Sur les rapports entre les méthodes d'intégration de Riemann et de Lebesgue

SUR LES RAPPORTS ENTRE LES MÉTHODES D'INTÉGRATION DE RIEMANN ET DE LEBESGUE.

T. J. BOKS.

SUR LES RAPPORTS ENTRE LES MÉTHODES D'INTÉGRATION DE RIEMANN ET DE LEBESGUE.

Diss Utrecht 1921

SUR LES RAPPORTS ENTRE LES MÉTHODES D'INTÉGRATION DE RIEMANN ET DE LEBESGUE.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. W. VOGELSANG,

Hoogleeraar in de Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte,

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT,

tegen de bedenkingen van de

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN OP

Dinsdag 5 Juli 1921, des voormiddags te 11 uur,

DOOR

THEODOOR JACOBUS BOKS,

geboren te ELST (RHENEN).

Tipografia Matematica di Palermo. Piazza Regalmici, vicolo Guccia, 11.

1921

AAN DE NAGEDACHTENIS VAN MIJN VADER.
AAN MIJN MOEDER.
AAN MIJN VROUW.

Het verheugt mij zeer U, Hoogleeraren der Faculteit der Wis- en Natuurkunde, bij deze gelegenheid mijn welgemeenden dank te kunnen brengen voor het onderwijs, dat ik van U heb mogen ontvangen.

In het bizonder geldt mijn dank U, hooggeleerde DENJOY, Hooggeachte Promotor. Het voorrecht dat ik een tijdlang Uw assistent mocht zijn, en niet minder Uwe voortreffelijke leiding bij het samenstellen van dit proefschrift stemmen mij tot groote erkentelijkheid.

Ook jegens U, Hooggeleerde ORNSTEIN, gevoel ik mij zeer verplicht. Nooit heb ik tevergeefs Uw hulp gevraagd; altijd hebt U mij bij moeilijkheden van zeer verschillenden aard met de meeste bereidwilligheid met raad en daad ter zijde gestaan.

Ook U, Hooggeleerde JULIUS, DE VRIES en NIJLAND dank ik gaarne voor de welwillendheid, waarmede U mij steeds tegemoet gekomen zijt.

SUR LES RAPPORTS ENTRE LES MÉTHODES D'INTÉGRATION DE RIEMANN ET DE LEBESGUE.

Par M. T. J. Boks (Hilversum).

Estratto dal tomo XLV (1921) dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.
Adunanza dell'11 aprile 1920.

Étant donnée une fonction $f(x)$ définie entre a et b, intégrable au sens de LEBESGUE (ou *sommable*) mais non pas au sens de RIEMANN, est-il possible de tirer parti des sommes $\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ considérées par RIEMANN pour obtenir la valeur numérique de l'intégrale besgienne $\int_a^b f(x)\,dx$?

La réponse est affirmative et le problème admet une grande variété de solutions ainsi que M. LEBESGUE l'a signalé le premier [1]).

Les travaux de M. ZOARD DE GEÖCZE [2]) et de M. HAHN [3]) ont apporté d'intéressantes contributions à cette question.

Dans une note sur l'intégrale Riemannienne parue aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [4]), M. DENJOY a indiqué des procédés très généraux pour obtenir l'intégrale de LEBESGUE de toute fonction sommable en tirant parti des sommes utilisées dans l'intégration riemannienne. La note fournit sans démonstrations trois méthodes pour atteindre ce but.

Nous nous proposons dans le présent travail, effectué sous la direction de M. DENJOY, de justifier la seconde méthode et d'en étudier la portée.

Après avoir rappelé (1), d'après la note des Comptes Rendus citée plus haut, l'énoncé de ce procédé pseudo-riemannien qne M. DENJOY appelle intégration (B), nous

[1]) H. LEBESGUE, *Sur les intégrales singulières* [Annales de la Faculté de Toulouse, série 3, t. I (1-4), pp. 25-117].

[2]) Z. DE GEÖCZE, *Sur la fonction semi-continue* [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 39 (1911), pp. 256-295].

[3]) H. HAHN, *Über Annäherung an* LEBESGUE*schen Integrale durch* RIEMANN*sche Summe* [Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien. Abteilung IIa, Bd. CXXIII (1914), pp. 713-743].

[4]) A. DENJOY, *Sur l'intégration riemanienne* [Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CLXIX (2nd semestre 1919), pp. 219-221].

montrons qu'une fonction égale à 1 sur un ensemble parfait et à 0 ailleurs est intégrable (B), (2-7).

Nous substituons alors à l'opération (B) une méthode (B_1) comportant un peu plus d'arbitraire et se prêtant mieux aux raisonnements.

Nous étudions les propriétés générales de l'intégrale (B_1), (8-16), et nous établissons ensuite de deux manières différentes la proposition fondamentale que toute fonction sommable est intégrable (B_1). Les deux démonstrations reposent l'une et l'autre sur l'emploi d'une certaine formule auxiliaire (17-22). Mais la première utilise la décomposition, avec une certaine approximation, d'une fonction quelconque en une somme de plusieurs fonctions dont chacune est constante sur un ensemble parfait et nulle ailleurs, (23-28).

La seconde démonstration est fondée sur la propriété de l'intégrale indéfinie de Lebesgue d'admettre son coefficient différentiel pour dérivée sauf éventuellement en un ensemble de mesure nulle, (29-37).

Nous déduisons de cette propriété de l'intégration (B_1) l'existence pour toute fonction sommable de suites de subdivisions dépendant d'un paramètre t et dont les sommes riemanniennes correspondantes tendent vers l'intégrale besgienne sauf pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de t, (38-39). Nous donnons ensuite une application de l'intégration (B_1) aux séries trigonométriques convergeant en tout point vers une fonction sommable, (40-43).

L'intégrabilité (B_1) est plus générale que la sommabilité.

Une fonction non-sommable peut être intégrable (B_1) (44-57). Mais une fonction totalisable, inférieure en valeur absolue à une fonction intégrable (B_1), peut ne pas être elle-même intégrable (B_1). (58-65).

Les subdivisions utilisées dans l'intégration (B_1) dépendent linéairement d'un paramètre t et de la situation initiale de la subdivision (pour $t = 0$). Il est naturel de rechercher si, en conservant à la méthode cette propriété essentielle de s'appliquer à toute fonction sommable, on ne peut pas considérer des subdivisions variant d'une manière plus arbitraire que les premières.

Il en est effectivement ainsi (66-75).

Une bibliographie de travaux relatifs à la notion moderne d'intégrale, et qui sont venus à notre connaissance, termine ce mémoire.

Intégration (B).

1. Soit f une fonction définie sur un segment ab [5]), et F la fonction possédant la période $b - a$ et coincidant avec f dans le champ $a \leqq x < b$.

---

5) Nous conviendrons, dans le présent mémoire, d'entendre par *intervalle* ab ou (a, b) (avec $a < b$) l'ensemble $a < x < b$, et par *segment* ab ou (a, b), l'ensemble $a \leqq x \leqq b$.

Soit

$$a,\ \xi_1,\ x_1,\ \xi_2,\ \dots,\ x_{i-1},\ \xi_i,\ x_i,\ \dots,\ \xi_n,\ b,$$

avec

$$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i, \qquad 0 < x_i - x_{i-1}, \qquad (x_0 = a,\ x_n = b)$$

une subdivision de ab. ω est supposé indépendant de i. Nous appelons *pas* de la subdivision x_i le plus grand des nombres positifs $x_i - x_{i-1}$.

Posons:

$$y_i = x_i + t, \qquad \eta_i = \xi_i + t$$

et formons la somme:

$$s(t) = \sum_1^n (y_i - y_{i-1}) F(\eta_i),$$

$s(t)$ est une fonction des variables x_i, ξ_i, t.

Nous dirons que f est intégrable au sens (B) et que l'intégrale de $f\,dx$ au sens (B) a pour valeur I_2, si la mesure de l'ensemble $E(\alpha)$ des nombres t vérifiant les relations

$$|I_2 - s(t)| > \alpha, \qquad 0 \leqq t < b - a,$$

tend vers zéro avec ω, quelque soit le nombre positif α, indépendant de ω.

Telle est la définition énoncée dans la note rappelée plus haut. Postérieurement à cette note et pour des raisons indiquées plus loin, cette définition a été légèrement modifiée par M. Denjoy, comme on le verra ci-après.

2. Avant d'exposer et d'adopter cette nouvelle définition, nous allons néanmoins montrer qu'une fonction f égale à 1 sur un ensemble parfait P situé sur ab, et à 0 hors de cet ensemble, est intégrable au sens (B) et que l'intégrale (B) de $f\,dx$ sur ab est égale à la mesure de P.

Soit P_1 l'ensemble parfait réunissant P et l'ensemble obtenu en ajoutant $b - a$ à tous les nombres constituant P. Si ξ est un point de P_1 situé sur le segment a, b les intervalles contigus à P_1 contenus dans l'intervalle ξ, $\xi + b - a$ ont des longueurs qui, rangées par ordre de valeurs non croissantes forment une suite $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ indépendante de ξ. Si ξ est intérieur à l'intervalle a, b et est étranger à P_1, il en est de même de $\xi + b - a$. Les deux intervalles semi-contigus à P_1 et dont l'un a pour extrémité gauche ξ, l'autre pour extrémité droite $\xi + b - a$ ont pour longueurs deux nombres dont la somme est un certain terme u_s dans la suite u_n. Les intervalles contigus à P_1 compris entre ξ et $\xi + b - a$ sont respectivement égaux chacun aux autres nombres de la suite u_n.

[Si b appartient à P_1 mais non pas a, F est égale à 1 en tout point de P_1 sauf en b, d'après $F(x + b - a) = f(x)$ si $a \leqq x < b$.

Nous supprimons les valeurs de t (en nombre limité) telles que η_i soit en b. Nous ne modifions par là évidemment pas la mesure de l'ensemble $|s(f,\ t) - I| > \alpha$].

3. Evaluons la somme:

$$s(t) = F(\xi_1 + t)(x_1 - x_0) + F(\xi_2 + t)(x_2 - x_1) + \cdots$$
$$\cdots + F(\xi_i + t)(x_i - x_{i-1}) + \cdots + F(\xi_n + t)(x_n - x_{n-1}).$$

Supposons que le dernier intervalle supérieur à 2ω et rencontré dans la suite $u_1, \ldots, u_i, \ldots$ ait l'indice p; on a $u_p > 2\omega$ et $u_{p+1} \leqq 2\omega$.

Alors d'après $0 < y_i - y_{i-1} = x_i - x_{i-1} < \omega$, il est sûr que dans chacun des intervalles contigus à P_1, intérieurs à $y_0 y_n$ et dont les longueurs respectives sont $u_1, u_2, \ldots, u_p$, entrent au moins deux points consécutifs y_i de la subdivision choisie. (L'un de ces intervalles u_s peut être représenté dans cette suite par deux intervalles semi-contigus u'_s, u''_s dont la somme est u_s et dont l'un a son extrémité gauche en y_0, l'autre son extrémité droite en y_n).

Nous distinguons les segments y_{i-1}, y_i en deux catégories:

1° les segments σ_1 situés (entièrement) dans un intervalle contigu à P_1.

2° les segments σ_2 qui contiennent au moins un point de P_1.

On a:

$$\sum \sigma_1 + \sum \sigma_2 = y_n - y_0 = b - a.$$

Si $y_{i-1} y_i$ est un segment σ_1, on a $F(\eta_i) = 0$. Si $y_{i-1} y_i$ est un segment σ_2, on a $F(\eta_i) = 0$ ou $= 1$.

Ainsi

$$s(t) \leqq \sum \sigma_2 = b - a - \sum \sigma_1.$$

Evaluons une limite inférieure de $\sum \sigma_1$.

Il est évident que, si $q < p$, l'intervalle u_q (ou les deux intervalles semi-contigus u'_q et u''_q qui le représentent et dont les extrémités étrangères à P_1 sont respectivement y_0 et y_n) contient des segments σ_1 pour une longueur totale au moins égale à $u_q - 2\omega$. Car, si a_q est l'extrémité gauche de u_q (ou de u''_q) et si b_q est l'extrémité droite de u_q (ou de u'_q), tous les points de u_q (ou de u'_q, u''_q) étrangers aux intervalles $(a_q, a_q + \omega)$, $(b_q - \omega, b_q)$, appartiennent à un segment σ_1.

La longueur totale des segments σ_1 est donc supérieure ou égale à

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_p - 2p\omega.$$

Posons

$$l = \sum_1^\infty u_n.$$

On a:

$$\sum \sigma_1 \geqq l - \sum_{p+1}^\infty u_n - 2p\omega.$$

Soit

$$\eta(\omega) = \sum_{p+1}^\infty u_n + 2p\omega.$$

Il vient:

$$\sum \sigma_1 \geqq l - \eta(\omega).$$

Je dis que $\eta(\omega)$ tend vers o avec ω.

En effet si ω tend vers o, p croît indéfiniment d'après $u_{p+1} < 2\omega$. Donc le premier terme de $\eta(\omega)$ savoir $\sum_{p+1}^{\infty} u_n$ tend vers o.

D'autre part, comme la série à termes positifs et non-croissants $u_1, u_2, \dots, u_p, \dots$ est convergente, nous savons que $p u_p$ tend vers o, quand p croît. Donc $2p\omega$ tend vers o, puisque $u_p > 2\omega$. Donc $\lim_{\omega=0} \eta(\omega) = 0$.

Or, on a:

$$s(t) \leqq b - a - \sum \sigma_1 < b - a - l + \eta(\omega).$$

Or, l est la somme des longueurs de tous les intervalles contigus et semi-contigus à P compris entre a et b. Si donc I est la mesure de P, on a: $I = b - a - l$.

Mais I est l'intégrale au sens de LEBESGUE de la fonction donnée f, égale à 1 sur P et à o ailleurs. Donc:

$$s(t) < I + \eta(\omega). \tag{1}$$

Donc, quelque soit le nombre positif α, donné d'avance, il est possible de trouver une valeur $\Omega(\alpha)$, telle que si $\omega < \Omega(\alpha)$, on a, pour toute valeur de t entre o et $b - a$, $s(t) < I + \alpha$, quelle que soit la subdivision x_i de pas inférieur à ω.

4. Calculons maintenant l'intégrale au sens de LEBESGUE:

$$\int_0^{b-a} s(t)\,dt.$$

Nous avons:

$$s(t) = F(\xi_1 + t)(x_1 - a) + \cdots + F(\xi_n + t)(b - x_{n-1}).$$

Donc, en prenant les intégrales au sens de LEBESGUE:

$$\int_0^{b-a} s(t)\,dt = (x_1 - a)\int_0^{b-a} F(\xi_1 + t)\,dt + \cdots + (b - x_{n-1})\int_0^{b-a} F(\xi_n + t)\,dt.$$

Or, la fonction F étant périodique et de période $b - a$, chaque intégrale dans le second membre est égale à $\int_0^{b-a} F(x)\,dx = I$.

Donc:

$$\int_0^{b-a} s(t)\,dt = (b - a)I. \tag{2}$$

5. Posons:

$$s(t) = I + h(t),$$

nous avons déjà obtenu $h(t) < \eta(\omega)$.

D'après (2), on a donc:

(3) $$\int_0^{b-a} h(t)\,dt = 0.$$

Nous voulons démontrer que la fonction $f(x)$ donnée est intégrable au sens (B), et que son intégrale (B) est I. Nous voulons donc montrer que la mesure de l'ensemble des points t, $(0 \leqq t < b - a)$ où l'on a: $|h(t)| < \alpha$, tend vers zéro avec ω.

Nous avons trouvé que pour $\omega < \Omega(\alpha)$, l'ensemble $h(t) > \alpha$ cesse d'exister. Il nous suffit donc de montrer que la mesure μ de l'ensemble E des valeurs de t où $h(t) < -\alpha$, tend vers zéro avec ω. Soient E' le complémentaire de E par rapport au segment $(0, b - a)$ et μ' la mesure de E'. L'intégrale

$$\int_0^{b-a} h(t)\,dt$$

est la somme des intégrales J et J' de $h(t)\,dt$ prises respectivement sur E et sur E'. Sur E on a toujours $h(t) < -\alpha$, donc $J < -\alpha\mu$. Sur E' nous utilisons l'inégalité $h(t) < \eta(\omega)$.

Donc $J' < \mu'\eta(\omega) < (b - a)\eta(\omega)$.

Donc:

$$\int_0^{b-a} h(t)\,dt = J + J' < -\alpha\mu + (b - a)\eta(\omega).$$

D'après (3):

$$0 < -\alpha\mu + (b - a)\eta(\omega), \qquad \text{ou} \qquad \mu < \frac{b - a}{\alpha}\eta(\omega).$$

Puisque α est un nombre fixe, et que $\eta(\omega)$ tend vers zéro avec ω, μ aussi tend vers zéro avec ω. C. Q. F. D.

6. Ainsi la fonction f est intégrable (B), la valeur de l'intégrale (B) étant alors égale à I, donc à l'intégrale de M. Lebesgue.

La proposition subsiste évidemment pour une fonction f constante sur un ensemble parfait et égale à zéro hors de cet ensemble.

On l'étend sans difficulté à une fonction constante sur n ensembles parfaits deux à deux distincts, la fonction ayant une valeur propre sur chacun de ces ensembles.

7. Si f est quelconque, mais sommable, on a toujours, en intégrant au sens de Lebesgue:

$$\int_0^{b-a} s(t)\,dt = (b - a)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Comme au paragraphe 26, on décompose f en une somme $\sum_{-p}^{p} f_q + \varphi$, f_q étant égale à $q\varepsilon$ sur un ensemble parfait P_q, où $q\varepsilon \leqq f < (q + 1)\varepsilon$, et f_q étant nulle hors de P_q: p et P_q sont ainsi définis que $\int_a^b |\varphi| dx$ soit inférieur à $2(b-a)\varepsilon$. On montre dès lors sans difficulté que la fonction f est intégrable au sens (B).

Définition (B_1).

8. Dans la définition (B), l'introduction d'une fonction F, de période $b-a$, égale entre a et b à la fonction à intégrer f, rend problématique, surtout si $b-a$ et $c-b$ ne sont pas commensurables entre eux, qu'une fonction f intégrable (B) entre a et b et entre b et c $(a < b < c)$, soit nécessairement intégrable (B) entre a et c.

Pour éviter cet inconvénient, M. Denjoy a légèrement modifié la définition (B).

