Overzicht van de toepassing van complexe functies op natuurkundige vraagstukken

OVERZICHT VAN DE TOEPASSING VAN COMPLEXE FUNCTIES OP NATUURKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

A. D. NATHANS

OVERZICHT VAN DE TOEPASSING VAN COMPLEXE FUNCTIES OP NATUURKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

Diss. Utrecht 1923

OVERZICHT VAN DE TOEPASSING VAN COMPLEXE FUNCTIES OP NATUURKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr. A. J. P. VAN DEN BROEK, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP **MAANDAG 15 OCTOBER 1923**, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR, DOOR

ABRAHAM DAVID NATHANS

GEBOREN TE ASSEN

W. E. J. TJEENK WILLINK – ZWOLLE

AAN MIJN OUDERS.
AAN MIJN VROUW.

Bij het voltooien van mijn proefschrift kwijt ik mij gaarne van de taak, de hoogleeraren van de faculteit der wis- en natuurkunde te Groningen, die tot mijn academische vorming hebben bijgedragen, mijn dank te betuigen.

Een woord van eerbied zij gewijd aan de nagedachtenis van professor SCHOUTE, *in wiens hartelijke belangstelling ik mij gedurende mijn studietijd te Groningen heb mogen verheugen.*

U, hooggeleerde ORNSTEIN, *hooggeachte promotor, ben ik meer dan gewonen dank verschuldigd, daar Uw vriendschappelijke leiding mij den steun bij de samenstelling van mijn proefschrift heeft gegeven, dien ik, mede als gevolg van mijn zware taak bij het onderwijs, zoozeer behoefde.*

HOOFDSTUK I.

Historische inleiding.

De toepassing van complexe functies, althans van imaginaire grootheden, in de theoretische natuurkunde, is thans ongeveer een eeuw oud. In een publicatie van 1823, waarin FRESNEL de wetten van de totale reflectie ontdekte, werkte hij reeds met imaginaire grootheden. (FRESNEL, „Oeuvres complètes", Tome I, blz. 753. Extrait d'une mémoire sur la loi des modifications imprimées à la lumière polarisée par sa réflexion totale dans l'intérieur des corps transparents). Deze werd gepubliceerd in „Bulletin de la société philomatique 29 Juni 1825, blz. 175". Eveneens gebruikt hij in 1831 imaginaire grootheden in: „Mémoire sur la modification que la réflexion imprime à la lumière polarisée" (Oeuvres complètes: Tome I, blz. 767; Mémoire de l'Academie des sciences 11, blz. 393; Annales de chimie et de physique 46, Maart 1831, blz. 225). Daarna schijnt men, voor zoover ik heb kunnen nagaan, voor 1858 geen imaginaire grootheden te hebben gebruikt in de physica. Eerst in dit jaar paste SEEBECK ze weer toe in een cinematische verhandeling „Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen" (CRELLE'S Journal 55, blz. 221). Daarna neemt het aantal verhandelingen, dat hier genoemd moet worden, sneller toe.

Als een van de belangrijkste voorloopers van het gebruik der methoden, die in deze dissertatie vermeld worden, moet beschouwd worden: J. N. HATON DE LA GROUPILLIÈRE met een verhandeling van 1861. In de eerste plaats publiceert deze een „Mémoire sur une nouvelle théorie des lignes isothermes et du potentiel cylindrique" (Journal de l'école impériale polytechnique 22, cahier 38, blz. 15). Hierin behandelt hij met behulp van functies van complexe veranderlijken het warmte-evenwicht, speciaal bij cylindrische lichamen, als

vraagstukken op een plat vlak. De functies, die wij spoedig onder den naam „toegevoegde functies" zullen leeren kennen, treden hierin reeds op. Hij brengt in zijn verhandeling het warmte-evenwicht in verband met den cylindrischen potentiaal. Hiermede bedoelt hij het volgende: men onderstelt een punt onderhevig aan een stelsel krachten, die omgekeerd evenredig zijn met de kwadraten van de afstanden tot een zeker aantal vaste punten; wanneer nu dit stelsel bestaat uit homogene evenwijdige krachten, noemt hij de daarbij optredende potentialen cylindrisch. De schrijver ziet zelf het belang van zijn verhandeling in, juist ook, waar het betreft het werken met imaginaire grootheden, hetgeen blijkt uit zijn opmerking in een noot: „On me pardonnera d'insister ainsi sur une théorie qui n'est qu'un cas particulier du problème de la chaleur, quand on l'envisage par rapport aux trois dimensions de l'espace. Son étude me paraît avoir une véritable importance et être appelée jusqu'à un certain point à jouer pour l'étude des fonctions imaginaires la même rôle que la géométrie des courbes pour celles des fonctions réelles. Cauchy a en effet montré le premier que les seules fonctions de variables imaginaires, qui méritent vraiment ce nom en ce qu'elles ont une dérivée et qu'il appelle *monogènes*, sont aussi les seules qui puissent représenter l'équilibre de température dans un plan."

Nu volgen eenige verhandelingen, die voor ons onderwerp van minder belang zijn, die ik echter volledigheidshalve moet vermelden. In 1863 publiceert P. ALPH. LAURENT een „Mémoire sur la théorie des imaginaires sur l'équilibre des températures et sur l'équilibre de l'élasticité." (Journal de l'école polytechnique 23, cahier 40, blz. 75). I. h. a. grootendeels gewijd aan de zuivere theorie van imaginaire grootheden, geeft hij enkele algemeene voorbeelden van evenwicht van temperatuur en elasticiteit. In hetzelfde jaar geeft H. DURÈGE enkele eenvoudige dynamische toepassingen in „Ueber eine Anwendung der imaginären Grösze" (Archiv der Mathematik und Physik 40, blz. 1). LIPSCHITZ stelt in hetzelfde jaar bolspiegeling voor met complexe getallen in: „Zur Theorie der Elektricitätsverteilung" (Journal de CRELLE 61, blz. 1).

Van grooter beteekenis is echter een in 1865 gepubliceerde verhandeling van CHRISTOFFEL: „Zur Theorie der einwertigen Potentiale" (Journal de CRELLE, blz. 321). Deze werkt in de potentiaal-theorie

met de conforme afbeelding, welke met het gebruik van complexe functies hand in hand gaat. Daarna volgt weer de verhandeling van groot belang van 1867 van J. N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE: „Méthodes de transformations en géométrie et en physique mathématique". Deze staat uitvoerig stil bij de conforme afbeelding, werkt met algemeene coordinaten en geeft, zooals de titel aangeeft het verband met de mathematische physica aan. Met de laatste kan HELMHOLTZ de grondlegger van onze methode genoemd worden in „Ueber discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen." (Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I, blz. 157; Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften in Berlin 13, April 1868). In deze verhandeling van 1868 gebruikt hij functies van complexe veranderlijken, waarbij hij toegevoegde functies toepast. (Deze naam noemt hij daarbij echter niet). De beteekenis van deze verhandelingen wordt geschetst door H. WEBER in „Die partiellen Differentialgleichungen, Bd. I, blz. 368", naar aanleiding van een vraagstuk over electrische inductie met de woorden: „Schwieriger, aber auch interessanter, ist das folgende Beispiel, an dem HELMHOLTZ zuerst den Nutzen der Abbildungstheorie für diese Art electrostatische Probleme nachgewiesen hat." Terstond neemt G. KIRCHHOFF in 1869 de methode over in: „Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen" (CRELLE'S Journal 70, 1869, blz. 289), waarin hij een groot aantal gevallen met behulp van complexe functies bewerkt.

Daarna wordt het aantal toepassingen, belangrijke en onbelangrijke, te groot, om hier te vermelden. In het eerste gedeelte van dit proefschrift wordt de methode zelf met de resp. uitbreidingen gerefereerd. De toepassingen zijn samengesteld in een aan het slot toegevoegde tabel.

In het bijzonder zij alleen nog gewezen op de methode van SOMMERFELD. Waar toch andere onderzoekers de methode uitbreiden, opent de methode van SOMMERFELD geheel nieuwe verschieten. Ik meen, dat enkele historische gegevens daaromtrent derhalve hier niet mogen ontbreken. Deze zijn voor een groot deel ontleend aan een artikel van JAMES MC. MAHON, getiteld: „On the use of the n-fold RIEMANN-spaces in applied mathematics" (Bulletin of the American Mathematical Society, 16, 1908). Het eerste concrete voorbeeld van een meerwaardige potentiaal in drie afmetingen bevindt zich in een brief van P. APPELL aan F. KLEIN (Math. Ann. 1887). In 1891 spreekt POCKELS in zijn verhandeling over de vergelijking van de „golfpotentiaal" de wensche-

lijkheid uit, de meerwaardige oplossingen van deze vergelijking van mathematisch en physisch standpunt te bestudeeren. De eerste toepassingen op concrete physische vraagstukken zijn gegeven door A. SOMMERFELD in artikelen van de Math. Ann. van 1894 en 1896 over warmtegeleiding en diffractie, en in 1897 in de „Proceedings of the London Math. Soc." over „Multiform potentials in space". Voor de hierin uitgewerkte methoden en toepassingen verwijs ik naar de dissertatie en de tabel. Het artikel van SOMMERFELD gaf aanleiding tot een groot aantal publicaties, waarvan ik hier slechts vermeld een artikel van H. S. CARSLAW: „On multiform solutions of differential equations of physical mathematics" (Proc. of the London Math. Soc. 30, 1898), waarin CARSLAW de methode van SOMMERFELD consequent uitbreidt.

HOOFDSTUK II.

Korte uiteenzetting van de toepassing der complexe functies in de Natuurkunde.

---

§ 1. Inleiding.

Wanneer $w = u + iv$ een functie is van de complexe veranderlijke $z = x + iy$, dan wordt het functie-begrip beperkt door te eischen, dat

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y}; \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}.$$

Bovendien moeten u en v continu zijn en continue partieele diff. quot. naar x en y hebben. Een dergelijke functie u noemt men een *monogene* functie van de complexe veranderlijke z, terwijl we u en v toegevoegde functies noemen. Voortaan spreken we slechts van een functie van een complexe veranderlijke, daarmede bedoelende een monogene functie. Zooals bekend voldoen u en v dan aan de vergelijking van LAPLACE:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0; \quad \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} = 0.$$

Meetkundig geinterpreteerd geeft $w = f(z)$ een conforme afbeelding van het z-vlak op het w-vlak.

Daar u en v voldoen aan de verg. van LAPLACE, kan elk dezer functies een potentiaal in het platte vlak voorstellen. Stelt $v = \text{const.}$ een stelsel aequipot. krommen voor, dan zullen de lijnen $u = \text{const.}$ de krachtlijnen voorstellen. De functies van complexe veranderlijken geven derhalve aanleiding tot physische toepassingen, die steunen op zuiver mathematische methoden.

§ 2. Electrische potentiaal en lading.

Daar $w = f(z)$ meetkundig een conforme afbeelding voorstelt, wordt

elk lijntje in het w-vlak gevonden door het overeenkomstige lijntje in het z-vlak te vermenigvuldigen met $\frac{dw}{dz}$. De modulus daarvan wordt:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)^2}.$$

Is v de electrische potentiaal, dan is ρ de electrische intensiteit R.

Men kan thans problemen op cylindrische geleiders oplossen, waarbij ons werkvlak moet worden beschouwd als loodrechte doorsnede van de geleiders. Daar $R = \sigma$ (ladingsdichtheid), kan men eenvoudig de oppervlakte-dichtheid in een willekeurig punt van den geleider vinden. De totale lading tusschen twee punten A en B over een strook ter breedte van de lengte-eenheid wordt:

$$\int \sigma \, ds = \int_A^B \frac{\delta u}{\delta s} \, ds = u_A - u_B.$$

§ 3. Achtereenvolgende transformaties.

Het geval van achtereenvolgende transformaties kan aanleiding geven tot belangrijke toepassingen. Immers twee achtereenvolgende transformaties kunnen aanleiding geven tot een derde, welke het resultaat is van de eerste twee.

§ 4. Lading en aequipotentiaalkrommen bij transformatie.

Indien F een functie is van w, terwijl w een functie is van z, dan volgt uit vrij gecompliceerde berekeningen, dat

$$\iint \left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta y^2}\right) dxdy = \iint \left(\frac{\delta^2 F}{\delta u^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta v^2}\right) dudv,$$

waarbij men tusschen overeenkomstige grenzen moet integreeren. Indien nu F de potentiaal voorstelt, dan is volgens de vergelijking van POISSON:

$$\iint \rho \, dxdy = \iint \rho' \, dudv,$$

als ρ en ρ' de dichtheden der lading voorstellen. De hoeveelheid electriciteit in overeenkomstige deelen van het oorspronkelijke en het getransformeerde stelsel zijn derhalve dezelfde.

Uit genoemde berekeningen volgt nog deze belangrijke conclusie, dat ieder stelsel aequipotentiaalkrommen getransformeerd wordt tot een ander stelsel aequipotentiaalkrommen.

§ 5. **Continue stroomen.**

Voor continue stroomen geldt de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Hierin stellen u, v en w de componenten van den stroom in een punt voor. Tusschen de electrische potentiaal V en de componenten van de electrische stroom bestaat dan de betrekking:

$$u = -\frac{1}{\tau}\frac{\delta V}{\delta x},\ v = -\frac{1}{\tau}\frac{\delta V}{\delta y} \text{ en } w = -\frac{1}{\tau}\frac{\delta V}{\delta z},$$

waarin τ de soortelijke weerstand voorstelt. Door substitutie in de continuïteitsvergelijking, gaat deze over in:

$$\triangle V = 0.$$

De voorwaarden van overgang van één geleider naar een andere luiden:

1°. De strooming loodrecht op de grenzen voorgesteld door $\frac{1}{\tau}\frac{\delta V}{\delta n}$ moet continu zijn.

Hierbij stelt $\frac{\delta}{\delta n}$ differentiatie langs de loodlijn op de grensovergang voor.

2°. $\frac{\delta V}{\delta s}$ moet continu zijn. Met $\frac{\delta}{\delta s}$ bedoelt men differentiatie langs een willekeurige lijn, in de grens gelegen.

Vindt de strooming plaats in een vlakke metalen plaat, die overal dezelfde dikte en samenstelling heeft, dan wordt het vraagstuk van twee-dimensionalen aard en kan men werken met de vergelijking van LAPLACE. Strekt de geleidende stof zich tot het oneindige uit of wordt ze begrensd door twee electroden op constante potentiaal, terwijl in de grenzen van het veld $\frac{\delta V}{\delta n} = 0$ is, dan kan men de electroden transformeeren in lijnen V = const. en de andere grenzen in lijnen U = const., zoodat de geheele middenstof getransformeerd wordt in het inwendige van bijv. een rechthoek in 't u,v-vlak. De lijnen V = const. stellen lijnen van const.potentiaal, de lijnen U = const. de loodrecht daarop staande stroomlijnen voor. In een willekeurig punt is de richting van de stroom loodrecht op de aequipot. lijn en van een bedrag:

$$J = \frac{1}{\tau}\frac{\delta V}{\delta x}.$$

Daar $$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial s},$$

wordt: $$\int_P^Q J ds = \int_P^Q \frac{1}{\tau} \frac{\partial U}{\partial s} ds = \frac{1}{\tau} (U_Q - U_P).$$

§ 6. Toepassing in de hydrodynamica.

De complexe functies vinden ook toepassing in de hydrodynamica. De zgn. stroomfunctie ψ voldoet n.l. in twee-dimensionale gevallen aan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Hierbij stelt ψ de strooming voor door een lijn AP bijv. van rechts naar links, als de waarnemer van een vast punt A naar een veranderlijk punt B kijkt. Zijn nu u en v de componenten van de sneldheid, dan is:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Voor deze beweging bestaat een snelheidspotentiaal ψ zoodanig, dat

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Deze functie voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Φ en ψ zijn dus toegevoegde functies; datgene, wat in verband met de electriciteitsleer is gezegd, laat zich derhalve op de hydrodynamica overdragen.

§ 7. Toepassing op de elasticiteits-theorie.

Ook op de elasticiteits-theorie kan men de complexe functies toepassen. Stel, dat men te doen heeft met een cylindrische staaf, waarvan de loodrechte doorsneden om een as gedraaid worden zoodanig, dat de draaiingshoek evenredig is aan den afstand tot een vaste doorsnede. Verder heeft een verschuiving plaats evenwijdig aan de staafas. Kiest men deze tot z-as, dan worden de deformatie-componenten gegeven door:

$$u = -wzy, \quad v = wzx, \quad w = w\Phi(x,y).$$

Φ voldoet aan de verg. (blijkens de vergelijkingen der elastische media voor het statische geval):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0.$$

De grensconditie wordt:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos(n,y)-y\cos(n,x)+x\cos(n,y)=0.$$

Noemt men Φ het reëele deel van

$$\chi=\Phi+i\psi,$$

waarbij χ b.v. een functie is van $\zeta=x+iy$, dan kan men uit de grensconditie afleiden, dat Φ en ψ toegevoegde functies worden.

§ 8. Toelichting.

Ter toelichting beschouwen wij de transformatie:

$$w=\log z,$$

of:

$$u+iv=\log r+i\theta.$$

Hierbij zijn de vlakken $\theta=$ const. aequipotentiaalvlakken, terwijl de krachtlijnen gevormd worden door $r=$ const. of omgekeerd. Electrostatisch kan men hierbij uitgaan van een lijnlading. Is e de lading per lengte-eenheid, dan vindt men:

$$u=C-2e\log r.$$

Heeft men een dergelijke lading in $z=a$, dan past de transformatie:

$$w=\log(z-a),$$

terwijl:

$$w=\log\frac{z-a}{z+a}$$

de superpositie geeft van twee velden met gelijke tegengestelde lijnladingen in $z=a$ en $z=-a$ of een lijnlading in $z=a$ geplaatst tegenover het vlak $y=o$.

§ 9. Mechanisch beeld van de conforme afbeelding.

