Bijdrage tot de toepassing van de waarschijnlijkheidsrekening in de natuurkunde

Bijdrage tot de toepassing van de Waarschijnlijkheids-rekening in de Natuurkunde

P. C. VAN ARKEL

BIJDRAGE TOT DE TOEPASSING VAN DE WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING IN DE NATUURKUNDE.

Diss. Utrecht 1922

BIJDRAGE TOT DE TOEPASSING VAN DE WAARSCHIJNLIJKHEIDS-REKENING IN DE NATUURKUNDE

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN **DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE** AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. J. A. C. VAN LEEUWEN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP WOENSDAG 31 MEI 1922, DES NAMIDDAGS TE VIER UUR, DOOR

PIETER COENRAAD VAN ARKEL

GEBOREN TE HAARLEM

ELECTR. DRUKKERIJ „DE INDUSTRIE" J. VAN DRUTEN — UTRECHT
1922

AAN MIJNE OUDERS EN AAN MIJNE VROUW.

Het indienen van dit Proefschrift biedt mij een welkome gelegenheid dank te brengen aan allen, wier onderwijs ik mocht volgen.

Inzonderheid ben ik U erkentelijk, Hooggeleerde Ornstein, Hooggeachte Promotor, voor Uwe steeds welwillende voorlichting, Uwe vele goede zorgen, besteed aan het tot stand komen van dit Proefschrift en Uwe vriendelijke belangstelling.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

Toetsing van de theorie van v. Smoluchowski omtrent de veranderlijkheid van de groepeering van emulsiedeeltjes met den tijd.

In eene verhandeling over het bovengenoemde onderwerp [1]) komt v. SMOLUCHOWSKI tot de slotsom, dat eene vergelijking van de uit zijne theorie afgeleide formules met het experimenteele materiaal van THE SVEDBERG [2]) «eine recht befriedigende Uebereinstimmung» geeft.

De gebruikte getallenrij, die aangeeft hoeveel deeltjes er in een bepaald volume van een suspensie aanwezig zijn, is de volgende:
1200020013241231021111311251110233133322111224221226
122142345241141311423100100421123123201111000111 —
211001320000010011000100023221002110000201001 — 333
122000231221024011102 — 12221122310001103311102101
10010103011312121010121111211 — 1000322101230201212
1321110110023312242110001203010100221734410101002112
2114444212114401321233143130112221233101211112224122
31113322132110000410432012120011322231200 — 2532120
332331110021002201301132113120010131432211221122323
4422230321421532200202142123232043112312003314223452
1341104123222220221.

Wij zullen aantoonen, dat, indien men andere evenzeer door v. SMOLUCHOWSKI afgeleide relaties aan het genoemde getallenmateriaal toetst, de overeenstemming niet voldoende

1) Studiën über Molekularstatistik von Emulsionen und deren Zusammenhang mit der Brown'schen Bewegung. Akad. Wien 1915 p. 2401.

2) Existenz der Moleküle 1912 p. 148.

geacht moet worden; hetgeen waarschijnlijk meer aan het experimenteele materiaal, dan aan de theorie te wijten is.

Voor de gemiddelde verandering gedurende een tijd t, $\overline{\Delta_n}$, van het aantal deeltjes n, op den tijd nul in een gegeven volume-element aanwezig, leidt v. SMOLUCHOWSKI de formule

$$\overline{\Delta_n} = (\nu - n) P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

af. Hierin is P de kans, dat een deeltje, dat op den tijd nul in het element ligt, in den betrokken tijd t buiten het element gekomen is (de uitspringkans); en ν het aantal der deeltjes, dat zich bij homogene verdeeling over de vloeistof in het beschouwde element zou bevinden.

Hij vindt voor het gemiddelde kwadraat van de genoemde verandering

$$\overline{\Delta^2} = 2 \nu P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Uit de waarnemingen van THE SVEDBERG volgt $\overline{\Delta^2} = 2{,}25$; $\nu = 1{,}55$ en dus $P = 0{,}726$. v. SMOLUCHOWSKI gaat allereerst na hoeveel malen in de waarnemingen van THE SVEDBERG het getal m op het getal n volgt en vergelijkt het aantal van deze gevallen in de waargenomen reeksen met de theoretisch berekende aantallen, welke volgen uit een later te noemen recursieformule (3). Deze overeenstemming is goed evenals die van de experimenteel gevonden en theoretisch berekende waarden van de gemiddelden $\overline{\Delta^2_n}$, d. z. de gemiddelde kwadraten van de veranderingen gedurende een tijd t van het aantal deeltjes n.

WESTGREN [1]) vergelijkt ook — met goed resultaat — de genoemde aantallen. Verder toetst hij formule (2) voor verschillende tijdsintervallen, waarbij blijkt, dat de verhouding van de berekende en de waargenomen waarden voor de kans P in de buurt van de eenheid ligt en ten hoogste 13 % ervan verschilt. Ten slotte gaat hij den samenhang na tusschen P en de diffusie-coefficiënt der deeltjes [2]), waarbij evenmin groote afwijkingen aan den dag komen; dit is ook niet het geval bij een formule, die eveneens door v. SMOLUCHOWSKI terloops getoetst is, omtrent het gemiddelde van de absolute waarde

[1]) Ark. f. Mat. Bd. 11 N°. 14, 1916.

[2]) Vergelijk p. 8 en 9 hieronder.

van de relatieve afwijking δ van ν, die gedefinieerd wordt door $\delta = \frac{n - \nu}{\nu}$. Men heeft voor deze grootheid $|\overline{\delta}|$ de formule $2 \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!}$, waarin k het grootste geheele getal kleiner dan ν is.

Bij de bepaling van Δ kan men de reeks in twee richtingen doorloopen. Wij hebben met een omkeerbaar verschijnsel te doen en dus moet de uit (1) gevonden P bij berekening voor beide richtingen dezelfde zijn. Deze omkeerbaarheid toetst v. SMOLUCHOWSKI door na te gaan of $W(n, m) = W(m, n)$, als $W(a, b)$ de kans is, dat het getal b op het getal a volgt. [1])

Gebruikt men echter voor de berekening van P de formule (1), waarbij wij door een pijl aangeven in welke richting wij de reeks doorloopen, dan vinden wij:

	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$
uit $\overline{\Delta}_0$ voor	$P = 0{,}66$	0,60
uit $\overline{\Delta}_1$	0,82	0,89
uit $\overline{\Delta}_2$	0,60	0,65
uit $\overline{\Delta}_3$	0,81	0,73
uit $\overline{\Delta}_4$	0,69	0,85
uit $\overline{\Delta}_5$	0,81	0,70
gemiddeld	0,73	0,74

De grootste der hier gevonden waarden wijkt ruim 30 % af van de kleinste, terwijl een afwijking van 10 % van de boven gevonden waarde $P = 0{,}726$ naar beide zijden voorkomt.

Het tijdsinterval bij de waarnemingen van THE SVEDBERG is $^1/_{39}$ minuut. Noemen wij dit τ. Wij kunnen uit de gegeven getallenrij dan ook nagaan wat P wordt op grond van (1) en (2) bij intervallen $2\,\tau$, $3\,\tau$ enz. WESTGREN heeft dit, zooals reeds werd opgemerkt, ook gedaan [2]) echter alleen aan de hand van formule (2), terwijl hier ook formule (1) wordt getoetst. Het zal blijken dat dan voor P bij een bepaald interval niet dezelfde waarden verkregen worden.

---

[1]) Wiener Ber. 124, 341, 1915.

[2]) Arkiv f. Mat. Band 11 N°. 14.

Bij het interval 2τ zullen wij nu uit de gegeven getallenrij *a b c d e f g h j k* enz. moeten beschouwen de twee deelreeksen *a c e g j*..... en *b d f h k*....., die *gelijkwaardig* zijn. Immers bij een tijdsinterval 2τ zou één van deze beide door The Svedberg zijn waargenomen, als hij 2τ tot interval van waarneming gekozen had. Bij een interval 3τ krijgen wij op deze wijze de drie reeksen:

a d g k......
b e h........
c f j........, die ook weer gelijkwaardig zijn; in het algemeen bij $m\tau$ dus m gelijkwaardige deelreeksen. Westgren beschouwt deze gelijkwaardige deelreeksen niet, doch gebruikt bij 2τ bijv. de verschillen $a-c$, $b-d$, $c-e$, $d-f$ enz. tegelijk, wat niet juist is, daar hij zoo slechts het gemiddelde van de deelreeksen vindt.

Wij vinden nu bij 2τ voor P de volgende waarden, waarbij wij de richting van tellen bij de bepaling van Δ weer door een pijl aangeven:

	eerste deelreeks		tweede deelreeks	
uit $\overline{\Delta^2}$	0,885		0,83	
	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$
uit $\overline{\Delta_0}$	0,90	0,71	0,83	0,83
uit $\overline{\Delta_1}$	0,78	>1	0,90	0,94
uit $\overline{\Delta_2}$	0,77	>1	0,79	0,42
uit $\overline{\Delta_3}$	0,92	>1	0,81	>1
uit $\overline{\Delta_4}$	0,96	0,62	0,90	>1

De overeenstemming is wederom niet fraai; de waarden voor P die grooter dan één zijn, zijn geheel ontoelaatbaar, daar P een kans is. Voor het interval 3τ vinden wij voor P
eerste deelreeks P uit $\overline{\Delta^2} = 0{,}87$
tweede » 0,90
derde » 0,79, terwijl de volgende waarden bij dit interval voor P berekend worden uit $\overline{\Delta_n}$:

	1e reeks →	2e reeks →	3e reeks →	1e reeks ←	2e reeks ←	3e reeks ←
uit $\overline{\Delta}_0$	0,77	0,90	0,86	0,85	0,80	0,72
» $\overline{\Delta}_1$	>1	0,93	0,89	0,77	>1	0,94
» $\overline{\Delta}_2$	0,70	1,—	0,84	0,23	0,73	>1
» $\overline{\Delta}_3$	0,85	1,—	>1	1,—	>1	0,87
» $\overline{\Delta}_4$	0,63	0,78	0,62	0,89	0,75	0,78

Bij de proeven van WESTGREN wijken de waarden voor P, die afgeleid kunnen worden uit $\overline{\Delta}_n$ veel minder af van de theoretische dan hier. Toch is de overeenstemming tusschen de theoretische en de berekende P in dit geval veel slechter dan bij zijne toetsing van $\overline{\Delta}^2 = 2\,\nu\,P$.

Bij grooter intervallen berekenden wij nog de waarden voor P, die uit $\overline{\Delta}^2$ volgen:

	Interval $4\,\tau$	$5\,\tau$	$6\,\tau$
eerste deelreeks	0,93	1,—	>1
tweede »	0,69	0,91	0,83
derde »	0,84	0,90	0,94
vierde »	0,96	0,95	0,85
vijfde »	—	0,78	>1
zesde »	—	—	0,82

Over het algemeen is dus bij een bepaald interval een dikwijls vrij groot verschil te constateeren tusschen de waarden voor P, voornamelijk tusschen die, welke volgen uit formule (1) voor $\overline{\Delta}_n$, welke juist niet door v. SMOLUCHOWSKI getoetst werd in bovengeciteerde verhandeling. Wij kunnen uit dit alles de conclusie trekken, dat het mogelijk is uit getallenreeksen, zooals die van THE SVEDBERG, getallen af te leiden, welke overeenstemmen met de theoretisch te verwachten waarden; doch dat in de formule (1) een scherper criterium gegeven is om uit te maken of op een getallenrij de theorie van v. SMOLUCHOWSKI is toe te passen en dit laatste schijnt bij de reeks van THE SVEDBERG dus niet het geval.

Ook kan nog opgemerkt worden, dat de berekende waarden voor P bij toenemende grootte van het interval niet op bepaalde wijze tot de eenheid naderen, zooals volgens de theorie het geval zou moeten zijn. Behalve de hier besproken getallenrij geeft THE SVEDBERG in hetzelfde werk nog een tweede, die betrekking heeft op een geconcentreerdere Gummigutemulsie. Berekeningen als boven met deze tweede rij vallen nog ongunstiger uit. De theorie van v. SMOLUCHOWSKI geldt alleen voor zeer verdunde systemen en wellicht was dus hier niet anders te verwachten.

Wij kunnen de theorie nog op een geheel andere wijze toepassen op de getallenrij van THE SVEDBERG. In het meermalen geciteerde stuk van v. SMOLUCHOWSKI vindt men de volgende recurrente betrekking:

$$W(n, m) = P\, W(n-1, m) + (1-P)\, W(n-1, m-1) \quad (3)$$

Hierin is $W(n, m)$ weer de waarschijnlijkheid dat het getal m op het getal n volgt. v. SMOLUCHOWSKI gebruikt deze relatie ter berekening van $W(n, m)$ uit $W(o, m)$, terwijl bij de betrekking

$$W(o, k) = \frac{(\nu P)^k}{k!} e^{-\nu P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ter berekening van $W(o, k)$ bezigt.

Wij kunnen omgekeerd te werk gaan en de grootheden W experimenteel bepalen en daarna uit (3) en (4) P berekenen.

Experimenteele $W(n, m)$

$\tau = 1$	$m = 0$	1	2	3	4	5	6
$n = 0$	0,405	0,316	0,171	0,063	0,045	—	—
1	0,244	0,335	0,244	0,104	0,061	0.006	—
2	0,147	0,326	0,271	0,186	0,047	0,016	0,008
3	0,087	0,333	0,319	0,188	0,072	—	—
4	0,063	0,250	0,313	0,125	0.188	0,063	—
5	—	0,200	0,400	0,400	—	—	—

Eerste Deelreeks.

$\tau=2$	$m=0$	1	2	3	4	5	6
$n=0$	0,298	0,228	0,246	0,193	0,035	0,—	
1	0,278	0,266	0,228	0,177	0,038	0,013	komt
2	0,197	0,328	0,229	0,147	0,066	0,016	niet
3	0,125	0,425	0,225	0,100	0,100	0,025	voor.
4	0,063	0,438	0,313	0,125	0,063	0,—	

In Versl. Kon. Akad. XXVII, 1156, 1919 hebben ORNSTEIN en BURGER bij vergissing de waarden voor W gebruikt die met (3) en (4) volgen uit $P=0{,}726$ in plaats van de experimenteele $W(n, m)$.

De waarden voor P, die hiermede uit (3) en (4) volgen moeten dezelfde zijn en bovendien overeenstemmen met die, welke volgen uit (1) en (2). Wij vinden echter de volgende tabel.

$\tau=1$	$m=1$	2	3	4	5	6
$n=1$	$P=0{,}786$	0,500	0,620	0,111	0,867	—
2	0,901	0,703	0,408	>1	0,818	<0
3	>1	0,130	0,970	0,820	>1	2,—
4	0,662	>1	0,717	0,—	0,125	—
5	0,733	>1	<0	<0	>1	—

Eerste Deelreeks.

$\tau=2$	$m=1$	2	3	4	5	
$n=1$	$P=0{,}45$	0,—	>1	0,95	0,63	
2	<0	1,—	>1	0,80	0,88	
3	>1	0,94	>1	0,58	0,82	
4	>1	0,56	0,80	—	>1	

Deze tabellen zijn zóó ingericht, dat het getal, dat zich bevindt in de n^{de} rij en de m^{de} kolom die waarde voor P is, welke met formule (3) uit $W(n, m)$ berekend wordt. Er blijkt wederom geen overeenstemming wat ook dadelijk is te zien uit het materiaal. Uit de betrekking (3) n.l. volgt:

$$P = \frac{W(n, m) - W(n-1, m-1)}{W(n-1, m) - W(n-1, m-1)}.$$

Nu moet echter $0 < P < 1$ zijn. Dus hebben we de volgende condities:

I. $W(n-1, m-1)$ mag *niet* liggen *tusschen* $W(n, m)$ en $W(n-1, m)$, anders is $P < 0$.

II *a*. Is aan I voldaan en $W(n-1, m-1)$ is grooter dan de beide andere getallen W, dan moet $W(n, m) > W(n-1, m)$.

b. Is aan I voldaan doch $W(n-1, m-1)$ is kleiner dan de beide andere getallen W, dan moet $W(n, m) < W(n-1, m)$.

Een getallenrij zooals die van THE SVEDBERG, die niet aan deze voorwaarden I en II voldoet, is onbruikbaar.

v. SMOLUCHOWSKI heeft uit theoretische beschouwingen P berekend; hij vindt:

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-y^2} dy + \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - e^{-\beta^2} \right\} \qquad (5)$$

waarin $\beta = \frac{h}{2\sqrt{Dt}}$, als D de diffusie-coëfficiënt van de deeltjes voorstelt, t de tijd en h de dikte van een horizontale laag uit de emulsie is, waarvan de deeltjes geteld zijn. Uit $D = 1{,}04 . 10^{-7}$; $h = 2\,\mu$; $t = \frac{60}{39}$ berekent v. SMOLUCHOWSKI $\beta = 0{,}25$ en daaruit met (5) $P = 0{,}86$ dat is $^1/_5$ grooter dan de waarde 0,726 die volgt uit $\Delta^2 = 2\,\nu\,P$.

Men kan nu den duur van het interval $t = \frac{60}{39}$ een zeker aantal malen t maken, bijv. nt, dan wordt $\beta = \frac{0,25}{\sqrt{n}}$ en men vindt voor P

	Berekend	Experimenteel
$n = 1$	0,86	0,73
2	0,90	0,82
3	0,92	0,86
4	0,93	0,91
5	0,94	0,95
6	0,94	0,95
7	0,95	1,—

De waarden voor P worden dus eerst te groot, later te klein. Nu kan men trachten een β te vinden, die beter overeenstemming geeft. Om kleine veranderingen van P te verkrijgen moet β sterk gevarieerd worden. Men vindt n.l.

	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,27$	$\beta = 0,3$	$\beta = 0,4$
$t = 1$	$P = 0,86$	0,85	0,84	0,79
2	0,90	0,91	0,88	0,84
3	0,92	0,93	0,93	0,93

De formule (5) is bij een aan alle eischen voldoende getallenrij dus betrekkelijk weinig geschikt om uit de experimenteel gevonden P een waarde voor D te berekenen. Dit is in overeenstemming met het verloop van de kromme $P = f(\beta)$ bij de waarnemingsreeksen van WESTGREN. [1])

Deze bespreekt ook de formule $D = \frac{RT}{N} \cdot \frac{1}{6\pi\mu a}$, waarin R de gasconstante is, N de constante van AVOGADRO, μ de inwendige wrijving van het medium en a de straal der deeltjes, doch komt in verband met het bovenstaande evenzeer tot de slotsom dat formule (5) ter berekening van N «van geringe waarde» is. Dit gelukt hem wel in nauwkeuriger waarnemingen bij een cilindrisch volume, waarbij de theorie en het experiment wederom goed overeenstemmen. [2])

---

[1]) Arkiv. f. Matematik, Bd. 11, N°. 14, 1916.
[2]) Arkiv. f. Matematik, Bd. 13, N°. 14, 1918.

