die buiten B liggen.

Daaruit volgt, dat b raaklijn $t_{3,3}$ is voor $\frac{9}{2}(n-5)(n-6)$ krommen uit S_B^4 .

Laat men b om B wentelen, dan beschrijven de raakpunten R_3 en R_3' een kromme $(R_{3/3,3})_B$, die met $3(n-6)(n+10)$ takken door B gaat; immers B ligt op $3(n-6)(n+10)$ krommen, die het raakpunt R_4 eener $t_{4,3}$ in B hebben (§ 5).

Verder gaat $(R_{3/3,3})_B$ door de $9(n-5)(n-6)$ raakpunten R_3 , die op b liggen.

Daaruit volgt, dat $(R_{3/3,3})_B$ tot graad heeft

$$9(n-5)(n-6) + 3(n-6)(n+10) \text{ of} \\ 3(n-6)(4n-5).$$

§ 43. Wij bepalen den graad van de meetkundige plaats van de groepen van $(n-7)$ punten V , welke b gemeen heeft met de $\frac{9}{2}(n-5)(n-6)$ krommen c^n , waarvoor b dubbel-osculeerende rechte is, waarvan de buigpunten buiten B liggen.

Elke uit B getrokken raaklijn $t_{3,3}$, die bovendien aan een c^n uit S_B^4 in B raakt, geeft een punt V in B .

Daar er in een S_B^4 $\frac{9}{2}(n-6)(n-7)(2n+5)$ krommen een $t_{2,3,3}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_2 in B ligt (§ 17), gaat $(V_{R_{3,3}})_B$ evenveel maal door B .

De graad van $(V_{R_{3,3}})_B$ is dus

$$\frac{9}{2}(n-6)(n-7)(2n+5) + \frac{9}{2}(n-5)(n-6)(n-7) \text{ of} \\ \frac{27}{2}n(n-6)(n-7).$$

§ 44. Uit de verwantschap ($M R_3, M R_3'$) kan men opnieuw het aantal der t_3 afleiden, die door B kunnen worden getrokken (§ 38).

Uit de verwantschap ($M R_3, M V$) komt men opnieuw tot het aantal $t_{4,3}$, die door B kunnen worden getrokken (§ 41).

De symmetrische verwantschap tusschen de stralen uit M naar de puntenparen (V, V'), die tot eenzelfde c^n behooren, heeft tot kenmerkend getal

$$\frac{45}{2} (n+1) (n-6) (n-7) (n-8).$$

Daar ieder der $\frac{9}{2} (n-5) (n-6)$ raaklijnen $t_{3,3}$ langs MB $(n-7) (n-8)$ coïncidenties vervangt en de overige afkomstig zijn van raaklijnen $t_{3,3,2}$, vindt men voor *het aantal raaklijnen $t_{3,3,2}$, die door B kunnen worden getrokken* $(n-6) (n-7) (n-8) [27n - \frac{9}{2} (n-5)]$ of

$$\frac{45}{2} (n+1) (n-6) (n-7) (n-8).$$

Door een willekeurig punt P kan men in een algemeen S^4 $\frac{45}{2} n (n-5) (n-6) (n-7)$ raaklijnen $t_{3,3,2}$ trekken (§ 29); door een basispunt B kan men dus

$$45 (n-6) (n-7) (n+4)$$

raaklijnen $t_{3,3,2}$ minder trekken.

Daar het basispunt B van een S_B^4 raakpunt R_3 is voor $9 (n-6) (n-7) (n+5)$ raaklijnen $t_{3,3,2}$ (§ 8) en raakpunt R_2 voor $\frac{9}{2} (n-6) (n-7) (2n+5)$ raaklijnen $t_{3,3,2}$ (§ 17), vindt men hieruit dat de raaklijnen $(t_{3,2,2})_{R_3 \equiv B}$ driemaal en de raaklijnen $(t_{3,2,2})_{R_2 \equiv B}$ tweemaal moeten worden gerekend.

§ 45. De involutie I_{n-1}^4 , door een S_B^4 op een rechte b bepaald, bezit $6 (n-5) (n-6) (n-7)$ groepen, ieder met een drievoudig en twee tweevoudige elementen; b is

dus raaklijn $t_{3,2,2}$ voor $6(n-5)(n-6)(n-7)$ krommen uit S_B^4 .

Als b om B wentelt beschrijven ieder der raakpunten R_3 en R_2 een meetkundige plaats, waarvan wij den graad zullen bepalen.

De kromme $(R_3/_{3,2,2})_B$ gaat door de $6(n-5)(n-6)(n-7)$ raakpunten R_3 , die op b liggen.

Daar verder het basispunt B op $2(n-6)(n-7)(n+10)$ krommen ligt, die een raaklijn $t_{4,2,2}$ bezitten, waarvan het raakpunt R_4 in B is gelegen (§ 10), is B op de kromme $(R_3/_{3,2,2})_B$ een veelvoudig punt van de orde $2(n-6)(n-7)(n+10)$.

Daaruit volgt, dat de kromme $(R_3/_{3,2,2})_B$ tot graad heeft $6(n-5)(n-6)(n-7) + 2(n-6)(n-7)(n+10)$ of $2(n-6)(n-7)(4n-5)$.

Dekromme $(R_2/_{3,2,2})_B$ gaat door de $12(n-5)(n-6)(n-7)$ raakpunten R_2 , die op b liggen.

Uit het feit, dat B op $9(n-6)(n-7)(n+5)$ c^n ligt, die een raaklijn $t_{3,3,2}$ bezitten, waarvan een der raakpunten R_3 met B samenvalt, volgt dat B $9(n-6)(n-7)(n+5)$ -voudig punt van $(R_2/_{3,2,2})_B$ is.

$(R_2/_{3,2,2})_B$ heeft dus tot graad $12(n-5)(n-6)(n-7) + 9(n-6)(n-7)(n+5)$ of $3(n-6)(n-7)(7n-5)$.

§ 46. De raaklijn $t_{3,2,2}$, uit B getrokken, snijdt haar c^n nog in $(n-8)$ buiten B gelegen punten V .

Daar b $6(n-5)(n-6)(n-7)$ groepen van, buiten B gelegen, drietallen van punten R_3 , R_2 en R_2' bezit, snijdt de kromme $(V_{R_3,2,2})_B$ de rechte b in

$$6(n-5)(n-6)(n-7)(n-8),$$

buiten B gelegen, punten V .

Daar verder een S_B^4 $6(n-6)(n-7)(n-8)(2n+5)$ krommen met een $t_{2,3,2,2}$ bezit, waarvan een der raakpunten R_2 in B ligt (§ 17), gaat $(V_{R_3,2,2})_B$ met $6(n-6)(n-7)(n-8)(2n+5)$ takken door B .

Voor den graad van $(V_{R_3,2,2})_B$ vindt men dus
 $6(n-6)(n-7)(n-8)[(2n+5)+(n-5)]$ of
 $18n(n-6)(n-7)(n-8).$

§ 47. Uit de verwantschappen (MR_3, MR_2) , (MR_2, MR_2') , (MR_3, MV) en (MR_2, MV) kunnen opnieuw de aantallen van raaklijnen $t_{5,2}$ (§ 38), $t_{4,3}$ (§ 41), $t_{4,2,2}$ (§ 41) en $t_{3,3,2}$ (§ 44), die men uit B kan trekken, worden afgeleid.

De symmetrische verwantschap (MV, MV') heeft tot kenmerkend getal

$$18n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9).$$

Daar MB $6(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$ coïncidenties vervangt en de overige drie aan drie op uit B getrokken raaklijnen $t_{3,2,2,2}$ liggen, vindt men voor *het aantal der uit B getrokken raaklijnen $t_{3,2,2,2}$*

$$10(n+1)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9).$$

Daar men in een algemeen S^4 door een punt P $10n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$ raaklijnen $t_{3,2,2,2}$ kan trekken (§ 32), zijn er door het basispunt

$$30(n-6)(n-7)(n-8)(n+3)$$

raaklijnen $t_{3,2,2,2}$ verloren gegaan.

Nu is het basispunt B van een S^4_B raakpunt R_3 van $2(n-6)(n-7)(n-8)(n+5)$ raaklijnen $t_{3,2,2,2}$ (§ 11) en raakpunt R_2 van $6(n-6)(n-7)(n-8)(2n+5)$ raaklijnen $t_{3,2,2,2}$ (§ 17). Daaruit volgt dat de raaklijnen $(t_{3,2,2,2})_{R_3 \equiv B}$ driemaal en de raaklijnen $(t_{3,2,2,2})_{R_2 \equiv B}$ tweemaal moeten worden in rekening gebracht.

§ 48. Daar de door S^4_B op b bepaalde I^4_{n-1}

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$$

groepen met vier tweevoudige elementen bevat, zijn er evenveel krommen, die de rechte b tot viervoudige raaklijn $t_{2,2,2,2}$ hebben.

¹ Wij bepalen weer den graad der kromme, die door het raakpunt R_2 wordt beschreven als b om B wentelt.

Daar B op $2(n-6)(n-7)(n-8)(n+5)$ krommen ligt, die het raakpunt R_3 eener $t_{3,2,2,2}$ in B hebben (§ 11), gaat de kromme $(R_{2,2,2,2})_B$ $2(n-6)(n-7)(n-8)(n+5)$ maal door B.

Zij is dus van den graad

$$(n-6)(n-7)(n-8) \left[\frac{8}{3}(n-5) + 2(n+5) \right] \text{ of}$$

$$\frac{2}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(7n-5).$$

§ 49. Bepalen wij verder den graad der meetkundige plaats van de groepen van $(n-9)$ punten V, welke b nog gemeen heeft met de c^n , voor welke zij $t_{2,2,2,2}$ is.