Lord RAYLEIGH heeft een mechanisch beeld ontworpen van de conforme afbeeldingen. Bij de transformatie:

$$u+iv=f(x+iy)$$

ontstaan uit een stelsel vierkantjes in het x,y-vlak twee stelsels

krommen in het u,v-vlak, die elkaar loodrecht snijden. Deze krommen kan men nu voorstellen door stalen draden, terwijl men in de snijpunten koperen schijfjes bevestigt. De krommen moeten elkaar zooveel mogelijk loodrecht snijden. Om dit duidelijker te doen uitkomen, kan men een derde serie draden aanbrengen, die de eerste onder hoeken van 45° snijdt. Men kan nu deze figuren met een middenstof aangevuld denken, die deformaties toelaat. We kunnen dit aldus schrijven:

$$u + iv = f(t, x + iy), \tag{1}$$

waarbij t den tijd voorstelt. De snelheidscomponenten van een deeltje worden gegeven door: $\frac{\partial u}{\partial t}$ en $\frac{\partial v}{\partial t}$, zoodat:

$$\phi + i\psi = \frac{d}{dt} f(t, x + iy). \tag{2}$$

Uit beide laatste vergelijkingen volgt:

$$\phi + i\psi = F(t, u + iv). \tag{3}$$

Verg. (1) leert ons de beweging van elk deeltje afzonderlijk kennen, verg. (3) de snelheden op een willekeurig tijdstip. Houdt men t constant, dan voldoen ϕ en ψ weer aan de vergelijking van LAPLACE.

Is de beweging, die aan verg. (3) beantwoordt, standvastig, dan moet $\phi + i\psi$ onafhankelijk zijn van den tijd, zoodat de eliminatie van $x + iy$ tusschen (1) en (2) moet leiden tot de eliminatie van t. Uit eenige beschouwingen blijkt, dat de verg. (1) den volgenden vorm moet hebben:

$$u + iv = F_1 \{ t + F_2 (x + iy) \}.$$

Een andere vorm hiervoor is:

$$F_3 (u + iv) = t + F_2 (x + iy).$$

Als voorbeeld het volgende:

$$u + iv = c \sin (it + x + iy).$$

Hier wordt de verg. van een zgn. stroomlijn:

$$\frac{u^2}{c^2 \sin^2 x} - \frac{v^2}{c^2 \cos^2 x} = 1.$$

Opgemerkt kan worden, dat bij onsamendrukbare vloeistoffen de beweging snel is op een plaats, waar naburige stroomlijnen dicht bij elkaar liggen, terwijl hier de beweging op zulk een plaats zeer lang-

zaam is. Hiermede heeft echter Lord RAYLEIGH zelf het bezwaar tegen de bruikbaarheid van zijn model tot toelichting van de physische verschijnselen gegeven.

§ 10. **Transformatie bij een kromme van het geslacht nul.**

Van een kromme van het geslacht nul worden de coördinaten voorgesteld door:

$$x = f(p),\ y = \mathrm{F}(p).$$

De transformatie:

$$z = f(w) + i\,\mathrm{F}(w),$$

zal de potentiaal $v = 0$ maken over den geleider, welke voorgesteld wordt door genoemde kromme.

§ 11. **Afbeelding door lineaire gebroken functies.**

Bij de afbeelding door lineaire gebroken functies:

$$w = a\,\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

waarin a, α, β, reëele of imaginaire constanten voorstellen, stemt met iedere cirkel in het v-vlak een cirkel in het z-vlak overeen en omgekeerd. (Rechte lijnen kunnen als grensgeval van cirkels optreden). Dit geeft aanleiding tot de transformatie van een cirkel met een straal r in het z-vlak met een halfvlak van den kant van de negatieve u's in het w-vlak.

De substitutie wordt dan:

$$w = a\,\frac{z-r}{z+r}.$$

Omgekeerd zal de transformatie:

$$z = \frac{a+w}{a-w}\,r$$

het halfvlak afbeelden op den cirkel.

Met deze transformatie, die een uitbreiding is van de nog te beschrijven transformatie van SCHWARZ, worden physische vraagstukken opgelost.

§ 12. **Inductie van cylindrische geleiders.**

Een uitbreiding van het voorgaande geeft WEBER voor het vraagstuk van de inductie van cylindrische geleiders. Men kan dit terug-

brengen tot een afbeelding op een cirkelvormigen ring. Het eenvoudigste voorbeeld is dat, waar een gebied begrensd wordt door twee cirkels, die elkaar uitsluiten. Men krijgt dan een transformatie met lineair gebroken functies, waarbij cirkels van het eene vlak overgaan in cirkels van het andere vlak.

§ 13. **Verdeeling van de electriciteit op cylindrische vlakken.**

Ook het vraagstuk van de verdeeling van de electriciteit op cylindrische vlakken, behandelt WEBER met conforme afbeelding. De gedachtengang sluit aan bij de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Hierbij is Φ zoodanig, dat er een functie ψ bestaat, zoodanig, dat:

$$d\psi = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy$$

een volledige differentiaal is. Als we derhalve

$$\psi = -\int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \right)$$

stellen, dan zijn Φ en ψ toegevoegde functies. De functie $\chi = \Phi + i\psi$ is dan een functie van de complexe veranderlijke z.

Noem nu de doorsnede van de geleidende cylinders met het z-vlak s en het gebied tusschen deze krommen S. Denk het gebied afgebeeld op een cirkel in een w-vlak, zoodanig, dat met de omgeving in het w-vlak het oneindige in het z-vlak overeenstemt. Dan wordt w een functie van z zoodanig, dat:

1°. w in het geheele gebied S eenwaardig, eindig en continu is en afgezien van de grenskromme, een eindig van nul verschillend diff. quot. heeft.

2°. dat de absolute waarde van w op de kromme t gelijk 1 wordt.

3°. dat w voor $z = \infty$ verdwijnt en een reeksontwikkeling van w de vorm heeft:

$$w = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdot -$$

4°. voor iedere eindige waarde van z verschilt w van nul.

Kent men de functie w, dan kan men χ definieeren door de betrekking:

$$w = e^{\frac{\chi - c}{m}},$$

waarin c en w reëele const. voorstellen. Derhalve:

$$\chi = c + m \log w.$$

Het reëele deel Φ van χ wordt dan:

$$\Phi = c + m \log \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Φ voldoet nu aan onze oorspronkelijke diff. verg. Daar de absolute waarde $\sqrt{u^2+v^2}$ van w op de kromme s gelijk 1 is, krijgt Φ op deze kromme de constante waarde c. Verder is z w en dus $\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}$ in 't oneindige eindig. Stel $\sqrt{x^2+y^2} = R$, dan is $\Phi + m \log R$ in 't oneindige eindig.

Verder is Φ (zie 4°.) met zijn diff. quot. in 't geheele gebied S eindig, continu en eenwaardig.

§ 14. Transformatie van Schwarz.

Tot belangrijke toepassingen geeft aanleiding de transformatie van het gebied binnen een veelhoek in het z-vlak, waarvan de begrenzing overeen moet stemmen met de lijn $v = 0$ in het w-vlak. Men kan dan het gebied binnen den veelhoek overeen laten stemmen met het halfvlak aan den kant van de pos. u-as. Men kan dan bij een hoek van den veelhoek, kleine elementen niet gelijkvormig transformeeren. Laat men de hoekpunten correspondeeren met $u = u_1$, $u = u_2$ enz., dan wordt de transformatie:

$$\frac{dz}{dw} = C\,(w-u_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}\,(w-u_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \ldots\ldots$$

Hier zijn α_1, α_2, ... enz. de binnenhoeken van den veelhoek positief gerekend, als de veelhoek concaaf is naar de x-as.

§ 15. Uitbreiding op figuren, welke gedeeltelijk krom zijn.

PAGE heeft de transformatie van SCHWARZ uitgebreid ten behoeve van verschillende twee-dimensonale vraagstukken in electro-statica en electro-dymanica. Daarvoor moest een transformatie uitgevoerd worden, welke figuren in het z-vlak, die gedeeltelijk uit kromme deelen bestaan, transformeert naar de reëele as van het w-vlak. De kromme wordt daarvoor beschouwd als limiet van een gelijkhoekigen veelhoek. Beschouw daarvoor in de eerste plaats een cylindrisch krom uitsteeksel

op een oneindig vlak. Beschouw de kromme als de limiet van een gelijkhoekigen n-hoek (zie fig. 1).

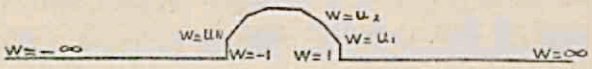


Fig. 1.

Neemt men $u_1 = \cos \alpha$, $u_2 = \cos 3\alpha$, ... $u_n = \cos(2n-1)\alpha$, waarbij $2n\alpha = \pi$, dan kan men een halven cirkel in het z-vlak verwachten. De transformatie wordt dan na eenige limietbeschouwingen (voor het geval derhalve, dat de kromme halfcirkelvormig is met straal C):

$$\frac{dz}{dw} = \frac{C}{\sqrt{w^2-1}}(w + \sqrt{w^2-1}).$$

§ 16. Uitbreiding van het voorgaande. Krommefactoren.

Op zijn beurt heeft LEATHEM het voorgaande weer uitgebreid. Hij nam als uitgangspunt de volgende transformatie:

$$dz = CF(w)\,\Pi(w-u_r)^{\frac{\alpha_r}{\pi}}\,dw.$$

Hierbij stellen u_1, u_2 reëele const. voor, α_1, α_2, ... eveneens. Onderstel F zoodanig, dat bovenstaande transformatie een conforme afbeelding geeft op een w-halfvlak van een gebied in het z-vlak, begrensd door een veelhoek met buitenhoek $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Denk verder, dat alle zijden op één na recht zijn. Denk, dat voor de kromme zijde $w_r < w < w_{r+1}$. Noem nu de passende functie F een *krommefactor*. Naar het aantal zijden, dat in krommen overgaat, kan men onderscheiden enkelvoudige, dubbele, drievoudige krommefactoren enz. F moet voldoen aan de volgende eischen, waarvan de drie eerste noodig zijn voor enkelvoudigheid.

1°. Het argument van F moet const. zijn voor $w > w^{r+1}$ en voor $w < w_r$. Voor $w_r < w < w^{r+1}$ moet het argument van F continu met u veranderen.

2°. F moet niet 0 of ∞ zijn voor eenige w, die overeenstemt met een punt van de positieve zijde van de reëele w-as, behalve voor $w = \infty$. Dit is noodig voor het conforme karakter van de transformatie.

3°. F mag geen enkel bepaald vertakkingspunt hebben aan de pos. zijde van de reëele w-as, wel op de reëele w-as zelf.

4°. F moet voor $w = \infty$ beantwoorden aan voorwaarden, die afhangen van den aard van het bepaalde probleem.

LEATHEM noemt nu het gebied op de reëele w-as, dat correspondeert met waarden van w, waarvoor het argument van F veranderlijk is, het lineaire gebied van den kromme-factor. Het verschil tusschen de argumenten in de uiteinden van het lineaire gebied noemt hij het hoekgebied van den krommefactor.

Indien F een kromme-factor is, is F^n dit evenzeer en wel met hetzelfde lineaire gebied als F, maar het hoekgebied is n-maal zoo groot.

Het is van beteekenis, dat de vorm van de kromme zijde van den veelhoek, die behoort bij een bepaalden kromme-factor niet alleen van den analytischen vorm van de laatste afhangt, maar ook van de andere factoren, die in de transformatie optreden. Dezelfde krommefactor kan dus tot verschillende krommen aanleiding geven, welke echter wel gemeenschappelijke takken kunnen hebben.

Zooals we gezien hebben, heeft PAGE een kromme-factor gegeven, welke uit den aard der zaak weer aanleiding kan geven tot andere kromme-factoren. Ze kan genoemd worden de kromme-factor van het halfcirkelvormige type en heeft de gedaante:

$$F_1 = w + (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Deze heeft een lineair gebied van $+1$ tot -1 en een hoekgebied π. Dat F_1 aan den eisch voldoet, geen nulpunt te hebben, ziet men gemakkelijk. Stel $G_1 = w - (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$. Daar nu $F_1 G_1 = 1$ is, is F_1 nergens nul.

Tracht men andere kromme-factoren te construeeren van het type van een rationeele functie plus een vierkantswortel, dan blijkt, dat voor een enkelvoudigen kromme-factor onder het wortelteeken slechts een in w-quadratischen vorm met reëele factoren mag staan. Het type moet dus zijn:

$$f(w) + g(w)(w^2 - c^2)^{\frac{1}{2}},$$

waarbij f en g rationeele functies zijn. Voor het vermijden van nulpunten is het noodzakelijk, dat:

$$|f(w)|^2 - |g(w)|^2 (w^2 - c^2) = \text{const.}$$

Indien $g(w)$ van den eersten graad is, dan is voor de rationaliteit

van $f(w)$ noodig, dat $g(w)$ eenvoudig w is. De kromme-factor wordt dan:

$$F_2 = w^2 - \frac{1}{2}c^2 + w(w^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Deze heeft tot hoekgebied 2π. Dit resultaat is echter niet nieuw, want $F_2 = {}^1/_2 F_1{}^2$.

Indien $g(w)$ van den tweeden graad is, leidt de rationaliteit van $f(w)$ tot den vorm:

$$F_3 = w^3 - \frac{3}{4}c^2 w + \left(w^2 - \frac{1}{4}c^2\right)(w^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ook dit is geen nieuw resultaat, want:

$$F_3 = \frac{1}{4}F_1{}^3.$$

§ 17. Algemeen bewijs dat $F_n = \frac{1}{2^{n-1}} F_1{}^n$.

Men kan verwachten, dat een kromme-factor van het type:

$$F_n = f(w) + g(w)(w^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$$

waarbij f en g rationeele functies zijn, de 1e van de n^{de}, de 2de van de $(n-1)^{ste}$ graad, zich laat schrijven als:

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} F_1{}^n.$$

Hier is LEATHEM in gebreke, zoodat ik gemeend heb, hieraan eenige beschouwingen te moeten vastknoopen. Om dit in te zien, maken we gebruik van den eisch voor de rationaliteit:

$$|f(w)|^2 = |g(w)|^2 (w^2 - c^2) + \text{const.}$$

Dit leert ons het volgende:

$$(w^n + p_1 w^{n-1} + p_2 w^{n-2} + \ldots . p_n)^2 = (q_0 w^{n-1} + q_1 w^{n-2} + q_2 w^{n-3} + \ldots . q_{n-1})^2 (w^2 - c^2) + \text{const.} \quad (1)$$

Stel hierin: $w = +c$, dan krijgt men:

$$(c^n + p_1 c^{n-1} + p_2 c^{n-2} + \ldots . \ldots . + p_n)^2 = 0.$$

Voor $w = -c$ wordt:

$$(c^n - p_1 c^{n-1} + p_2 c^{n-2} - p_3 c^{n-3} + \ldots .)^2 = 0.$$

Trek de laatste twee vergelijkingen van elkaar af, dan krijgt men:

$$4(c^n + p_2 c^{n-2} + p_4 c^{n-4} + \ldots .)(p_1 c^{n-1} + p_3 c^{n-3} + p_5 c^{n-5} + \ldots .) = 0.$$

De 1e factor $= 0$ heeft voor ons vraagstuk geen zin, daar dan $c = 0$ moet worden. De tweede factor geeft:

$$p_1 = 0,\ p_3 = 0,\ p_5 = 0, \text{ enz.}$$

Daardoor wordt ons uitgangspunt reeds eenvoudiger:

$$(w^n + p_2 w^{n-2} + p_4 w^{n-4} + \ldots.)^2 =$$
$$= (q_0 w^{n-1} + q_1 w^{n-2} + q_2 w^{n-3} + \ldots. q_{n-1})(w^2 - c^2) + \text{const.}$$

Nu blijkt bij uitwerking, dat elke $q_{2n+1} = 0$, daar er in het eerste lid alleen even machten voorkomen. Verder krijgt men:

$$\left.\begin{aligned} &2p_2 = 2q_2 - c^2;\ 2p_4 + p_2^2 = 2q_4 + q_2^2 - 2q_2 c^2; \\ &2p_6 + 2p_2 p_4 = 2q_6 + 2q_2 q_4 - 2q_4 c^2 - q_2^2 c^2; \text{ enz.} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Dat nu inderdaad $F_n = \frac{1}{2^{n-1}} F_1^n$ is, kan op de volgende manier blijken.

Onderstellende, dat dit zoo is, kan men de p's en q's opzoeken en laten zien, dat deze voldoen aan het laatste stelsel vergelijkingen. Aan vormen van lageren graad kan men laten zien, dat dit ook het eenige stelsel waarden van de p's en q's is, dat voldoet.