Wij zullen de waarnemingen van WESTGREN nog op een andere wijze toetsen. Men kan de kans $W(a, n\tau, b)$ berekenen dat het getal a na $n\tau$ sec (τ is het oorspronkelijke waarnemingsinterval) gevolgd wordt door b. De kans, die uit de waarnemingen wordt afgeleid, noemen wij de «experimenteele»; de kans, gevonden uit de formules (3) en (4) zullen wij aanduiden als de «theoretische». Wij willen nu nagaan of deze getallen $W(a, n\tau, b)$ voor toenemende n naderen tot $W(b)$, d. i. de kans dat het getal b optreedt.

In onderstaande tabel is voor de reeks C van WESTGREN de kans $W(a, n\tau, b)$ vermeld en wel de «experimenteele» steeds op de bovenste van twee bijeenhoorende regels, de «theoretische» beneden.

	$n=1$	2	3	4	10	
$ab=00$	0,554 0,586	0,441 0,492	0,442 0,425	0,351 0,392	0,316 0,322	exp. theor.
10	0,238 0,219	0,255 0,252	0,258 0,255	0,303 0,257	0,316 0,255	
20	0,076 0,082	0,141 0,129	0,155 0,153	0,159 0,169	0,222 0,202	
30	0,058 0,031	0,109 0,067	0,098 0,092	0,090 0,111	— 0,160	
40	0,030 0,012	0,035 0,034	0,080 0,055	— 0,073	— 0,127	
01	0,333 0,313	0,341 0,360	0,380 0,364	0,415 0,367	0,526 0,365	
11	0,500 0,484	0,468 0,424	0,419 0,388	0,414 0,376	0,299 0,356	

	$n=1$	2	3	4	10	
$ab=21$	0,389 0,318	0,312 0,340	0,341 0,335	0,393 0,335	0,306 0,334	
31	0,115 0,178	0,122 0,237	0,215 0,262	0,137 0,278	0,353 0,317	
41	0,030 0,086	0,103 0,076	0,120 0,194	0,200 0,221	0,500 0,285	
02	0,092 0,084	0,140 0,083	0,155 0,156	0,191 0,172	0,053 0,207	
12	0,208 0,227	0,209 0,218	0,193 0,239	0,221 0,239	0,316 0,240	
22	0,304 0,388	0,317 0,318	0,349 0,299	0,202 0,286	0,167 0,264	
32	0,437 0,344	0,293 0,329	0,294 0,313	0,386 0,303	0,470 0,278	
42	0,210 0,240	0,172 0,284	0,240 0,293	0,300 0,294	0,167 0,295	

Verder blijkt:

$W(0) = 0{,}242$ (exper.)	0,240 (theor.)
$W(1) = 0{,}359$	0,343
$W(2) = 0{,}227$	0,245
$W(3) = 0{,}111$	
$W(4) = 0{,}043$	

Ook hier levert een vergelijking der experimenteele en der theoretische kansen $W(a, n\tau, b)$ geen goede overeenstemming, zooals ook graphisch kan blijken, indien men de verkregen getallen uitzet. De «theoretische» convergeeren zooals te verwachten is zeer goed tot $W(b)$, de «experimenteele» echter in 't geheel niet. Dit is vooral hierom te betreuren, omdat hierdoor een middel vervalt om na te gaan over welken afstand de correlatie bij deze proefnemingen nog te bespeuren is.

Van enkele andere onderzoekingen op dit gebied vermelden wij de volgende.

R. Fürth [1]) heeft de beschouwingen van v. Smoluchowski toegepast op een getallenreeks, die op de volgende wijze verkregen werd.

Om de 5 sec. werd het aantal voorbijgangers, dat zich op het trottoir voor een huis bevond, geteld. Is P de kans, dat een voetganger op den tijd nul in het beschouwde interval van l Meter zich bevindt en er na den tijd t uit verdwenen is, dan is

$$P = \frac{v\,t}{l}\ ^{2)},$$

als v de snelheid van den voetganger is. De P kan berekend worden uit deze formule en aan de hand van de betrekking $\overline{\triangle^2} = 2\,\nu\,P$ uit de getallenrij. Er blijkt goede overeenstemming te bestaan. Voor $t = 5$ sec was $P = 0{,}316$ [3]). Fürth liet verder zien, dat na omroeren van de door hem gevonden getallenrij de nawerking verdween en voor P in dit geval 1 werd gevonden.

Ook worden eenige formules van v. Smoluchowski getoetst door A. E. van Arkel [4]) aan waarnemingen met bepaalde solen. Hij vindt bevredigende resultaten bij de formule

$$W(k) = \frac{e^{-\nu}\,.\,\nu^k}{k!}$$

Hij controleert evenals v. Smoluchowski berekende en waargenomen talrijkheden met goede overeenstemming. Aan-

1) Physik. Zeitschr. XIX, 421, 1918 en XX, 21, 1919.

2) Dit is medegedeeld door Ornstein en Burger in Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. XXVII, 1156, 1919.

3) Zie ook E. Buchwald Physik. Zeitschr. XXI, N°. 12, 1920.

4) Uitvlokkingssnelheid van het Seleensol, Diss. Utrecht 1920.

getoond wordt dat de waarnemingen niet kloppen met de talrijkheden, wanneer deze berekend zouden worden in de onderstelling van volkomen onafhankelijkheid, d. w. z. wanneer $W(n, m) = W(n)\, W(m)$ was. P berekend uit de formules (2) en (5) stemmen hier goed overeen (0,53 en 0,55).

Gaat men uit van de onderstelling, dat bijv. door strooming de afhankelijkheid tusschen de waarnemingen zou zijn opgeheven, dan vindt men de betrekking $\overline{\Delta_n} = \nu - n$, wat in de formule (1) verantwoord wordt door $P = 1$ te stellen. Het blijkt echter, dat de werkelijk waargenomen waarden $\overline{\Delta_n}$ tamelijk goed overeenstemmen met die, welke berekend zijn volgens von Smoluchowski in de onderstelling, dat alleen de diffusie de veranderingen veroorzaakt; dat zij echter zeer aanmerkelijk afwijken van de waarden, die berekend zijn in de onderstelling van geheele onafhankelijkheid. De stroomingen, die soms opgemerkt werden, hebben dus slechts een geringen invloed op de waarnemingen; integendeel toonen de tabellen aan, dat de snelheid, waarmee hier de concentratieveranderingen plaats vinden, zeer goed met de theorie van v. Smoluchowski in overeenstemming is. Het getallenmateriaal is echter onvoldoende om er de scherpe toetsing op toe te laten.

E. Buchwald [1]) definieert andere uitspringkansen en toetst deze in Annalen der Physik IV Folge Bd 66, 1921. Hij gaat eerst na de betrekking $\overline{\Delta^2} = 2\,\nu\, P$ voor een cilindrisch volume en vindt dat de theorie voldoende bevestigd wordt.

Hij neemt bij een tweede reeks proefnemingen den aanvangstoestand van een deeltje in het volume v weer willekeurig, doch gaat dan de kans P_2 na, dat het deeltje gedurende den tijd t uitgetreden is, waarbij in tegenstelling met het vorige geval het deeltje niet het volume verlaten en weer intreden mag, doch de eerste uittreding het deelte aan verdere beschouwing onttrekt. Ook hier vindt hij bevestiging van de theorie.

P_1 is bij hem verder de kans, dat een in v intredend

---

[1]) Physik. Zeitschr. XXII, 497, 1921.

deeltje v binnen de volgende t sec. weer verlaten heeft. De vergelijking voor P_1 wordt bij zijne proefnemingen bevestigd. Volledigheidshalve onderzoekt hij naast P, P_1, P_2 ook nog de kans P^1 dat een deeltje t sec. na zijn intrede in v zich niet daarin bevindt; en hij toetst zijne theoretische beschouwingen aan eigen waarnemingen.

Literatuur bij Hoofdstuk I.

M. v. Smoluchowski. Wiener Ber. 123 (II *a*), 2381, 1915; 124 (II*a*), 339, 1915.

Physik. Zeitschr. XVII, 557, 1916.

The Svedberg. Die Existenz der Moleküle, Leipzig 1912.

A. Westgren. Arkiv. f. Mat. XI N°. 14, 1916 en XIII N°. 14, 1918.

L. S. Ornstein en H. C. Burger. Versl. Kon. Akad. v. W. XXVII, 1146, 1916.

L. S. Ornstein. Versl. Kon. Akad. v. W. XXV, 1324, 1917.

R. Fürth. Schwankungserscheinungen i. d. Physik Braunschweig 1920.

Physik. Zeitschr. XIX, 421, 1918.

id. XX, 21, 1919.

E. Buchwald. Physik. Zeitschr. XXI, N°. 12, 1920.

Physik. Zeitschr, XXII, 497, 1921.

Annalen d. Physik. IV, Folge Bd. 66, 1921.

A. E. van Arkel. Uitvlokkingssnelheid v. h. Seleensol. Diss. Utrecht 1920.

P. C. van Arkel. Physik. Zeitschr. XXI, 465, 1920.

HOOFDSTUK II.

De veranderlijkheid van het aantal emulsiedeeltjes in een volume-element, als het aantal gegeven is, dat te voren aanwezig was.

v. SMOLUCHOWSKI heeft betrekkingen afgeleid, waarin de kans P voorkomt, dat een deeltje, dat op den tijd nul in een volume-element v aanwezig is, na een tijd t daaruit verdwenen is. Hij toont aan, dat het betreffende verschijnsel met diffusie te vergelijken is. Weet men alleen dat het deeltje ergens in v ligt, dan zijn dus alle plaatsen in v even waarschijnlijk en is de kans P te berekenen uit het diffusieprobleem, waarbij de massa op $t = 0$ homogeen over het element v verdeeld is.

Weet men, dat het deeltje op den tijd nul in v lag en dat het op den tijd t nog in v is, dan zijn niet meer alle plaatsen even waarschijnlijk voor de ligging van het deeltje op den tijd t, doch zijn de kansen voor de ligging van het deeltje gegeven door een diffusieverdeeling, die op den tijd t uit de *homogene* verdeeling, welke op het tijdstip nul bestond, ontstaan is.

De kans om tusschen de tijden t en $2\,t$ uit te springen is niet langer P (de kans bij homogene verdeeling), doch P_1. Deze kan met behulp van de oplossing van het diffusievraagstuk berekend worden, als men als aanvangstoestand neemt de zooeven genoemde verdeeling op den tijd t, eenvoudiger echter door de toestanden, die op de tijden $2\,t$ en t uit de homogene verdeeling op $t = 0$ ontstaan zijn, te vergelijken. Men vindt:

$$P_1 = \frac{U(2\,t) - U(t)}{(I)\,t}.$$

Hierin is $I(t)$ de hoeveelheid, die na den tijd t nog in v aanwezig is en $U(t)$ de hoeveelheid, die zich in den tijd t buiten v begeeft.

Wij hebben dus de oplossing van het beschouwde diffusieprobleem noodig. Gegeven zij bijv. een bol met straal R, aanvankelijk homogeen gevuld (dus beginconcentratie constant $= c$) met een substantie, die door diffusie zich naar buiten verspreidt. Gevraagd de concentratie in een punt A binnen den bol na een tijd t (de afstand van A tot het middelpunt M van den bol zij ρ). We moeten dus eene oplossing $u(\rho, t)$ zoeken van de diffusievergelijking, als gegeven is

$$u(\rho, 0) = c \text{ voor } 0 < \rho < R$$
$$u(\rho, 0) = 0 \text{ voor } R < \rho < \infty$$

Deze oplossing vindt men bij RIEMANN-WEBER [1]).
Zij luidt:

$$u_A = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int e^{-\frac{r^2}{4at^2}} \cdot \Phi_q \cdot d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hierin is $a^2 = D$ de diffusie-coëfficiënt; r de afstand van A tot een willekeurig punt q binnen den bol; $d\tau$ een volume-element; Φ_q de aanvangsconcentratie in het punt q, welke bij ons c is. Hierdoor wordt

$$u_A = \frac{c}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Voeren wij poolcoördinaten met middelpunt A in, dan wordt $d\tau = r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\Phi$ en

$$u_A = \frac{2\pi c}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_0^{R+\rho} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} r^2\, dr \int_0^{\theta_1} \sin\theta \,.\, d\theta \quad . \quad . \quad (3)$$

want de integratie naar Φ geeft 2π.

---

[1]) Die part. Diff. Gleichungen d. Math. Physik II § 50 p. 125, Vergelijking (10).

Is het punt q zoo gelegen, dat $0 < r < R - \rho$ d. w. z. q binnen een bol met straal $R - \rho$ om A, dan kan θ varieeren van 0 tot 2π (integratie geeft 2π); is $R - \rho < r < R + \rho$, dan loopt θ van 0 tot $< BAM = \theta_1$, als B op een afstand r van A op den omtrek ligt. Splitsen wij dienovereenkomstig den integraal uit vergelijking (3), dan wordt het resultaat:

$$u = 2c\alpha^{3/2}\sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{4\alpha^2\rho}\left[e^{-\alpha(R+\rho)^2} - e^{-\alpha(R-\rho)^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\alpha}\int_0^{R-\rho} e^{-\alpha r^2}.dr + \frac{1}{2\alpha}\int_0^{R+\rho} e^{-\alpha r^2}.dr\right\} \quad . \quad . \quad (4)$$

als $\alpha = \dfrac{1}{4a^2t}$.

De hoeveelheid, die zich in den tijd t buiten den bol begeeft, is

$$U(R, t) = a^2.4\pi.\int_0^t \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{\rho = R} dt$$

Dan volgt uit (4):

$$U(R, t) = 8c\sqrt{\pi}\left\{-\frac{a^3}{3}t^{3/2} + \frac{R^2 a}{2}t^{1/2} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{R}{a^2 t}}\left(\frac{a^3}{3}t^{3/2} - \frac{R^2 a}{6}t^{1/2}\right) + \frac{R^3\sqrt{\pi}}{6}\left[1 - \theta\left(\frac{R}{a\sqrt{t}}\right)\right]\right. \quad (5)$$

$$\text{als} \int_0^{\frac{R}{a\sqrt{t}}} e^{-y^2}.dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\theta\left(\frac{R}{a\sqrt{t}}\right)$$

Verder is de hoeveelheid, die na den tijd t nog aanwezig is,

$$I(R, t) = 4\pi\int_0^R u.\rho^2 d\rho$$

en volgens (4) is dit:

$$I(R, t) = 8c\sqrt{\pi}\left\{\frac{a^3}{3}t^{3/2} - \frac{R^2 a}{2}t^{1/2} + e^{-\frac{R^2}{a^2 t}}\left(-\frac{a^3}{3}t^{3/2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{R^2 a}{6}t^{1/2}\right) + \frac{R^3\sqrt{\pi}}{6}\,\theta\left(\frac{R}{a\sqrt{t}}\right)\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Uit de vergelijkingen (5) en (6) volgt ter contrôle

$$U(R, t) + I(R, t) = {}^4/_3 \pi R^3 . c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

d. i. de hoeveelheid, die aanvankelijk in den bol aanwezig was.

De uitspringkans P van v. SMOLUCHOWSKI d. i. de kans, dat een deeltje op den tijd nul aanwezig, na een tijd t uit het element verdwenen is, bedraagt

$$P(t) = \frac{U(R, t)}{{}^4/_3 \pi R^3 c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Uit formule (5) volgt terstond

$$\lim_{t=\infty} U(R, t) = {}^4/_3 \pi R^3 c$$

dus

$$\lim_{t=\infty} P(t) = 1.$$

Men kan nu echter ook vragen naar de kans, dat een deeltje op de tijdstippen nul en t aanwezig is, doch op $2t$ verdwenen is. Deze kans is

$$P'(t) = \frac{U(R, 2t) - U(R, t)}{I(R, t)}.$$

Algemeen is de kans, dat een deeltje aanwezig is op de tijden $0, t, 2t, \ldots nt$, doch verdwenen is op $(n+1)t$:

$$P^n(t) = \frac{U(R, (n+1)t) - U(R, nt)}{I(R, nt)} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wij berekenen nog

$$P^\infty(t) = \lim_{p=\infty} \frac{U(p+1 . t) - U(p . t)}{I(p t)}$$

$$= \lim_{p=\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-3/_2} - 1 \right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Dit is dus van de orde $\left(\frac{1}{p}\right)_{p=\infty}$; ten slotte nadert deze kans dus tot nul bij een bolvormig volume-element.

Voor een vlakke laag zijn de formules van v. SMOLUCHOWSKI te gebruiken. Om P, P^n en P^∞ te vinden, moeten alleen de functies $U(t)$ en $I(t)$ worden afgeleid. Nu is (vergelijk form. (5), (6), (7))

$$I(t) = \text{h. c. o.} - U(t)$$

waarin O het oppervlak van de laag voorstelt.

en h de dikte van de aanvankelijk homogeen met de concentratie c gevulde laag is. [1]) Wij hebben dan

$$U(t) = 2\,D\,\text{o}\,.\,c \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_h .\, dt = \text{h. c. o.}\, P,$$

waarin

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta} e^{-y^2}\, dy + \frac{1}{\beta \sqrt{\pi}} (1 - e^{-\beta^2});\ \beta = \frac{h}{2\sqrt{Dt}}.$$

Hiermede is $U(t)$ gevonden en zijn $P' \ldots . P^n$ te berekenen door middel van formule (9), terwijl reeksontwikkeling geeft $P^{\infty}(t) = 0$, wederom van de orde $\left(\frac{1}{p}\right)_{p=\infty}$ evenals formule (10).

Bij een bolvormig element en bij een vlakke laag beide nadert deze kans dus tot nul van dezelfde orde. Is dit bij een willekeurig oppervlak ook het geval? Analoog aan formule (7) is steeds

$$U(p\,.\,t) + I(p\,t) = h,$$

als h de hoeveelheid is, die oorspronkelijk in het lichaam aanwezig was, dus

$$U(p\,t) = h - I(p\,t).$$

Derhalve

$$P^{\infty}(t) = \lim_{p=\infty} \frac{U(p+1\,.\,t) - U(p\,.\,t)}{I(p\,t)} = \lim_{p=\infty}$$

$$\frac{I(p\,t) - I(p+1\,.\,t)}{I(p\,t)} = 1 - \lim_{p=\infty} \frac{I(p+1\,.\,t)}{I(p\,t)}.$$

In al deze formules is t eindig.

