



De verwantschap $[2,2]$ en hare toepassing op vlakke kubische krommen

<https://hdl.handle.net/1874/285795>

DE VERWANTSCHAP
[2,2]
EN HARE TOEPASSING OP
VLAKKE KUBISCHE KROMMEN

DOOR

H. B. VAN DER HEIJDE

s.
cht

6

DE VERWANTSCHAP [2,2]
EN HARE TOEPASSING OP VLAKKE
KUBISCHE KROMMEN



Diss. Utrecht 1926

DE VERWANTSCHAP [2,2] EN HARE TOEPASSING OP VLAKKE KUBISCHE KROMMEN

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN
DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN
NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVER-
SITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN
RECTOR MAGNIFICUS MR J. P. SUIJLING
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER
RECHTSGELEERDHEID, VOLGENS BE-
SLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVER-
SITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN
DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUUR-
KUNDE TE VERDEDIGEN OP WOENSDAG
7 JULI 1926, 'S NAMIDDAGS TE 4 UUR.

DOOR

HERMANUS BERNARDUS VAN DER HEIJDE
GEBOREN TE SCHIEDAM

H. J. PARIS
AMSTERDAM — MCMXXVI

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

AAN
WIJLEN MIJN MOEDER

Bij het voltooiën van dit proefschrift maak ik gaarne van de gelegenheid gebruik mijn dank te betuigen aan ieder, die op eenige wijze mij bij mijn studie heeft gesteund.

Daarbij denk ik in het bijzonder aan U, Hooggeleerde Kapteyn. Voor de voorlichting, die Gij mij meermalen zoo welwillend hebt gegeven, wanneer ik U daarom verzocht, zal ik steeds erkentelijk blijven.

Het meest echter weet ik mij aan U verplicht, Hooggeleerde De Vries, Hooggeachte Promotor. Voor Uw advies bij de keuze van het onderwerp, alsmede voor de correctie van het handschrift, breng ik U hier mijn hartelijken dank.

INLEIDING

Het onderwerp van dit proefschrift is, voor zoover mij bekend, tot nu toe alleen behandeld in geschriften van EMIL WEYR, PROF. DR. J. DE VRIES en R. STURM.

De analytische eigenschappen der $[2,2]$ vinden bij WEYR slechts een korte bespreking. Een paar der belangrijkste eigenschappen zijn door PROF. DE VRIES onderzocht in een tweetal artikelen, verschenen in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. STURM eindelijk geeft in „*Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I*” een uitvoeriger behandeling van dit deel der theorie.

In hoofdstuk I van dit proefschrift wordt thans een systematische samenvatting gegeven van de tot dusver verkregen resultaten, uitgebreid met eenige bewijzen en ontwikkelingen, welke tot nu toe ontbraken. Door doelmatige parameterkeuze, die aan de algemeenheid niet te kort doet, zijn bovendien enkele bij STURM voorkomende bewijzen vereenvoudigd.

E. WEYR en PROF. J. DE VRIES hebben de $[2,2]$ gebruikt voor het onderzoek van de eigenschappen der vlakke krommen van de 3e en 4e orde van 't geslacht 1. De resultaten van hun arbeid ten opzichte van de kubische krommen, gedeeltelijk gewijzigd en uitgebreid, zijn opgenomen in de hoofdstukken III en IV.

Litteratuur:

1. R. STURM, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I*. B. G. Teubner.
2. J. DE VRIES, Ueber einen Correspondenzsatz. *Nieuw Archief voor Wiskunde*. 2e R. Deel VII.

3. J. DE VRIES, Ueber die zwei-zweideutige Verwandtschaft. N. Arch. voor Wisk. 2e R. Deel IX.
4. J. DE VRIES, Over vlakke krommen der derde orde. N. Arch. voor Wisk. 1e R. Deel XII.
5. E. WEYR, Erzeugung der Curven 3er Ordnung mittelst symmetrischer Elementensysteme zweiten Grades. Akad. der Wiss. Wien. Deel 69.
6. H. DURÈGE, Die ebenen Kurven dritter Ordnung.
7. L. CREMONA, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven. Uebers. v. M. CURTZE.

HOOFDSTUK I

1 — Tusschen twee elementenstelsels U en U_1 bestaat een verwantschap $[2,2]$, wanneer met elk element van U twee elementen van U_1 overeenkomen, terwijl eveneens met elk element van U_1 er twee overeenkomen uit U .

Wordt elk element in U bepaald door zijn parameter λ en in U_1 door μ , dan is de algebraïsche verwantschapsvergelijking in 't algemeen:

$$a_{22}\lambda^2\mu^2 + a_{21}\lambda^2\mu + a_{12}\lambda\mu^2 + a_{20}\lambda^3 + a_{02}\mu^3 + a_{11}\lambda\mu + a_{10}\lambda + a_{01}\mu + a_{00} = 0 \dots (1).$$

Deze verwantschap is projectief d. w. z. als 't stelsel u' projectief is ten opzichte van U en u'_1 projectief ten opzichte van U_1 , dan bestaat tusschen u' en u'_1 ook een verwantschap $[2,2]$.

Het aantal termen der vergelijking bedraagt 9. Door 8 constanten wordt de vergelijking bepaald. Tusschen twee bepaalde stelsels zijn dus ∞^8 verwantschappen $[2,2]$ mogelijk.

De constanten kunnen ééNZinnig bepaald worden door acht paar overeenkomstige elementen. Hieruit volgt:

Een verwantschap $[2,2]$ tusschen twee gegeven stelsels wordt ééNZinnig bepaald door acht paren overeenkomstige elementen.

2 — Bijzondere beteekenis hebben in verg. 1 die waarden van $\lambda(\mu)$, waarvoor de beide overeenkomstige waarden van μ (λ) samenvallen. We kunnen schrijven:

$$(a_{00} + a_{10}\lambda + a_{20}\lambda^2) + (a_{01} + a_{11}\lambda + a_{21}\lambda^2)\mu + (a_{02} + a_{12}\lambda + a_{22}\lambda^2)\mu^2 = 0.$$

Voorwaarde, dat de beide waarden van μ samenvallen is:

$$(a_{01} + a_{11}\lambda + a_{21}\lambda^2)^2 - 4(a_{00} + a_{10}\lambda + a_{20}\lambda^2) \times (a_{02} + a_{12}\lambda + a_{22}\lambda^2) = 0. \quad (2).$$

Dit is een vergelijking van den vierden graad in λ . Er zijn dus vier elementen in U , waarvoor de overeenkomstige elementen van U_1 samenvallen. Deze elementen van U heeten „*vertakkings-elementen*,” de ermee overeenkomende uit U' „*dubbelelementen*.”

Evenzoo bevat U' vier vertakkings-elementen, waarmee in U evenveel dubbelelementen overeenkomen. Samen heeten deze zestien elementen de „*singuliere elementen*”.

Is verg. (2) identiek nul, dan is elk element vertakkings-element, waarmee steeds een element van 't andere systeem als dubbelelement overeenkomt.

3 — We kunnen de parameters zóó kiezen, dat $\lambda = \infty$ en $\mu = \infty$ vertakkings-elementen bepalen, terwijl de daarmee overeenkomende dubbelelementen worden aangewezen door $\mu = 0$, $\lambda = 0$.

Aan de verwantschapsverg. moet dan voldaan worden, zoo-
wel door $\lambda = \infty$, $\mu^2 = 0$, als door $\lambda^2 = 0$, $\mu = \infty$. Dit eischt,
dat $a_{21} = a_{12} = a_{20} = a_{02} = 0$, waardoor overblijft:

$$a_{22}\lambda^2\mu^2 + a_{11}\lambda\mu + a_{10}\lambda + a_{01}\mu + a_{00} = 0,$$

welke vergelijking na deeling door a_{22} kan geschreven worden
in den vorm

$$\lambda^2\mu^2 + 2a\lambda\mu + 2b\lambda + 2b'\mu + c = 0. \quad (3)$$

De vertakkings-elementen worden nu gevonden uit:

$$(a\lambda + b')^2 - \lambda^2(2b\lambda + c) = 0.$$

$$(a\mu + b)^2 - \mu^2(2b'\mu + c) = 0.$$

Na rangschikking:

$$2b\lambda^3 + (c - a^2)\lambda^2 - 2ab'\lambda - b'^2 = 0. \quad (4a)$$

$$2b'\mu^3 + (c - a^2)\mu^2 - 2ab\mu - b^2 = 0. \quad (4b).$$

Vermenigvuldigen we (4a) met b^2 en (4b) met b'^2 , dan vinden we:

$$2b^3\lambda^3 + (c - a^2)b^2\lambda^2 - 2abb'\lambda - b^2b'^2 = 0.$$

$$2b'^3\mu^3 + (c - a^2)b'^2\mu^2 - 2abb'b'\mu - b'^2b^2 = 0.$$

De eerste verg. gaat over in de tweede door de substitutie

$$b\lambda = b'\mu.$$

Ook de vertakkingselementen $\mu = \infty$, $\lambda = \infty$ voldoen hieraan. Daaruit blijkt, dat de beide vertakkingsquadrupels projectief zijn. Duiden we de vertakkingselementen aan met $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$; $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, dan geldt dus:

$$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4).$$

Van de 24 dubbelverhoudingen tusschen vier elementen zijn echter telkens 4 aan elkaar gelijk. Dus moet ook gelden:

$(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (\mu_2 \mu_1 \mu_4 \mu_3) = (\mu_4 \mu_3 \mu_2 \mu_1) = (\mu_3 \mu_4 \mu_1 \mu_2)$, d. w. z. *de vertakkingselementen van beide stelsels zijn op vier verschillende wijzen projectief.*

Ook de dubbelelementen van beide stelsels staan in projectieve betrekking. Dit blijkt aldus:

Een vertakkingselement λ_K komt overeen met het dubbelelement

$$\mu^{(K)} = - \frac{a\lambda_K + b'}{\lambda_K^2};$$

evenzoo komt μ_K overeen met

$$\lambda^{(K)} = - \frac{a\mu_K + b}{\mu_K^2}.$$

Deze betrekkingen kunnen geschreven worden in den vorm

$$b'\mu = -bb' \frac{a.b\lambda + bb'}{b^2\lambda^2}$$

$$b\lambda = -bb' \frac{a.b\mu + bb'}{b'^2\mu^2}$$

Door de transformatie

$$b\lambda = b'\mu$$

gaat de eene in de andere over. Hieruit volgt de stelling:

De acht singuliere elementen van het eene stelsel zijn op vier verschillende wijzen projectief ten opzichte van de singuliere elementen van het andere systeem. De vertakkingselementen en de dubbelelementen van het eene stelsel zijn respectievelijk toegevoegd aan de vertakkingselementen en de dubbelelementen van het andere. (EMIL WEYR).

4 — Tusschen de vertakkingselementen en de dubbelelementen van een stelsel bestaan drie quadratische involuties zoodanig, dat tot elke involutie behooren twee paren vertakkingselementen benevens de twee paren overeenkomende dubbelelementen.

Noemen we de singuliere elementen van 't eerste stelsel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; \lambda^I, \lambda^{II}, \lambda^{III}, \lambda^{IV}$ en van het tweede $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; \mu^I, \mu^{II}, \mu^{III}, \mu^{IV}$, waarbij in elke groep de eerste vier de vertakkingselementen zijn, dan hebben we volgens art. 3 de volgende betrekkingen:

$$\mu^I = - \frac{a\lambda_1 + b'}{\lambda_1^2}$$

$$b\lambda^I = b'\mu^I, \text{ dus } \lambda^I = - \frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_1 + b'}{\lambda_1^2},$$

en analoge betrekkingen tusschen

λ^{II} en λ_2 enz.

Kiezen we de parameters zóó, dat $\lambda_1 = \infty$ en $\mu_1 = \infty$ vertakkingselementen zijn en $\lambda^I = 0, \mu^I = 0$ de bijbehorende dubbelelementen, dan gelden bovendien de verg. (4a) en (4b)

$$\left. \begin{aligned} 2b\lambda^3 + (c - a^2)\lambda^2 - 2ab'\lambda - b'^2 &= 0 \\ 2b'\mu^3 + (c - a^2)\mu^2 - 2ab\mu - b^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

waaruit:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= \frac{a^2 - c}{2b} \\ \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_2 &= - \frac{ab'}{b} \\ \lambda_2\lambda_3\lambda_4 &= \frac{b'^2}{2b} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

We zullen nu bewijzen, dat aan de verg. der involutie, bepaald door de paren $\lambda_1\lambda_2, \lambda^I\lambda^{II}$ ook voldaan wordt door de paren $\lambda_3\lambda_4$ en $\lambda^{III}\lambda^{IV}$.

De algemeene involutievergelijking is:

$$\lambda_1\lambda_2 + \alpha(\lambda_1 + \lambda_2) + \beta = 0$$

$\lambda_1 = \infty$, dus $\lambda_2 + \alpha = 0$, waaruit $\alpha = -\lambda_2$.

Hierdoor wordt de vergelijking:

$$\kappa_1 \kappa_2 - \lambda_2 (\kappa_1 + \kappa_2) + \beta = 0.$$

Substitueer hierin $\lambda^I = 0$, $\lambda^{II} = -\frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2^2}$.

We vinden uit:

$$\lambda^I \lambda^{II} - \lambda_2 (\lambda^I + \lambda^{II}) + \beta = 0,$$

daar $\lambda^I = 0$ is: $\beta = \lambda_2 \lambda^{II} = -\frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2}$.

Hiermee is de involutievergelijking bepaald:

$$\kappa_1 \kappa_2 - \lambda_2 (\kappa_1 + \kappa_2) - \frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2} = 0. \quad (6)$$

In de eerste plaats moeten daaraan voldoen λ_3 , λ_4 .

Uit de betrekkingen (5) volgt

$$\lambda_3 + \lambda_4 = \frac{a^2 - c - 2b\lambda_2}{2b},$$

$$\lambda_3 \lambda_4 = \frac{b'^2}{2b\lambda_2}.$$

Dit gesubstitueerd in

$$\lambda_3 \lambda_4 - \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{b'(a\lambda_2 + b')}{b\lambda_2} = 0$$

geeft

$$\begin{aligned} \frac{b'^2}{2b\lambda_2} - \frac{(a^2 - c)\lambda_2 - 2b\lambda_2^2}{2b} - \frac{b'(a\lambda_2 + b')}{b\lambda_2} = \\ \frac{2b\lambda_2^3 + (c - a^2)\lambda_2^2 - 2ab'\lambda_2 - b'^2}{2b\lambda_2} = 0. \end{aligned}$$

Daar λ_2 een wortel is van (4a), is de teller 0 en daarmee de geheele breuk.

λ_3 en λ_4 voldoen dus aan de involutievergelijking.

Voorts staat te bewijzen, dat ook λ^{III} , λ^{IV} aan de verg. voldoen dus:

$$\lambda^{III} \lambda^{IV} - \lambda_2 (\lambda^{III} + \lambda^{IV}) - \frac{b'(a\lambda_2 + b')}{b\lambda_2} = 0.$$

$$\text{Hierin is: } \lambda^{\text{III}} = -\frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_3 + b'}{\lambda_3^2},$$

$$\lambda^{\text{IV}} = -\frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_4 + b'}{\lambda_4^2}.$$

Substitutie van deze waarden en herleiding van de verkregen vergelijking, onder gebruikmaking van de betrekkingen, boven afgeleid voor $\lambda_3 + \lambda_4$ en $\lambda_3\lambda_4$, geeft

$$\frac{b'^2}{b^2} \cdot \frac{(a\lambda_4 + b')(a\lambda_3 + b')}{\lambda_3^2 \lambda_4^2} + \frac{b'}{b} \cdot \lambda_2 \left(\frac{a\lambda_3 + b'}{\lambda_3^2} + \frac{a\lambda_4 + b'}{\lambda_4^2} \right) -$$

$$-\frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2} = 0$$

$$\frac{a^2\lambda_3\lambda_4 + ab'(\lambda_3 + \lambda_4) + b'^2 + \frac{b}{b'} \cdot \lambda_2 \{ a\lambda_3\lambda_4(\lambda_3 + \lambda_4) + b'(\lambda_3^2 + \lambda_4^2) \}}{\lambda_3^2 \lambda_4^2} =$$

$$= \frac{b}{b'} \cdot \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2}$$

Na substitutie en herleiding:

$$\frac{\frac{ab'}{b} \{ 2b^3\lambda_2^3 + b^2(c - a^2)\lambda_2^2 - 2ab^2b'\lambda_2 \}}{b'^4} +$$

$$+ \frac{4a^2bb'^2\lambda_2 + 4abb'(a^2 - c)\lambda_2^2 + 4b^2b'^2\lambda_2^2 + b(a^2 - c)^2\lambda_2^3 - 4b^3\lambda_2^5}{b'^4} =$$

$$= \frac{ab}{b'} + \frac{b}{\lambda_2}.$$

Nu is λ_2 een wortel van

$$2b^3\lambda_2^3 + b^2(c - a^2)\lambda_2^2 - 2ab^2b'\lambda_2 - b^2b'^2 = 0.$$

De eerste breuk wordt daarom:

$$\frac{\frac{ab'}{b} \times b^2b'^2}{b'^4} = \frac{ab}{b'}$$

Dus moet nog bewezen worden:

$$\frac{4abb'^2\lambda_2 + 4abb'(a^2 - c)\lambda_2^2 + 4b^2b'^2\lambda_2^2 + b(a^2 - c)^2\lambda_2^3 - 4b^3\lambda_2^5}{b'^4} = \frac{b}{\lambda_2},$$

of

$$4a^2b'^2\lambda_2^2 + 4ab'(a^2 - c)\lambda_2^3 + 4bb'^2\lambda_2^3 + (a^2 - c)^2\lambda_2^4 - 4b^2\lambda_2^6 - b'^4 = 0$$

$$\{2ab'\lambda_2 - (c - a^2)\lambda_2^2\}^2 - \{2b\lambda_2^3 - b'^2\}^2 = 0.$$

$$[2b\lambda_2^3 - (c - a^2)\lambda_2^2 + 2ab'\lambda_2 - b'^2] [-2b\lambda_2^3 - (c - a^2)\lambda_2^2 + 2ab'\lambda_2 + b'^2] = 0.$$

Volgens (4a) is de laatste factor van dit product nul. Aan de vergelijking wordt dus voldaan.

Hiermee is dus aangetoond het bestaan van een involutie I_1 met de paren $\lambda_1\lambda_2$, $\lambda_3\lambda_4$, $\lambda^I\lambda^{II}$, $\lambda^{III}\lambda^{IV}$.

Het is echter dadelijk in te zien, dat op volkomen gelijke wijze is aan te toonen het bestaan van de involuties met de paren:

$$\lambda_1\lambda_3, \lambda_2\lambda_4, \lambda^I\lambda^{III} \text{ en } \lambda^{II}\lambda^{IV} \dots \dots \dots (I_2)$$

en $\lambda_1\lambda_4, \lambda_2\lambda_3, \lambda^I\lambda^{IV} \text{ en } \lambda^{II}\lambda^{III} \dots \dots \dots (I_3)$

Deze drie involuties vormen een tripel van elkaar steunende of geconjugeerde involuties. Nemen we toch bij de elementen van een paar van een dezer involuties de bijbehorende volgens een andere, dan vormen deze een ander paar der eerste involutie. B.v. bij $\lambda_1\lambda_4$ van I_3 nemen we de overeenkomende elementen uit I_1 , dat zijn $\lambda_2\lambda_3$. Deze vormen een ander paar van I_3 .