We onderstellen dus, dat onze kromme-factor de waarde:

$$B(w + \sqrt{w^2 - c^2})^n$$

heeft. Dan moet derhalve:

$$(w^n + p_1 w^{n-1} + p_2 w^{n-2} + \ldots. p_{n-2} w^2 + p_{n-1} w + p_n) +$$
$$+ (q_0 w^{n-1} + q_1 w^{n-2} + \ldots. q_{n-3} w^2 + q_{n-2} w + q_{n-1} w)\sqrt{w^2 - c^2} =$$
$$= B(w + \sqrt{w^2 - c^2})^n.$$

De coëff. van w^n in het 2e lid wordt:

$$B\left(1 + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} + \ldots. \ldots.\right).$$

Door een eenvoudige kunstgreep blijkt, dat de vorm tusschen haakjes 2^{n-1} is. De coëff. van w^n in het 2e lid van verg. (2) wordt dus: $2^{n-1} \times B$; in het 1e lid wordt deze 1, dus $B = \frac{1}{2^{n-1}}$. We gaan thans de coëff. verder opzoeken met een methode, die overeenstemming vertoont met de volledige inductie. Ga uit van den vorm:

$$(w^n + p_2 w^{n-2} + p_4 w^{n-4} + \ldots. p_n) +$$
$$+ (w^{n-1} + q_2 w^{n-3} + \ldots. q_{n-2} w)\sqrt{w^2 - c^2}.$$

We mochten $p_1, p_3 \ldots., q_1, q_3 \ldots.$ gerust weglaten, omdat we gezien hebben, dat deze in ieder geval nul moeten zijn, wil men met een

kromme-factor te doen hebben. Volgens de redeneering van volledige inductie moeten de volgende kromme-factoren gevonden worden door de vermenigvuldiging met $\frac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - c^2})$. Deze vermenigvuldiging levert:

$$w^{n+1} + \tfrac{1}{2}(p_2 + q_2 - c^2)\, w^{n-1} + \tfrac{1}{2}(p_4 + q_4 - c^2 q_2)\, w^{n-3} + \ldots .$$
$$\tfrac{1}{2}(p_n - c^2 q_{n-2})\, w + \{w^n + \tfrac{1}{2}(p_2 + q_2)\, w^{n-2} + \ldots .$$
$$\tfrac{1}{2}(p_{n-2} + q_{n-2})\, w^2 + \tfrac{1}{2} p_n \} \sqrt{w^2 - c^2}.$$

Noemt men de coëff. van de volgende kromme-factor:

$$p'_2,\ p'_4,\ \ldots\ldots,\ q'_2,\ q'_4,\ \ldots\ldots\ldots,$$

dan krijgt men de volgende betrekkingen:

$$p'_2 = \tfrac{1}{2}(p_2 + q_2 - c^2);\ p'_4 = \tfrac{1}{2}(p_4 + q_4 - c^2 q_2);$$
$$p'_6 = \tfrac{1}{2}(p_6 + q_6 - c^2 q_4) \text{ enz.};$$
$$q'_2 = \tfrac{1}{2}(p_2 + q_2);\ q'_4 = \tfrac{1}{2}(p_4 + q_4);\ q'_6 = \tfrac{1}{2}(p_6 + q_6) \text{ enz.}$$

De eenvoudigste methode om regelmaat te ontdekken, is gelegen in het opstellen van een tabel voor de verschillende n's. Dit is niet moeilijk, daar we van $n = 2$ of zelfs $n = 1$ kunnen uitgaan.

Die tabel heb ik voortgezet voor de p's en de q's tot en met $n = 8$. Bekijkt men den vorm, die men voor de p's en de q's krijgt, dan blijkt dat:

$$p_2 = -n \times \tfrac{1}{4} c^2;\ q_2 = -(n-2)\, \tfrac{1}{4} c^2.$$

Dat dit inderdaad algemeen juist is, volgt door volledige inductie:

$$p'_2 = \tfrac{1}{2}(p_2 + q_2 - c^2) = -\tfrac{1}{4} c^2 (n+1),$$
$$q'_2 = \tfrac{1}{2}(p_2 + q_2) = -\tfrac{1}{4} c^2 (n-1).$$

De p_4 en q_4 blijken termen te vormen van reeksen van hoogere orde. De algemeene p_4 wordt dan:

$$p_4 = \frac{2 \times \frac{n-4}{1} . 3 + \frac{(n-4)(n-5)}{2!} . 1}{16} c^4 = \frac{n(n-3)}{2^5} c^4.$$

$$q_4 = \frac{1 + \frac{n-5}{1} . 2 + \frac{(n-5)(n-6)}{4!} . 1}{16} c^4 = \frac{(n-3)(n-4)}{2^5} c^4.$$

Door volledige inductie blijkt weer, dat dit algemeen juist is. Op een dergelijke manier blijkt, dat:

$$p_6 = -\frac{n(n-4)(n-5)}{3 . 2^7} c^6;\ q_6 = -\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3 . 2^7} c^6.$$

Substitueert men deze uitdrukkingen in de vergelijkingen (2), dan blijkt inderdaad, dat deze aan genoemde vergelijkingen voldoen, zoodat men met deze coëff. inderdaad kromme-factoren krijgt, welke aan den eisch der rationaliteit voldoen.

§ 18. Betrekkingen voor sommen van binomiaalcoëfficienten.

Let men op $(w+\sqrt{w^2-c^2})^n$, dan kan men uit het voorgaande interessante betrekkingen vinden voor sommen van binomiaal coëff. De waarde voor B hebben we gevonden door de coëff. van w^n gelijk te stellen:

$$1+\frac{n(n-1)}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\ldots\ldots=2^{n-1}.$$

Voor q_0 vinden we:

$$q_0=\left\{n+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}+\ldots\ldots\right\}B=1.$$

De vorm tusschen accolades heeft dus de waarde 2^{n-1}.

$p_1=0$, $q_1=0$ levert niets op, daar die ook hier vanzelf verdwijnen.

$$p_2=-\left\{\frac{n(n-1)}{2!}+2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\right.$$
$$\left.+3\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{6!}+\ldots\right\}Bc^2=-\frac{1}{4}nc^2.$$

Derhalve wordt de vorm tusschen accolades: $n\times 2^{n-3}$.

$$q_2=-\left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}+\right.$$
$$\left.+3\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{7!}+\ldots\right\}Bc^2=-(n-2)\frac{1}{4}c^3.$$

De uitdrukking tusschen accolades krijgt thans de waarde: $(n-2)2^{n-3}$.

$p_3=0$, $q_3=0$ leveren niets op.

$$p_4=\left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+3\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-5)}{6!}+\right.$$
$$+6\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-7)}{8!}+$$
$$\left.+10\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-9)}{10!}+\ldots\ldots\right\}Bc^4=\frac{n(n-3)}{2^5}c^4.$$

Thans wordt de vorm tusschen de accolades: $n(n-3)2^{n-6}$.

$$q_4 = \Big\{ \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{5!} + 3\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{7!} + $$
$$+ 6\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-8)}{9!} +$$
$$+ 10\frac{n(n-1)\ldots(n-10)}{11!} + \ldots \Big\}\ Bc^4 = \frac{(n-3)(n-4)}{2^5}\, c^4.$$

De vorm tusschen accolades wordt nu: $(n-3)(n-4)\,2^{n-6}$.

Opgemerkt kan worden, dat in p_4 en q_4 de coëff.: 1, 3, 6, 10, ... een reeks van hoogere orde vormen.

$$p_6 = -\Big\{ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{6!} + 4\frac{n(n-1)\ldots(n-7)}{8!} +$$
$$+ 10\frac{n(n-1)\ldots(n-9)}{10!} + 20\frac{n(n-1)\ldots(n-11)}{12!} +$$
$$+ 35\frac{n(n-1)\ldots(n-13)}{14!} \Big\}\ Bc^6 = -\frac{n(n-4)(n-5)}{3.2^7}\, c^6.$$

De waarde van den vorm tusschen accolades wordt nu:

$$\tfrac{1}{3}\, n(n-4)(n-5)\,2^{n-8}.$$

$$q_6 = -\Big\{ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{7!} + 4\frac{n(n-1)\ldots(n-8)}{9!} +$$
$$+ 10\frac{n(n-1)\ldots(n-10)}{11!} + 20\frac{n(n-1)\ldots(n-12)}{13!} +$$
$$+ 35\frac{n(n-1)\ldots(n-14)}{15!} \Big\}\ Bc^6 = -\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3.2^7}\, c^6.$$

De vorm tusschen accolades wordt dus: $\frac{1}{3}(n-4)(n-5)(n-6)\,2^{n-8}$.

(Opm. De coëff. 1, 4, 10, 20, 35, ... die in p_6 en q_6 voorkomen, vormen een reeks van hoogere orde.)

Opgemerkt kan worden, dat enkele van deze binominaaluitdrukkingen ook zelfstandig kunnen worden gevonden. Door de bewerking inderdaad hiervoor uit te voeren, kan men zien, hoeveel moeizamer deze zelfstandige weg is. De weg is een generaliseering van de hiervoren beschreven kunstgreep voor het vinden van B.

§ 19. Eenduidigheid der gevonden F. Enkele kromme-factoren.

We hebben gezien, dat de gevonden p_2, q_2, voldoen aan ons stelsel (2) van blz. 17. Dat dit het eenige stel is, blijkt door voor $n = 2, 3, \ldots$. uit deze verg. de p's en q's op te lossen. Er blijkt dan slechts één stel wortels te voldoen en wel hetzelfde stelsel, als we hier gevonden hebben, zoodat we mogen aannemen, dat dit het eenige stelsel wortels is.

Enkele kromme-factoren voor $n = 1, 2 \ldots . 5$, volgen hier:

$n = 1 : w + \sqrt{w^2 - c^2}.$

$n = 2 : \left(w^2 - \frac{1}{2} c^2\right) + w \sqrt{w^2 - c^2}.$

$n = 3 : \left(w^3 - \frac{3}{4} c^2 w\right) + \left(w^2 - \frac{1}{4} c^2\right) \sqrt{w^2 - c^2}.$

$n = 4 : \left(w^4 - c^2 w^2 + \frac{1}{8} c^4\right) + \left(w^3 - \frac{1}{2} c^2 w\right) \sqrt{w^2 - c^2}.$

$n = 5 : \left(w^5 - \frac{5}{4} c^2 w^3 + \frac{5}{16} c^4 w\right) + \left(w^4 - \frac{3}{4} c^2 w + \frac{1}{16} c^4\right) \sqrt{w^2 - c^2}.$

In deze gevallen is gemakkelijk de waarde van de const. van blz. 17 op te geven. Drie waarden worden resp. van af $n = 2$:

$$\frac{1}{4} c^4, \ \frac{1}{16} c^6, \ \frac{1}{64} c^8, \ \frac{1}{256} c^{10} \text{ enz.}$$

Men kan nog deze opmerking maken. Substitueert men in verg. (1) voor w de waarde c, dan wordt:

$$| f(c) |^2 = \text{const.}$$

Die const. is derhalve steeds positief.

§ 20. **Algemeene uitdrukkingen voor de coëfficienten p en q.**

Beschouwen we p_2, q_2 enz., dan laat zich de verwachting uitspreken, dat:

$$p_{2k} = (-1)^k \frac{n(n-k-1)!}{k!\,(n-2k)!} \left(\frac{c}{2}\right)^{2k}.$$

$$q_{2k} = (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k-1)!} \left(\frac{c}{2}\right)^{2k}.$$

Door volledige inductie blijkt, dat dit inderdaad juist is, als men gebruik maakt van de verg.:

$$p'_{2k} = \frac{1}{2}(p_{2k} + q_{2k} - c^2 q_{2k-2}); \ q'_{2k} = \frac{1}{2}(p_{2k} + q'_{2k}).$$

Ook de binominaaluitdrukkingen laten zich generaliseeren. Lettende op $(w + \sqrt{w^2 - c^2})^n$ kan men schrijven:

$$p_{2k} = (-1)^k \left\{ \frac{n(n-1)\ldots.(n-2k+1)}{2k!} + \right.$$

$$+ \frac{k+1}{1!} \frac{n(n-1)\ldots.(n-2k-1)}{(2k+2)!} +$$

$$+\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\frac{n(n-1)\ldots.(n-2k-3)}{(2k-4)!}+$$
$$+\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}\frac{n(n-1)\ldots.(n-2k-5)}{(2k+6)!}\Big\}Bc^{2k}.$$

De vorm tusschen accolades wordt thans op grond van de gevonden p_{2k}:

$$(-1)^k\frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}2^{2n-2k-1}.$$

Evenzoo wordt:

$$q_{2k}=(-1)^k\Big\{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-2k)}{(2k+1)!}+$$
$$+\frac{k+1}{1!}\frac{n(n-1)\ldots.(n-2k-2)}{(2k+3)!}+$$
$$+\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\frac{n(n-1)\ldots.(n-2k-4)}{(2k+5)!}+$$
$$+\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-2k-6)}{(2k+7)!}\Big\}Bc^{2k}.$$

De vorm tusschen accolades wordt nu:

$$(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k-1)!}2^{2n-2k-1}.$$

§ 21. Kromme-factor van halfelliptisch type.

We komen thans op de beschouwingen van LEATHEM terug. Uit het voorgaande is gebleken, dat het halfcirkelvormig type zich niet laat generaliseeren. Als volgende voorbeeld geeft LEATHEM een kromme-factor van halfelliptisch type:

$$F_4=w\sin h\alpha+(w^2-c^2)^{\frac{1}{2}}\cos h\alpha.$$

Deze heeft tot hoekgebied π. Op eenvoudige manier blijkt, dat F_4 geen nulpunten heeft.

LEATHEM geeft in zijn verhandeling een rijkdom van mathematische uitbreidingen met physische toepassingen. Voor de laatste verwijs ik naar de tabel.

§ 22. Kromme opgevat als limiet van den veelhoek.

Het ligt voor de hand, het voorgaande in verband te brengen met de gewone transformatie van SCHWARZ door de kromme op te vatten als de limiet van een door rechte lijnen begrensden veelhoek (zie ook § 15). Laat Φ de hoek zijn tusschen de reëele z-as en de raaklijn

in een willekeurig punt van de kromme. Laat verder de buitenhoek van den veelhoek, waarvan de limiet de kromme wordt, zijn $d\Phi$ en θ de waarde van w voor het hoekpunt, dan wordt de kromme-factor:

$$\lim. \Pi (w-\theta)^{\frac{d\Phi}{\pi}},$$

welke verkregen kan worden door:

$$F_5 = e^{\int \log (w-\theta) \frac{d\Phi}{\pi}}.$$

Deze uitdrukking is onbepaald door het ontbreken van ieder functioneel verband tusschen θ en Φ. Men kan derhalve een functioneel verband aannemen:

$$\Phi = \pi f(\theta),$$

waarbij f afhangt van de figuur, waarmee we ons bezig houden, zoowel wat afmeting als voorgeschreven begrenzing betreft. Voor een willekeurige kromme wordt de transformatie:

$$dz = e^{\frac{1}{\pi} \int \log (w-\theta)\, d\Phi}$$

§ 23. Transformatie: $f(z)\,dz = F(w)\,dw$.

In zijn slotbeschouwingen vermeldt LEATHEM, dat de transformatie:

$$f(z)\,dz = F(w)\,dw$$

nog grooter moeilijkheden oplevert, dan de tot nog toe beschouwde. Toch lukt het hem, ook in enkele speciale gevallen met deze transformatie te werken.

§ 24. Algemeene coördinaten.

Van geheel anderen aard zijn de uitbreidingen, die WEBSTER in zijn werk over „Electricity and Magnetism" geeft. Deze werkt n.l. met algemeene coördinaten. Laat V b.v. een potentiaal voorstellen, die in een punt P continu is, en daar de waarde V heeft. Indien V een functie is van een coördinaat q, dan worden haar aequipotentiaalvlakken verkregen, door q constant te stellen. De electrische kracht is dan:

$$R = \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial n} = \pm h \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Hierbij hebben we $\pm \frac{\partial q}{\partial n} = h$ gesteld. Het positieve teeken moet men

nemen, als V en q in dezelfde richting toenemen, anders het negatieve teeken.

Laat V nu een functie zijn van drie algemeene orthogonale coördinaten. Noem dn_1 de loodrechte afstand tusschen naburige oppervlakken q_1 en $q_1 + dq$, evenzoo dn_2 tusschen q_2 en $q_2 + dq_2$ en dn_3 tusschen q_3 en $q_3 + dq_3$. Noem verder $h_1 = -\frac{\partial q_1}{\partial n_1}$, $h_2 = -\frac{\partial q_2}{\partial n_2}$ en $h_3 = \frac{\partial q_3}{\partial n_3}$. Noem verder R_1, R_2, R_3 de componenten volgens de normalen op de vlakken $q_1 = \text{const.}$, $q_2 = \text{const.}$, $q_3 = \text{const.}$ van de electrische kracht in een punt met algemeene coördinaten q_1, q_2, q_3, dan is:

$$R_1 = \frac{\partial V}{\partial n_1} = -h_1 \frac{dV}{\partial q_1},\quad R_2 = \frac{\partial V}{\partial n_2} = -h_2 \frac{\partial V}{\partial q_2},\quad R_3 = \frac{\partial V}{\partial n_3} = -h_3 \frac{\partial V}{\partial q_3}.$$

Voor een krachtlijn geldt:

$$dn_1 : dn_2 : dn_3 = R_1 : R_2 : R_3,$$

of

$$dq_1 : dq_2 : dq_3 = h_1 R_1 : h_2 R_2 : h_3 R_3.$$

De diff. verg. van de krachtlijn zijn dus:

$$dq_1 : dq_2 : dq_3 = h_1^2 \frac{\partial V}{\partial q_1} : h_2^2 \frac{\partial V}{\partial q_2} : h_3^2 \frac{\partial V}{\partial q_3} =$$

$$= \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial q_1} : \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial V}{\partial q_2} : \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial V}{\partial q_3} = Q_1 : Q_2 : Q_3.$$

Hier heeft men gesteld:

$$Q_1 = \frac{h_1}{h_3 h_2} \frac{\partial V}{\partial q_1} \text{ enz.}$$

De driedimensionale vergelijking van LAPLACE wordt dan:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_3}{\partial q_3} = 0.$$

Indien we nu een integraal gevonden hebben van de verg. van de krachtlijnen:

$$\lambda(q_1, q_2, q_3) = \text{const.},$$

dan is:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \lambda}{\partial q_3} dq_3 = 0,$$

en daar:

$$dq_1 : dq_2 : dq_3 = Q_1 : Q_2 : Q_3,$$

is:

$$Q_1 \frac{\partial \lambda}{\partial q_1} + Q_2 \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} + Q_3 \frac{\partial \lambda}{\partial q_3} = 0.$$

Meetkundig beteekent dit, dat de kracht Q loodrecht staat op de normaal op het opp. $\lambda = \text{const.}$, d.w.z. raakt aan dit opp.

Een andere integraal wordt nu terstond gevonden in den vorm:

$$\mu = \int \frac{1}{\frac{\partial \lambda}{\partial q_2}} (Q_2\, dq_1 - Q_1\, dq_2) = \text{const.}$$

WEBSTER toont dit in een voor deze dissertatie te uitvoerig betoog aan.

