



Stralingsdruk beschouwd in verband met zijn beteekenis voor de physica der zon

<https://hdl.handle.net/1874/272987>

Utrecht
1920.

STRALINGSDRUK

beschouwd in verband met zijn
betekenis voor de physica der zon

H. GROOT

A. qu.
192

STRALINGSDRUK

BESCHOUWD IN VERBAND MET ZIJN BETEKENIS
VOOR DE PHYSICA DER ZON.

LIBRARY
UNIVERSITY OF
UTRECHT

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK UTRECHT



4036 9682

STRALINGSDRUK

beschouwd in verband met zijn beteekenis
voor de physica der zon

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Sterrekunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. H. VISSCHER

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Maandag 5 Juli 1920, des namiddags te 4 uur

DOOR

HERKO GROOT

geboren te APELDOORN.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Electr. drukkerij «de Industrie» J. VAN DRUTEN — Utrecht.

1920.

AAN MIJN OUDERS

EN

MIJN AANSTAANDE VROUW

Bij de voltooiing van dit proefschrift, is het mij een aangename taak, U, Hooggeleeren en Oud-Hooggeleeren in de Faculteit der Wis- en Sterrekunde mijn welgemeenden dank te betuigen voor het onderwijs, van U ontvangen.

In het bijzonder geldt mijn dank U, Hooggeleerde JULIUS, Hooggeachte Promotor. Dat ik, bij den tweesprong, het pad der zuiver theoretische astronomie heb verlaten om mij te wagen op dat der zonnephysica, is vooral geschied onder den indruk van Uw fraaie resultaten op dit gebied. Uit Uw werk en later ook uit de gesprekken met U, waartoe Gij steeds zoo welwillend bereid waart, is mij steeds duidelijker geworden hoe rijk aan ongedachte mogelijkheden dit gebied is — maar tevens hoe ontzaggelijke moeilijkheden iedere stap vooruit met zich brengt. En *dit* is voor mij de groote winst van dezen arbeid geweest, dat Gij mij geleerd hebt, hoe, door geduldig overleg, aanvankelijk onoverkomelijk schijnende bezwaren te overwinnen of te ontzeilen zijn, hoe hier als overal geldt: arbeiden, niet vertwijfelen.

Hooggeleerde NIJLAND, dat Gij het door mij ingeslagen pad niet het „verkeerde” pad zult noemen, ook al voert het af van die deelen der sterrekunde, die Uw bijzondere belangstelling hebben, daarvan hebben Uw veelzijdige colleges mij ten volle overtuigd. Dat het mij vergund is geweest ze bij te wonen, zal ik steeds als een voorrecht blijven beschouwen.

Van alle overige colleges hebben die van U, Hooggeleerde KAPTEYN en DEBYE wel het meest tot mijn academische vorming bijgedragen. Vergun mij er U op deze plaats openlijk mijn blijvende dankbaarheid voor te betuigen.

Zeergeleerde VAN DER BILT, dat Gij steeds bereid waart mij bij te staan met uw kennis en uw bibliotheek, daarvoor blijf ik U zeer erkentelijk.

En tenslotte mag uw naam, Hooggeleerde VAN UVEN hier niet ontbreken. Dagelijksch, zelf voor de klas staande, herdenk ik dankbaar Uw altijd even bezielde als bezielende lessen. Van U leerde ik, dat lesgeven in de eerste plaats is: zich zelf geven — en zou dit misschien niet de belangrijkste les zijn, die voor den docent te leeren valt?

INLEIDING.

§ 1. *Historisch overzicht.*

In 1531 maakte APIANUS de opmerking, dat de staart van een komeet altijd van de zon afgekeerd is. Om dit te verklaren stelde KEPLER ¹⁾ in 1618 de hypothese op, dat het zonlicht een afstootende werking op de deeltjes van een kometenstaart uitoefent en was daarmee de eerste in een lange reeks van physici, die stelling namen in den strijd over het al dan niet bestaan van een druk tengevolge van de bestraling van een lichaam, een strijd, die voortduurde totdat in onze dagen zoowel theoretisch als experimenteel de stralingsdruk is aangetoond.

Na KEPLER was HOMBERG ²⁾ (1708), de eerste die meende experimenteel het bestaan van een lichtdruk bewezen te hebben, door het constateeren van afwijkingen, die lichte, aan een draad opgehangen voorwerpen vertoonden, wanneer hij er een sterken lichtbundel op liet vallen.

Zijn proeven werden tegen 't midden van de 18^e eeuw herhaald door de MAIRAN ³⁾ en du FAYE — ditmaal met negatief resultaat.

In 1770 verbeterde MICHELL ⁴⁾ de methode van du FAYE o. a. door gebruik te maken van spiegelaflezing. Hij meent

¹⁾ J. KEPLER. Principia mathematica I. 3 Trop. 41.

²⁾ HOMBERG. Histoire de l'Acad. 1708. p. 21.

³⁾ DE MAIRAN. Traité physique et historique de l'Aurore. Boreale (seconde édition) p. 371, Paris 1754.

⁴⁾ MICHELL. Priestley. History of Vision I. p. 387.

tot een reëel effect te mogen besluiten, ofschoon hij moest toegeven dat thermische werkingen bij zijn proeven niet met absolute zekerheid waren buitengesloten.

Voor al de genoemde onderzoekers was lichtdruk een effect, dat zij a priori moesten verwachten, aanhangers als zij waren van de emissietheorie. BENNET ¹⁾ en YOUNG ²⁾ herhaalden in het begin der 19^e eeuw de proefnemingen met de grootste nauwkeurigheid en voerden hun negatief resultaat aan als een argument tegen de emissietheorie en ten gunste van de undulatietheorie van HUYGENS. Dit is merkwaardig, daar reeds in 1748 EULER ³⁾ op grond van analogieën tusschen undulatietheorie en akoustiek theoretisch het bestaan van een lichtdruk bewees.

Niet gelukkiger was ook FRESNEL ⁴⁾ die in 1820 over het onderwerp experimenteerde.

In 1872 toonde echter MAXWELL ⁵⁾ aan, dat uit de vergelijkingen der electro-magnetische lichttheorie het bestaan van stralingsdruk onvermijdelijk volgt; terwijl eenige jaren later BARTOLI ⁶⁾ (1876) en BOLTZMANN ⁷⁾ (1884) hem zuiver thermodynamisch, zonder gebruik te maken van eenige bijzondere hypothese over het mechanisme der straling hebben afgeleid.

Ten slotte liet lord RAYLEIGH ⁸⁾ zien, dat een dergelijke druk bij elke golfbeweging moet optreden o.a. bij het geluid, waar hij dan ook reeds in 1876 experimenteel gevonden was door DVORAK ⁹⁾.

Ofschoon sedert $\pm$ 1880 aan het bestaan van den stralingsdruk theoretisch niet langer getwijfeld kon worden, bleven

¹⁾ BENNET. Phil. Trans. 1729. p. 81.

²⁾ YOUNG. Phil. Trans. 1802. p. 46.

³⁾ L. EULER Histoire de l'acad. royale de Berlin 2 p. 121 (1746).

⁴⁾ A. FRESNEL. Ann. de chim et de phys. 29 p. 57. 107 (1825).

⁵⁾ A. MAXWELL. Treatise on electr. and magn. Art, 792 (1873).

⁶⁾ A. BARTOLI. Sopra i movimenti prodotti della luce e del colore (1876) Nuovo Cim. (3) 15 p. 193 (1884); Repert. de Physik 21 p. 198 (1885).

⁷⁾ L. BOLTZMANN. Wied Ann. 22 p. 31—39 (1884).

⁸⁾ Lord RAYLEIGH. Phil. Mag. (6) 3 338—346 (1902).

⁹⁾ V. DVORAK. Pogg. Ann. 157 42—73 (1876).

alle pogingen van BARTOLI, ZÖLLNER ¹⁾, CROOKES ²⁾ e.a. hem ook proefondervindelijk aan te toonen, onvruchtbaar.

Het eerste experimenteële, zij 't ook indirecte bewijs heeft men in de proeven van LUMMER en PRINGSHEIM ³⁾ over de straling van een absoluut zwart lichaam. BOLTZMANN ⁴⁾ bewees n.l. dat uit de tweede hoofdwet en de stralingswet van STEFAN de door MAXWELL berekende waarde van den stralingsdruk volgt. Daar LUMMER en PRINGSHEIM deze wet van STEFAN nu experimenteel volkomen bevestigd vonden, volgde hieruit tevens indirect het bestaan van den stralingsdruk.

Eerst aan de geniale experimenteerkunst van LEBEDEW ⁵⁾ gelukte het in 1899 den stralingsdruk direct aan te toonen, terwijl twee jaar later ook NICHOLLS en HULL ⁶⁾ hierin slaagden.

Belangrijke theoretische onderzoekingen over het bedrag van den stralingsdruk op voorwerpen van zéér kleine afmetingen zijn verricht door SCHWARZSCHILD ⁷⁾ en DEBYE ⁸⁾ naar aanleiding van werk van ARRHENIUS ⁹⁾ waarover wij nog te spreken zullen hebben.

Ten slotte moet nog vermeld worden dat LEBEDEW ¹⁰⁾ in 1910 erin geslaagd is het effect van lichtdruk op gasen te meten en dit binnen de grenzen van het experiment in overeenstemming heeft gevonden met een door FITZGERALD ¹¹⁾ gegeven formule.

¹⁾ F. ZÖLLNER. Pogg. Ann. 160 154—169 en 296—317 (1877).

²⁾ W. CROOKES Phil. Mag. (4) 48 65—70 en 373—388 (1874).

³⁾ O. LUMMER u. E. PRINGSHEIM. Wied. Ann. 63 395—410 (1897); Ann. d. Phys. 3 159—163 (1900).

⁴⁾ L. BOLTZMANN. Wied. Ann. 22 291—294 (1884).

⁵⁾ P. LEBEDEW. Rapp. prés. au congrès de phys. 2 133—140 Paris (1900); Ann. d. Phys. 6 433—458 (1901).

⁶⁾ E. F. NICHOLLS en HULL. Phys. Rev. 13 307 (1901).

⁷⁾ K. SCHWARZSCHILD. Sitz. Ber. d. Kön. Bayer. Akad. d. Wiss. Math. Phys. Kl. 31 293—338 (1901).

⁸⁾ P. DEBYE. Müncher Dissertation (1908). Ann. d. Phys. 30 57—136 (1903).

⁹⁾ L. ARRHENIUS Öfversigt af. Kon. Vetens. Akad. Förhand. 57. 545—580 (1900). Phys. Zeitschr. 2 81—87 en 97—105 (1900).

¹⁰⁾ P. LEBEDEW. Ann. d. Phys. 32 p. 411 1910.

¹¹⁾ FITZGERALD Proc. Roy. Dublin Soc. 3 p. 344 1883.

§ 2. De stralingsdruk is evenredig met de intensiteit der straling. Op grooten afstand van de zon neemt hij dus af ($\propto \frac{1}{r^2}$), wanneer r de afstand tot de zon beteekent.

De druk dien de zonnestraling op 1 c.M.² van een absoluut zwart oppervlak op aarde uitoefent, bedraagt slechts 0.00000005 gr. zoodat het geen verwondering behoeft te verwekken, dat het zoo lang geduurd heeft, eer dit minimale bedrag proefondervindelijk geconstateerd kon worden.

Vragen wij ons af, in hoeverre de grootte van den stralingsdruk vergelijkbaar is met de aantrekking, door de zon uitgeoefend. 1 c.M.³ water waarop de aarde werkt met een kracht van 1 gr. wordt door de zon aangetrokken met een kracht $\frac{M r^2}{m R^2}$ gram, als m en M de massa's van aarde en zon voorstellen, r de straal van de aarde R de zonsafstand. Die kracht bedraagt 0.0006 gram; zij is dus 12000 maal grooter dan de stralingsdruk op een zijvlak. Vergelijkt men echter de beide werkingen op 1 m.M.³ water waarbij de stralingskracht 100 maal kleiner maar de zwaartekracht 1000 maal kleiner is, dan wordt de verhouding nog slechts 1200; voor een waterkubus van één micron zijde is zij 1.2 en heft derhalve de invloed van den stralingsdruk dien der graviteit reeds op, terwijl nog kleinere deeltjes zelfs zullen worden afgestooten door de zon.

ARRHENIUS ¹⁾ berekende dan ook dat voor een totaal reflecteerend voorwerpje met soortelijk gewicht 1 en een straal van 0,00008 m.M. de lichtdruk de graviteit ongeveer 10 maal overtreft, zoodat het aannemelijk is, dat zelfs de grootste waarden van de afstootende kracht, die volgens de onderzoekingen van BREDICHIN ²⁾ moeten worden aangenomen ter verklaring der waargenomen krommingen van kometenstaarten, bereikt kunnen worden.

Intusschen houdt de eenvoudige evenredigheid tusschen stralingsdruk en bestraald oppervlak op te bestaan wanneer

¹⁾ SV. ARRHENIUS. Das Werden der Welten.

²⁾ BREDICHIN A. N. 95 p. 15. Mechanische Untersuchungen über Cometenformen (1903) (Leipzig).

de afmetingen der lichaampjes vergelijkbaar worden met de golflengten van het opvallend licht; bij deeltjes van moleculaire afmeting overweegt weer de graviteit op den lichtdruk ¹⁾).

Ofschoon men in den lichtdruk dus een kracht moet zien, die in sommige gevallen de zwaartekracht vele malen kan overtreffen, is het opmerkelijk dat men hem nog nagenoeg niet te hulp heeft geroepen bij het verklaren van kosmische verschijnselen.

Tot voor kort was Sv. ARRHENIUS ²⁾ de eenige, die, anders dan in korte aanduidingen, wees op mogelijke toepassingen.

Behalve van de gedaante der kometenstaarten, meent hij de verklaring van nog een groot aantal andere, tot dusver onopgeloste problemen als: structuur der corona, Noorderlicht, ja, zelfs het ontstaan van 't leven op aarde! te kunnen geven door den lichtdruk te hulp te roepen.

Wij zullen hem op dit vrij speculatieve gebied niet verder volgen, maar liever overgaan tot andere beschouwingen, waarbij men zeker ook alle reden heeft, rekening met den lichtdruk te houden. Dit is n.l. het geval bij onderzoekingen betreffende den structuur van de zon en in 't algemeen van gasbollen, die hooge temperatuur bezitten.

Op den belangrijken rol, die de stralingsdruk spelen moet bij het onderhouden van den stationairen toestand, waarin zich de zonnegassen bevinden, is het eerst gewezen door W. H. JULIUS ³⁾ in 1906. Velerlei overwegingen hadden hem er n.l. toegeleid, het waarschijnlijk te achten, dat de lichtverdeeling op de zonneschijf in hooge mate afhankelijk is van zeer onregelmatige kromming der lichtstralen in de zonnegassen, en dat dus in de buitenste deelen der zon (ook beneden de fotosfeeroppervlakte) de dichtheid variëert met gradienten in alle mogelijke richtingen.

De vraag deed zich toen voor of de radiale dichtheidsgradient, veroorzaakt door de zwaartekracht, daarbij al of niet

¹⁾ SCHWARZSCHILD en DEBYE l.c.

²⁾ Sv. ARRHENIUS l.c.

³⁾ W. H. JULIUS. Verslag Akad. v. W. Amsterdam 15 331—333 (1906). Zie ook o.a. Handwörterb. d. Naturw. VII p. 828—829 (1912),

van overwegende beteekenis moet worden geacht. In de aard-sche atmosfeer is dit zeer zeker wél het geval; maar men kan niet direct, naar analogie van hetgeen hier wordt waargenomen een schatting maken van de waarschijnlijke verhouding tusschen radicale en onregelmatige gradienten in de zon. „Een voor-name oorzaak, waardoor dit voorshands onmogelijk is, ligt in onze onbekendheid met de grootte van den invloed, dien de **stralingsdruk** uitoefent op de stofverdeeling in de zon. Was er geen stralingsdruk, dan zou men mogen vooropstellen (zooals steeds geschiedt) dat ter hoogte van de fotosfeer de zwaartekracht bijna 28 maal zoo groot is als op aarde; maar zij wordt tegen-gewerkt door den stralingsdruk in een mate, afhankelijk van de grootte der deeltjes; zij kan daardoor zelfs voor sommige deeltjes geheel worden opgeheven. Het radiale dichtheidsverval moet dus in ieder geval veel kleiner zijn dan men, op grond van graviteit-werking alléén, geneigd mocht zijn te berekenen” ¹⁾).

Uitgaand van optische gegevens komt JULIUS dan tot de conclusie, dat het radiale dichtheidsverval op de zon ongeveer 50 maal kleiner is dan in onzen dampkring, zoodat de rela-tieve waarde der onregelmatige gradienten daar veel groter kan zijn dan hier. Het scheen hem daarom geoorloofd aan te nemen dat op de zon dichtheidsgradienten van vergelijkbare orde van grootte in alle mogelijke richtingen worden aan-getroffen. In het feit nu, dat inderdaad vele zonneverschijnselen op eenvoudige wijze kunnen worden uitgelegd als gevolgen van straalbreking bij zulke onregelmatige gradienten, ziet JULIUS een indirecte bevestiging van het denkbeeld, dat op de zon de graviteit sterk wordt tegengewerkt door den stralingsdruk (en door den druk van uitgezonden electronen, zie: Handwörter-buch d. Naturwissensch. VII p. 828 (1912)).

Ook waarnemingen van FENYI ²⁾ omtrent rustende protube-ranties, schijnen slechts verklaard te kunnen worden als men aanneemt, dat de uitwerking der zwaartekracht tot op hoogstens $\frac{1}{51}$ van haar ongestoord bedrag is teruggebracht.

¹⁾ W. H. JULIUS Lc.

²⁾ FENYI, Mem. d. Soc. d. Spettrosc. Ital. Vol. I. serie II^a (1912).

Herinneren we ons verder, dat door LEBEDEW proefondervindelijk is aangetoond het bestaan van een merkbaren stralingsdruk op gasmoleculen, samenhangend met het absorptievermogen, dan is het wel duidelijk dat bij berekeningen aangaande evenwichtstoestanden van kosmische gasbollen de belangrijke invloed van den stralingsdruk niet mag worden verwaarloosd.

