

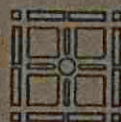


Bijdrage tot de studie van systemen met 2 electronen

<https://hdl.handle.net/1874/283035>

A. qu. 192, 1925

BIJDRAGE TOT DE STUDIE VAN
SYSTEMEN MET 2 ELECTRONEN



W. J. BEEKMAN

Diss.
Utrecht

1925

BIJDRAGE TOT DE STUDIE VAN SYSTEMEN MET 2 ELECTRONEN.

VERBODEN TOEGANG TOT DE ZAKEN VAN SYMBIOTISCH VRIJHEID



RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT



2448 360 8

Diss. Utrecht 1925

BIJDRAGE TOT DE STUDIE VAN SYSTEMEN MET 2 ELECTRONEN

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN
DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN
NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVER-
SITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN
RECTOR MAGNIFICUS DR. H. F. NIERSTRASZ,
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER
WIS- EN NATUURKUNDE, VOLGENS BE-
SLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVER-
SITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE
FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE
TE VERDEDIGEN OP DONDERDAG 28 MEI
1925 DES NAMIDDAGS 4 UUR, DOOR

WILLEM JAN BEEKMAN,
GEBOREN TE ROTTERDAM.



AAN MIJNE VROUW.

Bij het voltooien van mijn proefschrift is het mij eene aangename taak U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, mijnen dank te betuigen voor hetgeen Gij tot mijne wetenschappelijke vorming hebt bijgedragen.

Bovenal dank ik U, Hooggeleerde ORNSTEIN, hooggeachte Promotor, voor de aanmoediging tot het schrijven van dit proefschrift en voor de voortdurende belangstelling en steun, die ik van U bij de samenstelling ervan mocht ondervinden.

1. INLEIDING.

De experimenteele onderzoeken van RUTHERFORD en e.a. hebben den grondslag gelegd voor de hypothese, dat het atoom bestaat uit een centralen kern met positieve lading, waaromheen zich een aantal electronen bewegen. In den neutralen toestand van het atoom is het aantal dezer electronen gelijk aan het atoomnummer van het element.

Zoo bestaat b.v. het neutrale waterstofatoom uit een centralen kern met lading $+e$, waaromheen zich een electron met lading $-e$ in een gesloten baan beweegt. Volgens de klassieke electrodynamica zal door dit electron straling geëmitteerd worden, waardoor de energie van het atoom voortdurend zal afnemen. Deze straling zal tot een continu spectrum aanleiding geven, daar banen van alle mogelijke grootten kunnen voorkomen. Het waargenomen spectrum bestaat echter uit scherpe lijnen, waaruit in verband met het voorgaande volgt, dat de gewone electrodynamische wetten hier niet meer geldig zijn.

Ten einde deze moeilijkheid te overkomen, heeft BOHR de volgende hypothesen ingevoerd:

- 1) De toestanden van een mechanisch systeem, welke kunnen voorkomen, vormen een discrete verzameling. Een energieverandering grijpt alleen plaats bij den overgang van den eenen naar den anderen dezer stationnaire toestanden.
- 2) De straling, hierbij geëmitteerd of geabsorbeerd, is monochromatisch en heeft de frequentie $\nu = \frac{\alpha'_1 - \alpha''_1}{h}$ waarin α'_1 en α''_1 de energieën in de beide toestanden zijn en h de PLANCK'sche constante.

De problemen, welke mathematisch volkomen te behandelen zijn, hebben alle betrekking op een zeer speciaal geval: n.m. de beweging van één electron om een kern met lading $+Z$.

BOHR, SOMMERFELD, EPSTEIN en e.a. hebben dit probleem behandeld; hunne resultaten zijn echter voor het grootste gedeelte slechts van toepassing op waterstof, positief geladen helium en het dubbel positief geladen lithium. Bij andere elementen zijn de uitkomsten slechts bij benadering in enkele gevallen toe te passen b.v. bij een atoom, dat bestaat uit een kern, waaromheen zich op kleineren afstand een aantal electronen bewegen, welke met den kern den atoomromp¹⁾ vormen, terwijl op grooteren afstand zich een enkel electron beweegt.

Een probleem, dat mathematisch volkomen is te behandelen, is de beweging van een electron t.o.v. twee positieve kernen (model van het waterstofmolecuulion), hetwelk door NIESSEN en PAULI is opgelost.²⁾

Bij systemen met meerdere electronen is een berekening der bewegingen, zooals voor het neutrale waterstofatoom geschied is, tot nog toe mathematisch onmogelijk. Wij krijgen dan te doen met drie en meer lichamenproblemen, waarvan de oplossing nog niet is gevonden.

Bij deze n lichamenproblemen kan men dan zoeken naar de z.g.n. „periodieke oplossingen”, zooals zulks ook in de astronomie geschiedt.

In de volgende hoofdstukken wordt de beweging van een electron onderzocht t.o.v.:

- a) een neutraal waterstofatoom.
- b) een geïoniseerd heliumatoom.

In beide gevallen wordt in rekening gebracht, dat het atoom zich in het veld van het electron bevindt.

Het Heliumprobleem is op andere wijze behandeld door SOMMERFELD en LANDÉ zonder echter tot juiste resultaten te voeren.³⁾

¹⁾ Zie: BORN, Vorlesungen über Atommechanik blz. 148.

²⁾ NIESSEN, Diss. Utrecht 1922. W. PAULI, Ann. d. Phys. 68, 177 (1922).

³⁾ A. LANDÉ. Störungstheorie des Heliumatoms Phys. Zschr. 21, 114 (1920).

2. DE BEWEGING VAN EEN ELECTRON T. O. V. HET NEUTRALE WATERSTOFATOOM.

2.1 Bespreking eener hypothese, ter vereenvoudiging van het probleem.

Het neutrale waterstofatoom bestaat uit een kern, waaromheen zich een electron in een cirkelvormige baan beweegt. Het onderzoek naar de beweging van een tweede electron t. o. v. dit systeem geeft aanleiding tot een drielichamen-probleem, dat zonder bijzondere veronderstellingen niet op te lossen is.

Om tot een benaderde oplossing van het probleem te komen, zullen wij een hypothese invoeren, die het terugbrengt tot een probleem, dat mathematisch te behandelen is.

Deze hypothese formuleeren wij als volgt:

Het veld van het electron, welks beweging t. o. v. het neutrale atoom onderzocht moet worden (wij zullen dit het electron 2 noemen), zal in het atoom een polarisatie veroorzaken. De cirkelbaan, waarin het electron van het atoom zich beweegt, zal een weinig weggedrukt worden in de richting electron 2 naar kern. Wij nemen nu verder aan, dat evenals bij het Stark effect het vlak van deze baan voortdurend loodrecht blijft staan op de richting kern-vrij electron d. w. z. we onderstellen, dat het atoom zich dus oogenblikkelijk instelt. Wij kunnen ons nu verder de uitwerking van het atoom-electron bij zijne snelle beweging in de cirkelbaan vervangen denken door de uitwerking van eene gelijke negatieve lading in het elektrische zwaartepunt van de baan d. i. hier het middelpunt.

Daar de massa van den positieven kern zeer groot is t. o. v. de massa's der beide electronen zoo kunnen we den kern in rust denken.

2.2 Berekening van de potentieele energie van het electron 2 t. o. v. het neutrale atoom met inachtnahme van de hypothese in 2.1.

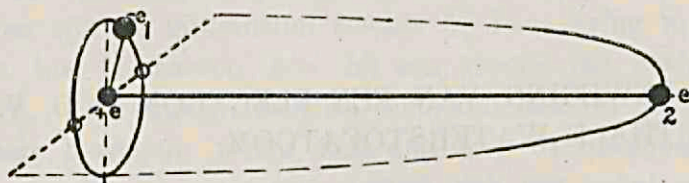


FIG. 1.

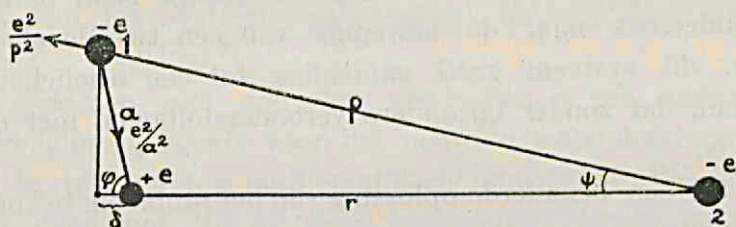


FIG. 2.

Hiertoe bepalen wij eerst den afstand δ van het vlak van de cirkelbaan tot den kern. De ontwikkeling, die wij hierbij voor δ vinden, breken wij bij den eersten term af. Vervolgens denken wij ons een lading $-e$ in het middelpunt van dezen cirkelbaan en berekenen de resulterende kracht op het electron 2 uitgeoefend.

2.21 Berekening van δ .

De ontbondenen van de krachten, werkende op het atoom-electron, evenwijdig aan de richting kern electron 2, moeten elkaar opheffen.

Dit geeft:

$$\frac{e^2}{p^2} \cos \psi = \frac{e^2}{a^2} \cos \phi$$

waarin:

$$\cos \psi = \frac{r + \delta}{p} \text{ en } \cos \phi = \frac{\delta}{a}$$

Substitutie hiervan in voorafgaande vergelijking geeft:

$$\frac{r + \delta}{p^3} = \frac{\delta}{a^3}$$

waaruit volgt:

$$\delta = \frac{ra^3}{p^3 - a^3} \quad (1)$$

Uit de figuur II zien we verder:

$$p^2 = a^2 + r^2 + 2r\delta$$

$$p^2 = r^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2\delta}{r} \right)$$

Nemen wij nu r voldoende groot t. o. v. a , dan zal r ook groot t. o. v. δ zijn en kunnen wij hiervoor schrijven:

$$p = r \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{\delta}{r} \right) \quad (2)$$

Substitutie van (2) in (1) geeft:

$$\delta = \frac{ra^3}{r^3 \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{\delta}{r} \right)^3 - a^3}$$

$$\delta = \frac{ra^3}{r^3 \left(1 + \frac{3a^2}{2r^2} + \frac{3\delta}{r} - \frac{a^3}{r^3} \right)}$$

$$\delta = \frac{a^3}{r^2} \left(1 - \frac{3a^2}{2r^2} - \frac{3\delta}{r} + \frac{a^3}{r^3} \right)$$

In eerste benadering stellen wij nu:

$$\delta = \frac{a^3}{r^2} \quad (3)$$

2.22 Berekening van de kracht door het atoom op het electron uitgeoefend.

Noemen wij deze kracht K , dan volgt uit fig. 2:

$$K = \frac{e^2}{r^2} - \frac{e^2}{(r + \delta)^2}$$

$$K = \frac{e^2}{r^2} - \frac{e^2}{r^2 \left(1 + \frac{\delta}{r} \right)^2}$$

$$K = \frac{e^2}{r^2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{r}\right)^2} \right]$$

$$K = \frac{e^2}{r^2} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{r}} \right]$$

$$K = \frac{e^2}{r^2} \cdot \frac{2\delta}{r}$$

Hierin de waarde van δ uit (3) gesubstitueerd, geeft:

$$K = \frac{2e^2 a^3}{r^5}$$

In eerste benadering is dus de kracht door het systeem atoom-electron op het electron 2 uitgeoefend, omgekeerd evenredig met de vijfde macht van den afstand.

De *potentiële energie* van het electron 2 t. o. v. het systeem atoom-electron is dus:

$$V = \int_{\infty}^2 \frac{2e^2 a^3}{r^5} dr = -\frac{e^2 a^3}{2r^4}$$

Stellen wij nu $2e^2 a^3 = \mu$, dan is dus:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\mu}{r^5} \\ V &= -\frac{\mu}{4r^4} \end{aligned} \right\} (4)$$

2.3 De bewegingsvergelijkingen van het electron 2.

Stellen wij de massa van het electron $= m$, dan wordt de totale energie gegeven door:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\mu}{4r^4} = \alpha_1$$

of in poolcoördinaten:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{\mu}{4r^4} = \alpha_1$$

waarin α_1 de energieconstante voorstelt, die zoowel positief als negatief kan zijn.

Om nu de HAMILTON'sche functie H te vormen, voeren wij

in plaats van de snelheden de bijbehorende impulsen in, gegeven door:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \quad p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}$$

waarin:

$$T \equiv \text{kinetische energie} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2).$$

Hieruit volgt:

$$p_r = m \dot{r} \quad p_\phi = m r^2 \dot{\phi}$$

zoodat:

$$H \equiv T + V = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{4r^4} = \alpha_1.$$

Vervolgens voeren wij een werkingsfunctie $S(r, \phi)$ in zóó, dat:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} \quad \text{en} \quad p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} \quad (5)$$

Daar de tijd niet expliciet in de uitdrukking voor de HAMILTON'SCHE functie voorkomt, zoo wordt dus de JACOBI'SCHE vergelijking:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{m\mu}{2r^4} \right] - \alpha_1 = 0 \quad (6)$$

Zooals onmiddellijk is in te zien, worden de variabelen gesepareerd door aan te zetten:

$$S = \alpha_2 \cdot \phi + S_1(r) \quad (7)$$

Differentiatie geeft:

$$1^0 \quad \frac{\partial S}{\partial \phi} \equiv p_\phi = \alpha_2 \quad (8)$$

waarin α_2 de perkenconstante voorstelt.

$$2^0 \quad \frac{\partial S}{\partial r} \equiv p_r = \frac{d S_1}{dr} \quad (9)$$

Substitutie van (8) en (9) in (6) levert:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{d S_1}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{m\mu}{2r^4} \right] - \alpha_1 = 0$$

$$\left(\frac{d S_1}{dr} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{m\mu}{2r^4} - 2m\alpha_1 = 0$$

$$\frac{d S_1}{dr} \equiv p_r = \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m\mu}{2r^4}}$$

Door integratie verkrijgt men:

$$S_1 = \int \sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}} \cdot dr \quad (10)$$

Substitutie van (10) in (7) voert tot:

$$S = \alpha_2 \cdot \phi + \int \sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}} \cdot dr \equiv S(r, \phi, \alpha_1, \alpha_2).$$

Differentieeren wij hierin naar de constanten, dan verkrijgen wij hieruit de baanvergelijkingen van het electron; deze worden dus:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = t - t_0 \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \phi_0$$

waarin t_0 , ϕ_0 weer nieuwe constanten zijn.

De berekening levert voor de beide vergelijkingen:

$$t - t_0 = m \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}}} \quad (11)$$

$$\phi - \phi_0 = \alpha_2 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}}} \quad (12)$$

De 2^e dezer vergelijkingen geeft ons den geometrischen vorm der baan, terwijl de eerste vergelijking ons den tijd geeft, die verlopen is, sedert het electron zich in het punt met coördinaten (r_0, ϕ_0) bevond.

2.31 Discussie der mogelijke banen.

Wij willen nu gaan onderzoeken, welke typen van banen door vergelijking (12) worden voorgesteld en eenige algemeene eigenschappen dezer banen opsporen.

Differentiatie van (12) naar r geeft:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\alpha_2}{r^2 \sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}}}$$

en bijgevolg:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{\alpha_2^2} \left(2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}\right) \quad (13)$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2 m \alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 r^2 + 1/2 m \mu}{\alpha_2^2}$$

Stellen wij nu: $2 m \alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 r^2 + 1/2 m \mu = R^2$, dan is dus:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{R^2}{\alpha_2^2} \quad (14)$$

Daar $\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2$ steeds positief moet zijn, zoo kunnen in de reële banen slechts die waarden van r voorkomen, waarvoor $R^2 \geq 0$.

Nu is R^2 een continue functie van r , zij kan dus alleen van positieve naar negatieve waarden en omgekeerd overgaan voor die waarden van r , waarvoor $R^2 = 0$ wordt. Een onderzoek naar de wortels dezer biquadratische vergelijking zal ons dus een en ander omtrent deze baanvormen leeren.

2.321 Onderzoek der biquadratische vergelijking $R^2 = 0$.

Uit $R^2 = 0$ volgt, dat $\frac{dr}{d\phi} = 0$ wordt, zoodat dus de positieve wortels van $R^2 = 0$ de maximum en minimum-afstanden geven, waarop de banen van het centrum komen te liggen.

Daar $R^2 = 2 m \alpha_1 r^4 - \alpha_2^2 r^2 + 1/2 m \mu$ is, zoo zijn de wortels van $R^2 = 0$:

$$r = \pm \sqrt{\frac{\alpha_2^2 + \sqrt{\alpha_2^4 - 4 m^2 \mu \alpha_1}}{4 m \alpha_1}}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \sqrt{\alpha_2^4 - 4 m^2 \mu \alpha_1}}{4 m \alpha_1}}$$

Noemen wij deze wortels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en stellen wij $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, dan is:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{\alpha_2^2 + \sqrt{\alpha_2^4 - 4 m^2 \mu \alpha_1}}{4 m \alpha_1}} = -\delta \\ \beta &= \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \sqrt{\alpha_2^4 - 4 m^2 \mu \alpha_1}}{4 m \alpha_1}} = -\gamma \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

In de formules (15) moeten wij alleen, indien wij de wijze, waarop zij verkregen zijn in aanmerking nemen, de positieve waarden der wortels beschouwen.

Daar, zooals wij gezien hebben, in de reële banen alleen die waarden van r voorkomen, welke R^2 positief maken, zoo volgt hieruit, dat de volgende baantypen voorkomen:

- 1°. Baan door het centrum, die tot apocentrum heeft een punt op een afstand β van het centrum gelegen.
- 2°. Baan met twee takken naar het oneindige en waarvan het pericentrum op een afstand α van het aantrekkingscentrum gelegen is.

In fig. 3 is het verloop der functie $\frac{R^2}{m\mu}$ geconstrueerd

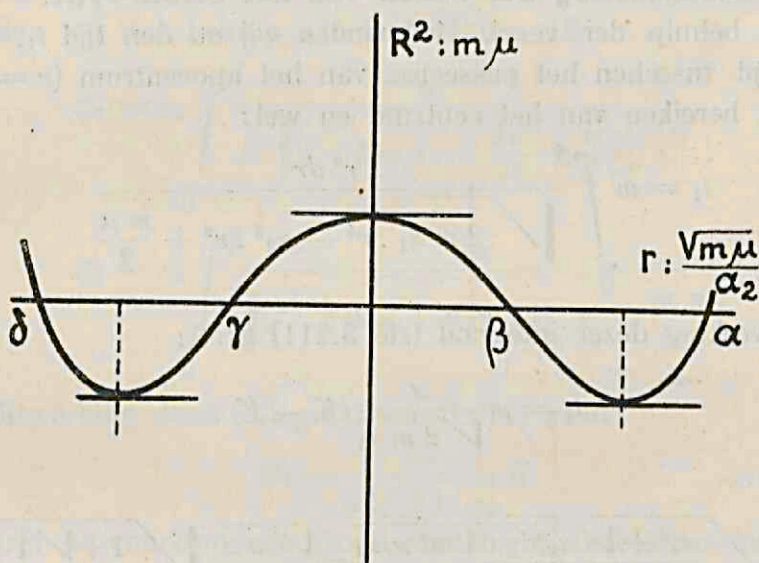


FIG. 3.

voor positieve waarden der onafhankelijke veranderlijke $r: \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$

en wel voor het bijzondere geval: $\alpha_1 = 0,5 \frac{\alpha_2^4}{m^2 \mu}$, zoodat $\eta = 0,5$ is.

Hieruit volgt:

$$\alpha = \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 1/2}}{1/2}} = 1,85 \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 1/2}}{1/2}} = 0,76 \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$$

Is dus $\eta = 0,50$, dan zijn er dus de twee baanvormen:

1°. Baan van centrum naar apocentrum, gelegen op een

afstand $r = 0,76 \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$ en terug naar het centrum.

2°. Baan van het oneindige naar pericentrum, gelegen op

een afstand $r = 1,85 \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$ en terug naar het oneindige.

Bij elke waarde van η behooren dus ∞^1 banen van het eerste type en ∞^1 banen van het tweede type.

2.323 Beschouwing der banen van het eerste type.

Met behulp der vergl. (11) vinden wij nu den tijd t_1 , die verloopt tusschen het passeeren van het apocentrum ($r = \beta$) en het bereiken van het centrum en wel:

$$t_1 = m \int_0^\beta \frac{r^2 dr}{\sqrt{2 m \alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 \cdot r^2 + \frac{m \mu}{2}}}$$

Uitwerking dezer integraal (zie 3.211) geeft:

$$t_1 = m \frac{\alpha}{\sqrt{2 m \alpha_1}} (K - E) \quad (18)$$

waarin:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\alpha_2^2 + \sqrt{\alpha_2^4 - 4 m^2 \mu \alpha_1}}{4 m \alpha_1}} = \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \eta}}{\eta}}$$

$$K \equiv \text{complete integraal van de 1e soort} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\Delta\phi}; E \equiv \text{com-}$$

$$\text{plete integraal van de 2e soort} = \int_0^{\pi/2} \Delta\phi d\phi$$

waarin:

$$\Delta\phi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}.$$

Hierin is:

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \eta}}{1 + \sqrt{1 - \eta}}}$$

Voor $0 < \eta < 1$ is:

$$\infty > \alpha > \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$$

$$0 < k < 1$$

$$\text{dus } 1.57080 < K < \infty$$

$$1.57080 > E > 1$$

Voor η in het interval (0,1) met uitsluiting der grenzen is dus volgens (18) de tijd t_1 , noodig om van het apocentrum naar het centrum te gaan en omgekeerd, steeds eindig.

Den hoek, waarover de voerstraal in dien tijd t_1 draait, vinden wij met behulp van vergelijking (12):

$$\phi_1 = \alpha_2 \int_0^\beta \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m\mu}{2r^4}}}$$

$$\phi_1 = \alpha_2 \int_0^\beta \frac{dr}{\sqrt{2m\alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 \cdot r^2 + \frac{m\mu}{2}}}$$

Uitwerking dezer integraal (zie 3.211) geeft:

$$\phi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha \sqrt{2m\alpha_1}} K \quad (19)$$

waarin de voorkomende grootheden b.g.n. beteekenis hebben.

Voor η in het interval (0,1) met uitsluiting der grenzen is dus volgens (19) de hoek, waarover de voerstraal draait, wanneer het electron van het apocentrum naar het aantrekkingscentrum loopt, steeds eindig.