Nous définissons comme il suit l'intégration (B_1).

Considérons une subdivision indéfiniment étendue dans les deux sens, x_i, ξ_i, (pour toutes les valeurs entières, positives, négatives, ou nulle de i), satisfaisant aux conditions:

$$0 < x_i - x_{i-1} < \omega, \qquad x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i,$$

ω étant indépendant de i.

Appelant *pas* de la subdivision x_i la borne supérieure des nombres $x_i - x_{i-1}$, nous dirons que le pas de la subdivision x_i est au plus égal à ω.

Posons

$$y_i = x_i + t \qquad \text{et} \qquad \eta_i = \xi_i + t$$

f étant une fonction mesurable définie sur le segment ab, (on pourrait supposer f définie simplement sur l'intervalle ab), formons pour chaque valeur de t la somme

$$s(f, t) = \sum f(\eta_i)(y_i - y_{i-1})$$

étendue à toutes les valeurs de i telles que η_i appartient au segment ab.

Nous dirons que f *est intégrable* (B_1) *et a pour intégrale* I, *si la mesure de l'ensemble des valeurs de* t, *telles que*

$$|s(f, t) - I| > \varepsilon, \qquad \textit{avec} \qquad \alpha < t < \beta,$$

tend vers zéro avec ω, *quelques soient* ε, α, *et* β *fixes* (ε étant petit).

Autrement dit:

Pour que f soit intégrable (B_1) sur ab et ait pour intégrale (B_1) le nombre I, il doit être possible, à tout couple de nombres positifs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de faire correspondre un nombre positif $\Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que pour toute subdivision x_i de pas inférieur à $\Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, l'ensemble des valeurs de t satisfaisant à $|s(f, t) - I| > \varepsilon_1$, avec $\alpha < t < \beta$, a une mesure $< \varepsilon_2$.

9. La définition (B_1) est plus restrictive que la définition (B), car pour être intégrable (B_1) une fonction doit remplir une certaine condition relative à l'ensemble de toutes les subdivisions (x_i, ξ_i) de pas fini ω, tandis que, pour être intégrable (B), il lui suffit de remplir la même condition pour l'ensemble des subdivisions de pas fini soumises aux restrictions suivantes:

1° la subdivision x_i a un point en a et un point en b,

2° les deux subdivisions x_i et ξ_i sont périodiques et de période $b - a$,

3° $\alpha = 0$, $\beta = b - a$ (cette dernière restriction est simplement apparente).

Donc toute fonction intégrable (B_1) est intégrable (B). La réciproque est incertaine.

10. Si f est modifié en un point λ, cette altération n'intervient pas dans l'intégration (B_1). Car, si $\alpha < t < \beta$, il y a un nombre limité de valeurs de t, telles que λ est égal à un des η_i. Donc l'ensemble $|s(f, t) - I| > \varepsilon$ n'est modifié qu'en un nombre limité de points. Sa mesure ne change pas.

D'ailleurs le terme changé $f(\lambda)(y_i - y_{i-1})$ tend vers zéro avec ω.

En conséquence il est indifférent de supposer f nul ou non nul en a et b.

11. Soit $f_0(x)$ la fonction ainsi définie: $f_0(x) = 0$ si $x < a$ ou $x > b$, $f_0(x) = f(x)$ si $a \leqq x \leqq b$. Alors,

$$s(f, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_0(\eta_i)(y_i - y_{i-1}).$$

Les deux sommes $s(f, t)$ et $s(f_0, t)$ relatives au segment ab sont identiques. Il serait indifférent pour l'intégrabilité (B_1) de f et de f_0 sur ab, et la valeur de leur intégrale (B_1) correspondante, de supposer $f_0(x) = 0$ également en a ou en b.

12. *Si f est la somme d'un nombre limité de fonctions intégrables (B_1) sur ab, $f_1, f_2, \ldots, f_n$, dont les intégrales (B_1) sont $I_1, I_2, \ldots, I_n$, f est intégrable (B_1) sur ab et a pour intégrale (B_1):*

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n.$$

En effet, f_m étant intégrable (B_1) sur ab, et admettant le nombre I_m pour intégrale (B_1), il est possible quels que soient les deux nombres positifs ε et ε', de trouver un nombre ω_m tel que l'ensemble H_m défini par $|s(f_m, t) - I| > \frac{\varepsilon}{n}$ $(\alpha < t < \beta)$, ait une mesure inférieure à $\frac{\varepsilon'}{n}$ pour toute subdivision (x_i, ξ_i) de pas inférieur à ω_m. Or

$$s(f, t) = \sum f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) = \sum [f_1(\eta_i) + f_2(\eta_i) + \cdots + f_n(\eta_i)](y_i - y_{i-1}),$$

les sommations étant étendues aux termes tels que η_i soit situé sur le segment ab. Donc

$$s(f, t) = s(f_1, t) + s(f_2, t) + \cdots + s(f_n, t).$$

Donc, si $I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$, et si $|s(f, t) - I| > \varepsilon$, $(\alpha < t < \beta)$, l'une au moins des différences $s(f_m, t) - I_m$ surpasse $\frac{\varepsilon}{n}$ en valeur absolue.

Donc l'ensemble H défini par $|s(f, t) - I| > \varepsilon$, $(\alpha < t < \beta)$ est inclus dans la réunion des ensembles $H_1, H_2, \ldots, H_n$.

La mesure de H est donc inférieure à ε' si, ω étant le plus petit des n nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, le pas de la subdivision (x_i, ξ_i) est inférieur à ω.

13. *Si f est intégrable (B_1), d'une part entre a et b, d'autre part entre b et c, les intégrales (B_1) correspondantes étant I_1 et I_2, f est aussi intégrable (B_1) entre a et c, et l'intégrale (B_1) correspondante est $I = I_1 + I_2$.*

Soit

$$f_0(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad a < x < c, \quad f_0(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \leqq a, \quad x \geqq c,$$

de même

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad a < x < b, \quad f_1(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \leqq a, \quad x \geqq b,$$

$$f_2(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad b \leqq x < c, \quad f_2(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x < b, \quad x \geqq c.$$

Alors, quel que soit x, $f_0(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Or, dire que f est intégrable (B_1) entre a et c, entre a et b, entre b et c, et possède sur ces intervalles pour intégrales (B_1) respectives I, I_1, I_2, c'est à dire que les mêmes propriétés respectives appartiennent f_0, f_1 et f_2. Or, d'après le n° 10, f_0 est intégrable (B_1) entre a et c, et l'on a $I = I_1 + I_2$. Il en est donc de même de f.

En résumé, si $a < b < c$, on a:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Cette relation signifie que, si les deux termes du second membre existent au sens (B_1), il en est de même du premier membre, et que les trois intégrales (B_1) correspondantes sont liées par la relation numérique précédente.

14. Par définition, si $a < b$, nous posons

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

On en déduit la relation $\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a = 0$ qui exprime d'abord que si deux des trois termes ont un sens, le troisième aussi a un sens.

Il est à remarquer qu'*a priori* f peut être intégrable (B_1) sur ac sans l'être sur ab, b étant compris entre a et c.

15. *Si f est intégrable (B_1) sur ab et a pour intégrale I, alors k étant une constante quelconque, kf est intégrable (B_1) sur ab et a pour intégrale kI.*

En effet, f, (nul hors du segment ab), étant intégrable (B_1), soient ε_1, ε_2 deux membres positifs quelconques. Il existe un nombre positif $\omega'(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que, pour toute subdivision (x_i, ξ_i) de pas inférieur à $\omega'(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ l'ensemble H des nombres t vérifiant $|s(f, t) - I| > \frac{\varepsilon_1}{|k|}$ et $\alpha < t < \beta$ a une mesure inférieure à ε_2.

Posons $f_1 = kf$. Soit $s(f_1, t)$ la somme $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\eta_i)(y_i - y_{i-1})$ formée avec une subdivision (x_i, ξ_i) de pas inférieur à $\omega'(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

On a quel que soit t, $s(f_1, t) = ks(f, t)$. Donc l'ensemble $|s(f_1, t) - kI| > \varepsilon_1$, $(\alpha < t < \beta)$ coïncide avec l'ensemble H. La mesure de cet ensemble est donc inférieure à ε_2. Donc, f_1 est intégrable (B_1) et a pour intégrale kI.

16. *Si $f(x)dx$ est intégrable (B_1) sur le segment ab, $f\left(\frac{x}{k}\right)dx$ est intégrable (B_1) sur le segment (ka, kb), et l'on a:*

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx.$$

Nous démontrerons l'exactitude de cette formule pour toute valeur positive de k et pour $k = -1$. Elle sera dès lors établie pour toute valeur positive ou négative de k.

1° $k > 0$. Par hypothèse, à tout couple de nombres positifs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ correspond un nombre positif $\omega''(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que si la subdivision (x_i, ξ_i) a un pas inférieur à $\omega''(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, l'ensemble H définie par:

$$|s(f, t) - I| > \frac{\varepsilon_1}{k}, \qquad \frac{\alpha}{k} < t < \frac{\beta}{k},$$

a une mesure inférieure à $\frac{\varepsilon_2}{k}$.

On a:

$$s(f, t) = \sum f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}),$$

la sommation étant étendue aux termes pour lesquels η_i est situé sur le segment ab.

Considérons la subdivision $(x'_i = kx_i, \xi'_i = k\xi_i)$ qui est une subdivision quelconque de pas inférieur à $k\omega''(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Posons $y'_i = x'_i + t$, $\eta'_i = \xi'_i + t$. Soit $f_1 = f\left(\frac{x}{k}\right)$.

La somme $s'(f_1, t)$ correspondant à cette subdivision (x'_i, ξ'_i) et au segment (ka, kb) est:

$$s'(f_1, t) = \sum f_1(\xi'_i + t)(y'_i - y'_{i-1})$$

avec

$$ka \leqq \xi'_i + t \leqq kb \qquad \text{ou} \qquad a \leqq \xi_i + \frac{t}{k} \leqq b.$$

D'après cette dernière condition et l'expression de f_1,

$$s'(f_1, t) = \sum f\left(\xi_i + \frac{t}{k}\right).k(y_i - y_{i-1}) = k s\left(f, \frac{t}{k}\right).$$

Donc l'ensemble H' defini par:

$$|s'(f_1, t) - kI| > \varepsilon_1, \qquad \alpha < t < \beta,$$

est identique à l'ensemble

$$\left|s\left(f, \frac{t}{k}\right) - I\right| > \frac{\varepsilon_1}{k}, \qquad \frac{\alpha}{k} < \frac{t}{k} < \frac{\beta}{k}.$$

Cet ensemble est formé des points t telsque $\frac{t}{k}$ appartienne à H. Cet ensemble a donc une mesure égale à k fois celle de H. La mesure de H' est donc inférieure à ε_2. Et cela, pour toute subdivision de pas inférieur à $k\omega''(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. La proposition est donc établie pour $k > 0$.

2° $k = -1$. Soit $\omega'''(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ un nombre positif tel que, pour toute subdivision x_i, ξ_i de pas inférieur à $\omega'''(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, l'ensemble H défini par

$$|s(f, t) - I| > \varepsilon_1, \qquad -\beta < t < -\alpha$$

ait une mesure inférieure à ε_2, avec

$$s(f, t) = \sum f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}), \qquad a \leqq \eta_i \leqq b.$$

Posons

$$x'_{+j} = -x'_{-j}, \qquad \xi'_{+j} = -\xi_{-j}, \qquad y'_i = x'_i + t, \qquad \eta'_i = \xi'_i + t.$$

Alors,

$$0 < x'_i - x'_{i-1} = x_{-i+1} - x_{-i} < \omega'''(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Soit $f_1(x) = f(-x)$. Evaluons la somme

$$s'(f_1, t) = \sum f_1(\eta'_i)(y'_i - y'_{i-1})$$

étendue aux termes pour lesquels η'_i est situé sur le segment $(-b, -a)$. On a:

$$\eta'_i = \xi'_{+i} + t = -(\xi_{-i} - t), \qquad a \leqq \xi_{-i} - t \leqq b, \qquad y'_i - y'_{i-1} = x_{-i+1} - x_{-i}.$$

Donc

$$s'(f_1, t) = s(f, -t).$$

Donc l'ensemble H' défini par

$$|s'(f_1, t) - I| > \varepsilon_1, \qquad \alpha < t < \beta,$$

coïncide avec le symétrique de H par rapport à l'origine. Donc sa mesure est inférieure à ε_2 quelle que soit la subdivision (x'_i, ξ'_i) de pas inférieur à $\omega'''(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Donc $f(-x)$ est intégrable (B_1) sur le segment $(-b, -a)$ et a pour intégrale (B_1) sur ce segment, le nombre I. Donc, en utilisant la convention du n° 14,

$$\int_{-a}^{-b} f(-x)\,dx = -\int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = -I = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

La formule est donc établie pour $k = -1$. Elle est donc vraie quelle que soit la constante k.

Formule fondamentale.

17. Nous allons maintenant démontrer que *toute fonction sommable* [c'est-à-dire intégrable au sens de Lebesgue ou intégrable (L)] est intégrable (B_1).

Nous démontrerons d'abord la formule suivante :

Si $G(x)$ est une fonction sommable sur ab, et nulle hors de ab, si la subdivision (x_i, ξ_i) satisfait aux conditions

$$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i, \qquad 0 < x_i - x_{i-1} < \omega,$$

et si l'on pose

$$s(G, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} G(\eta_i)(y_i - y_{i-1})$$

avec $y_i = x_i + t$, $\eta_i = \xi_i + t$, on a la relation :

$$\int_\alpha^\beta s(G, t)\,dt = (\beta - \alpha)\int_a^b G(u)\,du + 2\delta\omega \int_a^b |G(u)|\,du,$$

avec $\delta^2 < 1$, les intégrales étant prises au sens de Lebesgue.

Quand t varie de α à β, il n'y a qu'un nombre limité de valeurs de i pour lesquelles η_i pénètre sur le segment ab. Ces valeurs de i vérifient les inégalités $\alpha + \xi_i \leqq b$, $\beta + \xi_i \geqq a$. Pour les autres valeurs de i, on a $G(\eta_i) = 0$, quelque soit t.

Pour une valeur donnée de i, la fonction $G(\eta_i)(y_i - y_{i-1})$ est sommable d'après $\eta_i = \xi_i + t$, $y_i - y_{i-1} = x_i - x_{i-1}$.

Donc $s(G, t)$ étant pour $\alpha < t < \beta$, la somme d'un nombre limité de fonctions sommables, est sommable. On a :

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \int_\alpha^\beta s(G, t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sum G(\eta_i)(y_i - y_{i-1})\,dt \\ &= \sum (x_i - x_{i-1}) \int_\alpha^\beta G(\xi_i + t)\,dt = \sum (x_i - x_{i-1}) \int_{\alpha+\xi_i}^{\beta+\xi_i} G(u)\,du. \end{aligned}$$

Dans cette somme l'intégrale de la fonction $G(u)$ sur l'intervalle $(\alpha+\xi_i, \beta+\xi_i)$. figure avec le coëfficient $(x_i - x_{i-1})$. Appelons σ_i l'intervalle $(\alpha+\xi_i, \beta+\xi_i)$. Pour que l'intervalle σ_i empiète sur σ_{i+1}, il faut que $\beta+\xi_i>\alpha+\xi_{i+1}$, donc $\beta-\alpha>\xi_{i+1}-\xi_i$. Cette condition sera réalisée quelque soit i dès que $2\omega<\beta-\alpha$. Dès lors, les intervalles σ_i recouvrent tout le champ des valeurs de u et en particulier le segment ab.

L'intégrale de la fonction $G(u)$ sur une partie de (ab) figurera donc dans $J(\alpha, \beta)$ avec un coëfficient égal à la somme des longueurs $x_i - x_{i-1}$ étendue aux indices i des intervalles σ_i qui ont en commun la partie considérée.

Considérons sur l'axe des u une subdivision quelconque contenant tous les points $\alpha+\xi_i$, $\beta+\xi_i$ et en outre a et b.

Les points de cette subdivision séparent une suite d'intervalles σ.

Alors, quelque soit i, l'extrémité d'un intervalle σ_i n' est jamais intérieur à un intervalle σ, et chaque segment σ_i est la réunion d'un certain nombre de segments σ deux à deux adjacents.

Calculons le coëfficient de l'intégrale de $G(u)du$ étendue à un certain intervalle σ.

Posons que le premier intervalle σ_i contenant cet intervalle σ soit σ_p et que le dernier qui contient encore σ soit σ_q.

Le coëfficient de l'intégrale de $G(u)du$ prise sur σ sera donc :

$$\sum_p^q (x_i - x_{i-1}) = x_q - x_{p-1}.$$

Appelons A l'extrémité gauche de l'intervalle σ considéré, B son extrémité droite. Nous avons par hypothèse

$$\beta+\xi_{p-1} \leqq A < B \leqq \beta+\xi_p, \qquad \alpha+\xi_q \leqq A < B \leqq \alpha+\xi_{q+1}.$$

Donc

$$\alpha+\xi_q < \beta+\xi_p, \qquad \beta+\xi_{p-1} < \alpha+\xi_{q+1},$$

ou

$$\xi_q - \xi_p < \beta - \alpha < \xi_{q+1} - \xi_{p-1}.$$

D'après

$$\xi_q \leqq x_q \leqq \xi_{q+1}, \qquad \xi_{p-1} \leqq x_{p-1} \leqq \xi_p,$$

il vient

$$(\xi_q - x_q) - (\xi_p - x_{p-1}) < \beta - \alpha - (x_q - x_{p-1}) < (\xi_{q+1} - x_q) - (\xi_{p-1} - x_{p-1}).$$

Mais, quel que soit i

$$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i, \qquad 0 < x_i - x_{i-1} < \omega.$$

Donc,

$$-2\omega < \beta - \alpha - (x_q - x_{p-1}) < 2\omega.$$

On peut donc écrire

$$x_q - x_{p-1} = \beta - \alpha + 2\delta_\sigma \omega,$$

avec $\delta_\sigma^2 < 1$.

Le coëfficient de l'intégrale de $G(u)du$ prise sur σ est donc $\beta - \alpha + 2\delta_\sigma\omega$.