Buiten B om snijdt de kromme $(V_{R_{2,2,2,2}})_B$ de rechte b in $\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$ punten V.

Daar er verder in een S_B^4

$\frac{2}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(2n+5)$ krommen een rechte $t_{2,2,2,2}$ hebben, waarvan een der raakpunten R_2 in B ligt (§ 20), gaat $(V_{R_{2,2,2,2}})_B$ evenveel maal door B.

Voor haar graad vindt men dus

$$\frac{2}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)[(2n+5) + (n-5)] \text{ of}$$

$$2n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9).$$

§ 50. Uit de verwantschappen (MR_2, MR_2') en (MR_2, MV) komt men opnieuw tot de aantallen van raaklijnen $t_{4,2,2}$ (§ 41) en $t_{3,2,2,2}$ (§ 47), die door B kunnen worden getrokken.

Verder beschouwen wij de symmetrische verwantschap (MV, MV') , die tot kenmerkend getal heeft

$$2n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10).$$

Daar MB $(n-9)(n-10)$ coïncidenties vervangt, vindt men voor het aantal raaklijnen $t_{2,2,2,2,2}$, die uit B kunnen worden getrokken

$$\frac{2}{3}(n+1)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10).$$

Daar er in een algemeen S^4 uit een willekeurig punt P

$$\frac{2}{3} n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$$

raaklijnen $t_{2,2,2,2,2}$ kunnen worden getrokken (§ 35), bedraagt dit aantal voor een basispunt B dus

$$\frac{4}{3} (n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(2n+5)$$

minder.

Verder hebben wij in § 20 afgeleid, dat het basispunt B van een S_B^4 raakpunt R_2 is voor

$$\frac{2}{3} (n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(2n+5)$$

raaklijnen $t_{2,2,2,2,2}$; deze laatsten moeten dus tweemaal worden in rekening gebracht.

HOOFDSTUK IV.

Afleiding van de aantallen van krommen, die een bijzondere raaklijn bezitten.

§ 51. Zij a een willekeurige rechte; elk van haar punten is, als basispunt van een in het stelsel S^4 begrepen complex, raakpunt R_5 voor 10 krommen c^n (complexen Tabel I). De hierdoor aan a gekoppelde krommen vormen een stelsel $|c^n|$, waarvan de index gelijk is aan $5(8n - 21)$; immers de raakpunten R_5 der krommen c^n , welke door een punt P gaan, liggen op een kromme $(R_5)_{t_5}$ van den graad $5(8n - 21)$ (complexen Tabel VI) en deze snijdt a in evenveel punten R_5 .

De raaklijnen t_5 , die het raakpunt R_5 op a hebben, vormen een stelsel $|t_5|$ met index $5(n - 2)$, want door een punt P gaan de raaklijnen t_5 , welke P verbinden met de snijpunten van a en de kromme $(R_5)_P$ (§ 21).

De stelsels $|c^n|$ en $|t_5|$ bepalen op een rechte l een verwantschap tusschen de punten C en T van twee puntenreeksen.

Door een punt C van l gaat één c^n , die a in $5(8n - 21)$ punten R_5 snijdt, dus $5(8n - 21)$ op t_5 gelegen punten T op l bepaalt.

Door een punt T van l gaan $5(n - 2)$ raaklijnen t_5 ; de bijbehorende krommen c^n snijden a gezamenlijk in $5n(n - 2)$ punten C .

De beschouwde verwantschap heeft dientengevolge tot kenmerkende getallen $5(8n - 21)$ en $5n(n - 2)$.

De projectief aan elkaar toegevoegde stelsels $|c^n|$ en $|t_5|$ brengen dus een kromme voort van den graad $5(8n - 21) + 5n(n - 2)$.

Tot deze meetkundige plaats behoort de rechte a

50 maal, omdat ieder van haar punten als basispunt van een complex raakpunt R_5 is van 10 raaklijnen t_5 (complexen Tabel I).

Voor den graad der meetkundige plaats $(V_{R_5/5})_a$ der punten V , welke elke t_5 nog met de overeenkomstige c^n gemeen heeft, wordt dus gevonden

$$5(8n - 21) + 5n(n - 2) - 50 \text{ of } 5(n^2 + 6n - 31).$$

§ 52. Wij beschouwen de verwantschap tusschen de stralen $r = MR_5$ en $v = MV$ in een stralenbundel met M als top, die bepaald wordt door de aan elkaar toegevoegde punten R_5 en V .

Een straal r bevat 10 punten R_5 , bepaalt dus $10(n - 5)$ stralen v ; aan een straal v zijn $5(n^2 + 6n - 31)$ stralen r toegevoegd.

De $5(n - 2)$ stralen t_5 door M , die het raakpunt R_5 op a hebben, vervangen ieder $(n - 5)$ coïncidenties.

De overige zijn afkomstig van raaklijnen t_6 , waarvan het raakpunt R_6 op a ligt.

Hun aantal bedraagt derhalve

$$10(n - 5) + 5(n^2 + 6n - 31) - 5(n - 2)(n - 5) \text{ of } 15(5n - 17).$$

Hieruit volgt, dat *de raakpunten R_6 der zespuntige raaklijnen t_6 op een kromme $(R_6)_{t_6}$ van den graad $15(5n - 17)$ gelegen zijn.*

In de symmetrische verwantschap tusschen de stralen $v = MV$ en $v' = MV'$ komen met een straal v

$$5(n^2 + 6n - 31)(n - 6)$$

stralen v' overeen en omgekeerd.

Elke der $5(n - 2)$ stralen t_5 door M , die het raakpunt R_5 op a hebben, vervangt $(n - 5)(n - 6)$ coïncidenties.

Voor het aantal coïncidenties $v \equiv v'$ wordt dus gevonden

$$10(n^2 + 6n - 31)(n - 6) - 5(n - 2)(n - 5)(n - 6) = 5(n - 6)(n^2 + 19n - 72).$$

Deze zijn afkomstig van raaklijnen $t_{5,2}$.

Wij vinden zoodoende, dat *de raakpunten R_5 der*

raaklijnen $t_{5,2}$ op een kromme $(R_5)_{15,2}$ van den graad $5(n-6)(n^2+19n-72)$ liggen.

§ 53. Elk punt van de willekeurige rechte a is, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_4 van $(n-5)(n+16)$ raaklijnen $t_{4,2}$ (complexen Tabel I).

De meetkundige plaats $(R_2/4,2)_a$ der raakpunten R_2 , die aan het raakpunt R_4 zijn toegevoegd, heeft met a twee groepen van punten gemeen.

De eerste groep omvat de 15 $(5n-17)$ snijpunten met de kromme $(R_5)_{15,2}$, de tweede bevat de 8 $(n-4)(n-5)$ raakpunten R_2 , waar a wordt aangeraakt door de krommen c^n , die haar nog in een punt R_4 vierpuntig aanraken.

Hieruit wordt voor den graad der kromme $(R_2/4,2)_a$ gevonden

$$15(5n-17) + 8(n-4)(n-5) \text{ of } 8n^2 + 3n - 95.$$

§ 54. Wij leggen nu door middel van de rechte a een verwantschap vast tusschen de groepen van $(n-5)(n+16)$ krommen c^n , die het raakpunt R_4 eener $t_{4,2}$ op a hebben eenerzijds en de overeenkomstige raaklijnen $t_{4,2}$ anderzijds.

Om den graad der meetkundige plaats der punten V te bepalen, die iedere $t_{4,2}$ van het hier bedoelde stelsel nog met haar c^n gemeen heeft, voegen wij aan elk dier krommen c^n de raaklijn $t_{4,2}$ toe, waarvan het raakpunt R_4 op a ligt.

Aan den complex, dien een punt P uit het stelsel S^4 afzondert, is een kromme van den graad

$$2(n-5)(2n^2+23n-69)$$

toegevoegd, die de raakpunten R_4 bevat van de raaklijnen $t_{4,2}$ in dien complex. (Complexen Tabel VI).

Hierdoor wordt het aantal raaklijnen $t_{4,2}$ bekend, waarvan het raakpunt R_4 op a ligt; het stelsel $|c^n|$ heeft dus tot index $2(n-5)(2n^2+23n-69)$.

De index van het stelsel $|t_{4,2}|$ is $(n-5)(9n-16)$;

immers dit is (§ 24) het aantal snijpunten van a met de kromme $(R_4/_{4,2})_P$.

De projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_{4,2}|$ brengen nu een figuur voort van den graad

$$2(n-5)(2n^2+23n-69)+n(n-5)(9n-16).$$

Hiertoe behoort de rechte a $4(n-5)(n+16)$ maal, omdat ieder van haar punten, als basispunt van een complex, raakpunt R_4 is van $(n-5)(n+16)$ raaklijnen $t_{4,2}$ (complexen Tabel I).

Verder behoort tot de meetkundige plaats $(V_{R_4/_{4,2}})_a$ de kromme $(R_2/_{4,2})_a$ (§ 53) tweemaal.

Voor den graad van $(V_{R_4/_{4,2}})_a$ wordt dus gevonden

$$2(n-5)(2n^2+23n-69)+n(n-5)(9n-16)-\\4(n-5)(n+16)-2(8n^2+3n-95) \text{ of } \\(n-6)(13n^2+23n-200).$$

§ 55. De puntenparen R_4 en R_2 bepalen in een stralenbundel (M) een verwantschap, waaruit opnieuw de graad der kromme $(R_5)_{t_5}$ kan worden afgeleid (§ 52).

