



Enkele algemeene limietstellingen met toepassingen op reële functies

<https://hdl.handle.net/1874/275855>

A. 192

5 Jul 192

Enkele algemeene limietstellingen met
: toepassingen op reële functies :



J. RIDDER

.
cht

ENKELE ALGEMEENE LIMIETSTELLINGEN
MET TOEPASSINGEN OP REËELE FUNCTIES.

Diss. Utrecht 1921

Enkele algemeene limietstellingen met toepassingen op reële functies.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN
DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS-
EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-
UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG
VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. W.
VOGELSANG, HOOGLEERAAR IN DE FA-
CULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBE-
GEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN
SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE
BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER
WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDI-
GEN OP DINSDAG 5 JULI DES NAMID-
DAGS 2 UUR DOOR

JACOB RIDDER,

GEBOREN TE HARDERWIJK.



ELECTRISCHE DRUKKERIJ „DE INDUSTRIE” J. VAN DRUTEN — UTRECHT.

MCMXXI.

AAN MIJN OUDERS.

Het zij mij hier vergund mijn grooten dank te brengen aan de hoogleeraren der Leidsche Universiteit, wier colleges ik gevolgd heb. In het bijzonder zijn voor mij van belang geweest de colleges van de professoren KLUYVER en VAN DER WOUDE voor de wiskunde en die van de professoren EHRENFEST en KUENEN voor de natuurkunde; met groot genoegen zal ik steeds aan die uren terugdenken.

Ten slotte betuig ik prof. DENJOY mijn erkentelijkheid, dat hij zoo welwillend is geweest de taak van promotor op zich te nemen. Hem en zijn assistent, Dr. VAN DER CORPUT, ben ik ook dank verschuldigd voor de raadgevingen, mij bij de bewerking van dit proefschrift verleend.

INHOUD.

	Blz.
Inleiding	1
HOOFDSTUK I.	
Algemeene Limietstellingen	4
EERSTE GROEP. Beschouwing van een enkel punt der twee- of meerdimensionale ruimte	4
TWEEDE GROEP. Beschouwing van een gesloten, lineaire verzameling, evenwijdig aan een der coördinaatassen.	33
HOOFDSTUK II.	
Toepassingen der Algemeene Limietstellingen	38
EERSTE GROEP. Beschouwing van een enkel punt der twee- of meerdimensionale ruimte	38
TWEEDE GROEP. Beschouwing van een gesloten, lineaire verzameling, evenwijdig aan een der coördinaatassen.	57
HOOFDSTUK III.	
Uitbreiding der limiet-definitie	60
HOOFDSTUK IV.	
Oneigenlijke integraal	72
HOOFDSTUK V.	
Toepassingen der limietstellingen op oneigenlijke integralen	84
Stellingen.	93

INLEIDING.

Een algemeen bekend probleem is dat, hetwelk ons de noodige en voldoende voorwaarden vraagt voor de continuïteit van de limiet van een reeks van continue functies. We kunnen ons bij de oplossing beperken tot de beschouwing der reeks in een enkel punt, of we kunnen een segment (a, b) ¹⁾ der onafhankelijk veranderlijke in 't oog vatten. In het eerste geval geeft de *quasi-uniforme convergentie* „in een punt” ons het middel tot de oplossing, — in het tweede geval de *quasi-uniforme convergentie* „op een segment”; het laatstgenoemde begrip is afkomstig van ARZELÀ. Zooals later zal blijken, is de definitie van de hier in te voeren, quasi-uniforme convergentie „in een punt” geheel analoog aan de definitie van enkelvoudig-uniforme convergentie „op een segment”, gelijk deze door DINI is ingevoerd. We hadden daarom ook van enkelvoudig-uniforme convergentie in een punt kunnen spreken.

Gemakkelijk is in te zien, dat het genoemde vraagstuk neerkomt op het vinden der noodige en voldoende voorwaarden voor het verwisselen van twee limietovergangen. Stellen we n.l.

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$

waarbij $u_k(x)$ continu is in x' voor $k = 1, 2, 3, \dots, n$, en wenschen we te weten of $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ voor $x = x'$ continu is,

dan moeten we trachten te bewijzen, dat

$$\lim_{x \rightarrow x'} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x'),$$

¹⁾ Onder segment (a, b) verstaan we de verzameling der punten tusschen a en b , vermeerderd met a en b ; spreken we van interval (a, b) , dan worden a en b niet meegerekend.

of wel, dat

$$\lim_{x=x'} \lim_{n=\infty} S_n(x) = \lim_{n=\infty} \lim_{x=x'} S_n(x).$$

Het ligt dus voor de hand na te gaan of de quasi-uniforme convergentie in een punt en de quasi-uniforme convergentie op een segment ons ook helpen kunnen om noodige en voldoende voorwaarden te vinden voor de gelijkheid van twee herhaalde limieten, waarin twee limietovergangen in omgekeerde volgorde voorkomen. Het eerste begrip zal daarbij moeten helpen, zoo we voor ieder der onafh. veranderlijken slechts één limietwaarde beschouwen; het laatste moet gebruikt worden, als de verschillende limietwaarden van een dier veranderlijken een segment vormen. Dit is door ons in het volgende nagegaan.

Een uitbreiding der genoemde begrippen geeft ook de mogelijkheid tot het vinden van noodige en voldoende voorwaarden, waaronder meermalen herhaalde limieten, doch waarbij de volgorde der limietovergangen een andere is, aan elkaar gelijk zijn.

In hoofdstuk II volgen toepassingen van genoemde stellingen op bijzondere gevallen uit diff. en integr. rekening, zooals: continuïteit-, differentiatie- en integratie van reeksen; gelijkheid van herhaalde integralen, enz. Het zal daarbij blijken, dat vele bekende stellingen, die tot nu toe ieder voor zich bewezen werden, zich uit enkele algemeene stellingen uit hoofdstuk I laten afleiden. Tevens komen we tot enkele nieuwe.

In hoofdstuk III is het limietbegrip uitgebreid op het geval, dat de onafh. veranderlijke bij den limietovergang een geordende verzameling van elementen doorloopt; de afhankelijk veranderlijke heeft als overeenkomstige waarden bepaalde getallen. De verschillende limieten uit hoofdstuk II vallen onder dit algemeener limietbegrip. — Daarna volgt een verdere uitbreiding op geordende verzamelingen. Daarbij doorloopt de onafhankelijk veranderlijke weer een geordende verzameling van elementen; de afhankelijk veranderlijke heeft als bijbehorende waarden elementen van een andere geordende

verzameling van bepaalde soort. O. a. moet het begrip inhoud zich op die verzameling laten toepassen op nader aan te geven wijze. Hieronder valt de limiet van een complexe functie bij complexe onafh. veranderlijke.

Telkens laat ook de quasi-uniforme convergentie een overeenkomstige uitbreiding toe, zóó dat ze ons weer noodige en voldoende voorwaarden geeft voor limietverwisselingen.

In hoofdstuk IV wordt een definitie van oneigenlijke integraal behandeld, welke een uitbreiding is van die van DE LA VALLÉE POUSSIN. Onder de oorspronkelijke definitie van De la Vallée Poussin vallen alleen absoluut convergente, oneigenlijke integralen. Door de uitbreiding omvat ze nu ook niet-absoluut convergente, oneig. integralen.

Een door HARNACK gegeven definitie van oneig. integraal verschilt van de boven aangeduide definitie in de volgorde, waarin bepaalde limietovergangen worden uitgevoerd. Beide definities behoeven niet steeds dezelfde integraalwaarde te geven. Zooals bekend, is dit o. a. wel het geval bij absolute convergentie der oneig. integralen, zoo we integralen van RIEMANN gebruiken. We behandelen ook een voorbeeld van niet-abs. conv., waarbij de twee definities toch dezelfde uitkomst geven.

Ten slotte bevat hoofdstuk V stellingen over oneigenlijke integralen, waarbij weer voorwaarden voor het verwisselen van limieten moeten worden afgeleid.

HOOFDSTUK I.

Algemeene Limietstellingen.

Zooals wij reeds in de inleiding zeiden, behooren de stellingen van dit hoofdstuk tot twee groepen, n.l.:

1^e die, waarbij we in een enkel punt der twee- of meerdimensionale ruimte (aantal dimensies = aantal onafh. veranderlijken) nagaan de verandering in volgorde der limietovergangen;

2^e die, waarbij we die verandering nagaan in alle punten van een segment (in 't algemeen van een gesloten, lineaire verzameling), evenwijdig aan een der coördinaatassen.

Wij zullen de eerste groep eerst geheel afhandelen, om daarna tot de tweede over te gaan.

EERSTE GROEP.

§ 1. Laat $f(x, y)$ gedefinieerd zijn voor de punten (x, y) eener tweedimensionale verzameling van de volgende soort. De waarden x vormen een lineaire verz. P met ξ als verdichtingspunt, de waarden y een lineaire verz. Q met η als verdichtingspunt (ξ en η behooren niet tot die verzamelingen). De punten der tweedim. verzameling worden verkregen door te nemen alle mogelijke combinaties van x - en y -waarden uit de verzamelingen P en Q .

$$\text{Stel: } \lim_{x=\xi} f(x, y) = L_{\xi}(y); \quad \lim_{y=\eta} \lim_{x=\xi} f(x, y) = L_{\eta}\xi;$$

$$\lim_{y=\eta} f(x, y) = L_{\eta}(x); \quad \lim_{x=\xi} \lim_{y=\eta} f(x, y) = L_{\xi}\eta.$$

Opdat nu

$$L_{\xi} = L_{\eta}$$

is noodig en voldoende:

a) $L_{\xi}(y)$ bestaat voor alle waarden y ;

b) L_{η} bestaat;

c) $L_{\eta}(x)$ bestaat voor alle waarden x en „convergeert quasi-uniform in het punt ξ .” — Hierdoor verstaan we, dat bij twee willekeurige, pos. getallen ε en α zijn te vinden een interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en een waarde Y , behoorende tot de lineaire verzameling Q en gelegen binnen $(\eta - \alpha, \eta + \alpha)$, zóó dat voor iedere x uit de verzameling P en in $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ gelegen:

$$|L_{\eta}(x) - f(x, Y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Bewijs: We onderstellen hierbij stilzwijgend, dat we voor x en y slechts waarden beschouwen, die behooren tot de gegeven, lineaire verzamelingen P en Q .

Zij aan de voorwaarden voldaan. We kiezen een willekeurig pos. getal ε . Volgens (b) is dan, voor y binnen een zeker interval $(\eta - \alpha, \eta + \alpha)$ gelegen:

$$(1) \quad |L_{\eta} - L_{\xi}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Uit (c) volgt, dat bij $\frac{\varepsilon}{3}$ en α is te vinden een waarde Y , uit de lineaire verz. Q en binnen $(\eta - \alpha, \eta + \alpha)$ gelegen, en een interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, zóó dat voor x in dit interval:

$$(2) \quad |L_{\eta}(x) - f(x, Y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Voor die waarde Y van y is ook aan (1) voldaan.

Volgens (a) is bij die Y te vinden een interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$, zoo dat voor x in dat interval gelegen:

¹⁾ Na het bestaan der limieten onder (a) en (b) onderstellen we dus ook nog dat van den onder (c) genoemden limiet. $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} \cdot \frac{x-y}{x+y}$ is een eenvoudig voorbeeld van een functie, waarvoor in een zeker punt (hier het punt 0,0) de beide eerste limieten bestaan en de derde niet (x en y zullen pos. waarden doorloopen, die naar nul convergeeren).

$$(3) \quad \dots \quad |L_{\xi}(Y) - f(x, Y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stel h de kleinste der waarden δ en δ_1 . Dan volgt uit (1), (2) en (3), dat voor x in $(\xi - h, \xi + h)$:

$$|L_{\eta}\xi - L_{\eta}(x)| \leq |L_{\eta}\xi - L_{\xi}(Y)| + |L_{\xi}(Y) - f(x, Y)| + |f(x, Y) - L_{\eta}(x)| < \varepsilon.$$

Dus zijn beide limietovergangen verwisselbaar.

Omgekeerd, zijn de herhaalde limieten gelijk, dan is aan (a) en (b) voldaan. Bewijzen we nog, dat ook aan (c) is voldaan.

Kies daartoe 2 willek., pos. getallen ε en α . Bij $\frac{\varepsilon}{3}$ is een interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ te vinden, zoo dat voor x in dit interval:

$$(1') \quad \dots \quad |L_{\xi}\eta - L_{\eta}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Bij $\frac{\varepsilon}{3}$ en α is te bepalen een waarde Y , uit de verz. Q en in $(\eta - \alpha, \eta + \alpha)$ gelegen, zoodat:

$$(2') \quad \dots \quad |L_{\eta}\xi - L_{\xi}(Y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Verder is voor x in zeker interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$:

$$(3') \quad \dots \quad |L_{\xi}(Y) - f(x, Y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Is h de kleinste der waarden δ en δ_1 , dan volgt uit (1'), (2') en (3'), dat voor x in $(\xi - h, \xi + h)$:

$$|L_{\eta}(x) - f(x, Y)| \leq |L_{\eta}(x) - L_{\xi}\eta| + |L_{\eta}\xi - L_{\xi}(Y)| + |L_{\xi}(Y) - f(x, Y)| < \varepsilon.$$

Dus er is quasi-uniforme conv. in ξ .¹⁾

¹⁾ Vrijwel op dezelfde wijze als in den tekst laat zich aantoonen, dat ook de volgende voorwaarden noodig en voldoende zijn: a) $L_{\xi}(y)$ bestaat voor alle waarden y ; b) $L_{\eta}\xi$ bestaat; c) $L_{\eta}(x)$ bestaat voor alle waarden x en deze convergentie is als volgt. Bij willek., pos. ε en α zijn te vinden een interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en een eindig aantal waarden voor y uit de verz. Q

Leest men het tweede gedeelte van het bewijs nauwkeurig na, dan ziet men, dat we in plaats van de gekozen Y ook iedere andere Y' , uit Q en dicht bij η gelegen, hadden kunnen nemen, zoo Y aldus gekozen was, dat

$$|L_{\eta} \xi - L_{\xi}(Y')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

voor Y' gelegen in het segment met η als midden en $2(\eta - Y)$ als lengte. Ook bij de nieuw gekozen Y' zou een interval voor x gevonden zijn, waarin

$$|L_{\eta}(x) - f(x, Y')| < \varepsilon.$$

De lengten dier intervallen zijn echter afhankelijk van $Y(Y')$.¹⁾ De onderste grens van die lengten zal in 't algemeen niet altijd van nul verschillend zijn; was dit toch voor iedere ε (en α) het geval, dat was de convergentie uniform in den zin van § 4, en bestond ook de dubbele limiet. Dit hoeft echter niet steeds het geval te zijn, al bestaan ook de herhaalde limieten en al zijn deze gelijk.

Zooals men zal bemerkt hebben, is het verschil tusschen de hier gedefinieerde, quasi-uniforme convergentie in een punt en de enkelvoudig-uniforme conv. van DINI daarin gelegen, dat wij het interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ doen afhangen van ε en α , terwijl het bij DINI een constante lengte heeft.²⁾

§ 2. Het is onmiddellijk duidelijk, dat voorwaarde (c) uit de vorige § zich laat vervangen door:

en gelegen in $(\eta - a, \eta + a)$, zóó dat bij iedere x in $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en behoorend tot P , is aan te geven een waarde y_x uit dat eindig aantal waarden van y , waarvoor:

$$|L_{\eta}(x) - f(x, y_x)| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

¹⁾ De stelling, welke Hobson in zijn boek: *Theory of functions of a real variable, etc.*, First Ed., p. 309 geeft, doet onder de noodige en voldoende voorwaarden ook vallen de voorwaarde, dat we voor „iedere” Y' van het segment om η een interval voor x kunnen vinden, waarin de ongelijkheid geldt. Daarentegen behoeven we dan „niet” aan te nemen het bestaan van $L_{\eta} \xi$. — De hier gegeven stelling vindt men bij Hobson op p. 310 (Sec. Ed., Vol. I, p. 389).

²⁾ Zie Dini, *Grundlagen für eine Theorie d. Funktionen einer veränderl. reellen Grösze*. Deutsch von Lüroth und Schepp, § 91.

c¹) $L_\eta(x)$ bestaat voor iedere x . Kiezen we uit de lineaire verz. Q een rij y_m (m geheel en pos.), zoo dat $\lim_{m=\infty} y_m = \eta$, dan zal „ $\lim_{m=\infty} f(x, y_m)$ quasi-uniform convergeeren in ξ ”.

D. w. z.: bij twee willek., pos. getallen ε en M zijn te vinden een interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en een geheel getal $\mu > M$, zóó dat voor iedere x uit de verzameling P en in $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ gelegen:

$$\left| \lim_{m=\infty} f(x, y_m) - f(x, y_\mu) \right| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

Voorbeeld: Beschouwen we eens den vorm $\frac{x-y}{x+y}$. De verzamelingen P en Q zullen ieder bestaan uit alle pos. getallen. Dus is 0 een verdichtingspunt van beide. In het punt $(0, 0)$ is $[L_\xi(y)]_{\xi=0} = -1$, $[L_\eta \xi]_{\xi=0} = -1$. Doch $\eta=0$

$[L_\eta(x)]_{\eta=0} = +1$; dus ook $[L_\xi \eta]_{\xi=0} = +1$. De her-

haalde limieten zijn hier niet gelijk. — Er is echter ook geen quasi-uniforme convergentie in $\xi = 0$. Nemen we n.l. ε en α willekeurig positief, dan moest bij vaste Y , in het interval $(-\alpha, +\alpha)$ gelegen en behoorend tot Q , en voor x in een interval $(-\delta, +\delta)$ en behoorende tot P :

$$\left| [L_\eta(x)]_{\eta=0} - \frac{x-Y}{x+Y} \right| < \varepsilon$$

$$\text{of } \left| 1 - \frac{x-Y}{x+Y} \right| < \varepsilon$$

zijn. Welke keuze we echter voor Y doen, steeds zal, als x maar dicht genoeg bij nul ligt, $\frac{x-Y}{x+Y}$ minder van -1 verschillen dan we wenschen. Is $\varepsilon < 2$, dan is het dus bij geen enkele waarde van Y mogelijk een interval voor x te vinden, zoo dat voor iedere x in dat interval de ongelijkheid geldt.

Nemen we $y_m = \frac{1}{m}$ (m geheel), dan blijkt, dat bij deze rij ook aan (c¹) niet is voldaan.

§ 3. De lineaire verzamelingen van § 1 kunnen we, om een verdere uitbreiding te verkrijgen, vervangen door een verzameling P in een p -dimensionale ruimte, die het punt $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ als verdichtingspunt heeft, en door een verzameling Q in een q -dimensionale ruimte, die $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q)$ als verdichtingspunt heeft (deze beide verdichtingspunten behoren niet tot P , resp. Q).

In een $(p + q)$ -dimensionale ruimte wordt nu weer een verzameling gevonden door de coördinaten van ieder punt van P te combineeren met de coördinaten van ieder punt van Q .

Stel $f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ gedefinieerd op die laatste verzameling.

$$\begin{aligned} \text{Noem} \quad \lim_{x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_p = \xi_p} f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \\ = L_{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)} (y_1, y_2, \dots, y_q); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y_1 = \eta_1, \dots, y_q = \eta_q} L_{\xi_1, \dots, \xi_p} (y_1, \dots, y_q) = L_{(\eta_1, \dots, \eta_q); (\xi_1, \dots, \xi_p)}; \\ \lim_{y_1 = \eta_1, \dots, y_q = \eta_q} f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = L_{(\eta_1, \dots, \eta_q)} (x_1, \dots, x_p); \end{aligned}$$

en

$$\lim_{x_1 = \xi_1, \dots, x_p = \xi_p} L_{\eta_1, \dots, \eta_q} (x_1, \dots, x_p) = L_{(\xi_1, \dots, \xi_p); (\eta_1, \dots, \eta_q)}.$$

Opdat nu

$$L_{(\xi_1, \dots, \xi_p); (\eta_1, \dots, \eta_q)} = L_{(\eta_1, \dots, \eta_q); (\xi_1, \dots, \xi_p)},$$

is noodig en voldoende:

- $L_{(\xi_1, \dots, \xi_p)} (y_1, \dots, y_q)$ bestaat in ieder punt van Q ;
- $L_{(\eta_1, \dots, \eta_q); (\xi_1, \dots, \xi_p)}$ bestaat;
- $L_{(\eta_1, \dots, \eta_q)} (x_1, \dots, x_p)$ bestaat in ieder punt van P en

„convergeert quasi-uniform in het punt $(\xi_1, \dots, \xi_p)$.” — Hieronder verstaan we, dat bij willek. pos. ε en een willekeurige

omgeving $O_{\eta}^1)$ van $(\eta_1, \dots, \eta_q)$ zijn te vinden een omgeving O_{ξ} van $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ en een punt $(Y_1, \dots, Y_q)$ behoorende tot Q en gelegen in O_{η} , zóó dat voor ieder punt van P , in O_{ξ} gelegen:

$$|L_{(\eta_1, \dots, \eta_q)}(x_1, \dots, x_p) - f(x_1, \dots, x_p, Y_1, \dots, Y_q)| < \varepsilon.$$

We krijgen een voorbeeld, waarin de herhaalde limieten niet gelijk zijn en dan ook geen quasi-uniforme convergentie bestaat, door in $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ x en y te vervangen resp. door $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2}$ en $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_q^2}$ en te kiezen $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \dots, \xi_p = 0; \eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \dots, \eta_q = 0$.

§ 4. Wordt behalve de gelijkheid der beide herhaalde limieten uit § 1 bovendien nog geeischt, dat zij gelijk zijn aan de waarde, die bij den twee-dimensionalen limietovergang: $\lim_{x=\xi, y=\eta} f(x, y)$ of $L_{(\xi, \eta)}$ wordt verkregen, dan moet aan de noodige en voldoende voorwaarden nog als vierde worden toegevoegd:

d) de onderste grens van de lengten der op p. 7. 1^e al. aangeduide intervallen zal van nul verschillend zijn.

Aan de voorwaarden (c) en (d) samen geven we den naam van *uniforme convergentie in het punt ξ* .²⁾

Ook op de volgende wijze laat zich dit begrip definieeren:

Onder „uniforme convergentie van $L_{\eta}(x)$ in het punt ξ ” verstaan we, dat het bij willek. pos. ε mogelijk is te bepalen een interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en een interval $(\eta - h, \eta + h)$, zóó dat voor x in $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en behoorend tot de verz. P en voor Y in $(\eta - h, \eta + h)$ en behoorend tot de verz. Q (P en Q zijn gedefinieerd in § 1):

¹⁾ Voor de definitie van omgeving zie b.v. Osgood, *Lehrbuch d. Functionen*, Ier Band, Kap. I, § 8.

²⁾ Hobson spreekt over een „punt van uniforme convergentie.” Zie *Theory of functions etc.*, First Ed., p. 309 (Sec. Ed., p. 388).

$$|L_{\eta}(x) - f(x, Y)| < \varepsilon.$$

Het verschil, dat er is tusschen uniforme convergentie in een punt en uniforme convergentie op een segment is van dezelfde soort als dat tusschen quasi-uniforme convergentie in een punt en enkelvoudig-uniforme convergentie op een segment. Bij de beschouwing van de convergentie op een segment blijft dit segment vanzelf constant; bij de convergentie in een punt ξ hangt de lengte van het interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ o.m. af van de waarde van ε .

Bewijs: We onderstellen hierbij weer stilzwijgend, dat de te beschouwen waarden van x en Y behooren resp. tot P en tot Q .

Zij aan de vier voorwaarden voldaan. Volgens § 1 bestaan dan beide herhaalde limieten en zijn gelijk. Bepaal bij willekeurig pos. ε een getal δ , zoo dat voor x in het interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$:

$$|L_{\eta}(x) - L_{\xi\eta}| < \varepsilon.$$

Bepaal bij ε verder δ_1 en h , zoo dat voor x in het interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ en voor Y in $(\eta - h, \eta + h)$:

$$|f(x, Y) - L_{\eta}(x)| < \varepsilon.$$

Dan is voor alle punten x, Y , waarvoor x ligt in het kleinste der beide intervallen om ξ en waarvoor Y ligt in $(\eta - h, \eta + h)$:

$$|f(x, Y) - L_{\xi\eta}| \leq |f(x, Y) - L_{\eta}(x)| + |L_{\eta}(x) - L_{\xi\eta}| < 2\varepsilon.$$

Dus $L_{(\xi, \eta)}$ bestaat en is gelijk aan elk der herhaalde limieten.

