Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

De massa's van de groote planeten

https://hdl.handle.net/1874/286808

A. Qu. 192, 1927

DE MASSA'S VAN DE GROOTE PLANETEN

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

C. A. VAN DEN BOSCH

DE MASSA'S VAN DE GROOTE PLANETEN

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT
1086 7178

Diss Utrecht 1927

DE MASSA'S VAN DE GROOTE PLANETEN

PROEFSCHRIFT
TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS Dr. A. NOORDTZIJ, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP

MAANDAG, 14 MAART, 1927,
DES NAMIDDAGS TE 4 UUR,

DOOR

CYPRIANUS ANNIUS VAN DEN BOSCH
GEBOREN TE ZIERIKZEE.

G. BAKKER
BAARN — 1927

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Met genoegen grijp ik de gelegenheid aan U Hoogleraren der Utrechtse Universiteit, Gij allen die tot mijn vorming hebt bijgedragen, dank te zeggen voor uw onderwijs.

Hooggeleerde Nijland, Hooggeachte Promotor, U in de eerste plaats komt in velerlei opzicht mijn dank toe. Uw betrouwbaarheid als waarnemer en de wijze waarop Gij de kern van een zaak eenvoudig weet voor den dag te brengen, zullen mij altijd een voorbeeld zijn. Dat uw welwillendheid mij steeds ten deel vallen mocht, in het biezonder dat ik, in de omstandigheden waaronder dit proefschrift tot stand komen moest, zoveel van uw tijd vergen kon, zal ik niet vergeten.

In dankbare herinnering herdenk ik wijlen Professor Julius.

Hooggeleerde Kapteyn, dat ik slechts enkele jaren uw leerling wezen kon betreur ik steeds. Uw afscheid van de Hogeschool heeft op tweevoudige wijze een leegte in mij achter gelaten. Hoe node misten wij uw Leiderschap!

Hooggeleerde Ornstein, het lot heeft gewild, dat minder dan ik wel wenste het voordeel van uw opwekkende omgeving mij te beurt gevallen is. Heb dank voor uw onderwijs en voor de welwillendheid die ik van U ondervinden mocht.

De opwekking, Hooggeleerde de Vries, van uw heldere uiteenzettingen op het gebied van de Meetkunde geeft U recht op mijn dankbaarheid.

Dankbaar gedenk ik wijlen Professor J. C. Kapteyn, in wiens nabijheid ik enige maanden aan het Sterrekundig Laboratorium te Groningen doorbrengen mocht. In meer dan één opzicht ben ik hem tot dank verplicht. Zijn persoon was mij zeer lief.

Hooggeleerde, Hooggeschatte Ovink, wat Gij uit vriendschap voor mijn Vader voor mij gedaan hebt, noch voor wat Gij als Hoogleraar in de Wijsbegeerte voor mij waart, daarvoor kan ik niet met woorden U danken. De Geest heb ik van mijn Vader geërfd, maar zeker hebt ook Gij niet vruchteloos daarin gezaaid. Sta toe dat ik aan dit sterrekundig werkje woorden vooraf laat gaan die Gij wél kent.

Pronaque cum spectent animalia cetera terram,
Os homini sublime dedit, caelumque videre
Jussit et erectos ad sidera tollere vultus.

OVIDIUS

L'homme n'est qu'un roseau, le plus faible de la nature, mais c'est un roseau pensant. Il ne faut pas que l'univers entier s'arme pour l'écraser. Une vapeur, une goutte d'eau, suffit pour le tuer. Mais quand l'univers l'écraserait, l'homme serait encore plus noble que ce qui le tue, parce qu'il sait qu'il meurt; et l'avantage que l'univers a sur lui, l'univers n'en sait rien.

Toute notre dignité consiste donc en la pensée. C'est de lá qu'il faut nous relever, non de l'espace et de la durée, que nous ne saurions remplir.

Travaillons donc à bien penser : voilà le principe de la morale.

PASCAL

AAN MIJN VADER
AAN MIJN MOEDER
AAN MIJN VROUW

INHOUD

Blz.

VOORREDE 1

INLEIDING 6

HOOFDSTUK I. DE MASSABEPALING UIT DE BEWEGING DER SATELLIETEN

§ 1. *Overzicht* 8
§ 2. *De waarneming en de oorzaken van systematiese fouten* 11
§ 3. *Afleiding der algemene formule* 25
§ 4. *De herleiding der waarneming op de gemiddelde afstand tot de zon* 28
§ 5. *De formules voor de satellieten van Mars* 31
§ 6. *De formules voor de satellieten van Saturnus* . . . 33
§ 7. *De formules voor de satellieten van Uranus* 39
§ 8. *De formule voor de satelliet van Neptunus* 40

HOOFDSTUK II. DE MASSABEPALING UIT STORINGEN

§ 9. *Overzicht der verschillende soorten van storing* . . . 45
§ 10. *Ongelijkwaardigheid der storingen voor de massabepaling* 47

HOOFDSTUK III. DE VERHOUDING DER MASSA'S VAN ZON EN AARDE

§ 11. *Bepaling uit de beweging van de maan* 54
§ 12. *Bepaling uit de versnelling der zwaartekracht* . . . 55

HOOFDSTUK IV. RESULTATEN DER MASSABEPALING UIT STORINGEN

§ 13. *De massa van Mercurius bepaald uit storingen* . . . 69
§ 14. *De massa van Venus bepaald uit storingen* 76
§ 15. *De massa van het stelsel aarde-maan afgeleid uit storingen* 81
§ 16. *De massa van het stelsel van Mars bepaald uit storingen* 84
§ 17. *Newcomb's resultaten voor de massa's der binnenplaneten* 85
§ 18. *De massa van het Jupiterstelsel* 89
§ 19. *De massa's der stelsels van Saturnus, Uranus en Neptunus bepaald uit storingen* 92

HOOFDSTUK V. RESULTATEN VAN DE MASSABEPALING UIT DE WAARNEMING VAN SATELLIETEN

§ 20. *Enige algemene opmerkingen* 95
§ 21. *De bepaling der massa van Uranus* 96
§ 22. *De bepaling der massa van Neptunus* 109
§ 23. *De bepaling der massa van Mars* 120
§ 24. *De bepaling der massa van het Stelsel van Saturnus* . 126

RESULTATEN EN CONCLUSIE 138

TOEVOEGSELS 141

LIJST VAN AFKORTINGEN 143

VERBETERINGEN 144

VOORREDE

Het onderzoek waarvan in dit proefschrift het resultaat neergelegd is, werd oorspronkelik niet om zijnszelfs wil begonnen, maar was in geringere uitbreiding bedoeld als een ondergeschikt deel van een onderzoek op geheel ander terrein, en waarmee het voor de buitenstaander op het eerste gezicht geen verband houdt; van het onderzoek n.l. naar de mogelikheid een verklaring der zogenaamde ijstijden te geven op astronomiese grondslag, en wel in de engere, en vroeger enige, betekenis dezer woorden, waarmee de naar James Croll genoemde, maar al eerder door Adhémar in 1842 opgeworpen theorie werd aangeduid.

Deze theorie behelst in 't kort het volgende:

De hoeveelheid warmte die per tijdseenheid door een vlakteeenheid van het aardoppervlak op een bepaalde geografiese breedte van de zon ontvangen wordt, hangt af van de afstand der vlakteeenheid tot de zon, van de zenithsafstand van de zon, en van de z.g.n. zonneconstante, dat is de hoeveelheid energie die een vlakteeenheid per tijdseenheid en op de eenheid van afstand, bij loodrechte straling van de zon ontvangen zou, indien de atmosfeer afwezig was. De zenithsafstand staat behalve met de uurhoek, nog met de zonsdeclinatie in verband, die weer afhankelik is van de ware zonslengte, en van de helling der ecliptica. De ware lengte en de afstand van de zon zijn beide functies van de tijd, van de lengte van het perihelium, en van de excentriciteit van de aardbaan. Het zijn deze drie grootheden: helling van de ecliptica, excentriciteit en periheliumlengte, die aan z.g.n. seculaire, maar over zeer lange tijdvakken periodieke, variaties onderhevig, aanleiding geven tot veranderingen, eveneens van lange periode, in de straling op aarde. Het gevolg van de hierdoor ontstane schommelingen in de klimatologiese gesteldheid der aardoppervlakte zou zijn periodieke uitbreiding of inkrimping eventueel ontstaan of verdwijnen, van met sneeuw en ijs bedekt gebied.

Emanuel Kayser zegt in zijn „Lehrbuch der Geologie" [1]), dat tot nu alle ijstijdtheorieën, inclusief de astronomiese, gefaald hebben, en — deelt hij mee — op het internationaal geologencongres van 1906 in Mexico, was men unaniem van deze opinie. Hij zelf kwam meer en meer tot de overtuiging dat men tenslotte toch zijn toevlucht zal moeten nemen tot algemeen werkende aardse en kosmiese verschijnselen, en ook anderen deelden dit standpunt.

Het inzicht waartoe ik gekomen ben, is dat de astronomiese theorie op onvoldoende gronden verworpen werd. Men moet echter niet verwachten dat voor een enkele der vele theorieën weggelegd is, het ijstijd-probleem geheel op te lossen. Het strekt zich uit over een te omvangrijk gebied van wetenschap en is verre van eenvoudig. Inderdaad zijn er verscheiden oorzaken aan te wijzen, zowel telluriese als kosmiese, die ieder afzonderlik wellicht tot klimaatwijzigingen aanleiding kunnen geven, voldoende om vrij algemene of plaatselike ijstijden in het leven te roepen. Verheffingen en dalingen van de bodem, veranderende loop van zeestromingen door 't zich sluiten of openen van zeeëngten (men denke aan de Straat van Florida en de Golfstroom), verandering in de richting van heersende winden, verschuiving der continenten, bovengenoemde astronomiese oorzaken, periodieke variaties in de straling van de zon zelf, moeten invloed op het klimaat hebben. Geringe temperatuursveranderingen zouden al de gehele klimatologiese nasleep meebrengen die voor het ontstaan van ijstijden nodig is. Volgens H. Hess zou de temperatuur tijdens de diluviale maxima van ijsuitbreiding in de Alpen van 1.8^0 tot 6.5^0 lager geweest zijn dan nu.[2]) Welk een temperatuursverandering elk der bovengenoemde en andere oorzaken kunnen geven laat zich niet gemakkelik zeggen. Het meest toegankelik voor een theoretiese behandeling is bovengenoemde astronomiese theorie. De grond waarop deze theorie voor onaannemelik werd verklaard is de volgende:

Croll's theorie, waarbij oorspronkelik alleen met de excentriciteit rekening gehouden werd, kan slechts zich-herhalende en voor Noordelik en Zuidelik halfrond afwisselende ijstijden verklaren en

1°. Gelijktijdige ijstijden op Noordelik en Zuidelik halfrond vallen dus niet onder de verklaring,

2°. Van een dergelijke zich herhalende afwisseling toont het waarnemingsmateriaal niets, [3])

---

[1]) Bd. I, 6e Auflage, 1921, blz. 102-103.

[2]) Hans Hess, Die Gletscher, 1904, blz. 337.

[3]) E. Kayser, Lehrbuch der Geologie, Bd. I, 6e Aufl. 1921, blz. 100.

3°. Uit het gehele Mesozoïcum zijn geen ijstijden bekend. [1])

Ik had de indruk dat het over de theorie gezegde, onvoldoende onderzocht, a priori niet vaststaat, en dat bij de uitwerking der theorie met de veranderlikheid van de helling der ecliptica onvoldoende rekening werd gehouden.

Wat verder het eerste punt betreft: de begrippen gelijktijdigheid van Geologie, Astronomie en Physica dekken elkaar in 't geheel niet, en het verschil is des te grooter naarmate men verder in de tijd teruggaat. De geoloog zal twee gebeurtenissen gelijktijdig kunnen noemen, waar de astronoom een tijdsverschil van wellicht 100 000 jaren of meer zien zou.

Wat het tweede en derde punt aangaat: de veranderingen in de elementen der aardbaan zullen niet steeds tot gelijke ijstijden aanleiding geven, die even markant hun indruk op 't aardoppervlak achterlaten. Zij zijn ook niet de enige mogelikheid voor klimaatwijziging. Een temperatuursverlaging door de ene oorzaak kan door een andere worden teniet gedaan. Ook breidt van jaar tot jaar zich het materiaal aan waarnemingen uit. Daardoor, maar ook zonder dat, komt men tot andere interpretatie. Staat ons inzicht ooit volkomen vast?

Het was belangrijk en interessant de theorie opnieuw op te vatten, niet om de verklaring der ijstijden te geven, maar om te onderzoeken of op astronomiese gronden waarschijnlik kan worden gemaakt dat periodieke temperatuursvariaties, tengevolge van verandering in het effect der zonsstraling aan het aardoppervlak, in de loop der geologiese tijdperken hebben moeten optreden. De taak der geologen zou het dan zijn deze veranderingen in het geologies feitenmateriaal aan te tonen. En indien dit mocht gelukken, zou wellicht tegelijk een voor min of meer lange tijd geldende tijdrekening zijn aan te geven.

Wat de veranderingen der elementen van de aardbaan betreft, heeft men zich steeds bediend van het werk van J. N. Stockwell: „Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets." [2])

Laten e en Π zijn resp. excentriciteit en periheliumlengte van de aardbaan. Stockwell geeft de rechthoekige coördinaten x en y van het middelpunt der aardbaan — ten opzichte van een x-as in de richting naar het lentepunt, en van een y-as, in de richting van een punt waarvan de lengte 90° is, beide gaande door het middelpunt der zon — in de volgende vorm:

[1]) Zie noot 3 blz. 2.
[2]) Smithsonian Contributions to Knowlegde. Vol. XVIII. Washington. 1873.

$$-x = e\cos\Pi = \sum_{i=1}^{8} M_i \cos(g_i t + \beta_i)$$

$$-y = e\sin\Pi = \sum_{i=1}^{8} M_i \sin(g_i t + \beta_i)$$

en dergelijke uitdrukkingen voor de helling van de ecliptica. Hierbij is de halve grote as der aardbaan de lengteeenheid en beduidt t de tijd, uitgedrukt in Juliaanse jaren geteld van 1850.0 af; M_i, g_i en β_i zijn constanten waarvan Stockwell de waarde heeft berekend en waarvan voor elk de onzekerheid voornamelik van de onzekerheid der planetenmassa's afhangt. De door Stockwell aangenomen waarden der massa's wijken vrij sterk af van wat men tegenwoordig daarvoor kan aannemen, en de vraag rijst in hoeverre e en Π de invloed ondergaan van de correctie der constanten, waarvoor Stockwell een, hoewel ruw, middel geeft.

Maar niet alleen dit is van belang. De beweging van het middelpunt der aardbaan is in elk der beide coördinaten samengesteld uit acht enkelvoudige harmoniese trillingen, voor elk waarvan M de amplitudo, β de phase en g de frequentie of de periode bepaalt. Een geringe onzekerheid in de waarden van M en β is niet zeer belangrijk. Het karakter van de schommelingen die het middelpunt in beide coördinaten uitvoert, wordt er niet essentieel door gewijzigd. Anders is het met de grootheid g. Een onzekerheid in g, hoe gering ook, wordt met de tijd vermenigvuldigd, en kan tenslotte in het argument van elk der sinussen of cosinussen ieder bedrag tussen 0^0 en 360^0 aannemen. Met het toenemen van de tijd in positieve of negatieve zin, wordt eindelik het resultaat voor $e\sin\Pi$ en $e\cos\Pi$ volkomen illusoir. In een grafiese voorstelling komt dit hierop neer: moet over zeker tijdperk elk van acht sinuskrommen enigszins uitgerekt of verkort worden, en hoeveel elk? Men weet het niet. Het resultaat van de samenstelling heeft geen reële betekenis.

Wil men voor het ijstijdprobleem een tijdrekening vaststellen die de waarheid enigszins benadert, dan moeten Stockwell's formules gecorrigeerd worden overeenkomstig de meest betrouwbare waarden der planetenmassa's, en om een indruk van de geldigheidsduur der tijdrekening te krijgen moet men de onzekerheid in Stockwell's constanten uit die der massa's afleiden. De astronomiese litteratuur nu geeft voor geen der planeten, behalve voor Jupiter, een bevredigend antwoord op de vraag naar de beste waarden der massa's en naar de onzekerheid daarvan.

Het ijstijdprobleem van de theoretiese kant aanvattend, was ik

tegelijk begonnen materiaal voor de kennis der massa's te verzamelen. Afgeleide formules voor de zonsstraling, in het geval van een geïdealiseerde aarde, bleken echter reeds herhaaldelijk vroeger te zijn gevonden. Gedurende een noodzakelike lange onderbreking van het werk leerde ik Milankovitch's „Théorie mathématique des phénomènes thermiques produits par la radiation solaire", Paris, 1920, kennen, dat het wiskundig, astronomies en physies deel der ijstijdtheorie met grote volledigheid behandelt; en nog zeer kort geleden kreeg ik kennis van Köppen en Wegener's „Die Klimate der geologischen Vorzeit", Berlin 1924, dat buitengewoon interessant met gebruikmaking van Milankovitch's werk duidelik aantoont, dat gecombineerd met andere oorzaken de veranderingen in de elementen der aardbaan wel degelik aanleiding kunnen geven tot zo geweldige en ingrijpende verschijnselen als een ijstijd, en dat ook hoogstwaarschijnlik in de toekomst niet zullen nalaten te doen!

De bekende geophysicus Harold Jeffreys heeft in zijn nieuwe werk „The Earth" [1]) de astronomiese theorie met weinig woorden, en niet op nieuwe gronden, wat al te lichtvaardig verworpen, „without difficulty", zoals hij zegt!

Daar mij nu door genoemde publicaties het gras voor de voeten was weggemaaid, op een wijze echter waartoe ik zelf zeker niet in staat geweest zou zijn, heb ik eigen onderzoek in deze richting, voorlopig althans, gestaakt; maar het materiaal voor de kennis der planetenmassa's leek voldoende belangrijk voor publicatie. Wel brengt deze „Kärrnerarbeit" niet veel nieuws. Toch zal het tegelijk belichten der duistere punten in onze kennis der massa's een aansporing zijn, hoop ik, voor hen, wie instrumenten van voldoende opties en mechanies vermogen ten dienste staan, om nog meer hun krachten in te spannen, opdat de onbekende systematiese invloeden die nu nog aan voldoende kennis der massa's in de weg liggen, overwonnen mogen worden.

Het groot deel van dit proefschrift is gewijd aan de bepaling van de massa van een planeet uit de beweging zijner satellieten. Door het aanbrengen van velerlei kleine correcties heb ik voor zoover het in *mijn* macht was getracht te zorgen dat eventueele afwijking in resultaten alleen aan de waarneming zou zijn toe te schrijven. Ongelukkigerwijze is dit ideaal van uit waarnemingen afgeleide resultaten met het voorhanden materiaal niet altijd te benaderen.

---

[1]) Cambridge, 1924, blz. 263.

INLEIDING

BEGINSEL DER MASSABEPALING

Ter bepaling van de massa van een hemellichaam staat ons slechts één middel ten dienste. Er zijn verscheiden methoden van toepassing, maar alle berusten op Newton's aantrekkingswet en op de grondregels van Newton's mechanica.

Alle lichamen oefenen op elkaar aantrekking uit. Het resultaat der aantrekking van twee lichamen die, aan elkaars invloed overgelaten, overigens vrij zijn, is verandering hunner oorspronkelijke bewegingen. De verandering per tijdseenheid van de snelheid (opgevat als vector) der beweging van de zwaartepunten van beide lichamen is — onbeperkt nauwkeuriger naarmate men de tijdseenheid kleiner kiest, en de afmetingen der lichamen kleiner ten opzichte van de afstand der zwaartepunten zijn — voor elk van beide gericht naar het andere, en voor elk lichaam direct evenredig met de massa van het andere en omgekeerd evenredig met het quadraat van de afstand der zwaartepunten. Dit is de betekenis van Newton's wet, en het is de moeilike taak der wiskunde na te gaan of de verschijnselen aan de hemel zich uit zo'n eenvoudige formulering geheel verklaren laten. Nog steeds is niet te zeggen of deze wet strikt of slechts met beperkte, al zij het dan met zeer hoge, graad van nauwkeurigheid geldt. Wat dit laatste betreft kan men zich misschien eens met zekerheid uitspreken, maar een bevestigend antwoord op de vraag naar absolute geldigheid zal misschien nooit gegeven kunnen worden, al zou men de tegenwoordige moeilikheden zonder wijziging van Newton's wet te boven komen.

Het vraagstuk: op grond van Newton's wet en mechanica de beweging van n elkaar aantrekkende lichamen te bepalen indien hun massa en samenstelling, hun plaats en snelheid in de ruimte volkomen gegeven zijn, is nog niet opgelost. Van een gedeeltelike

omkering van dit vraagstuk, n.l. uit de waargenomen bewegingen te besluiten tot de massa's der lichamen, die op de beweging invloed hebben, worden de resultaten in dit proefschrift besproken. Dit probleem is in het zonnestelsel practies met voldoende nauwkeurigheid alleen oplosbaar door de gunstige omstandigheid, dat het zonnestelsel op zeer eigenaardige wijze gebouwd is, dat de massa's der lichamen alle zeer klein zijn ten opzichte van één ervan, de zon; dat hun afmetingen in verhouding tot hun onderlinge afstanden biezonder gering zijn, hun vorm slechts weinig van de bolvorm afwijkt, en hun samenstelling waarschijnlik symmetries ten opzichte van hun middelpunt is.

Men zal voor de massabepaling dus moeten nagaan, wat het verschil is tussen de waargenomen beweging van een hemellichaam en de beweging die het krijgen zou indien één der op de beweging invloed hebbende lichamen werd weggenomen. Het verschil is grotendeels toe te schrijven aan de aantrekking der massa van dit lichaam. Hoe groter dit onderscheid, hoe nauwkeuriger men in het algemeen de aantrekkende massa bepalen kan.

HOOFDSTUK I

DE MASSABEPALING UIT DE BEWEGING DER SATELLIETEN

§ 1. *Overzicht.*

Het in de inleiding aangegeven beginsel is het gemakkelikst toe te passen voor die planeten, die met één of meer satellieten zijn voorzien. Het karakter van de relatieve beweging van een satelliet wordt nagenoeg geheel bepaald door zijn snelheid en zijn plaats in de ruimte en door de massa van de binnen de baan staande planeet. Kon deze plotseling worden weggenomen, dan zou de satelliet zich in de richting van de raaklijn van zijn eerst bijna cirkelvormige baan, ten opzichte van de planeet aanvankelik slechts langzaam en zeer weinig van een rechte lijn afwijkend verder bewegen. De invloed der andere leden van het zonnestelsel, uitgezonderd van de zon, is namelik voor bijna alle satellieten gering.

Een satelliet kan om zijn planeet een cirkelvormige baan van bepaalde straal r slechts met één volkomen bepaalde omloopstijd P doorlopen. Dit wordt uitgedrukt door de harmoniese wet, die door Newton zou worden afgeleid en nader gepreciseerd, en die zegt, dat het quotient $\frac{r^3}{P^2}$ voor elke satelliet van eenzelfde planeet dezelfde waarde heeft; bovendien, bewees Newton, is dit quotient voor satellieten van verschillende planeten evenredig met de massa's der beide stelsels. Hetzelfde geldt voor de planeten als satellieten van de zon. Het quotient $\frac{r^3}{P^2}$ geeft dus een maatstaf ter beoordeeling van de verhouding der massa's van twee planeten met hun satellieten, of van de massa van een planeet met satellieten en die van de zon. Strikt genomen geldt Kepler's wet slechts indien de massa's der satellieten alle gelijk of alle te verwaarlozen zijn, indien zij niet aan elkaars invloed, en aan die van andere leden

van het zonnestelsel, met name aan die van de zon zijn onderworpen, en de planeet uit homogene concentriese bolschalen is opgebouwd. Deze voorwaarden zijn in werkelikheid niet verwezenlikt; kleine correcties zijn daardoor noodzakelik. Overigens is de wet evenzeer juist voor elliptiese als voor cirkelvormige banen, mits voor de straal r de halve grote as a van de ellips in de plaats wordt gezet.

De toepassing van deze methode van massabepaling vereist dus in hoofdzaak kennis van omloopstijd en afstand van de satellieten van een planeet. Wat de omloopstijden betreft: zij zijn reeds lang voor bijna alle satellieten zeer nauwkeurig bekend. Anders is het met de kennis der halve grote assen van de elliptiese banen. Om hiertoe te geraken bepaalt men met behulp van de draden-mikrometer, of met de heliometer, of door verschil in passage-tijd over mikrometerdraden waar te nemen, de schijnbare plaats van de satelliet ten opzichte van het centrum van de planetenschijf, of ten opzichte van een andere satelliet. In de laatste decennia heeft men ook de fotografiese plaat te hulp genomen. De waarneming is veel moeiliker dan op 't eerste gezicht lijkt en dikwijls met systematiese fouten behept, van onbekende oorsprong. Verschillende methoden van waarneming worden in de volgende paragraaf besproken.

Omdat gedurende de periode van waarneming zowel de planeet met satellieten als de aarde in voortdurende beweging verkeren, verandert de afstand van de waarnemer tot zijn objecten steeds, en moet men de waarnemingen, om ze onderling vergelijkbaar te maken, alle op dezelfde afstand herleiden. Men kiest daarvoor gewoonlik de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon, een begrip, dat met enige voorzichtigheid te hanteren is.

De theorie der baanbepaling leert uit de waarnemingen de banen der satellieten kennen. Voor bijna alle satellieten zijn de baanelementen reeds min of meer bekend, zodat het gemakkeliker is de waargenomen plaatsen te vergelijken met de plaatsen die uit een aangenomen, bij benadering juist elementensysteem volgen. Uit de kleine verschillen leidt men de correcties der aangenomen elementen af.

Al naardat de waarneming is uitgevoerd kiest men het stelsel formules dat hier nodig is in de vorm zoals Bessel ze het eerst heeft gegeven in zijn „Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturnssatelliten" [1]; of zoals Von Asten Bessel's formules vereenvoudigde voor de bewerking van Otto von Struve's waarnemingen

---

[1] A. N. 9, 1831, blz. 11.

der satellieten van Uranus [1]); of in de vorm zoals Marth er afgeleid heeft in zijn „Researches on Satellites" [2]).

De afleiding dezer formules, als ook de methode der kleinste quadraten, die men toepast om uit de waarneming dat resultaat te vinden dat de waarheid waarschijnlik het naast komt, veronderstelt echter dat bovengenoemde verschillen infinitesimale grootheden zijn. Hieruit volgt dat indien die verschillen niet klein zijn soms een herhaling der berekening met het voorlopig gecorrigeerde elementensysteem noodzakelik is. Wordt dit nagelaten, dan kan de bewerking van dezelfde waarnemingen met verschillende rekenmethoden of met verschillende voorlopige elementen tot verschil in resultaat leiden. [3]) Kleine verschillen eveneens in de resultaten uit verschillende waarnemingen kunnen hierin hun oorsprong hebben, zodat zij niet steeds op rekening van systematiese of toevallige fouten der waarnemingen behoeven te worden gebracht.

Voor alle planeten waarvoor deze methode van massabepaling bruikbaar is — Mars, Jupiter, Saturnus, Uranus en Neptunus — zijn kleine correcties op Kepler's wet nodig, voor de niet steeds te verwaarlozen massa's van andere satellieten, voor hun storingen, voor storingen door de zon, of voor invloed van afplatting van de planeet. De formules der storingstheorie kan men vinden in het eerste en het vierde deel van Tisserand's Traité de Mécanique Céleste, of in publicaties van Hermann Struve over de satellieten van Saturnus [4]), in Asaph Hall's bewerking van waarnemingen van Japetus [5]), in Östen Bergstrand's onderzoek naar de baan van Ariël [6]).

De gecorrigeerde waarde van het quotient $\frac{a^3}{P^2}$ vergelijkt men ten slotte met de waarde die dit quotient in het zonnestelsel heeft. Die waarde kan ontleend worden aan de beweging van de planeet waarvan men de massa bepalen wil, of aan de beweging van een andere planeet, de aarde bijvoorbeeld, of men kan de vergelijking

---

1) Mém. St. Pét. 7e Série, **18**, 1872.

2) A. N. **44**, 1856, blz. 113 en M. N. **47**, 1887, blz. 333.

3) Een merkwaardig voorbeeld hiervan doet zich misschien voor bij de satellieten Ariel en Umbriel van Uranus. H. Struve en Bergstrand hebben beiden dezelfde waarnemingen bewerkt. Hun resultaten verschillen sterk, in één geval 0".17 op 13".5. 't Overeenkomstig verschil in de massa van Uranus is 4 %!
Een tweede geval komt misschien bij de recente bewerkingen van materiaal voor de satellieten van Saturnus, door A. Hall jr. en G. Struve aan den dag.

4) Beob. Sat. trab., 1e Abth.
Beob. Sat. trab., Vol. XI.

5) The Orbit of Japetus, the outer satellite of Saturn, Wash. Obs. 1882.

6) Ueber die Bahn des ersten Uranussatelliten Ariel, Uppsula, 1904.

maken door invoeren van de waarde die de attractieconstante voor de gekozen eenheden van lengte, tijd en massa heeft; drie methoden in de grond identiek, die voor de numerieke berekening echter tot enigszins verschillende formules leiden.

De verhouding van beide quotienten geeft de massa van het stelsel van planeet met satellieten, in verhouding tot die van de zon. Meestal geeft men die verhouding als een breuk waarvan de teller de eenheid is. De noemer van de breuk stelt dan voor de massa van de zon uitgedrukt in de massa van de planeet als eenheid.

De hier uiteengezette methode kan men ook toepassen bij de dubbelsterren om tot een inzicht in de massa's der in deze systemen rondlopende lichamen te geraken.

In Hoofdstuk I § 3 zal de theorie van de toepassing in ons zonnestelsel worden meegedeeld. In Hoofdstuk V vindt men wat de waarneming heeft opgeleverd en wat daaruit voor de massa's der planeten Mars, Saturnus, Uranus en Neptunus volgt. Dat Jupiter in deze lijst niet voorkomt vindt zijn oorzaak daarin dat De Sitter de belangrijkste waarnemingen van de Jupiter-satellieten bewerkt, en tevens een zeer nauwkeurige waarde voor de massa van het Jupiterstelsel afgeleid heeft. Door mikrometriese waarnemingen kan deze massa niet verbeterd worden. Hierover wordt het nodige nog meegedeeld.

§ 2. *De waarneming en de oorzaken van systematiese fouten.*

De voornaamste instrumenten voor de waarneming van satellieten zijn:

1°. de dradenmikrometer,
2°. de heliometer,
3°. de fotografiese plaat.

Met die methoden van waarneming waarbij men, met een speciaal daartoe ingerichte mikrometer, tegelijkertijd beide coördinaten van de satelliet meet, zullen wij ons verder niet bezighouden. Het beginsel veroordeelt de methode. Het geringe voordeel bij de reductie der waarnemingen — daar het nu niet nodig is de ene coördinaat te herleiden op de tijd van de andere — wordt dubbel en dwars teniet gedaan door de zeer vergrote mogelikheid van toevallige en, wat erger is, van systematiese fouten. Men kan zijn aandacht niet op twee verschijnselen tegelijk richten zonder schade aan de waarneming van beide! [1])

---

[1]) In de loop der negentiende eeuw zijn dergelijke mikrometers meermalen gebruikt. 30 jaar geleden nog door Schaeberle op Lick-Observatory, in 1896.

Bij de waarneming met de dradenmikrometer bepaalt men eerst met behulp van de dagelikse beweging van de hemel een vaste richting in het veld van de kijker. Men stelt de positiecirkel zo dat een ster precies een draad volgt die evenwijdig aan de richting van de meetschroef, dus loodrecht op de richting der meetdraden staat. Gebeurt dit in de meridiaan, dan is de richting van die draad evenwijdig aan de ware parallellen, en dus loodrecht op de ware richting naar de Noordpool van de hemel. Wordt echter de vaste richting volgens deze methode buiten de meridiaan bepaald, dan is de stand van de draad evenwijdig aan de *schijnbare* parallel, die tengevolge der refractie een geringe, maar met de uurhoek veranderlike hoek maakt met de ware parallel. De formules ter correctie voor differentieele refractie behoeven in 't laatste geval een kleine wijziging. Het ware te wensen dat de waarnemers ons steeds volkomen inlichtten over de wijze waarop zij te werk gingen en voor refractie corrigeerden, al was het alleen maar ter verhoging van onze zekerheid, en, daardoor, ter vergroting van ons vertrouwen in de waarnemingen. Na het aflezen van de stand van de positie-cirkel, brengt men door draaiing van de mikrometer bovengenoemde „dwarsdraad" zo goed mogelik in de verbindingslijn der te meten objecten, hetzij door bisectie van beide, hetzij — indien er twee dicht naast elkaar gelegen dwarsdraden zijn — door beide objecten precies in 't midden van beide draden te brengen. Dit laatste wordt door sommige waarnemers nauwkeuriger geacht indien beide objecten zeer dicht bij elkaar staan. Het verschil van de aflezing in deze stand van de cirkel met de aflezing van de vaste richting geeft de hoek die de verbindingslijn der objecten met de parallel maakt; waaruit volgt de positiehoek, de hoek met de richting naar de Noordpool. Voor de bepaling van de afstand der objecten verschuift men met een schroefbeweging het gehele mikrometerraam totdat een „vaste" draad het ene object halveert. Daarna brengt men met de eigenlike meetschroef een tweede „losse" draad op het andere object, en leest de stand van de draad op de „trommel" van de schroef af. Vervolgens bepaalt men de stand van de schroef bij coïncidentie der draden, en wel door de losse draad eerst links, onmiddellik naast de vaste draad te brengen, zodat slechts, bij veldverlichting, de allergeringste lichtlijn tussen beide zichtbaar blijft. Vervolgens gebeurt hetzelfde rechts. Het verschil van de eerste aflezing met het gemiddelde der beide laatste is de afstand van de beelden van beide objecten in het vlak der mikrometerdraden, gemeten in omwentelingen van de schroefkop, dus in spoedhoogten. Meestal ontwijkt men de aan

fouten onderhevige bepaling van de coïncidentiestand der draden door de „methode der dubbele afstand" toe te passen. Nadat de losse draad geplaatst is, en de stand is afgelezen, verschuift men het hele mikrometerraam zo dat de vaste draad op het tweede object komt, en brengt dan de losse draad op het eerste object, door deze met de meetschroef over de vaste heen te bewegen, en leest weer af. Het verschil der aflezingen is nu de dubbele afstand der beelden in het vlak der draden.

Is er echter een biezondere oorzaak waardoor in het zetten der der draden op beide objecten verschil optreedt, dan is de invloed daarvan niet geëlimineerd. Een dergelijke oorzaak is er. Het beeld van de satelliet is nagenoeg puntvormig, dat van de planeet een schijf. Het op 't oog halveren van de schijf is des te meer aan systematiese fouten onderhevig naarmate de schijf groter is. Voor Uranus en Neptunus, aan de hemel schijven van resp. 4″ en 2″ middellijn, is misschien geen belangrijke fout te vrezen; anders is het met Mars, Jupiter en Saturnus, waarvan de schijnbare middellijnen in maximo resp. 25″, 50″ en 20″ kunnen bedragen. Jupiter bovendien is duidelijk afgeplat, Saturnus daarenboven nog van een ring voorzien, die een buitengewoon obstakel voor een zuivere meting vormt. Voor Mars en Jupiter kan ook de phase (behalve omstreeks de oppositie) een oorzaak van systematiese fout zijn. Hoe zal men een meting ten opzichte van 't geschatte lichtcentrum van de gedeeltelik verlichte schijf herleiden op het ware centrum van de volle schijf die men bij volledige belichting *zien* zou? En is dan dit laatste centrum ook het gravitatiecentrum? H. Struve heeft bevonden en aangetoond dat dit niet steeds het geval is, ten gevolge van de dispersie van het licht in de dampkring. De Noordpool van Saturnus is niet scherp begrensd en enigszins blauw van licht, terwijl de zuidpool wel scherp tegen de hemel afsteekt, maar enigszins rood gezoomd is. Het opties centrum van de schijf schijnt in de richting van de zuidpool verschoven. [1]) Een dergelijk verschijnsel doet zich ook voor bij heliometriese waarnemingen van Mars ter bepaling van de zonsparallaxis.

Wat de phase betreft neemt Asaph Hall, de oude, aan dat het lichtcentrum hetzelfde is als het zwaartepunt van een gelijkmatig met massa belegde schijf van dezelfde vorm als de planetenschijf. De correcties in positiehoek en afstand zijn dan: [2])

---

[1]) H. Struve, Beob. Sat. trab. Vol. XI, blz. 127; A. N. **162**, blz. 327; Beob. des Saturnstrabanten Titan, Berlin, 1908, blz. 38, 39.

[2]) Observations and orbits of the Salellites of Mars, 1878, blz. 8.

$$s \sin \delta p = + \frac{8b}{3\pi} \sin^2 \tfrac{1}{2} \varphi \sin (p\text{-}Q)$$

$$\delta s = - \frac{8b}{3\pi} \sin^2 \tfrac{1}{2} \varphi \cos (p\text{-}Q)$$

Hierin is b de momentele straal van de volle schijf, φ de phasehoek, dat is de hoek aan de planeet tussen de richtingen naar de aarde en naar de zon; Q de positiehoek van de kleine as van het elliptiese deel van de schijf, p de positiehoek van de satelliet, en s zijn schijnbare afstand tot de planeet. Gesteld al dat Hall's hypothese juist is, dan is toch niet in te zien dat zijn correcties ook het juiste resultaat geven voor de schijf die zich aan ons oog voordoet. Een verlichte schijf wordt door irradiatie groter gezien dan hij werkelijk is. De breedte van de rand die er rondom bij komt hangt af van de lichtsterkte van de schijf, en mogelikerwijs van de meerdere of mindere vaagheid en van de kromming der begrenzing. Weliswaar verzwakken sommige waarnemers het licht van de planetenschijf door er een donker glas voor te plaatsen (Hall gebruikte steeds *donker*rood), of een scherm van min of meer fijn gaas, maar in hoeverre het effect van irradiatie daarmee verdwenen is weet men niet. Bovendien brengt het tussengeplaatste glas zijn eigen systematiese fouten mee. Hetzelfde doet de donkerrode kleur tengevolge van refractie in de dampkring, die voor de planeet verschilt van die voor de anders gekleurde satelliet: de planeet wordt lager gezien. Een algemene verzwakking van het licht, bijv. door een gazen scherm, kan het tegenovergestelde effect hebben, n.l. verkleining van de zenithsafstand (verschijnsel van Purkinje). [1])

H. Struve corrigeert voor phase, in de onderstelling dat de meting gebeurt ten opzichte van het midden van de kleinste diameter der door phase vervormde schijf, door in Hall's formules de coëfficient $\frac{8}{3\pi}$ te vervangen door de eenheid. [2]) Het verschil met Hall's correctie kan in — niet eens zeer — extreme gevallen 0″.10 à 0″.15 en meer bedragen.

---

1) H. Spencer Jones, J. Halm. Determ. of the Solar par. from Obs. of Mars, etc., part II, M. N. **85**, 1925, blz. 850-852.
Een dergelijk effect, afhangende van helderheid en expositietijd heeft in 1897 A. A. Nijland vermoed als oorzaak van een systematies verschil in de declinaties van sterren in de sterrehoop G. C. 4410, gemeten op fotografiese platen van Scheiner en van Henry.

2) Beob. Marstrab., blz. 17, 28.
Beob. Sat. trab., Vol. XI, blz. 22.

Newcomb gebruikte voor de herleiding van meridiaan-waarnemingen van Mercurius een andere formule voor de phasecorrectie:[1])

$$\text{correctie} = \tfrac{1}{12} b(1-\cos\varphi)(5+\cos\varphi).$$

Of deze formule ooit bij de waarnemingen van satellieten is toegepast is mij niet bekend.

Ook de oriëntatie van een afgeplatte en door phase vervormde schijf ten opzichte van de verbindingslijn der ogen, kan op de bisectie van de schijf op systematiese wijze invloed hebben. [2])

Eveneens kan de wijze waarop door verlichting het draadnet van de mikrometer zichtbaar gemaakt wordt, tot systematiese fouten leiden. Waarnemingen verricht bij „veldverlichting" zal men niet zonder onderzoek naar hun gelijkwaardigheid mogen combineren met waarnemingen bij „draadverlichting". Welke verlichting de waarnemer kiezen zal hangt af van de omstandigheden der waarneming. De draadverlichting behoort zo te zijn dat het deel der draden dat voor de waarnemer zichtbaar worden kan, bij elke stand der draden volkomen belicht is. Er moet systematies verschil ontstaan met waarnemingen bij veldverlichting, indien aan deze eis niet voldaan is, zoals het geval was aan Naval Observatory in Washington, waar tot ongeveer het eind der vorige eeuw de belichting van op zij, en slechts van *één kant* kwam. Maar ook in een waarnemingsreeks alleen bij draadverlichting verricht, kunnen systematiese verschillen niet uitblijven indien naar S. J. Brown meedeelt [3]) „the intensity of the thread illumination has to be quickly and decidedly varied", zoals voor de waarneming van Japetus het geval was, wanneer deze in oostelike elongatie zeer zwak werd.

De kleur van de verlichting is ook een punt van belang indien het oculair niet, of onvolledig, voor chromatiese aberratie is gecorrigeerd. Hoewel tegenwoordig uit deze bron geen aanmerkelike fout meer behoeft voort te vloeien, vroeger was het gevaar allerminst denkbeeldig. Het focus voor het rode licht is n.l. anders dan voor het gele of groenachtige licht der objecten. Men zie hetgeen Simon Newcomb meedeelt in zijn: „The Uranian and

---

[1]) Fundamental constants, blz. 34.

[2]) Ieder zal iets dergelijks bij zich zelf kunnen constateren, door te trachten met één oog dicht het midden te schatten van blanke vellen of stroken papier, die verschillend georiënteerd te midden ener symmetriese omgeving, gelijkmatig belicht worden, en het resultaat na te meten.

[3]) A. J. **19**, 1898, blz. 81.

Neptunian Systems"[1]) over een niet-achromaties oculair, omstreeks 1874 aan Naval-Observatory in gebruik.

H. Struve[2]) paste — voor zover mij bekend het eerst — een methode van waarneming toe waarbij men het onnauwkeurige halveren van de planetenschijf vermijdt. Struve meet de *rechthoekige* coördinaten van de satelliet, en niet ten opzichte van het midden van de schijf, maar ten opzichte van de beide randen, linker- en rechter-, of boven- en onderrand. De coördinaten ten opzichte van het centrum zijn dus ieder het gemiddelde van twee metingen. Nu is het instellen op de rand een geheel andere waarneming dan het halveren, maar zonder twijfel ook aan systematiese fouten onderhevig. Men kan *geloven* dat in het gemiddelde van de instellingen op rechter- en linkerrand de fout goeddeels geelimineerd is, maar zeker is het niet dat men met de lichte schijf links van de draad of rechts van de draad in beide gevallen een systematiese fout van *gelijk* absoluut bedrag maakt. Voor het oog is rechts en links niet hetzelfde. Deze methode van waarnemen schijnt echter inderdaad door de waarnemers nauwkeuriger te worden gevonden.[3]) Nadat Struve er goede resultaten mee bereikt heeft is zij ook in Washington aangenomen.