Om het voorgaande te verduidelijken, kan men twee toepassingen geven. Laten q_1, q_2, q_3 de rechthoekige coördinaten x, y, z voorstellen; beschouw V als onafhankelijk van z. Men heeft dan te doen met een vraagstuk in een plat vlak. De eene integraal is dan: $\lambda = z = \text{const.}$ en de andere:

$$\mu = \int \left(\frac{\partial V}{\partial y}\, dx - \frac{\partial V}{\partial x}\, dy \right) = \text{const.}$$

Dan wordt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

μ en V zijn dus toegevoegde functies.

Stellen q_1, q_2, q_3 de cyl. coörd. ρ, ω, z voor en denkt men V onafhankelijk van ω, dan is een oppervlak:

$$\lambda = \omega = \text{const.}$$

en het andere:

$$\mu = \int \rho \left(\frac{\partial V}{\partial z}\, \partial \rho - \frac{\partial V}{\partial \rho}\, dz \right) = \text{const.}$$

We komen op onze algemeene beschouwingen terug. Liggen de krachtlijnen in één van de coördinaatsvlakken, dan is één integraal:

$$\lambda = q_3 = \text{const.}$$

Derhalve:

$$\mu = \int \left(\frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial V}{\partial q_2}\, dq_1 - \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial q_1}\, dq_2 \right) = \text{const.}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial q_1} = \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial q_2} = \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial V}{\partial q_1}.$$

Door differentiatie en optelling blijkt nu, dat men de volgende vergelijkingen kan opstellen:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_1}{h_3 h_2}\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \mu}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \mu}{\partial q_2}\right)=0.$$

Is nu h_3 onafhankelijk van q_1 en q_2, hetgeen het geval is, als twee opp. q_3, q_3+dq_3 overal denzelfden afstand $dn_3=\frac{dq_3}{h_3}$ hebben, dan voldoen V en μ aan dezelfde differentiaalverg. Door verwisseling van V en μ kan men dus gelijktijdig twee vraagstukken oplossen, evenals in het begin vermeld werd met toegevoegde functies.

De analogie met het vroeger behandelde strekt zich echter nog verder uit. De lengte van een boog wordt gevonden door:

$$ds^2=\frac{dq_1^2}{h_1^2}+\frac{dq_2^2}{h_2^2}.$$

Kan men nu twee functies $u(q_1, q_2)$ en $v(q_1, q_2)$ zoodanig vinden, dat $(du)^2+(dv)^2=M\,ds^2$, waarbij M een functie is van de plaats van het punt, welke echter de differentialen dq_1 en dq_2 niet bevat, dan blijkt uit een vrij ingewikkelde becijfering, dat u en v beide voldoen aan de volgende overeenkomstige diff. verg.:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial v}{\partial q_2}\right)=0.$$

u en v voldoen aan dezelfde diff. verg. als V en μ. Twee zulke functies u en v mag men dus kiezen in plaats van V en μ.

Heeft men een tweede stel functies u', v' zoodanig, dat

$$(du')^2+(dv')^2=M'ds^2,$$

dan blijkt, dat $u'+iv'$ een monogene functie is van $u+iv$. Hieruit ziet men, dat uit de oplossing van één vraagstuk voor het opp. q_3, de oplossingen van een willekeurig aantal andere vraagstukken voor hetzelfde opp. kunnen worden afgeleid.

Indien de grootheden u,v rechthoekige coörd. in een plat vlak voorstellen, dan wordt de lengte van een boog:

$$d\sigma^2=du^2+dv^2.$$

Met een will. punt u,v op het platte vlak correspondeert een ander punt met dezelfde waarde voor u,v op het opp. q_3. Tengevolge van

de betrekking $d\sigma^2 = M ds^2$ heeft men conforme afbeelding. Transformeert men het u,v-vlak weer conform op een x,y-vlak, dan weet men, dat $u+iv$ een monogene functie is van $x+iy$, waarbij men u en v intensiteit en potentiaal van het x,y-vlak kan laten voorstellen.

Als eenvoudige toepassing van het voorgaande en een uitbreiding van § 4, kan men gemakkelijk aantoonen, dat ook hier weer:

$$\iint \rho \, dx \, dy = \iint \rho^1 \, dq_1 \, dq_2.$$

Men ziet dan weer, dat gebieden, die door transformatie uit elkaar ontstaan, bij verschillende dichtheden dezelfde ladingen hebben. Verder bewijst men gemakkelijk, dat de totale lading tusschen twee punten gemeten wordt door het verschil van de waarden van de functie, die aan de potentiaal is toegevoegd, tusschen die punten.

§ 25. Conforme afbeelding in de ruimte met 4 afmetingen.

H. BATEMAN heeft de conforme afbeelding uitgebreid tot een ruimte met 4 afmetingen. Hij geeft van zijn methode physische toepassingen, waarvoor wij naar de tabel verwijzen. Hier geven wij een kort overzicht van zijn methode. De overgang naar de driedimensionale ruimte werd verkregen door de vierde coördinaat te vervangen door ict, waarbij t de tijd en c de snelheid van het licht voorstelt.

Voer de volgende 6 homogene coördinaten in:

$$l = x + iy, \quad m = z + iw, \quad n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$
$$\lambda = x - iy, \quad \mu = z - iw, \quad \nu = -1$$

Deze zijn verbonden door de identieke betrekking:

$$l\lambda + mp + n\nu = 0.$$

Elke functie $F(x,y,z,w)$ kan met behulp hiervan uitgedrukt worden als een homogene functie van willekeurige graad. We mogen b.v. schrijven:

$$V = F(x,y,z,w) = F\left(-\frac{l+\lambda}{2\nu}, -\frac{l-\lambda}{2i\nu}, -\frac{m+\mu}{2\nu}, -\frac{m-\mu}{2i\nu}\right).$$

$$U = f(x,y,z,w) = -\frac{1}{\nu} f\left(-\frac{l+\lambda}{2\nu}, -\frac{l-\lambda}{2i\nu}, -\frac{m+\mu}{2\nu}, -\frac{m-\mu}{2i\nu}\right).$$

In de eerste voorstelling is V een homogene functie van de nulde graad, in de tweede is U van de graad -1. Omgekeerd zal iedere homogene functie van de 6 veranderlijken l, m, n, λ, μ, ν uitgedrukt kunnen worden als een functie van x, y, z, w.

Bij de volgende eenvoudige becijferingen maakt BATEMAN gebruik van de hexaspherische coördinaten:

$$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = y,\ \alpha_3 = z,\ \alpha_4 = w,\ \alpha_5 = \frac{r^2-1}{2},\ \alpha_6 = \frac{r^2+1}{2i},$$

waarbij:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Dan wordt:

$$l = \alpha_1 + i\alpha_2,\quad m = \alpha_3 + i\alpha_4,\quad n = \alpha_5 + i\alpha_6,$$
$$\lambda = \alpha_1 - i\alpha_2,\quad \mu = \alpha_3 - i\alpha_4,\quad \nu = \alpha_5 - i\alpha_6.$$

Het doel van deze becijfering is te doen zien, dat een homogene functie van de nulde graad, die een oplossing is van:

$$\frac{\partial V}{\partial l}\frac{\partial V}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial m}\frac{\partial V}{\partial \mu} + \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial V}{\partial \nu} = 0,$$

d. i. van:

$$\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_k}\right)^2 = 0,$$

ook een oplossing is van:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial w}\right)^2 = 0. \qquad (1)$$

Evenzoo toont men aan, dat indien U een oplossing is van:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial l\,\partial \lambda} + \frac{\partial^2 U}{\partial m\,\partial \mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial n\,\partial t} = 0,$$

d. i. van:

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_k^2} = 0,$$

U ook een oplossing is van:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial w^2} = 0. \qquad (2)$$

Beschouwen we $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_6$ als de coörd. van een punt in een zesdimensionale ruimte, dan blijven de uitdrukkingen:

$$\sum_{k=1}^{6}\alpha_k^2,\quad \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha_k}\right)^2,\quad \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha_k}\right)^2$$

onveranderd van vorm bij verandering van rechthoekige assen, als de oorsprong dezelfde blijft. Elke dergelijke verandering levert een transformatie in de ruimte (x, y, z, w), welke ons in staat stelt uit een

oplossing van verg. (2) een andere te verkrijgen. Een dergelijke opmerking geldt voor verg. (1).

Als toelichting van het voorgaande gaan we n en $-v$ verwisselen. Uit de oplossing $V = F(x, y, z, w)$ van verg. (1) leiden we nu een tweede oplossing af:

$$V' = F\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}, \frac{w}{r^2}\right).$$

Uit de oplossing $U = f(x, y, z, w)$ van (2), vinden we een tweede oplossing

$$u = \frac{1}{r^2} f\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}, \frac{w}{r^2}\right).$$

Stellen we nu: $w = ict$, dan nemen de verg. (1) en (2) den bekenden vorm aan:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{4}$$

De transformatie laat zich nu aldus schrijven:

$$X = \frac{x}{r^2 - c^2t^2}, \quad Y = \frac{y}{r^2 - c^2t^2}, \quad Z = \frac{z}{r^2 - c^2t^2}, \quad T = \frac{t}{r^2 - c^2t^2},$$

waarbij:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Een tweede voorbeeld krijgt men door m en n en μ met ν te verwisselen. Dan blijkt eenvoudig, dat als: $V = F(x, y, z, t)$, een oplossing is van: (3), dan is ook $F(X, Y, Z, T)$ een oplossing, waarbij:

$$X = \frac{x}{z - ct}, \quad Y = \frac{y}{z - ct}, \quad Z = \frac{r^2 - 1}{2(z - ct)}, \quad cT = \frac{r^2 + 1}{2(z - ct)}.$$

Hierbij is:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

En indien $U = f(x, y, z, t)$ een oplossing is van (4), dan is:

$$\frac{1}{z - ct} f\left(\frac{x}{z - ct}, \frac{y}{z - ct}, \frac{r^2}{z - ct}, \frac{r^2 + 1}{2c(z - ct)}\right)$$

eveneens een oplossing.

Voor het verband tusschen de verschillende oplossingen verdient het aanbeveling poolcoördinaten te gebruiken. Stel:

$$x = r\cos\theta\cos\phi,\quad y = r\cos\theta\sin\phi,\quad z = r\sin\theta\cos\psi,\quad w = ict = r\sin\theta\sin\psi,$$

$$X = R\cos\Theta\cos\Phi,\quad Y = R\cos\Theta\sin\Phi,\quad Z = R\sin\Theta\cos\Psi,\quad W = icT = R\sin\Theta\sin\Psi,$$

dan krijgen we de betrekkingen:

$$r^2 = -e^{-2i\Psi},\quad R^2 = -e^{-2i\psi},\quad \sin\Theta = \operatorname{cosec}\theta,\quad \Phi = \phi.$$

Er bestaat een dergelijke transformatie voor de vergelijking van LAPLACE.

De resultaten van de combinatie der verschillende transformaties, die behooren tot de groep van conforme afbeeldingen, wordt het gemakkelijkst vertolkt door asverandering in een ruimte met spherische coördinaten. De hoek tusschen twee grootheden in deze ruimte is even groot als de hoek tusschen de overeenkomstige grootheden, waarop de conforme afbeeldingen zijn toegepast.

Bij een ruimte van vier afmetingen hebben we inderdaad:

$$\sum_{k=1}^{6} \delta\alpha_k^2 \equiv dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2.$$

$$\sum_{k=1}^{6} \delta\alpha_k\,\delta\alpha_k' \equiv dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' + dw\,dw'.$$

Hieruit volgt de belangrijke stelling gemakkelijk.

Een verandering in het teeken van α_6 levert een inversie. Gaat deze gepaard met een teekenverandering van α_4, dan krijgt men de andere genoemde transformatie. In 't algemeen stemt een spiegeling van lineaire grootheden in de α ruimte overeen met een inversie ten opzichte van den overeenkomstigen cirkel, bol of hypersfeer in de vierdimensionale ruimte.

§ 26. Meerwaardige potentialen.

Heeft men de potentiaal van een beperkt gebied van een plat vlak te bestudeeren, dan kan men dit vraagstuk door analytische uitbreiding tot een probleem voor het onbeperkte vlak maken. Wordt het oorspronkelijke gebied begrensd door rechte lijnen of cirkels, dan kan men de uitbreiding tot het geheele vlak bewerkstelligen door spiegeling. Heeft men een puntlading voor een geleidend vlak, dan kan men, zooals bekend is, het desbetreffende potentiaal-vraagstuk oplossen door een tegengestelde puntlading te plaatsen in het spiegelbeeld van het punt, waar de oorspronkelijke lading zich bevindt. Bij een punt-

lading binnen een hoek, gevormd door twee loodrechte vlakken, kan men ladingen plaatsen in 4 symmetrisch ten opzichte van de vlakken liggende punten. Maken de vlakken een hoek van 60°, dan krijgt men, als men het oorspronkelijke punt meetelt, zes beelden. Is de hoek $\frac{\pi}{m}$ radialen, dan krijgt men 2 m beelden. Bevat de hoek daarentegen $\frac{n\pi}{m}$ radialen, dan moeten we, willen we door spiegeling in ons uitgangspunt terugkeeren, n keer het platte vlak om het hoekpunt van den hoek rondgaan. We kunnen dan met succes gebruik maken van Riemannsche oppervlakken.

Men kan nu n.l. de 2 m spiegelbeelden plaatsen op een Riemannsch oppervlak, dat op de bekende wijze uit n bladen wordt samengesteld. Gaat men in het Riemannsche oppervlak een keer rond, om het hoekpunt, zoodat men in het uitgangspunt is teruggekeerd, dan stemt dit overeen met bovenbedoelden rondgang om het hoekpunt in het platte vlak, welke men n keer had uit te voeren, voordat men in het uitgangspunt was teruggekeerd. Heeft men nu de oplossing van het potentiaalvraagstuk voor het Riemannsche oppervlak gevonden, dan sluit deze de oplossing in zich van het vraagstuk voor het oorspronkelijke deel van het platte vlak.

Maar ook in andere gevallen kan men met vrucht gebruik maken van Riemannsche oppervlakken. Het komt n.l. voor, dat men in een of ander vraagstuk voor de potentiaal een meerwaardige functie vindt. (Voorloopig beperken we ons weer tot het platte vlak). Hoewel dan slechts een enkele waarde aan de grens-voorwaarden zal voldoen, kan het toch van belang zijn, de beteekenis van de andere waarden te onderzoeken. Dergelijke zgn. meerwaardige potentialen treden b.v. op bij de transformaties met *toegevoegde functies:* $w = \Phi(z)$, waarbij $\Phi(z)$ geen eenwaardige functie van z is. Men kan ook thans $\Phi(z)$ op een Riemannsch oppervlak voorstellen als een éénwaardige functie. Één punt op dit Riemannsch oppervlak stemt nu overeen met één waarde van w, derhalve met één punt in het w-vlak. Dus wordt met behulp van bovenstaande vergelijking het geheele w-vlak getransformeerd tot een volledig Riemannsch oppervlak. Bij een zekere waarde van z kunnen nu meerdere waarden van den potentiaal behooren, maar elke waarde heeft betrekking op een bepaald blad. Indien men nu een zeker gebied op dit oppervlak kiest, dat geen vertakkingspunten

of lijnen bevat, kunnen wij dit gebied als een reëel tweedimensionaal gebied beschouwen en de bijbehoorende waarde van de potentiaal, zooals onze vergelijking die geeft, levert ons de oplossing van een electrostatisch vraagstuk.

§ 27. Toelichting.

Beschouw als toelichting de functie:

$$w = z^{\frac{1}{2}}.$$

Men krijgt dan een Riemannsch oppervlak (het w-vlak) bestaande uit twee bladen. Bij één waarde van z behooren 2 waarden van w, elk op één blad van het R-oppervlak. Een cirkelvormige weg in het ééne oppervlak wordt een dubbele cirkel in het andere. Een lijn, evenwijdig aan de reëele as wordt een parabool in de andere. Men krijgt dus door transformatie problemen over gebieden door parabolen begrensd.