Substitueeren wij n.m. bovenstaande waarden van α en α_1 in (19), dan krijgen wij:

$$\phi_1 = \alpha_2 \cdot \frac{\alpha_2}{\sqrt{m\mu}} \sqrt{\frac{\eta}{1 + \sqrt{1 - \eta}}} \cdot \frac{\sqrt{2m\mu}}{\alpha_2^2 \sqrt{\eta}} K$$

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \eta}}} K \quad (20)$$

Hieruit blijkt, dat voor $0 < \eta < 1$ steeds:

$$90^\circ \equiv 1,5708 \text{ radialen} < \phi_1 < \infty.$$

Dus geschiedt de nadering van het aantrekkingscentrum niet volgens een spiraal, daar de hoek, waarover de voerstraal zich draait, eindig is.

2.324 Beschouwing der banen van het tweede type.

Ten einde den tijd t_2 te vinden, welke verloopt tusschen het passeeren van het pericentrum op afstand α en het bereiken van het oneindige, maken wij weer gebruik van vergl. (11):

$$t_2 = m \int_{\alpha}^{\infty} \frac{r^2 dr}{\sqrt{2m\alpha_1 r^4 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{m\mu}{2}}}$$

Daar $\int_{\alpha}^{\infty} f(r) dr$ convergeert voor $\lambda < 0$, wanneer $f(r) = O(r^{\lambda-1})$, zoo zal dus in ons geval de integraal niet convergeeren, daar in deze integraal $f(r) = O(r^0)$ en dus $\lambda = 1$ is.

Er verloopt dus een oneindige tijd tusschen het passeeren van het pericentrum en het bereiken van het oneindige.

Den hoek ϕ_2 , waarover in dien tijd t_2 de voerstraal draait, vinden wij weer met behulp van vergelijking (12).

$$\phi_2 = \alpha_2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m\mu}{2r^4}}}$$

$$\phi_2 = \alpha_2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{2m\alpha_1 r^4 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{m\mu}{2}}}$$

Uitwerking dezer integraal (zie 3.22), welke convergent is, daar $f(r) = O(r^{-2})$ en dus $\lambda = -1 < 0$ geeft:

$$\phi_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha \sqrt{2m\alpha_1}} K$$

Substitueeren we nu hierin: $\alpha_1 = \eta \frac{\alpha_2^4}{4m^2 \mu}$ en

$$\alpha = \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \eta}}{\eta}}$$

dan is dus:

$$\Phi_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \eta}}} K \quad (21)$$

Hieruit volgt, dat voor $0 < \eta < 1$ steeds:

$$\frac{\pi}{2} < \Phi_2 < \infty$$

De hoek, waarover de voerstraal draait, wanneer het electron van het pericentrum naar het oneindige loopt, is dus voor η in het interval (0,1) met uitsluiting der grenzen, steeds eindig.

2.325 Onderzoek der grensgevallen $\eta = 0$ en $\eta = 1$.

1°. $\eta = 0$.

De vergelijkingen (17) geven in dit geval:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \alpha &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \eta}}{\eta}} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{2}{\eta} - \frac{1}{2}} = \infty \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \beta &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \eta}}{\eta}} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707 \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat voor $\eta = 0$ alleen nog de baan aanwezig is, die van het aantrekkingscentrum naar het apocentrum op een afstand $r = 0,707 \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$ en terug naar het aantrekkingscentrum gaat.

De tijd t_1 , dien het electron noodig heeft om den afstand langs zijn baan van het apocentrum naar het aantrekkingscentrum af te leggen, vinden wij uit (18) door daarin b.g.n. waarden van α en α_1 te substitueeren en vervolgens van deze uitdrukking de limiet voor $\eta = 0$ te bepalen; dus:

$$t_1 = \lim_{\eta \rightarrow 0} m \frac{\alpha}{\sqrt{2 m \alpha_1}} (K - E)$$

$$t_1 = \lim_{\eta \rightarrow 0} m \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \eta}}{\eta}} \cdot \frac{\sqrt{2 m \mu}}{\alpha_2^2 \sqrt{\eta}} (K - E)$$

$$t_1 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{m^2 \mu \sqrt{2}}{\alpha_2^3} \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 - \eta}} \right) \cdot \frac{K - E}{\eta}$$

We stellen nu $\sqrt{1 + \sqrt{1 - \eta}} = \eta_1$ (zie 3.211) dan is:

$$\eta = \eta_1^2 (2 - \eta_1^2)$$

$$\frac{2K}{\pi} - \frac{2E}{\pi} = \frac{1}{2} \frac{2 - \eta_1^2}{\eta_1^2} + \frac{3}{16} \frac{(2 - \eta_1^2)^2}{\eta_1^4} + \dots$$

Als $\eta \rightarrow 0$, dan $\eta_1 \rightarrow \sqrt{2}$, dus:

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m^2 \mu \sqrt{2}}{\alpha_2^3} \lim_{\eta_1 \rightarrow \sqrt{2}} \eta_1 \left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E}{\pi} \right) \cdot \frac{1}{\eta_1^2 (2 - \eta_1^2)}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m^2 \mu \sqrt{2}}{\alpha_2^3} \lim_{\eta_1 \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2 - \eta_1^2}{\eta_1^2} + \frac{3}{16} \cdot \frac{(2 - \eta_1^2)^2}{\eta_1^4} + \dots}{\eta_1 (2 - \eta_1^2)}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m^2 \mu \sqrt{2}}{\alpha_2^3} \lim_{\eta_1 \rightarrow \sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\eta_1^3} + \frac{3}{16} \frac{2 - \eta_1^2}{\eta_1^5} + \dots \right)$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m^2 \mu \sqrt{2}}{\alpha_2^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{2}}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{m^2 \mu}{\alpha_2^3}$$

De tijd t_1 is dus ook in het bijzondere geval $\eta = 0$ eindig.

Den hoek ϕ_1 , waarover de voerstraal draait, wanneer het electron van het apocentrum naar het aantrekkingscentrum loopt, vinden wij met behulp van vergl. (20):

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \eta}}} K \quad (22)$$

Daar $k = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \eta}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \eta}}}$ voor $\eta = 0$ de waarde nul krijgt,

zoo is dus $K = \frac{\pi}{2}$.

Bijgevolg:

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ radialen} = 90^\circ \text{ en dus eindig.}$$

Dit baantype is dus precies hetzelfde als dat we hierboven in 2.322 vonden voor $0 < \eta < 1$.

2^o. $\eta = 1$.

De vergelijkingen (17) geven in dit geval:

$$\alpha = \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} = \beta. \quad (23)$$

De tijd t_1 , noodig om van het centrum naar een afstand $r = \alpha = \beta$ te komen, is volgens (11) weer:

$$t_1 = m \int_0^\beta \frac{r^2 dr}{\sqrt{2 m \alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{m\mu}{2}}}$$

Nu is $\int_0^\beta f(r) dr$ convergent, in het geval, dat $f(r)$ oneindig

wordt voor $r = \beta$, voor $\lambda > 0$, wanneer $f(r) = O(\beta - r)^{\lambda - 1}$. In ons geval is $f(r) = O(\beta - r)^{-2}$, dus $\lambda = -1 < 0$ d.w.z. bovenstaande integraal heeft een oneindige waarde.

De tijd, noodig om van een afstand $r = \beta - \varepsilon$ op een afstand $r = \beta$ te komen, is dus oneindig lang.

De hoek, waarover de voerstraal draait, wanneer r verandert van $\beta - \varepsilon$ tot β wordt door vergl. (12) gegeven:

$$\phi_1' = \alpha_2 \int_{\beta - \varepsilon}^\beta \frac{dr}{r^2 \sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m\mu}{2r^4}}}$$

$$\phi_1' = \alpha_2 \int_{\beta - \varepsilon}^\beta \frac{dr}{\sqrt{2 m \alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 \cdot r^2 + \frac{m\mu}{2}}}$$

Uitwerking dezer integraal geeft:

$$\phi_1' = \frac{1}{\alpha \sqrt{2m\alpha_1}} \left[K - F \left(\operatorname{bgsin} \frac{\beta - \varepsilon}{\beta} \right) \right]$$

In ons geval is de modulus $k = \frac{\beta}{\alpha} = 1$, dus $K = \infty$, terwijl F eindig is. Dus is de hoek ϕ_1' , waarover de voerstraal draait, oneindig groot.

Uit bovenstaande volgt nu:

In het geval $\eta = 1$ nadert het electron, komende van het aantrekkingscentrum, den cirkel met straal $r = \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$ volgens een spiraal met oneindig vele windingen. Deze cirkel is dus een asymptotische cirkel voor de baan van het electron.

Behalve deze baan van het eerste type, is in dit geval ook nog een baan van het tweede type mogelijk. Beschouwen we nu deze laatste baan.

De tijd t_2' , noodig om van een afstand $\alpha + \varepsilon$ den afstand $r = \alpha$ te bereiken, wordt weer met vergelijking (11) gevonden:

$$t_2' = m \int_{\alpha}^{\alpha + \varepsilon} \frac{r^2 dr}{\sqrt{2m\alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 \cdot r^2 + \frac{m\mu}{2}}}$$

Eenzelfde beschouwing als hierboven leert ons, dat ook deze integraal oneindig groot wordt.

Evenzoo vinden we met vergelijking (12) voor den hoek, waarover de voerstraal draait, wanneer het electron langs zijn baan van $r = \alpha + \varepsilon$ naar $r = \alpha$ gaat:

$$\phi_2' = \alpha_2 \int_{\alpha}^{\alpha + \varepsilon} \frac{dr}{\sqrt{2m\alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 \cdot r^2 + \frac{m\mu}{2}}}$$

Uitwerking dezer integraal (of beschouwing van de orde van oneindig worden van den integrand aan de onderste grens) geeft ook hier weer voor ϕ_2' een oneindig groote waarde.

Daaruit volgt:

Een electron, dat uit het oneindige het systeem atoom-

electron nadert, zal in het geval $\eta = 1$ een baan beschrijven, die den cirkel met straal $r = \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$ tot asymptotischen cirkel heeft.

Loopt het electron in dezen cirkel, dan is zijne energie: $\alpha_1 = \frac{\alpha_2^4}{4m^2\mu}$ }
 en zijn snelheid: $v_{\text{cirkel}} = \frac{\alpha_2^2}{m\sqrt{m\mu}}$ } (24)

Uit de beschouwingen in 2.322 volgt nog, dat in eenzelfde baan niet tegelijk een pericentrum en apocentrum aanwezig kunnen zijn.

Loopt dus het electron door een of andere oorzaak in bovengenoemde cirkelbaan, dan zal de beweging mechanisch niet stabiel zijn, daar volgens bovenstaande het electron zich na een kleine verstoring of naar het oneindige of naar het centrum zal moeten bewegen; immers zijn apo- en pericentrum niet tegelijk mogelijk.

2.33 Eenige algemeene eigenschappen van de banen, die door het electron beschreven kunnen worden.

1°. *Alle banen zijn concaaf t. o. v. het centrum.*

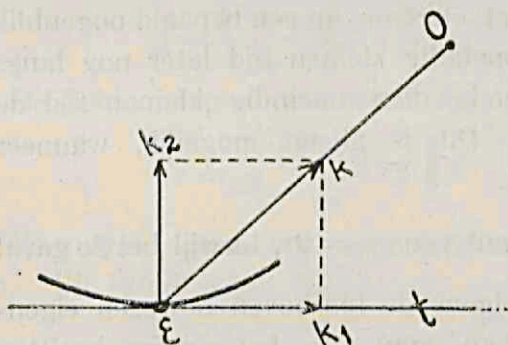


FIG. 4.

Dit is als volgt eenvoudig in te zien.

Valt de snelheid van het electron op een bepaald oogenblik langs een lijn t , dan is de kracht EK , door het centrum O op het electron E uitgeoefend, te ontbinden langs t en

loodrecht erop. De kracht EK_2 zal nu tot gevolg hebben, dat de baan tusschen O en t komt te liggen en dus concaaf t. o. v. O zal zijn.

2°. *De raaklijn aan de baan van het electron kan nooit door het centrum gaan.*

Dit is als volgt aan te toonen: Uit $mr^2\dot{\phi} = \alpha_2$ volgt, dat $\dot{\phi} = 0$ wordt voor $r = \infty$; anders is $\dot{\phi}$ steeds ongelijk nul ¹⁾.

Is nu θ de hoek, dien de radius vector maakt met de raaklijn aan de baan, dan is:

$$\operatorname{tg} \theta = r \frac{d\phi}{dr}$$

Verder is:

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dr} \dot{r}$$

Uit beide vergelijkingen volgt:

$$\dot{\phi} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{r} \cdot \dot{r}$$

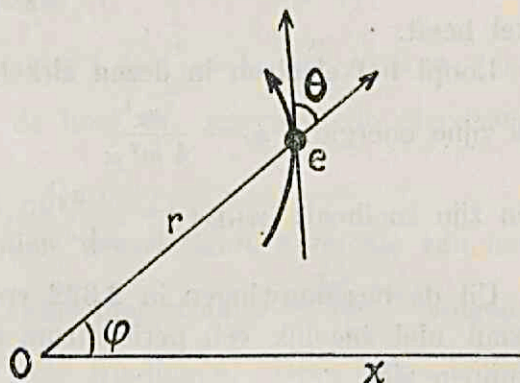


FIG. 5.

Hieruit volgt nu onmiddellijk, dat voor $0 < r < \infty$ $\operatorname{tg} \theta$ steeds ongelijk nul is en dus $\theta \neq 0$, d. w. z. de raaklijn gaat niet door het centrum.

Een gevolg van deze eigenschap is, dat het electron zich steeds in een zelfde richting om O zal moeten bewegen.

3°. *De banen bezitten geen buigpunten in het eindige.*

(Zie Fig. 4.)

Valt de snelheid van het electron op een bepaald oogenblik langs t , dan zal zij een oneindig kleinen tijd later nog langs t vallen, wanneer gedurende dien oneindig kleinen tijd de ontbondene $EK_2 = 0$ is. Dit is alleen mogelijk, wanneer EK nul is of langs t valt.

$EK = \frac{\mu}{r^5}$ wordt alleen nul voor $r = \infty$, terwijl het 2e geval niet mogelijk is, daar volgens de hierboven bewezen eigenschap t nimmer door O kan gaan. In het eindige bezitten de banen dus geen buigpunten.

Het bewijs dezer drie eigenschappen was noodzakelijk om nog een beter idee te krijgen van de baanvormen, die het electron in staat is te beschrijven.

¹⁾ Daar we het geval $\alpha_2 = 0$ uitgesloten hebben.

2.35 **Onderzoek naar de baantypen, welke in het geval (a) 2. [zie 2.321] door het electron beschreven kunnen worden.**

Daar in dit geval $\alpha_1 < 0$ is, stellen wij:

$$\alpha_1 = -\alpha'_1 \quad (25)$$

zoodat dan α'_1 positief is.

Dan wordt:

$$R^2 = -2 m \alpha'_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{1}{2} m \mu \quad (25a)$$

De wortels van $R^2 = 0$ worden dan:

$$\left. \begin{aligned} r &= \pm \sqrt{-\frac{\alpha_2^2}{4 m \alpha'_1}} + \sqrt{\frac{\alpha_2^4}{16 m^2 \alpha_1'^2} + \frac{\mu}{4 \alpha'_1}} \\ r &= \pm \sqrt{-\frac{\alpha_2^2}{4 m \alpha'_1}} - \sqrt{\frac{\alpha_2^4}{16 m^2 \alpha_1'^2} + \frac{\mu}{4 \alpha'_1}} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Ter vereenvoudiging stellen wij nu:

$$\alpha'_1 = \eta \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu} \quad (27)$$

waarin η positief moet zijn.

Substitueeren wij nu de waarde van α'_1 uit (27) in de formules (26) en noemen wij de beide reële wortels β en γ ($\beta > \gamma$), dan is:

$$\beta = \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 + \eta - 1}{\eta}} = -\gamma \quad (28)$$

De beide imaginaire wortels zijn:

$$r = \pm \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \cdot i \sqrt{\frac{1 + \eta + 1}{\eta}} \quad (29)$$

Vervolgens gaan wij weer het verloop van de functie R^2 na. Uit (25a) volgt, dat

$$\text{voor } r = 0 \dots \dots R^2 = \frac{1}{2} m \mu$$

$$\text{voor } r = \pm \infty \dots R^2 = -\infty \text{ wordt.}$$

In verband met (28) blijkt hieruit, dat de functie R^2 het volgende verloop heeft:

$$R^2 \text{ positief in het interval } (\gamma, \beta)$$

$$R^2 \text{ negatief in het interval } (\beta, \infty, \gamma)$$

Nu komen alleen die waarden van r in reële banen voor, welke R^2 positief maken [zie: 2.31] en dus volgt uit het

bovenstaande, dat er in dit geval slechts één baantype mogelijk is, n.m.: een baan van het centrum naar een apocentrum op een afstand $r = \rho$ van het aantrekkingscentrum gelegen en terug naar het centrum.

Als in 2.323 kunnen wij nu weer den tijd berekenen, die verloopt tusschen het passeeren van het apocentrum en het bereiken van het aantrekkingscentrum, benevens den hoek, waarover in dien tijd de voerstraal gedraaid is. Beide blijken weer eindig te zijn, zoodat geen spiraalvormige banen hierbij voorkomen.

Daar in dit geval samenvallende positieve wortels buitengesloten zijn, zoo zijn er geen banen mogelijk, die volgens een spiraal met oneindig vele windingen tot een asymptotischen cirkel naderen.

2.35 Onderzoek naar de baantypen, welke in het geval (b) [zie 2.321] door het electron beschreven kunnen worden.

In dit geval is $\alpha_1 > \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu}$, zoodat alle wortels van $R^2 = 0$ complex zijn.

Stellen wij ter vereenvoudiging

$$\alpha_1 = \eta \cdot \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu} \quad (30)$$

waarin nu $\eta > 1$ moet zijn.

De wortels van $R^2 = 0$ zijn:

$$\left. \begin{aligned} r &= \pm \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{4 m \alpha_1} + \sqrt{\frac{\alpha_2^4}{16 m^2 \alpha_1^2} - \frac{\mu}{4 \alpha_1}}} \\ r &= \pm \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{4 m \alpha_1} - \sqrt{\frac{\alpha_2^4}{16 m^2 \alpha_1^2} - \frac{\mu}{4 \alpha_1}}} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Substitueeren wij in de formules (31) de waarde van α_1 uit (30), dan krijgen wij:

$$\left. \begin{aligned} r &= \pm \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{i \sqrt{\eta - 1 + 1}}{\eta}} \\ r &= \pm \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 - i \sqrt{\eta - 1}}{\eta}} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Daar $R^2 = 2 m \alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 \cdot r^2 + \frac{1}{2} m \mu$ is en $\alpha_1 > 0$ zoo volgt hieruit:

voor $r = 0$ wordt $R^2 = \frac{1}{2} m \mu$

voor $r = \pm \infty$ wordt $R^2 = +\infty$.

Hieruit blijkt, dat de functie R^2 steeds positief is, zoodat in elke reële baan alle positieve waarden van r kunnen voorkomen d. w. z. het type baan, 't welk in dit geval door het electron beschreven kan worden, is een baan van het centrum naar het oneindige gaande of omgekeerd.

Berekening toont weer aan, dat er geen spiraalvormige banen met een groot aantal windingen om het centrum mogelijk zijn.

2.36 Overzicht van de mogelijke banen.

Uit het voorgaande is gebleken, dat de volgende banen door het electron doorlopen kunnen worden.

$$1^0) \quad \alpha_1 < \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu}$$

α_1 positief. 1^o. Banen tusschen centrum en een apocentrum.

2^o. Banen tusschen het oneindige en een pericentrum.

α_1 negatief. 1^o. Banen tusschen centrum en apocentrum.

$$2^0) \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu}$$

α_1 positief. 1^o. Banen tusschen centrum en een asymptotischen cirkel.

2^o. Banen tusschen het oneindige en een asymptotischen cirkel.

$$3^0) \quad \alpha_1 > \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu}$$

1^o. Banen tusschen centrum en het oneindige.

Wij kunnen dus deze banen tot 3 typen samenvatten:

- I. Banen tusschen centrum en een maximum afstand.
- II. Banen tusschen het oneindige en een minimum afstand.
- III. Banen tusschen het centrum en het oneindige.

3. TOEPASSING DER QUANTENTHEORIE OP HET PROBLEEM UIT HOOFDSTUK 2.

3.1 Quantencondities.

SOMMERFELD heeft aan de quantencondities den volgende vorm gegeven:

$$\iint dp_{\varphi} d\varphi = nh \qquad \iint dp_r dr = n'h \qquad (33)$$

Voeren wij hierin de integratie naar dp_{φ} resp. dp_r uit, dan gaan de vergelijkingen (33) over in:

$$\int (p_{\varphi} - \bar{p}_{\varphi}) d\varphi = nh \qquad \int (p_r - \bar{p}_r) dr = n'h \qquad (34)$$

Wij moeten nu onderzoeken:

- 1°. Tusschen welke grenzen moeten de integraties in (34) uitgevoerd worden.
- 2° Hoe bepalen wij de aanvangswaarden p_{φ} en $\bar{p}_r$?

3.11 Bepaling der integratiegrenzen.

Beschouwen wij eerst, om onze gedachten te bepalen de banen van het type II (zie 2.36). Denken wij ons de waarden van den coördinaat r langs een rechte uitgezet, dan wordt deze rechte van $r = \alpha$ naar $r = \delta$ (via ∞) en weer terug van $r = \delta$ naar $r = \alpha$ afwisselend doorloopen (zie 2.324). Het ligt dus voor de hand, om de integratie in dit geval uit te strekken van α naar δ (via ∞) en terug. EPSTEIN is bij de behandeling der hyperboolbanen op overeenkomstige wijze te werk gegaan. ¹⁾

Voor den coördinaat φ zijn als integratiegrenzen te nemen 0 en 2π .

Bovenstaande keuze der integratiegrenzen is in overeenstemming met den eisch, dien PLANCK gesteld heeft n.m. dat deze grenzen samen moeten vallen met de eindpunten van

¹⁾ P. S. EPSTEIN, Ann. d. Phys. 50, 815 (1916).

het interval, dat door den beschouwden coördinaat doorloopen kan worden. ¹⁾

Bij banen van het I^e type zullen wij in analogie met het voorgaande de integratie in r uitstrekken van $r = \gamma$ naar $r = \beta$ en terug; wij kunnen integreeren van $r = 0$ naar $r = \beta$, mits wij deze integraal viervoudig in rekening brengen.