Om geheel de schijf bij de waarneming uit te schakelen heeft H. Struve de verbinding van de satellieten ten opzichte van elkaar in positiehoek en afstand toegepast.[4]) Deze manier van waarneming schijnt het eerste door Bessel aangewend te zijn voor de manen van Saturnus, en is later door Otto von Struve weer te berde gebracht, Dat hierbij twee geheel gelijksoortige objecten worden waargenomen is inderdaad een belangrijk voordeel, en deze methode is dan ook na 1900 in Washington overgenomen. Uit de waarnemingen volgen nu gelijktijdig de elementen van de banen der beide verbonden satellieten, twaalf onbekenden, of elf indien men in rekening brengt dat Kepler's derde wet geldt. Een klein nadeel voor de bepaling van de planetenmassa is hieraan verbonden. Indirect. De halve grote as van de baan kan wel even nauwkeurig bepaald worden als bij verbinding van de satelliet met de planeet, maar excentriciteit en pericentrumlengte zijn bij deze nieuwe methode niet zo nauwkeurig te bepalen. Uit de seculaire beweging

---

1) Wash. Obs. 1873, App. I, blz. 8-10.
2) Beob. Sat. trab. Vol. XI, blz. 41-47; waarnemingen van Rhea en Titan van 1889-1892.
3) Zie bijv. S. J. Brown, „Orbits of the satellites of Mars etc." in A.J. **20**, 1899, blz. 81.
4) N.l. bij waarnemingen van Japetus, Titan, Rhea en Dione. Zie Beob. Sat. trab. 1e Abth.

van het pericentrum kan echter de kennis van de afplatting van de planeet voortkomen, die men voor de correctie van Kepler's wet bij de bepaling van de massa nodig heeft. [1])

Indien men bij de meting van rechthoekige coördinaten de y-as legt in de richting naar de pool, dan kan men het verschil der x-coördinaten van beide objecten vinden door met behulp van de klok het tijdsverschil te bepalen tussen de passages van beide objecten over één of meer draden die evenwijdig met de y-as zijn. [2]) Op zichzelf is deze methode reeds minder nauwkeurig dan de meting met de mikrometer, daar immers 1 tijdseconde overeenkomt met 15 cos δ boogseconden aan de hemel (waarbij δ is de declinatie van het punt midden tussen beide objecten). Hier komt echter bij dat de z.g.n. „Antrittsfehler" voor beide objecten zelden hetzelfde wezen zal, en zeer zeker verschillend is voor een satelliet en midden of rand van de schijf [3]), en ook voor twee satellieten die enigszins in helderheid verschillen. Indien dit bij de oostelike elongatie bijv. neerkomt op een positieve fout, dan is de fout bij de westelike elongatie waarschijnlik negatief. De voor de baan af te leiden elementen, met name excentriciteit en pericentrumlengte, kunnen daarvan sterk een systematiese invloed ondergaan.

Ook verschil in kleur der objecten kan in de waarneming van doorgangen fouten veroorzaken. Evenzo is de wijze der verlichting voor passages van belang. Speciaal voor zwakke objecten schijnt veldverlichting gevaarliker dan draadverlichting. [4])

Tenslotte geldt voor elke methode van waarneming met de mikrometer het grote en *essentieele* nadeel van alle mikrometerwerk: *de objecten staan een eind van elkaar*. Eén voor één moeten zij met de mikrometerdraden in contact gebracht worden. Op het moment dat men de ene instelling verricht, is men niet meer zeker van de andere. [5]) Tusschen beide instellingen verloopt tijd, gedurende welke de onregelmatigheden van het uurwerk, dat de kijker gedurende de waarnemingen drijft, of een andere oorzaak, de eerste instelling bederft. Het is niet voldoende dat men vervolgens de eerste

---

[1]) H. Struve, Beob. Sat. trab. 1e Abth. blz. 32.

[2]) Toegepast voor verbindingen van Titan en Japetus door H. Struve: Beob. Sat. trab. 1e Abth. blz. 19-21, en door S. J. Brown: A. J. **19**, 1898, blz. 81-83; en voor verbindingen van Japetus met Saturnus door A. Hall, de oude: The orbit of Japetus, Wash. Obs., 1882.

[3]) Ongetwijfeld ook verschillend voor „voorgaande" en „volgende" rand, zodat het gemiddelde der tijden niet op 't midden van de schijf betrekking heeft!

[4]) H. Struve, Beob. Sat. trab. 1e Abth. blz. 9, 10.

[5]) Voor doorgangsbepalingen geldt dit bezwaar niet.

instelling controleert, eventueel herhaalt. Het slot zal altijd zijn dat één van beide instellingen niet zuiver het resultaat van oog en hand is. Stel dat, geen biezondere omstandigheden in het spel, de waarschijnlike fout van een instelling met oog en hand r is, dan zal men door herhaling der waarneming de waarschijnlike fout van 't gemiddelde uit enige bepalingen „onbeperkt" kunnen verminderen, en de werkelike waarschijnlike fout (die in den regel iets groter dan de theoretiese is) kan dalen beneden een bedrag dat voor oog en hand aan de kijker geheel onmerkbaar is. Laat nu gedurende het tijdsverloop tussen twee instellingen tengevolge van oorzaken, waarvan de onvolmaaktheid van het uurwerk, dat de kijker drijft, er één wezen kan, in de eerste instelling een afwijking d van het oog-en-hand-resultaat ontstaan, onmerkbaar, ook bij aandachtige beschouwing met het oog; d behoeft hiervoor niet eens klein te wezen, en zou best van dezelfde orde van grootte als r kunnen zijn. De nauwkeurigheid van het gemiddelde van m waarnemingen, uitgedrukt in zijn waarschijnlike fout $\frac{r}{\sqrt{m}}$ wordt er geheel illusoir door!

Dit is één. Een tweede nadeel dat met het van elkaar afstaan van de beelden verband houdt, is de waarneming aan de rand van, of aanmerkelik buiten het midden van het veld. Behalve dat aan de rand van het veld vervorming van het beeld optreedt, die in één enkele waarneming onmerkbaar, in het gemiddelde van enige waarnemingen zijn invloed heeft, misschien van de orde der waarschijnlike fout of groter, ook dat men scheef door het oculair naar draad en object ziet is een nadeel. Het brandvlak van het objectief van de kijker is niet plat. Hierin ligt het beeld van het object. De draden van de mikrometer liggen in een plat vlak. Een geringe parallaxis, misschien nagenoeg onmerkbaar voor 't oog, kan op de resultaten invloed hebben. Ten nauwste hiermee samen hangt waarschijnlik het bekende feit dat de waarde van één omwenteling van de mikrometerschroef in boog-seconden aan de hemel voor kleine en grote afstanden niet dezelfde is. Wel brengen de meeste waarnemers door oculair-verschuiving het object steeds midden in het veld van het oculair, maar het object komt hierdoor niet in het midden van het brandvlak van het objectief, zodat, omdat het brandvlak niet plat is, brandvlak en draden-vlak een hoek met elkaar maken. De afstand der objecten langs het brandvlak gemeten is niet dezelfde als de afstand hunner projecties op het vlak van de draden. Bovendien behoeft, al konden wij langs het brandvlak meten, de vergroting van het objectief in, en enige afstand buiten, het midden van het brandvlak, niet dezelfde te zijn, zodat ook

daardoor een verschil in „schroefwaarde" ontstaat voor grote en kleine afstanden.

Dit brengt nog tot een laatste belangrijk punt dat de draden-mikrometer betreft: de bepaling van de schroefwaarde en zijn correctie en van de invloed der temperatuur. De goede bepaling hiervan is een zeer moeilik en zeer tijdrovend werk. Het is echter absoluut noodzakelik, en men kan er voor de bepaling van massa's niet genoeg aandacht aan besteden. [1]) Er zijn verscheiden methoden voor de bepaling van deze grootheid, die wij, als in Hoofdstuk V, R zullen noemen. Deze methoden kan men in twee groepen verdelen, n.l.

1°. die waarbij men gebruik maakt van waarnemingen aan de hemel:
   a. bepaling van R uit passages van sterren over de mikrometer-draden, waar te nemen met de klok;
   b. bepaling van R uit metingen van de afstand van twee sterren, die op andere wijze bekend geworden is;

2°. die waarbij men van meer theoretiese gezichtspunten uitgaat:
   a. bepalingen volgens het collimatorprincipe;
   b. bepaling door meting van de spoed-hoogte van de schroef en van de brandpuntsafstand van het objectief.

Het is wenselik al deze methoden toe te passen. Leiden ze alle tot hetzelfde resultaat, dan kan men daarin het volle vertrouwen hebben. Doen ze het niet, helaas dikwijls het geval, dan kan de studie der resultaten misschien tot ontdekking van systematiese fouten leiden. Indien echter het gebrek aan overeenstemming niet verklaard worden kan, dan is, geloof ik, maar één beginsel het juiste, en dat is: men kieze die waarde die afgeleid is uit waarnemingen gelijksoortig met de waarnemingen die men met de mikrometer zal gaan verrichten. Het is principieel verkeerd metingen van satellieten te herleiden met een schroefwaarde die alleen in doorgangswaarnemingen zijn steun vindt.

Dat er tussen de verschillende bepalingen van de schroefwaarde niet altijd overeenstemming is, daarvan kan men zich overtuigen door de jaargangen van de „Washington Observations" van 1873 tot 1900 na te gaan. De onzekerheid die meer dan een kwart eeuw omtrent de schroefwaarde van de mikrometer „Clark I" geheerst heeft, is inderdaad bedroevend. Wellicht was de schuld daaraan de weinig stabele en te ranke bouw van de kijker, waarover buitenlandse astronomen, die het Naval-Observatory bezochten,

---

[1]) Het is een voordeel van de bepaling van verschil in doorgangstijd, dat daarbij de kennis van de schroefwaarde niet nodig is.

hun verbazing uitten, en de periodieke fouten van het uurwerk, die bij de waarnemingen niet weinig hinderlik waren. [1]) Hieraan moet het geweten worden dat het geweldige materiaal dat in Washington, en met name door Asaph Hall, de oude, die er niettemin de eer van toekomt, bijeengebracht is, toch zo weinig tot de kennis van de massa's der planeten heeft bijgedragen, en voor zoveel het ons ook inlicht over de banen der satellieten, toch nooit het wantrouwen verliezen zal dat men er tegen hebben kan.

Het is zeker te betreuren dat niet alle waarnemers ons voldoende over de bepaling van de schroefwaarde, van de voortgaande en periodieke fouten en van de temperatuur-coëfficient inlichten. Zij zullen het onderzoek hunner schroeven toch niet geheel verwaarloosd hebben maar als er nagenoeg niets over gepubliceerdwordt, als men van hun zorg niet veel merkt, dan komt dat bijna op hetzelfde neer: men heeft geen zekerheid! Als Barnard zegt [2]) dat op de door hem bepaalde schroefwaarde de temperatuur geen invloed van betekenis heeft, dan moet men aannemen dat hij daarvoor goede redenen heeft. Hij is zeer karig met zijn meedelingen, maar uit wat hij meedeelt [3]) zou men tot een temperatuurcoëfficient besluiten van dezelfde orde van grootte als wat anderen voor hun mikrometers vonden, en die het waarnemen van de temperatuur bij hun metingen, en het in rekening brengen, niet overbodig vonden. Al zou vergeleken bij de onzekerheid van één waarneming het effect van temperatuur gering lijken: in 't gemiddelde van veel waarnemingen komt het voor den dag als een systematiese fout, wanneer men er geen rekening mee hield. Waarnemen en meedelen van de temperatuur is zeker raadzaam, wil men zichzelf en anderen de mogelikheid van een eventueel nodige correctie niet ontnemen.

Wat de temperatuur-coëfficient betreft, geldt ook hier dat de waarde die uit metingen aan de hemel is afgeleid, de voorkeur verdient boven wat op grond van de kennis der uitzettingscoëfficienten van het metaal van kijkerbuis en mikrometerdelen berekend kan worden, afgezien nog daarvan dat men de vervormingen van het objectief theoreties niet voldoende in rekening brengen kan.

Wanneer men de revue houdt van alles wat er op de mikrometerwaarnemingen te zeggen is, dan kan het oordeel niet anders zijn

---

1) Publ. Wash. **6**, Introd. blz. A, VI.
2) Publ. Yerkes-Obs. **2**, blz. 80.
3) A. J. **20**, 1899, blz. 41-42.

dan dit: de mikrometer is ongeschikt voor waarnemingen die de uiterste nauwkeurigheid vereisen. Over de massa's der planeten kan de mikrometriese waarneming van satellieten ons weinig nieuws meer leren.

Uit Gill's metingen met de heliometer is gebleken dat aan dit instrument het vertrouwen gegeven moet worden dat men vroeger in de dradenmikrometer stelde, al zal de heliometer niet in ieders handen leiden tot resultaten als die van David Gill [1]) voor de kennis van de zonsparallaxis, van de parallaxen van sterren, en voor de kennis van het stelsel van Jupiter en zijn massa, zoals die door De Sitter uit Gill's metingen is afgeleid. Het essentieele nadeel van de mikrometer bestaat hier niet. De meting komt tot stand slechts in één punt, in het midden van het veld, en daarop alleen heeft men zijn aandacht te richten. Zeer ernstige fouten zijn hiermee vervallen. Newcomb echter sloeg de nauwkeurigheid van heliometerwaarnemingen niet hoog aan, en wel met het oog op de veranderlike schaalwaarde, die, als bij de dradenmikrometer, te sterk het effect van temperatuur en van focussering ondergaat. [2]) Gill, en na hem Cookson, hebben doen zien wat er te bereiken valt, indien steeds tegelijk met de waarneming de schaalwaarde bepaald wordt, en indien men slechts gelijksoortige objecten met elkaar vergelijkt. Zij maten niet positiehoek en afstand van de satelliet ten opzichte van de schijf van Jupiter, maar ten opzichte van een andere satelliet, dus volgens Bessel's en H. Struve's methode. Gaat men aldus te werk, dan blijkt de nauwkeurigheid van de heliometer verre die van de mikrometer en die Newcomb verwachtte, te overtreffen. De elongatie der beelden loodrecht op de halveringsmiddellijn van het objectief schijnt eerder een voordeel dan een nadeel te zijn. Of van het nadeel dat Newcomb noemt [2]) — n.l. dat de beelden die men vergelijkt niet in hetzelfde brandpunt komen, wanneer de objecten verschillen in kleur — in de praktijk ervaring is opgedaan, is mij niet bekend.

Een groot nadeel van de heliometer zal misschien altijd blijven dat zijn lichtsterkte slechts de helft van die van een refractor van dezelfde opening is. Dit is wel de reden dat het instrument behalve op de vier zeer heldere satellieten van Jupiter en op Titan, op geen der andere satellieten in het zonnestelsel is toegepast.

---

[1]) De Sitter zegt van Gill's waarnemingskunst: „his remarkable and probably unsurpassed powers of observation", en op dezelfde wijze liet Kapteyn zich over hem uit.

[2]) „On the Mass of Jupiter and the orbit of Polyhymnia", Astr. Pap. V, part 5, blz. 393, 394.

Met de heliometer van Yale-Observatory zijn sterren van 9.5^{m} (B.D.) niet meer te meten.[1]) Wel is 9.5^{m} (B.D.) een zeer rekbaar begrip, maar toch zijn alle satellieten van Saturnus, uitgezonderd Titan, en van Mars, Uranus en Neptunus zwakker. Het is de vraag of men heliometers van voldoende lichtsterkte en van dezelfde betrouwbaarheid construeren zal, daar met vergroting van de lichtsterkte noodzakelik een zwaardere constructie gepaard gaat. Waartoe men met de grote heliometer van de „Von Kufnersche Sternwarte" in Weenen in staat is, heb ik niet gewaar kunnen worden.

Met welk instrument de sterrekundige meet, hij kan bij de bepaling van zeer kleine afstanden aan de hemel, niet genoeg op zijn hoede zijn tegen de systematiese fouten die uit physiese en physiologiese eigenaardigheden van het opties systeem: dampkring-lenzen-oog voortkomen. Het is beter aan het instrument en dan aan elke waarneming de uiterste zorg te besteden, dan op grond van het principe dat men door vergroting van het aantal waarnemingen de waarschijnlike fout van het eind-resultaat toch omlaag drukken kan, zich van die uiterste zorg ontheven te achten, en de compensatie te zoeken in het aantal. De waarschijnlikheidsrekening zou men tot een slechte gids maken, want met het prijsgeven van die zorg — die inderdaad veel van onze krachten eist — zet men niet alleen de deur open voor grotere toevallige fouten, maar ook de systematiese sluipen mee naar binnen! Een resultaat afgeleid uit waarnemingen met de uiterste zorg verricht, zullen wij groter vertrouwen schenken dan dat uit waarnemingen met minder zorg verricht, zodat de modulus van precisie twee keer zo klein is, al is dan ook het aantal waarnemingen vier keer zo groot.

Barnard heeft van 1898 tot 1906 op Yerkes-Observatory waarnemingen van de satelliet van Neptunus verricht, meestal in veel groter aantal dan iemand anders, met het doel een noodzakelike bijdrage tot de kennis van de baan van die satelliet en van de massa van Neptunus te leveren. Helaas! Zijn resultaten zijn niet vrij van systematiese fout. De waarde die uit zijn waarnemingen is afgeleid voor de halve grote as van de baan loopt vrij regelmatig op van een relatief klein bedrag in 1898, tot een bedrag in 1906, groter dan wat ooit door een andere waarnemer gevonden is! Wat baat ons nu dat aantal waarnemingen, groter dan de totale som van

---

[1]) W. L. Elkin, in Transact. Yale-Obs. **1**, blz. 5.

wat andere waarnemers in die tijd verricht hebben? Het verhoogt de onzekerheid!

Wat mij getroffen heeft is dit: Te midden van de onzekerheid waarin veel waarnemers ons laten staat Hermann Struve's werk als een vaste rots, als een monument niet voor hem zelf alleen, maar voor de school waarvan Friedrich Wilhelm Bessel de geniale stichter was. Als men zich in hun werk begeeft, voelt men zich nederig in presentie van de geest dier grote mannen, voor wie nauwgezetheid en verantwoordelikheid hun bewuste plicht, en buitengewone waarnemingskunst mede hun eerzucht was.

De fotografiese waarneming is — voor zover mij bekend — het eerst toegepast in Greenwich op de satelliet van Neptunus. De waarnemingen werden verricht met de 26″-refractor van het „Thompson-aequatoriaal". Onmiddellik voor de plaat, aan de objectiefzijde, was een draaibaar schermpje aangebracht waarmee het licht van Neptunus verhinderd worden kon de plaat te bereiken. Elke minuut of elke halve minuut werd het licht van de planeet zeer kort tot de plaat toegelaten gedurende de 10, meestal 20, soms 30 minuten der totale expositie voor de satelliet. De orientatie op de platen is gegeven door een reeks korte exposities op Neptunus met tussenpozen van 7 seconden, bij stilstaand uurwerk. De negatieven worden onder de mikroskoop door elk van twee waarnemers uitgemeten. Dyson geeft tegenover blz. 622 van M.N. **62** drie vijfvoudig vergrote reproducties van negatieven. Uit zijn opgaven kan men afleiden dat de afstand van de satelliet tot het middelpunt van het Neptunusbeeld op de plaat hoogstens ongeveer 0.5 m.m. is. Wordt gedurende de gehele expositie op de satelliet ook het licht van Neptunus toegelaten, dan ontstaat, door al die oorzaken waardoor het beeld van een ster op de plaat vergroot wordt, een grote zwarte vlek, die tot halverwege de satelliet zich uitstrekt. Indien het scherm wordt gebruikt blijft het beeld van Neptunus klein, maar niettemin komt de rand van die zwarte vlek „achter het scherm vandaan", en de satelliet staat nog geheel in de geleidelik verminderende zwarting daarvan. Op een der reproducties vertoont zich tussen satelliet en zwarte vlek duidelik een soort verbinding van ter plaatse enigszins versterkte zwarting, waarvan men, geloof ik, aannemen moet dat zij ook op de plaat aanwezig, en niet een effect van het reproductie-procédé is. Het is gebleken dat de op de platen gemeten afstanden stelselmatig kleiner zijn dan die, die de visuele waarneming geeft, en dat niet alleen op platen van Greenwich, maar in sterker mate nog op

platen van Poulkowa, en ook op die van Lick-Observatory. Uitvoerige studies van F. E. Ross [1]) hebben geleerd dat de oorzaak van het verschil bij de fotografiese plaat gezocht kan worden. Ross onderscheidt drie effecten,

1e. Het „turbidity-effect". De volgende oorzaken zijn er waardoor verbreding van het beeld van planeet en satelliet ontstaat: reflexie en totale reflexie van het licht tegen de achterkant van de plaat (geheel of gedeeltelik op te heffen), reflexie van het licht binnen de film, van de ene plaatkorrel naar de andere, het optreden van diffractieringen, „wild" licht door verstrooiing tengevolge van onvolkomenheden in vorm en oppervlak en in het inwendige van het objectief van de kijker, onvolkomen achromasie, het optreden van een extrafocaal beeld door herhaalde terugkaatsing tegen de naar elkaar toegekeerde oppervlakken van niet gekitte objectieflenzen, verlichting van de dampkring door het licht van Neptunus, en de onrust van de lucht. Binnen een cirkelvormig gebied met het beeld van de planeet of met dat van de satelliet tot middelpunt, zullen deze oorzaken tot van het beeld straalsgewijs naar buiten afnemende zwarting aanleiding geven. Staan de objecten zo dicht bij elkaar dat beide gebieden gedeeltelik in elkaar grijpen, dan ontstaat in het gemeenschappelik deel een versterkte zwarting, die zich eventueel ook aan het oog als een verbinding tussen de beelden zal voordoen, en waardoor het „zwaartepunt van zwarting" van de satelliet verschoven is naar de planeet toe. Het schijnt dat voor objecten van sterk verschillende helderheid deze „aantrekking" der beelden nauweliks meer merkbaar is indien de afstand der randen groter is dan 0,1 m.m.

2°. Het „gelatine-effect". De gezwarte delen van de film drogen na de ontwikkeling sneller dan de niet gezwarte. Dit veroorzaakt een samenkrimping van de film rondom de beelden, die tot spanningen in de film en zelfs tot scheuren aanleiding geeft. De hierdoor ontstane „aantrekking" kan zeer groot zijn, voor afstanden van de randen der beelden van ongeveer 0.1 m.m. wel tot 0,020 m.m. in de afstand van de middelpunten der beelden.

3°. Het „Kostinsky-effect", genoemd naar de ontdekker. Een schijnbare „afstoting" der beelden, die zijn verklaring vindt in een werkelike afplatting der beelden aan de naar elkaar toegekeerde randen, ontstaan doordat bij de ontwikkeling vrijkomende producten

---

[1]) „The mutual action of adjacent photographic images." Ap. J. **53**, 1921, blz. 349-374; en „Image contraction and distortion on photographic plates", Ap. J. **52**, 1920, blz. 98-109.

het ontwikkelingsproces belemmeren. Tussen beide beelden is de concentratie dezer stoffen sterker dan aan de tegenovergestelde kanten. Het effect is verschillend voor verschillende soorten ontwikkelaar, maar kan afstotingen veroorzaken van enige microns. Naarmate, bij de proeven van Ross, de afstand der randen kleiner was dan 0.06 m.m., overwoog meer de afstoting op de aantrekking van het gelatine-effect. Het z.g.n. Eberhard-effect zou een biezonder geval van het Kostinsky-effect zijn.

Het blijkt uit de onderzoekingen van Ross dat men de resultaten der fotografiese waarneming slechts met grote voorzichtigheid en met voorbehoud aanvaarden moet. Zolang geen middelen gevonden zijn het ontstaan van deze effecten te voorkomen of ze onschadelik te maken door correctie, op grond van kennis hunner wetmatigheid, kan de fotografiese waarneming voor de bepaling van massa's niet gebruikt worden. Het is te hopen dat de fotografiese waarneming van de satellieten van Mars, van Jupiter, van Saturnus en van Uranus, die in Poulkowa op het programma staat, ons de nodige kennis der drie effecten en de middelen voor hun eliminatie leveren zal.

§ 3. *Afleiding der algemene formule.*

In deze paragraaf zal ik de formule afleiden waarmee uit de schijnbare halve grote as ener satellietenbaan, zoals die uit de waarnemingen volgt, de massa van het stelsel: planeet met satellieten, wordt gevonden.

De volgende notaties heb ik gebruikt:

μ de verhouding van de massa van de zon tot die van het stelsel.
m de verhouding van de massa van de beschouwde satelliet tot die van het stelsel.
m_i hetzelfde voor elk der eventueel aanwezige andere satellieten.
k^2 de gravitatieconstante (k is de constante van Gauss, $\log k = 8.23558144 - 10$).
Δ de in boogsecunden aan de hemel uitgedrukte schijnbare halve grote as van de baan van de beschouwde satelliet, gezien van de afstand ϱ, waarop alle waarnemingen herleid zijn.
a_0 de halve grote as van de satellietenbaan in de astronomiese eenheid uitgedrukt, zoals die zijn zou indien de baan geen veranderingen onderging door afplatting van de planeet, door zonsstoring, of door invloed der andere satellieten.
n_0 de sideriese beweging van de satelliet uitgedrukt in graden per middelbare zonnedag, voor dezelfde onderstelling als voor a_0.
a en n dezelfde grootheden in de ware of gestoorde baan.

a_i de halve grote as van de baan van de storende satelliet.

ϱ_0 de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon, uitgedrukt in de astronomiese eenheid, en die uit

N_0, de waargenomen sideriese beweging der planeet, uitgedrukt in graden per middelbare zonnedag, volgt volgens Kepler's 3e wet.

ϱ de afstand waarop alle waarnemingen herleid zijn, eveneens in de astronomiese eenheid uitgedrukt.

J de grootheid $\varepsilon - \frac{1}{2}\varphi$, waarbij ε is de afplatting der planeet, φ de verhouding van de centrifugaalversnelling tot de versnelling der zwaartekracht aan de aequator van de planeet.

b de straal van de aequator van de planeet, uitgedrukt in de astronomiese eenheid.

$A^{(o)}$ een functie van de halve grote assen van de gestoorde en van de storende satellietenbaan.

$a_i\ A^{(o)} = b^0$ is een der coëfficienten van Laplace, en gelijk aan het dubbel van de constante term in de ontwikkeling van $(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Psi)^{-\frac{1}{2}}$, waarin $\alpha = \frac{a}{a_i}$ voor 't geval $a_i > a$, en $\alpha = \frac{a_i}{a}$ als $a_i < a$ is.

R^0 het aantal graden van de radiaal: 57,^{0}295779.

Voor de ongestoorde beweging geldt nu Kepler's 3e wet:

$$a_0^{\,3} n_0^{\,2} = R^{02} k^2 \frac{1 + m}{\mu (1 + \Sigma m_i + m)}.$$

In de gestoorde baan bevat de voerstraal, en dus ook de halve grote as, een constant bedrag aan storing: $-\frac{1}{2}\sigma a_0$, [1] waarin is:

$$\sigma = \frac{2Jb^2}{a^2} - \left(\frac{N_0}{n}\right)^2 - \Sigma m_i a^2 \frac{\partial A^{(o)}}{\partial a}, \qquad (1)$$

zodat men heeft:

$$a = a_0 (1 - \tfrac{1}{2}\sigma). \qquad (2)$$

In de uitdrukking voor σ stellen de drie termen achtereenvolgens voor: de invloed der afplatting, de invloed van de zon, en de invloed van alle andere satellieten van het stelsel. De sommatie strekt zich over al deze satellieten uit.

Ook de sideriese beweging ondergaat een verandering, ten bedrage van $+\sigma n_0$, zodat voor de waargenomen beweging geldt:

$$n = n_0 (1 + \sigma). \qquad (3)$$

---

[1] Tisserand, Méc. Cél. Tome IV, pag. 17, 18.

Met (2) en (3) wordt nu Kepler's wet:

$$n^2a^3\,(1-\tfrac{1}{2}\sigma)^{-3}(1+\sigma)^{-2}=\frac{R^{02}k^2}{\mu}\,\frac{1+m}{1+\Sigma m_i+m}.$$

Bij de afleiding van σ zijn termen van 2de en hogere orde verwaarloosd, bovendien is σ altijd een kleine grootheid, zodat men, σ^2 enz. verwaarlozend, heeft:

$$\mu=\frac{R^{02}k^2}{n^2a^3}(1+\tfrac{1}{2}\sigma)\,\frac{1+m}{1+\Sigma m_i+m},$$

of, met verwaarlozing van termen van de 2de en hogere orde in de massa's, nog altijd voldoende nauwkeurig:

$$\mu=\frac{R^{02}k^2}{n^2a^3}(1+\tfrac{1}{2}\sigma)(1-\Sigma m_i). \qquad (4)$$

Nu is $a=\varrho\sin\triangle$, waarvoor geschreven mag worden $\varrho\,\triangle\sin 1''$ [1]), als $\triangle$ in boogseconden wordt uitgedrukt. Voert men de waarden der verschillende constanten in, dan komt er tenslotte:

$$\mu\triangle^3=(\text{Num. log. } 15.9306835)\,\frac{(1+\tfrac{1}{2}\sigma)(1-\Sigma m_i)}{n^2\varrho^3}. \qquad (5)$$

De astronomiese eenheid waarin ϱ moet worden uitgedrukt is de afstand waarop een massa, die 1 : 354710 van de zonsmassa is, in 365.2563835 middelbare zonnedagen in ongestoorde baan één sideriese omloop om de zon volbrengen zou, zodat de constante k de door Gauss berekende waarde: k = 0.01720209895, heeft.

Daar $\varrho\sin\triangle$ constant is, heeft de betekenis van ϱ geen essentieel belang voor de afleiding van (5), of ϱ nu een gemiddelde afstand, of een andere afstand voorstelt, waarop alle waarnemingen herleid zijn. Neemt men daarvoor echter de gemiddelde afstand ϱ_0, die volgens Kepler's 3de wet uit de waargenomen sideriese beweging N_0 van de planeet kan worden afgeleid, dan geldt (als $\triangle_0$ de schijnbare halve grote as voor deze afstand is):

$$a=\varrho_0\sin\triangle_0 \quad\text{en}\quad N_0^2\varrho_0^3=R^{02}k^2\left(1+\frac{1}{\mu}\right),$$

en men vindt de formule:

$$\mu=\left(\frac{N_0}{n}\right)^2\sin^{-3}\triangle_0\,(1+\tfrac{1}{2}\sigma)(1-\Sigma m_i)-1. \qquad (6)$$

---

[1]) Van alle satellieten waarop de formule zal worden toegepast, geeft dit voor Japetus de grootste fout, n.l. van +1 in de 6de decimaal van log μ, geheel onbetekenend.

§ 4. *De herleiding der waarnemingen op de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon.*

Het is nodig nog iets te zeggen over het begrip halve grote as van een planetenbaan en de onderlinge vergelijking der resultaten uit verschillende reeksen van waarnemingen, herleid op verschillende afstanden.

Voor het herleiden der waarnemingen op dezelfde afstand zal men zonder twijfel gebruik maken van de ephemeriden van de planeet die in de astronomiese jaarboeken voorkomen. Laten wij aannemen dat het steeds de bedoeling is de waarnemingen te reduceren op de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon. Nu vindt men bij Leverrier en Gaillot, bij Newcomb en bij Hill geheel verschillende grootheden met de naam „halve grote as" en met de letter a aangeduid. Zij voldoen aan één der volgende drie definities:

A. De halve grote as die gelden zou indien alleen de zon op de beweging invloed had. Deze wordt gevonden volgens Kepler's derde wet uit de waargenomen middelbare sideriese beweging verminderd met de seculaire variatie van de middelbare lengte der epoche, die een gevolg van de storingen der overige planeten is.

B. De halve grote as die volgens Kepler's derde wet uit de waargenomen sideriese beweging volgt. Deze wijkt af van de onder A genoemde met een bedrag dat volgens Kepler's wet overeenkomt met de storing door de planeten in de middelbare lengte der epoche.

C. De halve grote as onder A genoemd, maar vermeerderd nog met het constante bedrag van de storingen door de overige planeten in de voerstraal der planeet.[1])

In de volgende tabel zijn bij elkaar gezet de waarden der halve grote as voor de vier grote buitenplaneten, zoals die door bovengenoemde autoriteiten worden gegeven. Met kleine cijfers zijn gedrukt de waarden die ik uit de gegevens der publicaties heb afgeleid. [2])

---

[1]) Tisserand, Méc. Cél. Tome I, blz. 371.

[2]) Leverrier-Gaillot: Annales de l Obs. de Paris, Mémoires,
Tome XXXI, 1913, Tables ... de Jupiter, blz. 127, 128, 131;
Tome XXIV, 1904, Tables ... de Saturne, blz. 179, 180;
Tome XXVIII, 1910, Tables ... d'Uranus et de Neptune, blz. 24, 53, 77, 86, 98, 116, 138.
Newcomb: Astronomical Papers, Vol. VII,
part III, Tables ... of Uranus, blz. 292.
part IV, Tables ... of Neptune, blz. 422.
Hill: Astronomical Papers, Vol. VII,
part I, Tables ... of Jupiter, blz. 23.
part II, Tables ... of Saturn, blz. 167.

Planeet	Leverrier-Gaillot. 1850.0	Definitie	Newcomb. 1900.0	Definitie	Hill. 1850.0	
Jupiter	5.202805	B			5.202803	B
	5.202562	C				
Saturnus	9.554747	A				
	9.538854	B			9.538844	B
Uranus	19.21814	A				
	19.18332	B	19.18228	B		
	19.19222	C	19.19098	C		
Neptunus	30.10957	A				
	30.05495	B	30.05707	B		
	30.06897	C	30.07067	C		

Men ziet hoe de waarden verschillen. Bovendien is voor geen der drie kolommen de eenheid van lengte dezelfde. Voor Leverrier-Gaillot en Hill is dat de halve grote as van de aardbaan, maar beide gebruiken bij de toepassing van Kepler's derde wet verschillende waarden voor de massa van de aarde. Voor Newcomb is het de astronomiese eenheid die in de aangenomen waarde voor de constante van Gauss zijn definitie vindt. Afgezien hiervan zijn ook in alle drie de kolommen de gebruikte waarden der planetenmassa's en van de praecessie niet hetzelfde.

Het is dus niet alleen noodzakelik dat de berekenaar ener satellietenbaan zich van de gebruikte waarde der halve grote as en van zijn definitie volkomen bewust is, maar dat hij deze ook meedeelt. De enkele opgaaf: „herleid op de gemiddelde afstand", is onvoldoende. Bovendien dient te worden vermeld welke ephemeriden gebruikt werden. Het behoeft wel geen betoog dat de gekozen gemiddelde afstand dezelfde moet wezen die aan de tafels waarop de ephemeriden zijn geconstrueerd mee ten grondslag ligt. Dat de astronomiese jaarboeken ons wat dit betreft slecht inlichten is zeker te betreuren.

Terwijl formule (5) (blz. 27) bij elke definitie van halve grote as bruikbaar is, leent formule (6) zich alleen voor de definities A en B.

Is een reeks waarnemingen herleid op een gemiddelde afstand ϱ_0, en geldt dus ook de afgeleide waarde van Δ daarvoor, dan kan men deze waarde van Δ onmiddellik, zonder enige correctie, vergelijken met een waarde van Δ die uit andere waarnemingen volgt,

mits deze op de *gelijksoortige* afstand van dezelfde als, of van een *andere* theorie dan die waarop de gebruikte ephemeriden gebouwd zijn, herleid is, onverschillig of beide gemiddelde afstanden al of niet dezelfde getalwaarden hebben. De herleiding op gemiddelde afstand ϱ_0 hangt namelik voor de vier grote buitenplaneten nagenoeg niet af van de speciale getalwaarde die in beide theorieën aan ϱ_0 is toegekend, maar berust in hoofdzaak op de excentriciteit. Het volgende zal dit nog duideliker maken.

Laat aardbaan en planetenbaan in hetzelfde platte vlak liggen, en ϱ_0, e, r, halve grote as, excentriciteit en voerstraal in de planetenbaan zijn; de eenheid van lengte, e_a en r_a dezelfde grootheden voor de aardbaan, en Ψ de hoek aan de zon tussen de voerstralen r en r_a. Wil men de waargenomen schijnbare afstand s van de satelliet tot de planeet herleiden op de gemiddelde afstand ϱ_0, dan moet men s vermenigvuldigen met:

$$\frac{r}{\varrho_0}\sqrt{1+\left(\frac{r_a}{r}\right)^2-2\left(\frac{r_a}{r}\right)\cos\Psi}.$$

Voor het tijdperk der waarnemingen zal ik aannemen dat de maximale waarde van Ψ 90^0 is. Verder is te stellen:

$$r=\varrho_0(1-e\cos v), \qquad r_a=1-e_a\cos v_a,$$

waarin v en v_a de ware anomalieën van planeet en aarde zijn. Voor 't maximum van de herleidingsfactor geldt dus:

$$s_0=s\,(1-e\cos v)\sqrt{1+\frac{1}{\varrho_0{}^2}\left(\frac{1-e_a\cos v_a}{1-e\cos v}\right)^2},$$

of met verwaarlozing der excentriciteiten onder de wortel:

$$s_0=s\,(1-e\cos v)\left(1+\frac{1}{2\varrho_0{}^2}\right),$$

en wanneer $v=180^0$:

$$s_0=s(1+e)\left(1+\frac{1}{2\varrho_0{}^2}\right).$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\delta s_0}{s_0}=e\frac{\delta e}{e}-\varrho_0{}^{-2}\frac{\delta\varrho_0}{\varrho_0}.$$

Voor Uranus en Neptunus bestaat bij de verschillende theorieën het grootste onderscheid in de waarden van ϱ_0, zodat voor deze planeten een procentuele fout in ϱ_0 resp. 370 en 910 keer verkleind in s_0 overgaat. Een procentuele fout in e, gaat vermenig-

vuldigd met e in s_0 over. Voor Mars is de factor ϱ_0^{-2} niet klein, maar voor deze planeet ontlopen de waarden van ϱ_0 bij de verschillende theorieën elkaar nagenoeg niets. Maar ook voor Uranus en Neptunus is het verschil klein, zodat de fout die door wèl „corrigeren" ontstaan zou, niet zeer belangrijk wezen kan.

Een consequentie is, dat ter herleiding van een gemiddelde afstand Δ van de satelliet, geldend voor de gemiddelde afstand ϱ_A van de planeet volgens definitie A in de ene theorie, op de afstand ϱ^1_B volgens definitie B in een andere theorie, men Δ niet vermenigvuldigen moet met de factor $\frac{\varrho_A}{\varrho^1_B}$, maar met $\frac{\varrho_A}{\varrho_B}$.

Bij de toepassing van formule (6), blz. 27, is het noodzakelik dat de gebruikte waarde van ϱ_0 met de waarde van N_0 overeenstemt volgens Kepler's wet. Niemand minder dan Bessel heeft zich hier vergist, waardoor zijn, als klassiek geldende, waarde van de massa van Saturnus 1 : 3501,6, in de noemer 3,7 eenheden te groot was [1]).

Ook aan A. Hall's resultaten voor Japetus en Titan zijn kleine correcties nodig, daar hij zich deels van Bouvard's, deels van Leverrier's Saturnustafels bediende. De formule die hij gebruikte komt met formule (5) overeen.

§ 5. *De formules voor de satellieten van Mars.*

Wij zullen nagaan hoe voor elk der satellieten van Mars, Saturnus, Uranus en Neptunus, waarvan de beweging voor de massabepaling hunner planeten gebruikt wordt, de waarde van σ wordt gevonden, en wat de formule voor de bepaling van de massa wordt.

Van de beide satellieten van Mars, Phobos en Deimos, is de massa zo gering dat de daarvan afhankelike term in σ verwaarloosd worden kan. H. Struve zegt hiervan dat de seculaire verandering van de knopen en apsiden der beide satellietenbanen — waarin alleen die massa's zich kunnen verraden — „vollständig und auf die einfachste Weise" alleen al zich door afplatting en zonsstoring verklaren laten. [2]) Voor Mars wordt formule (1) van § 3 dus:

$$\sigma = \frac{2Jb^2}{a^2} - \left(\frac{N_0}{n}\right)^2.$$

De grootheid $\frac{Jb^2}{a^2}$ kan gevonden worden uit de jaarlikse beweging van de knopenlijnen en van de perimartia van Phobos en Deimos,

[1]) H. Struve, Beob. Sat. trab., 1e Abth., blz. 118.
[2]) Sitz. ber. Berlin, 1911, blz. 1062.

die voor het overgrote deel in de afplatting van de planeet zijn oorzaak heeft. Afgezien dus van de zonsstoring, die voor Phobos slechts ongeveer een twintigste van een graad, voor Deimos ongeveer vier keer zooveel bedraagt, heeft men:

$$-\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = n\frac{Jb^2}{a^2},$$

waarin Θ en $\tilde{\omega}$ resp. knopenlengte en perimartiumlengte voorstellen. H. Struve [1]) geeft het volgende voor $n\frac{Jb^2}{a^2}$, geldend voor Phobos:

uit de beweging van 't baanvlak van Deimos: $155.^0 4 \pm 6.^0 6$ m.f. (?)
„ „ „ „ „ „ Phobos: $159.^0 0 \pm 0.^0 45$ „ „
„ „ „ „'t perimartium van Phobos: $157.^0 0 \pm 1.^0 0$ „ „

Het eerste getal, zeer onzeker, is door Struve afgeleid uit de beweging van het baanvlak van Deimos door vermenigvuldiging met 24.79. Zonder de zonsstoring te verwaarlozen vindt men voor dit getal ongeveer 23.9. De opgegeven waarde $155.^0 4$ is te groot. Ik zal er verder geen rekening mee houden om de grote middelbare fout. Voor de berekening van σ neem ik aan: $n\frac{Jb^2}{a^2} = 159.^0 0$. Het gemiddelde overeenkomstig de middelbare fouten is het dichtst hierbij. Bovendien vond ik zelf uit nagenoeg hetzelfde materiaal als dat van Struve, maar met een enigszins andere groepering en gewichtstoekenning, voor de beweging van het perimartium van Phobos $159.^0 9 \pm 0.^0 9$ w.f.

Ik vind nu:

$$\text{voor Phobos: } \frac{Jb^2}{a^2_{Ph}} = \frac{1}{n}\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = 0.0003856,$$

$$\text{voor Deimos: } \frac{Jb^2}{a^2_D} = 0.0000638,$$

en

$$\text{voor Phobos: } \left(\frac{N_0}{n_{Ph}}\right)^2 = 0.00000022,$$

$$\text{voor Deimos: } \left(\frac{N_0}{n_D}\right)^2 = 0.00000338,$$

waarmee tenslotte:

$$\text{voor Phobos: } \sigma_{Ph} = 0.0007710,$$
$$\text{voor Deimos: } \sigma_D = 0.0001242.$$

---

[1]) Sitz. ber. Berlin, 1911, blz. 1068.

Verder heeft men [1]):

voor Phobos: $n_{Ph} = 1128.^{0}84403$,
voor Deimos: $n_{D} = 285.^{0}16193$.

Nagenoeg algemeen heeft men voor de satellieten van Mars de resultaten voor Δ gereduceerd op de astronomiese eenheid van lengte. In formule (5) (blz. 27) vervalt dus voor deze satellieten zowel ϱ^3 als $1-\Sigma m_i$.

Hiermee rekening houdend vind ik:

voor Phobos: $\log \mu\Delta^3 = 9.8255830$,
voor Deimos: $\log \mu\Delta^3 = 11.0205273$,

en deze formules gelden, wel te verstaan, indien de waarnemingen op de eenheid van afstand zijn herleid.

§ 6. *De formules voor de satellieten van Saturnus.*

Bij de satellieten van Saturnus moeten in σ zowel de termen die de storingen der satellieten onderling aangeven, als de termen der afplatting en der zonsstoring in rekening gebracht worden.

Voor elk paar satellieten moet worden berekend de grootheid $a^2\frac{\partial A^{(o)}}{\partial a}$. Voor 't geval dat de halve grote as van de baan van de storende satelliet groter is dan die van de baan der gestoorde: $a' > a$, heeft men:

$$a^2\frac{\partial A^{(o)}}{\partial a} = +\alpha^2\frac{d\,b^{(o)}}{d\alpha} = \alpha^3+\frac{9}{8}\alpha^5+\frac{75}{64}\alpha^7+\frac{1225}{1024}\alpha^9+\ldots\ldots, \qquad (7)$$

met de algemene term: $4n\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\alpha^{2n+1}$;

en indien het omgekeerd is: $a' > a$, dan geldt:

$$a^2\frac{\partial A^{(o)}}{\partial a} = -\left(b^{(o)}+\alpha\frac{d\,b^{(o)}}{d\alpha}\right) = -(2+\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{45}{32}\alpha^4+\frac{175}{128}\alpha^6+\frac{11025}{8192}\alpha^8+\ldots.)$$

met de algemene term: $-2(2n+1)\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2\alpha^{2n}$,

waarvan men de coëfficient vindt uit die van de algemene term van (7) door vermenigvuldiging met $\frac{2n+1}{2n} = 1+\frac{1}{2n}$.