Hieruit vloeien ernstige bedenkingen voort, o.a. tegen het overigens buitengewoon suggestieve en fraaie werk van R. EMDEN: „Gaskugeln”, waarin de eigenschappen van polytrope gasbollen worden ontwikkeld en toegepast op de physica van de zon, echter zonder dat over krachten, die de graviteit zouden kunnen tegenwerken, ook maar met een enkel woord wordt gerept.

Evenmin heeft BIGELOW ¹⁾ in zijn uitvoerige studies over de thermodynamica der zonneatmosfeer den stralingsdruk opgenomen onder de hoofdfactoren, die het evenwicht bepalen.

De eerste, die een speciaal onderzoek heeft ingesteld naar den invloed, dien de stralingsdruk hebben moet op den physischen toestand van sterren is EDDINGTON ²⁾ geweest.

Zijne onderzoekingen, waarover later nog uitvoeriger gesproken moet worden, hebben voornamelijk betrekking op „giant stars” met geringe dichtheid en hoge temperatuur. Op dwergsterren als onze zon is 't effect van den stralingsdruk volgens hem niet van beteekenis. Dit mag waar zijn voor de resultaten, die slaan op de zon als geheel genomen en speciaal voor de binnenste dichtere lagen — in de buitenste, waarvoor trouwens de vergelijkingen van EDDINGTON hun geldigheid verliezen, moet een effect van den stralingsdruk zonder twijfel bestaan. Waar al onze *waarnemingen* uit den aard der zaak betrekking hebben op juist deze buitenste lagen, lijkt het loonend na te gaan in hoe ver het bestaan van den stralingsdruk invloed kan hebben op onze interpretatie der geobserveerde verschijnselen. In het volgende moge men een eersten stap in de aangegeven richting zien.

¹⁾ BIGELOW. A treatise on the Sun's radiation New-York (1918).

²⁾ EDDINGTON, M. N. 77 (1916) en A. J. 48 (1918).

HOOFDSTUK I.

Overzicht van de theorie van EMDEN.

§ 3. R. EMDEN behandelt in zijn werk „Gaskugeln” den bouw van gasbollen onder invloed van Newtonsche attractie. Daarbij gaat hij uit van de volgende veronderstellingen:

De gassen, waaruit hij zijn gasbollen opgebouwd denkt zullen ideale gassen zijn, dus:

A. de energie is door de temperatuur ondubbelzinnig bepaald of, hetgeen op 't zelfde neerkomt: de specieke warmte bij constante volume (C_v) hangt niet van druk en volume af;

B. de toestandsvergelijking is:

$$pv = HT \quad (1)$$

waarbij p de druk in dynen is, v het volume van 1 gr, T de absolute temperatuur en H de gasconstante R gedeeld door het moleculair gewicht is;

C. C_v hangt ook niet van T af.

Met behulp van deze veronderstellingen kan men dan gemakkelijk de differentiaalbetrekking

$$vdp - HdT + pdv = 0 \quad (2a)$$

of

$$dp - pHdT - THd\rho = 0 \quad (2b)$$

afleiden, die in 't vervolg een rol zal spelen.

Behalve de *toestandsvergelijking* (1) moet nu ook nog de *vergelijking van toestandsverandering* vastgelegd worden d.i. de vergelijking, die aangeeft hoe de op elkaar volgende toestanden van het gas met elkaar in verband staan; dus of wij b.v. met isotherme processen te maken hebben dan wel met adiabatische of nog andere. Ten einde zich niet te

binden aan één gegeven toestandsverandering, voert EMDEN de zoogenaamde „polytrope toestandsveranderingen” in, waardoor het mogelijk blijkt een oneindigheid van toestanden in formeel opzicht samen te vatten tot één uitdrukking.

Over deze „polytropen” moeten wij een enkel woord zeggen, daar zij bij zuiver physische verhandelingen nog minder gebruikelijk zijn niettegenstaande hun groote beteekenis voor tal van thermodynamische problemen.

Zooals bekend is geeft de toestandsvergelijking (1) een betrekking tusschen p , v (ρ) en T , die altijd en overal vervuld moet zijn. Wij zouden haar kunnen voorstellen door een oppervlak, maar zullen hier liever gebruik maken van de gewone voorstelling in 't p - v -diagram, waardoor aan elk punt van het p - v -vlak op ondubbelzinnige wijze een temperatuur wordt toegevoegd.

De vergelijking van de toestandsverandering kan in het p - v -vlak door een kromme worden voorgesteld, die wij als den *weg* van het gas zullen aanduiden.

Bijzondere vormen van wegen zijn bijv.;

wegen van gelijken druk (1);

wegen van gelijk volume (2);

wegen van gelijke temperatuur (3) (de bekende isotherm).

Door EMDEN worden nu speciaal veranderingen van het gas beschouwd op wegen, die *polytropen* heeten en die gedefinieerd kunnen worden als *omkeerbare wegen van constante warmte capaciteit*. Hun vergelijking kan in één der drie vormen:

$$\left. \begin{aligned} T v^{k-1} &= \text{const.} \\ T^k p^{1-k} &= \text{const.} \\ p v^k &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

gebracht worden, als $k = \frac{c_p - \gamma}{c_v - \gamma}$ waarin c_p en c_v respect. te te specifieke warmte bij constanten druk en constant volume voorstellen, γ de warmte capaciteit bij een willekeurige warmte gedefinieerd door

$$\gamma = \frac{dQ}{dT} \quad (4)$$

waarbij dan

$$[dQ] = c_v dT + A p dv \quad (5)$$

de hoeveelheid warmte voorstelt, die men toe moet voeren om de temperatuur met dT te verhoogen bij constante waarde van γ .

In formeel opzicht zijn de polytropen gelijkwaardig met de adiabaten. Voor deze toch is $\gamma = 0$ dus $k = \frac{c_p}{c_v} = \alpha$.

Als bijzondere gevallen kan men onderscheiden de wegen:

$T = \text{constant}$ $k = 1$ of $\gamma = \pm \infty$ (isotherm)
 $\gamma = \text{constant}$ $k = n$ $\gamma = 0$ (adiabaat)
 $p = \text{constant}$ $k = 0$ $\gamma = c_p$ (weg v. const. druk)
 $v = \text{constant}$ $k = \infty$ $\gamma = c_v$ (weg v. const. volume).

Elke waarde, die wij aan γ toekennen, bepaalt dus een schaar van wegen. Ten einde deze onderling te kunnen onderscheiden voert EMDEN eene nieuwe grootheid in, die hij „polytrope temperatuur” noemt en op navolgende wijze definieert:

In het p - v -vlak denken wij op de plaats $v = 1$ ($p = 1$) een loodlijn opgericht en zoeken het snijpunt der polytroop met deze lijn op. Door dit punt gaat natuurlijk een isotherm, die de tot dit punt behorende temperatuur T bepaalt. Deze temperatuur noemen wij de polytrope temperatuur van exponent k (aangeduid door Θ_k) en komen daarmee tot deze definitie:

De polytrope temperatuur Θ_k van een gasmassa in een bepaalden toestand is die temperatuur, die het gas aanneemt wanneer het uit den gegeven toestand langs een polytroop van exponent k op een dichtheid 1 gr. / 1 c.M³. gebracht wordt.

Is de toestand b.v. gegeven door p_1 en ρ_1 dan is de door dit punt gaande polytroop der klasse k :

$$T v^{k-1} = T_1 v_1^{k-1} \quad (6)$$

en dus

$$\Theta_k = T_1 \left(\frac{1}{\rho_1} \right)^{k-1} \quad (7)$$

Als bijzonder geval van polytrope temperatuur zullen wij onderscheiden de adiabatische temperatuur. Θ , die het gas aanneemt als het langs een adiabaat op de dichtheid 1 gebracht wordt.

Het voordeel van het invoeren van deze polytrope temperaturen bestaat in het feit dat zij — zooals uit de definite volgt — voor den geheelen polytroop constant zijn, doch van den eenen op den anderen veranderen.

Met behulp van Θ_k kan men zeer eenvoudige betrekkingen afleiden tusschen p , ρ en T en wel:

$$T = \rho^{k-1} \Theta_k \quad (8a)$$

$$p = \rho^k H \Theta_k \quad (8b)$$

§ 4. Zij in een gasbol met straal R de massa zoo geordend dat de dichtheid ρ enkel functie van den afstand tot het middelpunt (r) is, dan geldt voor den evenwichtstoestand de differentiaalbetrekking:

$$dp = - \rho g dr \quad (9)$$

waarbij

$$g = + \frac{4 \pi G}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr \quad (10)$$

de versnelling van de zwaartekracht naar het centrum voorstelt en G de graviteitsconstante is.

Daar hierbij nog niets anders verondersteld is dan dat

$$\rho = f(r) \quad (11)$$

volgt hieruit onmiddellijk de stelling:

„Een gasbol kan in evenwicht zijn, hoe de dichtheid langs den straal ook varieert.”

In het volgende willen wij nu gasbollen onderzoeken, die zoo geconstrueerd zijn, dat, als wij langs den straal voortschrijden, wij gasmassa's aantreffen in continu op elkaar volgende toestanden, die alle op denzelfden polytroop liggen.

Een dergelijken, in polytroopevenwicht verkeerenden gasbol zullen wij met EMDEN een *polytropen gasbol* noemen. Om de differentiaalvergelijking hiervan te vinden schrijven mij eerst (9) in de gedaante:

$$r^2 \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = - 4 \pi G \int_0^r \rho r^2 dr$$

Dit naar r differentieërend komt er:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2 \quad (12)$$

een uitdrukking, die nog voor elken in evenwicht verkeerenden gasbol geldig is.

Wij moeten dus nu de voorwaarde invoeren dat onze gasbol in polytroop evenwicht verkeert, m. a. w. dat:

$$p = \rho^k H \Theta_k.$$

Dit gaat het gemakkelijkst door op te merken dat:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{k}{k-1} H \Theta_k \frac{d\rho^{k-1}}{dr} \quad (13)$$

zoodat als wij nog stellen

$$\frac{4\pi G}{\frac{k}{k-1} H \Theta_k} = \alpha^2 \quad (14)$$

de vergelijking (12) voor dit geval overgaat in:

$$\frac{d\rho^{k-1}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho^{k-1}}{dr} + \alpha^2 \rho = 0 \quad (15a)$$

Ten slotte voeren wij nog in de grootheden u en n , die wij definiëren door de vergelijkingen:

$$u = \rho^{k-1} \quad (16)$$

$$n = \frac{1}{k-1} \quad (17)$$

en krijgen dan als eindvergelijking voor den polytroopen gasbol:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u^n = 0 \quad (15)$$

De hier gedefinieerde grootheid u staat in eenvoudig verband met T en p en wel, zooals uit (16) en (18a en b) onmiddellijk volgt, is

$$T = u \Theta_k \quad (18a)$$

$$p = u^{n+1} H \Theta_k \quad (18b)$$

zoodat u blijkbaar evenredig met de temperatuur is.

De vergelijking (15) geldt voor alle waarden van u behalve $n = \infty$ ($k = 1$) waarmee het isotherme geval, dat ons hier niet verder interesseert, correspondeert. In gesloten vorm is zij slechts te integreeren voor de gevallen $n = 0$ en $n = 1$. Deze geven:

$$\left. \begin{aligned} n = 0 \quad & \left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 = 0 \right. \\ & \left. u = C_1 + \frac{C_2}{r} - \frac{\alpha^2 r^2}{6} \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

en

$$\left. \begin{aligned} n = 1 \quad & \left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \alpha^2 u = 0 \right. \\ & \left. u = C_1 \frac{\sin \alpha r}{\alpha r} + C_2 \frac{\cos \alpha r}{\alpha r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Hierbij beteekent het geval $n = 0$ ($k = \infty$) dat ρ overal constant is.

Het geval $n = 1$ ($k = 2$) heeft geen bijzondere physische beteekenis.

Voor alle andere gevallen moet men zijn toevlucht nemen tot mechanische kwadraturen. Aangezien de vergelijking van de tweede orde is, treden in de oplossing dus twee constanten op, die bepaald moeten worden uit de begin voorwaarden. Een dezer voorwaarden volgt vanzelf uit den aard van ons probleem n.l. dat in het middelpunt $\frac{dp}{dr}$, $\frac{dT}{dr}$ en $\frac{d\rho}{dr}$ nul zullen zijn, hetgeen dus uitgedrukt kan worden door

$$\frac{du}{dr} = 0 \quad \text{voor } r = 0 \quad (21a)$$

De tweede voorwaarde is echter nog geheel willekeurig en zou o.a. kunnen bestaan in het aannemen van een bepaalde waarde van u (dus van p , T en ρ) in het middelpunt of in de formule

$$u = u_0 \quad \text{voor } r = 0 \quad (21b)$$

(alle grootheden, die op het middelpunt betrekking hebben zullen wij een index 0 geven).

Bij de berekening door mechanische kwadratuur zou men

dus n , α en u_0 willekeurig moeten kiezen m. a. w. een keus doen uit de ∞^3 polytrope gasbollen, die bestaanbaar zijn. Om eenig idee te krijgen van de manier, waarop de gevonden oplossing van de grootheden n , α^2 en u_0 afhangt zou men dus heel wat numerisch werk te verrichten hebben. Gelukkig is het evenwel mogelijk dit werk tot op een derde te verminderen. De vergelijking (15) kan n.l. getransformeerd worden tot een soortgelijke waarin $\alpha^2 = 1$ en die tot beginvoorwaarden heeft:

$$\left. \begin{aligned} u &= 1 \\ \frac{du}{dr} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ voor } r = 0 \quad (21c)$$

Uit de oplossingen dezer getransformeerde vergelijking volgen die der oude onmiddellijk, zoodat wij de berekening nu alleen voor een aantal waarden van n te verrichten hebben.

Deze transformatie gaat als volgt:

Stel eerst:

$$r = \alpha r$$

dan gaat de vergelijking over in

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + u^n = 0$$

Zij vervolgens U een getal zoodanig dat, als

$$u = U u_1,$$

$$u = U_1, \text{ voor } u_1 = 1$$

dan wordt de vergelijking

$$U \frac{d^2 u_1}{dr^2} + U \frac{2}{r} \frac{du_1}{dr} + U^n u_1^n = 0$$

Nemen wij ten slotte als nieuwe onafhankelijkheid veranderlijke

$$r_1 = U^{\frac{n-1}{2}}$$

dan krijgen wij de vergelijking

$$\frac{d^2 u_1}{dr_1^2} + \frac{2}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} + u_1^n = 0 \quad (22)$$

met beginvoorwaarden

$$\left. \begin{array}{l} \frac{du_1}{dr_1} = 0 \\ u_1 = 1 \end{array} \right\} \text{ voor } r_1 = 0 \quad (23)$$

op te lossen voor eenige waarden van n .

Dit heeft EMDEN gedaan voor de waarden:

$$n = 0; \frac{1}{2}; 1; 1.5; 2; 2.5; 3; 4; 4.5; 4.9; 5 \text{ en } 6.$$

De tabel, die berekend werd met behulp van de methode van KUTTA ¹⁾, laten wij voor $n = 3$ ($k = \frac{4}{3}$) volgen, daar wij deze later nog noodig zullen hebben; voor de overige waarden zij verwezen naar het oorspronkelijk werk van EMDEN p. 78-90.

Behalve de algemeene oplossingen voor $n = 0$ en $n = 1$ gelukte het EMDEN ook voor $n = 5$ een oplossing te vinden bij de beginvoorwaarden (21). Deze luidt:

$$u = u_0 \sqrt{\frac{3 u_0}{3 u_0 + u_0^5 \alpha^2 r^2}} \quad (24)$$

Wij kunnen er niet aan denken de even vernuftige als fraaie discussie, die EMDEN van de gevonden differentiaal-vergelijking geeft verder te volgen. Alleen moeten hier — overigens zonder bewijs — nog eenige formules vermeld worden, die EMDEN heeft afgeleid en die wij in het vervolg noodig zullen hebben.

Deze formules zijn:

$$r = \frac{1}{U^{\frac{n-1}{2} \alpha}} r_1 = \frac{U^{\frac{k-2}{2} (k-1)}}{\alpha} r_1 \text{ (cm)} \quad (A)$$

$$R = \frac{1}{U^{\frac{n-1}{2} \alpha}} r_1 (u_1 = 0) = \frac{U^{\frac{k-2}{2} (k-1)}}{\alpha} r_1 (u_1 = 0) \text{ (cm)} \quad (B)$$

$$\rho = U^n u_1^n = U^{\frac{1}{k-1}} u_1^{\frac{1}{k-1}} \text{ (gr. cm}^{-1}\text{)} \quad (C)$$

¹⁾ KUTTA, Zeitschr. für Math. und Phys. Bd. 46. p. 435 (zie ook: Gaskugeln p. 92—95).

$$T = U u_1 \Theta_k \quad (D)$$

$$p = U^{n+1} u_1^{n+1} H \Theta_k = U^{\frac{k}{k-1}} u_1^{\frac{k}{k-1}} H \Theta_k \quad (\text{gr. cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}) \quad (E)$$

$$g = -\frac{4\pi G}{\alpha} U^{\frac{n+1}{2}} \frac{du_1}{dr_1} \quad (\text{cm. sec}^{-2}) \quad (F)$$

$$M = -\frac{4\pi}{\alpha^3} U^{\frac{3-n}{2}} r_1^2 \frac{du_1}{dr_1} \quad (\text{gr.}) \quad (G)$$

$$\Omega = +\frac{4\pi}{\alpha^2} U u_1 + \text{const.} \quad (\text{cm}^2. \text{ sec}^{-2}) \quad (H)$$

$$\bar{\rho} = -3 U^n \frac{1}{r_1} \frac{du_1}{dr_1} \quad (\text{gr. cm}^{-3}) \quad (J)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = -\frac{3 r_1 ((u_1)_0^n = 1)}{3 \frac{du_1}{dr_1}} \quad (K)$$

$$\bar{g} = \frac{4\pi G}{\alpha} U^{\frac{n+1}{2}} \frac{(u_1)_0 - (u_1)}{r_2} \quad \text{cm. sec}^{-1} \quad (L)$$

$$\frac{g}{\bar{g}} = -\frac{r_1}{(u_1)_0 - u_1} \frac{du_1}{dr_1} \quad (M)$$

Hierin is: r de afstand tot het middelpunt; R de straal van den gasbol (deze wordt gevonden uit den eisch, dat aan den omtrak van den bol p , ρ en T (dus u) nul zullen zijn — M stelt voor de massa besloten binnen den bol met straal r , Ω de waarde van de gravitatie potentiaal op een afstand r van het middelpunt, $\bar{\rho}$ de gemiddelde dichtheid van de massa, die binnen de straal r ligt, dus

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi r^3}$$

en evenzoo $\bar{g}$ de gemiddelde waarde van g langs de straal tot aan de plaats r , dus

$$\bar{g} = \frac{1}{r} \int_0^r g \, dr$$

Met behulp van deze formules kunnen wij den bouw van een gasbol nagaan als wij getalwaarden aannemen voor de verschillende optredende constanten. Hierbij moet dan o.a. een veronderstelling gemaakt worden over u_0 , terwijl de waarde van α^2 hieruit bepaald kan worden. Dit is de manier, die EMDEN volgt in de voorbeelden van hoofdstuk VI p. 95—105. Voor ons doel zal het meestal anders zijn, α^2 zullen wij n.l. bekend veronderstellen terwijl wij u_0 niet van te voren aannemen. De gang der berekening wordt dan deze:

Laat van een gasbol bekend zijn α^2 , H , G en k , dan volgt Θ_k uit:

$$\alpha^2 = \frac{4 \pi G}{\frac{k}{k-1} H \Theta_k}$$

Uit tabel 1 nemen wij r_1 en $\frac{du_1}{dr_1}$ voor $u_1 = 0$ dan volgt — als wij de totale massa M kennen — uit (G), geschreven in de gedaante

$$U^{3-n} = \frac{M^3 4 \pi G^3}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^3 H^3 \Theta_k^3 \left(r_1^2 \frac{du_1}{dr_1}\right)_{u_1=0}} \quad (G^1)$$

U en dus ρ_0 volgens (C) voor $u_1 = 1$.