Dat de drie eerste voorwaarden ook noodig zijn, werd bewezen in § 1. De noodzakelijkheid der uniforme convergentie van $L_{\eta}(x)$ in het punt ξ volgt op eenvoudige wijze uit de definitie van twee-dimensionalen limietovergang.

We kunnen uit de noodige en voldoende voorwaarden de in § 1 onder (b) genoemde weglaten. Dan krijgen we dus:

Opdat op de in § 1 gedefinieerde verzameling (x, y)

$$L_{\xi\eta} = L_{\eta\xi} = L_{(\xi, \eta)}$$

is noodig en voldoende, dat:

a) $L_{\xi}(y)$ bestaat voor alle waarden y ;

b) $L_\eta(x)$ bestaat voor alle waarden x en „uniform convergeert in het punt ξ .”

Bewijs: We beschouwen slechts waarden der onafh. veranderlijken behoorend tot P en Q .

Laat aan (a) en (b) zijn voldaan. Dan is in de eerste plaats te bewijzen, dat $L_\eta(x)$ tot een limiet nadert, als x nadert tot ξ .

Steeds is:

$$|L_\eta(x_1) - L_\eta(x_2)| \leq |L_\eta(x_1) - f(x_1, Y)| + |f(x_1, Y) - f(x_2, Y)| + |f(x_2, Y) - L_\eta(x_2)|.$$

Bij willekeurig pos. ε zijn volgens (b) δ en h zoo te bepalen, dat voor alle waarden x in $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en alle waarden Y in $(\eta - h, \eta + h)$:

$$|L_\eta(x) - f(x, Y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is. Kies een bepaalde Y , gelegen in $(\eta - h, \eta + h)$. Volgens (a) is te vinden een interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$, binnen het interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, zoodat bij de gekozen Y :

$$|f(x_1, Y) - f(x_2, Y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is voor x_1 en x_2 in dit kleinste interval. Hierin is dus:

$$|L_\eta(x_1) - L_\eta(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$L_{\xi\eta}$ bestaat.

Merken we op, dat het voor dit gedeelte van het bewijs reeds voldoende was geweest onder (b) de quasi-uniforme convergentie te onderstellen.

Beschouwen we nu het verschil $L_\xi(Y) - L_{\xi\eta}$.

$$|L_\xi(Y) - L_{\xi\eta}| \leq |L_\xi(Y) - f(x, Y)| + |f(x, Y) - L_\eta(x)| + |L_\eta(x) - L_{\xi\eta}|.$$

Volgens (b) zijn bij willek. pos. ε te bepalen δ en h , zoo dat voor alle waarden x in $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en alle waarden Y in $(\eta - h, \eta + h)$:

$$|f(x, Y) - L_\eta(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is. Verder is te bepalen een interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ voor x , zoo dat:

$$|L_{\eta}(x) - L_{\xi\eta}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is. Voor x in het kleinste der twee intervallen om ξ en voor Y in $(\eta - h, \eta + h)$ is dus aan beide ongelijkheden voldaan.

Neem nu voor Y een bepaalde waarde uit $(\eta - h, \eta + h)$. Dan kunnen we binnen het kleinste interval om ξ een nieuw interval $(\xi - \delta_2, \xi + \delta_2)$ bepalen, zoo dat bij de gekozen Y en voor ieder in dit interval gelegen getal x :

$$|L_{\xi}(Y) - f(x, Y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is. Dus wordt:

$$|L_{\xi}(Y) - L_{\xi\eta}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Deze redeneering geldt voor iedere Y in $(\eta - h, \eta + h)$ gelegen. Dus $L_{\eta\xi}$ bestaat en is gelijk aan $L_{\xi\eta}$.

Verder is:

$$|f(x, Y) - L_{\xi\eta}| \leq |f(x, Y) - L_{\eta}(x)| + |L_{\eta}(x) - L_{\xi\eta}|.$$

Volgens (b) zijn bij willek. pos. ε te vinden twee getallen δ en h , zoo dat voor x in $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ en voor Y in $(\eta - h, \eta + h)$:

$$|f(x, Y) - L_{\eta}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

is. Een tweede interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ voor x is te vinden, waarin:

$$|L_{\eta}(x) - L_{\xi\eta}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

is. Voor x in het kleinste der beide intervallen om ξ en voor Y in $(\eta - h, \eta + h)$ is dus:

$$|f(x, Y) - L_{\xi\eta}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dus geeft de twee-dimensionale limietovergang dezelfde

waarde als de herhaalde limieten. De voorwaarden zijn voldoende.¹⁾

Dat ze, tenslotte, ook noodig zijn, is evident.

§ 5. We zagen, dat we in het eerste gedeelte van ons laatste bewijs reeds klaar zouden zijn gekomen met quasi-uniforme conv. van $L_{\eta}(x)$ in ξ aan te nemen. Dat brengt ons tot de volgende stelling:

$f(x, y)$ zij gedefinieerd op de in § 1 genoemde, tweedimensionale verzameling. Noodige en voldoende voorwaarden, opdat nu:

$$L_{\xi\eta} = L_{\eta\xi}$$

is, zijn:

a) $L_{\xi}(y)$ bestaat voor alle y van Q en convergeert quasi-uniform in η ;

b) $L_{\eta}(x)$ bestaat voor alle x van P en convergeert quasi-uniform in ξ .

Bewijs: Zij aan (a) en (b) voldaan. Volgens de gemaakte opmerking bestaat $L_{\xi\eta}$.²⁾ Dus, volgens de stelling van § 1, volgt hieruit en uit voorwaarde (a), dat ook $L_{\eta\xi}$ bestaat en gelijk is aan de andere herhaalde limiet.

De voorwaarden zijn dus voldoende.

Dat ze noodig zijn, wordt bewezen als in § 1.

§ 6. Voorbeeld:³⁾ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x |n(n+1)x^2 - 1|}{|1 + n^2 x^2| |1 + (n+1)^2 x^2|}$. De

¹⁾ Uit dit laatste deel van het bewijs blijkt, dat, als we slechts vergelangen, dat

$$L_{\xi\eta} = L_{(\xi\eta)}$$

is, daartoe noodig en voldoende is:

a) $L_{\eta}(x)$ bestaat voor iedere x van P en „convergeert uniform in het punt ξ ”;

b) $L_{\xi\eta}$ bestaat.

²⁾ De quasi-uniforme convergentie onder (b) is te vervangen door de volgende, minder eischende voorwaarde: bij ieder willekeurig pos. getal ε bestaat minstens één getal Y en daarbij een interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, zoodat

$$|L_{\eta}(x) - f(x, Y)| < \varepsilon$$

is voor x liggend in $(\xi - \delta, \xi + \delta)$.

³⁾ Zie Whittaker and Watson, *Modern Analysis*, Sec. Ed., p. 46.

verzameling P voor x zal bestaan uit alle pos. getallen, de verzameling Q voor n uit alle pos. geheele getallen. Verder zullen we de onafh. veranderlijken doen convergeeren resp. naar $\xi = 0$ en $\eta = +\infty$.

In de definitie van quasi-uniforme convergentie in een punt beschouwdn we verdichtingspunten ξ en η in het eindige. De uitbreiding, die we hier noodig hebben, op het geval, dat een of beide in het oneindige liggen, ligt voor de hand (vgl. ook § 2).

Daar

$$\frac{x \{ n(n+1)x^2 - 1 \}}{\{ 1 + n^2 x^2 \} \{ 1 + (n+1)^2 x^2 \}} = \frac{nx}{1 + n^2 x^2} - \frac{(n+1)x}{1 + (n+1)^2 x^2},$$

is de som van n termen $S_n = (x) \frac{x}{1+x^2} - \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2 x^2}$.

Dus:

$$[L_\eta(x)]_{\eta=+\infty} = \frac{x}{1+x^2} \text{ en } [L_\xi \eta]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=+\infty}} = 0;$$

$$[L_\xi(n)]_{\xi=0} = 0 \text{ en } [L_\eta \xi]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=+\infty}} = 0.$$

De beide herhaalde limieten zijn gelijk. Dus moet $[L_\eta(x)]_{\eta=+\infty}$ quasi-uniform convergeeren in $\xi = 0$.

Kies twee pos. getallen: $\varepsilon < 1/2$ en N . Dan moet bij vaste $n \geq N$ en voor x in een zeker interval om $\xi = 0$ de ongelijkheid:

$|R_n(x)| < \varepsilon$ gelden, dus $\left| \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2 x^2} \right| < \varepsilon$. Dat is zoo, als òf

$$|x| > \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2} - 4} \right\}$$

$$\text{òf } |x| < \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \varepsilon^{-1} - \sqrt{\varepsilon^{-2} - 4} \right\}$$

is. De laatste ongelijkheid toont ons de mogelijkheid bij pos. $\varepsilon < 1/2$ en bij iedere $n \geq N$ te vinden een interval voor x . Het is echter niet mogelijk een interval voor x te vinden, waarvan de lengte onafhankelijk van n is. Dus er is quasi-uniforme conv. in $\xi = 0$, daarentegen geen uniforme conv.

De andere ongelijkheid geeft de quasi-uniforme conv. van $[L_{\xi}(n)]_{\xi=0}$ in het punt $\eta = \infty$; er is weer geen uniforme conv. in dat punt.

Volgens § 4 kan nu niet bestaan $[L_{(\xi, \eta)}]_{\xi=0, \eta=+\infty}$. En dat dit zoo is, blijkt daaruit, dat we n naar $+\infty$ en x naar nul kunnen doen convergeeren, zoodanig dat $\lim_{x=0, n=+\infty} (n+1) \cdot x$ niet bestaat.

§ 7. Bij meervoudig herhaalde limieten, wordt alles veel gecompliceerder. Formuleeren we eerst een deel onzer stellingen voor drievoudig herhaalde limieten. De uitbreiding op meervoudig herhaalde limieten volgt daarna vanzelf.

Herhaalde limieten zullen we aanduiden door de letter L , waarbij de indices, onder aan de letter geplaatst, de limietwaarden der onafh. veranderlijken aangeven; tevens geeft hun volgorde van rechts naar links de volgorde der limietovergangen aan. Doen we een limietovergang plaats vinden in een ruimte van twee- of meer dimensies, dan duiden we dit aan door de indices, die daarbij de limietwaarden der corresponderende veranderlijken voorstellen, tusschen haakjes te plaatsen.

Stelling: Laat $f(x, y, z)$ gedefinieerd zijn voor de punten (x, y, z) eener drie-dimensionale verzameling van de volgende soort. De waarden x vormen een lineaire verz. P met ξ als verdichtingspunt, de waarden y een lineaire verz. Q met η en de waarden z een lineaire verz. R met ζ als verdichtingspunt. De punten der drie-dim. verz. worden verkregen door te nemen alle mogelijke combinaties van waarden x, y en z uit P, Q en R .

Veronderstel, dat bestaan $L_{\zeta}(x, y)$ voor alle combinaties x en y uit P en Q ; $L_{\xi}(y, z)$ voor alle combinaties y en z uit Q en R ; en $L_{\eta\xi}(z)$ voor alle waarden z uit R .

Opdat nu ook $L_{\zeta\eta\xi}$ bestaat, is voldoende dat „ $L_{\eta\xi}(z)$ quasi-uniform convergeert t. o. v. $f(x, y, z)$ in het punt ζ .”

Onder „quasi-uniforme convergentie van $L_{\eta\xi}(z)$ ten opz. van $f(x, y, z)$ in het punt ζ ” verstaan we dat bij willekeurig

pos. ε en bij willekeurige intervallen $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, $(\eta - \delta_1, \eta + \delta_1)$ zijn te vinden vaste waarden X en Y , uit P en Q en in die intervallen gelegen, en een interval $(\zeta - \delta_2, \zeta + \delta_2)$, zoo dat voor iedere waarde z in dit interval en behoorende tot R :

$$|L_{\eta \xi}(z) - f(X, Y, z)| < \varepsilon$$

is.

Een soortgelijke stelling bestaat bij tweevoudig herhaalde limieten (vgl. het bewijs op p. 14).

Bewijs: Bij dit en alle volgende bewijzen bij drievoudig herhaalde limieten beschouwen we stilzwijgend steeds waarden der onafh. veranderlijken, die behooren tot de lineaire verz. P , Q en R .

We hebben:

$$|L_{\eta \xi}(z_1) - L_{\eta \xi}(z_2)| \leq |L_{\eta \xi}(z_1) - f(X, Y, z_1)| + \\ + |f(X, Y, z_1) - f(X, Y, z_2)| + |f(X, Y, z_2) - L_{\eta \xi}(z_2)|.$$

X, Y, z_1 en z_2 worden genomen als volgt. Bij willekeurig pos. ε zijn te bepalen vaste waarden X en Y en een interval $(\zeta - \delta, \zeta + \delta)$, zoo dat voor waarden z_1 en z_2 , in dat interval gelegen:

$$|L_{\eta \xi}(z_1) - f(X, Y, z_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

en

$$|L_{\eta \xi}(z_2) - f(X, Y, z_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is. Tevens zorgen we, dat z_1 en z_2 liggen in een interval $(\zeta - \delta_1, \zeta + \delta_1)$, zoo dat:

$$|f(X, Y, z_1) - f(X, Y, z_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is. In het kleinste der beide intervallen voor z is dus:

$$|L_{\eta \xi}(z_1) - L_{\eta \xi}(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dus $L_{\zeta \eta \xi}$ bestaat.

Zooals uit het bewijs blijkt, hadden we de quasi-uniforme conv. t. o. v $f(x, y, z)$ ook kunnen vervangen door de minder eischende voorwaarde: *bij ieder willek. pos. getal ε zijn te*

vinden „vaste” waarden X en Y voor x en y , en een interval $(\zeta - \delta, \zeta + \delta)$, zoo dat voor iedere waarde z in dit interval en tot R behoorend:

$$|L_{\eta \zeta}(z) - f(X, Y, z)| < \varepsilon$$

is.

§ 8. De volgende stelling is tot op zekere hoogte als een omkeering van de vorige te beschouwen.

Stelling: $f(x, y, z)$ zij gedefinieerd op de in § 7 genoemde, drie-dim. verzameling.

Bestaan $L_{\zeta \eta \xi}$ en $L_{\xi \eta \zeta}$ (en dus ook de voorafgaande limieten) en zijn ze gelijk, dan convergeert $L_{\eta \zeta}(x)$ quasi-uniform t. o. v. $f(x, y, z)$ in ζ .

Bewijs: Kies ε (pos.) en de intervallen $(\eta - \delta, \eta + \delta)$, $(\zeta - \delta_1, \zeta + \delta_1)$ willekeurig. Het is nu mogelijk een interval $(\xi - \delta_2, \xi + \delta_2)$ te bepalen, zoo dat voor x in dat interval:

$$|L_{\xi \eta \zeta} - L_{\eta \zeta}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

is.

Kies in $(\zeta - \delta_1, \zeta + \delta_1)$ het punt Z zoodanig dat:

$$|L_{\xi \eta \xi} - L_{\eta \xi}(Z)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

is. Kies vervolgens in $(\eta - \delta, \eta + \delta)$ het punt Y zoodanig dat:

$$|L_{\eta \xi}(Z) - L_{\xi}(Y, Z)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

is.

In zeker interval $(\xi - \delta_3, \xi + \delta_3)$ voor x , dat binnen $(\xi - \delta_2, \xi + \delta_2)$ ligt, is:

$$|L_{\xi}(Y, Z) - f(x, Y, Z)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Dus volgt voor x in $(\xi - \delta_3, \xi + \delta_3)$, door optelling uit bovenstaande ongelijkheden:

$$|L_{\eta \zeta}(x) - f(x, Y, Z)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

$L_{\eta \zeta}(x)$ convergeert quasi-uniform t. o. v. $f(x, y, z)$ in ξ .

Op dezelfde wijze gaat het bewijs voor $L_{\eta \xi}(z)$.

Uit het bewijs blijkt, dat we in plaats van de gekozen Z ook ieder getal uit de verz. R en gelegen binnen zeker interval $(\xi - \alpha, \xi + \alpha)$ hadden kunnen kiezen. Is Z eenmaal gekozen, dan zijn ook voor Y nog alle waarden van Q mogelijk, die in een interval $(\eta - \beta, \eta + \beta)$ liggen. De lengte van dat interval zal een functie zijn van Z : $l(Z)$. Stel haar onderste grens is van nul verschillend: l_0 . Bij alle combinaties Y en Z uit $(\eta - \frac{1}{2}l_0, \eta + \frac{1}{2}l_0)$ en $(\xi - \alpha, \xi + \alpha)$ behoort een interval om ξ , wiens lengte een functie is van Y en Z : $\lambda(Y, Z)$. Is de onderste grens van $\lambda(Y, Z)$ nu ook nog van nul verschillend, dan is de convergentie van $L_{\eta\xi}(x)$ uniform t. o. v. $f(x, y, z)$ in ξ , in den zin van § 19, en bestaat ook de drievoudige limiet. Dit is natuurlijk in 't algemeen niet het geval. — Vgl. § 1, voorlaatste alinea.

§ 9. Volgens § 7 is uit het bestaan der enkele limieten en uit de quasi-uniforme convergentie t. o. v. $f(x, y, z)$ der tweevoudig herhaalde limieten te bewijzen het bestaan van de drievoudig herhaalde limieten. Men zou nu verwachten, dat in analogie met § 5 ook hare gelijkheid zou zijn aan te toonen. De aldus gevonden stelling ware dan volkomen het omgekeerde van de voorafgaande. Dit bleek echter niet mogelijk. Nog een laatste voorwaarde moet worden toegevoegd. En de aldus gevonden voorwaarden zijn niet alleen voldoende, doch ook noodzakelijk.

We laten hier echter eerst het bewijs volgen van de stelling, die het analogon is van die van § 1.

§ 10. $f(x, y, z)$ zij gedef. op de in § 7 genoemde, driedim. verzameling.

Opdat:

$$L_{\xi\eta\xi} = L_{\xi\eta\xi},$$

is noodig en voldoende:

- $L_{\xi\eta\xi}$ bestaat;
- $L_{\eta\xi}(x)$ bestaat voor alle getallen x van P ;
- bij willek. pos. ε , δ en Δ zijn te bepalen vaste Y en

Z uit de verz. Q en R , waarbij Z in het interval $(\zeta - \delta, \zeta + \delta)$ met de beide eig.:

1e. er bestaat een zeker interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$, zoodat voor iedere x van de verzameling P in dat interval:

$$|L_{\eta\zeta}(x) - f(x, Y, Z)| < \varepsilon \quad \text{is;}$$

2e. onder de in $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ gelegen punten x van P is te vinden een punt x' , waarvoor

$$|f(x', Y, Z) - L_{\eta\xi}(Z)| < \varepsilon$$

en $|x' - \xi| < \Delta$ is.

Bewijs: Zij aan de voorwaarden voldaan. Volgens § 7 bestaan „beide”, drievoudig herhaalde limieten. Het is mogelijk bij willek. pos. ε te bepalen intervallen $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$ voor x en $(\zeta - \delta, \zeta + \delta)$ voor z , zoo dat voor waarden in die intervallen:

$$(1) \quad \dots \quad |L_{\xi\eta\zeta} - L_{\eta\zeta}(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{en}$$

$$(2) \quad \dots \quad |L_{\xi\eta\xi} - L_{\eta\xi}(z)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

is.

Volgens (c) zijn bij ε , δ en Δ te bepalen vaste waarden Y en Z , waarbij Z in het interval $(\zeta - \delta, \zeta + \delta)$, en een interval $(\xi - \Delta_1, \xi + \Delta_1)$, zoo dat voor x in dit interval gelegen:

$$(3) \quad \dots \quad |L_{\eta\zeta}(x) - f(x, Y, Z)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

is. Volgens voorwaarde (c, 2) is het tevens mogelijk het punt x' te bepalen, zoo dat:

$$(4) \quad \dots \quad |f(x', Y, Z) - L_{\eta\xi}(Z)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

is, terwijl x' ligt in $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$ en in $(\xi - \Delta_1, \xi + \Delta_1)$.

Volgens (1), (2), (3) en (4) is dus voor het punt (x', Y, Z) :

$$\begin{aligned} |L_{\xi\eta\zeta} - L_{\xi\eta\xi}| &\leq |L_{\xi\eta\zeta} - L_{\eta\zeta}(x')| + \\ &+ |L_{\eta\zeta}(x') - f(x', Y, Z)| + |f(x', Y, Z) - L_{\eta\xi}(Z)| + \\ &+ |L_{\eta\xi}(Z) - L_{\xi\eta\xi}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

ε is willek. klein. Bijgevolg zijn de drievoudig herhaalde limieten gelijk.

Nemen we omgekeerd haar gelijkheid aan. Aan (a) en (b) is dan reeds vanzelf voldaan. Toonen we dus nog voorwaarde (c) aan.

Kies ε, δ en Δ willekeurig pos. Bij ε is te bepalen een interval $(\xi - \Delta_1, \xi + \Delta_1)$ voor x en een interval $(\zeta - \delta_1, \zeta + \delta_1)$ voor z , zoo dat voor waarden in die intervallen:

$$(5) \quad \dots \dots \dots |L_{\xi\eta\zeta} - L_{\eta\zeta}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

en

$$(6) \quad \dots \dots \dots |L_{\zeta\eta\xi} - L_{\eta\xi}(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is.

Volgens § 8 zijn te bepalen getallen Y en Z , waarbij Z in het interval $(\zeta - \delta_1, \zeta + \delta_1)$ en in $(\zeta - \delta, \zeta + \delta)$, zoo dat:

$$(7) \quad \dots \dots \dots |L_{\eta\zeta}(x) - f(x, Y, Z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

is voor x in een zeker interval $(\xi - \Delta_2, \xi + \Delta_2)$.

Kies x' binnen het kleinste der intervallen $(\xi - \Delta, \xi + \Delta)$, $(\xi - \Delta_1, \xi + \Delta_1)$ en $(\xi - \Delta_2, \xi + \Delta_2)$. Dan gelden voor het punt (x', Y, Z) de 3 ongelijkheden (5), (6) en (7). Dus:

$$|f(x', Y, Z) - L_{\eta\xi}(Z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aan (c) is voldaan.¹⁾

§ 11. We geven de voorwaarden den volgenden, symmetrischen vorm:

Opdat:

$$L_{\xi\eta\zeta} = L_{\zeta\eta\xi},$$

is noodig en voldoende:

a) $L_{\eta\xi}(z)$ en $L_{\eta\zeta}(x)$ bestaan, respectievelijk voor alle getallen z uit R en voor alle getallen x uit P ;

b) bij willekeurige, positieve ε zijn te vinden vaste waarden X en Y uit de verzameling P en Q , en een interval

¹⁾ Uit het laatste gedeelte van het bewijs blijkt, dat we inplaats van x' ook „ieder” ander getal x van de verzameling P hadden kunnen kiezen, dat dichter bij ξ ligt.

$(\zeta - \delta, \zeta + \delta)$, zoo dat voor iedere waarde van R in dit interval:

$$|L_{\eta\xi}(z) - f(X, Y, z)| < \varepsilon \quad \text{is;}$$

c) als in § 10 onder (c).

Het bewijs volgt onmiddellijk uit § 7 en § 10.

Tenslotte geven we de volgende stelling, analoog met die van § 5:

Noodige en voldoende voorwaarden, opdat:

$$L_{\xi\eta\zeta} = L_{\zeta\eta\xi},$$

zijn:

a) $L_{\eta\xi}(z)$ bestaat voor alle z uit R en convergeert quasi-uniform t.o.v. $f(x, y, z)$ in ζ ;

b) $L_{\eta\zeta}(x)$ bestaat voor alle x uit P en convergeert quasi-uniform t.o.v. $f(x, y, z)$ in ξ .

c) onder de volgens (b) bij willekeurige, positieve ε en bij willekeurige intervallen $(\eta - \delta, \eta + \delta)$, $(\zeta - \delta_1, \zeta + \delta_1)$ behoorende puntverzamelingen (x, Y, Z) is te vinden een verzameling met een punt (x', Y, Z) , zoo dat bij vooraf willekeurig gekozen, positieve Δ :

$$|f(x', Y, Z) - L_{\eta\xi}(Z)| < \varepsilon$$

$$\text{en} \quad |x' - \xi| < \Delta \quad \text{is.}$$

De noodzakelijkheid dezer voorwaarden laat zich gemakkelijk bewijzen met behulp van § 8 en de noot bij § 10.

§ 12. Geheel als in § 10 hebben we voor de gelijkheid van $L_{\xi\zeta\eta}$ en $L_{\zeta\eta\xi}$ de volgende stelling:

$f(x, y, z)$ zij gedef. op de in § 7 genoemde, drie-dim. verzameling.