5 — Een involutie met de paren $\lambda_1\lambda^I$, $\lambda_2\lambda^{II}$, $\lambda_3\lambda^{III}$, $\lambda_4\lambda^{IV}$ is niet mogelijk.

Nemen we dezelfde parameters en bepalen we de involutie door de paren $\lambda_1\lambda^I$ en $\lambda_2\lambda^{II}$. In de algemeene vergelijking

$$\kappa_1\kappa_2 + \alpha(\kappa_1 + \kappa_2) + \beta = 0$$

moet dan in de eerste plaats $\alpha = 0$ zijn dus

$$\kappa_1\kappa_2 + \beta = 0$$

Daaraan moeten voldoen $\lambda_2\lambda^{II}$; dus

$$\beta = -\lambda_2\lambda^{II} = \frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2}.$$

De involutieverg. is dan

$$\kappa_1\kappa_2 + \frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2} = 0$$

Hieraan zouden nu moeten voldoen $\lambda_3\lambda^{\text{III}}$ en $\lambda_4\lambda^{\text{IV}}$ dus:

$$\lambda_3\lambda^{\text{III}} + \frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2} = 0$$

$$-\frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_3 + b'}{\lambda_3} + \frac{b'}{b} \cdot \frac{a\lambda_2 + b'}{\lambda_2} = 0.$$

Dit kan alleen als $\lambda_3 = \lambda_2$. Evenzoo zou $\lambda_4 = \lambda_2$ moeten zijn. Er bestaat dus geen involutie, waarbij in eenzelfde paar een vertakkingselement en het daarbij behorende dubbelelement voorkomen.

6 — Voor de elementen van het tweede stelsel vinden we natuurlijk ook drie geconjugeerde involuties. De eerste heeft tot vergelijking:

$$y_1y_2 - \mu_2(y_1 + y_2) - \frac{b}{b'} \cdot \frac{a\mu_2 + b}{\mu_2} = 0. \dots (7). (I_1')$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Door de substituties } x_1 &= \frac{b'}{b} y_1 \\ x_2 &= \frac{b'}{b} y_2 \\ \lambda_2 &= \frac{b'}{b} \mu_2 \end{aligned} \right\}$$

gaat de verg. (6) in (7) over.

De involuties (I_1) , (I_1') , gaan dus door projectie in elkander over. Hetzelfde is het geval met de involuties (I_2) , (I_2') en (I_3) , (I_3') .

7 — Stellen we de $[2, 2]$ weer voor door (3).

$$\lambda^2\mu^2 + 2a\lambda\mu + 2b\lambda + 2b'\mu + c = 0.$$

Zij $\lambda = \infty$ nu een tweevoudig vertakkingselement. Dan moet verg. (4a) ook een wortel $\lambda = \infty$ bezitten. Dit eischt, dat $b = 0$. Daardoor gaat (4b) over in:

$$2b'\mu^3 + (c - a^2)\mu^2 = 0.$$

Met $\lambda = \infty$ komt dus overeen het dubbele vertakkingselement $\mu = 0$. Volgens art. 3 kwam echter met het vertakkingselement

$\lambda = \infty$ overeen het dubbelelement $\mu = 0$. In $\mu = 0$ valt dus een dubbelelement van het tweede stelsel samen met twee vertakkingselementen.

Heeft ieder stelsel een dubbel vertakkingsselement, $\lambda^2 = \infty$ en $\mu^2 = \infty$, die niet met elkaar overeenkomen, dan wordt in verg. (4b) ook $b' = 0$, zoodat nu verg. (3) overgaat in

$$\lambda^2 \mu^2 + 2a\lambda\mu + c = 0.$$

of

$$(\lambda\mu + a - \sqrt{a^2 - c})(\lambda\mu + a + \sqrt{a^2 - c}) = 0. \dots (8).$$

De $[2, 2]$ bestaat nu uit twee projectiviteiten.

(J. DE VRIES).

8 — Veronderstellen wij nu, dat met elk element van het paar (λ_1, λ_2) van het eerste stelsel hetzelfde paar (μ_1, μ_2) van het tweede stelsel overeenkomt. We kunnen nu de parameters zóó kiezen, dat de waarden $\mu = 0$ en $\mu = \infty$ toegevoegd zijn aan $\lambda = 0$ en $\lambda = \infty$. In vergelijking (1) moet dan $a_{00} = a_{02} = a_{20} = a_{22} = 0$ zijn. Dus wordt de verg. thans

$$a_{21}\lambda^2\mu + a_{12}\lambda\mu^2 + 2a_{11}\lambda\mu + a_{10}\lambda + a_{01}\mu = 0. \dots (9)..$$

Vervormen we deze tot:

$$(a_{21}\lambda^2 + a_{11}\lambda + a_{01})\mu + (a_{12}\mu^2 + a_{11}\mu + a_{10})\lambda = 0.$$

dan blijkt, dat de $[2, 2]$ gevormd wordt door twee projectieve involuties:

$$\left. \begin{aligned} a_{21}\lambda^2 + a_{11}\lambda + a_{01} &= \rho\lambda \\ a_{12}\mu^2 + a_{11}\mu + a_{10} &= -\rho\mu \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Hieruit volgt de stelling:

„Als bij een twee-tweezinnige verwantschap een paar van het eene stelsel is toegevoegd aan een paar van het andere, dan correspondeert elk paar van het eene stelsel met een paar van het andere en de verwantschap ontstaat door de projectiviteit van twee quadratische involuties”.

(J. DE VRIES).

9 — Om de voorwaarde op te sporen, waaronder een $[2, 2]$ een

dergelijke projectiviteit wordt, gaan we uit van de algemeene verwantschapsvergelijking (1) en rangschikken deze naar afdalende machten van μ :

$$(a_{22}\lambda^2 + a_{12}\lambda + a_{02})\mu^2 + (a_{21}\lambda^2 + a_{11}\lambda + a_{01})\mu + (a_{20}\lambda^2 + a_{10}\lambda + a_{00}) = 0.$$

De vergelijkingen in μ , die we vinden, als we voor λ substitueeren de waarden λ_1 en λ_2 , waarvoor het in art. 8 onderstelde geval intreedt, moeten dezelfde wortels hebben.

Daarvoor is noodig, dat de coëfficiënten evenredig zijn. Derhalve:

$$(\alpha) \begin{cases} \frac{a_{21}\lambda_1^2 + a_{11}\lambda_1 + a_{01}}{a_{22}\lambda_1^2 + a_{12}\lambda_1 + a_{02}} = \frac{a_{21}\lambda_2^2 + a_{11}\lambda_2 + a_{01}}{a_{22}\lambda_2^2 + a_{12}\lambda_2 + a_{02}} \\ \frac{a_{20}\lambda_1^2 + a_{10}\lambda_1 + a_{00}}{a_{22}\lambda_1^2 + a_{12}\lambda_1 + a_{02}} = \frac{a_{20}\lambda_2^2 + a_{10}\lambda_2 + a_{00}}{a_{22}\lambda_2^2 + a_{12}\lambda_2 + a_{02}} \end{cases}$$

Verdrijven we de noemers en brengen alles naar links, dan kunnen we beide vergelijkingen deelen door $\lambda_1 - \lambda_2$. Dit is geoorloofd, want $\lambda_1 \neq \lambda_2$. We vinden dan:

$$(\beta) \begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\lambda_1\lambda_2 + (a_{01}a_{22} - a_{02}a_{21})(\lambda_1 + \lambda_2) + (a_{01}a_{12} - a_{02}a_{11}) = 0. \\ (a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20})\lambda_1\lambda_2 + (a_{00}a_{22} - a_{02}a_{20})(\lambda_1 + \lambda_2) + (a_{00}a_{12} - a_{02}a_{10}) = 0. \end{cases}$$

Naargelang we λ_1 of λ_2 elimineeren, vinden we:

$$(a_{22}\lambda_1^2 + a_{12}\lambda_1 + a_{02}) \Delta = 0.$$

$$(a_{12}\lambda_2^2 + a_{12}\lambda_2 + a_{02}) \Delta = 0.$$

waarin

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Aan deze vergelijkingen wordt voldaan, wanneer of de vormen tusschen haakjes nul zijn of $\Delta = 0$ is.

In 't eerste geval wordt aan de verg. (α) voldaan, doordat beide zijden ∞ worden; de gewenschte evenredigheid is daarmee niet bereikt. De voorwaarde moet dus zijn $\Delta = 0$.

In dit geval is gemakkelijk aan te toonen, dat de coëfficiënten

van de eene vergelijking (β) evenredig zijn met die der andere. Ter bepaling van λ_1 en λ_2 hebben we slechts één vergelijking, die een ∞ aantal oplossingen toelaat. Er zijn dus een ∞ aantal paren elementen van 't eerste stelsel, die aan onzen eisch voldoen.

De vergelijking (β), die we voor de oplossing gebruiken, is ten opzichte van λ_1, λ_2 bilineair en symmetrisch: de elementen λ_1, λ_2 doorloopen dus een involutie in het eerste systeem.

Waren we uitgegaan van twee elementen van 't tweede stelsel, die met dezelfde twee van het eerste overeenkomen, dan zou het betoog op dezelfde wijze verlopen zijn: slechts de indices waren verwisseld. De involutievergelijking in het tweede stelsel zou dan zijn:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\mu_1\mu_2 + (a_{10}a_{22} - a_{20}a_{12})(\mu_1 + \mu_2) + (a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11}) = 0.$$

Dus is

$$\Delta = 0$$

de voorwaarde, dat een verwantschap $[2, 2]$ met de vergelijking (1) een projectiviteit is van twee involuties. (R. STURM).

10 — Bestaat tusschen de elementen van twee stelsels, die door een $[2, 2]$ verbonden zijn, ook een projectiviteit, uitgedrukt door de bilineaire vergelijking.

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$$

dan blijkt, wanneer we de in μ uitgedrukte waarde van λ uit deze vergelijking substitueeren in (1) een vergelijking van den 4en graad in μ te ontstaan.

Hieruit volgt:

Bij een verwantschap $[2, 2]$ zijn er vier paren elementen, die tegelijk met elkaar overeenkomen in een projectiviteit tusschen dezelfde stelsels.

Collocale twee-tweezinnige verwantschappen

11 — Bevinden zich twee gelijksoortige stelsels op denzelfden

drager — twee puntreeksen op eenzelfde kromme, twee stralenbundels op 't zelfde centrum — dan kunnen er elementen voorkomen, die met één der corresponderende elementen samenvallen.

Het is dan steeds mogelijk in beide stelsels dezelfde parameterbepaling in te voeren. Doet men dit, dan geven gelijke parameters identieke elementen.

In verg. (1) wordt voor zoo'n element $\lambda = \mu$. Daardoor ontstaat een vergelijking van den 4en graad. De vier wortels bepalen de 4 coïncidenties. Dus:

Twee collocale stelsels, waartusschen een [2, 2] bestaat, hebben vier coïncidenties.

12 — Bestaat tusschen de elementen van twee collocale stelsels, die door een [2, 2] verbonden zijn, tevens een quadratische involutie, dan blijkt op dezelfde wijze als in art. 10:

Twee collocale stelsels waartusschen een [2, 2] bestaat, hebben vier paren overeenkomstige elementen, die tevens paren zijn van een op denzelfden drager gelegen involutie.

Als elementen van de [2, 2] zijn deze paren in 't algemeen niet involutorisch.

13 — Bij collocale stelsels kunnen paren voorkomen, die in de [2, 2] wel involutorisch zijn. Nemen we (1) weer als verwantschapsvergelijking en veronderstellen we, dat λ_1 en μ_1 een dergelijk paar vormen. Nu moeten gelijktijdig gelden:

$$(11) \quad \begin{cases} a_{22}\lambda_1^2\mu_1^2 + a_{21}\lambda_1^2\mu_1 + a_{12}\lambda_1\mu_1^2 + a_{20}\lambda_1^2 + a_{02}\mu_1^2 + a_{11}\lambda_1\mu_1 + a_{10}\lambda_1 + a_{01}\mu_1 + a_{00} = 0. \\ \text{en} \\ a_{22}\mu_1^2\lambda_1^2 + a_{21}\mu_1^2\lambda_1 + a_{12}\mu_1\lambda_1^2 + a_{20}\mu_1^2 + a_{02}\lambda_1^2 + a_{11}\mu_1\lambda_1 + a_{10}\mu_1 + a_{01}\lambda_1 + a_{00} = 0. \end{cases}$$

Trekken we deze vergelijkingen van elkaar af, dan vinden we:

$$a_{21}\lambda_1\mu_1(\lambda_1 - \mu_1) + a_{12}\lambda_1\mu_1(\mu_1 - \lambda_1) + a_{20}(\lambda_1^2 - \mu_1^2) + a_{02}(\mu_1^2 - \lambda_1^2) + a_{10}(\lambda_1 - \mu_1) + a_{01}(\mu_1 - \lambda_1) = 0,$$

en na deeling door $\lambda_1 - \mu_1 \neq 0$,

$$(a_{21} - a_{12})\lambda_1\mu_1 + (a_{20} - a_{02})(\lambda_1 + \mu_1) + a_{10} - a_{01} = 0. \quad (12)$$

Deze bilineaire vergelijking bepaalt een involutie. STURM noemt deze de met de gegeven $[2, 2]$ verbonden involutie.

Elk involutorisch paar van de $[2, 2]$ behoort dus tot involutie (12); omgekeerd volgt uit (12) en één der vergelijkingen (11) de andere d.w.z. als een paar der verbonden involutie in de $[2, 2]$ met elkaar in den eenen zin correspondeert, dan correspondeert het ook in den anderen, is dus een involutorisch paar. Elk involutorisch paar bestaat eigenlijk uit twee paren. Volgens art. 12 heeft een $[2, 2]$ vier paren, die tevens behooren tot een involutie; hier vinden we dus slechts twee paren.

14 — We willen nog op andere wijze aantonen, dat de $[2, 2]$ slechts twee paren involutorisch samenhangende elementen bevat.

Zij gegeven, dat er één paar voorkomt. We kunnen nu de parameterbepaling zóó kiezen, dat dit paar bepaald wordt door $\lambda = \infty, \mu = 0$ in den eenen zin en $\mu = \infty, \lambda = 0$ in den anderen. In verg. (1) moet dan $a_{20} = a_{02} = 0$ zijn, zoodat de vergelijking wordt:

$$a_{22}\lambda^2\mu^2 + a_{21}\lambda^2\mu + a_{12}\lambda\mu^2 + a_{11}\lambda\mu + a_{10}\lambda + a_{01}\mu + a_{00} = 0 \quad (13)$$

Is er nu nog een involutorisch paar, dan moet, indien we de parameters daarvan λ, μ houden, naast (13) gelden:

$$a_{22}\mu^2\lambda^2 + a_{21}\mu^2\lambda + a_{12}\mu\lambda^2 + a_{11}\mu\lambda + a_{10}\mu + a_{01}\lambda + a_{00} = 0 \quad (13a)$$

waaruit na aftrekking en deeling door $(\lambda - \mu) \leq 0$ volgt:

$$(a_{21} - a_{12})\lambda\mu + a_{10} - a_{01} = 0 \quad (14)$$

of

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{a_{01} - a_{10}}{(a_{21} - a_{12})\mu} = \frac{\alpha}{\mu} \\ \mu &= \frac{a_{01} - a_{10}}{(a_{21} - a_{12})\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

indien we $\frac{a_{01} - a_{10}}{a_{21} - a_{12}} = \alpha$ stellen.

Hieraan voldoet ook het eerste involutorische paar.

Substitutie van deze waarde van λ in (13) geeft na vermenigvuldiging met μ^2 en rangschikking:

$$(a_{12}\alpha + a_{01})\mu^2 + (a_{22}\alpha^2 + a_{11}\alpha + a_{00})\mu + (a_{21}\alpha + a_{10})\alpha = 0 \quad (16)$$

Hierin blijkt

$$a_{12}\alpha + a_{01} = a_{21}\alpha + a_{10} \lesseqgtr 0 \text{ dus}$$

$$\mu^2 + A\mu + \alpha = 0$$

De twee waarden van μ , μ_1 en μ_2 hebben tot product

$$\mu_1\mu_2 = \alpha$$

dus

$$\mu_1 = \frac{\alpha}{\mu_2}, \quad \mu_2 = \frac{\alpha}{\mu_1}$$

Tevens hadden we $\lambda_1 = \frac{\alpha}{\mu_1}$ dus $\lambda_1 = \mu_2$ en evenzoo $\lambda_2 = \mu_1$.

We vinden dus naast het paar $\lambda = \infty$, $\mu = 0$ nog één involutorisch paar.

15 — In 't algemeen kan dus een collocale $[2, 2]$ niet meer dan twee involutorische paren bezitten, die tot een involutie op denzelfden drager behooren. Veronderstel, dat de $[2, 2]$ behalve deze twee paren nog een derde paar heeft, dat met de eerste twee tot eenzelfde involutie behoort. Daar elk involutorisch paar voor twee telt, heeft de met de $[2, 2]$ verbonden involutie in dit geval 6 paren met de $[2, 2]$ gemeen, terwijl de substitutievergelijking van den 4en graad is. Deze moet dan een identiteit zijn. De involutievergelijking moet nu deel uitmaken van de verwantschapsvergelijking.

Verg. (16) moet dus identiek zijn. Dit eischt:

$$a_{12}\alpha + a_{01} = 0 \text{ of } \alpha = -\frac{a_{01}}{a_{12}},$$

$$a_{22}\alpha^2 + a_{11}\alpha + a_{00} = 0,$$

$$a_{21}\alpha + a_{10} = 0 \text{ of } \alpha = -\frac{a_{10}}{a_{21}}.$$

Hieruit volgt $\frac{a_{01}}{a_{12}} = \frac{a_{10}}{a_{21}}$ of $a_{10} = n \cdot a_{01}$; $a_{21} = n \cdot a_{12}$.

Voorts moet $\alpha = \frac{a_{10}}{a_{21}}$ een wortel zijn van

$a_{22}\alpha^2 + a_{11}\alpha + a_{00} = 0$. Dit geeft een betrekking, waaraan de coëfficiënten van (13) moeten voldoen, opdat dit geval kan intreden. Vergelijking (13) is nu te schrijven:

$$a_{22}\lambda^2\mu^2 + n \cdot a_{12}\lambda^2\mu + a_{12}\lambda\mu^2 + a_{11}\lambda\mu + n \cdot a_{01}\lambda + a_{01}\mu + a_{00} = 0$$

of

$$\begin{aligned} (a_{22}\lambda^2\mu^2 + a_{11}\lambda\mu + a_{00}) + a_{12}(n\lambda + \mu)\lambda\mu + a_{01}(n\lambda + \mu) &= 0, \\ a_{22}(\lambda\mu - \alpha)(\lambda\mu - \beta) + a_{12}(\lambda\mu - \alpha)(n\lambda + \mu) &= 0, \\ (\lambda\mu - \alpha)(a_{22}\lambda\mu + a_{12}n\lambda + a_{12}\mu - a_{22}\beta) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

waarin β de andere wortel van $a_{22}\lambda^2\mu^2 + a_{11}\lambda\mu + a_{00} = 0$ is. De verwantschapsvergelijking valt dus uiteen in de involutie-vergelijking en een niet-involutorische conjectiviteit. Van de twee elementen μ , die aan eenzelfde element λ zijn toegevoegd, is het eene involutorisch, het andere niet-involutorisch toegevoegd.