Bij de banen van het III^e type kan r het interval $-\infty$ tot $+\infty$ en terug doorloopen; hierbij kunnen wij dus tot integratiegrenzen kiezen 0 en $+\infty$, mits wij ook hier weer deze integraal dan viervoudig tellen.

3.12 Keuze der aanvangswaarden $\bar{p}_\varphi$ en $\bar{p}_r$.

1^o. $\bar{p}_\varphi$.

In overeenstemming met de toepassingen door SOMMERFELD, EPSTEIN e. a. willen wij ook hier de aanvangswaarde $\bar{p}_\varphi$ gelijk nul stellen.

In verband met 3.11 gaat dus de eerste vergelijking van (34) over in:

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = nh \quad (35)$$

2^o. $\bar{p}_r$.

De aanvangswaarde $\bar{p}_r$ kunnen wij echter in ons probleem niet gelijk aan nul stellen, daar dan de tweede integraal van (34) bij elk der door ons beschouwde baantypen oneindig zou worden.

De afhankelijkheid van het impuls p_r van de coördinaat wordt volgens [2.3] gegeven door:

$$p_r = \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m\mu}{2r^4}} \quad (36)$$

In de Fig. 6, 7 en 8 is de functie graphisch voorgesteld.

Langs de as der abscissen is afgezet $r: \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$ terwijl als ordinaat $p_r: \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{2m\mu}}$ gebruikt is.

In fig. 6 is dit graphisch verloop weergegeven voor banen

¹⁾ M. PLANCK. Ann. d. Phys. 50, 385 (1916). Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17, 408, 438 (1915).

FIG. 6.

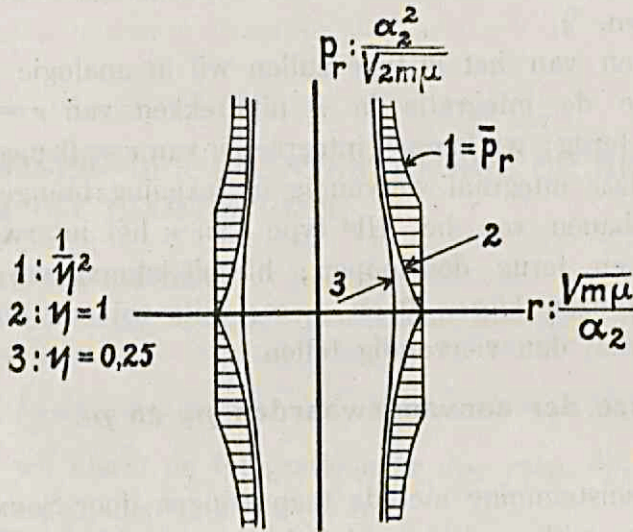


FIG. 7.

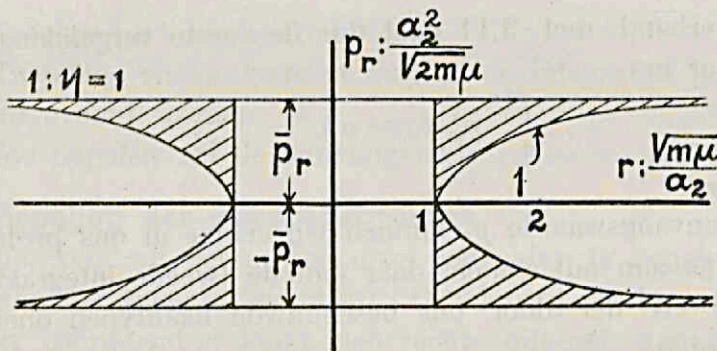
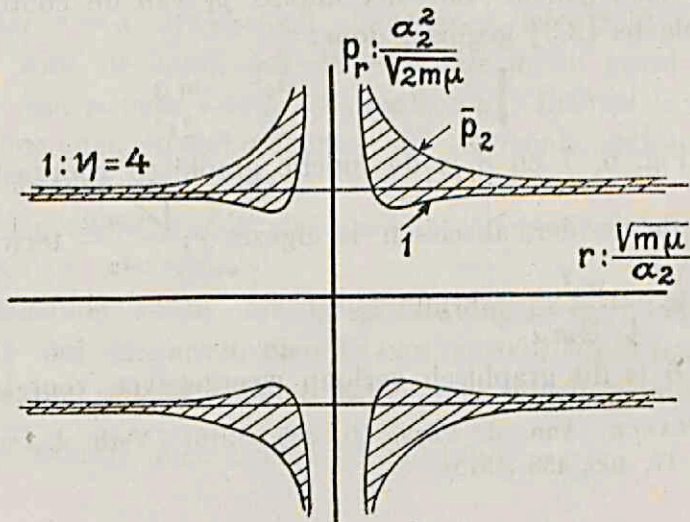


FIG. 8.



van het type I en wel voor eenige waarden van η [zie 2.36].

Ten einde nu de integraal (34) convergent te maken, hebben wij de onderstelling $p_r = \sqrt{\frac{m\mu}{2r^4}}$ ingevoerd. Het graphisch verloop dezer functie wordt in fig. 6 door de kromme 1. weergegeven. De integraal wordt dan b.v. voor $\eta = 1$ graphisch voorgesteld door het gearceerde oppervlak. Deze onderstelling vindt hare rechtvaardiging in het feit, dat p_r , als α_1 en α_2 tot nul naderen de waarde $\sqrt{\frac{m\mu}{2r^4}}$ tot limiet heeft.

In fig. 7 is voor banen van het type II dezelfde constructie uitgevoerd en wel voor het bijzondere geval $\eta = 1$. De kromme bestaat hier uit twee symmetrische takken, die asymptotisch naderen tot twee rechten, evenwijdig aan de as der abscissen, hiervan op een afstand ± 1 gelegen. Deze ordinaten komen dus overeen met de waarden van het impuls p_r in het oneindige. Dit rechtvaardigt voor dit geval de volgende onderstelling: $\bar{p}_r = \sqrt{2m\alpha_1}$.

De integraal (34) wordt dan convergent. Zij is in de fig. graphisch door het gearceerde oppervlak voorgesteld.

Ten slotte is in fig. 8 het verloop van p_r voorgesteld voor banen van het type III en wel voor de bijzondere waarde $\eta = 4$.

Ten einde de integraal (34) nu convergent te maken, stellen wij:

$$\bar{p}_r = \sqrt{2m\alpha_1} + \sqrt{\frac{m\mu}{2r^4}}.$$

Het verloop dezer functie is in de figuur graphisch voorgesteld; de integraal (34) wordt weder voorgesteld door het gearceerde oppervlak.

In alle gevallen is de bij eenzelfde waarde van r behorende $\bar{p}_r$ grooter dan p_r , zoodat dus volgens (34) alleen negatieve waarden der quantengetallen n' mogelijk zullen zijn.

Uit de gegeven beschouwingen volgen nu de quanten voorwaarden:

$$1) \quad 4 \int_0^{r_{\max}} dr \left[\sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}} - \sqrt{\frac{m \mu}{2 r^4}} \right] = n' h \quad (37a)$$

voor banen van het type I.

$$2) \quad 4 \int_{r_{\min}}^{\infty} dr \left[\sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}} - \sqrt{2 m \alpha_1} \right] = n' h \quad (37b)$$

voor banen van het type II.

$$3) \quad 4 \int_0^{\infty} dr \left[\sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}} - \sqrt{2 m \alpha_1} - \sqrt{\frac{m \mu}{2 r^4}} \right] = n' h \quad (37c)$$

voor banen van het type III.

Integratie dezer vergelijkingen geeft in verband met (35) de mogelijkheid de energieën der banen in de quantengetallen n en n' uit te drukken.

3.2 Berekening der energie uit de quantencondities.

3.20. De quantenconditie (35).

De integraal $\int_0^{2\pi} p_\phi d\phi$ wordt, daar p_ϕ gelijk is aan de constante α_2 , $2\pi\alpha_2$ en bijgevolg levert de quantenconditie (35) voor alle baantypen de betrekking:

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha_2 &= n h \\ \alpha_2 &= \frac{n h}{2\pi} \end{aligned} \quad (38)$$

Daar α_2 en $d\phi$ noodzakelijk hetzelfde teken moeten hebben, is n een positief geheel getal.

3.21 Berekening der quantenconditie (37a). Banen van het type I.

Deze banen komen volgens [2.36] voor in de volgende gevallen:

$$a) \quad \alpha_1 < \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu} \quad \alpha_1 > 0 \quad r_{\max} = \beta$$

$$b) \quad \alpha_1 < \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu} \quad \alpha_1 < 0 \quad r_{\max} = \beta$$

In het eerste geval heeft $R^2 = 0$ vier reële wortels [zie 2.322]; $\alpha = -\delta$, $\beta = -\gamma$ en $\alpha > \beta > \gamma > \delta$.

In het tweede geval zijn van de wortels van $R^2 = 0$ twee

reeël en twee imaginair. Voor de reële geldt $\beta = -\gamma$ en $\beta > \gamma$.

3.211 Geval Ia.

Ten einde in dit geval de elliptische integraal (37a) terug te brengen tot elliptische integralen van de 1^e en 2^e soort, beschouwen we eerst de integraal: $\int_0^\beta \frac{dr}{R}$, waarin: (39)

$$R \equiv 2m\alpha_1 r^4 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{1}{2}m\mu = 2m\alpha_1 (r-\alpha)(r-\beta)(r-\gamma)(r-\delta)$$

Stellen wij nu:

$$2m\alpha_1 = A; (r-\alpha)(r-\beta)(r-\gamma)(r-\delta) = R'^2$$

dan wordt bovenstaande integraal:

$$\int_0^\beta \frac{dr}{\sqrt{AR'^2}} \quad (40)$$

Om (40) tot den normaalvorm terug te brengen, gebruiken wij de transformatieformules ¹⁾

$$\frac{r-\beta}{r-\gamma} = - \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(\delta-\beta)}{(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)}} \cdot \frac{1-z}{1+z}$$

$$\frac{1-k}{1+k} = + \sqrt{\frac{(\beta-\alpha)(\gamma-\delta)}{(\beta-\delta)(\gamma-\alpha)}}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{AR'^2}} = + \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

waarin aan de waarden van r : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ moeten worden toegevoegd, die van z : $\frac{1}{k}, +1, -1, -\frac{1}{k}$.

Hierin is: $k \equiv$ modulus van de elliptische integraal van de 1^e soort.

Stellen wij verder $z = \sin \phi$ en nemen wij in aanmerking, dat in ons geval $\alpha = -\delta, \beta = -\gamma$ is, dan gaan deze transformatieformules over in:

$$r = \beta \sin \phi \quad (41)$$

$$k = \frac{\beta}{\alpha} \quad (42)$$

$$\frac{dr}{\sqrt{AR'^2}} = \frac{1}{\alpha \sqrt{2m\alpha_1}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}} \quad (43)$$

¹⁾ Zie bijv.: DURÈGE, Theorie der elliptischen Funktionen.

Volgens (41) correspondeert met $r = \beta$, $\phi = \pi/2$ en met $r = 0$, $\phi = 0$.

De integraal (37a) schrijven wij nu als volgt:

$$\int_0^\beta dr \left[\sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{m \mu}{2 r^4}} - \sqrt{\frac{m \mu}{2 r^4}} \right] = \frac{n' h}{4}$$

Na eenige herleiding krijgen wij:

$$\int_0^\beta \left\{ \frac{2 m \alpha_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{1}{2} m \mu}{R r^2} - \frac{\sqrt{\frac{1}{2} m \mu}}{r^2} \right\} dr = \frac{n' h}{4} \quad (44)$$

$$\int_0^\beta 2 m \alpha_1 \cdot r^2 \frac{dr}{R} - \int_0^\beta \frac{\alpha_2^2}{R} \frac{dr}{r^2} + \int_0^\beta \left(\frac{\frac{1}{2} m \mu}{R r^2} - \frac{\sqrt{\frac{1}{2} m \mu}}{r^2} \right) dr = \frac{n' h}{4}$$

Passen wij nu de transformatieformules (41) t/m (43) toe, dan vinden we voor de drie integralen in het eerste lid van (44) achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} a) \int_0^\beta 2 m \alpha_1 \cdot r^2 \frac{dr}{R} &= 2 m \alpha_1 \cdot \frac{1}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} \int_0^{\pi/2} \beta^2 \sin^2 \phi \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\ &= \sqrt{2 m \alpha_1} \frac{\beta^2}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \sqrt{2 m \alpha_1} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot \frac{1}{k^2} (K - E) = \\ &= \alpha \sqrt{2 m \alpha_1} (K - E) \end{aligned}$$

Hierin is:

$$K \equiv \text{complete integraal van de 1e soort} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\Delta \phi}; \quad E \equiv \text{com-}$$

$$\text{plete integraal van de 2e soort} = \int_0^{\pi/2} \Delta \phi \, d\phi$$

waarin:

$$\Delta \phi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}$$

$$\begin{aligned} b) \int_0^\beta \frac{\alpha_2^2}{R} \frac{dr}{r^2} &= \alpha_2^2 \frac{1}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} K \\ &= \frac{\alpha_2^2}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} K. \end{aligned}$$

$$c) \int_0^\beta \frac{\frac{1}{2} m \mu - \sqrt{\frac{1}{2} m \mu} \cdot \sqrt{2 m \alpha_1} \cdot \sqrt{(r^2 - \alpha^2)(r^2 - \beta^2)}}{r^2} \frac{dr}{R} =$$

$$= \sqrt{1/2 m \mu} \cdot \frac{1}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi \sqrt{1/2 m \mu} - \sqrt{2 m \alpha_1} \cdot \alpha \beta \sqrt{(1 - \sin^2 \phi)(1 - k^2 \sin^2 \phi)}}{\beta^2 \sin^2 \phi}$$

$$= \sqrt{1/2 m \mu} \cdot \frac{1}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1/2 m \mu} - \sqrt{2 m \alpha_1} \cdot \alpha \beta \cos \phi \cdot \Delta \phi}{\beta^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi}$$

De integrand dezer integraal wordt oneindig aan de onderste grens, echter tot zoodanige orde, dat de integraal toch convergent is. Om haar waarde te bepalen, trachten wij de limiet te vinden, waartoe

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1/2 m \mu} - \sqrt{2 m \alpha_1} \cdot \alpha \beta \cos \phi \cdot \Delta \phi}{\beta^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi}$$

nadert voor $\varepsilon \rightarrow 0$.

Deze laatste integraal is als volgt te schrijven:

$$\sqrt{1/2 m \mu} \cdot \frac{1}{\beta^2} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{d\phi}{\Delta \phi} - \sqrt{2 m \alpha_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{d \sin \phi}{\sin^2 \phi} =$$

$$= \sqrt{1/2 m \mu} \cdot \frac{1}{\beta^2} [\operatorname{ctg} \varepsilon \cdot \Delta \varepsilon + K - E - F(\varepsilon) + E_1(\varepsilon)] +$$

$$+ \sqrt{2 m \alpha_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta} (1 - \operatorname{cosec} \varepsilon)$$

$$\text{Hierin is: } F(\varepsilon) \equiv F(\varepsilon, k) = \int_0^{\varepsilon} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

$$E_1(\varepsilon) \equiv E_1(\varepsilon, k) = \int_0^{\varepsilon} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \cdot d\phi$$

zoodat dus in onze notatie geldt:

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}\right); E = E_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Uit bovenstaande volgt nu:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} f(\sin \phi) \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sqrt{1/2 m \mu} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \{ \operatorname{ctg} \varepsilon \cdot \Delta \varepsilon + K - E - F(\varepsilon) + E_1(\varepsilon) \} + \sqrt{2 m \alpha_1} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \right.$$

$$\left. (1 - \operatorname{cosec} \varepsilon) \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} m \mu \frac{1}{\beta^2} (K - E)} + \sqrt{2 m \alpha_1 \cdot \frac{\alpha}{\beta}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{2} m \mu \cdot \frac{1}{\beta^2}} \cdot \operatorname{ctg} \varepsilon \cdot \Delta \varepsilon - \sqrt{2 m \alpha_1 \cdot \frac{\alpha}{\beta}} \operatorname{cosec} \varepsilon \right)$$

Deze laatste limiet is nul, zoodat:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} f(\sin \phi) \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \sqrt{\frac{1}{2} m \mu \cdot \frac{1}{\beta^2} (K - E)} + \sqrt{2 m \alpha_1 \cdot \frac{\alpha}{\beta}}$$

In verband met het voorgaande volgt hieruit:

$$\int_0^\beta \left(\frac{\frac{1}{2} m \mu}{R r^2} - \frac{\sqrt{\frac{1}{2} m \mu}}{r^2} \right) dr = \frac{m \mu}{2} \cdot \frac{K - E}{\alpha \beta^2 \sqrt{2 m \alpha_1}} + \sqrt{\frac{m \mu}{2}} \cdot \frac{1}{\beta}$$

De uitkomsten, onder a), b), c) gevonden, in (44) gesubstitueerd, voeren tot de betrekking:

$$\alpha \sqrt{2 m \alpha_1} (K - E) - \frac{\alpha_2^2}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} K + \frac{m \mu}{2} \cdot \frac{K - E}{\alpha \beta^2 \sqrt{2 m \alpha_1}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} m \mu}}{\beta} = \frac{n' h}{4} \quad (45)$$

Deze formule levert, daar volgens (38) $\alpha_2 = \frac{n h}{2 \pi}$ is, dus een verband tusschen α_1 , n en n' . Zijn n en n' gegeven, dan kunnen wij met behulp van (45) de daarbij behorende energie α_1 berekenen.

De moeilijkheid, waarop wij echter bij de praktische uitvoering stuiten, is gelegen in het feit, dat de wortels α en β van $R^2 = 0$, welke in (45) voorkomen, niet alleen afhankelijk zijn van α_2 , maar ook van α_1 [zie vergl. (17) in 2.322]. Drukken wij deze wortels in α_2 en α_1 uit en substitueeren wij deze waarden in (45), dan bekomen wij een zeer ingewikkelde vergelijking, waarmede niets is aan te vangen.

Wij moeten dus trachten door een kunstgreep tot het verlangde resultaat te komen.

Te dien einde stellen wij als in 2.322:

$$\alpha_1 = \eta \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu} \quad (46)$$

waarin: $0 \leq \eta \leq 1$.

De vergelijkingen (17) geven ons dan:

$$\alpha = \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-\eta}}{\eta}}; \beta = \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1-\eta}}{\eta}} \quad (47)$$

Deze waarden, in (42) gesubstitueerd, leveren de volgende waarde van k :

$$k = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1-\eta}}{1 + \sqrt{1-\eta}}} \quad (48)$$

Wij voeren vervolgens een nieuwe grootheid η_1 in door te stellen:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1-\eta}} = \eta_1 \quad (49)$$

Na eenige herleidingen verkrijgen wij dan:

$$\eta = \eta_1^2 (2 - \eta_1^2); k^2 = \frac{2 - \eta_1^2}{\eta_1^2} \quad (50)$$

Substitutie van (46) en (47) in (45) brengt deze laatste betrekking in den vorm:

$$\eta \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-\eta}}{\eta}} \cdot (K - E) - \sqrt{\frac{\eta}{1 + \sqrt{1-\eta}}} K + \\ + \frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-\eta}}{\eta}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{n'}{n} \sqrt{\eta}$$

Deeling door $\sqrt{\eta}$ geeft ons dan verder:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1-\eta}} \cdot (K - E) - \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1-\eta}}} K + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1-\eta}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{n'}{n}$$

Door hierin (49) te substitueeren, krijgt men ten slotte:

$$\eta_1 (K - E) - \frac{1}{\eta_1} K + \frac{1}{2} \eta_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{n'}{n} \quad (51)$$

Men kan nu verder als volgt te werk gaan: $\frac{2K}{\pi}$ en $\frac{2E}{\pi}$ worden in een reeks naar machten van k^2 ontwikkeld. Dit geeft:

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots \\ \frac{2E}{\pi} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} + \dots \quad (52)$$

Nu ligt η in het interval (0,1), volgens (48) ligt dus ook k in dit interval. Nemen wij de grensgevallen $\eta = 0$, $\eta = 1$ in onze beschouwing op. dan zal voor $k = 1$ de eerste reeks van (52) divergeeren. Breken wij bijgevolg deze reeks b.v. bij den 4^{en} term af, dan zal voor waarden van k , welke dicht bij 1 gelegen zijn, de gemaakte fout te groot worden, zoodat we deze methode alleen kunnen toepassen voor waarden van k , die voldoende ver van 1 verwijderd zijn.

Wij substitueeren nu de waarde van k^2 uit (50) in (52) en vinden dan ten slotte voor (51):

$$-28,5 \eta_1^8 - 181 \frac{n'}{n} \eta_1^7 + 41 \eta_1^6 - 302 \eta_1^4 + 396 \eta_1^2 - 200 = 0 \quad (53)$$

Volgens (49) ligt η_1 in het interval ($\sqrt{2}$, 1); nemen wij dus voor η_1 verschillende waarden in dit interval, dan geeft vergelijking (53) de bijbehorende waarden van de verhouding $\frac{n'}{n}$ en (50) de overeenkomstige waarden van η .

Wij kunnen nu een tabel construeeren, waarin voor het argument η de verhouding $\frac{n'}{n}$ gevonden kan worden. Onder deze waarden van $\frac{n'}{n}$ zoeken wij naar de echte breuken en interpoleeren in de tabel om de bij deze breuken behorende waarden van η en dus van α_1 te vinden. Daarna kunnen wij in een tabel de waarden van de energie α_1 vastleggen, die bij bepaalde quantengetallen (n, n') behooren.