Opdat:

$$L_{\xi\zeta\eta} = L_{\zeta\eta\xi},$$

is nodig en voldoende:

a) $L_{\zeta\eta\xi}$ bestaat;

b) $L_{\zeta\eta}(x)$ bestaat voor alle getallen x van P ;

c) bij willek. pos. ε , δ en Δ zijn te bepalen vaste Y en Z uit de verz. Q en R , waarbij Z (de veranderlijke van den laatsten limietovergang uit het rechter lid) in het interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, met de beide eig.:

1e. er bestaat een zeker interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$, zoodat voor iedere x van de verz. P in dat interval:

$$|L_{\zeta\eta}(x) - f(x, Y, Z)| < \varepsilon \quad \text{is;}$$

2e onder de in $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ gelegen punten x van P is steeds te vinden een punt x' , waarvoor:

$$|f(x', Y, Z) - L_{\eta\xi}(Z)| < \varepsilon$$

en $|x' - \xi| < \Delta$ is.

In plaats van te letten op de veranderlijke x , behorende bij den laatsten limietovergang in het linkerlid kunnen we bij het formuleeren der voorwaarden ook letten op de veranderlijke z , behorende bij den laatsten limietovergang rechts. Stelling en bewijs worden dan eenigszins anders. Voor het bewijs is het nuttig de hulpstellingen van de §§ 7 en 8 uit te breiden. We zullen die nieuwe hulpstellingen en het bedoelde bewijs zoo dadelijk geven voor het algemeene geval.

In het hier beschouwde geval luidt de stelling:

Opdat:

$$L_{\xi\zeta\eta} = L_{\zeta\eta\xi},$$

is noodig en voldoende:

- a) $L_{\xi\zeta\eta}$ bestaat;
- b) $L_{\eta\xi}(z)$ bestaat voor alle getallen z van R ;
- c) bij willekeurige, positieve ε , δ [en Δ] is te bepalen een vaste X , in het interval $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ gelegen, met de eigenschap:

1e. er bestaat een zeker interval $(\zeta - \delta_1, \zeta + \delta_1)$, zoodat voor iedere z van R in dit interval:

$$|L_{\eta\xi}(z) - L_{\eta}(X, z)| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

[2e onder de in $(\zeta - \delta_1, \zeta + \delta_1)$ gelegen punten z van R is steeds te vinden een punt z' , waarvoor:

$$|L_{\eta}(X, z') - L_{\zeta\eta}(X)| < \varepsilon$$

en $|z' - \zeta| < \Delta$ is].

Aan (c, 2) is hier natuurlijk vanzelf voldaan.

Uit de beide laatste stellingen laten zich ook weer symmetrische vormen der voorwaarden afleiden.

§ 13. Gaan we nu over tot het algemeene geval.

We beschouwen n lineaire verzamelingen $E_1, E_2, \dots, E_n$ (n geheel en positief), die respectievelijk $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tot verdichtingspunt hebben; $x_1, x_2, \dots, x_n$ zullen willekeurige elementen voorstellen, resp. van $E_1, E_2, \dots, E_n$. De n verzamelingen vormen een uit n elementen bestaand stelsel. We kunnen die n elementen op vooraf willekeurig aan te geven wijze ordenen. De k eerste elementen vormen dan een geordend stelsel, dat we voorstellen door S_k , de overige elementen een geordend stelsel, voor te stellen door S_k' , (dus met behulp van een accent). S_k' heet het *complementaire* stelsel van S_k . Het stelsel S_k bestaat uit minstens nul en hoogstens n elementen.

Verder beschouwen we nog een lineaire verzameling $E(y)$, met η tot verdichtingspunt.

Laat $f(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$ gedefinieerd zijn voor alle combinaties $(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$ van getallen uit de verzamelingen $E(y), E_1, E_2, \dots, E_n$.

S_k moge bestaan uit de verzamelingen $E_{a_1}, E_{a_2}, \dots, E_{a_k}$ (en wel in deze volgorde). Een combinatie van getallen $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_k}$ uit de verzamelingen van S_k duiden we verkort aan door k ; een dergelijke combinatie van getallen uit de verzamelingen van het stelsel S_k' , duiden aan door k' . We spreken af onder $f(y, k, k')$ te verstaan $f(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Evenzoo schrijven we een functie F van de veranderlijken uit het stelsel S_k verkort $F(k)$; op gelijke wijze laten zich ook verklaren de notaties: $F(k')$, $F(y, k)$, $F(y, k')$. — Aan $k(k')$ een bepaalde waarde geven wil zeggen: uit iedere verzameling van het stelsel $S_k(S_k')$ een bepaald getal nemen.

Bestaat het stelsel S_k uit nul elementen, dan verstaan we

onder $L_z(y, k')$ eenvoudig $f(y, k')$; als S_k uit de verzamelingen $E_{a_1}, E_{a_2}, \dots, E_{a_k}$ (en wel in deze volgorde) bestaat, verstaan we onder $L_z(y, k')$ de limiet $L_{\xi_{a_k} \dots \xi_{a_2} \xi_{a_1}}(y, k')$. In 't algemeen zullen indices z, z', η , onder aan de letter L geplaatst, limietovergangen aangeven. Daarbij zullen de limietovergangen, door $z(z')$ aangegeven, in dezelfde volgorde worden uitgevoerd als waarin de bijbehorende verzamelingen geplaatst zijn in het stelsel $S_k(S_k')$. De limietovergang(en), bij een index behorend, die rechts van een anderen index is geplaatst, gaat(n) aan de(n) bij den laatsten index behorende(n) limietovergang(en) vooraf.

Behalve van y en het stelsel veranderlijken $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hadden we de functie f ook nog van een of meer andere veranderlijken (z , enz.) kunnen doen afhangen. De daarbij te gebruiken notaties liggen, na het voorafgaande, voor de hand.

§ 14. Stel $L_{\xi_n \xi_{n-1} \dots \xi_2 \xi_1}(y) = F(y)$. We zeggen, dat $F(y)$ in het punt η quasi-uniform t. o. v. $L_z(y, k')$ convergeert, als bij een willekeurig positief getal ε en bij willekeurige intervallen om de verdichtingspunten (ξ) der verzamelingen van het stelsel S_k' , zijn te vinden:

1^e een interval $(\eta - \delta, \eta + \delta)$,

2^e een bepaalde waarde K' van k' , waarbij de verschillende getalwaarden uit K' liggen in de intervallen om de bijbehorende verdichtingspunten, met de eigenschap, dat voor iedere y van $E(y)$ in $(\eta - \delta, \eta + \delta)$ de ongelijkheid:

$$|F(y) - L_z(y, K')| < \varepsilon$$

geldt.

In de definitie onderstellen we stilzwijgend, dat $F(y)$ bestaat voor alle waarden y uit de verzameling $E(y)$ en dat $L_z(y, k')$ bestaat voor alle combinaties van waarden uit de verzameling $E(y)$ en die van het stelsel S_k' .

Bij de definitie zijn twee grensgevallen te onderscheiden, n.l. S_k bevat geen- of S_k bevat alle elementen van het stelsel

$E_1, E_2, \dots, E_n$. In het eerste geval is de ongelijkheid ook te schrijven in den vorm:

$$|F(y) - f(y, K')| < \varepsilon;$$

in het tweede geval wordt ze: $0 < \varepsilon$.

Hangt de functie f ook nog van een veranderlijke z af, dan moet deze in de definitie van quasi-uniforme convergentie gerekend worden tot de veranderlijken van het stelsel $S_{k'}$.

§ 15. *Hulpstelling I:* $f(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$ zij gedefinieerd als in § 13 aangegeven.

Veronderstel:

a) $F(y) = L_{\xi_n \xi_{n-1} \dots \xi_2 \xi_1}(y)$ bestaat voor alle getallen y uit $E(y)$;

b) $L_{\eta \kappa}(k')$ bestaat voor alle combinaties van getallen uit de verzamelingen van $S_{k'}$. Convergeert nu bovendien $F(y)$ in het punt η quasi-uniform t.o.v. $L_{\kappa}(y, k')$, dan bestaat ook $\lim_{y=\eta} F(y)$.

Het bewijs laat zich geven als in § 7.

De voorwaarde, dat de getallen van K' in willekeurig kleine intervallen om de overeenkomstige verdichtingspunten moeten liggen, hadden we ook hier weg kunnen laten; deze voorwaarde is in het begrip van quasi-uniforme convergentie besloten.

§ 16. *Hulpstelling II:* $f(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$ zij gedefinieerd als in § 13 aangegeven. Laat σ aangeven de limietovergangen, bij de verzamelingen $E_1, E_2, \dots, E_n$ behoorend, en wel in vooraf willekeurig gekozen volgorde. Bestaan $L_{\eta \sigma}$ en $L_{\kappa' \eta \kappa}$ en zijn ze gelijk, dan convergeert $L_{\sigma}(y)$ in η quasi-uniform t. o. v. $L_{\kappa}(y, k')$.

Bewijs: Kies een willekeurig positief getal ε en willekeurige intervallen om de verdichtingspunten, behoorend bij het stelsel $S_{k'}$.

Het is nu mogelijk een interval $(\eta - \delta, \eta + \delta)$ te bepalen, zoo dat voor iedere y van $E(y)$ in dit interval:

$$|L_{\eta \sigma} - L_{\sigma}(y)| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

Stel, dat de verdichtingspunten, behoorende bij de verzamelingen van het stelsel S_k , gerangschikt op dezelfde wijze als die verzamelingen, zijn $\xi_{b_1}, \xi_{b_2}, \dots, \xi_{b_k}$.

Kies in het om ξ_{b_k} aangenomen interval het punt X_{b_k} zoodanig dat:

$$|L_{\eta' \eta} - L_{(\eta' - 1) \eta}(X_{b_k})| < \varepsilon \quad \text{is;}$$

hierbij duidt de index $(\eta' - 1)$ dezelfde limietovergangen, in dezelfde volgorde, aan als η' , behalve den laatsten limietovergang van η' (dien naar ξ_{b_k}).

Kies vervolgens in het om $\xi_{b_{k-1}}$ aangenomen interval het punt $X_{b_{k-1}}$ zoodanig dat:

$$|L_{(\eta' - 1) \eta}(X_{b_k}) - L_{(\eta' - 2) \eta}(X_{b_{k-1}}, X_{b_k})| < \varepsilon \quad \text{is;}$$

hierbij duidt de index $(\eta' - 2)$ dezelfde limietovergangen, in dezelfde volgorde, aan als $(\eta' - 1)$, behalve den laatsten limietovergang van $(\eta' - 1)$ (dien naar $\xi_{b_{k-1}}$).

Zoo gaan we voort en krijgen aldus de vaste getallen: $X_{b_k}, X_{b_{k-1}}, \dots, X_{b_2}, X_{b_1}$. In de laatste ongelijkheid is de achterste limiet (die met het kleinste aantal limietovergangen) $L_{\eta \eta}(K')$, als K' aangeeft de getallen: $X_{b_1}, X_{b_2}, \dots, X_{b_k}$.

Voor alle waarden y van $E(y)$ in een zeker interval $(\eta - \delta_1, \eta + \delta_1)$, dat ligt binnen $(\eta - \delta, \eta + \delta)$ is:

$$|L_{\eta \eta}(K') - L_{\eta}(y, K')| < \varepsilon.$$

Uit de in het voorafgaande verkregen ongelijkheden volgt door optelling, dat voor iedere y van $E(y)$ in het interval $(\eta - \delta_1, \eta + \delta_1)$ het verschil:

$$L_{\sigma}(y) - L_{\eta}(y, K')$$

in absolute waarde kleiner blijft dan een vast, positief getal. Dit getal kan willekeurig klein gemaakt worden door ε maar klein genoeg te nemen. Dus $L_{\sigma}(y)$ convergeert in η quasi-uniform t. o. v. $L_{\eta}(y, k')$.

Ook hier laten zich soortgelijke opmerkingen maken als in § 8, laatste alinea.

§ 17. **Hoofdstelling A:** We beschouwen het stelsel van verzamelingen $E_1, E_2, \dots, E_n$, dat reeds in § 13 werd gedefinieerd. Bovendien zijn gegeven twee verzamelingen $E(y)$ en $E(z)$, die respectievelijk η en ζ tot verdichtingspunt hebben $f(y, z, x_1, x_2, \dots, x_n)$ zij gedefinieerd voor alle combinaties: $y, z, x_1, x_2, \dots, x_n$ uit de verzamelingen $E(y), E(z), E_1 \dots E_n$.

Laten S_k en S_k' en eveneens S_l en S_l' complementaire deelverzamelingen zijn van het stelsel $E_1, E_2, \dots, E_n$; de stelsels van bijbehorende limietovergangen worden aangegeven door de indices z, z' en λ, λ' . Dan zijn noodige en voldoende voorwaarden voor de betrekking:

$$L_{\eta \lambda' \zeta \lambda} = L_{\zeta z' \eta z}$$

de volgende:

- a) $L_{\zeta z' \eta z}$ bestaat;
- b) $L_{\lambda' \zeta \lambda}$ bestaat voor alle getallen y van $E(y)$;
- c) bij willekeurig positieve ε, δ en Δ zijn te bepalen een waarde K' en een getal Z , gelegen in $(\zeta - \delta, \zeta + \delta)$, met de beide eigenschappen:

1e. er bestaat een interval $(\eta - \delta_1, \eta + \delta_1)$, zoo dat voor iedere y van $E(y)$ in dit interval:

$$|L_{\lambda' \zeta \lambda}(y) - L_z(y, Z, K')| < \varepsilon \quad \text{is;}$$

2e. onder de in $(\eta - \delta_1, \eta + \delta_1)$ gelegen punten y van $E(y)$ is te vinden een punt y' , waarvoor:

$$|L_z(y', Z, K') - L_{z' \eta z}(Z)| < \varepsilon$$

en $|y' - \eta| < \Delta \quad \text{is.}$

Het bewijs laat zich geven als in § 10.¹⁾

§ 18. Gewijzigde vormen der hoofdstelling zijn:

A¹: Opdat:

$$L_{\eta \lambda' \zeta \lambda} = L_{\zeta z' \eta z}$$

is noodig en voldoende:

- a) $L_{z' \eta z}(z)$ en $L_{\lambda' \zeta \lambda}(y)$ bestaan resp. voor alle getallen z van $E(z)$ en alle getallen y van $E(y)$;

¹⁾ De noot op p. 20 laat zich ook op het algemeene geval overdragen.

b) bij willekeurige positieve ε zijn te vinden vaste waarden Λ' en Y en een interval $(\zeta - \delta, \zeta + \delta)$, zoo dat voor ieder getal z van $E(z)$ in dit interval:

$$|L_{\zeta' \eta \zeta}(z) - L_{\lambda}(Y, z, \Lambda')| < \varepsilon \quad \text{is;}$$

c) als in § 17 onder (c).

Het bewijs volgt uit de §§ 15 en 17.

A^2 : Noodige en voldoende voorwaarden voor de onder A^1 genoemde betrekking zijn ook de volgende:

a) als in A^1 onder (a);

b) $L_{\zeta' \eta \zeta}(z)$ convergeert quasi-uniform t. o. v. $L_{\lambda}(y, z, l')$ in het punt ζ ;

c) $L_{\lambda'} \zeta_{\lambda}(y)$ convergeert quasi-uniform t. o. v. $L_{\lambda}(y, z, k')$ in het punt η ;

d) volgens (c) zijn bij willekeurig positieve ε en bij willekeurige intervallen om de verdichtingspunten van het stelsel $S_{k'}$ en om het verdichtingspunt ζ te vinden verzamelingen (y, Z, K') wier punten aan een bepaalde ongelijkheid voldoen (zie § 14). Onder deze verzamelingen laat zich bij vooraf willekeurig gekozen, positieve Δ een verzameling aanwijzen, welke een punt: y', Z, K' bevat, waarvoor bovendien de ongelijkheden:

$$|L_{\lambda}(y', Z, K') - L_{\zeta' \eta \zeta}(Z)| < \varepsilon \text{ en } |y' - \eta| < \Delta$$

gelden.

De noodzakelijkheid dezer voorwaarden volgt met behulp van § 16 en de noot bij § 17.

§ 19. De laatste stelling van § 4, welke noodige en voldoende voorwaarden geeft voor het bestaan en de gelijkheid der beide, tweevoudig herhaalde limieten en van de waarde, die bij den twee-dimensionalen limietovergang wordt verkregen, laat zich hier uitbreiden.

We moeten daartoe eerst een uitbreiding van het begrip „uniforme convergentie in een punt” doen voorafgaan.

De notaties van § 13 en § 14 worden ook hier gebruikt.

Stel dus $L_{\xi_n \xi_{n-1} \dots \xi_2 \xi_1}(y) = F(y)$. We zeggen, dat

$F(y)$ in het punt η uniform convergeert t. o. v. $L_z(y, k')$, als bij ieder willekeurig positief getal ε zijn te vinden intervallen om η en om de verdichtingspunten van het stelsel $S_{k'}$, zoo dat voor alle combinaties van waarden uit die intervallen en behoorend tot de gegeven verzamelingen:

$$|F(y) - L_z(y, k')| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

Onder uniforme convergentie van $L_z(y, k')$ in het punt η t. o. v. $f(y, k, k')$ verstaan we, dat het bij willekeurig positieve ε mogelijk is intervallen te vinden om alle verdichtingspunten, zoo dat voor iedere combinatie van waarden uit die intervallen en behoorende tot de gegeven verzamelingen:

$$|L_z(y, k') - f(y, k, k')| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

Bij die gevallen, waarop beide definities van toepassing zijn, dekken ze elkaar volkomen.

Hangt de functie f ook nog van een veranderlijke z af, dan moet deze in de definitie van uniforme convergentie gerekend worden tot de veranderlijken van het stelsel $S_{k'}$.

§ 20. **Hoofdstelling B:** $f(y, z, x_1, x_2, \dots, x_n)$ zij gedefinieerd als in § 17 aangegeven.

Opdat:

$$L_{\eta\lambda'}\zeta_\lambda = L_{\zeta\lambda'}\eta_\lambda = L_{(\eta, \zeta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}$$

is noodig en voldoende:

a) $L_{\zeta\lambda'}\eta_\lambda(z)$ en $L_{\lambda'}\zeta_\lambda(y)$ bestaan respectievelijk voor alle getallen z van $E(z)$ en alle getallen y van $E(y)$;

b) $L_{\lambda'}\zeta_\lambda(y)$ convergeert uniform t. o. v. $L_z(y, z, k')$ in het punt η ;

c) $L_z(y, z, k')$ convergeert uniform t. o. v. $f(y, z, k, k')$ in het punt η .

Bewijs: Volgens hulpstelling I volgt uit de voorwaarden het bestaan van $L_{\eta\lambda'}\zeta_\lambda$.

Bij willekeurig positieve ε is het mogelijk aan te geven een interval $(\eta - \delta, \eta + \delta)$, zoo dat voor iedere y van $E(y)$ in dat interval:

$$(1) \quad |L_{\eta\lambda'}\zeta_\lambda - L_{\lambda'}\zeta_\lambda(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{is.}$$

Wegens de uniforme convergentie, onder (b) genoemd, zijn aan te geven intervallen om de verdichtingspunten van $S_{k'}$, om ζ en om η , waarbij het laatste interval te kiezen is binnen $(\eta - \delta, \eta + \delta)$, zoo dat voor alle getallen van de verzamelingen van $S_{k'}$, van $E(z)$ en van $E(y)$ in die intervallen:

$$(2) \quad \dots \quad |L_{\lambda' \zeta \lambda}(y) - L_{\kappa}(y, z, k')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{is.}$$

Volgens (c) zijn weer te kiezen intervallen voor alle veranderlijken, welke bij de veranderlijken y, z en die van $S_{k'}$ zullen liggen binnen de voorafgaande intervallen, zoo dat voor alle waarden in die nieuwe intervallen en behoorend tot de gegeven verzamelingen:

$$(3) \quad \dots \quad |L_{\kappa}(y, z, k') - f(y, z, k, k')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{is.}$$

Voor de laatst genoemde waarden der veranderlijken is aan (1), (2) en (3) gelijktijdig voldaan, of wel, daarvoor is:

$$|L_{\eta \lambda' \zeta \lambda} - f(y, z, k, k')| < \varepsilon.$$

In woorden: de meerdimensionale limietovergang in het punt $(\eta, \zeta, \kappa, \kappa')$ is mogelijk en levert een waarde gelijk aan de herhaalde limiet uit het 1^e lid.

Hieruit en uit voorwaarde (a) volgt nu vanzelf het bestaan van de herhaalde limiet uit het 2^e lid en haar gelijkheid aan de beide vorige.

De voorwaarden zijn dus voldoende.

Dat ze ook noodig zijn, is evident.

De voorwaarden (b) en (c) zijn te vervangen door één voorwaarde:

bc) $L_{\lambda' \zeta \lambda}(y)$ convergeert uniform t. o. v. $f(y, z, k, k')$ in het punt η . ¹⁾

¹⁾ Opdat $L_{\eta \lambda' \zeta \lambda} = L_{(\eta, \zeta, \xi_1 \dots \xi_n)}$ is noodig en voldoende:

a) $L_{\eta \lambda' \zeta \lambda}$ bestaat;

b) $L_{\lambda' \zeta \lambda}(y)$ convergeert uniform t. o. v. $f(y, z, k, k')$ in het punt η . — In

deze stelling speelt ζ geen bijzondere rol en kan daarom onder de ξ 's worden opgenomen. — Vgl. p. 13, noot.

§ 21. Voorbeeld: $f(x, y, z) = \frac{x - y + z}{x + y + z}$ in het punt $(0,0,0)$.

De verzamelingen voor x , y en z zullen ieder bestaan uit alle positieve getallen. Van de zes herhaalde limieten zijn er vier gelijk aan 1, de beide andere aan -1 . De 3-dimensionale limietovergang levert dus geen waarde. O. a. is in $(0,0,0)$:

$$L_{\eta}^{\zeta} \xi = L_{\xi}^{\eta} \zeta = 1.$$

$L_{\eta}^{\zeta}(x)$ moet dus quasi-uniform t. o. v. $f(x, y, z)$ convergeeren in $\xi = 0$, terwijl deze convergentie „niet” uniform t. o. v. $f(x, y, z)$ is.

Het is dus noodig, dat bij willekeurig positieve ε en willekeurige intervallen om $\eta = 0$ en $\zeta = 0$ waarden Y en Z in deze intervallen en verder een interval om $\xi = 0$ mogelijk zijn, zoodat voor iedere positieve x in laatstgenoemd interval:

$$\left| L_{\eta}^{\zeta}(x) - \frac{x - Y + Z}{x + Y + Z} \right| < \varepsilon \quad \text{of}$$

$$\left| 1 - \frac{x - Y + Z}{x + Y + Z} \right| < \varepsilon \quad \text{of}$$

$$(1) \quad \dots \quad 2Y < \varepsilon(x + Y + Z) \quad \text{is.}$$

Kies voor Z een willekeurig positief getal, in het interval om $\zeta = 0$ gelegen. Kies daarna Y in het gegeven interval om $\eta = 0$ zoo dat:

$$2Y < \varepsilon \times Z \text{ of } Y < \frac{\varepsilon}{2} \times Z \quad \text{is.}$$

Dan blijkt, dat voor alle positieve getallen x de ongelijkheid (1) geldt. Voor x kunnen we dus een geheel willekeurig interval om $\xi = 0$ nemen.

Er is echter geen uniforme convergentie t. o. v. $f(x, y, z)$. Nooit zal het mogelijk zijn, voor $\varepsilon < 2$, bij een zeker interval voor x om $\xi = 0$ de getallen Y en Z zóó te bepalen, dat ook voor alle kleinere waarden van y en z aan (1) is voldaan bij die zelfde waarden voor x . Immers, voor x en Z klein genoeg zal $\varepsilon(x + Y + Z)$ zoo weinig van $\varepsilon \times Y$ afwijken, als we wenschen, en dus „kleiner” zijn dan $2 \times Y$.

quasi-uniforme convergentie op een verzameling een uitbreiding is van de quasi-uniforme convergentie in een punt.¹⁾

Voorwaarde (c) is te vervangen door:

c') $L_\eta(x)$ bestaat voor iedere x van P . Kiezen we uit Q een rij y_m (m geheel en positief), zoodat $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \eta$, dan zal „ $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x, y_m)$ quasi-uniform convergeeren op de verzameling P .“

D. w. z.: bij 2 willekeurige, positieve getallen ε en M zijn te vinden een eindig aantal intervallen $I_1, \dots, I_p$ met de beide eigenschappen:

1^e ieder punt van P_1 is inwendig punt van minstens een der intervallen;

2^e bij ieder interval I_k is te vinden een y_{μ_k} , waarbij $\mu_k > M$ en zoo dat voor iedere x van P , in I_k gelegen:

$$\left| \lim_{m \rightarrow \infty} f(x, y_m) - f(x, y_{\mu_k}) \right| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

Door aan het begrip van „quasi-uniforme convergentie op een verzameling“ een kleine uitbreiding te geven, waardoor het ook op niet-begrensde verzamelingen kan worden toegepast (vgl. § 6), is het niet meer noodig in de voorafgaande stelling de verzameling P begrensd te onderstellen.