De verwantschap (MR_4, MV) levert opnieuw den graad der kromme $(R_5)_{t_5,2}$ (§ 52).

In de verwantschap tusschen de stralen $r=MR_2$ en $v=MV$, komen met een straal r overeen

$$(8n^2+3n-95)(n-6)$$

stralen v ; met een straal v $(n-6)(13n^2+23n-200)$ stralen r .

Elke der $(n-5)(9n-16)$ stralen $t_{4,2}$ door M , die het raakpunt R_4 op a hebben, vertegenwoordigt $(n-6)$ coïncidenties.

Uit

$$(8n^2+3n-95)(n-6)+(n-6)(13n^2+23n-200)\\-(n-5)(9n-16)(n-6)$$

vindt men nu, dat de raakpunten R_4 der raaklijnen $t_{4,3}$ gelegen zijn op een kromme $(R_4)_{t_{4,3}}$ van den graad

$$3(n-6)(4n^2+29n-125).$$

In de symmetrische verwantschap tusschen de stralen $v = MV$ en $v' = MV'$ komen met een straal v

$$(n-6)(13n^2 + 23n - 200)(n-7)$$

stralen v' overeen en omgekeerd.

Elke der $(n-5)(9n-16)$ stralen $t_{4,2}$ door M , vangt $(n-6)(n-7)$ coïncidenties.

Het aantal coïncidenties $v \equiv v'$ bedraagt dus

$$2(n-6)(13n^2 + 23n - 200)(n-7) - \\ (n-5)(9n-16)(n-6)(n-7) \text{ of} \\ (n-6)(n-7)(17n^2 + 107n - 480).$$

Deze zijn in paren afkomstig van raaklijnen $t_{4,2,2}$.

Dus *liggen de raakpunten R_4 der raaklijnen $t_{4,2,2}$ op een kromme $(R_4)_{t_{4,2,2}}$ van den graad*

$$\frac{1}{2}(n-6)(n-7)(17n^2 + 107n - 480).$$

§ 56. Elk punt van de willekeurige rechte a is, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_3 eener $t_{3,3}$ voor $3(n-5)(n+6)$ krommen. (Complexen Tabel I).

De meetkundige plaats $(R_3'/_3,3)_a$ van het tweede raakpunt R_3' , dat aan het op a gelegen raakpunt R_3 is toegevoegd, heeft met a twee groepen van punten gemeen.

De eerste groep omvat de 15 $(5n-17)$ snijpunten met de kromme $(R_6)_{t_6}$ (§ 52).

De tweede groep bestaat uit de $9(n-4)(n-5)$ punten R_3' , waar a wordt geosculeerd door de krommen c^n , die a in nog een ander punt R_3 osculeeren.

Hieruit volgt, dat de kromme $(R_3'/_3,3)_a$ tot graad heeft $15(5n-17) + 9(n-4)(n-5)$ of $3(3n^2 - 2n - 25)$.

§ 57. Wij leggen door tusschenkomst van de rechte a een verwantschap vast tusschen de groepen van $3(n-5)(n+6)$ krommen c^n , die een der raakpunten R_3 eener $t_{3,3}$ op a hebben eenerzijds en de raaklijnen $t_{3,3}$ anderzijds.

Om den graad van de meetkundige plaats der punten V te vinden, welke elke $t_{3,3}$ met haar c^n gemeen heeft, beschouwen wij de figuur voortgebracht door projectieve toevoeging van de overeenkomstige stelsels $|c^n|$ en $|t_{3,3}|$.

Het stelsel $|c^n|$ heeft tot index $3(n-5)(3n^2+13n-45)$; immers dit getal stelt voor den graad der kromme $(R_3)_{t_{3,3}}$, voorkomende in den complex, dien een punt P uit S^4 afzondert (complexen Tabel VI).

De index van $|t_{3,3}|$ is gelijk aan $6(n-5)(2n-3)$, welk getal den graad der kromme $(R_{3/3,3})_P$ voorstelt (§ 27).

De verwantschap tusschen de puntenreeksen, die door $|c^n|$ en $|t_{3,3}|$ op een rechte l bepaald wordt, heeft tot kenmerkende getallen

$$3(n-5)(3n^2+13n-45) \text{ en } 6n(n-5)(2n-3).$$

De figuur, die door de projectief gemaakte stelsels $|c^n|$ en $|t_{3,3}|$ wordt voortgebracht, heeft dus tot graad

$$3(n-5)(3n^2+13n-45) + 6n(n-5)(2n-3).$$

Hier toe behoort de rechte a $9(n-5)(n+6)$ maal, omdat ieder van haar punten, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_3 is van $3(n-5)(n+6)$ raaklijnen $t_{3,3}$ (complexen Tabel I).

Verder behoort tot de meetkundige plaats $(VR_{3/3,3})_a$ driemaal de kromme $(R'_3/_{3,3})_a$, van graad

$$3(3n^2-2n-25) \text{ (§ 56).}$$

De kromme $(VR_{3/3,3})_a$ heeft dus tot graad

$$3(n-5)(3n^2+13n-45) + 6n(n-5)(2n-3) \\ - 9(n-5)(n+6) - 9(3n^2-2n-25) \text{ of} \\ 3(n-6)(7n^2+2n-65).$$

§ 58. Uit een beschouwing van de verwantschappen (MR_3, MR'_3) en (MR_3, MV) kan men opnieuw komen tot de graden der krommen $(R_6)_{t_6}$ (§ 52) en $(R_4)_{t_{4,3}}$ (§ 55).

Nu beschouwen wij de verwantschap tusschen de punten R'_3 en V , benevens de verwantschap tusschen de stralen $r' = MR'_3$ en $v = MV$.

Met een straal r' komen overeen

$$3(3n^2 - 2n - 25)(n - 6)$$

stralen v ; met een straal v

$$3(n - 6)(7n^2 + 2n - 65)$$

stralen r .

Elke der $6(n - 5)(2n - 3)$ raaklijnen $t_{3,3}$ door M , die een der raakpunten R_3 op a hebben, is een $(n - 6)$ -voudige coïncidentie.

Het aantal coïncidenties $r' \equiv v$ bedraagt dus

$$(n - 6)[3(3n^2 - 2n - 25) + 3(7n^2 + 2n - 65) - 6(n - 5)(2n - 3)] = 6(n - 6)(3n^2 + 13n - 60).$$

Dit getal is de graad der kromme $(R_3)_{t_{3,4}}$, die de meetkundige plaats is der raakpunten R_3 der raaklijnen $t_{3,4}$.

In de symmetrische verwantschap tusschen de stralen $v = MV$ en $v' = MV'$ komen met een straal v overeen $3(n - 6)(7n^2 + 2n - 65)(n - 7)$ stralen v' en omgekeerd.

Elke der $6(n - 5)(2n - 3)$ raaklijnen $t_{3,3}$ door M vervangt $(n - 6)(n - 7)$ coïncidenties.

Voor het aantal coïncidenties $v = v'$ wordt dus gevonden

$$6(n - 6)(7n^2 + 2n - 65)(n - 7) - 6(n - 5)(2n - 3)(n - 6)(n - 7) \text{ of} \\ 30(n - 6)(n - 7)(n^2 + 3n - 16).$$

Dit getal stelt voor den graad van de meetkundige plaats $(R_3)_{t_{3,3,2}}$ der raakpunten R_3 van de raaklijnen $t_{3,3,2}$.

§ 59. Elk punt van de willekeurige rechte a is, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_3 eener $t_{3,2,2}$ voor $2(n - 5)(n - 6)(n + 6)$ raaklijnen $t_{3,2,2}$. (Complexen Tabel I).

De meetkundige plaats $(R_3)_{t_{3,2,2},a}$ der raakpunten R_3 , die aan het op a gelegen raakpunt R_3 zijn toegevoegd, heeft met a twee groepen van punten gemeen.

De eerste groep omvat de $5(n - 6)(n^2 + 19n - 72)$ snijpunten met de kromme $(R_5)_{t_{5,2}}$ (§ 52), de tweede de $6(n - 4)(n - 5)(n - 6)$ groepen van twee punten

R_2 , waar a wordt aangeraakt door de krommen c^n , die haar tot $t_{3,2,2}$ hebben.

Bijgevolg is $(R_2/_{3,2,2})_a$ van den graad

$$5(n-6)(n^2 + 19n - 72) + 12(n-4)(n-5)(n-6) \\ \text{of } (n-6)(17n^2 - 13n - 120).$$

§ 60. Thans leggen we door tusschenkomst van de rechte a een verwantschap vast tusschen de

$$2(n-5)(n-6)(n+6)$$

groepen van krommen c^n , die het raakpunt R_3 eener $t_{3,2,2}$ op a hebben en de overeenkomstige raaklijnen $t_{3,2,2}$.

Ter bepaling van den graad van de meetkundige plaats der punten V , welke elke $t_{3,2,2}$ met haar c^n gemeen heeft, beschouwen wij de figuur, voortgebracht door projectieve toevoeging van de overeenkomstige stelsels $|c^n|$ en $|t_{3,2,2}|$.

De krommen c^n van den door P bepaalden complex, die een $t_{3,2,2}$ bezitten, hebben haar raakpunten R_3 op een kromme $(R_3)_{13,2,2}$ van den graad

$$\frac{1}{2}(n-5)(n-6)(13n^2 + 45n - 168).$$

(Complexen Tabel VI).

Dit getal stelt den index van het beschouwde stelsel $|c^n|$ voor.