Een dergelijke verwantschap heet *half-involutorisch*.

Nemen we nu het bijzondere geval, dat $a_{22} = a_{11} = a_{00} = 0$, $a_{21} + a_{12} = 0$ en $a_{10} + a_{01} = 0$ dus $n = -1$, dan wordt (17)

$$(\lambda\mu - \alpha)(\lambda - \mu) = 0. \quad (18)$$

De verwantschapsvergelijking onttaardt in een identiteit en een involutie. Met elk element komt dit element zelf overeen en nog een tweede element volgens de involutie.

Schrijven we verg. (18) in den vorm

$$\mu\lambda^2 - (\mu^2 + \alpha)\lambda + \alpha\mu = 0,$$

dan is de vergelijking der vertakkings-elementen,

$$(\mu^2 + \alpha)^2 - 4\mu^2\alpha = 0,$$

$$(\mu^2 - \alpha)^2 = 0,$$

terwijl we een dubbelelement van de involutie vinden door in $\lambda\mu - \alpha = 0$ $\lambda = \mu$ te stellen, dus

$$\mu^2 - \alpha = 0.$$

Met elk dubbelelement van de involutie, vallen dus twee vertakkingselementen van de verwantschap samen.

16 — Nemen we nu aan, dat de verwantschap [2,2] drie involutorische paren heeft, die *niet* tot éézelfde involutie behooren. Daar volgens art. 13 elk involutorisch paar tot de verbonden involutie zou leiden, kan deze in dit geval niet bestaan. Elk paar moet echter voldoen aan verg. (12) dus:

$$(a_{21} - a_{12})\lambda_1\mu_1 + (a_{20} - a_{02})(\lambda_1 + \mu_1) + a_{10} - a_{01} = 0$$

$$(a_{21} - a_{12})\lambda_2\mu_2 + (a_{20} - a_{02})(\lambda_2 + \mu_2) + a_{10} - a_{01} = 0$$

$$(a_{21} - a_{12})\lambda_3\mu_3 + (a_{20} - a_{02})(\lambda_3 + \mu_3) + a_{10} - a_{01} = 0$$

Daar $\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \lambda_3\mu_3$ niet tot dezelfde involutie behooren, moet

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\mu_1, & \lambda_1 + \mu_1, & 1 \\ \lambda_2\mu_2, & \lambda_2 + \mu_2, & 1 \\ \lambda_3\mu_3, & \lambda_3 + \mu_3, & 1 \end{vmatrix} \leq 0.$$

De homogene lineaire vergelijkingen in $a_{21} - a_{12}, a_{20} - a_{02}, a_{10} - a_{01}$ laten in dit geval geen andere oplossing toe dan

$$\begin{array}{lll} a_{21} - a_{12} = 0 & a_{20} - a_{02} = 0 & a_{10} - a_{01} = 0 \\ a_{21} = a_{12} & a_{20} = a_{02} & a_{10} = a_{01} \end{array}$$

Daardoor wordt de verwantschapsvergelijking, als we de overtollige indices weglaten,

$$a\lambda^2\mu^2 + b\lambda\mu(\lambda + \mu) + c(\lambda^2 + \mu^2) + d\lambda\mu + e(\lambda + \mu) + f = 0 \quad (19)$$

Met een bepaald element komen, als men het tot het eene stelsel rekent, dezelfde twee elementen overeen, als wanneer men het tot het andere systeem telt.

De stelsels kunnen niet meer gescheiden worden: de verwantschap is geheel involutorisch. EMIL WEYR noemt het een *symmetrisch elementensysteem van den tweeden graad*. Dus:

Twee collocale stelsels in [2,2] vormen een involutorisch stelsel, als er drie involutorische paren zijn, die niet tot éézelfde quadratische involutie behooren (J. DE VRIES).

Vergelijking (19) bevat nog slechts vijf onafhankelijke coëfficiënten, een involutorisch stelsel wordt dus bepaald door 5 paren overeenkomstige elementen.

Een algemeene $[2,2]$ is bepaald door 8 elementen. De voorwaarde, dat zulk een $[2,2]$ involutorisch is, is dus drievoudig.

Daar vijf onafhankelijke gegevens een involutorische $[2,2]$ bepalen, zijn er ∞^1 involutorische $[2,2]$'s, die dezelfde vier elementen als vertakkingselementen bezitten.

17 — Bij een involutorische verwantschap vallen de vertakkingselementen van het eene stelsel samen met die van het andere. Hetzelfde gebeurt met de dubbelelementen, die met de samenvallende vertakkingselementen correspondeeren.

Omgekeerd, wanneer twee collocale stelsels in $[2,2]$ de vertakkingselementen gemeen hebben, is in 't algemeen de verwantschap involutorisch.

Alleen, indien de dubbelverhoudingen $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$ en $(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)$ harmonisch of aequi-anharmonisch zijn, is ook een samenvallen der vertakkingselementen mogelijk zonder dat de $[2,2]$ involutorisch wordt.

I. De dubbelverhoudingen zijn nòch harmonisch nòch aequi-anharmonisch.

We noemen de reeksen singuliere elementen als in art. 4: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$, $\lambda^I\lambda^{II}\lambda^{III}\lambda^{IV}$ en $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$, $\mu^I\mu^{II}\mu^{III}\mu^{IV}$. Hiertusschen bestaan vier projectiviteiten. Eén daarvan is $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$, $\lambda^I\lambda^{II}\lambda^{III}\lambda^{IV}$ $\propto$ $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$, $\mu^I\mu^{II}\mu^{III}\mu^{IV}$, waarin $\mu^I\lambda^I$ de dubbelelementen zijn behorende bij $\lambda_1\mu_1$ als vertakkingselementen.

Veronderstel nu, dat de vertakkingselementen samenvallen en wel λ_1 met μ_1 .

Groepen, die samenvallen, zijn projectief. Van de groepen, die met μ_1 beginnen, is alleen $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$ projectief ten opzichte van $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ dus alleen deze kan samenvallen met $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$.

Vallen nu $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$ samen met $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ dan moeten ook samenvallen $\lambda^I\lambda^{II}\lambda^{III}\lambda^{IV}$ met $\mu^I\mu^{II}\mu^{III}\mu^{IV}$. We hebben dan twee samenvallende groepen van acht elementen.

Volgens art. 4 bestaan tusschen deze groepen drie involuties van telkens vier paren, waarbij in twee paren vertakkingselemen-

ten staan, in de andere de overeenkomstige paren dubbelelementen b.v.:

$$\lambda_1\lambda_2, \lambda_3\lambda_4, \lambda^I\lambda^II, \lambda^{III}\lambda^{IV}.$$

Verder bleek, dat een involutie $\lambda_1\lambda^I, \lambda_2\lambda^{II}, \lambda_3\lambda^{III}, \lambda_4\lambda^{IV}$ onbestaanbaar is.

In de verwantschap [2,2] zijn echter de paren $\lambda_1\lambda^I, \lambda_2\lambda^{II}$ enz. wel involutorisch, daar immers λ_1 samenvalt met μ_1 en μ^I met λ^I . Er komen dus zeker in de [2,2] drie involutorische paren voor, die niet tot éézelfde quadratische involutie behooren.

Volgens art. 16 is dan de verwantschap geheel involutorisch.

II. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ en $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$ zijn harmonisch. Nu bestaan er tusschen deze groepen acht projectiviteiten:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \overline{\wedge} \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$$

$$,, \overline{\wedge} \mu_2\mu_1\mu_4\mu_3$$

$$,, \overline{\wedge} \mu_3\mu_4\mu_1\mu_2$$

$$,, \overline{\wedge} \mu_4\mu_3\mu_2\mu_1$$

$$,, \overline{\wedge} \mu_1\mu_2\mu_4\mu_3$$

$$,, \overline{\wedge} \mu_2\mu_1\mu_3\mu_4$$

$$,, \overline{\wedge} \mu_3\mu_4\mu_2\mu_1$$

$$,, \overline{\wedge} \mu_4\mu_3\mu_1\mu_2$$

Hiervan strekken zich alleen de eerste vier ook uit over de dubbelelementen. Zou b.v. de 5e dit ook doen, dus

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \lambda^I\lambda^{II}\lambda^{III}\lambda^{IV} \overline{\wedge} \mu_1\mu_2\mu_4\mu_3 \mu^I\mu^{II}\mu^{IV}\mu^{III}$$

dan zou, overeenkomstig de eerste projectiviteit

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \lambda^I\lambda^{II}\lambda^{III}\lambda^{IV} \overline{\wedge} \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 \mu^I\mu^{II}\mu^{III}\mu^{IV}$$

ook moeten gelden

$$\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 \mu^I\mu^{II}\mu^{III}\mu^{IV} \overline{\wedge} \mu_1\mu_2\mu_4\mu_3 \mu^I\mu^{II}\mu^{IV}\mu^{III}$$

waaruit zou volgen, dat

$$\mu_3 \equiv \mu_4 \text{ en } \mu^{III} \equiv \mu^{IV}, \text{ wat niet het geval is.}$$

Vielen nu $\mu_1\mu_2\mu_4\mu_3$ samen met $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ dan zouden de dubbelelementen toch niet samenvallen en ware dus de verwantschap niet involutorisch.

III. $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$ en $(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)$ zijn aequi-anharmonisch d. w. z. gelijk aan de imaginaire kubische wortels der negatieve eenheid.

In dit geval bestaan er twaalf projectiviteiten, waarvan zich echter slechts vier ook uitstrekken over de dubbelelementen. Ook in dit geval kunnen de vertakkingselementen samenvallen, zonder dat de dubbelelementen coïncideeren. In zulk een geval is de $[2,2]$ niet involutorisch.

We vinden dus:

Als bij een verwantschap $[2,2]$ van collocale stelsels de vertakkingselementen van beide systemen samenvallen, dan is de $[2,2]$ involutorisch, tenzij de dubbelverhouding van deze elementen harmonisch of aequi-anharmonisch is. In deze laatste gevallen kan zoowel involutorische als niet-involutorische verwantschap voorkomen. (R. STURM).

18 — We duiden een involutorische $[2,2]$ aan door $[2]$, omdat met elk element, tot welk stelsel men het ook rekent, dezelfde twee andere elementen overeenkomen.

In zulk een $[2]$ komen dus met één element slechts twee andere overeen en niet vier, zooals in de niet-involutorische collocale $[2,2]$. Een vertakkingselement is dit in tweeërlei zin.

19 We schrijven de verg. van de $[2]$ in den vorm:

$$\lambda^2\mu^2 + a\lambda\mu(\lambda + \mu) + b(\lambda^2 + \mu^2) + c\lambda\mu + d(\lambda + \mu) + e = 0.$$

Vinden we voor een bepaalde waarde van λ twee daaraan gelijke waarden van μ dan kunnen we door een lineaire substitutie, die altijd mogelijk is, aan λ de parameterwaarde nul geven. De vergelijking der $[2]$ behoudt in het algemeen hare gedaante, wordt dus b.v.

$$\lambda^2\mu^2 + a'\lambda\mu(\lambda + \mu) + b'(\lambda^2 + \mu^2) + c'\lambda\mu + d'(\lambda + \mu) + e' = 0.$$

Voor $\lambda = 0$ vinden we

$$b'\mu^2 + d'\mu + e' = 0.$$

Deze moet twee wortels 0 geven, dus is

$$d' = 0, \quad e' = 0.$$

Hierdoor wordt de vergelijking der $[2]$

$$\lambda^2\mu^2 + a'\lambda\mu(\lambda + \mu) + b'(\lambda^2 + \mu^2) + c'\lambda\mu = 0$$

De coïncidentievergelijking wordt dan:

$$\lambda^4 + 2a'\lambda^3 + (2b' + c')\lambda^2 = 0$$

dus $\lambda^2 = 0$ d. w. z. we hebben een dubbele coïncidentie. Derhalve:

Wanneer in een involutorische [2] de beide elementen, die met een bepaald element overeenkomen, daarmee samenvallen, dan heeft men een dubbele coïncidentie. (R. STURM).

Bij een niet-involutorische [2,2] mag men tot een dubbele coïncidentie alleen besluiten, wanneer met een element zoowel de twee elementen, die er in den eenen zin mee correspondeeren, samenvallen, als de elementen, die er in den anderen zin mee overeenkomen. In de coïncidentieverg., die we uit verg. (1) verkrijgen, is dan de coëfficiënt van λ $a_{10} + a_{01}$. Deze kan 0 worden, zonder dat a_{10} en a_{01} elk afzonderlijk nul worden. Alleen indien $a_{10} = 0$ en $a_{01} = 0$ zijn, verdwijnen in de verg. der [2,2] de termen van den eersten graad en kunnen met een waarde $\lambda = 0$ de beide waarden $\mu = 0$ samenvallen.

20 — Een involutie van den graad $(n + 1)$ is een involutorische [n]. Met elk element komen de n overige elementen van zijn groep overeen. De verwantschap is involutorisch, omdat twee corresponderende elementen op dezelfde wijze uit elkaar worden afgeleid.

Een involutie van den 3en graad is dus een involutorische [2]. Deze onderscheidt zich van de algemeene [2] daardoor, dat elke twee elementen, die te samen correspondeeren met een derde element, ook onderling overeenkomen. De drie elementen vormen dus een cyclus zóódanig, dat uit elk van hen de beide andere op dezelfde wijze worden afgeleid.

In een gegeven stelsel komen ∞^5 involutorische verwantschappen [2] voor; daarvan zijn echter slechts ∞^4 involuties van den derden graad.

21 — We willen nu onderzoeken, welke voorwaarde vervuld

moet zijn, opdat een involutorische verwantschap [2] een involutie van den 3en graad is. Daartoe moeten dus de beide elementen, die met een bepaald element overeenkomen, ook onderling correspondeeren.

Zij de [2] voorgesteld door verg. (19):

$$a\lambda^2\mu^2 + b\lambda\mu(\lambda + \mu) + c(\lambda^2 + \mu^2) + d\lambda\mu + e(\lambda + \mu) + f = 0.$$

Indien er een element voorkomt, waarvan de beide overeenkomende elementen aan de voorwaarde voldoen, dan kunnen we de parameters zóó kiezen, dat de parameter voor dit element nul wordt. Dus b.v. $\lambda = 0$. De beide overeenkomende elementen worden dan bepaald door de vergelijking

$$c\mu^2 + e\mu + f = 0;$$

$$\text{dus } \mu_1 + \mu_2 = -\frac{e}{c}, \mu_1\mu_2 = \frac{f}{c}.$$

Substitueeren we voor λ en μ de waarden van μ_1 en μ_2 dan moet ook aan verg. (19) voldaan worden, dus

$$\frac{af^3}{c} + \frac{bf}{c}\left(-\frac{e}{c}\right) + c\left(\frac{e^2}{c^2} - \frac{2f}{c}\right) + \frac{df}{c} + e\left(-\frac{e}{c}\right) + f = 0.$$

$$\text{of } af^3 - bef - c^2f + cdf = 0$$

dus

$$f\{af - be - c(c - d)\} = 0. \quad (20)$$

Hieraan wordt voldaan voor $f = 0$ of voor

$$af - be - c(c - d) = 0$$

In 't eerste geval, dus $f = 0$, is $\mu_1\mu_2 = \frac{f}{c} = 0$ dus òf $\mu_1 = 0$ òf $\mu_2 = 0$.

Daar $\lambda = 0$ hebben we dan in elk geval te doen met een coïncidentie. De vier coïncidenties van de [2] voldoen dus in de eerste plaats.

Voorts wordt aan (20) voldaan voor

$$af - be - c(c - d) = 0. \quad (21)$$

Is deze voorwaarde niet vervuld, dan komen er naast de coïncidenties geen elementen voor, wier overeenkomstige elementen ook onderling correspondeeren.

Is echter aan (21) voldaan, dan is de voorwaarde voor elk element vervuld. Dus:

Wanneer in een involutorische verwantschap [2] buiten de coïncidenties nog één element voorkomt, waarvoor de beide overeenkomende elementen onderling ook corresponderen, dan gebeurt dit bij elk element. De elementen der [2] vormen dan een kubische involutie. De voorwaarde daarvoor is vergelijking (21). (R. STURM).

22 — Dat we hier inderdaad met een kubische involutie hebben te doen, toonen we aldus aan: Uit (19) volgt:

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)\mu^2 + (b\lambda^2 + d\lambda + e)\mu + (c\lambda^2 + e\lambda + f) = 0.$$

dus

$$\mu_1 + \mu_2 = -\frac{b\lambda^2 + d\lambda + e}{a\lambda^2 + b\lambda + c}, \quad \mu_1\mu_2 = \frac{c\lambda^2 + e\lambda + f}{a\lambda^2 + b\lambda + c}$$

λ , μ_1 en μ_2 moeten wortels zijn van een verg. van den 3en graad. We vormen dus de betrekkingen:

$$\begin{aligned} \lambda + \mu_1 + \mu_2 &= \frac{a\lambda^3 + (c-d)\lambda - e}{a\lambda^2 + b\lambda + c} \\ \lambda(\mu_1 + \mu_2) + \mu_1\mu_2 &= \frac{-b\lambda^3 + (c-d)\lambda^2 + f}{a\lambda^2 + b\lambda + c} \\ \lambda\mu_1\mu_2 &= \frac{c\lambda^3 + e\lambda^2 + f\lambda}{a\lambda^2 + b\lambda + c} \end{aligned}$$

De verg. van den 3en graad wordt dus:

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)y^3 - \{a\lambda^3 + (c-d)\lambda - e\}y^2 + \{-b\lambda^3 + (c-d)\lambda^2 + f\}y - (c\lambda^3 + e\lambda^2 + f) = 0.$$

Is de voorwaarde (21) vervuld, dus

$$af - be - c(c-d) = 0$$

dan moet deze derdemachtsvergelijking te brengen zijn in den vorm der kubische involutievergelijking

$$(a_0 - \rho b_0)y^3 + (a_1 - \rho b_1)y^2 + (a_2 - \rho b_2)y + (a_3 - \rho b_3) = 0.$$

waarin $a_0, b_0, \dots, a_3, b_3$ constanten zijn, dus vormen uitgedrukt in de constanten der verwantschapsvergelijking, terwijl ρ een veranderlijke parameter is afhangende van de wortels der verg. (19).

ρ kan dus als functie beschouwd worden van λ . Geven we aan deze functie den vorm

$$\frac{a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3}{b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3} = \rho.$$

dan moet de gevonden derdegraadsverg. te transformeeren zijn in:

$$\begin{aligned} & \{a_0(b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3) - b_0(a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3)\}y^3 + \\ & + \{a_1(b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3) - b_1(a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3)\}y^2 + \\ & + \{a_2(b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3) - b_2(a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3)\}y + \\ & + \{a_3(b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3) - b_3(a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3)\} = 0 \end{aligned}$$

Daartoe moet dus:

$$\left. \begin{aligned} a_0b_1 - b_0a_1 &= a & a_1b_2 - b_1a_2 &= d - c \\ a_0b_2 - b_0a_2 &= b & a_1b_3 - b_1a_3 &= e \\ a_0b_3 - b_0a_3 &= c & a_2b_3 - b_2a_3 &= f \end{aligned} \right\} (A)$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} & (a_0b_1 - b_0a_1)(a_2b_3 - b_2a_3) - (a_0b_2 - b_0a_2)(a_1b_3 - b_1a_3) + \\ & + (a_0b_3 - b_0a_3)(a_1b_2 - b_1a_2) = af - be - c(c - d). \end{aligned}$$

Het eerste lid der vergelijking is identiek nul. Is het laatste lid, d. i. verg. (21) niet nul, dan is de transformatie niet mogelijk.