Daar wij ten slotte toch tot interpolatie in een tabel moeten overgaan, kunnen wij de berekening eenvoudiger als volgt verrichten:

Met $k = \sin \theta$ als argument kunnen wij in de tafels ¹⁾ de waarden van K en E opzoeken, terwijl de waarden van η_1 , die bij deze waarden van k behooren, gegeven worden door vergelijking (50).

$$\text{Herleiding geeft: } \eta_1 = \sqrt{\frac{2}{1+k^2}} \quad (54)$$

De waarden van η , die met de verschillende waarden van η_1

¹⁾ b.v. Tafels van JAHNKE-EMDE.

overeenkomen, worden gevonden met behulp van (50):

$$\eta = \eta_1^2 (2 - \eta_1^2).$$

De volgende tabel geeft het resultaat dezer berekening aan:

$\eta_1 =$	1,0000	1,0001	1,0003	1,0007	1,0012	1,0019
$\frac{n'}{n} =$	— 0,451	— 0,451	— 0,450	— 0,450	— 0,450	— 0,449
$\eta =$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\eta_1 =$	1,0027	1,0037	1,0048	1,0062	1,0076	
$\frac{n'}{n} =$	— 0,449	— 0,449	— 0,448	— 0,448	— 0,447	
$\eta =$	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	
$\eta_1 =$	1,012	1,017	1,024	1,031	1,048	1,069
$\frac{n'}{n} =$	— 0,447	— 0,445	— 0,443	— 0,438	— 0,432	— 0,426
$\eta =$	0,9994	0,9988	0,9978	0,9962	0,9904	0,9796
$\eta_1 =$	1,094	1,122	1,155	1,190	1,226	1,265
$\frac{n'}{n} =$	— 0,421	— 0,415	— 0,405	— 0,396	— 0,390	— 0,383
$\eta =$	0,9611	0,9321	0,8889	0,8278	0,7560	0,6400
$\eta_1 =$	1,303	1,338	1,369	1,394	1,409	1,414
$\frac{n'}{n} =$	— 0,376	— 0,372	— 0,368	— 0,366	— 0,365	— 0,363
$\eta =$	0,5142	0,3648	0,2361	0,1108	0,0298	0

Hieruit blijkt, dat de waarde van $\frac{n'}{n}$ moet liggen tusschen $-0,451$ en $-0,363$, d. w. z. de waarden van de echte breuken, die de verhouding $\frac{n'}{n}$ weergeven, moeten liggen tusschen deze beide grenzen.

Onderstaande tabel geeft die waarden weer:

$$-\frac{n'}{n} = \frac{2}{5}, \frac{3}{7} \text{ t/m } \frac{3}{8}, \frac{4}{9} \text{ t/m } \frac{4}{11}, \frac{5}{12} \text{ t/m } \frac{5}{13}, \frac{6}{14} \text{ t/m } \frac{6}{16}, \frac{7}{16} \text{ t/m } \frac{7}{19}, \\ \frac{8}{18} \text{ t/m } \frac{8}{22}, \frac{9}{20} \text{ t/m } \frac{9}{24}, \frac{10}{23} \text{ t/m } \frac{10}{27}, \frac{11}{25} \text{ t/m } \frac{11}{30}, \frac{12}{27} \text{ t/m } \frac{12}{33} \text{ enz.}$$

Alvorens nu over te gaan tot de numerieke bepaling van de energie, willen wij eerst onderzoeken tot welke vergelijkingen het tweede geval van 3.21 voert en tot welke uitkomst de integratie van (37b) voor banen van het type II leidt.

3.212 Geval Ib [zie 3.21].

Stellen wij in dit geval $\alpha_1 = -\alpha'_1$, zoodat dus α'_1 steeds grooter dan nul is, zoo is:

$$R^2 = -2m\alpha'_1 \cdot r^4 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{1}{2} m \mu = -2m\alpha'_1 (r - \beta)(r - \gamma) \cdot [(r - \mu)^2 + \nu^2]$$

Noemen wij vervolgens $-2m\alpha'_1 = A$ en $(r - \beta)(r - \gamma) \cdot [(r - \mu)^2 + \nu^2] = R'^2$, dan geldt:

$$\frac{dr}{R} = \frac{dr}{\sqrt{A R'^2}} \quad (55)$$

Ten einde de integraal (37a) in dit geval tot den normaalvorm terug te brengen, zijn de volgende transformatieformules op te stellen:

$$\frac{r - \beta}{r - \gamma} = - \sqrt{\frac{(\beta - \mu)^2 + \nu^2}{(\gamma - \mu)^2 + \nu^2}} \cdot \frac{1 - z}{1 + z}$$

$$\frac{2\lambda}{(1 + \lambda^2)\nu(\beta - \gamma)} = - \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$k^2 = \frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{A(r - \beta)(r - \gamma)[(r - \mu)^2 + \nu^2]}} = + \sqrt{\frac{2\lambda}{A(1 + \lambda^2)\nu(\beta - \gamma)}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

waarin:

$$z = \cos \phi; \quad \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} = k^2$$

terwijl u en v bepaald worden uit:

$$\begin{aligned} (\beta - \mu)(\gamma - \mu) + \nu^2 &= u \\ \nu(\beta - \gamma) &= v \end{aligned}$$

Aan de waarden van r : β, γ moeten hierbij worden toegevoegd die van z : $+1, -1$.

De wortels van $R^2 = 0$ zijn in het nu beschouwde geval [zie 2.34 vergl. 28 en 29]

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1+\eta-1}{\eta}} = -\gamma \\ \mu \pm i\nu &= \pm \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1+\eta+1}{\eta}} \cdot i \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\text{Hieruit volgt: } \mu = 0, \nu = \frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1+\eta+1}{\eta}}$$

Nemen we deze waarden in aanmerking, dan gaan bgn. transformatieformules over in:

$$r = \beta \cos \phi \quad (57)$$

$$k^2 = \frac{\beta^2}{\nu^2 + \beta^2} \quad (58)$$

$$\frac{dr}{\sqrt{A R'^2}} = + \sqrt{-\frac{1}{A(\nu^2 + \beta^2)}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \quad (59)$$

Volgens (57) correspondeert met $r = \beta$ de waarde $\phi = 0$ en met $r = 0$ de waarde $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

Eenzelfde herleiding als in 3.211 voert de integraal (37a) over in:

$$2 m \alpha_1 \int_0^\beta \frac{dr}{r^2 R} - \alpha_2^2 \int_0^\beta \frac{dr}{R} + \int_0^\beta \left(\frac{1/2 m \mu}{R r^2} - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{r^2} \right) dr = \frac{n' h}{4} \quad (60)$$

Toepassing van de transformatieformules (57) tot en met (59) geeft ons achtereenvolgens voor de drie integralen in het eerste lid van (60):

$$\begin{aligned}
 a) \quad 2 m \alpha_1 \int_0^\beta r^2 \frac{dr}{R} &= 2 m \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{2 m \alpha_1'} \cdot \sqrt{\nu^2 + \beta^2}} \int_{-\pi/2}^0 \beta^2 \cos^2 \phi \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\
 &= -2 m \alpha_1' \cdot \frac{\beta^2}{\sqrt{\nu^2 + \beta^2}} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = -\sqrt{2 m \alpha_1'} \cdot \frac{\beta^2}{\sqrt{\nu^2 + \beta^2}} \cdot \frac{-k'^2 K + E}{k^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad -\alpha_2^2 \int_0^\beta \frac{dr}{R} &= -\alpha_2^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 m \alpha_1'} \cdot \sqrt{\nu^2 + \beta^2}} \int_{-\pi/2}^0 \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\
 &= -\frac{\alpha_2^2}{\sqrt{2 m \alpha_1'} \cdot \sqrt{\nu^2 + \beta^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \frac{-\alpha_2^2}{\sqrt{2 m \alpha_1'} \cdot \sqrt{\nu^2 + \beta^2}} K.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad &\int_0^\beta \left(\frac{1/2 m \mu}{R r^2} - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{r^2} \right) dr = \\
 &= \int_0^\beta \frac{1/2 m \mu - \sqrt{1/2 m \mu} \cdot \sqrt{-2 m \alpha_1'} \cdot \sqrt{(r^2 - \beta^2)(r^2 + \nu^2)}}{R r^2} dr = \\
 &= \sqrt{\frac{m \mu}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 m \alpha_1'} \cdot \sqrt{\nu^2 + \beta^2}} \times \\
 &\times \int_{-\pi/2}^0 \frac{d\phi}{\Delta \phi} \cdot \frac{\sqrt{\frac{m \mu}{2} - \sqrt{-2 m \alpha_1'} \cdot \sqrt{(\beta^2 \cos^2 \phi - \beta^2)(\beta^2 \cos^2 \phi + \nu^2)}}}{\beta^2 \cos^2 \phi} = \\
 &= -\sqrt{\frac{m \mu}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 m \alpha_1'} \cdot \sqrt{\nu^2 + \beta^2}} \times \\
 &\times \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{-2 m \alpha_1'} \cdot \beta \sqrt{-\sin^2 \phi (\beta^2 + \nu^2 - \beta^2 \sin^2 \phi)} - \sqrt{\frac{m \mu}{2}}}{\beta^2 \cos^2 \phi} \frac{d\phi}{\Delta \phi}
 \end{aligned}$$

Daar de integrand aan de bovenste grens oneindig wordt, beschouwen wij eerst de waarde der integraal, wanneer de bovenste grens ε is. Door daarna ε tot $\frac{\pi}{2}$ te laten naderen, vinden wij de waarde der gevraagde integraal.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\varepsilon \frac{\sqrt{2m\alpha_1'} \cdot \beta \sin \phi \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\beta^2 + \gamma^2} \sin^2 \phi} - \sqrt{\frac{m\mu}{2}}}{\beta^2 \cos^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\
 &= \int_0^\varepsilon \sqrt{2m\alpha_1'} \cdot \frac{\sin \phi \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\beta \cos^2 \phi} \cdot d\phi - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{\beta^2} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\cos^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\
 &= -\sqrt{2m\alpha_1'} \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\beta} \int_0^\varepsilon \frac{d \cos \phi}{\cos^2 \phi} - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{\beta^2} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\cos^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\
 &= \sqrt{2m\alpha_1'} \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\beta} (\sec \varepsilon - 1) - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{\beta^2} \left(\frac{1}{k'^2} \operatorname{tg} \varepsilon \cdot \Delta \varepsilon + F(\varepsilon) - \frac{1}{k'^2} E_1(\varepsilon) \right) = \\
 &= \left(\sqrt{2m\alpha_1'} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\beta} \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon} - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{\beta^2} \cdot \frac{1}{k'^2} \operatorname{tg} \varepsilon \Delta \varepsilon \right) - \\
 &- \sqrt{2m\alpha_1'} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\beta} - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{\beta^2} \left(F(\varepsilon) - \frac{1}{k'^2} E_1(\varepsilon) \right)
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^\varepsilon f(\phi) \frac{d\phi}{\Delta \phi} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\beta k'^2 \sqrt{2m\alpha_1'} \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - \sqrt{\frac{m\mu}{2}} \sin \varepsilon \Delta \varepsilon}{\beta^2 k'^2 \cos \varepsilon} \right) \\
 &- \sqrt{2m\alpha_1'} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\beta} - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{\beta^2} \left(K - \frac{1}{k'^2} E \right)
 \end{aligned}$$

Een korte berekening leert ons, dat de limiet in den eersten term van het tweede lid nul is, zoodat dus:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^\varepsilon f(\phi) \frac{d\phi}{\Delta \phi} = -\sqrt{2m\alpha_1'} \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\beta} - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{\beta^2} \left(K - \frac{1}{k'^2} E \right)$$

Ten slotte vinden wij:

$$\int_0^\beta \left(\frac{1/2 m \mu}{R r^2} - \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{r^2} \right) dr = \frac{\sqrt{m \mu}}{2} + \frac{m \mu}{2 \beta \sqrt{2 m \alpha_1'} \sqrt{\nu^2 + \beta^2}} \left(K - \frac{1}{k'^2} E \right)$$

Substitueeren wij de uitkomsten, in a), b), c) gevonden, in (60), dan bereiken wij als resultaat de volgende betrekking, die het verband aangeeft tusschen α_1 , n en n' :

$$- \sqrt{\nu^2 + \beta^2} \sqrt{2 m \alpha_1'} (-k'^2 K + E) - \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{\nu^2 + \beta^2} \sqrt{2 m \alpha_1'}} K + \frac{\sqrt{1/2 m \mu}}{\beta} + \frac{m \mu}{2 \sqrt{\nu^2 + \beta^2} \cdot \beta \sqrt{2 m \alpha_1'}} \left(K - \frac{1}{k'^2} E \right) = \frac{n' h}{4} \quad (61)$$

Ten einde deze betrekking in eenvoudiger gedaante te brengen, voeren wij in:

$$\alpha_1' = \eta \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu} \quad (62)$$

waarin: $\eta > 0$

Deze waarde in (56) gesubstitueerd, levert ons:

$$\beta = \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta}-1}{\eta}}; \nu = \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta}+1}{\eta}}$$

$$\text{Bijgevolg: } \nu^2 + \beta^2 = \frac{m \mu}{\alpha_2^2} \left(\frac{\sqrt{1+\eta}+1}{\eta} + \frac{\sqrt{1+\eta}-1}{\eta} \right) = 2 \frac{m \mu}{\alpha_2^2} \cdot \frac{\sqrt{1+\eta}}{\eta}$$

Substitueeren wij deze waarden in (58) dan vinden wij:

$$k^2 = \frac{\sqrt{1+\eta}-1}{2 \sqrt{1+\eta}} \text{ en hieruit: } k'^2 = \frac{\sqrt{1+\eta}+1}{2 \sqrt{1+\eta}} \quad (63)$$

Ligt dus η in het interval $(0, \infty)$, dan ligt k in het interval $(0, 1/2 \sqrt{2})$ en k' in $(1, 1/2 \sqrt{2})$.

Door substitutie dezer waarden in (61) vindt men:

$$2 \sqrt{1+\eta} K - 4 \sqrt{1+\eta} E + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{1+\eta}+1} = \pi \cdot \frac{n'}{n} \quad (64)$$

Wij kunnen nu weer evenals in 3.211 voor verschillende waarden van η de bijbehorende waarden van $\frac{n'}{n}$ en daarmee voor verschillende quantentoestanden (n', n) de energie berekenen.

De berekening geeft:

$\eta =$	0	0,013	0,046	0,107	0,201	0,333	0,528	0,813
$\frac{n'}{n} =$	-0,363	-0,363	-0,363	-0,362	-0,361	-0,359	-0,357	-0,354
$\eta =$	1,235	1,911	3,000	5,091	9,473	22,115	90,398	204,27
$\frac{n'}{n} =$	-0,351	-0,349	-0,345	-0,344	-0,339	-0,350	-0,357	-0,431
$\eta =$	824,74							
$\frac{n'}{n} =$	-0,546							

3.22 Berekening der quantenconditie (37b). Banen van het type II.

Uit [2.36] volgt, dat deze banen doorlopen worden in het geval:

$$\alpha_1 < \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu} \quad \alpha_1 > 0 \quad r_{\min} = \alpha$$

Stellen wij weder $\alpha_1 = \eta \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu}$, dan treedt het grensgeval op voor $\eta = 1$.

De vergelijking $R^2 = 0$ heeft in dit geval [zie 2.322] vier reële wortels: $\alpha = -\delta$, $\beta = -\gamma$, waarbij $\alpha > \beta > \gamma > \delta$.

Stellen we weder:

$$2 m \alpha_1 = A; (r - \alpha)(r - \beta)(r - \gamma)(r - \delta) = R'^2,$$

$$\text{dan geldt: } \frac{dr}{R} = \frac{dr}{\sqrt{A R'^2}}$$

Om nu de integraal (37b) op den normaalvorm te brengen, kunnen we gebruik maken van de volgende transformatieformules:

$$\frac{r - \delta}{r - \alpha} = + \sqrt{\frac{(\delta - \gamma)(\delta - \beta)}{(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta)}} \cdot \frac{1 - z}{1 + z}$$

$$\frac{1-k}{1+k} = + \sqrt{\frac{(\delta - \gamma)(\alpha - \beta)}{(\delta - \beta)(\alpha - \gamma)}}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{AR'^2}} = + \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{A(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

waarbij aan de waarden van $r : \gamma, \delta, \alpha, \beta$ zijn toegevoegd die van $z : \frac{1}{k}, +1, -1, -\frac{1}{k}$.

Door $z = \sin \phi$ te stellen en in aanmerking te nemen, dat in dit geval $\alpha = -\delta, \beta = -\gamma$ geldt, gaan bovenstaande transformatieformules over in:

$$r = -\frac{\alpha}{\sin \phi} \quad (65)$$

$$k = \frac{\beta}{\alpha} \quad (66)$$

$$\frac{dr}{\sqrt{AR'^2}} = \frac{1}{\alpha \sqrt{2m\alpha_1}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \quad (67)$$

Uit (65) volgt, dat met de waarden van $r = \alpha, \infty$ respectievelijk corresponderen de waarden van $\phi = -\frac{\pi}{2}, 0$.

De integraal (37b) laat zich nu als volgt schrijven:

$$\int_a^\infty dr \left[\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} \cdot \frac{m\mu}{2r^4} - \sqrt{2m\alpha_1} \right] = \frac{n'h}{4}$$

Na eenige herleiding krijgen wij:

$$\int_a^\infty \frac{2m\alpha_1 \cdot r^2 - \sqrt{2m\alpha_1} \cdot R}{R} dr - \int_a^\infty \alpha_2^2 \frac{dr}{R} + \frac{m\mu}{2} \int_a^\infty \frac{1}{r^2} \frac{dr}{R} = \frac{n'h}{4} \quad (68)$$

Passen wij nu de transformatieformules (65) t/m (67) toe, dan wordt achtereenvolgens voor de drie integralen in het eerste lid van (68) gevonden:

$$\begin{aligned} a) \int_a^\infty \frac{2m\alpha_1 \cdot r^2 - 2m\alpha_1 \sqrt{(r^2 - \alpha^2)(r^2 - \beta^2)}}{R} dr = \\ = 2m\alpha_1 \int_a^\infty [r^2 - \sqrt{(r^2 - \alpha^2)(r^2 - \beta^2)}] \frac{dr}{R} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 m \alpha_1 \cdot \frac{1}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\frac{\alpha^2}{\sin^2 \phi} - \sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{\sin^2 \phi} - \alpha^2 \right) \left(\frac{\alpha^2}{\sin^2 \phi} - \beta^2 \right)} \right] \frac{d \phi}{\Delta \phi} = \\
&= \alpha \sqrt{2 m \alpha_1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left[\frac{1}{\sin^2 \phi} - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \phi}{\sin^2 \phi} \cdot \frac{1 - k^2 \sin^2 \phi}{\sin^2 \phi}} \right] \frac{d \phi}{\Delta \phi} = \\
&= + \alpha \sqrt{2 m \alpha_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos \phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}{\sin^2 \phi} \cdot \frac{d \phi}{\Delta \phi}
\end{aligned}$$

Daar de integrand aan de onderste grens oneindig wordt, maar met zoodanige orde, dat de integraal convergeert, zoo bepalen wij de waarde ervan door van $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} F(\sin \phi) \frac{d \phi}{\Delta \phi}$ de limiet te bepalen voor $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos \phi \Delta \phi}{\sin^2 \phi} \cdot \frac{d \phi}{\Delta \phi} = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 \phi} \cdot \frac{d \phi}{\Delta \phi} - \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \phi}{\sin^2 \phi} d \phi = \\
&= \operatorname{ctg} \varepsilon \cdot \Delta \varepsilon + K - E - F(\varepsilon) + E_1(\varepsilon) + 1 - \operatorname{cosec} \varepsilon
\end{aligned}$$

Bijgevolg:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos \phi \cdot \Delta \phi}{\sin^2 \phi} \cdot \frac{d \phi}{\Delta \phi} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos \varepsilon \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varepsilon} - 1}{\sin \varepsilon} + \\
&+ K - E + 1.
\end{aligned}$$

Daar de limiet in het tweede lid nul is, zoo vinden wij:

$$\int_a^{\infty} \frac{2 m \alpha_1 \cdot r^2 - 2 m \alpha_1 \sqrt{(r^2 - \alpha^2)(r^2 - \beta^2)}}{R} dr = \alpha \sqrt{2 m \alpha_1} (K - E + 1)$$

$$\begin{aligned}
b) - \int_a^{\infty} \frac{\alpha_2^2}{R} &= - \frac{\alpha_2^2}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d \phi}{\Delta \phi} = - \frac{\alpha_2^2}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \phi}{\Delta \phi} = \\
&= - \frac{\alpha_2^2}{\alpha \sqrt{2 m \alpha_1}} K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \frac{m\mu}{2} \int_a^\infty \frac{1}{r^2 R} dr &= \frac{m\mu}{2} \cdot \frac{1}{\alpha \sqrt{2m\alpha_1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^2 \phi}{\alpha^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta\phi} = \\
 &= \frac{m\mu}{2} \cdot \frac{1}{\alpha^3 \sqrt{2m\alpha_1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi \cdot \frac{d\phi}{\Delta\phi} = \frac{m\mu}{2} \cdot \frac{1}{\alpha^3 \sqrt{2m\alpha_1}} \cdot \frac{1}{k^2} (K - E) = \\
 &= \frac{m\mu}{2} \cdot \frac{1}{\alpha \beta^2 \sqrt{2m\alpha_1}} (K - E)
 \end{aligned}$$

Substitueeren wij de waarden in a), b), c) gevonden in (68), dan krijgen wij de betrekking:

$$\alpha \sqrt{2m\alpha_1} (K - E + 1) - \frac{\alpha_2^2}{\alpha \sqrt{2m\alpha_1}} K + \frac{m\mu}{2} \cdot \frac{1}{\alpha \beta^2 \sqrt{2m\alpha_1}} (K - E) = \frac{n'h}{4} \quad (69)$$

Zijn nu n en n' gegeven, dan kunnen wij met betrekking (69) de bij deze getallen behoorende energie α_1 berekenen.

Substitutie van $\alpha_1 = \eta \frac{\alpha_2^4}{4m^2\mu}$ en $\alpha_2 = \frac{nh}{2\pi}$ in (69) levert ons dan een vergelijking in η en $\frac{n'}{n}$. Bij elke waarde van η kunnen wij de overeenkomstige waarde van $\frac{n'}{n}$ bepalen.

Het resultaat dezer substituties wordt:

$$\eta_1 (K - E) - \frac{1}{\eta_1} K + \frac{1}{2} \eta_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n'}{2n}} \quad (70)$$

waarin:

$$\eta_1 = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \eta}} \quad (71)$$

Vergelijken wij deze formules met (51), resp. (49) van 3.211, dan zien wij, dat zij volkomen identiek zijn.