Een combinatie van de methode der spiegeling met die der meerwaardige potentialen vindt men in het volgende voorbeeld. In het ζ-vlak ligt een lijnlading $+e$ in een punt P geplaatst tegenover een geleidend vlak, voor te stellen door de reëele as. De oplossing wordt gevonden door een lijnlading $-e$ in het spiegelbeeld. Men krijgt dan de verg.:

$$u + iv = \mathrm{A} \log \frac{\zeta - \zeta_{\mathrm{P}}}{\zeta - \zeta_{\mathrm{P}^1}}.$$

Dit kan men transformeeren met $\zeta = z^{\frac{1}{2}}$. Het geleidend vlak wordt dan een halfvlak, waarvan men de doorsnede met het z-vlak kan kiezen als vertakkingslijn in het Riemannsch oppervlak. De potentiaal w wordt dan gevonden uit:

$$u + iv = \mathrm{A} \log \frac{\sqrt{z} - \sqrt{a}}{\sqrt{z} - \sqrt{(-a)}}.$$

Hierbij stelt $z = a$ het punt (a, α) op de bovenlaag, $z = -a$ het beeldpunt op de benedenlaag voor. Voor een enkele lijnlading (a, α) in de bovenlaag, wordt de potentiaal na eenige herleiding:

$$u = c + \frac{1}{2} \mathrm{A} \log \left\{ r - 2 \mathrm{A} r \cos \frac{1}{2} (\theta - \alpha) + a \right\}.$$

Door vergelijking met vroeger ziet men in, dat $\mathrm{A} = -2e$ moet zijn, zoodat:

$$u = c - e \log \left\{ r - 2 \cos \frac{1}{2} (\theta - \alpha) \sqrt{ar} + a \right\}.$$

§ 28. **Riemannsche ruimten.**

Bij het voorgaande sluiten zich nauw aan de beschouwingen van SOMMERFELD betreffende de oplossing van vraagstukken in de driedimensionale ruimte. SOMMERFELD gaat daarbij weer uit van een uitbreiding van de methode der spiegeling, welke verkregen wordt door een vraagstuk voor een begrensd gebied uit te breiden tot de onbeperkte ruimte. Men kan nu beginnen tweedimensionale algebraïsche potentialen, dit zijn de potentialen, die reëele deelen van gewone algebraïsche functies zijn, uit te breiden tot z.g. ruimtelijke algebraïsche potentialen, d.w.z. dat ze in de geheele ruimte gedefinieerd zijn, slechts een eindig aantal polen en willekeurige vertakkingen van eindige veelvuldigheid bezitten. In de ruimte krijgt men dan natuurlijk in plaats van vertakkingspunten, vertakkingslijnen. Hiervan veronderstellen wij, dat ze continue krommen voorstellen. Als uitbreiding van ons Riemannsch oppervlak treedt thans op een z.g. Riemannsche ruimte, welke 't ons mogelijk maakt, de functie éénwaardig te houden. Wij denken ons, dat een Riemannsche ruimte aldus ontstaat. Onderstel, dat in de ruimte onze potentiaal n-waardig is, dan beschouwen we n-exemplaren van onze gewone ruimte en teekenen daarin de vertakkingslijnen aan. Tusschen de vertakkingslijnen spant men dan membranen van willekeurige gedaante, waarna men elke ruimte langs deze membranen opensnijdt. Daarna voegt men de ontstane rechter- en linkerzijde van de vlakken van doorsnede zoodanig samen, als op grond van de waarde-verdeeling van de potentiaal wordt geëischt. Iedere vlakke doorsnede door een Riemannsche ruimte levert nu een gewoon Riemannsch oppervlak, waarin de snijpunten met de vertakkingslijnen de vertakkingspunten opleveren, terwijl de snijlijnen met de membranen de vertakkingslijnen van ons gewone Riemannsche oppervlak opleveren.

Zooals gezegd kan men met behulp van deze beschouwingen de spiegelmethode aanmerkelijk uitbreiden. Heeft men n.l. een gebied in een gewone ruimte, dat door platte vlakken of bolvlakken begrensd wordt, dan kan men door symmetrische herhaling een Riemannsche ruimte doen ontstaan. Deze ruimte moet aldus samenhangen met het gebied der gewone ruimte, dat de op elkaar volgende spiegelbeelden langs de vertakkingslijnen in de Riemannsche ruimte aan elkaar sluiten. We beperken ons bij de potentiaalvraagstukken tot de z.g. *Greensche functie* (d.i. een functie die in het beschouwde gebied slechts één

enkelvoudige pool bezit). Kent men nu de Greensche functie voor de Riemannsche ruimte, dan kan men daaruit synthetisch een oplossing vinden voor het gebied van de gewone ruimte.

Als eenvoudigste voorbeeld kan men nu een door twee vlakken begrensd gebied beschouwen, die elkaar snijden, onder een hoek $\frac{n\pi}{m}$. De Greensche functie van dit gebied levert een Riemannsche ruimte van n exemplaren met een enkele rechte vertakkingslijn en met 2 m-polen. Immers $n\frac{\pi}{m} = n \times \frac{2\pi}{2m}$. Neemt men het geval $m = 1, n = 1$ dan verandert dit gebied in de oneindige ruimte, de begrenzing in een vlak door een rechte lijn begrensd oneindig dun scherm.

Heeft men met een vlak oneindig dun scherm te doen, begrensd door een willekeurige rand, dan zal in de eerste plaats gevraagd worden naar de Greensche functie van een dubbele ruimte, die de rand van het scherm tot enkelvoudige vertakkingslijn heeft. Het oppervlak van het scherm kan daarbij de rol van bovengenoemd membraan vervullen, dat beide exemplaren van de ruimte scheidt. Tot deze Riemannsche ruimte wordt men geleid door onze gewone oneindige ruimte aan het *vlak* van het scherm te spiegelen. De Greensche functie voor het geheele gebied buiten het scherm met de pool P wordt dan opgeleverd door het verschil van twee Greensche functies onzer Riemannsche ruimte, waarvan de eene in het oorspronkelijke punt P een enkelvoudige pool bezit, terwijl de tweede functie een enkelvoudige pool bezit in een punt P′, dat in het tweede ruimte-exemplaar ligt en het spiegelbeeld van P is ten opzichte van het scherm.

Om in de Riemannsche ruimte de meerwaardige potentialen eenwaardig te maken, definieert SOMMERFELD als Greensche functie in de Riemannsche ruimte een functie u, welke aan de volgende eischen voldoet:

1°. u moet een oplossing zijn van de vergelijking $\triangle u = 0$.

2°. u moet een continue en eenwaardige functie zijn op de Riemannsche ruimte, behalve:

3°. u moet oneindig worden in een zeker punt P van dezelfde orde als $\frac{1}{R}$, waarbij R den afstand van een willekeurig punt tot P aanwijst.

In dit punt en in de vertakkingslijnen behoeft u niet te voldoen aan de vergelijking: $\triangle u = 0$.

4°. u moet in het oneindige 0 worden.

SOMMERFELD toont uitvoerig aan, dat bovenstaande eischen voldoende zijn om de eenwaardigheid van de Greensche functie vast te leggen.

De Greensche functie van onze ruimte is de potentiaalfunctie $\frac{1}{R}$. De Greensche functie van een willekeurige Riemannsche ruimte is hiervan het analogon.

SOMMERFELD bewijst, dat verschillende stellingen, als de stelling van GREEN, de reprociteitsstelling enz. zich gemakkelijk en met de daarvoor bekende methoden laten uitbreiden tot een willekeurige Riemannsche ruimte.

§ 29. Meerwaardige potentialen in verband met speciale Riemannsche ruimten.

Gaan we thans over tot de toepassing van meerwaardige potentialen door speciale Riemannsche ruimten, dan gaan we uit van $\frac{1}{R}$, waarbij R den afstand van een vaste Pool P (x', y', z') tot het veranderlijke punt Q (x, y, z) voorstelt. Een oplossing van de potentiaal-vergelijking is dan ook:

$$u = \int \frac{1}{R} f(\alpha)\, d\alpha.$$

De integratie moet langs een willekeurigen weg in het a-vlak worden uitgevoerd. Een analogon hiervan is de uitbreiding van $\frac{e}{r}$ tot $\int \frac{\rho\, d\tau}{r}$. Door $f(\alpha)$ geschikt te kiezen, wordt het mogelijk, meerwaardige potentialen te vormen.

Laat ons denken, dat men met een Riemannsche ruimte te doen heeft, uit n exemplaren bestaande, die zich om een enkele rechte rangschikken. Neem deze vertakkingslijn tot z-as aan en voer in het vlak $z = 0$ poolcoördinaten in, door te stellen:

$$x + iy = e^{\rho + i\Phi} = r e^{i\Phi},\quad x' + iy' = e^{\rho' + i\Phi'} = r' e^{i\Phi'}.$$

Dan wordt:

$$R^2 = 2 r r' \{\cos i(\rho - \rho') - \cos(\Phi - \Phi')\} + (z - z')^2.$$

Vervang nu Φ' door een complexe veranderlijke α, waardoor met de potentiaal een identieke transformatie plaats vindt, dan gaat de uitdrukking voor R, die we door R′ vervangen, over in:

$$R'^2 = 2rr' \{\cos i(\rho - \rho') - \cos(\varphi - \alpha)\} + (z - z')^2.$$

Men kieze het teeken voor R' zoodanig, dat R' voor reëele α positief wordt. Vermenigvuldig $\frac{1}{R}$ nu met een funtie $f(\alpha)$, die in $\alpha = \varphi'$ van de 1e orde oneindig wordt met het residu 1. Integratie naar α volgens een weg, die dit punt in positieven zin omsluit, geeft dan $\frac{2\pi i}{R}$. Verder kiest men $f(a)$ zoodanig, dat ze in α en φ' de periode 2π heeft, dan is de eenvoudigste functie:

$$f(\alpha) = \frac{ie^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi'}}.$$

De identieke transformatie wordt dan:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{R'} \frac{e^{i\alpha} d\alpha}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi'}}.$$

Deformeert men nog den integratieweg, dan moet men letten op de singuliere punten in het α-vlak. De vertakkingspunten zijn gegeven door:

$$R'^2 = 0, \quad R'^2 = \infty.$$

Deze waarden geven voor α:

$$\alpha = \infty \text{ en } \alpha = \varphi + 2k\pi \pm i\alpha_1.$$

Hierbij is:

$$\cos i\alpha_1 = \cos i(\rho - \rho') + \frac{(z - z')^2}{2rr'} = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'}.$$

De polen van den integrant worden bepaald door:

$$\alpha = \varphi' + 2k\pi.$$

In het vlak heeft men dus oneindig veel polen, die op gelijken afstand van elkaar liggen, en oneindig veel vertakkingspunten.

Als we deze punten hebben aangegeven, snijden we het α-vlak open langs de aan de imaginaire as evenwijdige rechte van $\varphi + 2k\pi \pm i\alpha$ tot $\varphi + 2k\pi \pm i\infty$. Trek nu om het punt $\alpha = \varphi'$ den integratieweg tot aan de vertakkingssnede, zoodat deze bestaat uit twee gleuven langs de beide deelen van de vertakkingsdoorsnede en voor de rest uit den omtrek van een rechthoek van de breedte 2π en van willekeurige hoogte. Door de periodiciteit van den integrant vernietigen de integraties langs de vertikale rechthoekzijden elkaar, terwijl de

integralen langs de horizontale rechthoekszijden verdwijnen, als de hoogte van den rechthoek oneindig wordt, daar $\frac{1}{R'}$ voor $\alpha = \infty$ nul wordt. Den integratieweg kan men dus tot de beide gleuven langs twee vertakkingsdoorsneden van het α-vlak reduceeren. We gaan nu over tot den potentiaal van onze genoemde Riemannsche ruimte. Daarvoor bepaalt men $f(\alpha)$ zoodanig, dat zij in α en φ' de periode $2\pi n$ heeft en op de plaats $\alpha = \varphi'$ van de eerste orde met het residu 1 oneindig wordt. Zulk een functie is:

$$f(\alpha) = \frac{i}{n} \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{e^{\frac{i\alpha}{n}} - e^{\frac{i\varphi'}{n}}}.$$

Vorm nu weer:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{R'} f(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2\pi n} \int \frac{1}{R'} \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}} d\alpha}{e^{\frac{i\alpha}{n}} - e^{\frac{i\varphi'}{n}}},$$

waarbij de integratie langs den zoo juist genoemden weg moet worden uitgevoerd. De vertakkingen van den integrant zijn dezelfde als straks, daarentegen liggen de polen slechts nog op de plaatsen:

$$\alpha = \varphi' + 2kn\pi.$$

Van deze functie kan worden aangetoond, dat ze de Greensche functie van onze Riemannsche ruimte is, doordat ze aan de eischen voldoet, die daaraan zijn gesteld.

Indien men in de uitdrukking voor u de grootheid n steeds grooter laat worden, dan krijgt men de Greensche functie van een Riemannsche ruimte met oneindig veel exemplaren. Men krijgt dan voor u:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{R'} \frac{d\alpha}{\alpha - \varphi'}.$$

Deze functie wordt slechts oneindig in het punt (r', z', φ'). Daarentegen blijft ze eindig in alle punten $(r', z', \varphi' + 2k\pi$ voor $k \neq 0)$.

Uit laatstgenoemden potentiaal kunnen wij omgekeerd den vroegeren terugvinden door in de Greensche ruimte, die uit oneindig veel exemplaren bestaat, een functie te vormen, die op alle plaatsen $r = r'$, $z = z'$, $\varphi = \varphi' + 2kn\pi$ een enkelvoudige pool bezit.

In de uitdrukking voor u op de vorige bladzijde behoeft n geen geheel getal te zijn.

Voor het voor de toepassingen belangrijkste geval, n.l. $n=2$ kan men de functie u gemakkelijk tot elementaire functies herleiden.

§ 30. Riemannsche ruimte met twee evenwijdige vertakkingslijnen.

Wij gaan thans over tot de *Greensche functie van een Riemannsche ruimte met twee rechte evenwijdige vertakkingslijnen.* Denk, dat we n exemplaren van onze ruimte hebben, die cyclisch samenhangen langs de strook, die begrensd wordt door de beide vertakkingslijnen, zoodat genoemde strook als membraan dienst doet. Snijdt men de aldus ontstane Riemannsche ruimte door een vlak loodrecht op de vertakkingslijnen, dan krijgt men als doorsnede een Riemannsch oppervlak, dat in de snijpunten met de vertakkingslijnen $(n-1)$ voudige vertakkingspunten heeft.

De geschiktste keus van coördinaten wordt verkregen door de lijn, die midden tusschen de beide vertakkingslijnen daaraan evenwijdig loopt, als z-as aan te nemen en in het vlak $z=0$ aldus bipolaire coördinaten in te voeren: laat ζ een complexe veranderlijke in vlak $z=0$ voorstellen, zoodanig, dat de waarden $0, +1$ en -1 de ligging van de snijpunten van dit vlak met de z-as en de beide vertakkingslijnen aangeven, terwijl de projecties van de punten P en Q op het ζ-vlak worden aangegeven door:

$$\zeta = x + iy, \quad \zeta' = x' + iy'.$$

Stel nu:

$$\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} = e^{\rho + i\Phi}, \quad \frac{\zeta' - 1}{\zeta' + 1} = e^{\rho' + i\Phi'},$$

dan kan men ρ, Φ, ρ', Φ' de bipolaire coördinaten noemen van de projecties van P en Q op het vlak $z=0$. Hierbij zijn Φ en Φ' als bepaald te beschouwen met de modulus 2π.

Men voert nu een dergelijke transformatie uit als het vorige geval. Noemt men P Q weer R, dan is:

$$R^2 = 2\frac{\cos i(\rho - \rho') - \cos(\Phi - \Phi')}{(\cos i\rho - \cos\Phi)(\cos i\rho' - \cos\Phi')} + (z - z')^2.$$

Vervangt men hierin Φ' weer door een complexe veranderlijke α, dan kunnen we schrijven:

$$R'^2 = \frac{2\cos i(\rho - \rho') - \cos(\Phi - \alpha)}{(\cos i\rho - \cos\Phi)(\cos i\rho' - \cos\alpha)} + (z - z')^2.$$

Nu is weer:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{R'} f(\alpha)\, d\alpha,$$

waarbij $f(\alpha)$ aan dergelijke voorwaarden als in het vorige vraagstuk voldoet.

Voor $f(\alpha)$ kan men hier schrijven:

$$f(\alpha) = \frac{ie^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{i\Phi'}} \sqrt{\frac{\cos i\rho' - \cos\Phi'}{\cos i\Phi' - \cos\alpha}}.$$

De polen van den integrant zijn:

$$\alpha = \Phi' + 2k\pi.$$

De vertakkingspunten treden op voor $R'^2 = 0$ en $R'^2 = \infty$. Deze worden voor $z - z' = 0$:

$$\alpha = \Phi + 2k\pi + i(\rho - \rho').$$

Voor andere gevallen worden ze:

$$\alpha = a + 2k\pi \pm ib,$$

waarbij a en b reëele getallen voorstellen, die afhankelijk zijn van Φ, ρ, ρ' en $z - z'$.

De integratieweg wordt weer op een dergelijke wijze gedeformeerd als in het vorige geval.

Om nu tot meerwaardige potentialen over te kunnen gaan kiest men voor:

$$f(\alpha) = \frac{i}{n} \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{e^{\frac{i\alpha}{n}} - e^{\frac{i\Phi'}{n}}} \sqrt{\frac{\cos i\rho' - \cos\Phi'}{\cos i\Phi' - \cos\alpha}}.$$

De Greensche functie van onze Riemannsche ruimte wordt nu:

$$u = \frac{1}{2\pi n}\int \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{\cos i\rho' - \cos\Phi'}{\cos i\Phi' - \cos\alpha}} \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{e^{\frac{i\alpha}{n}} - e^{\frac{i\Phi'}{n}}}\, d\alpha.$$

Bewezen kan weer worden, dat deze uitdrukking aan alle eischen voldoet.

Belangrijke toepassingen op vraagstukken van de gewone ruimte

treden op in het geval $n=2$. Door een voortgezette spiegelmethode van de Greensche functie voor onze dubbele ruimte verkrijgen wij n.l. terstond de Greensche functie voor de ruimte buiten een *door twee evenwijdige rechten begrensd vlak en oneindig dun scherm*. Denken wij ons n.l. bij het ruimte-exemplaar, waarvoor het vraagstuk is opgesteld, een tweede, waarmede het oorspronkelijke een Riemansche ruimte van 2 exemplaren vormt, waarvoor dus het scherm het vertakkingsmembraan vormt. Kiest men de lengte-eenheid gelijk aan de halve breedte van het scherm, dan kunnen wij terstond de coördinaten z, ρ en φ gebruiken. Het eerste ruimte-exemplaar behoort dan bij $-\pi<\varphi<+\pi$, het tweede bij $+\pi<\varphi<3\pi$. Construeer verder bij de pool P in 't eerste ruimte-exemplaar het spiegelbeeld (P') ten opzichte van het scherm, dat in het tweede ruimte-exemplaar valt. Als P de coördinaten z', ρ', $\pi-\varphi'$ heeft, dan krijgt P' de coördinaten z', ρ', $\pi+\varphi'$. Verstaat men nu onder u_P de Greensche functie van de dubbelruimte met de pool P, dan vormt men:

$$v=u_P-u_{P'}.$$

Deze functie moet op gronden van symmetrie voor $\varphi=\pm\pi$ verdwijnen.

Geheel analoog ontstaat de Greensche functie voor het reciproque gebied, waarbij het scherm uit een *oneindig vlak bestaat, waarin een oneindig lange spleet met evenwijdige rechte randen is uitgesneden*. Dit scherm dient weer als membraan, waarvan beide kanten behooren bij $\varphi=0$ en $\varphi=\pm 2\pi$.