Is echter (21) vervuld, dan zijn de zes betrekkingen (A) met vijf aequivalent. Vijf vergelijkingen met acht onbekenden laten ∞^3 oplossingen toe. Kiezen we dus een systeem van waarden $a_0, b_0, \dots, a_3, b_3$, dan is hiermee de transformatie voltooid.

23 — In art. 22 vormden de elementen λ, μ_1 en μ_2 een cyclus. Gaan we van λ over op het eene overeenkomstige element μ_1 , dan kunnen we van dit element alleen overgaan op μ_2 en komen over μ_2 weer terug bij λ . Buiten de coïncidenties kan een dergelijke gesloten groep alleen bestaan onder bepaalde voorwaarden.

Onderzoeken we of de [2] groepen van meer elementen bevatten kan.

Met een element X_1 komen overeen de elementen X_2 en X'_2 met X_2 behalve X_1 nog een element X_3 , met X_3 als tweede X_4 , enz. tot X_{n+1} ; evenzoo met X'_2 als tweede X'_3 , met dit X'_4

enz. ook b.v. tot X'_{n+1} . Naar gelang we van X_1 overgaan op X_2 of op X'_2 krijgen we dus de groepen:

$$X_1 X_2 X_3 \dots X_{n+1}$$

of $X_1 X'_2 X'_3 \dots X'_{n+1}$.

Omgekeerd kunnen we van X_{n+1} of van X'_{n+1} na n schreden terugkomen bij X_1 . De betrekking tusschen X_1 en X_{n+1} is dus involutorisch. Evenzoo die tusschen X_1 en X'_{n+1} . Met elk element komen twee elementen X_{n+1} en X'_{n+1} overeen, dus de verwantschap tusschen deze elementen is ook een $[2]$, die we ter onderscheiding van de gegeven $[2] = [2]^1$ kunnen aanduiden door $[2]^n$, omdat we telkens n schreden te doen hebben.

Er zal nu een cyclus van n elementen ontstaan, wanneer $X_{n+1} \equiv X_1$, $X_{n+2} \equiv X_2$ in 't algemeen $X_{n+m} \equiv X_m$ is. In de $[2]^n$ moet dan de coïncidentievergelijking meer dan vier wortels hebben d. w. z. ze moet identiek nul zijn. Dan is echter elk element van de $[2]$ beginelement van een uit n elementen gevormden cyclus, dien men zelf weer beginnen kan met elk van zijn elementen.

De vraag is, of, indien de coïncidentievergelijking niet identiek is, er toch niet vier in zichzelf terugkeerende groepen zijn, beginnende met de coïncidenties van de $[2]^n$.

't Is onmiddellijk in te zien, dat dit onmogelijk is, want 4 groepen zouden reeds vorderen $4n$ coïncidenties van de $[2]^n$; n zou dus gelijk 1 moeten zijn.

Is $n > 4$ dan is zelfs één in zichzelf terugkeerende groep in 't algemeen al onmogelijk, omdat deze reeds meer dan 4 coïncidenties der $[2]^n$ zou vorderen.

Gaan we nu nog na voor $n = 4$ en voor $n = 3$. Is $n = 4$ dan beschouwen we een groep, waarin X_3 een vertakkingsselement is van de $[2]$. Met X_3 correspondeert dan X_2 dubbel, met X_2 , X_3 en X_1 . Gaan we van X_1 uit, dan vinden we de groep:

$$X_1 X_2 X_3 X_2 X_1$$

X_1 is nu een coïncidentie van $[2]^4$. We hebben hier echter geen

cyclus van 4 elementen, maar een groep van drie elementen, die niet in zichzelf terugkeert, doch heen en terug doorloopen wordt.

Daar er 4 vertakkings-elementen in de [2] voorkomen, bestaan er 4 van zulke groepen.

Is $n = 3$ dan beschouwen we een groep, waarvan X_2 coïncidentie is van de [2]. Daarmee komen overeen X_2 zelf en X_1 . Beginnen we bij X_1 , dan krijgen we

$$X_1 X_2 X_2 X_1$$

dus is X_1 een coïncidentie van de $[2]^3$. 't Is duidelijk, dat we hier eenvoudig de involutorische paren der coïncidentieelementen van de [2] terugvinden.

Als resultaat van deze beschouwingen vinden we dus: *Een willekeurige involutorische verwantschap [2] bezit in het algemeen geen cyclus van n elementen, waarin met elk element het volgende en met het laatste het eerste overeenkomt.*

Bezit echter een involutorische [2] één zoodanigen cyclus, dan heeft zij er ∞^1 . De cycli vormen de groepen van een involutie van den n-den graad. Bij $n = 3$ is deze involutie identiek met de gegeven [2]. (R. STURM).

24 — Een involutorische verwantschap [2] kan ontaarden in het product van twee projectiviteiten.

Daar de verwantschap involutorisch is, mag verwisseling van de beide parameters geen verandering in de vergelijking brengen. De projectiviteiten moeten daardoor dus in elkaar overgaan. De vergelijking wordt dan

$$(\lambda\mu + \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma)(\mu\lambda + \alpha\mu + \beta\lambda + \gamma) = 0 \quad (22)$$

of

$$\lambda^2\mu^2 + (\alpha + \beta)\lambda\mu(\lambda + \mu) + \alpha\beta(\lambda^2 + \mu^2) + (\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma)\lambda\mu + \gamma(\alpha + \beta)(\lambda + \mu) + \gamma^2 = 0. \quad (23)$$

Door vergelijking met

$$\lambda^2\mu^2 + a\lambda\mu(\lambda + \mu) + b(\lambda^2 + \mu^2) + c\lambda\mu + d(\lambda + \mu) + e = 0$$

vinden we de betrekkingen, waaraan de coëfficiënten van de [2]

moeten voldoen om deze in twee projectiviteiten te doen ont-aarden.

Zoeken we op de bekende wijze de vertakkingsselementen, dan blijkt, dat deze bepaald worden door de verg.

$$(\alpha - \beta)^2[\mu^2 + (\alpha + \beta)\mu + \gamma]^2 = 0. \quad (24)$$

Zijn de projectiviteiten niet zelf involutorisch dus $\alpha \leq \beta$, dan blijken de vertakkingsselementen twee aan twee samengevallen te zijn.

Stellen we in (22) $\lambda = \mu$ dan blijkt, dat dezelfde vergelijking (24) ook de coïncidenties geeft. Er is dus met elk paar samengevallen vertakkingsselementen ook een paar coïncidenties samengevallen.

Rangschikken we voorts verg. 23 naar λ en geven we aan μ de waarden μ_1 of μ_2 bepaald door (24) dan is de vergelijking der dubbelelementen te vervormen in:

$$\begin{aligned} (\alpha\beta - \gamma) (\lambda^2 - 2\lambda\mu_{1,2} + \mu_{1,2}^2) &= 0 \\ (\alpha\beta - \gamma) (\lambda - \mu_{1,2})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

waaruit blijkt, dat, indien $\alpha\beta - \gamma \leq 0$ is, met de vertakkingsselementen tevens de daarbij behorende dubbelelementen samenvallen. In elk der twee punten vallen dus telkens samen: twee vertakkingsselementen, twee coïncidenties en twee dubbelelementen.

Gaan we nog enkele bijzondere gevallen na.

I. $\alpha = \beta$, d. i. in de verg. der [2] $a^2 - 4b = 0$.

Verg. 24 is dan een identiteit. Elk element is nu vertakkingsselement. De [2] is ontaard in een dubbelinvolutie:

$$\{\lambda\mu + \alpha(\lambda + \mu) + \gamma\}^2 = 0. \quad (26)$$

Bij elk element, als vertakkingsselement beschouwd, is het in de involutie er mee gepaarde dubbelelement. De twee-tweezinnige verwantschap gaat hier over in een één-éénzinnige.

II. $\alpha\beta - \gamma = 0$.

Nu is (25) een identiteit d. w. z. bij elk tweetal samengevallen vertakkingsselementen, behoort een oneindig groot aantal dubbel-

elementen. De vergelijking der vertakkingselementen is nu, indien $\alpha \leq \beta$.

$$\{\mu^2 + (\alpha + \beta)\mu + \alpha\beta\}^2 = 0$$

of $(\mu + \alpha)^2 (\mu + \beta)^2 = 0$

d. w. z. twee samengevallen vertakkingselementen met parameter $(-\alpha)$ en twee met parameter $(-\beta)$. De vergelijking van de [2] wordt:

$$(\lambda\mu + \alpha\lambda + \beta\mu + \alpha\beta) (\lambda\mu + \alpha\mu + \beta\lambda + \alpha\beta) = 0$$

of $(\lambda + \alpha) (\lambda + \beta) (\mu + \alpha) (\mu + \beta) = 0$ (27)

III. Is ten slotte $\alpha = \beta$ en $\gamma = \alpha^2$ dan worden (24) en (25) beide identiteiten. Elk punt is dan vertakkingselement, waarbij als dubbelelement, volgens de vergelijking, die de [2] nu voorstelt:

$$(\lambda + \alpha)^2 (\mu + \alpha)^2 = 0$$
 (28)

steeds het element met parameter $(-\alpha)$ behoort.

Voor dit element, als vertakkingselement beschouwd, is echter elk ander element dubbelelement.

25 — In art. 8 vonden we, dat, indien in de [2, 2] met elk element van een paar van 't eene stelsel eenzelfde paar van 't andere overeenkomt, de [2, 2] ontstaat door de projectiviteit van twee quadratische involuties. Dezelfde beschouwing blijft van kracht, als de twee-tweezinnige stelsels collocaal zijn. Bij de parameterbepaling in art. 8 ingevoerd, werd de verg. der [2, 2] in dit geval:

$$(a_{21}\lambda^2 + a_{11}\lambda + a_{01})\mu + (a_{12}\mu^2 + a_{11}\mu + a_{10})\lambda = 0$$

Deze projectiviteit kan alleen dan involutorisch worden, indien $a_{21} = a_{12}$ en $a_{01} = a_{10}$. Dan worden echter de beide involuties identiek. Hieruit volgt:

Een projectiviteit tusschen twee collocale quadratische involuties is alleen dan involutorisch, als deze involuties identiek zijn.

26 — Beschouwen we in 't algemeen het geval, dat bij de vier vertakkingselementen van een [2] nog een vijfde komt. We kunnen hierbij twee gevallen onderscheiden:

a) het vijfde vertakkingselement valt samen met zijn dubbelelement.

b) het vijfde vertakkingselement valt niet samen met zijn dubbelelement.

We gaan uit van de algemeene vergelijking:

$$a\lambda^2\mu^2 + b\lambda\mu(\lambda + \mu) + c(\lambda^2 + \mu^2) + d\lambda\mu + e(\lambda + \mu) + f = 0$$

In beide gevallen moet de vergelijking der vertakkingselementen een identiteit zijn. Dus, indien we een vijfde vertakkingselement λ nemen, moet

$$(b\lambda^2 + d\lambda + e)^2 - 4(a\lambda^2 + b\lambda + c)(c\lambda^2 + e\lambda + f) \equiv 0 \text{ zijn.}$$

Alle coëfficiënten moeten dan 0 zijn, dus:

$$\left. \begin{array}{l} b^2 - 4ac = 0 \\ bd - 2ac - 2bc = 0 \\ d^2 - 4af - 2bc - 4c^2 = 0 \\ de - 2bf - 2ce = 0 \\ e^2 - 4cf = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} b^2 - 4ac = 0 \\ b(d - 2c) = 2ac \\ \text{of } (d - 2c)(d + 2c) - 4af - 2bc = 0 \\ (d - 2c)e = 2bf \\ e^2 - 4cf = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (\alpha) \\ (\beta) \\ (\gamma) \\ (\delta) \\ (\varepsilon) \end{array}$$

Indien het vertakkingselement λ_5 met zijn dubbelelement μ_5 coïncideert, moeten we tevens vinden:

$$\mu_5 = -\frac{b\lambda_5^2 + d\lambda_5 + e}{2(a\lambda_5^2 + b\lambda_5 + c)} = \lambda_5 \quad (\varphi)$$

I. $d - 2c \leq 0$. Dan volgt uit deeling van (β) door (δ)

$$\frac{b}{e} = \frac{ac}{bf} \text{ of } b^2 = \frac{ace}{f}$$

in verband met (α) : $\frac{ace}{f} - 4ac = 0$.

Dus

$$a = 0 \text{ of } c = 0 \text{ of } e - 4f = 0.$$

A) Is $a = 0$ dan moeten we tevens hebben:

$$b = 0, d + 2c = 0, e = 0, f = 0.$$

Bij deze voorwaarden wordt ook voldaan aan (φ) . De verg. van de [2] wordt nu

$$\begin{array}{l} c(\lambda^2 + \mu^2) + d\lambda\mu = 0 \\ \text{of } c(\lambda^2 + \mu^2) - 2c\lambda\mu = 0 \\ (\lambda - \mu)^2 = 0 \end{array}$$

d.w.z. de [2] is een identiteit. Elk element is vertakkingselement en daarmee overeenkomend dubbelelement.

B) Is $c = 0$ dan hebben we tevens:

$$b = 0, e = 0, d^2 - 4af = 0$$

Deze condities voldoen niet aan (φ) . Het vertakkingselement valt dus niet met z'n dubbelelement samen. De verg. van de [2] wordt:

$$a\lambda^2\mu^2 + d\lambda\mu + \frac{d^2}{4a} = 0.$$

$$4a^2\lambda^2\mu^2 + 4ad\lambda\mu + d^2 = 0$$

$$(2a\lambda\mu + d)^2 = 0$$

We hebben hier een dubbelinvolutie. Met elk element als vertakkingselement komt het in de involutie er mee gepaarde als dubbelelement overeen.

C) $e = 4f$. Daarbij kunnen we weer onderscheiden:

$e = f = 0$ en $e \leq 0$.

Is $e = f = 0$ dan vinden we daarnaast uit de betrekkingen

$$(\alpha), (\beta), (\gamma) \text{ of } c = \frac{b^2}{4a}, d = 2c = \frac{b^2}{2a}.$$

$$\text{of } b = 0, a = 0, d + 2c = 0$$

Het eerste geval is in strijd met onze veronderstelling $d - 2c \leq 0$, dus hier buitengesloten.

Het tweede geval beschouwden we reeds; het leidt tot een identiteit.

$e \leq 0, e = 4f$. Daarnaast vinden we:

$$e = c, c = \frac{b^2}{4a}, d = \frac{b^2 + ab}{2a}.$$

De vergelijking van de [2] wordt na eenige herleiding:

$$\{4a\lambda\mu + 2b(\lambda + \mu) + b\}^2 = 0.$$

klaarblijkkelijk de verg. van de dubbelinvolutie van (26).

II. $d - 2c = 0$. Dan is $2ac = 0$, dus $c = 0$ of $a = 0$.

Is $c = 0$ dan hebben we tevens $d = 0, b = 0, e = 0, f = 0$.

Van de vergelijking der [2] rest alleen

$$a\lambda^2\mu^2 = 0 \text{ of } \lambda^2\mu^2 = 0.$$

Aan $\lambda = 0$ als vertakkingselement voldoen alle elementen als dubbelelement; evenzoo aan $\mu = 0$.

Is $a = 0$, $c \leq 0$ dan is $d = 2c$, $b = 0$, $e^2 - 4cf = 0$, dus

$$f = \frac{e^2}{4c}.$$

De verg. der [2] wordt:

$$c(\lambda^2 + \mu^2) + d\lambda\mu + e(\lambda + \mu) + \frac{e^2}{4c} = 0,$$

en te herleiden tot

$$\{2c(\lambda + \mu) + e\}^2 = 0;$$

wederom een dubbelinvolutie. Aan (φ) wordt niet voldaan.

Andere gevallen zijn niet mogelijk. Wanneer bij de vier vertakkingselementen der [2] nog een vijfde komt, heeft men dus of een identiteit of een dubbelinvolutie.

Daarbij is ieder element een vertakkingselement. In 't algemeen is de verwantschap een identiteit, als het vijfde vertakkings-element samenvalt met zijn dubbelelement.

Elke involutie heeft echter twee dubbelelementen (coïncidenties). In de dubbelinvolutie komen dus twee dubbelcoïncidenties voor, waarin dan tevens een vertakkingselement met het overeenkomstige dubbelelement moet zijn samengevallen. Is nu een dezer elementen als vijfde vertakkingselement gegeven, dan kan de symmetrische [2] zoowel een identiteit zijn als een dubbelinvolutie.

HOOFDSTUK II

1 — Elke twee-tweezinnige verwantschap is door projectie of snijding over te brengen op een kegelsnede. Beschouwen we dus een kegelsnede K^2 als drager van een twee-tweezinnige puntverwantschap. Elk punt kan behooren tot het eerste stelsel en dan aangeduid worden door x . Er komen dan mee overeen de punten x'_1 en x'_2 van het andere systeem. 't Is echter ook te beschouwen als x' , behorend tot het tweede stelsel, waarmee dan correspondeeren x_1 en x_2 van de eerste reeks.

Er zijn dus vier stralen uit x , die dit punt met de overeenkomstige punten verbinden.

Hieruit volgt:

De verbindingslijnen van overeenkomstige punten der $[2, 2]$ omhullen een kromme D_4 , van de 4e klasse.

Deze noemt men de „directiekromme” der verwantschap.

Dat uit elk willekeurig punt P niet meer dan 4 raaklijnen te trekken zijn aan D_4 , ziet men licht in, als men bedenkt, dat de straalbundel uit P op K^2 een involutie insnijdt, waarmee de $[2, 2]$ volgens I. 12. vier paren gemeen heeft.

De $[2, 2]$ op K^2 veroorzaakt in een willekeurigen straalbundel een verwantschap $[4, 4]$, waarbij stralen naar overeenkomstige punten der $[2, 2]$ als overeenkomend worden beschouwd. De 8 coïncidenties van deze verwantschap zijn 1°. de 4 raaklijnen aan D_4 , 2° de stralen naar de 4 coïncidenties der $[2, 2]$.

De $[2, 2]$ heeft op K^2 acht vertakkingspunten. Voor elk vertakkingspunt vallen twee raaklijnen aan D_4 samen.

De raakpunten van deze raaklijnen vallen samen in het vertak-

kingspunt. In de 8 vertakkingspunten snijdt dus D_4 de K^2 .

In een coïncidentie C wordt de verbindingslijn van twee overeenkomstige punten een raaklijn der K^2 . Tevens echter is ze een raaklijn aan D_4 . Nadere beschouwing leert, dat het raakpunt met D_4 ook in C valt. D_4 raakt dus K^2 in de 4 coïncidenties. Totaal heeft D_4 met K^2 16 punten gemeen. De kromme D_4 is dus van de *achtste* orde.