Daarmee hebben wij dan tevens gevonden voor 't middelpunt

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= U \Theta_k \\ p_0 &= \rho_0 H \Theta_k \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

terwijl verder bij

$$r = \frac{1}{\frac{n-1}{2} U} r_1 \quad (26)$$

behooren de grootheden:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= (U u_1)^n \\ T &= U u_1 \Theta_k \\ p &= \rho H T \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

waarbij u_1 de waarde is, die de tabel voor r_1 geeft, waarmee de karakteristieke grootheden bekend zijn.

HOOFDSTUK II.

§ 5. *Over het verband tusschen stralingsdruk en stralingsenergie.*

Ten einde de beschouwingen van EMDEN, genoemd in het voorgaand hoofdstuk, uit te breiden door naast de kracht der graviteit ook den stralingsdruk in de thermodynamische vergelijkingen in te voeren, moet aangegeven worden welk verband bestaat tusschen dezen druk en de energie der straling, die dezen druk bewerkt. Dit is geenszins eenvoudig.

Wanneer op een onbegrensd, zwart lichaam per secunde een totale hoeveelheid stralingsenergie S per c.M². valt, wordt hierop een druk D uitgeoefend, die volgens een bekende formule is:

$$D = \frac{S}{c} \quad (28)$$

Met dit geval hebben wij helaas niet te maken. De gasmoleculen, die den druk ondergaan, zijn ten eerste niet onbegrensd uitgebreid, maar integendeel van afmetingen, die zelfs kleiner zijn dan de golflengte van de opvallende straling en ten tweede mogen zij niet als absoluut zwart beschouwd worden. De formule (28) is dus zeker niet van toepassing.

Beter te gebruiken voor ons doel is wellicht de formule, die door FITZGERALD ¹⁾ gegeven en door LEBEDEV ²⁾ experimenteel getoetst is bij mengsels van waterstof en koolwaterstoffen, welke luidt

$$D = \frac{\mu S}{c} \quad (29)$$

¹⁾ Proc. Roy. Dublin Soc. 3 p. 344. 1883.

²⁾ P. LEBEDEV, Ann. d. Phys. 32 p. 411. 1910.

waarin weer S de hoeveelheid stralingsenergie is van alle golflengten, komend uit alle richtingen, die per seconde op 1 c.M^2 valt, $c = 3 \times 10^{10}$, μ 't breukdeel der energie geabsorbeerd door 1 c.M^3 .

Toch stelt ook (29) den stand van zaken alleen maar juist voor bij betrekkelijk groote dichtheden van het gas. Wanneer de dichtheid zoo gering wordt, dat de verschillende moleculen elkaar nagenoeg niet meer beïnvloeden, krijgen wij te rekenen met stralingsdruk, veroorzaakt door intramoleculaire absorptie en dan is het proces veel te ingewikkeld om door één enkelen parameter μ juist voorgesteld te kunnen worden.

Indien slechts bij moleculen nog zin gehecht kon worden aan begrippen als: brekingsindex, dielectriciteitsconstante e.d. zou men de formule

$$D = 12 \frac{\frac{\sigma' W}{\omega}}{(\varepsilon + 2)^2 + \left(\frac{\sigma'}{\omega}\right)^2} \quad (30)$$

die door DEBYE ¹⁾ is afgeleid voor zéér kleine — maar niet moleculaire — deeltjes, als volgt kunnen vervormen:

$$\varepsilon - \frac{i \sigma'}{\omega} = \nu^2 (1 - x)^2$$

dus

$$\varepsilon = \nu^2 (1 - x^2)$$

$$\frac{\sigma'}{\omega} = 2 x \nu^2 = 2 x$$

$$\rho = \frac{a \omega}{c} = \frac{2 \pi a}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2 \pi c}{\lambda}$$

$$W = \frac{\pi a^2 S}{c}$$

waaruit ²⁾

$$D = 1,8.10^{-9} \frac{a^3 x S}{\lambda} \quad (31)$$

¹⁾ P. DEBYE, Ann. d. Phys. 30 p. 57—136 (1909).

²⁾ Deze formule werd mij medegedeeld door Dr. MINNAERT.

als hierin:

λ = golflengte

ω = aantal trillingen in 2π sec.

σ' = geleidingsvermogen

W = energie per vol-eenh.

a = straal van 't molecule

$c = 3.10^{10}$ cm/sec.

x = absorptiecoëff.

$$\rho = \frac{a \omega}{c}$$

ε = dielectr. const.

S = energie, die per sec. door 1 c.M². gaat.

Voor één molecule verliezen grootheden als σ' , ε etc. echter allen zin en mag (30) noch (31) gebruikt worden.

Het eenige wat overblijft is een andere formule, die door DEBYE in hetzelfde artikel is afgeleid en die geldt voor een dipool met eigen golflengte λ_0 .

Zij luidt:

$$D = \frac{3}{2\pi c} \int_0^\infty S(\lambda) \lambda^2 \sin^2 \beta d\lambda \quad (33)$$

waarbij

$S(\lambda)$ = energie der straling van golflengte λ vervoerd door 'n stralenbundel van 1 c.M². doorsnede in 1 sec.

σ = dempingscoëff.

λ_0 = eigengolflengte van dipool.

β = een hoek, gedefinieerd door:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma}{\pi} \frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^3}{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2} \quad (34)$$

Wanneer σ klein is — en dit is steeds het geval — volgt uit (34) bij benadering

$$d\lambda = - \frac{\sigma \lambda_0}{2\pi} \frac{d\beta}{\sin^2 \beta} \quad (35).$$

Voert men dit in (33) in en merkt tevens op, dat een dipool slechts meetrit voor stralen, wier golflengten in de onmiddel-

lijke omgeving van λ_0 liggen, dan kan men in plaats van (33) schrijven:

$$D = \frac{3\sigma}{4\pi c} \lambda_0^3 S(\lambda_0) \quad (36).$$

Wanneer wij ten slotte elke lijn uit 't spectrum van zeker element opvatten als ontstaan door eigen trillingen van den dipool, die het molecule a. h. w. representeert, komt er:

$$D = \frac{3\sigma}{4\pi c} \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^3 S(\lambda_i) \quad (37).$$

Welke der bovenbesproken formules moeten wij bij ons onderzoek toepassen?

Vermoedelijk doen wij het best de formule van FITZGERALD toe te passen in de *diepere* en dus *dichtere* deelen van de zon, waar de moleculen zoo dicht op een zijn, dat zij niet langer als onafhankelijk van elkaar stralende dipolen mogen worden opgevat, die één of althans slechts enkele trillingen kunnen uitvoeren, maar waar zij elkaars bewegingen zoodanig beïnvloeden dat een continu spectrum wordt uitgezonden, waar — om 't met één woord te zeggen — wij mogen rekenen met *zwarte straling*.

In de *buitenste*, ijlere deelen van de zon daarentegen zal de formule (37) van DEBYE waarschijnlijk de beste resultaten opleveren.

§ 6. *Stralingsdruk in een willekeurig punt P van de zon.* Een willekeurig punt P ergens binnen de zon gelegen, ontvangt straling van alle kanten en ondergaat dus een stralingsdruk D naar alle richtingen. Uit symmetriegronden is onmiddellijk in te zien, dat de resultante van al deze drukkingen radiaal moet zijn.

Deze *radiale resultante*, die dus tegengesteld aan de zwaartekracht werkt, zullen wij voortaan bedoelen met den *stralingsdruk in P en noteeren als D_r* .

Om haar te bepalen, moeten wij allereerst onderzoeken, hoe groot de intensiteit is der straling in radiale richting, die P treft.

Het is duidelijk dat deze, ondermeer, zal afhangen van de absorptie en diffusie in de zonneatmosfeer.

Al naar de eerste of tweede factor overweegt, moeten wij een anderen weg inslaan bij de bepaling van D_r .

Ofschoon de onderzoeken van SCHARTZSCHILD, ¹⁾ DEFANT, ²⁾ JULIUS, ³⁾ SPIJKERBOER, ⁴⁾ v. CITTERT ⁵⁾ e. a. voor de *zonne-atmosfeer* overtuigend bewezen hebben, dat de *diffusie* verreweg den belangrijkste rol speelt, zoodat men zelfs de absorptie in eerste instantie — althans in de buitenste lagen — mag verwaarloozen, zullen wij toch aan de behandeling van dit geval vooraf laten gaan dat der *uitsluitende absorptie*, aangezien EDDINGTON zich bij zijn beschouwingen op dit standpunt heeft gesteld ⁶⁾ en het de moeite loont zijn resultaten nog eens langs een van den zijnen verschillenden weg te controleeren.

Ten einde dan in het punt P, gelegen op een afstand r van het middelpunt der zon, den component in radiale richting op te maken van alle straling, die P treft, vragen wij vooreerst naar den stralingscomponent in radiale richting der straling, die P bereikt van uit één volume element $dT = \xi d\xi \sin \phi d\phi d\omega$, gelegen op een afstand ξ van P, aannemend dat hiervan een stralingsintensiteit S per massa eenheid uitgaat, *gelijkelijk naar alle richtingen*. (In de laatste onderstelling komt dus tot uiting dat van diffusieëffecten afgezien wordt).

De intensiteit van een *evenwijdigen* lichtbundel, die een weg

¹⁾ K. SCHWARZSCHILD. *Über Diffusion u. Absorption etc.* Sitz. Ber. d. Berl. Akad. 1914.

²⁾ A. DEFANT, *Über Diffusion u. Absorption etc.* Sitz. Ber. d. Akad. Wien. 1916.

³⁾ W. H. JULIUS, *Verh. Akad. Wetensch. A'dam* 22 p. 64—75. 1913.

⁴⁾ J. SPIJKERBOER, *Verstrooiing van licht etc.* Dissertatie Utrecht 1917.

⁵⁾ P. H. v. CITTERT, *Spectraalverschijnselen etc.* Dissertatie Utrecht 1919.

⁶⁾ In M. N. 77 (1916) p. 25 onderzocht E. weliswaar hoe zijn vergelijkingen gewijzigd worden door bijkomende verstrooiing, maar hij stelt zich daarbij op 't zeer elementaire standpunt dat uitsluitend verstrooiing in twee tegenovergestelde richtingen plaats heeft en ziet bij zijn verder onderzoek geheel van verstrooiing af.

ξ heeft doorloopen door een gas van de dichtheid ρ met een specifieke extinctieconstante μ wordt gegeven door

$$S_{\xi} = S e^{-\mu \int_0^{\xi} \rho d\xi} \quad (38a)$$

In 't geval van een bolvormigdivergeerenden lichtbundel, zooals hier, wordt de formule

$$S_{\xi} = S e^{-\mu \int_0^{\xi} \rho d\xi} \cdot \frac{1}{4\pi\xi^2} \quad (38)$$

Als μ de specifieke extinctieconstante is, wordt de absorptie-coëfficiënt, d.i. de breuk, die aangeeft 't hoeveelste deel der straling geabsorbeerd is bij den doorgang van een cylinder van 1 c.M. lengte, waarbinnen de dichtheid ρ heerscht, en die wij noteeren zullen als $\bar{\mu}$, blijkbaar gegeven door:

$$\bar{\mu} = 1 - e^{-\mu \rho}$$

Als wij mogen aannemen ¹⁾ dat voor elke richting absorptie gelijk aan emissie is, zal het volume-element $d\tau$ in de gekozen richting emitteeren: $\mu S d\tau$ en dus in P een bijdrage aan straling in *radiale* richting leveren van:

$$\begin{aligned} \bar{\mu} S e^{-\mu \int_0^{\xi} \rho d\xi} \frac{1}{4\pi\xi^2} \xi^2 d\xi \sin\phi d\phi d\omega \cdot \cos\phi = \\ = \frac{1}{4\pi} \bar{\mu} S e^{-\mu \int_0^{\xi} \rho d\xi} d\xi \sin\phi \cos\phi d\phi d\omega. \end{aligned}$$

De algebraische som van al deze componenten, komende uit alle elementen $d\tau$ van waaruit nog straling tot P doordringt, geeft de overmaat van bestraling in radiale richting aan, de grootheid, waarmede volgens de formule van FITZGERALD de stralingsdruk in P evenredig moet worden gesteld.

¹⁾ Dit schijnt wel de beteekenis te zijn van de min of meer zonderling aandoende uitspraken van EDDINGTON M. N. p. 17: «the emissive and absorbing powers of a substance are equal» en p. 18: «since the absorbing and emissive powers of a substance are necessarily equal....»

Zij bedraagt:

$$H = \frac{1}{4\pi_1} \int \bar{\mu} \text{Se}^{-\mu \int_0^{\xi} \rho d\xi} d\xi \cos \phi \sin \phi d\phi d\omega - \\ - \frac{1}{4\pi_2} \int \bar{\mu} \text{Se}^{-\mu \int_0^{\xi} \rho d\xi} d\xi \sin \phi \cos \phi d\phi d\omega.$$

waarbij de integratie 1 betrekking heeft op alle punten links, 2 op alle punten rechts van P gelegen.

Binnen de integralen bevindt zich de exponentieele factor

$$e^{-\mu \int_0^{\xi} \rho d\xi}$$

De grootheid ρ is op niet al te groote afstanden niet sterk veranderlijk. Laten wij een gemiddelde waarde $\bar{\rho}$ invoeren gedefinieerd door:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} \rho d\xi$$

dan wordt de exponentieele factor: $e^{-\mu \bar{\rho} \xi}$

Voor groote waarden van ξ wordt deze factor al spoedig zeer klein, m. a. w. alleen punten, die op niet al te grooten afstand ξ van P verwijderd zijn, leveren nog een merkbare bijdrage aan straling in P op.

Voor niet al te groote afstanden mag ρ zeker als constant beschouwd worden, terwijl dan tevens bij benadering:

$$S = S_0 + \frac{dS}{dr} \xi \cos \phi \quad (A)$$

wanneer S_0 de waarde van S in P beteekent.

Met deze beperking valt de integraal $\int_1$ uiteen in:

$$\frac{1}{4\pi} \bar{\mu} \xi S_0 \int e^{-\mu \xi \rho} d\xi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi d\omega. \quad (a)$$

en

$$\frac{1}{4\pi} \bar{\mu} \frac{dS}{dr} \int \xi e^{-\mu \xi \rho} d\xi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos^2 \phi d\phi d\omega. \quad (b)$$

Hierbij is verondersteld, dat de integratie over ξ alleen over de naaste omgeving van P zal plaats hebben. Maar aangezien de verder verwijderde punten toch geen bijdrage meer geven voor de waarde van de integraal, ten gevolge van de geringe waarde van den factor $e^{-\mu \xi \rho}$, mogen wij zonder bezwaar integreeren van $\xi = 0$ tot $\xi = \infty$, zonder iets anders te vinden dan als wij uitsluitend over de naaste omgeving van P hadden geïntegreerd.

Nu is:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \phi \sin \phi d\phi = \frac{1}{3}$$

zoodat (a) en (b) overgaan in:

$$(a) = \frac{1}{2} \bar{\mu} S_0 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\mu \rho \xi} d\xi = \frac{1}{4} \frac{\bar{\mu}}{\mu \rho} S_0$$

$$(b) = \frac{1}{2} \bar{\mu} \frac{dS}{dr} \cdot \frac{1}{3} \int_0^\infty \xi e^{-\mu \rho \xi} d\xi = \frac{1}{6} \cdot \frac{\bar{\mu}}{\mu^2} \frac{1}{\rho^2} \frac{dS}{dr}$$

De som der straling in radiale richting bedraagt dus: van links:

$$\frac{1}{4} \frac{\bar{\mu}}{\mu \rho} S_0 + \frac{1}{6} \frac{\bar{\mu}}{\mu^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} \frac{dS}{dr}$$

van rechts:

$$\frac{1}{4} \frac{\bar{\mu}}{\mu \rho} S_0 + \frac{1}{6} \frac{\bar{\mu}}{\mu^2} \frac{1}{\rho^2} \frac{dS}{dr}$$

zoodat de totale straling, H, wordt:

$$H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{\mu}}{\mu^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} \frac{dS}{dr} \quad (39)$$

Bij afwezigheid van diffusie geeft de formule v. FITZGERALD voor den stralingsdruk D_r in P dus:

$$D_r = \frac{1}{3c} \left(\frac{\bar{\mu}}{\mu} \right)^2 \cdot \frac{1}{\rho^2} \frac{dS}{dr} \quad (40a)$$

of als wij voor $\bar{\mu}$ invoeren $1 - e^{-\mu\rho}$:

$$D_r = \frac{1}{3c} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\mu\rho}}{\mu\rho} \right)^2 \cdot \frac{dS}{ds} \quad (40)$$

Voor kleine waarden van $\mu\rho$ gaat dit over in

$$D_r = \frac{1}{3c} \cdot \frac{dS}{dr} \quad (40')$$

voor groote waarden in:

$$D_r = \frac{1}{3c} \cdot \frac{1}{\mu^2 \rho^2} \frac{dS}{dr} \quad (40'')$$

§ 7. *Nadere beschouwing der formules (39) en (40).* Bij de afleiding van (39) en (40) moesten wij nog al eenige benaderingen invoeren. Daar op deze formules de verdere ontwikkelingen voor het geval wij de diffusie verwaarloozen, moeten, gebazeerd worden, is het gewenscht haar geldigheid en beteekenis nauwkeurig na te gaan.