Ook zijn de voorwaarden symmetrisch te maken, zoo we in plaats van alleen η alle verdichtingspunten van Q beschouwen. Die stelling wordt dan een uitbreiding van die van § 5.

§ 23. Voor het geval van meer-dimensionale verzamelingen P en Q geven we hier nog de symmetrische voorwaarden:

¹⁾ Zoowel uit de stelling van § 1 als uit die van de noot op p. 6 volgen voor het hier behandelde geval de volgende, minder eischende, noodige en voldoende voorwaarden: a) en b) als in den tekst; c) $L_\eta(x)$ bestaat voor alle waarden x uit P en deze convergentie is als volgt. Bij willekeurige, positieve ε en α zijn te bepalen een eindig aantal waarden voor y uit de verzameling Q en gelegen in $(\eta - \alpha, \eta + \alpha)$, zoo dat bij iedere x van P behoort een waarde y_x uit dat eindige aantal, waarvoor $|L_\eta(x) - f(x, y_x)| < \varepsilon$ is.

Laat $f(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q)$ gedefinieerd zijn voor alle combinaties: $x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q$ uit de p -dimensionale verzameling P en de q -dimensionale verzameling Q . Stel P_1 is de afgeleide verzameling van P en Q_1 de afgeleide verzameling van Q .

Opdat nu:

$L_{(\xi_1, \dots, \xi_p); (\eta_1, \dots, \eta_q)} = L_{(\eta_1, \dots, \eta_q); (\xi_1, \dots, \xi_p)}$,
waarbij $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ zal zijn een willekeurig punt van P_1 en $(\eta_1, \dots, \eta_q)$ een willekeurig punt van Q_1 , is noodig en voldoende:

a) $L_{(\xi_1, \dots, \xi_p)}(y_1, \dots, y_q)$ bestaat voor alle combinaties $(y_1, \dots, y_q; \xi_1, \dots, \xi_p)$ uit Q en P_1 en convergeert quasi-uniform op Q ;

b) $L_{(\eta_1, \dots, \eta_q)}(x_1, \dots, x_p)$ bestaat voor alle combinaties $(x_1, \dots, x_p; \eta_1, \dots, \eta_q)$ uit P en Q_1 en convergeert quasi-uniform op P .

De definitie van „quasi-uniforme convergentie op een meer-dimensionale verzameling” ligt voor de hand.

Het bewijs laat zich geven met behulp der stelling van § 3.

§ 24. Voorbeeld: $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$. De verzameling P zal bestaan uit de punten van het segment $(0, a)$, waarbij a willekeurig positief; de verzameling Q zal bestaan uit alle positieve getallen.

Op het segment $(0, a)$ is limietverwisseling niet in alle punten geoorloofd. Er is dan ook niet aan alle 3 voorwaarden uit § 22 voldaan.

§ 25. $f(x, y)$ zij gedefinieerd als in § 22.

Opdat in ieder punt ξ van P_1 :

$$L_{\xi\eta} = L_{\eta\xi} = L_{(\xi, \eta)},$$

is noodig en voldoende:

a) $L_{\xi}(y)$ bestaat voor alle combinaties (y, ξ) uit Q en P_1 ;

b) $L_{\eta}(x)$ „ „ „ waarden x uit P en deze convergentie is bovendien als volgt. Bij willekeurige, positieve

ε zijn te bepalen een eindig aantal intervallen $I_1, I_2, \dots, I_p$ met de beide eigenschappen:

1^e ieder punt van P_1 is inwendig punt van minstens een der intervallen;

2^e bij ieder interval I_k is te vinden een interval $(\eta - h, \eta + h)$, zóó dat voor „iedere” Y van Q in dit interval en voor iedere x van P in I_k :

$$|L_{\eta}(x) - f(x, Y)| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

Het bewijs volgt uit § 4, met behulp van het lemma van Borel.

Daar het aantal intervallen $(\eta - h, \eta + h)$ eindig is en het aantal x -waarden buiten $I_1, \dots, I_p$ eveneens, is voorwaarde (b) te vervangen door de volgende:

b') $L_{\eta}(x)$ bestaat voor alle waarden x uit P en „convergeert uniform op de verzameling P .”

D. w. z.: het is bij willekeurige, positieve ε mogelijk te bepalen een interval $(\eta - H, \eta + H)$, zóó dat voor iedere Y van Q in dit interval:

$$|L_{\eta}(x) - f(x, Y)| < \varepsilon$$

is, onafhankelijk van de keuze der x .

Evenals dus de quasi-uniforme convergentie op een verzameling P een uitbreiding is van de quasi-uniforme convergentie in een punt x , vormt de uniforme convergentie op een verzameling P een uitbreiding van de uniforme convergentie in een punt x .

De voorwaarden kunnen een symmetrischen vorm krijgen door zoowel van Q als van P de afgeleide verzameling te beschouwen.

§ 26. Voorbeeld: Vervangen we in het voorbeeld van § 6 de letter n door $\frac{1}{y}$. Beschouwen we dan een verzameling Q van y -waarden met $\eta = 0$ tot verdichtingspunt (dit punt zal niet tot Q behooren) en een segment om $x = 0$ voor de x -waarden (verzameling P). Dan is in ieder punt van dat segment limietverwisseling geoorloofd, doch in $\xi = 0$ geeft

HOOFDSTUK II.

Toepassingen der Algemeene Limietstellingen.

EERSTE GROEP.

Tot deze groep behooren de theorema's, die zijn af te leiden uit hoofdstuk I, 1^e groep.

§ 28. De volgende stelling is slechts een bijzonder geval van de stelling van § 1:

I. *Opdat een in een omgeving van ξ convergente reeks van in ξ continue functies in dat punt continu is, is noodig en voldoende, dat ze in dat punt quasi-uniform convergeert.*

Natuurlijk gaat de stelling ook door, als de functies slechts gedefinieerd zijn op een bepaalde verzameling $P(x)$, met ξ als een harer verdichtingspunten.

Bij de dubbelsommen $[\lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} S_{nm}(x)]$ van continue functies is noodig en voldoende de quasi-uniforme convergentie der dubbelsom t. o. v. $S_{nm}(x)$ in het punt ξ en nog een 2^e voorwaarde (zie § 12).

§ 29. Uit § 4 volgt:

II. *Een functie $f(x, y)$ zij gedefinieerd in een omgeving van het punt (ξ, η) en zij in die omgeving continu t. o. v. x en t. o. v. y . Opdat ze nu in het punt (ξ, η) continu zal zijn t. o. v. x en y , is noodig en voldoende, dat $\lim_{y=\eta} f(x, y)$ in ξ uniform convergeert („hebbare Unstetigkeit” ¹⁾ buitengesloten).*

¹⁾ Hieronder is volgens Riemann te verstaan een discontinuïteit, die verdwijnt door de functie in het beschouwde punt op geschikte wijze te definiëren. — Zie b.v. Osgood, *L. d. Funktionenth.*, 1^{er} Band, Kap. I, § 3.

De omgeving van (ξ, η) is te vervangen door een verzameling uit die omgeving van de volgende soort. De x -waarden vormen een verzameling P met ξ tot verdichtingspunt, de y -waarden een verzameling Q met η tot verdichtingspunt. De twee-dimensionale verzameling ontstaat door te nemen alle mogelijke combinaties van x - en y -waarden uit P en Q .

Voorbeeld: Dit volgt uit dat van § 6 door n te vervangen door $\frac{1}{y}$ en aan y alle waarden toe te kennen uit een willekeurige omgeving van $\eta = 0$, dit punt zelf uitgezonderd, - aan x alle waarden uit een willekeurige omgeving van $\xi = 0$, dit punt zelf weer uitgezonderd.

§ 30. a. De bekende stelling van BAIRE betreffende de mogelijkheid een *eindige functie op een perfecte verzameling* $P(x)$ *op te vatten als limiet van naar x continue functies, eischt als noodige en voldoende voorwaarde, dat de functie puntsgewijze discontinu is.*

In de punten, waar de functie continu is, is limietverwisseling mogelijk. In die punten is er dus quasi-uniforme convergentie (§ 1). De stelling van BAIRE laat zich bijgevolg ook aldus uitspreken:

a¹. *Noodig en voldoende is, dat op iedere willekeurige, perfecte onderverzameling de punten van quasi-uniforme convergentie overal dicht liggen.*

D. w. z. in ieder interval, dat punten der onderverzameling bevat, moet een punt van die onderverzameling zijn aan te wijzen, in welks omgeving de functie zich zoodanig als limiet van naar x continue functies laat voorstellen, dat de convergentie in dat punt quasi-uniform is.

Gaan we echter het bewijs na, dat door LEBESGUE gegeven wordt in *Note II* van de *Leçons sur les fonctions de var. réelles* van BOREL, dan blijkt, dat hij bij de afleiding der noodige voorwaarde aantoont, dat op iedere willekeurige, perfecte onderverzameling de punten, waar de reeks *uniform* convergeert, overal dicht liggen. Deze voorwaarde is ook voldoende. Dus:

b. *Noodig en voldoende, opdat een eindige functie op een perfecte verzameling als limiet van continue functies is te schrijven, is dat op iedere willekeurige, perfecte onderverzameling de punten van uniforme convergentie overal dicht liggen.*

De bedoeling van de uitdrukking „punten van uniforme convergentie” is na het onder a¹ meegedeelde duidelijk.

In die punten is volgens § 4 twee-dimensionale limietovergang mogelijk, welke dan als uitkomst de functiewaarde oplevert.

De punten van uniforme convergentie (b) vormen natuurlijk een onderverzameling van de punten van quasi-uniforme convergentie (a¹).

Zoowel de punten van quasi-uniforme convergentie als die van uniforme convergentie vormen bij functies van de klasse 1 een verzameling van de tweede categorie.¹⁾

Tenslotte volgt uit het bewijs van Lebesgue ook nog een 3^e vorm van de stelling van Baire:

c. *Noodig en voldoende is, dat op iedere perfecte onderverzameling de punten, waarin de functie van de klasse 1 is, overal dicht liggen.*²⁾

De functie is in een punt van de klasse 1, als bij iedere positieve ε is aan te geven een omgeving van dat punt en een functie van de klasse 1, zoo dat in ieder punt van die omgeving, waarin de functie gedefinieerd is, deze van die functie van klasse 1 ³⁾ minder dan ε afwijkt.

De onder a¹ en b bedoelde punten van quasi-uniforme convergentie en uniforme convergentie behooren onder de punten, waarin de functie is van de klasse 1.

¹⁾ Dit volgt gemakkelijk met behulp van de eigenschap, dat de discontinuïteitspunten van een functie van een of meer veranderlijken, waarin de oscillatie $\geq \sigma$ (willekeurig positief) is, een gesloten verzameling vormen; vgl. Hobson, *T. o. F.*, First Ed., p. 485.

²⁾ Vgl. de la Vallée Poussin, *Intrégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire*, p. 144.

³⁾ Onder de functies van klasse 1 rekenen wij, evenals Lebesgue in de genoemde „Note”, ook de continue functies.

Lebesgue heeft de stelling van Baire uitgebreid op functies van klasse α (α geheel). Als uitbreiding van stelling (c) hebben we:

*Opdat een eindige functie op een perfecte verzameling $P(y)$ is van een klasse $\leq \alpha$, is noodig en voldoende, dat de punten, waarin de functie is van klasse $\leq \alpha$, op iedere perfecte onderverzameling overal dicht liggen.*¹⁾

De definitie van een punt, waarin de functie is van klasse $\leq \alpha$, ligt na het voorafgaande voor de hand.

Gaan we de punten na, in wier omgeving het ons gelukt de functie voor te stellen door middel van herhaalde limieten van naar y continue functies, waarbij het aantal limietovergangen is $\leq \alpha + 1$. Onder de punten, waarin de functie is van klasse $\leq \alpha$, vallen dan die punten, waarin er is quasi-uniforme convergentie volgens de definitie van § 14 en die, waarin er is uniforme convergentie volgens de definitie van § 19 (het grensgeval, dat S_k bevat alle elementen van het stelsel $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ wordt buitengesloten, zoowel bij de quasi-uniforme- als bij de uniforme convergentie).

Gaan we de punten na, in wier omgeving een dergelijke voorstelling mogelijk is, waarbij nu echter het aantal limietovergangen willekeurig groot (eindig) mag zijn. De punten, waarin er is quasi-uniforme convergentie t. o. v. $f(y, k, k')$ en die, waarin er is uniforme convergentie t. o. v. $f(y, k, k')$ vallen onder de punten van klasse $\leq \alpha$. Voor de continuïteit naar y is noodig de gelijkheid van bepaalde, herhaalde limieten; bij continuïteit naar y en de parameters uit het stelsel $(E_1, \dots, E_n)$ moeten die herhaalde limieten bovendien nog gelijk zijn aan een bepaalde, meer-dimensionale limiet. De beide, genoemde manieren van convergentie behooren respectievelijk tot de noodige voorwaarden voor het eerste en tweede geval van continuïteit. De punten, waar de functie continu is naar y en die, waarin ze continu is naar y en de parameters, vallen dus ook onder de punten van klasse $\leq \alpha$.

Aldus beschouwd zijn de uitgebreide voorwaarden van

¹⁾ Vgl. de la Vallée P., *Int. de L.*, etc. p. 144.

Baire van grooter belang dan de voorwaarden van een andere soort, welke ook door Lebesgue werden gegeven.¹⁾

§ 31. Stel $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = s_n(x)$. De mogelijkheid van termsgewijze differentiatie der reeks in een punt ξ laat zich aldus schrijven:

$$\begin{aligned} \lim_{h=0} \lim_{n=\infty} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h} &= \\ &= \lim_{n=\infty} \lim_{h=0} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h} \end{aligned}$$

Dus volgens § 1 en § 5:

III. *Opdat een in de omgeving van een punt ξ convergente reeks van in ξ differentieerbare functies in dat punt termsgewijs mag gedifferentieerd worden, is noodig en voldoende, dat de reeks der differentiaalquotienten convergeert en dat $\lim_{n=\infty} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h}$ in $h=0$ quasi-uniform convergeert;²⁾*

Of wel:

dat de reeks zelve in ξ een afgeleide bezit en $\lim_{h=0} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h}$ in $n=\infty$ quasi-uniform convergeert;

Of wel:

dat $\lim_{n=\infty} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h}$ in $h=0$ en $\lim_{h=0} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h}$ in $n=\infty$ quasi-uniform convergeert.

In het laatste geval is het dus mogelijk:

1^e bij willekeurige, positieve ε en N te bepalen een geheel getal $\nu > N$ en een interval $(-\delta, +\delta)$, zoo dat voor iedere waarde van h in dit interval:

¹⁾ Zie de la Vallée Poussin, *Int. de L.*, etc., p. 141.

²⁾ Zie Hobson, *T. o. F.*, First Ed., p. 563 en 564.

$$\left| \lim_{n=\infty} \frac{s_n(\xi+h) - s_n(\xi)}{h} - \frac{s_\nu(\xi+h) - s_\nu(\xi)}{h} \right| < \varepsilon \quad \text{is;}$$

2^e bij willekeurige, positieve ε en δ te bepalen een getal H , in $(-\delta, +\delta)$ gelegen, en een positief getal N , zoo dat voor ieder geheel getal $n > N$:

$$\left| \lim_{h=0} \frac{s_n(\xi+h) - s_n(\xi)}{h} - \frac{s_n(\xi+H) - s_n(\xi)}{H} \right| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

Voorbeeld: ¹⁾ Is $u_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$, dan wordt $s_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Op het segment $(0,1)$ is $\lim_{n=\infty} s_n(x) = x$;

$\frac{d}{dx} s_n(x) = 1 - x^n$; $\frac{d}{dx} \lim_{n=\infty} s_n(x) = 1$. Het blijkt dus, dat

voor $0 \leq x < 1$ geldt: $\frac{d}{dx} \lim_{n=\infty} s_n(x) = \lim_{n=\infty} \frac{d}{dx} s_n(x)$; echter niet voor $x = 1$.

Gemakkelijk is aan te toonen, dat $\frac{R_n(0+h) - R_n(0)}{h} = \frac{h^n}{n+1}$. Kiezen we geheel willekeurig voor n een zeker geheel getal N , dan is het mogelijk bij willekeurige, positieve ε een interval $(0, +\delta)$ voor h te bepalen, zoodat $\frac{h^N}{N+1} < \varepsilon$ is; daartoe moet $\delta < \sqrt[N]{(N+1)\varepsilon}$ zijn. $\lim_{n=\infty} \frac{s_n(0+h) - s_n(0)}{h}$ convergeert (quasi-)uniform in $h = 0$.

Verder is $\frac{R_n(1-h) - R_n(1)}{-h} = \frac{(1-h)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{h} \int_{1-h}^1 u^n du > (1-h)^n$, voor h tusschen 0 en 1. Bij iedere waarde van n is een zoodanige, positieve waarde van h te bepalen, dat $(1-h)^n$ zoo weinig van 1 verschilt, als

¹⁾ Zie Stolz, *Grundzüge d. Diff. u. Int. Rechnung*, 1^{er} Teil, p. 71 e. 72.

we wenschen. Er is dus geen quasi-uniforme convergentie van $\lim_{n=\infty} \frac{s_n(1-h) - s_n(1)}{-h}$ in $h=0$.

Evenzoo laat zich aantoonen, dat $\lim_{h=0} \frac{s_n(\xi+h) - s_n(\xi)}{h}$ in $n=\infty$ (quasi-)uniform convergeert voor $\xi=0$, niet quasi-uniform voor $\xi=1$.

In $\xi=0$ is dus aan alle voorwaarden voldaan, in $\xi=1$ niet.

§ 32. De gelijkheid: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial x_0}$ laat zich schrijven in den vorm:

$$\lim_{h=0} \lim_{k=0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk} = \\ = \lim_{k=0} \lim_{h=0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

Hieruit volgt (§ 1):

IV. Bestaan in een punt (x_0, y_0) en diens omgeving eindige differentiaalquotienten $\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x_0}$ en $\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y_0}$ en in dat

punt een eindig differentiaalquotient $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial x_0}$, dan is noodig

en voldoende, opdat ook $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}$ bestaat en $= \frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial x_0}$,

dat

$$\lim_{k=0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

in $h=0$ quasi-uniform convergeert.

D. w. z. bij twee willekeurige, positieve getallen ε en δ zijn te bepalen een K , in $(-\delta, +\delta)$ gelegen, en een interval $(-\delta_1, +\delta_1)$, zoo dat voor alle h in $(-\delta_1, +\delta_1)$:

$$\left| \lim_{k=0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk} - \frac{f(x_0+h, y_0+K) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+K) + f(x_0, y_0)}{hK} \right| < \varepsilon$$

is.

Voorbeeld (van Peano ¹⁾): $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ voor alle combinaties (x, y) behalve voor $x = 0, y = 0$; $f(0, 0) = 0$. Hier is $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} = 1$ en $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{0,0} = -1$. Gemakkelijk laat zich aantoonen, dat bovengenoemde limiet in $h = 0$ niet quasi-uniform convergeert.

Uit de §§ 17 en 18 volgen soortgelijke stellingen voor differentiaalquotienten.

Hoofdstelling B (§ 19) geeft nog de volgende:

Een functie $f(x, y, z)$ zij gedefinieerd in de omgeving van het punt (x_0, y_0, z_0) . Laat in de omgeving van dit punt een tweede differentiaalquotient bestaan, waarin de beide differentiaties geschied zijn naar verschillende veranderlijken,

b.v. $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y, z)$. Is verder

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial x_0} f(x_0, y_0, z_0 + l) - \frac{\partial^2}{\partial y_0 \partial x_0} f(x_0, y_0, z_0)}{l}$$

uniform convergent t.o.v. $F(h, k, l)$ in het punt $(0, 0, 0)$, waarbij h, k, l de onafhankelijk veranderlijken voorstellen,

dan bestaat ook $\frac{\partial^3}{\partial z_0 \partial y_0 \partial x_0} f(x_0, y_0, z_0)$. Tevens bestaat

ieder ander 3^e differentiaalquotient, waarin dezelfde differentiaties in andere volgorde voorkomen, in dit punt en is

bovendien $= \frac{\partial^3}{\partial z_0 \partial y_0 \partial x_0} f(x_0, y_0, z_0)$, zoo de bij dat 3^e differentiaalquotient behorende, voorafgaande differentiaalquotienten in de omgeving van (x_0, y_0, z_0) bestaan.

Hierbij is $F(h, k, l) =$

$$= \frac{f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - \sum_{(1)} f + \sum_{(2)} f - f(x_0, y_0, z_0)}{h k l}$$

De waarden f uit $\sum_{(p)} f$ ($p = 1$ of 2) behooren bij de verschillende

¹⁾ Zie Hobson, *T. o. F.*, First Ed., p. 321 (Sec. Ed., p. 403 en 404).

punten (x, y, z) , die p coördinaten gemeen hebben met het punt (x_0, y_0, z_0) en $(3 - p)$ coördinaten met het punt $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$.

De differentiaalquotienten worden eindig ondersteld.

Een eenvoudig voorbeeld, waarbij gemakkelijk is aan te toonen, dat aan deze voldoende voorwaarden is voldaan, is $f(x, y, z) = x \times y \times z$, beschouwd in het punt $(0, 0, 0)$.

§ 33. In deze en de volgende §§ van dit hoofdstuk beschouwen we uitsluitend integralen van RIEMANN.

$$\lim_{y=y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y=y_0} f(x, y) dx$$

laat zich schrijven in den vorm:

$$\lim_{y=y_0} \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \sum_i f(x_i, y) \Delta x_i = \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \lim_{y=y_0} \sum_i f(x_i, y) \Delta x_i.$$

Hierbij stelt Δx_i voor de lengte van het i e interval, dat bij een zekere verdeling van (a, b) behoort, terwijl $(\Delta x_i)_B$ is de grootste intervallengte bij die verdeling. x_i ligt in- of op den rand van het interval Δx_i .

Volgens § 1:

Va. Laat $f(x, y)$ integrabel zijn in (a, b) voor alle waarden van den parameter y , uit een verzameling Q met y_0 tot verdichtingspunt. Laat verder $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ bestaan voor alle waarden x in (a, b) [behalve voor een verzameling met inhoud nul] en integrabel zijn in (a, b) [welke waarden we de functie in de punten van genoemde verzameling¹⁾ ook toekennen, zoo die waarden slechts een begrensde verzameling vormen].

Opdat nu de limietovergang, voor y naderend tot y_0 , mogelijk is en onder het integraalteeken mag worden uitgevoerd, is noodig en voldoende, dat $\lim_{(\Delta x_i)_B=0} \sum_i f(x_i, y) \Delta x_i$

bij één enkele rij van sommen van Riemann quasi-uniform convergeert in y_0 . [We nemen voor x_i geen punten, waarin $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ niet bestaat].

$y=y_0$

¹⁾ Uit den eisch van integrabiliteit volgt, dat, als we die verzameling gesloten maken door toevoeging der verdichtingspunten, haar inhoud toch nul blijft.

Bij twee willekeurige, positieve getallen ε en δ moet het dus mogelijk zijn uit de rij te vinden een som van Riemann, $\sum_i f(X_i, y) \Delta X_i$, waarbij $(\Delta X_i)_B < \delta$, en een interval $(y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1)$, zoo dat voor iedere y van Q in dit interval:

$$\left| \lim_{(\Delta x_i)_B = 0} \sum_i f(x_i, y) \Delta x_i - \sum_i f(X_i, y) \Delta X_i \right| < \varepsilon,$$

of wel: $\left| \int_a^b f(x, y) dx - \sum_i f(X_i, y) \Delta X_i \right| < \varepsilon$ is.

Kiezen we alle intervallslengten $\Delta x_i = \frac{b-a}{2^N}$ (N geheel)

en $x_i = a + \frac{b-a}{2^N} \times (i-1)$, dan wordt de noodige en voldoende voorwaarde:

dat $\lim_{N=\infty} \frac{1}{2^N} \sum_{i=1}^{i=2^N} f\left\{a + \frac{b-a}{2^N} \times (i-1), y\right\}$ quasi-uniform convergeert in y_0 .