In I. 13 toonden we aan, dat in de collocale $[2, 2]$ twee involutorische paren voorkomen. De verbindingslijnen zijn dubbel-raaklijnen aan D_4 .

Uit de formule van PLÜCKER blijkt voorts, dat D_4 geen buigpunten heeft: $n' = 4$, $n = 8$, $d' = 2$; dus uit

$$n'(n' - 1) = n + 2d' + 3r' \text{ volgt } r' = 0.$$

2 — Beschouwen we nu de symmetrische $[2]$. Ook deze kunnen we overdragen op een K^2 . Met elk punt x , tot welk van beide stelsels ook gerekend, komen dezelfde twee punten x_1 en x_2 overeen. Uit elk punt van K^2 zijn nu slechts twee stralen te trekken, die overeenkomstige punten verbinden. In elk van deze stralen zijn twee der in het vorige art. bedoelde samengevallen. De directiekromme D_4 is hier ontaard in een dubbel te tellen kegelsnede D_2 , van de 2e klasse.

De symmetrische verwantschap heeft 4 vertakkingspunten v_1, v_2, v_3, v_4 . In deze punten snijdt D_2 de kegelsnede K^2 . De punten, waarin de raaklijnen in v_1, v_2, v_3 of v_4 aan D_2 getrokken K^2 nogmaals snijden, zijn de dubbelpunten d_1, d_2, d_3, d_4 der involutorische $[2]$.

In de coïncidenties der $[2]$ raakt de corresponderende raaklijn van D_2 aan K^2 . De vier gemeenschappelijke raaklijnen der beide kegelsneden bepalen door haar raakpunten met K^2 de vier coïncidenties c_1, c_2, c_3, c_4 .

3 — Stelt $f(x, x_1) = 0$ de vergelijking van een $[2]$ voor en

$f_1(x, x_1) = 0$ die van een andere op denzelfden drager, dan bepaalt

$$f(x, x_1) + \rho f_1(x, x_1) = 0$$

een bundel van symmetrische verwantschappen op dien drager.

Is de drager een kegelsnede, dan komt met elke verwantschap van den bundel een directiekegelsnede D overeen. Kiezen we voor de vergelijkingen $f = 0$ en $f_1 = 0$ den vorm (19), dan wordt de bundelvergelijking:

$$(a + \rho a_1)\lambda^2\mu^2 + (b + \rho b_1)\lambda\mu(\lambda + \mu) + \dots = 0.$$

Substitueeren we de coëfficiënten van deze vergelijking voor de overeenkomstige in de voorwaarde-vergelijking (21) dan vinden we een verg. van den tweeden graad in ρ ; waaruit blijkt, dat in een bundel van involutorische verwantschappen [2] twee kubische involuties voorkomen.

Door elk punt P van K^2 gaan twee kegelsneden van de schaar van directiekegelsneden. P is dus voor twee verwantschappen van den bundel vertakkingspunt. De raaklijn in P aan K^2 wordt nog door één kegelsnede D geraakt: P is dus voor één verwantschap coïncidentie.

Zooals we later zullen zien, vormen de raakpunten van de raaklijnen uit P aan de kegelsneden van de schaar een kromme van de 3e orde K^3 . Deze gaat dubbel door P . In de vier overige snijpunten van K^3 met K^2 bevinden zich vertakkingspunten met P als bijbehorend dubbelpunt. Dus:

Elk punt P van K^2 is voor vier verwantschappen van den bundel dubbelpunt.

4 — Nemen we nu in plaats van een schaar een bundel van kegelsneden. Daarbij valt te onderscheiden: *a*) de drager-kegelsnede K^2 maakt geen deel uit van den bundel, *b*) K^2 behoort ook tot den bundel.

a) Elke kegelsnede van den bundel is directie-kromme voor een verwantschap [2] op K^2 . Aan een straal r uit P op K^2 raken twee kegelsneden C_1 en C_2 van den bundel. Met P en het punt

P' , waarin $r K^2$ nogmaals snijdt, komen dan overeen de beide punten Q_1 en Q_2 , waarin de andere raaklijnen uit P aan C_1 en C_2 getrokken K^2 nogmaals snijden. De verwantschappen [2] op K^2 vormen dus een quadratisch stelsel.

Door P gaat in 't algemeen één kegelsnede van den bundel. P is dus voor één verwantschap vertakkingspunt. De andere snijpunten van diezelfde kegelsnede met K^2 zijn de overige vertakkingspunten van dezelfde verwantschap. De vertakkingspunten van alle verwantschappen [2] op K^2 vormen een involutie van den 4en graad.

Aan de raaklijn in P aan K^2 getrokken raken nog twee kegelsneden van den bundel. Hieruit volgt: P is voor twee verwantschappen coïncidentie.

Zooals we nog nader bewijzen zullen, is de meetk. plaats van de raakpunten der raaklijnen uit P aan de kegelsneden van den bundel getrokken, een kromme van de 3.O. K^3 , gaande door P . Deze K^3 snijdt K^2 nog in 5 punten. Bij elk dezer punten als vertakkingspunt van een [2], behoort P als dubbelpunt. P is dus dubbelpunt voor 5 verwantschappen.

b.) K^2 behoort ook tot den bundel. De vier basispunten zijn dan de gemeenschappelijke vertakkingspunten van alle op K^3 liggende symmetrische verwantschappen met de kegelsneden van den bundel als directie-krommen. Een dergelijk systeem noemt R. STURM een stelsel van *consinguliere verwantschappen*. De onder a) genoemde K^3 gaat door de vier basispunten. Trekken we in een der basispunten een willekeurige rechte, die K^2 nog in P snijdt, dan is er één kegelsnede van den bundel, die AP in A raakt. Deze kegelsnede is de directiekromme van de verwantschap, die P als bij A behoorend dubbelpunt heeft. Evenzoo is er voor elk ander vertakkingspunt één [2] in het stelsel, waarvoor P het bijbehorende dubbelpunt is. Daar K^2 ook tot den bundel behoort, kan deze kegelsnede zelf als directiekromme optreden. De beide raaklijnen, die men uit een punt P aan de

directiekromme moet trekken om de met P overeenkomende punten te vinden, vallen hier samen in de raaklijn in P aan K^2 . Elk punt P valt dus met de overeenkomstige punten samen: *de verwantschap is een identiteit*. Elk punt van K^2 is vertakkingspunt en er mee samenvallend dubbelpunt.

Aan een willekeurige snijlijn PQ van K^2 raken twee kegelsneden van den bundel d.w.z. er zijn twee verwantschappen, waarvoor P en Q overeenkomstige punten zijn. Anders:

Door vier vertakkingselementen en een paar overeenkomstige elementen zijn twee „eigenlijke” symmetrische verwantschappen van den 2en graad bepaald.

Is PQ raaklijn aan K^2 , dan wordt P coïncidentie. Een der twee kegelsneden is dan K^2 zelf. Een willekeurig punt P op K^2 is dus coïncidentie voor één verwantschap van het stelsel. Dus:

Door vier vertakkingselementen en een coïncidentie is één verwantschap van het stelsel bepaald.

Elke $[2]$ heeft vier coïncidenties. De coïncidentiepunten vormen dus op K^2 een involutie van den vierden graad. Voor elke $[2]$ behoort bij een der vertakkingspunten, b.v. A , één dubbelpunt. De puntreeks der dubbelpunten behorende bij A is dus projectief t.o.v. de involutie van den 4en graad. Deze verwantschap $[1, 4]$ heeft 5 coïncidenties d.w.z. vijfmaal is een punt en dubbelpunt en coïncidentie van een $[2]$. Ten eerste is dit het geval, als 't dubbelpunt samenvalt met A , d.i. bij de identiteit. Ten tweede, wanneer de beide in het dubbelpunt vereenigde punten ook met elkaar overeenkomen d.w.z. bij de kubische involutie. Dit komt viermaal voor. In het stelsel van symmetrische involuties, die gemeenschappelijke vertakkingselementen bezitten, komen dus vier kubische involuties voor.

Tot de kegelsneden van den bundel door de punten A, B, C en D behooren de paren rechten (AB, CD) , (AC, BD) en (AD, BC)

Elk dezer kegelsneden is directiekromme voor een verwantschap. Zij S_1 het snijpunt van AB en CD . De raaklijnen uit een punt P van K^2 aan (AB, CD) getrokken, vallen samen in de lijn

PS_1 , die K^2 nog in één punt snijdt. Elk punt van de verwantschap is dus vertakkingspunt en het overeenkomstige punt dubbelpunt. We hebben hier de dubbelinvolutie van I. 26. Dubbelpunt en vertakkingspunt vormen steeds een involutorisch paar. Tot de involutie behooren ook de paren A, B en C, D, die juist de involutie bepalen.

Zijn S_2 en S_3 respectievelijk de snijpunten van AC met BD en AD met BC, dan is $\triangle S_1 S_2 S_3$ aan zich zelf geconjugéerd (pooldriehoek) t.o.v. alle directiekrommen van den bundel. Hieruit volgt, dat de snijpunten σ_1, σ_1' , van $S_2 S_3$ met K^2 de raakpunten zijn van de raaklijnen uit S_1 aan K^2 . In elk raakpunt valt een vertakkingspunt van de overeenkomstige dubbelinvolutie samen met het corresponderende dubbelpunt. Dit geeft volgens I. 29 tevens een dubbele coïncidentie.

In de involutie van den 4en graad, gevormd door de coïncidentiepunten van alle op K^2 gelegen symmetrische verwantschappen, die A, B, C en D als gemeenschappelijke vertakkingspunten hebben, komen dus drie groepen voor, $\sigma_1, \sigma_1'; \sigma_2, \sigma_2'; \sigma_3, \sigma_3'$, die telkens bestaan uit de dubbelgerelateerde dubbelpunten van een der drie dubbelinvoluties.

De vierzijde van de aan K^2 en een directiekegelsnede D_2 getrokken gemeenschappelijke raaklijnen, die K^2 raakt in de vier coïncidenties, heeft den driehoek $S_1 S_2 S_3$ als diagonaaldriehoek. Deze driehoek is dus ook diagonaaldriehoek voor den volledige vierhoek der vier coïncidenties. Alle quadrupels der coïncidenties op K^2 , die overeenkomen met denzelfden vasten driehoek $S_1 S_2 S_3$ vormen dus samen de drie quadratische involuties op K^2 . Met een punt van zoo'n quadrupel is elk der andere drie in een andere involutie gepaard.

Tot dezelfde drie quadratische involuties behooren ook de quadrupels der dubbelpunten, want de driehoek $S_1 S_2 S_3$ moet ook diagonaaldriehoek zijn voor elk van de door die quadrupels bepaalde vierhoeken.

Als resultaat hebben we dus gevonden:

„Onder alle symmetrische verwantschappen [2], die gemeenschappelijke vertakkingselementen bezitten, komen 4 „oneigenlijke” systemen voor en wel 1° dat systeem, waarvoor K^2 zelf directiekegelsnede is, 2° de drie stelsels, waarvoor de ontaarde kegelsneden, gevormd door de paren tegenzijden van den volledige vierhoek der vertakkingspunten, directiekrommen zijn.”

Het eerste systeem is een identiteit.

In I. 26 vonden we, dat, indien naast de 4 gegeven vertakkings-elementen nog een vijfde voorkwam, de verwantschap [2] òf een identiteit was òf een dubbelinvolutie. Dat is hier gemakkelijk in te zien. Komt een vijfde vertakkingselement E voor, dat met zijn dubbelelement samenvalt, dan moet de directie-kegelsnede D_2 behalve de punten A, B, C, D ook het punt E bevatten en in dit punt de raaklijn aan K^2 , dus K^2 zelf, raken. K^2 en D_2 moeten dus identiek zijn.

Alleen in 't geval, dat E een dubbelelement (coïncidentie) is van een der door het quadrupel A, B, C, D bepaalde quadratische involuties, dus raakpunt van een der uit S_1 , S_2 of S_3 aan K^2 getrokken raaklijnen, voldoet aan de voorwaarden, behalve de identiteit, ook nog de ontaarde kegelsnede, die het overeenkomstige punt S tot dubbelpunt heeft. Het hiermee corresponderende symmetrische stelsel van den 2en graad is dan een dubbelinvolutie.

HOOFDSTUK III

1 — Tusschen twee straalbundels (U) en (U_1) moge een tweezinnige verwantschap bestaan, uitgedrukt door een verg. van den vorm (1). Is in elken bundel de parameterbepaling éénzinnig vastgelegd, dan zijn de verwante stralen nauwkeurig bepaald. Elke straal heeft met elken der overeenkomstige stralen een snijpunt. De m.p. van deze snijpunten is in 't algemeen een binodale kromme van de 4e orde. Kiezen we toch een willekeurige rechte l . Elke straal van beide bundels heeft daarmee een snijpunt. Op l ontstaat een collocale $[2,2]$. De coïncidenties van deze verwantschap zijn de snijpunten van l met de m.p. Volgens I. 11 zijn er vier: de m.p. is dus een K^4 .

De centra U en U_1 zijn dubbelpunten der K^4 ; met UU_1 als element van (U) komen twee stralen overeen, die UU_1 in U_1 snijden. Evenzoo met UU_1 als element van (U_1) twee stralen in U .

2 — Ook tusschen twee rechtlijnige niet-collocale puntreeksen L en L_1 kan een $[2,2]$ bestaan. Nemen we nu een willekeurig punt O en verbinden dit met de punten van L en L_1 dan krijgen we collocale straalbundels in $[2,2]$. De rechten, die twee overeenkomstige punten der puntreeksen verbinden, omhullen een kromme, die in 't algemeen van de 4e klasse is. De straalbundels hebben vier coïncidenties d.w.z. uit O gaan 4 raaklijnen aan de m.p.; deze is dus een K_4 . De dragers der beide puntreeksen zijn dubbelraaklijnen. Elke puntreeks heeft vier vertakkingspunten. In elk vertakkingspunt vallen twee raakpunten aan K^4 samen d. w. z. de rechte L is dubbelraaklijn aan

de K^4 en snijdt deze bovendien nog 4 maal. De K_4 is dus van de 8ste orde.

3 — De binodale K^4 kan ontaarden in een K^3 en een rechte R . Dan moet een der 4 coïncidenties voor elke rechte l liggen op R . Dit is alleen mogelijk als UU_1 correspondeert met U_1U . De dubbelpunten der K^4 zijn nu de snijpunten der K^3 met R d. i. U, U_1 . Dit zijn dan enkelvoudige punten van K^3 .

De straalbundels zijn twee-tweezinnige stelsels in half-perspectieve ligging.

De m.p. van de snijpunten van overeenkomstige stralen van een [2,2] in half-perspectieve ligging is een kromme K^3 .

Bij de K_4 van art. 2 vinden we de half-perspectieve ligging der puntreeksen, als 't snijpunt S van L en L_1 met zichzelf overeenkomt. S is dan een geïsoleerd punt van de K_4 d. w. z. deze bestaat uit een K_3 en den straalbundel om 't punt S . L en L_1 zijn nu enkelvoudige raaklijnen. Dus:

De rechten, die de overeenkomstige punten van twee half-perspectief gelegen puntreeksen in [2,2] met elkaar verbinden, omhullen een kromme van de derde klasse.

Het is duidelijk, dat we op deze wijze door dualiseeren naast de eigenschappen der ordekrummen steeds die der klassekrummen kunnen vinden. In 't vervolg beperken we ons tot de eerste.

4 — Beschouwen we nu een K^3 als gegeven. Twee punten m_1 en m_2 op de kromme nemen we als centra van straalbundels. Twee stralen, die elkaar op de K^3 snijden, komen overeen. Tusschen de twee straalbundels bestaat nu een [2,2]. Elk stelsel heeft 4 vertakkingselementen, waarmee 4 dubbelelementen van 't andere stelsel overeenkomen. Elke vertakkingsstraal is dus raaklijn aan de K^3 . Hieruit volgt:

Uit een willekeurig punt der K^3 kunnen niet meer dan 4 raaklijnen aan de kromme getrokken worden. Deze is dus van de zesde klasse.

De vertakkingsstralen van beide stelsels zijn op vier verschillende wijzen projectief d. w. z. hebben dezelfde dubbelverhouding [I. 3]. Dus, daar m_1 en m_2 willekeurig gekozen kunnen worden:

De dubbelverhouding van de vier uit een willekeurig punt der K^3 aan de kromme getrokken raaklijnen is constant.

Elke K^3 heeft dus een invariant nl. de dubbelverhouding van de raaklijnenquadrupels. Bij een dubbelverhouding -1 of $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ kan men dus spreken van *harmonische* en *aequi-anharmonische* kubische krommen. De snijpunten van de overeenkomstige stralen van projectieve straalbundels liggen op een kegelsnede door de middelpunten. Daaruit volgt:

Trekt men uit twee punten m_1 en m_2 van een K^3 de raaklijnen, dan liggen haar zestien snijpunten op vier kegelsneden door m_1 en m_2 . (SALMON).

5 — Op elk van de vier gevonden kegelsneden snijden de straalbundels uit m_1 en m_2 puntreeksen in. Ook tusschen deze bestaat een [2,2]. Daar twee raaklijnen uit m_1 en m_2 aan K^3 elkaar op de K^2 snijden, vallen de vertakkingspunten van beide reeksen samen, d. w. z. we hebben een symmetrische puntreeks van den tweeden graad.

Zijn a_1 en a_2 twee overeenkomstige punten van zoo'n reeks, dan moet a_2 het snijpunt zijn van een der met m_1a_1 en een der met m_2a_1 overeenkomende stralen, omdat het onverschillig is, tot welk stelsel men a_1 rekent. De punten $p_1 \equiv (m_1a_1, m_2a_2)$ en $p_2 \equiv (m_2a_1, m_1a_2)$ liggen derhalve op de K^3 .

Dit geldt ook voor de punten m_1 en m_2 : in de plaats van p_1 treedt dan het punt m_3 , waarin m_1m_2 de K^3 nogmaals snijdt en in de plaats van p_2 het snijpunt p_3 van de raaklijnen in m_1m_2 aan K^2 getrokken.

Uit den zeshoek, gevormd door deze raaklijnen met den vierhoek $m_1a_1m_2a_2$ volgt, dat p_1p_2 gaat door p_3 . Omgekeerd snijdt elke rechte door p_3 de kromme in twee punten, die uit m_1 en m_2

in dezelfde punten, schoon in tegengestelde volgorde, op K^2 worden geprojecteerd.

Laat men deze rechte door m_3 gaan, dan valt een der snijpunten met K^3 met p_3 samen: m_3 is dus het snijpunt van K^3 met de raaklijn in p_3 d. i. het tangentiaalpunt van p_3 .

Daarbij m_3 als tangentiaalpunt 4 raaklijnen behooren, zijner 4 punten p_3 , die elk overeenkomen met een der 4 kegelsneden van art. 4.

De symmetrische puntreeks op K^2 heeft vier coïncidenties c_1, c_2, c_3, c_4 . In deze punten moeten twee overeenkomstige stralen uit m_1 en m_2 elkaar snijden: het zijn dus de vier snijpunten, die K^2 buiten m_1 en m_2 met K^3 gemeen heeft. In zoo'n punt c vallen dus, behalve a_1 en a_2 , ook p_1 en p_2 samen. De rechte $p_3p_1p_2$ wordt nu raaklijn aan de K^3 met tangentiaalpunt p_3 . De punten c_1, c_2, c_3 en c_4 zijn dus de punten van het quadrupel met tangentiaalpunt p_3 .