Nu heeft $I(t)$ den vorm:

$I(t) = b\,t^k +$ lager machten van t (11). Dan wordt dus

$$P^{\infty}(t) = 1 - \lim_{p=\infty} \frac{b\,(p+1)^k\, t^k + \text{lager machten}}{b\,p^k\, t^k + \text{lager machten}} =$$

---

[1]) Vergelijk M. v. Smoluchowski Molekularstatistik von Emulsionen p. 9 en 10.

$$1 - \lim_{p=\infty} \left(1+\frac{1}{p}\right)^k = 0, \text{ van dezelfde orde als } \frac{1}{p} \text{ voor } p=\infty.$$

Dat voor $I(t)$ de gebruikte formule inderdaad goed is, ziet men op de volgende wijze uit formule (1). De in deze formule optredende integraal heeft eindige grenzen, n.l. de grenzen van het beschouwde oppervlak, daar buiten het oppervlak $\Phi_q = c = 0$. Kiezen we het punt A, waar we concentratie u_A zoeken, als oorsprong, dan gaat de betrekking (1) over in

$$u_A = \frac{c}{(2a\sqrt{\pi t^3})} \int_q^p \int_s^r \int_v^u e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}} dx\, dy\, dz$$

Stellen wij $\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} = \xi$; $\dfrac{y}{2a\sqrt{t}} = \eta$; $\dfrac{z}{2a\sqrt{t}} = \zeta$, dan krijgen wij:

$$u_A = \frac{c}{(\sqrt{\pi})^3} \int_{\frac{q}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{p}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \,.\int_{\frac{s}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{r}{2a\sqrt{t}}} e^{-\eta^2} .\, d\eta .\int_{\frac{v}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{u}{2a\sqrt{t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Ontwikkelen wij deze integralen in een reeks, dan komt er $u_A = b\, t^{-3/2}$ + lager machten van t en aangezien $I(t) = \int u\, dv$ is de functie I ook van den vorm

$I(t) = b\,.\,t^{-3/2}$ + lager machten van t, waarmee het bewijs van (11) geleverd is.

HOOFDSTUK III.

De kans op een bepaalde verandering van een aantal deeltjes, indien gegeven is het aantal, dat te voren aanwezig was.

Naast de door v. SMOLUCHOWSKI gedefinieerde kans $W(a, b)$, dat in een beschouwd volume-element v zich eerst bevinden a deeltjes en na het waarnemingsinterval τ een aantal deeltjes b, kunnen wij invoeren een kans $W(a, b, c)$, dat zich eerst a deeltjes in het element bevinden, τ sec later b deeltjes en weer τ sec later c deeltjes of anders de kans, dat b gevolgd wordt door c, als men weet, dat a aan b voorafging. De gedachte, die hiertoe leidt, is de volgende. Indien de correlatie zich ver genoeg doet gelden, hangt het aantal deeltjes c, dat in v aanwezig is op zeker tijdstip, niet alleen af van het aantal b, dat τ sec te voren in v zich bevond, doch ook van het aantal a, dat 2τ sec te voren in v was, ja het kan zijn, dat bij groote correlatie toestanden van $n\tau$ sec te voren nog invloed hebben. De eerste uitbreiding is dus van de kansen $W(a, b)$ over te gaan op $W(a, b, c)$. [1])

Geheel op dezelfde wijze als bij v. SMOLUCHOWSKI voor twee indices is ook hier

$$\left.\begin{aligned} W(a, b, c) &= \sum_{n=0}^{b} U_n I_{n+c-b} \quad (c > b) \\ \text{of} \quad W(a, b, c) &= \sum_{n=0}^{b} U_n I_{n+b-c} \quad (c < b) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hierin is U_n de kans, dat n deeltjes het element verlaten, in aanmerking genomen, dat er τ sec te voren a deeltjes aan-

---

[1]) Bij het experiment kan men τ niet willekeurig kleiner maken, anders zou hierdoor ook al afhankelijkheid optreden van het aantal, dat 2τ sec. te voren aanwezig was.

wezig waren en I_n de kans op intrede van n deeltjes bij dezelfde gegevens. Is ons van den toestand τ sec. te voren niets bekend en weten wij alleen, dat zich b deeltjes in het element v bevinden, dan noemen wij evenals v. SMOLUCHOWSKI de kansen op uittreden resp. intreden van n deeltjes A_n en E_n. [1])

Om uit de waarnemingen te bepalen in hoeverre er correlatie is, zullen wij een uitdrukking opsporen voor de gemiddelde verandering van het aantal deeltjes en wij kunnen weer trachten deze te vinden door sommeering der producten $(b - c)\ W(a\ b\ c)$ bij gegeven a en b en variabele c. Wij moeten dan de formules (1) gebruiken en de functies U_n en I_n opschrijven. Bij de berekening hiervan moeten wij bedenken, dat van de b deeltjes, die in het beschouwde element aanwezig zijn, er een zeker aantal, stel m, ook reeds τ sec. te voren zich in het element bevonden, terwijl de overige $b - m$ deeltjes van buiten naar binnen zijn gekomen «bij den eersten stap». Wij zullen kortweg deze twee soorten ter onderscheiding «oude» en «nieuwe» deeltjes noemen. De uitspringkans van een nieuw deeltje is evenals bij v. SMOLUCHOWSKI P, voor een oud deeltje P_1 (vergelijk hoofdstuk 2).

We beginnen dus na te gaan de kans U_n, dat n deeltjes het element verlaten en zullen onderstellen, dat zich hieronder bevinden i oude, dus $n - i$ nieuwe deeltjes. Men ziet dan terstond, dat, als er m oude deeltjes zijn, de kans op vertrek van i exemplaren daarvan is

$$\binom{m}{i} P_1^{\,i} (1 - P)^{m-i} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Evenzoo is de kans op uittreden van $n - i$ nieuwe deeltjes uit een totaal $b - m$ gelijk aan

$$\binom{b-m}{n-i} P^{n-i} (1 - P)^{b-m-n+i} \quad \ldots \quad (3)$$

Om U_n te kunnen opschrijven, moet men het product dezer 2 uitdrukkingen nog vermenigvuldigen met de kans, dat er onder de b deeltjes m oude zijn, d. w. z. de kans $w_s(a, m)$

[1]) Vgl. Wiener Berichte 1915, pag. 2383 en 2391.

dat van de a eerst aanwezige deeltjes er m in het element zijn gebleven en dus $b-m$ van buiten naar binnen zijn gekomen. Dan wordt:

$$U_n = \sum_m \sum_i w_s(a,m) \binom{m}{i} P_1^{\,i} (1-P_1)^{m-i}$$

$$\binom{b-m}{n-i} P^{n-i} (1-P)^{b-m-n+i} \quad . \quad (4)$$

Hier moet gesommeerd worden naar i van 0 tot m; en naar m van 0 tot a resp. tot b, al naarmate $a < b$ of $a > b$ is.

In bovenstaande formule is

$$W_s(a,m) = \frac{A_{a-m} E_{b-m}}{W(a,b)} \qquad (4a),$$

als $W(a,b)$ de aan het begin van dit hoofdstuk genoemde kans is, dat a gevolgd wordt door b en A en E de door v. SMOLUCHOWSKI l. c. ingevoerde kansen. De juistheid van deze formule voor $W_s(a,m)$ kan men op de volgende wijze inzien. Men kan het tot stand komen van de gebeurtenis, dat er eerst a deeltjes in het element aanwezig zijn en later b, verklaren door verschillende oorzaken bijv. dat er van de a deeltjes m blijven en $b-m$ nieuwe bijkomen. De kans à priori, dat er m deeltjes blijven, is A_{a-m}. De kans, dat er $b-m$ deeltjes intreden, is E_{b-m}. De kans à priori, dat van de a deeltjes m in het element blijven en er ten slotte door de intrede van $b-m$ deeltjes b zijn, is dus het product dezer kansen $A_{a-m} E_{b-m}$. Als nu de gebeurtenis (a gevolgd door b) heeft plaats gehad, dan is de kans $w_s(a,m)$, dat de genoemde oorzaak (het blijven van m deeltjes) gewerkt heeft (kans à posteriori) gelijk aan de bovengenoemde kans $A_{a-m} E_{b-m}$ gedeeld door de som dier kansen naar m, als we deze grootheid als variabele nemen, d. i.

$$W_s(a,m) = \frac{A_{a-m} E_{b-m}}{\sum_m A_{a-m} E_{b-m}}$$

en dit levert formule (4a), omdat de noemer $W(a,b)$ is.

Om I_n te berekenen onderstellen wij, dat er, op den tijd $t=0$ in het buitengebied x deeltjes zijn. Op den tijd $t=\tau$ zijn er binnen m oude deeltjes en $b-m$ nieuwe en buiten dus $\alpha - b + m$ oude en $a - m$ nieuwe. Voor de kans, dat hiervan naar binnen gaan k oude deeltjes en $n - k$ nieuwe deeltjes, vinden wij geheel als bij het voorgaande

$$\binom{\alpha - b + m}{k} P_1^{k} (1 - P_1)^{\alpha - b + m - k} . \binom{a - m}{n - k} P^{n-k} (1 - P)^{a - m - n + k}.$$

Om I_n te vinden moeten wij dit allereerst met $w_s(a, m)$ vermenigvuldigen en naar de mogelijke k en m sommeeren, doch omdat ons bovendien α onbekend is, moeten wij dit product nog vermenigvuldigen met de kans $\frac{e^{-\nu} \nu^{\alpha}}{\alpha!}$, dat er op $t = 0$ buiten α deeltjes waren [1]) en naar α sommeeren.

Derhalve is

$$I_n = \sum_{\alpha} \frac{e^{-\nu} . \nu^{\alpha}}{\alpha!} \sum_{m} \sum_{k} w_s(a, m) \binom{\alpha - b + m}{k}$$

$$P_1^{k} (1 - P_1)^{\alpha - b + m - k} \binom{a - m}{n - k} P^{n-k} (1 - P)^{a - m - n + k} \qquad (5),$$

waarbij de som te nemen is naar

k van 0 tot $\alpha - b + m$;

m van 0 tot a resp. b, al naarmate $a \leqq b$ of $a > b$;

α van 0 tot ∞ als $a \geqq b$;

α van $b - a$ tot ∞ als $a < b$.

Men zou nu kunnen trachten deze sommen door eenvoudiger uitdrukkingen te vervangen; hierbij stuit men op bezwaren. Doch dit is ook niet noodig, want men kan direct de experimenteel gevonden waarde van P gebruiken, bijv. uit de reeksen van Westgren [2]) om de kans P_1 te berekenen uit de formules (1), (4), (5) en de zoo gevonden grootheid P_1 vergelijken met de theoretische (zie blz. 28). Voor de gevallen, die wij contrôleerden, werd de zoo uit de waarnemingen berekende P_1 steeds te groot.

Vraagt men alleen naar de waarden der gemiddelden, dan kan men evenals in de door v. Smoluchowski beschouwde gevallen de ingewikkelde sommatiemethoden ook vermijden

---

[1]) Vgl. Wiener Berichte 1915, pag. 2383 en 2391.

[2]) Arkiv. f. Mat. XI, N°. 14, 1916.

en door een geheel andere redeneering komen tot de hoofdstuk I gebruikte formules voor $\overline{\triangle_n}$ en $\overline{\triangle^2}$. [1])

Wij zullen dus ook trachten langs een anderen weg een uitdrukking te vinden voor de gemiddelde verandering $\overline{\triangle_{ab}}$ van het aantal deeltjes b, dat door a is voorafgegaan. Wij merken op dat

$$\overline{\triangle_{ab}} = {}_{ab}\overline{\triangle_i} - {}_{ab}\overline{\triangle_u} \qquad (6),$$

waarin de grootheden uit het tweede lid voorstellen het gemiddeld aantal deeltjes, dat intreedt $({}_{ab}\overline{\triangle_i})$ resp. het aantal, dat uittreedt $({}_{ab}\overline{\triangle_u})$, als gegeven is, dat er eerst a zijn en later b.

Wij onderstellen, dat onder de b deeltjes zich m oude en $b-m$ nieuwe bevinden. Om ${}_{ab}\overline{\triangle_u}$ te berekenen, zoeken wij eerst het gemiddeld aantal deeltjes $\triangle_1$, dat bij gegeven m uittreedt. De kans $K(x)$, dat er x deeltjes uittreden en wel $x-y$ oude en y nieuwe, is, gelijk men gemakkelijk inziet

$$K(x) = \sum_{y=0}^{y=x} \binom{b-m}{y} (1-P)^{b-m-y} P^y \,. \binom{m}{x-y} (1-P_1)^{m-x+y} P_1^{x-y} \,. \qquad (7)$$

Nu is

$$\triangle_1 = \sum_{x=1}^{b} x \,.\, K(x) \,. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (8)$$

Om deze sommatie uit te voeren, tellen wij eerst alle producten samen, waarbij α oude deeltjes uittreden en vinden hiervoor:

$$W(\alpha) = \binom{m}{\alpha} (1-P_1)^{m-\alpha} P_1^{\alpha} \,. \sum_{k=0}^{k=b-m} (\alpha+k) \binom{b-m}{k} (1-P)^{b-m-k} P^k \qquad (9)$$

De hier voorkomende som is te splitsen als volgt:

$$\alpha \sum_{k=0}^{b-m} \binom{b-m}{k} (1-P)^{b-m-k} P^k + \sum_{k=0}^{b-m} k \binom{b-m}{k} (1-P)^{b-m-k} P^k = \alpha + (b-m) P$$

[1]) Zie ORNSTEIN. De veranderlijkheid van de groepeering van emulsiedeeltjes met den tijd.
Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. 31 Mei 1917, A'dam.

en derhalve

$$W(\alpha) = \{\alpha + (b - m) P\} \binom{m}{\alpha} (1 - P_1)^{m - a} P_1^{\alpha} \quad (10)$$

en blijkbaar is nu

$\triangle_1 = \sum_{\alpha=0}^{m} W(\alpha)$, wat bij soortgelijke splitsing als boven oplevert:

$$\triangle_1 = m P_1 + (b - m) P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Dit is dus het gemiddeld aantal uittredende deeltjes *bij gegeven m*. De uitkomst is ook direct in te zien.

Noemen wij nu de kans, dat er van de b deeltjes inderdaad m oud zijn, weer $w_s(a, m)$ dan blijkt:

$$_{ab}\overline{\triangle}_u = \sum_m w_s(a, m) \triangle_1 = \sum_m w_s(a, m) \{m P_1 + (b - m) P\} =$$

$$= b P . \sum_m w_s(a, m) + (P_1 - P) \sum_m m . w_s(a, m) =$$

$$= b P + (P_1 - P) \overline{m}_{ab} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$ [1]

Hier is $\overline{m}_{ab}$ het gemiddeld aantal deeltjes, dat in het element blijft, als er aanvankelijk a zijn en later b. Deze grootheid wordt dus zoo noodig berekend uit de formule

$$\overline{m}_{ab} = \frac{\sum m . A_{a-m} E_{b-m}}{W(a\,b)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

waarin A en E de bekende beteekenis hebben als bij VON SMOLUCHOWSKI van uit- en intreekans op grond van de formule (4 a) [2]. De sommatie in den teller is naar m en wel

van 0 tot b als $a > b$

van 0 tot a als $a < b$.

Rest dus nog te berekenen de grootheid $_{ab}\overline{\triangle}_i$ van form. 6. Hiertoe gebruiken wij een andere methode. De gebeurtenissen, die er voorvallen in en buiten ons element tusschen de oogenblikken, dat er a en dat er b deeltjes zijn, vatten wij samen onder den naam «eersten stap»; zoodra er b zijn, begint de «tweede stap». Gaan er nu bij den eersten stap q deeltjes van de a naar buiten, dan weten wij, omdat er bij het begin

[1] Men ziet weer terstond dat formule (12) uit formule (11) volgt door naar m te middelen.

[2] Vergelijk Wiener Ber. 1914, p. 2388.

van den tweeden stap b zijn, dat er bij den eersten stap $b - a + q$ ingetreden zijn. Die q uittredende deeltjes zullen zich verspreiden over het buitengebied. Beschouwen wij van dit buitengebied een bepaald element dv, dan is het duidelijk, dat de kans, dat een deeltje van binnen naar dv springt, afhangt van de grootte van dv en verder van den afstand ρ, waarop dv zich bevindt van het element A, waarvoor wij $\overline{\triangle}_{ab}$ zoeken. Wij kunnen dus zeggen dat de dichtheidsvermeerdering van dv tengevolge van het bovenstaande bedraagt: $q \,.\, f(\rho)$ [1]).

Zooals gezegd treden er bij den eersten stap $b - a + q$ deeltjes van buiten weer in A. Hierdoor is de dichtheid van dv verminderd en deze verandering is weer afhankelijk van den afstand ρ van dv en A en is dus gelijk aan

$$(b - a + q) \,.\, g(\rho),$$

waarin de functie $g(\rho)$ aangeeft, welke fractie der deeltjes uit het element dv in het element A terugkomt.

De functies f en g zijn echter gelijk, want de kans om van A naar dv te springen is gelijk aan die om van dv naar A terug te keeren; en was de dichtheid buiten aanvankelijk dus d, dan zal deze bij het eind van den eersten stap dus geworden zijn

$$d + q \,.\, f(\rho) - (b - a + q) \,.\, f(\rho) = d - (b - a) \,.\, f(\rho) \qquad (14)$$

en wij vinden nu:

$$
\begin{aligned}
{}_{ab}\overline{\triangle}_i &= \int \{ d - (b - a) \,.\, f(\rho) \} f(\rho) \,.\, d\tau = \\
&= \int d \,.\, f(\rho)\, d\tau - (b - a) \int \{ f(\rho) \}^2 d\tau = \\
&= \nu P + (b - a)\, x \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (15),
\end{aligned}
$$

als we den laatsten integraal, die evenals de eerste uitgestrekt moet worden over het geheele buitengebied, vervangen door een constante x, die in de gegevens der diffusievergelijking is uit te drukken.

Voor de gemiddelde verandering van het aantal deeltjes b in ons element A (dat vroeger a deeltjes bevatte) vinden wij dus op grond van de formules (6), (11) en (15):

$$\overline{\triangle}_{ab} = (\nu - \mathbf{b})\, \mathbf{P} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})\, \mathbf{x} - \mathbf{m}_{ab} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}) \;. \qquad (16)$$

[1]) Voor $f(\rho)$ zie blz 28.

De functie $f(\rho)$ is uit te rekenen en dus x eveneens. Deze berekening verloopt voor een bolvormig element geheel als die op blz. 16 e. v. Het punt A moet nu echter buiten den bol aangenomen worden; dit brengt verandering in de integratiegrenzen. Wij kunnen echter zonder x op deze wijze te bepalen de formule (16) toetsen.

Wij gebruiken wederom het waarnemingsmateriaal van Westgren [1]) en gaan na of deze waarnemingen steeds dezelfde waarden voor de grootheden x en P_1 opleveren en of deze laatste overeenstemmen met de op volgende wijze te berekenen waarden van P_1.

Volgens hetgeen afgeleid is in Hoofdstuk II, blz. 18, formule (9) is

$$P_1(t) = \frac{U(2\,t) - U(t)}{I(t)} = \frac{U(2\,t) - U(t)}{h - U(t)},$$

waarin h de aanvankelijk aanwezige hoeveelheid voorstelt, $U(t)$ de hoeveelheid, die zich in den tijd t naar buiten begeeft en $I(t)$ de hoeveelheid, die na den tijd t nog aanwezig is. Verder geldt

$$P(t) = \frac{U(t)}{h} \text{ of } U(t) = h \,.\, P(t);$$

hierdoor gaat de genoemde uitdrukking voor $P_1(t)$ over in

$$P_1(t) = \frac{P(2\,t) - P(t)}{1 - P(t)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Westgren publiceert l.c. drie waarnemingsreeksen A, C en E. Hiervoor is

	reeks A	C	E
$P =$	0,588	0,374	0,240
$\nu =$	1,510	1,416	1,607
$\nu P =$	0,888	0,530	0,386
$P_1 =$	0,253	0,203	0,128

[1]) Arkiv f. Mat., Astr. o. Phys. 1916, Bd. 11 N°. 14.