Donc en ajoutant les valeurs des intégrales de $G(u)$ sur tous les segments σ dont la réunion forme ab, on a :

$$\int_\alpha^\beta \sum G(\eta_i)(y_i - y_{i-1})dt = \sum(\beta - \alpha + 2\delta_\sigma\omega)\int_\sigma G(u)du$$

ou

$$\int_\alpha^\beta s(G, t)dt = (\beta - \alpha)\int_a^b G(u)du + 2\delta\omega\int_a^b |G(u)|du,$$

où $\delta^2 < 1$.

La formule est donc démontrée.

18. Remarque : Quand $G(u)$ ne prend pas les deux signes, la formule précédente se réduit à :

$$\int_\alpha^\beta s(G, t)dt = (\beta - \alpha + 2\delta\omega)\int_a^b G(u)du.$$

Seconde démonstration.

19. Le raisonnement suivant a l'avantage de se transformer commodément pour s'appliquer à des subdivisions (y_i, η_i) dont la variation par rapport à t n'est plus linéaire.

Supposant $g(x)$ sommable entre a et b et nul hors de ce segment, nous voulons évaluer

$$\int_\alpha^\beta s(g, t)dt = \int_\alpha^\beta \sum g(\eta_i)(y_i - y_{i-1})dt.$$

On a :

$$\int_\alpha^\beta \sum g(\eta_i)(y_i - y_{i-1})dt = \int_\alpha^\beta \sum g(\xi_i + t)(x_i - x_{i-1})dt$$
$$= \sum(x_i - x_{i-1})\int_{\alpha+\xi_i}^{\beta+\xi_i} g(u)du.$$

La fonction g est sommable. Posons

$$G(x) = \int_a^x g(u)du.$$

Alors :

1° la fonction $G(u)$ est continue

2° $G(x) = 0$ pour $x \leqq a$.

3° $G(x) = \int_a^b g(u)\,du = I$ pour $x \geqq b$.

Or,

$$\int_{\alpha+\xi_i}^{\beta+\xi_i} g(u)\,du = G(\beta + \xi_i) - G(\alpha + \xi_i).$$

La somme à évaluer devient donc :

$$\sum G(\beta + \xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum G(\alpha + \xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

20. La fonction continue $G(x)$ étant intégrable au sens de RIEMANN, on a, suivant le théorème de la moyenne :

$$\int_{\beta+x_{i-1}}^{\beta+x_i} G(u)\,du = G(\beta + \xi_i')(x_i - x_{i-1})$$

avec

$$x_{i-1} \leqq \xi_i' \leqq x_i.$$

Donc

$$G(\beta + \xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

diffère de

$$\int_{\beta+x_{i-1}}^{\beta+x_i} G(u)\,du$$

d'une quantité au plus égale à

$$|G(\beta + \xi_i) - G(\beta + \xi_i')|(x_i - x_{i-1}).$$

Or,

$$G(\beta + \xi_i) - G(\beta + \xi_i') = \int_{\beta+\xi_i'}^{\beta+\xi_i} g(u)\,du = \delta_i \int_{\beta+x_{i-1}}^{\beta+x_i} |g(u)|\,du$$

avec $\delta_i^2 < 1$.

Donc :

$$G(\beta + \xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_{\beta+x_{i-1}}^{\beta+x_i} G(u)\,du + \delta_i'\omega \int_{\beta+x_{i-1}}^{\beta+x_i} |g(u)|\,du.$$

21. Soit p le plus grand des indices i tels que $\beta + x_{i-i} \leqq a$, et q le plus petit des indices i tels que $\alpha + x_i \geqq b$.

Alors si $i \leqq p - 1$, on a pour $\alpha < t < \beta$, $\xi_i + t < x_{p-1} + \beta$, donc $\xi_i + t < a$ et $g(\xi_i + t) = 0$. De même si $i \geqq q + 1$, et si $\alpha < t$, $\xi_i + t > \alpha + x_q$. Donc $\xi_i + t > b$, et encore $g(\xi_i + t) = 0$.

Donc

$$s(g, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_p^q g(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$$

et

$$\int_\alpha^\beta s(g, t)\,dt = \sum_p^q [G(\beta + \xi_i) - G(\alpha + \xi_i)](x_i - x_{i-1}).$$

22. Or, on a:

$$\sum_p^q G(\beta+\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\int_{\beta+x_{p-1}}^{\beta+x_q} G(u)\,du+\delta'\omega\int_{\beta+x_{p-1}}^{\beta+x_q}|g(u)|\,du$$
$$=\int_a^{\beta+x_q} G(u)\,du+\delta_1\omega\int_a^b|g(u)|\,du \qquad (\delta'^2,\ \delta_1^2<1),$$

d'après $\beta+x_{p-1}<a$. De même:

$$\sum_p^q G(\alpha+\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\int_a^{\alpha+x_q} G(u)\,du+\delta_2\omega\int_a^b|g(u)|\,du$$

avec $\delta_2^2<1$.

En retranchant ces deux relations, on trouve a:

$$\int_\alpha^\beta s(g,\ t)\,dt=\int_{\alpha+x_q}^{\beta+x_q} G(u)\,du+2\delta\omega\int_a^b|g(u)|\,du$$

avec $\delta^2<1$.

Mais d'après $b<\alpha+x_q<\beta+x_q$, dans l'intervalle $(\alpha+x_q,\ \beta+x_q)$, $G(u)$ est constante et égale à I. Donc:

$$\int_\alpha^\beta s(g,\ t)\,dt=(\beta-\alpha)\int_a^b g(u)\,du+2\delta\omega\int_a^b|g(u)|\,du$$

avec $\delta^2<1$. C. Q. F. D.

Toute fonction sommable est intégrable (B_1).

23. Nous allons maintenant démontrer que la fonction f égale à 1 sur un ensemble parfait P situé sur le segment ab et à 0 hors de cet ensemble est intégrable (B_1) et a pour intégrale la mesure de P.

La démonstration est entièrement, analogue à celle du n° 3 pour la définition (B).

Soient c et d les extrémités de P, (c peut être en a et d en b, indépendamment l'un de l'autre); u_1, u_2, ..., les intervalles contigus de P [tous intérieurs à cd], la longueur u_n ne croissant jamais avec n.

Soient, pour une valeur quelconque de t, q et r les deux entiers définis par $y_{q-1}<c\leqq y_q$, $y_{r-1}\leqq d<y_r$. On a $d-c<y_r-y_{q-1}<d-c+2\omega$, et

$$s(f,\ t)=\sum_q^r f(\eta_i)(y_i-y_{i-1}).$$

Si nous distinguons, comme dans la démonstration analogue relative à la définition (B), (n° 3), les segments $(y_{i-1},\ y_i)$ pour $q\leqq i\leqq r$ en deux catégories σ_1 et σ_2, les segments σ_1 étant entièrement situés dans un intervalle contigu à P, et les segments σ_2 contenant au moins un point de P, on a $s(h, t) \leqq \sum \sigma_2$,

$$d - c < \sum \sigma_1 + \sum \sigma_2 = y_r - y_{q-1} < d - c + 2\omega.$$

Soit u_p le dernier des intervalles $u_1, u_2, \ldots$ supérieur à 2ω.

On a :

$$\sum \sigma_1 > u_1 + u_2 + \cdots + u_p - 2p\omega.$$

Donc :

$$\sum \sigma_2 < d - c - \sum_1^p u_n + 2(p+1)\omega$$

et, si I est la mesure de P,

$$s(f, t) = \sum \sigma_2 < I + \eta_1(\omega),$$

en posant :

$$\sum_{p+1}^{\infty} u_n + 2(p+1)\omega = \eta_1(\omega),$$

$\eta_1(\omega)$ tend vers zéro avec ω.

Soit $s(f, t) = I + h(t)$, on a donc $h(t) < \eta_1(\omega)$, et d'ailleurs, d'après la formule fondamentale (n° 17) ($G = f$ est ici non négatif) :

$$\int_\alpha^\beta h(t)\,dt = (\beta - \alpha + 2\delta\omega)I - (\beta - \alpha)I > -2\omega I.$$

De cette inégalité et de la précédente $h(t) < \eta_1(\omega)$, on déduit comme au n° 3 que l'ensemble H des points t, vérifiant : $|h(t)| > \varepsilon$, $\alpha < t < \beta$ a une mesure tendant vers zéro avec ω. D'après $h(t) = s(f, t) - I$, f est intégrable (B_1) et son intégrale (B_1) est égale à son intégrale besgienne.

24. La même proposition est évidemment encore vraie pour une fonction f constante et égale à k sur une ensemble parfait et égale à zéro hors de cet ensemble.

Son intégrale (B_1) est alors km, m étant la mesure de l'ensemble parfait.

24 bis. $P_1, P_2, \ldots, P_n$ étant sur le segment ab des ensembles parfaits deux à deux distincts, si f est constante sur chacun d'eux et nulle en dehors de leur réunion, alors, d'après le principe du n° 12, f est intégrable (B_1) et son intégrale (B_1) entre a et b est égale à son intégrale (L).

25. f étant une fonction sommable, soit ρ un nombre supérieur à $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Evaluons une limite supérieure de la mesure μ de l'ensemble H formé des nombres t vérifiant les inégalités :

$$|s(f, t)| > M\rho, \qquad \alpha < t < \beta,$$

où M est un nombre positif quelconque.

On a, f étant nulle hors de ab:

$$|s(f,\ t)| \leqq \sum_{-\infty}^{+\infty} |f(\eta_i)|(y_i - y_{i-1}) = s(|f|,\ t).$$

Donc:

$$\int_\alpha^\beta |s(f,\ t)|\,dt \leqq \int_\alpha^\beta s(|f|,\ t)\,dt.$$

Suivant la formule fondamentale (17) la dernière intégrale est inférieure à

$$(\beta - \alpha + 2\omega)\int_a^b |f(x)|\,dx < (\beta - \alpha + 2\omega)\rho.$$

Donc l'ensemble H où $|s(f,\ t)| > M\rho$, a une mesure inférieure à $\dfrac{\beta - \alpha + 2\omega}{M}$.

26. Ayant établi ces lemmes, passons maintenant à la démonstration que toute fonction $f(x)$ sommable sur un segment ab est intégrable (B_1), avec égalité des intégrales (L) et (B_1) sur ce segment.

Nous faisons donc $f(x) = 0$, quand x est extérieur au segment ab.

Formons une progression arithmétique indéfinie dans les deux sens de raison positive λ:

$$\ldots,\quad -n\lambda,\quad -(n-1)\lambda,\ \ldots,\quad -\lambda,\quad 0,\quad \lambda,\ \ldots,\quad (n-1)\lambda,\quad n\lambda,\ \ldots.$$

L'ensemble E_n des valeurs de x situées sur le segment ab et telles que $n\lambda \leqq f < (n+1)\lambda$, où n est positif, négatif ou nul, est mesurable, puisque la fonction f est sommable.

Soit μ_n la mesure de E_n.

Sur E_n nous posons $f = n\lambda + \lambda\theta_n(x)$. On a:

$$0 \leqq \theta_n(x) < 1.$$

Soit ε_n un nombre positif, dépendant de n et tel que la série $(|n| + 1)\lambda\varepsilon_n$ ait une somme inférieure à un nombre positif donné $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

On peut, dans E_n, déterminer un ensemble parfait P_n, dont la mesure diffère de celle de E_n de moins de ε_n.

Les points de E_n étrangers à P_n forment un ensemble Q_n.

Mais puisque sur E_n, donc sur Q_n, on a $|f| < (|n| + 1)\lambda$, l'intégrale sur Q_n de la fonction $|f|$ est inférieure à $(|n| + 1)\lambda\varepsilon_n$.

Donc l'intégrale (L) de $|f|$ sur la réunion des Q_n de tout indice positif, négatif, ou nul est inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Puisque la fonction f est intégrable (L), il est possible, suivant Lebesgue, en désignant par R_{-N} la réunion des ensembles $E_{-N-1}+E_{-N-2}+\cdots$, et par R_N la réunion des ensembles $E_{N+1}+E_{N+2}+\cdots$ de choisir N, positif et si grand que

$$\int_{R_N}|f(x)|\,dx+\int_{R_{-N}}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

N peut se calculer connaissant λ et ε.

Soit Q l'ensemble réunissant E_N, R_{-N} et les ensembles Q_n d'indice compris entre $-N$ et $+N$ inclusivement, (tous les autres Q_n sont compris dans R_N et R_{-N}). Alors

$$\int_Q|f|\,dx<\varepsilon.$$

Le complémentaire de Q relativement au segment ab est l'ensemble parfait P constitué par la réunion des ensembles deux à deux distincts

$$P_{-N},\quad P_{-N+1},\ldots,P_{-1},\quad P_0,\quad P_1,\ldots,P_{N-1},\quad P_N.$$

27. Considérons deux fonctions auxiliaires,

1° la fonction φ_N égale à $i\lambda$ sur l'ensemble parfait P_i $(-N\leqq i\leqq N)$ et égale à 0 sur Q.

2° la fonction ψ_N définie par:

$$f(x)=\varphi_N(x)+\psi_N(x).$$

On a:

$$\psi_N(x)=f \quad\text{sur}\quad Q,\quad\text{et}\quad \psi_N(x)=\lambda\theta(x)\quad\text{avec}\quad 0\leqq\theta(x)<1,\quad\text{sur}\quad P.$$

Si nous appelons I, I_N et J_N respectivement les intégrales (L) sur le segment ab des fonctions f, φ_N, et ψ_N, on a:

$$I=I_N+J_N.$$

Mais:

$$|J_N|\leqq\int_a^b|\psi_N(x)|\,dx=\int_P|\psi_N(x)|\,dx$$
$$+\int_Q|\psi_N(x)|\,dx=\int_P\lambda\theta(x)\,dx+\int_Q|f|\,dx<\lambda(b-a)+\varepsilon.$$

Donc:

(1) $$|I-I_N|<\varepsilon+\lambda(b-a).$$

D'autre part, l'inégalité

$$\int_a^b|\psi_N(x)|\,dx<\varepsilon+\lambda(b-a)$$

entraîne, suivant la formule du § 25, où l'on donne à M la valeur $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + \lambda(b-a)}}$ et à ρ la valeur $\varepsilon + \lambda(b-a)$, cette conséquence que, si K_1 est l'ensemble des valeurs des t vérifiant à la fois

$$(2) \qquad |s(\psi_N, t)| > \sqrt{\varepsilon + \lambda(b-a)} \quad \text{et} \quad \alpha < t < \beta,$$

la mesure de K_1 est inférieure à $(\beta - \alpha + 2\omega)\sqrt{\varepsilon + \lambda(b-a)}$.

Or, φ_N étant constante sur l'ensemble parfait P_i $(-N \leqq i \leqq N)$ et nulle hors de P, φ_N est intégrable (B_1) sur ab et son intégrale (B_1) est I_N.

Donc, quelques soient les deux nombres ε_0 et ε'_0 positifs, donnés d'avance, il est possible de trouver un nombre Ω dépendant de ε_0, ε'_0 et N, ou (puisque N dépend de λ et de ε), dépendant de ε_0, ε'_0, λ et ε, tel que l'ensemble K_2 défini par $\alpha < t < \beta$,

$$(3) \qquad |s(\varphi_N, t) - I_N| > \varepsilon_0,$$

a une mesure inférieure à ε'_0, quel que soit ω inférieur à $\Omega(\varepsilon_0, \varepsilon'_0, \lambda, \varepsilon)$.

Soit K la réunion des ensembles K_1 et K_2. Alors, en tout point étranger à K, on a

1° $|s(\psi_N, t)| \leqq \sqrt{\varepsilon + \lambda(b-a)}$

2° $|s(\varphi_N, t) - I| < \varepsilon_0 + \varepsilon + \lambda(b-a)$, cette dernière relation étant obtenue en combinant les relations (1) et (3).

Donc, puisque $s(f, t) = s(\varphi_N, t) + s(\psi_N, t)$, on a en tout point étranger à K:

$$|s(f, t) - I| \leqq |s(\varphi_N, t)| + |s(\psi_N, t) - I| < \varepsilon_0 + \varepsilon + \lambda(b-a) + \sqrt{\varepsilon + \lambda(b-a)}.$$

28. Supposons $\omega < \Omega(\varepsilon_0, \varepsilon'_0, \lambda, \varepsilon)$. Alors la mesure de K est inférieure à

$$(\beta - \alpha + 2\omega)\sqrt{\varepsilon + \lambda(b-a)} + \varepsilon'_0 < 2(\beta - \alpha)\sqrt{\varepsilon + \lambda(b-a)} + \varepsilon'_0,$$

si en outre:

$$\omega < \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Si donc nous nous donnons deux nombres positifs ε_1 et ε_2, et si nous choisissons les nombres positifs ε_0, ε'_0, ε, λ tels que

$$1^\circ \qquad \varepsilon_0 + \varepsilon + \lambda(b-a) + \sqrt{\varepsilon + \lambda(b-a)} < \varepsilon_1$$

$$2^\circ \qquad 2(\beta - \alpha)\sqrt{\varepsilon + \lambda(b-a)} + \varepsilon'_0 < \varepsilon_2,$$

nous pouvons calculer un nombre $\Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ au plus égal à $\frac{\beta - \alpha}{2}$ [et à $\Omega(\varepsilon_0, \varepsilon'_0, \lambda, \varepsilon)$]

tel que, si $\omega < \Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, l'ensemble $|s(f, t) - I| > \varepsilon_1$, $\alpha < t < \beta$, a une mesure inférieure à ε_2.

Donc la fonction sommable quelconque f est intégrable (B_1) et son intégrale (B_1) est égale à son intégrale besgienne.

Seconde démonstration.

29. Nous allons donner une seconde démonstration de l'identité des intégrations (L) et (B_1) pour une fonction sommable, la nouvelle démonstration s'appliquant immédiatement à la fonction sommable la plus générale, sans que l'on ait besoin d'effectuer sur celle-ci une décomposition préalable en fonctions plus simples.

Nous nous appuierons sur le théorème fondamental dû à M. Lebesgue, que l'intégrale (L) de $f(x)dx$ entre a et x possède $f(x)$ pour dérivée en tout point de ab sauf éventuellement en un ensemble de mesure nulle.

Nous utilisons en outre cette propriété que si $\rho(\mu)$ désigne le maximum des intégrales (L) de $|f|dx$ sur tous les ensembles de mesure μ situés sur ab, $\rho(\mu)$ tend vers zéro avec μ [6]).