Laat men de rechte m_1m_2 om m_3 draaien, dan blijft p_3 op zijn plaats. Bij elke nieuwe ligging van m_1m_2 behoort één nieuwe K^2 , die volgens de voorgaande beschouwing moet gaan door de vaste punten c_1, c_2, c_3, c_4 . Hieruit volgt:

„De m.p. van de raakpunten der raaklijnen, die men uit een willekeurig vast punt kan trekken aan de kegelsneden van een K^2 -bundel is een kromme van de derde orde.”

Door de punten c_1, c_2, c_3, c_4 en p_3 is dus een K^3 volkomen bepaald. Derhalve:

Door een raakpuntenquadrupel en zijn tangentiaalpunt is een K^3 eenzinnig bepaald.

De rechte m_1m_2 is de poollijn van p_3 ten opzichte van de K^2 . Deze snijdt de K^3 in m_3 . Uit het voorgaande volgt dus:

De poollijnen van een willekeurig punt p ten opzichte van de kegelsneden van een K^2 -bundel gaan door één punt.

Uit de theorie der kegelsneden is dit bekend als de geconjupeerde pool van p ten opzichte van den K^2 -bundel.

Dus:

Het eerste en het tweede tangentiaalpunt van een quadrupel zijn

geconjugeerde polen ten opzichte van den K^2 -bundel, die dat quadrupel tot basispunten heeft.

6 — Beschouwen we omgekeerd twee punten p en q als geconjugeerde polen ten opzichte van een K^2 -bundel door 4 punten c_1, c_2, c_3 en c_4 . Beide punten zijn centra van straalbundels in $[2,2]$. Immers, aan een straal x uit p raken twee kegelsneden van den bundel. Ten opzichte van elk dier kegelsneden heeft p een poollijn en deze poollijnen y_1 en y_2 snijden elkaar in q . Met elken straal y uit q komt één kegelsnede van den bundel overeen ten opzichte waarvan y de poollijn is van p . Uit p kunnen we nu weer twee raaklijnen x_1 en x_2 aan die K^2 trekken.

De straalbundels liggen half-perspectief. Immers van de twee kegelsneden, die aan pq raken, moet de eene p tot raakpunt hebben, waardoor qp tevens de overeenkomstige poollijn wordt. De andere kegelsnede raakt in q , zoodat met pq overeenkomt de straal uit q getrokken naar 't raakpunt van de tweede raaklijn uit p aan die K^2 .

Met qp komt overeen pq als dubbelstraal dus qp is vertakkings-element. De andere vertakkings-elementen zijn voor den bundel (q) : qs_1, qs_2, qs_3 , naar de punten $s_1 \equiv (c_1c_2, c_3c_4)$, $s_2 \equiv (c_1c_3, c_2c_4)$ en $s_3 \equiv (c_1c_4, c_2c_3)$, de dubbelpunten van de drie ontaarde kegelsneden van den bundel. Daarmee komen ps_1, ps_2 en ps_3 als dubbelstralen overeen.

De vertakkingsstralen van den bundel (p) zijn pc_1, pc_2, pc_3 en pc_4 , waarmee overeenkomen de dubbelstralen qc_1, qc_2, qc_3 en qc_4 .

Daar de bundels half-perspectief liggen is de m.p. van de snijpunten der overeenkomstige stralen een K^3 . Deze snijpunten zijn echter de raakpunten van de raaklijnen uit p aan de kegelsneden van den K^2 -bundel. We vinden zoo de stelling van art. 5 terug.

De K^3 gaat door de basispunten c_1, c_2, c_3, c_4 , door p en q en door de punten s_1, s_2 en s_3 .

De punten c_1, c_2, c_3, c_4 vormen het quadrupel, dat p tot tangentialpunt heeft; q is tangentialpunt van p , waarbij s_1, s_2 en s_3 als andere punten van 't zelfde quadrupel behooren.

We kunnen het verkregen resultaat ook aldus uitdrukken: *Trekt men uit een punt q van een K^3 de vier raaklijnen aan de kromme met raakpunten s_1, s_2, s_3 en p en uit p vier nieuwe raaklijnen met raakpunten c_1, c_2, c_3 en c_4 dan zijn s_1, s_2 en s_3 de diagonaalpunten van den volledigen vierhoek $c_1c_2c_3c_4$.*

Op een straal door p wordt door den K^2 -bundel een involutie ingesneden. Het punt p en het snijpunt s , dat de straal gemeen heeft met de in p rakende K^2 , vormen een paar van deze involutie. De beide andere snijpunten, die de straal buiten p nog met K^3 heeft, zijn de dubbelpunten van de involutie. Daar elk paar der involutie harmonisch ligt ten opzichte van de dubbelpunten, is het punt s dus steeds harmonisch toegevoegd aan p ten opzichte van de beide andere snijpunten met K^3 . De kegelsnede door de punten van het quadrupel en zijn tangentialpunt is derhalve de poolkegelsnede van dat tangentialpunt.

7 — Keeren we terug tot de kegelsnede K^2 van art. 5. Verbindt men elk punt van K^2 met de beide toegevoegde punten, dan omhullen de verbindingslijnen een kromme der tweede klasse, D_2 , de directiekromme der symmetrische puntreeks (II. 2).

D_2 en K^2 snijden elkaar in de vertakkingspunten der [2], terwijl de gemeenschappelijke raaklijnen der kegelsneden K^2 in de vier coïncidenties raken.

Deze punten c_1, c_2, c_3 en c_4 bleken de snijpunten van K^2 met K^3 te zijn.

Bedenken we, dat m_1 en m_2 (art. 5) ook overeenkomstige punten zijn op K^2 en dus m_1m_2 raakt aan D_2 , dan kunnen we uit de beschouwingen van art. 5 de volgende voortbrenging der krommen K^3 afleiden.

Snijdt een bewegelijke raaklijn van een vaste kegelsnede D_2 een andere vaste K^2 in a_1, a_2 en zijn m_1, m_2 de snijpunten van K^2 met

een vaste raaklijn van D_2 , dan is de m.p. der punten $p_1 \equiv (m_1 a_1, m_2 a_2)$ en $p_2 \equiv (m_1 a_2, m_2 a_1)$ een kromme der derde orde, die door m_1, m_2 gaat. (E. WEYR).

8 — Is v_1 een der vertakkingspunten op K^2 , dus een der snijpunten van K^2 met D^2 en ontmoet de raaklijn in v_1 aan D_2 getrokken K^2 in het overeenkomstige punt w_1 , dan raken $m_1 v_1$ en $m_2 w_1$ de kromme K^3 in $p' \equiv (m_1 v_1, m_2 w_1)$ en $p'' \equiv (m_2 v_1, m_1 w_1)$.

Daar $p'p''$ door p_3 gaat en m_3 het tangentiaalpunt van p_3 is, komen wij tot de bekende eigenschap:

Zijn m_1, m_2, m_3 de snijpunten van een K^3 met een rechte dan gaat de lijn, die de raakpunten van twee uit m_1 en m_2 getrokken raaklijnen verbindt, door het raakpunt van een raaklijn uit m_3 .

(MACLAURIN).

Uit elk punt kan men vier raaklijnen trekken, dus ook: De raakpunten der twaalf raaklijnen, die men uit drie op een rechte gelegen punten van een K^3 kan trekken, liggen drie aan drie op zestien rechten. (HESSE).

Is v_2 een tweede vertakkingspunt van K^2 , dan gaat — weer volgens de eigenschap van PASCAL — de rechte, die het snijpunt der raaklijnen $m_1 v_1$ en $m_2 v_2$ met het snijpunt der raaklijnen $m_1 v_2$ en $m_2 v_1$ verbindt, door het snijpunt der rechten, die K^2 in m_1 en m_2 aanraken d. i. p_3 . De punten v zijn op zes wijzen twee aan twee samen te stellen, terwijl m_1, m_2 aanleiding geven tot vier kegelsneden K^2 . Men heeft daarom:

De snijpunten der raaklijnen uit twee punten m_1, m_2 eener K^3 liggen twee aan twee op vier en twintig rechten, die zes aan zes samenkomen in de punten van het quadrupel, welks tangentiaalpunt op $m_1 m_2$ ligt. (SALMON).

9 — We nemen op een K^3 vier willekeurige punten p_1, p_2, p_3 en p_4 en brengen daardoor een K^2 -bundel. Elke K^2 snijdt de K^3 bovendien in twee andere punten, die involutorisch aan elkaar

zijn toegevoegd. Immers, zijn x en y twee zulke snijpunten, dan snijdt de K^2 door de vier basispunten en x de K^3 in y , terwijl de K^2 door de basis en y de K^3 snijdt in x .

Nemen we een willekeurig punt t als centrum van een straalbundel, dan ontstaat in dezen bundel een symmetrische [2]. Immers elke straal x van den bundel snijdt K^3 in twee punten s_1 en s_2 . Daarmee komen twee kegelsneden overeen, die K^3 nogmaals snijden in s'_1 en s'_2 , waardoor twee stralen gaan, $ts'_1 \equiv y_1$ en $ts'_2 \equiv y_2$. Beschouwen we ts_1s_2 als een straal y , dan vinden we met volkomen identieke operatie dezelfde stralen ts'_1 en ts'_2 als x_1 en x_2 . Van deze symmetrische verwantschap zijn de vertakkingstralen de raaklijnen uit t aan K^3 . In het algemeen vallen de dubbelstralen niet met de vertakkingstralen samen.

Hoe zal t nu gelegen moeten zijn, opdat er buiten die vier vertakkingstralen nog een vijfde voorkome? Daarvoor zijn twee mogelijkheden: a) de vertakkingstraal valt samen met zijn dubbelstraal, b) vertakkingstraal en dubbelstraal vallen niet samen.

a) In dit geval moeten ts_1s_2 , ts'_1 en ts_2 samenvallen, dus s'_1 valt in s_2 , s'_2 in s_1 d. w. z. t is het snijpunt van de verbindingslijn van twee involutorisch overeenkomende punten met K^3 .

We hebben nu het geval van I. 26A: de verwantschap is een identiteit, elke straal is vertakkingstraal en daarmee overeenkomende dubbelstraal. Meetkundig beteekent dit, dat alle rechten, die de puntenparen verbinden, welke de kegelsneden van den bundel buiten de basispunten nog met K^3 gemeen hebben, door één punt gaan, het „tegenpunt” der vier punten. Dus:

Laat men een kegelsnede zoo veranderen, dat ze een K^3 in vier vaste punten ontmoet, dan gaat de rechte, die de beide andere snijpunten der krommen verbindt, door een vast punt van K^3 .

b) Valt de 5e vertakkingstraal niet samen met zijn dubbelstraal en noemen we het middelpunt van den straalbundel voor dit geval t_1 , dan moet $t_1s'_1$ samenvallen met $t_1s'_2$ dus met $t_1s_1s_2$ komt overeen de dubbelstraal $t_1s'_1s'_2$.

We hebben nu het tweede geval van I. 26, d. w. z. de [2] gaat over in een dubbelinvolutie. Voor elken straal uit t_1 vallen de beide overeenkomstige stralen samen.

De punten s_1 en s'_1 behooren tot dezelfde K^2 , dus de rechte $s_1s'_1$ gaat door t ; evenzoo de rechte $s_2s'_2$. Uit het punt t_1 worden dus de involutorisch overeenkomende punten s_1 en s'_1 geprojecteerd in twee andere, tot dezelfde involutie behorende punten.

Beschouwen we t en t_1 als middelpunten van straalbundels en noemen we weer twee stralen overeenkomstig, als ze elkaar op K^3 snijden, dan blijkt, dat met de stralen $ts_1s'_1$ en $ts_2s'_2$ dezelfde twee stralen $t_1s_1s_2$ en $t_1s'_1s'_2$ overeenkomen. We hebben hier dus 't geval van I. 8: de verwantschap ontstaat door de projectiviteit van twee quadratische involuties. Met een paar stralen van 't eene stelsel komt steeds een paar van 't andere overeen. Men noemt dit projectieve involuties.

10 — Tot den K^2 -bundel behooren drie ontaarde kegelsneden nl. (p_1p_2, p_3p_4) , (p_1p_3, p_2p_4) en (p_1p_4, p_2p_3) . Noemen we de snijpunten van de 1e en de 2e kegelsnede met K^3 r_1 en r_2 , s_1 en s_2 , dan volgt uit art. 9, dat r_1r_2 en s_1s_2 beide door t gaan. Hieruit volgt:

„Snijdt men een K^3 door twee rechten achtereenvolgens in a_1, a_2, a_3 en b_1, b_2, b_3 en met a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 in c_1, c_2, c_3 dan liggen ook de punten c in een rechte.”

Vallen de punten a met de punten b samen, dan vinden we: *„De tangentialpunten van drie in een rechte gelegen punten eener K^3 liggen op een tweede rechte.”* (MACLAURIN).

Duiden we de tangentialpunten van bovengenoemde punten p, r, s en t door accenten aan, dan leert de stelling van MACLAURIN, dat de volgende drietallen op rechte lijnen gelegen zijn:

$$p'_1, p'_2, r'_1; p'_3, p'_4, r'_2; r'_1, r'_2, t'.$$

Hieruit blijkt, dat t' het tegenpunt is der punten p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 . Dus:

„Het tangentialpunt van het tegenpunt van vier punten is het tegenpunt van hun tangentialpunten.” (KÜPPER).

Zijn verder p_5, p_6 de snijpunten van K^3 met een K^2 door p_1, p_2, p_3, p_4 zoodat $p_5 p_6$ door t gaat, dan ligt t' met $p'_5 p'_6$ in één rechte (MACLAURIN) terwijl het zesde snijpunt van K^3 met de kegelsnede door $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$ volgens de laatste eigenschap zich op $p'_5 t'$ bevindt, dus met p'_6 samenvalt. Dus:

De tangentialpunten van zes door een K^2 vereenigde punten van een K^3 liggen weer op een kegelsnede. (CREMONA).

Zijn zes punten $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2$ de op K^3 gelegen hoekpunten van een volledige vierzijde en beschouwen wij $(a_1 b_1 c_1, a_1 b_2 c_2)$ en $(a_2 b_1 c_2, a_2 b_2 c_1)$ als twee kegelsneden van den bundel $(b_1 b_2 c_1 c_2)$, dan blijkt, dat de raaklijnen in a_1 en a_2 elkander in het tegenpunt der vier punten moeten snijden. Noemen wij dus met CREMONA twee punten „correspondeerend” als zij hetzelfde tangentialpunt hebben, dan volgt:

„Wanneer de hoekpunten eener volledige vierzijde op een K^3 liggen, vormen zij drie paren corresponderende punten.”

II — Beschouwen we nu weer de projectieve involuties van art. 9. De punten $t_1, s_1, s_2, s'_1, s'_2$ en t liggen op de K^3 en zijn hoekpunten van een volledige vierzijde. We hebben ook hier dus paren corresponderende punten en wel $(t, t_1), (s_1, s'_2)$ en (s'_1, s_2) .

Daar bij 't punt t drie corresponderende punten behooren, kunnen we drie paren zulke projectieve involuties vinden. Dus: *Uit de corresponderende punten van het tegenpunt van vier punten worden de door den K^3 -bundel op de K^3 bepaalde involutorische paren in elkaar geprojecteerd.*

Voorts blijkt ook, dat het paar corresponderende punten s_1, s'_2 uit t_1 en uit t geprojecteerd worden in het paar s_2, s'_1 .

12 — In I. 4 vonden we, dat de vertakkingselementen en de dubbelelementen van éénzelfde stelsel tot drie quadratische involuties behooren. Liggen de centra van straalbundels in $[2,2]$

op de K^3 , dan moeten dus de raaklijnen en de tot de $[2,2]$ behoorende dubbelelementen uit hetzelfde tangentiaalpunt behooren tot drie involuties. Tevens toonden we aan, dat de drie involuties in een punt P door projectie overgaan in de drie involuties uit een willekeurig ander punt Q .

De quadrupels corresponderende punten worden dan eveneens verdeeld in drie stelsels. Elk punt der K^3 behoort dus tot elk der drie stelsels.

„Projecteeren we uit een willekeurig punt der K^3 twee corresponderende punten op de K^3 , dan zijn de projecties weer corresponderende punten.”

We geven van deze stelling nog 't volgende bewijs: U zij 't tangentiaalpunt behoorende bij de corresponderende punten a en b . We projecteeren ze uit V . De straalbundels uit U en V , die we aanduiden door $U(\lambda)$ en $V(\mu)$ staan in $[2,2]$. De projectie van a op K^3 zij 't punt p . Het tangentiaalpunt van p zij T . We kunnen dit punt als centrum beschouwen van een bundel $T(v)$, die met $V(\mu)$ ook in $[2,2]$ staat.

Noemen we dit laatste stelsel voor deze verwantschap $V'(\mu)$. De collocale stelsels $V(\mu)$ en $V'(\mu)$ hebben nu zeker de vertakkingselementen gemeen — immers de raaklijnen uit V aan K^3 . Bovendien hebben ze den straal Va als dubbelstraal gemeen. In beide stelsels moet nu een quadratische involutie voorkomen met de paren $\mu_1\mu_2, \mu_3\mu_4$, terwijl van het derde paar het dubbelelement Va gemeenschappelijk is. Daaruit volgt, dat ook het tweede element van dit paar gemeenschappelijk moet zijn, d. w. z. Vb is ook dubbelelement in het systeem $V'(\mu)$. Dan moet echter het punt q , waarin Vb K^3 nogmaals snijdt, raakpunt zijn van een raaklijn uit T , dus corresponderen met p .

Uit het voorgaande volgen de stellingen:

Elk der drie stelsels van corresponderende punten wordt uit ieder punt der K^3 door een quadratische straleninvolutie in zichzelf geprojecteerd. Tot die involutie behooren ook de vier raaklijnen uit het projectiecentrum, tot twee paren vereenigd. (E. WEYR).

Uit elk puntquadrupel op een K^3 kan men alle andere verkrijgen door het achtereenvolgens uit alle punten der kromme op haar te projecteeren.
(J. DE VRIES).

13 — Zijn a_1, a_2 en x_1, x_2 twee paren corresponderende punten van hetzelfde stelsel, dan moeten volgens art. 12 de snijpunten $(a_1x_1, a_2x_2) \equiv m_1$ en $(a_1x_2, a_2x_1) \equiv m_2$ op K^3 liggen. Immers, bepalen we het snijpunt m_1 van a_1x_2 met K^3 , dan kunnen we uit dit punt a_1 en a_2 projecteeren op K^3 . De eene projectie is x_1 , doch daar bij x_1 slechts één punt van 't zelfde stelsel behoort als a_1, a_2 en dit het punt x_2 is, moet de projectie van a_2 uit m_1 ook x_2 zijn.

Evenzoo wordt uit het snijpunt van a_1x_2 met K^3 , het punt m_2, a_2 geprojecteerd in x_1 .

We kunnen echter m_1 en m_2 ook beschouwen als de projecties van a_2 en a_1 uit x_2 op K^3 of van a_1 en a_2 uit x_1 . Volgens art. 12 moeten m_1 en m_2 dan ook corresponderende punten zijn, behoorende tot hetzelfde stelsel.