Nu gelden de formules (49) en (51) voor banen tusschen den kern en een maximum afstand, terwijl (70) en (71) gelden voor banen tusschen het oneindige en een minimumafstand. In beide gevallen is de functie R^2 volkomen dezelfde, zoodat ook de wortels α , β , γ , δ van $R_2 = 0$ identiek zijn. In het eerste geval geeft de wortel β den maximumafstand, terwijl de minimumafstand in het tweede geval door den wortel α

gegeven wordt. De betrekkingen, welke het verband aangeven tusschen η en $\frac{n'}{n}$ zijn identiek; dit pleit er voor, dat wij de juiste keuze der aanvangswaarden van $\bar{p}_r$ in beide gevallen gedaan hebben.

De tabel in 3.211, die de waarden van $\frac{n'}{n}$ voor verschillende waarden van η geeft, kan dus ook voor dit geval gebruikt worden.

3.23 Numerieke beschouwingen.

In het voorgaande is de energie gegeven als functie van η en het azimuthale quantengetal n . Daar echter bij een bepaalde waarde van η een volkomen bepaalde waarde van $\frac{n'}{n}$ behoort, zoo is dus ook hier de energie bepaald als functie van n en n' . Het was ons niet mogelijk de energie onmiddellijk als functie van n en n' uit te drukken, daar de elliptische functies tot een vergelijking aanleiding gaven, waarvan de oplossing niet in eenvoudigen vorm te geven is.

Ten einde nu na te gaan, tot welke numerieke resultaten voorgaande beschouwingen aanleiding geven, zullen wij beginnen met de energie als functie van Nh te berekenen, waarin N de RIJDBERG'sche constante voorstelt.

In de formules (46) en (52) is α_1 als volgt gegeven:

$$\alpha_1 = \eta \frac{\alpha_2^4}{4 m^2 \mu} \quad (72)$$

waarin:

$$\alpha_2 = \frac{n h}{2 \pi} \text{ en } \mu = 2 e^2 a^3 \quad (73)$$

Wij nemen nu voor a den straal van de baan, welke het electron van het atoom in zijn eersten quantentoestand beschrijft en noemen dezen a_1 .

Invoering van (73) in (72) levert ons dan:

$$\alpha_1 = \eta \frac{n^4 h^4}{16 \pi^4} \cdot \frac{1}{8 m^2 e^2 a_1^3},$$

waarin:

$$a_1 = \frac{h^2}{4 \pi^2 m e^2}$$

Na eenige herleiding vinden wij dan:

$$\alpha_1 = \eta \frac{n^4 \cdot \pi^2 m e^4}{2 h^2} = \eta n^4 \frac{h}{4} \cdot \frac{2 \pi^2 m e^4}{h^3}$$

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{4} n^4 \cdot N h \quad (74)$$

In het geval, dat α_1 positief is, worden de maximum- en minimumafstanden bij de banen van het eerste en tweede type [zie 2.322] resp.

$$\beta = \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \eta}}{\eta}}; \alpha = \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \eta}}{\eta}} \quad (75)$$

Wij voeren nu de volgende getallenwaarden in:

$$m = 8,8 \cdot 10^{-28} \text{ gr.}$$

$$h = 6,54 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ gr. sec}^{-1}$$

$$N = 329,211 \cdot 10^{13} \text{ sec}^{-1}$$

$$e = 4,77 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{3/2} \text{ gr}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$$

$$a_1 = 0,54 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

Uit (73) volgt, als wij van deze waarden gebruik maken:

$$\alpha_2 = n \frac{6,54 \cdot 10^{-27}}{2 \pi} = 1,041 \cdot 10^{-27} n \text{ cm}^2 \text{ gr sec}^{-1}$$

$$\mu = 2 e^2 a_1^3 = 2 \cdot 22,75 \cdot 10^{-20} \cdot 0,157 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^6 \text{ gr sec}^{-2}$$

$$\mu = 7,14 \cdot 10^{-44} \text{ cm}^6 \text{ gr sec}^{-2}; \text{ en dus:}$$

$$\frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} = \frac{\sqrt{8,8 \cdot 10^{-28} \cdot 7,14 \cdot 10^{-44}}}{1,041 \cdot 10^{-27} n} \cdot \frac{\text{cm}^3 \text{ gr sec}^{-1}}{\text{cm}^2 \text{ gr sec}^{-1}}$$

$$\frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2} = \frac{7,615}{n} \cdot 10^{-9} \text{ cm} \quad (76)$$

Laten wij η nu variëren van 0 naar 1, dan zal de waarde van de breuk $\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \eta}}{\eta}}$ liggen in het interval $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1)$

en die van de breuk $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \eta}}{\eta}}$ in het interval $(\infty, 1)$.

In verband met (75) volgt hieruit, dat de waarde van α ligt tusschen $\frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2}$ en ∞ , terwijl de waarde van β zich tusschen $\frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2}$ en $0,707 \frac{\sqrt{m \mu}}{\alpha_2}$ bevindt. Maken wij nu ge-

bruik van de waarde in (76) voor $\frac{\sqrt{m\mu}}{\alpha_2}$ gevonden, dan ligt dus α tussen $\frac{7,615}{n} \cdot 10^{-9}$ cm en ∞ , β tussen $\frac{7,615}{n} 10^{-9}$ cm en $\frac{5,384}{n} \cdot 10^{-9}$ cm.

Zooals wij uit de tabel in 3.211 kunnen aflezen, worden de asymptotische cirkels ($\gamma = 1$), die volgens de quantenvoorwaarden mogelijk zijn, verkregen, wanneer de verhouding $\frac{n'}{n}$ de waarde $\frac{9}{20}$ bezit. Laten wij alleen geheele quantengetallen toe, dan is de kleinste waarde, welke n bezitten kan, twintig, waaruit voor den straal van den asymptotischen cirkel volgens (75) zou volgen de waarde $0,38 \cdot 10^{-9}$ cm. Daar echter de straal van het neutrale waterstofatoom gelijk $0,54 \cdot 10^{-8}$ cm gesteld is, zoo zou dus deze asymptotische cirkel veel dichter bij den kern gelegen zijn. Hier geldt onze benadering echter niet meer, zoodat deze asymptotische cirkels volgens de quantentheorie niet bestaanbaar zijn.

Beschouwen wij vervolgens de energie van het electron, dat een baan van het type II doorloopt [zie 3.22]. Voeren wij de onderstelling in, dat ook bij deze niet periodieke bewegingen het azimuthale quantengetal n slechts met ± 1 kan veranderen, zoo kunnen wij met behulp der tabellen in 3.211 het energieverschil bepalen, dat bestaat tussen twee quantentoestanden, waarvan de bgn. voorwaarde voor de n vervuld is. Met behulp der BOHR'sche frequentievoorwaarde: $h\nu = \Delta\alpha_1$ kunnen wij dan de bijbehorende frequentie berekenen.

Beginbaan		Eindbaan		Begin- energie in Nh	Eind- energie in Nh	$\Delta\alpha_1$	ν in cm^{-1}
n	n	n'	n				
—	—	—	—	—	—	—	—
3	7	3	8	591	497	$94 Nh$	$10,3 \cdot 10^6$
4	9	3	8	1637	497	$1140 Nh$	$125,1 \cdot 10^6$
4	10	4	9	2252	1637	$615 Nh$	$67,5 \cdot 10^6$
4	10	4	11	2252	40	$2212 Nh$	$242,6 \cdot 10^6$
5	12	4	11	4883	40	$4843 Nh$	$531,3 \cdot 10^6$

Uit deze tabel blijkt, dat de energiesprongen van dezelfde orde van grootte zijn als de energieën der verschillende quantentoestanden. De grootte der energie in een bepaalden quantentoestand hangt af van n en van n' (n' als functie van n en n beschouwd). Ligt de verhouding $\frac{n'}{n}$ dicht bij de bovenste grens der toegelaten verhoudingen, d. i. — 0,363, dan wordt de energie in dien quantentoestand gering; zie b.v. in den tabel de toestand (4,11).

Zooals uit de tabel blijkt, liggen de waarden der frequentie ν in het gebied van de zachte Röntgenstraling.

3.31 Invloed van volgende termen in de ontwikkeling van de kracht, door het neutrale atoom op het vrije electron uitgeoefend.

In 2.22 vonden wij voor de grootte der kracht in eerste benadering de waarde $K = \frac{2e^2 a^3}{r^5}$. Zooals een korte berekening ons leert, is de volgende term evenredig met r^{-7} en heeft de grootte $-\frac{3e^2 a^5}{r^7}$, zoodat de potentieële energie wordt:

$$V = -\frac{e^2 a^3}{2 r^4} + \frac{e^2 a^5}{2 r^6} \quad (77)$$

De functie R^2 uit 2.31 wordt dan:

$$R^2 \equiv 2 m \alpha_1 \cdot r^6 - \alpha_2^2 r^4 + \frac{m \mu}{2} r^2 - \frac{m \nu}{3} \quad (78)$$

$$\text{waarin: } \mu = 2 e^2 a^3; \nu = \mu \cdot \frac{3}{2} a^2 \quad (79)$$

Uit de discussie van de betrekking (78) zal nu moeten blijken, of in dit geval periodieke bewegingen mogelijk zijn.

Wij stellen $r^2 = \rho$, dan geeft (78):

$$f(\rho) = 2 m \alpha_1 \rho^3 - \alpha_2^2 \rho^2 + \frac{m \mu}{2} \rho - \frac{m \nu}{3} \quad (80)$$

Van deze functie behoeven wij alleen maar het verloop na te gaan voor positieve waarden van ρ .

Uit (80) volgt:

$$f'(\rho) = 6 m \alpha_1 \cdot \rho^2 - 2 \alpha_2^2 \rho + \frac{m \mu}{2} \quad (81)$$

De wortels van $f'(\rho) = 0$ geven ons de waarden van ρ , die $f(\rho)$ tot een extreem maken. Deze wortels zijn:

$$\rho_m = \frac{\alpha_2^6}{6 m \alpha_1} \pm \sqrt{\frac{\alpha_2^4}{36 m^2 \alpha_1^2} - \frac{\mu}{12 \alpha_1}} \quad (82)$$

$$\text{Wij stellen ter vereenvoudiging: } \alpha_1 = \eta \frac{\alpha_2^4}{3 m^2 \mu} \quad (83)$$

Substitutie dezer waarde in (82) levert ons na eenige herleiding:

$$\rho_m = \frac{m \mu}{2 \alpha_2^2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 - \eta}}{\eta} \quad (84)$$

Wij kunnen nu verder twee gevallen onderscheiden:

1°. α_1 positief; d.w.z. $\eta > 0$

2°. α_1 negatief; $\eta < 0$

1°. α_1 positief.

Wij krijgen nu volgens (80) voor $\rho = 0$ $f(\rho) = -\frac{m\gamma}{3}$

voor $\rho = +\infty$ $f(\rho) = +\infty$

voor $\rho = -\infty$ $f(\rho) = -\infty$

Is nu $\eta < 1$, dan zijn beide waarden van ρ_m reëel en positief, terwijl voor $\eta > 1$ deze waarden complex zijn.

a) $\eta < 1$.

Noemen wij de kleinste der reële positieve waarden van de abscissen, waarvoor $f(\rho)$ een extreem wordt, ρ_{m1} en de grootste ρ_{m2} , dan is $f(\rho_{m1})$ een maximum en $f(\rho_{m2})$ een minimum. Graphisch zou de functie dan weergegeven kunnen worden op de wijze, zooals in fig. 9 is voorgesteld. De graphische

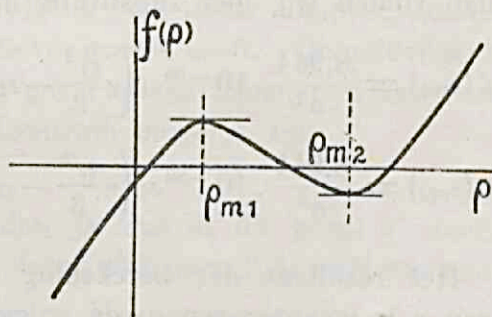


Fig. 9.

voorstelling van R^2 wordt dan in Fig. 10 weergegeven. Wij zien hieruit, dan er in dit geval twee baantypen mogelijk zijn:

- 1°. banen van het oneindige naar een pericentrum en terug naar het oneindige.
 2°. banen tusschen een maximum en minimum afstand.

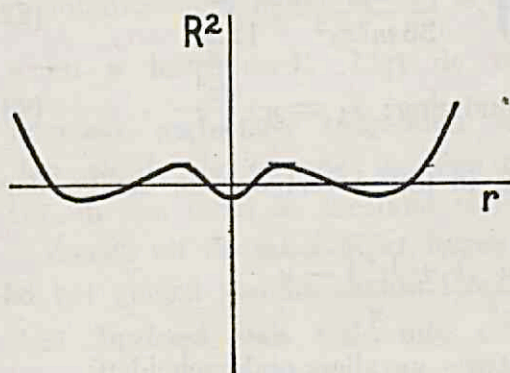


Fig. 10.

Het electron blijft dan steeds op eindigen afstand van het centrum en heeft een periodieke beweging.

Het laatste geval interesseert ons het meeste en wij willen nu onderzoeken, of het in ons probleem kan voorkomen.

Het eenvoudigste geschiedt dit door na te gaan, welke waarden de extremen $f(\rho_{m1})$ en $f(\rho_{m2})$ bezitten. Hiertoe maken wij gebruik van de getalwaarden, die in 3.23 zijn ingevoerd. Substitutie dezer waarden in (84) levert ons:

$$\rho_{m1} = 28,8 \cdot 10^{-18} \frac{1 - \sqrt{1 - \eta}}{\eta n^2}; \rho_{m2} = 28,8 \cdot 10^{-18} \frac{1 + \sqrt{1 - \eta}}{\eta n^2}$$

Stellen wij nu ter vereenvoudiging:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \eta}}{\eta} = \varepsilon_1 \quad \frac{1 + \sqrt{1 - \eta}}{\eta} = \varepsilon_2 \quad (85)$$

dan vinden wij door substitutie in (80) na eenige herleiding:

$$\left. \begin{aligned} f(\rho_{m1}) &= \frac{8,944}{n^2} \cdot 10^{-88} \varepsilon_1 \left(\eta \frac{\varepsilon_1^2}{3} - \varepsilon_1 + 1 \right) - 9,165 \cdot 10^{-88} \\ f(\rho_{m2}) &= \frac{8,944}{n^2} \cdot 10^{-88} \varepsilon_2 \left(\eta \frac{\varepsilon_2^2}{3} - \varepsilon_2 + 1 \right) - 9,165 \cdot 10^{-88} \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Het resultaat der berekening voor verschillende waarden van η is weergegeven in de volgende tabel.

Nemen wij aan, dat n alleen geheele waarden kan verkrijgen, dan is de kleinste waarde 1. Uit de tabel blijkt nu onmiddellijk, dat voor $n = 1$ $f(\rho_{m1})$ zoowel als $f(\rho_{m2})$ voor

η	ε_1	ε_2	$f(\rho_{m1})$ $+ 9,165.10^{-88}$	$f(\rho_{m2})$ $+ 9,165.10^{-88}$
1	1	1	$2,98.n^{-2} 10^{-88}$	$2,98.n^{-2} 10^{-88}$
0,9	0,76	1,46	2,81. " "	2,34. " "
0,8	0,69	1,81	2,72. " "	0,98. " "
0,7	0,65	2,21	2,59. " "	neg.
0,5	0,59	3,41	2,48. " "	"
0,01	0,50	199,50	2,24. " "	"

alle waarden van η negatief zijn, zoodat de vergelijking $f(\rho) = 0$ slechts één reële wortel ρ bezit; in verband met het voorgaande volgt hieruit, dat er alleen banen van het oneindige naar een pericentrum en terug naar het oneindige mogelijk zijn.

Geven wij daarentegen aan n ook waarden kleiner dan 1, dan blijkt uit de tabel, dat er altijd waardecombinaties van n en η' te vinden zijn, waarvoor $f(\rho_{m1})$ positief en $f(\rho_{m2})$ negatief wordt, zoodat ook de periodieke bewegingen mogelijk zijn. Onder de mechanisch mogelijke banen bevinden zich dus, wanneer wij den term met r^{-7} in de ontwikkeling van de kracht in aanmerking nemen, ook banen, welke tusschen een maximum en minimum waarde van r liggen. Onder deze banen komen er echter géén voor, die aan de quantenvoorwaarden voldoen.

b) $\eta > 1$.

De waarden ρ_m zijn volgens (84) beide complex, zoodat $f(\rho) = 0$ slechts één positieve wortel heeft. Onmiddellijk is nu in te zien, dat in dit geval alleen banen met twee oneindige takken en een pericentrum mogelijk zijn.

2°. α_1 negatief.

Stellen wij $\eta = -\eta'$, dan is dus in dit geval η' steeds grooter dan nul. Invoering dezer waarde in (84) geeft ons dan:

$$\rho_m = -\frac{m\mu}{2\alpha_2^2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 + \eta'}}{\eta'}$$

Uit (87) blijkt, dat een der waarden ρ_m steeds positief, de

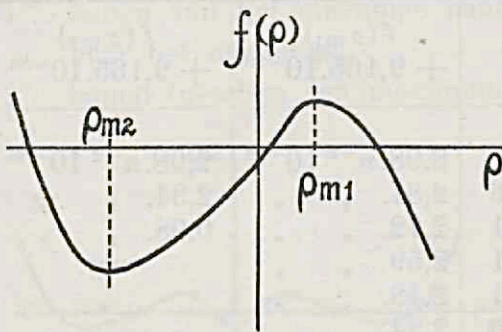


Fig. 11.

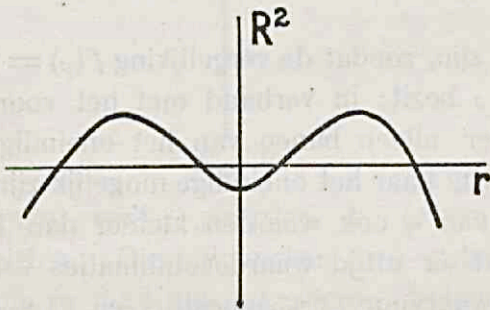


Fig. 12.

andere steeds negatief is. Nu behooren bij de waarden van $\rho = 0, +\infty, -\infty$, resp. de waarden van $f(\rho) = -\frac{m\nu}{3}, -\infty, +\infty$, zoodat het verloop van $f(\rho)$ graphisch als in fig. 11 voorgesteld kan worden.

Fig. 12 geeft dan het verloop der functie $R^2(r)$.

Hieruit blijkt, dat er periodieke bewegingen volgens de klassieke mechanica voor bepaalde waardecombinaties van η' en n mogelijk zijn. Stellen wij echter den eisch, dat n

alleen de waarden 1, 2, enz. kan aannemen, dan blijkt uit eenzelfde numerieke beschouwing als onder 1^o. a (3.31) gehouden is, dat er uit deze mechanisch mogelijke banen géén banen gekozen kunnen worden, die aan de quantenvoorwaarden voldoen.

Daar de experimenteele onderzoekingen van THOMSON en ASTON het bestaan van een negatief waterstofatoomion hebben aangetoond, zoo zal het dus mogelijk kunnen zijn, dat dit ion in niet gequantelden toestand voorkomt. ¹⁾

¹⁾ Zie hiervoor ook: BORN und FRANK, Zeitschr. für Phys. 31, 411 (1925).

4. DE BEWEGING VAN EEN ELECTRON T.O.V. HET GEÏONISEERDE HELIUMATOOM.

4.1 Bespreking der hypothese uit 2.1 voor dit geval; berekening van de potentieele energie van het buitenste electron t.o.v. het geïoniseerde Heliumatoom.

Het geïoniseerde Heliumatoom bestaat uit een kern met positieve lading $2e$, waaromheen zich een electron beweegt. Wij onderstellen, dat dit electron zich in de eenquantige baan bevindt en stellen den straal dezer baan gelijk a . Wij zullen t.o.v. dit systeem de beweging van een electron onderzoeken. Het probleem is feitelijk weder een drielichamenvraagstuk waarvan wij de oplossing zullen trachten te benaderen door van de hypothese gebruik te maken, die in 2.1 opgesteld is.

Wij kunnen nu als volgt de potentieele energie van het electron berekenen.

Noemen wij r den afstand van het buitenste electron tot den kern en δ den afstand, waarover het baanvlak van het binnenste electron verschoven wordt in de richting van het buitenste electron naar den kern, dan geeft een eenvoudige berekening, dat in eerste benadering geldt:

$$\delta = \frac{a^3}{2r^2} \quad (1)$$

terwijl wij voor de kracht, die door het systeem op het buitenste electron wordt uitgeoefend, in eerste benadering vinden:

$$K = \frac{e^2}{r^2} \left(1 + \frac{2\delta}{r} \right) \quad (2)$$

Door substitutie van de waarde van δ uit (1) in (2) verkrijgt men:

$$K = \frac{e^2}{r^2} + \frac{e^2 a^3}{r^5}$$

Met behulp hiervan vinden wij nu voor de potentieële energie:

$$V = \int_{\infty}^r \frac{e^2}{r^2} dr + \int_{\infty}^r \frac{e^2 a^3}{r^5} dr$$

$$V = -\frac{e^2}{r} - \frac{e^2 a^3}{4 r^4} \quad (3)$$

4.11 Opstellen der bewegingsvergelijkingen van het electron.

Stellen wij de massa van het electron m , dan wordt de totale energie gegeven door:

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \left(\frac{e^2}{r} + \frac{e^2 a^3}{4 r^4} \right) = \alpha_1$$

of in poolcoördinaten:

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \left(\frac{e^2}{r} + \frac{e^2 a^3}{4 r^4} \right) = \alpha_1 \quad (4)$$

waarin α_1 weder de energie voorstelt, die zoowel positief als negatief zijn kan.