De index van $|t_{3,2,2}|$ is gelijk aan

$$4(n-5)(n-6)(2n-3),$$

welk getal den graad der kromme $(R_3/_{3,2,2})_P$ voorstelt (§ 30).

Neemt men in aanmerking, dat de voortgebrachte figuur is samengesteld uit $6(n-5)(n-6)(n+6)$ maal de rechte a [ieder van haar punten is, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_3 van

$$2(n-5)(n-6)(n+6)$$

raaklijnen $t_{3,2,2}$ (complexen Tabel I)] en tweemaal de

kromme $(R_{2/3,2,2})_a$ (§ 59), dan vindt men voor den graad der kromme $(V_{R_{3/3,2,2}})_a$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (n-5)(n-6)(13n^2 + 45n - 168) \\ & + 4n(n-5)(n-6)(2n-3) \\ & - 6(n-5)(n-6)(n+6) - 2(n-6)(17n^2 - 13n - 120) = \\ & \frac{1}{2} (n-6)(n-7)(29n^2 - n - 240). \end{aligned}$$

§ 61. De puntenparen R_3 en R_2 bepalen in een stralenbundel (M) een verwantschap, waaruit opnieuw de graad der kromme $(R_5)_{t_{5,2}}$ kan worden afgeleid (§ 52).

Evenzoo leveren de stralen verwantschappen (MR_2, MR_2') en (MR_3, MV) de graden der krommen $(R_3)_{t_{3,4}}$ (§ 58) en $(R_4)_{t_{4,2,2}}$ (§ 55).

De symmetrische verwantschap (MV, MV') heeft tot kenmerkend getal

$$\frac{1}{2} (n-6)(n-7)(29n^2 - n - 240)(n-8);$$

zij bezit $(n-7)(n-8)$ coïncidenties in elken der $4(n-5)(n-6)(2n-3)$ stralen MR_3 .

De overige zijn in drietallen afkomstig van raaklijnen $t_{3,2,2,2}$.

Hieruit wordt afgeleid, dat *de raakpunten R_3 der raaklijnen $t_{3,2,2,2}$ op een kromme $(R_3)_{t_{3,2,2,2}}$ van den graad $(n-6)(n-7)(n-8)(7n^2 + 17n - 100)$ zijn gelegen.*

§ 62. Elk punt van de willekeurige rechte a is, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_2 van $2(n-5)(3n+8)$ raaklijnen $t_{2,4}$ (complexen Tabel I).

De meetkundige plaats $(R_{4/2,4})_a$ der raakpunten R_4 , die aan het op a gelegen raakpunt R_2 zijn toegevoegd, heeft met a twee groepen van punten gemeen.

Tot de eerste groep behooren de $15(5n-17)$ snijpunten van a met de kromme $(R_5)_{t_5}$ (§ 52); de tweede groep omvat de $8(n-4)(n-5)$ raakpunten R_4 , waar

α een undulatie vertoont met de krommen c^n , die haar in een punt R_2 aanraken.

Men vindt hieruit voor den graad der kromme $(R_4/2,4)_a$ $15(5n - 17) + 8(n - 4)(n - 5)$ of $8n^2 + 3n - 95$.

§ 63. Beschouwen wij thans het stelsel $|c^n|$ van krommen c^n , die het raakpunt R_2 van haar raaklijn $t_{2,4}$ op de rechte α hebben.

Het stelsel $|c^n|$ heeft tot index

$$4(n - 5)(3n^2 + 10n - 33);$$

immers dit getal stelt voor den graad der kromme $(R_2)_{t_{2,4}}$ in den door een punt P uit S^4 afgezonderden complex. (Complexen Tabel VI).

Voor het overeenkomstige stelsel $|t_{2,4}|$ is de index $2(n - 5)(7n - 8)$; immers dit getal stelt voor den graad der kromme $(R_2/4,2)_P$ (§ 24).

De figuur, die door de projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_{2,4}|$ wordt voortgebracht, bestaat uit $4(n - 5)(3n - 8)$ -maal de rechte α , omdat ieder van haar punten, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_2 is van $2(n - 5)(3n + 8)$ raaklijnen $t_{2,4}$ (complexen Tabel I) en de meetkundige plaats der punten V , welke elke $t_{2,4}$ nog met haar c^n gemeen heeft.

Voor den graad van de kromme $(VR_2/2,4)_a$ wordt dus gevonden

$$\begin{aligned} &4(n - 5)(3n^2 + 10n - 33) + 2n(n - 5)(7n - 8) \\ &\quad - 4(n - 5)(3n + 8) - 4(8n^2 + 3n - 95) \text{ of} \\ &\quad 2(n - 6)(13n^2 + 3n - 100). \end{aligned}$$

§ 64. Uit de stralenverwantschappen (MR_2, MR_4) en (MR_2, MV) kan men opnieuw afleiden de graden der krommen $(R_6)_{t_6}$ (§ 52) en $(R_3)_{t_{3,4}}$ (§ 58).

De puntenparen R_4, V bepalen in een stralenbundel een verwantschap met kenmerkende getallen

$$(8n^2 + 3n - 95)(n - 6) \text{ en } 2(n - 6)(13n^2 + 3n - 100).$$

De $2(n - 5)(7n - 8)$ stralen $t_{2,4}$ door M , die hun

raakpunt R_2 op a hebben, vervangen ieder $(n-6)$ coïncidenties.

Uit

$$(8n^2 + 3n - 95)(n-6) + 2(n-6)(13n^2 + 3n - 100) - 2(n-5)(7n-8)(n-6)$$

vindt men nu, dat de raakpunten R_2 der raaklijnen $t_{2,5}$ op een kromme $(R_2)_{12,5}$ liggen, waarvan de graad $5(n-6)(4n^2 + 19n - 75)$ is.

De symmetrische verwantschap $(M V, M V')$ heeft tot kenmerkend getal

$$2(n-6)(13n^2 + 3n - 100)(n-7).$$

Zij bezit $(n-6)(n-7)$ coïncidenties in elken der $2(n-5)(7n-8)$ stralen $M R_2$.

De overige zijn afkomstig van raaklijnen $t_{2,4,2}$.

Men vindt zoodoende, dat de raakpunten R_2 der raaklijnen $t_{2,4,2}$ op een kromme $(R_2)_{12,4,2}$ van den graad $2(n-6)(n-7)(19n^2 + 49n - 240)$ liggen.

§ 65. Elk punt van de willekeurige rechte a is, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_2 van $3(n-5)(n-6)(3n+8)$ raaklijnen $t_{2,3,2}$.

(Complexen Tabel I).

De meetkundige plaats $(R_3/_{2,3,2})_a$ der raakpunten R_3 heeft met a twee groepen van punten gemeen.

De eerste groep omvat de $5(n-6)(n^2 + 19n - 72)$ snijpunten met de kromme $(R_3)_{15,2}$ (§ 52); de tweede groep omvat de $6(n-4)(n-5)(n-6)$ raakpunten R_3 , ieder tweemaal geteld, omdat R_3 bij 2 raakpunten R_2 van a behoort.

Voor den graad van de kromme $(R_3/_{2,3,2})_a$ wordt dus gevonden

$$5(n-6)(n^2 + 19n - 72) + 12(n-4)(n-5)(n-6) \text{ of } (n-6)(17n^2 - 13n - 120).$$

De meetkundige plaats $(R_2'/_{2,3,2})_a$ van het raakpunt R_2' , dat aan R_2 (op a gelegen) en R_3 is toegevoegd, heeft met a eveneens twee groepen van punten gemeen.

De eerste groep omvat de $3(n-6)(4n^2 + 29n - 125)$

snijpunten met de kromme $(R_4)_{14,3}$ (§ 55); de tweede groep de $12(n-4)(n-5)(n-6)$ raakpunten R_2 der c^n , waarvoor a is $t_{2,3,2}$.

Voor den graad van $(R_2' /_{2,3,2})_a$ wordt dus gevonden
 $3(n-6)(4n^2+29n-125) + 12(n-4)(n-5)(n-6)$
 of $3(n-6)(8n^2-7n-45)$.

§ 66. Wij beschouwen nu het stelsel $|c^n|$ van krommen c^n , die een der raakpunten R_2 van haar raaklijn $t_{2,3,2}$ op de rechte a hebben.

De index van het stelsel $|c^n|$ is gelijk aan
 $3(n-5)(n+6)(7n^2+13n-54)$,
 welk getal den graad der kromme $(R_2)_{12,3,2}$ voorstelt, voorkomende in den door een punt P uit S^4 afgezonderden complex. (Complexen Tabel VI).

De index van het overeenkomstige stelsel $|t_{2,3,2}|$ is gelijk aan den graad der kromme $(R_2/_{2,3,2})_P$ (§ 30), dus $= 3(n-5)(n-6)(7n-8)$.

De figuur, die bepaald wordt door de projectieiviteit tusschen de krommen c^n , die een $t_{2,3,2}$ bezitten en die raaklijnen $t_{2,3,2}$ bestaat uit $6(n-5)(n-6)(3n+8)$ maal de rechte a , omdat ieder van haar punten, als basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_2 is van $3(n-5)(n-6)(3n+8)$ raaklijnen $t_{2,3,2}$ (complexen Tabel I).

Verder behooren er toe de kromme $(R_3/_{2,3,2})_a$ driemaal geteld en de kromme $(R_2' /_{2,3,2})_a$, tweemaal geteld.

Voor den graad van $(V_{R_2/_{2,3,2}})_a$ vinden wij nu
 $3(n-5)(n-6)(7n^2+13n-54)$
 $+ 3n(n-5)(n-6)(7n-8) - 6(n-5)(n-6)(3n+8)$
 $- 3(n-6)(17n^2-13n-120)$
 $- 6(n-6)(8n^2-7n-45)$ of
 $6(n-6)(n-7)(7n^2-3n-40)$.