Alles berust in laatste instantie op de veronderstelling, dat buiten een niet te grooten afstand ξ , de factor $e^{-\mu\rho\xi}$ practisch gelijk nul mag gesteld worden, zoodat de integralen (a) en (b) van pag. 25 en 26 tusschen de grenzen 0 en ξ genomen mogen worden. Daarbij wordt met, „niet te groote” afstand ξ bedoeld een afstand waarbij nog geldig blijft:

$$\int_0^\xi \rho d\xi = \rho \xi$$

$$S = S_0 + \frac{dS}{dr} \xi \cos \phi$$

m. a. w. waarbinnen ρ en $\frac{dS}{dr}$ als constant mogen worden beschouwd.

Of dit 't geval zal zijn, hangt blijkbaar vooral af van de waarde van $\mu\rho$.

Helaas is het moeilijk een juist oordeel over deze grootheid te vormen. Wij zijn aangewezen op min of meer plausibele schattingen, maar weten ten slotte noch van μ , noch van ρ de juiste waarde.

Over μ loopen de opinies zeer uiteen.

EMDEN ¹⁾ geeft voor de aardatmosfeer op: $\mu = 0.2$, waarbij als lengte eenheid 1033 c.M. genomen is; herleidt men dit tot 't C. G. S. stelsel dan zou $\mu = 0.0002$ zijn.

Overigens is het gemakkelijk in te zien, dat μ geen constante waarde kan hebben. Voor elk element heeft μ een eigen waarde. Op verschillende diepte zal de totale μ , die wij in de formule gebruiken dus een andere zijn, afhankelijk van de samenstelling van 't gasmengsel daar ter plaatse. Verder moet μ ook afhangen van de temperatuur (en dus van r) — wij kunnen ons absorptie in een gas immers moeilijk anders voorstellen dan als gebonden aan de spectraallijnen.

Bij de nog sterk uiteenlopende waarden voor μ , die men opgegeven vindt, moeten wij een keus doen. Om later nog te vermelden redenen komt het mij 't best voor ons aan de orde van grootheid van EMDEN te houden, dus $\mu = \pm 0.0001$ à 0.001 C. G. S. eenheid te rekenen, onder voorbehoud dat deze waarde eventueel te klein zal kunnen blijken.

Wat ρ betreft — er kan geen twijfel aan bestaan, dat deze grootheid van de buitenste lagen der zon af, waar zij praktisch nul is, naar binnen toe gaandeweg moet aangroeien. De waarde van $\mu\rho$ — ook al is zij in de buitenste deelen nog zeer klein — zal in de diepere lagen, waarover onze beschouwingen juist loopen, grooter worden zoodat wij mogen verwachten ergens een zône te zullen aantreffen van waar af de opgestelde formules geldig zijn.

Waar deze begint is al weer moeilijk uit te maken.

EMDEN ²⁾ heeft berekend, dat bij een adiabatischen gasbol van de grootte en temperatuur van de zon aan de schijnbare

¹⁾ R. EMDEN, Gaskügeln p. 285.

²⁾ R. EMDEN, l. c. 410—418.

oppervlakte ρ van de orde 10^{-3} moet zijn. Verkeert de gasbol niet in adiabatisch evenwicht, maar in een polytroop evenwicht, gekarakteriseerd door de waarde $n = 1439$ bijv. dan zou ρ aan de schijnbare oppervlakte nog $\pm 10^{-5}$ zijn. Bij berekeningen als deze houdt EMDEN geen rekening met eventueelen stralingsdruk. Zou men dit wel doen, dan moet ρ natuurlijk kleiner uitvallen evenals ook de gradient van ρ slapper zal zijn. Misschien is het echter toch niet overdreven, wanneer wij op een tienduizend K. M. beneden de fotosfeer aannemen: $\rho = 10^{-4}$.

Is verder $\mu = 10^{-3}$ dan wordt

$$e^{-\mu \rho \xi} < 10^{-16} \text{ voor } \xi > 4 \cdot 10^8$$

m. a. w. de straling afkomstig uit alle punten, gelegen buiten een bol met een straal van 4000 K. M. (= bijna $\frac{1}{200}$ zonstraal) om P, geven in P praktisch geen merkbare bijdrage aan straling meer. Binnen een dergelijken bol nu, mogen wij de besproken verwaarloozingen ongestraft begaan; terwijl wij verder ook nog in het oog moeten houden, dat hoe dieper wij in de zonnemassa doordringen hoe kleiner de grenswaarde voor ξ , d. i. de straal van den bedoelden bol, wordt, hoe beter de benadering dus geldig is.

Dat onze formule voor zéér kleine waarden van $\mu \rho$ niet langer geldig is, ziet men ook nog uit het volgende. Wanneer $\mu = 0$ — m. a. w. wanneer er geen absorptie plaats heeft — moet de stralingsdruk natuurlijk ophouden te bestaan, als wij ons n.l., zooals hier, op het standpunt stellen, dat hij uitsluitend door absorptie tot stand komt. De formule van FITZGERALD geeft dan ook

$$D = (1 - e^{-\mu \rho}) S = 0 \text{ voor } \mu = 0.$$

Maar volgens (40) zou de resulterende druk D_r niet tegelijk met μ verdwijnen, maar naderen tot

$$D_r = \frac{1}{3c} \frac{dS}{dr}$$

hetgeen natuurlijk onmogelijk is. Dit paradoxe resultaat is

uitsluitend toe te schrijven aan het feit, dat (40) voor dit extreme geval niet langer geldig is, daar de praemissen dan ophouden juist te zijn.

Nog een ander punt moet overwogen worden. Welke benadering mogen wij invoeren voor $1 - e^{-\mu \rho}$?

Het komt mij voor, dat het volgende veilig is: zolang

$$\mu \rho < 10^{-3} \text{ is } 1 - e^{-\mu \rho} = \mu \rho \text{ dus geldt (40')}. \quad \mu \rho > 30 \quad 1 - e^{-\mu \rho} = 1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (40'').$$

terwijl het voor tusschengelegen waarden gevaarlijk is een benadering te gebruiken.

De vraag ligt voor de hand: wat zijn de maximale waarden van $\mu \rho$, die nog kunnen voorkomen? Het antwoord hierop hangt nauw samen met deze andere vraag: aan welke gaswet gehoorzamen de gassen in het binnenste der zon?

De wet van BOYLE, die tot oneindig groote dichtheden moet leiden is, natuurlijk buitengesloten. Nemen wij als beste wet, die van v. d. WAALS aan, dan is ρ nog hoogstens 1, zooals zoowel theoretisch als experimenteel gevonden is. Met de waarde van EMDEN voor μ , is dan zelfs in de uiterste gevallen nog steeds $\mu \rho < 10^{-3}$ en geldt dus (40'). Maar zelfs bij grootere waarden van μ blijft het onwaarschijnlijk dat de benadering (40'') ooit van toepassing zou kunnen zijn.

Toch is zij niet nutteloos geweest, want wij zien er uit, dat, als de absorptie zeer groot wordt, de stralingsdruk *afneemt* ($\therefore \frac{1}{\mu^2 \rho^2}$) — een resultaat dat er op het eerste oog even paradox uitziet, als dat bij $\mu = 0$ $D_r = \frac{1}{3c} \frac{dS}{dr}$ zou zijn, maar dat ditmaal juist is en te danken aan het feit, dat het gebied der punten, van waaruit nog straling tot P doordringt, bij 't toenemen van μ zoo klein wordt, dat binnen dit gebied geen merkbare differentiatie tusschen 't deel links en 't deel rechts van P meer bestaat.

§ 8. *Het werk van EDDINGTON.*

Reeds meermalen waren wij in de gelegenheid het werk van EDDINGTON over ons onderwerp te citeeren. Het is hier

de geschikte plaats iets uitvoeriger op dit werk, dat te vinden is in M. N. 77 (1916—1917) p. 16 en p. 596 en A. J. 48 (1918) terug te komen. Ofschoon EDDINGTON ook in wezen tot onze formule (40') komt, zijn er in zijn artikel een aantal vaagheden, waarop het noodig is te wijzen, aangezien men anders misschien geneigd zou zijn te gaan denken, dat deze formule inderdaad regoureus juist is — als hoedanig EDDINGTON haar meent te mogen beschouwen. En toch is niets minder waar. De formule (40') is — zooals wij in de §§ 6 en 7 hebben gezien — slechts eene benadering

EDDINGTON beroept zich in zijn inleiding er op, dat hij bij het probleem in kwestie slechts zeer algemeen geldige natuurwetten zal mogen gebruiken — en als één ervan noemt hij dan (M. N. 77 p. 17) ... „the emissive and absorbing powers of a substance are equal...”, welke bewering dan ook even verder gebruikt wordt om de emissie van een volume element op te stellen. Het is absoluut onbegrijpelijk wat hij hiermee bedoeld heeft, tenzij dan de hypothese, dat, bij een toestand van stralingsevenwicht, door een elementje dat op een afstand r van het zonsmiddelpunt aflight, evenveel straling in een gegeven richting geëmitteerd wordt als het straling, uit die richting komend, absorbeert — maar dit is een vrij gewaagde *hypothese*, die zeker niet meer waar zal zijn, ver van 't middelpunt af, *in geen geval een natuurwet die „necessarily” waar is.*

Verder heerscht groote vaagheid over de grootheid k (de absorptiecoëfficiënt) M. N. 77 pag. 18 defineert k aldus: „Consider a small cylinder of matter of cross-section dS and with axis ds in direction Θ . The fraction of the radiation absorbed in this cylinder will be proportional to the density ρ and may be set equal to

$$k\rho ds,$$

where k is a coefficient of absorption and represents the absorption by a cylinder of unit mass and unit cross-section Assuming that each molecule absorbs independently of the others, it will make no difference whether the cylinder is long and of low density, or short and of high density.”

Zijn grootheid k is dus blijkbaar iets als in onze notatie:

$$1 - e^{-\mu}$$

een *breuk* dus. Maar eenige pagina's verder vinden wij dat $k = 6.2 \times 10^6$ is — welke waarde dan wel is waar „quite absurd” heet, maar vervangen wordt door „a more reasonable value of k , say 40.” EDDINGTON bedoelt hier nu schijnbaar iets als onze μ met k . Voor kleine waarden van μ , is inderdaad $1 - e^{-\mu} = \mu$ en mag voor de absorptie door een volume element $d\tau$ geschreven worden $\mu \rho d\tau$, voor groote geldt dit evenwel niet langer — het heeft dan ook geen zin van $k = 40$ te spreken bij de definitie, als boven aangehaald, waarbij k altijd een *breuk* moet zijn.

Wellicht is de afwijkende waarde van k — k opgevat als onze μ — welke EDDINGTON genoodzaakt is aan te nemen een gevolg van het in de formules gebruiken dezer twee verschillende beteekenissen van k .

De beschouwingen van § 12 p. 34—35 verliezen daardoor hun beteekenis. Toch moet nog even de aandacht er op gevestigd worden, dat EDDINGTON zich, blijkens 't daar gezegde, schijnt voor te stellen dat een gas ook *merkbaar* absorbeert in deelen van het spectrum, waar géén absorptielijnen voorkomen — hoe dit mogelijk is blijft een raadsel.

Dat ten slotte toch de gevonden formule overeenkomt met (40') moet gezocht worden in 't feit, dat EDDINGTON zijn redeneering toepast op sterren van zéér geringe dichtheid, waar de kleine waarde van ρ maakt, dat voor $\mu \rho$ desnoods ook $1 - e^{-\mu \rho}$ mag worden geschreven.

Dit verklaart verder ook ten deele hoe het komt, dat (40') als definitieve, niet als benaderde formule optreedt — maar hiertoe werkt wellicht nog een andere reden mede. EDDINGTON leidt de formule voor den stralingsdruk op een gas op de volgende manier af: (M. N. 11 p. 26).

„The pressure is simply a consequence of absorption or scattering. A beam of radiation carries a certain forward momentum, proportional to its intensity; after passing through a sheet of absorbing medium, a weaker beam emerges,

carrying proportionally less momentum; the difference of incident and emergent momentum is retained by the medium and constitutes the pressure....

In the present problem we have an energy $\pi A + \frac{1}{6} \pi B$ flowing outwards and $\pi A - \frac{1}{6} \pi B$ flowing inwards across unit surface, hence the net outward momentum absorbed is $c \frac{1}{6} \pi B k \rho d \xi$, where c is the factor relating the momentum and energy of a beam. Now the pressure on a black body is numerical equal to the density of the energy (assumed isotropic). The density of the energy at temperature T is $a T^4$, where a is the universal constant 7.06×10^{-15} . The outward flow of isotropic energy across unit surface is $\pi A = \pi \mu T^4$ and the outward flow of momentum is $c \cdot \pi \mu T^4$. Hence:

$$a T^4 = c \mu T^4$$

so that

$$c = \frac{a}{\pi \mu}$$

It follows that the force of radiation pressure on an element $d \xi$ is

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \frac{a}{\mu} B k \rho d \xi \\ &= \frac{1}{3} \frac{a}{\mu} d A \\ &= \frac{1}{3} a d (T^4). \end{aligned}$$

Tot zoover EDDINGTON. De afleiding is — afgezien van hetgeen reeds over k werd opgemerkt — zuiver, op één punt na. Mag, zonder meer, bij een *niet zwart lichaam* de stralingsdruk berekend worden als numerisch gelijk aan de energiedichtheid? Indien niet, dan is hij blijkbaar ook niet $\frac{1}{3} \frac{a}{\mu} B k \rho d \xi$ en moet een factor b toegevoegd worden om de afwijking van een zwart lichaam te verantwoorden. De factor zou dan bijv. zoo gekozen kunnen worden, dat aan de formule van FELZGEROLD voldaan wordt.

Nog een ander min of meer hypothetisch punt vormt de

vraag of wij de straling als *zwarte* straling mogen opvatten en de wet van STEFAN-BOLZMANN dus kunnen toepassen. Ofschoon dit in de buitenste deelen der zon allicht niet zal mogen, lijkt er geen bezwaar tegen deze wet in de binnenste deelen voorloopig aan te nemen.

De manier waarop EDDINGTON nu verder, uitgaande van bovengegeven formule — die geheel dezelfde is als onze formule (40') — zijn resultaten afleidt, is grondig bekritiseerd door J. H. JEANS M. N. LXXIX Mrt. 1919 p. 319—332. JEANS laat zien dat EDDINGTONS handelwijze niet geheel bevredigend is, maar dat zijn voornaamste resultaten ook bij andere, meer correcte behandeling blijven bestaan. Wij zullen hierop niet verder ingaan, waar deze onderzoeken toch geen direct verband houden met het doel van dit proefschrift: invloed van den stralingsdruk op de verschijnselen in de buitenste lagen der zon.

§ 9. *Uitbreiding der methode van R. EMDEN, door in de vergelijking het effect van den stralingsdruk op te nemen.*

De manier, waarop zoowel EDDINGTON als JEANS, na tot formule (40') gekomen te zijn, verder gaan, wijkt geheel af van de fraaie behandeling van EMDEN, die door ons in 't eerste hoofdstuk in het kort is uiteengezet. Dit moet waarschijnlijk voornamelijk geweten worden aan het feit, dat bij invoering van den stralingsdruk het niet goed mogelijk blijkt de vergelijking te discussieeren, zoolang niet een bepaald polytroop evenwicht — n.l. dat waarbij $n = 3$ ($k = \frac{4}{3}$) is — wordt aangenomen, (immers hierop komt EDDINGTONS hypothese: $g : H = \text{const.}$ neer, zooals JEANS¹⁾ heeft laten zien) terwijl men in dit speciale geval ook anders kan te werk gaan.

Toch lijkt het mij van belang om de behandeling van EMDEN, voor zoover zulks mogelijk blijft, te herhalen voor 't geval wij den stralingsdruk, zooals deze door (40') gegeven wordt, meenemen, daar deze behandeling duidelijker inzicht geeft in de thermodynamica van 't probleem. Daarom moge zij hier kortelijk volgen.

¹⁾ l.c.

In plaats van de vergelijking (9) uit hoofdstuk I moet, als wij rekening met den stralingsdruk willen houden, blijkbaar komen:

$$dp + D_r dr = \rho g dr \quad (41)$$

Indien wij ons zoo diep binnen de zon bevinden, dat wij de straling als zwarte straling mogen beschouwen, is volgens de formule van STEFAN—BOLZMANN

$$\frac{S}{c} = \gamma T^4 \quad (42)$$

en dus volgens (40¹)

$$D_r = \frac{4\gamma}{3} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (43)$$

Dit invoerend komt er

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho r'^2 dr' - \frac{4\gamma}{3} \cdot \frac{1}{\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (44)$$

Het lijkt misschien op het eerste gezicht vreemd, dat beide termen van het rechterlid hetzelfde teeken vertoonen, terwijl zij elkaar toch moeten tegenwerken, maar dit begrijpt men, als men bedenkt, dat de temperatuur van de zon van binnen naar buiten afneemt en dat $\frac{dT}{dr}$ dus essentieel negatief is, zoodat de beide termen inderdaad elkaar tegenwerken.