De hier opgegeven waarden van P_1 zijn met formule (17) berekend. Verder leveren deze reeksen de volgende waarden voor $\overline{m}_{ab}$, berekend met formule (13) en voor $\overline{\triangle}_{ab}$

	$\overline{m}_{ab}$			$\overline{\triangle}_{ab}$		
ab	Reeks *A*	*C*	*E*	*A*	*C*	*E*
00	—	—	—	0,649	0,415	0,287
01	—	—	—	+ 0,062	0,039	— 0,038
02	—	—	—	— 0,614	— 0,277	— 0,538
03	—	—	—	— 0,933	— 1.500	— 1,000
10	—	—	—	1,073	0,785	0,530
11	0,442	0,759	0,891	0,256	— 0,079	0,037
12	0,613	0,819	0,943	— 0,453	— 0,419	— 0,306
13	0,543	0,826	0,925	— 0.844	— 0,581	— 0,476
20	—	—	—	1,184	0,920	0.714
21	0,613	0,863	0,943	0,328	0,381	0,439
22	1,046	1,564	1,793	— 0,449	— 0.390	— 0,050
23	1,167	1,713	1,883	— 0,782	— 0,875	— 0,383
30	—	—		2,2	1,—	1,—
31	0,703	0,905	0,961	0,757	0.667	0,714
32	1,290	1,738	1,887	— 0.073	0,053	0,090
33	1,651	2,393	2.703	— 0,556	— 0,205	— 0,253

Natuurlijk is $\overline{m}_{ob} = 0 = \overline{m}_{ao}$.

Schrijven wij met behulp van deze tabellen de vergelijking (16) op voor alle mogelijke combinaties (a, b), daarbij x en P_1 als onbekenden beschouwend, dan blijken sommige vergelijkingen slechts één der onbekenden te bevatten, terwijl de overige geheele coëfficiënten voor x hebben. Deze is dus telkens zeer gemakkelijk te elimineeren. De waarden, die men voor x vindt, loopen zonder eenige regelmaat zeer uiteen in de reeksen A en C, die wij voor de toetsing gebruikten, evenals ook die voor P_1. De laatste zijn bovendien bijna zonder uitzondering *te groot* (vaak grooter dan P), zoodat deze contrôle op de genoemde waarnemingsreeksen toegepast zeer slechte resultaten oplevert.

Na al onze toetsingen mogen wij blijkbaar besluiten, dat de waarnemingen tot nu toe onvoldoende zijn om zelfs de theorie van v. SMOLUCHOWSKI in alle onderdeelen na te gaan en zeker niet kunnen dienen voor nog meer in bijzonderheden gaande kwesties. Het is dus wenschelijk nieuw experimenteel materiaal te verkrijgen, waarbij zooveel mogelijk alle fouten vermeden worden. Dat de waarnemingsreeksen van WESTGREN, die in ander opzicht zulke goede resultaten leverden (zie het geciteerde stuk), hier bij meer nauwkeurige toetsing minder goede resultaten geven, behoeft geen verwondering te wekken, als men het negatieve resultaat van blz. 10 e. v. hoofdstuk I overweegt.

HOOFDSTUK IV.

Beschouwingen over de waarschijnlijkheid in getallenreeksen.

Indien een reeks van getallen gegeven is, kan men, als hetzelfde getal in voldoende mate herhaald wordt, spreken van de waarschijnlijkheid van het voorkomen van dit getal in de reeks, of ook zelfs van de waarschijnlijkheid in een deel van de reeks. [1]) Wij zullen in het volgende nader ingaan op de omschrijving van de waarschijnlijkheid van het voorkomen van een getal in dergelijke reeksen, waarbij wij ons op het standpunt zullen plaatsen, dat de reeks isotroop is, d. w. z., dat er geen redenen zijn, die ons nopen te onderstellen, dat de waarschijnlijkheid in een deel van de reeks systematisch van die in een ander deel verschilt.

Behalve de vraag naar de waarschijnlijkheid $W(a)$ van het voorkomen van een getal a, kan ook die gesteld worden naar de waarschijnlijkheid, dat een getal a door een getal b gevolgd wordt p termen verder in de reeks. Deze grootheid stellen wij voor door $W(a, p, b)$. Verder kunnen wij vragen naar de waarschijnlijkheid $W(a, p, b, q, c)$, dat a na p termen gevolgd wordt door b en deze q termen verder door c. Wij zullen ons verder bepalen tot het geval, dat de intervallen p en q gelijk genomen worden. Kortheidshalve kunnen wij dan de twee bovengenoemde kansen door $W(a, b)$ en $W(a, b, c)$ voorstellen. Evenals l.c. hebben wij dan weer:

$$\sum_{a} W(a) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

[1]) Vergelijk L. S. ORNSTEIN en H. C. BURGER. Statistiek van getallenreeksen. Versl. Kon. Akad. 1919.
(Voortaan geciteerd als l. c.)

$$\sum_b W(a, b) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

$$W(b) = \sum_a W(a) \, . \, W(a, b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In deze betrekkingen moet de index, waarnaar gesommeerd wordt, alle in de reeks voorkomende getallen doorloopen. Hierbij moeten nu gevoegd worden:

$$\sum_c W(a, b, c) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

$$W(c) = \sum_x \sum_y W(x) \, . \, W(x, y) \, . \, W(x, y, c) \quad . \quad . \quad (5),$$

waarbij eerst x en dan y alle mogelijke waarden, die in de reeks voorkomen, moeten doorloopen. Om in te zien, dat tusschen $W(c)$, $W(a, b)$ en $W(a, b, c)$ de identieke betrekking (5) moet bestaan, bedenke men, dat $W(a)$ de kans voorstelt op een waarde a, $W(a, b)$ de kans, dat deze gegeven a door b wordt gevolgd en $W(a, b, c)$ de kans, dat, als a door b wordt gevolgd, na b weer c komt. In de som zijn nu alle wijzen, waarop c kan voorkomen, in aanmerking genomen, daar toch c door een van de mogelijke waarden b, en deze weer door een van de mogelijke waarden a moet voorafgegaan zijn.

Een tweede identieke betrekking kan op analoge wijze afgeleid worden n.l.:

$$W(a) \, . \, W(a, b) = \sum_x W(x) \, . \, W(x, a) \, . \, W(x, a, b) \qquad (6)$$

In de som moeten aan x alle in de reeks mogelijke waarden toegekend worden. Immers, indien a en b gegeven getallen zijn, verkrijgt men alle in het eerste lid mogelijke combinaties door in het tweede lid aan x alle denkbare waarden toe te kennen.

Het aantal vergelijkingen (5) is gelijk aan het aantal mogelijke waarden c, terwijl er juist zooveel vergelijkingen (6) zijn als er combinaties $a\,b$ kunnen optreden (verondersteld n.l. is, dat alle intervallen gelijk zijn: $p = q$).

Evenals l.c. de waarschijnlijkheden $W(a)$ berekend kunnen worden uit de kansen W met twee indices, kan men hier alle kansen $W(a)$ en $W(a, b)$ bepalen, indien de kansen $W(a, b, c)$ gegeven zijn. De vergelijkingen (6) dienen daarbij om de verhouding der waarden van alle producten $W(a) \, . \, W(a, b)$

te bepalen. De betrekkingen (6), opgevat als vergelijkingen voor de producten als onbekenden, zijn homogeen. De determinant der coëfficienten is volgens (4) nul, terwijl de nuloplossing krachtens (3) en (1) niet te gebruiken is. Verder is echter de som dezer producten volgens de vergelijkingen (3) en (1) gelijk aan één; dientengevolge zijn dus de producten te berekenen. Substitueeren wij de op deze wijze gevonden waarden in de vergelijkingen (5), dan vinden wij terstond de grootheden $W(a)$, terwijl dan tenslotte de getallen $W(a, b)$ het quotient van de betreffende producten $W(a) . W(a, b)$ en de gevonden grootheden $W(a)$ zijn. Hiermee is aangetoond, dat alle kansen W met 1 of 2 indices uit de $W(a, b, c)$ te berekenen zijn. Beschouwen wij thans het algemeene geval. Wij nemen dan aan, dat er een dusdanige correlatie in de getallenrij bestaat, dat de kans op een zekere waarde van elk n^{de} getal in de rij van de waarde der $n-1$ vorige getallen afhangt, d. w. z. wij beschouwen $W(a_1, a_2 \ldots . a_n)$ als afhankelijk van $a_1, a_2 \ldots . a_n$[1]. Wij moeten dan aantoonen, dat uit de betrekkingen tusschen de grootheden W met n indices en die van een lager aantal èn de gegeven waarden van alle $W(a_1, a_2 \ldots . a_n)$ ook alle kansen $W(a_1, a_2 \ldots . a_k)$ voor $0 < k < n$ te vinden zijn. Men zal aan de hand van het vorige gemakkelijk inzien, dat de volgende betrekkingen bestaan:

$$\sum_{a_k} W(a_1, a_2, a_3 \ldots . a_k) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarbij aan de index k de waarde 1 tot n moet worden toegekend, terwijl elk der a's alle waarden, die in de reeks kunnen voorkomen, moet doorloopen.

Verder

$$W(a) = \sum_{a_1} \sum_{a_2} \sum_{a_3} \ldots \sum_{a_{k-1}} W(a_1) . W(a_1, a_2)\, W(a_1, a_2, a_3) \ldots .$$
$$\ldots . W(a_1, a_2 \ldots . a_{k-1}, a) \quad (8)$$

waarbij weer hetzelfde voor de a's en de k geldt.

---

[1]) $W(a_1, a_2 \ldots . a_n\, a_{n+1})$ wordt geacht niet van a_1 af te hangen, zoodat $W(a_1, a_2 \ldots . a_n, a_{n+1}) = W(a_2, a_3 \ldots . a_n, a_{n+1})$.

Verder

$$W(a) \,.\, W(a, b) = \sum_{a_1} \sum_{a_2} \ldots \sum_{a_{k-2}} W(a_1) \,.\, W(a_1, a_2) \ldots$$
$$W(a_1, a_2 \ldots a_{k-2}, a) \,.\, W(a_1 \ldots a_{k-2}, a, b) \quad (9);$$

$$W(a) \,.\, W(a, b) \,.\, W(a, b, c) = \sum_{a_1} \sum_{a_2} \ldots \sum_{a_{k-3}} W(a_1) \,.\, W(a_1, a_2) \ldots$$
$$\ldots W(a_1, a_2 \ldots a_{k-3}, a) \,.\, W(a_1 \ldots a_{k-3}, a, b) \,.$$
$$W(a_1 \ldots a_{k-3}, a, b, c) \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

enz. tot ten slotte

$$W(a_1) \,.\, W(a_1, a_2) \,.\, W(a_1, a_2, a_3) \ldots W(a_1, a_2 \ldots a_{n-1}) =$$
$$= \sum_{x} W(x) \,.\, W(x, a_1) \,.\, W(x, a_1, a_2) \ldots$$
$$\ldots W(x, a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-1}) \quad \ldots \quad (11)$$

Wil men uit de W met n indices die met een kleiner aantal afleiden, dan begint men hiertoe met deze laatste vergl. (11). Schrijft men voor alle mogelijke waarden deze betrekkingen op en beschouwt men de producten P van den vorm

$$W(a_1) \,.\, W(a_1, a_2) \,.\, W(a_1, a_2, a_3) \ldots W(a_1, a_2 \ldots a_{n-1})$$

als onbekenden, dan zijn de vergl. (11) weer homogeen in deze onbekenden, evenals de vergl. (6) ten opzichte van de producten $W(a_1) \,.\, W(a_1, a_2)$. Krachtens de vgl. (7) is de determinant der coëffic. van (11) weer nul. De nuloplossing is weer onbruikbaar en wij kunnen de verhouding der genoemde producten P berekenen. Hun som is door vergl. (7) weer gelijk aan de eenheid en hiermede zijn dus de producten weder bekend. Substitueeren wij hun waarden in de vergelijkingen, die men krijgt, door in (8), (9), (10) enz. aan k de waarde n toe te kennen, dan vindt men achtereenvolgens de noodige combinaties der grootheden, n.l.:

$W(a_1)$
$W(a_1) \,.\, W(a_1, a_2)$
$W(a_1) \,.\, W(a_1, a_2) \,.\, W(a_1, a_2, a_3)$
. . . .
$W(a_1) \,.\, W(a_1, a_2) \,.\, W(a_1, a_2, a_3) \ldots W(a_1, a_2 \ldots a_{n-2})$

Iedere W met een willekeurig aantal indices $< n$ is dan door een eenvoudige deeling te verkrijgen van bovenstaande producten en de producten P op elkaar.

Men kan bij de beschrijving van een getallenrij in plaats van met waarschijnlijkheden te werken ook uitgaan van het aantal malen, dat een zekere combinatie voorkomt. Wij zullen dit aantal door $A(a_1 \ldots . a_n)$ aanduiden; de functie A stelt dus het aantal groepen $(a_1 a_2 \ldots . a_n)$ voor, hetwelk in een bepaalde getallenrij optreedt. Deze functies A kunnen ook dienen om de waarschijnlijkheden te bepalen en de genoemde relaties tusschen de kansen te bewijzen, zooals men gemakkelijk kan verifieeren. Tusschen de functies A leidt men op eenvoudige wijze betrekkingen af. Bestaat een getallenrij bijv. alleen uit de cijfers 0 en 1, dan is, gelijk men onmiddellijk inziet:

$$A(0) = A(01) + A(00) = A(10) + A(00)$$

d. w. z. $A(10) = A(01)$, wat ook volgt uit

$$A(1) = A(10) + A(11) = A(01) + A(11).$$

Verder is

$$A(00) = A(001) + A(000) = A(100) + A(000)$$

$$\text{dus } A(001) = A(100)$$

en

$$A(11) = A(110) + A(111) = A(011) + A(111), \quad \text{dus}$$

$$A(110) = A(011) \text{ enz.}$$

Uit de functies A worden de kansen W volgens definitie van de waarschijnlijkheid als volgt bepaald:

$$W(a_1, a_2 \ldots . a_n) = \frac{A(a_1 \ldots . a_n)}{\sum\limits_{a_n} A(a_1 \ldots . a_n)} =$$

$$= \frac{A(a_1 \ldots . a_n)}{A(a_1 \ldots . a_{n-1})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hebben wij een getallenrij, waarin 3 cijfers voorkomen (bijv. 0, 1, 2) die wij a, b, c zullen noemen, dan is weer:

$$A(a) = A(a, a) + A(a, b) + A(a, c) =$$
$$= A(a, a) + A(b, a) + A(c, a)$$

Dus

$$A(a, b) + A(a, c) = A(b, a) + A(c, a).$$

Evenzoo:

$$A(b, a) + A(b, c) = A(a, b) + A(c, b).$$

En

$$A(c, a) + A(c, b) = A(a, c) + A(b, c).$$

De som van deze drie betrekkingen is een identiteit. Dus slechts 2 van deze 3 vergel. zijn onafhankelijk.

Verder is

$$A(a, a) = A(a, a, a) + A(a, a, b) + A(a, a, c) =$$
$$= A(a, a, a) + A(b, a, a) + A(c, a, a)$$

Derhalve

$$A(a, a, b) + A(a, a, c) = A(b, a, a) + A(c, a, a)$$

en nog twee andere betrekkingen, door cyclische verschuiving hieruit te verkrijgen.

Gemakkelijk volgt nu, dat in het algemeene geval geldt:

$$\sum_x A(a_1, a_2 \dots a_n, x) = \sum_x A(x, a_1, a_2 \dots a_n) \quad . \quad (13),$$

waarbij aan beide zijden evenveel cijfers a voorkomen; x moet alle mogelijke waarden a aannemen. Van deze vergel. bestaan er evenveel als er cijfers in de beschouwde getallenrij optreden, daar x al deze waarden kan aannemen.

Men kan met behulp der functies A de conditie opschrijven, waaronder na een bepaald aantal termen in eene getallenrij de correlatie niet meer aanwezig is. Laat de invloed van een gegeven waarde a_1 zich nog wel doen gevoelen in den term, die zich $n - 1$ plaatsen van a_1 verwijderd bevindt, doch niet meer in den term op de n^{de} plaats, of korter gezegd laat de correlatie bij den $n - 1^{en}$ term nog aanwezig zijn, bij den n^{den} echter verdwenen. Dan is dus

$$W(a_1 . a_2 \dots a_n, a_{n+1}) = W(a_2, a_3 \dots a_n, a_{n+1}) \text{ [1]}$$

of uitgedrukt met de functies A:

$$\frac{A(a_1 \dots a_{n+1})}{A(a_1 \dots a_n)} = \frac{A(a_2 \dots a_{n+1})}{A(a_2 \dots a_n)}.$$

Is nu deze conditie voor elke mogelijke combinatie $a_1 \dots a_{n+1}$ vervuld, dan is de correlatie bij den n^{den} term verdwenen.

Wij kunnen vragen naar de voorwaarden voor de omkeerbaarheid.

Laten wij beginnen met het geval van drie getallen a, b en c. Een getallenreeks is omkeerbaar, als

$$W(a, p, b, q, c) = W(a, -p, b, -q, c) \quad . \quad . \quad (14)$$

[1] Vergelijk noot [1] op blz. 33.

Hierin zijn a, b, c de getallen; p en q de intervallen, terwijl door de notatie $-p$ resp. $-q$ wordt aangeduid, dat het getal c q stappen te voren door b, en dit p stappen te voren in de rij door a werd voorafgegaan. De waarschijnlijkheid W' in het tweede lid kan als een waarschijnlijkheid à posteriori berekend worden, dus is:

$$W(a, -p, b, -q, c) = \frac{W(c) \,.\, W(c, q, b) \,.\, W(c, q, b, p, a)}{\sum\limits_{c} W(c) \,.\, W(c, q, b) \,.\, W(c, q, b, p, a)} \quad (15),$$

waarbij de som naar c in den noemer over alle mogelijke waarden c moet worden uitgestrekt. De noemer blijkt volgens (6) gelijk te zijn aan

$$W(b) \,.\, W(b, p, a).$$

Is de reeks dus omkeerbaar, dan is volgens formule (15), als we gemakshalve de intervallen weglaten:

$$W(b) \,.\, W(b, a) \,.\, W(a, b, c) = W(c) \,.\, W(c, b) \,.\, W(c, b, a) \quad (16).$$

Nu is de voorwaarde voor omkeerbaarheid (l. c.), voor zoover betreft de waarschijnlijkheden met twee indices

$$W(b) \,.\, W(b, a) = W(a) \,.\, W(a, b) \quad . \quad . \quad . \quad (17);$$

dientengevolge zal, omdat, indien geeischt wordt, dat de reeks omkeerbaar zij, ook aan (17) voldaan moet zijn, de voorwaarde (16) in den vorm:

$$W(a) \,.\, W(a, b) \,.\, W(a, b, c) = W(c) \,.\, W(c, b) \,.\, W(c, b, a) \quad (18)$$

gebruikt kunnen worden.