§ 67. De verwantschap tusschen de stralen MR_2 , MR_3 levert opnieuw den graad der kromme $(R_5)_{t_{5,2}}$, behoorende bij de raaklijnen $t_{5,2}$ (§ 52).

Evenzoo kan men uit een beschouwing der verwantschappen $(M R_2, M R_2')$, $(M R_3, M R_2')$, $(M R_2, M V)$ en $(M R_3, M V)$ opnieuw komen tot de graden der krommen $(R_4)_{t_{4,3}}$ (§ 55), $(R_2)_{2,5}$ (§ 64), $(R_3)_{t_{3,3,2}}$ (§ 58) en $(R_2)_{t_{2,4,2}}$ (§ 64).

De verwantschap (R_2', V) bepaalt in den stralenbundel (M) een verwantschap met kenmerkende getallen

$$3(n-6)(8n^2-7n-45)(n-7) \text{ en} \\ 6(n-6)(n-7)(7n^2-3n-40).$$

Daar de raaklijnen $t_{2,3,2}$ door M ieder $(n-7)$ coïncidenties vervangen, bedraagt het aantal coïncidenties $M R_2' \equiv M V$

$$3(n-6)(8n^2-7n-45)(n-7) + \\ 6(n-6)(n-7)(7n^2-3n-40) \\ - 12(n-7)(n-5)(n-6)(7n-8) = \\ 45(n-6)(n-7)(n^2+2n-11).$$

Daar deze twee aan twee op rechten $t_{2,3,3}$ moeten liggen, vindt men dat *de raakpunten R_2 der raaklijnen $t_{2,3,3}$ op een kromme $(R_2)_{2,3,3}$ van den graad*

$$\frac{45}{2}(n-6)(n-7)(n^2+2n-11)$$

liggen.

De symmetrische verwantschap $(M V, M V')$ heeft tot kenmerkend getal $6(n-6)(n-7)(7n^2-3n-40)(n-8)$.

Elke $t_{2,3,2}$ door M vervangt $(n-7)(n-8)$ coïncidenties.

Voor het aantal coïncidenties $M V \equiv M V'$ vindt men dus

$$12(n-6)(n-7)(7n^2-3n-40)(n-8) \\ - 3(n-5)(n-6)(7n-8)(n-7)(n-8) = \\ 3(n-6)(n-7)(n-8)(21n^2+31n-200).$$

De helft hiervan, dus

$$\frac{3}{2}(n-6)(n-7)(n-8)(21n^2+31n-200)$$

stelt voor den graad der kromme $(R_2)_{t_{2,3,2,2}}$, die de meetkundige plaats is van de raakpunten R_2 der raaklijnen $t_{2,3,2,2}$.

§ 68. Elk punt van de willekeurige rechte a is, als

basispunt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_2 eener viervoudige raaklijn $t_{2,2,2,2}$ voor

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(3n+8)$$

krommen (complexen Tabel I).

De meetkundige plaats $(R_2' / t_{2,2,2,2})_a$ der raakpunten R_2' , die aan het op a gelegen vaakpunt R_2 zijn toegevoegd, heeft met de rechte a twee groepen van punten gemeen.

De eerste groep omvat de

$$\frac{1}{2}(n-6)(n-7)(17n^2+107n-480)$$

raakpunten R_4 van raaklijnen $t_{4,2,2}$ (§ 55), de tweede de groepen van vier raakpunten R_2' , gelegen op de krommen c^n , waarvoor a viervoudige raaklijn is; deze punten moeten driemaal in rekening worden gebracht.

Hieruit wordt voor den graad der kromme $(R_2' / t_{2,2,2,2})^a$ afgeleid

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n-6)(n-7)(17n^2+107n-480) \\ & + 8(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) = \\ & \frac{1}{2}(n-6)(n-7)(33n^2-37n-160). \end{aligned}$$

§ 69. Wij beschouwen nu weer het voortbrengsel van de projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_{2,2,2,2}|$.

Het eerste heeft tot index

$$\frac{1}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(15n^2+19n-96),$$

immers dit getal stelt voor den graad der kromme $(R_2)t_{2,2,2,2}$, voorkomend in den complex, die door een punt P uit S^4 wordt afgezonderd (complexen Tabel VI); het tweede heeft tot index $\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(7n-8)$, welk getal den graad der kromme $(R_2/t_{2,2,2,2})_P$ voorstelt (§ 33).

Daar de voortgebrachte figuur bestaat uit

$$\frac{4}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(3n+8)$$

maal de rechte α [omdat ieder van haar punten, als basis-punt van een in S^4 begrepen complex, raakpunt R_2 is van

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(3n+8)$$

raaklijnen $t_{2,2,2,2}$ (complexen Tabel I)], tweemaal de kromme $(R_2'_{/2,2,2,2})_a$ (§ 68) en de meetkundige plaats der punten V , welke elke c^n nog met haar $t_{2,2,2,2}$ gemeen heeft, vindt men voor den graad van $(V_{R_2/2,2,2,2})_a$

$$\frac{1}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(15n^2+19n-96)$$

$$+\frac{2}{3}n(n-5)(n-6)(n-7)(7n-8)$$

$$-\frac{4}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(3n+8)$$

$$-(n-6)(n-7)(33n^2-37n-160) \text{ of}$$

$$\frac{1}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(29n^2-21n-140).$$

§ 70. De kromme $(V_{R_2/2,2,2,2})_a$ wordt door α gesneden in

$$\frac{2}{3}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$

groepen van $(n-8)$ raakpunten R_2 , die ieder viermaal in rekening moeten worden gebracht en in een aantal punten R_3 , waar een c^n wordt geosculeerd door een raaklijn $t_{3,2,2,2}$.

Voor den graad der kromme $(R_3)_{t_{3,2,2,2}}$ wordt dus gevonden

$$\frac{1}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(29n^2-21n-140)$$

$$-\frac{8}{3}(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \text{ of}$$

$$(n-6)(n-7)(n-8)(7n^2+17n-100).$$

Dit resultaat is niet nieuw (§ 61).

De verwantschap tusschen de punten R_2' , die buiten α liggen, levert opnieuw den graad der kromme $(R_2)_{t_{2,4,2}}$ (§ 64).

Uit de verwantschap $(M R_2', M V)$ kan men opnieuw den graad der kromme $(R_2)_{t_{2,3,2,2}}$ afleiden (§ 67).

De symmetrische verwantschap ($M V$, $M V'$) heeft tot kenmerkend getal

$$\frac{1}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(29n^2-21n-140)(n-9).$$

Elke der $\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(7n-8)$ raaklijnen $t_{2,2,2,2}$ door M vervangt $(n-8)(n-9)$ coïncidenties.

Het aantal coïncidenties $M V \equiv M V'$ bedraagt derhalve

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(29n^2-21n-140)(n-9) \\ & - \frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(7n-8)(n-8)(n-9) \text{ of} \\ & \frac{4}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(11n^2+11n-90). \end{aligned}$$

Hieruit volgt nu, dat *de meetkundige plaats der raakpunten van de vijfpuntige raaklijnen $t_{2,2,2,2}$ een kromme van den graad*

$$\frac{1}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(11n^2+11n-90) \text{ is.}$$

§ 71. Aan elke kromme c^n , die een raaklijn t_6 bezit, voegen wij die raaklijn toe; deze snijdt haar in $(n-6)$ punten V .

Ter bepaling van den graad der meetkundige plaats der punten V zoeken wij eerst den graad van de figuur, die door de projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_6|$ wordt voortgebracht.

De krommen c^n door een punt P vormen een complex; daarin komen $30(n-5)(5n-9)$ krommen voor, die een t_6 bezitten (complexen Tabel VII); dit getal is de index van $|c^n|$.

De index van het stelsel $|t_6|$ is gelijk aan het aantal t_6 , die men uit een punt P kan trekken, dus $= 15n(n-5)$ (§ 23).

De projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_6|$ brengen dus een kromme voort van den graad

$$30(n-5)(5n-9) + 15n^2(n-5).$$

Hiertoe behoort de kromme $(R_5)_{t_6}$ (§ 52) zesmaal.

Voor den graad van de kromme (VR_6) wordt dus gevonden

$$30(n-5)(5n-9) + 15n^2(n-5) - 90(5n-17) = 15(n-6)(n^2 + 11n - 32).$$

§ 72. In den stralenbundel (M) bepalen de puntenparen (R_6, V) een verwantschap met kenmerkende getallen $15(5n-17)(n-6)$ en $15(n-6)(n^2 + 11n - 32)$.

Elke der $15n(n-5)$ in M samenkomende lijnen t_6 vertegenwoordigt $(n-6)$ coïncidenties.

Hiermede rekening houdende, vinden wij voor het aantal coïncidenties $R_6 \equiv V$, dus voor *het aantal raaklijnen* t_7 $(n-6)[15(5n-17) + 15(n^2 + 11n - 32) - 15n(n-5)]$ of $105(n-6)(3n-7)$.

De verwantschap tusschen twee tot dezelfde c^n behoorende punten V bepaalt in den stralenbundel (M) een symmetrische verwantschap met kenmerkend getal

$$15(n-6)(n^2 + 11n - 32)(n-7).$$

Hiertoe behoort elke der $15n(n-5)$ in M samenkomende raaklijnen t_6 $(n-6)(n-7)$ maal.