Soit $f(x)$ une fonction sommable, nulle hors de ab et soit $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ l'intégrale (L) entre a et x. Si $x \leqq a$, on a donc $F(x) = 0$; si $x \geqq b$, on a:

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx = I.$$

30. Considérons l'ensemble $H(\varepsilon, \omega)$ des points x_0 tels que, si x vérifie les relations $0 < |x - x_0| < \omega$, on a:

$$(1) \qquad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) + \delta' \varepsilon, \qquad (\delta'^2 < 1).$$

Cette condition imposée à x_0 équivaut à la suivante. Les relations:

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \begin{cases} x \leqq x_0 \leqq x' \quad \text{avec} \quad 0 < x' - x < \omega \quad \text{entraînent:} \\ \dfrac{F(x') - F(x)}{x' - x} = f(x_0) + \delta\varepsilon, \quad \text{avec} \quad \delta^2 < 1. \end{cases}$$

---

[6]) En effet, si m_n est la mesure de l'ensemble $n + 1 \geqq |f| > n$, et si $\mu_n = m_n + m_{n+1} + \dots$, l'intégrale de $|f_1 dx$ sur tout ensemble de mesure inférieure à μ_n est inférieure à $(n+1)m_n + (n+2)m_{n+1} + \dots$ qui tend vers zéro quand n croît puisque la condition de sommabilité est précisément la convergence de la série $n\,m_n$.

Appelons H_0 l'ensemble des points où $F'(x) = f(x)$.

Entre a et b, H_0 a pour mesure $b - a$; hors du segment ab, F étant constant, on a $F' = f = 0$.

Donc H_0 comprend tous les points $x < a$, $x > b$; de même, $H(\varepsilon, \omega)$ comprend tous les points $x \leqq a - \omega$, $x \geqq b + \omega$.

Si, ε restant fixe, $\Omega_1 < \Omega_2$, tout point de $H(\varepsilon, \Omega_2)$ est dans $H(\varepsilon, \Omega_1)$, car si la condition (1) est satisfaite pour $\omega = \Omega_2$, la condition (1) est à fortiori satisfaite pour $\omega = \Omega_1$. Donc, quand Ω décroit, ε restant fixe, $H(\varepsilon, \Omega)$ ne perd jamais de points.

Je dis que l'ensemble $H(\varepsilon)$ réunissant tous les $H(\varepsilon, \Omega)$ contient H_0.

En effet, si en un point x_1, la dérivée de $F(x)$ existe et vaut $f(x_1)$, il existe un nombre Ω_1, dépendant de x_1 et de ε, tel que, les conditions (1^{bis}) sont vérifiées quand on y remplace ω par Ω_1, x_0 par x_1.

Donc, le complémentaire $R(\varepsilon)$ de $H(\varepsilon)$, formé par tous les points de l'axe des x étrangers à $H(\varepsilon)$, est contenu dans le complémentaire R_0 de H_0.

R_0 est situé sur le segment ab et est de mesure nulle. Il en est donc de même de $R(\varepsilon)$.

De même que $H(\varepsilon)$ est la réunion de tous les $H(\varepsilon, \Omega)$, son complémentaire $R(\varepsilon)$ est l'ensemble commun à tous les $R(\varepsilon, \Omega)$, $R(\varepsilon, \Omega)$ étant l'ensemble de tous les points de l'axe des x étrangers à $H(\varepsilon, \Omega)$.

Comme $R(\varepsilon, \Omega)$ décroit en même temps que Ω, la mesure de $R(\varepsilon)$ est la limite de la mesure de $R(\varepsilon, \Omega)$. Donc si $\mu(\varepsilon, \Omega)$ désigne la mesure de $R(\varepsilon, \Omega)$, $\mu(\varepsilon, \Omega)$ tend vers 0 avec Ω.

Soit φ la fonction égale à 1 sur l'ensemble $H(\varepsilon, \omega)$ et à 0 sur $R(\varepsilon, \omega)$; de même soit $\psi = 1 - \varphi$.

On a $\psi = 1$ sur $R(\varepsilon, \omega)$ et $\psi = 0$ hors de $R(\varepsilon, \omega)$.

31. Désignons, pour chaque valeur de t, par $\lambda(t)$ la longueur totale des intervalles $y_i - y_{i-1}$ pour lesquels le point η_i appartient à l'ensemble $R(\varepsilon, \omega)$.

On a:

$$\lambda(t) = \sum \psi(\eta_i)(y_i - y_{i-1}).$$

Formons

$$\int_\alpha^\beta \lambda(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sum \psi(\eta_i)(y_i - y_{i-1}).$$

La fonction ψ étant sommable, on a, d'après la formule fondamentale (17) et la remarque (18):

$$\int_\alpha^\beta \sum \psi(\eta_i)(y_i - y_{i-1})\,dt = (\beta - \alpha + 2\delta\omega)\int_a^b \psi(u)\,du.$$

Mais ψ étant égal à 1 sur $R(\varepsilon, \omega)$ et à 0 ailleurs, son intégrale (L) est $\mu(\varepsilon, \omega)$.

Donc,

$$\int_\alpha^\beta \lambda(t)\,dt = (\beta - \alpha + 2\delta\omega)\mu(\xi, \omega) < 2(\beta - \alpha)\mu(\varepsilon, \omega)$$

en supposant toujours $\omega < \dfrac{\beta - \alpha}{2}$. ε nous est donné. Soit η_1 un second nombre positif donné.

Choisissons le nombre Ω_1 tel que pour $\omega < \Omega_1$, $\mu(\varepsilon, \omega) < \eta_1$. Ω_1 est une fonction de ε et de η_1. Nous écrivons $\Omega_1 = \Omega_1(\varepsilon, \eta_1)$.

Nous supposons désormais $\omega < \Omega_1$. η_2 étant un nombre positif quelconque, cherchons la mesure $\mu' = \mu'(\varepsilon, \eta_1, \eta_2)$ de l'ensemble des valeurs de t, où pour une subdivision (x_i, ξ_i) donnée l'on a $\alpha < t < \beta$, $\lambda(t) > \eta_1 + \eta_2$.

Puisque

$$\int_\alpha^\beta \lambda(t)\,dt < 2(\beta - \alpha)\mu(\varepsilon, \omega) < 2(\beta - \alpha)\eta_1,$$

si $\omega < \Omega_1(\varepsilon, \eta_1)$, et que $\lambda(t)$ n'est jamais négatif, on a les inégalités suivantes :

$$\mu'.(\eta_1 + \eta_2) < \int_\alpha^\beta \lambda(t)\,dt < 2(\beta - \alpha).\eta_1.$$

Donc

$$\mu' < \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}(\beta - \alpha).$$

Faisons $\eta_2 = \sqrt{\eta_1} - \eta_1$, η_2 est positif en supposant $\eta_1 < 1$.

Alors *l'ensemble K des valeurs de t, telles que $\alpha < t < \beta$ et $\lambda(t) > \sqrt{\eta_1}$, a une mesure inférieure à* $2(\beta - \alpha)\sqrt{\eta_1}$, pour $\omega < \Omega_1(\varepsilon, \eta_1)$, valeur qui entraîne $\mu(\varepsilon, \omega) < \eta_1$.

Nous supposons désormais t étranger à K.

32. Nous avons, d'après $\varphi + \psi = 1$,

$$s(f, t) = \sum \varphi(\eta_i)f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) + \sum \psi(\eta_i)f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}).$$

Considérons d'abord le premier terme du second membre.

Par définition de $H(\varepsilon, \omega)$, si x_0 est dans ce dernier ensemble, on a les relations (1^{bis}).

Donc pour tous les points η_i situés dans $H(\varepsilon, \omega)$ on a :

$$F(y_i) - F(y_{i-1}) = f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) + \delta_i\varepsilon(y_i - y_{i-1}).(\delta_i^2 < 1).$$

Observons de plus, que si le segment (y_{i-1}, y_i) est sans points communs avec ab, on a :

$$F(y_i) - F(y_{i-1}) = 0, \qquad f(\eta_i) = 0,$$

donc dans ce cas $\delta_i = 0$.

Donc, quelque soit η_i situé dans $H(\varepsilon, \omega)$ ou non:

$$\varphi(\eta_i)[F(y_i) - F(y_{i-1})] = \varphi(\eta_i)f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) + \delta_i \varepsilon \varphi(\eta_i)(y_i - y_{i-1}).$$

Car, si η_i est dans $H(\varepsilon, \omega)$, $\varphi(\eta_i)$ est égal à 1, et l'équation est identique à la relation ci-dessus; si η_i est étranger à $H(\varepsilon, \omega)$, $\varphi(\eta_i)$ est par définition égal à zéro.

On a donc toujours:

$$\sum \varphi(\eta_i)f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) = \sum \varphi(\eta_i)[F(y_i) - F(y_{i-1})] - \sum \delta_i \varepsilon \varphi(\eta_i)(y_i - y_{i-1}).$$

D'autre part:

$$\sum \varphi(\eta_i)[F(y_i) - F(y_{i-1})] = \sum [F(y_i) - F(y_{i-1})] - \sum \psi(\eta_i)[F(y_i) - F(y_{i-1})].$$

Les termes $F(y_i) - F(y_{i-1})$ sont nuls, pour $y_i \leqq a$ et pour $y_{i-1} \geqq b$.

La première somme du second membre est donc

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = I.$$

Donc:

$$\sum \varphi(\eta_i)[F(y_i) - F(y_{i-1})] = I - \sum \psi(\eta_i)[F(y_i) - F(y_{i-1})].$$

Donc:

$$\begin{aligned} s(f, t) = I - \sum \delta_i \varepsilon \varphi(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) - \sum \psi(\eta_i)[F(y_i) - F(y_{i-1})] \\ + \sum \psi(\eta_i)f(\eta_i)(y - y_{i-1}). \end{aligned}$$

33. Désignons par $\sum_1$, $\sum_2$, $\sum_3$ respectivement le second, le troisième et le quatrième terme du second membre de cette dernière formule.

Quand le segment (y_{i-1}, y_i) est extérieur au segment ab, $\delta_i = 0$, donc, d'après

$$\varphi(\eta_i) \leqq 1, \qquad \sum |\delta_i| \varphi(\eta_i)(y_i - y_{i-1})$$

est inférieur à la somme des longueurs des segments (y_{i-1}, y_i) ayant au moins un point commun avec le segment ab, donc:

$$\left|\sum\nolimits_1\right| < \varepsilon(b - a + 2\omega) < 2\varepsilon(b - a)$$

en supposant $\omega < \dfrac{b-a}{2}$.

34. Evaluons

$$\sum\nolimits_2 = \sum \psi(\eta_i)[F(y_i) - F(y_{i-1})].$$

On a:

$$F(y_i) - F(y_{i-1}) = \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(u)\,du.$$

Donc :

$$|F(y_i) - F(y_{i-1})| \leqq \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(u)|\, du.$$

Donc :

$$\left|\sum\nolimits_2\right| \leqq \sum \psi(\eta_i) \int_{y_{i-1}}^{y_i} |f(u)|\, du.$$

Puisque $\psi(x)$ est nul sur $H(\varepsilon, \omega)$ et égal à 1 sur $R(\varepsilon, \omega)$, les termes de la dernière somme ne peuvent avoir une valeur différente de zéro, que si η_i est situé sur $R(\varepsilon, \omega)$; la longueur totale des segments (y_{i-1}, y_i) où η_i appartient à $R(\varepsilon, \omega)$ est par définition $\lambda(t)$.

Le second membre est l'intégrale $\int |f(u)|\, du$ étendue à un champ formé de segments (y_{i-1}, y_i), dont la longueur totale est $\lambda(t)$.

Or, t étant supposé étranger à K, on a $\lambda(t) \leqq \sqrt{\eta_1}$. Donc, $\left|\sum_2\right|$ est, pour ces valeurs de t inférieure ou égale au maximum des intégrales $\int_E |f(u)|\, du$ étendues aux ensembles E de longueur $\sqrt{\eta_1}$, maximum que nous avons désigné par $\rho(\sqrt{\eta_1})$, (29). Ce nombre tend vers 0 avec η_1.

35. Considérons enfin $\sum_3$.

On a

$$\left|\sum\nolimits_3\right| \leqq \sum\nolimits_3' = \sum \psi(\eta_i) |f(\eta_i)| (y_i - y_{i-1}).$$

La fonction f étant sommable il en est de même de ψf, d'après $\psi = 0$ ou 1.

Donc, suivant la formule fondamentale (17) et l'hypothèse $2\omega < \beta - \alpha$,

$$\int_\alpha^\beta \sum\nolimits_3' dt < 2(\beta - \alpha) \int_a^b \psi(u) |f(u)|\, du.$$

$\psi(u)$ est nul en dehors de $R(\varepsilon, \omega)$; si $\omega < \Omega_1(\varepsilon, \eta_1)$ la mesure de $R(\varepsilon, \omega)$ est inférieure à η_1.

L'intégrale du second membre est donc inférieure ou égale à $\rho(\eta_1)$.

Donc :

$$\int_\alpha^\beta \sum\nolimits_3' dt < 2(\beta - \alpha) \rho(\eta_1).$$

Soit μ'' la mesure de l'ensemble J des valeurs de t comprises entre α et β, et où :

$$\sum\nolimits_3' > \sqrt{\rho(\eta_1)}.$$

On a :

$$\mu'' \sqrt{\rho(\eta_1)} < 2(\beta - \alpha) \rho(\eta_1),$$

donc

$$\mu'' < 2(\beta - \alpha) \sqrt{\rho(\eta_1)}.$$

36. Les ensembles K et J réunis ont une mesure totale au plus égale à

$$2(\beta - \alpha)[\sqrt{\eta_1} + \sqrt{\rho(\eta_1)}].$$

En résumé si $\omega < \Omega_1(\varepsilon, \eta_1)$, $2\omega < b - a$, $2\omega < \beta - \alpha$ et si t, compris entre α et β, est étranger à J et à K, on a :

$$|s(f, t) - I| \leqq |\textstyle\sum_1| + |\sum_2| + |\sum_3| < 2\varepsilon(b - a) + \rho(\sqrt{\eta_1}) + \sqrt{\rho(\eta_1)}.$$

Supposons donnés deux nombres positifs quelconques ε_1 et ε_2.

Nous pouvons choisir ε et η_1 tels que

1° $$2\varepsilon(b - a) + \rho(\sqrt{\eta_1}) + \sqrt{\rho(\eta_1)} < \varepsilon_1,$$

et en même temps :

2° $$2(\beta - \alpha)[\sqrt{\eta_1} + \sqrt{\rho(\eta_1)}] < \varepsilon_2.$$

Désignons par $\Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ le plus petit des trois nombres $\dfrac{b-a}{2}$, $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$, $\Omega_1(\varepsilon, \eta_1)$, alors l'inégalité $\omega < \Omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ entraîne $|s(f, t) - I| < \varepsilon_1$ sauf éventuellement pour des valeurs de t formant entre α et β un ensemble de mesure inférieure à ε_2.

La fonction f est donc intégrable (B_1) et son intégrale est I.

37. Nous avons vu (n° 14) que si φ est intégrable (B_1), f et $f + \varphi$ sont à la fois intégrables (B_1) ou non intégrables (B_1), et dans le premier cas, la différence des intégrales (B_1) de f et de $f + \varphi$ est égale à celle de φ. Cette même proposition sera en particulier exacte quand φ sera sommable, puisqu'alors φ est intégrable (B_1).

Plus spécialement, on ne modifie ni l'existence ou la non-existence ni la valeur, si elle existe, de l'intégrale (B_1) de f sur un segment ab, quand on modifie indifféremment f aux points d'un ensemble de mesure nulle.

Suites de subdivisions (y_i, η_i).

38. Soit $f(x)$ une fonction sommable quelconque. Nous avons établi que la mesure de l'ensemble $\alpha < t < \beta$, $|s(f, t) - I| > \varepsilon$ tend vers zéro, avec le pas ω de la subdivision quelque soit ε, positif, donné d'avance.

Donnons nous deux suites de nombres positifs ε_n et ε'_n telles que 1° ε_n tend vers zéro, quand n croit et 2° la serie ε'_n est convergente, $\left(\text{par exemple } \varepsilon'_n = \dfrac{1}{n^2}\right)$. Alors il est possible de trouver un nombre ω_n tel que, si $\omega < \omega_n$, l'ensemble des valeurs de t où l'on a $-n < t < n$, $|s(f, t) - I| > \varepsilon_n$ a une mesure inférieure à ε'_n.

Pour chaque valeur de n, choisissons indifféremment une subdivision particulière quelconque D_n indéfinie dans les deux sens et de pas inférieur à ω_n. Appelons $s_n(f, t)$ la somme $s(f, t)$ correspondant à la subdivision D_n. Alors la mesure de l'ensemble E_n où l'on a :

$$-n < t < n, \qquad |s_n(f, t) - I| > \varepsilon_n,$$

est inférieure à ε'_n.

Je dis que $s_n(f, t)$ tend vers I quand n croît, quelque soit t, sauf peut-être pour des valeurs de t formant un ensemble de mesure nulle.

En effet, si t appartient à un nombre limité d'ensembles E_n, soit p le plus grand des indices de ces ensembles. Alors quelque soit n supérieur à p et à $|t|$, on a :

$$|s_n(f, t) - I| \leqq \varepsilon_n.$$

Donc $s_n(f, t)$ tend vers I, quand n croit. C'est donc dans le seul cas où t appartient à une infinité d'ensembles E_n, que $s_n(f, t)$ peut ne pas tendre vers I.

Mais dans ce cas, t appartient quelque soit p, à l'ensemble H_p formé par la réunion de E_p, E_{p+1}, ...

Or, la série ε'_n étant convergente, la mesure de H_p est au plus égale à $\varepsilon'_p + \varepsilon'_{p+1} + \dots$ et tend vers zéro, quand p croit indéfiniment.

Donc l'ensemble E des points t où $s_n(f, t)$ ne tend pas vers I quand n croît est contenu dans un ensemble H_p, dont la mesure est aussi petite que l'on veut. Donc E est de mesure nulle. Nous aboutissons donc au théorème suivant qui contient plusieurs des résultats de M. Hahn [Sitz. Ber. der Wiener Ak. der Wiss., Math. Nat. Klasse, Bd. 123, II^a, 1, 1914):

Étant donnée une fonction sommable $f(x)$ nulle hors de l'intervalle a, b, et dont l'intégrale besgienne entre a et b est I, il est possible de déterminer une suite de nombres positifs : $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ tendant vers zéro, tels que, si D_n, ou (x_i^n, ξ_i^n) est une subdivision quelconque de l'axe réel, indéfinie dans les deux sens et de pas inférieur à ω_n, si de plus

$$s_n(f, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\eta_i^n)(y_i^n - y_{i-1}^n),$$

avec $y_i^n = x_i^n + t$, $\eta_i^n = \xi_i^n + t$, la fonction $s_n(f, t)$ de la variable t, tend vers I quand n croît, sauf éventuellement pour certaines valeurs de t formant un ensemble de mesure nulle.