Wanneer wij in (44) de in § 4 gedefinieerde variabelen en notaties invoeren — zie vergel. (16) (17) en (18), — gaat zij over in:

$$\frac{k}{k-1} H \Theta_k \frac{du}{dr} = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r u^n r'^2 dr' - \frac{4\gamma \Theta_k^4 u^{3-n}}{3} \frac{du}{dr} \quad (45)$$

Stel hierin:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi G}{\frac{k}{k-1} H \Theta_k} &= \alpha^2 \\ \frac{4\gamma \Theta_k^4}{\frac{k}{k-1} \cdot 3 H} &= \beta^2 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

dan kan (45) geschreven worden:

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 (1 + \beta^2 u^{3-n}) \frac{du}{dr} \right] + \alpha^2 r^2 u^n = 0 \quad (47)$$

Dit is de gewenschte differentiaalvergelijking, die overeenkomt met de door EMDEN gegeven vergel. (15), die te schrijven is:

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{du}{dr} \right] + \alpha^2 r^2 u^n = 0 \quad (48)$$

Het effect van den stralingsdruk wordt blijkbaar uitgedrukt door den term

$$\beta^2 \frac{d}{dr} \left(r^2 u^{3-n} \frac{du}{dr} \right)$$

Vergelijking (47) is veel ingewikkelder dan de toch al niet eenvoudige vergelijking van EMDEN. Zij kan niet in gesloten vorm geïntegreerd worden, behalve voor het bijzondere geval dat $n=0$ waardoor zij overgaat in:

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 (1 + \beta^2 u^3) \frac{du}{dr} \right] + \alpha^2 r^2 = 0 \quad (49)$$

waarvan de integraal is:

$$u + \frac{1}{4} \beta^2 u^4 = -\frac{\alpha^2 r^2}{6} + \frac{C_1}{r} + C_2 \quad 49^*$$

dus, op den term $\frac{1}{4} \beta^2 u^4$ na, dezelfde als (19).

$n=0$ beteekent echter $\rho = \text{const.}$ — een geval dat ons op het moment niet verder interesseert.

In geval $n = \infty$ krijgen wij een ander extreem geval, n.l. een isothermen gasbol. De vergelijking heeft dan geen zin meer aangezien in een *isothermen* gasbol geen sprake kan zijn van stralingsdruk.

Ten slotte is er nog een belangrijk geval n.l. $n=3$.

Dan toch geldt:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \frac{\alpha^2}{1 + \beta^2} r^2 u^3 = 0 \quad (50)$$

m. a. w. (47) is overgegaan in een vergelijking van EMDEN waarin α^2 door $\frac{\alpha^2}{1 + \beta^2}$ is vervangen.

Dit polytroop evenwicht, dat een zeer bijzondere rol speelt ¹⁾, noemt EMDEN *het kosmogonetisch evenwicht*. Voor alle andere waarden van n zal men zijn toevlucht moeten nemen tot mechanische kwadratuur. Daarbij valt te betreuren, dat de transformatie, die tot (22) leidde, hier spaak loopt. Wel kunnen wij de vergelijking reduceeren tot een waarin $\alpha^2 = 1$ door te stellen:

$$r_1 = \alpha r$$

hetgeen n.l. geeft:

$$\frac{d}{dr_1} \left[r_1^2 \frac{du}{dr_1} (1 + \beta^2 u^{3-n}) \right] + r^2 u^n = 0.$$

De transformatie, waardoor $u = u_0$ overgaat in $u_1 = 1$, loopt hier echter vast op den term $\beta^2 u^{3-n}$. Het rekenwerk bij mechanische kwadratuur der vergelijking wordt hierdoor bovenmatig vergroot.

§ 10. *Opstelling der differentiaalvergelijking voor gassen, die de wet van BOYLE niet volgen.*

In de vorige § werd aangenomen, dat de zonnegassen zich zouden gedragen als ideale gassen. Dit zal zeker opgaan in de buitenste deelen der zon, waar de dichtheid nog gering is, maar hoe dieper wij de zon binnendringen, hoe grooter de afwijkingen van de wet van BOYLE-GAY-LUSSAC zullen worden en wij kunnen er zeker van zijn, dat reeds op tamelijk geringe diepte de waarden van p , ρ en T , die uit onze vergelijking (49) volgen, sterk van de werkelijkheid afwijken.

Ten einde een betere overeenstemming te bereiken moeten wij, in plaats van de wet van BOYLE, een andere toestandsvergelijking aan onze berekeningen ten grondslag leggen.

Verreweg het fraaist zou het zijn, indien het mogelijk bleek hiervoor de wet van VAN DER WAALS te kiezen. Deze is daartoe echter veel te gecompliceerd en wij zullen ons tevreden moeten stellen met als 1^{ste} benadering te nemen:

¹⁾ Zie JEANS, M. N. 79 (1919) p. 320; EMDEN *Gaskugeln* (1907). p. 18 20, 74, 118.

$$\text{of} \quad \left. \begin{aligned} p (v - v_m) &= H T \\ p \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m} \right) &= H T \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

In deze vergelijking wordt dus rekening gehouden met het feit, dat de dichtheid van het gas door comprimeeren niet boven een zekere grens (ρ_m) kan komen, terwijl afgezien wordt van den correctieterm voor p , die nog in de wet van v. D. WAALS voorkomt.

Hiermee is in overeenstemming, dat wij blijven onderstellen, dat de relatie:

$$c_p - c_v = A H \quad (54)$$

geldig is (d.i. dat c_v onafhankelijk is van T); immers als de wet van v. D. WAALS

$$\left(p - \frac{a}{v^2} \right) (v - v_m) = H T \quad (55)$$

geldt, is:

$$c_p - c_v = A H \left[1 - \frac{2a}{v^3} \frac{(v - v_m)^2}{A H T} \right]^{-1} \quad (56)$$

Uit het nul stellen van a volgen dus tegelijkertijd (53) en (54).

De relaties (2) worden nu echter vervangen door:

$$(v - v_m) dp + H dT + p dv = 0$$

en zoo gaat (5) over in

$$dQ = c_v dT + A H T \frac{dv}{v - v_m} \quad (58)$$

of als wij andere variabelen invoeren en gebruikmaken van (54)

$$dQ = c_p dT + A (v - v_m) dp = c_p dT + A H \frac{dp}{p} \quad (59)$$

Uit deze vergelijking volgt voor de vergelijking van een polytroop een der vormen;

$$\left. \begin{aligned} T (v - v_m)^{k-1} &= \text{const.} \\ T^k p^{1-k} &= \text{const.} \\ p (v - v_m)^{k-1} &= \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (60).$$

Wanneer $T_1 p_1 v_1 (\rho_1)$ bij elkaar passende waarden der groot-heden $T p v (\rho)$ zijn, kunnen wij de vergelijking van een poly-troop dus schrijven:

$$T \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m} \right)^{k-1} = T_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_m} \right)^{k-1} \quad (61)$$

of

$$T = T_1 \left(\frac{\rho_m - \rho_1}{\rho_1} \right)^{k-1} \left(\frac{\rho}{\rho_m - \rho} \right)^{k-1} \quad (62)$$

Zij de temperatuur waarbij

$$\rho = \frac{1}{2} \rho_m \quad (63)$$

is geworden P_k , dan is, volgens (62),

$$P_k = T_1 \frac{(\rho_m - \rho_1)^{k-1}}{\rho_1} \quad (64)$$

m. a. w. een grootheid, die karakteristiek is voor een bepaal-den polytroop van een gegeven gas, dus vergelijkbaar met de door (7) gedefinieerde polytrope temperatuur. Met behulp van P_k kunnen wij nu schrijven:

$$T = P_k \left(\frac{1}{\rho_m} \right)^{k-1} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m} \right)^{1-k} \quad (65)$$

Stel nog:

$$\Pi^k = \frac{P_k}{\rho_m^{k-1}} = T_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_m} \right)^{k-1} \quad (66)$$

dan wordt

$$T = \Pi_k \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m} \right)^{1-k} \quad (67)$$

De grootheid Π_k — constant voor een gegeven polytroop — zullen wij „*gewyzigde polytrope temperatuur*” noemen.

Stel verder:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m} \right)^{1-k} &= w \\ \frac{1}{1-k} &= n \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

dan komen wij tot een stelsel eenvoudige betrekkingen, die groote overeenkomst vertoonen met de oude vergelijkingen (18)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_m} \right) &= w^{-n} \\ T &= \Pi_k w \\ \rho &= H \Pi_k w^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Zonder moeite vindt men ten slotte:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} &= \frac{k}{k-1} H \Pi_k \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right) \frac{dw}{dr} \\ \text{of} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} &= \frac{k}{k-1} H \Pi_k \left(\frac{1}{1 + \frac{\rho}{\rho_m}} \right) \frac{dw}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

en

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_m} + w^{-n}$$

of

$$\rho = \left(1 + \frac{w^{n+1}}{\rho_m} \right) \cdot w^n$$

Een en ander substitueerend in de formules voor g en D_r krijgen wij:

$$g = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho r^2 dr = - \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right)^{-1} w^n r^2 dr$$

$$D_r = \frac{4\gamma \Pi_k^4}{3} \cdot \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right)^2 \cdot w^{3-n} \frac{dw}{dr}$$

zoodat onze welbekende differentiaalvergelijking:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -g - D_r$$

overgaat in:

$$\begin{aligned} \frac{k}{k-1} H \Pi_k \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right) \frac{dw}{dr} &= - \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right)^{-1} w^n r^2 dr - \\ &\quad - \frac{4\gamma \Pi_k^4}{3} \cdot \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right)^2 w^{3-n} \frac{dw}{dr} \end{aligned}$$

of als men stelt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4 \pi G}{k} &= A^2 \\ \frac{H \Pi_k}{k-1} & \\ \frac{4 \gamma \Pi_k^3}{k} &= B^2 \\ \frac{3 H}{k-1} & \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

wordt de gezochte differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dw}{dr} \left(\left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right) + B^2 \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right)^2 w^{3-n} \right) \right] + \\ + A^2 \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right)^{-1} w^n r^2 = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

Deze vergelijking neemt dus de plaats in van (15). Zij is heel wat ingewikkelder gebouwd! Aan integreeren of zelfs maar aan mechanisch kwadrateren valt niet te denken.

Maar als wij in het oog houden dat:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{w^n}{\rho_m} &= \frac{\rho_m}{\rho_m - \rho} \\ \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m} \right) w^{-n} &= \frac{1}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

kunnen wij uit (72) twee benaderde vergelijkingen afleiden, waarvan de een zal gelden voor de buitenste lagen van de zon, waar ρ nog veel van ρ_m verschilt, de ander juist voor de binnenste lagen, waar ρ nagenoeg gelijk aan ρ_m is geworden.

Inderdaad, zoolang $\rho < \rho_m$ zien wij uit de 1^{ste} der vergelijkingen (73) dat nagenoeg

$$\frac{w^n}{\rho_m} = 0$$

zoodat (72) overgaat in:

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dw}{dr} (1 + B^2 w^{3-n}) \right] + A^2 w^n r^2 = 0 \quad (72a)$$

hetgeen niets anders is dan vergelijking (47), maar met gewijzigde constanten. Dit was te verwachten, want in de

buitensche lagen zijn de afwijkingen der gassen van de wet v. BOYLE nog zoo gering, dat wij er vanaf mogen zien, wat mathematisch uitgedrukt is door het verwaarloozen van ρ_m^{-1} tegenover ρ^{-1} .

Alles wat voor (49) is gezegd geldt dus zonder meer ook voor (72a).

Wanneer wij ons daarentegen ver binnen de zonnemassa bevinden, is door de enorme toename van den druk ook ρ sterk toegenomen en vergelijkbaar met ρ_m geworden. Dan mogen wij voor de tweede vergelijking (73) wel schrijven

$$\left(1 + \frac{w^n}{\rho_m}\right) w^{-n} = \frac{1}{\rho_m}$$

waardoor (72) verandert in:

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dw}{dr} \left\{ \left(1 + \frac{w^n}{\rho_m}\right) + \frac{B^2}{\rho_m^2} w^3 \right\} \right] + A^2 \rho_m r^2 = 0 \quad (72b)$$

Deze vergelijking is te integreeren en geeft:

$$w + \frac{w^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{\rho_m} + \frac{B^2}{4} w^4 \cdot \frac{1}{\rho_m} = - \frac{A^2 r^2}{6} \cdot \rho_m + \frac{C_1}{r^3} + C^2 \quad (74)$$

hetgeen, zooals te verwachten was, groote overeenkomst toont met den integraal van de oude differentiaalvergelijking voor het geval $n=0$ (constante dichtheid).

Daar natuurlijk $\frac{dw}{dr} = 0$ voor $r=0$ is in (74) $C_1 = 0$ terwijl C_2 afhangt van de waarde van w voor $r=0$.

Door vele onderzoekers ¹⁾ wordt aangenomen, dat ρ op eenigen afstand onder de fotosfeer reeds vrij spoedig tot de maximale waarde nadert. Wat hiervan ook zij — 't lijkt zeer aannemelijk dat op afstanden van $\pm \frac{1}{5}$ zonstraal (140000 K M) beneden de schijnbare oppervlakte deze toestand bestaat. Daar en in diepere lagen zou dan (74) — of, wat praktisch op 't zelfde neerkomt, (49) — moeten gelden.

Voor de lagen waar ρ nog tamelijk ver van ρ_m verwijderd

¹⁾ O.a. VÉRONNET C. R. 165 (1917) p. 1055.

BÉLOT C. R. 167 (1918) p. 573.

is, maar nog niet zoo klein, dat de formules ongeldig worden, zou men aan den anderen kant met (72a) of, als men $\frac{1}{\rho_m}$ ver-
 waarloost t.o. van $\frac{1}{\rho}$ met (50), moeten werken.

§ 11. Voorbeeld.

Om duidelijk te maken op welke manier de stralingsdruk de uitkomsten van de eenvoudige theorie van EMDEN wijzigt, willen wij ons afvragen, hoe in de lagen waar (50) — sc. (74) — geldig is de gradienten aan ρ en T zijn.

Uit de formules (A) en (C) van p. 21 volgt gemakkelijk dat voor een gasbol, voldoende aan de vergelijking v. EMDEN

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dr} &= \alpha U^{\frac{3n-1}{2}} \frac{du_1^n}{dr_1} \\ \frac{dT}{dr} &= \alpha U^{\frac{n+1}{2}} \Theta_k \frac{du_1}{dv_1} \end{aligned} \right\}$$

Bevinden wij ons in het geval $n=3$, dan blijft alles eender alleen wordt α^2 vervangen door $\frac{\alpha^2}{1+\beta^2}$, dus

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_S &= \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_E \\ \left(\frac{dT}{dr}\right)_S &= \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \left(\frac{dT}{dr}\right)_E \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

als de index S betrekking heeft op 't geval dat wij den stralingsdruk in rekening brengen, E 't geval van EMDEN. De invloed van den stralingsdruk is dus hier 't slapper maken der gradiënten.

Het is van belang na te gaan van welke orde van grootheid $\sqrt{1+\beta^2}$ wordt.

Daartoe herinneren wij ons dat volgens (46)

$$\beta^2 = \frac{4\gamma\Theta_k^3}{k} \cdot \frac{1}{k-1} \cdot 3H$$

Voor het geval $n=3$, volgt, als wij acht geven op (G) (pag. 23)

$$\beta^2 = \frac{\pi \gamma G^3 M^2}{48 H^4 \left(r_1 \frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0}}$$

Nu is:

$$\gamma = 7,6 \cdot 10^{-15}$$

$$G = 6.6576 \cdot 10^{-8}$$

$$H = \frac{8,3 \cdot 10^7}{m}$$

(m = moleculair gewicht) terwijl voor $n=3$ uit tab. 7¹⁾ p. 80 van GASKUGELN gevonden wordt:

$$r_1 = 6.9011$$

$$u_1 = 0$$

$$\left(\frac{du_1}{dr_1} \right)_{u_1=0} = 0.04231.$$

Substitueert men deze waarden, dan blijkt dat bij $m=3$, een onderstelling, die ook door EDDINGTON en JEANS voor zeer waarschijnlijk wordt gehouden:

$$\beta^2 = 1,8 \cdot 10^{-66} M^2$$

Voor de zon is $M = 2 \cdot 10^{33}$, dus $\beta^2 = 7 \pm$, zoodat $\frac{d\rho}{dr}$ en $\frac{dT}{dr}$ ongeveer driemaal kleiner worden dan uit de theorie van EMDEN zonder op stralingsdruk te letten zou volgen. Voor massa's die groter zijn dan de zon wordt β^2 al spoedig zéér groot — het effect op *giant stars* is dus zéér appreciabel; voor massa's kleiner dan onze zon — *dwarfstars* — daarentegen is β^2 klein, stralingsdruk heeft hier geen of weinig effect, tenzij de kleinere massa weer gecompenseerd wordt door groter gemiddeld moleculair gewicht. Een ster met $100 \times$ kleinere massa, maar $10 \times$ groter moleculair gewicht als onze zon zou n.l. even sterke stralingsdruk ondergaan als deze, zooals onmiddellijk uit de formule voor β^2 volgt.

Ten slotte zij er met nadruk op gewezen dat het door ons

¹⁾ D.i. onze tabel I.

behandelde geval $n = 3$ (kosmogonetisch evenwicht) een uitzonderingsgeval is, daar de *dichtheid* van de ster uit de vergelijking voor β^2 is weggevallen (zie JEANS l.c.).

Groote verschillen zijn evenwel bij *naburige* waarden van n niet te verwachten, terwijl uit de behandeling van JEANS valt op te maken, dat de algemeene conclusies geldig blijven.

Deze zijn: Bij sterren met een massa als van onze zon en een gemiddeld moleculair gewicht van ± 3 — of algemeener bij sterren waarvoor 't product M^2m^4 van de orde $3 \cdot 10^{68}$ is — doet zich een merkbaar effect van den stralingsdruk gevoelen, dat zich o.a. hierin openbaart dat temperatuur — druk — en dichtheidsgradiënt drie à viermaal kleiner zijn dan anders 't geval zou zijn.

Bij „giants” is dit effect nog veel sterker uitgesproken, bij „dwarfs” is het vrijwel onmerkbaar.

Men vergete echter vooral niet, dat al hetgeen tot dusver besproken werd, betrekking heeft op reeds zéér diep gelegen lagen van de zon en werd afgeleid onder de, voor de zon zeer zeker niet geldige hypothese, dat de beschouwde gasmassa uitsluitend absorbeërend niet verstrooieënd werkt.

Voor de lagen der zon, die voor onze waarnemingen toegankelijk zijn, gelden de gevonden resultaten dus niet. Met deze lagen zullen wij ons in het volgend hoofdstuk hebben bezig te houden.

HOOFDSTUK III.

§ 12. *Stralingsdruk in een verstrooiende gasmassa.*

Nadat wij de consequenties der formules (40), (40') en (40'') voor den thermodynamischen bouw van een gasbol nagegaan hebben rest nog de afleiding eener formule voor den stralingsdruk binnen een gasmassa, waarin de straling sterke *moleculaire diffusie* en *onregelmatige breking* ondergaat.