Om de HAMILTON'sche functie te verkrijgen, voeren wij in plaats van de snelheden de bijbehorende impulsen in, welke gegeven worden door:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \quad p_{\phi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \quad (5)$$

waarin T de kinetische energie voorstelt. Hieruit volgt:

$$H \equiv \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_{\phi}^2}{r^2} \right) - \left(\frac{e^2}{r} + \frac{e^2 a^3}{4 r^4} \right) = \alpha_1$$

Voeren wij nu weer een werkingsfunctie $S(r, \phi)$ in zóó, dat:

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad p_{\phi} = \frac{\partial S}{\partial \phi} \quad (6)$$

dan wordt de vergelijking van JACOBI, daar de tijd niet expliciet in de uitdrukking voor de HAMILTON'sche functie voorkomt:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 - 2m \left(\frac{e^2}{r} + \frac{e^2 a^3}{4 r^4} \right) \right] - \alpha_1 = 0 \quad (7)$$

Om de variabelen te separeren, stellen wij:

$$S = \alpha_2 \phi + S_1(r) \quad (8)$$

waaruit door differentiatie volgt:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} \equiv p_\phi = \alpha_2 \quad \frac{\partial S}{\partial r} \equiv p_r = \frac{dS_1}{dr} \quad (9)$$

waarin α_2 de perkenconstante voorstelt.

Na eene korte herleiding vinden wij:

$$\frac{dS_1}{dr} \equiv p_r = \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2me^2}{r} + \frac{2me^2a^3}{4r^4}} \quad (10)$$

Integratie levert:

$$S_1 = \int \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2me^2}{r} + \frac{2me^2a^3}{4r^4}} dr \quad (11)$$

Substitutie van deze waarde in (8) geeft ons:

$$S = \alpha_2 \phi + \int \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2me^2}{r} + \frac{2me^2a^3}{4r^4}} dr \equiv S(r, \phi, \alpha_1, \alpha_2)$$

Door differentiatie naar de constanten krijgen wij hieruit de baanvergelijkingen van het electron. De berekening voert ons tot de beide vergelijkingen:

$$t - t_0 = m \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2me^2}{r} + \frac{2me^2a^3}{4r^4}}} \quad (12)$$

$$\phi - \phi_0 = \alpha_2 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2me^2}{r} + \frac{2me^2a^3}{4r^4}}} \quad (13)$$

De eerste vergelijking levert ons de afhankelijkheid van de beweging van den tijd, terwijl de laatste vergelijking ons den vorm van de baan geeft.

4.12 Discussie der mogelijke banen.

Evenals wij in 2.31 gezien hebben, kunnen slechts die waarden van r in reële banen voorkomen, waarvoor $\frac{dr}{d\phi} \geq 0$ is. Differentieeren wij (13) naar r , dan is:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\alpha_2}{r^2 \sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2 m e^2}{r} + \frac{m e^2 a^3}{2 r^4}}}$$

waaruit volgt:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{2 m \alpha_1 \cdot r^4 + m \mu_1 r^3 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{1}{4} m \mu_1 a^3}{\alpha_2^2}$$

waarin wij $2 e^2 = \mu_1$ gesteld hebben.

Ter vereenvoudiging stellen wij:

$$2 m \alpha_1 \cdot r^4 + m \mu_1 r^3 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{1}{4} m \mu_1 a^3 = R^2; \quad (14)$$

dan is:
$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{R^2}{\alpha_2^2} \quad (15)$$

en bijgevolg kunnen alleen die waarden van r in reële banen voorkomen, waarvoor de functie $R^2 \geq 0$ wordt; de wortels van de vierdemachtsvergelijking $R^2 = 0$ leveren ons de apo- en pericentra der banen.

4.121 Onderzoek naar het verloop van de functie R^2 .

Het bepalen der wortels van de vergelijking $R^2 = 0$ is zeer omslachtig; wij zullen dus beginnen met de ligging der maxima en minima van de functie R^2 te bepalen, en met behulp hiervan te trachten ons een voorstelling dezer functie te maken. Stellen we daartoe $R^2 \equiv f(r)$, dan is:

$$f'(r) = 8 m \alpha_1 \cdot r^3 + 3 m \mu_1 r^2 - 2 \alpha_2^2 r \quad (16)$$

$$f''(r) = 24 m \alpha_1 \cdot r^2 + 6 m \mu_1 r - 2 \alpha_2^2 \quad (17)$$

De wortels der vergelijking $f'(r) = 0$ geven ons de waarden van r , die $f(r)$ tot een maximum of minimum maken.

Na eenige herleiding vinden wij voor deze waarden:

$$r_1 = 0; r_{2,3} = -\frac{3 \mu_1}{16 \alpha_1} \pm \sqrt{\frac{9 \mu_1^2}{256 \alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{4 m \alpha_1}} \quad (18)$$

Stellen wij nu: $\alpha_1 = \eta \frac{m \mu_1^2}{4 \alpha_2^2}$ (19)

dan gaan de laatste twee wortels over in:

$$r_{2,3} = \frac{\alpha_2^2}{m \mu_1} \cdot \frac{\pm \sqrt{9 + 16 \eta} - 3}{4 \eta} \quad (20)$$

waarin η zoowel positief als negatief kan zijn.

4.122 1e Geval: $\eta > 0$.

Wij beschouwen nu eerst het geval, dat η positief is; de energie α_1 is dan positief. Voor $r = \pm \infty$ krijgt de functie R^2 de waarde $+\infty$, voor $r=0$ de waarde $\frac{1}{4} m \mu_1 a^3$; deze laatste waarde is maximum, daar $f'(r) < 0$ is voor $r=0$.

Voor $r_{2,3} = \frac{\alpha_2^2}{m \mu_1} \cdot \frac{\pm \sqrt{9 + 16 \eta} - 3}{4 \eta}$ wordt $f''(r_{2,3}) = \frac{1}{8} \frac{\alpha_2^2}{\eta}$

$[18 + 32 \eta \mp 6 \sqrt{9 + 16 \eta}]$, zoodat voor $\eta > 0$ $f''(r_{2,3})$ steeds grooter dan nul is en dus maken de waarden r_2 en r_3 de functie $f(r) \equiv R^2$ tot een minimum.

Substitueeren wij de waarden van r_2 en r_3 in de uitdrukking voor functie $f(r)$, dan krijgen wij na eenige herleiding:

$$f(r_{2,3}) = \frac{\alpha_2^6}{m^2 \mu_1^2} \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\eta}{2} + \varepsilon - 1 \right) + \frac{1}{4} m \mu_1 a^3$$

waarin:
$$\varepsilon = \frac{\pm \sqrt{9 + 16 \eta} - 3}{4 \eta}$$

Voor verschillende waarden van η kunnen wij nu r_2 en r_3 benevens de daarbij behorende waarden van $f(r) - \frac{1}{4} m \mu_1 a^3$ bepalen. Onderstaande tabel geeft het resultaat van deze berekening:

η	$r_2 : \frac{\alpha_2^2}{m \mu_1}$	I	$r_3 : \frac{\alpha_2^2}{m \mu_1}$	II
	ε	ε_1	ε	ε_1
0	0,667	— 0,148	— ∞	— ∞
0,01	0,662	— 0,147	— 150,662	— 865969
0,10	0,639	— 0,149	— 15,639	— 1079
0,50	0,561	— 0,113	— 3,562	— 41,78
1,00	0,500	— 0,094	— 2,000	— 4,000
10,00	0,250	— 0,027	— 0,400	— 0,096

Kolom I geeft:

$$(f(r_2) - \frac{1}{4} m \mu_1 a^3) : \frac{\alpha_2^6}{m^2 \mu_1^2}$$

Kolom II geeft:

$$(f(r_3) - \frac{1}{4} m \mu_1 a^3) : \frac{\alpha_2^6}{m^2 \mu_1^2}$$

Ten einde na te gaan of de waarden $f(r_2)$ en $f(r_3)$ in ons probleem positief of negatief uitvallen, moeten we de numerieke grootte der coëfficiënten in de functie beschouwen. Daar in ons geval aangenomen is, dat het electron van het atoom de eenquantige baan doorloopt, zoo kunnen wij a gelijk stellen aan den halven straal van de eerste quantenbaan van het electron in het neutrale waterstofatoom. Verder willen wij bij deze numerieke beschouwing in zooverre op het volgende vooruitloopen, dat wij stellen: $\alpha_2 = \frac{n h}{2 \pi}$, waarin dus n weer het azimuthale quantengetal voorstelt.

Wij voeren dus de volgende waarden in:

$$a = 0,27 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

$$\mu_1 = 2e^2 = 45,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}^3 \text{ gr. sec.}^{-2}$$

$$\alpha_2 = n \cdot 1,051 \cdot 10^{-27} \text{ cm.}^2 \text{ gr. sec.}^{-1}$$

$$m = 8,8 \cdot 10^{-28} \text{ gr.}$$

$$\text{waaruit volgt: } \frac{\alpha_2^6}{m^2 \mu_1^2} = n^6 \cdot 0,0842 \cdot 10^{-70} \text{ cm.}^6 \text{ gr.}^2 \text{ sec.}^{-2};$$

$$\frac{\alpha_2^2}{m \mu_1} = n^2 \cdot 0,2761 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}; \quad \frac{1}{4} m \mu_1 a^3 = 0,0197 \cdot 10^{-70} \text{ cm.}^6 \text{ gr.}^2 \text{ sec.}^{-2}$$

In verband hiermede blijkt nu uit bovenstaande tabel, dat voor $n=1$ $f(r_2)$ voor alle waarden van η positief blijft, $f(r_3)$ daarentegen zal voor kleine waarden van η negatief zijn. Een korte berekening leert ons, dat $f(r_2)$ zoowel als $f(r_3)$ nul wordt voor $\varepsilon_1 = -\frac{0,234}{n^6}$; voor $n=1$ grijpt dit voor $f(r_3)$ plaats bij een waarde van η gelijk aan 5,2; voor kleinere waarden van η is $f(r_3)$ dan negatief.

Voor $n=2$ worden zoowel $f(r_2)$ als $f(r_3)$ voor kleinere waarden van η negatief; zij worden nul, wanneer de bij hen behorende waarde van ε_1 gelijk $-\frac{0,234}{64}$ wordt terwijl de waarde van η , die hiermede overeenkomt, weer volgt uit de betrekkingen: $\varepsilon = \frac{\pm \sqrt{9 + 16 \eta} - 3}{4 \eta}$ en $\varepsilon_1 = \varepsilon^2 \left(\varepsilon^2 \frac{\eta}{2} + \varepsilon - 1 \right)$

Hoe grooter echter n is, des te kleiner wordt de waarde van ε , waarvoor $f(r_2)$ resp. $f(r_3)$ nul worden en uit voorgaande betrekking blijkt dan onmiddellijk, dat daarbij een steeds grootere waarde van η behoort, welke waarde wij resp. η_2 en η_3 zullen noemen.

Volgende figuren geven het verloop van R^2 in het geval $\eta > 0$ graphisch weer.

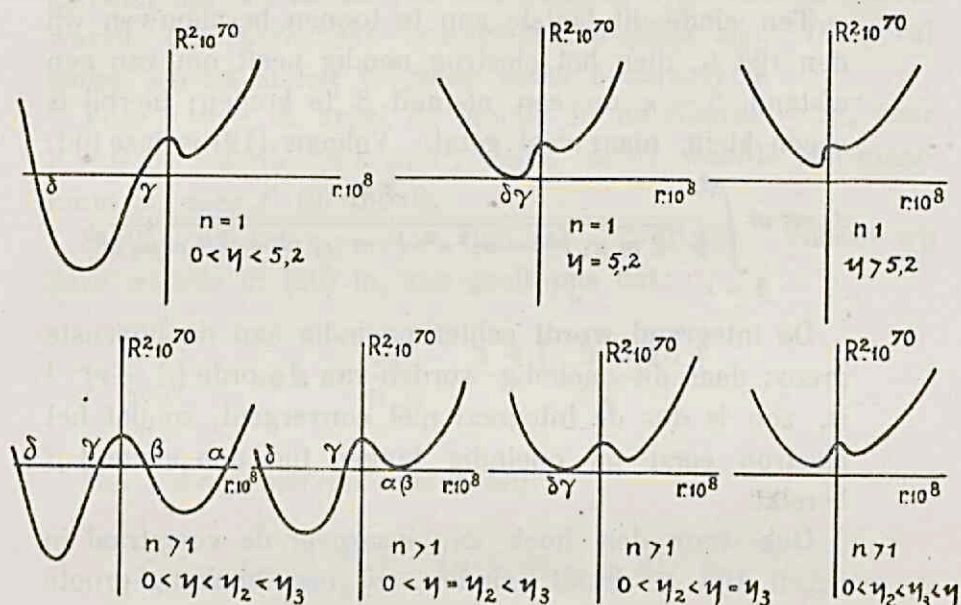


FIG. 13.

Noemen wij de wortels van $R^2 = 0$ resp. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, waarbij $\alpha > \beta > \gamma > \delta$ dan volgt uit bovenstaande beschouwingen, dat voor het geval van positieve energie α_1 voor verschillende waarden van n de volgende baantypen mogelijk zijn.

1^o. $0 < \eta < \eta_2 < \eta_3$; in dit geval krijgen wij:

- banen met twee takken naar het oneindige, waarvan de pericentra op een afstand α , resp. δ van het aantrekkingscentrum gelegen zijn.
- banen van het centrum naar apocentra, die op een afstand β , resp. γ ervan verwijderd liggen en weer terug naar het centrum.

2^o. $0 < \eta = \eta_2 < \eta_3$; de volgende baantypen komen voor;

- banen met twee takken naar het oneindige en waarvan

de pericentra op een afstand δ van het aantrekkingscentrum gelegen zijn.

- b) banen van centrum naar apocentrum en terug, waarvan de apocentra gelegen zijn op een afstand γ van het aantrekkingscentrum.
- c) banen, die van het centrum komen, en een cirkel met straal $\alpha = \beta$ asymptotisch naderen.

Ten einde dit laatste aan te toonen beschouwen wij den tijd t_1 , dien het electron noodig heeft om van een afstand $\beta - \alpha$ op een afstand β te komen; hierbij is α een klein, maar vast getal. Volgens (12) is deze tijd:

$$t_1 = m \int_{\beta - \alpha}^{\beta} \frac{r^2 dr}{\sqrt{2 m \alpha_1 r^4 - \alpha_2^2 r^2 + m \mu_1 r^3 + \frac{1}{2} m \mu_1 \alpha^3}}.$$

De integrand wordt echter oneindig aan de bovenste grens; daar dit oneindig worden van de orde $(\beta - r)^{-1}$ is, zoo is dus de integraal niet convergent, zoodat het electron eerst na oneindig langen tijd den afstand β bereikt.

Ook voor den hoek ϕ_1 , waarover de voerstraal in dezen tijd t_1 draait, vinden wij een oneindig groote waarde, zoodat de nadering volgens een spiraal met een oneindig groot aantal windingen geschiedt.

- d) banen, die van het oneindige komen en een cirkel met straal $\alpha = \beta$ asymptotisch naderen.
- 3°. $0 < \eta_2 < \eta < \eta_3$; de baantypen, die in dit geval mogelijk zijn:
- a) banen met twee takken naar het oneindige en een pericentrum op een afstand δ .
 - b) banen tusschen centrum en een apocentrum op een afstand γ .
 - c) banen tusschen het centrum en het oneindige.
- 4°. $0 < \eta_2 < \eta = \eta_3$; mogelijk zijn nu:
- a) banen tusschen het centrum en het oneindige.
 - b) banen, die van het centrum komen en een cirkel met straal $\gamma = \delta$ asymptotisch naderen.

c) banen, die van het oneindige komen en een asymptotischen cirkel met straal $\gamma = \delta$ bezitten.

5°. $0 < \eta_2 < \eta_3 < \eta$. In dit geval zijn alleen banen van het centrum naar het oneindige en omgekeerd mogelijk.

4.123 2e Geval: $\eta < 0$.

In dit geval is de energie α_1 negatief en bestaat de mogelijkheid, dat wij banen van een gesloten type kunnen krijgen, waarin dus periodieke bewegingen mogelijk zijn. Dit geval zullen wij nu in het volgende nader onderzoeken.

Voor $r = \pm \infty$ krijgt de functie R^2 de waarde $-\infty$, voor $r = 0$ de waarde $\frac{1}{4} m \mu_1 a^3$, welke laatste waarde een maximum is, daar $f''(0) < 0$ is.

Stellen wij nu $\eta = -\eta'$, dan zal $\eta' > 0$ zijn. Voeren wij deze waarde in (20) in, zoo geeft ons dat:

$$r_{2,3} = \frac{\alpha_2^2}{m \mu_1} \cdot \frac{3 \mp \sqrt{9 - 16 \eta'}}{4 \eta'}.$$

Met behulp hiervan vinden wij:

$$f''(r_{2,3}) = \frac{1}{8} \frac{\alpha_2^2}{\eta'} [-18 + 32 \eta' \pm 6 \sqrt{9 - 16 \eta'}]$$

Uit deze formules volgt:

1°. voor $\eta' = 9/16$ wordt $r_2 = r_3$ en heeft de functie R^2 dus een buigpunt.

2°. voor $\eta' < 9/16$ heeft de functie R^2 een minimum bij $r = r_2$ en een maximum bij $r = r_3$. Daar verder geldt $0 < r_2 < r_3$, zoo hangt het nog slechts van de waarden $f(r_2)$ en $f(r_3)$ af, of gesloten banen mogelijk zijn.

In de volgende tabel zijn voor enkele waarden van η' de bijbehorende waarden van r_2 , r_3 en $f(r_2)$, $f(r_3)$ berekend.

Kolom I geeft: $(f(r_2) - \frac{1}{4} m \mu_1 a^3) : \frac{\alpha_2^6}{m^2 \mu_1^2}$

Kolom II geeft: $(f(r_3) - \frac{1}{4} m \mu_1 a^3) : \frac{\alpha_2^6}{m^2 \mu_1^2}$

η'	min. $r_2 : \frac{\alpha_2^2}{m\mu_1}$	I	max. $r_3 : \frac{\alpha_2^2}{m\mu_1}$	II
	ε	ε_1	ε	ε_1
0	0,667	-0,148	$+\infty$	$-\infty$
0,1	0,669	-0,159	14,301	628,90
0,2	0,739	-0,172	6,760	54,38
0,3	0,792	-0,189	4,210	9,766
0,4	0,872	-0,213	2,880	1,833
0,5	1,000	-0,250	2,000	0
0,5625	1,333	-0,296	1,333	-0,296

Ten einde nu na te gaan, wanneer $f(r_2)$ en $f(r_3)$ positief of negatief zijn, voeren wij, evenals in 4.122, in:

$$\frac{\alpha_2^6}{m^2 \mu_1^2} = n^6 \cdot 0,0842 \cdot 10^{-70} \text{ cm}^6 \text{ gr}^2 \text{ sec}^{-2}; \quad \frac{\alpha_2^2}{m \mu_1} = n^2 \cdot 0,2761 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

en $^{1/4} m \mu_1 \alpha^3 = 0,0197 \cdot 10^{-70} \text{ cm}^6 \text{ gr}^2 \text{ sec}^{-2}.$

Hieruit volgt, dat $f(r_2)$ en $f(r_3)$ nul worden, wanneer de bijbehorende ε_1 gelijk $-\frac{0,234}{n^6}$ is. Hiermee komen voor r_2 en r_3 verschillende waarden van η' overeen, welke wij resp. η_2' en η_3' zullen noemen, waarbij, zooals de tabel aangeeft, steeds η_2' kleiner dan η_3' is.

Het verloop van de functie R^2 wordt nu voor verschillende waarden van η' in de volgende figuren graphisch voorgesteld.

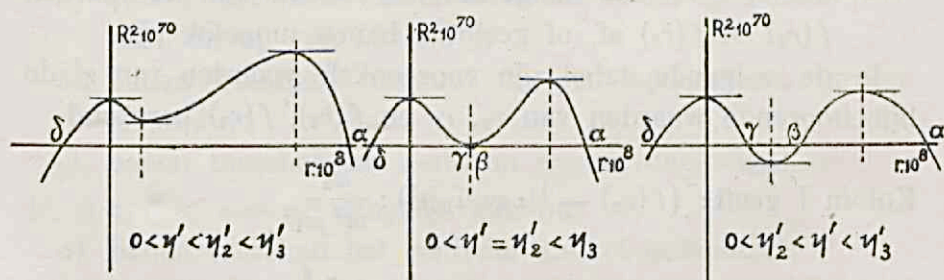


FIG. 14.

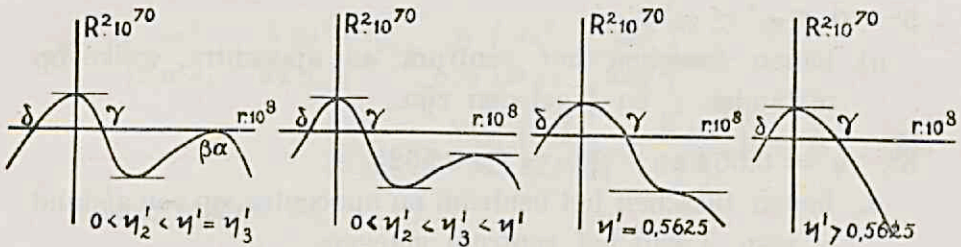


FIG. 15.

Voor een negatieve energie α_1 zijn dus voor verschillende waarden van n de volgende baantypen mogelijk:

1^o. $0 < \eta'_1 < \eta'_2 < \eta'_3$

- a) banen, die van het centrum uitgaan naar een apocentrum en terug naar het centrum; de apocentra liggen op een afstand α resp. δ van het centrum verwijderd.

2^o. $0 < \eta'_1 = \eta'_2 < \eta'_3$

- a) banen van het centrum naar een apocentrum op een afstand δ en terug naar het centrum.
 b) banen, die van het centrum komen en volgens een spiraal met oneindig vele windingen na een oneindig langen tijd een cirkel met straal γ bereiken.
 c) banen tusschen een apocentrum op een afstand α en een cirkel met straal β , welke volgens een spiraal met oneindig vele windingen na een oneindigen tijd bereikt wordt.

3^o. $0 < \eta'_2 < \eta'_1 < \eta'_3$

- a) banen, die het centrum en het oneindige niet bereiken en welker apo- en pericentra resp. op een afstand α en β gelegen zijn.
 b) banen tusschen het centrum en apocentra, op afstanden γ en δ van het aantrekkingscentrum gelegen.