Men ziet nu terstond in, dat met behulp van volledige inductie is af te leiden, dat voor n indices bij een omkeerbare reeks de betrekking

$$W(a_1) \,.\, W(a_1, a_2) \ldots . W(a_1 \ldots . a_n) =$$
$$= W(a_n) \,.\, W(a_n, a_{n-1}) \ldots . W(a_n \ldots . a_1) \quad (19)$$

moet gelden; waarvoor we de symbolische schrijfwijze

$$P_n\, W(a_1 \ldots . a_n) = P_n\, W(a_n \ldots . a_1) \quad . \quad . \quad (20)$$

kunnen invoeren.

Is een reeks omkeerbaar, dan geldt (20) voor alle mogelijke waarden n. Wij kunnen (20) met behulp van vergl. (12) ook met behulp van de functies A (pag. 35) schrijven. Passen we dit toe op formule (18), dan wordt deze, als we het aantal cijfers van de getallenrij N noemen:

$$\frac{A\,(a)}{N} \cdot \frac{A\,(a\,b)}{A\,(a)} \cdot \frac{A\,(a\,b\,c)}{A\,(a\,b)} = \frac{A\,(c)}{N} \cdot \frac{A\,(c\,b)}{A\,(c)} \cdot \frac{A\,(c\,b\,a)}{A\,(c\,b)}$$

of
$$A\,(a\,b\,c) = A\,(c\,b\,a) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Op dezelfde wijze gaat de algemeene omkeerbaarheidsbetrekking (20) over in

$$A\,(a_1, a_2 \ldots . a_n) = A\,(a_n \ldots . a_2, a_1) \; . \; . \; . \quad (22)$$

Wij zullen tenslotte deze relatie toetsen aan de reeksen van Westgren [1]) voor de gevallen, dat a niet gelijk is aan c (Voor $a = c$ is steeds aan (21) voldaan).

Reeksen A en E.

$a\,b\,c$	$A\,(a\,b\,c)$		$A\,(c\,b\,a)$	
	Reeks A	Reeks E	Reeks A	Reeks E
002	11	6	15	4
013	7	2	4	1
023	11	0	10	1
033	1	0	0	0
102	39	7	16	2
113	13	5	9	2
123	28	17	36	26
134	2	4	5	1
223	12	31	16	33
324	11	5	13	7

[1]) Arkiv. f. Mat. Band 11 n°. 14.

Reeks *C*.

a b c	*A* (*a b c*)	*A* (*c b a*)	*a b c*	*A* (*a b c*)	*A* (*c b a*)
001	52	53	142	0	2
002	14	8	143	0	0
003	2	5	145	1	0
011	62	80	153	1	0
012	27	20	203	1	1
013	5	3	213	14	7
021	13	11	214	0	1
022	11	4	215	1	0
023	5	7	223	14	19
024	3	0	224	1	3
031	4	1	233	10	15
032	2	6	234	6	9
033	0	0	240	0	0
034	4	2	243	7	6
102	17	14	244	3	0
103	4	3	245	1	5
112	42	60	304	0	1
113	8	4	314	0	0
122	34	49	324	5	3
123	19	20	325	2	0
124	1	3	334	9	6
132	14	5	335	1	4
133	7	2	344	4	6
134	3	1	345	6	2
135	2	1	354	4	5

Men ziet, dat, evenals in Hoofdstuk I reeds voor andere vragen bleek, de toetsing van de omkeerheid resultaten geeft, die verre van voldoende geacht mogen worden.

HOOFDSTUK V.

Verandering van kansen bij processen, die een beeld van mengen geven.

Wij zullen ons thans bezighouden met eenige problemen over waarschijnlijkheidsrekening, n.l. de verandering van kansen bij processen, die een beeld van mengen geven. De oplossing van deze problemen voert tot de diffusievergelijking of tot verwante vergelijkingen.

Als eerste voorbeeld noemen wij het bekende een-dimensionale stappenbeeld der Brownsche beweging. Als hierbij $W(n, k)$ de kans voorstelt, dat het springende deeltje na n stappen k plaatsen van den nulstand verwijderd is, dan voldoet deze $W(n, k)$ aan een differentievergelijking, die in de diffusievergelijking overgaat, indien de stappen op geschikte wijze tot nul en hun aantal in een eindigen tijd tot oneindig nadert. Hetzelfde blijft het geval, wanneer wij van de baan, waarop het deeltje zich beweegt een cirkel resp. een kromme maken.

In het navolgende zullen wij ons bezighouden met verschillende vragen omtrent een probleem, dat een analogon van het roeren in een aanvankelijk niet homogene verdeeling levert.

1. Een willekeurige verdeeling van teekens verandert door een proces van plaats. De verdeeling zal tot een stationaire toestand naderen, indien in het proces een element van toeval aanwezig is.

Wij zullen dit door eenige voorbeelden aantoonen.

Wij beginnen daartoe met het volgende geval. Gegeven een *zeer groot* aantal $2\ N$ genummerde teekens; er zullen twee soorten teekens zijn en wel van elk evenveel. (Met het oog op de analogie met physische vraagstukken zij het getal N zeer groot). Wij noemen deze teekens om de gedachten te bepalen 0 en 1. Verder is gegeven een zak met $2N$ cijfers. Hieruit trekken wij tegelijk twee cijfers en verwisselen vervolgens de teekens op de betreffende plaatsen. Na elke trekking worden de cijfers in den zak teruggelegd. Gevraagd de kans, dat, na een zeer groot aantal trekkingen n, op een bepaalde plaats k een bepaald teeken staat, bijv. een 0 of een 1. Wij noemen de kans, dat er na de n^{de} trekking op de k^{de} plaats een 0, resp. een 1 staat $W(n, k, 0)$, resp. $W(n, k, 1)$. Steeds is de som van deze kansen gelijk aan de eenheid:

$$W(n, k, 0) + W(n, k, 1) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Elk dezer grootheden W voldoet aan een differentievergelijking, die wij als volgt vinden. Een cijfer 0 kan na n trekkingen zich op de k^{de} plaats bevinden door de volgende oorzaken:

1°. Wanneer er reeds een 0 stond en deze bij de n^{de} loting niet getroffen wordt.

2°. Wanneer er na de $n - 1^e$ trekking een 0 stond en deze door een andere 0 werd vervangen.

3°. Wanneer er van te voren een 1 stond en deze door een 0 werd vervangen.

Nu is de kans, dat een bepaald cijfer wordt geraakt

$$\frac{2N-1}{C^2_{2N}} = \frac{1}{N};$$

dus de kans, dat een bepaald cijfer niet wordt geraakt $\frac{N-1}{N}$. Wanneer er op de k^{de} plaats een 0 staat, is de kans een andere 0 te raken $\frac{N-1}{2N-1}$ en als er op de k^{de} plaats zich bevindt een 1, is de kans, dat men een 0 loot $\frac{N}{2N-1}$. Derhalve luidt de gezochte differentievergelijking

$$W(n, k, 0) = W(n-1, k, 0) \cdot \frac{N-1}{N} + W(n-1, k, 0)$$

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{N-1}{2N-1} + W(n-1, k, 1) \frac{1}{N} \cdot \frac{N}{2N-1}.$$

Met behulp van formule (1) vindt men vervolgens gemakkelijk:

$$W(n, k, 0) = \frac{2N-3}{2N-1} W(n-1, k, 0) + \frac{1}{2N-1} \qquad (2)$$

Is derhalve $W(n-1, k, 0) = {}^1/_2$, dan is ook volgens formule (2) $W(n, k, 0) = {}^1/_2$, d. w. z., als bij den aanvang de kans op een 0 voor de k^{de} plaats $= {}^1/_2$ is, dan blijft $W(n, k, 0)$ steeds $= {}^1/_2$ en men kan gemakkelijk, door vgl. (2) herhaaldelijk toe te passen, bewijzen, dat, als de aanvangskans $W(0, k, 0) = a \neq {}^1/_2$ is, dat dan toch $\lim\limits_{n=\infty} W(n, k, 0) = {}^1/_2$.

Men vindt n.l.

$$W(n, k, 0) = {}^1/_2 - \frac{{}^1/_2 - a}{p^n} \text{ en } W(n, k, 1) = {}^1/_2 + \frac{{}^1/_2 - a}{p^n},$$

$$\text{waarin } p = \frac{2N-1}{2N-3} > 1.$$

$$\text{Dus} \quad \lim_{n=\infty} W(n, k, 0) = \lim_{n=\infty} W(n, k, 1) = {}^1/_2.$$

Gelijk men ziet, is de differentievergelijking voor het thans beschouwde geval onafhankelijk van het nummer k van de plaats, die wij beschouwen. Dit wil zeggen: de kans op een 0 of 1 verandert voor de verschillende plaatsen onafhankelijk; er zal na een groot aantal verschuivingen geen correlatie tusschen de kansen voor verschillende plaatsen bestaan, ook als die in den aanvang mocht bestaan hebben.

Trekken wij uit den zak de nummers niet beide tegelijk, doch nemen wij er eerst een en daarna nog een en verwisselen wij de teekens op de betreffende plaatsen, dan verandert er niets, want de kans om de k^{le} plaats te treffen is weer het aantal gunstige gevallen gedeeld door het totaal aantal mogelijke gevallen $= \dfrac{2(2N-1)}{2N(2N-1)}$ en dit is weer $\dfrac{1}{N}$.

In werkelijkheid is natuurlijk elke bepaalde distributie der teekens over de elementen van de rij even waarschijnlijk. Dat men bij beschouwingen als hierboven gegeven vindt, dat er een bepaalde stationaire toestand is, hangt samen met de probleemstelling, die ons bezig houdt. Wat wij op de gegeven wijze vinden, is niet de waarschijnlijkheid van een bepaalde verdeeling der cijfers, doch wij leeren iets omtrent de verwachting, dat er een bepaald teeken op een bepaalde plaats komt door een groot aantal verschuivingen. De uitkomst is, dat, welk teeken ook in den aanvang op de plaats gestaan moge hebben, de kans voor een nul of een één na een voldoend groot aantal trekkingen $^1/_2$ wordt. Men kan dit ook inzien, door te overwegen, dat onder alle mogelijke configuraties van teekens, die na n trekkingen uit een bepaalde configuratie ontstaan kunnen, die, waarin op de k^e plaats een nul en die, waarin op deze plaats een één staat, in gelijke mate vertegenwoordigd zijn. Men kan ook de kans op een afwijking van de kans $^1/_2$ nagaan. Dit zal ons voor de afwijking de wet van Gauss opleveren.

Men kan uit de differentievergelijking (2) een differentiaalvergelijking afleiden. Wij laten daartoe de n trekkingen plaats hebben in een tijd t met tusschenruimten van τ sec.; dus $t = n\tau$, waarbij τ tot nul zal naderen; dan kan men formule (2) schrijven in den volgenden vorm:

$$W\{(n+1)\tau, k\} = \frac{2N-3}{2N-1} \cdot W(n\tau, k) + \frac{1}{2N-1} \text{ of}$$

$$W\{(n+1)\tau, k\} - W(n\tau, k) = -$$

$$- \frac{2}{2N-1} W(n, \tau, k) + \frac{1}{2N-1}.$$

Om de afhankelijkheid van de grootheid W van den tijd te bepalen, nemen wij nu den tijd t eindig en het daarin plaats hebbende aantal trekkingen n zeer groot, dus τ zeer klein. Wij kunnen vervolgens den eersten term uit het eerste lid van onze vergelijking in een reeks ontwikkelen en vinden

$$\tau \frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{2}{2N-1} W + \frac{1}{2N-1},$$

waarbij wij nu zullen onderstellen, dat het product $(2N-1)\tau$ eindig blijft; wij stellen het voor door $2p$ en vinden dan de vergelijking

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{p} W + \frac{1}{2p},$$

waarvoor de oplossing luidt:

$$W = {}^1/_2 + A \cdot e^{-\frac{t}{p}}, \text{ waarin } A = W_0 - {}^1/_2,$$

$$\text{dus } W = {}^1/_2\left(1 - e^{-\frac{t}{p}}\right) + W_0 e^{-\frac{t}{p}}.$$

Ook in het thans beschouwde geval is het verloop van de kans W met t onafhankelijk van den index k. [1])

Deze uitkomst doet de superpositie zien van twee effecten, het laatste het verminderen van den invloed van de aanvangskans W_0; het eerste is een voor de rij typische kans. Het beschouwde vraagstuk is te vergelijken met een vraagstuk van warmtegeleiding. Zij n.l. een lichaam van bepaalde temperatuur T_0 gegeven, dat door uitwendige geleiding warmte afstaat aan de omgeving, die een temp. T_1 bezit. De betreffende vergelijking wordt nu:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = -k(T - T_1),$$

waarin c de soortelijke warmte is en k het uitwendig geleidingsvermogen.

De oplossing is

$$T = T_1(1 - e^{-at}) + T_0 e^{-at}$$

Dit is dezelfde vergelijking als de bovenstaande, indien voor $T_0 = W_0$; $T_1 = {}^1/_2$ en voor $a = \frac{1}{p}$ genomen wordt.

Wij hebben hier steeds gelet op hetgeen gebeurde op een bepaalde plaats. Bij waarnemingen in de natuur kan dit gewoonlijk niet geschieden, doch men vindt iets omtrent de middelwaarde voor meerdere elementen of omtrent hare fluctuatie. Iets, wat hierop betrekking heeft, verkrijgen wij, als wij ons nu afvragen: welke is de kans, dat onder a opvolgende plaatsen ($a < 2N$) zich er x bevinden, die na n trekkingen een bepaald teeken bijv. een 1 dragen. Wij noemen deze kans $W(n, x)$. In het beschouwde gebied kan het aantal cijfers 1 met een verminderen doordat een cijfer van de groep, hetwelk een 1 is, getroffen wordt en verwisselt met een cijfer

[1]) Wij kunnen tot het geval van de distributie van punten op een lijn overgaan door de genummerde punten op zeer kleine afstanden δ te kiezen, zoodat voor een eindige lijn l is $\delta = \frac{l}{2N}$.

buiten de groep, terwijl dit een 0 is. De kans, dat ons gebied geraakt wordt, is $\frac{a}{2N}$; evenzoo de kans, dat een cijfer er buiten geloot wordt $\frac{2N-a}{2N}$. Als 't gebied geraakt wordt en x cijfers 1 bevat, dan is de kans, dat het getroffen nummer een 1 draagt, $\frac{x}{a}$. De kans, dat een plaats van het buitengebied 0 of 1 draagt, is bij voldoend groote N gelijk aan $^1/_2$. Dus is de kans op vermindering $\frac{a}{2N} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{2N-a}{2N} \cdot {}^1/_2$. Evenzoo is de kans op vermeerdering (een 0 uit het gebied wisselt met een 1 er buiten)

$$\frac{a}{2N} \cdot \frac{a-x}{a} \cdot \frac{2N-a}{2N} \cdot {}^1/_2.$$

Het aantal cijfers 1 kan hetzelfde n.l. x blijven:

1°. doordat 2 cijfers van het buitengebied worden geloot.

2°. doordat 2 cijfers uit het gebied worden geraakt.

3°. doordat een 0 uit het gebied wisselt met een 0 er buiten en idem een 1.

De kans, dat 2 cijfers buiten worden geloot, is $\frac{(2N-a)(2N-a-1)}{2N(2N-1)}$; evenzoo voor 2 cijfers binnen $\frac{a(a-1)}{2N(2N-1)}$; de kans dat een cijfer binnen wisselt met eenzelfde cijfer buiten is

$$\frac{a}{2N} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{2N-a}{2N} \cdot {}^1/_2 + \frac{a}{2N} \cdot \frac{a-x}{a} \cdot \frac{2N-a}{2N} \cdot {}^1/_2 =$$

$$= \frac{a}{2N} \cdot \frac{2N-a}{2N} \cdot {}^1/_2.$$

Men ziet nu gemakkelijk, dat de kans $W(n, x)$ voldoet aan de volgende differentievergelijking:

$$W(n+1, x) = W(n, x) \left\{ \frac{a(a-1)}{2N(2N-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2N-a)(2N-a-1)}{2N(2N-1)} + \frac{a}{2N} \cdot \frac{2N-a}{2N} \cdot {}^1/_2 \right\} +$$

$$+ W(n, x-1) \frac{a-x+1}{2N} \cdot \frac{2N-a}{2N} \cdot {}^1/_2 +$$

$$+ W(n, x+1) \cdot \frac{x+1}{2N} \cdot \frac{2N-a}{2N} \cdot {}^1/_2.$$

Op de oplossing van zulke differentievergelijkingen komen wij hieronder nader terug (blz. 59).

Men kan de schuivingen, die door de loting plaats hebben, ook op de volgende wijze beschouwen. Op een zekere plaats k staat bij elke schuiving een 0 of een 1 en men kan zich nu afvragen hoeveel maal van de n trekkingen heeft er op de plaats k een 1 gestaan en hoeveel maal een 0.

Men kan dan nagaan of er op de beschouwde plaats gedurende langen tijd een bepaald teeken gestaan heeft en komt zoo naast een kans, die analoog is met die in een ruimte-ensemble tot een analoog met die in een *tijd-ensemble* der Statistische Mechanica. Er bestaat een betrekking tusschen deze kansen. Wij noemen $W(n, a)$ de kans, dat er op de betrokken plaats k in n trekkingen a cijfers 0 hebben gestaan. Er kunnen in $n+1$ trekken a nullen zijn gekomen, doordat er 1 trek te voren reeds a geweest waren en na de laatste loting k een 1 draagt of er kunnen in n trekken $a-1$ zijn geweest, terwijl na de laatste loting k een 0 draagt. Derhalve:

$$W(n+1, a) = W(n, a) \,.\, W(n+1, k, 1) + W(n, a-1)\,(W(n+1, k, 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nu was $W(n+1, k, 1) = {}^1/_2 + ({}^1/_2 - \alpha)\, r^{n+1} = C_{n+1}$

en $\quad W(n+1, k, 0) = {}^1/_2 - ({}^1/_2 - \alpha)\, r^{n+1} = d_{n+1}$

als $\quad r = \dfrac{2N-3}{2N-1} < 1$ en $\alpha = W(0, k, 0)$.

Bij voldoend groote n is $d_{n+1} = {}^1/_2$.

Schrijven wij vergelijking (3) op voor alle mogelijke waarden a n.l. $a = 0$ tot $a = n+1$ en tellen wij de zoo verkregen vergelijking na vermenigvuldigen met a op, dan vinden wij:

$$\overline{W(n+1, a)} = \overline{W(n, a)} + d_{n+1}.$$

Dus bij voldoend groote n is $\overline{W(n, a)} = {}^1/_2\, n$.

Is het aantal trekkingen n zoo groot, dat wij voor d_{n+1} de waarde ${}^1/_2$ mogen substitueeren, dan gaat vergelijking (3) over in

$$W(n+1, a) = {}^1/_2\, W(n, a) + {}^1/_2\, W(n, a-1).$$

De oplossing luidt dan:

$$W(n, a) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{a},$$

als men in aanmerking neemt, dat $\sum_a W(n, a) = 1$.

Hiermede is de bovengenoemde kans $W(n, a)$ bepaald, terwijl wij tevens aangetoond hebben, dat het gemiddeld aantal malen, dat in n trekkingen een 0 op de beschouwde plaats staat, $\frac{1}{2} n$ is, zooals te verwachten was.