Beschouwen we een der drie paren corresponderende punten b.v. a_1 en a_2 als centra van twee in $[2,2]$ staande stralenbundels, dan hebben we hier weer het geval van I. 8. Immers met $a_1x_1m_1$ komen dezelfde stralen $a_2m_2x_1$ en $a_2x_2m_1$ overeen als met $a_1m_2x_2$.

De $[2, 2]$ is dan weer een projectiviteit van twee quadratische involuties in half-perspectieve ligging.

We kunnen omgekeerd aantoonen, dat, indien twee centra van straalbundels zoo gekozen zijn, dat de $[2, 2]$ overgaat in een projectiviteit van twee quadratische involuties, deze centra corresponderende punten zijn.

Noem de punten a_1 en a_2 . Het tangentiaalpunt van a_1 zij t . Met de raaklijn a_1t in a_1 komen overeen de stralen a_2a_1 en a_2t . De straal a_2a_1 moge K^3 nogmaals snijden in p . Uit de projectiviteit der involuties volgt, dat het derde snijpunt van a_2t met K^3 moet liggen op a_1p d.w.z. het valt samen met a_2 . De rechte a_2t is dus raaklijn aan K^3 in a_2 . De punten a_1 en a_2

hebben dan een gemeenschappelijk tangentiaalpunt t d.w.z. het zijn corresponderende punten.

De vier punten, waarin de overeenkomstige stralenparen der projectieve involuties elkaar op K^3 snijden, vormen met de centra de hoekpunten van een volledige vierzijde. Daarin zijn de tegenpunten dus corresponderende punten en daar ze door projectie in elkaar overgaan, zijn het punten van hetzelfde stelsel.

Passen we de stelling van MACLAURIN (art. 10) toe op deze volledige vierzijde, dan vinden we:

De drie tangentiaalpunten van de paren tegenpunten van een volledige vierzijde op een K^3 , liggen op een rechte.

14 — Een quadratische involutie heeft twee dubbelelementen. Als stelsel van de $[2, 2]$ zou zij vier dubbelelementen moeten hebben.

Bij nadere beschouwing blijkt, dat ieder dubbelelement overeenkomt met twee vertakkingselementen.

Een vertakkingsstraal van 't stelsel (a_1) moge K^3 raken in r . Hiermee komt overeen de dubbelstraal a_2r . Zij 't derde snijpunt van a_2r met K^3 het punt s . De straal a_1s is dan in de involutie toegevoegd aan a_1r . Aan een vertakkingsstraal is echter een andere vertakkingsstraal toegevoegd. Dus is a_1s ook vertakkingsstraal d.w.z. a_1s raakt de K^3 in s . Met de vertakkingsstralen a_1s en a_1r komt dus één dubbelelement a_2r overeen. Hieruit volgt:

Wanneer een kromme K^3 wordt voortgebracht door twee projectieve involuties in half-perspectieve ligging, dan liggen van de vier raaklijnen, die men uit elk involutiecentrum aan K^3 kan trekken, tweemaal twee raakpunten op een straal door het andere centrum.

(R. STURM).

Of, daar de centra corresponderende punten zijn:

De rechte, die de raakpunten van twee uit eenzelfde punt P van K^3 getrokken raaklijnen verbindt, gaat door een der met P corresponderende punten.

We zijn daarmee langs een anderen weg teruggekeerd tot de laatste stelling van art. 6.

Is het punt P een buigpunt, dan is elk der raakpunten van de uit P getrokken raaklijnen tevens een corresponderend punt van P . Uit de gevonden eigenschap volgt:

De raakpunten der drie uit een buigpunt aan K^3 getrokken raaklijnen liggen op een rechte.

Ook het omgekeerde van deze stelling geldt:

Wanneer de raakpunten van drie uit eenzelfde punt P der K^3 getrokken raaklijnen op een rechte liggen, valt het raakpunt van de vierde raaklijn met P samen en is dit punt een buigpunt.

In art. 5 vonden we, dat de kegelsnede door de punten van een quadrupel en zijn tangentiaalpunt de poolkegelsnede van dit tangentiaalpunt is. Bij een buigpunt liggen drie van deze punten op een rechte. De poolkegelsnede is dus ontaard in twee rechten, waarvan één is de stationaire raaklijn aan K^3 en de andere de verbindingslijn h der andere drie raakpunten.

Uit een buigpunt en één van zijn corresponderende punten wordt K^3 voortgebracht door twee projectieve involuties in half-perspectieve ligging. Zij i het buigpunt en s het corresponderende punt. Van de involutie (s) zijn de dubbelstralen si en bovengenoemde verbindingslijn h der drie met i corresponderende punten. De dubbelelementen van een involutie scheiden de elementen van elk involutorisch paar harmonisch. Op een willekeurigen straal uit i is dus het snijpunt met h harmonisch toegevoegd aan i t.o.v. de beide andere snijpunten met K^3 . Om deze reden heet h de *harmonische poollijn* van i .

Uit s gaan vier raaklijnen aan K^3 . Hun raakpunten moeten volgens het voorgaande twee aan twee liggen op rechten door i , de dubbelstralen van de involutie (i). De beide andere raaklijnen uit i aan K^3 zijn overeenkomstige stralen der involutie. Deze worden dus weer harmonisch gescheiden door de genoemde dub-

belstralen van (*i*). Hetzelfde is het geval met den straal *i s* en de stationaire raaklijn.

15 — Verbinden we de overeenkomstige punten van een der drie stelsels van corresponderende punten door rechten, dan omhullen deze een kromme van de derde klasse.

Zij *m* het centrum van de quadratische straleninvolutie, waardoor we de punten van 't stelsel projecteeren. Deze involutie heeft twee dubbelstralen d. z. stralen, die overeenkomstige punten verbinden. Dit zijn dus twee raaklijnen aan de omhulde. Voorts behoort bij *m* als punt van 't stelsel nog een corresponderend punt. De verbindingslijn is volgens definitie ook een raaklijn. Uit *m* gaan dus 3 raaklijnen aan de kromme. Deze is dus van de 3e klasse.

De drie stelsels van corresponderende punten eener K^3 geven aanleiding tot drie krommen C_3 van de 3e klasse, die door de verbindingslijnen der paren worden omhuld.

C_3 heet de *Cayleyana* van K^3 , K^3 de *Hessiana* van C_3 .

Door de quadratische involutie wordt de straal naar het corresponderende punt toegevoegd aan den straal naar *m* zelf d.i. aan de raaklijn in *m* aan K^3 . Daar twee overeenkomstige stralen door de dubbelstralen harmonisch gescheiden zijn, volgt hieruit:

Van de drie raaklijnen uit een punt van K^3 aan de Cayleyana, wordt de raaklijn, die naar het corresponderende punt gaat, van de raaklijn in het punt aan K^3 harmonisch gescheiden door de beide andere raaklijnen.

Zijn a_1, a_2 twee corresponderende punten en x_1, x_2 een ander paar, dan snijden a_1x_2 en a_2x_1 elkaar in een punt van K^3 , 't punt *m*. Laten we x_1 zeer dicht naderen tot a_1 , dan zal x_2 zeer dicht liggen bij a_2 . De lijnen a_1a_2 en x_1x_2 zijn beide raaklijnen aan de Cayleyana. Het snijpunt *s* van deze rechten wordt in den grensstand, waarin x_1 samenvalt met a_1 en x_2 met a_2 , het raakpunt van a_1a_2 aan C_3 . Het punt *m* gaat dan over in het derde snijpunt van a_1a_2 met K^3 . Uit de volledige vierzijde, gevormd door de

rechten sa_1a_2 , sx_1x_2 , $x_1m_2a_2$ en $x_2m_2a_1$ volgt nu, dat m van s harmonisch gescheiden is door de rechten a_1x_1 en a_2x_2 . Valt x_1x_2 samen met a_1a_2 dan moeten dus m en s evenzoo harmonisch gescheiden zijn door de punten a_1 , a_2 . Derhalve:

Het raakpunt van C_3 met de verbindingslijn van twee corresponderende punten is van het derde snijpunt dezer rechte met K^3 harmonisch gescheiden door dit paar corresponderende punten.

16 — Trekken we nu uit een punt m_1 de drie raaklijnen aan de Cayleyana: $m_1 m_2 s$, $m_1 a_1 a_2$ en $m_1 b_1 b_2$, waarin m_1 , m_2 , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 drie paren corresponderende punten zijn.

We vonden reeds, dat de snijpunten $n_1 \equiv (a_1a_2, b_1b_2)$ en $n_2 \equiv (a_1b_2, a_2b_1)$ corresponderende punten zijn. De punten m_1 , n_1 , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 vormen echter ook de hoekpunten van een volledige vierzijde op de K^3 d.w.z. m_1 en n_1 zijn corresponderende punten. Dus vormen m_1 , m_2 , n_1 , n_2 een puntquadrupel.

n_1n_2 is dan ook een raaklijn aan de Cayleyana. Denken we s als projectiecentrum, dan wordt m_2 geprojecteerd in m_1 en moet n_2 geprojecteerd worden in n_1 , omdat buiten m_2 en n_2 alleen nog n_1 met m_1 correspondeert. Dus snijdt n_1n_2 de K^3 in het punt s . Het raakpunt van n_1n_2 met de C_3 is het punt r , dat door n_1 en n_2 harmonisch gescheiden wordt van s .

Trekken we ook uit m_2 de drie raaklijnen aan C_3 . Dit zijn $m_2 m_1 s$, $m_2 c_1 c_2$ en $m_2 d_1 d_2$. De diagonaalpunten van den volledige vierhoek $c_1 c_2 d_1 d_2$ moeten volgens dezelfde redeneering weer zijn de beide punten, die met m_1 en m_2 het quadrupel vormen d.w.z. het zijn de punten n_1 en n_2 . De rechte n_1n_2 is dus gemeenschappelijke diagonaal van $a_1 a_2 b_1 b_2$ en $c_1 c_2 d_1 d_2$. Deze diagonaal snijdt $m_1 a_1 a_2$, $m_1 b_1 b_2$, $m_2 c_1 c_2$ en $m_2 d_1 d_2$ in punten α , β , γ , δ , die opeenvolgend harmonisch gescheiden zijn: α van m_1 door a_1 , a_2 ; β van m_1 door b_1 , b_2 ; γ van m_2 door c_1 , c_2 ; δ van m_2 door d_1 , d_2 , d.w.z. α , β , γ , δ zijn de punten, waarin $m_1 a_1 a_2$, $m_1 b_1 b_2$, $m_2 c_1 c_2$ en $m_2 d_1 d_2$ de Cayleyana raken.

De rechte $n_1 n_2 s$ heeft dus met C_3 zes punten gemeen. De Cayleyana is van de zesde orde.

Uit de genoemde vierhoeken volgt verder, dat α, β, n_1 en n_2 en γ, δ, n_1, n_2 harmonische groepen zijn, zoodat $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta), (r, s)$ drie paren zijn van een involutie met dubbelpunten n_1, n_2 . De punten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kunnen drie verschillende involuties bepalen. Een kromme C_3^6 als Cayleyana beschouwd, kan dus behooren tot drie verschillende Hessiana's. De dubbelpunten der involutie en het, aan het raakpunt r toegevoegde punt, vormen dan drie punten der Hessiana, terwijl de raaklijnen aan C_3 in de paren toegevoegde punten nog twee punten van K^3 leveren.

17 — Is i een buigpunt van K^3 en s het raakpunt van een uit i getrokken raaklijn, dan zijn deze punten te beschouwen als corresponderende punten, omdat i met zijn tangentiaalpunt samenvalt.

Het derde snijpunt van $i s$ met K^3 is nu met s samengevallen. Het raakpunt van deze rechte met de Cayleyana, dat van het derde snijpunt harmonisch is gescheiden door i en s , moet nu ook terecht komen in s . K^3 en C_3 raken elkaar dus in s en hebben daar de raaklijn $s i$ gemeen. Hieruit volgt:

De Cayleyana wordt door K^3 aangeraakt in de corresponderende punten der buigpunten.

18 — Om te weten te komen of C_3 en K^3 nog andere punten gemeen kunnen hebben, moeten we nu het aantal der buigpunten bepalen. Dit kan op de volgende wijze gevonden worden:

Uit een van de punten m van een K^3 trekken we een snijlijn $m a b$. Beschouwen we de punten a en b als tangentiaalpunten, dan is aan elk een puntquadrupel toegevoegd, dus aan den straal $m a b$ acht stralen naar de punten dezer quadrupels.

Beschouwen we a en b als raakpunten dan is aan elk één tangentiaalpunt toegevoegd en aan $m a b$ een tweetal stralen naar

die tangentiaalpunten. Deze stralenovereenkomst kan uitgedrukt worden door een vergelijking, die ten opzichte van de beide parameters van den tweeden en den achtsten graad is. Voor een coïncidentie worden de parameters gelijk en de vergelijking dus van den tienden graad. De straalbundel (m) bevat dus tien stralen, die tot beide stelsels gerekend moeten worden. Eén daarvan is de raaklijn in m , de andere negen gaan naar punten van K^3 , die met hun tangentiaalpunten samenvallen. Dus: *Een K^3 heeft negen buigpunten.*

Daar nu van de drie met een buigpunt der Hessiana corresponderende punten telkens maar één ligt op een der drie Cayleyana's, raakt de C_3 de K^3 in negen punten. De krommen resp. van de zesde en de derde orde kunnen buiten deze raakpunten geen andere punten gemeen hebben.

19 — De harmonische poollijn h van i snijdt K^3 nog in twee punten n_1 en n_2 , die met s (zie art. 17) en i een quadrupel vormen en dus tot hetzelfde stelsel behooren als s en i . C_3 wordt dus ook door h aangeraakt en wel in het punt r , waarvoor $(n_1 n_2 r s) = -1$.

Vergelijken we met art. 16, dan hebben we hier, dat i en s de punten m_1 en m_2 vervangen. Voorts is s uit art. 16 samengevallen met m_1 . Het punt r is weer het raakpunt van $n_1 n_2$ (d.i. h) met C_3 .

De punten van het quadrupel met s als tangentiaalpunt zijn hier de punten a_1, a_2, b_1, b_2 , want ia_1a_2 , en ib_1b_2 zijn de dubbelstralen van de involutie (i) dus de raaklijnen uit i aan C_3 . Zij raken C_3 in haar snijpunten α, β met h . Van de drie raaklijnen uit s aan C_3 zijn twee samengevallen in si , de derde is h . Van de raakpunten γ en δ moet dus een zijn samengevallen met s en het andere met r . Dit laatste punt is dus één der keerpunten, die een C_3 als reciproke kromme eener K^3 moet bezitten. Dus: *De harmonische poollijnen eener K^3 zijn de keerpuntsraaklijnen der drie bijbehorende Cayleyana's. De keerpunten liggen harmonisch met*

de punten, die K^3 met haar harmonische poollijnen gemeen heeft.

20 — Uit een buigpunt i trekken we twee rechten, die K^3 nog in 4 punten a_1, a_2, b_1, b_2 snijden. Brengen we door die punten een K^2 , dan snijdt deze K^3 nog in twee punten, die eveneens moeten liggen op een straal door i .

De harmonische poollijn h van i blijkt de poollijn van i t.o.v. K^2 te zijn, waaruit het bewijs onmiddellijk volgt. Dus:

Een buigpunt i is tegenpunt van elk puntquadrupel, waarvan de punten twee aan twee liggen op stralen door i .

Hieruit volgt, dat als men de ontaarde kegelsnede (a_1a_2, b_1b_2) neemt, de snijpunten van deze rechten met K^3 , dus a_3 en b_3 , ook liggen op een straal door i . Bovendien snijden a_1a_2 en b_1b_2 elkaar op de harm. pool. van i .

Dus:

Snijdt men K^3 door een rechte in de punten a_1, a_2 en a_3 en trekt men de rechten ia_1, ia_2, ia_3 die K^3 nogmaals snijden in de punten b_1, b_2, b_3 , dan liggen deze eveneens op een rechte.

Deze uitkomst is een bijzonder geval van de stelling in art. 10 bewezen. Immers in i heeft de stationaire raaklijn drie punten met K^3 gemeen.

Vallen a_1 en a_2 samen, dus ook b_1 met b_2 , dan hebben we:

Trekt men uit een buigpunt een rechte, die K^3 snijdt in twee punten a en b , dan snijden de raaklijnen in deze punten aan K^3 getrokken, elkaar op de harmonische poollijn van het buigpunt.
(MACLAURIN).

Vallen a_1, a_2 en a_3 samen, dan moeten ook b_1, b_2 en b_3 samenvallen en krijgt men:

De raaklijnen in twee buigpunten snijden elkaar op de harmonische poollijn van 't buigpunt, dat met hen in een rechte ligt. (CREMONA).

Zijn r_1, r_2, r_3 de snijpunten der raaklijnen in drie op een rechte gelegen buigpunten i_1, i_2, i_3 dan gaan de harm. poollijnen H_1, H_2, H_3 dus achtereenvolgens door r_1, r_2 en r_3 .

H_1 snijdt de lijn $i_1 i_2 i_3$ in een punt, dat door i_2 en i_3 dus ook door hun raaklijnen harmonisch gescheiden wordt van i_1 , dus moet H_1 de rechte $r_2 r_3$ ontmoeten in een punt p_1 , zoodat $(i p_1 r_2 r_3) = -1$.

Daar nu i_1, i_2, i_3 op een rechte gelegen zijn, moeten de punten p_1, p_2, p_3 waarvan zij door de hoekpunten van driehoek $r_1 r_2 r_3$ harmonisch gescheiden zijn, uit de overstaande hoekpunten geprojecteerd worden door lijnen, die door één punt gaan.

De harmonische poollijnen van drie in een rechte gelegen buigpunten gaan door één punt. (PLÜCKER).

Brengen we 't slot van art. 19 hiermee in verband, dan vinden we:
„De keerpointsraaklijnen eener Cayleyana gaan drie aan drie door twaalf punten.”

21 — Een ander bewijs voor bovengenoemde stelling van Cremona is dit:

Uit een punt P buiten K^3 kunnen zes raaklijnen getrokken worden aan de kromme. Door de zes raakpunten gaat een kegelsnede, de poolkegelsnede van P . Noemen we de raakpunten r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 en r_6 , dan zal de rechte $r_5 r_6$ moeten gaan door het tegenpunt der punten r_1, r_2, r_3, r_4 . Vallen r_5 en r_6 samen, dan moet P liggen op de raaklijn in het buigpunt (r_5, r_6) en het tegenpunt valt in het buigpunt. Dus:

Een buigpunt is tegenpunt voor elk viertal punten der K^3 , wier raaklijnen elkaar snijden in één punt op de raaklijn van het buigpunt.

Leggen we P in het snijpunt van twee stationaire raaklijnen, dan vallen, als we i_1 als het tegenpunt beschouwen, twee der punten $r_1 r_2 r_3 r_4$ samen in i_2 , b.v. r_1 en r_2 . De ontaarde kegelsnede $(r_1 r_2, r_3 r_4)$ bestaat nu uit de raaklijn in i_2 en de rechte $r_3 r_4$. De laatste moge K^3 nog snijden in een punt s . Dan moet nu $i_2 s$ gaan door i_1 . Doch $i_1 i_2$ snijdt K^3 in een derde buigpunt i_3 . Dus valt s samen met i_3 .