---

[1]) Sitz. ber. Berlin, 1911, blz. 1072. De tropiese bewegingen zijn verminderd met $0.^{0}00003$ voor praecessie en beweging van het baanvlak.

Veel minder bewerkelik, vooral voor grote waarden van α, is de berekening van $a^2\frac{\partial A^{(o)}}{\partial a}$ met behulp der volledige elliptiese integralen. Volgens Tisserand, Méc. Cél. I, blz. 275, is

$$b^{(o)} = \frac{4}{\pi}F \qquad \text{en} \qquad b^{(1)} = \frac{4}{\pi\alpha}(F - E),$$

waarin F en E resp. de volledige elliptiese integralen van 1e en 2e soort voorstellen voor de modulus α, en $b^{(1)}$ de dubbele coëfficient van cos Ψ is, in de ontwikkeling van $(1+\alpha^2-2\alpha\cos\Psi)^{-\frac{1}{2}}$.

Nu is [1])

$$\frac{d\,b^{(o)}}{d\,\alpha} = \frac{\alpha\,b^{(o)} - b^{(1)}}{1-\alpha^2},$$

waarmee men vindt voor:

$$a' > a \qquad a^2\frac{\partial A^{(o)}}{\partial a} = \frac{4\alpha}{\pi(1-\alpha^2)}E - \frac{4\alpha}{\pi}F,$$

$$a' < a \qquad a^2\frac{\partial A^{(o)}}{\partial a} = -\frac{4}{\pi(1-\alpha^2)}E.$$

Met behulp van deze formules zijn de in de volgende tabel opgegeven waarden van $a^2\frac{\partial A^{(o)}}{\partial a}$ berekend [2]), voor waarden der halve grote assen die gelden voor het omgekeerde van de benaderde waarde der massa van Saturnus: 3495.

gestoorde satelliet / storende satelliet	Halve grote as $\mu = 3495$	Mimas	Enceladus	Tethys	Dione	Rhea	Titan	Hyperion	Japetus
Mimas	26.″826		−4.1990	−2.9557	−2.4699	−2.2105	−2.0353	−2.0238	−2.0041
Enceladus	34.416	+1.3300		−4.6512	−2.9607	−2.3790	−2.0590	−2.0397	−2.0066
Tethys	42.605	+0.4379	+1.6888		−4.2175	−2.6668	−2.0923	−2.0617	−2.0103
Dione	54.569	+0.1619	+0.4412	+1.3434		−3.5127	−2.1572	−2.1039	−2.0170
Rhea	76.207	+0.0506	+0.1189	+0.2656	+0.8149		−2.3385	−2.2159	−2.0335
Titan	176.664	+0.0036	+0.0077	+0.0150	+0.0329	+0.1011		−4.9948	−2.1986
Hyperion	214.144	+0.0020	+0.0043	+0.0082	+0.0179	+0.0525	+1.9928		−2.3102
Japetus	514.845	+0.0001	+0.0003	+0.0006	+0.0012	+0.0033	+0.0464	+0.0889	

1) Tisserand, Méc. Cél. I, blz. 286.

2) F en E zijn genomen uit „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven" von Dr. E. Jahnke und Ing. F. Emde, 1909. Op blz. 68 hiervan leze men voor $\alpha = 7^0$, E = 1.5649, voor $\alpha = 8^0$, E = 1.5632, inplaats van resp. 1.5650 en 1.5630.

Wat de invloed van de afplatting van Saturnus betreft: de waarde van J kan uit de seculaire beweging van de knoop of uit die van het perisaturnium, die, afgezien van het teken, op zeer weinig na gelijk zijn, bepaald worden. Het zekerst bekend zijn de seculaire bewegingen van de knoop en van het perisaturnium van Mimas, en van de knoop van Tethys. H. Struve geeft daarvoor de volgende uitdrukkingen in graden per jaar [1]):

$$-\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{Mi} = \left(\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)_{Mi} = (4.17113)\,J + (3.59555)\,\frac{l}{b^4} + (4{,}9799)\,m_r + \\ + (5.4694)\,m_{En} + (4.8320)\,m_{Te} + (4.3208)\,m_{Di} + \\ + (3.7671)\,m_{Rh} + (2.5833)\,m_{Ti}\ ,$$

$$-\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{Te} = \left(\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)_{Te} = (3.46764)\,J + (2.49028)\,\frac{l}{b^4} + (4.0014)\,m_r + \\ + (4.7312)\,m_{Mi} + (5.4137)\,m_{En} + (5.1786)\,m_{Di} + \\ + (4.2699)\,m_{Rh} + (2.9174)\,m_{Ti}\ ;$$

m_r stelt de massa van de ring van Saturnus voor.

De coëfficienten zijn door middel van hun logarithmen tussen haakjes aangegeven. Die van J en $\frac{l}{b^4}$ geeft Struve enigszins anders. Ik heb ze opnieuw berekend met een betere waarde voor de straal van de aequator van de planeet. Struve heeft daarvoor in 1915 een waarde afgeleid uit de verduisteringen der satellieten, waargenomen op acht verschillende sterrewachten [2]). Uit de waarnemingen aan instrumenten met van 45 c.m. tot 100 c.m. opening vond hij:

$$b = 8.''746 \pm 0.''009 \text{ w.f.},$$

en uit alle waarnemingen b slechts 0.''004 groter.

De coëfficienten van J en $\frac{l}{b^4}$ zijn resp.:

$$n\left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ en } \frac{5}{2}n\left(\frac{b}{a}\right)^4;$$

l is een grootheid van de 2de orde ten opzichte van de afplatting en is hier nog merkbaar.

Met de in de tabel op blz. 37 opgegeven waarde der massa's van de ring van Saturnus en van de satellieten heb ik voor Mimas en Tethys gevonden resp. $+0.^0032$ en $+0.^0605$, als bijdrage

---

[1]) H. Sruve, Beob. Sat. trab. Vol. XI, blz. 226.
[2]) Sitz. ber., Berlin, 1915, blz. 805-822.

in de seculaire beweging van de knoop en het perisaturnium. G. Struve geeft

$$\text{voor Mimas:} \quad \left(\frac{d\tilde{\omega}}{dt}\right)_{Mi} = \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{Mi} = 365.^{0}55\ ^{1}),$$

$$\text{voor Tethys:} \quad -\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)_{Te} = 72.^{0}285\ ^{2}),$$

zodat men ter bepaling van J en $\frac{l}{b^4}$ heeft:

$$(4.17113)\,J + (3.59555)\,\frac{l}{b^4} = 365.^{0}23,$$

$$(3.46764)\,J + (2.49028)\,\frac{l}{b^4} = 71.^{0}68,$$

waaruit volgt:

$$J = 0{,}024284, \qquad \frac{l}{b^4} = 0.00129.$$

De invloed van de zon op $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ kon hierbij verwaarloosd worden. De nauwkeurigheid van J hangt nagenoeg geheel van die der waargenomen seculaire bewegingen af, en slechts zeer weinig van de aangenomen massa's.

In de eerstvolgende tabel zijn verenigd de aangenomen waarden voor de massa's der satellieten en voor hun sideriese dagelikse beweging [3]) met de aanwijzing omtrent autoriteit, en met, voor iedere satelliet, de halve grote as der baan voor het omgekeerde ener benaderde Saturnusmassa: 3495. De afplattingsterm in σ is hiermee berekend.

In de tabel betekent:

a H. Struve, A. N. **162**, 1903, blz. 342;
b H. Struve, Sitz. ber. Berlin, 1916, blz. 1109;
c H. Struve, Beob. Sat. trab., Vol. XI, blz. 228 voor Dione en Rhea, blz. 169 voor Japetus;
d Gemiddelde der bepalingen van:
W. S. Eichelberger, Publ. Wash. 2e Ser. VI, 1911, blz. B 17:
$1 : m = 4172 \pm 58$ w.f. (?);

---

1) Abh. Akad. Berlin, 1918, blz. 124.
2) A. N. **204**, blz. 143.
3) Afgeleid uit de tropiese beweging ten opzichte van de ecliptica door correctie voor praecessie: — 0.^{0}00003822.

H. Samter, Sitz. ber. Berlin, 1912, blz. 1059:
1 : m = 4125;
J. Woltjer, Versl. K.A.W. XXI, 1919, blz. 893:
1 : m = 4080;
D. Brouwer, B.A.N. **2**, blz. 119-120:
1 : m = 4142,9;

e H. Struve, Beob. des Saturnstrab. Titan, 1908, blz. 36;
f H. Struve, Sitz. ber. Berlin, 1919, blz. 109;

a′ G. Struve, Abh. Akad. Berlin, 1918, blz. 121 voor Mimas, blz. 122 voor Tethys;
b′ H. Struve, Sitz. ber. Berlin, 1916, blz. 1109;
c′ H. Struve, Beob. Sat. trab.. Vol. XI, blz. 176 voor Rhea, blz. 290 voor Hyperion;
d′ H. Struve, Beob. des Saturnstrab. Titan, 1908, blz. 41;
e′ H. Struve, Beob. Sat. trab. 1e Abth., blz. 84.

Satelliet	a	1 : m		aangenomen m	n	
Mimas	26."826	16340000	a	0.00000006	381.°99440	a′
Enceladus	34.416	6250000	b	0.00000016	262.731903	b′
Tethys	42.605	921500	a	0.00000109	190.697910	a′
Dione	54.569	536000	c	0.00000187	131.5349343	b′
Rhea	76.207	250000	c	0.00000400	79.690049	c′
Titan	176.664	4130	d	0.00024213	22.57697424	d′
Hyperion	214.144	> 4000000 [1]	e	0.00000012	16.919945	c′
Japetus	514.845	> 100000	c	0.00000200 [2]	4.5379583	e′
Ring	—	> 1000000	f	0.00000050	—	—

In de volgende tabel zijn de verschillende bestanddelen van σ bijeengezet, met de waarden van $1 + \frac{1}{2}\sigma$ en $1 - \Sigma m_i$.

---

[1] n.l. volgens H. Struve meer dan duizend maal kleiner dan de massa van Titan.

[2] H. Struve op blz. 167, 168 der aangehaalde publicatie, stelde voor de massa van Japetus μ : 100000, en vond, van de beide hypothesen $\mu = 1$ en $\mu = 0$, de beste voorstelling van de beweging van Titan's baanvlak voor $\mu = 0$. Ik koos $\mu = \frac{1}{5}$. Voor Hyperion en de ring heb ik de helft van de bovenste grens voor de massa genomen.

Satelliet	$2\frac{Jb^2}{a^2}$	$\left(\frac{N_0}{n}\right)^2$	$\Sigma m_i a^2 \frac{\partial A^{(o)}}{\partial a}$	$1+\frac{1}{2}\sigma$	$1-\Sigma m_i$
Mimas	0.0051628	0.00000001	+0.00000206	1.0025804	0.99974813
Encelad.	0.0031366	0.00000002	+0.00000475	1.0015659	0.99974823
Tethys	0.0020467	0.00000003	+0.00000628	1.0010202	0.99974916
Dione	0.0012477	0.00000006	+0.00000605	1.0006208	0.99974994
Rhea	0.00063973	0.00000018	+0.00001452	1.0003125	0.99975207
Titan	0.00011904	0.00000220	−0.00001577	1.0000663	0.99999020
Hyper.	0.00008102	0.00003911	−0.00122470	1.0006333	0.99974819
Japetus	0.00001402	0.00005436	−0.00054715	1.0002534	0.99975007

Om nu voor elke satelliet de waarde van $\mu\Delta^3$, dat is het rechterlid van formule (5) (blz. 27) te berekenen, zal ik aan Hill's Saturnustafels [1]) de waarde van ϱ_0 ontlenen, overeenkomstig de gemiddelde dagelikse sideriese beweging $N_0 = 120.''45504214$, en met het omgekeerde van een benaderde waarde der massa van Saturnus: 3495. Ik vind dan voor ϱ_0 in de astronomiese eenheid uitgedrukt:

$$\varrho_0 = \text{num.log } 0.9794958\ ^{2}).$$

Hiermee tenslotte vind ik het volgende tafeltje van de waarde van $\log \mu\Delta^3$ voor elk der satellieten van Saturnus, die voor de bepaling der massa in aanmerking kunnen komen.

Satelliet	$\log \mu\Delta^3$
Mimas	7.829092
Enceladus	8.153741
Tethys	8.431838
Dione	8.754275
Rhea	9.189416
Titan	10.284889
Hyperion	10.535564
Japetus	11.678477

1) G. W. Hill, Tables of Saturn, Astr. Pap. VII, part 2, blz. 167.

2) Hill zelf geeft ϱ_0 uitgedrukt in de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon, en voor de massa 1 : 3501,6. In $\log \varrho_0$ geeft dit een verschil van 10 eenheden van de achtste decimaal.

§ 7. *De formules voor de satellieten van Uranus.*

Voor de satellieten van Uranus blijft in σ alleen de term die de invloed der afplatting aangeeft over. De storingen door de zon kunnen hier geheel verwaarloosd worden, en die der satellieten onderling eveneens. De massa's der satellieten zijn onbekend, maar zonder twijfel zo gering, dat de invloed er van ver binnen de onzekerheid blijft die de bepaling van de massa van Uranus tengevolge van onvoldoende kennis der afplatting aankleeft.

Östen Bergstrand heeft voor de jaarlikse verandering van de peri-uraniumhoek van de baan van Ariël gevonden $+ 16^0.03$, een bedrag waarvan de onzekerheid 1^0 à 2^0 bedraagt [1]). Daar de beweging van de knoop van Ariël's baan ten opzichte van de aardaequator — die niet aan storingen, maar geheel aan praecessie is toe te schrijven — slechts $+ 0.^0014$ per jaar bedraagt, kan men de verandering van de peri-uraniumlengte met die der peri-uraniumhoek vereenzelvigen, en in Bergstrand's uitdrukking :

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = 1210^0 J + 57334^0\, m_{Um} + 4852^0\, m_{Ti} + 1721^0\, m_{Ob}$$

voor $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$ $16.^0 03$ substitueren. Indien men, met Newcomb, voor de massa's van Titania en Oberon aanneemt :

$$m_{Ti} = m_{Ob} = 1 : 64000$$

als bovenste grens, en voor die van Umbriël $\frac{1}{3}$ hiervan, wordt de invloed der overige satellieten $+ 0.^0 4$ in $\frac{d\tilde{\omega}}{dt}$, volgens Bergstrand eerder te groot dan te klein [1]).

Men heeft dus :

$$1210^0 J = \left(\frac{n}{a^2}\right)_{Ar} Jb^2 = 15.^0 6,$$

en hieruit is berekend voor elke satelliet, de waarde van $1 + \frac{1}{2}\sigma = 1 + \frac{Jb^2}{a^2}$, met behulp van waarden voor de halve grote assen die gelden voor een benaderde massa van Uranus 1 : 22530. In de volgende tabel is voor elke satelliet gegeven $\log \mu \Delta^3$, te samen met de grootheden die voor de berekening nodig zijn. De dagelikse sideriese bewegingen zijn ontleend van H. Struve's „Bahnen der Uranustrabanten, 1e Abt. Oberon und Titania" [2]), blz. 104.

---

[1]) Ö. Bergstrand. Ueber die Bahn des ersten Uranussatellieten, Ariël, 1903. blz. 52 en 54.

[2]) Abh. Akad. Berlin, 1912.

Satelliet	a	n	$1+\frac{1}{2}\sigma$	$\log \mu \Delta^3$.
Ariël	13.″79	142.°83563	1.0002990	7.7718490
Umbriël	19.21	86.86892	1.0001541	8.2037303
Titania	31.51	41.351433	1.0000573	8.8484360
Oberon	42.14	26.739486	1.0000320	9.2271000

Voor de halve grote as van de baan van Uranus heb ik aangenomen wat Newcomb geeft in zijn „Tables of the heliocentric motion of Uranus" [1]:

$$\varrho = \text{num. log } 1.2830271.$$

Het constante bedrag van de storingen in de voerstraal is hierin opgenomen.

§ 8. *De formule voor de satelliet van Neptunus.*

Ook voor de satelliet van Neptunus blijft de uitdrukking van σ tot de afplattingsterm beperkt. Het is de seculaire beweging van de knoop van de baan op de aardaequator die enig uitsluitsel omtrent σ geeft, en die, voor zover wij weten, alleen aan afplatting van de planeet kan worden toegeschreven. De invloed van de zon bedraagt n.l. in de tijd waarover zich betrouwbare waarnemingen uitstrekken, nauweliks 0.°01 in totaal, en omtrent het bestaan van andere satellieten is niets bekend.

Laat nu zijn:

I_0 en N_0, I en N, helling en knopenlengte van de baan van de satelliet ten opzichte van de aequator der aarde voor het tijdstip 1900.0 als vast vlak, en wel resp. voor 1900.0, en voor t jaren na 1900.0;

γ de hoek die het vlak van de satellietenbaan maakt met het vlak van de aequator van Neptunus, een stompe hoek, daar de beweging van de satelliet retrograad is;

Ψ de boog van een grote cirkel tussen de knoop van de satellietenbaan op de aardaequator en de knoop op de aequator van Neptunus, gerekend in de richting der beweging;

Θ de boog tussen de knoop van de aequator van Neptunus op de aardaequator, en de knoop van de baan van de satelliet op

[1] Astr. Pap. VII, part 3, blz. 292.

de Neptunusaequator, gemeten dus langs de aequator van Neptunus;

K de grootheid $\frac{n}{a^2} Jb^2 = \frac{1}{2} n \sigma$.

Nu geldt[1]):

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = K \cos\gamma \sin\gamma \sin\Psi, \tag{8}$$

$$\sin I_0 \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 = -K \cos\gamma \sin\gamma \cos\Psi, \tag{9}$$

$$\gamma = \text{constant, en dus } \frac{d\Theta}{dt} = K \cos\gamma = \text{constant.}$$

Hieruit volgt:

$$\operatorname{tg}\Psi = -\frac{\left(\frac{dI}{dt}\right)_0}{\left(\frac{dN}{dt}\right)_0 \sin I}, \tag{10}$$

en:

$$\frac{d\Theta}{dt} \sin\gamma = \left(\frac{dI}{dt}\right)_0 \operatorname{cosec}\Psi, \tag{11}$$

en uit de figuur:

$$\frac{d\Theta}{dt} \cos\gamma = -\frac{d\Psi}{dt} - \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 \cos I. \tag{12}$$

Daar γ constant is, volgt uit de vergelijkingen (8) en (9):

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\left(\frac{d^2I}{dt^2}\right)_0}{\left(\frac{dN}{dt}\right)_0 \sin I}, \tag{13}$$

en:

$$\left(\frac{d^2N}{dt^2}\right)_0 = -\left(\frac{dN}{dt}\right)_0 \cdot \left(\frac{dI}{dt}\right)_0 \operatorname{cotg} I - \left(\frac{d^2I}{dt^2}\right)_0 \frac{\left(\frac{dI}{dt}\right)_0}{\left(\frac{dN}{dt}\right)_0} \operatorname{cosec}^2 I. \tag{14}$$

I_0, $\left(\frac{dI}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d^2I}{dt^2}\right)_0$ en $\left(\frac{dN}{dt}\right)_0$ kunnen uit waarnemingen over voldoend lange tijd gevonden worden. Uit (10) en (13) berekent men dan Ψ en $\frac{d\Psi}{dt}$, uit (11) en (12) γ en $\frac{d\Theta}{dt}$, en vindt tenslotte:

$$\frac{1}{2}\sigma = \frac{\frac{d\Theta}{dt}}{n \cos\gamma}. \tag{15}$$

---

[1]) Afteleiden uit wat Tisserand geeft in Méc. Cél. IV, blz. 142—143. De notaties zijn anders.

H. Struve geeft in „Beobachtungen des Neptunstrabanten" [1]):

$$N = 185.^{0}15 + 0.^{0}148\ (t - 1890),$$
$$I = 119.^{0}35 - 0.^{0}165\ (t - 1890),$$

geldend ten opzichte van de bewegelike aequator, en afgeleid uit waarnemingen van 1848 tot 1892. Door David Gibb [2]) zijn bijeengebracht en bewerkt waarnemingen die van 1892 tot 1908 verricht zijn op Lick, Yerkes en Lowell Observatory, op Naval Observatory in Washington, en de fotografiese waarnemingen van Greenwich Observatory.

Ik heb uit dit nieuwe materiaal en dat van Struve getracht betere uitdrukkingen voor N en I te vinden, en daarbij ook met de termen van de 2de graad ten opzichte van de tijd rekening gehouden.

Struve's materiaal heb ik in vijf groepen verdeeld, en voor elke groep een gemiddelde opgemaakt met gewichten g′ (die alleen gelden binnen elke groep). Aan Otto von Struve's resultaten heb ik geringer gewicht gegeven op grond van wat H. Struve hieromtrent meedeelt. Aan het resultaat van A. Hall Jr. is geringer gewicht gegeven wegens de, in vergelijking met H. Struve's bepalingen, grote waarschijnlike fouten. Voor nadere bizonderheden zij naar Struve's publicatie verwezen. De tabel spreekt overigens voor zichzelf.

Het materiaal van Gibb is in drie grote groepen verdeeld, waarvan de gemiddelde epochen ongeveer vijf jaren verschillen. De eerste groep bevat de resultaten voor N en I tot en met de epoche 1898.0, de tweede die van 1898.8 tot en met 1903.1, de derde die van 1904.0 tot 1908.2. Verworpen zijn Schaeberle's resultaat van 1896.8, Aitken's resultaat van 1906.1, omdat deze biezonder sterk afweken. Overigens heb ik aan alle afzonderlike resultaten gelijk gewicht gegeven.

---

[1]) Mém. St. Pét. 7e Série, XLII, 1894, blz. 62.

[2]) D. Gibb, „Motion of Neptune's Satellite", Proc. Roy. Soc. Edinburgh, XXIX, 1909, blz. 517-536.

Waarnemer	Epoche	N	w.f.	I	w.f.	g'	Gemiddelden Epoche	N	I	g
Bond (Cambr. U.S.)	1848.3	178.°37	0.°86	125.°05	0.°45	2				
O. v Struve (Poulk.)	1848.6	182.39	1.00	126.24	0.48	1	1850.09	178.°65	125.°98	2
Lassell (Starfield)	1849.8	176.70	0.50	126.55	0.21	2				
Lassell (Malta)	1852.9	179.02	0.59	126.21	0 39	2				
O. v. Struve (Poulk.)	1863.6	181.33	0.77	124.22	0.32	1	1864.30	181.54	124.20	1
Lassell } (Malta) Marth }	1864.5	181.65	0.42	124.19	0.28	2				
Newcomb (Wash.)	1874.5	183.03	0.14	121.70	0.10	1				
Hall (Wash.)	1876.3	183.47	0.33	121.64	0.19	1	1875.77	183.10	121.46	2
Holden (Wash.)	1876.5	182.49	0.30	121.04	0.18	1				
Hall (Wash.)	1882.1	184.05	0.15	120.03	0.11	1	1882.95	184.36	120.08	2
Hall (Wash.)	1883.8	184.67	0.21	120.13	0.23	1				
H. Struve (Poulk.)	1887.6	184.48	0.15	119.38	0.13	2				
H. Struve (Poulk.)	1889.0	185.05	0.11	119.53	0.09	2				
H. Struve (Poulk.)	1890.6	185.51	0.12	119.26	0.10	2	1890.18	185.21	119.22	3
H. Struve (Poulk.)	1892.6	185.56	0.18	119.06	0.15	2				
A. Hall Jr. (Wash.)	1892.0	185.73	0.45	118.55	0.45	1				
Berekend door Gibb							1895.98	186.48	118.44	3
							1900.99	187.17	117.54	3
							1905.62	188.06	116.78	3

Met de methode der kleinste quadraten vind ik hieruit (de gewichten in de laatste kolom gebruikend) ten opzichte van de bewegelike aequator:

Lineaire oplossing:

$$N = \underset{5}{187^{\circ}.07} + \underset{24}{0.^{\circ}1659}\,(t - 1900),$$

$$I = \underset{7}{117.^{\circ}65} - \underset{35}{0.^{\circ}1660}\,(t - 1900);$$

Quadratiese oplossing:

$$N = \underset{6}{187.^{\circ}06} + \underset{50}{0.^{\circ}1625}\,(t - 1900) + \underset{11}{0.^{\circ}00008}\,(t - 1900)^2,$$

$$I = \underset{8}{117.^{\circ}68} - \underset{67}{0.^{\circ}1529}\,(t - 1900) + \underset{15}{0.^{\circ}000031}\,(t - 1900)^2.$$

Onder elk der berekende getallen is in eenheden der laatste decimaal de waarschijnlike fout geschreven.

De quadratiese termen zijn zeer onzeker. Voor N is $[g\delta^2]$ nagenoeg hetzelfde, voor I is $[g\delta^2]$ in de quadratiese oplossing $\frac{1}{7}$ van zijn bedrag geringer dan in de lineaire. Met formule (14) zou uit

$\frac{d^2I}{dt^2}$ volgen: $\frac{1}{2}\frac{d^2N}{dt^2} = +0.^0 0006$ ongeveer. Hieruit en uit het feit dat een grafiek van I en N naar de tijd niet het geringste vermoeden rechtvaardigt dat een quadratiese term merkbaar zou zijn, blijkt hoe prematuur het afleiden daarvan uit de waarnemingen is. Ook voor de resultaten van Dyson en Edney [1]), van Gibb [2]), en van Balanowsky [3]) kan, dunkt mij, het oordeel niet anders zijn. Balanowsky heeft met veel groter onzekerheid een waarde van $\frac{d^2I}{dt^2}$ gevonden die slechts weinig van de mijne verschilt. Ten opzichte van de vaste aequator van 1900 geldt:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_0 = +0.^0 1560, \quad \left(\frac{dI}{dt}\right)_0 = 0.1536, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d^2I}{dt^2}\right)_0 = +0.^0 00030.$$

Rekening houdend met $\frac{d^2I}{dt^2}$ vind ik:

$$\tfrac{1}{2}\sigma = 0.0000203,$$

en zonder de quadratiese term:

$$\tfrac{1}{2}\sigma = 0.0000319.$$

Struve geeft [4]) voor de dagelikse beweging van de satelliet ten opzichte van de knoop van zijn baan op de aardaequator van 1890.0 $61.^0 25749$. De correctie ter herleiding tot de sideriese beweging is $-0.^0 000192$, zodat men heeft:

$$n = 61.^0 25729.$$

Voor de halve grote as van de Neptunusbaan geeft Newcomb: [5])

$$\log \varrho = 1.47814314.$$

Het constante bedrag der storingen is hierin opgenomen. Met beide waarden van $\frac{1}{2}\sigma$ vind ik nu resp.:

$$\log \mu\Delta^3 = 7.9219473, \qquad \log \mu\Delta^3 = 7.9219525.$$

Met het eerste zijn de waarden van μ in Hoofdstuk V, § 22, berekend. Het verschil voor beide waarden van $\frac{1}{2}\sigma$ maakt overigens slechts twee eenheden in μ uit, ver binnen de waarschijnlike fout van μ, zoals blijken zal.

---

1) M.N. **65**, blz. 580 en 850.
2) Proc. Roy. Soc. Edinburg, XXIX, 1909, blz. 534, 536.
3) Bull. Poulkovo, IX, 1923, blz. 104, 105.
4) Beob. Nept. trab. Mém. St. Pét. 7e Série, XLII, 1894, blz. 61.
5) „Tables of the heliocentric motion of Neptune", Astr. Pap. VII, part 4, blz. 422.

HOOFDSTUK II

DE MASSABEPALING UIT STORINGEN

§ 9. *Overzicht der verschillende soorten van storing.*

Een tweede methode voor de bepaling van de massa van een hemellichaam is die waarbij men gebruik maakt van de relatief geringe afwijkingen, de storingen, die het door zijn aantrekkende werking veroorzaakt in de beweging van een tweede lichaam, welke beweging in hoofdzaak door een derde lichaam bepaald kan zijn. Deze methode kan, in tegenstelling tot de vorige, in beginsel op alle lichamen worden toegepast.

Voor het onderzoek naar de massa van een planeet kan het tweede lichaam een andere planeet, een komeet, of elk ander lichaam zijn waarop de planeet een duidelik merkbare invloed heeft. Het derde lichaam is dan de zon. Voor Mercurius en Venus is dit de enige weg die er te volgen is. In 't geval van onze maan, wanneer men zijn massa bepaalt uit het bedrag van de nutatie der aardas, is het tweede lichaam de draaiende aarde zelf, en is er van een derde *lichaam* eigenlik geen sprake; en het is het water der oceanen indien men de maansmassa uit een vergelijking van de hoogten van maans- en zons-tij zou willen bepalen, 't geen in beginsel niet onmogelijk is. [1]) In dit geval is de aarde als derde lichaam te beschouwen.

De baan van een planeet, hoewel in finesses hoogst ingewikkeld van vorm, wijkt toch in hoofdzaak niet veel van een ellips af, zodat men de baan in eerste instantie als ellipties kan beschouwen en de geringe afwijkingen als de z.g.n. storingen op de beweging gesuperponeerd denken kan.

---

[1]) Inderdaad is onze eerste, de waarheid al zeer nabij komende, kennis van de massa van onze maan in 1738 door Daniel Bernoulli afgeleid uit de bewegingen van het zeewater!

Dit is in overeenstemming daarmee dat de baan volgens Newton's wet werkelik een ellips wezen zou, waren zon en aarde bolvormig en in de ruimte alleen.

In de analytiese uitdrukking der storingsfunctie komen termen voor die van de beweging der planeten in hun baan afhangen, waarbij de tijd verbonden met de dagelikse beweging optreedt onder de sinus- en cosinustekens, waarvan de coëfficienten functies van de elementen der banen en van de storende massa's zijn, langzaam veranderende grootheden die voor een eerste benadering als constant kunnen worden opgevat. Met behulp van deze termen kan men dat bedrag der totale storingen berekenen dat in hoofdzaak afhankelik is van de ogenblikkelike configuratie der planeten, de „periodieke storingen". Men verdeelt ze, enigszins willekeurig, in twee groepen: die van korte periode en die van lange periode. Twee planeten veroorzaken in elkaars beweging een storing van lange periode, indien de verhouding hunner dagelikse bewegingen bij benadering door kleine gehele getallen kan worden uitgedrukt. Stellen i en j deze getallen, en n_1 en n_2 de dagelikse bewegingen voor, dan is $in_2 - jn_1$, een kleine grootheid, en hiermee is de periode der storing in hoofdzaak omgekeerd evenredig. Het bekendst is de door Halley opgemerkte, door Laplace verklaarde grote storing in de bewegingen van Jupiter en Saturnus. Vijf omlopen van Jupiter zijn bijna evenlang als twee van Saturnus. De periode der storing die in de heliocentriese lengte van Jupiter het grote bedrag van ongeveer 20′, voor Saturnus zelfs bijna 50′ bedragen kan, is ongeveer 930 jaren. Sterker nog is de storing die optreedt bij Uranus en Neptunus, n.l. 52′ en 36′ in de lengte, in een periode van 4220 jaren. Voor de Aarde en Venus heeft een dergelijke storing een periode van 240 jaren. Voor Venus bereikt deze echter slechts 2.″7.

De storingen van lange periode kunnen in zeker opzicht als een tussenvorm tussen de storingen van korte periode en de seculaire storingen — waarover nader — worden opgevat. Is n.l. de periode zeer lang, dan kan men volstaan met ze niet door middel van periodieke functies, maar, voor honderd of meer jaren, naar machten van de tijd uit te drukken en ze te verenigen met de seculaire storingen die op dezelfde wijze worden voorgesteld. Newcomb heeft dit gedaan in zijn tafels van Uranus en Neptunus.

In de storingsfunctie komen ook termen voor die, onafhankelik van de plaats der planeten in hun banen, alleen met de baanelementen verband houden. Zij leveren de voorstelling van storingen die alleen van de baanelementen en de massa's afhangen en slechts

langzaam en vrij regelmatig veranderen. Men kan ze in rekening brengen door de planeet te beschouwen als hoofdzakelik bewegend in een ellips waarvan stand en vorm zich langzaam wijzigen. Zij geven aanleiding tot de seculaire variaties van de elementen der banen. De bedoelde termen der storingsfunctie zijn echter periodiek, zodat de z.g.n. seculaire storingen waarvan hier sprake is, eveneens periodiek zijn, hoewel in veel minder absolute zin dan de z.g.n. periodieke storingen. Hun perioden zijn namelik niet regelmatig en zo lang — tien- en honderd-duizenden van jaren — dat zij gedurende het korte tijdvak waarover zich de waarnemingen uitstrekken van hun fluctuerend karakter niets verraden, en beschouwd kunnen worden als regelmatig, of slechts weinig versneld of vertraagd met de tijd voort te gaan. De excentriciteiten en baanhellingen kunnen alle waarden krijgen tussen min of meer enge grenzen, zonder dat er sprake van een constante amplitudo is, terwijl de lengten der perihelia en der knopen meestal gestadig en onbeperkt aangroeien, resp. afnemen.

§ 10. *Ongelijkwaardigheid der storingen voor de massabepaling.*

Voor de bepaling der een planeet storende massa's gaat men als volgt te werk. Met behulp van benaderde waarden der elementen van de baan, en der massa's, worden de plaatsen die de planeet zou moeten innemen berekend, waarbij alle storingen die enig merkbaar effect hebben kunnen in rekening gebracht zijn. Elk verschil in declinatie of in rechte klimming tussen berekende en waargenomen plaats levert een vergelijking waarin de correcties van de aangenomen elementen en van de massa's de onbekenden zijn. Seculaire en periodieke storingen dragen nu niet in gelijke mate tot de nauwkeurigheid der resultaten bij. Tegen het einde der 19de eeuw is men wat dit betreft tot ander inzicht gekomen. Young in Hoofdstuk XVII van zijn „General Astronomy", waarin hij spreekt over de bepaling van de zonsparallaxis — waarvan de kennis ten nauwste met die van de massa der zon samenhangt [1]) — zegt naar aanleiding van de massa-bepaling uit *seculaire storingen*: „But the great beauty of the method lies in this, that as time goes on, and the effect of the earth upon the revolution of the nodes and apsides of the neighboring orbits *accumulates*, the *determination of the earth's mass in terms of the sun's becomes continually and cumulatively more precise*. Even at present the method ranks high for accuracy, — so high that Leverrier, who

[1]) Zie Hoofdstuk III.

first developed it, would have nothing to do with the transit of Venus observations in 1874, declaring that all such old-fashioned ways of getting at the sun's parallax were relatively of no value. The method is probably the „*method of the future*", and in time will supersede all the others, —" ... Wij kunnen geloven dat dit ook Leverrier's opvatting was. Maar Young voegt er aan toe: — „Unless indeed it should appear that bodies at present unkwown are interfering with the movements of our neighboring planets, or unless it should turn out that the law of gravitation is not quite so simple as it is now supposed to be", en hiermee inderdaad legt bij de vinger op de zwakke plek. Leverrier zelf zou 't eerst de ontdekking doen die tot het inzicht leiden moest dat de seculaire storingen bij de tegenwoordige stand der wetenschap ongeschikt voor de massabepaling zijn. Toen Young dit schreef was waarschijnlik het exces in de beweging van Mercurius, door Leverrier gevonden, nog niet zo zeer een vaststaand feit als het nu sinds Newcomb's onderzoekingen is, noch ook verkeerde men zo in het onzekere omtrent het juiste bedrag der seculaire variaties der planetenbanen, omtrent de massa's der binnenplaneten, met name die der aarde, en wat daarmee samenhangt: de afstand van de aarde tot de zon [1]), noch was zelfs twijfel gerezen aan de grondslag van alles: de wet van Newton! Niet alleen bij de seculaire variatie van het perihelium van Mercurius laat de wetenschap ons in de steek. Minder, maar onmiskenbaar, is dit ook het geval met de seculaire beweging van de knoop der Venusbaan, minder nog met die van het perihelium van Mars. Of ook nog de baan van Mercurius langzamer van vorm verandert dan de theorie voorschrijft is onzeker [2]). Newcomb betoogt dat geen toelaatbaar stel massa's gevonden worden kan, zo dat alle afwijkingen

---

1) Zie Hoofdstuk III, en Hoofdstuk IV, § 17.

2) Het bekende overschot in de seculaire versnelling en de geringe fluctuaties in de maansbeweging, als ook de zeer geringe fluctuaties in de beweging van Mercurius, Venus, de Aarde en Mars en hun merkwaardige correlatie, behoeven niet langer Newton's wet ten laste te worden gelegd. Naar theoretiese onderzoekingen, vooral van Jeffreys en van Taylor, vinden zij hoogstwaarschijnlik hun oorzaak in de vertraging der aardrotatie tengevolge van de wrijving der getijden in scholle zeeën. Uit een recent en interessant onderzoek van Spencer Jones (M.N. 87, 1926) blijkt, dat al wordt de aard-rotatie over 't geheel trager, toch ook tijdelike versnellingen voorkomen. Een zeer recent onderzoek van De Sitter heeft dezelfde fluctuaties in de beweging der grote Jupitersatellieten aan den dag gebracht. De grote 260-jarige en de 60-jarige schommeling in de maansbeweging schijnen nog niet verklaard te zijn.

verdwijnen [1]). Het is zeer merkwaardig, dat afgezien van de verschillen in de beweging der perihelia, de rest der afwijkingen, met name de te snelle beweging van de Venus-knoop, binnen toelaatbare grenzen komen, indien men aan de aarde een massa toekent die ongeveer $\frac{1}{100}$ kleiner is dan wat daarvoor uit *alle bepalingen* der zonsparallaxis volgt.

Bij de lectuur van Newcomb's interessant en merkwaardig boek: „The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy", kan men niet ontkomen aan de indruk van twijfel en onzekerheid. En Newcomb zelf? Als hij, zijn pijlen verschietend, de laatste twee der vele mogelike oorzaken die hij te berde brengen kan verwerpt, en ten slotte het de moeite waard acht op te merken: „It is a curious coincidence that if we had neglected to add the mass of the Moon to that of the Earth, in computing the secular variations, the discrepancy would not have existed", moeten wij dan daarin zien hoe deze buitengewone man, teneinde raad, zelfs hier twijfel aan de juistheid der theorie in zich opkomen liet?

Het is na dit alles begrijpelik dat Newcomb op blz. 11 van zijn boek zegt: „*It is therefore necessary, in the absence of a known cause of such deviations, to derive the masses of the planets independently of the secular variations*", en daar Mercurius en Venus geen satellieten hebben: „*Here no resource is left us but to determine them from the periodic inequalities*". Korter en sterker nog spreekt in 1917 F. E. Ross dit uit: „*Secular perturbations, while cumulative in their action, are hopeless*" [2]). Ziedaar! wat 50 jaar geleden voor Leverrier en Young is: „The great beauty of the method", nu enig en onoverkomelik nadeel. Met onze tegenwoordige kennis en op grond van Newton's mechanica zijn de seculaire variaties der banen niet geheel te verklaren. Het verschil neemt toe met de tijd. Dan kan men de storende massa's er ook niet uit bepalen.

De periodieke storingen blijven over, en van deze vervallen die van zeer lange periode tegelijk met de seculaire storingen wat hun

---

[1]) Dat Einstein's gravitatietheorie in staat zou zijn *alle* verschillen te doen verdwijnen mag men uit de „zeer nauwkeurige" voorstelling van het gevonden overschot in de beweging van Mercurius niet besluiten, noch dat zij de *werkelike* beweging van het perihelium inderdaad volledig weergeeft. En dit moet men toch verlangen! Inplaats van Einstein's perihelium-beweging te superponeren op resultaten van Newton's theorie, zou men de gehele theorie der planeten, althans die der binnenplaneten, op Einstein's basis moeten zetten. Men kon voor verrassingen komen te staan, zoals dat ook bij Newton's wet het geval was!

[2]) Astr. Pap. IX, part 2, 1917, blz. 256.

bruikbaarheid betreft. Wel kunnen zij voor sommige planeten een groot bedrag bereiken, maar zijn hun perioden zo lang dat men ze niet in de korte tijd waarover waarnemingen beschikbaar zijn — d.i. voor de oude planeten ongeveer 175 jaren, voor Uranus en Neptunus resp. 145 en 80 jaren — aan de periode hunner fluctuatie herkent, dan kunnen ze niet als periodieke delen van de rest der beweging worden afgezonderd. Het aandeel dat zij in de beweging hebben is te weinig veranderlik. Zij zullen als 't ware samensmelten met de seculaire storingen. Voor de massabepaling zou men waarnemingen over gehele perioden tot zijn beschikking moeten hebben.

De storingen van korte periode resten ons nog. Van de beide maanloze planeten Mercurius en Venus is het voornamelik Venus waarvoor zij te hulp genomen zijn. Immers de grootste der periodieke storingen die Mercurius uitoefent op Venus, die hem het naast is, bedraagt in de heliocentriese lengte in maximo nog niet 0.″4, en alle te samen nauweliks het dubbel. De periodieke storingen van Venus kunnen in de heliocentriese lengte van Mercurius en van de Aarde meer dan 10″ en in die van Mars meer dan 7″ bedragen. In de geocentriese beweging gaan deze bedragen voor Mercurius verkleind, voor Mars echter sterk vergroot over. Naarmate het tijdvak der waarnemingen en hun aantal groeit, zal men deze bedragen door hun periodiek karakter zich steeds nauwkeuriger in de beweging dier planeten zien aftekenen, zonder dat systematiese fouten der waarneming het resultaat voor de massa van Venus zullen beïnvloeden. Wat Newcomb nog over dit laatste punt zegt komt hierop neer: Indien zekere systematiese fout in de loop der waarnemingen een periodiek karakter vertoont, bepaald door de onderlinge stand van aarde, gestoorde en storende planeet, en de periode der fout is nagenoeg dezelfde als die ener periodieke storing in de beweging der gestoorde planeet, dan zal men uit het bedrag der storing de massa van de storende planeet niet met zekerheid kunnen bepalen. Zijn deze perioden echter aanmerkelik verschillend, dan zal het bedrag der storing, en daarmee de massa, onafhankelik van de systematiese fout gevonden kunnen worden.

Hieruit volgt onmiddellik dat voor de verhouding der massa's van aarde en zon geen betrouwbaar resultaat gevonden worden kan uit de storingen die de aarde veroorzaakt in de beweging van de waargenomen planeet, zodra er systematiese fouten te vrezen vallen van dezelfde periode als de beweging van de planeet ten opzichte van de aarde vertoont. „For example — zegt Newcomb — in

the case of observations of Venus, we may suppose that all observations made when Venus is at a certain point of its relative orbit, near inferior conjunction, say one month before inferior conjunction, are affected with a certain error common to all observations made at that point of the orbit. Since perturbations produced by the third planet will in the long run have all values, positive and negative, for these several observations, the systematic error in question will not affect the ultimate value of its mass. But the perturbations of Venus produced by the Earth, as well as those of the Earth produced by Venus, will not have all values in such a case, but only special ones dependent on the relative position. Hence determinations of these masses might be affected by errors of the kind in question. We conclude, therefore, that the mass of the Earth can not be satisfactorily determined by the periodic perturbations which it produces in the motion of any planet, nor that of Venus by observations on Venus through its periodic perturbations of the Earth." Inderdaad zijn er omstreeks de benedenconjuctie van Mercurius en Venus systematiese waarnemingsfouten, waarop Newcomb doelt. Staan Mercurius en Venus iets westelik van de zon, dan wordt de meridiaansdoorgang van de oostelike rand waargenomen; oostelik van de zon, dan is het omgekeerd. Er is een verschil in deze waarnemingen dat enkele boogseconden bedragen kan. Onvoldoende kennis van de diameters kan het verschil niet verklaren. Ook voor de overige planeten is de schijf en zijn vervorming door phase de waarneming niet gunstig. Aan een goede plaatsbepaling kan soms de kleur van de planeet in de weg staan. Dit geldt voor Mars waar tengevolge van de rossige kleur abnormale onvoldoend bekende refracties optreden, die bijv. resultaten voor de zonsparallaxis uit waarnemingen van Mars tijdens gunstige opposities onbruikbaar maken.