Aan de hand van het bovenstaande kan men gemakkelijk afleiden, dat de kans op een bepaalde afwijking van dit gemiddelde $\frac{1}{2} n$ uit de wet van Gauss volgt.

2. Wij zullen nu een ander probleem behandelen. Wij trekken nu slechts één nummer en verwisselen het teeken op de betreffende plaats *met het rechts er van staande teeken*. Als de N^{de} plaats getroffen wordt, zullen wij onderstellen, dat er geen verwisseling zal plaats grijpen.

Verder nemen wij de gegevens van het vorige over. Wij noemen echter het aantal plaatsen voortaan N.

De kans, dat een bepaalde plaats wordt geraakt, is $\frac{1}{N}$; eischt men, dat de k^{de} plaats onaangeroerd moet blijven, dan mogen de getallen k en $k-1$ niet geraakt worden; de kans hierop is $\frac{N-2}{N}$. Door $W(n, k)$ stellen wij de kans voor, dat zich een bepaald teeken op de k^{de} plaats bevindt.

Men ziet nu gemakkelijk in, dat voor deze kans de vergelijking:

$$W(n, k) = W(n-1, k) \cdot \frac{N-2}{N} + W(n-1, k+1)\frac{1}{N} + \\ + W(n-1, k-1)\frac{1}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

geldt.

Ten einde de differentievergelijking voor $W(n, k)$ op te lossen, trachten wij daaraan te voldoen door te stellen:

$$W(n, k) = A_k \cdot e^{-na} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De grootheden A_k hangen van k af. Het getal a wordt hieronder nader berekend. Na substitutie in de differentievergelijking en deelen door e^{-na} vinden wij:

$$A_{k-1} + C \,.\, A_k + A_{k+1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3),$$

waarin

$$C = N\left(\frac{e^a - 1}{e^a}\right) - 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

gesteld is.

Wij kunnen de vergelijking (3) opgeschreven denken voor alle mogelijke waarden k van 1 tot N en krijgen dan voor de N onbekende functies A_k een stel van N homogene lineaire vergelijkingen. Zal een andere dan de nuloplossing voldoen, dan moet de determinant der coëfficiënten gelijk aan nul zijn.

Als wij bedenken dat tengevolge van de condities aan de randen [1]) de eerste en de laatste vergelijking slechts twee termen bevatten met coëfficiënten C, 1 resp. 1, C dan blijkt deze determinant te zijn (N rijen):

$$D = \begin{vmatrix} C & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & C & 1 & 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & C & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & C & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & C \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \quad (5)$$

Stellen wij

$$C = -2\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

dan is deze determinant

[1]) Uit deze condities, die op de vorige pg. genoemd zijn, kan voor de eerste en de N^{de} plaats gemakkelijk de vergelijking worden afgeleid, die in de plaats van (1) komt.

$D = (-1)^N \dfrac{\sin(N+1)\theta}{\sin\theta}$ [1]. In ons geval is dus $\sin(N+1)\theta = 0$ of

$$(N+1)\theta = \pi s \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

waarin $s = 1, 2, 3, \ldots\ldots N$ (grooter waarden van N geven hetzelfde voor θ weer en $s = 0$ geeft $\theta = 0$ en $D = 1$, wat niet te gebruiken is). De formule (7) geeft nu N waarden θ, die volgens formule (6) correspondeeren met N waarden C en elk van deze geeft met formule (4) een waarde voor a:

$$a_1 \; a_2 \ldots\ldots a_s \ldots\ldots a_n .$$

Wat de oplossing der grootheden A_k aangaat, hun verhouding is gelijk aan de verhouding van de minoren van de elementen van een willekeurige rij van D en daarmee is elke A_k uit te drukken in één dezer grootheden bijv. A_1. Omdat een constante b ook een oplossing van de differentievergelijking (1) is, vinden wij dus als meest algemeene oplossing

$$W(n,k) = b + \sum_{s=1}^{s=N} A_1 \, . \, f_k(s) \, . \, e^{-a_s n} \ldots\ldots \text{[2]} \quad . \quad (8)$$

Hieruit volgt terstond, dat

$$\lim_{n=\infty} W(n,k) = b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

d. w. z. voor $n = \infty$ zijn alle $W(k)$ gelijk en, daar steeds bij elke n

$$\sum_{k=0}^{k=N} W(k) = {}^1\!/_2\, N. \text{ is ook } \lim_{n=\infty} W(n,k) = b = {}^1\!/_2 \quad (10).$$

Iedere θ_s, die uit formule (7) volgt, geeft een bepaalde C, die den determinant D gelijk nul maakt De minoren van D, welke de verhouding der A_k bepalen, hangen dus af van de gekozen θ_s. Bij elke θ_s behoort dus een stel verhoudingsgetallen voor de A_k. Daarom bestaat de som in het tweede lid van betrekking (8) uit s termen.

---

[1] Vergelijk RAYLEIGH Theory of Sound vol. 1, pg. 174.

[2] Dat deze reeks kan convergeeren volgt uit de waarde van e^{-a}, n.l. $\frac{1}{N}(N - 4\sin^2 {}^1\!/_2\,\theta)$, wat onmiddelijk volgt uit de formules (4) en (6). Men ziet hieruit ook, dat de getallen a reeel zijn.

Het btijkt gemakkelijk, dat de minoren der elementen van de *eerste rij* van D van dezelfde soort zijn als D zelf; n.l. is de minor van het p^{de} element van de 1^e rij van D gelijk aan

$$\frac{\sin(N-p+1)\theta_s}{\sin\theta_s}(-1)^{N-p}.(-1)^{p+1}. \quad . \quad (11).$$

Wij mogen dus stellen:

$$A_k = P_s . \sin(N-k+1)\theta_s . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

waaruit de P_s nader bepaald moeten worden. De algemeene oplossing is dus:

$$W(n,k) = {}^1/_2 + \sum_{s=1}^{N} P_s . \sin(N-k+1)\theta_s e^{-n a_s} \quad (13)$$

De N grootheden P_s moeten gevonden worden uit den aanvangstoestand, waarin $n=0$

$$W(0,k) = {}^1/_2 + \sum_s P_s . \sin\frac{k\pi s}{N+1}(-1)^{s+1} \quad . \quad (14);$$

welke formule ontstaat door gebruik te maken van de betrekking $(N+1)\theta_s = \pi s$ dus $\sin(N-k+1)\theta_s = (-1)^{s+1}\sin k\theta_s$.

Er doen zich hier direct de volgende mogelijke problemen voor:

a) De beginverdeeling der teekens is gegeven. Dan is $W(0,k) = 0$ of 1, al naar men weet, dat er een 0 of een 1 staat.

b) De aanvangstoestand is gegeven zóó, dat $W(0,k) = f(k)$ en $\sum f(k) = {}^1/_2 N$, d. w. z. de verdeeling is door het toeval bepaald op bekende wijze.

c) De aanvangsverdeeling is zóó, dat *elke* $W(0,k) = {}^1/_2$. Dit is juist het geval, waarin de vergelijkingen (14) homogeen zijn en dus de P_s niet gevonden zouden kunnen worden. Men leidt echter uit de differentievergelijking (1) dan terstond af, dat *iedere* $W(n\,k)$ *voor elke* n en *voor elke* k dan steeds ${}^1/_2$ blijft. [1])

---

[1]) Terloops zij hier opgemerkt dat ook terstond uit vergelijking (1) blijkt, dat, wanneer op een gegeven oogenblik de som van 2 kansen W voor plaatsen, die zich bevinden symmetrisch ten opzichte van het midden, samen $= 1$ is, dit voortdurend het geval blijft.

Om de grootheden P_s op te lossen schrijven wij de vergelijkingen (13) en (14) in den vorm:

$$\{ W(0, k) - {}^1/_2 \} = \sum_s P_s \,.\, \sin (N - k + 1) \,.\, \theta_s \quad . \quad (15)$$

Wij noemen het eerste lid van deze vergelijking ϕ_k en vermenigvuldigen naar analogie van de bepaling der coëfficiënten van een reeks van FOURIER de eerste vergelijking met $\sin \dfrac{N s \pi}{N+1}$;

de tweede vergelijking met $\sin \dfrac{(N-1) s \pi}{N+1}$;

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

de N^{de} vergelijking met $\sin \dfrac{s \pi}{N+1}$.

en tellen op; dan verdwijnen de coefficiënten van alle P_m behalve van P_s. De coëfficiënt van P_s wordt ${}^1/_2 (N+1)$ en wij vinden dus:

$${}^1/_2 (N+1) P_s = \sum_{k=1}^{k=N} \phi_k \,.\, \sin \frac{(N-k+1) s \pi}{N+1} \quad . \quad (16)$$

Bedenkt men weder, dat

$$\sin \frac{(N-k+1) s \pi}{N+1} = (-1)^{s+1} \sin \frac{k s \pi}{N+1}$$

is, dan vindt men:

$$P_s = \frac{2}{N+1} \sum_k \{ W(0, k) - {}^1/_2 \} (-1)^{s+1} \,.\, \sin \frac{k \pi s}{N+1} \quad (17).$$ [1]

Men kan het vraagstuk ook omkeeren en vragen van welken begintoestand, d. w. z. van welke $W(0, k)$, men moet uitgaan om een stel bepaalde waarden voor de P_s te vinden. Stelt men den eisch, dat alle P_s gelijk zijn aan een nader te berekenen P, dan blijkt alleen mogelijk $P = 0$ en wel voor het reeds genoemde triviale geval $W(0, k) = {}^1/_2$.

Als *voorbeeld* van de algemeene oplossing diene het volgende. Wanneer gegeven is, dat alle nullen aan een kant van de rij en alle éénen aan de andere zijde liggen, dan is

---

[1] Deze formule leent zich goed voor de volgende controle. Schrijft men de vergelijking (15) op voor iedere waarde van k en telt men op, dan blijken beide leden van de somvergelijking gelijk aan nul.

$$W(0, k) = 1 \text{ voor } k = 1, 2, \ldots \ldots {}^1/_2 N$$

en $$W(0, k) = 0 \text{ voor } k = {}^1/_2 N + 1, \ldots \ldots N.$$

Volgens formule (17) is aan

$$P_s = \frac{2}{N+1} \cdot (-1)^s \cdot \frac{T}{2 \sin \alpha}, \text{ als } \alpha = \frac{\pi s}{N+1} \qquad \text{en}$$

$$T = -1 + \cos \pi s + 2 \sin \frac{\pi s}{2} \left(\sin \frac{N-1}{2} \alpha \pm 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

waarvan men het bovenste teeken moet nemen, als $^1/_2 N$ even is en de onderste teekens, als $^1/_2 N$ oneven is.

Wij kunnen evenals bij het eerste probleem uit de differentievergelijking (1) weer een differentiaalvergelijking afleiden. Wij denken de plaatsen der teekens in de punten van de X-as van een coördinatenstelsel op kleine afstanden δ en laten de n trekkingen plaats hebben in een tijd t met tusschenruimten van τ sec; zoodat $t = n\tau$. Dan kan men formule (1) schrijven in den volgenden vorm:

$$N \,.\, W((n+1)\tau, x) = (N-2) \,.\, W(n\tau, x) + W(n\tau, x-\delta) + \\ + W(n\tau, x+\delta)$$

$$\text{of } N \{ W((n+1)\tau, x) - W(n\tau, x) \} = \\ = \{ W(n\tau, x+\delta) - W(n\tau, x) \} - \{ W(n\tau, x) - W(n\tau, x-\delta) \} \quad (18)$$

Wij nemen nu het interval t eindig, het aantal trekkingen n zeer groot, dus τ zeer klein; en eveneens het aantal plaatsen N zeer groot en δ zeer klein, zoodat het geheele gebied waarin de verschuivingen plaats grijpen een eindige lengte $N\delta = l$ heeft.

Wij kunnen dan beide leden van formule (18) in een reeks ontwikkelen en vinden dàn gemakkelijk

$$N\tau \frac{\partial W}{\partial t} = \delta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \cdot \quad \ldots \ldots \quad (19).$$

Hier verkrijgen wij dus de bekende diffusievergelijking.

Wij moeten onderstellen, dat het product $N\tau$ blijft van de orde δ^2, zóódanig dat de verhouding $\frac{\delta^2}{N\tau}$ een eindig getal, de diffusieconstante, is.

Wij moeten nu ook nog de randvoorwaarden afleiden. [1])

---

[1]) Zie blz. 47.

Om deze te vinden, bedenken wij, dat de differentievergelijking (1) voor het geval $k = N$ overgaat in:

$$W(n, N) = \frac{N-1}{N} \,.\, W(n-1, N) + \frac{1}{N} W(n-1, N),$$

waaruit op de bekende wijze de differentiaalvergelijking

$$N\tau \, \frac{\partial W}{\partial t} = -\delta \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x = N\delta} \quad . \quad . \quad . \quad : \quad (20).$$

volgt.

Nu is ondersteld dat δ^2 van de orde $N\tau$ is; derhalve is de kleine grootheid δ groot ten opzichte van $N\tau$. Dus moet volgens vergelijking (20) $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x = N\delta}$ gelijk aan nul zijn.

Wij kunnen als oplossing van de diffusievergelijking hier gebruiken:

$$W = {}^1/_2 + {}^1/_2 \sum_{s=1}^{\infty} e^{-\frac{D s^2 \pi^2}{L^2} t} \sin \frac{s \pi x}{L} \text{ [1]},$$

waaruit ook weer terstond volgt, dat voor $t = \infty$ elke $W = {}^1/_2$ wordt. Deze oplossing is ook uit de oplossing van het discrete probleem, formule (13), te verkrijgen door daarin N tot oneindig te laten naderen en voor $N\delta$, L; voor $n\tau$, t en $\frac{\delta^2}{N\tau} = D$ in te voeren [2].

Bij andere afspraken omtrent de verwisseling aan den rand veranderen de grenscondities. Men krijgt hierbij bijv. de grensconditie $W =$ constant $= {}^1/_2$ op dezelfde wijze als boven, indien men het beschouwde gebied opvat als deelgebied van een ander en wel zóó, dat, wanneer een randplaats zou moeten wisselen met een plaats buiten ons gebied, de kans op een nul ${}^1/_2$ is. Het probleem komt dan overeen met dat van een lichaam dat aan de grens in verbinding is met een oneindig groot reservoir van constante temperatuur (warmtegeleiding), of een mengsel, dat grenst aan een reservoir van constante concentratie (diffusie).

---

[1] Vergelijking HELMHOLTZ VI p. 141.

[2] Dit blijkt onmiddelijk bij uitwerken van de formule voor e^{-a} van blz. 49, noot 2.

Wij kunnen hier opmerken, dat het mogelijk is uit de diffusievergelijking de gemiddelden op den tijd t te berekenen, als de gemiddelden op den tijd nul bekend zijn. Om de gemiddelden $\overline{x^n} = \int x^n \, . \, W\, d\, x$ te berekenen, bedenken wij, dat uit de diffusievergelijking volgt:

$$\int x^n \frac{\partial\, W}{\partial\, t}\, dx = \int D \frac{\partial^2\, W}{\partial\, x^2}\, dx \, . \, x^n.$$

Na partieel integreeren vinden wij, omdat de stukken aan de grenzen gelijk aan nul zijn:

$$\frac{\partial}{\partial\, t}\, \overline{x^n} = n\,(n-1)\, D\, \overline{x^{n-2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$\overline{x} = C_1$$

$$\overline{x^2} = 2\, D\, t + C_2 \text{ etc.}$$

De gemiddelden zijn met behulp van (21) af te leiden. De integratieconstanten C volgen uit de initiaalwaarden voor deze gemiddelden.

Vatten wij een bepaald cijfer op een bepaalde plaats k in het oog, dan kunnen wij vragen naar de kans, dat dit bepaalde cijfer in n trekken p plaatsen naar rechts of naar links is verschoven. Noem deze kansen

$$W\,(n, k+p) \text{ en } W\,(n, k-p).$$

Een dergelijke vraag had bij de gegevens van het eerste probleem weinig zin, omdat door de loting en het terugleggen van de nummers de kans op een bepaalde verplaatsing even groot is als op iedere andere willekeurige verplaatsing.

Bij dit probleem kan het cijfer bij de $(n-1)^e$ trekking reeds p plaatsen verschoven zijn en niet geraakt worden; of $(p-1)$ plaatsen verschoven zijn en geraakt worden, waardoor het met zijn rechterbuurman wisselt; of $(p+1)$ plaatsen verschoven zijn en wisselen met zijn linkerbuurman, doordat deze getroffen wordt. Dientengevolge bestaat tusschen de beschouwde kansen de betrekking:

$$W\,(n+1, k+p) = W\,(n, k+p) \, . \, \frac{N-2}{N} +$$

$$W\,(n, k+p+1) \, . \, \frac{1}{N} + W\,(n, k+p-1) \, . \, \frac{1}{N} \, . \quad (22)$$

Wij krijgen dus voor de thans beschouwde kans dezelfde differentievergelijking als (1) en als wij van deze op een differentiaalvergelijking overgaan weer de diffusievergelijking. Voor het continue probleem kunnen wij in dit geval de hoofdoplossing van de diffusievergelijking gebruiken. Van elk punt k af verplaatst zich een deeltje dus als bij het diffusieproces en de samenwerking der effecten op een bepaalde plaats is dus op te vatten als het diffusie-effect van alle punten in de omgeving. Gaat men dus van een gegeven verdeeling uit, dan kan het ontstaan van den stationairen toestand verklaard worden als een reeks diffusieprocessen van de verschillende punten uit, waarbij de hoofdoplossing op de gebruikelijke wijze een rol speelt.

Evenals uit de differentiaalvergelijking kunnen wij ook de gemiddelden afleiden uit de differentievergelijking (22). Vermenigvuldigen wij deze met p^a en schrijven wij haar op voor alle mogelijke waarden p (van $p = -k$ tot $p = N - k$), dan vindt men na sommatie:

$$N \,.\, \overline{W^a(n+1, k+p)} = N \,.\, \overline{W^a(n, k+p)} +$$
$$+ 2 \sum_x C^a_{2x} \,.\, \overline{W^{a-2x}(n, k+p)} -$$
$$(-k-1)^a \, W(n, 0) - (N-k+1)^a \, W(n, N).$$

De middelwaarden zijn dus wederom uit elkaar af te leiden als bekend is, hoe groot zij zijn voor $n = 0$. d. w. z. bij den aanvang.

Bij het verwisselen van de teekens 0 en 1 behoeft men zich niet tot een één-dimensionaal gebied te beperken, doch het kan ook in een plat vlak plaats hebben. Wij denken ons de cijfers 0 en 1, waarvan er weer evenveel aanwezig zijn, verdeeld over de N^2 punten van het platte vlak, wier coordinaten x en y geheele getallen zijn. Door het lot wordt een bepaalde plaats aangewezen. De kans om een bepaalde plaats (x, y) te treffen is $\frac{1}{N^2}$ waarvoor wij C zullen schrijven.