Ce dernier ensemble E dépend du choix de la suite des subdivisions D_n, mais quelque soit le choix fait, pourvu que le pas de D_n soit inférieur à ω_n, la mesure de E est zéro.

Il est peu probable que la suite D_n puisse être fixée indépendante de f (par exemple en posant $x_i^n = \xi_i^n = \dfrac{i}{p_1 \cdots p_n}$, les p_n étant des entiers supérieurs à 1), de manière que, pour toute fonction f sommable, $s_n(f, t)$ tende vers I, sauf pour des valeurs de t formant un ensemble de mesure nulle.

39. Si l'on a une *infinité dénombrable de fonctions sommables* $f_1, \ldots, f_p, \ldots$, f_p *étant nulle hors d'un intervalle* (a_p, b_p) (on pourrait même s'offranchir de cette restriction, pourvu que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_p| dx$ fût fini) *et ayant pour intégrale* I_p *entre* a_p *et* b_p, on détermine pour f_p une suite décroissante et positive $\omega_1^p, \omega_2^p, \ldots, \omega_n^p, \ldots$, analogue à la suite ω_n relative à f. Soit Ω_n le plus petit des nombres $\omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^n$, et D_n *une subdivision quelconque de pas inférieur à* Ω_n. *Alors, quelque soit t, étranger à certain ensemble de mesure nulle, la fonction de t,*

$$s_n^p(f, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_p(\eta_i^n)(y_i^n - y_{i-1}^n)$$

tend, quand n croît, vers I_p, *pour chaque valeur de l'entier p, indépendant de n et de t.*

Application aux séries trigonométriques.

40. Soit une série trigonométrique *partout convergente*

$$f(\theta) = a_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$$

avec $A_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$.

Supposons que la fonction $f(\theta)$ soit *sommable*.

M. DE LA VALLÉE POUSSIN a montré que dans ce cas on a:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta,$$

l'intégrale étant prise au sens de M. LEBESGUE [7]).

Nous allons appliquer à la fonction $f(\theta)$ la méthode d'intégration (B_1).

Appelons $f_1(\theta)$ la fonction égale à f si $0 \leqq \theta < 2\pi$, et nulle pour $\theta < 0$ et $\theta \geqq 2\pi$.

Nous avons

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,d\theta.$$

Quelle que soit la subdivision x_i de pas inférieur à ω, il résulte du théorème de

7) M. DENJOY, vient de déterminer une nouvelle méthode d'intégration permettant de calculer les coëfficients de la série trigonométrique convergente la plus générale dont la somme est connue. (Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Mars, Avril, Mai 1921).

M. DE LA VALLÉE POUSSIN et de la propriété fondamentale de l'intégrale (B_1) que, sous les conditions et notations :

$$0 < x_i - x_{i-1} < \omega, \qquad \lim_{i=\infty} x_i = \infty, \qquad \lim_{i=-\infty} x_i = -\infty,$$

$$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i, \qquad y_i = x_i + t, \qquad \eta_i = \xi_i + t, \qquad 0 \leqq \eta_i < 2\pi,$$

$$s(f_1, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_1(\eta_i)(y_i - y_{i-1}),$$

et quels que soient les nombres α, β, ε fixes, le dernier aussi petit qu'on le veut, l'ensemble des valeurs de t vérifiant $\alpha < t < \beta$ et $|s(f_1, t) - 2\pi a_0| > \varepsilon$, a pour mesure un nombre tendant vers zéro avec ω.

41. Appliquons ce résultat à la subdivision $x_i = \xi_i = \frac{2\pi}{n} i$, de pas égal à $\frac{2\pi}{n}$. On a alors

$$s(f_1, t) = \frac{2\pi}{n} \sum_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(\frac{2i\pi}{n} + t\right),$$

$s(f_1, t)$ est évidemment périodique en t et de période $\frac{2\pi}{n}$.

Mais comme la fonction f a la période 2π, on a quelque soit t :

$$s(f_1, t) = \frac{2\pi}{n} \sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{2i\pi}{n} + t\right)$$
$$= \frac{2\pi}{n}\left[f(t) + f\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + f\left(t + \frac{n-1}{n} 2\pi\right)\right].$$

42. Donc, *la mesure de l'ensemble E défini par* $\alpha < t < \beta$,

$$\left|a_0 - \frac{1}{n}\left[f(t) + f\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + f\left(t + \frac{n-1}{n} 2\pi\right)\right]\right| > \varepsilon$$

tend vers zéro, quand n *croît, quelques soient* α, β, ε *indépendants de* n.

Nous remarquons que, si la fonction f_1 est intégrable au sens de RIEMANN, ou intégrable (R) il est possible de trouver un nombre N dépendant de ε, mais non de t, et tel que l'on a pour $n > N$, quelque soit t,

$$-\varepsilon < a_0 - \frac{1}{n}\left[f(t) + f\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + f\left(t + \frac{n-1}{n} 2\pi\right)\right] < \varepsilon.$$

En effet, le membre intermédiaire étant périodique en t et de période $\frac{2\pi}{n}$, on peut supposer $0 \leqq t < \frac{2\pi}{n}$.

Or, d'après la condition d'intégrabilité (R), quelques soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ satisfaisant aux conditions $0 \leqq t_r < \frac{2\pi}{n}$, la somme

$$\frac{2\pi}{n}\left[f(t_1) + f\left(t_2 + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + f\left(t_n + \frac{n-1}{n}2\pi\right)\right]$$

tend vers

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = 2\pi a_0.$$

Donc, si f est intégrable (R), l'ensemble E cesse d'exister à partir d'une valeur N de n.

Si f est seulement intégrable (L), la mesure de E tend vers zéro, quand n croît.

43. On peut encore présenter autrement ce résultat, en utilisant le développement de $f(\theta)$.

En effet,

$$f(t) + f\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + f\left(t + \frac{n-1}{n}2\pi\right)$$
$$= n a_0 + n A_n + n A_{2n} + \cdots + n A_{qn} + \cdots.$$

D'où

$$\frac{1}{n}\left[f(t) + f\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + f\left(t + \frac{n-1}{n}2\pi\right)\right] - a_0$$
$$= A_n + A_{2n} + \cdots + A_{qn} + \cdots.$$

Donc, quelques soient ε_1 et ε_2 positifs donnés d'avance, (nous faisons $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$), il est possible de trouver un nombre $N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ tel que pour $n > N$, l'ensemble des valeurs de t, pour lesquelles $0 \leqq t < 2\pi$ et

$$|A_n + A_{2n} + \cdots + A_{qn} + \cdots| > \varepsilon_1,$$

a une mesure inférieure à ε_2.

L'intégrabilité (B_1) plus générale que la sommabilité.

44. Nous avons montré que la définition (B_1) de l'intégrale est au moins aussi générale que celle de M. Lebesgue; nous allons prouver qu'elle permet d'intégrer certaines fonctions non-sommables, (et non-totalisables).

Si f est une fonction impaire, intégrable (B_1), on aura

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0,$$

d'après la formule du changement de la variable d'intégration x en $-x$ (n° 16) et la convention du n° 14.

En effet

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = -\int_{+a}^{-a} f(-x)\,dx = \int_{-a}^{+a} f(-x)\,dx = -\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

(n° 16) (n° 14)

Donc, si une fonction impaire est intégrable (B_1), son intégrale (B_1) entre deux limites opposées ne peut être que zéro.

Nous allons montrer, qu'il existe des fonctions impaires, intégrables (B_1) et non sommables.

45. Soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle $(-a, a)$ $(a > 0)$, et

1° *impaire* [en particulier $f(0) = 0$]

2° *décroissante dans chacun des intervalles* $(-a, 0)$ et $(0, a)$,

3° *telle que* $xf(x) = \varphi(x)$, *fonction positive et paire, soit bornée dans l'intervalle* $(-a, a)$, *nulle et continue pour* $x = 0$.

La fonction $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann dans tout segment ne contenant pas l'origine. Supposons-la non-sommable (alors ni $\int_{-a}^{-\varepsilon} f(x)\,dx$, ni $\int_{\varepsilon}^{a} f(x)\,dx$ ne tendent vers des limites, quand ε positif tend vers 0).

Nous allons montrer que f est intégrable (B_1) dans l'intervalle $(-a, a)$. Son intégrale (B_1) est alors nécessairement zéro, comme nous venons de le montrer.

46. Il n'est pas moins général de supposer que la fonction f est égale à 0 pour $x = a$ et pour $x = -a$.

En effet, si une fonction ψ est sommable, f et $f + \psi$ sont ou non en même temps intégrables (B_1), (n° 37).

Si $\int_{-a}^{+a} \psi(x)\,dx = 0$ les intégrales (B_1) des deux fonctions f et $f + \psi$ entre $-a$ et $+a$ sont égales.

Posons $\psi = -f(-a)$ pour $x < 0$, et $\psi = -f(a)$ pour $x > 0$, $\psi(0) = 0$. $f + \psi$ devient une nouvelle fonction f_1 remplissant toutes les conditions imposées à f. De plus $f_1(a) = 0$, $f_1(-a) = 0$.

Enfin f et f_1 sont en même temps intégrable (B_1) ou non, et dans le premier cas leurs intégrales (B_1) sont égales.

Supposons donc désormais $f(x) = 0$ pour $x \leqq -a$ et $x \geqq a$.

47. Soit (x_i, ξ_i) une subdivision indéfinie dans les deux sens et ω un nombre au moins égal au pas supposé fini des x_i.

A étant un nombre positif, très grand, nous formons les intervalles suivants :

1° autour de chaque point x_i un intervalle (x'_i, x''_i), ayant pour milieu x_i et dont la demi-longueur est le plus grand des deux nombres $\frac{x_i - x_{i-1}}{A}$ et $\frac{x_{i+1} - x_i}{A}$,

2° autour de chaque point ξ_i un intervalle (ξ'_i, ξ''_i) ayant pour milieu ξ_i et dont la demi-longueur vaut $\frac{x_i - x_{i-1}}{A}$.

Il est à remarquer qu'il peut se faire que $x''_i < x''_{i-1}$ et, de même, que $x'_i < x'_{i-1}$ (bien entendu ces deux inégalités ne peuvent pas être vérifiées en même temps). Si $x''_i < x''_{i-1}$ on a nécessairement $x_{i-1} - x_{i-2} > (x_i - x_{i-1})(1 + A)$. Si $x'_i < x'_{i-1}$ on a nécessairement $(x_i - x_{i-1})(1 + A) < x_{i+1} - x_i$.

Mais on a toujours:

$$\xi''_i \leqq x''_i \quad \text{et} \quad \xi'_i \geqq x'_{i-1}.$$

Posons

$$y_i = x_i + t, \qquad \eta_i = \xi_i + t,$$

$$y'_i = x'_i + t, \qquad \eta'_i = \xi'_i + t,$$

$$y''_i = x''_i + t, \qquad \eta''_i = \xi''_i + t$$

t doit rester compris entre α et β.

Nous excluons de l'intervalle $\alpha\beta$ les valeurs de t, pour lesquelles le point o *est dans l'un au moins des intervalles (y'_i, y''_i) ou (η'_i, η''_i)*, c'est à dire les valeurs de t pour lesquelles existe au moins une valeur de i vérifiant, soit

$$y'_i < 0 < y''_i, \qquad \text{donc} \qquad -x''_i < t < -x'_i,$$

soit

$$\eta'_i < 0 < \eta''_i, \qquad \text{donc} \qquad -\xi''_i < t < -\xi'_i.$$

48. Quelle est la *longueur totale* des intervalles formés par les valeurs exclues de t, et que nous appellerons intervalles t exclus? Ces intervalles sont:

1° les parties communes à l'intervalle $\alpha\beta$ et aux intervalles $(-x''_i, -x'_i)$,

2° les parties communes à l'intervalle $\alpha\beta$ et aux intervalles $(-\xi''_i, -\xi'_i)$.

Considérons d'abord les premières.

Pourqu'un intervalle $(-x''_i, -x'_i)$ ait une partie commune avec $\alpha\beta$, ou bien qu'un intervalle (x'_i, x''_i) ait une partie commune avec l'intervalle $(-\beta, -\alpha)$ il faut que l'on ait à la fois $x''_i > -\beta$ et $x'_i < -\alpha$.

Soient r et s respectivement le plus petit et le plus grand indices des intervalles (x'_i, x''_i) empiétant sur $(-\beta, -\alpha)$.

On a: $-\beta < x''_r$ et $x''_{r-p} \leqq -\beta$ quelque soit l'entier p positif, et de même $x'_s < -\alpha$ et $x'_{s+p} \geqq -\alpha$.

Il n'est pas nécessaire que tous les intervalles (x'_i, x''_i) d'indice i tel que $r < i < s$ empiètent sur $(-\beta, -\alpha)$.

Mais il est sûr que la contribution des intervalles (x'_i, x''_i) dans la longueur totale des intervalles-t exclus de α, β est inférieure ou au plus égale à la longueur totale des intervalles d'indice i tel que $r < i < s$, augmentée de partie de $(-\beta, x''_r)$ et $(x'_s, -\alpha)$, ces dernières longueurs étant d'ailleurs chacune inférieure à $\frac{2\omega}{A}$.

Pour calculer la contribution des intervalles pour lesquels $r < i < s$, nous écrivons:

$$x''_i - x'_i \leqq 2\frac{x_i - x_{i-1}}{A} + 2\frac{x_{i+1} - x_i}{A}.$$

Donc:

$$\sum_{r+1}^{s-1}(x''_i - x'_i) < 2\frac{x_{s-1} - x_r}{A} + 2\frac{x_s - x_{r+1}}{A} < 4\frac{x_s - x_r}{A} < 4\frac{\beta - \alpha + \frac{2\omega}{A}}{A}.$$

Donc les intervalles (x'_i, x''_i) donnent dans la longueur totale des intervalles-t exclus de α, β une contribution inférieure à

$$4\frac{\beta - \alpha + \frac{2\omega}{A}}{A} + \frac{4\omega}{A}.$$

Considérons les intervalles-t exclus provenant des $\xi'_i \xi''_i$.

Puisqu'on a $x''_{r-1} \leqq -\beta$, et que $\xi''_{r-1} \leqq x''_{r-1}$, on a $\xi''_{r-1} \leqq -\beta$.

D'autre part, puisque $x'_{s+1} \geqq -\alpha$ et que $\xi'_{s+2} \geqq x'_{s+1}$, on a $\xi'_{s+2} \geqq -\alpha$. Les intervalles $(\xi'_{r-1}, \xi''_{r-1})$ et $(\xi'_{s+2}, \xi''_{s+2})$ sont donc extérieurs à $(-\beta, -\alpha)$.

Donc les intervalles (ξ'_i, ξ''_i) donnent dans la longueur totale des intervalles-t exclus de α, β une contribution inférieure à

$$\sum_{r}^{s+1}(\xi''_i - \xi'_i) < 2\sum_{r}^{s+1}\frac{x_i - x_{i-1}}{A} = 2\frac{x_{s+1} - x_{r-1}}{A}$$

$$= 2\frac{x_{s+1} - x_s}{A} + 2\frac{x_r - x_{r-1}}{A} + 2\frac{x_s - x_r}{A} < \frac{4\omega}{A} + 2\frac{\beta - \alpha + \frac{2\omega}{A}}{A}.$$

La longueur totale des intervalles-t exclus est donc inférieure à

$$6\frac{\beta - \alpha + \frac{2\omega}{A}}{A} + 8\frac{\omega}{A} = \frac{\beta - \alpha}{A}\left[6 + \frac{12\omega}{A(\beta - \alpha)} + \frac{8\omega}{\beta - \alpha}\right].$$

Si nous supposons donc $\omega < \frac{\beta - \alpha}{8}$ et $A > 2$, la longueur totale des intervalles-t exclus est inférieure à $8\frac{\beta - \alpha}{A}$. Nous désignerons par K l'ensemble de ces valeurs de t exclues.

49. Supposant que t a une valeur non-exclue, donc étrangère à K nous allons considérer diverses espèces de termes de

$$s(f,\, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}).$$

1° Le point zéro ne coïncide avec aucun point y_i; donc il y a un entier p défini par les conditions $y_{p-1} < 0 < y_p$.

Considérons le terme d'indice p:

$$f(\eta_p)(y_p - y_{p-1}).$$

On a:

$$f(\eta_p)(y_p - y_{p-1}) = \frac{\varphi(\eta_p)}{\eta_p}(y_p - y_{p-1}).$$

Le point zéro ne tombe pas dans l'intervalle $(\eta'_p,\, \eta''_p)$, sinon la présente valeur de t aurait été exclue, donc:

$$|\eta_p| > \frac{\eta''_p - \eta'_p}{2} = \frac{y_p - y_{p-1}}{A}.$$

Or, par hypothèse $\varphi(x)$ tend vers zéro quand x tend vers zéro.

Soit $\theta(\omega)$ le maximun de $\varphi(x)$, quand x satisfait à la condition $|x| < \omega$; [$\theta(\omega)$ tend vers zéro, avec ω].

On a:

$$(1) \qquad f(\eta_p)(y_p - y_{p-1}) = \delta'_0 A\,\theta(\omega) \qquad \text{avec} \qquad \delta'^2_0 < 1.$$

Par conséquent, A étant indépendant de ω, le terme d'indice p tend vers o avec ω.

2° Quelque soit i différent de p, puisque la fonction f est décroissante autour de tout point distinct de l'origine et que zéro est extérieur au segment $(y_{i-1},\, y_i)$ on a:

$$f(y_i)(y_i - y_{i-1}) < f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) < f(y_{i-1})(y_i - y_{i-1}).$$

De même:

$$f(y_i)(y_i - y_{i-1}) < \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x)\,dx < f(y_{i-1})(y_i - y_{i-1}).$$

Donc:

$$f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) - \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x)\,dx = \delta_i[f(y_{i-1}) - f(y_i)](y_i - y_{i-1}) \qquad \text{avec} \qquad \delta_i^2 < 1.$$

i peut avoir toutes les valeurs entières exceptée p.