Voor de kleine planeten die zich als fijne lichtpuntjes voordoen, vervallen deze bezwaren ten dele. Een nadeel is dat men zich, gedwongen door de lichtzwakte van het object, maar helaas ook wel *ongedwongen*, tot waarnemingen in de nabijheid der opposities beperkt. Ook bij Mars ontspringen hieruit systematiese fouten [1]).

De waarneming van kometen, kan een, hoewel niet voor alle planeten even belangrijke, bijdrage tot de kennis der massa's leveren. De afwijkingen die de planeten in de banen der

---

[1]) F. E. Ross, „New elements of Mars", Astr. Pap. IX, part 2, blz. 268, 269.

kometen veroorzaken zijn dikwijls zeer groot. Voor Mercurius is de massabepaling uit storingen van kometen de methode waarvan het meeste heil te verwachten is, en zeker kunnen ook de massa's van Venus, de Aarde, Mars en Jupiter langs deze weg nauwkeurig worden gevonden. Grote bezwaren staan echter ook hier de toepassing in de weg. Het nevelig voorkomen van een komeet, waarvan de kern, indien al aanwezig, toch niet een zo scherp punt als een ster is, maakt juiste instelling bij de waarneming onmogelik. Hierdoor alleen bezit de waarneming van een komeet reeds een veel grotere waarschijnlike fout, dan die van een planeet of ster. Newcomb heeft echter, voor zover mij bekend het eerst [1]), gewezen op iets veel ernstigers. Wat is het punt waarop men instelt? Het „lichtcentrum". Dat dit tegelijk het zwaartepunt wezen zou, is in 't geheel niet zeker. Het is zelfs zeer onwaarschijnlik. De helderheid van een komeet, en zijn gehele ontwikkeling, hangt af van, en neemt toe met, de nadering tot de zon. De ontwikkeling van kern, kop en staart is een zo onsymmetries proces ten opzichte van een richting loodrecht op die naar de zon, dat men met zekerheid geen enkel punt als gravitatie-centrum kan aanzien. Bovendien maken de dikwijls zeer snelle en onregelmatige bewegingen in de loop van zelfs één dag het ten enenmale onwaarschijnlik dat het geschatte lichtcentrum van dag tot dag hetzelfde zou zijn, laat staan dan van verschijning tot verschijning! Bij verschillende verschijningen kan een komeet geheel verschillend van uiterlik zijn, ja: kan zich zelfs splitsen in twee en meer delen! Newcomb schrijft hieraan toe, dat kometen zich soms zo slecht aan hun ephemeriden houden.

Hierbij komt nog dat een geheel bevredigende verklaring van de versnelling der beweging van Encke's komeet nog niet gevonden is. Wel geeft Backlund's onderzoek steun aan de hypothese dat in de ontmoeting met meteoren de oorzaak gezocht moet worden, maar al mocht dit zo zijn, zal men dan ooit de invloed daarvan met voldoende nauwkeurigheid in rekening kunnen brengen? Gelukkig voor de bepaling van massa's vertonen niet veel kometen iets dergelijks [2]).

Voor de bepaling van de massa van Mercurius in de eerste plaats, maar eventueel ook voor die van de massa van Venus, van

---

1) „On the mass of Jupiter and the orbit of Polyhymnia", Astr. Pap. V, part 5, pag. 395. Echter laat Möller zich enigszins in dezelfde geest uit. Zie V.J.S. A.G. 7, 1872, blz. 94.

2) Het is niet zeker of ook de komeet van Winnecke iets abnormaals vertoont, een vertraging misschien.

de Aarde en van Mars zal men waarnemingen van kometen dankbaar aanvaarden. Deze massa's zijn n.l. niet zo nauwkeurig bekend dat die waarnemingen niet tot verbetering zouden kunnen bijdragen, hetgeen blijkt uit de goede resultaten die langs deze weg voor de massa van Jupiter gevonden zijn. Voor Jupiter echter geven andere methoden betrouwbaarder resultaten, waarom Newcomb de massabepaling uit storingen van kometen voor deze planeet verwerpt. Geheel consequent is hij echter niet; wel is dat De Sitter.

HOOFDSTUK III

DE VERHOUDING DER MASSA'S VAN ZON EN AARDE

§ 11. *Bepaling uit de beweging van de maan.*

Daar de aarde een satelliet heeft kan de verhouding van de massa's van zon en aarde gevonden worden uit de beweging van die satelliet, de Maan.

Stel:

a de gemiddelde afstand van de maan verbonden aan
n de sideriese beweging van de maan, volgens Kepler's derde wet,
m de massa van de aarde,
μ de massa van de maan uitgedrukt in m als eenheid,
k^2 de gravitatie-constante,
Π_C de horizontale aequatoriale maansparallaxis,
A de straal van de aequator der aarde,
R de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon,
N de sideriese omloopstijd van de aarde,
$m_\odot$ de massa van de zon,
$\Pi_\odot$ de horizontale aequatoriale zonsparallaxis,
M de verhouding van de massa van de zon tot die van het aarde-maanstelsel.

Volgens Kepler's derde wet is nu:

$$a^3 n^2 = k^2 m (1 + \mu). \tag{16}$$

Het verband tusschen a en Π_C is [1]):

$$0.999093142\ a \sin \Pi_C = A, \text{ of}$$

$$a \sin \Pi_C = 1.00090768\ A. \tag{17}$$

---

1) Volgens E. W. Brown, Theory of the motion of the moon, part 1, blz. 89 in M. R. A. S. LIII; of part 4, blz. 109 in M. R. A. S. LVII

Voor de beweging der aarde geldt:

$$R^3 N^2 = k^2 [m_\odot + m(1+\mu)]$$

en

$$R \sin \Pi_\odot = A.$$

Uit deze vier vergelijkingen volgt:

$$M + 1 = \left(\frac{N}{n}\right)^2 \left(\frac{\sin \Pi_C}{\sin \Pi_\odot}\right)^3 (1.00090768)^{-3}$$

Volgens Newcomb is: $N = 1295977.''41$ per Jul. jaar.
volgens Brown: $n = 17325593.''91$ per Jul. jaar.

Hiermee vind ik:

$$(M+1)\,\Pi_\odot{}^3 = \Pi_C{}^3 \text{ num. log } (7.7465768 - 10).$$

Voor de parallaxis van de maan vind ik uit een meedeling door Dyson [1]) van resultaten uit meridiaan-waarnemingen van de krater Mösting A, verricht in Greenwich en aan de Kaap de Goede Hoop, van 1906 tot 1910, met de afplatting der aarde $\varepsilon = 1 : 296.83$ [2]):

$$\Pi_C = 3422.''58,$$

waarmee volgt:

$$\log (M+1)\,\Pi_\odot{}^3 = 8.3496376.$$

Neemt men voor de zonsparallaxis hetgeen A. R. Hinks uit de waarnemingen van Eros tijdens de oppositie van 1901 afleidde:

$$\Pi_\odot = 8.''806 \pm 0.''004 \quad \text{w. f.},$$

dan volgt er voor M:

$$M = 327568.$$

Deze waarde van M zal ik verder laten rusten. Men volgt tegenwoordig een andere weg, en leidt zowel $(M+1)\,\Pi_\odot{}^3$ als Π_C uit de versnelling van de zwaartekracht op aarde af.

§ 12. *Bepaling uit de versnelling van de zwaartekracht.*

Men heeft voor de afleiding van het verband tussen de massa van de zon en de zonsparallaxis, en voor de afleiding van de maansparallaxis uit de versnelling van de zwaartekracht, steeds ervan gebruik gemaakt dat de versnelling van de zwaartekracht voor de breedte $\varphi_* = \text{arc sin } \sqrt{\frac{1}{3}}$, vermeerderd met de centrifugale

---

[1]) M. N. **71**, blz. 526-540, n.l. van een correctie van $+0.''30$ aan Hansen's maansparallaxis, waarvoor ik volgens H. Battermann (Beob. Ergeb. d. Kön. Sternw. zu Berlin, **13**, 1910, blz. 11) heb aangenomen $3422.''28$.

[2]) Zie de volgende paragraaf.

versnelling der aardrotatie voor dezelfde breedte, bij benadering een maatstaf voor de aantrekking der aarde op grote afstanden is, en deze waarde der gravitatie verbonden met de straal der aarde eveneens voor diezelfde breedte. Grootheden van de 2de orde ten opzichte van de afplatting worden aldus verwaarloosd. Deze grootheden kunnen zeer eenvoudig in rekening gebracht worden door niet de zwaartekracht voor genoemde breedte, maar het product der gravitatie-constante en de gemiddelde dichtheid der aarde als element in de berekening aan te nemen. Hoewel beide grootheden voor c.g.s.-eenheden afzonderlik zeer moeilik te bepalen zijn, kan hun product met grote nauwkeurigheid uit de versnelling der zwaartekracht worden gevonden.

Stel:

k^2 de gravitatie-constante,

M de verhouding van de massa van de zon tot die van het aarde-maan-stelsel,

μ de verhouding van de massa van de maan tot die van de aarde,

δ de verhouding van de massa van de aardatmosfeer tot die van de aarde zonder atmosfeer,

m' de massa van de aarde zonder atmosfeer,

A de straal van de aequator der aarde,

r de afstand van een punt van het aardoppervlak tot het middelpunt der aarde,

$\varepsilon = 1:E$ de afplatting der aarde,

D_0 de gemiddelde dichtheid der aarde,

g de versnelling van de zwaartekracht in een punt van het aardoppervlak,

g_0 de versnelling der zwaartekracht aan de aequator,

$c = \frac{\omega^2 A}{g_0}$, waarin ω de hoeksnelheid der aardrotatie is,

φ de geografiese breedte,

φ' de geocentriese breedte,

τ het volume van de aarde,

f een grootheid van de tweede orde ten opzichte van de afplatting, die men zich daardoor gedefinieerd denken kan, dat $\frac{1}{4}$Af de grootste verheffing is van het oppervlak der niveausferoïde [1]) boven dat der omwentelingsellipsoïde met dezelfde aequatorstraal en met dezelfde afplatting,

---

[1]) De vorm der aarde indien deze zich als vloeibare massa volkomen had aangepast aan de gezamenlike werking van gravitatie en rotatie. Het oppervlak zou dan een aequipotentiaal-oppervlak voor de zwaartekracht zijn.

R de halve grote as van de aardbaan,
T de sideriese omloopstijd der aarde om de zon,
$\Pi_\odot$ de gemiddelde horizontale aequatoriale zonsparallaxis.

Voor de niveau-sferoïde gelden de volgende, aan G. H. Darwin ontleende formules [1]):

$$g = g_0 (1 + \beta \sin^2\varphi - \tfrac{1}{4}\beta_4 \sin^2 2\varphi) \tag{19}$$

$$\beta = \tfrac{5}{2} c - \varepsilon - \tfrac{17}{14} c\,\varepsilon - \tfrac{2}{7} f \tag{20}$$

$$\beta_4 = \tfrac{5}{2} c\,\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - 3f \tag{21}$$

$$g_0 = \frac{k^2 m'}{A^2}(1 + \varepsilon - \tfrac{3}{2} c + \varepsilon^2 - \tfrac{27}{14} c\,\varepsilon + \tfrac{9}{4} c^2 - \tfrac{4}{7} f) \tag{22}$$

$$r = A\left[1 - (\varepsilon + \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 - f)\sin^2\varphi' + (\tfrac{3}{2}\varepsilon^2 - f)\sin^4\varphi'\right] . \tag{23}$$

Uit (20) vind ik:

$$\varepsilon = \tfrac{5}{2} c - \beta - \tfrac{85}{28} c^2 + \tfrac{17}{14}\beta c - \tfrac{2}{7} f . \tag{24}$$

Voor de massa m′ heeft men:

$$m' = \tau D_0 , \tag{25}$$

en voor τ heb ik afgeleid uit (23):

$$\tau = \tfrac{4}{3}\pi A^3 (1 - \varepsilon + \tfrac{2}{5} f) = \tfrac{4}{3}\pi A^3 (1 - \varepsilon)(1 + \tfrac{2}{5} f) . \tag{26}$$

Met (25) en (26) vind ik uit (23):

$$k^2 D_0 = \frac{3 g_0}{4\pi A}(1 + \tfrac{3}{2} c + \tfrac{3}{7} c\,\varepsilon + \tfrac{6}{35} f) . \tag{27}$$

Woodward heeft op interessante wijze uit de vergelijking van Poisson afgeleid [2]):

$$k^2 D_0 = \frac{1}{4\pi\tau}\iint g\, dS + \frac{\omega^2}{2\pi} . \tag{28}$$

---

1) „The theory of the earth carried to the second order of small quantities." Scientific Papers III, blz. 78-118; hetzelfde: M. N. **60**, 1900, blz. 82; ten dele ook bij Helmert: Die math. u. phys. Theorieen der höheren Geodäsie, II, 1884, blz. 72.
De notaties zijn niet geheel dezelfde als die der genoemde publicaties.

2) A. J. **18**, 1898, blz. 121. Zie ook: Webster, „Dynamics of particles, etc.", 1912, blz. 361, 362.

Deze formule toepassend, door integratie over het oppervlak, waarvan (23) de vergelijking der meridiaan-doorsnede is, vind ik eveneens formule (27) [1]).

Kepler's derde wet luidt:

$$k^2 (M+1)(1+\mu)(1+\delta)\, m' = \frac{4\,\pi^2\, R^3}{T^2}$$

Substitueert men hierin:

$$m' = \tfrac{4}{3}\pi A^3 (1-\varepsilon)(1+\tfrac{2}{5} f)\, D_0 \text{ en } R^3 = A^3 \operatorname{cosec}^3 \Pi_\odot \ ,$$

dan vindt men voor het verband tussen de massa van de zon en de zonparallaxis:

$$(M+1)\Pi_\odot{}^3 = \frac{3\pi \operatorname{cosec}^3 1''}{k^2 D_0 (1+\mu)(1+\delta)(1-\varepsilon)(1+\frac{2}{5} f) T^2} \qquad (29)$$

Voor de berekening van $k^2 D_0$ heb ik gebruik gemaakt van de onderzoekingen van Bowie en van Helmert. Met B 1912 heb ik aangegeven Bowie's resultaat van 1912 [2]), afgeleid uit bepalingen der zwaartekracht in de Verenigde Staten; met B 1917 dat van 1917 [3]), afgeleid uit 348 bepalingen, zowel in de Verenigde Staten als in andere landen. Bij beide is isostatiese reductie toegepast. Helmert's resultaten [4]) kwamen zonder isostatiese reductie tot stand. Met $H_1$1915 geef ik Helmert's resultaat aan uit een zeer groot materiaal over de gehele aarde, waarbij aan zwaartekrachts-

---

1) Woodward zelf heeft formule (28) op de omwentelingsellipsoïde toegepast en vindt een formule waarvan de volgende een uitbreiding is:

$$k^2 D_0 = \frac{3 g_0}{4\,\pi\, A} \frac{s_1 + \beta_2\, s_2 + \beta_4\, s_3}{1-\varepsilon} + \frac{\omega^2}{2\pi} \ ,$$

waarin $\beta_2 = \beta - \beta_4$ is, en s_1, s_2, s_3, functies zijn van de excentriciteit der meridiaan-ellips:

$$s_n = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2n-3)\, e^{2p}}{[2n+(2p-1)]\,[2n+(2p-3)]} \ .$$

Deze formule is nagenoeg even nauwkeurig voor de berekening van $k^2 D_0$, maar veel minder eenvoudig.

2) Hayford and Bowie, „The Effect of Topography and Isostatic Compensation upon the Intensity of Gravity", 2nd paper, U.S. Coast und Geodetic Survey, Spec. publ. **12**, Wash. 1912, blz. 25.

3) W. Bowie, „Investigations of Gravity and Isostasy", U.S. Coast and Geodetic Survey, Spec. publ. **40**, Wash. 1917, blz. 127.

4) F. R. Helmert, „Neue Formeln für den Verlauf der Schwerkraft im Meeresniveau beim Festlande", Sitz. ber. Berlin, 1915, blz. 676.

bepalingen aan kuststations ten opzichte van die midden in het land, gewicht $\frac{1}{2}$ is gegeven, en waarbij een term, afhankelik van de geografiese lengte, in rekening is gebracht; met $H_2 1915$ hetgeen uit hetzelfde materiaal volgt zonder lengte-term in de berekening; met $H_3 1915$ het resultaat met lengte-term uit bepalingen aan stations meer dan 100 k.m. van bergen of steile kusten verwijderd en minder dan 1500 m. boven het zeeoppervlak, waarvoor de isostatiese correcties slechts gering zouden wezen; met $H_4 1915$ het resultaat uit hetzelfde materiaal zonder lengte-term. Uit elk dezer zes formules voor de zwaartekracht heb ik de afplatting der aarde berekend volgens (24). Tenslotte heb ik, op voorbeeld van De Sitter [1]), ook uit de fundamentele absolute bepaling der zwaartekracht in Potsdam [2]):

$$g = 981.274 \pm 0.002 \text{ w.f. } {}^{cm}/_{sec^2} ,$$
$$\varphi = 52^0\ 22'.86 ,$$

een formule voor de zwaartekracht afgeleid met behulp der formules (19), (20), (21), en aangeduid met K.F.-S, gebruik makend van de afplatting der aarde bepaald volgens de methode van De Sitter [3]):

$$\varepsilon = 1 : 296{,}83 \pm 0.136 \text{ w.f.}$$

De Sitter's methode, waarbij de afplatting uit de constante der praecessie wordt afgeleid, is ongetwijfeld nauwkeuriger dan enige andere. De waarschijnlike fout van ε komt bijna geheel op rekening van die der maansmassa.

De straal van de aequator heb ik aangenomen volgens Hayford [4]), de waarschijnlike fout volgens Helmert [5]):

$$A = 637838800 \pm 3500 \text{ w.f. c.m.}$$

---

1) Versl. K.A.W. XXIII, 1915, blz. 1344.

2) Dr. F. Kühnen und Ph. Furtwängler, „Bestimmung der absoluten Grösse der Schwerkraft zu Potsdam mit Reversionspendeln", Veröff. d. Kön. Preuss. Geod. Inst., Neue Folge 27, Berlin, 1906, blz. 380.

3) „On the flattening and constitution of the earth", B.A.N. 2, 1924; of Versl. K.A.W. XXXIII, blz. 169. Voor de berekening van ε heb ik de maansmassa volgens Hinks gebruikt: $\mu = 1 : 81.53 \pm 0.07$ w.f. (w.f. volgens de Sitter, Hinks gaf $\pm$ 0.047). De nieuwste en misschien beste bepaling van ε uit geodetiese metingen is van J. F. Hayford: $\varepsilon = 1 : 296.96 \pm 0.53$ w.f. Zie noot 4). De w.f. is volgens Helmert 0.8, zie noot 5).

4) „Supplementary Investigation in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy", Wash. 1910, blz. 54.

5) „Geoid und Erdellipsoid", Zeitschr. d. Ges. f. Erdkunde, 1913, blz. 34; of Sitz ber. Berlin, 1911, blz. 19. Hayford zelf gaf $\pm$ 1800 c.m. w.f.

Darwin heeft, in de onderstelling dat de aarde gebouwd is in overeenstemming met de dichtheidsformule van Roche [1]), voor de grootheid f gevonden [2]):

$$f = -0.00000205.$$

De waarde van β_4 die ik hiermee vind, stemt uitstekend overeen met wat Wiechert daarvoor geeft [3]), in de onderstelling dat de aarde bestaat uit een zware kern van constante dichtheid, en een schil van geringere, eveneens constante dichtheid; en met wat later door Klussmann [4]) werd berekend volgens een hypothese die meer nog met de seismologiese gegevens [5]) rekening houdt, n.l. dat er buiten de kern van grote dichtheid twee schalen van geringere dichtheid zijn.

De overeenstemming der waarden van β_4 doet zien dat deze grootheid, en dus ook f, niet sterk varieert voor verschillende aannemelik lijkende hypothesen over het inwendige der aarde en over de dichtheid van de buitenste schil (3,2 à 3.4 bij Wiechert en Klussmann) De Sitter geeft [6]), voor een dichtheid 3.32 aan het isostaties oppervlak, en volgens Wiechert's theorie, de volgende grenzen voor f: $0.00000188 < f < 0.00000208$. De hypothese van Roche zou echter onhoudbaar zijn. Op grond van dit alles heb ik de waarschijnlike fout van Darwin's f aangeslagen op vijftien eenheden der laatste decimaal.

De omwentelingstijd der aarde, nodig voor de berekening van c, is:

$$t = 86164.^s100.$$

In de volgende tabel zijn de verschillende waarden van ε en k^2D_0, berekend volgens (24) en (27), bijeengezet.

---

1) Tisserand, Méc. Cél. II, blz. 237.
2) Scientific Papers, III, blz. 102.
3) „Ueber die Massenverteilung im Innern der Erde", Nachr. v. d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl. 1897, blz. 231.
4) „Ueber das Innere der Erde", Diss. Göttingen, 1915, blz. 36.
5) Geiger und Gutenberg, „Die Konstitution des Erdinnern erschlossen aus der Intensität longitudinaler und transversaler Erdbebenwellen", Nachr. v. d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl. 1912, blz. 622.
6 B.A.N. **2**, 1924, blz. 108.

	g_0 cm/sec²	w.f. in 0,001	β	w.f. in 10^{-6}	$\frac{1}{4}\beta_4$ in 10^{-6}	E = 1 : ε	w.f.	k^2D_0 in 10^{-7}	w.f. in 10^{-12}
B 1912	978.038	6	0.005304	17	7	298.32	1.51	3.679692	30
B 1917	978.039	4	0.005294	12	7	297.44	1.05	3.679696	25
$H_1$1915	978.052	4	0.005285	7	7	296.65	0.42	3.679744	25
$H_2$1915	978.043	3	0.005297	6	7	297.70	0.36	3.679707	23
$H_3$1915	978.046	4	0.005296	8	7	297.61	0.48	3.679722	25
$H_4$1915	978.039	3	0.005305	7	7	298.41	0.42	3.679696	23
K.F.-S.	978.036_5	$2_{.0}$	0.005287_1	$1_{.5}$	$7_{.4} \pm 0_{.1}$	296.83	0.136	3.679686	21

De waarden van E verschillen zo weinig dat de invloed daarvan op k^2D_0 niet merkbaar is. De verschillen in k^2D_0 berusten geheel op die in g_0.

Daar in B 1917 ook de waarnemingen opgenomen zijn die voor de afleiding van B 1912 gediend hebben, zal ik B 1912 buiten beschouwing laten, evenals H_1 1915 en H_3 1915, omdat daarbij een lengte-term in rekening gebracht is. In formule (27) is de aarde immers als omwentelingslichaam opgevat. Het overblijvende is onderling vergelijkbaar: B 1917, H_2 1915, H_4 1915, K.F.-S. Dat K.F.-S. een kleiner resultaat voor g_0 en voor k^2D_0 geeft, zal waarschijnlik zijn oorzaak in plaatselike onregelmatigheden van de aardkorst hebben. Ook berusten al de formules voor g reeds op de fundamentele bepaling in Potsdam. Ik zal er verder geen rekening mee houden. Bij H_4 1915 zouden de isostatiese correcties gering zijn, en in een resultaat uit 410 bepalingen van g zullen zij elkaar geheel of nagenoeg opheffen. Dat de waarden van g_0 en β zo goed overeenstemmen met B 1917, waarbij isostaties gereduceerd is, houd ik niet voor toeval. Bij H_2 1915 is geen isostatiese reductie toegepast. Het aantal bepalingen is veel groter dan voor H_4 1915; g_0 is dan ook slechts 0.004 groter.

Ik neem aan voor k^2D_0 [1]):

$$k^2D_0 = (3.679696 \pm 0.000021 \text{ w.f.}) \cdot 10^{-7} .$$

---

1) In overeenstemming dus met de zwaartekrachtformule waarbij de isostasie in rekening gebracht is. Het lijkt mij dat men daaraan de voorkeur geven moet. In de Verenigde Staten krompen de anomalieën in de richting van het schietlood en in de zwaartekracht door isostatiese reductie in tot 10% resp. 10 tot 15% van hun bedrag. Ook schijnen de metingen van Vening Meinesz beneden het zeeoppervlak met de theorie der isostasie in overeenstemming te zijn.

Uit:

$$\delta(k^2D_0) = +0.00374\,\delta g_0 - 5.74\cdot10^{-9}\,\delta A - 6.17\cdot10^{-8}\,\delta E + 0.628\,\delta f$$

blijkt dat k^2D_0 nagenoeg onafhankelik van δE en δf is. De grootste onzekerheid in k^2D_0 ontstaat door die in A: 20 eenheden der laatste decimaal voor $\delta A = 3500$. Voor δg_0 heb ik aangenomen, bij de berekening der waarschijnlike fout: 0.002 $^{cm}/_{sec^2}$, overeenkomend met ruim 7 eenheden in de laatste decimaal van k^2D_0.

Waarschijnlik neemt men voor A beter een iets kleinere waarde. Ontlenend aan De Sitter [1]) de straal r_* voor de breedte $\varphi_* = \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}$, in meters:

$$r_* = 6371237 \pm 49 \text{ m.f.},$$

het gemiddelde van de, uit de beste waarden van A volgende waarden van r_*, vind ik met de formule

$$A = r_*\left(1 + \tfrac{1}{3}\varepsilon - \tfrac{4}{9}\varepsilon^2\right) :$$

$$A = 637836000 \pm 3300 \text{ w.f. c.m.}$$

De gevonden waarde van k^2D_0 op deze waarde van A herleidend heeft men:

$$k^2D_0 = (3.679712 \pm 0.000020 \text{ w.f.})\cdot 10^{-7}. \qquad (30)$$

Ter berekening van het product $(M+1)\,\Pi_\odot^3$ heeft men nu:

$\mu = 1 : (81.53 \pm 0.07$ w.f.) [2]),
$\delta = 8.58\cdot10^{-7}$ [3]),
$\varepsilon = 1 : (296.83 \pm 0.136$ w.f.) [4]),
$f = (20.5 \pm 1.5$ w.f.$)\cdot10^{-7}$ [5]),
$k^2D_0 = (3.679712 \pm 0.000020$ w.f.$)\cdot10^{-7}$,
$T = 365.^d2563640 \pm 0.^d0000005$ w.f. [6]).

Uit formule (29) vind ik:

$$\log(M+1)\,\Pi_\odot^3 = 8.3496813 \pm 0.0000051 \text{ w.f.}$$
$$\log M\,\Pi_\odot^3 = 8.3496800 \pm 0.0000051 \text{ w.f.} \qquad (31)$$

De waarschijnlike fout komt nagenoeg geheel op rekening van de onzekerheid in de maansmassa en in de aequatorstraal, die van g_0 draagt slechts 9 eenheden der laatste decimaal bij.

---

1) Versl. K.A.W. XXIII, 1915, blz. 1342.
2) Door A.R. Hinks afgeleid uit waarnemingen van Eros tijdens de oppositie van 1901, M.N. **70**, 1909, blz. 73.
3) Voor 741 m.m. ware luchtdruk: Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik und Meteorologie, Bd. III, blz. 840.
4) Zie blz. 59.
5) Zie blz. 60.
6) Afgeleid met de praecessie 50.''2622 per Jul. jaar uit Newcomb's waarde voor de tropiese beweging der aarde: Astr. Pap. VI, blz. 9. De w.f. is een schatting.

De volgende tabel geeft voor verschillende waarden van $\Pi_\odot$ de waarde van M.

$\Pi_\odot$	M	$\Pi_\odot$	M	$\Pi_\odot$	M
8.″790	329392	8.″797	328607	8.″804	327824
8.791	329280	8.798	328494	8.805	327712
8.792	329168	8.799	328383	8.806	327600
8.793	329055	8.800	328271	8.807	327489
8.794	328943	8.801	328159	8.808	327377
8.795	328831	8.802	328047	8.809	327266
8.796	328719	8.803	327935	8.810	327154

De invloed van de onzekerheid der verschillende grootheden op M wordt uitgedrukt door:

$$\delta M = -0.33\,\delta g_0 - 3.73\,\delta E + 0.0512\,\delta a + 49\,\delta\left(\frac{1}{\mu}\right) - 0.019\,\delta f$$
$$- 0.02\,\delta T - 111.9\,\delta\Pi_\odot + 0.025\,(\delta\Pi_\odot)^2,$$

waarin δg_0 in 0.001 $^{cm}/_{sec^2}$, δE en $\delta\left(\frac{1}{\mu}\right)$ in eenheden, δa in meters, δf in eenheden der zevende decimaal, δT in seconden en $\delta\Pi_\odot$ in 0.″001 is uitgedrukt. Vervangt men δa door δr_*, dan moet alleen de coëfficient van δE veranderd worden in -4.69.

De grootste onzekerheid in M ontstaat door onze gebrekkige kennis van de zonsparallaxis. Het zou een uitvoerig onderzoek vereisen uit te maken welke waarde men daarvoor het best aanneemt. Het schijnt dat de zonsparallaxis iets groter dan 8.″800 is. In 't volgende zijn enige recente bepalingen met enkele oudere bijeen gezet.

Uit fotografiese waarnemingen met de „Cookson Floating Zenith-telescope" te Greenwich van 1911 tot eind 1914 volgt voor de aberratie-constante: $K = 20.''467 \pm 0.''006$ w.f. [1]). Hieruit volgt [2]): $\Pi_\odot = 8.''8048 \pm 0.''0026$ w.f.

---

1) M. N. **75**, 1915, blz. 542.

2) Het verband tussen de aberratieconstante en de zonsparallaxis (Zie Chauvenet, Spher. and Pract. Astronomy I, blz. 641; of Newcomb, Spherical Astronomy, blz. 164) is:

$$K\Pi_\odot = \frac{2\pi A}{VT\sqrt{1 - e^2 . \sin^2 1''}},$$

waarin e de excentriciteit van de aardbaan is: e = 0,01675104 voor 1900 volgens

Waarnemingen met de fotografiese zenithtelescoop van Naval Observatory in Washington uit de jaren 1921 en 1922 gaven: $K = 20.''476 \pm 0.''014$ w.f., resp. $K = 20.''485 \pm 0.''014$ w.f. [1]) waaruit resp. $\Pi_\odot = 8.''8009 \pm 0.''0060$ w.f. en $\Pi_\odot = 8.''7970 \pm 0.''0060$ w.f. volgt.

Newcomb leidt uit de waarnemingen te Poulkowa af: $K = 20.''493 \pm 0.''007$ w.f. en uit andere aberratiebepalingen: $K = 20.''463 \pm 0.''009$ w.f. [2]) Hieruit volgt resp. $\Pi_\odot = 8.''7936 \pm 0.''0030$ w.f. en $\Pi_\odot = 8.''8065 \pm 0.''0039$ w.f. Uit deze vijf waarden voor $\Pi_\odot$ vindt men, al of niet gewichten toekennend: $\Pi_\odot = 8.''8005 \pm 0.''0018$ w.f.

Uit waarnemingen van sterbedekkingen door de maan, van 1880 tot 1922 aan de Kaap, is de parallactiese vereffening der maansbeweging afgeleid, en daaruit is op grond van Brown's maanstheorie, de zonsparallaxis gevonden [3]). Op verscheiden wijzen gegroepeerd zijn resultaten gevonden die slechts zeer weinig uiteenlopen. Het gemiddelde is: $\Pi_\odot = 8.''8052 \pm 0.''0045$ w.f. De afleiding der parallactiese vereffening uit occultaties is waarschijnlik veel nauwkeuriger dan die uit meridiaanwaarnemingen van de maan, daar de periode der vereffening dezelfde als die der maansphasen is.

Uit fotografiese waarnemingen van Mars verricht aan de Kaap, gedurende de oppositie van 1924, waarbij van een kleurenfilter gebruik gemaakt is om de invloed van abnormale refractie te verminderen, volgde: $\Pi_\odot = 8.''809 \pm 0.''005$ w.f. [4]) Visuele waarnemingen van Mars zijn tengevolge van abnormale refractie, ontstaan door de rode kleur der planeet, onbruikbaar.

In het tabelletje komen ook voor Hinks' resultaat uit alle waarnemingen van Eros tijdens de oppositie van 1901 [5]); en hetgeen Gill en Elkin uit heliometriese en meridiaan-waarnemingen der kleine planeten Victoria, Sappho en Iris hebben afgeleid [6]). Het afwijkende resultaat voor Iris zou aan de zeer gele kleur der planeet, dus aan refractie-anomalieën, kunnen worden toegeschreven [7]).

Newcomb, en V de snelheid van het licht voorstelt: $V = 299860 \pm 30$ w.f. k.m./sec. volgens Newcomb (Astr. Pap. II, 1891, blz. 201.) Met Hayford's waarde van A vind ik:

$$K\,\Pi_\odot = 180.207 = \text{num. log } 2{,}255772 \quad .$$

Michelson's nieuwe *voorlopige* bepaling van V n.l. 299820 k.m./sec. (Ap. J. **60**, 1924, blz. 260) geeft in $\Pi_\odot$ een verschil van $+0.''0012$.

1) Pop. Astr. **32**, 1924, blz. 155-156.
2) Fundamental Constants, blz. 137, 139.
3) M. N. **85**, 1924, blz. 11.
4) M. N. **85**, 1925, blz. 832.
5) M. N. **70**, 1910, blz. 603.
6) Cape-Annals VI, 1897, part 2, blz. 533; part 3, blz. 85; part 4, blz. 168.
7) M. N. **85**, 1925, blz. 852. Cape Annals VI, 1897, part 4, blz. 168, 169.

Uit spectroskopiese bepalingen van de radiële snelheid van zeven heldere sterren, aan de Kaap, is gevonden voor de constante der aberratie 20.″473 ± 0.″015 w.f. [1]). Hieruit volgt $\Pi_\odot = 8.''8022 \pm 0.''0064$ w.f. [2]).

Hier volgt het tabelletje: [3])

	$\Pi_\odot$	w.f. 0.″0001
Aberr. Greenw.	8.″8048	26
„ Wash. .	8.7990	43
„ Poulk. .	8.7936	30
„ Miscell..	8.8065	39
Parr. Vereff. . .	8.8052	45
Mars, fot. . . .	8.809	50
Eros, 1901 . . .	8.806	40
Victoria.	8.8013	61
Sappho	8.7981	114
Iris	8.812	90
Spectr. Kaap . .	8.8022	64

Als gemiddelde zal ik aannemen:

$$\Pi_\odot = 8.''803 \pm 0.''0011 \text{ w.f.}$$

Niet of wel gewichten toekennend (bijv. omgekeerd evenredig met de waarschijnlike fouten, of naar betrouwbaarheid der methoden), vindt men waarden der zonsparallaxis die hiervan slechts weinig, meestal iets naar de hoge kant afwijken. De vierde decimaal heeft in 't geheel geen betekenis, temeer niet omdat dit resultaat geenszins als definitief kan worden beschouwd.

---

1) Cape-Annals X, 1909, part 3, blz. 58 C.

2) Daar Hough en Halm niet meedelen hoe de aberratieconstante uit de waarneming der lijnverschuivingen is afgeleid, weet men niet zeker of zij met de gebruikelike definitie van K rekening gehouden hebben, en of dus de formule van noot 2), blz. 63, gebruikt worden moet. Immers, bijv. $v_o = \frac{1}{T}\int_o^T v.dt$ geeft een andere waarde voor de gemiddelde snelheid v_o van de aarde dan die der gewone aberratieformule.

3) Newcomb's resultaat uit de Venus-overgangen kan, geloof ik, tegenwoordig niet meer in aanmerking komen.

Voor de waarde van M volgt:

$$M = 327935 \pm 130 \text{ w.f.}^{1}).$$

De onzekerheid groter achtend, kan men aannemen:

$$\mathbf{M = 327950 \pm 200 \text{ w.f.}}$$

Het schijnt dat de storingen door de aarde in de beweging van Eros een nauwkeuriger waarde voor de zonsmassa kunnen leveren (zie § 15), en dat men in de toekomst eerder de zonsparallaxis uit de massa zal afleiden, dan omgekeerd. De formule voor de parallaxis is:

$$\Pi_{\odot} = 607.''053 \; M^{-\frac{1}{3}} \qquad (32)$$

De verhouding van de massa van de zon tot die van de aarde alleen is gegeven door:

$$\frac{m_{\odot}}{m} \cdot \Pi_{\odot}^{3} = \text{num. log } 8.3549700 \quad , \qquad (33)$$

en hieruit volgt met de boven gevonden zonsparallaxis:

$$\frac{m_{\odot}}{m} = 331960 \quad .$$

Zoals reeds meegedeeld werd heeft men voor de berekening van de zonsmassa en van de maansparallaxis steeds gebruik gemaakt van de breedte: $\varphi_{*} = \text{arc sin } \sqrt{\frac{1}{3}}$. Volkomen juist, inclusief grootheden der tweede orde is: het gemiddelde der zwaartekrachts-versnelling g^0 over het gehele oppervlak der aarde, vermeerderd met het overeenkomstig gemiddelde $w^0{}_n$ van de normale component van de middelpuntvliedende versnelling, te verbinden met de straal van een bol die hetzelfde volume als de aarde heeft. Immers uit formule (28) volgt:

$$k^2 D_0 = \frac{3(g^0 + w^0{}_n)}{4\pi r_1} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \quad , \qquad (34)$$

waarin r_1 de straal van de bol van dezelfde inhoud, r_2 de straal van een bol met hetzelfde oppervlak als de aarde, of het oppervlakte-gemiddelde van de straal is. Noemt men nog G_0 de versnelling der gravitatie op het oppervlak van een rustende bol die

---

1) De onzekerheden der andere bij de berekening voorkomende grootheden dragen slechts onmerkbaar tot deze waarschijnlike fout bij.

hetzelfde volume en dezelfde massa als de aarde heeft, dan geldt de zeer eenvoudige formule:

$$k^2D_0 = \frac{3G_0}{4\pi r_1} \quad . \qquad (35)$$

De verschillende hier optredende grootheden zijn (berekend voor $g_0 = 978.039$ c.m./sec.^{2} en $A = 637836000$ c.m.):

$$g^0 = g_0\,(1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{5}{6}c + \tfrac{19}{126}c\varepsilon - \tfrac{13}{45}\varepsilon^2 + \tfrac{32}{105}f) = 979.7560 \text{ c.m./sec.}^2$$

$$w^0{}_n = g_0\,(\tfrac{2}{3}c - \tfrac{2}{9}c\varepsilon) = 2.2586 \text{ „}$$

$$G_0 = g_0\,(1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{3}{2}c - \tfrac{1}{14}c\varepsilon - \tfrac{1}{9}\varepsilon^2 + \tfrac{32}{105}f) = 982.0256 \text{ „}$$

$$r_1 = A\,(1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon - \tfrac{1}{9}\varepsilon^2 + \tfrac{2}{15}f) = 637118750 \text{ c.m.}$$

$$r_2 = A\,(1 - \tfrac{1}{3}\varepsilon - \tfrac{1}{45}\varepsilon^2 + \tfrac{2}{15}f) = 637119390 \text{ c.m.}$$

De berekening van k^2D_0 met de formules (34) en (35) is veel minder eenvoudig dan met formule (27).

Voor de maansparallaxis vind ik (zie form. (16) en (17)):

$$\sin^3 \Pi_C = \frac{3\,n^2\,(1.00090768)^3}{4\pi\,k^2D_0\,(1 - \varepsilon + \frac{2}{5}f)\,(1+\delta)\,(1+\mu)} \,,$$

of

$$\sin^3 \Pi_C = \frac{A\,n^2\,(1.00090768)^3}{g_0\,(1 - \varepsilon + \frac{3}{2}c - \frac{15}{14}c\varepsilon + \frac{4}{7}f)\,(1+\delta)\,(1+\mu)} \quad . \qquad (36)$$

Hieruit volgt met $g_0 = 978.039 \pm 0.002$ w.f. c.m./sec.^{2}, en met de reeds vroeger opgegeven waarden der overige grootheden (n is uit te drukken in radialen per seconde):

$$\Pi_C = \mathbf{3422.''694 \pm 0.''0136 \text{ w.f.}}$$

De invloed van de onzekerheid der verschillende grootheden op de maansparallaxis wordt uitgedrukt door:

$$\delta\Pi_C = -1.17\,\delta g_0 + 0.000179\,\delta A + 0.170\,\delta\left(\frac{1}{\mu}\right) - 0.0129\,\delta E \quad .$$

De waarschijnlike fout der maansparallaxis komt bijna geheel op rekening van onzekerheid in de aequatorstraal, en in de maansmassa.

Brown [1]) heeft voor de maansparallaxis aangenomen 3422.''697, en De Sitter [2]) vindt 3422.''701 ± 0.''015 w.f., gebruikmakend van

---

[1]) M.N. **75**, 1915, blz. 508.
[2]) Versl. K.A.W. XXIII, 1915, blz. 1342.

de absolute bepaling van g in Potsdam. Hij gaat uit van de volgende formule (op mijn notaties herleid):

$$\frac{k^2 m'}{r_*^2} = g_* (1 + \tfrac{2}{3} c - c^2 + \tfrac{1}{9} \varepsilon^2 + \tfrac{23}{63} c\,\varepsilon + \tfrac{58}{63} f) \ .$$

Voor de coëfficient van g_* in deze formule vind ik echter:

$$1 + \tfrac{2}{3} c - \tfrac{5}{9} c^2 - \tfrac{14}{9} \varepsilon^2 + \tfrac{10}{9} c\,\varepsilon - \tfrac{4}{9} f \ .$$

Naschrift. De waarde van de aequatorstraal A = 6378360 m berust op de bepaling van Hayford, waarbij isostatiese reductie is toegepast, en op de resultaten der Europese graadmetingen, waarbij niet isostaties gereduceerd is. Heiskanen heeft de correcties berekend die aan de Europese resultaten voor isostasie moeten worden aangebracht, en vindt A = 6378397 ± 49 (w.f.?) meters[1]), hetgeen dus nagenoeg precies overeenstemt met Hayford's A = 6378388 m. Wordt nu met een grotere waarde voor A dan 6378360 m. rekening gehouden, bijv. met A = 6378390, dat volgt hieruit een correctie voor $k^2 D_0$ van $-0.000017 \cdot 10^{-7}$, van + 0.0000020 voor log (M + 1) $\Pi_\odot^3$, van + 1.5 voor M, en van + 0.″016 voor de maansparallaxis.

---

[1]) American Journal of Science, XII, 1926; Referaat van W. D. Lambert, blz. 365. Lambert deelt niet mee welke diepte Heiskanen voor het isostaties oppervlak aannam. Een toename van 1 k.m. in de diepte geeft een vermeerdering in A van + 2.5 m. (Helmert, Sitz. ber. Berlin, 1911, blz. 18.) Voor de overeenstemming met Hayford's aequatorstraal, waarbij de diepte van het isostaties vlak 120.9 k.m. behoort, is dit niet zonder belang.

HOOFDSTUK IV

RESULTATEN DER MASSABEPALING UIT STORINGEN.

§ 13. *De massa van Mercurius bepaald uit storingen.*

Newcomb heeft bij zijn onderzoek naar de banen der vier binnenplaneten (Mercurius, Venus, Aarde, Mars) niet alleen correcties aan de elementen, maar ook hun seculaire variaties als onbekenden in de vergelijkingen ingevoerd. De correcties der massa's traden alleen door de periodieke storingen in de vergelijkingen op. De reden hiervan ligt in 't gebrek aan overeenstemming tussen theorie en waarneming, dat zich juist in de seculaire veranderingen uit. Ik zal in de eerstvolgende paragrafen voor Venus, de Aarde en Mars, even als voor Mercurius in deze paragraaf, meedelen welke resultaten de waarneming heeft opgeleverd, en dan ten slotte nog iets zeggen over de door Newcomb afgeleide massa's en waarom men deze tegenwoordig niet meer aanvaarden kan.