Dus is het aantal coïncidenties $v \equiv v'$ $(n-6)(n-7)[30(n^2 + 11n - 32) - 15n(n-5)]$ of $15(n-6)(n-7)(n^2 + 27n - 64)$.

Dit getal geeft het aantal raaklijnen $t_{6,2}$.

§ 73. Aan elke c^n , die een raaklijn $t_{5,2}$ bezit, zullen wij die lijn toevoegen; deze snijdt haar nog in $(n-7)$ punten V.

De meetkundige plaats der punten V vormt met de vijfmaal getelde kromme $(R_5)_{t_{5,2}}$ (§ 52) en de tweemaal getelde kromme $(R_2)_{t_{5,2}}$ (§ 64) het voortbrengsel der projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_{5,2}|$.

In den complex, dien een punt P uit S^4 afzondert, komen $10(n-5)(n-6)(n^2 + 18n - 33)$ krommen voor, die een raaklijn $t_{5,2}$ bezitten (complexen Tabel VII); dit getal is dus de index van $|c^n|$.

Het stelsel $|t_{5,2}|$ heeft, blijkens § 23, den index $25n(n-5)(n-6)$.

De projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_{5,2}|$ brengen derhalve een kromme voort van den graad

$$10(n-5)(n-6)(n^2+18n-33)+25n^2(n-5)(n-6).$$

Voor den graad der kromme ($VR_{5,2}$) wordt dus gevonden

$$10(n-5)(n-6)(n^2+18n-33)+25n^2(n-5)(n-6) \\ - 25(n-6)(n^2+19n-72)-10(n-6)(4n^2+19n-75) \\ \text{of } 5(n-6)(n-7)(7n^2+37n-120).$$

§ 74. Een beschouwing van de verwantschap (MR_5 , MR_2) levert opnieuw het aantal t_7 (§ 72).

Evenzoo levert (MR_5 , MV) het aantal $t_{6,2}$ (§ 72).

Nu voegen wij op elke rechte $t_{5,2}$ het punt R_2 aan elk der $(n-7)$ punten V toe.

Daardoor worden de stralen van een bundel (M) gerangschikt in een verwantschap met kenmerkende getallen

$$5(n-6)(4n^2+19n-75)(n-7) \text{ en} \\ 5(n-6)(n-7)(7n^2+37n-120).$$

Merken we op, dat de $25n(n-5)(n-6)$ raaklijnen $t_{5,2}$, die in M samen komen, elk $(n-7)$ coïncidenties vertegenwoordigen, dan vindt men voor de coïncidenties $MR_2 \equiv MV$ het aantal

$$(n-6)(n-7)[5(4n^2+19n-75)+5(7n^2+37n-120) \\ - 25n(n-5)] = 15(n-6)(n-7)(2n^2+27n-65).$$

Dit getal stelt voor het aantal krommen, die een raaklijn $t_{5,3}$ bezitten.

De symmetrische verwantschap (MV , MV') levert een nieuw kenmerkend getal. Zij heeft tot kenmerkend getal

$$5(n-6)(n-7)(7n^2+37n-120)(n-8).$$

De $25n(n-6)(n-6)$ rechten $t_{5,2}$ door M vervangen ieder $(n-7)(n-8)$ coïncidenties.

Het aantal coïncidenties $MV \equiv MV'$ bedraagt derhalve

$$(n-6)(n-7)(n-8)[10(7n^2+37n-120)-25n(n-5)] \\ \text{of } 15(n-6)(n-7)(n-8)(3n^2+33n-80).$$

Hieruit volgt, dat een S^4

$$\frac{15}{2}(n-6)(n-7)(n-8)(3n^2+33n-80)$$

krommen bezit met een raaklijn $t_{5,2,2}$.

§ 75. Bepalen wij den graad der meetkundige plaats $(VR_{4,3})$ van de groepen van $(n-7)$ punten V, welke de rechte $t_{4,3}$ met haar c^n gemeen heeft.

De krommen c^n , die een $t_{4,3}$ bezitten, vormen een stelsel met index $6(n-5)(n-6)(3n^2+29n-54)$ (complexen Tabel VII); haar raaklijnen $t_{4,3}$ een stelsel met index $30n(n-5)(n-6)$ (§ 26).

Het voortbrengsel van deze projectieve stelsels bestaat uit viermaal de kromme $(R_4)_{t_{4,3}}$ (§ 55) en driemaal de kromme $(R_3)_{t_{4,3}}$ (§ 58), die de raakpunten bevatten en de meetkundige plaats der punten V.

Voor den graad van $(VR_{4,3})$ vinden wij dus:

$$\begin{aligned} 6(n-5)(n-6)(3n^2+29n-54) + 30n^2(n-5)(n-6) \\ - 12(n-6)(4n^2+29n-125) \\ - 18(n-6)(3n^2+13n-60) = \\ 24(n-6)(n-7)(2n^2+7n-25). \end{aligned}$$

§ 76. Met behulp van de verwantschap tusschen de punten R_4 en R_3 der raaklijnen $t_{4,3}$ kan men het reeds in § 72 gevonden aantal raaklijnen t_7 terugvinden.

Analoog verkrijgt men door middel van de verwantschap tusschen twee punten R_4 en V, op eenzelfde $t_{4,3}$ gelegen, opnieuw het in § 74 afgeleide aantal $t_{5,3}$.

De verwantschap (MR_3, MV) heeft tot kenmerkende getallen

$$\begin{aligned} 6(n-6)(3n^2+13n-60)(n-7) \text{ en} \\ 24(n-6)(n-7)(2n^2+7n-25); \end{aligned}$$

terwijl elke der $30n(n-5)(n-6)$ stralen $t_{4,3}$ door M $(n-7)$ coïncidenties vertegenwoordigt.

Het aantal coïncidenties $MR_3 \equiv MV$ bedraagt dus:

$$\begin{aligned} (n-6)(n-7)[6(3n^2+13n-60) \\ + 24(2n^2+7n-25) - 30n(n-5)] \text{ of} \\ 12(n-6)(n-7)(3n^2+33n-80). \end{aligned}$$

Daaruit volgt, dat er in een S^4

$$6(n-6)(n-7)(3n^2 + 33n - 80)$$

krommen voorkomen, die in 't bezit zijn van een raaklijn $t_{4,4}$.

De symmetrische verwantschap $(M V, M V')$ heeft tot kenmerkend getal

$$24(n-6)(n-7)(2n^2 + 7n - 25)(n-8);$$

elke raaklijn $t_{4,3}$ door M vervangt $(n-7)(n-8)$ coïncidenties.

Uit

$$48(n-6)(n-7)(2n^2 + 7n - 25)(n-8) \\ - 30n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$$

volgt, dat $6(n-6)(n-7)(n-8)(11n^2 + 81n - 200)$ krommen van S^4 een raaklijn $t_{4,3,2}$ bezitten.

§ 77. Wij beschouwen nu het stelsel $|c^n|$ der krommen, die een raaklijn $t_{4,2,2}$ bezitten en bepalen den graad van de meetkundige plaats $(VR_{4,2,2})$ der punten V , welke elke c^n nog met haar $t_{4,2,2}$ gemeen heeft.

Het stelsel $|c^n|$ heeft tot index

$$2(n-5)(n-6)(n-7)(7n^2 + 51n - 96);$$

dit is immers het aantal c^n van den complex, dien een punt P uit S^4 afzondert, welke een $t_{4,2,2}$ bezitten.

(Complexen Tabel VII).

De index van het stelsel $|t_{4,2,2}|$ is

$$20n(n-5)(n-6)(n-7) \quad (§ 26).$$

Tot de figuur, die door de projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_{4,2,2}|$ wordt voortgebracht, behooren ook de krommen $(R_4)_{t_{4,2,2}}$ (§ 55) en $(R_2)_{t_{4,2,2}}$ (§ 64), de eerste viermaal, de tweede tweemaal.

Voor den graad van $(VR_{4,2,2})$ vindt men dus

$$2(n-5)(n-6)(n-7)(7n^2 + 51n - 96) \\ + 20n^2(n-5)(n-6)(n-7) \\ - 2(n-6)(n-7)(17n^2 + 107n - 480) \\ - 4(n-6)(n-7)(19n^2 + 49n - 240) \text{ of} \\ 2(n-6)(n-7)(n-8)(17n^2 + 47n - 180).$$

§ 78. De verwantschappen $(M R_4, M R_2)$, $(M R_2, M R_2')$, $(M R_4, M V)$ en $(M R_2, M V)$ leveren opnieuw de aantallen raaklijnen $t_{6,2}$ (§ 72), $t_{4,4}$ (§ 76), $t_{5,2,2}$ (§ 74) en $t_{4,3,2}$ (§ 76).

De verwantschap tusschen twee tot dezelfde c^n behoorende punten V bepaalt in een stralenbundel (M) een symmetrische verwantschap, waarvan het kenmerkend getal

$$2(n-6)(n-7)(n-8)(17n^2 + 47n - 180)(n-7) \text{ is.}$$

Tot deze verwantschap behoort elke der

$$20n(n-5)(n-6)(n-7)$$

in M samenkomende raaklijnen $t_{4,2,2}(n-8)(n-9)$ maal.

Voor het aantal coïncidenties $MV \equiv MV'$ wordt dus gevonden

$$(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)[4(17n^2 + 47n - 180) - 20n(n-5)] \text{ of}$$

$$48(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n^2 + 6n - 15).$$

Er zijn dus

$$16(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n^2 + 6n - 15)$$

krommen, die in 't bezit zijn van een raaklijn $t_{4,2,2,2}$.