Een behandeling als in § 6 zou tot absoluut verkeerde voorstellingen leiden, want de fundamenteele veronderstelling, waarop de geheele methode ten slotte berustte, dat n.l. een *gegeven elementje $d\tau$ naar alle kanten evenveel straalt*, houdt op geldig te zijn; terwijl ook niet langer een oorspronkelijk evenwijdige bundel zich evenwijdig zal voortplanten.

Straling, die 't punt P bereikt onder een hoek ϕ met den straal PM (zie figuur), is niet langer uitsluitend afkomstig van de punten, die op de lijn PP' gelegen zijn, maar ook voor 'n deel van de punten Q, R, S...

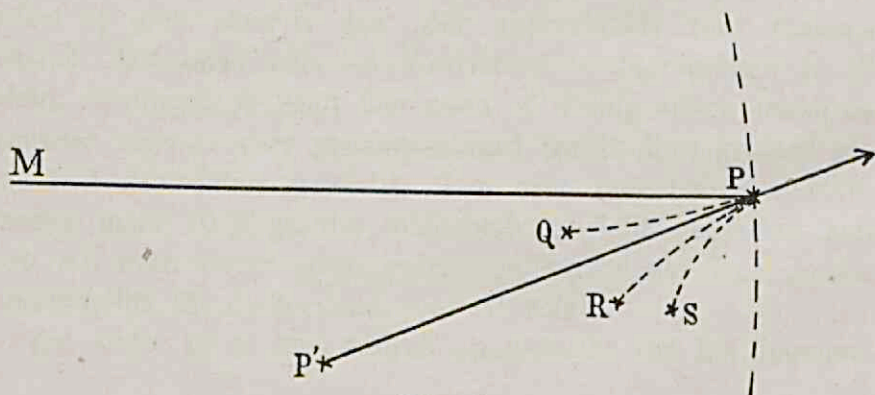


Fig. 1.

Noemen wij de intensiteit der totale straling, die P, 'n punt van de fotosfeer, bereikt onder zekeren hoek ϕ $f(\phi)$, dan wordt de intensiteit der straling, die den stralingsdruk per massa eenheid in radialen zin bepaalt, gegeven door:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\phi) \cos \phi \, d\phi \, d\omega$$

Hierbij heeft $f(\phi)$ betrekking op de totale bestraling voor alle golflengten te samen en moet aan empirische gegevens ontleend worden, bijv. aan de waarnemingen van FROST¹⁾, of aan de eclipswaarnemingen van W. H. JULIUS²⁾.

Met vrij groote benadering laten deze gegevens zich voorstellen door de empirische formule:

$$f(\phi) = (0,4 + 0,6 \cos \phi) f(0) \quad (77)$$

Naarmate men dieper komt zal $f(\phi)$ veranderen, doch als men niet *te* diep doordringt niet sterk! Hoe $f(0, h)$ afhangt van h (wanneer h voorstelt de diepte beneden het niveau der schijnbare zonneoppervlakte) zou af te leiden zijn uit de theorie van SPIJKERBOER³⁾ toegepast op het materiaal van ABBOT⁴⁾. Voor het bepalen van den *stralingsdruk* kan men echter — zoo men zich tot de buitenste lagen beperkt — volstaan met de kennis van $f(0,0)$, want zoóveel straling moet in den stationairen toestand, waarin wij ons de buitenste lagen denken, tenslotte door *elk* niveauvlak naar buiten treden.

Wil men desnoods de afname van den straal, dus van 't boloppervlak bij 't dieper binnendringen in de zon nog in rekening brengen, dan zou men, $f(0,0)$ aan de schijnbare

¹⁾ E. B. FROST, A. N. 130 p. 129 (1892).

²⁾ W. H. JULIUS, Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. 14, 465 (1905); 21, 1499 (1913).

³⁾ J. SPIJKERBOER, «Verstrooiing v. licht etc.» Akad. Proefschr. (Utrecht) (1917) p. 44.

⁴⁾ C. G. ABBOT, Ann. of the Smith. Inst. 2, 205 (1908), 3, 153 (1913).

zonneoppervlakte als gegeven beschouwend, mogen nemen op een *kleinen* afstand h beneden dat niveau:

$$f(0,h) = \left(\frac{R}{R-h}\right)^2 f(0,0) \quad (78)$$

als R de straal van de zon voorstelt.

Op deze wijze zal de som van de radiale componenten der straling, die een volume element, gelegen op een kleinen afstand h onder de fotosfeer, ontvangt, gegeven worden door:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\phi) \cos \phi \, d\phi \, d\omega &= 2\pi f(0,0) \left(\frac{R}{R-h}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (0,4 \cos \phi + 0,6 \cos^2 \phi) \, d\phi \\ &= 2\pi \left(\frac{R}{R-h}\right)^2 f(0,0) \left(0,4 + 0,6 \times \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 5,474 \left(\frac{R}{R-h}\right)^2 f(0,0) \end{aligned} \quad (79)$$

waarbij dan $f(0,0)$ nog moet bepaald worden (zie § 14).

Voor de geheele beschouwing is blijkbaar essentieel dat wij ons de op elkaar volgende lagen in een toestand van stralingsevenwicht denken en de bronnen der zonneenergie gelegen in het inwendige der zon, dieper dan de door ons beschouwde lagen — alleen dan is veroorloofd aan te nemen, dat door ieder niveaувlak evenveel stralingsenergie naar buiten treedt.

Tot dusver hebben wij er ons niet over uitgelaten of wij ons den stralingsdruk tot stand gebracht denken door een *algemeene* absorptie of door *selectieve* absorptie, zooals bijv. in de formule van DEBYE voor dipolen is verondersteld. Inderdaad heeft dit op het voorgaande ook geen invloed. Wellicht zou men geneigd zijn te meenen dat door absorptie stralingsenergie als zoodanig verloren raakt — maar de opgenomen energie moet tenslotte toch in den een of anderen vorm weer afgestaan worden, zoodat wij mogelijk wél met 'n transformatie van stralingssoorten te maken hebben maar niet met een vernietiging ervan. Weliswaar zou de

opgenomen straling misschien in chemisch of electrisch arbeidsvermogen kunnen omgezet worden, maar zoolang wij daaromtrent geen stellige aanduidingen vinden, mogen wij deze mogelijkheden wel terzijde stellen.

Indien wij nu verder met de formule van DEBYE willen werken, zooals met het oog op de geringe dichtheid, die vermoedelijk in de grenslagen heerscht, gewenscht lijkt, moeten wij onze formules nog eenigszins wijzigen, aangezien in de bedoelde formule van DEBYE de stralingsdruk afhankelijk is van de straling met golflengte λ_0 , als λ_0 de eigengolflengte van den dipool voorstelt. Inplaats van onze $f(\phi, h)$, die voor alle golflengten te samen gold, treedt nu een overeenkomstige grootheid op voor elke λ , die wij ter onderscheiding zullen noteeren: $S_\lambda(\phi, h)$.

Het blijkt ook nu mogelijk $S_\lambda(\phi, 0)$ tamelijk nauwkeurig uit te drukken in $S_\lambda(0, 0)$ door een formule van de gedaante

$$S_\lambda(\phi, 0) = (a_\lambda + b_\lambda \cos \phi) S_\lambda(0, 0) \quad (80)$$

terwijl $S_\lambda(\phi, 0)$ te vinden is uit de getallen van ABBOT¹⁾, die in tabel II zijn afgedrukt.

De totale straling in radiale richting, die den stralingsdruk op de massa eenheid in P bepaalt (de grootheid, die min of meer analoog is met de H van pag. 26 dus) wordt derhalve gegeven door de formule:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda_i} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} S_{\lambda_i}(\phi, h) \cos \phi \, d\phi \, d\omega = \\ & = \sum_{\lambda_i} 2\pi \left(\frac{R}{R-h} \right)^2 S_{\lambda_i}(0, 0) \left[a_{\lambda_i} + b_{\lambda_i} \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (81)$$

waarin $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_i \dots$ de golflengten der spectraallijnen van een gegeven element voorstellen.

De stralingsdruk $D_r(h)$ wordt dan:

$$D_r(h) = \frac{3}{2} \frac{\sigma}{c} \left(\frac{R}{R-h} \right)^2 \sum_{i=0}^n \lambda_i^3 \left(a_{\lambda_i} + \frac{1}{4} \pi b_{\lambda_i} \right) S_{\lambda_i}(0, 0) \quad (82)$$

of aan de fotosfeer:

$$D_r(0) = \frac{3}{2} \frac{\sigma}{c} \sum_{i=0}^n \lambda_i^3 \left(a_{\lambda_i} + \frac{1}{4} \pi b_{\lambda_i} \right) S_{\lambda_i}(0, 0) \quad (82^*)$$

¹⁾ l. c.

§ 13. *Voorstelling der getallen van ABBOT door een eenvoudige empirische formule.*

In het voorgaande werd gezegd, dat met genoegzame nauwkeurigheid

$$S_{\lambda}(\phi, 0) = (a_{\lambda} + b_{\lambda} \cos \phi) S_{\lambda}(0, 0).$$

Hierop moeten wij nu iets verder ingaan en tevens de waarden van a_{λ} en b_{λ} bepalen.

Daartoe construeeren wij rechte lijnen, die zich zoo goed mogelijk aansluiten bij de punten, verkregen door in een rechthoekig assensysteem de waarden van $S_{\lambda}(\phi, 0)$ als ordinaat bij $\cos \phi$ als abscis af te zetten.

Elke waarde van λ geeft een rechte lijn:

$$S_{\lambda}(\phi, 0) = c_{\lambda} + d_{\lambda} \cos \phi.$$

Hierbij hangen c_{λ} en d_{λ} nog af van de waarde $S_{\lambda}(0, 0)$. Om ons hiervan onafhankelijk te maken, stellen wij $S_{\lambda}(0, 0) = 1$ d. i. nemen aan dat

$$c_{\lambda} + d_{\lambda} = 1.$$

De zóó bepaalde waarden van c_{λ} en d_{λ} noemen wij a_{λ} en b_{λ} . De uitvoering van dit programma gaf de waarden, die in tabel III vereenigd zijn en geheel overeenstemmen met de op dergelijke wijze door A. DEFANT ¹⁾ bepaalde getallen.

De beteekenis hiervan is dus dat bijv. voor $\lambda = 0,501 \mu$.

$$S_{\lambda}(\phi, 0) = (0,32 + 0,68 \cos \phi) S_{\lambda}(0, 0)$$

Wat de geldigheid der formules betreft nog dit: tot voor $\cos \phi = 0.5$ is de benadering zeer goed; voor grootere waarden komen er afwijkingen, maar voor ons doel mogen wij er zeker tevreden mee zijn, daar wij voor den stralingsdruk toch geen absoluut juiste waarden kunnen verwachten en dus genoegzamen mogen nemen met waarden, die, althans wat orde van grootheid betreft, niet al te zeer afwijken van de waarheid. Bovendien wordt tot den totalen stralingsdruk, op een bepaald element ongetwijfeld *verre weg het grootste gedeelte* bijgedragen door straling uit richtingen voor welke $\cos \phi < 0.5$ is.

¹⁾ A. DEFANT, Ueber Absorption etc. Sitz. Ber. Wien. Akad. 125 IIa (1916) p. 502.

Uit de in tabel III gegeven waarden van a_λ en b_λ werden verder grafisch de in tabel IV bijeengebrachte waarden van a_λ en b_λ bepaald.

§ 14. *Bepaling van de absolute waarde van $f(0,0)$ en $S_\lambda(0,0)$.*
 Uit het bedrag van de zonneconstante valt af te leiden hoeveel straling aan de oppervlakte van de zon per secunde in alle richtingen door 1 cm^2 gaat. Deze grootheid, $\Sigma(0)$, wordt blijkbaar uitgedrukt door:

$$\Sigma(0) = \text{zonneconstante} \times \frac{1}{60} \times \frac{R^2}{r^2}$$

als R = zonsafstand, r = zonsstraal is. In getalwaarde vindt men:

$$\Sigma(0) = 6,5 \cdot 10^{10} \text{ erg/sec.}$$

In § 12 zagen wij dat, om de formule van DEBYE voor den stralingsdruk op een dipool te kunnen toepassen, in het geval dat aan de oppervlakte van de zon zich één atoom met n dipolen bevindt, bekend moet zijn de intensiteit, $S_\lambda(0,0)$, der straling, die in *radialen* zin aan de oppervlakte wordt uitgezonden (zie formule (82)).

Deze grootheid zullen wij afleiden uit de *totale radiale straling* $f(0,0)$ van alle golflengten te samen, die op haar beurt eerst weer ontleend dient te worden aan de waarde $\Sigma(0)$.

Den laatst genoemden samenhang vinden wij als volgt:

Binnen een elementair lichaamshoekje $d\Omega$ is de *radiale* straling $f(0,0) d\Omega$; de straling onder een hoek ϕ met den straal is: $f(\phi, 0) d\Omega$, als beide geacht worden uit te gaan van 1 cm^2 , loodrechtstaande op de gekozen richting.

De functie $f(\phi, 0)$ is bekend en kan worden voorgesteld door:

$$f(\phi, 0) = (0,4 + 0,6 \cos \phi) f(0,0) \quad (\text{zie (77)})$$

Als wij thans $\Sigma(0)$ willen opbouwen uit al de verschillend gerichte bundels, moet bedacht worden, dat onze 1 cm^2 zonneoppervlakte in richting ϕ slechts een bundel geeft van doorsnede $\cos \phi \text{ cm}^2$ en dus, binnen een elementairen lichaamshoek $d\Omega = d\phi d\omega \sin \phi$, een bijdrage levert:

$$f(\phi, 0) d\phi d\omega \sin \phi \cos \phi.$$

Substitutie hiervan en integratie over alle waarden van ϕ en ω geeft

$$\begin{aligned}\Sigma(0) &= f(0,0) \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (0,4 + 0,6 \cos \phi) \sin \phi \cos \phi \, d\phi \, d\omega \\ &= 0,8 \cdot \pi \cdot f(0,0)\end{aligned}$$

In verband met de reeds bovengevonden waarde van $\Sigma(0)$ volgt hieruit:

$$f(0,0) = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ erg/sec.}$$

Uit deze nu bekende absolute waarde van $f(0,0)$ moet verder die van $S_\lambda(0,0)$ afgeleid worden.

Herinneren wij ons daartoe dat:

$$f(0,0) = \int_0^\infty S_\lambda(0,0) \, d\lambda$$

m.a.w. $f(0,0)$ kan opgevat worden als inhoud van de kromme, die $S_\lambda(0,0)$ als functie van λ voorstelt.

De getallen van ABBOT (tabel III) stellen ons in staat deze kromme in willekeurige eenheden te teekenen op mm. papier. Hiertoe stelde ik een abscis, die in absolute maat 0,0001 cm was, voor door 'n lijntje van 20 cm (schaal $2 \cdot 10^5$ à 1 dus), een ordinaat van 1 dyne (de grootheid $S_\lambda(0,0)$ wordt n.l. in dynes gemeten) door een lijntje van n cm, waarbij n voorloopig onbekend is. Zij de inhoud van de zoo geteekende figuur $O \text{ cm}^2$, dan is duidelijk dat nu n te vinden is uit de betrekking:

$$\bar{O} = O \cdot \frac{n}{2 \cdot 10^5}$$

waarin $\bar{O}$ = de absolute waarde (in ergen) van den inhoud voorstelt.

Deze bepaling gaf: $O = 284,4$; wij weten reeds dat $\bar{O} = 2,6 \cdot 10^{10}$ en vinden daarmee

$$n = 1,83 \cdot 10^{13}$$

Om nu de waarde van S_λ in dynes te vinden behoeven wij slechts de in cm. gemeten ordinaten y_λ te vermenigvuldigen met n , dus:

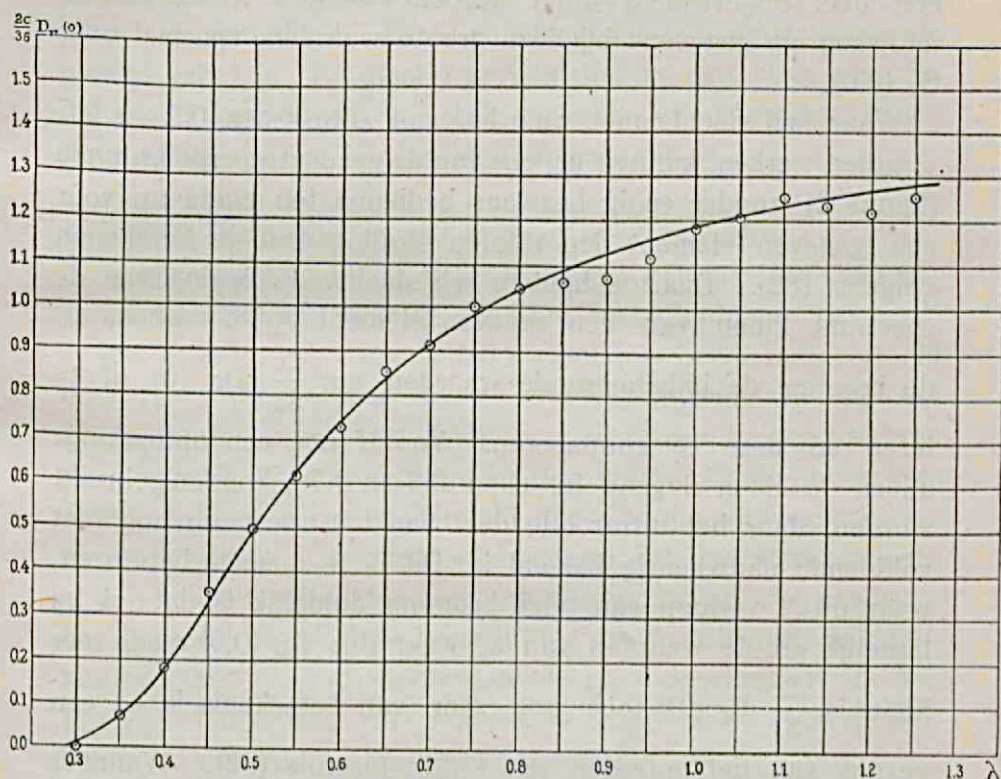
$$S_{\lambda}(0,0) = n \cdot y_{\lambda} = 1,83 \cdot 10^{13} y_{\lambda}.$$

Uitvoering hiervan gaf tabel V.