Van geen der grote planeten is de massa tot nu zo slecht bekend als van Mercurius. Alleen in de beweging van Venus veroorzaakt Mercurius een merkbare storing van hoogstens 1.″0 tot 1.″5 ongeveer in de geocentriese lengte, een wel zeer gering bedrag. Newcomb heeft getracht de massa van Mercurius hieruit te bepalen. Deze als volgt voorstellend:

$$m_1 = \frac{1 + 7\nu}{3000000} ,$$

vindt hij voor ν, uit de beweging van Venus:

$$\nu = -0.0834 \pm 0.019 \text{ m.f. } (?)\ ^{1})$$

---

[1]) „Fundamental Constants", blz. 76, 102, 104, 105. Het is niet duidelik of de middelbare of de waarschijnlike fout is opgegeven.

Hieruit volgt:

$$m_1 = \frac{1 + 0.32\,\text{m.f.}(?)}{7210000} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Met waarschijnlikheid $\frac{1}{2}$ zou dus de Mercuriusmassa tussen 1:5910000 en 1:9240000 gelegen zijn. De onzekerheid is dus nog zeer groot.

Wij bezitten nog twee uitvoerige onderzoekingen naar de massa van Mercurius, en wel van Von Haerdtl en van Backlund. Von Haerdtl [1]), uitgaande van de Mercuriusmassa 1 : 5205000, en van massa's voor de andere planeten waarvan die voor Venus en de aarde resp. vrij veel te klein waarschijnlik en te groot zijn aangenomen, berekent voor de massa van Mercurius:

$$m_1 = 1 : 5012842 \pm 672863 \text{ w.f.} \qquad \text{(b)}$$

De onzekerheid hiervan is nog groot. Ook schijnt de voorstelling der waarnemingen door de theorie minder gevoelig voor veranderingen in de massa van Mercurius dan voor veranderingen in de massa van Jupiter. Uit de onderzoekingen van Von Asten en uit vroegere onderzoekingen van Backlund over de versnelling in de beweging van de komeet van Encke, leidt von Haerdtl af, met gebruikmaking van dezelfde planetenmassa's als waar boven sprake van was, resp.:

$$1 : 5648600 \pm 2000 \text{ w.f.} \quad \text{en} \quad 1 : 5669700 \pm 600000 \text{ w.f.}\ [2]).$$

Ook vergelijkingen van Leverrier leveren met Von Haerdtl's planetenmassa's nog een vierde waarde voor de massa van Mercurius:

$$1 : 5514700 \pm 100000 \text{ w.f.}\ [3]) \ ,$$

hetgeen niet veel van Leverrier's eigen resultaat afwijkt.

Ziet men nu deze waarden van Von Haerdtl te samen, dan valt het niet makkelik zich aan een zekere suggestie te onttrekken! Maar niet te vergeten is dat bij de afleiding van (b) opzettelik met de seculaire versnelling der beweging van de komeet geen rekening is gehouden, en alleen hierdoor het verschil tussen Von

---

1) Eduard Freiherr von Haerdtl, „Die Bahn des periodischen Kometen Winnecke in den Jahren 1858-1886 nebst einer neuen Bestimmung der Jupitermasse", Wien, 1888, 1889. IIer Theil, blz. 17.
Ook in Bd. LV der „Denkschr. der math. nat. wiss. Classe der Kais. Akad d. Wiss., Wien.

2) blz. 27 van Von Haerdtl's onderzoek.

3) blz. 23 van Von Haerdtl's onderzoek.

Asten's massa en die van Backlund verdwijnt. Newcomb zegt dan ook op zijn karakteristieke wijze van Von Haerdtl's resultaten [1]): „The only interpretation which I can put upon his result is this: If we regard the acceleration of the comet, which it is supposed results from all the observations made upon it, as non-existent, the following two masses of Mercury are derivable from the observations ...", en: „The consistency of these results seems to me entirely beyond what the observations are capable of giving, and I hesitate to ascribe great weight to them. Moreover, the result implicitly contained in these numbers, that the supposed acceleration of the comet disappears when we attribute the preceding mass to Mercury, merits farther inquiry."

Over dit laatste punt nu geeft ons het grote onderzoek van Backlund, naar ik meen positief uitsluitsel.

Backlund heeft zelf van tijd tot tijd overzichten van zijn werk gegeven, waaraan ik 't volgende ontleen [2]). Een periode van drie en twintig verschijningen van de komeet van Encke is verdeeld in drie groepen 1819—1858, 1862—1868, 1871—1891. Het middelste tijdperk gedurende hetwelk de versnelling der beweging aan verandering van onbekende aard onderhevig was, is bij het onderzoek terzijde gelaten. Backlund gaat uit van de volgende uitdrukking voor de weerstand: $W = k.\, v^m\, r^{-n}$. Hierin zijn k, m en n constanten, v de snelheid van de komeet, r de voerstraal.

Voor $m = n = 2$ stelt dit Encke's hypothese voor. In de middelbare anomalie treedt nu een term op die het quadraat van de tijd bevat en die de versnelling der beweging weergeeft, en een kleine periodieke term waarvan het argument evenredig met de ware anomalie is. Het invoeren van deze term maakt de voorstelling der waargenomen plaatsen zeer veel beter. De versnelling der beweging kan worden voorgesteld door $K = K_0 (1 - \gamma)$, waarin γ een grootheid is die $m + 2n - 1$ als factor bevat. Het verschil in K dat voor de perioden 1871—1881 en 1881—1891 aan den dag trad kan men het best wegnemen, door inplaats van de Mercuriusmassa op 1 : 5000000 aan te slaan, daarvoor aan te nemen:

$$m_1 = 1 : 11759000$$

De verandering van K verdwijnt dan zonder enige verdere hypothese. Invoerend een correctie aan de massa van Venus, die

---

[1]) Fundamental Constants of Astronomy, blz. 105.
[2]) Bull. Astr. **9**, 1894, blz. 473-485.

uit de vroegere verschijningen der komeet was afgeleid, n.l. 0.975 : 401839 inplaats van 1 : 401839, vindt Backlund:

$$m_1 = 1 : 9745000.$$

Met Encke's hypothese volgt er een grotere Mercuriusmassa, maar een minder goede voorstelling der waarnemingen. Bovendien blijkt bij de vorige oplossingen, en ook later, dat γ nagenoeg nul zijn moet, 't geen wil zeggen $m + 2n - 1 = 0$ en dit strijdt met de onderstelling van Encke. Backlund geeft de voorkeur aan de laatste oplossing. Deze krijgt steun uit het onderzoek der perioden 1819—1842, 1842—1858 waarin de invloed van Mercurius op de komeet zeer groot geweest is. Ook nu blijkt de hypothese $\gamma = 0$ met de gecorrigeerde Venusmassa, en

$$m_1 = 1 : 9647000,$$

het best te voldoen. Tenslotte heeft Backlund al het materiaal met een verbeterd elementensysteem opnieuw bewerkt en vindt voor de massa van Mercurius:

Met periodieke term	Zonder periodieke term
Uit alle verschijningen samen:	
1 : 9606000	1 : 9732000
Na eliminatie der verandering van de versnelling:	
1 : 9739000	1 : 9765000
Na verwerping van de verschijning van 1838 wegens de grote overblijfsels:	
1 : 9648000	1 : 9701000

De massa van Mercurius, besluit Backlund, kan niet veel van 1 : 9700000 afwijken. De waarnemingen gedurende de verschijningen van 1894 tot 1911 zijn nu met deze onderstelling in overeenstemming, en laten een enigszins belangrijke verandering niet toe, mits men aanneemt dat ook in 1904 een vrij plotselinge vermindering der versnelling, ongeveer ten tijde der periheliumpassage, heeft plaats gevonden, daar anders bij de verschijning van 1908 zeer grote fouten optreden [1]). Wel verdwijnt deze noodzakelikheid indien men aan Mercurius een 50 % grotere massa toeschrijft, maar dit laten de vroegere verschijningen niet toe, en bovendien zouden er bij de na 1908 komende verschijning van 1911 [2]), de

[1]) A. N. **184**, 1910, kol. 89—92.
[2]) A. N. **190**, 1912, kol. 49—52.

laatste die Backlund bewerkt heeft, fouten in de middelbare anomalie ontstaan van 1,'3, geheel onaannemelik. Ja, een veel geringere verandering van de massa brengt al in strijd met de waarneming. Backlund vond $m + 2n - 1 = 0$, en leidt hieruit af dat n negatief moet zijn. Daarmee vervalt de hypothese van een zich van de zon af met verminderende dichtheid nagenoeg continu uitbreidende middenstof. Backlund grijpt daarom weer naar de hypothese van de meteorenzwerm. Inderdaad laat zich het verloop der verschijnselen met deze hypothese zeer goed rijmen. De gehele baan van zo'n zwerm zal niet gelijkmatig met meteoren bezet zijn, maar er zullen één, of verscheiden, min of meer regelmatige verdichtingen in de verdeling der meteoren wezen. Ook kan men niet aannemen dat de omloopstijden van Encke's komeet en van de zwerm strikt commensurabel zouden blijven, al waren zij het eens. De verandering in de onderlinge stand van kometenbaan en zwermverdichtingen zal zich tenslotte in verandering van de weerstand moeten uiten. Het is trouwens niet nodig te denken aan ontmoetingen met steeds ongeveer hetzelfde deel van een meteorenring. Indien de hypothese juist is zou na verloop van tijd de versnelling der beweging tijdelik, of zelfs wel voor goed, kunnen verdwijnen, of ook weer sterker kunnen worden. Backlund stelt voor, de uitdrukking voor de weerstand afhankelik te maken van de ware anomalie. Het ontmoetingspunt van komeet en zwerm zou dan te localiseren zijn.

Indien men ervan uitgaat dat aan de realiteit van de verminderde versnelling niet te twijfelen valt, en bedenkt dat het mogelik is een uitstekende voorstelling der waarnemingen te verkrijgen met behulp van massa's der storende planeten die niet veel van de werkelikheid kunnen afwijken, en door aan de versnelling en zijn verminderingen zekere waarden toe te kennen, en de tijdstippen der veranderingen te stellen op 1858—1868, 1895, 1904; en dat dan alle verschijningen van de komeet in een periode van meer dan 90 jaren unaniem pleiten voor een Mercurius-massa 1 : 9700000 der zonsmassa, dan kan men inderdaad aan deze massa zijn vertrouwen niet ontzeggen, in aanmerking genomen bovendien dat voor het verschijnsel der versnelling zelf een geheel ongedwongen verklaring te geven is. Of door een onderzoek waarbij met een uitdrukking voor de weerstand in de geest van Backlund's voorstel, rekening wordt gehouden, een essentieele wijziging in het gevonden getal gebracht worden zal, is moeilik te zeggen, wellicht niet, gezien de goede overeenstemming der afzonderlike resultaten.

De massa die Von Haerdtl vond kan naast Backlund's massa

geen stand meer houden. De massa die hij voor Venus gebruikt is wellicht bijna 1,5% te klein, die van de aarde nagenoeg zeker 1,5% te groot, zijn massa van Jupiter, die hij zelf uit de beweging van de komeet van Winnecke met zeer geringe onzekerheid afleidde, moet ook als te groot beschouwd worden, en het is zeer de vraag of niet na correctie dezer massa's de Mercuriusmassa met een geheel ander bedrag uit de berekening te voorschijn komen zou. Dezelfde massa's substitueert hij in vergelijkingen van Leverrier, zodat ook het hieruit afgeleide resultaat niet met Backlund's vergeleken worden kan.

Men kan Leverrier's vergelijkingen ten gunste van een zeer kleine Mercuriusmassa doen spreken. A. Hall Jr. [1]) heeft hieruit door substitutie van aangenomen waarden voor deze massa, massa's afgeleid voor Venus en voor de Aarde. Een Mercuriusmassa gelegen tussen 1 : 9000000 en 1 : 10000000 geeft de beste resultaten wat betreft de voorstelling der storingen. De aldus gevonden massa van Venus stemt uitstekend overeen met wat tegenwoordig daarvoor moet worden aangenomen. Voor de aarde volgt een massa die nagenoeg hetzelfde is als wat Newcomb uit de seculaire variaties vond [2]).

Newcomb's resultaat (a) (blz. 70) uit de beweging van Venus is met Backlund's massa niet in strijd. Het schijnt dus dat door het onderzoek waarvan Backlund een levenswerk gemaakt heeft men zich voor het eerst met enige stelligheid over de massa van Mercurius kan uitspreken.

Backlund sloeg de onzekerheid van zijn resultaat voor zover dat volgde uit het materiaal tot 1895 aan op 20% [3]). De verschijningen van Enke's komeet van 1895 tot en met 1911 hebben echter eveneens belangrijke steun gegeven. Ik geloof daarom dat men de nauwkeurigheid niet te hoog schat met aan te nemen voor de massa van Mercurius :

$$m_1 = 1 : 9700000 \pm 1000000 \text{ w.f.}$$

De waarschijnlike fout schijnt mij niet te hoog. Met Leverrier's betrekkelik grote Venusmassa 1 : 401839 vond Backlund uit de verschijningen tot 1891: $m_1 = 1 : 11759000$, en: $m_1 = 9745000$, indien

---

[1]) A. J. **24**, blz. 164.

[2]) Zie § 17, blz. 86. Ook uit Leverrier's onderzoekingen volgt hetzelfde merkwaardige verschil van 0."04 à 0."05 tussen de waarde van de zonsparallaxis uit storingen en die waarden die volgen uit alle, en velerlei, andere methoden voor de bepaling der zonsparallaxis.

[3]) Mém. St. Pét. 8e Série, XVI, 1904, blz. 1.

hij voor de Venusmassa 1 : 412124 aannam, wat met zijn eigen onderzoekingen beter overeenstemde. Een zo kleine Venusmassa is echter niet verenigbaar met de aantrekking die Venus op de overige binnenplaneten uitoefent, op grond waarvan men 1 : 405050, althans iets dergelijks, aannemen moet. Het lijkt waarschijnlik dat met deze Venusmassa een Mercuriusmassa resulteren zou, iets kleiner nog dan 1 : 9700000. Ook moet niet vergeten worden dat de massa die Backlund voor Mars aannam ongeveer $\frac{1}{7}$ deel te groot is.

Newcomb heeft op grond van het feit dat de gemiddelde dichtheden van de Aarde, van Venus en van Mars „niet zeer verschillend" zijn, en die van de maan ongeveer 0.6 van die der aarde is, de gemiddelde dichtheid van Mercurius op 0.7 van die der aarde aangeslagen en zo de massa geschat op 1 : 9000000 [1]). Het blijkt mij daarentegen dat de betrekking tussen dichtheid en schijnbare diameter nagenoeg lineair is. Uitgaande van de zekerst bekende dichtheden, n.l. die van de aarde en de maan, kan men deze betrekking als volgt voorstellen (halve schijnbare diameter S in secunden, herleid op de eenheid van afstand):

$$D_0 = 2.53 + 0.340\ S\ ^{2}).$$

Een quadratiese formule aangepast aan de gemiddelde dichtheden van Aarde, Mars en Maan is:

$$D_0 = 2.59 + 0.311\ S + 0.0026\ S^2.$$

Het volgende tabelletje toont het resultaat:

Planeet	1 : m	S	D_0	D_0 Lin.	D_0 Quadr.
Maan	27070000	2.″40	3.35	3.35	3.35
Mercurius	(9700000)	3.34	(3.46)	3.67	3.66
Mars	3088000[3])	4.63	4.08	4.10	4.08
Venus	405050[3])	8.41	5.20	5.40	5.39
Aarde	332180[4])	8.80	5.53	5.53	5.53

Met de gemiddelde dichtheid 3.67 voor Mercurius komt overeen een massa 1 : 9150000.

---

1) Fundamental Constants, blz. 106.
2) Het is merkwaardig dat de constante term in deze en in de volgende formule ongeveer de gemiddelde dichtheid der oppervlakte-gesteenten op aarde is!
3) Zie voor Mars § 23, voor Venus blz. 81.
4) Het resultaat van blz. 83, de maan niet meegerekend.

Voor Venus is de afwijking van beide formules misschien meer dan de onzekerheid in massa en diameter toelaat.

Hill [1]) heeft iets dergelijks geprobeerd, uitgaande van de onderstelling dat de samendrukbaarheid van de materie waaruit de vier binnenplaneten en de maan zijn opgebouwd voor alle hetzelfde is, en dat de dichtheidswet van Legendre en Laplace [2]) enigszins het ware verloop der dichtheid weergeeft. Uit de data voor Venus, de Aarde, Mars en de Maan leidt hij vier waarden voor de massa van Mercurius af, die onderling goed overeenstemmen en waarvan het gemiddelde 1 : 10530500 is. Zijn uitgangswaarden zou men tegenwoordig ten dele door betere kunnen vervangen. Ik zal dit echter achterwege laten, daar de dichtheidswet waarschijnlik geen reële betekenis toekomt, en men aan deze berekeningen, al zullen ze a posteriori een bepaalde indruk enigszins versterken, nog minder waarde hechten moet dan aan bovenvermelde empiriese interpolatie, die immers ook al op zeer zwakke basis rust.

§ 14. *De massa van Venus bepaald uit storingen.*

De massa van Venus kan bepaald worden uit de periodieke storingen die deze planeet teweeg brengt in de beweging van Mercurius, van de Aarde en van Mars. De beweging van Mars leent zich hiertoe het best. Newcomb zegt: „Observations of Mars seem to afford the most certain method of determining this constant" [3]), en F. E. Ross: „No method can lead to a value of Venus's mass comparable with this in accuracy", en: „It is true that a good value of the mass of Venus can be obtained from observations of the Sun. The precision, however, is considerably less. The periodic perturbations in the geocentric longitude of Mars due to the action of Venus amounts at the maximum to 40"; in the Sun, to less than one-third of this. Observations of Mercury also lead to a determination having a precision about equal to that from Sun observations" [4]).

De laatste omvangrijke onderzoekingen naar de massa van Venus

---

1) A. J. **19**, 1898, blz. 157, 167.
2) Tisserand, Méc. Cél. II, blz. 232, 233.
3) „Tables of the heliocentric motion of Mars", Astr. Pap. VI, 1898, part 4, blz. 386.
4) „New elements of Mars" etc., Astr. Pap. IX 1917, part 2, blz. 256. Ook in A. J. **29**, blz. 157—163.
Het komt mij voor dat Ross, in 't voordeel van Mars, die 40" te hoog heeft aangeslagen. Ik kom met behulp van Newcomb's tafels, voor een hoogst onwaarschijnlik, ja zelfs onmogelik, geval tot niet meer dan 35".

zijn die van Newcomb in zijn „Fundamental constants", van Ross uit de beweging van Mars, en van Spencer Jones uit die van de zon.

Dat Newcomb de Venusmassa niet uit de waarnemingen van Mars afleidde, had zijn oorzaak in een fout in de Mars-theorie die nagenoeg dezelfde periode vertoonde als de belangrijkste storing door Venus op Mars.

Newcomb ging uit van Leverrier's Venusmassa $m_0 = 1 : 401847$, en leidt een correctie-grootheid ν af, zodat de gecorrigeerde Venusmassa wordt $m = m_0(1 + \nu)$.

Uit de waargenomen rechte klimmingen van de zon van 1750 af tot 1892, afkomstig van tien observatoria, vindt hij [1]:

$$\nu = -0.0118 \pm 0.0023 \text{ w.f.} \qquad \text{(a)}$$

Uit meridiaan-waarnemingen van Mercurius van 1765 af tot 1892 [2]:

$$\nu = -0.0148,$$

en uit dezelfde waarnemingen, maar gecombineerd met de waarnemingen van Mercurius-overgangen:

$$\nu = -0.0121 \pm 0.0034 \text{ w.f. (schatting)} \qquad \text{(b)}$$

De combinatie geeft een veel betere voorstelling van de waarnemingen der overgangen, dan de meridiaan-waarnemingen alleen doen. Er blijkt in de meridiaan-waarnemingen een systematies verschil tussen de waarnemingen tijdens de oostelike, en die tijdens de westelike elongatie. De oorzaak hiervan zou kunnen liggen in de herleiding van de waarneming op het centrum van de schijf, maar een fout van omstreek 1″ in de schijnbare middellijn van de planeet is haast onaannemelik. Het verschil is zo, dat de tafels op meridiaan-waarnemingen alleen gebaseerd, ten tijde der overgangen fouten zouden vertonen die over een eeuw berekend 3″ tot 5″ bedragen. Newcomb houdt het resultaat voor ν uit de combinatie afgeleid voor het beste.

Ross heeft uit de waarnemingen van Mars van 1751 tot 1912 verdeeld in vijf groepen, vijf waarden voor ν afgeleid. Zijn ν geldt echter ten opzichte van Newcomb's definitieve Venusmassa 1 : 408000. Het gemiddelde hiervan is:

$$\nu = +0.0113 \pm 0.0052 \text{ w.f.} \; [3].$$

---

[1] Fundamental Constants of Astronomy, 1895, blz. 22—25.

[2] Fundamental Constants, blz. 66.

[3] „New elements of Mars etc.", Astr. Pap. IX part 2, blz. 261; ook A. J. **24**, blz. 157—163. Ross zelf geeft: $+0.0112 \pm 0.0058$ w.f. Er moet hierin een rekenfout zijn. Ik vind uit zijn tabelletje: $+0.01126 \pm 0.00518$ w.f.

Ten opzichte van $m_0 = 1 : 401847$ is dit echter:

$$\nu = -0.0040 \pm 0.0051 \text{ w.f.} \qquad (c)$$

De waarden van ν (a), (b) en (c) middelend met gewichten resp. 3, 2, 6, vind ik:

$$\nu = -0.0076. \qquad (d)$$

Uit de afwijkingen ten opzichte van het gemiddelde volgt een waarschijnlike fout van ± 0.0019, maar dit getal is natuurlik zeer onbetrouwbaar. De aangegeven onzekerheden leveren ook geen juiste maatstaf voor de onderlinge vergelijking der drie waarden van ν, daar de waarschijnlike fouten op geheel verschillende wijze tot stand kwamen. Ross meent dat Newcomb's waarschijnlike fouten een te gunstig beeld geven [1]). Dat is niet onmogelik, maar de grond die Ross voor zijn mening aanvoert strookt niet met wat Newcomb zelf op blz. 25 en op blz. 101 meedeelt. De waarschijnlike fout voor de bepaling uit de beweging van Mercurius is een *schatting* en heeft met een of andere methode van gewichtstoekenning misschien niets te maken. Dat blijkt althans nergens. De waarschijnlike fout voor de bepaling uit de beweging van de zon houdt evenmin verband met de oplossing der grootheden uit de vergelijkingen, noch met een algemene theoretiese methode van gewichtstoekenning, en berust geheel op de afwijkingen van de afzonderlike waarden van ν, voor elk observatorium, van het gemiddelde. Bij contrôle blijkt dit ook zo te zijn. De waarschijnlike fout van de waarde van Ross is afgeleid uit de afwijkingen der vijf groepen van het gemiddelde. Behalve dat Newcomb de resultaten der observatoria, Ross die der tijdvakken vergelijkt, zijn dus hun afleidingen der onzekerheid dezelfde. Een andere methode voor de bepaling der onzekerheid toepassende, die dan overeenkomen zou met Newcomb's wijze van handelen, vindt Ross: w.f. = $\pm 0{,}0020$ in plaats van ± 0.0052, en dit is slechts 0.0003 geringer dan Newcomb's waarschijnlike fout [1]) van de bepaling van ν uit de zonswaarnemingen (a). Men kan dus niet zeggen dat uit de resultaten duidelik blijkt dat de bepaling der Venusmassa uit de beweging van Mars nauwkeuriger dan die uit de beweging van de aarde is. Indien men aan de bepaling uit de bewegingen van Mars resp. gewicht 4 en gewicht 3 geeft, en de andere gewichten zo laat, volgt er voor het gemiddelde resp.:

$$-0.0084 \quad \text{en} \quad -0.00895. \qquad (e)$$

---

[1]) „New elements of Mars", Astr. Pap. IX, part 2, blz. 261. Ross beschouwt abusievelik Newcomb's middelbare fout als de waarschijnlike. Zie Fundamental Constants, blz. 25 en 101.

Cowell [1]) heeft de waarnemingen van de zon, van 1864 tot 1900 in Greenwich verricht, onderzocht, en oefent op grond van zijn onderzoek kritiek op Newcomb's bewerking van zijn materiaal. Hij vindt namelik voor de beide voornaamste storingen door Venus in de lengte van de zon — die volgens Leverrier, berekend voor de Venusmassa 1 : 400246 :

$$-4.''93 \sin (V-E) \quad \text{en} \quad +5.''63 \sin 2 (V-E)$$

zijn, waarin V—E het verschil in de heliocentriese lengten van Venus en de Aarde is — de correcties :

$$-0.''03 \sin (V-E) \quad \text{en} \quad +0.''00 \sin 2 (V-E) \ ,$$

waaruit voor de massa van Venus volgt :

$$\frac{1.006}{400246} \text{ en } \frac{1.000}{400246} \ ,$$

gemiddeld dus :

$$\frac{1.003}{400246} = \frac{1}{399050} \ ,$$

een positieve correctie aan Leverrier's Venusmassa. Dat Newcomb een veel grotere negatieve correctie vindt, schrijft hij daaraan toe dat Newcomb de moderne waarnemingen van Greenwich combineert met materiaal van veel minder gehalte. Ik geloof dat Cowell slechts voor een gering deel gelijk heeft. Niet alleen kan men de waarnemingen over een tijdvak van meer dan honderd jaren (1750-1864) niet eenvoudig negeren, maar er zijn bovendien nog negen andere observatoria die hun bijdrage tot de waarde van ν leverden. En juist dit laatste feit maakt dat wij in de waarde van ν vertrouwen kunnen hebben. Er is immers kans op eliminatie van die systematiese fouten die aan de afzonderlike instrumenten of aan de waarnemers eigen zijn. Wellicht echter gaf Newcomb aan de resultaten uit het tijdperk 1750—1785 een te groot gewicht,

---

[1]) M. N. **71**, 1906, blz. 302—307. Cowell betoogt dat Newcomb's Venusmassa 1 : 408000 te klein is. De grond lijkt mij zwak. Voor deze massa bedragen de coëfficienten der bovenaangehaalde storingen —4.''838 en +5.''526, terwijl Cowell uit de waarnemingen afleidt —4.''96 en +5.''63. De verschillen —0.''12 en +0.''10 acht hij onmogelik aan de waarneming toe te schrijven, althans dergelijke verschillen vond hij niet in zijn analyse der maansplaatsen. Zon en maan zijn echter zo zeer verschillende objecten, en de waarnemingen hebben onder zo verschillende omstandigheden plaats, dat men aan dit argument geen waarde hechten kan. Voor de op blz. 80 aangenomen massa 1 : 405050 zijn de verschillen overigens nog maar —0.''08 en +0.''06.

en een gewicht twee en een half keer zo groot als dat der moderne waarnemingen gedurende de eerste twaalf jaren van dit tijdvak, lijkt toch wel veel te hoog, al zijn dan ook de waarnemingen van Bradley. Was het oordeel in deze zaken misschien niemand beter toevertrouwd dan Newcomb, hij schijnt toch een enkele maal wel misgetast te hebben [1]). Hoe het zij, ik zal Newcomb's resultaat uit de zonswaarnemingen van Greenwich niet meerekenen, daar deze waarnemingen van 1836 af tot 1923 toe zeer kort geleden door Spencer Jones uitvoerig onderzocht zijn, en alleen Newcomb's waarden der overige observatoria, zoals die voorkomen op blz. 23 van zijn „Fundamental Constants", met de daar aangegeven gewichten middelen. Ik vind als correctie-grootheid bij Leverrier's Venusmassa:

$$\nu = -0.0103 \pm 0.0029 \text{ w.f.} \qquad (f)$$

Spencer Jones [2]) leidt uit de zonswaarnemingen van Greenwich over een periode van 87 jaren correcties af voor Newcomb's coëfficienten der beide voornaamste termen van de periodieke storingen van Venus op de Aarde (zie blz. 79)

$$-4.''838 \sin (V-E) + 5.''526 \sin 2 (V-E)$$

en wel:

$$-0.''049 \pm 0.''014 \text{ w.f. (?) en } +0.''034 \pm 0.''014 \text{ w.f. (?)}$$

Hieruit volgen, ten opzichte van Newcomb's definitieve Venusmassa (1 : 408000), de waarden van ν:

$$\nu = +0.01013 \pm 0.0029 \text{ w.f. en } \nu = +0.00615 \pm 0.0025 \text{ w.f.}$$

Het gemiddelde overeenkomstig de waarschijnlike fouten is:

$$\nu = 0.0079 \pm 0.0019 \text{ w.f. (?)} . \qquad (g)$$

Ten opzichte van Leverrier's Venusmassa : 1 : 401847 heeft men nu 't volgende,wel zeer bevredigende, lijstje der resultaten (b) (c) (f) en (g)

	ν	w.f.	1 : m	w.f.	g
Newcomb, Zon (zonder Greenw.)	−0.0103	0.0029	406029	1191	2
„ Mercurius	−0.0121	0.0034	406769	1400	2
Spencer Jones, Zon (Greenwich)	−0.0073	0.0019	404802	746	3
Ross, Mars	−0.0040	0.0020	403460	2066	3

Het gemiddelde met de aangegeven gewichten is:

$$\nu = +0.0079 \pm 0.0012 \text{ w.f.} \quad m_2 = 1 : 405047 \pm 490 \text{ w.f.}$$

---

1) F. E. Ross, „New Elements of Mars." Astr. Pap. IX, part 2, blz. 261.
2) M. N. **86**, 1926, blz. 433-435.

zodat ik zal aannemen voor de massa van Venus, zoals die voortvloeit uit het beste materiaal dat wij daarvoor bezitten:

$$m_2 = 1 : 405050 \pm 500 \text{ w.f.}$$

Newcomb merkt op [1]) dat een vergroting van de Venusmassa 1 : 406750 ook uit het verschil tussen de waargenomen en de berekende seculaire variatie van de helling der ecliptica volgt. Voor 1 : 405050 krimpt het verschil van $-0.''22 \pm 0.''27$ w.f. in tot $-0.''09$, dus is dan ver binnen de waarschijnlike fout. Het verschil verdwijnt geheel voor 1 : 403630, wat al zeer weinig van het resultaat van Ross uit de beweging van Mars: 1 : 403460 ± 2070 w.f. afwijkt.

Backlund houdt op grond van zijn onderzoek van de beweging van Encke's komeet 1 : 414270 voor een betere waarde der Venusmassa dan 1 : 401839, maar een zo kleine waarde schijnt geheel onverenigbaar met de periodieke storingen die Venus in de beweging van Mercurius, van Mars en van de Aarde te weeg brengt.

§ 15. *De massa van het stelsel aarde-maan, afgeleid uit storingen.*

Op blz. 51 heb ik uit de „Fundamental constants" onder andere deze woorden van Simon Newcomb aangehaald: „We conclude, therefore, that the mass of the Earth can not be satisfactorily determined by the periodic perturbations which it produces in the motion of any planet....." Het schijnt hieruit dat het niet mogelijk is de massa van de aarde uit de storingen met zekerheid te bepalen, daar immers ook de seculaire storingen daartoe niet dienen kunnen zolang de verschillen tussen theorie en waarneming niet opgehelderd zijn. Wij moeten echter niet vergeten waarop Newcomb het oog heeft! Hierop: Indien er systematiese fouten in de waarneming zijn die van de onderlinge positie van de aarde en van de gestoorde planeet afhangen, dan is een betrouwbare massabepaling niet mogelik. Zeer sterk geldt dit voor Venus en Mercurius, waarbij immers de schijnbare vorm en grootte en de helderheid van het waargenomen object geheel van de onderlinge stand van object, aarde en zon afhangen, en wel zo dat aard en grootte van systematiese fouten, die ongetwijfeld optreden, ook door de ogenblikkelike constellatie bepaald zijn. [2])

[1]) Fundamental Constants, blz. 107, 108, 110, 163.

[2]) Cowell zegt aan het eind zijner discussie van waarnemingen van Venus: „I have not yet examined how far it is possible to disentangle errors of defective illumination from errors due to Le Verrier's mass of the Earth + Moon, and so obtain a determination of this mass; but it is fairly obvious that no such determination can compete with the value resulting from pendulum experiments." (beter had hij kunnen zeggen „from the solar parrallax", want deze geeft hier de onzekerheid der massa aan!)

Objecten waarbij dit veel minder het geval is zijn de kleine planeten. Alle nadelen van een schijf en zijn veranderlike vorm vervallen hierbij. De kleine planeten doen zich als sterren voor, alleen hun helderheid hangt met de stand ten opzichte van de aarde en van de zon samen, en hierdoor kunnen nog systematiese persoonlike fouten op de waarneming invloed hebben, maar deze zijn van lang zo ernstige aard niet als die door een phase vertonende schijf ontstaan.

Speciaal geschikt voor de bepaling van de massa der aarde is de planeet (433) Eros, die ons tot op één achtste deel der astronomiese eenheid naderen kan. Ten eerste wordt hierdoor een bijna directe bepaling der zonsparallaxis en zo die der aardmassa mogelik, ten tweede kan men de massa uit de relatief sterke storingen bepalen, en veel nauwkeuriger en minder onderhevig aan systematiese fouten, naarmate de afstand kleiner, de storingen groter zijn. Het lijkt of deze laatste methode de nauwkeurigste worden zal van alle methoden die wij bezitten.

Het eerste uitgebreide onderzoek naar de beweging van Eros is dat van Witt, die de waarnemingen van voor de ontdekking, van 1890 af tot 1907, bewerkte. Voor de som der massa's van aarde en maan vond hij:

$$m_3 = 1 : 328659 \pm 123 \text{ m.f. (?)}\ ^{1}) .$$

Noteboom heeft alle waarnemingen tot eind 1914 bewerkt[2]). Zijn onderzoek schijnt met grote nauwkeurigheid te zijn uitgevoerd. De storingen door alle acht grote planeten zijn in rekening gebracht, 't geen bij Witt's werk niet het geval was. Voor de massa van het aarde-maan-stelsel vindt hij:

$$\mathbf{m_3 = 1 : 328370 \pm 69 \text{ w.f.}}$$

In de afwijkingen die de normaalplaatsen van Eros van 1898 tot 1901 ten opzichte van de berekende plaatsen vertonen, blijft een geringe gang bestaan, die echter grootheden van slechts ongeveer 1″ betreft, iets systematies dus, dat misschien zijn oorzaak in persoonlike fouten die ook met de helderheid samen kunnen hangen, of in fouten der sterreplaatsen vindt. Dat de afgeleide aardmassa hiervan de invloed ondergaan heeft lijkt niet waarschijnlik.

Voor de zonsparallaxis volgt uit Noteboom's resultaat met formule (32):

$$\Pi_\odot = 8.''7991 \pm 0.''0006 \text{ w.f.}$$

---

1) Particulier door Witt aan Noteboom meegedeelde correctie op zijn vroegere resultaat in V.J.S. A.G. **43**, 1908, blz. 297. Zie noot (2).

2) A.N. **214**, 1921, kol. 153-170.

Op blz. 65 is hiervoor gevonden 8.″803 ± 0.″001 w.f. Het is opmerkelik dat de beide bepalingen der zonsparallaxis uit de waarnemingen van Mars (hoewel met een kleuren-filter en fotografies uitgevoerd) en van Iris, beide *sterk gekleurde* objecten, de grootste waarden geleverd hebben, en dat dit juist is wat men op grond van de kleur ten gevolge van refractie-anomalieën verwachten zou. Ik zal ze verwerpen, en de overige bepalingen verenigen in groepen naar de methoden.

De resultaten der kleine planeten Eros, Victoria en Sappho verenig ik met de gewichten 3,3,1. [1])

Meth.	$\Pi_\odot$	w.f. in 0.″0001	g
Aberratie	8.″8005	18	5.6
Par. Vereff.	8.8052	45	2.2
Kl. Plan.	8.8029	14	7.1
Spectrosc.	8.8022	61	1.6
Eros (Noteb.)	8.7991	6	16.7

Het gemiddelde, met gewichten omgekeerd evenredig aan de waarschijnlike fouten is:

$$\Pi_\odot = 8.''8007 \pm 0.''0006 \text{ w.f.}$$

en hiermee stemt overeen:

$$m_3 = 1 : 328193 \pm 73 \text{ w.f.}$$

De onzekerheid moet echter veel groter worden geacht dan de waarschijnlike fout uitdrukt. Ik zal aannemen voor de massa van het aarde-maan-stelsel overeenkomstig de parallaxis 8.″801:

$$\mathbf{m_3 = 1 : 328160 \pm 200 \text{ w.f.}}$$

In de planeet Eros hebben wij een object van buitengewone waarde voor de bepaling der zonsparallaxis volgens twee verschillende methoden, waarvan die der storingen de nauwkeurigste zal blijken te zijn. Waarschijnlik zal de zeer gunstige oppositie van 1931 ons een stuk nader brengen tot de kennis van de zonsmassa

[1]) In de bijna volkomen overeenstemming tussen de heliometriese waarnemingen van Victoria aan de Kaap met die van andere sterrewachten kan men een aanwijzing zien dat de waarnemingen niet aan systematiese fouten onderhevig waren.

en van de zonsparallaxis en daarmee tot die van de afmetingen van het zonnestelsel.

Newcomb heeft ook een bepaling der massa van het aarde-maanstelsel geleverd. Uit de seculaire variaties van de banen der binnenplaneten leidde hij af [1]):

$$m_3 = 1 : 333100 \pm 1764 \text{ w.f. (?)} ,$$

hetgeen overeenkomt met:

$$\Pi_\odot = 8.''757 \pm 0.''015 \text{ w.f. (?)} .$$

Dit resultaat is in strijd met alle andere bepalingen der zonsparallaxis. Uit de beweging van de knoop der Venusbaan alleen, waarvan dit resultaat voornamelik afhangt, vindt Newcomb na nieuwe discussie, en met massa's voor Mercurius en Venus, resp. 1 : 7936500 en 1 : 406750 [2]):

$$m_3 = 1 : 332590 \pm 662 \text{ w.f.} ,$$
$$\Pi_\odot = 8.''762 \pm 0.''006 \text{ w.f.} ,$$

niet essentieel anders dan eerst, en al zou men enigszins andere waarden voor de massa's van Mercurius en van Venus aannemen, het resultaat voor de massa van het aarde-maan-stelsel wordt er eerder „slechter" dan beter van. Daar dit verschil niet verklaard is, bovendien de seculaire variaties ook in ander opzicht niet aan de verwachtingen blijken te voldoen, en men niet aannemen kan dat alle overige methoden ter bepaling van de parallaxis en van de zonsmassa, die in goede onderlinge overeenstemming zijn, een zo sterke systematiese fout zouden vertonen, heb ik met dit resultaat van Newcomb geen rekening meer gehouden.

§ 16. *De massa van het stelsel van Mars bepaald uit storingen.*

Daar de massa van Mars slechts ongeveer één driemillioenste deel van die der zon is, kan men van een bepaling uit periodieke of seculaire storingen in de banen der grote planeten niet veel verwachten. Konden alle periodieke storingen door Mars in de beweging van de aarde en van Venus tegelijkertijd hun maximum bereiken, dan zouden zij in de geocentriese lengte van de zon en van Venus resp. nog niet 7″ en 6″ bedragen.

Newcomb heeft uit de seculaire variaties in de elementen van de banen der vier binnenplaneten afgeleid:

$$m_4 = 1 : 3129500 \pm 212000 \text{ w.f. (?)} [3]) .$$

---

[1]) Fundamental Constants, blz. 121.
[2]) Fundamental Constants, blz. 163.
[3]) Fundamental Constants, blz. 121.

Zeker kan een dergelijke bepaling met die uit de beweging der satellieten niet op één lijn gezet worden. Hetzelfde geldt voor de enige bepaling uit de beweging van een kleine planeet die mij bekend geworden is. Leveau [1]) heeft uit meridiaan-waarnemingen van Vesta de elementen van de aardbaan en de massa's van Mars en Jupiter algeleid, en gevonden:

$$m_4 = 1 : 3601280,$$

en zonder de elementen der aardbaan te bepalen:

$$m_4 = 1 : 3599185.$$

Voor 't gemiddelde van beide kan men nemen 1 : 3600000. Dit resultaat wijkt zo zeer af van wat uit de beweging der satellieten volgt, dat ik het verder buiten beschouwing laten zal.

Het is zeker niet uitgesloten dat de beweging van kleine planeten — van Eros (433), wellicht ook van Hungaria (434) en van (1009) en (1019), hoewel deze laatste zeer lichtzwak zijn — ons eens over de massa van Mars even goed, of beter, inlichten zal als die der satellieten. De bevestiging van de massa uit de waarneming der satellieten zou werkelik zeer welkom zijn, daar immers deze waarneming aan onbekende systematiese fouten onderhevig wezen kan.

§ 17. *Newcomb's resultaten voor de vier binnenste planeten.*

Ik zal in 't kort aangeven hoe Newcomb tot de waarden der massa's gevoerd is die hij ten slotte heeft aangenomen.

In de vergelijkingen voor de bepaling van de correcties der baanelementen en der massa's heeft Newcomb de seculaire variaties der elementen als onbekenden opgenomen, zodat de correcties der massa's alleen door de periodieke storingen optraden. Uit de periodieke storingen dus leidt Newcomb af:

$$m_1 = 1 : 7210000 \pm 3290000 \text{ m.f. (?)} \quad , \qquad \text{(blz. 102)}\ ^{2})$$

en door in de vergelijkingen voor de seculaire variaties theoretiese waarden [3]) te substitueren:

$$m_1 = 1 : 7943000 \pm 3200000 \text{ m.f. (?)} \quad . \qquad \text{(blz. 102)}$$

Voor Venus volgt uit de periodieke storingen op de Aarde en op Mercurius:

$$m_2 = 1 : 406690 \pm 1140 \text{ m.f.} \qquad \text{(blz. 102)}$$

---

1) Annales de l'Obs. de Paris, Mém. XXVII, 1910, blz. B 37, 39.

2) Bij elke waarde geef ik de bladzij van de Fundamental Constants tussen haakjes.

3) „When the secular variations are determined from theory . . ." Het is niet duidelik of die theoretiese waarden uit het massa-systeem A van blz. 107 der Fundamental Constants zijn afgeleid.

Uit de verschillen tussen de seculaire variaties die uit de vergelijkingen volgen en de theoretiese waarden die uit een zeker systeem [1]) aangenomen massa's voortvloeien, leidt Newcomb gecorrigeerde waarden voor de massa's af (blz. 121):

$m_1 = 1 : 7009350 \pm$ (?)
$m_2 = 1 : 405941 \pm 2250$ w.f. [2])
$m_3 = 1 : 333100 \pm 1764$ w.f.
$m_4 = 1 : 3129500 \pm 212000$ w.f.

De overeenstemming van m_1 en m_2 met de waarden uit de periodieke storingen is uitstekend. Ook m_4 vertoont niets vreemds. Maar m_3 is onaannemelik, als in strijd met alle bepalingen van de zonsparallaxis volgens zeer verschillende methoden.

Newcomb combineert deze vier waarden met vier andere uit andere bron. Dat is voor Mercurius een algemene beschouwing, voor de aarde de bepalingen der zonsparallaxis. Waar de waarden van m_2 en m_4 vandaan zijn is niet duidelijk. Dus door combinatie met (bl. 121):

$m_1 = 1 : 6944444 \pm 1290000$ w.f.
$m_2 = 1 : 406585 \pm 1130$ w.f.
$m_3 = 1 : 328000 \pm 494$ w.f.
$m_4 = 1 : 3082100 \pm 55300$ w.f.

volgt er (blz. 123):

$m_1 = 1 : 7003000 \pm 784700$ w.f.
$m_2 = 1 : 406585 \pm 968$ w.f.
$m_3 = 1 : 332892 \pm 1190$ w.f.
$m_4 = 1 : 3085170 \pm 49200$ w.f.