Natuurlijk zijn ook tal van andere verdeelingen van (a, b) mogelijk en daarmee ook tal van andere vormen der noodige en voldoende voorwaarde.

Uit § 1 volgt ook:

Vb. Laat $f(x, y)$ integrabel zijn in (a, b) voor alle waarden van den parameter y uit een verzameling Q met y_0 als verdichtingspunt. Laten deze integralen tot een limietwaarde naderen, voor y convergeerend naar y_0 , en laat verder bestaan $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ voor alle waarden x van (a, b) [behalve misschien voor die van een verzameling met inhoud nul].

Opdat nu $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ integrabel is in (a, b) [met welke waarden we deze functie ook aanvullen in de punten van genoemde verzameling, zoo die functiewaarden slechts een begrensde verzameling vormen] en die integraal = limiet van de eerstgenoemde integralen, is noodig en voldoende, dat $\lim_{y=y_0} \sum_i f(x_i, y) \Delta x_i$ quasi-uniform convergeert in $(\Delta x_i)_B = 0$, bij beschouwing van slechts één enkele rij van sommen van

Riemann. [We nemen weer voor x_i geen punten, waar $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ niet bestaat].

Kiezen we alle intervallslengten $\Delta x_i = \frac{b-a}{2^N}$ (N geheel)

en $x_i = a + \frac{b-a}{2^N} \cdot (i-1)$, dan wordt de voorwaarde:

dat $\lim_{y=y_0} \frac{1}{2^N} \sum_{i=1}^{2^N} f\left\{a + \frac{b-a}{2^N} \times (i-1), y\right\}$ quasi-uniform convergeert in $N = \infty$.

Aan deze voorwaarde wordt o. a. voldaan in het geval, dat $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ in (a, b) uniform convergeert of enkelvoudig uniform convergeert (volgens Dini). Dit zijn dus „voldoende” voorwaarden. ¹⁾

Ook is de mogelijkheid van limietovergang onder het integraalteeken te schrijven in den vorm:

$$\lim_{y=y_0} \lim_{x=b} \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \sum_i f(x_i, y) \Delta x_i = \lim_{x=b} \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \lim_{y=y_0} \sum_i f(x_i, y) \Delta x_i$$

We denken ons de sommen genomen over (a, x) ; echter geeft $(\Delta x_i)_B$ toch aan de grootste intervallslengte in (a, b) , bij een bepaalde intervallverdeeling behoorend.

Hoofdstelling A (§ 12 en § 17) geeft:

Vc. Laat $f(x, y)$ integabel zijn in (a, b) enz. (als in eerste alinea van Vb).

Opdat nu $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ integabel is in (a, b) [met welke waarden we deze functie ook aanvullen in de punten, waar de limiet niet bestaat, zoo die waarden slechts een begrensde verzameling vormen] en die integraal = limiet van eerstgenoemde integralen, is noodig en voldoende, dat $\int_a^x \lim_{y=y_0} f(x, y) dx$ quasi-uniform convergeert t. o. v. $\int_a^x f(x, y) dx$ in b (de bovenste grens x ligt tusschen a en b).

¹⁾ Zie Hobson, T. o. F., First Ed., p. 540 e. 541, 595. — In geval van uniforme conv. is natuurlijk vanzelf voldaan aan de conv. der integralen naar een limietwaarde.

Hierbij kan de integraal van $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ over (a, b) ook oneigenlijk zijn.

Het moet dus, bij twee willekeurige, positieve getallen ε en δ , mogelijk zijn te vinden een waarde Y uit de verzameling Q , in $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ gelegen, en een interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$, zóó dat voor iedere waarde x van de bovenste grens in $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$:

$$\left| \int_a^x \lim_{y=y_0} f(x, y) dx - \int_a^x f(x, Y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{is.}$$

Is de verzameling van functiewaarden $f(x, y)$, behorende bij alle mogelijke combinaties (x, y) begrens, dan is het mogelijk bij willekeurig positieve ε een getal H uit de verzameling Q aan te geven, zoo dat voor iedere y van Q , waarvoor $|y - y_0| \leq |H - y_0|$, tevens:

$$\left| \int_a^x \left[\lim_{y=y_0} f(x, y) - f(x, y) \right] dx \right| < \varepsilon$$

$$< \int_a^x \left| \lim_{y=y_0} f(x, y) - f(x, y) \right| dx < \varepsilon$$

is (x willekeurig tusschen a en b). Dit volgt met behulp van de stelling van Arzelà: bestaat $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ in de punten

van een verzameling $E(x)$ en noemt men $E_H(x)$ de verzameling, waar tegelijk $\left| \lim_{y=y_0} f(x, y) - f(x, y) \right| > \varepsilon$ en $|y - y_0| \leq |H - y_0|$ is, zoo ε is een vooraf gegeven, positief getal, dan nadert de inhoud der verzameling $E_H(x)$ tot nul, voor H

convergeerend naar y_0 .¹⁾

De convergentie is hier niet alleen quasi-uniform in b , doch zelfs uniform in (a, b) . Het begrens zijn van $f(x, y)$ is dus een „voldoende” voorwaarde voor de limietverwisseling. — We zien tevens, dat deze voorwaarde ook in ieder ander punt x van (a, b) de limietverwisseling mogelijk maakt.²⁾

¹⁾ Zie b.v. Borel, *Fonctions de Var. Réelles*, p. 37.

²⁾ Zie Hobson, *T. o. F.*, First Ed., p. 539 e. 540, 595 e. 596.

§ 34. De punten x van (a, b) , welke de eigenschap hebben dat in de twee-dimensionale omgeving van (x, y_0) $f(x, y)$ niet begrensd is, vormen een gesloten, lineaire verzameling. Is haar inhoud nul, dan vormt ze een integreerbare groep.¹⁾ We kunnen dus al haar punten insluiten in een eindig aantal gescheiden intervallen, die ieder minstens één punt van de groep bevatten, zoo dat hun gezamenlijke lengte $<$ een vooraf aangegeven, positief getal ε is. Voor elk der overschietende intervallen is $f(x, y)$ begrensd op een bijbehorende verzameling (x, y) , die ontstaat door te nemen alle mogelijke combinaties van waarden x uit het interval met waarden y , uit een omgeving van y_0 en behoorend tot Q . Limietovergang onder het integraalteeken is in zoo'n interval dus geoorloofd.

Hieruit volgt:

$$\lim_{y=y_0} \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lim_{y=y_0} f(x, y) dx,$$

zoo (x_i, x_{i+1}) het i der niet-uitgesloten intervallen is. Wanneer nu $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ integabel is in (a, b) en verder voor ε naderend

tot nul, $\lim_{y=y_0} \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$ continu nadert tot $\lim_{y=y_0} \int_a^b f(x, y)$

dx , dan is ook in (a, b) de limietovergang onder het integraalteeken toelaatbaar. Dus:

Laat $f(x, y)$ integabel zijn in (a, b) voor alle waarden van den parameter y , uit een verzameling Q met y_0 tot verdichtingspunt. Laat verder $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ bestaan voor alle waarden

x van (a, b) en integabel zijn in (a, b) . De verzameling der punten x van (a, b) , welke de eigenschap hebben, dat in de twee-dim. omgeving van (x, y_0) $f(x, y)$ niet begrensd is, moge een inhoud nul hebben.

Opdat nu $\lim_{y=y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y=y_0} f(x, y) dx$, is de volgende voorwaarde „voldoende”:

¹⁾ Zie voor definitie en eigenschappen van integreerbare groep Lebesgue, *Leçons sur l'intégration, etc.*, p. 26 e. vlg.

Sluit genoemde verzameling in een eindig aantal gescheiden intervallen met gezamenlijke lengte ε , zoo dat ieder interval minstens één punt der verzameling bevat. Bij nadering van ε tot nul zal nu $\lim_{y=y_0} \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx$ (x_i, x_{i+1} is het i^e , niet-uitgesloten interval) continu naderen tot

$$\lim_{y=y_0} \int_a^b f(x, y) dx.^1)$$

§ 35. Laat $f(x, y)$ integabel zijn in (a, b) voor alle waarden van den parameter y , behoorend tot een verzameling Q met verdichtingspunt y_0 . Stel, dat in alle punten bestaat $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ [behalve misschien in de punten van een verzameling met inhoud nul].

Opdat nu $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ in (a, b) integabel is [met welke waarden we deze functie ook aanvullen in de punten van genoemde verzameling, zoo die waarden slechts een begrensde verzameling vormen], is noodig en voldoende:

a) $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ is in (a, b) begrensd;

b) zoo we uit de y -waarden een rij y_m kiezen met $\lim_{m=\infty} y_m = y_0$ (m geheel), vormen de punten x van (a, b) , waarin $\lim_{m=\infty} f(x, y_m)$ niet quasi-uniform convergeert, een verzameling E met inhoud nul.

Bewijs: Zij aan de voorwaarden voldaan. De punten van E en de punten, waarin minstens één der functies $f(x, y_1)$, $f(x, y_2), \dots$ discontinu is, vormen een verzameling met inhoud nul. In alle andere punten van (a, b) zijn dus $f(x, y_1)$, $f(x, y_2), \dots$ continu en convergeert $\lim_{m=\infty} f(x, y_m)$ quasi-uniform. Volgens § 2 is in die punten $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ een continue

¹⁾ Vgl. deze stelling met die van Osgood-Arzelà in Hobson, *T. o. F.*, First Ed., p. 543 en eveneens met de laatste stelling van § 412, p. 596, 1^e alinea in dat boek.

functie van x ; ze vormen een verzameling met inhoud $(b - a)$. In verband met conditie (a) volgt hieruit, dat $\lim_{y=y_0} f(x, y)$

integabel is in (a, b) .

Omgekeerd, zij $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ integabel. Aan (a) is voldaan.

De discontinuïteitspunten van $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ vormen een verzameling met inhoud nul. Zij $\lim_{m=\infty} y_m = y_0$ (m geheel), waarbij

de waarden y_m een overigens willekeurige rij uit de verzameling Q vormen. De punten, waarin een of meer der functies $f(x, y_1), f(x, y_2), \dots$ discontinu zijn, vormen eveneens een verzameling met inhoud nul. De beide verzamelingen vormen dus ook samen een verzameling met inhoud nul; volgens § 2 is alleen in de punten der laatste verzameling niet-quasi-uniforme convergentie mogelijk. Aan (b) is voldaan.¹⁾

Natuurlijk laat zich deze stelling onmiddellijk overdragen op het geval van dubbele- en meervoudige integralen.

Het voorgaande vormt een nieuw bewijs en een nieuwe vorm van een bekende stelling van ARZELÀ.²⁾

§ 36. Door toepassing van de stellingen der voorgaande §§ vinden we onmiddellijk soortgelijke stellingen voor de termsgewijze integratie van reeksen. We brengen ze daarom hier niet in woorden, doch laten even een voorbeeld volgen van stelling V_c , voor het geval van reeksen.

Zij $s_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2 x^2}$. De limiet $s(x) = \lim_{n=\infty} s_n(x) = 0$

voor alle punten van $(x_0, 0)$, waarbij $x_0 < 0$.

$\lim_{n=\infty} \int_{x_0}^0 s_n(x) dx = -1$; $\int_{x_0}^0 s(x) dx = 0$. Dus is het volgens V_c

niet mogelijk, dat $\int_{x_0}^x s(x) dx$ quasi-uniform convergeert t. o. v.

¹⁾ Door het eerste gedeelte van het bewijs eenigszins te wijzigen, blijkt, dat voorwaarde (b) te vervangen is door de volgende: de punten x van (a, b) , waarin $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ niet-quasi-uniform convergeert, vormen een verzameling met inhoud nul.

²⁾ Zie Borel, *Fonctions de Var. Réelles*, p. 45—48.

$\int_{x_0}^x s_n(x) dx$ in $x=0$. Dan toch moesten bij willekeurige,

positieve ε en N zijn te bepalen een interval $(-\delta, 0)$ en een geheel getal $N' > N$, zoo dat:

$$\left| \int_{x_0}^x s(x) dx - \int_{x_0}^x s_{N'}(x) dx \right| < \varepsilon$$

of
$$\left| e^{-(N')^2 x_0^2} - e^{-(N')^2 x^2} \right| < \varepsilon$$

was voor x in $(-\delta, 0)$. Dat is echter niet mogelijk. ¹⁾

§ 37. Ook voor differentiatie onder het integraalteeken bestaan soortgelijke stellingen, Vc b.v. wordt:

VI. Stel, $f(x, y)$ is integabel in (a, b) voor alle waarden van den parameter y uit een verzameling Q met y_0 tot verdichtingspunt; y_0 behoort tot Q . Laat $\lim_{y=y_0} \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$

dx bestaan, waarbij y behoort tot Q ; laat ook het differentiaalquotient $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ ²⁾ bestaan voor alle waarden x van (a, b) [behalve misschien voor die van een verzameling met inhoud nul].

Opdat nu $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ integabel is in (a, b) [met welke waarden we deze functie ook aanvullen in de punten, waar de afgeleide niet bestaat, zoo die waarden slechts een begrensde verzameling vormen] en die integraal $= \lim_{y=y_0} \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx$,

is noodig en voldoende, dat $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_0} dx$ quasi-uniform convergeert t. o. v.

$\int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx$ in b (x ligt tusschen a en b).

¹⁾ Verdere voorbeelden in Hobson, *T. o. F.*, p. 547—550; p. 597—599.

²⁾ Hier is het begrip van differentiaalquotient een weinig algemeener genomen dan gewoonlijk.

Hierbij kan de integraal van $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ over (a, b) ook oneigenlijk zijn.

Voorbeeld: $f(x, y) = \sin \left(4 \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \right) - \frac{4xy}{x^2 + y^2} \times$
 $\times \cos \left(4 \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \right)$. Neem als interval voor x $(0, X)$, waarbij X positief, en als punt voor de differentiatie $y = 0$. De verzameling Q zal bestaan uit alle punten van een omgeving van $y = 0$. Differentiatie onder het integraalteeken blijkt niet geoorloofd; het laat zich dan ook aantoonen, dat aan bovengenoemde voorwaarde niet is voldaan.¹⁾

§ 38. Uit § 35, eerste noot volgt:

Stel, $f(x, y)$ is integrabel in (a, b) voor alle y van een verzameling Q , met y_0 tot verdichtingspunt en y_0 bevattend.

Laat $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ bestaan in alle punten x van (a, b) [behalve misschien in de punten van een verzameling met inhoud nul, waar we deze functie aanvullen met waarden uit een begrensde, overigens willekeurige verzameling].

Noodige en voldoende voorwaarden voor de integrabiliteit van $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ in (a, b) zijn:

- $\frac{\partial f}{\partial y_0}$ is begreësd in (a, b) ;
- de verzameling E der punten van (a, b) , waar $\frac{\partial f}{\partial y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$ niet quasi-uniform convergeert, heeft een inhoud nul.

Daar:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y},$$

volgt uit het bovenstaande:

Stel, $f(x)$ is continu (in 't algemeen integrabel) in (a, b) .

¹⁾ Zie Hobson, T. o. F., First Ed., p. 606.

Laat $\frac{df(x)}{dx}$ bestaan voor alle punten x van (a, b) [behalve misschien voor een verzameling met inhoud nul, waar we deze functie aanvullen met waarden uit een begrensde, overigens willekeurige verzameling].

Opdat nu $\frac{df(x)}{dx}$ integabel is in (a, b) , is noodig en voldoende:

a) $\frac{df(x)}{dx}$ is in (a, b) begrensd;

b) de punten van (a, b) , waar $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}$ niet

quasi-uniform convergeert, vormen een verzameling met inhoud nul.

Is $D^+ f(x)$ in (a, b) begrensd, dan is dat ook het geval met $\frac{f(x+y) - f(x)}{y}$ voor $x+y$ en y gelegen in (a, b) . Dus volgens § 33, beide laatste alinea's, is bij continuïteit van $f(x)$ in a en b :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x+y) - f(x)}{y} dx = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\int_b^{b+y} \frac{f(x)}{y} dx - \int_a^{a+y} \frac{f(x)}{y} dx \right] = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

De functie van Volterra¹⁾ is een continue functie, wier afgeleide eindig, doch niet integabel is. Ze voldoet dus niet aan conditie (b).

We wenschen hier nog even op te merken, dat, zoo we in hoofdstuk I ook bovenste en onderste limieten hadden toegelaten, de daarbij behorende stellingen ons in staat zouden hebben gesteld, de voorafgaande stelling en ook andere, in dit hoofdstuk voorkomende eenigszins te wijzigen; door n.l. in de punten, waar $\frac{df(x)}{dx}$ [in 't algemeen, waar $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$

¹⁾ Zie Hobson, *T. o. F.*, First Ed., p. 357 (Sec. Ed., p. 461).

niet bestaat, willekeurige waarden te nemen tusschen bovenste en onderste limiet in zoo'n punt.

§ 39. VII. $f(x, y)$ zij gedefinieerd voor alle combinaties (x, y) uit de intervallen (a, b) voor x en (c, d) voor y . Laat $f(x, y)$ integrabel zijn naar x in (a, b) [behalve op een verzameling van y -waarden in (c, d) met inhoud nul]. In (c, d) zij $\int_a^b f(x, y) dx$ integrabel [met welke waarden we deze functie ook aanvullen, enz.].

Laat verder $\int_c^d f(x, y) dy$ bestaan voor alle waarden x van (a, b) [behalve wellicht voor die van een verzameling met inhoud nul, waar we weer willekeurige, begrensde waarden aannemen].

Opdat nu $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ bestaat en $= \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$, is noodig en voldoende, dat $\int_a^x dx \int_c^d f(x, y) dy$ quasi-uniform convergeert in b t.o.v. $\int_a^x dx \sum_i \Delta y_i f(x, y_i)$, voor één rij van sommen $\sum_i \Delta y_i f(x, y_i)$, genomen over (c, d) .

$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ kan ook zijn een oneigenlijke integraal over (a, b) .

De beteekenis der voorwaarde is duidelijk, als men bedenkt, dat hier i in de plaats treedt van y in stelling Vc.

Het voorgaande is weer een gevolg van Vc.

Is $f(x, y)$ in den rechthoek $(a, b; c, d)$ begrensd, dan is de genoemde convergentie zelfs uniform in (a, b) . Dit volgt uit het feit, dat de punten x , waarvoor bij willekeurig positieve ε :

$$\left| \int_c^d f(x, y) dy - \sum_i \Delta y_i f(x, y_i) \right| > \varepsilon$$

is een verzameling vormen, wier inhoud tot nul nadert, zoo we ver genoeg gaan in de rij der sommen. In 't kort kunnen we dus zeggen:

Bestaan de beide herhaalde integralen voor een in een rechthoek $(a, b; c, d)$ begrensde functie, dan zijn die herhaalde integralen gelijk.

De voorbeelden, die men geconstrueerd heeft (o.a. Gauss en Cauchy), waarbij de herhaalde integralen niet gelijk zijn, hebben dan ook alle betrekking op oneigenlijke integralen.

De dubbele integraal behoeft bij gelijkheid der herhaalde integralen nog niet te bestaan. Een voorbeeld van Pringsheim vindt men in HOBSON, *T. o. F.*, First Ed., p. 429, n^o. 4, (Sec. Ed., p. 487, n^o. 4).

TWEEDE GROEP.

§ 40. Uit § 22 volgt de stelling van ARZELÀ:

I. Stel, de functies $s_n(x)$ (n geheel) zijn gedefinieerd op een begrensde, gesloten verzameling $P(x)$. Zij verder $s_n(x)$ continu in alle verdichtingspunten ξ van $P(x)$.

Opdat nu ook de op P convergente reeks $\lim_{n=\infty} s_n(x)$ in de punten (ξ) continu is, is noodig en voldoende, dat $\lim_{n=\infty} s_n(x)$ quasi-uniform convergeert op P .¹⁾

In plaats van te onderstellen de quasi-uniforme convergentie op P is het volgens prof. Wolff reeds voldoende aan te nemen de quasi-uniforme convergentie op een (al of niet gesloten) onderverzameling, welke dezelfde verdichtingspunten heeft als P . Het bewijs, dat zich heel eenvoudig laat geven,²⁾ berust op het continuïteitsbegrip. Deze kleine uitbreiding van de stelling van Arzelà laat zich dus niet overdragen op het algemeen geval van limietverwisseling.

II. De stelling, analoog aan § 29, II, zou als noodige en voldoende voorwaarde eischen de uniforme convergentie op de verzameling P .

Ook zou een noodige en voldoende voorwaarde zijn de

¹⁾ Zie Schoenflies, *Entw. d. Lehre v. d. Punktmannigfaltigk.*, IIer Teil, Erste Aufl., p. 325 e. vlg. — Uit § 22, eerste noot volgt als noodige en voldoende voorwaarde het daar onder (c) genoemde. In dezen vorm vindt men de stelling in Borel, *Fonctions de Var. Réelles*, p. 41 e. vlg.

²⁾ Zie *Verslagen Kon. Akad. Amsterdam*, Dl. XXVII, 2, p. 1098 e. 1099.

uniforme convergentie op een onderverzameling van P , die dezelfde verdichtingspunten heeft als P .

§ 41. III. $s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ zij gedefinieerd op een begrensde, gesloten verzameling $P(x)$. In ieder punt x zal bestaan $\lim s_n(x)$ en in ieder verdichtingspunt ξ een eindige afgeleide $\lim_{h=0} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h} = \frac{ds_n(\xi)}{d\xi}$,¹⁾ waarbij $\xi + h$ slechts waarden aanneemt, behoorend tot P . Bovendien zal $\lim_{n=\infty} \frac{ds_n(\xi)}{d\xi}$ aanwezig zijn.

Opdat nu in de verdichtingspunten ξ van $P(x)$ de reeks termsmag worden gedifferentieerd, is noodig en voldoende, dat voor ieder verdichtingspunt ξ $\lim_{n=\infty} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h}$ (voor $h = 0$ aangevuld met $\lim_{n=\infty} \frac{ds_n(\xi)}{d\xi}$) quasi-uniform convergeert op de verzameling (h) welke punten volgen uit die van $P(x)$ met behulp der betrekking: $h = x - \xi$.

Bewijs: Zij aan de voorwaarden voldaan. Vatten we een willekeurig verdichtingspunt ξ in het oog, dan is volgens § 22 voor alle verdichtingspunten p der bijbehorende verzameling (h) :

$$\lim_{h=p} \lim_{n=\infty} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h} = \lim_{n=\infty} \lim_{h=p} \frac{s_n(\xi + h) - s_n(\xi)}{h}.$$

Dus is in 't bijzonder voor het verdichtingspunt 0:

$$\frac{d}{d\xi} \lim_{n=\infty} s_n(\xi) = \lim_{n=\infty} \frac{d}{d\xi} s_n(\xi).$$

Is termsgewijze differentiatie mogelijk, dan is voor alle verdichtingspunten der boven beschouwde verzamelingen (h) de limietverwisseling mogelijk. Volgens § 22 zijn dus de voorwaarden ook noodig.

Deze stelling werd door Prof. Wolff uit de boven onder I genoemde stelling van Arzelà afgeleid.²⁾

¹⁾ Hier is het begrip van afgeleide een weinig algemeener genomen dan gewoonlijk.

²⁾ Zie *Nieuw Archief*, 2e reeks, deel XIII, 2e stuk, p. 185 en 186.

Op dezelfde wijze als III laat zich een stelling (IV) afleiden voor het bestaan en de gelijkheid van $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0 \partial x_0}$ voor het geval, dat we een twee-dim. verzameling (x, y) beschouwen van de volgende soort. Ze ontstaat door combinatie van alle waarden y uit een verzameling, met y_0 tot verdichtingspunt, met alle waarden x van een begrensde, gesloten verzameling $P(x)$.

§ 42. Ook de in de eerste groep genoemde stelling V^a over het nemen van de limiet onder het integraalteeken laat 'n voor de hand liggende uitbreiding toe, zoo we in plaats van het enkele verdichtingspunt y_0 alle verdichtingspunten der verzameling $Q(y)$ beschouwen.

Het is duidelijk, dat de in § 33 genoemde, voldoende voorwaarden, n.l. uniforme convergentie of enkelvoudig uniforme convergentie (Dini) van $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ in (a, b) ook voldoende

zijn, zoo we als integratievak (a', b') nemen een willekeurig interval, binnen (a, b) gelegen.

Toepassing van het lemma van Borel geeft uit § 33, V^c volgende, noodige en voldoende voorwaarde, opdat in het daar beschouwde geval het nemen van de limiet onder het integraalteeken geoorloofd is voor ieder onderinterval $(a' b')$. $\int_a^x \lim_{y=y_0} f(x, y) dx$ zal quasi-uniform convergeeren t.o.v.