Wij stellen ons nu voor, dat het cijfer, dat zich op deze plaats bevindt, verwisselt met een der acht omliggende cijfers, De kans, om met een bepaald cijfer van deze acht te verwisselen, is telkens $\frac{1}{8}$. Wij vragen naar de kans, dat zich na n trekkingen op de plaats (x, y) een 0 bevindt en noemen deze kans $W_n(x, y)$. Het is mogelijk, dat op de plaats (x, y) na den voorlaatsten trek reeds een 0 stond en dat deze bij de laatste trekking niet geraakt wordt. Dit kan gebeuren 1° doordat de plaats (x, y) en de 8 omliggende niet geloot worden. De kans hiervoor is $1-9C$.

2° doordat een der omliggende plaatsen wordt getroffen, doch het wegspringende cijfer zich niet naar de plaats (x, y) begeeft. Hierop is de kans $7\,C$. Het is evenzeer mogelijk, dat het cijfer op de plaats (x, y) wel wordt geraakt en wisselt met een 0 op een der omliggende plaatsen of dat een cijfer 0 op een dier plaatsen getroffen wordt en naar de plaats (x, y) springt.

Men ziet nu gemakkelijk, dat de kans $W_n(x, y)$ voldoet aan de volgende differentie-vergelijking:

$$
\begin{aligned}
W_{n+1}(x, y) &= (1-2\,C)\; W_n(x. y) + \\
&+ \frac{2}{8} C \Big\{ W_n(x-1, y-1) + W_n(x-1, y) + \\
&+ W_n(x-1, y-1) + W_n(x, y+1) + W_n(x, y-1) + \\
&+ W_n(x+1, y+1) + W_n(x+1, y) + W_n(x+1, y-1) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Gaan wij op de bekende wijze van deze differentie-vergelijking over op een differentiaal-vergelijking dan vinden wij:

$$\tau \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\delta^2}{2} C \left(\frac{\partial W^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

d. i. weer de diffusie-vergelijking. In het analoge probleem voor n dimensies vinden wij evenzeer:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \sum_n \frac{\partial^2 W}{\partial x_n^{\,2}}.$$

De aard van het verschuivingsproces is dus bij elk aantal dimensies dezelfde.

Dit is van belang, omdat blijkt, dat elke door toeval veranderende verdeeling door «diffusie» in een stationairen toestand blijkt over te gaan.

Wij keeren thans weer terug tot het probleem in zijn vorigen vorm en bespreken daarvan nog de volgende vraag: Hoe groot is de kans, dat na n trekkingen in een bepaald gebied van a plaatsen (van k tot $k+a-1$) voorkomen x cijfers 1 en $a-x$ cijfers 0. Wij noemen deze kans $W_n(x)$. Wij zullen de differentie vergelijking voor deze kans afleiden.

Wij moeten daarbij het volgende bedenken. Elk cijfer wordt met zijn rechterbuurman verwisseld. Wordt een der plaatsen k tot $k+a-2$ getrokken, dan verandert het aantal cijfers 1 in ons gebied niet. Het aantal der cijfers één kan alleen grooter of kleiner worden als de randplaatsen $k-1$ of $k+a-1$ getroffen worden.

Het aantal cijfers één in ons gebied blijft dus hetzelfde bij de n^{de} trekking, wanneer:

1°. de plaatsen $k-1$ of $k+a-1$ niet geloot worden. De kans hiervoor is $\dfrac{N-2}{N}$.

2°. de plaats $k-1$ wel geraakt wordt en op de plaats k hetzelfde teeken staat. De kans hiervoor is

$$\frac{1}{N}\left\{ W_{n-1}(k-1,0)\,.\,W_{n-1}(k,0) + \right.$$
$$\left. + W_{n-1}(k-1,1)\,.\,W_{n-1}(k,1)\right\}.$$

Hierbij is $W_{n-1}(k,0)$ de kans, dat na $n-1$ trekkingen op de plaats k een 0 staat en $W_{n-1}(k,1)$ de kans op een één.

3°. de plaats $k+a-1$ wel geraakt wordt en rechts daarvan hetzelfde teeken staat. De kans hiervoor bedraagt

$$\frac{1}{N}\left\{ W_{n-1}(k+a-1,0)\,.\,W_{n-1}(k+a,0) + \right.$$
$$\left. + W_{n-1}(k+a-1,1)\,.\,W_{n-1}(k+a,1)\right\}.$$

Het aantal cijfers één van het gebied wordt één grooter bij de n^{de} trekking, wanneer

1°. de plaats $k-1$ een één draagt en getroffen wordt, terwijl op de plaats k een nul staat; de kans hiervoor is

$$\frac{1}{N} W_{n-1}(k-1, 1) \, . \, W_{n-1}(k, 0).$$

2°. de plaats $k + a - 1$ een nul draagt en getroffen wordt, terwijl op de plaats $k + a$ een één staat. De kans hiervoor is

$$\frac{1}{N} W_{n-1}(k+a-1, 0) \, . \, W_{n-1}(k+a, 1).$$

Het aantal cijfers 1 in het gebied vermindert met één als:

1°. de plaats $k - 1$ een 0 draagt en getroffen wordt, terwijl op de plaats k een 1 staat. De kans hiervoor is

$$\frac{1}{N} W_{n-1}(k-1, 0) \, . \, W_{n-1}(k, 1)$$

2°. de plaats $k + a - 1$ een 1 draagt en getroffen wordt, terwijl op de plaats $k + a$ een 0 staat. De kans hiervoor is

$$\frac{1}{N} W_{n-1}(k+a-1, 1) \, . \, W_{n-1}(k+a, 0).$$

De differentievergelijking voor $W_n(x)$ luidt dus:

$$\left.\begin{aligned} W_n(x) = \frac{1}{N} W_{n-1}(x) \{ N - 2 &+ W_{n-1}(k,0). W_{n-1}(k-1,0) + \\ &+ W_{n-1}(k, 1). W_{n-1}(k-1, 1) + \\ &+ W_{n-1}(k+a-1, 0). W_{n-1}(k+a, 0) + \\ &+ W_{n-1}(k+a-1, 1), W_{n-1}(k+a, 1) \} + \\ + \frac{1}{N} W_{n-1}(x-1) \{ &W_{n-1}(k,0). W_{n-1}(k-1, 1) + \\ &+ W_{n-1}(k+a-1, 0). W_{n-1}(k+a, 1) \} + \\ + \frac{1}{N} W_{n-1}(x+1) \{ &W_{n-1}(k, 1). W_{n-1}(k-1, 0) + \\ &+ W_{n-1}(k+a-1, 1). W_{n-1}(k+a, 0) \}. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

De kans op een cijfer 1 op de randplaatsen in ons gebied is $\frac{x}{a}$, als er x cijfers 1 in het gebied zijn en $\frac{x-1}{a}$ resp. $\frac{x+1}{a}$, als er $x - 1$ resp. $x + 1$ aanwezig zijn.

Houden wij er rekening mede, dat de
$W_{n-1}(k-1, 0)$, $W_{n-1}(k-1, 1)$, $W_{n-1}(k+a, 0)$ en $W_{n-1}(k+a, 1)$
uit het tweede lid van de differentie-vergelijking niet alle

gelijk $\frac{1}{2}$ zijn, doch afhankelijk van het aantal cijfers 1 in het gebied, dan is de kans op een 1 voor een bepaalde plaats van het buitengebied $\frac{\frac{1}{2}N-x}{N-a}$ en de kan op een 0 dus $\frac{\frac{1}{2}N-a+x}{N-a}$, want zijn er x cijfers 1 in het gebied, dan blijven er $\frac{1}{2}N-x$ cijfers 1 voor het buitengebied beschikbaar.

Indien N voldoende groot ten opzichte van a is, kan voor deze kansen $\frac{1}{2}$ genomen worden, wat wij hieronder straks zullen doen.

Substitueeren wij deze waarden in het tweede lid van de vergelijking (20), dan wordt deze na herleiding:

$$
\begin{aligned}
N\,W_n(x) = {} & W_{n-1}(x)\left\{N - \frac{2x}{a} - p(x).\frac{a-2x}{a}\right\} + \\
& + W_{n-1}(x-1)\left\{\frac{a-x+1}{a}\,p(x-1)\right\} + \qquad (24) \\
& + W_{n-1}(x+1).\frac{x+1}{a}\left\{2 - p(x+1)\right\},
\end{aligned}
$$

$$\text{waarin } p(x) = \frac{N-2x}{N-a} \text{ gesteld is} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Uit de vergelijking (24) kan men nu de grootheid $W_n(x)$ berekenen.[1]) Wij zullen dit op twee wijzen doen. In de eerste plaats met behulp van de methode der momenten; in de tweede plaats langs een meer directen weg. Om de methode der momenten toe te passen, hebben wij eerst de gemiddelde som der cijfers één in het gebied te bepalen. Deze som kan worden voorgesteld door

$$S_1(n) = \sum_{x=0}^{a} x.\,W_n(x).$$

[1]) Vgl. blz. 45, waar naar deze oplossing verwezen wordt.

Om haar te bepalen, vermenigvuldigen wij vergelijking (23) met x en schrijven haar op voor alle mogelijke waarden x en tellen op.

Nemen wij vergelijking (25) in acht, dan vinden wij na herleiding:

$$S_1(n) = \left(1 - \frac{2}{N a} - \frac{2}{N(N-a)}\right) S(n-1) + \frac{1}{N-a}.$$

Hieruit volgt terstond

$$\lim_{n=\infty} S_1(n) = {}^1\!/_2\, a. \qquad [1]$$

Voor de andere gemiddelden

$$S_k(n) = \sum_{x=0}^{a} x^k \,.\, W_n(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

kunnen wij gemakkelijk een recursieformule afleiden door de vergelijking (23) op te schrijven vermenigvuldigd met x^k voor alle mogelijke waarden x. Na optellen vinden wij

$$N.\, S_k(n) = N.\, S_k(n-1) - \frac{2}{a} \sum_x W_{n-1}(x).\, x \,\{ x^k - (x-1)^k \} +$$
$$+ \frac{1}{a} \sum_x W_{n-1}(x)\, p(x) \,\{ - x(x-1)^k - (a-2x)\, x^k +$$
$$+ (a-x)(x+1)^k \}.$$

Daar in de sommen van deze formule alle machten van x met exponenten grooter dan k wegvallen, kan men iedere S_k uitdrukken in de grootheden met lager index en argument.

Uit de gevonden gemiddelden kunnen nu de grootheden $W_n(x)$ bepaald worden.

Daartoe bedenken wij, dat als op deze wijze de a grootheden $S_a\, S_{a-1} \ldots .\, S_1$ berekend zijn, de a vergelijkingen (26)

$$\sum_{x=0}^{a} x^a.\, W_n(x) = S_a;$$

$$\sum_{x=0}^{a} x^{a-1}\, W_n(x) = S_{a-1};$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{x=0}^{a} x.\, W_n(x) \;=\; S_1;$$

---

[1] Hetzelfde resultaat wordt verkregen, als wij $p(x) = 1$ stellen, wat bij zeer groote N geoorloofd is. Dit beteekent, dat op elke plaats buiten ons gebied de kans op een 1 gelijk is aan die op een 0, dus $^1/_2$.

vereenigd met de vergelijking

$$\sum_{x=0}^{a} W_n(x) = S_0 = 1,$$

$(a+1)$ lineaire niet homogene vergelijkingen voor de $W_n(x)$ opleveren. Uit de genoemde vergelijkingen kunnen de grootheden $W_n(x)$ worden opgelost als quotient van 2 determinanten. De determinant in den noemer is de bekende determinant van VANDERMONDE [1]. Zij is dus gelijk aan het product van alle mogelijke verschillen van de getallen $a, a-1, a-2, \ldots 1, 0$. dat is $a!\ a-1!\ a-2! \ldots 2!\ 1!$ Met behulp van hare minoren vinden wij voor den teller:

$$S_a \,.\, P + S_{a-1} \,.\, P \sum b_1 + S_{a-2} \,.\, P \sum b_1 b_2 +$$
$$S_{a-3} \,.\, P \,.\, \sum b_1 b_2 b_3 + \text{enz.} + S_2 \,.\, P \,.\, \sum b_1 b_2 b_3 \ldots b_{a-2} +$$
$$+ S_1 \,.\, P \sum b_1 b_2 b_3 \ldots b_{a-1}.$$

Hierin zijn de b_k de getallen $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots a$ met uitzondering van het getal x en P het product van alle mogelijke verschillen dier getallen; dus

$$P = \frac{a!}{a-x} \cdot \frac{a-1!}{a-1-x} \ldots \frac{x+2!}{2} \,.\, x+1!\ x-1!\ x-2! \ldots 2!$$

Op deze wijze zijn dus de grootheden $W_n(x)$ bepaald.

Wij kunnen ook, gelijk wij reeds opgemerkt hebben, de $W_n(x)$ direct uit de differentievgl bepalen. Ter vereenvoudiging maken wij gebruik van de benadering $p(x) = 1$ (zie pag. 59 en 60). Wij substitueeren nu in de vgl (24)

$$W_n(x)\, A_x \,.\, e^{-nb},$$

waarbij wij onderstellen, dat de grootheid A_x van x afhangt en het getal b nader bepaald moet worden.

Wij vinden dan na herleiding:

$$(a-x+1)\, A_{x-1} + C \,.\, A_x + (x+1)\, A_{x+1} = 0 \quad . \quad . \quad (27),$$

als

$$C = a\,(N - 1 - N e^{-b}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Wij kunnen de vergel. (27) opschrijven voor de waarden $x = 0, 1, 2, \ldots a$ en verkrijgen zoo $a+1$ liniaire homogene

---

[1] Zie P. WIJDENES, Middelalgebra p. 244.

vgl. voor de $a+1$ onbekenden A_x. Zal een andere dan de nuloplossing voldoen, dan moet de determinant der coëfficiënten gelijk nul zijn.

Dus:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} C & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a & C & 2 & 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & a-1 & C & 3 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & a-2 & C & 4 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & a \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & C \end{vmatrix} (a+1 \text{ rijen}) = 0 \quad . . (29)$$

Deze vergelijking geeft $a+1$ wortels C, dus volgen ook $a+1$ waarden b uit formule (28), die wij door $b_1, b_2 \ldots b_k \ldots b_{a+1}$ zullen aanduiden. Deze wortels C bepalen wij op de volgende wijze. Wij voegen aan Δ_{a-2} als a^{de} en $a+1^{\text{e}}$ kolom toe:

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a-1 & 0 \\ C & a \\ a & C \end{matrix}$$

en als a^{de} en $a + 1^{\text{e}}$ rij:

$$\begin{array}{l} 0 \ldots\ldots\ldots 0\ C\ a \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0\ a\ C. \end{array}$$

Wij verkrijgen hierdoor een determinant, waarvan de waarde gelijk is aan $\triangle_{a-2}\ (C^2 - a^2)$ met $a + 1$ rijen en van den volgenden vorm:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
C & 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & & & 0 & 0 & 0 \\
a-2 & C & 2 & 0 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \mathrm{a}-3 & C & 3 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & a-2 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \mathrm{C} & a-1 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & C & a \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & C
\end{array}\right|$$

Om deze determinant met $\triangle_a$ te vergelijken, doen wij het volgende. Wij tellen, te beginnen bij $a + 1^{\text{ste}}$ kolom, achtereenvolgens elke kolom op bij de kolom, welke 2 plaatsen verder naar links staat, dus de $a + 1^{\text{e}}$ bij de $a - 1^{\text{e}}$, de a^{de} bij de $a - 2^{\text{de}}$; de zoo verkregen $a - 1^{\text{e}}$ bij de $a - 3^{\text{de}}$;

de zoo verkregen $a - 2^e$ bij de $a - 4^{de}$ enz. Wij vinden dan:

$$\begin{vmatrix}
C & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
a & C & 2 & 0 & 0 & & & & & \vdots \\
C & a & C & 3 & 0 & & & & & \vdots \\
a & C & a & C & 4 & & & & & \vdots \\
C & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & a \\
a \text{ of } C & \dots & \dots & \dots & \dots & C & a & C & a & C
\end{vmatrix}$$

Het blijkt, dat deze determinant dezelfde is als $\triangle_a$. Om dit te bewijzen, hebben wij in $\triangle_a$ (formule (29)) slechts de 1^e rij bij de 3^{de} te tellen, de 2^{de} bij de 4^{de}; vervolgens de zoo verkregen 3^{de} rij bij de 5^{de}; dan de zoo verkregen 4^{de} rij bij de 6^{de} enz.

Hiermee is aangetoond:

$$\triangle_a = (C^2 - a^2)\,\Delta_{a-2}\,.$$

Dus de vergelijking $\Delta_a = 0$ heeft dezelfde wortels als Δ_{a-2} en bovendien $C = \pm a$.

In verband met het feit, dat $\Delta_0 = C = 0$ een wortel $C = 0$ heeft en $\Delta_1 = C^2 - 1$ de wortels $C = \pm 1$, vindt men, dat de wortels van Δ_a zijn:

$$C = a - 2k \ (k = 0, 1, 2, \dots\dots a).$$

De grootheden A_x verhouden zich nu weer als de minoren van de elementen van een willekeurige rij van Δ_a. Wij gebruiken hiervoor de eerste rij en noemen de minor van het p^{de} element van de eerste rij M_p. Voor deze minoren geldt de volgende recursieformule:

$$(p+1)\, M_{p+2} = C.\, M_{p+1} - (a-p+1)\, M_p \quad . \quad . \quad (30),$$

wat door ontwikkeling terstond blijkt. Wij hebben alleen noodig de waarden, welke deze minoren aannemen voor de waarden $C = a - 2\,k\,(k = 0, 1, 2 \ldots .\, a)$ d.w.z. de functies $M_p\,(a - 2\,k)$. Aan formule (30) blijkt te voldoen:

$$M_{a-p}\,(a-2\,k) = a!\, C^a_{p+1} - 2.\, a! \sum_b C^k_{k-1-2b} \cdot C^{a-k}_{p-2b}$$

en

$$M_{a+1} = (-1)^a.$$

De grootheden A_x, die evenredig zijn met deze minoren, kunnen wij dus voorstellen door:

$$A_x\,(k) = P_k.\, M_{x+1}\,(a-2\,k)$$

en de meest algemeene oplossing is dus

$$W_n\,(x) = \sum_{k=0}^{k=a} P_k.\; M_{x+1}\;(a-2\,k).\; e^{-nb_k}.\;(-1)^x,$$

waarbij de waarde voor b_k volgt uit de vergelijking

$$a - 2\,k = a\,(N - 1 - N\,e^{-b_k})\;.\quad .\quad .\quad .\quad (31)$$

Voor $x = a$ vinden wij

$$W_n\,(a) = \sum (-1)^a.\; P_k.\; e^{-n\,b_k}\,.$$

Het is duidelijk, dat de term, die voor $k = a$ verkregen wordt, $b_k = o$ oplevert en dus n niet bevat.

De coëfficienten P_k moeten weer volgen uit de initiaalcondities.