§ 79. Wij gaan nu het stelsel der krommen c^n beschouwen, die een raaklijn $t_{3,3,2}$ bezitten. Ter bepaling van den graad der kromme $(V_{R_{3,3,2}})$, die de meetkundige plaats is van de punten V , welke c^n nog met $t_{3,3,2}$ gemeen heeft, bepalen wij den graad van de figuur, voortgebracht door de projectief gemaakte stelsel $|c^n|$ en $|t_{4,2,2,2}|$.

Het eerste heeft tot index

$$9(n-5)(n-6)(n-7)(2n^2 + 11n - 21),$$

welk getal het aantal c^n met een $t_{3,3,2}$ voorstelt, voorkomende in een tot S^4 behoorenden complex. (Complexen Tabel VII).

De index van $|t_{3,3,2}|$ is (§ 29)

$$\frac{45}{2}n(n-5)(n-6)(n-7).$$

De voortgebrachte figuur bevat de kromme $(R_3)_{t_{3,3,2}}$ (§ 58) driemaal en de kromme $(R_2)_{t_{3,3,2}}$ (§ 67) tweemaal.

Daaruit wordt voor den graad van $(VR_{3,3,2})$ afgeleid:

$$\begin{aligned} & 9(n-5)(n-6)(n-7)(2n^2+11n-21) \\ & + \frac{45}{2}n^2(n-5)(n-6)(n-7) \\ & - 90(n-6)(n-7)(n^2+3n-16) \\ & - 90(n-6)(n-7)(n^2+2n-11) \text{ of} \\ & \frac{9}{2}(n-6)(n-7)(n-8)(9n^2+19n-80). \end{aligned}$$

§ 80. De verwantschappen (MR_3, MR_3') , (MR_3, MR_2) , (MR_3, MV) leveren opnieuw de aantallen $t_{6,2}$ (§ 72), $t_{5,3}$ (§ 74) en $t_{4,3,2}$ (§ 76).

De verwantschap (MR_2, MV) heeft in verband met de graden der krommen $(R_2)_{t_{3,3,2}}$ en $(VR_{3,3,2})$ tot kenmerkende getallen

$$\begin{aligned} & \frac{45}{2}(n-6)(n-7)(n^2+2n-11)(n-8) \text{ en} \\ & \frac{9}{2}(n-6)(n-7)(n-8)(9n^2+19n-80). \end{aligned}$$

Elke der $\frac{45}{2}n(n-5)(n-6)(n-7)$ tot (M) behoorrende $t_{3,3,2}$ is $(n-8)$ -voudige coïncidentie, dus is het aantal der coïncidenties $MR_2 \equiv MV$

$$\begin{aligned} & (n-6)(n-7)(n-8) \left[\frac{45}{2}(n^2+2n-11) \right. \\ & \left. + \frac{9}{2}(9n^2+19n-80) - \frac{45}{2}n(n-5) \right] \text{ of} \\ & \frac{81}{2}(n-6)(n-7)(n-8)(n^2+6n-15). \end{aligned}$$

Nu bedraagt *het aantal driemaal osculeerende rechten* $t_{3,3,3}$

$$\frac{27}{2}(n-6)(n-7)(n-8)(n^2+6n-15).$$

De symmetrische verwantschap (MV, MV') heeft tot kenmerkend getal

$$\frac{9}{2}(n-6)(n-7)(n-8)(9n^2+19n-80)(n-9).$$

Iedere tot (M) behorende $t_{3,3,2}$ vervangt nu $(n-8)(n-9)$ coïncidenties.

Dus vindt men voor het aantal coïncidenties $MV \equiv MV'$

$$(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)[9(9n^2 + 19n - 80) - \frac{45}{2}n(n-5)] =$$

$$\frac{9}{2}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(13n^2 + 63n - 160).$$

Dit getal stelt het aantal raaklijnen $t_{3,3,2}$ voor.

§ 81. Voegen wij aan elke $t_{3,2,2,2}$ haar c^n toe en bepalen wij den graad van de meetkundige plaats der punten V, welke elke c^n nog met haar $t_{3,2,2,2}$ gemeen heeft.

In den door een punt P uit S^4 afgezonderden complex, komen er

$$(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(9n^2 + 37n - 72)$$

krommen voor, die een raaklijn $t_{3,2,2,2}$ bezitten (complexen Tabel VII).

Daarmee is de index van het stelsel $|c^n|$ bekend.

De index van het stelsel $|t_{3,2,2,2}|$ is

$$10n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \quad (\S 32).$$

Neemt men in aanmerking dat tot de door de projectieve stelsels $|c^n|$ en $|t_{3,2,2,2}|$ voortgebrachte figuur de kromme $(R_3)_{t_{3,2,2,2}}$ (§ 61) driemaal en de kromme $(R_2)_{t_{3,2,2,2}}$ (§ 67) tweemaal behoort, dan vindt men voor den graad van $(VR_{3,2,2,2})$

$$\begin{aligned} & (n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(9n^2 + 37n - 72) \\ & + 10n^2(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \\ & - 3(n-6)(n-7)(n-8)(7n^2 + 17n - 100) \\ & - 3(n-6)(n-7)(n-8)(21n^2 + 31n - 200) \text{ of} \\ & (n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(19n^2 + 29n - 140). \end{aligned}$$

§ 82. De verwantschappen (MR_3, MR_2) , (MR_2, MR_2') , (MR_3, MV) en (MR_2, MV) leveren opnieuw de aantallen $t_{5,2,2}$ (§ 74), $t_{3,4,2}$ (§ 76), $t_{4,2,2,2}$ (§ 78) en $t_{3,3,2}$ (§ 80).

Met behulp van de kromme ($V_{R_3,3,2,2}$) kunnen wij het in S^4 voorkomende aantal raaklijnen $t_{3,2,2,2,2}$ vinden.

Daartoe voegen wij de rechten MV , MV' aan elkaar toe, waardoor een symmetrische verwantschap met kenmerkend getal

$(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(19n^2+29n-140)(n-10)$ ontstaat.

De $10n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$ in M samenkomende raaklijnen zijn $(n-9)(n-10)$ -voudige coïncidenties.

Op de overige valt telkens V met V' samen.

Het aantal coïncidenties $MV \equiv MV'$ bedraagt dus

$$(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)[2(19n^2+29n-140) - 10n(n-5)] = \\ 4(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(7n^2+27n-70).$$

Hieruit volgt dat er in een S^4

$(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(7n^2+27n-70)$ raaklijnen $t_{3,2,2,2,2}$ voorkomen.

§ 83. Wij beschouwen nu het stelsel $|c^n|$ der krommen, die een raaklijn $t_{2,2,2,2,2}$ bezitten en bepalen den graad van de meetkundige plaats der punten V , welke elke c^n nog met haar $t_{2,2,2,2,2}$ gemeen heeft.

De index van het stelsel $|c^n|$ is gelijk aan

$$\frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n^2+3n-6)$$

d.i. het aantal c^n van den door een punt P uit S^4 afgezonderden complex, die een $t_{2,2,2,2,2}$ bezitten (complexen VII).

De index van het stelsel $|t_{2,2,2,2,2}|$ is gelijk aan

$$\frac{2}{3}n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9) \quad (\S 35).$$

Tot de door $|c^n|$ en $|t_{2,2,2,2,2}|$ voortgebrachte figuur

behoort de kromme $(R_2)_{t_{2,2,2,2,2}}$ (§ 70) tweemaal; derhalve vindt men voor den graad van $(V_{R_{2,2,2,2,2}})$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n^2+3n-6) \\ & \quad + \frac{2}{3}n^2(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9) \\ & - \frac{2}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(11n^2+11n-90) \\ & \text{of } \frac{4}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n^2+n-6). \end{aligned}$$

§ 84. Uit de verwantschappen (MR_2, MR_2') en (MR_2, MV) kan men opnieuw komen tot de aantallen $t_{4,2,2,2}$ (§ 78) en $t_{3,2,2,2,2}$ (§ 82).

De verwantschap tusschen twee tot dezelfde c^n behoorende punten V bepaalt in den stralenbundel (M) een symmetrische verwantschap met kenmerkend getal $\frac{4}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n^2+n-6)(n-11)$.

Elke der $\frac{2}{3}n(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)$ raaklijnen $t_{2,2,2,2,2}$ is $(n-10)(n-11)$ -voudige coïncidentie.

Hierop lettende vindt men voor het aantal coïncidenties $MV \equiv MV'$

$$\begin{aligned} & (n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11) \left[\frac{8}{3}(n^2+n-6) \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{3}n(n-5) \right] = \\ & 2(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11) \\ & \quad (n^2+3n-8). \end{aligned}$$

Er zijn dus

$$\frac{1}{3}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)(n^2+3n-8)$$

zesvoudige raaklijnen $t_{2,2,2,2,2}$.

TABELLARISCH OVERZICHT DER KENMERKENDE GETALLEN VOOR EEN STELSEL S^4 .

Tabel I.

Een enkelvoudig basispunt is			Raaklijnen t_6	
Raakpunt R_6 van 15				
"	R_5	" $(n - 6)(n + 25)$	"	$t_{5,2}$
"	R_4	" $3(n - 6)(n + 10)$	"	$t_{4,3}$
"	R_4	" $2(n - 6)(n - 7)(n + 10)$	"	$t_{4,2,2}$
"	R_3	" $6(n - 6)(n + 5)$	"	$t_{3,4}$
"	R_3	" $9(n - 6)(n - 7)(n + 5)$	"	$t_{3,3,2}$
"	R_3	" $2(n - 6)(n - 7)(n - 8)$ $(n + 5)$	"	$t_{3,2,2,2}$
"	R_2	" $5(n - 6)(2n + 5)$	"	$t_{2,5}$
"	R_2	" $8(n - 6)(n - 7)(2n + 5)$	"	$t_{2,4,2}$
"	R_2	" $\frac{9}{2}(n - 6)(n - 7)(2n + 5)$	"	$t_{2,3,3}$
"	R_2	" $6(n - 6)(n - 7)(n - 8)$ $(2n + 5)$	"	$t_{2,3,2,2}$
"	R_2	" $\frac{2}{3}(n - 6)(n - 7)(n - 8)$ $(n - 9)(2n + 5)$	"	$t_{2,2,2,2,2}$

Tabel II.