$\int_a^x f(x, y) dx$ op het segment (a, b) .

Men ziet direct, dat aan deze voorwaarde is voldaan bij uniforme convergentie of enkelvoudig uniforme convergentie van $\lim_{y=y_0} f(x, y)$ in (a, b) .

Voorbeelden volgen uit die van de vorige groep door de punten, waarin we daar de functies beschouwden, in intervallen in te sluiten.

HOOFDSTUK III.

Uitbreiding der limiet-definitie.

§ 43. Bij de definitie van integraal volgens Riemann ¹⁾ beschouwen we een rij van intervalsverdeelingen, waarbij het aantal deelpunten voortdurend toeneemt en de grootste intervalslengte van iedere verdeling tot nul nadert, zoo we ver genoeg in die rij voortgaan; in ieder interval wordt op vooraf aan te geven wijze een functiewaarde uit een zijner punten gekozen. Komt er dan een limietwaarde voor de hierbij behorende som $\sum_i f(x_i) \cdot \Delta x_i$ en geeft ook iedere

andere rij van verdeelingen met daarbij behorende functiewaarden dezelfde limietwaarde, zoo weer het aantal deelpunten toeneemt en de grootste intervalslengte tot nul nadert, als we ver genoeg in die rij voortgaan, dan noemen we die limietwaarden de integraal volgens R.

Het is nu mogelijk alle denkbare verdeelingen dezer soort tot een geordende verzameling bijeen te voegen, zoodanig dat van twee verdeelingen eener rij die van laagste rangorde in die rij ook is van laagste rangorde in de geordende verzameling. We laten daartoe verdeelingen, waarvoor de grootste intervalslengte G is, voorafgaan aan verdeelingen, wier grootste intervalslengte is $G' < G$. Onder de verdeelingen met gelijke, grootste intervalslengte G laten we die met n intervallen voorafgaan aan die met n' intervallen, zoo $n < n'$ is. Onder de verdeelingen met gelijke n en gelijke G laten we de verdeelingen, waarvoor G het 1^e interval is,

¹⁾ Zie Lebesgue, *Leçons sur l'intégration, etc.*, p. 23 e. vlg.

voorafgaan aan die, waarvoor G is het $2^e, 3^e, \dots n^e$ interval; de verdeelingen, waarvoor G het 2^e interval is, gaan vooraf aan die, waarvoor G is het $3^e, \dots, n^e$ interval; enz. Dat G het p^e interval is, duiden we aldus aan: G_p . Onder de intervalsverdeelingen met dezelfde n en G_p komen intervalsverdeelingen voor, waarbij k van de $(n-1)$ overblijvende intervallen dezelfde zijn (k kan nul zijn). Die verdeelingen nu, waarvoor het $(k+1)^e$ interval l_{k+1} lang is, gaan vooraf aan die waarbij het $(k+1)^e$ interval l'_{k+1} lang is met $l'_{k+1} < l_{k+1}$. De verdeelingen met gelijke n en G_p en $k = n-1$ hebben dus dezelfde deelpunten. Alleen de keuze van het punt x_i in het i^e interval, waar we de functiewaarde nemen, is nog verschillend. Onder deze gelijke verdeelingen laten we die, waarbij x_1 kleiner is, voorafgaan aan die met grootere waarde x_1' ; onder die met gelijke x_1 laten we de verdeelingen, waarbij x_2 kleiner is, voorafgaan aan die met grooter x_2' ; enz.

Op deze wijze hebben we alle mogelijke combinaties gehad, terwijl we van 2 verdeelingen met bijbehorende functiewaarden direct kunnen zien, welke de andere voorafgaat. Nemen we nu een willekeurige rij van verdeelingen met daarbij behorende functiewaarden, dan is boven ieder element der geordende verzameling steeds nog een element aan te wijzen, dat behoort tot die rij van verdeelingen.

Deze methode van ordening laat zich ook gemakkelijk op meervoudige integralen toepassen.

Bij limieten van functies van 2 of meer veranderlijken laten zich de functiewaarden ook eenvoudig ordenen en wel op een wijze, waarbij aan de volgende conditie is voldaan. In iedere rij van functiewaarden, waarvoor de bijbehorende waarden der onafhankelijk veranderlijken naar haar respectievelijke limietwaarden convergeeren, zal bij een willekeurig element der geordende verzameling steeds een functiewaarde zijn aan te geven, welke in de geordende verzameling een element van hooger rangorde vormt dan het vooraf gekozene.

Bij de overige limietovergangen, die men in ieder leerboek

der differentiaal- en integraalrekening aantreft, zijn de getallenwaarden reeds vanzelf op dergelijke wijze geordend.

§ 44. Wenschen we al deze bijzondere gevallen van limiet-overgang onder één begrip te brengen, dan ligt het voor de hand de limietdefinitie den volgenden vorm te geven:

A¹. Een oneindige, geordende verzameling μ van getallenwaarden heeft een limiet L in het volgende geval. Bij iedere aftelbaar oneindige onderrij van μ , waarin steeds is te vinden een element van hooger rangorde dan een vooraf willekeurig aangewezen element van μ , zal het voor willekeurig pos. ε mogelijk zijn een element aan te wijzen, zóó dat voor dit element en alle volgende elementen a van die onderrij:

$$|a - L| \leq \varepsilon \quad \text{is.}$$

Deze definitie is identiek met de volgende:

A². Een oneindige, geordende verzameling μ van getallenwaarden heeft een limiet L , als het mogelijk is bij willekeurig pos. ε in de verzameling μ een element aan te wijzen, zóó dat voor dit element en alle volgende elementen a van μ :

$$|a - L| \leq \varepsilon \quad \text{is.}$$

Het bewijs van die gelijkwaardigheid blijft vrijwel gelijk aan het bewijs van de gelijkwaardigheid der overeenkomstige, gewone limietdefinities.¹⁾

Hét algemeene convergentie-principe blijft doorgaan:

Noodig en voldoende voor het bestaan van de limiet L is, dat zich bij willekeurig positieve ε in de geordende verzameling μ (of in iedere onderrij) een element a laat aanwijzen, zoo dat voor 2 willekeurige elementen a' en a'' van hooger rang dan- of identiek met a :

$$|a' - a''| \leq \varepsilon \quad \text{is.}$$

Het bewijs blijft weer gelijk aan dat bij de gewone limietdefinitie.²⁾ Gaat men dit na, dan blijkt het o. a. te berusten

¹⁾ Vgl. Burkhardt, *Funktionenth.*, I:1 (*Algebraische Analysis*). Zweite Aufl., p. 133 e. 134.

²⁾ Zie b.v. Osgood, *Funktionenth.*, Ier Band, Kap. I, § 7.

op de eigenschap van het continuüm een *gesloten*, geordende verzameling te vormen.

§ 45. Onder een *gesloten*, geordende verzameling verstaan we een geordende verzameling met de volgende eigenschap. Verdeelen we alle elementen in 2 onderverzamelingen, zóó dat ieder element der eene verzameling van lager rangorde is dan ieder element der andere. dan heeft óf de eerste verzameling een element van hoogsten rang óf de tweede verzameling een element van laagsten rang.

De in de vorige § gegeven limiet-definitie A^1 laat zich nu als volgt op gesloten, geordende verzamelingen overdragen.

B^1 Een oneindige, geordende verzameling μ van elementen, die behooren tot een gesloten, geordende verzameling M ¹⁾ heeft het element L van die gesloten verzameling tot limiet, als aan de volgende voorwaarde is voldaan. Bij iedere aftelbaar oneindige onderrij van μ , waarin steeds is te vinden een element van hooger rangorde dan een vooraf willekeurig aangewezen element van μ , is het mogelijk:

1^e dat ieder element a van lager rangorde dan L in de gesloten verzameling M „niet” overtroffen wordt door geen- of slechts een eindig aantal elementen, behoorende tot die onderrij van μ ;

2^e dat ieder element b van hooger rangorde dan L in de gesloten verzameling M overtroffen wordt door geen- of slechts een eindig aantal elementen der onderrij.

De rij der geheele getallen en het continuüm vallen onder de definitie van gesloten, geordende verzameling. Op beiden laat zich dus de limiet-definitie B^1 toepassen.

De *stelling van Weierstrass*, dat een monotone rij (in 't algemeen een geordende onderverzameling μ , waarbij de elementen dezelfde plaats innemen t.o.v. elkaar als in de gesloten verzameling), die begrensd is, een limiet heeft, gaat

¹⁾ De manieren van ordening in μ en in de gesloten verzameling M kunnen geheel verschillend zijn. Een element der gesloten verzameling M kan in μ eindig- of oneindig veel maal voorkomen.

nu ook door. — Dat de rij (de verzameling μ) begrensd is, wil zeggen, dat zich in M een element laat aanwijzen van hooger rangorde dan alle elementen der rij (van de verzameling μ).

§ 46. Ofschoon de geordende verzameling M , waarin de limiet gezocht wordt, nu gesloten is, is het nog niet mogelijk hier een algemeen convergentie-principe te geven. Dit komt, omdat dat principe tevens berust op het begrip van inhoud. Die geordende, gesloten verzamelingen, waarop dit begrip zich op de volgende wijze laat uitbreiden, hebben het algemeene convergentie-principe:

1^e Bij 2 willekeurige elementen a en a' van M laat zich minstens één onderverzameling aangeven, welke a en a' en alle in M daartusschen gelegen elementen bevat, en waarop zich het begrip inhoud laat uitbreiden. D. w. z. waarbij een of meer grootheden zijn aan te geven, welke door die onderverzameling bepaald worden en die we bij elkaar haar „inhoud” noemen.

Definitie: De inhoud zal tot nul naderen, als elk der grootheden, die den inhoud bepalen, tot nul naderen.

Definitie: Een inhoud zal kleiner zijn dan een tweede inhoud, als alle grootheden van den eersten inhoud dichter bij nul liggen dan de overeenkomstige grootheden bij den tweeden.

2^e Naderen a en a' (zie 1^e) tot één limietelement, dan moet het mogelijk zijn de onder 1^e genoemde verzamelingen zóó te kiezen, dat haar inhoud tot nul nadert.

3^e Omgekeerd, naderen de inhouden van in elkaar sluitende onderverzamelingen tot nul, dan zullen twee elementen a en a' , willekeurig in zoo'n onderverzameling gekozen tot dezelfde limiet naderen.

4^e Hebben twee onderverzamelingen O_1 en O_2 een inhoud, dan zal ook de verzameling $O_{(1,2)}$ hunner gemeenschappelijke elementen een inhoud hebben en deze zal kleiner zijn dan of hoogstens gelijk aan die van O_1 en die van O_2 .

We noemen een geordende verzameling *meetbaar*, als aan bovenstaande voorwaarden is voldaan.

Voor „meetbare”, gesloten, geordende verzamelingen is een tweede vorm der limiet-def. te geven, overeenkomend met A^2 .

B^2 . Een oneindige, geordende verzameling μ van elementen, die behooren tot een meetbare, gesloten, geordende verzameling M heeft het element L van die gesloten verzameling tot limiet, als het mogelijk is bij een willekeurig gekozen inhoud in de geordende verzameling μ een element a aan te wijzen, zoodat er een onderverzameling van M bestaat met de eigenschappen:

1^e ze bevat het element a en alle volgende elementen van μ , en L ;

2^e ze bevat bovendien alle elementen, die in M liggen tusschen 2 willekeurige elementen, onder 1^e genoemd;

3^e haar inhoud ligt dichter bij nul dan de vooraf willekeurig gekozen inhoud.

De gelijkwaardigheid van B^1 en B^2 laat zich op dezelfde manier bewijzen als die van A^1 en A^2 .

§ 47. Algemeen convergentie-principe: Een oneindige, geordende verzameling μ van elementen eener meetbare, gesloten, geordende verzameling M heeft een limiet in het volgende geval. We nemen willekeurige waarden voor de grootheden, die den inhoud bepalen. In iedere willekeurige onderrij van μ , waarin steeds is te vinden een element van hooger rangorde dan een vooraf willekeurig gekozen element van μ , moet zich een element a laten aangeven en in M een onderverzameling O met kleiner inhoud dan de gekozene, zoo dat 2 willekeurige elementen a' en a'' , die in de onderrij van μ van gelijke of hooger rangorde dan a zijn, en alle in M daartusschen gelegen elementen in O liggen.

Deze voorwaarde is ook noodig.

Bewijs: Dat de voorwaarde noodig is, is evident.

Zij omgekeerd aan haar voldaan. We nemen een willekeurige onderrij van μ , waarin steeds is te vinden een element

van hooger rangorde dan een vooraf willekeurig gekozen element van μ , en een willekeurige rij naar nul convergerende inhouden. Duiden we deze aan door $(1), (2), \dots, (n), \dots$. Bij (1) behooren een onderverzameling $O_{(1)}$ van M en een element $E_{(1)}$ van de onderrij van μ , met de in de stelling aangeduide eigenschap. In 't algemeen krijgen we onderverzamelingen $O_{(k)}$ en elementen $E_{(k)}$, die steeds zoo zijn te kiezen, dat in de onderrij $E_{(k+1)}$ van hooger rangorde is dan $E_{(k)}$. $O_{(1)}$ en $O_{(2)}$ hebben gemeenschappelijke elementen; noemen we hun verzameling $O_{(1,2)}$. $O_{(1,2)}$ en $O_{(3)}$ hebben een verzameling $O_{(1,2,3)}$ gemeen; enz. Uit de definitie van „meetbaar” volgt, dat ook de inhoud van $O_{(1,2,\dots,n)}$ tot nul nadert met (n) . $E_{(n)}$ ligt in $O_{(1,2,\dots,n)}$. Dus naderen de elementen $E_{(1,\dots,n)}$ daarbij tot een limiet-element L . Gemakkelijk volgt nu, met B^1 , dat de onderrij ook naar L convergeert.

Dat 2 willekeurige onderrijen der beschouwde soort dezelfde limiet opleveren, volgt door combinatie harer elementen tot een derde onderrij. Volgens definitie B^1 heeft dan ook de verzameling μ een limiet.

Het algemeene convergentie-principe is in aansluiting aan de definitie B^2 ook in een vorm te brengen, die meer overeenkomt met die bij de gewone limiet-definitie bij getallen.

§ 48. Een complexe functie van een complexe veranderlijke is een combinatie van 2 reële functies bij 2 reële onafhankelijk veranderlijken. De hierbij behorende limiet-definities vallen dus onder de limiet-definities B^1 en B^2 , zoo we in plaats van één verzameling M twee verzamelingen M_1 en M_2 beschouwen, eveneens twee geordende verzamelingen μ_1 en μ_2 van hetzelfde ordetype, wier elementen behooren resp. tot M_1 en M_2 , en daardoor ook twee limiet-elementen L_1 en L_2 .

§ 49. Voorbeeld van een meetbare, gesloten geordende verzameling: Beschouwen we het vierkant in het $x y$ -vlak, dat tot zijden heeft $x = \pm 1, y = \pm 1$. We verdeelen het in 4 andere vierkanten I, ..., IV, deze ieder weer in 4 andere vierkanten, enz., op de wijze als in fig. 1 aangegeven. De

randpunten van I denken we ons gerangschikt van links naar rechts, in een volgorde behoorend bij een rondgang om I tegen de wijzers van het uurwerk. Het meest linksche

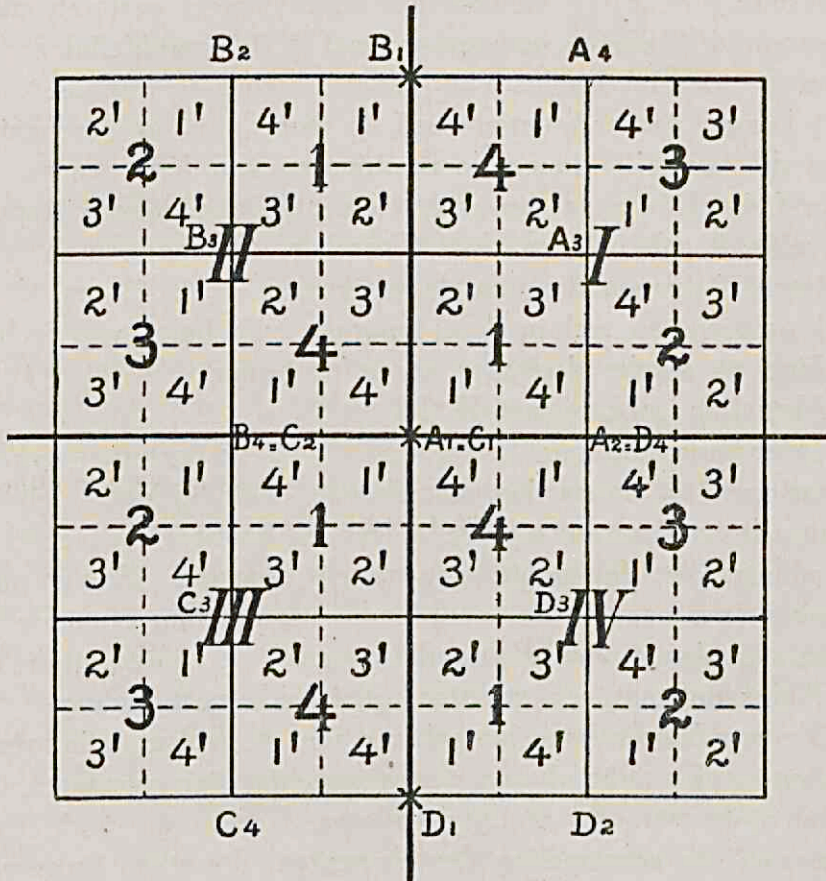


FIG. 1.

element zal (0, 0) zijn. Rechts van deze groep, doch daarvan gescheiden, komen de randpunten van II, beginnend met (0, 1) en van links naar rechts in een volgorde, weer behoorend bij een rondgang tegen de wijzers van het uurwerk. Rechts hiervan komen de randpunten van III, beginnend met (0, 0), en tenslotte krijgen we nog verder rechts die van IV, beginnend met (0, - 1). Steeds wordt een vierkant rondgegaan tegen de wijzers van het uurwerk.

Tusschen de randpunten van I en die van II denken we ons geplaatst alle elementen, die we op de volgende wijze

krijgen uit de punten van het vierkant I. Daar $(0, 0)$ het meest linksche randpunt van I is en $(0, 1)$ het meest linksche van II, zullen we beginnen met de randpunten van I, 1 en eindigen met die van I, 4 (de verzameling moet immers gesloten zijn). Die van I, 1 komen, te beginnen met $(0, 0)$, onmiddellijk rechts van die van I. Rechts van-, doch gescheiden van die van I, 1 komen de randpunten van I, 2; rechts van-, en gescheiden van die van I, 2 komen de randpunten van I, 3; daarna die van I, 4. De meest linksche elementen zijn daarbij respectievelijk A_1, A_2, A_3 en A_4 . Tusschen de randpunten van I, 1 en I, 2 komen die van de vierkanten $1', 2', 3'$ en $4'$, in I, 1 gelegen, en wel in deze volgorde van links naar rechts.

Hoe dit verder doorgaat, toont de figuur.

Hetzelfde gebeurt met II, III en IV.

Ieder inwendig punt of randpunt van het groote vierkant is gelegen in- of op den omtrek van oneindig veel in elkaar sluitende vierkanten, die we in een rij kunnen rangschikken zoodanig dat de lengte der zijden afneemt. Zoo'n punt denken we ons in de geordende verzameling onmiddellijk rechts geplaatst van alle randpunten der vierkanten uit die rij.

Aldus ontstaat een gesloten, geordende verzameling.

Ze wordt meetbaar bij gebruik van de volgende inhouds-definitie. De inhoud van de verzameling van elementen, die staan links van de randpunten van II zal zijn $(1, 1, 0, 0)$; die van de verzameling der elementen, die staan links van de randpunten van I, 2 en rechts van die van I zal zijn $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$; de inhoud van de punten, die staan links van de randpunten van I, 1, $2'$ en rechts van die van I, 1 zal zijn $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$; enz.

Hebben we een deelverzameling, die enkel uit randpunten bestaat en wel in dezelfde volgorde als in de geordende verzameling en zonder dat daarbij een element uit de geordende verzameling wordt overgeslagen, dan zal het derde cijfer, dat haar inhoud bepaalt, aangeven den totalen afstand, waarover men in de x-richting heen en weer is moeten gaan om van het meest linksche grenselement te komen tot het meest rechtsche. Het vierde cijfer geeft dan aan den totalen

afstand heen en weer, afgelegd in de y -richting. De beide eerste cijfers zullen nu nul zijn.

Een onderverzameling met inhoud, waarvoor de 4 cijfers alle van nul verschillend zijn, wordt b.v. gevormd door alle elementen links van de randpunten van II en de randpunten van II, in dezelfde volgorde als in de geordende verzameling. Deze inhoud is (1, 1, 2, 2).

§ 50. Om de stellingen over limietverwisselingen hier te kunnen overdragen, is het gewenscht aan den inhoud bij gesloten, geordende verzamelingen nog den volgende eisch te stellen.

We beschouwen uit een meetbare, gesloten, geordende verzameling een rij van onderverzamelingen P_n (n geheel) met naar nul convergeerenden inhoud. Bij alle elementen x van P_n worden verzamelingen $Q_n(x)$ gekozen, die een inhoud hebben, kleiner dan dien van P_n ; zoo'n verzameling $Q_n(x)$ kan ook bestaan uit het punt x alleen. Nu zal steeds een verzameling met inhoud zijn aan te wijzen, die alle elementen van P_n en van de verzamelingen $Q_n(x)$ bevat en wier inhoud tot nul zal naderen, voor n naderend tot het oneindige.

Is hieraan voldaan, dan geldt de volgende stelling.

Zij M een meetbare, gesloten, geordende verzameling van elementen E , wier inhouds-definitie aan bovenstaanden eisch voldoet. Laten verder gegeven zijn twee ordetypen μ en μ' . Bij iedere combinatie van een element x van het ordetype μ met een element y van het van het ordetype μ' zal een element $E(x, y)$ van M behooren.

Laten de elementen $E(x, y)$, behorend bij een zelfde element y van μ' , geordend volgens het ordetype μ , een limiet opleveren (we schrijven dit: $L_\mu(y)$). Laat op gelijke wijze bestaan $L_{\mu'}(x)$.

De limieten $L_\mu(y)$, behorende bij de verschillende elementen van μ' , zijn elementen van M . We ordenen ze volgens μ' en denken ons nu ook te bestaan de herhaalde limiet $L_{\mu'\mu}$.

Opdat nu $L_{\mu\mu'}$ bestaat en $= L_{\mu'\mu}$, is noodig en vol-

doende, dat $L_{\mu'}(x)$ bestaat voor iedere x en „quasi-uniform convergeert t. o. v. μ'' .

Hieronder verstaan we, dat bij iederen willekeurigen inhoud (genomen volgens de definitie, behoorend bij de verzameling M) en bij een willekeurig element Y van het ordetype μ' is te vinden een element X van het ordetype μ en een element Y' , van hooger rangorde dan Y en behoorend tot μ' , zoo dat voldaan is aan het volgende. Bij iedere x , van hooger rangorde dan X in μ , zullen $L_{\mu'}(x)$ en $E(x, Y')$ en alle in M daartusschen geplaatste elementen gelegen zijn in een onderverzameling van M , wier inhoud kleiner is dan de willekeurig gekozene.

Het bewijs der stelling laat zich geheel afleiden uit dat van § 1 en geven we hier daarom niet.

§ 51. Daar het lemma van Borel ook geldt voor gesloten, geordende onderverzamelingen van een gesloten, geordende verzameling ¹⁾, volgt uit bovenstaande stelling, na definitie van quasi-uniforme convergentie op een gesloten, geordende verzameling, een stelling, welke het analogon is van die van § 22.

Een der ordetypen μ wordt vervangen door een gesloten, geordende, al of niet meetbare verzameling m . Elementen E van M zullen toegevoegd zijn aan alle mogelijke combinaties (x, y) van elementen van m en μ' . De elementen links van een willekeurig element x van m vormen een ordetype $\mu_{l,x}$; ook die rechts van x vormen een ordetype $\mu_{r,x}$, zoo we de volgorde van 2 willekeurige elementen omgekeerd nemen aan die in m . We denken ons nu te bestaan bij ieder element y van μ' zoowel $L_{\mu_{l,x}}(y)$ als $L_{\mu_{r,x}}(y)$ en onderstellen deze limieten identiek [$L_{\mu_{l,x}}(y) = L_{\mu_{r,x}}(y) = L_{\mu}(y)$]

De bedoelde stelling laat zich na het bovenstaande gemakkelijk in woorden brengen.