Nu zijn r_3 en r_4 de snijpunten met K^3 van een rechte uit i_3 . De raaklijnen in deze punten snijden elkaar op de harmonische

poollijn van het buigpunt i_3 . Zij snijden elkaar echter in het snijpunt van de raaklijnen der punten i_1 en i_2 . Waarmee genoemde stelling bewezen is.

Volgens CREMONA liggen de tangentiaalpunten, behorende bij zes door een K^2 vereenigde punten van K^3 weer op een kegelsnede. Dus ook de tangentiaalpunten van $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$. Deze kegelsnede heet de *satellietkegelsnede* van P. Passen we de stelling van KÜPPER toe, dan moet het tangentiaalpunt van i tegenpunt zijn van de tangentiaalpunten van r_1, r_2, r_3, r_4 . Daar het tangentiaalpunt van i met dit punt samenvalt, blijkt i ook tegenpunt van de tangentiaalpunten van elk viertal punten, wier raaklijnen elkaar snijden in één punt op de stationaire raaklijn van i .

HOOFDSTUK IV

1 — In III, 7. gaven we de stelling van EMIL WEYR:

„Snijdt een bewegelijke raaklijn van een vaste kegelsnede D_2 een andere vaste kegelsnede K^2 in a_1, a_2 en zijn m_1, m_2 de snijpunten van K^2 met een vaste raaklijn van D_2 , dan is de m. p. der punten $p_1 \equiv (m_1a_1, m_2a_2)$ en $p_2 \equiv (m_1a_2, m_2a_1)$ een kromme der derde orde, die door m_1 en m_2 gaat.”

Zijn twee kegelsneden K^2 en D_2 gegeven en een rechte m_1m_2 , die beide kegelsneden snijdt (m_1 en m_2 op K^2), dan is de m. p. van de punten $p_1 \equiv (m_1a_1, m_2a_2)$ en $p_2(m_1a_2, m_2a_1)$ een K^4 met m_1 en m_2 als dubbelpunten. Onder a_1 en a_2 verstaan we weer de snijpunten met K^2 van een raaklijn aan D_2 .

Zoodra echter m_1m_2 raaklijn wordt aan D_2 , worden de tweetweezinnige straalbundels half-perspectief en gaat dus K^4 weer over in een K^3 en de rechte m_1m_2 . Van de beide raaklijnen in het dubbelpunt m_1 is de eene samengevallen met m_1m_2 , de andere verbindt m_1 met het tweede snijpunt met K^2 van de raaklijn, die men uit m_2 nog aan D_2 kan trekken; m_1 en m_2 zijn nu enkelvoudige punten van de K^3 .

Volgens III. 5 moet p_1p_2 steeds gaan door p_3 , de pool van m_1m_2 t.o.v. K^2 . Trekken wij in m_1m_2 , de raaklijnen aan K_2 , dan is het snijpunt het punt p_3 . Dit punt is ook gelegen op K^3 .

Het derde snijpunt van m_1m_2 met K^3 vinden we als volgt: Als de bewegelijke raaklijn a_1a_2 oneindig dicht tot m_1m_2 nadert, komt a_1 oneindig dicht bij m_1 , a_2 bij m_2 . Van de volledige vierzijde gevormd door m_1a_1 , m_1a_2 , m_2a_1 en m_2a_2 zal nu het snijpunt p_1 samenvallen met p_3 , terwijl p_2 zal vallen op m_1m_2 en wel

in het raakpunt van $m_1 m_2$ met D_2 . Uit de vierzijde volgt verder, dat nu dit raakpunt harmonisch geconjugeerd moet zijn aan het snijpunt van $a_1 a_2$ met $m_1 m_2$ t.o.v. m_1 en m_2 . Dit punt is echter gelegen op K^3 , dus het derde snijpunt van $m_1 m_2$ met K^3 . Zooals we zagen is m_3 geconjugeerde pool van p_3 t.o.v. den bundel kegelsneden door de raakpunten van het quadrupel met p_3 als tangentiaalpunt. We vinden m_3 dus door uit p_3 de rechte te trekken door het raakpunt van $m_1 m_2$ met D_2 en in de snijpunten van deze rechte met K^2 de raaklijnen te construeeren aan K^2 . Deze snijden elkaar in m_3 .

Trekken we de gemeensch. raakl. aan K^2 en D_2 , dan zijn de raakpunten op K^2 de 4 coïncidenties c_1, c_2, c_3, c_4 van de symmetrische verwantschap. Dit zijn ook 4 punten van K^3 nl. de 4 punten, die K^3 en K^2 buiten m_1 en m_2 gemeen hebben. De rechten $p_3 c_1, p_3 c_2, p_3 c_3$ en $p_3 c_4$ zijn raaklijnen aan K^3 .

Bepalen we nu de diagonaalpunten van den volledige vierhoek $c_1 c_2 c_3 c_4$, dan zijn dit eveneens drie punten van K^3 , die met p_3 het quadrupel vormen, dat m_3 tot tangentiaalpunt heeft.

De vier snijpunten van K^2 en D_2 zijn de 4 vertakkingspunten van de [2]. Trekken we in deze punten v_1, v_2, v_3, v_4 de raaklijnen aan D_2 , dan snijden deze K^2 nog eens in de dubbelpunten d_1, d_2, d_3, d_4 . Met $m_1 v_1$ komt nu overeen de dubbelstraal $m_2 d_1$; $m_1 v_1$ is dus raaklijn aan K^3 in het snijpunt met $m_2 d_1$.

Evenzoo $m_2 v_1$ een raaklijn met raakpunt op $m_1 d_1$. Dus: „De stralen, die m_1 en m_2 verbinden met de snijpunten v_1, v_2, v_3, v_4 van K^2 en D_2 zijn de door m_1 en m_2 gaande raaklijnenquadrupels van K^3 . Haar raakpunten liggen in de snijpunten met de rechten, die m_2 en m_1 verbinden met de dubbelpunten d_1, d_2, d_3, d_4 .”

(E. WEYR).

2 — We willen nu de snijpunten zoeken van K^3 met een willekeurige rechte G .

Als een punt π op G zich beweegt, beschrijven de stralen $m_1 \pi, m_2 \pi$ twee perspectieve straalbundels. Deze snijden K^2 nog in de puntreeksen (ξ) en (η) . Deze reeksen zijn projectief.

De dubbelpunten zijn de snijpunten e, f van K^2 met G .

De rechte $\xi\eta$ omhult een kegelsnede C . Deze raakt K^2 in e en f en raakt ook aan m_1m_2 .

De bundels $(m_1\eta)$ en $(m_2\xi)$ zijn ook projectief, de snijpunten van overeenkomstige stralen liggen op een kegelsnede C' . Deze kegelsnede gaat door e, f, m_1, m_2 en het snijpunt der raaklijnen in m_1 en m_2 aan K^2 d. i. het punt p_3 .

De punten $m_1 (m_2)$ vinden we, als π het snijpunt is van de raaklijn in $m_1(m_2)$ aan K^2 met de rechte G .

Het punt p_3 komt overeen met het snijpunt van m_1m_2 met G .

Met elke rechte G komt dus een kegelsnede C overeen en een kegelsnede C' .

Omgekeerd komt met elke kegelsnede C , die m_1m_2 tot raaklijn heeft en bovendien K^2 raakt in de punten e, f één rechte overeen nl. $G (\equiv ef)$. en bovendien één kegelsnede C' .

Wordt $\xi\eta$ een raaklijn van D_2 , dan ligt het punt $\pi \equiv (m_1\xi, m_2\eta)$ op K^3 . Dus is $\xi\eta$ een gemeenschappelijke raaklijn van D_2 en C . Deze kegelsneden hebben vier gemeenschappelijke raaklijnen, waarvan m_1m_2 er een is. Daar in 't algemeen G niet gaat door m_3 , kan m_1m_2 niet met een snijpunt van G en K^3 correspondeeren. De andere drie leveren de gezochte snijpunten van G met K^3 .

Vallen twee gemeenschappelijke raaklijnen van D_2 en C samen d. w. z. raken D_2 en C elkaar, dan vallen ook twee der snijpunten van G en K^3 samen en wordt G dus een raaklijn aan K^3 .

Vallen alle drie de gemeenschappelijke raaklijnen samen d. w. z. osculeeren D_2 en C elkaar, dan zal G drie samenvallende punten met K^3 gemeen hebben en is G dus een stationaire raaklijn aan K^3 .

Hieruit volgt:

„De raaklijnen van K^3 zijn de raakkoorden van K^2 met die kegelsneden C , die tweemaal raken aan K^2 en bovendien aan de rechte m_1m_2 en aan de kegelsnede D_2 .”

„De stationaire raaklijnen van K^3 zijn de raakkoorden van

K^2 met die kegelsneden C , die tweemaal raken aan K^2 , de kegelsnede D_2 osculeeren en raken aan m_1m_2 .”

(E. WEYR.)

Het onderzoek naar de onderlinge ligging der buigpunten is hierdoor teruggebracht tot dat naar de in de laatste stelling genoemde osculeerende kegelsneden. Wijl er negen buigpunten zijn, moeten er ook negen zulke kegelsneden voorkomen.

3 — Draait de rechte G om een punt π , dan beschrijven de punten e, f een involutie op K^2 , wier dubbelpunten de raakpunten der beide uit π aan K^2 getrokken raaklijnen zijn. Volgens de eerste van bovengenoemde stellingen moet men, om de raaklijnen te vinden, de kegelsneden C bepalen, die de rechte m_1m_2 en D_2 raken en bovendien raken aan K^2 in de punten e, f . Deze laatste punten echter, deel uitmakende van een involutie, moeten harmonisch liggen ten opzichte van de dubbelpunten dezer involutie, d. z. de raakpunten van de raaklijnen uit π aan K^2 .

We moeten dus om de raaklijnen uit π te construeeren, de kegelsneden C vinden, die raken aan m_1m_2 , aan D_2 en bovendien aan K^2 in twee punten, die harmonisch liggen ten opzichte van de raakpunten der raaklijnen uit π aan K^2 .

4 — We willen nu de raaklijn bepalen in een punt p , dat volgens de methode van art. 1 uit een raaklijn a_1a_2 aan D_2 is afgeleid.

De raaklijn a_1a_2 worde oneindig weinig om het raakpunt t gedraaid. Daardoor gaan a_1 en a_2 over in de punten b_1 en b_2 oneindig dicht er bij gelegen. De rechten a_1b_1 en a_2b_2 zijn dan raaklijnen aan K^2 . Bij den nieuwen stand van de raaklijn behoort een punt p_1 op K^3 oneindig dicht bij p liggende. De rechte pp_1 is dan de raaklijn aan K^3 in het punt p .

Een straalbundel in t snijdt op de raaklijnen in a_1 en a_2 perspectieve puntreeksen in, die in de straalbundels met m_1 en m_2 als

toppen een projectiviteit teweegbrengen. De snijpunten van overeenkomstige stralen liggen op een kegelsnede C . De punten p en p_1 zijn dus ook twee oneindig dicht bij elkander liggende punten van die kegelsnede en pp_1 dus ook een raaklijn daarvan.

Beschouwen we de volledige vierzijde, gevormd door de rechten $a_1m_1, a_1m_2, a_2m_1, a_2m_2$ en daarbij den zeshoek van PASCAL, gevormd door deze rechten met de raaklijnen aan C in $p \equiv (m_2a_1, m_1a_2)$ en $p' \equiv (m_1a_1, m_2a_2)$, dan blijkt, dat de raaklijn in p de rechte a_1a_2 snijdt in een punt, dat harm. toegevoegd is aan 't snijpunt van $p'p$ met a_1a_2 .

Laten we a_1a_2 oneindig weinig draaien tot den stand b_1b_2 dan krijgen we voor de aldus gevormde figuur eenzelfde beschouwing.

Bij den grensovergang blijkt nu het snijpunt van $p'p$ met a_1a_2 het raakpunt t te zijn van a_1a_2 met D_2 .

Bepalen we dus het punt t' zoo, dat $(a_1a_2t t') = -1$, dan zijn pt' en $p't'$ de gezochte raaklijnen aan K^3 .

De beide kegelsneden K^2 en D^2 snijden elkaar in de vier vertakkingspunten v_1, v_2, v_3, v_4 d. w. z. maken deel uit van een bundel met deze basispunten. Van een bundel raken echter twee kegelsneden aan een bepaalde rechte. Voor de tweede kegelsnede rakende aan a_1a_2 als D_2 beschouwd, zal nu t' het raakpunt moeten zijn. Uit $(a_1a_2t t') = -1$ blijkt immers, dat t en t' involutorisch overeenkomen.

Als D_2 den drager K^2 in een punt d raakt, zijn in dit punt twee punten V samengevallen, dus ook twee raaklijnen uit m_1 , evenals twee raaklijnen uit m_2 . Hieruit volgt, dat in dit geval d een dubbelpunt is van K^3 .

Hebben K^2 en D_2 drie samengevallen punten gemeen, dan moeten drie raaklijnen uit m_1 of m_2 samengevallen zijn en is dus het punt een keerpunt van K^3 .

4 — De constructie door middel van de symmetrische verwantschap kan worden aangewend om verdere punten van een

K^3 te bepalen, die volgens de methode van CHASLES gebracht wordt door 9 gegeven punten. Dit kan op de volgende wijze worden uitgevoerd.

De punten mogen zijn $a, b, c, d, e, f, g, h, i$. We bepalen volgens CHASLES eerst een punt P zóó gelegen, dat de dubbelverhouding der stralen Pe, Pf, Pg en Ph dezelfde is als die der kegelsneden $K_1(abcde)$, $K_2(abcdf)$, $K_3(abcdg)$ en $K_4(abcdh)$ en tevens de dubbelverhouding van Pe, Pf, Pg, Pi dezelfde als die der kegelsneden K_1, K_2, K_3 en $K_5(abcdi)$.

We beschouwen nu een der punten, b.v. a , als een punt m_1 (art. 1) en een ander, b.v. d , als coïncidentie van de symmetrische verwantschap, overeenkomende dus met een der punten c van art. 1.

De raaklijn T in d aan K^3 is de raaklijn in dit punt aan die kegelsnede van den bundel (a, b, c, d) die volgens onze constructie projectief overeenkomt met Pd . Is deze bepaald, dan vindt men het tangentiaalpunt p_3 als volgt: met elk punt x op T komt overeen een kegelsnede $(abcdx)$, een raaklijn aan deze kegelsnede in d en een straal Px . Er is op deze wijze dus een projectiviteit tusschen de straalbundels in P en in d . Overeenkomstige stralen snijden elkaar op een kegelsnede A , die te bepalen is.

Met straal Px komt volgens onze beginconstructie ook een kegelsnede van bundel (a, b, c, d) projectief overeen en daaraan eveneens een raaklijn in d . Dus bestaat tusschen de straalbundels in P en in d nog op deze wijze een tweede projectiviteit met als meetk. pl. van de snijpunten der overeenkomende stralen een tweede kegelsnede B . De kegelsneden A en B raken elkaar in d en gaan beide nog door P . Ze zullen dus nog één snijpunt buiten P en d hebben. De straal uit P naar dit snijpunt moet, zooals licht is in te zien, de rechte T snijden in haar snijpunt met K^3 . Dit punt is dus p_3 .

Om nu weer de raaklijn in p_3 en haar tangentiaalpunt te bepalen, kan men de constructie van CHASLES herhalen voor negen der nu bekende punten van K^3 , waaronder dan p_3 wordt opge-

nomen en wel als basispunt van den te gebruiken K^2 -bundel. Men vindt dan het punt m_3 .

Het snijpunt van m_1m_3 met K^3 kan nu op analoge wijze geconstrueerd worden als hiervoor het tangentiaalpunt p_3 .

De kegelsnede K^2 is dan bepaald: zij moet gaan door d en in m_1 en m_2 raken aan p_3m_1 en p_3m_2 .

Trekken we vervolgens uit m_1 en m_2 de rechten naar twee andere gegeven punten, b.v. naar e en f , en bepalen de snijpunten van deze vier rechten met K^3 resp. q_1, q_2, r_1 en r_2 , dan moet D_2 raken aan q_1r_1 , aan q_2r_2 , aan de raaklijn, getrokken aan K^2 in d en aan m_1m_2 in het punt (m) , dat harmonisch is toegevoegd aan m_3 ten opzichte van m_1 en m_2 .

Heeft men aldus K_2 en D_2 bepaald, dan kunnen alle andere punten van K^3 door middel van de symmetrische verwantschap gevonden worden. De beschouwingen van art. 3 en 4 leeren ons dan buigpunten en raaklijnen te construeeren.

STELLINGEN

I

Het is bezwaarlijk om, alleen gebruik makende van de verwantschap [2, 2], een sluitende theorie op te bouwen betreffende de geconjugeerde polen op een vlakke kubische kromme.

II

In de „Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung“ van Dr. H. Wieleitner, staat op blz. 19:

„Ein Punkt Q hat dieselbe s^{te} Polare in bezug auf die gegebene n -ik, wie in bezug auf alle k^{ten} Polaren ($k > s$) des nämlichen Punktes“.

Deze stelling is geheel foutief geredigeerd.

III

De stelling: „Ein Wendepunct einer Curve ist ein Doppelpunct für jede erste Polare eines Punctes der Wendetangente“ (Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, übers. von Max Curtze blz. 113)“.

is fout. Zij geldt slechts voor één punt der stationaire raaklijn.

IV

Indien $0 < |\alpha| < 1$, geldt de betrekking:

$$\int_0^\pi \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \varphi)^{\frac{n}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4n\alpha^{2n-1} \int_0^\pi \frac{\sin^{4n} \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}}.$$

V

De redeneering, waarmede Charles Nordmann in „Einstein en het Heelal” (bewerking van Dr. S. L. van Oss), de Lorentz-contractie tracht duidelijk te maken, is in strijd met een der grondprincipes van de relativiteitstheorie.

VI

Ten onrechte wordt in het verslag van de Phys. Techn. Reichsanstalt over 1925 vermeld, dat bij de door die instelling gebouwde modificatie van den dubbelen monochromator de dispersie verdubbeld is.

Zeitschrift für Instrumentenkunde 46-176-1926.

VII

De opmerking, voorkomende in Grimsehl, Lehrbuch der Physik Bd. 2. 4e Aufl. pag. 560:

„Die Erklärung für die Uebereinstimmung in der Wellenlänge sowohl für Draht- als freie Wellen, kann nur darin gefunden werden, dass sich auch die Drahtwellen nicht *im Drahte*, sondern *am Drahte* im umgebenden Dielektrikum bewegen.” is niet juist.

VIII

Ten onrechte wordt in Chwolson, Lehrbuch der Physik, 2e Aufl. Bd. II, 2 pag. 448 bij de behandeling van den photometer van Bunsen, het als vanzelfsprekend aangenomen, dat, wanneer de vlek ter weerszijden even helder verschijnt, de betrekking $I_1 : I_2 = d_1^2 : d_2^2$ geldt.

IX

Door waarnemingen in gepolariseerd licht zou uitgemaakt

kunnen worden, waaraan het geringe contrast is toe te schrijven der Mars-fotografiën in blauw licht.
(Vgl. D. H. Menzel. The Astrophys. Journ. 1926. LXIII. 48).

X

Het is van groot belang voor het onderwijs in de Natuurkunde aan Gymnasium en H. B. S., dat aan de harmonische beweging een meer centrale en belangrijker plaats worde toegekend.