On a donc:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{-\infty}^{p-1} f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) - \int_{-a}^{y_{p-1}} f(x)\,dx \\ &= \delta' \sum_{-\infty}^{p-1} [f(y_{i-1}) - f(y_i)](y_i - y_{i-1}) \qquad \text{avec} \qquad \delta'^2 < 1. \end{aligned} \right.$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{p+1}^{\infty} f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) - \int_{y_p}^{a} f(x)\,dx \\ &= \delta'' \sum_{p+1}^{\infty} [f(y_{i-1}) - f(y_i)](y_i - y_{i-1}), \qquad \text{avec} \qquad \delta''^2 < 1. \end{aligned}\right.$$

En ajoutant les relations (1), (2), et (3), nous obtenons:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{-\infty}^{\infty} f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) - \int_{-a}^{y_{p-1}} f(x)\,dx - \int_{y_p}^{a} f(x)\,dx \\ &= \delta'_0 A\,\theta(\omega) + \delta \sum{}' [f(y_{i-1}) - f(y_i)](y_i - y_{i-1}). \end{aligned}\right.$$

avec $\delta^2 < 1$, et en désignant par $\sum'$ une somme où manque uniquement le terme correspondant à $i = p$.

50. Considérons d'abord les deux intégrales figurant dans la relation (4).

Changeons dans la première la variable x en $-x$; $f(x)$ étant une fonction impaire, il vient:

$$-\int_{-a}^{y_{p-1}} f(x)\,dx - \int_{y_p}^{a} f(x)\,dx = \int_{-y_{p-1}}^{y_p} f(x)\,dx.$$

Les deux limites positives $-y_{p-1}$ et y_p de l'intégrale étant l'une et l'autre inférieures à ω, on a $\varphi(x) < \theta(\omega)$ dans tout l'intervalle $(-y_{p-1}, y_p)$, on peut donc écrire:

$$\left|\int_{-y_{p-1}}^{y_p} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-y_{p-1}}^{y_p} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right| < \theta(\omega)\left|\int_{-y_{p-1}}^{y_p} \frac{dx}{x}\right| = \theta(\omega)\left|\lg \frac{y_p}{-y_{p-1}}\right|.$$

Posons:

$$\frac{y_p}{-y_{p-1}} = \mu.$$

Nous avons:

$$\frac{\mu}{1+\mu} = \frac{y_p}{y_p - y_{p-1}} > \frac{1}{A},$$

sinon le point zéro dont la distance à y_p est évidemment y_p serait dans l'intervalle (y'_p, y''_p).

De même,

$$\mu + 1 = \frac{y_p - y_{p-1}}{-y_{p-1}} < A,$$

sinon le point zéro serait dans l'intervalle (y'_{p-1}, y''_{p-1}).

D'où:

$$\mu < A - 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\mu} < A - 1.$$

Donc,

$$\left|\lg \frac{y_p}{-y_{p-1}}\right| < \lg (A-1),$$

et

$$\int_{-y_{p-1}}^{y_p} f(x)\,dx = \delta' \theta(\omega) \lg (A-1) \qquad \text{avec} \qquad \delta'^2 < 1.$$

51. *En résumé*:

$$s(f, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) = \delta' \theta(\omega) \lg (A-1) + \delta'_0 A \theta(\omega)$$

$$+ \delta \sum{}' [f(y_{i-1}) - f(y_i)](y_i = y_{i-1}),$$

ou enfin, en remarquant que $\log (A-1) < A$ et en posant:

$$U(t) = \sum{}' [fy_{i-1}) - f(y_i)](y_i - y_{i-1}), \qquad (i \neq p), \qquad |s(f, t)| < 2A\theta(\omega) + U(t).$$

On suppose t situé hors de l'ensemble K exclu, de mesure inférieure à $8\frac{\beta - \alpha}{A}$.

52. Étudions maintenant la somme $U(t)$.

Posons

$$u_i(t) = [f(y_{i-1}) - f(v_i)](y_i - y_{i-1}),$$

on a:

$$U(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' u_i(t).$$

Formons:

$$J = \int_E U(t)\,dt,$$

E étant le complémentaire de K par rapport à $\alpha\beta$, donc l'intervalle α, β diminué des intervalles $-x''_j < t < -x'_j$, $-\xi''_j < t < -\xi'_j$. Cherchons la contribution du terme $u_i(t)$ dans cette intégrale J.

Cette contribution est l'intégrale $J_i = \int_{E_i} u_i(t)\,dt$, le long d'un champ E_i constitué par E, d'où l'on retranche les valeurs de t pour lesquelles $u_i(t)$ ne figure pas dans $U(t)$, c'est à dire pour lesquelles

$$y_{i-1} < 0 < y_i, \qquad \text{ou} \qquad -x_i < t < -x_{i-1}.$$

On a

$$J = \sum_{-\infty}^{\infty} J_i.$$

53. Comme $u_i(t)$ est positif, quand zéro n'est pas compris entre y_{i-1} et y_i, et a

fortiori, quand t est extérieur à l'intervalle $(-x''_i, -x'_{i-1})$, on a :

$$J'_i < \int_{-\infty}^{-x''_i} u_i(t)\,dt + \int_{-x'_{i-1}}^{\infty} u_i(t)\,dt.$$

Or,

$$u_i(t) = (x_i - x_{i-1})[f(y_{i-1}) - f(y_i)];$$

avec

$$y_i = x_i + t, \qquad y_{i-1} = x_{i-1} + t.$$

Un calcul très simple, fondé sur des changements de variables évidents et sur l'identité $f(-u) = -f(u)$, nous donne :

$$J'_i < (x_i - x_{i-1})\int_{x''_i - x_i}^{x''_i - x_{i-1}} f(u)\,du + (x_i - x_{i-1})\int_{x_{i-1} - x'_{i-1}}^{x_i - x'_{i-1}} f(u)\,du.$$

Ces deux dernières intégrales sont positives, d'après $0 < x''_i - x_i < x''_i - x_{i-1}$ et $0 < x_{i-1} - x'_{i-1} < x_i - x'_{i-1}$.

54. Pour limiter supérieurement ces deux intégrales, nous utilisons la remarque suivante :

$\psi(x)$ *étant une fonction définie pour* $0 < x < a$, *nulle et continue à l'origine, sommable dans tout intervalle* (α, a), *si* α *est positif, l' intégrable* $\int_\gamma^\delta \psi(x)\frac{dx}{x}$ *tend vers zéro avec* ω, *si l'on suppose* $\gamma < \delta < \gamma(1 + A)$ *et* $0 < \delta - \gamma < \omega$, A *étant un nombre indépendant de* ω *et de* γ.

En effet, d'après $\lim\limits_{x=0} \psi(x) = 0$ $(x > 0)$, quelque soit ε positif donné d'avance, nous pouvons trouver un nombre positif η dépendant de ε et de A $[\eta = \eta(\varepsilon, A)]$ tel que, si $0 < x < \eta(\varepsilon, A)$, on a

$$|\psi(x)| < \frac{\varepsilon}{\lg(1 + A)}.$$

Alors,

1° Si $\delta < \eta(\varepsilon, A)$, on a :

$$\int_\gamma^\delta \psi(x)\frac{dx}{x} < \frac{\varepsilon}{\lg(1 + A)}\lg\frac{\delta}{\gamma} < \varepsilon.$$

2° Si $\delta > \eta(\varepsilon, A)$, d'où $\gamma > \frac{\eta}{1 + A}$ la fonction $\int_u^a \psi(x)\frac{dx}{x} = g(u)$ étant continue par rapport à u sur le segment de $\eta(\varepsilon, A)$ à a, il est possible, puisque la continuité sur un segment est uniforme, de définir un nombre Ω, dépendant uniquement de ε et de $\frac{\eta}{1 + A}$ (donc de ε et de A) et tel que, sous les conditions $\frac{\eta}{1 + A} < \gamma < \delta$ et $0 < \delta - \gamma < \Omega$, on ait :

$$|g(\delta) - g(\gamma)| < \varepsilon.$$

Or,

$$g(\delta) - g(\gamma) = \int_\gamma^\delta \psi(x) \frac{dx}{x}.$$

Ceci montre que les conditions $\gamma < \delta < \gamma(1 + A)$, $0 < \delta - \gamma < \Omega(\varepsilon, A)$ entraînent

$$\left| \int_\gamma^\delta \psi(x) \frac{dx}{x} \right| < \varepsilon.$$

55. Je dis que, en vertu de cette propriété, il existe un nombre $\Omega_1(\varepsilon, A)$ tel que si $\omega < \Omega_1$, toute intégrale

$$\int_{x_i''-x_i}^{x_i''-x_{i-1}} f(u)\,du \quad \text{et} \quad \int_{x_{i-1}-x_{i-1}'}^{x_i-x_{i-1}'} f(u)\,du$$

est inférieure à ε.

En effet, si nous posons dans le premier cas $\gamma = x_i'' - x_i$, $\delta = x_i'' - x_{i-1}$, et dans le second cas $\gamma = x_{i-1} - x_{i-1}'$, $\delta = x_i - x_{i-1}'$, nous avons dans les deux cas $0 < \gamma < \delta$, $\delta - \gamma < \omega$ et en outre $\dfrac{\delta}{\gamma} < 1 + A$.

Nous sommes dans les conditions du n° 54, en posant $\psi(u) = uf(u) = \varphi(u)$.

Soit $\Omega_1(\varepsilon, A)$ le nombre désigné ci-dessus par $\Omega(\varepsilon, A)$ et correspondant à l'acception $\varphi(u)$ de la fonction $\psi(u)$. On a donc, quel que soit i, $J_i' < 2\varepsilon(x_i - x_{i-1})$, pour $\omega < \Omega_1$.

D'ailleurs, si le segment (y_{i-1}, y_i) est, quelque soit t compris entre α et β, extérieur au segment $(-a, a)$, on a $u_i(t) = 0$, donc en ce cas

$$J_i = \int_{E_i} u_i(t)\,dt = 0.$$

Donc $\sum_{-\infty}^{\infty} J_i$ se réduit à la somme des J_i correspondant aux indices i telsque, pour au moins une valeur de t comprise entre α et β, on ait à la fois $-a < y_i$ et $y_{i-1} < a$.

Il faut donc, d'après $y_i < \beta + x_i$ et $y_{i-1} > \alpha + x_{i-1}$, que $-a < \beta + x_i$ et $a > \alpha + x_{i-1}$, ou à la fois $x_{i-1} < a - \alpha$ et $x_i > -(a + \beta)$.

La plus grande valeur p des indices i est telle que $x_{p-1} < a - \alpha \leqq x_p$.

Leur plus petite valeur q remplit les conditions $x_q > -(a + \beta) \geqq x_{q-1}$.

En somme, $J_i = 0$ pour $i > p$ et pour $i < q$, et $J_i < 2\varepsilon(x_i - x_{i-1})$, si $p \leqq i \leqq q$, $\omega < \Omega_1$. Donc :

$$J = \sum_{-\infty}^{\infty} J_i < 2\varepsilon(x_p - x_{q-1}).$$

Or d'après $x_p - x_{p-1} < \omega$, $x_q - x_{q-1} < \omega$, on a $x_p - x_{q-1} < 2a + \beta - \alpha + 2\omega < 2(a + \beta - \alpha)$, d'après $\omega < \dfrac{\beta - \alpha}{8}$.

En résumé, si $\omega < \Omega_1(\varepsilon, A)$ on a :

$$J = \int_E U(t)\,dt < 4\varepsilon(a + \beta - \alpha).$$

56. Soit Γ l'ensemble des points de E où $U(t) > \sqrt{\varepsilon}$.
Alors si μ est la mesure de Γ, $U(t)$ n'étant jamais négatif, on a

$$\mu < 4\sqrt{\varepsilon}(a + \beta - \alpha).$$

On a donc, sur l'intervalle $\alpha\beta$, $U(t) \leqq \sqrt{\varepsilon}$ en dehors d'un ensemble H de valeurs de t, réunissant les intervalles K et l'ensemble Γ.

57. La mesure de H est inférieure à $8\dfrac{\beta - \alpha}{A} + 4\sqrt{\varepsilon}(a + \beta - \alpha)$ si $\omega < \Omega_1(\varepsilon, A)$.
D'autre part on a toujours (51) sur E (complémentaire de K par rapport à $\alpha\beta$) :

$$|s(f, t)| < 2A\theta(\omega) + U(t),$$

donc, sur H :

$$|s(f, t)| < 2A\theta(\omega) + \sqrt{\varepsilon}.$$

Cela étant, donnons-nous deux nombres positifs quelconques ε_1 et ε_2. Nous choisirons ω_0, ε et A, fonctions de ε_1 et ε_2, tels que

1° $$2A\theta(\omega_0) + \sqrt{\varepsilon} < \varepsilon_1$$

2° $$8\frac{\beta - \alpha}{A} + 4\sqrt{\varepsilon}(a + \beta - \alpha) < \varepsilon_2.$$

Par exemple, nous prenons $\sqrt{\varepsilon}$ inférieur au plus petit des deux nombres $\dfrac{\varepsilon_1}{2}$ et $\dfrac{\varepsilon_2}{8(a + \beta - \alpha)}$, A supérieur à $\dfrac{16(\beta - \alpha)}{\varepsilon_2}$, puis ω_0 assez petit pour que $\theta(\omega_0) < \dfrac{\varepsilon_1}{4A}$. Alors $\Omega_1(\varepsilon, A)$ se calcule à l'aide de ε_1 et de ε_2 (54), de même que ω_0. Nous désignons par $\omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ le plus petit des nombres $\dfrac{\beta - \alpha}{8}$, ω_0, Ω_1.

Cela posé, l'ensemble des valeurs de t vérifiant $|s(f, t)| > \varepsilon_1$ avec $\alpha < t < \beta$, a une mesure inférieure à ε_2, quand ω est inférieur à $\omega(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Donc la function f est intégrable (B_1) sur l'intervalle $(-a, a)$ et son intégrale (B_1) est o.

Fonctions totalisables, mais non intégrables (B_1).

58. Les conditions que $f(x)$ soit impaire et que $xf(x)$ soit continu et nul à l'origine suffisent-elles pour que $f(x)$ soit intégrable (B_1)?

Nous allons voir qu'il n'en est rien en donnant un exemple d'une fonction satisfaisant aux deux premières conditions, intégrable même au sens habituel entre $-a$ et a, mais non intégrable (B_1). *A fortiori* cette fonction est non sommable sur le même champ.

59. Soit $f_0(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ une fonction remplissant les conditions de l'étude précédente, $\varphi(x)$ définie de $-a$ à $+a$, est paire, continue et nulle à l'origine, $f_0(x)$ est décroissante dans tout intervalle ne contenant pas l'origine, mais n'est pas sommable sur le segment $(-a, a)$. Enfin nous supposons $f_0(x)$ nul hors de l'intervalle $(-a, a)$.

Nous pouvons déterminer de proche en proche une suite de nombres décroissants, positifs, $a = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tels que, si l'on pose:

$$u_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} f_0(x)\,dx, \tag{1}$$

on ait

$$u_n > n(u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1).$$

En effet, soit a_2 quelconque, inférieur à a_1, et

$$\int_{a_2}^{a_1} f_0(x)\,dx = u_1.$$

D'après $f_0(x) > f_0(a)$ pour $0 > x > a$, on a $u_1 > 0$. Puisque

$$\int_{\varepsilon}^{a_2} f_0(x)\,dx$$

croit indéfiniment quand ε tend vers zéro par valeurs positives, (f_0 est non sommable par hypothèse il est possible de choisir a_3 tel que

$$\int_{a_3}^{a_2} f_0(x)\,dx = u_2 > 2u_1.$$

De même, ayant défini $a_2, a_3, \ldots, a_n$, nous pouvons trouver un nombre positif a_{n+1} tel que

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} f_0(x)\,dx = u_n > n(u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1),$$

puisque le premier membre croît indéfiniment quand a_{n+1} tend vers zéro, n étant invariable. Il est aisé de voir que $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ croît indéfiniment avec n.

En effet,

$$u_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} f_0(x)\,dx$$

croît indéfiniment, d'après

$$u_n > n(u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1) > n u_1 \qquad \text{et} \qquad u_1 > 0.$$

Or, d'après $\lim_{x=0} x f_0(x) = 0$, u_n est égal à

$$\varepsilon_n \int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{dx}{x},$$

ε_n étant inférieur au maximum de $\varphi(x) = x f_0(x)$ entre a_{n+1} et a_n.

Donc $u_n = \varepsilon_n \lg \frac{a_n}{a_{n+1}}$, donc $\frac{a_n}{a_{n+1}} = A_n$ avec $A_n = \frac{u_n}{\varepsilon_n}$.

Donc $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ croît indéfiniment avec n.

60. Soit $f(x)$ une fonction impaire, telle que, pour $a_{n+1} \leqq x < a_n$

$$f(x) = f_0(x) \sin(b_n x + \alpha_n);$$

alors, pour $-a_n < x \leqq -a_{n+1}$, on a

$$f(x) = f_0(x) \sin(-b_n x + \alpha_n).$$

Nous prendrons b_n entier et tel que, quand n croît
1° $a_{n+1} b_n$ tend vers zéro, 2° $a_n b_n$ croît indéfiniment.

Plus précisément, nous choisissons b_n égal à la valeur entière à une unité près par excès de $\frac{\sqrt{\varphi(a_{n+1})}}{a_{n+1}}$. b_n croît indéfiniment, d'après

$$\frac{\sqrt{\varphi(a_{n+1})}}{a_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(a_{n+1})}} \cdot f(a_{n+1}),$$

et le rapport de b_n à $\frac{\sqrt{\varphi(a_{n+1})}}{a_{n+1}}$ tend donc vers 1.

Alors la première condition :

$$\lim a_{n+1} b_n = 0$$

est évidemment remplie, puisque $\varphi(x)$ tend vers zéro, quand x tend vers zéro.

Je dis que la seconde condition peut aussi être remplie, en imposant à la suite a_n une nouvelle condition.

En effet, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant supposés choisis, la relation (1) ne limite a_{n+1} que dans le sens de la croissance. Nous pouvons donc prendre a_{n+1} assez petit pour que $a_{n+1} < a_n^2$. Alors on a:

$$a_n b_n \geqq a_n \frac{\sqrt{\varphi(a_{n+1})}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{\sqrt{a_{n+1}}} \cdot \sqrt{\frac{\varphi(a_{n+1})}{a_{n+1}}} > \sqrt{f_0(a_{n+1})},$$

qui croît indéfiniment avec n.