Natuurlijk laten ook alle andere limietstellingen uit hoofdstuk I zich op passende wijze overdragen.

¹⁾ Zie Schoenflies-Hahn. *Entw. d. Mengenlehre u. ihrer Anwend.*, 1^e Hälfte, Zweite Aufl., p. 251.

Ook de eigenschappen over de limieten van sommen en producten zouden zich op gesloten, geordende verzamelingen laten uitbreiden; daarbij moesten dan o.a. aan het inhoudsbegrip nog verdere eigenschappen worden toegekend. We gaan hierop niet nader in.

§ 52. Toepassingen: 1. Tengevolge van de gelijkwaardigheid der definities A^1 en A^2 van § 44 is het bij een integraal van Riemann mogelijk om bij willekeurige, positieve ε een getal δ aan te wijzen, zoo dat iedere $\sum_i (x_{i+1} - x_i) f(x_i')$ minder dan ε van de integraal afwijkt, als ieder interval (x_i, x_{i+1}) een lengte heeft $\leq \delta$ ('n bekende eigenschap).

2. De noodige en voldoende voorwaarden, gegeven in de stellingen V^a en V^b (§ 33) volgen uit § 50 in eenigszins algemeener vorm.

HOOFDSTUK IV.

Oneigenlijke integraal.

§ 53. Stel, dat de meetbare functie f niet begrensd is op de begrensde verzameling E . We kunnen dan bij twee willekeurig positieve getallen n en n' een functie $f_{n,n'}$ definieeren van den volgenden aard. In de punten, waar f ligt tusschen n en n' , stellen we $f_{n,n'} = f$. In die punten, waar $f \leq -n'$ is, nemen we $f_{n,n'} = -n'$; en in de punten, waar $f \geq n$ is, zal $f_{n,n'} = n$ zijn. $f_{n,n'}$ is een op E begrensde, meetbare functie en heeft dus een integraal van Lebesgue:

$$\int_E f_{n,n'}(P) dP.$$

We beschouwen twee naar het oneindige convergeerende rijen n_p en n'_p (p geheel); de verschillen $n_p - n'_p$ zullen een begrensde rij vormen. Levert nu $\int_E f_{n_p, n'_p}(P) dP$ een limiet, voor p naderend tot ∞ , en is deze limiet steeds dezelfde, welke rijen n_p en n'_p we ook combineeren, zoo slechts de verschillen n_p en n'_p een begrensde rij vormen, dan noemen we die limietwaarde de oneigenlijke integraal van f op E .

Uit deze definitie volgt direct, dat de punten, waar de aldus integreerbare functie $f = \pm \infty$, een verzameling vormen met inhoud nul. Had toch b.v. de inhoud der verzameling van punten, waarin $f = +\infty$, een van nul verschillende waarde ε , dan zouden $\lim_{n=\infty} \int_E f_{n,n}(P) dP$ en

$\lim_{n=\infty} \int_E f_{n+p,n}(P) dP$ (p pos.) $p \times \varepsilon$ van elkaar verschillen

en zou dus de oneigenlijke integraal niet bestaan. Derhalve is de inhoud dier verzameling nul; evenzoo de inhoud van de verzameling van punten, waar $f = -\infty$.

Omgekeerd, is de inhoud der punten, waar $f = \pm \infty$, nul, dan zal, als $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_{n,n}(P) dP$ bestaat, ook $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n' \rightarrow \infty}} \int_E f_{n,n'}(P) dP$ bestaan, zoo $|n - n'|$ kleiner blijft dan een vooraf willekeurig aangenomen, positieve waarde.

We kunnen dus van nu af nemen: $n = n'$, in de onderstelling dat de verzameling der punten, waar $f = \pm \infty$, een inhoud nul heeft.

§ 54. Onder de gegeven integraal-definitie vallen alle (absoluut convergente) oneigenlijke integralen, volgens de definitie van DE LA VALLÉE POUSSIN. ¹⁾

De gegeven definitie omvat echter ook niet-absoluut convergente, oneigenlijke integralen. Een voorbeeld is het volgende. Een vierkant met zijde 1 verdeelen we als in fig. 2 aangegeven. Het oppervlak van I zal zijn $1/2$, - van II $1/4$, - van III $1/8$, enz. De functiewaarde zal in alle

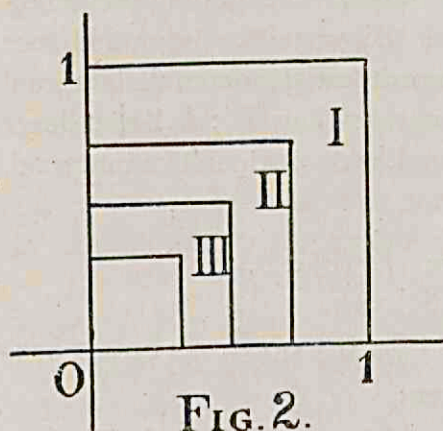


FIG. 2.

punten van I (de randpunten inbegrepen) zijn $\frac{1/1}{1/2}$, - in alle punten van II (de randpunten, die niet tevens randpunten van I zijn, inbegrepen) $\frac{-1/2}{1/4}$, - in alle punten van III $\frac{+1/3}{1/8}$, enz.; in 't algemeen in de punten van het n^e vakje

$$\frac{(-1)^{n-1} \frac{1}{n}}{\frac{1}{2^n}} = (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n}.$$

¹⁾ Zie b.v. Hobson, *T. o. F.*, First Ed., p. 368 en 369 (Sec. Ed., p. 523).

De bijdrage van alle vakjes, op het n^e volgend, tot de oneigenlijke integraal ligt dus tusschen $\frac{2^n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{n!}$ en $-\frac{1}{n}$.

Dus is de oneigenlijke integraal gelijk aan

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} \left[\frac{1/1}{1/2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{-1/2}{1/4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{+1/3}{1/8} \cdot \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \frac{1}{n}}{1/2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \right] = \\ = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] = \log 2. \end{aligned}$$

De definitie van de la Vallée Poussin had geen uitkomst gegeven; die van Harnack ¹⁾ geeft dezelfde uitkomst.

§ 55. Toch zijn de definitie van Harnack en de hier gegevene niet identiek. Ze verschillen in de volgorde, waarin zekere limietovergangen plaats hebben, zoo beide oneigenlijke integralen bestaan.

Bij gebruik der definitie van Harnack wordt ondersteld, dat de punten, waarin f onbegrensd is, een (gesloten) verzameling met inhoud nul vormen. Bij willekeurige, positieve ε is het dus mogelijk een eindig aantal continua te bepalen, die ieder minstens één - en samen alle punten bevatten, waarin f onbegrensd is, en wier gezamenlijke inhoud kleiner is dan ε . Volgens Harnack wordt nu genomen de integraal van f over de overschietende verzameling E' ; de limiet dezer integraal, voor ε tot nul naderend, is de oneigenlijke integraal. In formule:

$$\int_E f(P) dP = \lim_{\varepsilon=0} \int_{E'} f(P) dP.$$

Definieeren we bij positieve n $f_{n,n}(P)$ op E , als boven aangegeven, dan is ook te schrijven:

$$\int_E f(P) dP = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{n=\infty} \int_{E'} f_{n,n}(P) dP.$$

Onze definitie, die we voortaan „uitgebreide definitie van

¹⁾ Zie b.v. Hobson, *T. o. F.*, First Ed., p. 367 e. 368 (Sed. Ed., p. 599 e. 600).

de la Vallée Poussin" zullen noemen, geeft voor de oneigenlijke integraal dezer functie f :

$$\int_E f(P) dP = \lim_{n=\infty} \lim_{\varepsilon=0} \int_{E'} f_{n,n}(P) dP,$$

als ε dezelfde beteekenis heeft als in de voorgaande alinea.

Zij f op E niet negatief en laten de punten, waarin f niet begrensd is, een verzameling vormen met inhoud nul. Laat de oneigenlijke integraal van f op E bestaan, volgens de (uitgebreide) definitie van de la Vallée Poussin. Het is dan mogelijk bij willekeurige, positieve ζ een waarde ν voor n aan te geven, zóó dat;

$$0 \leq \lim_{n=\infty} \lim_{\varepsilon=0} \int_{E'} f_{n,n}(P) dP - \lim_{\varepsilon=0} \int_{E'} f_{\nu,\nu}(P) dP < \zeta.$$

Nu is ook:

$$0 \leq \lim_{n=\infty} \int_{E'} f_{n,n}(P) dP - \int_{E'} f_{\nu,\nu}(P) dP < \zeta,$$

onafhankelijk van den gezamenlijken inhoud ε der uitgesloten continua. Er is dus quasi-uniforme convergentie. De integraal van Harnack bestaat en is gelijk aan de hier gegevene.

Heeft f positieve en negatieve waarden, dan kunnen we op E twee functies definieeren als volgt. De eerste, $f_+(P)$, zal gelijk zijn aan $f(P)$ in alle punten, waar f positief is, en $= 0$ in alle punten, waar f nul of negatief is; de tweede, $f_-(P)$, zal zijn $= -f(P)$ in alle punten, waar f negatief is, en $= 0$ in alle punten, waar f positief of nul is. Op E is dan $f(P) = f_+(P) - f_-(P)$. Daar het voorafgaande bewijs zoowel voor $f_+(P)$ als $f_-(P)$ geldt, indien deze functies een oneigenlijke integraal volgens de la Vallée Poussin bezitten, hebben we:

Heeft een functie $f(P)$ op een verzameling E een absoluut convergente integraal, volgens de (uitgebreide) definitie van de la Vallée Poussin, en vormen de punten, waarin ze niet begrensd is, een verzameling met inhoud nul,¹⁾ dan bestaat

¹⁾ Bij gebruik van integralen van Riemann is hieraan vanzelf voldaan. Vgl. p. 3.

ook de oneigenlijke integraal van Harnack en is gelijk aan die van de la Vallée Poussin.

Op soortgelijke wijze laat zich bewijzen:

Bestaat de absoluut convergente integraal van Harnack, dan bestaat ook die van de la Vallée Poussin en heeft dezelfde waarde.

Bij de definitie van Harnack wordt ondersteld, dat de punten, waarin de functie niet begrensd is, een verzameling met inhoud nul vormen. Dit is, nu we over de niet-uitgesloten verzameling E' de integraal van Lebesgue ¹⁾ nemen, niet meer noodig. Aan de definitie van Harnack is n.l. deze uitbreiding te geven:

Een functie zij gedefinieerd op een begrensde verzameling E . De punten, in wier omgeving f niet sommeerbaar is, zullen een (gesloten) verzameling H vormen met inhoud nul. We sluiten de punten dezer verzameling in een eindig aantal continua met gezamenlijken inhoud, kleiner dan een willekeurig positief getal ε , zoodat ieder continuüm minstens één- en de continua samen alle punten der verzameling H bevatten; de integraal van Lebesgue over de overblijvende verzameling E' zal tot een limietwaarde naderen, als ε tot nul nadert en deze limietwaarde zal onafhankelijk zijn van de wijze, waarop de uitgesloten continua worden gekozen. Deze limiet noemen we dan de oneigenlijke integraal van f op E (uitgebreide definitie van Harnack). ²⁾

Bij gebruik dezer definitie worden de beide, voorgaande stellingen elkaars omgekeerde. We hebben dan:

Bestaat de absoluut convergente integraal volgens de (uitgebreide) definitie van de la Vallée Poussin, dan bestaat ook die volgens de uitgebreide definitie van Harnack en heeft dezelfde waarde; en omgekeerd.

De verzameling H bevat n.l. geen enkel punt; de definities zijn hier identiek.

Laat de verzameling der punten van een interval (a, b) ,

¹⁾ H. nam integralen van Riemann.

²⁾ Men vindt deze definitie in Hobson, *T. o. F.*, Sec. Ed., p. 616.

waarin een functie f niet begrensd is, reductibel zijn. Levert nu de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin een integraal over het interval (a, b) en ieder onderinterval ¹⁾ en is deze integraal een continue functie van bovenste en onderste grens, bestaat bovendien de integraal van Harnack over (a, b) , dan zijn de integralen volgens de beide definities, over (a, b) en over ieder onderinterval gelijk.

Is $a < c < b$ en bestaan, overeenkomstig de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin, integralen over (a, c) , (c, b) en (a, b) , dan is:

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Deze beide eigenschappen gelden natuurlijk ook in een meerdimensionale ruimte.

§ 56. Fig. 3 geeft een voorstelling van de wijze, waarop

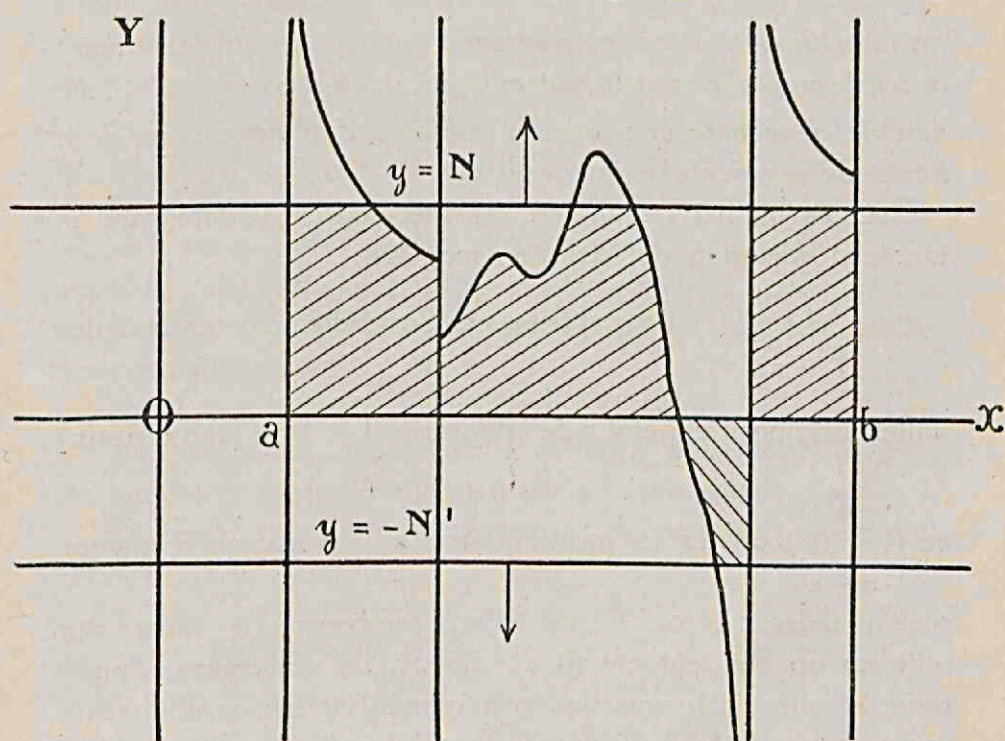


FIG. 3.

¹⁾ Dit behoeft niet steeds het geval te zijn. $f(x) = \frac{1}{x}$ geeft over $(-1, +1)$ een integraal; niet over $(-1, 0)$ of over $(0, +1)$.

een oneigenlijke integraal ontstaat bij de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin.

Doen we haar om $O\ 90^\circ$ ronddraaien, zoodat de x -as komt op de plaats der y -as en omgekeerd, dan verkrijgen we een figuur, die ons er toe brengt om voor de integraal van een functie over een oneindig interval de volgende definitie te geven.

We beschouwen een interval $(-n', +n)$, waarbij n en n' niet negatief zijn, en nemen daarover de integraal: $\int_{-n'}^{+n} f(x) dx$.¹⁾

We laten n en n' rijen n_p en n'_p (p geheel) doorloopen, die naar $+\infty$ gaan, echter zoo dat de verschillen $n_p - n'_p$ een begrensde verzameling vormen. Nadert nu $\int_{-n'_p}^{+n_p} f(x) dx$

tot een limiet, voor p naderend tot ∞ , en is deze limiet dezelfde voor alle mogelijke combinaties van rijen n_p en n'_p , die aan de genoemde voorwaarde voldoen, dan noemen we deze limiet de oneigenlijke integraal over $(-\infty, +\infty)$.

Evenals bij het geval van een niet-begrensde integrand is hier een wijziging der definitie mogelijk:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^{+n} f(x) dx$ zal bestaan. Bovendien moeten bij ieder

willekeurig positief getal a de integralen $\int_p^{p+a'} f(x) dx$ (p pos.)

en $\int_{-q-a'}^{-q} f(x) dx$ (q positief) naar nul convergeeren, voor

p en q naderend tot $+\infty$. Deze convergentie moet zijn uniform op het segment $(0, a)$, d. w. z. bij willekeurige, positieve ε zullen zich waarden p en q laten vinden, onafhankelijk van a' , zoo dat de absolute waarde der beide, daarbij be-

¹⁾ Is $f(x)$ in $(-n', +n)$ niet begrens, dan wordt de oneigenlijke integraal bedoeld.

hoorende integralen kleiner is dan ε voor iedere positieve $a' \leq a$. De waarde der oneigenlijke integraal wordt dan gegeven door $\lim_{n=\infty} \int_{-n}^{+n} f(x) dx$.

Voorbeeld: Een functie is $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, respectievelijk in de intervallen $(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), \dots$ en $-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots$, respectievelijk in de intervallen $(0, -1), (-1, -2), \dots, (-n+1, -n), \dots$. In $(-\infty, +\infty)$ bestaat de oneigenlijke integraal en haar waarde is nul.

Bij een functie van twee of meer veranderlijken, te integreeren over de geheele, meerdimensionale ruimte, nemen we rijen van meetbare continua, zoo dat de afstanden der randpunten tot O naar het oneindige convergeeren, terwijl bovendien aan de volgende voorwaarde wordt voldaan. Voor ieder continuum hebben genoemde afstanden een bovenste en onderste grens. Hun verschil zal voor ieder continuum der rij beneden een vooraf willekeurig gekozen, positief getal blijven. De rij van integralen, over die continua genomen, zal een limiet opleveren en deze zal steeds dezelfde zijn bij iedere rij van continua der aangegeven soort. Die limiet noemen we dan de oneigenlijke integraal over de geheele, meerdimensionale ruimte.

§ 57. Ook tot de volgende definitie van integraal over een oneindig gebied komt men door beschouwing van fig. 3.

We denken ons in die figuur de richting der pijlen omgekeerd. Dat geeft:

Bij twee willekeurige, positieve getallen N en N' definieeren we twee functies $f_N(x)$ en $f_{N'}(x)$. Voor alle punten x , waar $f(x) \geq N$ is, stellen we $f_N(x) = f(x) - N$; voor alle punten, waar $f(x) < N$ is, stellen we $f_N(x) = 0$. Voor alle punten, waar $f(x) \leq -N'$ is, stellen we $f_{N'}(x) = f(x) + N'$; voor alle punten, waar $f(x) > -N'$ is, stellen we $f_{N'}(x) = 0$.

We bepalen tusschen 2 willekeurige punten n en $-n'$

de integraal $\int_{-n'}^{+n} [f_N(x) + f_{N'}(x)] dx$ ¹⁾ en laten n en n' naderen tot $+\infty$, op de in § 56 aangegeven wijze. We krijgen dan $\int_{-\infty}^{+\infty} [f_N(x) + f_{N'}(x)] dx$ volgens de definitie der vorige §.

Laten nu N en N' willekeurige rijen doorloopen, die tot nul naderen, doch zóó dat de rij $\frac{1}{N_p} - \frac{1}{N'_p}$, (p geheel) begrensd is. Dan verstaan we onder de integraal van $f(x)$ over $(-\infty, +\infty)$ $\lim_{\substack{N=0 \\ N'=0}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_N(x) + f_{N'}(x)] dx$, alles in de onderstelling, dat de aangegeven limieten bestaan en dat de laatste limiet steeds dezelfde waarde heeft, onafhankelijk van de gekozen rijen.

Ook deze definitie laat een wijziging toe, geheel op dezelfde wijze als in § 56.

Voorbeeld: Neem dezelfde funtie als in de vorige §. De waarde der integraal is dan 0.

§ 58. We laten hier een transformatie van de integraal van Lebesgue ²⁾ volgen, die ons zal doen zien, waarin bij ons voorbeeld het gebruik der beide voorgaande definities verschilt.

Is f een meetbare, begrensde functie ³⁾, gedefinieerd op een begrensde verzameling E met inhoud e , dan heeft ze een integraal (L). Om deze te vinden verdeelen we het interval tusschen bovenste en onderste grens der functie-waarden op een aftelbaar oneindig aantal manieren in n deelen en onderstellen, dat n oneindig wordt en de grootste intervallengte tot nul nadert, als we maar ver genoeg in de rij der verdeelingen voortgaan. Stellen we de deelpunten voor

¹⁾ Dit kan ook een oneigenlijke integraal zijn.

²⁾ Dergelijke transformaties werden gegeven door Prof. Denjoy; zie *Bulletin de la Soc. math. de France*, (2^e et 3^e fasc., 1915).

³⁾ Het aantal veranderlijken wordt eindig ondersteld.

door l_i ($i = 0, 1, \dots, n$). We bepalen dan den inhoud der verzameling van punten, waarvoor

$$l_i < f \leq l_{i+1} \quad (l_0 \leq f \leq l_1)$$

en noemen dezen e_i (e_0). Onder integraal (L) verstaan we

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^n l_{i-1} e_i = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^n l_i e_i.$$

Deze limiet is als volgt te transformeeren:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^n l_i e_i &= \lim_{n=\infty} \{l_1(e_1 + e_2 + \dots + e_n) + (l_2 - l_1)e_2 + (l_3 - l_1)e_3 + \dots + (l_n - l_1)e_n\} = \\ &= \lim_{n=\infty} \{l_1 e + (l_2 - l_1)(e_2 + e_3 + \dots + e_n) + (l_3 - l_2)e_3 + \dots + (l_n - l_2)e_n\} = \\ &= \lim_{n=\infty} \{l_1 e + (l_2 - l_1)e_{2\dots n} + (l_3 - l_2)(e_3 + e_4 + \dots + e_n) + (l_4 - l_3)e_4 + \dots + (l_n - l_3)e_n\} = \\ &= \dots = \lim_{n=\infty} \{l_1 e + (l_2 - l_1)e_{2\dots n} + (l_3 - l_2)e_{3\dots n} + (l_4 - l_3)e_{4\dots n} + \dots + (l_n - l_{n-1})e_n\}, \end{aligned}$$

als $e_{i\dots n} = e_i + e_{i+1} + \dots + e_n$, dus $e = e_{1\dots n}$

$$\lim_{n=\infty} l_1 e = l_0 e.$$

Zij f niet negatief op E . We definiëeren op het interval tusschen bovenste grens (B) en onderste grens (l_0) van f een positieve, niet-toenemende functie $F(x)$, welke in het deelpunt l_i van een der gebruikte verdeelingen gelijk is aan den inhoud der punten van E , waar $f > l_i$. Dan wordt:

$$\int_E f(P) dP(L) = l_0 e + \int_{l_0}^B F(x) dx(R).$$

Zie fig. 4. Stellen we $F(x)$ tusschen 0 en l_0 gelijk aan e , dan is te schrijven:

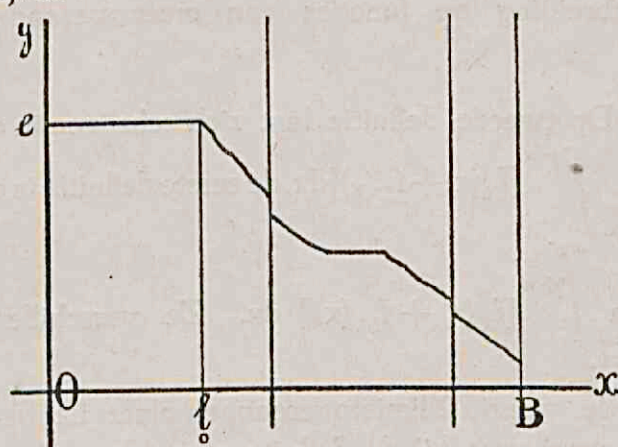


FIG. 4

$$\int_E f(P) dP(L) = \int_0^B F(x) dx(R).$$

Zijn er ook negatieve waarden van f op E , dan is de integraal (L) gelijk aan het verschil van twee integralen (R) van positieve, niet-toenemende functies. De eerste in-

tegraal behoort dan bij de positieve waarden en de waarde nul-, de tweede bij de negatieve waarden van f .