Om de vroegere coördinaten terstond te kunnen toepassen, kiest men de breedte van de spleet $=2$. Het eerste exemplaar behoort dan bij $0<\varphi<\pi$, het tweede bij $-2\pi<\varphi<0$. Heeft de oorspronkelijke poort P tot coördinaten z', ρ', φ', dan heeft het spiegelbeeld P' tot coördinaten z', ρ', $-\varphi'$, waarbij thans P' in het tweede ruimte-exemplaar valt. Evenals boven geeft dan

$$v=u_P-u_{P'}$$

de Greensche functie van ons gebied aan.

§ 31. Toepassing op het gebied van geluid.

Door SOMMERFELD is in zijn „Mathematische Theorie der Diffraction" (Math. Ann. Bnd. 47), het probleem opgelost van de diffractie van electro-magnetische of optische vlakke golven, die vallen op een

geleidend, resp. ondoorschijnend halfvlak, begrensd door een rechte rand. CARSLAW denkt in zijn artikel „Some multiform solutions of the partial differential equations of physical mathematics and their applications" (Proceedings of the London Math. Society, Vol. 30) meer aan een dergelijk vraagstuk voor het geluid. De methode door SOMMERFELD aangegeven en door CARSLAW gevolgd, sluit onmiddellijk aan bij de in het voorgaande beschreven methode.

CARSLAW gaat uit van de vergelijking:

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta t^2} = v^2 \triangle \Phi,$$

waarbij Φ de snelheidspotentiaal, v de snelheid van het geluid voorstelt. Heeft men met periodieke beweging te doen, dan mag men Φ het reëele deel van $u \,.\, e^{2i\frac{\pi}{\tau}t}$ stellen. De vergelijking in u wordt dan:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + k^2 u = 0,$$

waarbij $k = \frac{4\pi^2}{\tau^2 v^2}$.

Dit is ook de vorm van de vergelijking, die SOMMERFELD neemt als uitgangspunt voor zijn oplossing. Heeft men te doen met vlakke golven, waarvan de voortplantingsrichting met het vlak θ een hoek θ' vormt, dan is een oplossing:

$$u_0 = e^{ikr\cos(\theta - \theta')}.$$

Vorm nu, als α een complexe veranderlijke en $f(\alpha)$ een willekeurige functie van α voorstelt, de volgende integraal:

$$\int e^{ikr\cos(\alpha - \theta)} f(\alpha)\, d\alpha,$$

waarbij de integratie moet worden uitgestrekt over een willekeurigen weg in het α-vlak met uitsluiting van punten in het oneindige. Deze integraal is dan ook een oplossing van onze vergelijking. Dan zal de integraal:

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ikr\cos(\alpha - \theta)} \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{i\theta'}}\, d\alpha,$$

de integratie uitgestrekt over een willekeurigen gesloten weg om het punt $\alpha = \theta'$ (zonder andere singuliere punten van den integrant in te sluiten), volgens de stelling van CAUCHY dezelfde zijn als u_0, zoodat wij een identieke transformatie hebben gekregen. De integratieweg

mogen wij wijzigen, mits wij geen singuliere punten overschrijden.

Daar, als $\alpha = a + bi$ is,

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos(\alpha - \theta)\cos hb - i\sin(\alpha - \theta)\sin hb,$$

zien we, dat we den weg kunnen wijzigen, zoodanig, dat de weg de imaginaire as volgt, er op lettende, dat:

$$\text{voor } b = +\infty,\ \sin(\alpha - \theta) \text{ negatief}$$
$$\text{en voor } b = -\infty,\ \sin(\alpha - \theta) \text{ positief is.}$$

Het reëele deel van den exponentiëelen vorm is nl.:

$$e^{kr}\sin(\alpha - \theta)\sin hb$$

en voor $b = +\infty$ is $\sin hb = +\infty$,
terwijl voor $b = -\infty$, $\sin hb = -\infty$.

Beschouwen we in de eerste plaats het deel der ruimte, waarbij de coördinaat θ aldus ligt:

$$-(\pi - \theta') < \theta < \pi + \theta'.$$

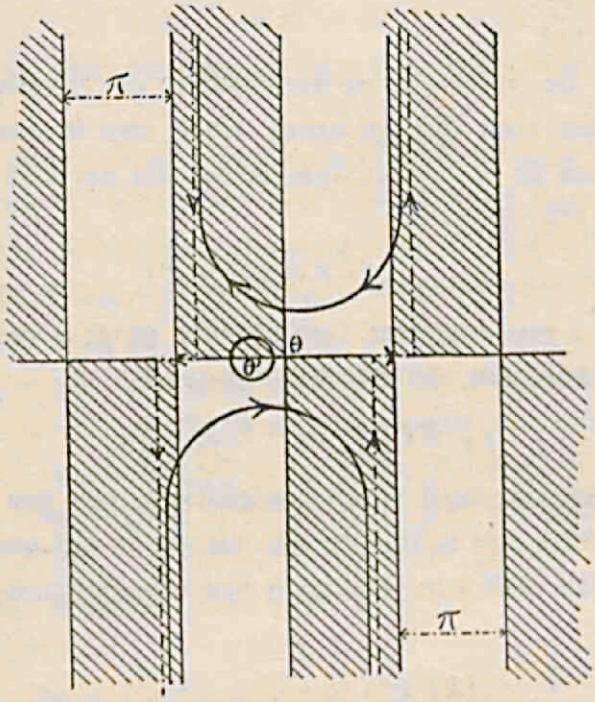


Fig. 2.

In bovenstaande figuur geven de gearceerde gedeelten het gedeelte van het vlak aan, waarbij de weg naar het oneindige loopt. De aangegeven kromme is een mogelijke omvorming van den oorspronkelijken weg om $\alpha = \theta'$. De breedte van de strooken is π, terwijl de deelen

van den weg, aangegeven door de stippellijnen op een afstand 2π liggen, zoodat we deze, als we letten op de periode 2π van den integrant, buiten beschouwing mogen laten, daar de overeenkomstige deelen in tegengestelde richting loopen. De kromme deelen raken deze lijnen asymptotisch. Noemen we de twee kromme takken samen den weg A, dan is bewezen, dat:

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{ikr\cos(\alpha-\theta)}\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-e^{i\theta}}\,d\alpha,$$

geintegreerd over den weg A overeenstemt met:

$$e^{ikr\cos(\theta-\theta')},$$

welke oplossing eenwaardig is.

We kunnen thans overgaan tot de meervoudige oplossing door te nemen:

$$u=\frac{1}{2\pi n}\int e^{ikr\cos(\alpha-\theta)}\frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{e^{\frac{i\alpha}{n}}-e^{\frac{i\theta'}{n}}}\,d\alpha.$$

Dan ziet men gemakkelijk in, dat deze functie aan alle eischen voldoet. Deze veelwaardige functie met periode $2\pi n$ is eenwaardig op een n-bladig Riemannsch oppervlak.

Hoewel hiermede de wiskundige methode in hoofdtrekken is gegeven, en ik voor de toepassing naar de tabel kan verwijzen, wil ik ook hier vermelden, dat de diffractie van vlakke golven, vallende op een halfvlak, begrensd door een rechten rand, door SOMMERFELD is opgelost.

§ 32. Oplossing $\triangle u + k^2 u = 0$.

Aansluitend aan laatstgenoemd tweedimensionaal probleem, behoort men in logische volgorde thans het vraagstuk van een willekeurige trillingsbron, waarvan de golven op een star halfvlak, begrensd door een rechten rand vallen, te behandelen. Van wiskundig standpunt is echter het driedimensionale vraagstuk eenvoudiger. Ik kan echter in het volgende kort zijn, daar CARSLAW voortdurend in wezen dezelfde methode toepast.

Overgaande tot de vergelijking met 3 coördinaten

$$\triangle u + k^2 u = 0,$$

wenscht men een oplossing, die voldoet aan de volgende eischen:

1°. In een n-voudige Riemannsche ruimte met de z-as tot vertakkingslijn en het vlak $\theta = 0$ tot vertakkingsmembraam moet de oplossing eenwaardig zijn, m. a. w. ze moet periodiek in θ zijn en de periode $2\pi n$ hebben.

2°. Ze moet oneindig worden als $\frac{e^{-ikR}}{R}$ voor $R = 0$ in het punt (r', θ', z') in het 1e ruimte-exemplaar; hierbij stelt R den afstand van (r', θ', z') tot een naburig punt voor.

3°. Ze moet eindig en continu zijn voor alle reëele eindige waarden van r in alle ruimte-exemplaren, behalve in laatstgenoemd punt.

4°. Ze moet 0 zijn in 't oneindige.

De methode voor het vinden van zulk een oplossing stemt weer volmaakt overeen met die in de vorige gevallen.

We gaan uit van de oplossing:

$$u_0 = \frac{e^{-ik\sqrt{r^2+r'^2+(z-z')^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}}}{\sqrt{r^2+r'^2+(z-z')^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}},$$

en gaan over naar den integraal:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{-ik\sqrt{2rr'\{\cos h\alpha_1 - \cos(\alpha-\theta)\}}}}{\sqrt{2rr'\{\cos h\alpha_1 - \cos(\alpha-\theta)\}}} \times \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}-e^{i\theta'}}\, d\alpha.$$

Men kan dan den integratie-weg in het α-vlak wijzigen, zonder de waarde van den integraal aan te tasten, als we zorgen, daarbij geen singuliere punten of vertakkingspunten van den integraal te passeeren. Wil men nu overgaan tot de meerwaardige oplossing, dan kan men beschouwen de functie:

$$u = \frac{1}{2\pi n}\int \frac{e^{-ik\sqrt{2rr'\{\cos h\alpha_1 - \cos(\alpha-\theta)\}}}}{\sqrt{2rr'\{\cos h\alpha_1 - \cos(\alpha-\theta)}} \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{e^{\frac{i\alpha}{n}}-e^{\frac{i\theta'}{n}}}\, d\alpha,$$

waarbij de integratie over een bepaalden weg moet worden uitgevoerd. Deze functie, welke aan de diff. verg. voldoet, is eenwaardig op het Riemannsche oppervlak en voldoet aan de verdere eischen van het vraagstuk.

CARSLAW schrijft nu nagenoeg terstond de oplossing op voor het vraagstuk van een geluidsbron in een oneindig medium, dat een vast stijf halfvlak, begrensd door een rechten rand, bevat.

§ 33. Toepassing op de warmtegeleiding.

Thans gaan we over tot de vergelijking, die den grondslag vormt van de wiskundige theorie van de warmtegeleiding in twee afmetingen:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = k \triangle u.$$

Hier gaan we uit van de verdeeling van de temperatuur in een oneindig lichaam, dat overal hetzelfde geleidingsvermogen bezit. Deze verdeeling denken we veroorzaakt door de eenheid van warmte, die op den tijd $t=0$ in het punt (x', y', z') wordt geplaatst en zich vandaar kan verspreiden. De temperatuur in een punt (x, y, z) op den tijd t wordt dan aangegeven door:

$$u = \frac{1}{2^3 (\pi k t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\} : 4kt},$$

Beginnen we nu met het *tweedimensionale vraagstuk*, waarbij we uitgaan van:

$$u_0 = \frac{1}{t} e^{-\{(x-x')^2 + (y-y')^2\} : 4kt}$$

$$= \frac{1}{t} e^{-\{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')\} : 4kt},$$

die, afgezien van een constanten factor overeenstemt met de temperatuur, veroorzaakt door een warmtebron met de eenheid van warmte. Voer thans de complexe veranderlijke α in en pas toe de identieke transformatie:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-\{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\alpha - \theta)\} : 4kt}}{t} \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{i\theta'}} d\alpha,$$

waarbij de integratie moet worden uitgevoerd over een weg in 't α-vlak, die behalve $\alpha = \theta'$ geen andere singulariteit van den integrant omvat.

Bij de verandering van den integratieweg moet men natuurlijk weer op de singulariteiten letten. De meerwaardige oplossing laat zich dan terstond schrijven:

$$u = \frac{1}{2\pi n} \int \frac{e^{-(r^2 + r'^2) : 4kt}}{t} e^{rr' : 2kt \cos(\alpha - \theta)} \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{e^{\frac{i\alpha}{n}} - e^{\frac{i\theta'}{n}}} d\alpha,$$

waarbij de integratie weer over een bepaalden weg moet worden

uitgevoerd. Deze u, welke eenwaardig is op een Riemannsch oppervlak, voldoet verder aan alle eischen van het vraagstuk.

CARSLAW geeft nu onmiddellijk de oplossing van het vraagstuk van een lijnvormige bron in een oneindig geleidend lichaam met homogeen geleidingsvermogen, waarin een halfvlak, begrensd door een rechten rand, aanwezig is. Het vlak wordt altijd op constante temperatuur gehouden of wordt op zoodanige wijze beschermd, dat warmteuitwisseling door het vlak uitgesloten is.

§ 34.

Gaan we thans over tot het driedimensionale geval van:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = k \triangle u,$$

dan volgen we in hoofdzaak denzelfden weg.

Ga uit van de bijzondere oplossing:

$$u_0 = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\} : 4kt},$$

of in cylindrische coördinaten:

$$u_0 = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} e^{\{r^2+r'^2+(z-z')^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\} : 4kt}.$$

We krijgen dan de identieke transformatie:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} e^{-\{r^2+r'^2+(z-z')^2\} : 4kt} \int e^{(rr' : 2kt)\cos(\alpha-\theta)} \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{i\theta'}} d\alpha,$$

waarbij de integratie moet worden uitgestrekt over een kringloop in het α-vlak om het punt $\alpha = \theta'$, terwijl geen andere singulariteit van den integrant mag worden ingesloten. Hierdoor wordt de weg herleid tot den weg A van § 31.

Om de meerwaardige oplossing te verkrijgen, is het slechts noodzakelijk, de volgende integraal te beschouwen:

$$u = \frac{1}{2\pi n} \frac{e^{-\{r^2+r'^2+(z-z')^2\} : 4kt}}{t^{\frac{3}{2}}} \int e^{(rr' : 2kt)\cos(\alpha-\theta)} \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{e^{\frac{i\alpha}{n}} - e^{\frac{i\theta'}{n}}} d\alpha,$$

waarbij de integratieweg moet worden uitgestrekt over den weg A in overeenstemming met de waarde van θ. Deze meerwaardige oplossing heeft een pool in r', θ', z' in het gebied $-(\pi-\theta') < \theta < (2n-1)\pi+\theta'$. Derhalve bestaat het eenige onderscheid met het tweedimensionale geval in de invoering van de factoren

$$e^{-(z-z')^2 : 4kt} \text{ en } \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

HOOFDSTUK III.

Tabellarische samenvattingen van de toepassingen der complexe functies uit de physische litteratuur.

Geraadpleegd werd in de eerste plaats de „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschlusz ihrer Anwendungen". Daaruit moet genoemd worden, uit Bd II 3 Heft 3, bladz. 177, een artikel van L. LICHTENSTEIN: „Neuere Entwicklung der Potentialtheorie, Konforme Abbildung". In dit artikel, dat een groot gebied der conforme afbeelding met de algemeen gehouden problemen bevat, bevindt zich bovendien een litteratuurlijst. Hetzelfde is het geval in Bd IV 3, blz. 84, in een artikel van A. E. H. LOVE: „Hydrodynamic. Theoretische Ausführungen".

Bewerkt werden verder een groot aantal tijdschriften en enkele handboeken. Geen enkele toepassing heb ik gevonden in de volgende tijdschriften: „Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin", „Wissenschaftliche Abhandlungen der physikalischen technischen Reichsanstall, Berlin," „Abhandlungen der königlichen sächsischen Gesellschaften, Leipzig," „Mathematisch-physische Classe", „Berichte der kön. säch. Gesellschaft der Wissenschaften. Math. Phys. Kl.", „Abhandlungen der königlichen bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, Mathematisch-physische Classe", „Journal de l'Ecole polytechnique, Parijs."

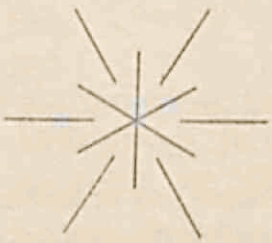
Belangrijke artikelen komen voor in de volgende werken en tijdschriften:

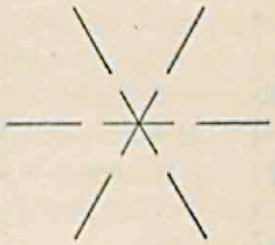
1. H. HELMHOLTZ: Gesammelte Abhandlungen.
2. G. KIRCHHOFF: Gesammelte Abhandlungen.
3. J. H. JEANS: Electricity and Magnetism, 1908.
4. H. LAMB: Lehrbuch der Hydrodynamik, 1907.
5. J. C. MAXWELL: A treatise on electricity and magnetism, 1873.
6. A. WEBSTER: The theory of electricity and magnetism, 1897.
7. H. WEBER: Die partiellen Differenzialgleichungen der Math. Physik, I 1910, II 1912.
8. J. J. THOMSON: Recent researches in electricity and magnetism, 1893.
9. A. E. H. LOVE: A treatise on the mathematical theory of elasticity, 1906.

---

10. Philosophical transactions.
11. Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, Math. Nat. Kl.
12. Monatshefte der Math. und Physik.
13. Proceedings of the Royal Society of London.
14. Zeitschrift für Math. und Physik.
15. Philosophical Magazine.
16. Journal für die reine und angewandte Mathematik.
17. Mathematische Annalen.
18. Jahresberichte der deutschen Mathematischen Vereinigung.
19. Journal de mathématiques pures et appliquées.
20. Nieuw archief voor wiskunde.
21. Sitzungsberichte der Akad. der Wissenschaften zu Berlin.
22. Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math. Phys. Klasse.
23. Annales de l'enseignement supérieur de Grenoble.
24. Proceedings of the royal Irish Academy.
25. American Journal of Mathematics.
26. Mathematische Zeitschrift.
27. Annales scientifiques de l'école normale supérieure.
28. Proceedings of the London Math. Society.
29. Bulletin international de l'académie des sciences de Cracovie.