Graad van $(R_5)_P$	
"	" $5(n - 2)$
"	" $(R_{4/4,2})_P$ $(n - 5)(9n - 16)$
"	" $(R_{2/4,2})_P$ $2(n - 5)(7n - 8)$
"	" $(R_{3/3,3})_P$ $6(n - 5)(2n - 3)$
"	" $(R_{3/3,2,2})_P$ $4(n - 5)(n - 6)(2n - 3)$
"	" $(R_{2/3,2,2})_P$ $3(n - 5)(n - 6)(7n - 8)$
"	" $(R_{2/2,2,2,2})_P$ $\frac{2}{3}(n - 5)(n - 6)(n - 7)(7n - 8)$

Tabel III.

Aantal t_6	door P	$15 n (n - 5)$
" $t_{5,2}$	" "	$25 n (n - 5) (n - 6)$
" $t_{4,3}$	" "	$30 n (n - 5) (n - 6)$
" $t_{4,2,2}$	" "	$20 n (n - 5) (n - 6) (n - 7)$
" $t_{3,3,2}$	" "	$\frac{45}{2} n (n - 5) (n - 6) (n - 7)$
" $t_{3,2,2,2}$	" "	$10 n (n - 5) (n - 6) (n - 7) (n - 8)$
" $t_{2,2,2,2,2}$	" "	$\frac{2}{3} n (n - 5) (n - 6) (n - 7) (n - 8)$ $(n - 9)$

Tabel IV.

Graad van $(R_5)_B$	$5 (n - 2)$
" " $(R_4/4,2)_B$	$3 (n - 6) (3 n - 5)$
" " $(R_2/4,2)_B$	$2 (n - 6) (7 n - 5)$
" " $(R_3/3,3)_B$	$3 (n - 6) (4 n - 5)$
" " $(R_3/3,2,2)_B$	$2 (n - 6) (n - 7) (4 n - 5)$
" " $(R_2/3,2,2)_B$	$3 (n - 6) (n - 7) (7 n - 5)$
" " $(R_2/2,2,2,2)_B$	$\frac{2}{3} (n - 6) (n - 7) (n - 8) (7 n - 5)$

Tabel V.

Aantal t_6	door B	$15 (n + 1) (n - 6)$
" $t_{5,2}$	" "	$25 (n + 1) (n - 6) (n - 7)$
" $t_{4,3}$	" "	$30 (n + 1) (n - 6) (n - 7)$
" $t_{4,2,2}$	" "	$20 (n + 1) (n - 6) (n - 7) (n - 8)$
" $t_{3,3,2}$	" "	$\frac{45}{2} (n + 1) (n - 6) (n - 7) (n - 8)$
" $t_{3,2,2,2}$	" "	$10 (n + 1) (n - 6) (n - 7) (n - 8)$ $(n - 9)$
" $t_{2,2,2,2,2}$	" "	$\frac{2}{3} (n + 1) (n - 6) (n - 7) (n - 8)$ $(n - 9) (n - 10)$

Tabel VI.

Graad van $(R_6)_{t_6}$	$15(5n - 17)$
" " $(R_5)_{t_{5,2}}$	$5(n - 6)(n^2 + 19n - 72)$
" " $(R_4)_{t_{4,3}}$	$3(n - 6)(4n^2 + 29n - 125)$
" " $(R_4)_{t_{4,2,2}}$	$\frac{1}{2}(n - 6)(n - 7)(17n^2 + 107n - 480)$
" " $(R_3)_{t_{3,4}}$	$6(n - 6)(3n^2 + 13n - 60)$
" " $(R_3)_{t_{3,3,2}}$	$30(n - 6)(n - 7)(n^2 + 3n - 16)$
" " $(R_3)_{t_{3,2,2,2}}$	$(n - 6)(n - 7)(n - 8)(7n^2 + 17n - 240)$
" " $(R_2)_{t_{2,4,2}}$	$2(n - 6)(n - 7)(19n^2 + 49n - 240)$
" " $(R_2)_{t_{2,3,3}}$	$\frac{45}{2}(n - 6)(n - 7)(n^2 + 2n - 11)$
" " $(R_2)_{t_{2,3,2,2}}$	$\frac{3}{2}(n - 6)(n - 7)(n - 8)$ $(21n^2 + 31n - 200)$
" " $(R_2)_{t_{2,2,2,2,2}}$	$\frac{1}{3}(n - 6)(n - 7)(n - 8)(n - 9)$ $(11n^2 + 11n - 90)$

Tabel VII.

Aantal t_7	$105(n - 6)(3n - 7)$
" $t_{6,2}$	$15(n - 6)(n - 7)(n^2 + 27n - 64)$
" $t_{5,3}$	$15(n - 6)(n - 7)(2n^2 + 27n - 65)$
" $t_{5,2,2}$	$\frac{15}{2}(n - 6)(n - 7)(n - 8)(3n^2 + 33n - 80)$
" $t_{4,4}$	$6(n - 6)(n - 7)(3n^2 + 33n - 80)$
" $t_{4,3,2}$	$6(n - 6)(n - 7)(n - 8)(11n^2 + 81n - 200)$
" $t_{4,2,2,2}$	$16(n - 6)(n - 7)(n - 8)(n - 9)$ $(n^2 + 6n - 15)$
" $t_{3,3,3}$	$\frac{27}{2}(n - 6)(n - 7)(n - 8)(n^2 + 6n - 15)$
" $t_{3,3,2,2}$	$\frac{9}{2}(n - 6)(n - 7)(n - 8)(n - 9)$ $(13n^2 + 63n - 160)$
" $t_{3,2,2,2,2}$	$(n - 6)(n - 7)(n - 8)(n - 9)(n - 10)$ $(7n^2 + 27n - 70)$
" $t_{2,2,2,2,2,2}$	$\frac{1}{3}(n - 6)(n - 7)(n - 8)(n - 9)(n - 10)$ $(n - 11)(n^2 + 3n - 8)$

94425

STELLINGEN.

STELLINGEN.

1.

Bij de bepaling van kenmerkende getallen voor een lineair stelsel van vlakke algebraïsche krommen wordt met vrucht van de eigenschappen der involuties gebruik gemaakt.

2.

Het onderzoek van den invloed van een meervoudig basispunt geeft tot geen nieuwe gezichtspunten aanleiding.

3.

Het bewijs, dat WIELEITNER geeft van de stelling „de raaklijn in een punt aan de kromme van STEINER is de poollijn van het overeenkomstige punt op de kromme van HESSE t. o. v. de oorspronkelijke kromme” is onjuist.

H. WIELEITNER, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, 1905, blz. 58.

4.

De afleiding, die SCHLÖMILCH geeft van de formule

$$\int \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^{n+1}} = \int \frac{dx}{T^{n+1}} =$$

$$\frac{b + 2cx}{n(4ac - b^2)T^n} + \frac{(2n-1)2c}{n(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{T^n}$$

moet ten achter gesteld worden bij die, welke in GROTENDORST voorkomt.

O. SCHLÖMILCH, Compendium der höheren Analysis I 4te Auflage (blz. 324).

N. C. GROTENDORST, Beginselen der Differentiaal- en Integraalrekening, 3de druk (blz. 290).

5.

Ten onrechte zegt J. C. KAPTEIJN, dat een frequentiewet tot stand komt door een eindig aantal oorzaken.

J. C. KAPTEIJN and M. J. VAN UVEN, *Skew Frequency Curves in Biology and Statistics*, 2nd Paper, 1916 (blz. 8—13).

6.

Het is noodzakelijk te definieeren, wat men verstaat onder de plaats van een asymmetrische spectraallijn van eindige breedte.

7.

Het is niet wenschelijk besluiten te trekken omtrent de intensiteitsverdeeling van het licht in een spectraallijn, door in een photographische plaat op het oog de zwarting te beoordeelen.

8.

De strenge definitie, die KLEIN en SOMMERFELD geven van stabiliteit van beweging heeft voor de natuurkunde weinig beteekenis.

F. KLEIN und A. SOMMERFELD, *Über die Theorie des Kreisels*, 2, 1908 (blz. 350).

9.

De onderstelling, waarop WEISS zijn theorie van het ferromagnetisme grondt, leidt tot een resultaat, dat in tegenspraak is met de waarneming.

P. WEISS, *Les idées modernes sur la constitution de la matière* (blz. 332).

10.

Het heeft geen zin te spreken van een voortplantings-snelheid der diffusie.

P. FRANK, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Diffusion. Physik. Zeitschrift 19, 1918 (blz. 516).

11.

Het zou aanbeveling verdienen, dat bij het onderwijs in natuurkunde op de H. B. S. meer rekening kon worden gehouden met de vorderingen der wetenschap.

12.

Het ware wenschelijk, dat in de wet op het Hooger Onderwijs de eischen voor het doctoraal-examen in de Wis- en Natuurkunde zoodanig werden gewijzigd, dat den candidaat de vrije keuze werd gelaten zich òf in meetkundige òf in analytische richting te bekwamen.