61. Considérons la subdivision

$$x_i = \xi_i = \frac{2i\pi}{b_n},$$

et formons la somme

$$s(f, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) (\eta_i = \xi_i + t,\ y_i = x_i + t).$$

Il est évident que $s(f, t)$ est une fonction périodique de t de période $\frac{2\pi}{b_n}$. L'ensemble $|s(f, t)| > 1$ que nous allons étudier possèdera la même période. La mesure μ_1 de cet ensemble E sur une partie quelconque $\alpha - \frac{\pi}{b_n} \leqq t < \alpha + \frac{\pi}{b_n}$ de l'axe réel sera indépendante de α. μ_1 sera le quotient par b_n de la mesure μ de E dans le champ $0 \leqq t < 2\pi$.

Inversement, si l'on pose $t = \alpha + \frac{\theta}{b_n}$ avec $-\pi \leqq \theta < \pi$, les valeurs de θ forment un ensemble dont la mesure est indépendante de α et vaut $b_n \mu_1$, donc μ.

Ainsi la mesure de l'ensemble $|s(f, t)| > 1$, $0 \leqq t < 2\pi$ est égale à la mesure de l'ensemble des nombres θ, tels que $|s(f, t)| > 1$, $t = \frac{\theta}{b_n}$, $-\pi \leqq \theta < \pi$.

Cherchons la mesure de cet ensemble de valeurs de θ.

62. Les η_i se divisent en trois groupes caractérisés par les conditions respectives suivantes 1° $-a_{n+1} < \eta_i < a_{n+1}$, 2° $a_{n+1} \leqq |\eta_i| < a_n$, 3° $a_n \leqq |\eta_i|$.

Étudions successivement ces trois cas.

1° Cherchons la mesure des valeurs de θ pour lesquelles

$$-a_{n+1} < \eta_i < a_{n+1}.$$

D'après

$$\xi_i = \frac{2i\pi}{b_n}$$

et

$$t = \frac{\theta}{b_n},$$

on a:

$$-a_{n+1} < \frac{2i\pi}{b_n} + \frac{\theta}{b_n} < a_{n+1},$$

ou

$$- a_{n+1} b_n < 2i\pi + \theta < a_{n+1} b_n .$$

Or, quand n croît indéfiniment, $a_{n+1} b_n$ tend vers o, donc à partir de la valeur N de n telle que $a_{N+1} b_N < \pi$, i ne peut avoir que la valeur zéro, puisque θ est compris entre $-\pi$ et π.

Le premier cas est donc réalisé uniquement par η_0 et sous la condition

$$- a_{n+1} b_n < \theta < a_{n+1} b_n .$$

Donc la mesure de l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles un des η_i tombe dans l'intervalle $(-a_{n+1}, a_{n+1})$ est inférieure à $2a_{n+1} b_n$ à partir de la valeur N de n.

2° Considérons les η_i tels que $a_{n+1} \leqq |\eta_i| < a_n$.

D'abord nous formons la somme $\sum f(\eta_i)(y_i - y_{i-1})$ relative aux indices i tels que $a_{n+1} \leqq \eta_i < a_n$. Nous désignons cette somme par $\sum_1$.

Nous trouvons

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_1 f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) &= \frac{2\pi}{b_n} \textstyle\sum_1 f(\eta_i) = \frac{2\pi}{b_n} \textstyle\sum_1 f_0(\eta_i) \sin(b_n \eta_i + \alpha_n) \\ &= \frac{2\pi}{b_n} \sin(\theta + \alpha_n) \textstyle\sum_1 f_0(\eta_i) \end{aligned}$$

d'après

$$\eta_i = \frac{2i\pi}{b_n} + \frac{\theta}{b_n}.$$

Or, si l'entier s est tel que

$$a_{n+1} + \frac{2s\pi}{b_n} < a_n \leqq a_{n+1} + \frac{2\pi(s+1)}{b_n}$$

nous avons d'une part, la fonction $f_0(x)$ étant décroissante pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{b_n}\left[f_0(a_{n+1}) + f_0\left(a_{n+1} + \frac{2\pi}{b_n}\right) + \cdots + f_0\left(a_{n+1} + \frac{2s\pi}{b_n}\right)\right] \\ &> \int_{a_{n+1}}^{a_n} f_0(x)\,dx = u_n > \frac{2\pi}{b_n}\left[f_0\left(a_{n+1} + \frac{2\pi}{b_n}\right) + \cdots + f_0\left(a_{n+1} + \frac{2s\pi}{b_n}\right)\right]; \end{aligned}$$

d'autre part:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{b_n}\left[f_0(a_{n+1}) + f_0\left(a_{n+1} + \frac{2\pi}{b_n}\right) + \cdots + f_0\left(a_{n+1} + \frac{2s\pi}{b_n}\right)\right] &\geqq \frac{2\pi}{b_n} \textstyle\sum_1 f_0(\eta_i) \\ > \frac{2\pi}{b_n}\left[f_0\left(a_{n+1} + \frac{2\pi}{b_n}\right) + \cdots + f_0\left(a_{n+1} + \frac{2s\pi}{b_n}\right)\right] \end{aligned}$$

puisque dans chacun des intervalles (accrus de leur extrémité gauche) séparés par les points

$$a_{n+1}, \qquad a_{n+1} + \frac{2\pi}{b_n}, \ldots, a_{n+1} + \frac{2s\pi}{b_n}, \qquad a_{n+1} + \frac{2\pi(s+1)}{b_n}$$

existe un point η_i et un seul.

Donc

$$\frac{2\pi}{b_n}\sum\nolimits_1 f_0(\eta_i) = u_n + \delta_1 \frac{2\pi}{b_n} f_0(a_{n+1}) \qquad \text{avec} \qquad \delta_1^2 < 1,$$

$$= u_n + \delta_1 \rho(n), \qquad \text{en posant} \qquad \rho(n) = \frac{2\pi}{b_n} f_0(a_{n+1}).$$

Or, b_n étant la valeur entière par excès de $\frac{\sqrt{\varphi(a_{n+1})}}{a_{n+1}}$, nous avons

$$\frac{\rho_n}{2\pi} = \frac{\varphi(a_{n+1})}{b_n a_{n+1}} < \sqrt{\varphi(a_{n+1})}.$$

Donc $\rho(n)$ tend vers zéro, quand n croît.

D'après $f(\eta_i) = \sin(\theta + \alpha_n) f_0(\eta_i)$, nous avons:

(1) $$\sum\nolimits_1 f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) = [u_n + \delta_1 \rho(n)] \sin(\theta + \alpha_n).$$

Les termes pour lesquels $-a_n < \eta_i < -a_{n+1}$ donnent pareillement la somme:

(2) $$\sum\nolimits_2 f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) = -[u_n + \delta_2 \rho(n)] \sin(-\theta + \alpha_n) \qquad \text{avec} \qquad \delta_2^2 < 1.$$

Donc:

$$\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 = 2u_n \sin\theta \cos\alpha_n + 2\delta\rho(n) \qquad \text{avec} \qquad \delta^2 < 1.$$

Nous ferons désormais $\alpha_n = 0$.

3° Considérons les valeurs de i telles que $|\eta_i| > a_n$.

Les termes pour lesquels $\eta_i > a_n$ donnent une contribution $\sum_3 f(\eta_i)(y_i - y_{i-1})$ qui est en valeur absolue inférieure à $\sum_3 f_0(\eta_i)(y_i - y_{i-1})$; mais la somme $\sum_3 f_0(\eta_i)(y_i - y_{i-1})$ diminuée de son premier terme est inférieure à

$$\int_{a_n}^{a} f_0(x)\,dx.$$

Donc

$$\left|\sum\nolimits_3 f(\eta_i)(y_i - y_{i-1})\right| < \int_{a_n}^{a} f_0(x)\,dx + f_0(a_n)\frac{2\pi}{b_n}$$

$$= (u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_1) + f_0(a_n)\frac{2\pi}{b_n}.$$

Or,

$$\frac{f_0(a_n)}{b_n} = \frac{\varphi(a_n)}{a_n b_n}$$

tend vers zéro, quand n croît, donc :

$$\left|\sum_3 f(\eta_i)(y_i - y_{i-1})\right| < \frac{u_n}{n} + \varepsilon_n \quad (\lim \varepsilon_n = 0).$$

Les termes pour lesquels $\eta_i < -a_n$ ont une somme $\sum_4$ vérifiant aussi l'inégalité précédente.

63. On a en résumé, si $a_{n+1} b_n < |\theta| < \pi$.

$$s(f, t) = 2u_n \sin\theta + \frac{2\delta u_n}{n} + \varepsilon'_n,$$

avec $\lim \varepsilon'_n = 0$ et $\delta^2 < 1$.

Soit α un nombre positif très petit et fixe. A partir d'une certaine valeur N_1 de n, on a d'une part $a_{n+1} b_n < \alpha$, d'autre part

$$u_n > \frac{2}{\sin\alpha}, \qquad n > \frac{2}{\sin\alpha}, \qquad |\varepsilon'_n| < 1.$$

Soit θ un nombre quelconque vérifiant les conditions :

$$\alpha \leqq |\theta| \leqq \pi.$$

Alors si $t = \dfrac{2i\pi + \theta}{n}$ on a :

$$|s(f, t)| > 2u_n\left(\sin\alpha - \frac{1}{n}\right) - 1 > 1.$$

Donc la mesure de l'ensemble $0 \leqq t < 2\pi$, $|s(f, t)| > 1$, relatif à la subdivision $x_i = \xi_i = \dfrac{2i\pi}{b_n}$, tend vers 2π quand n croît.

Donc f n'est pas intégrable (B_1).

64. Nous allons montrer que, moyennant une condition supplémentaire imposée aux a_n, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ a un sens, selon les conventions habituelles (f est dans ce cas *totatisable*).

La fonction f étant impaire, il nous suffit de montrer que $I = \int_0^a f(x)\,dx$ a un sens.

Posons

$$I_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x)\,dx.$$

Pour que I existe, il faut et il suffit

1° que la série I_n soit convergente,

2° que le maximum ω_n de $\left|\int_{a_{n+1}}^{x} f(x)\,dx\right|$ pour $a_{n+1} \leqq x < a_n$ tende vers zéro, quand n croît.

On a:

$$\int_{a_{n+1}}^{x} f(x)\,dx = \int_{a_{n+1}}^{x} \frac{\varphi(x)}{x} \sin b_n x\,dx = \int_{a_{n+1}b_n}^{b_n x} \frac{\varphi\left(\frac{u}{b_n}\right)}{u} \sin u\,du.$$

Puisque $\frac{\varphi(x)}{x}$ n'est jamais croissant, on sait que cette intégrale est en valeur absolue inférieure, quelque soit $x > a_{n+1}$, à

$$\frac{\varphi(a_{n+1})}{a_{n+1}b_n} \cdot \int_0^{\pi} \sin u\,du < 2\sqrt{\varphi(a_{n+1})}.$$

Donc ω_n tend vers zéro.

Pour que la série I_n soit convergente, il suffit de choisir les a_n assez rapidement décroissants pour que la série $\sqrt{\varphi(a_{n+1})}$ soit convergente.

Cela est possible puisque $\varphi(x)$ tend vers zéro avec x.

Aux conditions imposées à a_{n+1}, supposant connus $a_1, a_2, \ldots, a_n$, savoir

$$u_n > n(u_{n-1} + \cdots + u_1), \qquad a_{n+1} < a_n^2,$$

nous ajoutons celle-ci:

$$\varphi(a_{n+1}) < \frac{1}{4^n},$$

alors $|I_n| < 4 \cdot \frac{1}{2^n}$.

La série est donc convergente, $f(x)$ est totalisable.

Et la fonction $f(x)$ n'est pas intégrable (B_1) sur l'intervalle $(-a, +a)$ bienqu'elle soit d'une part intégrable au sens habituel (et par suite) totalisable dans ce champ, d'autre part impaire avec une valeur absolue constamment inférieure à celle d'une fonction impaire intégrable (B_1).

Ceci montre que les mesures $\mu(\alpha)$, $\mu'(\alpha)$ des ensembles $f > \alpha^2$, $f < -\alpha^2$ ne sont pas seules à intervenir dans la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit intégrable (B_1).

La répartition de ces ensembles joue un rôle essentiel dans cette condition inconnue.

65. On prouve aisément que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin b_n x\,dx$ croît indéfiniment avec n. Donc $f(x)$ n'est pas développable en série trigonométrique dans le champ $-\pi < x < \pi$.

Il serait intéressant de chercher si la somme de toute série trigonométrique convergente est ou non intégrable (B_1), tout au moins quand on emploie exclusivement des subdivisions périodiques (x_i, ξ_i) admettant pour période une partie aliquote de 2π.

Généralisation de l'intégration (B_1).

66. Jusqu'ici nous avons supposé que la subdivision mobile (y_i, η_i) varie linéairement avec le paramètre t.

Posons maintenant :

$$y_i = \lambda(x_i, t), \qquad \eta_i = \lambda(\xi_i, t), \qquad \text{où} \qquad \lambda(x, t)$$

est une fonction continue par rapport à l'ensemble des deux variables x et t, croissante en x et t séparément, et dont les deux dérivées par rapport à x, et t sont

1° continues,

2° toujours positives $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \text{ exclus}\right)$.

Nous allons montrer que, *si f est sommable entre a et b, nulle hors de ab et si son intégrale besgienne entre a et b est égale à I, alors quand on pose :*

$$S(f, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}),$$

l'ensemble $\alpha < t < \beta$, $|S(f, t) - I| < \varepsilon$, a une mesure tendant vers zéro avec ω, sous les seules conditions $0 < x_i - x_{i-1} < \omega$, $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$, $\lim\limits_{i=+\infty} x_i = +\infty$, $\lim\limits_{i=-\infty} x_i = -\infty$ (ω indépendant de i, x_i, ξ_i indépendants de t).

67. Nous nous bornerons à démontrer la formule :

$$\int_\alpha^\beta \sum f(\eta_i)(y_i - y_{i-1})dt = (\beta - \alpha)\int_a^b f(x)dx + \delta\rho(\omega), \qquad (\delta^2 < 1),$$

$\rho(\omega)$ étant une certaine fonction tendant vers zéro avec ω, indépendante du choix des x_i et ξ_i, calculable connaissant seulement les fonctions $f(x)$ et $\lambda(x, t)$.

Ayant établi ce lemme on achèverait la démonstration comme aux paragraphes 26-28 par exemple.

68. $f(x)$ étant définie sur l'intervalle $a\,b$ et égale à 0 hors de $a\,b$ il est inutile de s'occuper des termes pour lesquels η_i est toujours supérieur à b, ou toujours inférieur à a.

Les inégalités $\lambda(\xi_i, \alpha) > b$ et $\lambda(\xi_i, \beta) > a$ déterminent les valeurs exclues de i.

Soient a_1 et b_1 les valeurs de x déterminées par les relations $\lambda(a_1, \beta) = a$, $\lambda(b_1, \alpha) = b$.

Nous supposons $a_1 \leqq x_i$ et $x_{i-1} \leqq b_1$.

Nous désignerons respectivement par p et q la plus petite et la plus grande valeur de i satisfaisant à ces conditions. On a :

$$x_{p-1} < a_1 \leqq x_p \qquad \text{et} \qquad x_{q-1} \leqq b_1 < x_q.$$

Observons que $a_1 < x_{p-1} + \omega$, $b_1 > x_q - \omega$.

Si $i<p$, $\eta_i = \lambda(\xi_i, t) \leqq \lambda(x_i, \beta) < \lambda(a_1, \beta) < a$, et de même si $i>q$, $\eta_i > b$. Donc,

$$S(f, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) = \sum_{p}^{q} f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}).$$

69. Or :

$$f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) = f(\eta_i)[\lambda(x_i, t) - \lambda(x_{i-1}, t)] = f(\eta_i)\frac{\partial \lambda(\xi'_i, t)}{\partial \xi'_i}(x_i - x_{i-1})$$

en appliquant la formule des accroissements finis à la fonction λ, ξ'_i étant un nombre compris entre x_{i-1} et x_i.

Dans le champ

$$a_1 - \omega \leqq x \leqq b_1 + \omega, \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta, \qquad \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t}$$

sont par hypothèse continus et positifs. Ils restent donc compris entre deux nombres positifs A et B $(A < B)$ indépendants de x et de t.

Désignons par Δx, Δt deux accroissements donnés à x et à t et par Δu l'accroissement correspondant subi par une fonction u de x et de t. Alors, à tout nombre positif ε donné d'avance, on peut faire correspondre un nombre positif ζ tel que si $|\Delta x| < \zeta$, $|\Delta t| < \zeta$, on a :

$$\left|\Delta \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\Delta \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right| < \varepsilon.$$

Il existe donc une fonction positive $\varepsilon(\omega)$ tendant vers zéro avec ω et telle que les inégalités :

$$|\xi'_i - \xi_i| < \omega, \qquad a_1 - \omega < \begin{matrix}\xi_i \\ \xi'_i\end{matrix} < b_1 + \omega, \qquad \alpha < t < \beta,$$

entrainent

$$\frac{\partial \lambda(\xi'_i, t)}{\partial \xi'_i} = \frac{\partial \lambda(\xi_i, t)}{\partial \xi_i} + \delta_i \varepsilon(\omega), \qquad (\delta_i^2 < 1).$$

La fonction $\varepsilon(\omega)$ est indépendante de ξ'_i, de ξ_i et de t. Elle se calcule connaissant $\lambda(x, t)$, a_1, b_1, α, β, et la variable ω.

Donc :

$$f(\eta_i)(y_i - y_{i-1}) = f(\eta_i)\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i}(x_i - x_{i-1}) + \delta_i f(\eta_i)\varepsilon(\omega)(x_i - x_{i-1}).$$

70. Je dis que $f(\eta_i)dt$ et $f(\eta_i)\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i}dt$ sont sommables.

D'après $A < \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i} < B$, il suffit de montrer la première proposition.

Or,

$$f(\eta_i)\,dt = f(\eta_i)\,d\eta_i \cdot \frac{1}{\dfrac{\partial \eta_i}{\partial t}}.$$

(ξ_i reste invariable, tandis que t et η_i croissent l'un et l'autre).