4^o. $0 < \eta'_2 < \eta'_1 = \eta'_3$

- a) banen, die van het centrum uitgaan naar apocentra op afstanden γ en δ gelegen.
 b) cirkelbanen met straal $\alpha = \beta$. De beweging in deze banen is stabiel, daar waarden van r in de nabijheid van $r = \alpha = \beta$ niet in reële banen voor kunnen komen.

$$5^0. \quad 0 < \eta_2' < \eta_3' < \eta'$$

a) banen tusschen het centrum en apocentra, welke op afstanden γ en δ gelegen zijn.

$$6^0. \quad \eta' = 0,5625. \quad 7^0. \quad \eta' > 0,5625$$

a. banen tusschen het centrum en apocentra, op een afstand γ resp. δ van het centrum gelegen.

Uit de tabel zien wij verder, dat voor $n = 1$ alle baantypen voorkomen; voor $n > 1$ ontbreken de banen, welke asymptotische cirkels bezitten, terwijl voor $0 < \eta' \leq 0,5$ in dit geval alle banen van het type $3^0 a$ zijn. De waarde van η' , waarvoor de wortels α en β samenvallen, ligt voor $n > 1$ zeer weinig boven 0,5 en nadert tot 0,5, wanneer wij n tot oneindig laten naderen.

Wij zullen nu de banen van het type $3^0 a$ beschouwen, waarvan de cirkelbanen ($4^0 b$) een bijzonder geval zijn.

Met behulp der grootheden, welke in 4.122 zijn ingevoerd, kunnen wij de energie α_1 in Nh uitdrukken en vinden na eenige herleiding:

$$\alpha_1 = \frac{2\eta}{n^2} Nh \quad (21)$$

4.13 Bepaling der wortels van de vergelijking $R^2 = 0$. voor die waarden van η' , waarbij banen van het type $3^0 a$ kunnen optreden.

Wij moeten de wortels bepalen van:

$$2m\alpha_1 r^4 + m\mu_1 r^3 - \alpha_2^2 r^2 + \frac{1}{4}m\mu_1 a^3 = 0 \quad (22)$$

Daar alle coëfficiënten lettergrootheden zijn, zoo is het berekenen der wortels zeer omslachtig. Het is dus wenschelijk de numerieke waarden dezer coëfficiënten in te voeren, zoodra de berekening te ingewikkeld wordt.

Ter oplossing stellen wij:

$$r = \rho - \frac{\mu_1}{8\alpha_1} \quad (23)$$

terwijl wij voorloopig $\frac{1}{4}\mu_1 a^3 = \mu_2$ nemen. Door substitutie van (23) in (22) krijgen wij ter bepaling van ρ de vergelijking:

$$\rho^4 - \left(\frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1} + \frac{3\mu_1^2}{32\alpha_1^2} \right) \rho^2 + \frac{\mu_1}{8\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2^2}{m\alpha_1} + \frac{\mu_1^2}{8\alpha_1^2} \right) \rho + \left[\frac{\mu_2}{2\alpha_1} - \frac{\mu_1^2}{64\alpha_1^2} \left(\frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1} + \frac{3\mu_1^2}{64\alpha_1^2} \right) \right] = 0 \quad (24)$$

Hierin stellen wij:

$$a = - \left(\frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1} + \frac{3\mu_1^2}{32\alpha_1^2} \right); \quad b = \frac{\mu_1}{8\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2^2}{m\alpha_1} + \frac{\mu_1^2}{8\alpha_1^2} \right);$$

$$c = \frac{\mu_2}{2\alpha_1} - \frac{\mu_1^2}{64\alpha_1^2} \left(\frac{\alpha_2^2}{2m\alpha_1} + \frac{3\mu_1^2}{64\alpha_1^2} \right) \quad (25)$$

Hieruit berekenen wij:

$$\frac{a}{2} = - \left(\frac{\alpha_2^2}{4m\alpha_1} + \frac{3\mu_1^2}{64\alpha_1^2} \right);$$

$$a^2 - 4c = \frac{\alpha_2^4}{4m^2\alpha_1^2} + \frac{3\mu_1^4}{256\alpha_1^4} + \frac{\mu_1^2\alpha_2^2}{8m\alpha_1^3} - \frac{4\mu_2}{2\alpha_1} \text{ en}$$

$$b^2 = \frac{\mu_1^2}{64\alpha_1^2} \left(\frac{\alpha_2^4}{m^2\alpha_1^2} + \frac{\mu_1^4}{64\alpha_1^4} + \frac{\alpha_2^2\mu_1^2}{4m\alpha_1^3} \right)$$

zoodat de resolvente wordt:

$$y^3 - \left(\frac{\alpha_2^2}{4m\alpha_1} + \frac{3\mu_1^2}{64\alpha_1^2} \right) y^2 + \left(\frac{\alpha_2^4}{64m^2\alpha_1^2} + \frac{3\mu_1^4}{4096\alpha_1^4} + \frac{\mu_1^2\alpha_2^2}{128m\alpha_1^3} - \frac{\mu_2}{8\alpha_1} \right) y - \frac{\mu_1^2}{4096\alpha_1^2} \left(\frac{\alpha_2^4}{m^2\alpha_1^2} + \frac{\mu_1^4}{64\alpha_1^4} + \frac{\alpha_2^2\mu_1^2}{4m\alpha_1^3} \right) = 0 \quad (26)$$

Zijn de wortels dezer vergelijking y_1, y_2, y_3 , dan volgen hieruit de wortels van (24) als volgt:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \pm (\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}) \\ \rho_2 &= \pm (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ \rho_3 &= \pm (-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ \rho_4 &= \pm (-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{waarbij de teekens zóó te} \\ \text{kiezen zijn, dat} \\ \sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = -\frac{b}{8} \text{ is.} \end{array} \quad (26a)$$

Om de wortels y_1, y_2, y_3 te bepalen, stellen wij:

$$y = x + \frac{1}{12\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2^2}{m} + \frac{3\mu_1^2}{16\alpha_1} \right) \quad (27)$$

en krijgen dan na eenige herleiding voor de vergelijking in x :

$$x^3 - \frac{1}{8\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2^4}{24m^2\alpha_1} + \mu_2 \right) x + \frac{1}{96\alpha_1^2} \left(\frac{\alpha_2^6}{72m^3\alpha_1} - \frac{\alpha_2^2\mu_2}{m} - \frac{3\mu_1^2\mu_2}{16\alpha_1} \right) = 0 \quad (28)$$

Hierin voeren wij nu in: $\alpha_1 = \eta \frac{m\mu_1^2}{4\alpha_2^2}$, waarin η in ons geval negatief zal zijn.

Na een korte herleiding verkrijgt men:

$$x^3 - \frac{\alpha_2^8}{\eta^2} \left(\frac{1}{12m^4\mu_1^4} + \frac{a^3}{8m\mu_1\alpha_2^6} \right) x + \frac{\alpha_2^{12}}{\eta^3} \left(\frac{1}{108m^6\mu_1^6} - \frac{a^3}{24m^3\mu_1^3\alpha_2^6} \cdot \frac{\eta}{\alpha_2^6} - \frac{3a^3}{96m^3\mu_1^3\alpha_2^6} \cdot \frac{1}{\alpha_2^6} \right) = 0 \quad (29)$$

Evenals in 4.122 voeren wij weder in:

$$m\mu_1 = 4 \cdot 10^{-46} \text{ cm}^3 \text{ gr}^2 \text{ sec}^{-2}; \quad a^3 = 0,0197 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3; \\ \alpha_2 = n \cdot 1,051 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ gr sec}^{-1}.$$

Substitutie dezer waarden in (29) levert:

$$x^3 - \frac{n^8}{\eta^2} \left(4,850 + 6,800 \frac{\eta}{n^6} \right) 10^{-36} x + \frac{n^{12}}{\eta^3} \left(4,106 - 17,285 \frac{\eta}{n^6} - \frac{12,964}{n^6} \right) 10^{-54} = 0 \quad (30)$$

Wij stellen vervolgens hierin:

$$\left. \begin{aligned} 3p &= -\frac{n^8}{\eta^2} \left(4,850 + 6,800 \frac{\eta}{n^6} \right) 10^{-36} \\ 2q &= +\frac{n^{12}}{\eta^3} \left(4,106 - 17,285 \frac{\eta}{n^6} - \frac{12,964}{n^6} \right) 10^{-54} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Hieruit volgt:

$$q^2 + p^3 = \frac{n^{24}}{\eta^6} 10^{-108} \left(\frac{42,016}{n^{12}} + 112,04 \frac{\eta}{n^{12}} + 49,775 \frac{\eta^2}{n^{12}} - \frac{26,615}{n^6} - 53,258 \frac{\eta}{n^6} - 11,646 \frac{\eta^3}{n^{18}} \right) = \frac{n^{18}}{\eta^6} 10^{-108} \left(\frac{42,016}{n^6} + 112,04 \frac{\eta}{n^6} + 49,775 \frac{\eta^2}{n^6} - 26,615 - 53,258 \eta - 11,646 \frac{\eta^3}{n^{12}} \right) \quad (32)$$

Afhankelijk van de waarde van $q^2 + p^3$ vinden wij uit (30) de wortels x_1, x_2, x_3 op de volgende wijze:

$q^2 + p^3 > 0$ $x_1 = u + v$ $x_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{i}{2}\sqrt[3]{3(u-v)}$ $x_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{i}{2}\sqrt[3]{3(u-v)}$ waarin: $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$ $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$	$q^2 + p^3 \leq 0$ $x_1 = 2\sqrt{-p} \cos \frac{\phi}{3}$ $x_2 = -2\sqrt{-p} \cos \left(\frac{\phi}{3} + 60^\circ \right)$ $x_3 = -2\sqrt{-p} \cos \left(\frac{\phi}{3} - 60^\circ \right)$ waarin: $\cos \phi = \frac{-q}{\sqrt{-p^3}}$
--	---

Zijn x_1, x_2, x_3 langs dezen weg berekend, dan levert vergelijking (27) ons de wortels y_1, y_2, y_3 . Na substitutie van de ingevoerde grootheden vinden wij:

$$y_{1,2,3} = x_{1,2,3} + \frac{n^4}{\eta} \left(2,543 + \frac{1,907}{\eta} \right) 10^{-18} \quad (33)$$

terwijl voor b gevonden wordt:

$$b = \frac{n^6}{\eta^2} \left(4,212 + \frac{2,106}{\eta} \right) 10^{-26} \quad (34)$$

Uit (26)^a vinden we de wortels $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ als volgt:

<i>b positief.</i> $\rho = -\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2} - \sqrt[3]{y_3}$ $\rho = +\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3}$ $\rho = -\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3}$ $\rho = +\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} - \sqrt[3]{y_3}$	<i>b negatief</i> $\rho = +\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3}$ $\rho = -\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} - \sqrt[3]{y_3}$ $\rho = +\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2} - \sqrt[3]{y_3}$ $\rho = -\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3}$
---	--

(35)

De wortels r_1, r_2, r_3, r_4 worden nu hieruit met behulp van (23) gevonden, die na invoering der numerieke waarden overgaat in:

$$r = \rho - \frac{n^2}{\eta} \cdot 1,381 \cdot 10^{-9}$$

Wij willen nu de berekening uitvoeren voor banen van het type 3^o a [zie 4.12 2^o geval]. Wij moeten dan η negatief nemen en stellen daarom weer $\eta = -\eta'$. De waarden van η' , waarvoor deze banen bij verschillende waarden van n

kunnen optreden, hebben hebben wij reeds in 4.12 besproken en geven dus de resultaten dezer numerieke berekening in de volgende tabellen weer.

$n = 1$									
$r \cdot 10^9$ in cm.	η'	0,47	0,48	0,49	0,50	0,51	0,52	0,53	0,54
									cirkel 0,5403
$\alpha \cdot 10^9 =$		+ 7,63	+ 7,31	+ 6,96	+ 6,63	+ 6,19	+ 5,93	+ 5,47	+ 4,73
$\beta \cdot 10^9 =$		+ 2,81	+ 2,97	+ 3,12	+ 3,27	+ 3,53	+ 3,61	+ 3,87	+ 4,47
$\gamma \cdot 10^9 =$		+ 2,43	+ 2,35	+ 2,32	+ 2,25	+ 2,29	+ 2,31	+ 2,17	+ 2,15
$\delta \cdot 10^9 =$		- 1,11	- 1,11	- 1,12	- 1,11	- 1,17	- 1,21	- 1,11	- 1,11

n	$r \cdot 10^8$ in cm.	η'						cirkels		
			0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,50005	0,5005
2	$\alpha \cdot 10^8 =$		+ 20,92	+ 9,84	+ 6,01	+ 3,99	+ 2,40			+ 2,20
	$\beta \cdot 10^8 =$		+ 1,16	+ 1,22	+ 1,35	+ 1,53	+ 2,00			+ 2,20
	$\gamma \cdot 10^8 =$		+ 0,06	+ 0,05	+ 0,04	+ 0,04	+ 0,04			+ 0,04
	$\delta \cdot 10^8 =$		- 0,06	- 0,05	- 0,04	- 0,04	- 0,04			- 0,04
3	$\alpha \cdot 10^8 =$		+ 47,11	+ 22,15	+ 13,52	+ 8,98	+ 5,10		+ 4,96	
	$\beta \cdot 10^8 =$		+ 2,62	+ 2,77	+ 3,04	+ 3,43	+ 4,82		+ 4,96	
	$\gamma \cdot 10^8 =$		+ 0,06	+ 0,05	+ 0,04	+ 0,03	+ 0,04		+ 0,03	
	$\delta \cdot 10^8 =$		- 0,06	- 0,05	- 0,04	- 0,03	- 0,04		- 0,03	
≥ 4	$\alpha \cdot 10^8 =$		$+ 5,23 n^2 + 2,46 n^2 + 1,5 n^2 + 1,00 n^2 + 0,55 n^2 + 0,55 n^2$							
	$\beta \cdot 10^8 =$		$+ 0,29 n^2 + 0,31 n^2 + 0,34 n^2 + 0,38 n^2 + 0,55 n^2 + 0,55 n^2$							
	$\gamma \cdot 10^8 =$		zeer klein t. o. v. $\alpha \cdot 10^8$ en $\beta \cdot 10^8$.							
	$\delta \cdot 10^8 =$									

Voor $n \geq 4$ kunnen de voorgaande formules belangrijk vereenvoudigd worden; men verkrijgt dan achtereenvolgens:

$$2 \sqrt{-p} = \frac{n^4}{\eta'} \cdot 2,543 \cdot 10^{-8} \quad (37)$$

$$x_1 = \frac{n^4}{\eta'} 2,543 \cdot 10^{-18} \quad x_2 = x_3 = -\frac{n^4}{\eta'} 1,272 \cdot 10^{-18} \quad (38)$$

$$y_{1,2,3} = x_{1,2,3} + \frac{n^4}{\eta'} \left(\frac{1,907}{\eta'} - 2,543 \right) 10^{-18} \quad (39)$$

Substitutie van (39) in (38) levert:

$$y_1 = \frac{n^4}{\eta'^2} \cdot 1,907 \cdot 10^{-18} \quad y_2 = y_3 = \frac{n^4}{\eta'^2} \cdot 1,907 (1 - 2\eta') 10^{-18} \quad (40)$$

Deze waarden, in (35) ingevoerd, leveren ons:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{n^2}{\eta'} 1,381 (1 + 2\sqrt{1 - 2\eta'}) 10^{-9} \\ \rho_2 &= -\frac{n^2}{\eta'} 1,381 \cdot 10^{-9} \\ \rho_3 &= \frac{n^2}{\eta'} 1,381 (1 - 2\sqrt{1 - 2\eta'}) 10^{-9} \\ \rho_4 &= -\frac{n^2}{\eta'} 1,381 \cdot 10^{-9} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Voeren wij nu ten slotte deze waarden in (36) in, dan vinden wij met goede benadering voor de wortels der vergelijking $R^2 = 0$, wanneer $n \geq 4$ is:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{n^2}{\eta'} 2,762 [1 + \sqrt{1 - 2\eta'}] 10^{-9} \equiv \alpha \\ r_2 &= \frac{n^2}{\eta'} 2,762 [1 - \sqrt{1 - 2\eta'}] 10^{-9} \equiv \beta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Voor $r_3 = \gamma$ en $r_4 = \delta$ vinden wij de waarde nul, terwijl in werkelijkheid γ een kleine positieve en δ een kleine negatieve waarde bezit. Deze waarden zijn echter in ons geval zoo klein t.o.v. de waarden van α en β , dat zij gelijk nul gesteld kunnen worden.

Gaan wij nu nog na in hoeverre de formules (42) in de gevallen $n = 2$ en $n = 3$ de waarden van α en β weergeven. Vergelijken wij n.m. de waarden, die uit de formules volgen met die uit voorgaande tabellen, dan zien wij, dat zij er mede overeenstemmen voor kleine waarden van η' , terwijl bij nadering van $\eta' = 0,5$ de tabellen voor α iets grootere waarden, voor β iets kleinere waarden geven dan die volgen uit de formules (42). Waren de tabellen met nog grootere nauwkeurigheid berekend, dan zouden wij zien, dat de tabellen voor alle waarden van η' in de gevallen $n = 2$, $n = 3$ iets grootere resp. kleinere waarden zouden geven, terwijl de verschillen zouden toenemen bij het grooter worden van η' . Hieruit kunnen wij de conclusie trekken, dat de r^{-5} term in de uitdrukking voor de aantrek-

kende kracht, welke door het systeem atoom-electron op het tweede electron wordt uitgeoefend, voor $n \geq 4$ ¹⁾ in onze benadering geen invloed meer uitoefent, terwijl deze invloed nog zeer groot is voor $n = 1$, verder afneemt voor $n = 2, 3$. De r^{-5} term heeft, zooals begrijpelijk is, verder de meeste uitwerking bij kleine η' , daar de banen met hunne pericentra dan dicht bij het systeem atoom-electron komen. Hij veroorzaakt een RIJDBERG-correctie, die wij hieronder zullen berekenen en met de experimenteele waarde vergelijken. ²⁾

Bij negatieve energie zijn er, wanneer wij den r^{-5} term in aanmerking nemen, ook banen mogelijk [zie 4.123] van het centrum naar een apocentrum en terug naar het centrum. Voor deze banen geldt echter, wanneer het tweede electron in de onmiddellijke nabijheid van het systeem atoom-electron gekomen is, onze benadering niet meer. Toch zal dit tweede electron, langs een dergelijke baan naderend, in de meeste gevallen dicht bij den kern komen; daar zal echter de Coulomb'sche aantrekking van den kern overheerschen en het electron zal een baan om den kern beschrijven, die geheel gelegen is tusschen een maximum en minimum waarde van r .

Wij moeten nu uit de mechanisch mogelijke banen die kiezen, welke overeenkomen met de quantencondities. In zoverre zijn wij eenigszins hierop vooruitgelopen, door het invoeren van de waarde $\frac{nh}{2\pi}$ voor de constante α_2 . Geven wij echter aan n een continue opeenvolging van waarden, dan krijgen wij weer alle banen, die mechanisch mogelijk zijn, zoodat wij aan de algemeenheid niets te kort gedaan hebben.

¹⁾ In de s -, p -, d -, f -, ... series is $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ te stellen, zoodat de invloed dus nihil wordt voor de f - en volgende series.

²⁾ De waargenomen spectra laten zich brengen op den vorm: $\frac{NZ^2}{(n + n' + \delta)^2}$, waarin δ in den regel zeer weinig van $n + n'$ afhangt. De grootheid δ wordt nu de RIJDBERG-correctie genoemd. ($Z \equiv$ atoomnummer).

4.14 Opstelling der quantencondities voor de banen van het type 3^o a. [Zie 4.123].

Evenals in 3.1 vinden wij de beide condities:

$$\oint (p_\varphi - \bar{p}_\varphi) d\varphi = n h \quad \oint (p_r - \bar{p}_r) dr = n' h \quad (43)$$

Wij stellen hier de beide aanvangswaarden $\bar{p}_\varphi$ en $\bar{p}_r$ gelijk nul, terwijl als integratiegrenzen in het eerste geval 0 en 2π , in het tweede geval $r_{\min.} = \beta$ en $r_{\max.} = \alpha$ moeten genomen worden.

De eerste integraal van (43) levert ons dan:

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = n h$$

Nu is volgens (9) $p_\varphi = \alpha_2$, zoodat deze betrekking overgaat in:

$$\alpha_2 = \frac{n h}{2\pi} \quad (44)$$

De tweede integraal van (43) wordt:

$$2 \int_{\beta}^{\alpha} p_r dr = n' h.$$

Substitutie van de waarde van p_r uit (10) geeft ons:

$$2 \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{2 m \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{2 m e^2}{r} + \frac{m e^2 a^3}{2 r^4}} dr = n' h.$$

Voeren wij hier nu in: $\alpha_1 = -\alpha_1'$ en $2 e^2 = \mu_1$, dan wordt de vergelijking:

$$2 \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{-2 m \alpha_1' + \frac{m \mu_1}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2} + \frac{1/4 m \mu_1 a^3}{r^4}} dr = n' h \quad (45)$$

Na eenige herleiding gaat (45) over in:

$$2 \int_{\beta}^{\alpha} \left(-2 m \alpha_1' r^2 + m \mu_1 r - \alpha_2^2 + \frac{1/4 m \mu_1 a^3}{r^2} \right) \frac{dr}{R} = n' h \quad (46)$$

$$\text{waarin } R = \sqrt{-2 m \alpha_1' r^4 + m \mu_1 r^3 - \alpha_2^2 r^2 + 1/4 m \mu_1 a^3} \quad (47)$$

$$= \sqrt{-2 m \alpha_1' (r - \alpha) (r - \beta) (r - \gamma) (r - \delta)}$$

waarin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de wortels van $R^2 = 0$ zijn. ($\alpha > \beta > \gamma > \delta$)

Wij kunnen (46) als volgt schrijven:

$$-2 m \alpha_1' \int_{\beta}^{\alpha} r^2 \frac{dr}{R} + m \mu_1 \int_{\beta}^{\alpha} r \frac{dr}{R} - \alpha_2^2 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dr}{R} + \frac{1}{4} m \mu_1 a^3 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{R} = \frac{n'h}{2} \quad (48)$$

welke integralen nu afzonderlijk berekend moeten worden.

Daar het elliptische integralen zijn, willen wij eerst de noodige transformatieformules opstellen, ten einde hen tot elliptische integralen van de eerste, tweede en derde soort terug te kunnen brengen.