§ 15. *Bepaling der waarde van $D_r(0)$.*

Uit de nu bekende waarden van a_{λ} , b_{λ} en $S_{\lambda}(0,0)$ kan zonder bezwaar het verloop van de grootheid

$$\frac{2c}{3\sigma} D_r(0) = \lambda_i^3 (a_{\lambda_i} + \frac{\pi}{4} b_{\lambda_i}) S_{\lambda_i}(0,0) \quad (\text{cf (82)})$$



Figuur 2.

worden opgemaakt. In tabel VI vindt men in de 1^{ste} kolom λ_i , de tweede geeft $(a_{\lambda_i} + \frac{\pi}{4} b_{\lambda_i})$ opgemaakt met behulp van tabel IV, de 3^{de} $3 \lg \lambda_i$, de 4^{de} $\lg S_{\lambda_i}(0,0)$, de 5^{de} $I = \lg(a_{\lambda_i} + \frac{\pi}{4} b_{\lambda_i})$ de 6^{de}, onder 't hoofd II, de som van de drie

voorgaande kolommen m. a. w. $\lg \frac{2c}{3\sigma} D_r(0)$. En eindelijk geeft de laatste kolom $\frac{2c}{3\sigma} D_r(0) \cdot 10^{-14}$. Zet men de aldus bepaalde waarden weer grafisch af als 'n kromme, die $\frac{2c}{3\sigma} D_r(0)$ als functie van λ geeft, dan blijkt deze van $\lambda = 0,3$ tot $0,9 \mu$ zeer goed bij de gevonden waarden aan te sluiten, van $\lambda = 0,9$ tot $1,5 \mu$ liggende punten wat meer verspreid — hetgeen voor een deel ongetwijfeld moet gezocht worden in de minder nauwkeurige gegevens bij deze groote waarden, speciaal over $S_\lambda(0,0)$.

Waar wij slechts met waarden van λ tusschen $0,3$ en $0,7 \mu$ zullen werken, kunnen wij ons van de geconstrueerde kromme (figuur 2) zonder enig bezwaar bedienen ten einde nu voor een gegeven element den totalen stralingsdruk te berekenen volgens (82). Daartoe hebben wij slechts de ligging van de spectraal lijnen van een gegeven element op te zoeken, uit de kromme de bijbehorende waarden van $\frac{2c}{3\sigma} D_r(0)$ af te lezen en deze te sommeeren. Vooraf nog een opmerking: alleen de lijnen liggend tusschen $0,3$ en $0,7 \mu$ konden gebruikt worden, daar het ultrarode deel van het spectrum nog niet voldoende nauwkeurig bekend is. Dit is te meer te betreuren, waar uit 't verloop van onze kromme duidelijk is, dat ook bij tamelijk groote waarden van λ_i , waar dus $S_{\lambda i}(0,0)$ reeds zeer klein is, $\frac{2c}{3\sigma} D_r(0)$ toch nog zeer van beteekenis is — een gevolg van het optreden van λ_i^3 in formule (82). Wanneer later 't ultrarode spectrum beter bekend is, is het dus zeer wel mogelijk, dat in onze resultaten hierdoor vrij belangrijke wijzigingen worden gebracht.

Ter bepaling der lijnen van de verschillende elementen werd gebruik gemaakt van een door Dr. A. MINNAERT samengestelde atlas, die de tabellen van ROWLAND in zeer overzichtelijken vorm weergeeft en mij door hem vriendelijk werd afgestaan.

Op de boven beschreven manier vond ik voor Na:

$$\frac{2c}{3\sigma} D_r(0) = 3,7 \cdot 10^{14}.$$

Neemt men $\sigma = 5 \cdot 10^{-8}$, zooals DEBYE opgeeft voor een gewoon electron, $c = 3 \cdot 10^{10}$, dan zou de lichtdruk op één Na-molecule aan de zonsoppervlakte bedragen

$$D_r(0) = 9,5 \times 10^{-4} \text{ (dynes).}$$

Vergelijken wij dit bedrag met de aantrekking die het Na-molecule van de zon ondervindt — $0,21 \times 10^{-18}$ dyne — dan komen wij onmiddellijk tot de conclusie dat de gevonden waarde absurd groot is. Er moet nog iets niet in den haak zijn. En inderdaad kunnen wij verscheidene oorzaken aanwijzen waardoor het gevonden bedrag veel te groot is.

§ 16. *Waardoor $D_r(0)$ te groot werd gevonden.*

In het voorgaande hebben wij eenige verwaarloozingen begaan, waartoe wij eigenlijk niet het recht hadden:

1^{ste} hebben wij, evenals trouwens DEBYE in zijn meervermeld onderzoek, aangenomen dat de dipolen, waaruit wij ons het Na-molecule opgebouwd dachten, *voortdurend* in een toestand zijn waarbij zij absorbeeren en dus stralingsdruk ondergaan.

2^{de} hebben wij verondersteld dat *elke* lijn, onverschillig of zij zwak of sterk is, evenveel bijdraagt tot den stralingsdruk.

3^{de} hebben wij niet in aanmerking genomen, dat bij absorptie het licht dat geabsorbeerd wordt (dus van de golflengte overeenkomend met die der dipolen) reeds na 't doorloopen van een tamelijk dunne laag veel minder intensiteit heeft dan de omliggende niet geabsorbeerde lichtsoorten.

Nemen wij dit laatste punt 't eerst. Het is duidelijk, dat, terwijl wij in de formule voor $D_r(0)$ de waarden, afkomstig van ABBOTS metingen van $S_\lambda(0,0)$ hebben gebruikt, deze feitelijk betrekking hebben op *niet* of althans slechts *weinig geabsorbeerd* licht, terwijl wij hadden moeten rekenen met de waarde van $S_\lambda(0,0)$ geldende voor 't midden der Fraunhofersche lijnen. Daar $D_r(0)$ evenredig is met $S_\lambda(0,0)$ moet de berekende stralingsdruk ongeveer zooveel maal kleiner genomen worden,

als het licht in de kern eener Fraunhofersche lijn zwakker is dan de grond van het spectrum — een verhouding, die moeielijk te bepalen is.

Wat het 1^{ste} punt betreft het volgende: wij zullen ons voor een oogenblik op het nieuwere standpunt van Bohr ¹⁾ stellen.

Deze neemt aan dat electronen alleen dan stralen, wanneer zij van de eene baan in de andere overgaan, terwijl deze discontinuïteit in de beweging maar kort duurt en zelden voorkomt vergeleken met den tijd gedurende welken 'n electron in zijn normale baan rondloopt. Wij zien dan onmiddellijk in, dat wij, ook al blijven wij vasthouden aan ons beeld van trillende dipolen, toch een wijziging behooren aan te brengen in dezen zin, dat *op een gegeven tijdstip slechts een klein percentage der aanwezige moleculen „actief” is*, d.i. in een toestand, waarbij zij kunnen stralen of absorbeeren.

Dit komt hierop neer: onder een paar millioen moleculen zullen op het beschouwde tijdstip er maar eenige zijn, die „actief” zijn en bijgevolg stralingsdruk ondergaan. Even later zijn zij hun activiteit kwijt, andere zijn actief geworden, ondergaan stralingsdruk, worden op hun beurt weer inactief enz. enz.

't Resultaat moet wezen dat de door ons berekende lichtdruk zooveel maal te groot is als de verhouding van het aantal inactieve tot dat der actieve moleculen bedraagt.

Hoe moeten wij ons deze perioden van activiteit denken? Wellicht zoo, dat gedurende den korten tijd van opschudding en verwarring binnen het molecule, sommige dipolen met groote, andere met mindere hevigheid aan 't trillen worden gebracht, waarbij zij de karakteristieke spectraallijnen van het element geven. Dat de sterkte der lijnen in 't spectrum bij gegeven condities steeds dezelfde is, kan op twee manieren worden uitgelegd, n.l. of als 'n gevolg van statistische samenwerking of als uiting van den bouw van het molecule, waardoor alle moleculen van dezelfde soort gedurende den tijd van hun actief zijn op dezelfde manier zouden stralen. Wat hiervan ook zij: in beide gevallen moeten wij aannemen dat

¹⁾ Phil. Mag. 26 (1913).

niet alle lijnen gelijkwaardig zijn, maar dat juist de sterkste lijnen ook 't meest tot den druk zullen bijdragen, zoodat een eenvoudige sommeering, zonder rekening te houden met de lijnsterkte, ongeoorloofd is.

Een en ander maakt begrijpelijk waarom het gevonden bedrag van $D_r(0)$ zooveel grooter gevonden werd dan aannemelijk mag genoemd worden — in welke verhouding wij dit bedrag echter moeten verkleinen om de werkelijke absolute waarde te vinden, valt helaas niet uit te maken bij al de onbekende factoren, die nog in dit vraagstuk voorkomen.

Wij weten niet welk percentage der moleculen gemiddeld actief is.

Wij weten niet hoelang de periode der activiteit duurt.

Wij kunnen er geen schatting over maken, wat wij als absolute eenheid van lijnsterkte zouden moeten invoeren.

Het *eenige*, wat wij op grond van de in dit hoofdstuk ontwikkelde beschouwingen kunnen bepalen is *het relatieve effect van den stralingsdruk op verschillende elementen*.

Het *eenige* — maar misschien toch niet zóó weinig als op het eerste moment wellicht lijkt! Wij zullen n.l. zien dat *nagenoeg alle elementen, voor welke de stralingsdruk, berekend overeenkomstig de bovengenoemde overwegingen, relatief groot is, juist elementen zijn, die in 't chromosfeerspectrum voorkomen*, zoodat 't wel schijnt als of wij hier werkelijk men een duidelijk effect van den stralingsdruk op de samenstelling van de *waarneembare* deelen van de zonnemassa te maken hebben.

Aleer wij er toe overgaan deze bewering te staven, willen wij er nogmaals op wijzen, dat de beschouwingen, in de vorige bladzijden uiteengezet, geheel in overeenstemming zijn met de nieuwere opvattingen over straling en absorptie.¹⁾

¹⁾ In het Astr. Journ. 50 p. 220 (1919) treft men een beschouwing aan van MEGH NAD SAHA, die, wat gedachtengang betreft, vele punten van overeenkomst vertoont met de onze. Ofschoon zijn — zuiver kwalitatieve — overwegingen hem tot conclusies brengen, die ik niet gaarne zou onderschrijven en ik ook bij 't opstellen van bovengeschreven bladzijden geen kennis droeg van zijn artikel, komt hem in elk geval de prioriteit toe van de gedachte dat een *selectieve* stralingsdruk aansprakelijk kan zijn voor verschijnselen in de buitenste deelen der zon.

Speciaal de hypothese, dat niet alle moleculen meewerken bij absorptie en dispersie der opvallende straling en dus ook geen stralingsdruk ondergaan, vindt grooten steun in de experimenten van LORIA en LADENBURG ¹⁾ over absorptie en dispersie van waterstof, volgens welke hoogstens $\frac{1}{50.000}$ der aanwezige moleculen actief zouden zijn. In hoever ditzelfde getal geldig is op de zon bij de daar heerschende condities blijft overigens natuurlijk een open vraag.

§ 17. *Vergelijking van den stralingsdruk op verschillende elementen.*

Teneinde den stralingsdruk op verschillende elementen te kunnen vergelijken en zoo althans te kunnen oordeelen over het relatieve effect, nu de bepaling van het absoluut bedrag voorloopig onmogelijk is gebleken, gaan wij uit van twee vereenvoudigende hypothesen. Wij veronderstellen in de eerste plaats, dat *het percentage actieve moleculen voor alle elementen evengroot is* en vervolgens, dat *de bijdrage tot den stralingsdruk van een bepaalde lijn evenredig is met de lijnsterkte*, zoodat de bijdrage van twee naburige lijnen (dus λ , $a_\lambda + \pi b_\lambda$, $S_\lambda(0,0)$ nagenoeg gelijk) waarvan de een $10 \times$ zoo sterk is als de ander zich zullen verhouden als 10:1.

Dit beteekent, dat wij bij 't sommeeren van

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^3 (a_{\lambda i} + \frac{1}{4} \pi b_{\lambda i}) S_{\lambda i} (0,0)$$

nu bovendien de sterkte van iedere lijn in rekening moeten brengen. Hiertoe zullen wij elken term van de som vermenigvuldigen met het getal dat de lijnsterkte in ROWLANDSCHE eenheden geeft en dat aan meergenoemden atlas van Dr. MINNAERT werd ontleend.

¹⁾ Verhandl. d. deutschen Phys. Gesellsch. 10 p. 858 (1908).

Als voorbeeld volge de bepaling bij H:

λ	$\frac{2}{3} \frac{c}{\sigma} D_r(0) \times 10^{-14}$	Lijnsterkte L	$L \times \frac{2}{3} \frac{c}{\sigma} D_r(0) \times 10^{-14}$
0.398	0.18	6	1.08
0.434	0.28	20	5.60
0.487	0.45	30	13.50
0.657	0.85	40	34.00
			$\Sigma = 54$

Zoo gaf verder bijv. Na: $\Sigma = 126$.

Terwijl Σ evenredig is met den lichtdruk, zal $\frac{\Sigma}{m}$ (m = molecu-
lair gewicht) blijkbaar evenredig zijn met de versnelling in
radiale richting, die 'n bepaald molecule tengevolge van den
stralingsdruk ondervindt en die dus de versnelling van de
zwaartekracht tegenwerkt.

Kenden wij de absolute waarde van $\frac{\Sigma}{m}$, dan zou de ver-
houding hiervan tot de versnelling g van de gravitatie uit-
maken of het beschouwde molecule — of, als wij met gemid-
delden mogen rekenen, 't beschouwde gas — door de zon wordt
afgestooten of aangetrokken; naarmate deze verhouding > 1 of < 1
overwint n.l. de afstootende of de aantrekkende werking.

Nu kennen wij weliswaar $\frac{\Sigma}{m}$ niet in absoluten maat, maar
in elk geval weten wij, dat deze grootheid voor verschillende
elementen zeer uiteenlopende waarden kan hebben, terwijl
 g voor alle elementen gelijk is. Naarmate de gevonden — rela-
tieve — waarde van $\frac{\Sigma}{m}$ grooter is, zal ook de absolute waarde
van $\frac{\Sigma}{m}$: g grooter zijn, zal de werking der graviteit zich dus
minder doen gevoelen. $\frac{\Sigma}{m}$ zal op deze wijze een maat zijn
voor wat wij zouden kunnen noemen de „*stijgkracht*” van een
gegeven element in de zonsatmosfeer.

In tabel VII is voor de verschillende op de zon gevonden elementen Σ en $\frac{\Sigma}{m}$ opgemaakt, benevens $\left(\frac{\Sigma}{m}\right)_{H=100}$, waaronder men te verstaan heeft de waarde van $\frac{\Sigma}{m}$ als men, willekeurig, $\frac{\Sigma}{m}$ voor waterstof = 100 stelt.

Wanneer wij zien dat $\frac{\Sigma}{m}$ voor sommige elementen (bijv. Pb, Hg, Tl) ± 10.000 maal kleiner is dan voor andere (als H, Ca, Fe), ligt het voor de hand na te gaan of zoo'n sterk verschil zich niet op de een of andere wijze kenbaar maakt. En dan is het wel opmerkelijk dat al de elementen, waarvoor $\frac{\Sigma}{m}$ betrekkelijk groot is, voorkomen in het chromosfeerspectrum en het flashspectrum — dus in de buitenste deelen van de zon — terwijl dit voor niet één element, waarvoor $\frac{\Sigma}{m} < 0.1 \%$ het geval is.

In de kolom „opmerkingen” van tabel VII is telkens vermeld of 't bedoelde element voorkomt in de lijst der chromosfeerlijnen van Young door achtervoeging van de letter Y. Evenzoo of het voorkomt in 't flashspectrum, zooals dit waargenomen werd gedurende de eclips van 17 Mei 1901 door de Sumatra-expeditie ¹⁾ van het U. S. Naval Observatory — genoteerd als: E — en in het buiten een eclips waargenomen flashspectrum, zooals dit o.a. door ADAMS en Miss BURWELL ²⁾ is waargenomen (genoteerd als „f”). Een vraagteeken beduidt dat de lijnen, waaruit tot 't voorkomen van 't element werd besloten, alle samenvielen met lijnen van andere elementen of dat zij niet geheel overeenstemden met de waarde van ROWLAND.

Wanneer men dezen tabel inzielt, is het onmiddellijk frappant hoe, vanaf de waarde $\left(\frac{m}{\Sigma}\right)_{H=100} = 0,1$, geen enkel element meer waargenomen wordt in chromosfeer- of flashspectrum, terwijl

¹⁾ Publication of the U. S. Naval Obs., second series, vol IV appendix (1905).

²⁾ Contrib. Mt WILSON Solar Obs. No 95; A. J. XLI (1915).

alle overige òf in 't een òf in 't ander en, met uitzondering van C, Si, Zr en Sc, in beiden voorkomen.

Bedenkt men verder dat in Young's tabel vele niet geïdentificeerde lijnen voorkomen, zoodat 't ontbreken in de lijst van Young nog niet de afwezigheid in 't chromosfeerspectrum behoeft te beteekenen, dan frappeert de overeenstemming nog meer.

Zooveel is zeker dat de beide stoffen, die men *steeds* en *overal* in de chromosfeer vindt: H en Ca, ook de beide stoffen zijn met de grootste $\frac{\Sigma}{m}$.

Om verschillende redenen — sterkte, aantal en hoogte boven de fotosfeer waarop de lijnen in 't flashspectrum verschijnen — zijn wij geneigd als *hoofdbestanddeelen* van de hoogere deelen van de chromosfeer te beschouwen: Ca, H, Fe, Fi, Cr, Ni, Mg en V; deze hebben dan ook allen $\frac{\Sigma}{m} > 1$.

Dat sommige elementen, met groote $\frac{\Sigma}{m}$, toch niet door sterke lijnen in het chromosfeerspectrum vertegenwoordigd zijn, behoeft geen argument tegen 't gezegde te zijn, maar kan beteekenen dat zulk een element slechts in kleine hoeveelheden voorkomt.