Donc, $\dfrac{\partial \eta_i}{\partial t}$ étant supérieur à A (>0) et $f(\eta_i)\,d\eta_i$ étant sommable, $f(\eta_i)\,dt$ et $f(\eta_i)\dfrac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i}dt$ le sont aussi. Il en est donc de même de $S(f, t)\,dt$ qui est la somme d'un nombre limité de termes $f(\eta_i)(y_i - y_{i-1})\,dt$.

71. Nous pouvons donc écrire l'égalité ci-après où tous les coefficients différentiels sont sommables :

$$\int_\alpha^\beta f(\eta_i)(y_i - y_{i-1})\,dt = \int_\alpha^\beta f(\eta_i)\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i}(x_i - x_{i-1})\,dt + \int_\alpha^\beta \delta_i f(\eta_i)\,\varepsilon(\omega)\cdot(x_i - x_{i-1})\,dt.$$

Donc :

$$(1)\qquad \int_\alpha^\beta S(f, t)\,dt = \int_\alpha^\beta \sum_p^q f(\eta_i)(y_i - y_{i-1})\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \sum_p^q f(\eta_i)\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i}(x_i - x_{i-1})\,dt + \delta_0\,\varepsilon(\omega)\int_\alpha^\beta \sum_p^q |f(\eta_i)|(x_i - x_{i-1})\,dt \qquad (\delta_0^2 < 1).$$

Soit $J = \int_a^b |f(u)|\,du$, on a :

$$\int_\alpha^\beta |f(\eta_i)|\,dt = \int_{\lambda(\xi_i,\alpha)}^{\lambda(\xi_i,\beta)} |f(\eta_i)|\frac{d\eta_i}{\dfrac{\partial \eta_i}{\partial t}} < \frac{1}{A}\int_a^b |f(u)|\,du = \frac{J}{A}$$

(puisque $f(u)$ est nul hors du champ ab).

Donc :

$$\int_\alpha^\beta \sum_p^q |f(\eta_i)|(x_i - x_{i-1})\,dt < \frac{J}{A}\sum_p^q (x_i - x_{i-1}) \leqq \frac{J}{A}(b_1 - a_1 + 2\omega),$$

d'après

$$b_1 - a_1 < x_q - x_{p-1} < b_1 - a_1 + 2\omega.$$

Donc le dernier terme de la relation (1) tend vers zéro avec ω.

Soit maintenant

$$G(\xi_i) = \int_\alpha^\beta f(\eta_i)\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i}\,dt.$$

On a :

$$(3)\qquad \int_\alpha^\beta S(f, t)\,dt \leqq \sum_p^q (x_i - x_{i-1})\,G(\xi_i) + \delta_0\,\varepsilon(\omega)\frac{J}{A}(b_1 - a_1 + 2\omega).$$

72. Je dis que $G(\xi_i)$ est continu en ξ_i.

En effet :

$$G(\xi_i)=\int_\alpha^\beta f(\eta_i)\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_i}dt=\int_{\lambda(\xi_i,\alpha)}^{\lambda(\xi_i,\beta)} f(\eta_i)\frac{\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_i}}{\frac{\partial\eta_i}{\partial t}}d\eta_i.$$

Nous effectuons comme il suit le changement de variable : Ayant posé $\lambda(\xi_i, t)=\eta_i$, nous laissons fixe ξ_i (i fixe). t et η_i varient alors simultanément et croissent continument ensemble par hypothèse. t est donc pour chaque valeur de ξ_i une fonction déterminée de η_i ; $t=\mu(\xi_i, \eta_i)$, et μ est une fonction continue de ξ_i et η_i à la fois, puisqu'il en est ainsi de $\lambda(x, t)$ en x et t. La fonction

$$\frac{\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_i}}{\frac{\partial\eta_i}{\partial t}}=\varphi(\xi_i, t)$$

est continue en ξ_i et t. Nous y remplaçons t par $\mu(\xi_i, \eta_i)$. Par ce changement la fonction $\varphi(\xi_i, t)$ devient donc une fonction $\psi(\xi_i, \eta_i)$, continue en η_i et ξ_i.

On a donc :

$$\overline{G}(\xi_i)=\int_{\lambda(\xi_i,\alpha)}^{\lambda(\xi_i,\beta)} f(\eta_i)\psi(\xi_i, \eta_i)d\eta_i.$$

Or, $\psi(x, y)$ étant continu dans le champ borné $a_1\leqq x\leqq b_1$, $\lambda(a_1, \alpha)\leqq y\leqq\lambda(b_1, \beta)$ il correspond, d'après le caractère uniforme de la continuité, à chaque nombre positif ε donné d'avance, un nombre positif ζ, tel que, si $|\Delta x|$ et $|\Delta y|$ sont inférieurs à ζ,

$$|\psi(x+\Delta x, y+\Delta y)-\psi(x, y)|<\varepsilon.$$

En outre ζ peut être si petit que l'on a encore

$$|\lambda(x+\Delta x, \alpha)-\lambda(x, \alpha)|<\varepsilon \quad \text{et} \quad |\lambda(x+\Delta x, \beta)-\lambda(x, \beta)|<\varepsilon.$$

Donc, pour $|\Delta\xi_i|<\zeta$:

$$G(\xi_i+\Delta\xi_i)=\int_{\lambda(\xi_i+\Delta\xi_i,\alpha)}^{\lambda(\xi_i+\Delta\xi_i,\beta)} f(\eta_i)\psi(\xi_i+\Delta\xi_i, \eta_i)d\eta_i$$

$$=\int_{\lambda(\xi_i,\alpha)+\delta\varepsilon}^{\lambda(\xi_i,\beta)+\delta'\varepsilon} f(u)[\psi(\xi_i, u)+\delta''\varepsilon]du \qquad (\text{avec } \delta^2, \delta'^2, \delta''^2<1).$$

Donc

$$G(\xi_i+\Delta\xi_i)-G(\xi_i)=\int_{\lambda(\xi_i,\beta)}^{\lambda(\xi_i,\beta)+\delta'\varepsilon} f(u)[\psi(\xi_i, u)+\delta''\varepsilon]du$$

$$+\int_{\lambda(\xi_i,\alpha)}^{\lambda(\xi_i,\alpha)+\delta\varepsilon} f(u)[\psi(\xi_i, u)+\delta''\varepsilon]du+\int_{\lambda(\xi_i,\alpha)}^{\lambda(\xi_i,\beta)}\delta''\varepsilon f(u)du.$$

Les trois intégrales du second membre sont infiniment petites avec ε, les deux premières parce que l'intervalle d'intégration est inférieur à ε, la troisième parce qu'elle contient ε en facteur.

Quelque soit donc le nombre positif ε' donné d'avance, il est possible de trouver un nombre ζ' tel que si $|\Delta\xi_i| < \zeta'$, on a :

$$|G(\xi_i + \Delta\xi_i) - G(\xi_i) < \varepsilon'.$$

La fonction $G(\xi_i)$ est donc continue.

73. Donc :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)dx = G(\xi_i'')(x_i - x_{i-1}), \qquad \text{avec} \qquad x_{i-1} < \xi_i'' < x_i$$

et par suite :

$$G(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)dx + (x_i - x_{i-1})[G(\xi_i) - G(\xi_i'')].$$

Or,

$$G(\xi_i) - G(\xi_i'') = \delta_i'\varepsilon_1(\omega) \qquad \text{avec} \qquad \delta_i^2 < 1,$$

$\varepsilon_1(\omega)$ tendant vers zéro avec ω, qui surpasse $|\xi_i - \xi_i''|$.

Donc :

$$G(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} G(x)dx + \delta_i'(x_i - x_{i-1})\varepsilon_1(\omega),$$

et

$$\sum_p^q G(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{p-1}}^{x_q} G(x)dx + \delta'(x_q - x_{p-1})\varepsilon_1(\omega); \qquad \delta'^2 < 1.$$

Dans le dernier terme $x_q - x_{p-1}$ est inférieur à $b_1 - a_1 + 2\omega$.

La relation (3) devient donc :

$$\int_\alpha^\beta S(f, t)dt = \int_{x_{p-1}}^{x_q} G(x)dx + \delta\left[\varepsilon(\omega)\frac{J}{A} + \varepsilon_1(\omega)\right](b_1 - a_1 + 2\omega); \qquad (\delta^2 < 1).$$

74. Or, puisque

$$G(\xi_i) = \int_\alpha^\beta f(\eta_i)\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_i}dt,$$

on a :

$$\int_{x_{p-1}}^{x_q} G(x)dx = \int_{x_{p-1}}^{x_q} G(\xi_i)d\xi_i = \int_{x_{p-1}}^{x_q} d\xi_i\int_\alpha^\beta f(\eta_i)\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_i}dt;$$

d'après la formule de l'échange de l'ordre des intégrations dans les intégrales doubles de fonctions sommables, la dernière expression vaut :

$$\int_\alpha^\beta dt\int_{x_{p-1}}^{x_q} f(\eta_i)\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_i}d\xi_i = \int_\alpha^\beta dt\int_{\lambda(x_{p-1},t)}^{\lambda(x_q,t)} f(\eta_i)d\eta_i.$$

Or,

$$\lambda(x_{p-1}, t) < \lambda(x_{p-1}, \beta) < \lambda(a_1, \beta) = a$$

et

$$\lambda(x_q, t) > \lambda(x_q, \alpha) > \lambda(b_1, \alpha) = b,$$

donc la dernière intégrale vaut, d'après $f(x) = 0$ pour $x < a$ et pour $x > b$,

$$\int_\alpha^\beta dt \int_a^b f(\eta_i) d\eta_i = (\beta - \alpha) \int_a^b f(x) dx = (\beta - \alpha) I.$$

75. En résumé, nous avons :

$$\int_\alpha^\beta S(f, t) dt = (\beta - \alpha) I + \delta(b_1 - a_1 + 2\omega)\left[\frac{J}{A}\varepsilon(\omega) + \varepsilon_1(\omega)\right].$$

Donc l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta |S(f, t) - I| dt$$

tend vers zéro avec ω.

Les sommes riemanniennes formées avec les subdivisions $y_i = \lambda(x_i, t)$, $\eta_i = \lambda(\xi_i, t)$ possèdent donc dans le cas des fonctions sommables la même propriété fondamentale (17) que les sommes $s(f, t)$ relatives aux subdivisions $y_i = x_i + t$, $\eta_i = \xi_i + t$.

Ce lemme étant établi, on en déduit sans difficulté l'intégrabilité (B_1), de toute fonction sommable, au moyen des sommes riemanniennes fournies par la subdivision générale $y_i = \lambda(x_i, t)$, $\eta_i = \lambda(\xi_i, t)$.

On modifie la subdivision (x_i, ξ_i) dont on fait tendre le pas vers zéro, mais la fonction λ ne change pas d'une subdivision à la suivante (à moins que ses dérivées partielles cependant ne restent comprises entre des nombres positifs fixes).

Il y aurait lieu de se demander s'il n'est pas possible de laisser $\dfrac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t}$ s'annuler sur un ensemble (x, t) d'aire nulle.

Hilversum, Mars 1920.

T. J. Boks.

BIBLIOGRAPHIE

H. BAUER, *Der* PERRON*sche Integralbegriff und seine Beziehung zum* LEBESGUE-*schen* [Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XXVI (1915), pp. 153-198]; G. A. BLISS, *Integrals of* LEBESGUE [Bulletin of the American Mathematical Society, 2nd series, t. XXIV (1-4) (1918), pp. 1-47]; E. BOREL, *Sur la définition de l'intégrale définie* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CL (1er semestre 1910), pp. 375-377], *Sur une condition générale d'intégrabilité* [ibid., pp. 508-511]; C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen;* M. J. CONRAN, *The* RIEMANN *integral and measurable sets* [Proceedings of the Royal Irish Academy, section A, vol. 30 (1912), pp. 1-15]; P. J. DANIELL, *A general form of integral* [Annals of Mathematics of the Princeton University, 2nd series, t. XIX (1918), pp. 279-294]; A. DENJOY, *Une extension de l'intégrale de* M. LEBESGUE [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLIV (1er semestre 1912), pp. 859-862], *Calcul de la primitive de la fonction dérivée la plus générale* [id., pp. 1075-1078], *Sur les fonctions dérivées sommables* [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XLIII (1915), pp. 161-248], *Mémoire sur la totalisation des nombres dérivées non-sommables* [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, série 3, t. XXXIII (1916), pp. 127-222], *Sur une propriété des fonctions à nombres dérivés finis* [Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLVIII (1er semestre 1914), pp. 99-101]; D. TH. EGOROFF, *Sur l'intégrale des fonctions mesurables* [ibid., t. CLV (2nd semestre (1912), pp. 1474-1475]; M. FRÉCHET, *On* PIERPONT'S *definition of integral* [Bulletin of the American Mathematical Society, 2nd series, t. XXII (1-6) (1915-16), pp. 295-298], *On* PIERPONTS *intégral. Reply to* Prof. PIERPONT [id., t. XXIII (1916-17), pp. 172-174, 174-175]; Z. DE GEÖCZE, *Sur la fonction semi-continue* [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 39 (1911), pp. 256-295]; D. C. GILLESPIE, *The* CAUCHY *definition of a definite integral* [Annals of Mathematics of the Princeton University, 2nd series, t. XVII (1915), pp. 61-63]; H. HAHN, *Über Annäherung an* LEBEGUE-*schen Integrale durch* RIEMANN*sche Summe* [Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien. Abteilung IIa, Bd. CXXIII (1914), pp. 713-743], *Über eine Verallgemeinerung der* RIEMANN*schen Integral definition* [Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XXVI (1915), pp. 1-18]; T. H. HILDEBRANDT, *On integrals related to and extensions of the* LEBESGUE *integrals* [Bulletin of the American Mathematical Society, 2nd series, t. XXIV (1-4) (1918), pp. 113-114, 177-202]; C. P. HORTON, *Functions of limited integration and* LEBESGUE *integrals* [Annals of Mathematics of the Princeton University, 2nd series t. XX (1-2) (1918), pp. 1-8]; A. KHINTCHINE, *Sur une extension de l'intégrale de* M. DENJOY [Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLXII (1er semestre 1916), pp. 287-291]; J. K. LAMOND, *The reduction of multiple L-integrals of separated functions to iterated L-integrals* [Transactions of the American Mathematical Society, t. XVI (1915), pp. 387-398]; H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Sur l'intégration des fonctions discontinues* [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, série 3, t. XXVII (1910), pp. 361-450], *Sur l'intégrale de* STIELTJES *et sur les opérations fonctionnelles linéaires* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CL (1er semestre 1910), pp. 86-88], *Sur les intégrales singu-*

lières [Annales de la Faculté de Toulouse, série 3, t. I (1-4), pp. 25-117]; N. LUSIN, *Sur les propriétés de l'intégrale de* M. DENJOY [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLV (2[nd] semestre 1912), pp. 1475-1477], *Sur la notion de l'intégrale* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 3[a], t. 26 (1917), pp. 77-129]; P. MONTEL, *Sur l'existence des dérivées* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLV (2[nd] semestre 1912), pp. 1478-1480]; J. PIERPONT, *Reply to Fréchet* [Bulletin of the American Mathematical Society, 2[nd] series, t. XXII (1915-16), pp. 298-302], (voir FRÉCHET ci-dessus), *The theory of functions of real variables*, vol. II (1912); A. SZÜCS, *Das Intégral* [Mathematikai es physikai lapok, Bd. XVII (3-6) (1909), pp. 205-236, 263-290]; CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Réduction des intégrales doubles de* LEBESGUE [Bulletin de l'Académie Royale de Belgique. Classe des Sciences [1910 (7-12)], pp. 768-798], *Sur l'intégrale de* LEBESGUE [Transactions of the American Mathematical Society, t. XVI (1915), pp. 435-501], *Intégrales de* LEBESGUE. *Fonctions d'ensemble. Classes de* BAIRE (Paris, Gauthier-Villars, 1916); W. A. WILSON, *On separated sets* [Bulletin of the American Mathematical Society, 2[nd] series, t. XXII (7-10), (1916), pp. 384-402]; W. H. YOUNG, *Intégrale de* STIELTJES *et sa généralisation* [L'Enseignement mathématique, t. XVI (1914), pp. 81-92], *On the new theory of integration* [Proceedings of the Royal Society of London, series A, vol. 88 (1914), pp. 170-178], *On a new method in the theory of integration* [Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, vol. 9 (1910-11), pp. 15-50], *Note on the Fundamental theory of integration* [Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, t. XVI (1911), pp. 35-38], *On integrals and derivates with respect to a function* [Proceedings of the London mathematical Society, vol. 15 (1916), pp. 35-63], *Sur les fondements de la théorie de l'intégrale* [Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. CLXII (1[er] semestre 1916), pp. 909-912], *General theory of integration.*

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Iedere sommeerbare functie is integreerbaar (B_1).

II.

Er bestaan niet-sommeerbare functies die integreerbaar (B_1) zijn.

III

De integraal (B_1) voldoet aan de 6 voorwaarden opgelegd aan de integraal van Lebesgue.

[H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. (p. 98)].

IV.

Het is niet noodig voor het bepalen van de integraal (B_1) de onderverdeeling van een segment lineair van een parameter t te laten afhangen.

V.

Het is noodzakelijk dat $x\,f\,(x) = 0$ voor $x = 0$ (blz. 31).

VI.

Uit de formuleering door LEBESGUE van de stelling: „Une fonction continue en tout les points d'un intervalle est continue dans cet intervalle" blijkt, dat het zeer gewenscht is de begrippen segment en interval nauwkeurig te onderscheiden.

[H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. (p. 22)].

VII.

De drie eigenschappen waardoor VREESWIJK in zijn dissertatie de axiale I_n op een rationale ruimtekromme karakteriseert, zijn niet onafhankelijk.

[JOH. A. VREESWIJK, *Involuties op rationale ruimtekrommen*. 1905. (blz. 71)].

VIII.

Het theorema van PONCELET is te bewijzen met behulp van het principe van het behoud van het aantal.

IX.

De theorie der verzamelingen kan ook op de waarschijnlijkheidsrekening toegepast worden.

X.

Het verdient aanbeveling het begrip warmtehoeveelheid te definieeren na de eerste hoofdwet.

XI.

In verschillende leerboeken der Mathematische Physica wordt ten onrechte het variatieteeken gebruikt waar het differentiaalteeken op zijn plaats was.

XII.

Het wiskundig onderwijs in de lagere klassen der H. B. S. dient veel vereenvoudigd te worden.