Onderstellen wij, dat aanvankelijk a cijfers 1 aanwezig waren, dan is

$$W_0\,(x) = 0 \text{ voor } x < a \text{ en } W_0\,(a) = 1.$$

De coeffienten P_k worden in dit geval gevonden uit de vergelijkingen

$$W_0\,(x) = \sum_k P_k.\, M_{x+1}\,(a-2k).\,(-1)^x.$$

De eerste a vergelijkingen hebben linkerlid gelijk nul en de $(a+1)^e$ vergelijking is

$$(-1)^a = \sum_k P_k.$$

Hieraan voldoet

$P_k = {}^1/_{2^a}\, C_k^a\,(-1)^a$, zooals men gemakkelijk verifieeren kan met behulp van de voor M_{x+1} gevonden waarden. Derhalve is de eindoplossing

$$W_n(x) = (-1)^{x+a}\,({}^1/_2)^a \sum_k C_k^a \,.\, M_{x+1}(a-2k)\, e^{-nb_k} \quad (32),$$

waarin voor b_k de waarde volgens vergelijking (31) te nemen is.

Voor $n=\infty$ levert alleen de term $k=a$ iets op en wij vinden weer

$$\lim_{n=\infty} S_1(n) = \lim_{n=\infty} \sum x \,.\, W_n(x) = {}^1/_2\, a.$$

Stellen wij in de differentie-vergelijking (24) weer $p(x)=1$, dan kunnen wij ook weer op de bekende wijze op een differentiaalvergelijking overgaan en vinden dan, dat $W_n(x)$ voldoet aan:

$$N\tau \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{2}{a} W + \left(\frac{2x}{a} - 1\right)\frac{\partial W}{\partial x} + {}^1/_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2},$$

als t de tijd is, waarin met tusschenpoozen van τ sec. de n trekkingen plaats hebben $(n\tau = t)$.

Door de substitutie

$$x_1 = x \,.\, \frac{2}{a N\tau} - \frac{1}{N\tau} \text{ en } t_1 = \frac{2}{a N\tau}\, t$$

gaat deze vergelijking over in

$$\frac{\partial W}{\partial t} = W + x\frac{\partial W}{\partial x} + D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

$$\text{als } D = \frac{1}{a N^2 \tau^2}$$

De oplossing van deze vergelijking is

$$W.(x, x_0, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi D(1-e^{-2t})}} \cdot e^{-\frac{(x - x_0 \cdot e^{-t})^2}{2D(1-e^{-t})}} \quad ^{1})$$

Voor $t = \infty$ wordt dit de foutenwet.

Het is weer mogelijk uit de differentiaalvergelijking (33) de gemiddelden

$$\overline{x^n} = \int x^n \, . \, W\,d\,x$$

af te leiden. Uit deze vergelijkingen volgt n.l.

$$\int x^n \frac{\partial W}{\partial t}\,dx = \int x^n . W\,dx + \int x^{n+1} \frac{\partial W}{\partial x}\,d\,x + D \int x^n . \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx$$

Na partieel integreeren vinden wij, omdat de stukken aan de grenzen gelijk aan nul zijn:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{x} = -\overline{x};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{x^2} = -2\overline{x^2} + 2D;$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{x^n} = -n\overline{x^n} + D_n(n-1)\overline{x^{n-2}}.$$

$$\overline{x^n}\,e^{nt} = Dn(n-1)\int_0^t \overline{x^{n-2}}\,e^{+nt}.\,d\,t.$$

De gemiddelden zijn dus door achtereenvolgende elementaire integraties af te leiden, waarbij de constanten der integralen uit de waarden der gemiddelden op den tijd nul bepaald kunnen worden.

Wanneer wij een gebied van a plaatsen beschouwen, kunnen wij ook weer vragen naar de kans, dat in een groot aantal trekkingen n zich een bepaald aantal y malen ($y \leqq n$) x cijfers 1 in het gebied hebben bevonden.

---

[1]) M. v. SMOLUCHOWSKI. Physik. Zeitschr. 17, 1916 p. 588 en Vorträge über Kinet. Theorie p. 106 (Göttingen).

Wij noemen deze kans $\phi_n(x, y)$.

Men ziet gemakkelijk, dat deze kans voldoet aan de volgende differentie vgl.:

$$\phi_n(x, y) = \phi_{n-1}(x, y)\{1 - W_n(x)\} + \phi_{n-1}(x, y-1)\, W_n(x).$$

Is n voldoend groot, dan is volgens formule (32):

$$W_n(x) = q = (1/2)^a\, M_{x+1}(-a) = (1/2)^a.\ a!\ C_x^a.$$

$$1 - W_n(x) = p = 1 - q = 1 - (1/2)^a.\ a!\ C_x^a;$$

en dan is

$$\phi_n(y) = C\left(\frac{q}{q-p}\right)^y \cdot q_n,$$

waarin de constante C zóó moet gekozen worden, dat

$$\sum_{y=0}^{y=n} \phi_n(y) = 1.$$

HOOFDSTUK VI.

Kans op terugkeer van bepaalde toestanden bij de behandelde verschuivingsproblemen.

Als men een getallenrij van 2 N cijfers beschouwt (evenveel cijfers 0 als 1), dan zal voor N groot het aantal mogelijke configuraties

$$C_N^{2N} = \frac{2\,N!}{N!\,N!}$$

zeer groot, doch eindig zijn en na een zeer groot aantal wisselingen zullen dus reeds vroeger verkregen groepeeringen terugkomen of ook een zekere, geheel willekeurige, aanvangsgroepeering zal voor de tweede maal verschijnen en men kan bijv. vragen naar den gemiddelden tijd, die verloopen zal, voordat een zekere aanvangstoestand, waarvan ons overigens niets bekend is, terugkeert.

Men kan hiertoe een methode van v. SMOLUCHOWSKI gebruiken. [1]) Denken wij ons iedere groepeering van een nummer voorzien en noemen wij haar bij dat nummer n, dan kunnen wij de waarschijnlijkheid, dat de n-toestand optreedt, voorstellen door $W(n)$; de kans, dat deze toestand na 1 trekking blijft bestaan, $W(n\,n)$; de kans, dat deze na 2 trekkingen nog aanwezig is, $W(n\,n\,n)$ enz. Wij voeren nu in de grootheden N_k en M_k, welke zullen aangeven, gedurende een zekeren buitengewoon langen tijd, het aantal gevallen, waarin de n-toestand, resp. de niet-n-toestand juist k intervallen geduurd heeft (niet onderbroken en niet overschreden). Men ziet nu gemakkelijk dat:

---

[1]) Wiener Berichte 1915; 124 Band; Heft 5, p. 344.

$$W(n) = \frac{N_1 + 2\,N_2 + 3\,N_3 + \ldots\ldots}{N_1 + 2\,N_2 + 3\,N_3 + \ldots + M_1 + 2\,M_2 + 3\,M_3 + \ldots} \quad (1)$$

en

$$W(n\,n) = \frac{N_1 + 2\,N_3 + 3\,N_4 + \ldots\ldots}{N_1 + 2\,N_2 + 3\,N_3 + \ldots\ldots} \quad . \; . \quad (2)$$

Van deze laatste kans moet een verwant begrip goed onderscheiden worden, n.l. de kans, dat een op het oogenblik aanwezige n-toestand slechts nog een verder interval voortduurt d. w. z. dat na onze groepeering in 't volgende interval dezelfde groepeering optreedt, doch daarna een andere. Deze kans noemen wij $\Phi(2\,\tau)$. Zij bedraagt:

$$\Phi(2\,\tau) = \frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty} N_k}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,N_k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Evenzoo is

$$\Phi(k\,\tau) = \frac{\sum\limits_{h=k}^{\infty} N_h}{\sum\limits_{h=1}^{\infty} N_h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

de kans, dat een aanwezige n-toestand nog juist k intervallen voortduurt, doch in het $(k + 1)^e$ interval in een anderen toestand overgaat.

De analoge uitdrukkingen voor den niet-n-toestand kunnen met ψ aangegeven worden en dan is $\psi\ (k, \tau)$ de kans, dat een niet-n-toestand juist na afloop van k intervallen in den n-toestand overgaat.

Hiermee is nu te definieeren, wat men moet verstaan onder omkeertijd en aanverwante begrippen.

De *gemiddelde duur* van den n-toestand is het rekenkundig gemiddelde der intervallen, die gekarakteriseerd zijn door voortduren van den n-toestand.

Deze grootheid T_1 kunnen wij met de boven ingevoerde symbolen voorstellen door:

$$T_1 = \tau\,\frac{N_1 + 2\,N_2 + 3\,N_3 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots} = \frac{\tau}{\Phi(1\,\tau)} \quad . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Daarentegen is de gemiddelde duur van den niet-n-toestand:

$$\theta_1 = \tau \frac{M_1 + 2\,M_2 + 3\,M_3 + \ldots}{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots} = \frac{\tau}{\psi(1\,\tau)} \quad . \; . \; . \; (6).$$

Deze grootheid kan men ook *de gemiddelde terugkeertijd* van den n-toestand noemen.

Neemt men voor elken n-toestand den tijd tot het optreden van den eerstvolgenden niet-n-toestand en van deze tijden het gemiddelde, dan vindt men de *waarschijnlijke duur* van den n-toestand:

$$T_2 = \tau \frac{N_1 + (1+2)\,N_2 + (1+2+3)\,N_3 + \ldots}{N_1 + 2\,N_2 + 3\,N_3 +} = \sum_{k=1}^{\infty} k\tau\,\Phi(k\tau) \; . \; . \; (7)$$

De berekening der grootheden T_1 en θ_1 is uit te voeren zonder dat men de functies Φ en ψ kent. Daar het klaarblijkelijk evenveel malen voorkomen moet, dat n in niet-n overgaat als omgekeerd, is:

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots\ldots = M_1 + M_2 + M_3 \; . \quad . \quad (8)$$

en dus volgens formule (1):

$$\theta_1 = T_1 \left[\frac{1}{W(n)} - 1\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Met behulp van de vergelijkingen (2) en (5) vindt men dus:

$$T_1 = \frac{\tau}{1 - W(n\,n)}\,;\; \theta_1 = \frac{\tau}{W(n)} \cdot \frac{1 - W(n)}{1 - W(n\,n)} \, . \quad . \quad (10)$$

In ons geval van een getallenrij van $2\,N$ cijfers is het aantal mogelijke configuraties

$$C_N^{2N} = \frac{2\,N!}{N!\,N!} \text{ en dus } W(n) = \frac{N!\,N!}{2\,N!} = \frac{\sqrt{\pi N}}{2^{2N}}\,;$$

Om $W(n\,n)$, $W(n\,n\,n)$ enz. te bepalen, moet men bedenken, dat, wanneer op een bepaalde plaats een cijfer geraakt wordt, dit kan wisselen met een van dezelfde soort of met een van andere soort, wat bij elke volgende trekking weer geldt en van de 2^a gevallen, die zich in a trekkingen kunnen voordoen, er dus steeds 2 zijn, die den toestand laten voortduren, die bij den aanvang aanwezig was. Derhalve

$$W(n\,n) = \frac{2}{2^2} = {}^1/_2;$$

$$W(n\,n\,n) = \frac{2}{2^3} = {}^1/_4;$$

$$W(n\,n\,n\,n) = \frac{2}{2^4} = {}^1/_8; \text{ enz.}$$

In het algemeen bij a letters n wordt dit $\frac{1}{2^{a-1}}$.

Volgens formule (10) is dus in ons geval:

$$T_1 = 2\tau;\ \theta_1 = \frac{2^{N+1}\tau}{\sqrt{\pi N}} \text{ (zeer groot).}$$

In het algemeen is de berekening van de waarschijnlijke duur T_2 niet zoo eenvoudig, omdat hiervoor vereischt wordt de kennis van de functies Φ en ψ, wier berekening veel gecompliceerder is dan die van $W(n)$ en $W(n\,n)$.

Men kan de betreffende uitdrukking (7) herleiden tot:

$$\frac{T_2}{\tau} = 1 + \frac{N_2 + 2\,N_3 + 3\,N_4 + \ldots}{N_1 + 2\,N_2 + 3\,N_3 + \ldots}$$

$$\left[1 + \frac{N_3 + 2\,N_4 + 3\,N_5 + \ldots}{N_2 + 2\,N_3 + 3\,N_4 + \ldots}\left[1 + \frac{N_4 + 2\,N_5 + 3\,N_6 + \ldots}{N_3 + 2\,N_4 + 3\,N_5 + \ldots}\ldots\right]\right]$$

Het eerste der gebroken polynomen van het tweede lid is volgens formule (6) gelijk aan de kans $W(n\,n)$, dat op den n-toestand wederom een n-toestand volgt. Evenzoo is de tweede breuk het gedeelte der n-n-gevallen, die nog door een derde n-toestand worden gevolgd, d.i. $W(n\,n\,n)$ enz.

Dus vindt men:

$$T_2 = \tau\left[1 + W(n\,n)\left[1 + W(n\,n\,n)\left[1 + W(n\,n\,n\,n)\ .\right]\right]\right] \quad (11)$$

Na substitutie der waarden, die wij voor de grootheden W vonden, is in ons geval

$$T_2 = \tau\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{10}} \cdots\cdots\right).$$

In elk probleem, waarvoor dus de grootheden $W(n)$ en

$W(n \ldots n)$ bekend zijn, kan men met behulp van de formules (10) en (11) direct berekenen

de gemiddelde duur T_1,
de gemiddelde terugkeertijd θ_1
en de waarschijnlijke duur T_2.

In het vorige hoofdstuk bijv. beschouwden wij het geval, dat zich een zeker aantal cijfers 1 in een gebied van a plaatsen bevond en berekenden daarvoor de kansen $W(n)$ en $W(n\, n)$.

Substitutie in de vergelijking (10) levert terstond de grootheden T_1 en θ_1.

In plaats van te vragen naar duur of terugkeertijd van bepaalde groepeeringen van een geheele getallenrij, kan men ook zeker teeken bijv. een 0 op *een bepaalde plaats* aandacht schenken en vragen, wat de gemiddelde terugkeertijd voor een 0 op die plaats is of de gemiddelde duur van de aanwezigheid van een 0 op de plaats k. Om deze te bepalen, voeren wij in de kans V, dat een cijfer van de eene soort op een bepaalde plaats vervangen wordt door een cijfer van de andere soort bij de eerstvolgende trekking.

Voor een verandering is in de eerste plaats noodzakelijk, dat het beschouwde nummer wordt getroffen. De kans hierop is $\frac{1}{2N}$.

Verder moet de aanwezige 0 wisselen met een der N aanwezige cijfers 1 en dus is

$$V = \frac{1}{2N} \cdot \frac{N}{2N-1} = \frac{1}{2(2N-1)}.$$

Daarentegen zal $P = 1 - V$ de kans zijn, dat na de eerstvolgende trekking hetzelfde cijfer zich op de plaats k bevindt

De kans, dat een op k aanwezig cijfer 0 zich n trekkingen onafgebroken op de plaats k bevinden blijft, is

$$P^n . V.$$

Dus de gemiddelde duur van de aanwezigheid is

$$\tau P V + 2 \tau P^2 V + 3 \tau P^3 V + \ldots\ldots = \tau . \frac{P}{V}$$

Met dezelfde grootheden P en V kan men ook den gemiddelden terugkeertijd voor een 0 vinden. Na één trekking kan zich op de beschouwde plaats reeds weer een 0 bevinden. De kans is hiervoor P. Ook kan na de 1e trekking de 0 in 1 veranderd zijn, doch na de 2 e frekking weer een 0 zijn geworden. De kans hierop is V^2. Algemeen kan na de eerste trekking de 0 veranderd zijn in 1, deze kan gedurende $n - 2$ trekkingen onveranderd blijven en na den n^{den} trek weer voor een 0 plaats maken. De kans hierop is $V . P^{n-2} V$.

Men vindt met behulp hiervan voor den gemiddelden terugkeertijd:

$$\tau P + 2 \tau V^2 + 3 \tau P V^2 + 4 \tau P^2 V^2 + \ldots n \tau P^{n-2} V^2 \ldots =$$
$$= \tau \left(1 + \frac{1}{V}\right).$$

Dat de gevonden tijden zoo groot zijn, is een gevolg van 't feit, dat wij een bepaalde plaats beschouwden en de kans, dat deze getroffen wordt, is zeer klein.

SAMENVATTING.

HOOFDSTUK I.

Vergelijking van de waarnemingen van THE SVEDBERG met formules, afgeleid uit de theorie van v. SMOLUCHOWSKI (pg. 1—8).

Samenhang tusschen de uitspringkans P en de diffusiecoëfficient D (pg. 8—9).

Toetsing van de waarnemingen van WESTGREN (pg. 10—12).

Overzicht van andere onderzoekingen (pg. 12—14).

HOOFDSTUK II.

Berekening van de hoeveelheden $U(t)$ en $I(t)$, welke na den tijd t zich door diffusie buiten een bolvormig element begeven hebben, resp. na den tijd t nog aanwezig zijn (pg. 15—17).

Berekening van de kans $P^n(t)$, dat een deeltje aanwezig is op de tijden $0, t, 2t, \ldots . n\,t$. doch verdwenen op $(n + 1)\,t$. (pg. 18).

Bewijs, dat $P^{\infty}(t)$ nul is, van de orde $\left(\frac{1}{p}\right)_{p=\infty}$ (pg. 19—20).

HOOFDSTUK III.

Berekening van de gemiddelde verandering $\overline{\Delta}_{ab}$ van het aantal deeltjes van een volume-element, dat eerst a, later b deeltjes bevat (pg. 21—27).

Toetsing van de gevonden formules aan de waarnemingen van WESTGREN (pg. 28—30).

HOOFDSTUK IV.

Betrekkingen tusschen de kansen $W(a)$, $W(a, b)$, $W(a, b, c)$ (pg. 31—32).

Kansen met n indices en de berekening uit deze van de kansen met een kleiner aantal indices (pg. 33—34).

De aantalfuncties (pg. 35).

De omkeerbaarheidsbetrekking en hare toetsing aan de reeksen van WESTGREN (pg. 36—39).

Stellingen.

Stellingen.

I.

De hypothese van Chwolson, dat de volumedichtheid der electriciteit een natuurconstante is, is onjuist.

(*Zur Frage über die Struktur des Atomkernes. Zeitschr. f. Physik* 1921, Bd. VII, p. 269.)

II.

De berekening, die Eddington in *Zeitschr. f. Physik 1921, Bd. VII p. 379* van de temperatuur van dwergsterren geeft, is onjuist.

III.

Bij het bepalen van de afstanden der sterren zijn, naast de methode van parallax-meting, de door Kapteyn in *Contrib. Mount Wilson Observ. n°. 82* ontwikkelde methoden van meer belang dan men gewoonlijk aanneemt.

IV.

De asymptotische lijnen van een niet ontwikkelbaar regel-oppervlak zijn te vinden, zoodra één exemplaar buiten de beschrijvende lijnen bekend is.

V.

Door lijnelement en richtkegel worden in het algemeen twee stel niet ontwikkelbare regeloppervlakken bepaald.

VI.

Hetgeen L. L. Steimley mededeelt over oplossingen van lineaire niet homogene partieele differentiaalvergelijkingen in *Améric. Journal of Math. 1915. vol. 37, n°. 4, p. 359*, is niet juist.

VII.

In zijn *Cours d' Analyse Tome II, p. 57* deelt C. Jordan niet nauwkeurig mede, wanneer

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b f(x).\, dx$$

een eindige en bepaalde waarde heeft.