Ter toelichting van de eerste en laatste kolom diene, dat de eerste cijfers bevat, die overeenstemmen met de nummers van bovengenoemde tijdschriften en werken, door mij verleend, terwijl de laatste kolom de paragrafen der dissertatie aangeeft, die de methoden bevatten, welke in de desbetreffende artikelen in hoofdzaak worden toegepast.

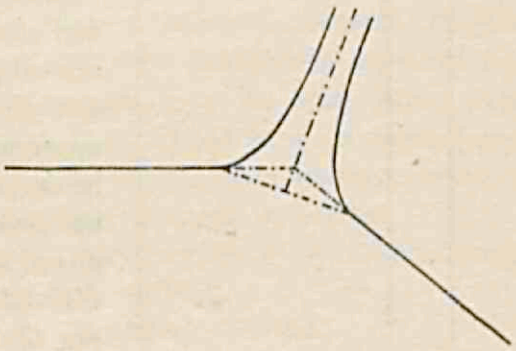
Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
4		89	H. Lamb.	$z = c \cos hw$	1
8		237	J. J. Thomson.	Two infinite plane strips of finite and equal widths in one plane placed so that their sides are parallel to each other	1
8		239	„	Capacity of a pile of plates	1
8		241	„	Capacity of a system of $2n$ plates arranged radially and making equal angles with each other, the alternate plates being at the same potential, the extremeties of the plates lying on two coaxial right circular cylinders .	1
8		243	„	The section of the conductors over which the distribution of electricity is given by this transformation is similar to that represented in fig. 102	1
8		244	„	A pile of semi-infinite parallel plates at equal intervals πb apart, maintained at potential zero when in presence of another pile of semi-infinite parallel plates at the same distance apart maintained at potential K, the planes of the second set of plates being midway between those of the first . . .	1
8		246	„	Solution of the case represented in fig. 104, where the $2n$ outer planes at potential zero are supposed to extend to infinity, the $2n$ inner planes at potential K bisect the angles between the outer planes. . . . . 	
8		246	„	Solution of the case, in which a finite plate is placed in the space between two semi-infinite plates	1

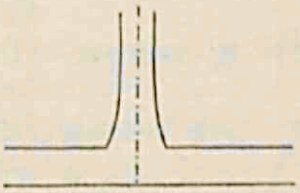
Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
8		248	J. J. Thomson.	The equipotential surfaces, for which Φ vanishes, are a pile of parallel semi-infinite plates stretching from the axis of y to infinite along the positive direction of x, the equipotential surfaces for which $\Phi = K$ are a pile of parallel semi-infinite plates stretching from $-\infty$ to a distance x, from the previous set of plates. The planes of the plates in this set are the continuations of those of the plates in the set at potential zero	1
8		249	„	The case shown in fig. 107, when the potential of the outer radial plates is zero and that of the inner K. The $2n$ outer plates make equal angles with each other and extend to infinity	1
					
8		250	„	Distribution of electricity in the important case of a condenser formed by two parallel and equal plates of finite breadth . . .	1
14	1911 — 59	225	H. Blasius.	Stromfunktionen symmetrischer und asymmetrischer Flügel in zwei dimensionaler Strömung	1, 2
14	1912 — 60	355	„	Stromfunktionen für die Strömung durch Turbinenschaufeln	1, 2
3		268	J. H. Jeans.	Conductor influenced by line change ($w = \log \frac{\zeta - a}{\zeta + a}$, terwijl $\zeta = f(z)$)	3
26	1921 — 11	105	Ph. Frank.	Ein Satz über Potentialströmungen	3
5		232 I	J. C. Maxwell.	Inversion in two dimensions	2, 4
5		233 I	„	Electric images in two dimensions	2, 4

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
5		234 I	J. C. Maxwell.	Neumann's transformation of this case. (Zie Crelle's Journal 1861)	2, 4
5		236 I	„	Distribution of electricity near an edge of a conductor formed by two plane faces .	2, 4
5		239 I	„	Indefinitely long strip of metal with a non-conducting division extending from the origin indefinitely in the positive direction. (Geleidend halfvlak geplaatst tusschen twee evenwijdige geleidende vlakken, aan elke zijde op gelijken afstand daarvan verwijderd; condensator van dezen vorm; Thomson's guard-ring.)	1, 2, 4
5		248 I	„	Theory of a grating of parallel wires. . .	1, 4
4		625	H. Lamb.	Störung, die in einem Zuge ebener Wellen durch einen dünnen Schirm hervorgebracht wird, welcher von einer Reihe parallellen, gleichen und äquidistanten Schlitzen unterbrochen ist	1, 4
4		630	„	Gitter aus parallellen Drähten in gleichen Abständen	1, 4
12	1890 — 1	247	J. Haubner.	Ueber Strombrechung in flächenförmigen Leitern.	1, 5
12	1890 — 1	252	„	Ebene, die aus zwei Halbebenen von verschiedenem Leitungsvermögen besteht, welche längs einer geraden Linie zusamhängen	1, 5
12	1890 — 1	260	„	Vier Quadranten einer Ebene besitzen verschiedene Leitungsvermögen	1, 5
12	1890 — 1	261	„	Ein von zwei Halbebenen begrenzter Streifen, an dem zwei Halbebenen angesetzt sind .	1, 5
12	1890 — 1	357	„	Strömungsproblem für eine Ebene, welche aus einer Ellipse vom Leitungsvermögen μ_1 und ihrem ganzen Auszenraum mit dem Leitungsvermögen μ_2 besteht	1, 5
12	1890 — 1	360	„	Ueber Strombrechung in flächenförmigen Leitern. Anhang.	
12	1890 — 1	360	„	A. Allgemeine Probleme.	1, 5

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
12	1890 — 1	361	J. Haubner.	B. Die Grenzen der Spiegelungsmethode.	
12	1890 — 1	364	„	C. Berechnung des Widerstandes . . .	1, 5
12	1890 — 1	367	v. Lichtenfels.	Bemerkung zur vorstehenden Abhandlung .	1, 5
1		1461	H. Helmholtz.	Ueber discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen	1, 6
2		416	G. Kirchhoff.	Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen . .	1, 6
2		420	„	$f(w) = k + e^{-w}$	1, 6
2		423	„	$f(w) = k + \frac{1}{\sqrt{w}}$	1, 6
2		425	„	$f(w) = \frac{k}{\sqrt{1 - e^{-w}}}$	1, 6
4		85	H. Lamb.	$w = A z^n$	1, 6
4		90	„	$z = w + e^w$ (Beweging vloeistof uit een open ruimte in een kanaal door twee evenwijdige wanden begrensd)	1, 6
4		91	„	$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots . + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \ldots .$ (Voorbeeld: Een oneindig lange cirkelcylinder, die zich met zekere snelheid loodrecht op zijn lengterichting beweegt in een oneindige vloeistofmassa, welke in het oneindige in rust is.)	6
4		95	„	$f(z) = A \log z + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots . + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \ldots .$ (Continue vloeistofbeweging zonder rotatie in het gebied tusschen twee concentrische cirkels.)	6
4		97	„	$f(z) = A \log (z - c) + \frac{A_1}{z - c} + \frac{A_2}{(z - c)^2} + \ldots .$ (Uitbreiding vorige geval op een gebied met cirkelvormige begrenzingen, waarvan een het geheel omsluit. Voorbeelden: grens van de vloeistof is een stijf cylindrisch oppervlak, dat zich met zekere snelheid in de richting loodrecht op zijn lengte-as beweegt. Grens van de vloeistof bestaat uit een cylindrisch oppervlak, dat met hoeksnelheid ω wentelt om een as evenwijdig aan zijn lengte-richting.)	6

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
14	1910 — 58	90	H. Blasius.	Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik	6
14	1910 — 58	90	„	Kraft auf starre Körper in zwei dimensionaler ungleichförmiger stationärer Potentialströmung	6
14	1910 — 58	96	„	Der Ueberfall über ein Wehr	6
14	1911 — 59	43	„	Mitteilung zu meiner Abhandlung über funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik	6
22	1891	37	W. Voigt.	Beiträge zur Hydro-dynamik	1, 6
22	1891	46	„	Stehende Wellen in einem Strome als Beispiel für die Kirchhoffsche Theorie der Flüssigkeitsstrahlen	1, 6
22	1892	490	„	Bewegung eines Flüssigkeits-stromes über einem gewellten Grunde	1, 6
29	1896	269	M. P. Rudzki.	Contribution à la théorie des ondes liquides irrotationnelles	1, 6
25	1887 — 9	62	A. G. Greenhill.	Wave motion in hydrodynamics	1, 6
25	1887 — 9	89	„	Standing waves across a rectangular channel.	1, 6
25	1887 — 9	92	„	Standing waves across a channel of 120° .	1, 6
25	1887 — 9	102	„	General wave motion across a channel with plane sides sloping at any angle	1, 6
25	1887 — 9	104	„	Waves against a uniformely sloping shore .	1, 6
25	1887 — 9	108	„	Algebraical solution of waves against a sloping beach	1, 6
11	1912 - 121 II A 1	745	O. Turmlitz	Eine Modifikation der Kirchhoffschen Methode der Bestimmung für Flussigkeitsstrahlen .	1, 6
11	1912 - 121 II A 1	770	„	Ausfluszproblem	1, 6



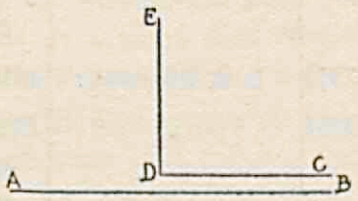
Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
11	1912 - 121 II A 1	776	O. Turmlitz.	Ausfluszproblem . . . . . 	1, 6
11	1912 - 121 II A 1	779	„	In einem unendlich groszem parallel zur x, y Ebene vor sich gehenden Strome, in welchem überall ursprünglich die Geschwindigkeit dieselbe Grösze u_0 und dieselbe Richtung und ferner der Druck dieselbe Grösze p_0 hatte, ist eine ebene Platte senkrecht sur x, y Ebene fixiert	6
11	1912 - 121 II A 1, 1912	790	„	Einem unendlich ausgedehnten Strom seien zwei Platten K B und K D von gleicher Breite w gegenüber gestellt, dasz die Platten in K zusammenstoszen und die Halbierungslinie ihres Winkels in die Stromrichtung fällt	6
11	1912 - 121 II A 1	805	„	Stromungsproblem . . . . . 	6
11	1919 - 123 II A 1	1157	„	Zur Theorie freier Flussigkeitsstralen-Strömungsproblem, dessen vollständige Lösung die Theorie des hydraulischen Strahldrucks bei senkrechter Strahlrichtung für die zweidimensionale Strömung und für reibungslose Flüssigkeiten ohne rotierende Teilchen bildet	1, 6

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
11	1915 - 124 II A	391	O. Turmlitz.	Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Strahldruck bei senkrechter Strahlrichtung II Mitteilung . . . . . (Twee halfvlakken in hetzelfde vlak met een gleuf ertusschen, waardoor de stroo-ming plaats vindt.)	1, 6
28	1881 — 12	81	E. J. Routh.	Motion of a fluid . . . . . (Algemeene beschouwingen over bron-nen en draaikolken.)	1, 6
28	1881 — 12	84	„	Motion in a corner	1, 6
28	1881 — 86	86	„	Motion, when the boundaries are parallel to the axes	1, 6
28	1881 — 12	87	„	Motion round an obstacle of any form with an application to the case of an elliptic obstacle	1, 6
18	1913 — 22	113	E. Pfeiffer.	Theorien des Flüssigkeitwiderstandes . . .	1, 6
18	1913 — 22	116	„	Problem, um eine ruhende, unendlich lange ebene Platte von der Breite l eine ebene stationnäre Flüssigkeitsströmung zu suchen, deren Geschwindigkeit im Unendlichen konstant gleich u und senkrecht zur Platte gerichtet ist, und die begrenzt wird von der Platte und zwei von den Kanten der-selben ausgehenden Discontinuitätsflachen, welche die bewegte gegen die ruhende Flüssigkeit abgrenzen	1, 6
18	1916 — 25	16	R. Grammel.	Über ebene Zirkulationsströmung und die von ihnen erzeugten Kräfte.	1, 6
13	1915 Serie A, 91	503	Lord Rayleigh.	Hydrodynamical problems suggested by Pitot's tubes	1, 6
15	1919, 6de Serie, 38	434	A. R. Richardson.	Streamline flow from a disturbed area . .	1, 6
15	1919, 6de Serie, 38	434	„	Flow past a corner.	1, 6
15	1919, 6de Serie, 38	438	„	Flow past a plate	1, 6
15	1919, 6de Serie, 38	449	„	Flow through a semi-infinite pipe	1, 6

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
23	1894 — 6	1	C. Sautreaux.	Sur une question d'hydro-dynamique . . . (Nous essayerons dans ce travail, de traiter le cas où le fluide étant incompressible et le mouvement étant plan, des forces extérieures agissent sur le liquide.)	1, 6
19	1901, 5de Serie, 7	125	„	Mouvement d'un liquide parfait soumis à la pesanteur	1, 6
14	1911 — 59	137	Umberto Cissotti.	Sopra la derivazione dei canali	6
27	1911, 3de Serie, 28	203	H. Villat.	Sur la résistance des fluides	1, 6
27	1911, 3de Serie, 28	208	„	Première partie. Sur la résistance des fluides limités par une paroi fixe indéfinie . . .	1, 6
27	1911, 3de Serie, 28	256	„	Deuxième partie. Sur le mouvement d'un fluide indéfini autour d'un obstacle de forme donnée	1, 6
27	1911, 3de Serie, 28	286	„	Quelques exemples	1, 6
27	1911, 3de Serie, 28	300	„	Sur l'extension de la méthode précédente au cas du fluide limité par une paroi fixe .	1, 6
27	1911, 3de Serie, 28	309	„	Sur le problème indéfini considéré comme cas limite du fluide avec paroi	1, 6
27	1912, 3de Serie, 29	127	„	Sur le mouvement discontinu d'un fluide .	1, 3, 6
27	1912, 3de Serie, 32	177	„	Sur l'écoulement des fluides pesants . . .	1, 6
27	1914, 3de Serie, 31	455	„	Sur la détermination des problèmes d'hydrodynamique	1, 6
27	1921, 3de Serie, 38	229	René Thiry.	Sur les solutions multiple des problemes d'hydrodynamique	1, 6
27	1921, 3de Serie, 38	233	„	Première partie. I Etude d'un cas simple de mouvement glissant indéterminé	1, 6
27	1921, 3de Serie, 38	241	„	II Etude du cas d'indétermination signalé par M. H. Villat.	1, 6
27	1921, 3de Serie, 38	266	„	III Considérations générales sur les indéterminations.	1, 6
27	1921, 3de Serie, 38	272	„	Deuxième partie. I Etude du mouvement du fluide avec deux obstacles plans normaux au courant dans l'hypothèse de deux sillages illimités à l'arrière	1, 6

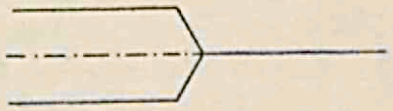
Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
27	1921, 3de Serie, 38	303	René Thiry.	II Etude du mouvement avec deux plans normaux au courant dans l'hypothèse où des lignes de jet de l'un des plans se raccordent avec l'autre.	1, 6
27	1921, 3de Serie, 38	315	„	III Etude du mouvement avec deux plans normaux au courant, dans l'hypothèse ou l'un des sillages est fermé à l'arrière . .	1, 6
28	1915 Sec. Serie 14	89	J. Proudman.	Diffraction of tidal waves on flat rotating sheets of water	1, 6
28	1915 Sec. Serie 14	90	„	Diffraction of a plane wave by a circular island	1, 6
28	1915 Sec. Serie 14	93	„	Diffraction by an elliptic island	1, 6
28	1915 Sec. Serie 14	96	„	Coast lines with projecting corners. . . .	1, 6
28	1915 Sec. Serie 14	101	„	Passage between two seas	1, 6
29	1907	1	M. Smoluchowski.	Contribution à la théorie du mouvement des liquides visqueux, en particulier des problémes en deux dimensions.	1, 6
26	1919 — 3	78	Ph. Frank und K. Löwner.	Eine Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik	1, 6
9		301	A. E. H. Love.	Method of solution of the torsion problem.	7
21	1908	935	Fritz Kötter.	Ueber die Torsion des Winkeleisens . . .	7
4		87	H. Lamb.	$w = \mu \log z$	1, 6, 8
4		87	„	$w = -\mu \log \frac{z-a}{z+a}$	1, 6, 8
3		261	J. H. Jeans.	Special transformations ($w = z^n$; $w = \log z$).	1, 8
28	1881 — 12	73	E. J. Routh.	Some applications of conjugate functions .	1, 6, 9
28	1881 — 12	73	„	Motion of membranes. . . . . (Algemeene beschouwingen over de beweging van membranen met toegevoegde functies. Verschillende voorbeelden van door cirkels begrensde membranen.)	1, 9
28	1886 — 15	231	„	Motion of a network of particles with some analogies to conjugate functions	1, 6, 9