Alles samengenomen zouden wij tot deze conclusie komen: de samenstelling van de hoogere deelen van de zon staat in nauw verband met het bedrag van den stralingsdruk op de verschillende elementen. *Die* elementen komen voornamelijk voor, waarbij $\left(\frac{\Sigma}{m}\right)_{H=100}$ wisselt tusschen 100 en 1, terwijl *niet* in merkbare hoeveelheden aangetroffen worden elementen waarvoor $\left(\frac{\Sigma}{m}\right)_{H=100} < 0,1$.

Een uitzondering maakt alleen C, waarvoor $\left(\frac{\Sigma}{m}\right)_{H=100} = 7$ is en dat toch — voor zoover de tegenwoordige waarnemingen gaan — uitsluitend in de dieper gelegen deelen van de chromosfeer wordt gezien. Maar dit is verklaarbaar, indien de weinig vluchtige koolstof slechts met geringe concentratie in 't gas-

mengsel voorkomt en derhalve door anomale refractie alleen maar dicht bij den zonsrand zichtbaar kan zijn.

Bij den huidigen stand onzer kennis kunnen wij niet verder gaan dan deze kwalitatieve uitspraken. Pas wanneer wij het absolute bedrag van den stralingsdruk zouden kunnen bepalen, komt de mogelijkheid de talloze vragen, die zich in dit verband aan ons opdringen, te beantwoorden.

Daartoe zal het echter in de eerste plaats noodig zijn, dieper in te dringen in het mechanisme van straling en absorptie. Ons beeld der trillende dipoln is niet meer dan een eerste, nog zeer gebrekkige benadering.

Maar dit moge aan de toekomst worden overgelaten: reeds nu kunnen wij constateeren dat ongetwijfeld stralingsdruk een belangrijken rol speelt op de zon in de voor onze waarneming toegankelijke lagen.

SAMENVATTING.

Na in de inleiding in 't kort de geschiedenis van den stralingsdruk te zijn nagegaan en gewezen te hebben op verschillende gebieden der astrophysica, waar deze druk een rol zou kunnen spelen, werd in hoofdstuk I de thermodynamische theorie over in polytroop evenwicht verkeerende gasbollen, zooals deze door R. EMDEN is ontwikkeld, zeer beknopt uiteengezet.

In hoofdstuk II is deze theorie vervolgens uitgebreid op het geval dat men, behalve op gravitatie, ook op stralingsdruk let. Hiertoe werd eerst een uitdrukking voor den stralingsdruk gezocht in de veronderstelling dat, ver binnen de gasmassa, de wet van FITZGERALD geldt en afgezien mag worden van verstrooiing. De gevonden uitdrukking gaf aanleiding het werk van EDDINGTON over dit onderwerp te bespreken. Hierbij bleek dat onze formule algemeener is dan die van EDDINGTON, die overigens als speciaal geval van de onze te voorschijn treedt.

De vergelijkingen waartoe wij komen, wanneer wij, deze formule toepassend, verder een analogen weg als EMDEN volgen, bleken te leiden tot een zéér samengestelde differentiaalvergelijking, waarvan wij slechts voor een paar bijzondere gevallen een oplossing konden vinden, te weten voor 't geval van $\rho = \text{const}$ (hetgeen in de allerdiepste lagen nagenoeg plaats moet grijpen) en voor de meer aan de oppervlakte gelegen lagen — maar nog niet de allerbuitenste — wanneer men mag aannemen dat hier een polytroop evenwicht, gekenmerkt door $n=3$, heerscht. Dit laatste geval blijkt juist overeen te stemmen met het door EDDINGTON onderzochte geval, zoodat verdere discussie hiervan overbodig bleek. Alleen werd nog

aangeetoond hoe bij dit evenwicht (en vermoedelijk ook bij naburige waarden van n) de gradienten van ρ en T voor massa's van de grootte van onze zon 3 à 4 maal slapper uitvallen dan indien men geen rekening met stralingsdruk houdt.

In hoofdstuk III eindelijk, laten wij de vereenvoudigende veronderstellingen van 't voorgaand hoofdstuk varen, maar beperken ons daartegen nu tot de allerbuitenste lagen van de zon, waar wij mogen aannemen dat niet langer de formule van FITZGERALD geldt, maar een andere, die wij aan het werk van DEBYE ontleenen.

Na een poging gewaagd te hebben om de absolute waarde van den stralingsdruk te berekenen door experimenteel gevonden waarden van de, in 't midden van den zonnenschijf uittredende, straling in te voeren in onze formule, moesten wij helaas tot de overtuiging komen dat, bij den tegenwoordigen stand van het vraagstuk, dit nog niet mogelijk is. Wat wij wél konden vinden, waren de *relatieve* waarden van den druk op de verschillende elementen. Deze waarden blijken sterk uiteen te loopen. De versnellingen, die de actieve moleculen der verschillende elementen tengevolge van dezen druk ondergaan (en dus ook, bij eerste benadering, hunne stijgsnelheden in de, door de niet-actieve moleculen gevormden, weerstandbiedende middenstof) wisselen af tusschen de maximale waarde, die voor H op 100 is gesteld, en de minimale bedragen van 0,001, zooals bij Ge, Hg, Bi.

Merkwaardig is, dat, met uitzondering van 't element koolstof, *alle* elementen wier versnelling tengevolge van den stralingsdruk tusschen 100 en 0.1 gelegen is, voorkomen in het chromosfeer- en flashspectrum, daarentegen van de elementen met kleinere versnelling *geen één*; terwijl alle elementen, die daarin sterk vertegenwoordigd zijn, versnellingen tusschen 100 en 1^o blijken te hebben (Ca bijv. 11).

Dit doet ons besluiten: *de procentische samenstelling van de buitenste deelen der zon is in sterke mate afhankelijk van den selectieven stralingsdruk.*

TABEL I.

$$n = 3 \quad (k = 4/3)$$

r_1	u_1	$-\frac{du_1}{dr_1}$
0	1	0
0.25	0.98975	0.08204
0.50	0.95987	0.15495
0.75	0.91355	0.20270
1.00	0.85505	0.25219
1.25	0.78897	0.27370
1.50	0.71948	0.27993
1.75	0.64996	0.27460
2.00	0.58282	0.26149
2.50	0.46109	0.22396
3.00	0.35921	0.18393
3.50	0.27629	0.14859
4.00	0.20942	0.11998
4.50	0.15529	0.09748
5.00	0.11110	0.08003
6.00	0.04411	0.05599
6.80	0.00471	0.04360
6.9011	0	0.04231

TABEL II.

(Getallen van ABBOT.)

Golf- lengte in μ .	$\cos \phi = 1$	$\cos \phi = 0.97$	$\cos \phi = 0.91$	$\cos \phi = 0.83$	$\cos \phi = 0.75$	$\cos \phi = 0.66$	$\cos \phi = 0.56$	$\cos \phi = 0.48$	$\cos \phi = 0.39$	$\cos \phi = 0.31$
0.323	144	140	129	120	112	99	86	76	64	49
0.386	338	331	312	289	267	240	214	188	163	141
0.433	456	447	423	395	368	333	296	266	233	205
0.456	515	507	486	455	428	390	351	317	277	242
0.481	511	503	483	456	430	394	358	324	290	255
0.501	489	482	463	437	414	380	347	323	286	254
0.534	463	457	440	417	396	366	337	312	281	242
0.604	399	395	382	365	348	326	304	284	259	237
0.670	333	330	320	308	295	281	262	247	227	210
0.699	307	304	295	284	273	258	243	229	212	195
0.866	174	172	169	163	159	152	145	138	130	122
1.031	111	110	108	105.5	103	99	94.5	90.5	86	81
1.225	77.6	77.2	75.7	73.8	72.2	69.8	67.1	64.7	61.6	58.7
1.655	39.5	39.4	38.9	38.2	37.6	36.7	35.7	34.7	33.6	32.3
2.097	14.0	14.0	13.8	13.6	13.4	13.1	12.8	12.5	12.2	11.7

TABEL III.

Golflengte in μ	S_{λ} (0,0)	c_{λ}	d_{λ}	a_{λ}	b_{λ}
Volgens	ABBOT.			Reductie v. c_{λ} en b_{λ}	
0.323	144	13	127	0.09	0.91
0.386	338	53	283	0.15	0.85
0.433	456	90	367	0.20	0.80
0.456	515	127	390	0.25	0.75
0.481	511	140	376	0.28	0.72
0.501	489	160	330	0.32	0.68
0.534	463	171	293	0.37	0.63
0.604	399	176	224	0.44	0.56
0.670	333	161	171	0.49	0.51
0.699	307	154	152	0.50	0.50
0.866	174	105	70	0.59	0.41
1.031	111	72	43	0.63	0.37
1.225	77.6	50.6	27	0.65	0.35
1.655	39.5	29.1	10.2	0.74	0.26
2.097	14.0	10.0	4.0	0.75	0.25

TABEL IV.

λ	a_λ	b_λ	λ	a_λ	b_λ	λ	a_λ	b_λ
0.30	0.08	0.92	0.90	0.59	0.41	1.50	0.71	0.29
0.35	0.11	0.89	0.95	0.61	0.39	1.55	0.72	0.28
0.40	0.16	0.84	1.00	0.62	0.38	1.60	0.73	0.27
0.45	0.23	0.77	1.05	0.63	0.37	1.65	0.73	0.27
0.50	0.32	0.68	1.10	0.64	0.36	1.70	0.74	0.26
0.55	0.40	0.60	1.15	0.65	0.35	1.75	0.74	0.26
0.60	0.44	0.56	1.20	0.66	0.34	1.80	0.75	0.25
0.65	0.48	0.52	1.25	0.67	0.33	1.85	0.75	0.25
0.70	0.51	0.49	1.30	0.68	0.32	1.90	0.75	0.25
0.75	0.53	0.47	1.35	0.69	0.31	1.95	0.75	0.25
0.80	0.55	0.45	1.40	0.70	0.30	2.00	0.75	0.25
0.85	0.57	0.43	1.45	0.71	0.29			

TABEL V.

λ in μ	y_λ in cm	S_λ (0.0)	λ in μ	y_λ in cm	S_λ (0.0)	λ in μ	y_λ in cm	S_λ (0.0)
0.30	4.4	8.05×10^{13}	0.70	16.4	30.0	1.10	5.5	10.1
0.35	12.0	21.96	0.75	14.3	26.2	1.20	4.2	7.6
0.40	19.3	35.3	0.80	12.3	22.5	1.30	3.3	6.0
0.45	25.6	46.8	0.85	10.3	18.8	1.40	2.7	4.9
0.50	25.6	46.8	0.90	8.8	16.1	1.50	2.3	4.2
0.55	23.4	42.8	0.95	7.7	14.1	1.60	2.1	3.8
0.60	21.0	38.4	1.00	6.9	12.6	1.70	1.8	3.2
0.65	18.7	34.8	1.05	6.1	11.3	1.80	1.6	2.9

TABEL VI.

λ_i	$a_{\lambda_i} + \frac{\pi}{A} b_{\lambda_i}$	$3 \lg \lambda_i$	$\lg S\lambda (0.0)$	I	II	$\frac{2c}{3\sigma} D_r(0) \times 10^{-14}$
0.30	0.80	0.431—2	13.905	0.903—1	12.239	0.017
0.35	0.80	0.632—2	14.341	0.903—1	12.876	0.074
0.40	0.82	0.806—2	14.550	0.914—1	13.270	0.186
0.45	0.83	0.959—2	14.670	0.919—1	13.548	0.353
0.50	0.85	0.097—1	14.670	0.929—1	13.696	0.497
0.55	0.87	0.220—1	14.631	0.939—1	13.790	0.617
0.60	0.88	0.334—1	14.584	0.944—1	13.862	0.728
0.65	0.89	0.439—1	14.541	0.949—1	13.929	0.849
0.70	0.89	0.535—1	14.487	0.949—1	13.961	0.914
0.75	0.90	0.625—1	14.420	0.954—1	13.999	1.000
0.80	0.90	0.709—1	14.355	0.954—1	14.018	1.042
0.85	0.91	0.787—1	14.279	0.959—1	14.025	1.059
0.90	0.91	0.862—1	14.207	0.959—1	14.028	1.067
0.95	0.91	0.934—1	14.154	0.964—1	14.047	1.114
1.00	0.92	0.000	14.107	0.964—1	14.071	1.178
1.05	0.92	0.063	14.054	0.964—1	14.081	1.205
1.10	0.92	0.123	14.010	0.964—1	14.097	1.250
1.15	0.92	0.183	13.943	0.964—1	14.090	1.230
1.20	0.92	0.237	13.885	0.964—1	14.086	1.219
1.25	0.92	0.291	13.842	0.964—1	14.097	1.250

TABEL VII.

Element.	n	m	Σ	$\frac{\Sigma}{m}$	$\left(\frac{\Sigma}{m}\right)_{H=100}$	Opmerkingen.
H	4	1	54	54	100	Y, E, f.
Fe	323	56	996	18	34	Y, E, f.
Ca	43	40	436	11	22	Y, E, f.
C	24	12	47	4	7	f.
Ti	147	48	166	3.5	6.3	Y, E, f.
Ni	141	59	199	3.3	6.2	Y, E, f.
Mg	11	24	58	2.4	4.4	Y, E, f (?)
Na	7	23	46	2.0	3.7	Y, E, f.
Cr	125	56	110	1.9	3.6	Y, E, f.
Mn	98	55	87	1.6	2.9	Y, E, f (?)
Co	100	59	59	1.0	1.8	Y, E, f.
V	74	51	37	0.72	1.3	Y, E, f.
Si	7	28	17	0.60	1.1	E, f (?)
Al	5	27	6.2	0.23	0.4	Y (?) E.
Zr	62	91	17	0.19	0.3	E.
Sc	14	44	6.6	0.16	0.3	E, f.
Zn	8	66	8.8	0.14	0.3	Y, E, f (?)
La	37	139	15	0.10	0.2	Y, E, f
Sr	13	87	7.3	0.08	0.1	Y, E, f (?)
Y	26	89	7.7	0.08	0.1	Y, E, f.
Ba	13	137	11	0.08	0.1	Y, E, f (?)
Ce	16	140	6.6	0.05	0.1	Y, E, f (?)
Nd	11	144	3.7	0.026	0.05	f (?)
Cd	6	112	2.2	0.020	0.03	
Cu	8	63	1.1	0.018	0.03	
Ag	4	108	1.1	0.010	0.01	
Pd	9	106	0.88	0.008	0.01	
Pb	4	206	1.2	0.006	0.01	
Be	2	9	0.06	0.006	0.01	
Eb	3	166	0.84	0.005	0.01	
Ru	3	102	0.29	0.0029	0.005	
In	1	114	0.18	0.0016	0.003	
Sn	2	118	0.18	0.0015	0.003	
Di	2	117	0.22	0.0015	0.003	
Rh	1	103	0.15	0.0015	0.003	
W	1	184	0.26	0.0014	0.003	
Tl	3	204	0.25	0.0012	0.002	
Ge	3	72	0.06	0.0008	0.001	
Hg	1	200	0.06	0.0003	0.001	
Bi	1	208	0.11	0.0005	0.001	

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De waarnemingen over vorm en ontwikkeling van kometenstaarten maken aannemelijk dat de stralingsdruk op een molecule van dezelfde orde van grootte is als de aantrekkingskracht, die de zon erop uitoefent.

II.

Bij de uitlegging der zonneverschijnselen kan verwaarloozing van den stralingsdruk tot ernstige fouten leiden.

III.

De stralingsdruk kan niet de groote protuberantiesnelheden verklaren, zooals MEGH NAD SAHA meent.

(A. J. 50, 220 (1919)).

IV.

Ten onrechte neemt EDDINGTON onder de algemeene natuurwetten op: „The emissive and absorbing powers of a substance are equal.”

(«On the Radiative Equilibrium of the Stars». M. N. 77, 17).

V.

De wijze waarop EDDINGTON het effect van eventuele verstrooiing in rekening brengt, is onvoldoende.

(M. N. 77, 25).

VI.

De effectieve temperatuur van de zon houdt slechts zeer los verband met de op de zon heerschende *ware* temperaturen.

(Verslag v. d. Kon. Akad. v. Wetensch. XXVIII p. 317).

VII.

Nadere bestudeering der eigenbewegingen van granulatiekorrels zal kunnen leiden tot het bepalen van de ware temperatuur van sommige deelen der zon.

VIII.

De polarisatie van het coronalicht moet niet worden toegeschreven aan in de corona zwevende vaste deeltjes.

IX.

Ten onrechte meent E. GEHRCKE, dat de bij de zoneclips van Mei 1919 gevonden afwijkingen der sterreplaatsen veroorzaakt kunnen zijn door refractie van de corona.

(E. GEHRCKE, Zeitschr. für Phys. Chem. Unterricht 32, 205 (1919).

X.

De periheliumbeweging van de Mercuriusbaan wordt door EINSTEIN's theorie ongedwongen verklaard. Alle andere tot dusver gegeven verklaringen zijn onbevredigend.

XI.

De behandeling, die SCHUBERT in zijn „Niedere Analysis” (deel V, Samenlung SCHUBERT) geeft van het „Ursachen Problem”, is op z'n minst onvolledig te noemen.

De op pag. 76 en 77 afgeleide formules zijn alleen geldig onder de, door SCHUBERT niet genoemde, beperkende voorwaarde dat alle samenstellingen van de urn even waarschijnlijk zijn.

XII.

Vragen als gesteld zijn in N^o. 12, N^o. 17, N^o. 18 van SCHUBERT's „Niedere Analyse” § 10 behooren uitsluitend volgens het „Princip des manglenden Grundes” behandeld te worden. De formules van § 10 zijn er niet op van toepassing.

XIII.

De verwachting, dat experimenteel zal kunnen worden uitgemaakt of de ruimte Euclidisch of Niet-Euclidisch is, is ongegrond.

XIV.

Het bekende beeld der tweedimensionale schaduwwezens, die niets kennen dan *hun* wereld, werkt de *verkeerde* opvatting in de hand, dat, indien iemand „t vierdimensionale oog” maar bezat, hij méér dan de gewone drie-dimensionale wereld zou zien.

XV.

Het verdient aanbeveling bij de toestandsvergelijking der gassen meer rekening te houden met de *chemische* associatie.

XVI.

Afschaffing der cosmografie in een der beide hoogste klassen van de H. B. S. ware te betreuren.

XVII.

Wanneer het streven om de beginselen van differentiaal- en integraalrekening op de H. B. S. te brengen, tengevolge heeft dat de vlakke meetkunde meer op den achtergrond wordt gedrongen, is het af te keuren.

A
1