De wortels van $R^2 = 0$ zijn reëel en wij vinden nu achtereenvolgens:¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-k}{1+k} &= + \sqrt{\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} \\ \frac{r-\alpha}{r-\beta} &= - \sqrt{\frac{(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\delta)(\beta-\gamma)}} \cdot \frac{1-z}{1+z} \\ \frac{dr}{R} &= \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{-2m\alpha_1'(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Daar $\alpha > x > \beta$ is, zoo zijn aan de waarden $\delta, \alpha, \beta, \gamma$ van x resp. toegevoegd de waarden $+\frac{1}{k}, +1, -1, -\frac{1}{k}$ van z .

Stellen wij verder $z = \sin \phi$, dan gaan de beide laatste twee formules van (49) over in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r-\alpha}{r-\beta} &= - \sqrt{\frac{(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\delta)(\beta-\gamma)}} \cdot \frac{1-\sin \phi}{1+\sin \phi} \\ \frac{dr}{R} &= \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{-2m\alpha_1'(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2 \phi}} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Daar de waarden der wortels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in het algemeene geval niet onmiddellijk in α_2 en α_1 (en dus in α_2 en γ') zijn uit te drukken, zoo is de oplossing der integralen niet mogelijk zonder zeer ingewikkelde formules en ten slotte moet men dan toch nog zijn toevlucht nemen tot het numeriek bepalen

¹⁾ Zie o.a. DURÈGE, Theorie der ellipt. Funktionen.

verhouding $\frac{n'}{n}$ bij elke waarde van η' voor elk stel waarden van $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

In 4.13 hebben wij waarden van α en β afgeleid [zie formule (42)], die met zeer groote benadering gelden voor $n \geq 4$ en met voldoende benadering voor $n = 2$ en $n = 3$. Het geval $n = 1$ valt er in het geheel niet onder. Uit de tabel in 4.13 bleek verder, dat de wortels γ en δ zeer klein zijn t. o. v. α en β , terwijl geldt: $\gamma = -\delta$.

Voeren wij deze laatste betrekking in de formules (49) en (50) in, dan leert ons dit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-k}{1+k} &= + \sqrt{\frac{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta+\gamma)}} \\ \frac{r-\alpha}{r-\beta} &= - \sqrt{\frac{(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)}{(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)}} \cdot \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi} \\ \frac{dr}{R} &= \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{2m\alpha_1' \cdot 2\gamma(\alpha-\beta)}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \end{aligned} \right\} (51)$$

Maken wij verder nog gebruik van het feit, dat $\frac{\gamma}{\alpha}$ en $\frac{\gamma}{\beta}$ klein t. o. v. één zijn, dan vinden wij na eenige herleiding:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} \\ r &= \frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)\sin\phi} \\ \frac{dr}{R} &= \frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1' \cdot \alpha\beta}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \end{aligned} \right\} (52)$$

Wij willen nu de integralen van (48) in de elliptische integralen van de eerste en tweede soort uitdrukken.

$$a) \quad I_1 = \int_{\beta}^{\alpha} r^2 \frac{dr}{R} = C_1 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)\sin\phi} \right)^2 \cdot \frac{d\phi}{\Delta\phi}$$

$$\text{waarin: } C_1 = \frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1' \cdot \alpha\beta}}; \quad \Delta\phi = \sqrt{1-k^2\sin^2\phi} \quad (53)$$

De integratiegrenzen $-\pi/2, +\pi/2$ volgen uit het feit, dat met $r = \beta, \alpha$ overeenkomen de waarden $-1, +1$ van $z = \sin\phi$.

Wij stellen nu ter vereenvoudiging:

$$\alpha \beta = b; \alpha + \beta = c; -(\alpha - \beta) = d \quad (54)$$

waardoor wij kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 C_1 b^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{1}{c + d \sin \phi} \right)^2 \frac{d\phi}{\Delta \phi} = 4 C_1 b^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(c - d \sin \phi)^2}{(c^2 - d^2 \sin^2 \phi)^2} \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\ &= 4 C_1 b^2 \left[c^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{(c^2 - d^2 \sin^2 \phi)^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} - 2cd \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sin \phi}{(c^2 - d^2 \sin^2 \phi)^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} + \right. \\ &\quad \left. + d^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sin^2 \phi}{(c^2 - d^2 \sin^2 \phi)^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} \right] \quad (55) \end{aligned}$$

Direct is in te zien, dat de tweede integraal in den vorm tusschen haken van (55) nul wordt, zoodat wij alleen nog de waarde van de beide andere integralen moeten bepalen.

$$\begin{aligned} 1^o \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{(c^2 - d^2 \sin^2 \phi)^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(c^2 - d^2 \sin^2 \phi)^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\ &= \frac{2}{d^4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(-\frac{c^2}{d^2} + \sin^2 \phi \right)^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \frac{2}{d^4} V_{-2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (56) \end{aligned}$$

waarbij dus in het algemeen in ons geval geldt:

$$V_\mu(\phi) = \int_0^\phi \frac{\left(-\frac{c^2}{d^2} + \sin^2 \phi \right)^\mu d\phi}{\Delta \phi} \quad (57)$$

Om $V_\mu(\phi)$ te berekenen moeten wij van de volgende reductieformule gebruik maken:

$$\left(-\frac{c^2}{d^2} + \sin^2 \phi\right)^\mu \sin \phi \cos \phi \Delta \phi = -2\mu A V_{\mu-1} + (2\mu+1) B V_\mu - \\ - (2\mu+2) C V_{\mu+1} + (2\mu+3) k^2 V_{\mu+2} \quad (58)$$

waarin:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{c^2}{d^2} \left(1 - \frac{c^2}{d^2}\right) \left(1 - k^2 \frac{c^2}{d^2}\right); B = 1 - 2\frac{c^2}{d^2} - 2k^2 \frac{c^2}{d^2} + 3k^2 \frac{c^4}{d^4} \\ C &= 1 + k^2 - 3k^2 \frac{c^2}{d^2} \end{aligned} \right\} (59)$$

Daar wij nog meerdere functies zullen moeten berekenen, laten wij voorloopig in de gevonden uitdrukking $V_{-2} \left(\frac{\pi}{2}\right)$ staan.

$$\begin{aligned} 2^0. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \phi}{(c^2 - d^2 \sin^2 \phi)^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} &= 2 \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \phi}{(c^2 - d^2 \sin^2 \phi)^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\ &= \frac{2}{d^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \phi}{\left(-\frac{c^2}{d^2} + \sin^2 \phi\right)^2} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \frac{2}{d^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\left(-\frac{c^2}{d^2} + \sin^2 \phi\right) \Delta \phi} + \\ &+ \frac{2c^2}{d^6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\left(-\frac{c^2}{d^2} + \sin^2 \phi\right)^2 \cdot \Delta \phi} = \frac{2}{d^4} V_{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2c^2}{d^6} V_{-2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (60) \end{aligned}$$

Door substitutie van (56) en (60) in (55) verkrijgt men:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\beta}^{\alpha} r^2 dr = 4 C_1 b^2 \left[\frac{2c^2}{d^4} V_{-2} \left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{d^2} V_{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2c^2}{d^4} V_{-2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{8 C_1 b^2}{d^2} \left[V_{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2c^2}{d^2} V_{-2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (61) \end{aligned}$$

$$b.) \quad I_2 = \int_{\beta}^a r \frac{dr}{R} = C_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2 \alpha \beta}{(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) \sin \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi}$$

Maken wij weer gebruik van de substitutie (54), dan is dus:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 C_1 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{c + d \sin \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = 2 C_1 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{c - d \sin \phi}{c^2 - d^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\ &= 2 C_1 b \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{c}{c^2 - d^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin \phi}{c^2 - d^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} \right] \end{aligned}$$

De laatste integraal heeft de waarde nul, terwijl we voor de voorgaande kunnen schrijven:

$$2 c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{c^2 - d^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = -\frac{2 c}{d^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-c^2 + d^2 \sin^2 \phi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = -\frac{2 c}{d^2} V_{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

zoodat hieruit volgt:

$$I_2 = \int_{\beta}^a r \frac{dr}{R} = 2 C_1 b \cdot -\frac{2 c}{d^2} V_{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{4 C_1 b c}{d^2} V_{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (62)$$

$$c) \quad I_3 = \int_{\beta}^a \frac{dr}{R} = C_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\Delta \phi} = 2 C_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\Delta \phi} = 2 C_1 K \quad (63)$$

waarin K de complete integraal van de eerste soort voorstelt.

$$\begin{aligned}
 d) \quad I_4 &= \int_{\beta}^a \frac{1}{r^2} \frac{dr}{R} = C_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) \sin \phi}{2 \alpha \beta} \right)^2 \cdot \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\
 &= \frac{C_1}{4 b^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (c + d \sin \phi)^2 \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \frac{C_1}{4 b^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (c^2 + 2 c d \sin \phi + d^2 \sin^2 \phi) \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \\
 &= \frac{C_1}{4 b^2} \left[2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\Delta \phi} + 2 c d \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \frac{d\phi}{\Delta \phi} + 2 d^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi \frac{d\phi}{\Delta \phi} \right]
 \end{aligned}$$

De tweede integraal in deze uitdrukking heeft de waarde nul, terwijl wij de waarde van de laatste vinden met behulp der uitdrukking:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \phi \, d\phi}{\Delta \phi} = \frac{1}{k^2} F(\phi) - \frac{1}{k^2} E_1(\phi)$$

waarin: $F(\phi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{\Delta \phi}$; $E_1(\phi) = \int_0^{\varphi} \Delta \phi \, d\phi$

Hieruit volgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi \frac{d\phi}{\Delta \phi} = \frac{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - E_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k^2} = \frac{K - E}{k^2}$$

waarin E de complete integraal van de 2^e soort voorstelt. Door substitutie van deze waarde in bovenstaande uitdrukking vinden wij:

$$I_4 = \frac{C_1}{4 b^2} \left[2 c^2 K + 2 d^2 \frac{K - E}{k^2} \right] = \frac{C_1}{2 b^2} \left[c^2 K + d^2 \frac{K - E}{k^2} \right] \quad (64)$$

Voeren wij nu de uitkomsten voor de integralen I_1, I_2, I_3, I_4 [zie formules (61) t/m (64)] in de vergelijking (48) in, dan verkrijgen wij:

$$- 2m\alpha_1' \frac{8C_1b^2}{d^2} \left[V_{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2c^2}{d^2} V_{-2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - m\mu_1 \frac{4C_1bc}{d^2} V_{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \\ - \alpha_2^2 \cdot 2C_1K + \frac{1}{4} m\mu_1 a^3 \frac{C_1}{2b^2} \left[c^2 K + d^2 \frac{K-E}{k^2} \right] = \frac{n'h}{2}$$

Deeling door C_1 geeft:

$$- 2m\alpha_1' \frac{8b^2}{d^2} \left[V_{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2c^2}{d^2} V_{-2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - m\mu_1 \frac{4bc}{d^2} V_{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \\ - 2\alpha_2^2 K + \frac{m\mu_1 a^3}{8b^2} \left[c^2 K + d^2 \frac{K-E}{k^2} \right] = \frac{n'h}{2C_1} \quad (65)$$

Wij moeten nu nog de waarden van $V_{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en $V_{-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bepalen. Volgens is:

$$V_{-1}(\phi) = \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\left(-\frac{c^2}{d^2} + \sin^2\phi\right)^{-1} \Delta\phi} = -\frac{d^2}{c^2} \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\left(1 - \frac{d^2}{c^2} \sin^2\phi\right) \Delta\phi} = \\ = -\frac{d^2}{c^2} \Pi_1\left(\phi, -\frac{d^2}{c^2}\right) \quad (66)$$

Nu ligt de parameter $-\frac{d^2}{c^2}$ tusschen $-k^2$ en 1 en moeten wij bijgevolg stellen:

$$-\frac{d^2}{c^2} = -k^2 \sin^2 am(i a_1 + K) \quad (67)$$

Met behulp der nieuw ingevoerde grootheid a_1 vinden wij:

$$V_{-1}(\phi) = -\frac{d^2}{c^2} \left[u + \frac{\Delta am(a_1, k')}{k'^2 \sin am(a_1, k') \cos(am a_1, k')} i \Pi(u, i a_1 + K) \right] \quad (68)$$

waarin: $u = F(\phi)$; $k' \equiv$ complementaire modulus $= \sqrt{1-k^2}$ en $\Pi(u, a_1) \equiv$ normaalvorm van JACOBI =

$$= \int_0^u \frac{k^2 \sin am a_1 \cos am a_1 \cdot \Delta am a_1 \sin^2 am u du}{1 - k^2 \sin^2 am a_1 \cdot \sin^2 am u}$$

Volgens (52) is $k = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha \beta}$, dus $k'^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{4} \cdot \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2}$.

Daar γ in ons geval zeer klein is, mogen wij k' gelijk 1 stellen. Uit (67) volgt verder:

$$\sin^2 \operatorname{am} (i a_1 + K) = \frac{d^2}{c^2 k^2} = \frac{4 \alpha^2 \beta^2}{\gamma^2 (\alpha + \beta)^2},$$

dus
$$\sin \operatorname{am} (i a_1 + K) = \frac{2 \alpha \beta}{\gamma (\alpha + \beta)}$$

Voeren wij nu de betrekking:

$$\sin \operatorname{am} (i a_1 + K) = \frac{1}{\Delta \operatorname{am}(a_1, k')}$$

in en stellen wij:

$$\phi_1 = \operatorname{am} (a_1, k')$$

dan vinden wij na eenige herleiding:

$$\frac{1}{1 - \sin^2 \phi_1} = \frac{4 \alpha^2 \beta^2}{\gamma^2 (\alpha + \beta)^2}$$

waaruit, daar γ zeer klein is, volgt:

$$\begin{aligned} \sin \phi_1 &= 1; \cos \phi_1 = \frac{\gamma (\alpha + \beta)}{2 \alpha \beta}; \operatorname{tg} \phi = \frac{2 \alpha \beta}{\gamma (\alpha + \beta)}; \\ \Delta \phi_1 &= \frac{\gamma (\alpha + \beta)}{2 \alpha \beta} \end{aligned} \quad (69)$$

Voor $\phi = \frac{\pi}{2}$ gaat (68) over in:

$$V_{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = - \frac{d^2}{c^2} \left[K + \frac{\Delta \operatorname{am} (a_1, k')}{k'^2 \sin \operatorname{am} (a_1, k') \cos \operatorname{am} (a_1, k')} i \Pi (K, i a_1 + K) \right]$$

Substitueeren wij hierin de waarden uit (69), dan verkrijgen wij:

$$V_{-1} \left(\frac{\pi}{2} \right) = - \frac{d^2}{c^2} [K + i \Pi (K, i a_1 + K)] \quad (70)$$

Nemen wij nu in aanmerking de volgende betrekkingen:

$$i \Pi (K, i a_1 + K) = i \Pi (K, i a_1) + \frac{k^2 \operatorname{tg} \operatorname{am} (a_1, k')}{\Delta \operatorname{am} (a_1, k')} K$$

$$\Pi (K, i a_1) = K \cdot E(i a_1) - i a_1 \cdot E$$

$$E(i a_1) = i [\operatorname{tg} \operatorname{am} (a_1, k') \cdot \Delta \operatorname{am} (a_1, k') - E(a_1, k') + a_1]$$

dan gaat (70) na eenige herleiding met gebruikmaking der waarden in (69) gevonden, over in:

$$V_{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = + \frac{d^2}{c^2} \left[a_1 (K - E) - K \left\{ E_1 (\operatorname{amh} . a_1, k') + \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \right\} \right] \quad (71)$$

waarin $\operatorname{amh} a_1 =$ hyperbolische amplitude van het argument a_1 .

Wij gaan nu over tot de bepaling van de waarde van $V_{-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Uit (58,59) volgt:

$$V_{-2}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2A} \left(B V_{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - k^2 V_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \quad (72)$$

$$\text{waarin } V_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 - \frac{c^2}{d^2} k^2}{k^2} F\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{k^2} E_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 - \frac{c^2}{d^2} k^2}{k^2} K - \frac{E}{k^2}$$

Voeren wij in de laatste betrekking $c = \alpha + \beta$, $d = \alpha - \beta$

en $k = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha \beta}$ in, dan geeft substitutie dezer waarde in (72)

in verband met (71):

$$V_{-2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2A} \left[B \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \left\{ a_1 (K - E) - K [E_1 (\operatorname{amh} a_1, k') + \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2] \right\} - \left(1 - \frac{\gamma^2}{4} \cdot \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} \right) K + E \right] \quad (73)$$

Daar $\alpha_2 = \frac{n h}{2 \pi}$, zoo vinden wij door substitutie van (73) en (71) in (65) eene betrekking, welke de afhankelijkheid aangeeft van de energie $-\alpha_1$ t.o.v. de quantengetallen n en n' .

Deze afhankelijkheid is echter zeer ingewikkeld en ter vereenvoudiging voeren wij weder de grootheid η' in, gegeven door: $\alpha'_1 = \eta' \frac{m \mu_1^2}{4 \alpha_2^2}$.

Maken wij verder gebruik van de waarden voor α en β in 4.13 gevonden, terwijl wij stellen:

$$\gamma = \varepsilon . n^2 . 10^{-9} \quad (74)$$

dan vinden wij:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= 5,524 \cdot \frac{n^2}{\eta'} \cdot 10^{-9} = c; \quad \alpha - \beta = 5,524 \frac{n^2}{\eta'} \sqrt{1 - 2\eta'} \cdot 10^{-9} = -d \\ b = \alpha \beta &= \frac{n^4}{\eta'^2} \cdot 7,629 \cdot 2 \eta' \cdot 10^{-18}; \quad k = \varepsilon \cdot 0,181 \sqrt{1 - 2\eta'} \\ A &= \frac{2 \eta'}{(1 - 2\eta')^2}; \quad B = -\frac{1 + 2 \eta'}{1 - 2 \eta'}; \quad \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \sqrt{1 - 2 \eta'} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

waarbij wij reeds van het feit, dat γ zeer klein is, gebruik gemaakt hebben.

Door invoering van de waarden (75) vinden wij ten slotte voor de betrekking tusschen η' , n en n' :

$$2K(1 - \eta') - a_1(K - E) - E + \frac{0,0584}{n^6} \left[K + \frac{K - E}{\varepsilon^2 \cdot 0,0328} \right] = \frac{n'}{n} 1,57 \quad (76)$$

Hieruit kunnen wij weer bij verschillende waarden van η' de verhouding $\frac{n'}{n}$ berekenen.

Het resultaat dezer berekening is, dat $\frac{n'}{n}$ ligt in het interval (1,0), zoodat voor $n \geq 4$ bij $\eta' = 0,5$ cirkelbanen mogelijk zijn, die aan de quantenvoorwaarden voldoen.

Ook voor $n = 1, 2, 3$ zijn cirkelbanen mogelijk, maar voor waarden van η' , die een weinig grooter dan 0,5 zijn (zie tabel in 4.13).

De energie α_1 dezer laatste banen is:

$$\alpha_1 = - \frac{2\eta'}{n^2} Nh$$

hetwelk wij kunnen brengen in den vorm

$$\alpha_1 = - \frac{Nh}{(n + \delta)^2}$$

waarin δ dan de Rydberg'sche correctie voorstelt.

Berekenen wij deze δ uit onze gegevens, dan vinden wij:

	$n = 2$	$n = 3$	
Berekend	— 0,001	— 0,00012	Orthohelium. Parhelium.
Empirisch	— 0,069	— 0,003	
	+ 0,011	— 0,002	

Hieruit blijkt, dat de berekende waarden veel te klein zijn. BORN vindt voor δ te groote waarden, ¹⁾ zoodat het misschien mogelijk zou zijn door de polarisatie van het atoom in aanmerking te nemen, bij de storingtheoretische behandeling van het probleem te komen tot waarden van δ , die met de experimenteele waarden beter overeenstemmen,

¹⁾ BORN, Vorlesungen über Atommechanik, blz. 341.

STELLINGEN.

I.

De opschuifbaarheid van de zwartingskrommen moet voor elke plaatsoort afzonderlijk onderzocht worden.

Zie: BUISSON-FABRY. *Revue d'Optique* I (1924).

BEEKMAN-OUDT. *Zeitschr. f. Phys.* Bd. 29 (1924).

II.

De formuleering der hypothesen van de quantentheorie door BOHR, KRAMERS en SLATER is te verkiezen boven de gebruikelijke.

Zie: *Zeitschr. f. Phys.* Bd. 24, p. 69 (1924).

III.

Hetgeen YOUNG zegt omtrent de methode van lengtebepaling met behulp van chronometers, is niet geheel juist.

Zie: YOUNG, *General Astronomy* § 121.

IV.

Het is ten eerste gewenscht bij de waarnemingen op zee steeds de kimduiking door meting te bepalen.

V.

Is bij zonswaarnemingen de topsafstand niet grooter dan 6° , dan kan men in de zeekaart (MERCATOR's projectie) de

hoogtekromme door een cirkel benaderen. Op de praktische waarde dezer methode wordt in de leerboeken der zeevaartkunde te weinig de aandacht gevestigd.

Zie o.a.: P. HAVERKAMP, J. VAN ROON, L. M. J. GREGORY.
Zeevaartkunde, deel I, blz. 444.

VI.

Beweegt eene rechte zich zóó, dat drie harer punten bewegen in drie gegeven vlakken, dan beschrijft een vierde punt dezer rechte een ellipsoïde.

Het bewijs dezer stelling is te geven, uitgaande van het volgende planimetrische probleem:

Beweegt eene rechte zich met twee harer punten op twee elkaar snijdende rechten, dan beschrijft een derde punt dezer rechte een ellips.

Zie: A. MANNHEIM, Principes et développements de la géométrie cinématique, p. 175.

VII.

De behandeling van $\int_0^{\infty} \frac{x^a - 1}{1 + x} dx$ door CZUBER is niet geheel juist.

Zie: CZUBER, Diff. u. Integralrechnung DI II, (1921), p. 204.

VIII.

Met behulp van de methode van CAUCHY is

$\int_0^{\pi} \lg(1 - 2r \cos \phi + r^2) \frac{d\phi}{\cos \phi}$ op eenvoudige wijze te bepalen.

Zie: BIERENS DE HAAN, Intégrales définies T. 331. 3° p. 471 en:
Verslagen Kon. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, VIII,
p. 563 (1862).