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
3		264	J. H. Jeans.	Unicursal curves. . . . . [$y^2 = 4a(x+a)$. Parabool als aequipot.vl. transformatie wordt: $z = a(w-i)^2$. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Ellips als aequipot.vl. Transformatie wordt: $z = c \cos hw$].	10
5		237 I	J. C. Maxwell.	Ellipses and hyperbolas	1, 10
5		246 I	„	Electrified plate of finite size placed parallel to an infinite plane surface connected with the earth	1, 2, 10
16	1875—79	1	E. Heine.	Constante elektrische Strömung in ebenen Platten.	11
16	1875—79	3	„	Elektrische Potential der elliptischen Platte.	11
16	1875—79	6	„	Elektrische Potential eines Rechtecks . . .	11
16	1875—79	9	„	Zweiter Abschnitt. (Uitbreiding voorafgaande beschouwingen)	11
27	1893, 3de Serie, 10	96	C. Sautreaux.	Sur une question d'hydrodynamique . . .	1, 6, 11
27	1893, 3de Serie, 10	96	„	Le cas où le fluide restant incompressible et le mouvement restant plan, des forces extérieurs agissent sur le liquide. . . .	1, 6, 11
7		354 I	H. Weber.	Die Flächendichtigkeit.	13
7		355 I	„	Elektrizitätsverteilung auf einem Prisma. .	13
7		483 II	„	Zweidimensionale Bewegungen	11, 13
3		269	J. H. Jeans.	Parallelplate condensor	14
3		272	„	Bend of a Leyden jar.	14
8		212	J. J. Thomson.	Plate bounded by a straight edge and at a potential V is placed above and parallel to an infinite plate at zero potential . .	14
8		216	„	Semi-infinite conducting plane placed midway between two parallel infinite conducting planes, maintained at zero potential. . .	14
8		222	„	Condensers are sometimes made by placing one cube inside another	14

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
8		225	J. J. Thomson.	Infinite plane AB at potential V in presence of a conductor at zero potential bounded by two semi-infinite planes CD, DE at right angles to each other . . . . . 	14
8		227	„	A problem, which enables us to estimate the effect produced by the slit between the guardring and the plate of a condenser on the capacity of the condenser . . .	14
8		232	„	The other extreme case of the guard ring, in which the depth of the slit is infinite .	14
14	1915 — 63	355	G. A. Strook.	Ueber die Randkorrektion des Dreiplatten-kondensators	14
13	1915 Serie A,91	440	Ch. H. Lees.	On the shape of the equipotential surfaces in the air near long walls or buildings and on their effect on the measurement of atmospheric potential gradients	1, 14
13	1915 Serie A,91	441	„	Case I. A long thin vertical wall projects from a horizontal surface above which at a considerable distance from the wall, the potential gradient is constant	14
13	1915 Serie A,91	443	„	Case II. A long vertical retaining wall separates from each other two horizontal plan surfaces over which the potential gradient at a considerable distance from the wall is the same and independant of the hight above the planes	14
13	1915 Serie A,91	446	„	Case III. Two long thin vertical walls parallel to each other rise to the same height above a horizontal plane	14
10	1890 A, 181	389	J. H. Michell.	On the theory of free stream lines	6, 14

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
10	1890 A, 181	393	J. H. Michell.	Problem I. Special case: Suppose the polygon to consist of a series of straight lines infinite in one direction	6, 14
10	1890 A, 181	395	„	Problem II. Any number of infinite long plane conductors, all in the same plane and with parallel edges. It is required to find the potential at any point, when the conductors are raised to given potentials.	1, 14
10	1890 A, 181	398	„	On the theory of non-reentrant free stream lines (algemeene beschouwingen) . . .	6, 14
10	1890 A, 181	402	„	Example I. A rectangular vessel ot given width has an aperture in the bottom . .	6, 14
10	1890 A, 181	406	„	Example II. Tube projecting far into the bottom of a vessel of given breadth . .	6, 14
10	1890 A, 181	408	„	Example III. Tube projecting into a vessel of great breadth	6, 14
10	1890 A, 181	411	„	Example IV. Flow from an aperture in a pipe in which the water is at rest . . .	6, 14
10	1890 A, 181	414	„	Case II. Impact of a stream against a vessel.	6, 14
10	1890 A, 181	416	„	Case III. Flow of a broad stream past a plane wall in which there is an aperture.	6, 14
10	1890 A, 181	421	„	Case IV. Jet from a pipe along which liquid is flowing	6, 14
10	1890 A, 181	427	„	Part II. The region of (x, y) is not simply connected and consequently Schwarz's transformation does not apply	5, 6, 14
10	1890 A, 181	427	„	Problem III. To find the potential due to a polygonal prismatic conductor, which we may take to be zero, the field at infinity being at an infinite potential	5, 6, 14
10	1890 A, 181	428	„	Problem IV. Suppose now, there are two polygonal prismatic conductors, one at potential $\psi = -k$, the other at $\psi = k$, and at first A. suppose that one of the conductors is within the other	5, 6, 14

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
10	1890 A, 181	429	J. H. Michell.	B. Suppose now, that one conductor is outside the other and that the potential at infinite is zero, that of the conductors being $-k$ and $+k$	5, 6, 14
10	1890, A 181	430	„	Hollow vortices	5, 6, 14
10	1890 A, 181	431	„	Example: Hollow vortices between parallel planes	5, 6, 14
28	1898 — 19	142	B. Hopkinson.	On discontinous fluid motions involving sources and vortices	6, 14
28	1898 — 19	152	„	Boundary consists of a free stream line and a straight wall. The only singularity is a vortex, the circulation round which is $2m\pi$.	6, 14
28	1898 — 19	155	„	Motion produced by a vortex and doublet at the same point.	6, 14
28	1898 — 19	161	„	A stream escapes from between parallel walls and proceeds to infinity, which are ultimately straight and parallel. The stream is disturbed by a doublet at any point in its path	6, 14
4		110	H. Lamb.	Flüssigkeit, die aus einem groszen Gefäsze durch eine geradeinige Kanal ausflieszt, welche nach innen hineinragt. (Helmholtz: Ueber die kontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. Ges. Hbh. Bd I, blz. 146) . .	6, 14
4		112	„	Flüssigkeit, die aus einem grossen Gefasze durch eine ebene Öffnung in eine ebene Wand ausflieszt	6, 14
4		113	„	Strom von unbegrenzter Breite trifft direkt auf eine feste ebene Lamelle und spaltet sich alsdann in zwei Teile, welche nach Innen zu von freien Oberflächen begrenzt sind. (Lord Rayleigh. Phil. Mag. Dec. 1876. Notes on hydrodynamics)	6, 14
4		625	„	Strömung, die in einem Zuge ebener Wellen durch einen dünnen Schirm hervorgebracht wird, welcher von einer Reihe paralleller, gleicher und äquidistanter Schlitze unterbrochen ist	6, 14

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
28	1905 Sec. Ser. 3	104	H. Fletcher—Moulton.	Current flow in rectangular conductors . .	5, 14
25	1889 — 11	158	A. E. H. Love.	Vortex motion in certain triangles	14
15	1921, 6de Serie, 41	801	W. B. Morton.	On the discontinious flow of liquid past a wedge	6, 14
13	1915 Serie A,91	356	G. H. Bryan en R. Jones.	The theory of discontinuous motion applied to a bent plane	1, 14
20	1912 2e reeks 5	212	W. A. Wijthoff.	Een geval van vloeistofbeweging zonder werveling in twee afmetingen (zie fig.) . 	14
13	1915 Serie A,91	354	G. H. Bryan en R. Jones.	Discontinious fluid motion past a bent plane, with special reference to aeroplane problems	1, 6, 14
13	1915 Serie A,91	360	„	A further applico to the case of a plane with more than one bend	1, 14
28	1913 Sec. Series 11	316	W. M. Page.	Cylindrical conductor, whose section consists of two parallel lines joined by curves. .	15
28	1913 Sec. Series 11	321	„	Cylindrical conductor of square section with round edges	15
28	1913 Sec. Series 11	323	„	Cylinder, whose cross section reaches to infinity, the finite end being rounded . . .	15
28	1913 Sec. Series 11	324	„	Infinite wedge formed by two semi-infinite, perpendicular planes with the edge rounded off	15
28	1913 Sec. Series 11	326	„	Grating constructed of conducting cylinders of oval sections	15
10	1915 A 215	448	J. G. Leathem.	Flow round a semi-infinite barrier in the form of a wedge with smoothly rounded apex.	16
10	1915 A 215	450	„	Longitudinal motion of a ship with curved sides terminating in a pointed bow and stern	
10	1915 A 215	455	„	Motion of a ship with pointed bow and flat stern	16
10	1915 A 215	467	„	Liquid motions with free stream lines. . .	16
10	1915 A 215	470	„	Free stream lines when the fixed boundary includes curves	16

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
24	1916 — 17 A 33	35	J. G. Leathem.	On periodic conformal curve-factors and corner factors	16
28	1916 — 15	xxxv	„	Theorems on conformal transformation (abstract)	16
15	1918, 6de Serie, 35	119	„	On the two-dimensial motion of infinite liquid produced by the translation or rotation of a contained solid.	16
6		311	A. Webster.	Excentric cylinders . . . . . ($w = \log z$ met uitbreiding).	24
6		322	„	Logarithmic transformation of last case . . (Verloop krachtlijnen en aequipot. vl. $w = \log \cos hz$)	24 24
6		315	„	Elliptic and hyperbolic cylinders. . . . . (Verloop krachtlijnen en aequipot. vl. $w = \cos hz$; $w = \sin hz$; $w = \cos z$; $w = \sin z$).	24
28	1909 Sec. Series 7	87	H. Bateman.	Applications to geometrical optics . . . . (Toepassing op een symm. optisch instrument).	25
28	1909 Sec. Series 7	87	„	Applications to geometrical optics . . . . (Serie lichtgolven door heterogeen medium)	25
28	1910 Sec. Series 8	223	„	The transformation of the electrodynamical equations.	25
22	1919	1	Paul Koebe.	Ueber die Strömungspotentiale und die zugehörigen Abbildungen Riemannscher Fläche.	26
22	1919	4	„	Erster Teil. Einfache Dipolströmung und zugehörende Abbildung geschlossener Riemannsche Flächen	26
22	1919	11	-	Zweiter Teil. Nähere Diskussion und Charakterisierung der Schlitzbereiche $\sum^{\infty}$ . .	26
22	1919	25	„	Dritter Teil. Dipolströmung und zugehörende konforme Abbildung berandeter Riemannscher Flächen	26
22	1919	32	„	Vierter Teil. Logarithmische und polare Unstetigkeiten beliebiger Ordnung und in beliebiger Anzahl Unstetigkeiten am Rande.	26

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
17	1887 — 28	14	W. Voigt.	Spezieller Fall, dasz zwei Strahlen derselben Flüszigkeit, welche im Unendlichen die gleiche Geschwindigkeiten haben, zusammenstossen	6, 26
17	1887 — 28	15	„	Zur Theorie freier Flüszigkeitsstrahlen . .	6, 26
14	1915 — 63	381	M. Jaeger.	Zur Dynamik ebener Flüszigkeitsbewegungen. (Vrij algemeene beschouwingen).	6, 26
14	1901 — 46	11	A. Sommerfeld.	Theoretischers über Beugung der Röntgenstrahlen	26
17	1894 — 45	263	„	Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung.	26
28	1897 — 28	414	„	Anwendung der Greenschen Funktionen des Windungraumes auf Problemen der gewöhnlichen Potentialtheorie	29
22	1894	338	„	Zur mathematischen Theorie der Beugungserscheinungen	28, 29
28	1900 — 31	151	J. H. Jeans.	On finite current sheets	29
28	1900 — 31	156	„	Semi-infinite plane current sheets	29
28	1900 — 31	168	„	Boundary of the current sheet consists of two parallel and infinite straight lines. .	30
28	1897 — 28	419	A. Sommerfeld.	Die Greensche Funktion eines Riemannschen Raumes mit zwei gradlinigen parallellen Verzweigungscurven und ihre Anwendungen	30
28	1899 — 30	133	H. S. Carslaw.	Application to the problem of the diffraction of plane waves of sound incident on a thin semi-infinite rigid plane bounded by a straight edge	31
28	1899 — 30	144	„	The problem of a source of sound in an infinite medium containing a fixed thin rigid semi-infinite plane bounded by a straight edge	32
28	1899 — 30	150	„	The problem in two dimensions of a source outside a semi-infinite thin rigid plane bounded by a straight edge	32
28	1915 Sec. Series 14	450	F. J. Bromwich.	Diffraction of waves by a wedge	29, 32
28	1915 Sec. Series 14	452	„	Solution of the wave equation, corresponding to a source outside a wedge	29, 32

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
28	1915 Sec. Series 14	458	F. J. Bromwich.	The diffraction problem for sound waves from a source, impinging on a wedge. . . .	29, 32
28	1915 Sec. Series 14	400	„	The diffraction problem for waves from a Hertzian oscillator impinging on a wedge.	29, 32
28	1915 Sec. Series 14	450	„	Diffraction of waves by a wedge. A general integral of the wave equation	29, 32
28	1916/17 Sec. Ser. 16	94	F. J. W. Whipple.	Diffraction by a wedge and kindred problems.	29, 32
28	1916/17 Sec. Ser. 16	105	„	Plane waves with the direction of propagation at right angles to the edge of the wedge.	29, 32
28	1916/17 Sec. Ser. 16	106	„	Diffraction of a plane wave of arbitrary type for the case of a straight edge	29, 32
28	1916/17 Sec. Ser. 16	107	„	An electrostatic point-charge in the neighbourhood of a conducting wedge . . .	29, 32
28	1899 — 30	158	H. S. Carslaw.	The problem of an instantaneous line source in an infinite body of uniform conductivity k in which there is a semi-infinite plane, bounded by a straight edge: the plane either 1^e kept always at zero-temperature, or 2nd coated in such a way that no transference of heat is possible across it.	33
28	1910 Sec. Series 8	365	„	The Green's function for a wedge of any angle, and other problems in the conduction of heat	33
28	1910 Sec. Series 8	366	„	Multiform solution of period 2β	33
28	1910 Sec. Series 8	370	„	The Green's function for a solid bounded by the planes $\theta = 0$ and $\theta = \beta$	33
28	1910 Sec. Series 8	372	„	The Green's function for a solid bounded by axial planes, concentric cylinders, or planes perpendicular to the axis	33
28	1910 Sec. Series 8	372	„	I. Line source in the portion of an infinite cyl. $r = a$, cut off by the two axial planes $\theta = 0$ and $\theta = \beta$	33

Nummer boek of tijdschrift.	Jaartal en nummer.	Bladzijde.	SCHRIJVER.	INHOUD.	Paragraaf Dissertatie.
28	1910 Sec. Series 8	372	H. S. Carslaw.	II. Line source in a solid bounded internally by the cylinder $r=a$ and the two planes $\theta=0$ and $\theta=\beta$	33
28	1910 Sec. Series 8	373	„	III. Line source in a solid bounded by the cylinders $r=a$, $r=b$ and the two planes $\theta=0$ and $\theta=\beta$	33
28	1910 Sec. Series 8	373	„	IV. Line source in a solid bounded by the cylinders $r=a$ and $r=b$	33

INHOUD.

STELLINGEN.

I.

Door de tot heden met vloeibare kristallen genomen proeven is nog niet bewezen, dat kristallen geen „Raumgitter"-structuur hebben.

II.

De electrische ovens voor spectroscopisch onderzoek van A. S. KING geven geen zuiver thermische straling.

(MT. WILSON, Solar Observatory, vol. I en volgende deelen).

III.

De door R. RINKEL voorgestelde wijzigingen in de dimensies der electrische eenheden moeten niet worden overgenomen.

(Zeitschr. f. Physik, Bd. 8, 1921).

IV.

Men kan goede resultaten verwachten voor de kennis van de electromagnetische stralingsverschijnselen van de zon door spectro-heliogrammen te maken, die rekening houden met het feit, dat de H_α lijn een doublette is.

(H. DESLANDRES, Comptes rendus vanaf 1910.
F. R. MERTON, Proc. Roy. Soc. 97 A, 1920.
F. R. MERTON en J. W. NICHOLSON, Phil. Transactions A 217, 1917).

V.

De straling der sterren kan niet in de eerste plaats veroorzaakt worden door samentrekking. Waarschijnlijk is zij in hoofdzaak op rekening te stellen van een omzetting der scheikundige elementen.

(H. SHAPLEY, Popular Astronomy, Vol. 31, 1923).

VI.

De voorwaarden, die er bestaan tusschen de verschillende dimensies van de grootheden in het probleem der afwijking van de lichtstralen door het zwaarteveld der zon sluiten noodzakelijk overeenstemming in tusschen de uitkomsten der verschillende theorieën.

(E. GEHRKE, Astronomische Nachrichten, Bd. 219, 1923).

VII.

J. D. v. d. WAALS Jr. beweert, dat ons voorstellingsvermogen betrekking heeft op een niet-euclidische ruimte (J. D. v. d. WAALS Jr.: „De Relativiteits-theorie", bladz. 17). Van deze bewering kan het bewijs niet worden geleverd.

VIII.

De methode der cyclographie kan met vrucht worden toegepast bij het onderzoek van ruimte-krommen.

IX.

P. J. H. BAUDET heeft de stelling opgeworpen: „Als men de natuurlijke getallen splitst in twee verzamelingen D en D', dan bevat D of D' voor ieder natuurlijk getal k een gewone rekenkundige reeks van k termen." (Prijsvraag 3, Wisk. Genootsch. 1923). Indien deze stelling juist is voor een verdeeling in twee verzamelingen, dan geldt zij ook, als men de natuurlijke getallen verdeelt in p verzamelingen.

X.

Ten onrechte beweert J. DU SAAR in zijn proefschrift, dat continuïteit, onbeperkte differentieerbaarheid en integreerbaarheid besliste voorwaarden zijn, waaraan alle biometrische functies moeten voldoen.

(J. DU SAAR: „Over sterfte-formules en lijfrenten", bladz. 5).

XI.

R. HOPPE beweert, dat een wiskundig bewijs van het bestaan der wilsvrijheid gegeven kan worden. Deze bewering is onjuist. Het bewijs, dat HOPPE zelf geeft, is dan ook niet exact.

(Archiv der Math. u. Physik, 2e Reihe, Bd. 11, 1892).

XII.

Bij het onderwijs in de natuurkunde aan de scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs moet vooral en steeds de nadruk gelegd worden op het verband tusschen de verschillende onderdeelen van deze wetenschap.