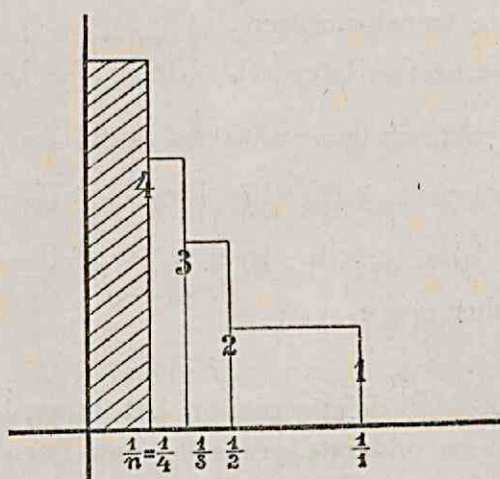


FIG. 5.

§ 59. Passen we bij gebruik der eerste definitie (§ 56) deze transformatie toe, dan is de on-eigenlijke integraal de limiet van het verschil van 2 oppervlakken, als in fig. 5 voorgesteld. Het

gebruik van de tweede definitie (§ 57) geeft als integraal-waarde de limiet van het verschil van 2 oppervlakken als in de figuur, bij weglating van het gestreepte gedeelte.

Een voorstelling der limietovergangen bij de tweede definitie geeft fig. 6.

De uitbreiding op functies van meer veranderlijken is evident.

§ 60. De tweede definitie laat zich schrijven in den vorm:

$$\lim_{\substack{N=0 \\ N'=0}} \lim_{\substack{n=\infty \\ n'=\infty}} \int_{-n'}^{+n} [f_N(x) + f_{N'}(x)] dx, \text{ de eerste definitie in den vorm:}$$

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ n'=\infty}} \lim_{\substack{N=0 \\ N'=0}} \int_{-n'}^{+n} [f_N(x) + f_{N'}(x)] dx. \text{ Ze verschillen dus in}$$

de volgorde, waarin 2 limietovergangen plaats hebben, evenals dat het geval was bij de definitie van Harnack en de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin.

De eerste definitie is het analogon van die van Harnack, de tweede van de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin.

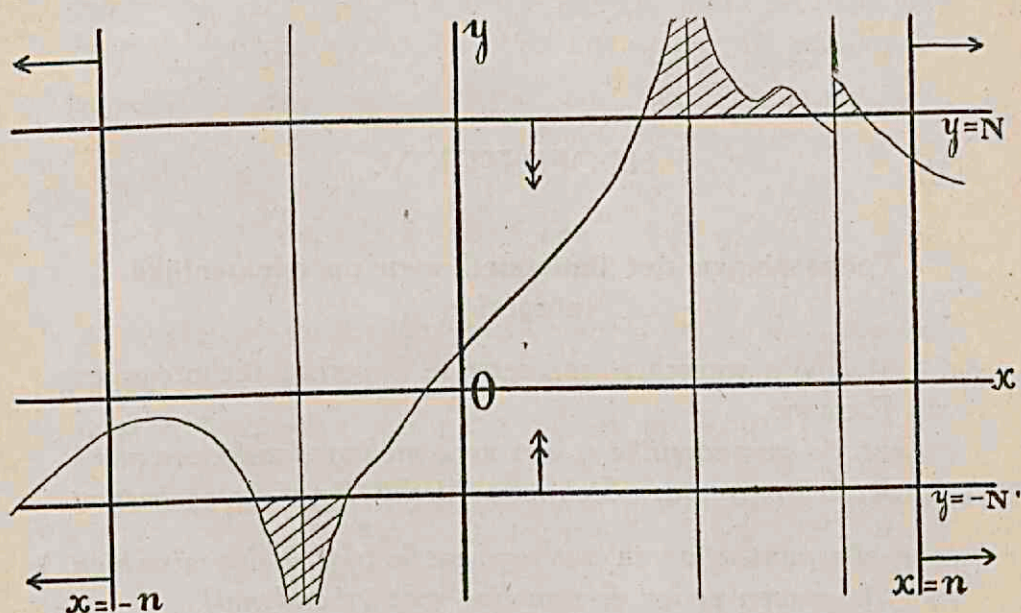


FIG. 6.

De inhoud van dit hoofdstuk blijft in hoofdzaak doorgaan bij gebruik van integralen van Riemann.

HOOFDSTUK V.

Toepassingen der limietstellingen op oneigenlijke integralen.

§ 61. We wenschen ons eerst te beperken tot integralen van Riemann.

Laat de veranderlijke y een verzameling doorloopen met η als verdichtingspunt. Stel, dat hierbij $\lim_{y=\eta} f(x, y)$ bestaat voor alle punten x van het segment (a, b) [behalve misschien voor de punten eener verzameling met inhoud nul].

Uit de y -waarden kiezen we een rij y_k (k geheel), convergeerend naar η . De punten x , in wier omgeving een of meer der functies: $\lim_{y=\eta} f(x, y)$, $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$, ..., $f(x, y_k)$, ...

niet begrensd is, zullen een verzameling E vormen, wier afgeleide verzameling E' een inhoud nul heeft. We sluiten de punten van E' in een eindig aantal intervallen van gezamenlijke lengte ε ; we doen dit voor iedere ε uit een rij van positieve, naar nul convergeerende waarden. Over (a, b) zullen bestaan de integralen $\int_a^b f(x, y) dx$ als eigenlijke

integralen of oneigenlijke integralen volgens de definitie van Harnack en verder zal $\int_a^b f(x, y_k) dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_V f(x, y_k) dx$ zijn

(de verzameling V bevat alle punten van (a, b) behalve die uit de intervallen met gezamenlijke lengte ε). Eveneens zal be-

staan $\lim_{y=\eta} \int_a^b f(x, y) dx$.

$\int_a^b \lim_{y=\eta} f(x, y) dx$ zal bestaan als eigenlijke integraal of oneigenlijke integraal van Harnack [welke waarden we de integrand ook toekennen in de punten, waar de limiet niet bestaat, zoo die waarden slechts een begrensde verzameling vormen] en die integraal zal $= \lim_{\varepsilon=0} \int_V \lim_{y=\eta} f(x, y) dx$ zijn.

Opdat nu

$$\int_a^b \lim_{y=\eta} f(x, y) dx = \lim_{y=\eta} \int_a^b f(x, y) dx,$$

is noodig en voldoende, dat $\int_V \lim_{y_k=\eta} f(x, y_k) dx$ quasi-uniform convergeert t. o. v. $\int_V f(x, y_k) dx$ in $\varepsilon = 0$.

Bewijs: De bedoelde gelijkheid is te schrijven in den vorm:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon=0} \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \lim_{y_k=\eta} \sum_i f(x_i, y_k) \Delta x_i &= \\ = \lim_{y_k=\eta} \lim_{\varepsilon=0} \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \sum_i f(x_i, y_k) \Delta x_i, \end{aligned}$$

waaruit de stelling volgt.

Stelling Vc van § 83 is hiervan een bijzonder geval.

§ 62. Als uitbreiding van de stelling van § 34 is te beschouwen het volgende:

Stel, dat $\lim_{y=\eta} f(x, y)$ bestaat voor alle punten x van (a, b) .

Uit de y -waarden kiezen we een rij y_k (k geheel), convergeerend naar η . Beschouw de verzameling (x, y_k) , waarbij x in (a, b) en k willekeurig geheel; de punten (x, η) waarin f op de verzameling (x, y_k) niet begrens is, zullen een lineaire verzameling E vormen, wier afgeleide E' een inhoud nul heeft. We sluiten de punten van E' in een eindig aantal intervallen van gezamenlijke lengte ε . Voor ε nemen we een rij van naar nul convergeerende, positieve getallen. Over (a, b) zullen bestaan de integralen $\int_a^b f(x, y) dx$ als

eigenlijke- of oneigenlijke integraal volgens Harnack. Eveneens zal bestaan $\lim_{y_k = \eta} \int_V f(x, y) dx$ (V bevat niet de punten van (a, b) , gelegen in de intervallen met gezamenlijke lengte ε) en haar waarde zal convergeeren naar $\lim_{y = \eta} \int_a^b f(x, y) dx$, voor ε naderend tot nul.

$\int_a^b \lim_{y = \eta} f(x, y) dx$ zal bestaan als eigenlijke- of oneigenlijke integraal van Harnack en zal $= \lim_{\varepsilon = 0} \int_V \lim_{y = \eta} f(x, y) dx$ zijn.

Het voorafgaande is voldoende, opdat

$$\int_a^b \lim_{y = \eta} f(x, y) dx = \lim_{y = \eta} \int_a^b f(x, y) dx. \quad 1)$$

Het bewijs gaat als in § 34.

§ 63. De stelling van § 61 krijgt een veel eenvoudiger gedaante bij gebruik van de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin. Dan laat zich

$$\int_a^b \lim_{y = \eta} f(x, y) dx = \lim_{y = \eta} \int_a^b f(x, y) dx$$

schrijven in den vorm:

$$\begin{aligned} & \lim_{N = \infty} \lim_{(\Delta x_i)_B = 0} \lim_{y = \eta} \sum_i f_N(x_i, y) \Delta x_i = \\ & = \lim_{y = \eta} \lim_{N = \infty} \lim_{(\Delta x_i)_B = 0} \sum_i f_N(x_i, y) \Delta x_i. \end{aligned}$$

In deze gelijkheid heeft $f_N(x, y)$ dezelfde waarden als $f(x, y)$ tusschen $+N$ en $-N$ (N positief); is $f(x, y) \geq N$, dan zal $f_N(x, y) = N$ zijn; is $f(x, y) \leq -N$, dan wordt $f_N(x, y) = -N$ genomen.

Hieruit volgt:

Stel, dat $\lim_{y = \eta} f(x, y)$ bestaat voor alle punten x van het

1) Vgl. Hobson, *T. o. F.*, First Ed., p. 544 e. 545; p. 596.

interval (a, b) [behalve misschien voor de punten eener verzameling met inhoud nul].

Verder zullen bestaan als eigenlijke- of oneigenlijke integraal volgens de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin $\int_a^b f(x, y) dx$ en $\int_a^b \lim_{y=\eta} f(x, y) dx$ [welke waarden we de integrand ook toekennen in de punten, waar de limiet niet bestaat, zoo die waarden slechts een begrensde verzameling vormen]. Bovendien zal bestaan $\lim_{y=\eta} \int_a^b f(x, y) dx$.

Opdat nu

$$\int_a^b \lim_{y=\eta} f(x, y) dx = \lim_{y=\eta} \int_a^b f(x, y) dx,$$

is noodig en voldoende, dat $\int_a^b \lim_{y=\eta} f_N(x, y) dx$ quasi-uniform convergeert t. o. v. $\int_a^b f_N(x, y) dx$ in $N = \infty$.

Aan deze voorwaarde wordt o. a. voldaan als $f(x, y)$ begrensd is op de verzameling (x, y) , die ontstaat door combinatie van alle beschouwde x - en y -waarden.

§ 64. Stel, dat $\lim_{y=\eta} f(x, y)$ bestaat voor iedere x [behalve misschien voor x -waarden met de eigenschap, dat de in een willekeurig, begrensd interval gelegene een verzameling vormen met inhoud nul].

Verder zullen bestaan als oneigenlijke integralen, in den zin van § 56 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ en $\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{y=\eta} f(x, y) dx$ [welke waarden we de integrand ook toekennen in de punten, waar de limiet niet bestaat, zoo die waarden slechts een begrensde verzameling vormen]. Bovendien moge bestaan

$$\lim_{y=\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Opdat nu

$$\lim_{y=\eta-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{y=\eta} f(x, y) dx,$$

is noodig en voldoende, dat $\int_{-n}^{+n} \lim_{y=\eta} f(x, y) dx$ quasi-uniform convergeert t. o. v. $\int_{-n}^{+n} f(x, y) dx$ in $n = \infty$.

Schrijven we de gelijkheid in den vorm:

$$\begin{aligned} \lim_{y=\eta} \lim_{n=\infty} \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \sum_i f(x_i, y) \Delta x_i &= \\ = \lim_{n=\infty} \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \lim_{y=\eta} \sum_i f(x_i, y) \Delta x_i, \end{aligned}$$

dan volgt het bewijs direct.

Stilzwijgend is ondersteld, dat de integralen over de segmenten $(-n, +n)$ eigenlijke integralen zijn. Zijn dit oneigenlijke integralen volgens de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin, dan gaat de stelling toch onveranderd door.

Toepassingen: 1. De eerste stelling, door prof. F. SCHUH gepubliceerd in *Nieuw Archief*, 2^e reeks, deel XIII : 3, p. 309 laat zich ook bewijzen door te onderzoeken, of aan de voorgaande, quasi-uniforme convergentie is voldaan.

2. Hetzelfde geldt voor de 2^e stelling op p. 546 van HOBSON's *T. o. F.*, First Ed.

§ 65. Stel, dat $\lim_{y=\eta} f(x, y)$ bestaat voor iedere x [behalve misschien voor x -waarden met de eigenschap, dat de in een willekeurig, begrensd interval gelegene een verzameling vormen met inhoud nul].

Verder zullen bestaan als oneigenlijke integralen, in den zin van § 57, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ en $\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{y=\eta} f(x, y) dx$ [welke waarden we de integrand ook toekennen in de punten, waar de limiet niet bestaat, zoo die waarden slechts een begrensd verzameling vormen]. Bovendien moge bestaan

$$\lim_{y=\eta-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Opdat nu

$$\lim_{y=\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{y=\eta} f(x, y) dx,$$

is noodig en voldoende, dat voor $N = N'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{y=\eta} [f_N(x, y) + f_{N'}(x, y)] dx$$

quasi-uniform convergeert t. o. v.

$$\lim_{n=\infty} \int_{-n}^{+n} [f_N(x, y) + f_{N'}(x, y)] dx \text{ in } N=0.$$

Hierbij zijn de notaties van § 57 gebruikt.

Het bewijs volgt door de gelijkheid te schrijven in den vorm

$$\lim_{y=\eta} \lim_{N=0} \lim_{n=\infty} \int_{-n}^{+n} [f_N(x, y) + f_{N'}(x, y)] dx =$$

$$\lim_{N=0} \lim_{n=\infty} \int_{-n}^{+n} \lim_{y=\eta} [f_N(x, y) + f_{N'}(x, y)] dx.$$

Zijn de integralen over $(-n, +n)$ oneigenlijke integralen, volgens de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin, dan gaat de stelling onveranderd door.

Bijzondere gevallen van de voorafgaande stellingen van dit hoofdstuk heeft men bij integratie van reeksen en differentiatie onder het integraalteeken.

§ 66, Hoofdstelling A geeft ons ook noodige en voldoende voorwaarden in de volgende gevallen:

1. Voor de gelijkheid van 2 herhaalde integralen over een rechthoek, zoo de enkelvoudige integralen eigenlijk zijn of oneigenlijk volgens de uitgebreide definitie van de la Vallée Poussin. De herhaalde integralen zelf zullen eigenlijk zijn.

2. Voor de gelijkheid van 2 herhaalde integralen als zoowel voor x als voor y het interval loopt van $-\infty$ naar $+\infty$, bij gebruik van de definitie van § 56.

Beschouwen we voor een der veranderlijken niet een enkele

limietwaarde, doch een verzameling van limietwaarden, dan treedt de quasi-uniforme convergentie „op een verzameling” in de plaats der quasi-uniforme convergentie „in een punt”.

§ 67. De stellingen over herhaalde limieten laten zich niet zoo eenvoudig toepassen op integralen van Lebesgue. Zijn de functies begrensd, dan is het nog mogelijk; voor niet begrensde functies niet meer. Dit komt, doordat bij integralen van Lebesgue niet het interval der onafhankelijk veranderlijke(n), doch dat der functiewaarden wordt verdeeld.

§ 68. We hebben voor eigenlijke- en oneigenlijke integralen van Riemann aangegeven noodige en voldoende voorwaarden voor de gelijkheid van herhaalde integralen.

Ook voor integralen van Lebesgue willen we nog even die gelijkheid onderzoeken.

We kunnen daartoe uitgaan van de stelling:

Zij in den gesloten rechthoek met hoekpunten (a, c) ; (a, d) ; (b, c) en (b, d) de functie $f(x, y)$ begrensd, continu naar x en continu naar y . Dan is:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

De integralen bestaan zoowel in den zin van Riemann als van Lebesgue.

Bewijs: Daar $f(x, y)$ continu is naar x en naar y , bestaan

$$\int_c^d f(x, y) dy \text{ en } \int_a^b f(x, y) dx.$$

De bekende stelling van Lebesgue,¹⁾ over het nemen van de limiet onder het integraalteeken bij integralen (L), is uit te breiden op het geval, dat de onafhankelijk veranderlijke bij dien limietovergang niet een rij, doch een willekeurige verzameling doorloopt; ze blijft daarbij onveranderd. Passen we haar in dien uitgebreiden vorm toe op bovengenoemde, enkelvoudige integralen, waarbij x en y zullen convergeeren naar een punt resp. van het segment (a, b) en van het seg-

¹⁾ Zie b.v. de la Vallée Poussin, *Integrales de Lebesgue, etc.* p. 44.

ment (c, d) , dan blijkt, dat die integralen zijn continue functies van x en van y en dus integreel, volgens Lebesgue en Riemann. De herhaalde integralen bestaan dus ook.

Als integralen (R) opgevat, hebben we:

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy &= \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \sum_i \Delta x_i \cdot \int_c^d f(x_i, y) dy = \\ &= \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \int_c^d dy \cdot \sum_i \Delta x_i \cdot f(x_i, y) = (\text{volgens § 33, laatste al.}) \end{aligned}$$

$$\int_c^d dy \cdot \lim_{(\Delta x_i)_B=0} \sum_i \Delta x_i \cdot f(x_i, y) = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Hiermee is de stelling bewezen.

§ 69. Toepassing van de genoemde limietstelling van Lebesgue of van de limietstelling van Beppo Levi¹⁾ doet op eenvoudige wijze uit de voorgaande stelling volgen:

1. Is $f(x, y)$ in den gesloten rechthoek met hoekpunten (a, c) ; (a, d) ; (b, c) en (b, d) begrensd en meetbaar (B) als functie van x en als functie van y , dan bestaan de enkelvoudige en herhaalde integralen (L) en de laatste zijn gelijk.

2. Is $f(x, y)$ niet begrensd in den gesloten rechthoek, meetbaar (B) t. o. v. x en t. o. v. y en niet negatief, dan bestaan de herhaalde integralen en zijn gelijk.

Hierbij wordt de mogelijkheid toegelaten, dat haar waarde is $+\infty$.

3. Zij $f(x, y)$ niet begrensd in den gesloten rechthoek, doch meetbaar (B) t. o. v. x en t. o. v. y , $\int_c^d f(x, y) dy$ zal bestaan voor alle x van (a, b) , behalve voor een verzameling met inhoud nul; daar nemen we willekeurige waarden aan. Verder zal nog bestaan

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

¹⁾ Zie de la Vallée Poussin, *Integrales de Lebesgue, etc.*, p. 49.

Nu bestaat ook $\int_a^b f(x, y) dx$ behalve wellicht in een verzameling met inhoud nul op (c, d) , waar we willekeurige waarden aannemen. Tevens bestaat $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ en

$$is = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Hierbij zijn alle integralen integralen (L).

De bewijzen gaan op dezelfde wijze als die van de overeenkomstige stellingen, die te vinden zijn bij DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue*, etc., p. 50 e. 51.

ERRATA.

- Blz. 5, regel 13 v. b. staat: $< \xi$; lees $< \varepsilon$.
- „ 15, „ 13 v. b. „ : $S_n = (x)$; lees: $S_n(x) =$
- „ 21, „ 4 v. o. „ : *verzameling*;
lees: *verzamelingen*.
- „ 22, „ 1 v. b. „ : *iedere waarde van R*;
lees: *iedere waarde z van R*.
- „ 50, „ 13 v. b. „ : *intergraalteeken*;
lees: *integraalteeken*.
- „ 57, „ 17 v. b. „ : *punten (ξ)*; lees: *punten ξ* .
- „ 63, „ 11 v. o. „ : *onderij*; lees: *onderrij*.

STELLINGEN.

I. *)

Door gebruik te maken van de begrippen van bovenste en onderste limiet laten zich de in dit proefschrift gegeven limietstellingen uitbreiden.

II. *)

Opdat de bovenste limiet, $\overline{\lim}_{y=\eta} f(x, y)$, van een functie $f(x, y)$, die bij vaste y in het punt ξ half-continu naar boven is, ook in ξ half-continu naar boven zal zijn, is voldoende, dat „die bovenste limiet in ξ half-quasi-uniform naar boven convergeert”.

D. w. z. bij 2 willekeurige positieve getallen ε en δ zal het mogelijk zijn te bepalen een waarde Y , in $(\eta - \delta, \eta + \delta)$ gelegen, en een interval $(\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$, zóó dat voor iedere x in dit interval:

$$\overline{\lim}_{y=\eta} f(x, y) < f(x, Y) + \varepsilon$$

is.

III. *)

Ook met behulp van stelling II laat zich bewijzen, dat de in § 1 genoemde voorwaarden voldoende zijn voor de daar beschouwde limietverwisseling.

*) Elders zullen hierover uitvoeriger mededeelingen verschijnen.

IV. *)

Bestaan de herhaalde limieten $L_{\xi\eta}$ en $L_{\eta\xi}$ van een functie $f(x, y)$, dan is noodig en voldoende voor haar gelijkheid, dat bij willekeurige positieve ε en δ is te vinden een waarde Y , in $(\eta - \delta, \eta + \delta)$ gelegen, en een verzameling waarden X , met ξ als verdichtingspunt, zóó dat voor iedere X :

$$|L_{\eta}(X) - f(X, Y)| < \varepsilon$$

is.

V.

Zal een functie $f(P)$ op een begrensde verzameling E een absoluut convergente integraal hebben, volgens de definitie van de la Vallée Poussin, dan is een daartoe noodige voorwaarde, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} n e_n = 0$ en $\lim_{n' \rightarrow \infty} n' e_{n'} = 0$. Hierbij is $e_n =$ de inhoud der onderverzameling, waarop $f \geq n$ en $e_{n'} =$ de inhoud der onderverzameling, waarop $f \leq -n'$.

VI.

HOBSON zegt in *Theory of Functions of a Real Variable*, etc., Sec. Ed., Vol. I op p. 605:

An absolutely convergent integral which exists according to either Lebesgue's definition, or that of Harnack, exists also according to the other definition, and has the same value for the two definitions.

Dit is onjuist.

VII.

Ook op complexe functies van complexe onafhankelijk veranderlijken laten zich de limietinstellingen van dit proefschrift uitbreiden.

*) Elders zullen hierover uitvoeriger mededeelingen verschijnen.

VIII.

Met het oog op het maatbegrip ligt het voor de hand om de definitie A, welke Prof. A. DENJOY geeft in de *Comptes Rendus*, t. CLXIX, 1919, p. 219–221 (*Sur l'intégration riemannienne*) te wijzigen, door de daar voorkomende grootheden α en β gelijk aan $\frac{1}{2}$ te nemen.

IX.

De beschouwingen van BURKHARDT in *Algebraische Analysis*, Zweite Aufl., § 43 zijn niet volledig.

X.

We beschouwen op een rechte lijn het segment $(0, 1)$ en in een plat vlak de verzameling, gevormd door de randpunten en de inwendige punten van het vierkant, dat tot hoekpunten heeft $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ en $(1, 1)$.

Het is onmogelijk een eeneenduidig verband te leggen tusschen de punten van die beide verzamelingen, zoodanig dat een op het segment $(0, 1)$ gelegen som-element van 2 elementen a en b van dat segment overeenkomt met het in het gesloten vierkant gelegen som-element der homologe elementen a' en b' van dat gesloten vierkant, en omgekeerd.

[Het segment $(0, 1)$ is ook te vervangen door het interval $(0, 1)$, terwijl de rand van het vierkant geheel of gedeeltelijk buiten beschouwing kan blijven].

XI.

De beschouwingen van Prof. H^K. DE VRIES op p. 81 en 82 van zijn boek „*De vierde dimensie*” lijken mij ten deele niet juist toe.

XII.

Evenals de mechanica laat zich de mathematische physica als onderdeel der wiskunde beschouwen.

XIII.

Toepassing der waarschijnlijkheidsregels op de toekomst geeft goede-, op het verleden verkeerde uitkomsten. Dit „bewijst” nog niets tegen de mechanische natuurwetten, doch toont alleen, dat de waarschijnlijkheidsrekening een hulpmiddel is, dat niet altijd is te vertrouwen.

XIV.

Het resultaat en het daarbij behoorend bewijs van BOLTZMANN op p. 27 van het eerste deel zijner *Vorlesungen über Gastheorie* zijn verkeerd.



U
1