Weer is alleen het resultaat voor de aarde niet te aanvaarden. Hiermee correspondeert n.l. $\Pi_\odot = 8.''759$, terwijl uit een uitvoerige discussie van alle materiaal volgt $8.''797$ of $8.''800$, al naar dat deze waarde der parallaxis wel of niet wordt meegerekend (blz. 158). Uit een nieuwe discussie van de beweging van de knoop van Venus, waarvan n.l. grotendeels de abnormale waarde voor m_3 afhangt, vindt Newcomb: $m_3 = 1 : 332590 \pm 662$ w.f. met de zonsparallaxis: $\Pi_\odot = 8.''762 \pm 0.''006$ w.f. (blz. 163). Aan de afgeleide beweging van de knoop kan moeilik getwijfeld worden. Uit andere seculaire variaties dan die van de knoop van de Venusbaan, volgt, als de massa's van Mercurius en Venus geëlimineerd worden: $m_3 = 1 : 336770 \pm 6240$ w.f. (?), en als voor die massa's genomen wordt: $1 : 6944444$ en $1 : 406750$: $m_3 = 1 : 335730 \pm 4820$ w.f. (?) (blz. 167), dus nog sterker afwijkend dan eerst. Een nieuwe discussie van de gewichten der afzonderlike parallaxis-bepalingen levert voor

---

1) Systeem A op blz. 107.
2) De waarde van m_2 is ook in goede overeenstemming met het resultaat op blz. 81, dat voor Newcomb's $1 : 406690$ in de plaats komt.

de zonsparallaxis : $8.''797 \pm 0.''0024$ of $\pm 0.''0030$ w.f., al naardat het resultaat van de knoop niet of wel in rekening wordt gebracht.

Om tenslotte een zo goed mogelike overeenstemming te bereiken combineert Newcomb de waarde der massa die met deze parallaxis overeenkomt : $m_3 = 1 : 328610 \pm 356$ w.f. of 558 w.f., met $m_1 = 1 : 7936510 \pm 1420000$ w.f. [1]), met $m_2 = 1 : 406600 \pm 816$ w.f., met de elf vergelijkingen (blz. 121) die de seculaire variaties bevatten behalve die der perihelia (hierbij wordt aan het nieuwe resultaat voor de knoop van Venus dubbel gewicht gegeven), en dit alles tenslotte met de drie vergelijkingen (blz. 171) die de variaties der perihelia bevatten, maar na dat deze variaties *gecorrigeerd zijn overeenkomstig de door Hall Sr. voorgestelde wijziging van Newton's wet*. Newton's wet zou namelik moeten luiden :

$$\text{kracht} = k^2 \, m \, m' \, r^{-(2+\delta)}$$

en δ zou een zeer kleine maar toch bepaalbare grootheid zijn. Newcomb bepaalt δ zo dat het grote exces in de beweging van het perihelium van Mercurius [2]) ongeveer verdwijnt :

$$\delta = 0.0000001574 \, . \qquad \text{(blz. 118-119)}$$

Omdat echter op de niet geheel verklaarde beweging van het perihelium van Mars ook de kleine planeten invloed zouden kunnen hebben, maakt Newcomb twee oplossingen α en β der zeventien vergelijkingen : met en zonder de vergelijking van het Mars-perihelium,

---

1) Newcomb's bedoeling was blijkbaar 1 : 7943000 aan te nemen.

2) Newcomb vond hiervoor $41.''25 \pm 1.''41$ w.f. per eeuw, voor 1850.0 (blz. 109). Met 0.0000001574 correspondeert $42.''34$ volgens hem. Blijkbaar is met de excentriciteit geen rekening gehouden. Ik vind voor de beweging van het perihelium per eeuw $D_t \tilde{\omega} = \frac{1}{2} n \delta \sec^2 \frac{1}{2} \varphi$, als $\tilde{\omega}$ de periheliumlengte en φ de excentriciteitshoek van de baan en n de sideriese beweging per Jul. eeuw voorstelt, hetgeen overeenstemt met form. 34 op blz. 49 van Tisserand, Méc. Cél. I. Hieruit volgt een verschil van $\pm 0.''47$ per eeuw met Newcomb's waarde. Met de in dit proefschrift aangenomen massa's volgt uit Newcomb's gegevens (Astr. Pap. V, part 4, blz. 375) de theoretiese sideriese beweging van het perihelium $+ 534.''95$. De waargenomen beweging van Leverrier's tafels is $+ 565.''44$ (Newcomb nam abusievelik 567.81 : Grossmann, A. N. **214,** kol. 47) Newcomb's correcties hierop zijn : uit meridiaanwaarnemingen $- 9.''54$, in combinatie met de overgangswaarnemingen : $- 1.''01$ (F. C. blz. 66), en indien voor de zonselementen eerst de definitieve waarden gesubstitueerd worden: $+ 6.''31$ (blz. 94). Hieruit volgt de waargenomen beweging resp.: $555.''90$, $564.''43$ en $571.''75$, en het exces in de beweging : $20.''95$, $29.''48$ en $36.''80$. Newcomb kiest de hoogste waarde (geeft echter $41.''25$), waarmee ik vind $\delta = 0.0000001353$. Einstein's $42.''90$ wijkt van het hoogste bedrag reeds 17 % af!

en wel beide oplossingen nog voor 't geval (A) dat aan de bovenvermelde waarde van m_3 een gewicht overeenkomstig de eerste middelbare fout, en voor 't geval (B) dat dit overeenkomstig de andere middelbare fout wordt aangenomen. In totaal dus vier oplossingen, waarvan hieronder het resultaat (pag. 172):

	A α	A β	B α	B β
$1 : m_1$	6539000	6567000	6460000	6477000
$1 : m_2$	408230	408120	408730	408670
$\Pi_\odot$	8."783	8."782	8."789	8."788
$1 : m_3$	330180	330290	329500	329610

De combinatie van al het materiaal en het invoeren van Hall's hypothese heeft de gewenste overeenstemming niet gebracht. Newcomb zegt: „We still find ourselves confronted by this embarrassing dilemma: Either there is something abnormal in connection with the node of Venus, due to an unknown cause acting on the planet, to some extraordinary errors in the observations or their reduction, or to some error in the theory on which the discussion is based, or the determinations of the solar parallax are nearly all in error in one direction by amounts which are, in more than one case, quite surprising".

Newcomb hakt de knoop door (blz. 175) en kiest $\Pi_\odot = 8."790$, waarmee correspondeert $m_3 = 1 : 329390$. Voor Venus kiest hij $m_2 = 1 : 408000$, blijkbaar grotendeels in overeenstemming met de vier laatste oplossingen, echter enigszins rekening houdend met het resultaat der periodieke storingen $1 : 406690$. Voor Mercurius neemt hij aan $m_1 = 1 : 6000000$, ongeveer evenveel rekening houdend met de laatste resultaten, als met de waarden van m_1 die Von Haerdtl afleidde. Hall's massa van Mars laat hij onveranderd. Deze waarden der massa's van de binnenplaneten liggen aan de tafels ten grondslag, maar Newcomb heeft ook Hall's hypothese omtrent de aantrekkingswet in de tafels ingevoerd, door n.l. de seculaire variaties der perihelia alle te corrigeren overeenkomstig: $\delta = 0.00000016120$ [1]). Hall's hypothese is echter niet meer toelaat-

[1]) Fundamental Constants, blz. 184 en Astr. Pap. VI, 1898, Tables of the four inner satellites, blz. 12, 175, 275, 390. Het is merkwaardig dat Newcomb meer geneigd was Newton's wet te wijzigen, dan het Zodiakaallicht voor de verklaring der abnormale verschillen te hulp te roepen! Men zie in dit verband twee korte artiekelen van Woltjer en van De Sitter over Seeliger's hypothese in Versl. K.A.W. XXII, 1914, blz. 1229, 1239.

baar sinds E. W. Brown heeft aangetoond dat een zo grote waarde van δ niet te rijmen is met de verschillen tussen de theoretiese en de waargenomen bewegingen van het perigeum en van de knoop van de maansbaan. Volgens Brown zou δ hoogstens $4 \cdot 10^{-8}$, dus slechts één vierde deel kunnen zijn van wat de beweging van het perihelium van Mercurius eist [1]). De hypothese verliest hierdoor alle recht van bestaan, en Newcomb's vier laatste oplossingen en zijn definitieve waarden der massa's doen dat dus ook.

De moeilikheden waarvoor Newcomb stond blijven, nu als vroeger!

§ 18. *De massa van het Jupiterstelsel.*

Van geen der planeten is de massa met zo hoge graad van nauwkeurigheid bekend als van Jupiter, dank zij zijn grote massa, zijn plaats middenin het zonnestelsel in de onmiddellike nabijheid der kleine planeten, en zijn vier heldere satellieten. Het is niet nodig alle waarden die voor de massa gevonden zijn bijeen te brengen. Newcomb heeft ze geschift, en die bepalingen uitgezocht, die om de methode of de aard van het onderzoek en om de geringe onzekerheid, uitgedrukt in de waarschijnlike fout, het meeste vertrouwen verdienen [2]). Dat waren: Hill's resultaat uit de storingen van Saturnus, dat van Newcomb uit de storingen van Polyhymnia, dat van Krüger uit de storingen van Themis, dat van Von Haerdtl uit de storingen van Winnecke's komeet, en dat van Möller uit de storingen van de komeet van Faye en ten slotte wat de waarneming van de satellieten had opgeleverd. Hij leidde hieruit af:

$$m_5 = 1 : 1047.35 \pm 0.044 \text{ w.f.}$$

Newcomb heeft hierbij twee keer gebruik gemaakt van de resultaten uit waarnemingen van een komeet, hoewel hijzelf voor 't eerst op de onzekerheid dezer resultaten gewezen heeft [2]), Von Haerdtl's resultaten heeft hij blijkbaar geaccepteerd op grond van de zorg waarmee het onderzoek volbracht is, van de zeer grote storingen door Jupiter en van de geringe waarschijnlike fout. Newcomb zou echter de onzekerheid iets hoger willen aanslaan. Möller's resultaat uit de beweging van Faye's komeet heeft hij wellicht om de geringe waarschijnlike fout aangenomen. De Sitter meent dat de nauwkeurigheid van Von Haerdtl's werk de argumenten tegen het bepalen van de Jupitermassa uit kometenstoringen hun kracht niet ontneemt, en dat zowel Von Haerdtl's als Möller's Jupitermassa niet tot de meest betrouwbare bepalingen gerekend moeten worden. In 't algemeen

[1]) M.N. **63**, 1903, blz. 397.

[2]) Zie hetgeen in verband hiermee gezegd is op blz. 51-53.

kan men het hiermee slechts eens zijn, maar men moet niet vergeten dat de invloed van de onzekerheden der waarneming op de massa des te geringer zijn naarmate de storingen een groter bedrag bereiken. Von Haerdtl's resultaat is echter berekend met massa's voor Mercurius, Venus en de Aarde, die verbetering nodig hebben, en daar 't niet onmogelik is dat de massa van Jupiter hierdoor nog verandering ondergaan zou, kan ook hierin een aanleiding tot verwerping van Von Haerdtl's massa gevonden worden.

De Sitter [1]) wijzigt Newcomb's lijst ook nog door het resultaat uit alle waarnemingen van satellieten te vervangen door dat uit de waarnemingen met de heliometer van Gill uit 1891, en van Cookson uit 1901 en uit 1902 [2]). Deze waarnemingen, vooral die van Gill, door De Sitter bewerkt, schijnen een zeer groot vertrouwen te verdienen. Zij zijn verricht door de positiehoek en de afstand van de ene satelliet ten opzichte van de andere te meten.

Wij hebben nu 't volgende lijstje [7]) voor het omgekeerde der Jupitermassa:

	$1 : m_5$	g
Krüger, Storingen van Themis:	1047.538 ± 0.192 w.f. [3])	5
Hill, Storingen van Saturnus:	1047.377 ± 0.121 „ [4])	7
Newcomb, Storingen van Polyhymnia:	1047.342 ± 0.045 „ [5])	20
Gill-De Sitter, Satellieten, 1891:	1047.498 ± 0.058 „	10
Cookson, Satellieten, 1901:	1047.456 ± 0.086 „	4
Cookson, Satellieten, 1902:	1047.249 ± 0.057 „	6
v. Haerdtl, Komeet van Winnecke:	1047.176 ± 0.014 „ [6])	0

1) Versl. K.A.W. XVI, 1908. blz. 714-717.
2) Cape Annals, XII, part 1, 1915, blz. 152; part 2, 1906, blz. 203; part 4, 1907, blz. 113.
3) „Untersuchung über die Bahn des Planeten Themis", 1873; Correctie daarop in A.N. 81, kol. 334.
4) „Tables of Saturn", Astr. Pap. VII, part 2, blz. 160. Hill zelf geeft 1074.378, maar 1.000479 : 1047.879 = 1047.377.
5) „On the Mass of Jupiter and the Orbit of Polyhymnia", Astr. Pap. V, part 5, blz. 392. Newcomb zelf geeft ± 0.06, *foutief*, 't geen men gemakkelik met de andere waarschijnlike fouten verifieert. Ook de waarschijnlike fout van de correctie van de knoop is onjuist en moet ± 9.70 inplaats van ± 1.00 zijn.
6) „Die Bahn des periodischen kometen Winnecke", Wien, Teil I, 1888, blz. 73, 74, 87; Teil II, 1889, blz. 17.
7) Met zeer geringe wijzigingen dat van De Sitter. Zie Versl. K.A.W. XVI, 1908, blz. 716; of Cape Annals, XII, part 1, 1915, blz. 153.

Men vindt uit de zes eerste waarden:

Arithm. gemiddelde:	1047.410 ± 0.030 w.f.
Gemiddelde met gewichten:	1047.394 ± 0.026 w.f.
Uit de planeten:	1047.380 ± 0.033 w.f.
Uit de satellieten:	1047.415 ± 0.052 w.f.

De Sitter stelt voor aan te nemen voor de massa van het Jupitersysteem:

$$m_5 = 1 : 1047.40 \pm 0.03 \text{ w.f.}$$

Indien men de waarde uit de beweging van Winnecke's komeet mee zou willen rekenen, kan dat slechts met gering gewicht, zodat het eindresultaat hoogstens 0.01 in de noemer minder worden zou. 't Verwerpen heeft dus geen invloed van betekenis.

Newcomb betoogt [1]) dat voorlopig uit waarnemingen van bekende kleine planeten geen verbetering van de Jupitermassa te verkrijgen is. Vooral Polyhymnia, maar ook Themis zijn wegens de vorm en ligging hunner baan voor de bepaling van Jupiter's massa bij uitstek geschikt. Maar gunstige standen zullen deze planeten niet voor 't einde der twintigste eeuw krijgen. [2]) Eveneens, toont De Sitter aan [3]), is uit waarnemingen van satellieten met de heliometer voorvoorlopig geen verbetering te wachten. De schaalwaarde van de heliometer zou tot op minder dan 1 : 100000 van zijn bedrag bekend moeten zijn, en dit schijnt tot nu onmogelik. Men kan overigens tevreden zijn, daar de massa van Jupiter bekend is tot op minder dan 1 : 33000 van zijn waarde.

Behalve die van Hill bezitten wij nog een tweede afleiding van de Jupitermassa uit de beweging van Saturnus. Gaillot heeft Leverrier's theorie van de beweging van Jupiter en Saturnus uitgebreid tot termen van de 3de orde in de massa's van beide planeten. Daarbij is aan den dag gekomen dat een seculaire variatie van de 3de orde in de massa's, van de sideriese beweging van Saturnus en van de halve grote as van zijn baan, werkelik bestaat [4]), zoals Haretu langs analytiese weg had aangetoond, zonder evenwel tot een analytiese uitdrukking daarvoor te geraken [5]). Gaillot maakt

---

1) „Orbit of Polyhymnia", blz. 384-385.

2) Of de „Trojanen" ons hier van dienst kunnen zijn zal de tijd leeren.

3) Versl. K.A.W. XVI, 1908, blz. 716.

4) Annales de l' Obs. de Paris, Mém. XXIV, 1904, blz. 155-161, de verandering van de halve grote as zou — 0.000000048 per jaar bedragen. Hoewel Gaillot aan het bestaan dezer variatie niet twijfelt acht hij het voorzichtiger consequenties op te schorten totdat de analyse de resultaten bevestigd heeft (blz. 174).

5) Tisserand, Méc. Cél. I, blz. 402, 403.

twee oplossingen, eerst niet, dan wel rekening houdend met deze seculaire variatie. De eerste oplossing geeft een slechts zeer weinig betere voorstelling der normaalplaatsen. Voor de Jupitermassa vindt hij resp.

$$1 : 1047.52 \qquad \text{en} \qquad 1 : 1047.95,$$

waarden die zover uiteen liggen, dat het niet de moeite waard lijkt hun onzekerheid af te leiden uit Gaillot's gegevens. Zij zouden zeker in De Sitter's lijst niet mee kunnen doen. Evenwel vraagt men zich af, hoe Hill's waarde worden zou, indien in zijn theorie met deze variatie rekening gehouden was, en of het gewicht 7 dat Newcomb toekende niet herzien moet worden. Verandering in het definitieve resultaat zou dit overigens niet brengen.

§ 19. *De massa's der stelsels van Saturnus, Uranus en Neptunus, bepaald uit storingen.*

Er zijn twee bepalingen van de massa van *Saturnus* uit de storingen in de beweging van Jupiter, n.l. van Hill en van Gaillot.

Hill [1]) heeft afgeleid uit waarnemingen van Jupiter van 1750 tot 1888, verenigd in 141 normaalplaatsen, een correctie aan Bessel's Saturnusmassa, en vindt:

$$m_6 = 1 : 3502.26 \pm 0.53 \text{ w.f.}$$

Gaillot [2]) berekent een correctie aan Leverrier's Saturnusmassa 1 : 3529.6, uit de waarnemingen van 1750 tot 1907, verenigd in 78 normaalplaatsen. Zijn resultaat is:

$$m_6 = 1 : 3499.9 \pm 1.18 \text{ w.f.}\ ^{3}).$$

De onderlinge overeenstemming is goed in vergelijking met de grote verschillen tussen de waarden van m_6 die uit de waarnemingen der satellieten volgen (§ 24). De voorstelling van de waarnemingen door de theorie is bij Hill en Gaillot even goed. Gewichten toekennend, omgekeerd evenredig aan de waarschijnlike fouten, vind ik het gemiddelde

$$\mathbf{m_6 = 1 : 3501.5 \pm 0.7 \text{ w.f.}}$$

---

[1]) „Tables of Jupiter", Astr. Pap. VII, part 1, blz. 17.

[2]) Annales de l' Obs. de Paris, Mém. XXXI, 1913, blz. 105, 106.

[3]) Deze waarschijnlike fout geeft Gaillot zelf niet, maar heb ik afgeleid uit de som van de quadraten der overblijfsels, en de coëfficienten der normaalvergelijkingen. Gaillot zelf geeft 3499.8, maar op twee decimalen afrondend vind ik 3499.89.

Hill en Gaillot eveneens hebben uit de beweging van Saturnus de massa van *Uranus* afgeleid. Hill vindt:

$$m_7 = 1 : 23240 \pm 92 \text{ w.f.}$$ [1]).

De overblijfsels in de rechte klimming van Saturnus vertonen een systematies verloop, vooral sinds het midden der vorige eeuw. Dat de gevonden massa van Uranus zoveel kleiner is dan die uit de waarneming der satellieten volgt, zou volgens Hill aan systematiese fouten der waarnemingen kunnen worden toegeschreven. Gaillot's resultaat is [2]):

$$m_7 = 1 : 22453 ,$$

of

$$m_7 = 1 : 22805 ,$$

al naardat niet of wel rekening gehouden wordt met Haretu's seculaire variatie der grote as van de baan van Saturnus. Het is niet mogelik tussen beide waarden een keus te doen. Ik heb het niet de moeite waard gevonden de waarschijnlike fouten uit Gaillot's gegevens te berekenen. Gaillot's resultaat is overigens minder in strijd met de beweging der satellieten dan dat van Hill. Zelf geeft Gaillot de voorkeur aan de eerste waarde van m_7.

Voor de massa van *Neptunus* staan ons ook twee bepalingen uit storingen ten dienste. Newcomb heeft meer dan een halve eeuw geleden uit de beweging van Uranus afgeleid [3]):

$$m_8 = 1 : 19700 ,$$

en deze waarde is door Hill in zijn Jupitertafels en door Newcomb in de Uranustafels gebruikt, maar Newcomb verving die later door 1 : 19314, afgeleid uit de beweging van de satelliet en uit de storingen van Uranus, door vergelijking van de waarnemingen van 1781 tot 1896 met provisionele tafels [4]). Wat is nu dat resultaat uit de storingen alleen? Ik vermoed dat dit is wat Brown meedeelt in een artiekel over de stand van de draaiingsas en over de afplatting van Neptunus [5]):

$$m_8 = 1 : 19261 ,$$

---

1) „Tables of Saturn", Astr. Pap. VII, 1898, part 2, blz. 160, 161. Hill zelf geeft abusievelik 1 : 23239 ± 87 w.f. Uit de waarnemingen van voor 1800 vond hij 1 : 20927 ± 943 w.f.

2) Annales de l' Obs. de Paris, Mém. XXIV, 1904, blz. 172, 173.

3) „An Investigation of the Orbit of Uranus", Smithsonian Contributions to Knowlegde, XIX, 1874, blz. 173.

4) „Tables of the Heliocentric Motion of Uranus", Astr. Pap. VII, 1898, part 3, blz. 293.

5) A. J. **20**, 1900, blz. 185.

als door Newcomb uit de storingen afgeleid. Een publicatie van Newcomb zelf heb ik niet gevonden.

Gaillot heeft eveneens uit de beweging van Uranus de massa van Neptunus bepaald [1]). Zijn resultaat is:

$$m_8 = 1 : 19094 \pm 22 \text{ w.f.}$$

De waarnemingen waaruit dit resultaat is afgeleid strekken zich uit van 1690 tot 1903. De overblijfsels van de laatste vijftig jaar vertonen een duidelike periode van ongeveer tien jaren, met een amplitude van ongeveer 1″.

---

[1]) Annales de l'Obs. de Paris, Mém. XXVIII, 1910, blz. A75, A78, A83. De waarschijnlike fout geeft Gaillot niet. Ik heb deze afgeleid uit de overblijfsels in de waarnemingen met de coëfficienten der normaal-vergelijkingen.

HOOFDSTUK V

RESULTATEN VAN DE MASSABEPALING UIT DE WAARNEMING VAN SATELIETEN

§ 20. *Enige algemene opmerkingen.*

In dit hoofdstuk zijn de resultaten der massabepaling voor de planeten Uranus, Neptunus, Mars en Saturnus bijeen gebracht. De volgorde der behandeling wijkt om praktiese redenen af van de natuurlike orde der planeten. De lijsten van de waarden der schijnbare halve grote assen zijn misschien niet geheel, dan toch op weinig na volledig tot aan het laatste jaar dat in de tabellen voorkomt. Zoveel mogelik heb ik de waarden van Δ, de schijnbare halve grote as, herleid op de beste bepaling van de waarde R van één omwenteling der mikrometerschroef, uitgedrukt in boogseconden aan de hemel. Indien een reeks waarnemingen met twee mikrometers is verricht, en voor beide, of voor één van beide schroefwaarden, een correctie nodig was, ben ik er van uitgegaan dat de invloed van elke schroefwaarde op het eindresultaat voor Δ evenredig mocht worden gesteld met het aantal met elke mikrometer verrichte waarnemingen. Dit beginsel is waarschijnlik wel juist voor 't geval dat de waarnemingen met elke mikrometer verricht, vrij gelijkmatig over de gehele baan van de satelliet verspreid zijn. De toepassing ervan in andere gevallen zal toch tot ernstige fouten geen aanleiding geven. De correcties zijn immers meestal zeer gering. De toegepaste formule is:

$$\frac{\delta\Delta}{\Delta}=\frac{n}{n+n'}\frac{\delta R}{R}+\frac{n'}{n+n'}\frac{\delta R'}{R'}$$

In Washington heeft men tot Maart 1900 gebruikt de mikrometer „Clark I". In de delen der Washington Observations van 1873 tot 1891 kan men de geschiedenis vinden van de bepaling der schroefwaarde voor dit instrument. In 1891 neemt Hall ten

slotte aan $R = 9.''9360 \pm 0.''0003$ w.f. Het gebrek aan overeenstemming tussen de vele bepalingen van R tot 1891 in aanmerking nemend, geloof ik dat de waarschijnlike fout een te gunstig beeld der nauwkeurigheid geeft. In de Publications of the Naval Observatory, VI, 2nd series van 1911, blijkt deze waarde van R voor alle metingen met „Clark I" verricht, definitief te zijn aangenomen. Na Maart 1900 wordt de mikrometer „Clark II" gebruikt. Bij de opmerkingen achter de tabellen van Δ en μ zal men over de schroefwaarde hiervan nog 't nodige vinden, als ook over mikrometerschroefwaarden van andere observatoria.

§ 21. *De bepaling van de massa van Uranus.*

In de tabellen voor de satellieten van Uranus—Oberon, Titania, Umbriël en Ariël — is meegedeeld in de eerste kolom het nummer, in de tweede de waarnemer, in de derde het jaar der waarnemingen, in de vierde het observatorium, in de vijfde de objectief-middellijn in inches van het instrument waarmee de waarneming geschiedde, in de zesde de methode der waarneming (p, s betekent meting in positiehoek en afstand, x, y meting in rechthoekige coördinaten ten opzichte van de randen der schijf, α, δ meting in rechte klimming met de klok en in declinatie met de mikrometer), in de zevende verwijzing over de autoriteit naar de opgaaf achter de tabellen; in de achtste de gecorrigeerde waarde der schijnbare halve grote as; in de negende de waarschijnlike fout in 0.''001 als eenheid; in de tiende de volgens de formules van § 7, blz. 40 berekende waarden van μ, het omgekeerde van de massa der planeet (de zon als eenheid); in de elfde het gewicht aan elke waarde van μ toegekend. Voor de satellieten van Uranus, waarbij de waarschijnlike fout voor elke waarde van Δ bekend is, is het gewicht omgekeerd evenredig daarmee aangenomen. Men houdt aldus met de inwendige overeenstemming van elke waarnemingsreeks rekening, en voorkomt dat eventuele systematiese fouten van inwendig goede bepalingen te grote invloed krijgen.

OBERON.

No.	Waarn.	Jaar	Observ.	Instr. inch	Meth.	Aut.	Δ	w.f. in 0.″001	μ	g
1	Newcomb	$^{1874}/_{75}$	Wash.	26	p.s.	a	42.″100	34	22608	1.18
2	Hall Sr.	$^{1875}/_{76}$	„	„	„	b	42.037	58	22709	0.69
3	„	$^{1881}/_{82}$	„	„	„	„	42.086	30	22630	1.34
4	„	$^{1883}/_{84}$	„	„	„	„	42.059	35	22674	1.15
5	See	1900	„	„	„	c	42.202	42	22444*	0.95
6	„	1901	„	„	„	„	42.105	38	22599*	1.05
7	„	1902	„	„	„	„	42.218	40	22418*	1.00
8	„	1901	„	„	„	„	42.214	32	22425*	1.25
9	„	1902	„	„	„	„	42.231	45	22398*	0.89
10	Frederick Hammond	1904	„	„	„	„	42.004	36	22763*	1.11
11	Frederickson	1907	„	„	„	„	41.946	54	22857*	0.74
12	Barnard Schaeberle	$^{1894}/_{95}$	Lick	36	„	„	42.101	25	22606	1.60
13	Aitken Hussey Schaeberle	$^{1896}/_{98}$	„	„	„	„	41.968	42	22821	0.95
14	Aitken	$^{1899}/_{1901}$	„	„	„	„	42.039	35	22706	1.14
15	„	1903	„	„	„	„	42.149	37	22529	1.08
16	„	$^{1903}/_{05}$	„	„	„	„	42.080	38	22640	1.05
17	Aitken Barnard	$^{1906}/_{07}$	Lick Yerkes	36 40	„	„	41.961	41	22833	0.98
18	Barnard	$^{1907}/_{09}$	Yerkes	40	„	„	42.067	35	22661	1.14
19	Barnard Aitken	$^{1910}/_{11}$	Yerkes Lick	40 36	„	„	41.916	42	22907	0.95
20	Hall Jr.	$^{1909}/_{10}$	Wash.	26	„	d	42.317	119	22261*	0.34
21	Eppes Burton	1911	„	„	„	e	42.222	74	22412*	0.54

Opmerkingen bij Oberon.

No. 1. Newcomb's resultaat is $\Delta = 42.''17$ voor een elliptiese baan, $42.''15$ voor een cirkelvormige baan, en is afgeleid uit 26 waarnemingen van 1874, 8 van 1875. Die van 1874 zijn verricht met een niet achromaties oculair, waarvoor bepaald was $R = 9.''902$, in overeenstemming met de verwachting kleiner dan de waarde $R = 9.''948$ voor het achromaties oculair, dat in 1875 in gebruik genomen is. Bij de meting van Oberon en Titania werden satelliet en Uranus even ver uit het midden van het veld gebracht. De draadverlichting was rood en de objecten zijn enigszins groenachtig. Uranus wordt zelfs als blauwachtig groen beschreven. In dit geval levert de afstandsmeting met een niet achromaties oculair te grote resultaten, die met een kleinere schroefwaarde gecorrigeerd kunnen worden. Newcomb echter gebruikte voor deze metingen van de waarnemingen uit 1874 niet $R = 9.''902$, maar een gemiddelde tussen dit en wat hij noemt „the true value", n.l. $9.''948$,

en wel $R = 9.''920$ [1]). Dit lijkt mij principieel verkeerd. Ik heb Newcomb's waarde, ter herleiding op $R = 9.''902$ (voor 26 waarnemingen) en op $R = 9.''936$ (voor 8 waarnemingen, inplaats van $R = 9.''948$) gecorrigeerd met:

$$\left(\frac{26}{26+8}\times\frac{-0.018}{9.920}+\frac{8}{26+8}\times\frac{-0.012}{9.948}\right)\times 42.''17.$$

Voor $\Delta = 42.''17$ vind ik zo: $\Delta = 42.''100$.

Nos. 2—4. A. Hall Sr. herleidde de waarnemingen met $R = 9.''9479$. De invloed van temperatuur zou onmerkbaar zijn, zegt hij, de temperatuurcoëfficient zou gering wezen, en de waarnemingen zijn in de lente verricht. Ter herleiding op de definitieve waarde $R = 9.''9360$, heb ik Hall's waarnemingen gecorrigeerd met $-\frac{0.0119}{9.9479}\times\Delta$.

Nos. 5—11. Al deze waarnemingen zijn herleid met See's bepaling van R voor mikrometer Clark II; $R = 9.''9328 - 0.''000055\times(t - 28^0\ F)$. Of echter de temperatuur waargenomen is, blijkt niet. Voor de nos. 8—11 is Oberon in de meting verbonden met Titania, inplaats van met Uranus.

No. 12. Hoofdzakelik waarnemingen van Barnard.

Nos. 16—19. No. 16 en 17 verbindingen van Oberon met Titania.

De Nos. 17—19 zijn gecorrigeerd voor de schroefwaarde van Barnard op Yerkes Observatory. Gebruikt is bij de herleiding $R = 9.''665$ (zie H. Struve's „Bahnen der Ur. trab.", 1e Abt. p. 9), terwijl Aitken in „The Binary-Stars" (pag. 47) als betere waarde opgeeft $9.''6617$.

No. 17 is gecorr. met $\frac{6}{14}\times\frac{-0.0033}{9.665}\times 41.''967 = -0.''006$ (6 waarnemingen van Barnard, 8 van Aitken),

no. 18 met $-\frac{0.0033}{9.665}\times 42.''081 = -0.''014$,

no. 19 met $\frac{21}{28}\times\frac{-0.0033}{9.665}\times 41.''927 = -0.''011$ (21 waarnemingen van Barnard, 7 van Aitken).

Nos. 20—21. Waarnemingen herleid met See's bepaling van R. Men zie de grote waarschijnlike fouten, en de bovendien zeer grote waarden van Δ, die alleen met die van See te vergelijken zijn. Hall's resultaat is het grootste van alle.

---

[1]) Men zie over de oculairen en de schroefwaarden Newcomb's „The Uranian en Neptunian Systems", in Wash. Obs. 1873, App. I.

TITANIA

No.	Waarn.	Jaar	Observ.	Instr. inch	Meth.	Aut.	Δ	w.f. in 0.″001	μ	g
1	Newcomb	$^{1874}/_{75}$	Wash.	26	p.s.	a	31.″406	37	22772	1.08
2	Hall Sr.	$^{1875}/_{76}$	„	„	„	b	31.313	62	22975	0.64
3	„	$^{1881}/_{82}$	„	„	„	b	31.302	35	22999	1.15
4	„	$^{1883}/_{84}$	„	„	„	b	31.402	30	22781	1.31
5	See	1900	„	„	„	c	31.529	39	22506*	1.03
6	„	1901	„	„	„	„	31.512	34	22543*	1.18
7	„	1902	„	„	„	„	31.639	36	22272*	1.11
8	Frederick Hammond	1904	„	„	„	„	31.505	40	22558*	1.00
9	Frederickson	1907	„	„	„	„	31.589	51	22378*	0.78
10	Barnard	$^{1894}/_{95}$	Lick	36	„	„	31.330	22	22938	1.82
	Schaeberle	$^{1897}/_{98}$	„	„	„	„	31.408	30	22768	1.33
	Aitken									
11	Hussey									
	Schaeberle	$^{1899}/_{1901}$	„	„	„	„	31.402	32	22781	1.25
12	Aitken									
13	„	$^{1903}/_{05}$	„	„	„	„	31.385	28	22817	1.43
14	„	$^{1906}/_{07}$	„	„	„	„	31.392	57	22802	0.70
15	Barnard	$^{1907}/_{09}$	Yerkes	40	„	„	31.336	37	22925	1.08
16	Barnard	$^{1910}/_{11}$	Yerkes	40	„	„	31.468	41	22638	0.98
	Aitken		Lick	36	„	„				
17	Aitken	$^{1903}/_{04}$	Lick	36	„	„	31.428	65	22724	0.62
18	„	$^{1905}/_{07}$	„	„	„	„	31.360	57	22872	0.70
19	„	$^{1903}/_{04}$	„	„	„	„	31.392	83	22802	0.48
20	„	$^{1905}/_{07}$	„	„	„	„	31.397	72	22792	0.56
21	Hall Jr.	$^{1908}/_{10}$	Wash.	26	„	d	31.599	90	22357*	0.44
22	Eppes	1911	„	„	„	e	31.668	75	22211*	0.53

Opmerkingen bij Titania.

No. 1. Newcomb's resultaat is $\Delta = 31.''46$ (zowel voor een cirkelvormige als voor een elliptiese baan). Op dezelfde wijze corrigerend als voor Oberon, vind ik: $\Delta = 31.''406$. De correctie is: $\left(\frac{24}{24+7} \times \frac{-0.018}{9.920} \times \frac{7}{24+7} \times \frac{-0.012}{9.948}\right) \times 31.''46$. Er zijn n.l. in 1874 24 waarnemingen verricht met het niet achromaties oculair; 7, in 1875, met het achromaties oculair.

Nos. 2—4. Hall's resultaten zijn gecorrigeerd met $-\frac{0.0119}{9.9479} \times \Delta$.

Nos. 5—9. Deze waarnemingen zijn herleid met See's bepaling van de schroefwaarde van mikrometer „Clark II": $R = 9.''9328 - 0.''000055$ (t—28° F). Het blijkt echter niet of de temperatuur werkelik is waargenomen.

No. 10. Voornamelik waarnemingen van Barnard.

Nos. 15—16. Beide gecorrigeerd voor de schroefwaarde van Barnard op Yerkes Observatory.

No. 15 met $-\frac{0.0033}{9.665}\times 31.''347 = -\ 0.''011$.

No. 16 met $-\frac{22}{32}\times\frac{0.0033}{9.665}\times 31.''475 = -0.''007$ (22 waarnemingen van Barnard, 10 van Aitken).

Nos. 17—18. Titania verbonden met Ariël.

Nos. 19—20. Titania verbonden met Umbriël.

Nos. 21—22. De waarnemingen zijn herleid met See's R voor mikrometer „Clark II". De waarschijnlike fouten, hoewel zeer groot, zijn toch niet zo afwijkend als bij Oberon (nos. 20—21). De waarden voor △ zelf, behoren weer tot de grootste, met die van See en Frederick, Hammond en Frederickson.

Autoriteit voor Oberon en Titania.

a. S. Newcomb, „The Uranian and Neptunian Systems", Wash. Obs. 1873, App. I, blz. 36.
b. A. Hall, „The Orbits of Oberon and Titania," Wash. Obs. 1881, App. I, blz. 30—32.
c. H. Struve, „Bahnen der Uranustrabanten, Oberon und Titania." Abh. Akad. Berlin, 1912, blz. 104, 105.
d. A. Hall Jr., A. J. **27**, 1911, blz. 19.
e. J. B. Eppes, A. J. **27**, 1911, blz. 191.

UMBRIËL.

No.	Waarn.	Jaar	Observ.	Instr. inch	Meth.	Aut.	△	w.f. in 0.''001	μ	g
1	Newcomb	$^{1874}/_{75}$	Wash.	26	p.s.	c	19.''30	80	22236	0.50
2	Barnard	$^{1894}/_{95}$	Lick	36	„	a	18 820	80	23981	0.50
3	Schaeberle	1897	„	„	„	„	19.256	67	22389	0.60
4	Hussey Aitken	$^{1898}/_{99}$	„	„	„	„	19.016	56	23247	0.71
5	„	$^{1900}/_{01}$	„	„	„	„	19.089	67	22982	0.60
6	„	$^{1910}/_{11}$	„	„	„	„	19.192	85	22614	0.47
7	Barnard	$^{1894}/_{95}$	„	„	„	d	18.82	70	23981	0.57
8	Schaeberle	1897	„	„	„	„	19.23	70	22480	0.57
9	Hussey Aitken	$^{1898}/_{99}$	„	„	„	„	19.01	60	23269	0.67
10	Hussey Aitken	$^{1900}/_{01}$	„	„	„	„	19.07	70	23050	0.57

Opmerkingen bij Umbriël.

No. 1. Newcomb's waarnemingen zijn herleid met R = 9.''948.

Corrigerend voor R = 9.″936 vindt men a = 19.″30. Voor een cirkelvormige baan vond Newcomb 19.″34. De waarnemingen zijn verricht in 1874 met het niet achromaties oculair, in 1875 met een achromaties oculair. Correctie voor non-achromatisme is niet nodig, daar de waarnemingen in 't midden van 't veld verricht zijn. De waarden voor R, 9.″948 en 9.″936, gelden beide voor het achromaties oculair. Bij het in één oplossing samenbrengen van waarnemingen ten dele met het ene, ten dele met het andere oculair verricht, is dus aangenomen dat niet nog om andere reden correctie nodig is, dan tengevolge van non-achromatisme.

Nos. 7—10. De waarnemingen die aan deze waarden van △ ten grondslag liggen zijn dezelfde als die der nos. 2—5, door Struve afgeleid. De resultaten lopen niet veel uiteen. De beide eerste verschillen minder dan 0.″005, de drie andere paren ongeveer 0.″01. Ook de waarschijnlike fouten lopen niet noemenswaard uiteen. Ik heb de nos. 7—10 bij 't middelen der waarden van μ niet mee laten tellen.

ARIËL.

No.	Waarn.	Jaar	Observ.	Instr. inch.	Meth.	Aut.	△	w.f. in 0.″001	μ	g
1	Newcomb	$^{1874}/_{75}$	Wash.	26	p.s.	c	13.″70	90	22998	0.44
2	Barnard	1894	Lick.	36	,,	a	13.674	51	23129	0.78
3	,,	1895	,,	,,	,,	,,	13.820	55	22404	0.73
4	Schaeberle Hussey	1897	,,	,,	,,	,,	13.746	47	22768	0.85
5	Aitken Hussey	1898	,,	,,	,,	,,	13.585	70	23587	0.57
6	Aitken	1899	,,	,,	,,	,,	13.732	36	22837	1.11
7	,,	$^{1900}/_{01}$	,,	,,	,,	,,	13.546	56	23791	0.71
8	Aitken Barnard	$^{1910}/_{11}$	Lick Yerkes	36 40	,,	,,	13.700	71	22998	0.56
9	Newcomb e.a.	$^{1873}/_{75}$	Wash. e.a.	26 & ?	,,	b	13.853	101	—	0
10	Hall Sr. Holden	1876	Wash.	26	,,	,,	13.626	78	—	0
11	Holden, Burnham Hough, Hall Sr.	$^{1877}/_{81}$	Wash. en Dearborn	26 $18^1/_2$	,,	,,	13.864	428	—	0
12	Henry	1884	Parijs	15^2	,,	,,	13.416	165	—	0
13	Perrotin	1887	Nice	15	,,	,,	13.617	58	23421	0.69
14	Barnard	1894	Lick	36	,,	,,	13.602	71	23498	0.56
15	,,	1895	,,	,,	,,	,,	13.787	61	22565	0.65
16	Schaeberle Hussey	1897	,,	,,	,,	,,	13.706	73	22968	0.55
17	Aitken Hussey	1898	,,	,,	,,	,,	13.415	86	24495	0.46
18	Aitken	1899	,,	,,	,,	,,	13.629	50	23359	0.80
19	,,	1900	,,	,,	,,	,,	13.512	81	23971	0.49
20	,,	1901	,,	,,	,,	,,	13.575	84	23639	0.48
21	See	1901	Wash.	26	,,	,,	13.351	144	24849*	0

Opmerkingen bij Ariël.

No. 8. Daar H. Struve in „Bahnen der Uranustrabanten" niet opgeeft hoeveel waarnemingen door ieder verricht zijn, kan dit resultaat niet voor verbetering der schroefwaarde van Barnard gecorrigeerd worden.

No. 9 en 1. In het resultaat no. 9 zijn door Bergstrand verenigd waarnemingen van Newcomb (8 in s, 6 in p) van Copeland (1 in s, 1 in p) van C. H. F. Peters (0 in s, 1 in p) van Holden (0 in s, 2 in p). Of die van Newcomb en Holden gecorrigeerd zijn voor schroefwaarde, zegt Bergstrand niet. Gezien bovendien het bedrag, zowel voor Δ als voor de waarschijnlike fout aanmerkelik groter dan dat van Newcomb zelf (no. 1), heb ik no. 9 verworpen, en no. 1 (waarnemingen alleen door Newcomb), herleid op R = 9.″936, in de lijst behouden.

No. 10. Daar Bergstrand niet meedeelt of deze resultaten van Washington voor schroefwaarde gecorrigeerd zijn, heb ik dit nummer verworpen.

Nos. 10, 11 en 21. Deze drie nummers heb ik verworpen op grond van hun abnormale waarschijnlike fouten. Merkwaardig van See's resultaat is, dat hij, die bij Titania en Oberon de grootste bedragen voor Δ gaf, hier de allerkleinste geeft!

Nos. 14—20. Aan de nos. 14—20 liggen dezelfde waarnemingen ten grondslag als Struve voor de nos. 2—7 gebruikt heeft. In tegenstelling met wat bij Umbriël het geval was, zijn hier de verschillen tusschen Bergstrand's en Struve's resultaten zeer groot, zowel in Δ als in de waarschijnlike fout. Bergstrand heeft veel geringere waarden voor Δ, voor de nos. 5 en 17 is het verschil zelfs 0.″170 ! Waarvandaan is dit verschil? Wanneer in waarnemings-vergelijkingen de bekende leden betrekkelik groot zijn, zodat uit de normaal-vergelijkingen voor alle of voor enkele onbekenden grote bedragen volgen, kan het nodig zijn een tweede oplossing te berekenen ter verkrijging van definitieve waarden. Berekeningen met éénmaal oplossen der normaal-vergelijkingen bij verschillende uitgangswaarden kunnen dus verschillende resultaten opleveren. Het verschil in quaestie is echter zó groot dat het bezwaarlik hieraan toe te schrijven is, indien Bergstrand en Struve van verschillende elementen-systemen zijn uitgegaan. Ik heb Bergstrand's waarden voor Δ niet gebruikt.

Autoriteit voor Umbriël en Ariël.

a. H. Struve, „Bahnen der Uranustrabanten, Oberon und Titania", Abh. Akad. Berlin, 1912, blz. 105, 106.

b. Ö. Bergstrand, „Ueber die Bahn des ersten Uranustrabanten, Ariël", 1904, blz. 53.
c. S. Newcomb, „The Uranian and Neptunian Systems", Wash. Obs. 1873, App. I, blz. 36.
d. Ö. Bergstrand, „Sur le mouvement du deuxième satellite d'Uranus, Umbriel", Ark. f. Mat. Astr. och Physik, Bd. 6, Stockholm, 1909, blz. 15, 16.

Uit de tabel van Oberon blijkt dat See van 1900—1902 (nos. 5—9) en Hall Jr., Eppes en Burton van 1909—1911 (nos. 20, 21) op één uitzondering na, de hoogste waarden voor Δ verkregen hebben, waarmee dus de laagste waarden van μ corresponderen. Van de waarnemers in Washington hebben na 1900 Frederick, Hammond en Frederickson in 1904 en 1907 (nos. 10, 11) géén zeer hoge, doch juist waarden van Δ die aan de lage kant zijn. In de tabel van Titania is dit nog sterker. Zonder uitzondering hebben alle waarnemers van Washington na 1900 biezonder hoge waarden voor Δ gevonden. De oude waarden van Washington en die van Lick en Yerkes Observatory stemmen onderling overeen bij de beide buitenste satellieten. Van Umbriël heb ik geen waarden na 1900 in Washington gevonden. Van Ariël slechts één, van See in 1901, No. 20. Deze waarde is echter hier de laagste. In de tabellen van de Neptunussatelliet, en van de Marssatellieten zal men hetzelfde opmerken. Hall Jr. vindt tijdens de oppositie's 1891—1892 en 1908—1909 op één na de beide hoogste waarden van Δ voor de Neptunussatelliet, op een lijst van omstreeks veertig stuks. See, 1899—1900, heeft ook een der hoogste waarden geleverd. Hall Jr. en Rice vinden waarden voor Phobos en Deimos aan de hoge kant ten opzichte van wat anderen vonden. Ook bij waarnemingen der Saturnussatellieten vertonen de resultaten van Washington eigenaardigheden.

H. Struve heeft bij zijn bespreking van ditzelfde materiaal — dat door mij slechts weinig gewijzigd uit zijn publicatie over is genomen — opgemerkt dat de satellietsgewijze gemiddelden der waarden van μ een regelmatige gang vertonen van hoog naar laag van Ariël af tot Oberon toe [1]), en werpt de hypothese op dat Aitken en Barnard hun afstanden gemiddeld 0."1 te klein maten, hetgeen bij veldverlichting in 't geheel niet onmogelik is. De gang in de waarden van μ verdwijnt dan ongeveer. Beziet men echter

---

[1]) Er is te weinig materiaal om met zekerheid te kunnen nagaan of deze gang ook bestaat voor de verbindingen der satellieten onderling.

de lijsten van Δ voor de verschillende satellieten, dan blijkt dat niet Barnard's en Aitken's metingen uitzonderingen zijn. Integendeel: het zijn alleen de waarnemingen van Washington na 1900, die iets afwijkends vertonen, en het schijnt *regel* dat overigens alle waarnemers de neiging hebben bij de Uranussatellieten alle afstanden 0."1 te klein meten. Ik zal nu laten zien dat met deze hypothese de waarden van μ met elkaar in overeenstemming te brengen zijn. In de volgende tabel komen voor de gemiddelden, met uitsluiting van de waarnemingen uit Washington na 1900 [1], van ,

voor Oberon, de nummers 1 tot 4 en 12 tot 19,
voor Titania, de nummers 1 tot 4 en 10 tot 20,
voor Umbriël, de nummers 1 tot 6,
voor Ariël, de nummers 1 tot 8 en 13,

eerst zonder gewichtstoekenning berekend, daarna met, en bij dit laatste in de vierde kolom de bijbehorende waarden van Δ. Onder de tabel staan de gemiddelden der waarnemingen uit Washington na 1900, voor Oberon van de nummers 5 tot 11, 20 en 21, voor Titania van de nummers 5 tot 9, 21 en 22. De index i van μ slaat voor de waarden 1, 2, 3, 4 resp. op Oberon, Titania, Umbriël en Ariël.

Satelliet	μ_i zonder gewichten	μ_i met gewichten	Δ_i
Oberon	22694 ± 21 w.f.	22685 ± 21 w.f.	42."0519 ± 0."0114 w.f.
Titania	22826 ± 17 ,,	22831 ± 17 ,,	31.3788 ± 0.0078 ,,
Umbriël	22902 ± 178 ,,	22919 ± 172 ,,	19.1065 ± 0.0479 ,,
Ariël	23104 ± 97 ,,	23073 ± 97 ,,	13.6851 ± 0.0193 ,,

Washington na 1900, Oberon: $\mu_1 = 22526 \pm 40$ w.f. gew. = 7.87,
Titania: $\mu_2 = 22426 \pm 47$ w.f. gew. = 4.54.

Voor de resultaten van Washington na 1900 blijkt, voor zover er hier conclusies te trekken zijn, de gang in μ juist tegengesteld te wezen aan die der overige waarden van μ.

Een benaderde waarde voor de *fout* $\delta\Delta$ in de meting van een afstand is $\delta'\Delta = -0."115$, en voor het gemiddelde μ_0 van de gecorrigeerde waarden van μ_i, de definitieve waarde voor het omgekeerde der Uranusmassa — voor zover die langs deze weg te vinden is — is: $\mu'_0 = 22530$. Wij zullen zien of deze getallen

[1] In de tabellen met * gemerkt.

nog verbetering behoeven. In de volgende tabel komt voor in de tweede kolom de bovengevonden waarde μ_i (met gewichten), in de derde de waarde van μ die met de voorlopig voor $\delta'\Delta$ gecorrigeerde waarden van Δ overeenkomt, dat is μ'_i, in de vierde kolom de vergelijking ter bepaling der correcties aan de benaderde waarden van $\delta\Delta$ en μ_0, waarbij gesteld is $\mu'_i - \mu_0' = y$, en $x = -1000\,(\delta\Delta + 0.''1150)$. De vergelijking is van de vorm:

$$y + \frac{3\,\mu'_0}{1000\,\Delta'_0}\,x = \mu'_i - \mu'_0\,.$$

In de vijfde kolom staat het gewicht van de gemiddelden μ_i, dat is de som der gewichten van de waarden van μ waaruit μ_i bepaald is; in de zesde kolom een factor waarmee men elk gewicht in de voorgaande kolom vermenigvuldigen moet, om de gewichten der bekende termen in de vier vergelijkingen te krijgen (zevende kolom). Deze factoren zijn evenredig met de halve grote assen, daar immers een fout van bepaald bedrag in Δ, een fout in μ tengevolge heeft omgekeerd evenredig met Δ. In de achtste kolom staan de overblijfsels die de definitieve oplossing laat.

Sat.	μ_i	μ'_i	$y + \frac{3\mu'_0}{1000\,\Delta'_0}\,x = \mu'_i - 22530$	g'	f	g	δ
Ob.	22685	22500.19	$y + 1.604\,x = -29.81$	13.25	1.000	13.25	−33.39
Ti.	22831	22582.01	$y + 2.144\,x = +52.01$	15.13	0.748	11.31	+48.41
Um.	22919	22509.82	$y + 3.517\,x = -20.18$	3.38	0.456	1.54	−23.81
Ar.	23073	22501.24	$y + 4.900\,x = -28.76$	6.44	0.327	2.11	−32.43

Met de methode der kleinste quadraten vind ik hieruit:

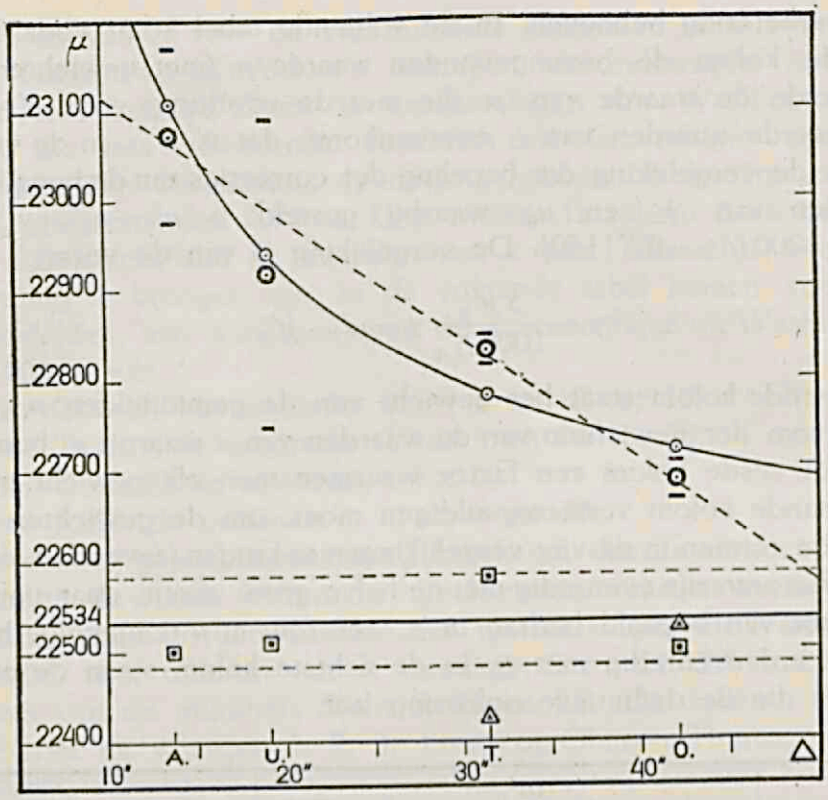
$$x = +0.026 \pm 21.05 \text{ w.f.},$$
$$y = +3.54 \pm 49.47 \text{ w.f., gew. } 4.12.$$

$$\delta\Delta = -0.''1150 \pm 0.''0210 \text{ w.f.}\ ^{1})$$
$$\mu_0 = 22534 \pm 49 \text{ w.f.}$$

Het resultaat der oplossing is in de figuur grafies weergegeven.

---

1) Ik heb geconstateerd dat een andere gewichtstoekenning, bijv.: gewichten evenredig aan de gemiddelde afstanden, of gewichten als die der gemiddelde μ_i, tot slechts enkele eenheden andere resultaten voor μ_0 voert, terwijl de verschillen in $\delta\Delta$ enkele duizendsten van een seconde bedragen.



In verticale richting zijn de waarden van μ uitgezet; langs de horizontale as de waarden van Δ, aangegeven met A., U., T. en O. Met grote dikgedrukte kringetjes, met daaronder en daarboven horizontale streepjes, zijn de waarden van μ_i en van hun waarschijnlike fouten voorgesteld (zie blz. 104, tabel, 3e kolom); met vierkantjes: wat deze waarden worden gecorrigeerd overeenkomstig de fout $\delta\Delta = -0.''1150$ (geen verschil met de derde kolom van de tabel op blz. 105, wanneer deze wordt afgerond op gehelen); met een horizontale lijn: $\mu_0 = 22534$; met kleine kringetjes de uit μ_0 en $\delta\Delta$ afgeleide waarden van μ_i, resp. voor Oberon, Titania, Umbriël en Ariël: 22719, 22782, 22943, 23107. Deze kringetjes liggen met grote benadering op een orthogonale hyperbool. Zij wijken voor Oberon en vooral voor Titania meer dan de waarschijnlike fouten van de „waargenomen" waarden μ_i af.

In de tabel voor Titania komen twee zeer hoge waarden van μ voor, beide van de oude Hall (nos. 2 en 3); en twee vrij hoge, weer beide van één zelfde waarnemer: Barnard (nos. 10 en 15). Dat Barnard's waarnemingen niet steeds het volle vertrouwen verdienen zal in de volgende paragraaf over de massa van Neptunus blijken. Ook die van Hall gaan niet geheel vrij uit: men

zie het bij zijn metingen van Deimos en Phobos meegedeelde. Ik geloof dat aan de vrij sterke afwijking voor Titania dus niet te veel waarde gehecht moet worden.

De gecorrigeerde waarden van μ_i wijken alle slechts binnen de waarschijnlike fout van μ_0 af (door stippellijnen aangegeven strook aan weerszijden van de lijn $\mu = 22534$).

Het is zeker zeer merkwaardig dat de hypothese van een ten naaste bij constante fout in de meting, de waarden van μ in zo goede overeenstemming brengt, en aan de hypothese geeft dit a posteriori steun. De oorzaak der fout ligt echter in het duister. Een moeilike kwestie is ook waarom de waarnemingen uit Washington van deze fout niets, en eerder van de tegengestelde iets vertonen. Een fout van +0.″04 ongeveer, in de bepaling der mikrometerschroefwaarde voor „Clark II" (na 1900 in gebruik gekomen !) op een bedrag van ongeveer 9.″93 is wel geheel onaannemelik. Men kan echter in het afwijkend karakter een argument ten gunste der waarnemingen uit Washington zien. De waarden van μ, resp. voor Oberon en Titania: 22526 en 22426, zijn niet in slechte overeenstemming met 22534, maar dat het Naval Observatory een zo gunstige invloed op de er binnentredende waarnemers heeft, dat zij van algemeen-menselike fouten vrij worden, is zeker veel minder aannemelik dan de fout in de schroefwaarde.

Combineert men de waarden van μ voor Washington, met gewichten (zie blz. 104), met $\mu = 22534$, gew. = 4.12, dan volgt er:

$$\mu_0 = 22500 \pm 22 \text{ w.f.}$$

Het lijkt mij echter beter ze niet in rekening te brengen, en een waarde van μ_0, waarbij ondersteld wordt dat iedere waarnemer tengevolge van algemeen-menselike physiologiese eigenaardigheden bij Uranus een fout van vrijwel constant bedrag maakt, aan te nemen.

Herman Struve heeft ook aan die waarde van μ de voorkeur gegeven, die afgeleid is in de onderstelling dat Barnard en Aitken 0.″1 te klein meten. Dat is $\mu = 22577$. Hij vond uit al het materiaal samen $\mu = 22674$, maar gaf gewichten omgekeerd evenredig met de *quadraten* der waarschijnlike fouten. Hierdoor echter wordt de invloed van de grote waarden van μ voor Umbriël en Ariël minder dan met mijn gewichten.

Zou men een waarde als $\mu = 22534$ niet willen aannemen, dan blijft de keus tussen één der waarden uit het volgende lijstje:

	arithm.	gew. g′	gew. f.	gew. g.
zonder Wash. na 1900:	22877	22829	22821	22786
met Wash. na 1900:	22839	22746	22770	22683.

Omdat echter iets zeer systematies in de waarden van μ voor de verschillende satellieten onmiskenbaar is, acht ik het niet mogelik een der bovenstaande waarden te kiezen.

Men kan de kwestie aldus stellen: De waarden van μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 moeten alle gelijk zijn indien er geen fout is in de theorie. De verschillen zijn echter zo groot dat geen aannemelike fout in de theorie daarvoor verantwoordelik te stellen is. Er is dus een systematiese fout in de waarneming, waarvan wij wellicht geen kennis gekregen zouden hebben was het niet langs deze weg. Men trachte voor de fout een dusdanige waarde aan te nemen — die op zichzelf niet in strijd met verkregen ervaring mag zijn — dat de waarden van μ zo goed mogelik gelijk worden. Naarmate men hierin beter slagen kan, is de realiteit van de fout steviger gefundeerd, daarmee ook de afgeleide waarde van μ_0. Bij Uranus slaagt men hierin boven verwachting goed. De waarde voor μ_0 verdient overeenkomstig vertrouwen. Voor het overblijvend verschil (voornamelik bij Titania) kan een plausibele verklaring gevonden worden. Nodig is die echter niet.

Het is mogelik nog op andere wijze stellen fouten $\delta\Delta_1$, $\delta\Delta_2$, $\delta\Delta_3$, $\delta\Delta_4$ te vinden, die eveneens, op zichzelf niet van onwaarschijnlik bedrag, tot nagenoeg gelijke waarden voor μ voeren. In de figuur liggen de punten voor Oberon, Titania en Ariël bijna precies op een rechte lijn. Aan alle vier de punten een rechte lijn aanpassend:

$$\mu_i = \mu' - a\Delta_i ,$$

vind ik:

$$\mu_i = (23251 \pm 34 \text{ w.f.}) - (13.53 \pm 0.97 \text{ w.f.})\,\Delta_i$$

Daar zowel voor μ_i en Δ_i als voor de ware waarden μ_0 en Δ_{i0} de betrekking $\mu = C\Delta^{-3}$ geldt, volgt hieruit, als men stelt $\Delta_i = \Delta_{i0} + \delta\Delta_i$, en tweede en hogere machten van $\frac{\delta\Delta_i}{\Delta_i}$ verwaarloost:

$$\left(\frac{3\mu_i}{\Delta_i} - 4a\right)\delta\Delta_i - a\Delta_i = \text{constant.}$$

en hiermee vindt men gemakkelik voor aangenomen waarden $-0.''100$, $-0.''075$, $-0.''050$ van $\delta\Delta_i$ (voor Oberon dus) het volgende lijstje (de gemiddelden met de gewichten g van blz. 105):

Satelliet	$-\delta\Delta_1$	μ	$-\delta\Delta_1$	μ	$-\delta\Delta_1$	μ
Oberon	0.″100	22524	0.″075	22564	0.″050	22604
Titania	0.141	22526	0.122	22565	0.104	22605
Umbriël	0.131	22455	0.120	22493	0.109	22533
Ariël	0.108	22536	0.100	22575	0.092	22615
Gemidd.		22522		22561		22601

Voor opzichzelf geenszins onmogelike waarden der fouten verschillen de waarden van μ niet veel met wat de hypothese van een constante fout gaf. Nu wijkt Umbriël het meeste af, maar ver binnen de waarschijnlike fout van μ_3. Een systematiese fout die tot een dergelijk lineair verband aanleiding geven zou lijkt echter wel zeer onwaarschijnlik, te meer omdat de fouten voor Oberon en Titania zo sterk verschillen, vooral voor kleine bedragen van de fout. Men zou verwachten dat de fouten voor deze twee satellieten weinig zouden verschillen. Gelijkheid van beide treedt op voor de onaannemelike onderstelling $\delta\Delta_1 = -0.''26$. Niet aannemelik lijkt ook dat de fout voor een afstand tussen 20″ en 30″ een maximum hebben zou, tenzij men wil aannemen dat er twee systematiese invloeden in het spel zijn. Het is overigens niet nodig dat lineaire verband streng te handhaven. Fouten als voor elk der drie kolommen ($+\delta\Delta_1$) zou men niet aarzelen gelijk te noemen, men zou er althans een aanwijzing in zien van een systematiese invloed die in elke afstand op nagenoeg dezelfde wijze zich uit, en daarmee zijn wij bij de eerste hypothese terug.

In de onderstelling dat de systematiese fout — in de zin van te klein meten tot voor elke satelliet nagenoeg hetzelfde bedrag — reëel is, schijnt mij dat men aannemen kan voor de massa van Uranus:

$$\mathbf{m_7 = 1 : 22530 \pm 50\ w.f.}$$

Een betrekkelik grote waarde der Uranusmassa vond ook Gaillot uit de beweging van Saturnus. (Zie blz. 93).

§ 22. *De bepaling van de massa van Neptunus.*

In de navolgende tabel vindt men de waarden van Δ voor de satelliet van Neptunus, met de waarden van μ, berekend volgens de formule die in § 8 is afgeleid. De betekenis der kolommen is dezelfde als bij Uranus.

SATELLIET VAN NEPTUNUS.

No.	Waarn.	Jaar	Obs.	Instr. inch	Meth.	Aut.	Δ	w.f. in 0.″001	μ	g
1	Holden	1876	Wash.	26	p.s.	a	16.″578	35	18338*	1
2	A. Hall Sr.	$^{1875}/_{77}$	,,	,,	p.s.	,,	16.462	33	18728	1
3	,,	$^{1881}/_{82}$	,,	,,	,,	,,	16.348	22	19123	1
4	,,	$^{1883}/_{84}$	,,	,,	,,	,,	16.243	28	19496	1
5	H. Struve	1887	Poulk.	30	p.s.	b	16.285	28	19346	2
6	,,	1889	,,	,,	,,	,,	16.272	19	19392	2
7	,,	1890	,,	,,	,,	,,	16.253	21	19460	2
8	,,	1892	,,	,,	,,	,,	16.293	32	19317	2
9a	Newcomb	1873	Wash.	26	p.s.	c	16.324	43	19207	½
9b	,,	1874	,,	,,	,,	,,	16.243	21	19496	1
10	A. Hall Jr.	$^{1891}/_{92}$	,,	,,	p.s.	d	16.625	72	18183*	½
11	Barnard	1893	Lick	36	p.s.	e	16.369	—	19049	3/2
12	,,	1894	,,	,,	,,	,,	16.283	—	19353	1
13	,,	1895	,,	,,	,,	,,	16.299	—	19296	1
14	Schaeberle	1895	,,	,,	p.s.	,,	16.273	—	19389	3/2
15	,,	1896	,,	,,	,,	,,	16.336	—	19165	1
16	,,	1897	,,	,,	,,	,,	16.262	—	19428	1
17	,,	1898	,,	,,	,,	,,	16.385	—	18994	1
18	Aitken	1899	,,	,,	p.s.	,,	16.027	—	20295*	1
19	Hussey	1899	,,	,,	p.s.	,,	16.355	—	19098	1
20	Barnard	1898	Yerkes	40	p.s.	f	16.200	28	19652	½
21	,,	1899	,,	,,	,,	e	16.161	—	19794	1/4
22	,,	1900	,,	,,	,,	,,	16.240	—	19507	½
23	,,	1901	,,	,,	,,	,,	16.272	—	19392	½
24	,,	1902	,,	,,	,,	,,	16.332	—	19179	½
25	,,	1903	,,	,,	,,	,,	16.320	—	19221	½
26	,,	1904	,,	,,	,,	,,	16.357	—	19091	½
27	,,	1905	,,	,,	,,	,,	16.412	—	18900	½
28	,,	1906	,,	,,	,,	,,	16.779	—	17687*	½
29	Drew)	1897	Lowell	24	p s.	,,	16.179	—	19728	½
30	Cogshall)	1899	,,	,,	,,	,,	16.500	—	18599*	1
31	S. J. Brown	1898	Wash.	26	p.s.	g	16.270	26	19399	1/4
32	See	$^{1899}/_{1900}$	,,	,,	p.s.	h	16.541	35	18461*	1
33	Dinwiddie	1903	,,	,,	p.s.	e	16.223	—	19568	½
34	Hammond Rice	1905	,,	,,	p.s.	,,	16.328	—	19193	1
35	Hammond	1906	,,	,,	p.s.	,,	16.200	—	19652	1
36	A. Hall Jr.	$^{1908}/_{09}$	,,	,,	p.s.	i	16.614	56	18219*	1
37	,,	$^{1909}/_{10}$	,,	,,	,,	,,	16.328	45	19193	1
38	,,	1911	,,	,,	,,	j	16.389	37	18980	1
39	Burton	1911	,,	,,	p.s.	,,	16.334	48	19172	1
40	,,	$^{1911}/_{12}$	,,	,,	,,	,,	16.380	15	19011	1
41	fotogr.	1902	Greenw.	26		k	16.184	—	19696	1
42	,,	$^{1902}/_{03}$	,,	,,		,,	16.179	—	19728	1
43	,,	$^{1903}/_{04}$	,,	,,		,,	16.238	—	19519	1
44	,,	$^{1904}/_{05}$	,,	,,		,,	16.202	—	19645	1
45	,,	$^{1905}/_{06}$	,,	,,		,,	16.186	—	19703	1
46	,,	$^{1906}/_{07}$	,,	,,		,,	16.279	—	19367	1
47	,,	$^{1907}/_{08}$	,,	,,		,,	16.027	—	20295*	1
48	,,	$^{1901}/_{02}$	Lick	36		l	16.199	51	19656	—
49	,,	$^{1898}/_{1901}$	Poulk.	13?		,,	16.153	51	19824	—
50	,,	$^{1898}/_{1908}$	Greenw.	26		,,	16.192	13	19681	—
51	visueel	$^{1892}/_{1902}$	Lick	36	p.s.	,,	16.329	15	—	—
52	,,	$^{1897}/_{1908}$	Yerkes	40	p.s.	,,	16.302	8	—	—
53	,,	$^{1891}/_{1908}$	Wash.	26	p.s.	,,	16.354	15	—	—
54	fotogr.	$^{1899}/_{1920}$	Poulk.	13		m	16.145	35	19853	—

Opmerkingen bij de tabel.

No. 1. De door A. Hall meegedeelde waarde is $16.''6047 \pm 0.''0347$ w.f. In Washington Observations, 1881, App. I, gebruikt hij voor de Uranussatellieten $R = 9.''9479$. Voor de Neptunusmaan, in Appendix II, is waarschijnlik hetzelfde gebruikt. Herleid op $R = 9.''9360$ wordt Δ: $16.''585$. Hall gebruikte Leverrier's definitie van halve grote as voor Neptunus $\varrho = 30.05728$. (Zie Hoofstuk I, § 4). Herleidend op Newcomb's waarde voor de gestoorde halve grote as: 30.07067 vindt men $\Delta = 16.''578$.

Nos. 2, 3, 4. Voor deze waarden geldt hetzelfde als voor no. 1. Hall geeft op resp. $16.''4893$, $16.''3748$, $16.''2699$.

Nos. 5—8. Struve corrigeerde zijn metingen niet afzonderlik voor differentieele refractie. De schroefwaarde $R = 12.''783$ was aangenomen, zonder correctie voor temperatuur. Een constante instellingsfout viel bij deze waarnemingen niet te constateeren. De gevonden waarden van Δ werden achteraf gecorrigeerd met $+0.''010$, waarin $+0.''007$ voor refractie, de rest voor herleiding op de definitieve schroefwaarde $12.''786$, overeenkomend met de gemiddelde temperatuur. Ik heb dit gecontroleerd. Met de temperatuurcoëfficient $-0.''00050$ vind ik $R = 12.''7855$ voor de gemiddelde temperatuur.

Nos. 9 a, b. Waarnemingen bij rode draadverlichting. Neptunus en zijn satelliet zijn groenachtig. In 1873 gebruikte Newcomb het niet-achromatiese oculair, in 1874 het achromatiese. De waarnemingen van 1873 zijn herleid met $R = 9.''902$, die van 1874 met $R = 9.''948$. Herleiding van Δ voor 1874 op $R = 9.''936$ geeft $\Delta = 16.''263 - 0.''020 = 16.''243$. Men zie nog de opmerking bij no. 1 van Oberon.

No. 10. Hierin zijn verwerkt 4 waarnemingen van Hall Sr., herleid met $R = 9.''9370$, en 25 van Hall Jr., herleid met $R = 9.''9198$. Ter herleiding op $R = 9.''9360$ heb ik de correctie aangebracht: $\left(\frac{4}{29} \times \frac{-0.001}{9.9370} + \frac{25}{29} \times \frac{+0.0162}{9.9198}\right) \times 16.''609$ en bovendien herleid van Leverrier's ϱ op Newcomb's ϱ. De onzekerheid van Δ is groot! Hall Jr. zelf zegt: „My observations are some what rough on account of my inexperience in measuring such difficult objects as Neptune's satellite", en „I have not very much confidence in the value given for the mass".

Nos. 11—19. Door D. Gibb berekend voor de „gemiddelde afstand", zegt hij. Misschien is dat Newcomb's afstand, want Newcomb's Neptunustafels zijn na 1904 in de Engelse Nautical

Almanac verschenen. Zekerheid heeft men echter niet. Dit geldt ook voor de nos. 21—30, 33—35.

Nos. 20—28. Deze resultaten uit Barnard's waarnemingen op Yerkes Observatory vertonen de eigenaardigheid dat de waarde van Δ met de tijd vrij regelmatig toeneemt van een zeer hoog bedrag in 1898 en 1899 tot het kleinste wat in de lijst voorkomt in 1906. Dit verhoogt niet het vertrouwen!

No. 20 is door Hall berekend voor de gemiddelde afstand $\varrho = 30.0705$, wat nagenoeg niet van Newcomb's waarde afwijkt. Hij gebruikte $R = 9.''677$. Gibb zegt over de gebruikte waarde van R niets. In Publ. Yerkes Obs. Vol. II, 1903, pag. 80, wordt opgegeven $9.''665$ voor 50^0 F. Aitken deelt in „The Binary Stars", pag. 47, als definitieve waarde van R voor 50^0 F mee $9.''6617$, bepaald uit metingen in de Plejaden van 1902 tot 1912. De temperatuur schijnt niet veel invloed te hebben. Ik heb de nummers 20—24 herleid van $R = 9.''677$ op $R = 9.''6617$, de nummers 25—28 van $R = 9.''665$ op $R = 9.''6617$. Of deze correcties juist zijn weet men niet, door gebrek aan voldoende gegevens. In no. 20 zijn 6 waarnemingen verwerkt die met een andere mikrometer zijn verricht, waarvoor $R = 3.''380$ geldt. De correctie aan no. 20 is dus $\frac{100}{106} \times \frac{-0.0152}{9.677} \times 16.''224 = -0.''024$. In de lijst komen de gecorrigeerde waarden voor. De niet gecorrigeerde vindt men in de publicaties d en e. Barnard vermeldt over de temperatuur bij de observatie niets.

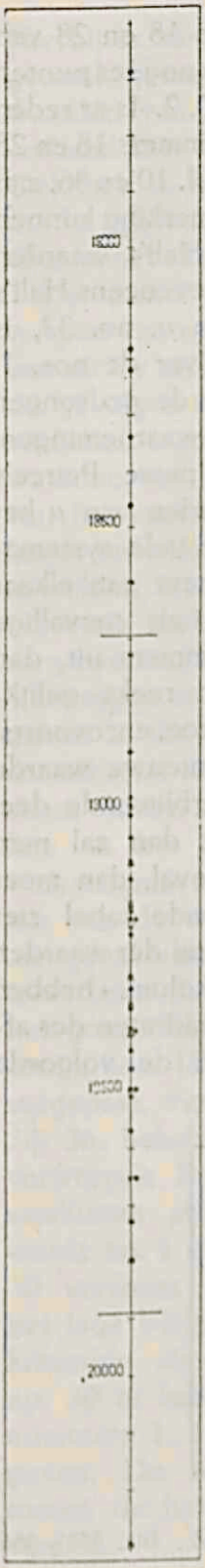
Nos. 31, 32. De waarnemingen zijn herleid met $R = 9.''9360$.

Nos. 33—40. Waarnemingen verricht met mikrometer „Clark II."

De nummers 33—37 zijn herleid met See's bepaling van R: $9.''9328 - 0.''000055\ (t - 28^0\ F)$. De temperatuur is niet meegedeeld. De nummers 38—40 zijn herleid met $R = 9.''9337 + 0.''00006 \times (t - 50^0\ F)$. Herleid op $t = 28^0$ F wordt R: $9.''9324$, niet noemenswaard van See's R afwijkend. Voor 32^0 F zijn beide hetzelfde. Het verschil in temperatuurcoëfficient wekt wantrouwen.

Nos. 41—47. Fotografiese waarnemingen van de sterrewacht in Greenwich, verricht met het „Thompson-aequatoriaal". Gedurende de expositie werd het licht van Neptunus, die achter een draaibaar schermpje verborgen werd gehouden, van tijd tot tijd tot de plaat toegelaten. De schaal der platen schijnt voldoende nauwkeurig bepaald te zijn.

Nos. 48—53. Materiaal door Eichelberger gepubliceerd, en grotendeels door Newcomb verzameld. Daar nagenoeg alles wat hierin bijeengebracht is, toch al in de lijst voorkomt, zal ik er



verder geen rekening mee houden. Uitgezonderd hiervan is no. 48.

No. 54. Fotografiese waarnemingen over een tijdvak van 22 jaar. Over de schaalwaarde der platen wordt door J. Balanowsky niets meegedeeld.

De gewichten zijn toegekend grotendeels op grond van meedelingen der waarnemers over de omstandigheden der waarneming. Aan Struve is groter gewicht bovendien toegekend om het vertrouwen dat ik in zijn metingen gekregen heb. Aan Barnard's metingen op Yerkes Observatory heb ik geringer gewicht gegeven om wat ik reeds in de opmerkingen meedeelde. Iets subjectiefs en onzekers blijft in elke gewichtstoekenning, die dikwijls meer voor ons eigen acquit de conscience dan voor 't verkrijgen van grotere zekerheid in het eindresultaat dient.

Autoriteit voor de waarden van Δ.

a. A. Hall Sr., Wash. Obs. 1881, App. II, blz. 24—26.
b. H. Struve, „Beob. des Neptunstrabanten", Mém. St. Pét. 7e Série, XLII, 1894, blz. 47.
c. S. Newcomb, „The Uranian and Neptunian Systems", Wash. Obs. 1873, App. I, blz. 62.
d. A. Hall Jr., A. J. **12**, 1893, blz. 23.
e. D. Gibb, „Motion of Neptune's Satellite", Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, **29**, 1909, blz. 531, 532.
f. A. Hall Jr., A. J. **19**, 1898, blz. 66.
g. S. J. Brown, A. J. **20**, 1900, blz. 137.
h. J. J. T. See, A. N. **153**, 1900, kol. 266.
i. A. Hall Jr., A. J. **26**, 1911, blz. 181.
j. A. Hall en H. E. Burton, A. J. **28**, 1913, blz. 43, 44, 47.
k. F. W. Dyson, M. N. **68**, 1908, blz. 587.
l. W. S. Eichelberger en A. Newton, Pop. Astr. **29**, Vol. IX, 1921, blz. 567, 568.
m. J. Balanowsky, Bull. de l' Obs. de Poulkovo, Vol. IX, 1923, blz. 99.

Wanneer men de waarden van μ grafies voorstelt (zie de figuur) valt onmiddellijk het sterk asymmetries karakter van het stelsel punten op. Niet alleen staat zowel aan de hoge als aan de

lage kant één waarneming geheel alleen, de nummers 18 en 28 van Aitken en Barnard, maar tot ver aan de lage kant liggen nog zes punten vrij regelmatig verspreid, de nummers 10, 36, 1, 32, 30, 2. Is er reden tot verwerping? Peirce's kriterium doet alleen de nummers 18 en 28 vervallen. De beide laagste nummers, na no. 28, n.l. 10 en 36, zijn van Hall Jr. No. 10 zou men op grond van Hall's opmerking kunnen verwerpen. Ook echter bij Oberon en Titania zijn Hall's waarden buitengewoon laag. Bij de satellieten van Mars zijn eveneens Hall's resultaten aan de lage kant. Ook See's waarde van μ, no. 32, is hier evenals bij de Uranussatellieten zeer laag. Over de nos. 1, 30, 2 valt niets biezonders op te merken. Men wordt gedrongen uit te zien naar een middel ter verwerping van waarnemingen. Ik heb het volgende als kriterium aanvaard. Men passe Peirce's of Chauvenet's kenmerk [1]) toe, alsof de reeks waarden van μ het directe resultaat van waarnemingen is, dus alsof de vele systematiese fouten waardoor de afzonderlike waarden meer van elkaar verschillen dan hun waarschijnlike fouten toelaten, als toevallige fouten kunnen worden beschouwd. Vallen er nummers uit, dan beschouwe men opnieuw de overblijvende als een reeks gelijksoortige waarnemingen en passe weer het kriterium toe, enzovoorts. Voert dit proces spoedig tot een eind, doordat geen nieuwe waarde uitvalt, en wijkt het verworpen aantal en het overblijvende deel niet veel af van een voorstelling daarvan a priori, dan zal men zich bij 't resultaat neerleggen. Is dit niet het geval, dan moet men zonder kriterium een keus doen. In de volgende tabel ziet men het resultaat. In de eerste kolom staat het aantal der waarden van μ die tot het gemiddelde μ_0, in de tweede kolom, hebben meegewerkt, in de derde kolom de som van de quadraten der afwijkingen, in de vierde de verworpen nummers in de volgorde der verwerping.

m	μ_0	$\Sigma \delta^2$	Verworpen nummers
41	19165	9358796	28, 18
39	19174	5894559	10, 36, 1
36	19251	3089191	32, 30
34	19293	1979423	geen

[1]) W. Chauvenet, Spherical and Practical Astronomy, II, 5thed., blz. 558—566.

Hierbij is van Peirce's kriterium zonder gewichtstoekenning a priori gebruik gemaakt. Ik heb het kriterium ook aangewend op de waarden van Δ. Immers is Δ een grootheid die meer onmiddellik verband met de waarneming houdt. Het resultaat is hetzelfde. Ook heb ik het kriterium met gewichten toegepast (laatste kolom in de tabel op blz. 110). Voor μ en Δ vervalt dan nog no. 2. Chauvenet's kenmerk geeft hetzelfde resultaat met meer rekenwerk.

Het aantal te verwerpen waarden is zeer groot. Tegen het verwerpen van no. 2 bestaat het bezwaar dat de gewichtstoekenning een nieuw element van onzekerheid invoert. Ik ben mij bewust dat de gevolgde handelwijze een bedenkelike kant heeft en zeer aanvechtbaar is, maar zij is te verdedigen. Aangenomen dat de reeks waarden van μ, wat de systematiese fouten betreft, aan de wetten van het toeval voldoet, en dat Peirce's kriterium op betrouwbare basis ons slechts, ter verwerping, abnormale waarden, hoewel misschien niet alle, aanwijst, dan zal na het verwerpen de overblijvende reeks „normaal" zijn, indien alle abnormale waarden zijn aangewezen. Een kriterium hiervoor is opnieuw dat van Peirce. Verwerpen is altijd een delicate kwestie. Niet verwerpen lijkt mij echter in dit geval onmogelik. Men zou een resultaat verkrijgen dat achteraf aan de waarnemingen getoetst in 't gros daarvan geringe steun vinden zou, en waarin men slechts weinig vertrouwen hebben kon, in het besef dat de gevonden waarde voor de massa zeer waarschijnlik te groot zou zijn. Het schijnt dat het kriterium althans iets van de willekeur die in elke verwerping steekt wegneemt, in een geval waarin onmiddellike verwerping van resultaten ongeoorloofd lijkt. Zeven stuks verwerpen, waarvan zes aan één kant van het gemiddelde, is veel, maar men moet niet vergeten dat twee ervan, nos. 18, 28, op grond van Peirce's kriterium, op normale wijze toegepast, vervallen, en dat van de overige drie stuks, nos. 10, 32, 36, behalve om het abnormale bedrag, ook op grond dáárvan verworpen kunnen worden dat de waarnemer ook bij andere satellieten abnormale waarden vond. Van de overblijvende twee wordt no. 1 door de overige vijf geheel ingesloten, en alleen no. 30 vertoont niets abnormaals a priori, en slecht a posteriori het lage bedrag, wordt echter bij de laatste toepassing van het kriterium als 't ware meegesleept. Het lijkt opnieuw willekeur no. 30 te behouden. Hoe het zij: ik heb tenslotte verworpen de nummers 1, 10, 18, 28, 30, 32 en 36, in de tabel met * aangegeven. De overige waarden van μ, 34 stuks, in de figuur die tussen de beide horizontale strepen, middelend met gewichten, vind ik:

$$\mu_0 = 19280 \pm 25 \text{ w.f.},$$

en middelend, alles met gelijk gewicht:

$$\mu_0 = 19293 \pm 28 \text{ w.f.}$$

Indien men de waarden van Δ middelt, en uit het gemiddelde μ bepaalt, vindt men waarden, die in beide gevallen slechts één eenheid minder zijn. No. 30 behoudend vind ik middelend met gewichten: $\mu = 19229$.

Wat geven nu de fotografiese waarnemingen? Het gemiddelde der nummers 41—47 is $\mu = 19708$. No. 47 wijkt hiervan af 587, en kan op grond van Peirce's kriterium, dat de grens 464 stelt, verworpen worden. Uit de overblijvende zes vindt men:

$$\text{Greenw. fot. } \mu = 19610 \pm 39 \text{ w.f.}$$

In Poulkowa is gevonden, in een periode van 21 jaren, met een onderbreking van 5 jaren:

$$\text{Poulk. fot. } \mu = 19853 \pm 128 \text{ w.f. (?)} \quad \text{(No. 54)}.$$

Op Lick Observatory is ook tijdens één oppositie de satelliet van Neptunus gefotografeerd. De platen waren niet zeer goed, de beelden *zelden rond*. Het resultaat is:

$$\text{Lick fot. } \mu = 19656 \pm 186 \text{ w.f.}$$

Deze bepalingen verenigend met gewichten 4, 5 en 1 vindt men:

$$\mu = 19746 .$$

Hier heeft men nu, geloof ik, een voorbeeld van de systematiese afwijking waartoe de fotografiese waarneming aanleiding geeft. De drie observatoria geven een aanmerkelik kleinere waarde voor de Neptunusmassa dan de visuele waarneming. De gemiddelde waarde van Δ visueel bepaald, overeenkomende met $\mu_0 = 19280$, is: $\Delta = 16.''304$; en fotografies bepaald in Greenwich: $\Delta = 16.''211$, dus $0.''093$ kleiner. Op de platen van Greenwich komt dit overeen met ongeveer 0.003 m.m. De afstand van de rand van Neptunus tot die van de satelliet is hoogstens iets meer dan 0.1 m.m. Het „turbidity-effect" van Ross (zie blz. 24) is voor deze afstand te verwaarlozen. Niet de „aantrekking" der beelden van het „gelatine-effect", evenmin de afstoting van het effect van Kostinsky. Beide effecten werken elkaar tegen en kunnen ieder afzonderlik meer bedragen dan 0.003 m.m. Voor een afstand van 0.06 m.m. der randen ging het „Kostinksky-effect" bij de proeven van Ross overwegen. Ik geloof dat men kan aannemen dat op de

platen van Neptunus en zijn satelliet, waar de aantrekking (voor Greenwich) slechts 0.003 m.m. ongeveer is, die aantrekking aan beide laatste effecten is te wijten, en dat het gelatine-effect nog overweegt. Op dit standpunt stelt zich ook Balanowsky [1]), die de metingen van Poulkowa heeft bewerkt. Hij deelt het materiaal in drie groepen, zodat de gemiddelden der in iedere groep voorkomende afstanden een klimmende rij getallen vormen. Het blijkt dat de uit deze groepen bepaalde waarden van Δ eveneens oplopen, zooals men verwachten zou wanneer de absolute waarde van het resulterend effect der drie effecten van Ross met het toenemen van de afstand der beelden vermindert. Tenminste voor afstanden van de grootte als bij deze quaestie voorkomen. Indien dit laatste zo is, moet het verschil tussen beide soorten van waarneming geringer zijn naarmate de brandpunts-afstand van het objectief van de kijker groter is. In Greenwich is de objectief-diameter van de refractor van het „Thompson aequatoriaal" twee keer zo groot als die van de „Normaalastrograaf" van Poulkowa. De verschillen zijn voor beide instrumenten resp. $-0.''093$ en $-0.''159$. Bedenkt men dat beide effecten ook afhangen van plaatsoort en ontwikkelaar, en dat te Poulkowa gedurende de revolutiejaren verschillende soorten van plaat en ontwikkelaar gebruikt zijn, dan kan men de overeenstemming van deze getallen niet anders dan goed vinden. H. Struve heeft fotografiese waarnemingen van Phobos, in 1909 door Kostinsky in Poulkowa verricht, bewerkt, en vindt, voor de eenheid van afstand: $\Delta = 12.''793 \pm 0.''030$ w.f. [2]). Uit de visuele waarneming vind ik: $\Delta = 12.''933 \pm 0.''005$ w.f. Het verschil is dus $-0.''140$, maar wordt, herleid op de gemiddelde oppositieafstand, iets minder dan twee keer zo groot. Mars en Neptunus zijn zeer verschillende objecten voor de fotografiese waarneming. Men zou moeten weten hoe de waarnemingen verricht zijn om te kunnen beoordelen of er overeenstemming is tussen de verschillen voor beide planeten. Dat het verschil tussen visuele en fotografiese waarneming afhankelik blijkt te zijn van het gebruikte fotografiese instrument, houd ik voor een bevestiging van het vermoeden dat, wat dit verschil betreft, de waarnemer met het oog aan de kijker vrij uitgaat. Voor de bepaling van de massa van Neptunus zal ik de fotografiese waarneming verwerpen. Wil men dit niet, dan komt men voor deze consequentie: alle

---

1) Zie litteratuuropgaaf m op blz. 113.

2) „Ueber die Lage der Marsachse und die Konstanten im Marssystem", Sitz. ber. Berlin, 1911, blz. 1082.

visuele waarnemers meten bij Neptunus de afstand van de satelliet meer dan 0.″1 *te groot*. Dit laatste lijkt niet verenigbaar met wat uit de metingen der Uranussatellieten bleek. Bij Uranus is er misschien een constante fout van 't zelfde bedrag, maar in de andere richting! De systemen van Uranus en Neptunus zijn echter niet zeer verschillend voor de visuele waarneming, zodat men bij Neptunus eerder een systematiese fout in de zin van *te klein* meten verwachten zou.

Dit laatste argument tegen het behouden der fotografiese waarneming brengt nu echter tegelijk onzekerheid in het resultaat der visuele waarneming. Treedt bij Neptunus die constante fout niet op? Waarom niet? En indien wel, tot welk bedrag? Een constante fout van $-0.''1$ in Δ geeft in μ een verschil van $+349$, dus voor μ zou men moeten hebben iets als 18930. Bij Uranus bleek een relatief geringe waarde van μ ook uit de storingen in de loop van Saturnus te volgen, hoewel met weinig zekerheid. De waarde $\mu = 19280 \pm 25$ w.f. stemt uitstekend overeen met Newcomb's waarde: 19261, bepaald uit storingen van Uranus. De onzekerheid hiervan is mij niet bekend. Gaillot heeft, eveneens uit de beweging van Uranus, afgeleid: 19094 ± 22 w.f. Dit is ongeveer het gemiddelde tussen 18930 en 19280. Indien men op de aanwijzing die de resultaten der storingen geven vertrouwen mag, kan men besluiten dat de systematiese fout bij Neptunus althans niet zo groot als bij Uranus is. Een betrouwbare gids heeft men hierin niet. Bij Saturnus geven de storingen voor μ bedragen die groter zijn dan die uit de beweging der satellieten bepaald, en veel meer dan de waarschijnlike fout toelaat. De onzekerheid die nu hierdoor in de massa van Neptunus komt, kan men niet in de waarschijnlike fout uitdrukken. Ik neem aan voor de massa van Neptunus, bepaald uit de beweging van de satelliet:

$$m_8 = 1 : 19280 \pm 25 \text{ w.f.},$$

in het besef dat deze waarde waarschijnlik te klein is. Hoeveel te klein, kan men niet aangeven, tenzij een middel gevonden wordt het bestaan van een systematiese fout te constateren. De fotografiese plaat laat ons hier voorlopig in de steek.

Het gemiddelde van Gaillot's en Newcomb's waarde van μ uit de storingen van Uranus (zie blz. 93, 94) is:

$$\mu = 19178 \ .$$

Het gemiddelde van deze waarde van μ en hetgeen uit de beweging der satellieten volgt, is:

$$\mu = 19229 \ .$$

Voor de massa van Neptunus zal ik aannemen:

$$m_8 = 1 : 19230 \pm 40 \text{ w.f.}$$

Naschrift. 1. Te laat komt mij het werk van Eichelberger en Newton onder de ogen [1]). Uit een materiaal dat veel volledíger is dan het mijne — het loopt tot 1923 — leiden zij af:

$n = 61.^{0}2573679 \pm 0.^{0}0000052$ w.f. en $\frac{d\Theta}{dt} = -0.^{0}6149 \pm 0.^{0}0698$ w.f., $\gamma = 159.^{0}945 \pm 2.^{0}27$ w.f. Hieruit volgt (zie § 8): $\frac{1}{2}\sigma = 0.00002925$ en:

$$\log \mu \Delta^3 = 7.9219502 \ .$$

Verandering in de afgeleide waarden van μ volgt hieruit niet. Uit 66 visuele bepalingen van Δ vinden Eichelberger en Newton $\Delta = 16.''333 \pm 0.''007$ w.f., en uit 11 fotografiese bepalingen $\Delta = 16.''199 \pm 0.''010$ w.f. Ik kan het met de afleiding niet eens wezen. Daar systematiese invloeden zo evident zijn, is het niet juist gewichten te geven omgekeerd evenredig aan de vierkanten der waarschijnlike fouten. Ook kan men niet zien of bij bepaalde waarden van Δ met verbeterde bepalingen der mikrometerschroefwaarde rekening gehouden is, noch welke waarden verworpen zijn (drie stuks). De fotografiese bepalingen van Greenwich, Poulkowa en Lick zijn over één kam geschoren. Dat is niet juist, daar de fotografiese effecten die hier in 't spel zijn van de objectief-diameter afhangen. Het gemiddelde van visuele en fotografiese bepalingen heeft mijns inziens geen zin. Het gemiddelde dat de schrijvers vinden uit de visuele waarnemingen is $\mu = 19176 \pm 25$ w.f., overeenstemmend met het gemiddelde zonder gewichten dat ik vind door alleen de nos. 18 en 28 te verwerpen, n.l. $\mu = 19174$. Maar ik kan niet anders zien dan dat er meer verworpen worden moet, en houd een grotere waarde van μ voor dichter de waarheid nabij komend. De vergelijking met Newcomb's waarde 1 : 19314 in de Uranustafels is weinig waard, daar die uit storingen op Uranus en uit waarnemingen van de satelliet is afgeleid. Die waarnemingen van de satelliet zijn echter ook in de lijst der waarden voor Δ die Eichelberger en Newton geven opgenomen. Zij vergelijken dus ten dele met wat uit een deel van 't eigen materiaal volgt. De vergelijking met Newcomb's waarde uit storingen heeft zin, en over deze waarde en over de *onzekerheid* daarvan zou men gaarne iets meer weten.

---

[1]) M. N. **86**, 1926, blz. 276.

2. Eveneens te laat herinnerde ik mij Glaisher's methode van middelen en vond ik zijn artiekel daarover uit 1873 [1]). Glaisher wil niets verwerpen, maar beschouwt het arithmeties gemiddelde als een voorlopig resultaat, een eerste benadering. Uit de afwijkingen der afzonderlike waarden van 't gemiddelde volgt op grond der foutenwet hun benaderd gewicht. Nu kan een tweede benadering worden uitgevoerd, enz. Naarmate een reeks waarnemingen meer het karakter van een toevallig aggregaat heeft zal dit proces sneller convergeren. Deze handelwijze is bewerkelik, maar helpt ons, geloof ik, juist in een geval als bij de waarden van μ voor Neptunus, uit de moeilikheden.

§ 23. *De bepaling van de massa van Mars.*

In de volgende tabellen zijn verenigd de waarden van Δ voor de satellieten Phobos en Deimos van Mars. De betekenis der kolommen is dezelfde als bij de satellieten van Uranus, Δ echter geldt voor de eenheid van afstand. Met de formules die in § 5 zijn afgeleid, is μ berekend.

PHOBOS

No.	Waarn.	Jaar	Obs.	Instr. inch	Meth.	Aut.	Δ	w.f.in 0."001	μ	g
1	A. Hall Sr.	1877	Wash.	26	p.s.	a	12."938	14	3090170	1
2	„	1879	„	„	„	b	12.881	17	3131370	1
3	A. Hall Sr. Campbell	1892	Wash. Lick	26 36	p.s. p.s.	„	12.924	25	3100220	½
4	H. Struve	1894 I	Poulk.	30	x.y.	„	12.927	16	3098060	2
5	„	1894 II	„	„	„	„	12.960	11	3074460	2
6	Renz Schaeberle	1896	Poulk. Lick	30 36	x.y. p.s.	„	12.931	40	3095190	½
7	S. J. Brown	1894	Wash.	26	p.s.	d	12.845	21	3157770	0
8	Campbell	1894 I	Lick	36	p.s.	„	12.908	16	3111770	1
9	„	1894 II	„	„	„	„	12.939	13	3089450	1
10	„	1894 III	„	„	„	„	12.926	14	3098780	1
11	S. J. Brown Schaeberle Hussey	1896	Wash. Lick	26 36	p.s. p.s.	„	12.895	22	3121180	½
12	A. Hall Jr.	1909	Wash.	26	x.y.	e	12.959	11	3075170	1
13	Rice	1907	Wash.	„	x.y.	f	12.953	25	3079440	½
14	Aitken Barnard	1909	Lick Yerkes	36 40	x.y. x.y.	g	12.970	18	3067350	1/3
15	Kostinsky (fot.)	1909	Poulk.	13	x.y.	g	12.793	30	3196430	0
6 A	½ (No. 6 + No. 11)	1896					12.913	32	3108150	2/3

[1]) M. N. **33**, 1873, blz. 391.

Opmerkingen bij Phobos.

Nos. 1 en 2. De waarden van Δ zijn van resp. 12.″953 en 12.″896, geldend voor R = 9.″9479, herleid op resp. 12.″938 en 12.″881, geldend voor R = 9.″9360.

No. 3. Van de waarnemingen van Washington en van Lick die hier verenigd zijn, bleken die van Washington een grote systematiese fout te bezitten, zo dat de afstanden in de Westelike elongatie ongeveer 1″ te groot, die in de Oostelike elongatie evenveel te klein gemeten zijn. Dit geldt voor beide satellieten. Bij de opstelling der normaalvergelijkingen waren de afstanden van Washington echter voor Phobos verworpen, zodat het resultaat voor Phobos minder dan voor Deimos door de systematiese fout beïnvloed is. Struve geeft gewicht ½ en daaraan heb ik mij gehouden.

Nos. 4 en 5. Struve gebruikte als voorlopige schroefwaarde: R = 12.″7835 — 0.″00028 t^0 C, en herleidde tenslotte op R = 12.″7818, geldend voor 't geval dat de instellingsfout zeer klein of onmerkbaar is, hetgeen voor deze kleine afstanden zo zijn zou. Bij Neptunus was 't immers zo, zegt Struve. Hoewel dit niet overtuigend is, heb ik de herleiding aanvaard, maar tevens de temperatuur-coëfficient — 0.″00050 in rekening gebracht voor de gemiddelde temperatuur — 5.°7 C. De correctie bedraagt echter slechts + 0.″001. Het gewicht 2 is toegekend deels om de methode van waarneming, deels om 't vertrouwen dat ik in H. Struve's metingen gekregen heb.

Nos. 6 en 11. De metingen van Renz in Poulkova in no. 6 verwerkt — één meting in x, twee metingen in y — vonden bij ongunstige weersgesteldheid plaats. Schaeberle's metingen zijn verricht met een mikrometer die voor gelijktijdige waarneming van positiehoek en afstand was ingericht. Dergelijke mikrometers hebben nooit aan de verwachtingen beantwoord, zegt Struve. De waarschijnlike fout is dan ook groot. Struve geeft gewicht ½.

De waarnemingen van Schaeberle in no. 11 zijn dezelfde als in no. 6. Ik heb de nos. 6 en 11 gemiddeld: no. 6A in de lijst, en gewicht $^2/_3$ gegeven.

No. 7. A priori is aan deze bepaling van S. J. Brown geen ander gewicht dan 1 toe te kennen. Dit nummer is echter verworpen, daar het bij eenvoudig of met gewichten middelen de door Peirce's kriterium gestelde grens overschrijdt.

No. 12. Hoewel Hall in rechthoekige coördinaten ten opzichte van de randen van de schijf van Mars gemeten heeft, heb ik toch slechts gewicht 1 gegeven op grond daarvan dat de waarnemingen

van Hall Jr. dikwijls tot afwijkende resultaten leidden. Men zie zijn resultaten voor Oberon en Titania, en die voor de Neptunus-satelliet.

No. 13. Ook de metingen van Rice zijn in rechthoekige coördinaten verricht. De satellieten waren wegens de zeer geringe hoogte van Mars boven de horizon slecht zichtbaar. Voor de bepaling van de seculaire variaties van de knopen en van de apsiden van de baan van Phobos verwerpt Struve deze metingen. Ik heb gewicht ½ gegeven.

No. 14. Bij de afleiding van dit resultaat heeft Struve door een vergissing geen rekening met de refractie gehouden. Voor Deimos zou deze in Δ +0.″01 ongeveer geven. Voor Phobos minder vermoed ik. Δ zou door correctie groter worden, en is al het grootst van alle waarden in de lijst. Op de 38 waarnemingen zijn er 14 van Barnard. Ik heb Struve's Δ voor refractie vermeerderd met 0.″005, en gewicht ⅛ gegeven.

No. 15. Deze fotografiese bepaling van Δ door Kostinsky is verworpen wegens de systematiese fouten die aan de fotografiese bepaling van kleine afstanden eigen zijn.

DEIMOS.

No.	Waarn.	Jaar	Obs.	Instr. inch	Meth.	Aut.	Δ	w.f. in 0.″001	μ	g
1	A. Hall Sr.	1877	Wash.	26	p.s.	a	32.″315	12	3106810	1
2	,,	1879	,,	,,	,,	b	32.461	26	3065080	1
3	H. Struve A. Hall Sr.	1886	Poulk. Wash.	30 26	p.s. p.s.	,,	32.528	98	3046180	0
4	A. Hall Sr.	1892	Wash.	26	p.s.	c	32.509	38	3051520	0
5	H. Struve	1894	Poulk.	30	x.y.	b	32.318	19	3105950	2
6	Renz Schaeberle	1896	Poulk. Lick	30 36	x.y. p.s.	,,	32.412	53	3079000	½
7	S. J. Brown	1894	Wash.	26	p s.	d	32.388	20	3085850	1
8	,,	1896	,,	,,	,,	,,	32.510	46	3051240	½
9	Schaeberle	1896	Lick	36	p.s.	,,	32.329	41	3102780	½
10	A. Hall Jr.	1909	Wash.	26	x.y.	e	32.470	17	3062530	1
11	Rice	1907	,,	,,	x.y.	f	32.441	32	3070750	½
12	Aitken Barnard	1909	Lick Yerkes	36 40	x.y. x.y.	g	32.42?	20	3082990	½
6 A	½ (No. 6 + No. 9)	1896					32.370	47	3091000	½

Opmerkingen bij Deimos.

Nos. 1 en 2. Beide waarden van Δ zijn van 32.″354 en 32.″500, geldend voor R = 9.″9479, herleid tot 32.″315 en 32.″461, geldend voor R = 9.″9360.

No. 3. Op dezelfde wijze als bij de nummers 4 en 5 van Phobos is hier gecorrigeerd: 32.″530 — 0.″002 = 32.″528. In deze correctie is ook de herleiding opgenomen van Hall's waarnemingen die in dit nummer verwerkt zijn, van R = 9.″9479 op R = 9.″9360. De oppositie van 1886 was, zoals Struve meedeelt, zeer ongunstig voor de waarneming. Struve's eigen metingen zijn minder betrouwbaar door onvoldoende inrichting van de mikrometer. Struve verwerpt dit nummer voor de bepaling van de massa. Ik heb dit nummer ook verworpen.

No. 4. Waarnemingen bij geringe hoogte. Bij no. 3 van Phobos zie men het meegedeelde over de systematiese fout, die in dit resultaat voor Deimos ten volle invloed heeft. Struve geeft gewicht $\frac{1}{2}$. Ik heb dit nummer verworpen.

No. 5. Δ is herleid van de schroefwaarde 12.″7835 — 0.″00028 t^0 C op de waarde 12.″7818 — 0.″00050 t^0 C voor de gemiddelde temperatuur -2^0 C. De correctie was — 0.″003. Om dezelfde reden als bij nos. 4 en 5 van Phobos heb ik gewicht 2 toegekend.

Nos. 6 en 9. 7 waarnemingen van Renz die wegens de slechte weersgesteldheid weinig vertrouwen verdienen; 20 van Schaeberle. Hiervoor geldt hetzelfde als voor de nummers 6 en 11 van Phobos. Ik heb gemiddeld: no. 6A, en gewicht $\frac{1}{2}$ gegeven, daar bij Deimos niet een zekere compensatie optreedt door waarnemingen van anderen, zooals bij Phobos het geval was. Bovendien zijn de waarschijnlike fouten zeer groot.

No. 10. A. Hall Jr. zelf geeft Δ voor de gemiddelde afstand van Mars tot de zon: 21.″310 ± 0.″011 w.f. Ik heb, aannemend $\log \varrho = 0.182896$, herleid op de eenheid van afstand. Gebruikt is voor mikrometer „Clark II": R = 9.″9337 + 0.″00006 (t — 50° F). Of inderdaad met de temperatuur rekening is gehouden blijkt echter uit niets. Wat het gewicht 1 betreft geldt hetzelfde als voor no. 12 van Phobos.

No. 11. Hiervoor geldt hetzelfde als voor no. 13 van Phobos. De waarnemingen zijn herleid met R = 9,″9328 — 0.″000055 (t — 28° F) voor mikrometer „Clark II". Over de temperatuur wordt niets vermeld. Ik heb gewicht $\frac{1}{2}$ gegeven.

No. 12. Voor dit nummer geldt hetzelfde als voor no. 14 van Phobos. Struve geeft Δ = 32.″409, hetgeen ik verhoogd heb tot 32.″42, in overeenstemming met Struve's meedeling over de refractie. Ik heb gewicht $\frac{1}{2}$ gegeven.

Autoriteit voor Phobos en Deimos.

a. A. Hall, „Observations and Orbits of the satellites of Mars, Washington, 1878, blz. 24, 25.
b. H. Struve, „Beobachtungen der Marstrabanten", Mém. St. Pét. 8e Série, Tome VIII, 1898, blz. 61.
c. W. S. Harshmann, „The Orbit of Deimos", A. J. **16**, 1894, blz. 147.
d. S. J. Brown, „Orbits of the satellites of Mars", A. J. **20**, 1899, blz. 82—90.
e. A. Hall Jr., „Orbits of the satellites of Mars", A. J. **27**, 1913, blz. 167, 169.
f. J. C. Hammond, „Orbits of Phobos and Deimos," Publ. Wash. VI.
g. H. Struve. „Ueber die Lage der Marsachse", Sitz. ber. Berlin, 1911, blz. 1079, 1080, 1082.

Voor Phobos wordt het gemiddelde van de nummers 1—5, 8—10, 12—14 en 6A:

met gewichten: $\mu = 3093840 \pm 3560$ w.f.
zonder gewichten: $\mu = 3093700 \pm 3560$ w.f.

Voor Deimos wordt het gemiddelde der nummers 1, 2, 5, 7, 8, 10—12 en 6A:

met gewichten: $\mu = 3085020 \pm 4580$ w.f.
zonder gewichten: $\mu = 3080240 \pm 4350$ w.f.

Het verschil van de gemiddelden met gewichten, waaraan ik mij verder houden zal, is groter dan de waarschijnlike fouten zouden doen vermoeden. Men kan zich moeilik van de indruk losmaken dat hier iets systematies aan den dag komt. Het verschil heeft hetzelfde teken als het verschil in μ bij de manen van Uranus: de dichtstbijzijnde satelliet levert de grootste waarde van μ. Indien eenzelfde systematiese instellingsfout als misschien bij Uranus, ook hier in 't spel is, dan zou deze bij Mars ongeveer — 0."020 moeten bedragen, en de waarde voor μ_0 zou 3079500 zijn. Er is echter voor deze hypothese veel te weinig grond.

Een fout van hetzelfde bedrag in de metingen bij Phobos en Deimos heeft voor Phobos een $2\frac{1}{2}$ keer zo grote invloed op het resultaat voor μ ($2\frac{1}{2}$ is de verhouding der halve grote assen). Gewichten aan de gemiddelden voor Phobos en Deimos gevend resp. 2 en 5, vindt men uit de beide waarden van μ:

$$\mu = 3087540 \pm 2710 \text{ w.f.}$$

De waarschijnlike fout opgemaakt uit de afwijkingen is van weinig reële betekenis.

Wil men echter rekening houden met de inwendige nauwkeurigheid van beide reeksen van μ, dan kan men bovendien gewichten geven omgekeerd evenredig met de waarschijnlike fouten, d.i. in verhouding van 9:7. De totale gewichten worden dan $2 \times 9 = 18$ en $5 \times 7 = 35$, en het gemiddelde wordt:

$$\mu = 3088020 \pm 2850 \text{ w.f.}$$

Voor de waarschijnlike fout geldt hetzelfde als zoeven.

Het is voor een eventuele verklaring van het systematies verschil niet onbelangrijk dat Mars enigszins rossig van kleur is, en de waarnemers in Washington, met name Hall en Brown, een donkerrood glas gebruikten om het licht van de planeet te temperen. Bij waarnemingen enige uren voor of na de meridiaansdoorgang lijkt een verschil in refractie-effekt, dat door verschil in kleur van Mars en satellieten ontstaat, voor beide satellieten niet uitgesloten. Het verschil in beide waarden van μ komt mij echter voor wel wat groot te zijn voor een dergelijke verklaring.

Indien een systematiese fout van hetzelfde teken voor beide satellieten op de metingen invloed heeft — en dit lijkt waarschijnliker dan het omgekeerde — dan zijn beide waarden van μ te hoog, in welk geval Phobos het meeste afwijkt; of beide te laag, in welk geval Deimos het meest afwijkt. Stelt men zich op dit standpunt dan is het onwaarschijnlik dat de ware waarde van μ *tussen* beide gelegen is. En in dit geval zal men voor μ een gemiddelde moeten kiezen met een waarschijnlike fout die beide waarden van μ ruim omvat, bijv.:

$$\mu = 3088000 \pm 10000 \text{ w.f.}$$

Onmogelik is echter niet dat bij iedere satelliet een eigen systematiese fout optreedt, voor beide verschillend van teken. Bij Phobos zou de grotere nabijheid van de heldere planeet de doorslag kunnen geven, bij Deimos het effect van de grotere afstand en het meer scheef door het oculair zien. Hoe 't ook zij: in dit, en in het geval dat men in het onderscheid der waarden van μ slechts het resultaat van toevallige fouten zien wil, zal men een gemiddelde aannemen als:

$$\mu = 3088000 \pm 3500 \text{ w.f.}$$

Het is moeilik te kiezen. Ik zal aannemen voor de massa van Mars:

$$m_4 = 1 : 3088000 \pm 5000 \text{ w.f.}$$

§ 24. *De bepaling van de massa van Saturnus.*

De eerste enigszins nauwkeurige bepaling van de massa van Saturnus uit de beweging van zijn satellieten is van Bessel afkomstig. In zijn „Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturnssatelliten" leidt hij af uit de beweging van Titan: $m_6 = 1 : 3501.6 \pm 0.77$ w.f. Deze bepaling heeft minstens een halve eeuw lang als klassiek gegolden, en is, behalve door de Fransen, tot het eind der negentiende eeuw algemeen gebruikt. Voor 't eerst door A. Hall's waarnemingen in Washington is enige twijfel aan de juistheid van Bessel's waarde gerezen, en deze twijfel is sterker geworden toen Hermann Struve eveneens voor de Saturnusmassa een groter bedrag vond dan Bessel, hoewel niet zoveel groter dan dat van Hall. Nu, bijna 30 jaren na Struve's eerste publicatie, is nog de onzekerheid in de massa van Saturnus niet verdwenen, niettegenstaande 115 afzonderlike bepalingen van die massa ons ten dienste staan. Volgens de waarnemingen der satellieten is de massa groter dan 1 : 3500. De noemer van de breuk is echter verscheiden eenheden onzeker. De twijfel die omstreeks 1908 door Struve's werk wel grotendeels verdwenen scheen, is door de bewerking van een groot waarnemingsmateriaal, afkomstig van Washington en van Yerkes Observatory, door G. Struve en A. Hall Jr. opnieuw aangewakkerd. Het is te hopen dat de zeer recente waarnemingen van G. Struve in Zuid-Afrika meer zekerheid brengen zullen.

In de volgende tabel zijn de waarden van Δ verenigd die voor de verschillende satellieten zijn gevonden met de waarden van μ die uit de waarden van $\log \mu \Delta^3$ (blz. 38) zijn berekend. De indeling geeft naar tijdsorde de resultaten der publicaties. Ik heb n.l. biezonderheden van ieders werk niet door rangschikking van alle waarden van Δ voor iedere satelliet naar de tijd willen verduisteren.

De auteur bij elk onderdeel van de tabel genoemd, is ook meestal de waarnemer. Elke publicatie is aangeduid met een letter waarmee naar de opmerkingen verwezen wordt.

No.	Satelliet	Jaar	Obs.	Instr. Inch	Meth.	Δ	w.f. 0."001	μ	w.f.	g
				BESSEL. **A**						
1	Titan	1830	Königsb.	Hel.	p,s	176."611	45	3498.2	2.7	0.37
2	„	1831	„	„	„	176.561	33	3501.1	1.9	0.53
3	„	1832	„	„	„	176.537	19	3502.5	1.1	0 91

No.	Satelliet	Jaar	Obs.	Instr. Inch	Meth.	Δ	w.f. 0.″001	μ	w.f.	g
				A. HALL Sr. **B**						
4	Japetus	1875	Wash.	26	α,δ	515.545	56	3480.7	1.1	0.91
5	,,	1876	,,	,,	,,	515.405	58	3483.6	1.2	0.83
6	,,	1877	,,	,,	,,	515.468	53	3482.3	1.1	0.91
7	,,	1875/78	,,	,,	p,s	514.944	67	3493.0	1.4	0.71
8	,,	1878/81	,,	,,	,,	515.264	132	3486.5	2.7	0.37
9	,,	1883/84	,,	,,	,,	514.648	76	3499.0	1.6	0.62
10	,,	1874	,,	,,	,,	514.056	308	3511.1	6.3	0.16
				A. HALL Sr. **C**						
11	Titan	1875	Wash.	26	α,δ	176.510	58	3504.1	3.5	0.29
12	,,	1876	,,	,,	,,	176.668	51	3494.7	3.0	0.33
13	,,	1877	,,	,,	,,	176.676	53	3494.3	3.2	0.31
14	,,	1875/77	,,	,,	p,s	177.024	41	3473.7	2.4	0.42
15	,,	1878/82	,,	,,	,,	176.696	84	3493.1	5.0	0.20
16	,,	1883/84	,,	,,	,,	176.623	46	3497.4	2.7	0.37
17	,,	1874	,,	,,	,,	176.974	48	3476.7	2.9	0.34
18	Rhea	1874	,,	,,	,,	76.231	91	3491.6	12.6	0.07
19	,,	1875	,,	,,	,,	75.515	53	3452.8	7.3	0
20	Dione	1874/75	,,	,,	,,	54.666	44	3476.3	8.5	0.12
21	Tethys	1874/75	,,	,,	,,	42.642	44	3486.0	10.8	0.09
				L. DE BALL. **D**						
22	Japetus	1885/86	Luik	10	α,δ p,s	515.04	90	3491.0	1.8	0.56
23	Titan	1885/86	,,	,,	α,δ p,s	176.55	60	3501.8	3.8	0.26
				H. STRUVE. **E**						
24	Japetus	1884/85	Poulk.	15	α,δ	514.566	50	3500.7	1.0	1.00
25	,,	1885/86	,,	,,	,,	514.612	52	3499.8	1.0	1.00
26	Titan	1884/86	,,	,,	p,s	176.651	24	3495.8	1.4	0.71
27	Rhea	1884/86	,,	,,	,,	76.316	16	3479.9	2.2	0
				A. HALL Jr. **F**						
28	Titan	1885/86	Yale	Hel.	p,s	176.599	26	3498.8	1.6	0.62
29	,,	1886/87	,,	,,	,,	176.501	40	3503.9	2.4	0.42
				S. J. BROWN. **G**						
30	Japetus	1894	Wash.	26	α,δ	515.089	72	3490.0	1.5	0.67
31	,,	1895	,,	,,	,,	515.075	70	3490.3	1.4	0.71
32	,,	1896	,,	,,	,,	515.165	63	3488.5	1.3	0.77
33	Titan	1894	,,	,,	,,	176.461	78	3507.1	4.6	0.22
34	,,	1895	,,	,,	,,	176.930	68	3479.2	4.0	0.25
35	,,	1896	,,	,,	,,	176.794	65	3487.2	3.9	0.26
				H. STRUVE. **H**						
36	Te.-En.	1886	Poulk.	30	p,s	42.559	13	3506.4	3.2	0.31
37	,,	1887	,,	,,	,,	42.574	14	3502.7	3.4	0.29
38	,,	1888	,,	,,	,,	42.579	11	3501.5	2.7	0.37
39	,,	1889	,,	,,	,,	42.568	11	3504.2	2.7	0.37
40	,,	1890	,,	,,	,,	42.593	13	3498.0	3.2	0.31
41	,,	1891	,,	,,	,,	42.570	13	3503.7	3.2	0.31
42	,,	1892	,,	,,	,,	42.600	19	3496.3	4.7	0.21
43	Rh.-Te.	1886	,,	,,	,,	76.185	12	3497.9	1.6	0.62

No.	Satelliet	Jaar	Obs.	Instr. Inch	Meth.	Δ	w.f. 0.″001	μ	w.f.	g
			H. STRUVE. **H** (vervolg)							
44	Rh.-Te.	1887	Poulk.	30	p,s	76.219	11	3493.3	1.5	0.67
45	"	1888	"	"	"	76.167	13	3500.3	1.8	0.56
46	"	1889	"	"	"	76.237	21	3490.7	2.9	0.34
47	"	1890	"	"	"	76.202	15	3495.5	2.1	0.48
48	"	1891	"	"	"	76.232	12	3491.4	1.6	0.62
49	"	1892	"	"	"	76.261	14	3487.5	1.9	0.53
50	Rh.-Di.	1888	"	"	"	76.184	12	3498.0	1.6	0.62
51	"	1889	"	"	"	76.206	17	3495.0	2.3	0.43
52	"	1890	"	"	"	76.188	14	3497.5	1.9	0.53
53	"	1891	"	"	"	76.260	14	3487.6	1.9	0.53
54	"	1892	"	"	"	76.287	14	3483.8	1.9	0.53
55	Rhea	1890	"	"	x,y	76.184	18	3498.1	2.5	0.40
56	Titan	1891	"	"	"	176.608	17	3498.3	1.0	1.00
57	"	1892	"	"	"	176.676	25	3494.3	1.5	0.67
			H. STRUVE. **K**							
58	Titan	1901	Königsb.	13	x,y	176.617	31	3497.8	1.8	0.56
59	"	1902	"	"	"	176.711	25	3492.2	1.5	0.67
60	"	1903	"	"	"	176.697	25	3493.0	1.5	0.67
61	"	1904	"	"	"	176.640	26	3496.4	1.5	0.67
62	"	1906	Berl.Bab.	9	"	176.815	21	3486.0	1.2	0.83
			G. STRUVE. **L**							
63	Rh.-Di.	1903	Wash.	26	p,s	76.270	17	3486.2	2.3	0.43
64	"	1904	"	"	"	76.226	18	3492.3	2.5	0.40
65	"	1905	"	"	"	76.371	14	3472.4	2.0	0.50
66	"	1906	"	"	"	76.301	28	3482.0	3.9	0.26
67	"	1907	"	"	"	76.233	14	3491.3	2.0	0.50
68	"	1908	"	"	"	76.213	15	3494.0	2.1	0.48
69	Rh.-Te.	1903	"	"	"	76.267	16	3486.7	2.2	0.45
70	"	1904	"	"	"	76.315	17	3480.1	2.3	0.43
71	"	1905	"	"	"	76.315	12	3480.1	1.7	0.59
72	"	1906	"	"	"	76.258	21	3487.9	2.9	0.34
73	"	1907	"	"	"	76.261	11	3487.4	1.5	0.67
74	"	1908	"	"	"	76.226	18	3492.2	2.5	0.40
75	Di.-Te.	1903	"	"	"	54.612	16	3486.7	3.2	0.31
76	"	1904	"	"	"	54.618	14	3485.5	2.6	0.38
77	"	1905	"	"	"	54.662	15	3477.1	2.8	0.36
78	"	1906	"	"	"	54.603	20	3488.5	3.9	0.26
79	"	1907	"	"	"	54.614	10	3486.3	2.0	0.50
80	"	1908	"	"	"	54.569	12	3495.0	2.3	0.43
81	Te.-En.	1903	"	"	"	42.601	40	3496.2	10.0	0.10
82	"	1904	"	"	"	42.658	21	3482.1	5.1	0.20
83	"	1905	"	"	"	42.662	12	3481.1	2.9	0.34
84	"	1906	"	"	"	42.616	17	3492.4	4.3	0.23
85	"	1907	"	"	"	42.634	14	3487.9	3.4	0.29
86	"	1908	"	"	"	42.668	19	3479.5	4.7	0.21
87	Rh.-Di.	1910/12	Yerkes	40	"	76.177	27	3499.0	3.8	0.26
88	"	1912/14	"	"	"	76.278	24	3485.1	3.3	0.30
89	Rh.-Te.	1910/12	"	"	"	76.258	37	3487.9	5.0	0.20
90	"	1912/14	"	"	"	76.303	25	3481.7	3.5	0.29
91	Di.-Te.	1900/12	"	"	"	54.601	45	3488.7	8.6	0.12
92	"	1912/14	"	"	"	54.677	27	3474.2	5.1	0.20

No.	Satelliet	Jaar	Obs.	Instr. Inch.	Meth.	Δ	w.f. 0.″001	μ	w.f.	g
			G. STRUVE. **L** (vervolg)							
93	En.-{Te. Rh. Di.	1910/11	Yerkes	40	p,s	34.395	27	3501.6	8.3	0.12
94	,,	1911/12	,,	,,	,,	34.450	35	3484.7	10.8	0.09
95	,,	1912/13	,,	,,	,,	34.474	23	3477.5	6.9	0.14
96	,,	1913/14	,,	,,	,,	34.384	32	3504.7	10.8	0.09
			A. HALL Jr. **M**							
97	Ti.-Rh.	1909/10	Wash.	26	p,s	176.769	12	3488.7	0.7	1.43
98	,,	1910/11	,,	,,	,,	176.741	19	3490.4	1.2	0.83
99	,,	1911/12	,,	,,	,,	176.625	27	3497.3	1.6	0.62
100	,,	1913/14	,,	,,	,,	176.605	14	3498.5	0.8	1.25
101	,,	1914/15	,,	,,	,,	176.605	25	3498.5	1.5	0.67
102	,,	1915/16	,,	,,	,,	176.642	27	3496.3	1.6	0,62
103	Rh.-Di.	1909/10	,,	,,	,,	76.281	152	3484.7	20.8	0.05
104	,,	1910/11	,,	,,	,,	76.230	50	3491.8	6.8	0.15
105	,,	1911/12	,,	,,	,,	76.205	36	3495.1	4.9	0.20
106	,,	1914/15	,,	,,	,,	76.234	16	3491.1	2.2	0.45
107	Rh.-Te.	1910/11	,,	,,	,,	76,370	45	3472.5	6.2	0.16
108	,,	1911/12	,,	,,	,,	76.270	24	3486.2	3.3	0.30
109	,,	1912/13	,,	,,	,,	76.220	17	3493.1	2.3	0.43
110	,,	1914/15	,,	,,	,,	76.187	18	3497.7	2.4	0.42
111	Di.-Te.	1909/10	,,	,,	,,	54.302	93	3546.7	17.8	0
112	,,	1910/11	,,	,,	,,	54.638	26	3481.7	4.9	0.20
113	,,	1911/12	,,	,,	,,	54.585	22	3491.8	4.3	0.23
114	,,	1912/13	,,	,,	,,	54.609	15	3487.3	2.9	0.34
115	,,	1914/15	,,	,,	,,	54.538	16	3500.8	3.0	0.33

Opmerkingen.

A. F.W. Bessel, „Bestimmung der Bahn des Hugenischen Saturnssatelliten", A.N. **9**, 1830, kol. 1, 381; A.N. **11**, 1832, kol. 17.

De waarnemingen zijn verricht met Fraunhofer's heliometer in Königsberg. Bessel bepaalde de plaats van Titan ten opzichte van de uiteinden van de wijd geopende ring. Voor de schaalwaarde nam hij aan $R = 52.''91752$. Volgens Auwers [1]) moet hiervoor genomen worden $R = 52.''89456 - 0.''000452\ (t - 50^0\ F)$, hetgeen door Elkin [2]) op grond van een vergelijking van zijn eigen en Bessel's triangulatie der Plejaden bevestigd wordt. Bessel herleidde alle waarnemingen op de afstand $\varrho = 9.542189$, en gebruikte formule (6) van blz. 27. De waarnemingen moeten dus herleid worden op $\varrho = 9.538846$, hetgeen volgens Kepler's derde wet met de waargenomen sideriese beweging overeenstemt. Ik heb Bessel's waarden van Δ voor schaalwaarde en afstand gecorrigeerd.

Het komt mij voor dat er in deze methode van meten een zwak

1) Meedeling van Struve: Beob. Sat. trab. 1e Abth. blz. 119.
2) Transact. Yale Obs. I, blz. 92.

punt is. Is wel het brengen van het beeld van Titan in het uiteinde van de grote as, *op de rand* van de ring vrij van persoonlike opvatting? En is ook dat uiteinde van de as wel nauwkeurig te localiseren in een richting loodrecht op de grote as van de ring? Hoe wijder de ring geopend is, hoe ronder dus, hoe meer onzeker die localisatie zijn moet. Bij zeer weinig geopende ring is hieruit geen fout te vrezen, maar is dan niet de minder scherpe afbeelding der uiteinden een bezwaar?

B. A. Hall, „The orbit of Japetus, the outer satellite of Saturn," Wash. Obs. 1882, App. I.

Zolang de schijnbare baan van Japetus weinig geopend was, nam Hall waar in rechte klimming en in declinatie. Hall nam aan dat het gemiddelde der doorgangstijden van de schijf, de doorgangstijd van het midden daarvan is. Men kan betwijfelen of dit juist is. Over phase spreekt Hall niet; de invloed daarvan kan echter op 't gemiddelde der afstanden niet merkbaar zijn. Behalve de metingen van 1874, door Newcomb verricht, zijn de waarnemingen van Hall zelf. De waarnemingen zijn herleid op $\varrho = 9.53885$, met de schroefwaarde $R = 9.''9479$. De resultaten ondergaan van herleiding op $R = 9.''9360$ geen invloed, daar zij nagenoeg geheel op de doorgangen berusten. H. Struve [1]) heeft opgemerkt dat Hall deels Bouvard's, deels Leverrier's Saturnustafels gebruikte, en S. J. Brown [2]) heeft volgens gegevens, verstrekt door Newcomb, de noodzakelike correcties gevonden: $-0.''047$ en $0.''025$ resp. voor Δ bepaald uit doorgangen, en Δ bepaald uit positiehoek en afstand. Daar Brown niet meedeelt hoe deze correcties tot stand kwamen, kan men niet nagaan of met de verschillende definities van gemiddelde afstand, en met beschouwingen als van § 3, rekening is gehouden. De aldus gecorrigeerde en tevens voor schroefwaarde verbeterde waarden van Δ vindt men in de tabel.

C. A. Hall, „The six inner satellites of Saturn", Wash. Obs. 1883, App. I.

Voor vier der satellieten geeft Hall de waarde van Δ. De waarnemingen zijn uit dezelfde jaren als die van Japetus. Titan is ook zowel in rechte klimming en declinatie, als in positiehoek en afstand waargenomen. Ik neem aan dat Brown's correcties bij Japetus

---

1) Beob. Sat. trab. 1e Abth. blz. 121.
2) A. J. **19**, 1898, blz. 88.

evenredig met Δ zijn en voor Titan, Rhea, Dione en Tethys evenzeer gelden. De waarden van Δ in de tabel zijn bovendien herleid van R = 9.″9479 op R = 9.″9360.

D. L. de Ball, „Masse de la planète Saturne", Bruxelles, 1887. De Ball nam met de 10-duims refractor van het „Institut astronomique" in Luik waar, ten dele declinatie- en rechte klimmingsverschil, ten dele positiehoek en afstand van Japetus ten opzichte van Titan. Het was de eerste maal dat De Ball zich bediende van de chronograaf. Alleen wanneer Saturnus dicht bij de oppositie was, was Japetus in oostelike elongatie zichtbaar. Japetus werd ten slotte zo zwak, dat de waarneming in rechte klimming onmogelik werd, en die in declinatie bij intermitterende verlichting der draden moest plaats hebben. Dit komt de waarneming natuurlik niet ten goede. Het blijkt reeds nodig te zijn ongeveer één maand voor of na de oppositie! De waarnemingen zijn bij uitzondering in de meridiaan. Volgens de opmerkingen bij de waarnemingen was het weer doorgaans zeer ongunstig. Het komt mij voor dat men aan deze bepalingen, hoewel afgeleid uit verbindingen der satellieten onderling, geen of slechts gering gewicht toekennen moet.

E. Hermann Struve, „Beobachtungen der Saturnstrabanten", 1e Abtheilung, Suppl. I aux Observations de Poulkova, St. Pétersbourg, 1888.

Struve past hier voor 't eerst, n.l. in 1884, de methode der onderlinge verbinding van satellieten toe, en wel voor Japetus en Titan door registrering op de chronograaf van doorgangstijden over van vier tot acht draden bij draadverlichting [1]), en door meting van declinatieverschil, deels bij draad-, deels bij veld-verlichting. De verbindingen van Titan en Rhea, en van Rhea en Dione verrichtte hij in positiehoek en afstand bij veldverlichting. Elke instelling geschiedde in 't midden van het veld. De schroefwaarde schijnt zeer goed bepaald. De temperatuurcoëfficient berust op uitzettingscoëfficienten. De invloed van de temperatuur is echter gering, daar de gemiddelde temperatuur slechts enkele graden onder nul was en de schroefwaarde voor nul graden gold. Struve koos de benaderde waarden van Δ nagenoeg in overeenstemming met Kepler's wet, en loste de vergelijkingen zowel met 12 als met 11 onbekenden op (zie blz. 16). De waarnemingen zijn herleid op

---

1) Struve constateerde dat geen systematies verschil met micrometriese waarneming optrad.

de afstand $\varrho = 9.53887$, hetgeen onbelangrijk afwijkt van 9.538847, waarmee de waarden van $\log \mu \Delta^3$ berekend zijn. De waarden van $\frac{\delta \Delta}{\Delta}$ die Struve uit de verbinding van Rhea met Dione afleidt behoeft een geringe correctie, daar Struve's benaderde waarden van Δ voor Dione en Rhea volgens de waarden van $\mu \Delta^3$ (blz. 38) niet precies aan Kepler's wet voldoen. Voor $\frac{\delta \Delta}{\Delta}$ resulteert hieruit de correctie [1]) $-\left(\frac{\partial \Delta_{Di}}{\Delta_{Di} + \Delta_{Rh}}\right) = -\ 0.000038$. Ik heb aldus gecorrigeerd en in de tabel de resultaten meegedeeld van de oplossing met 11 onbekenden. Struve verwerpt het resultaat voor Rhea, daar de verbinding van Rhea met Dione niet zeer gevoelig bleek voor de afleiding van een correctie aan Δ.

F. A. Hall Jr., „Determination of the orbit of Titan and the mass of Saturn", Transact. Yale Obs. I, part 2, 1889.

De metingen zijn verricht met de heliometer volgens Bessel's methode, bij nagenoeg maximale opening van de ring. Het licht van Saturnus werd door fijn gaas verzwakt. Dit kan tot sterke systematiese fouten leiden (zie blz. 14). Instrumentele fouten en de schaalwaarde schijnen nauwkeurig bepaald te zijn. De waarnemingen zijn herleid op $\varrho = 9.53887$. In de waarschijnlike fout van Δ is rekening gehouden met de onzekerheid der schaalwaarde, en in deze met de onzekerheid van de afstand der sterren waarmee de schaalwaarde bepaald is.

G. S. J. Brown, „Observations of Titan-Japetus, and the mass of Saturn," A. J. **19**, 1898, blz. 81.

Brown nam verschillen in rechte klimming en in declinatie waar. De draadverlichting was rood en *eenzijdig*. Dit, en ook dat de verlichting dikwijls sterk en snel gewijzigd worden moest wanneer Japetus aan de grens van zichtbaarheid was, acht ik niet bevorderlik voor de nauwkeurigheid. Inderdaad: Brown deelt mee dat de doorgangen van Japetus steeds, en wel te meer naarmate Japetus de oostelike elongatie naderde, dus zwakker werd, te laat werden waargenomen. Hij constateerde dat voor twee sterren van $8.^{m}5$ en $11.^{m}0$ de passage van de zwakste $0.^{s}017$ te laat genoteerd werd. Voor sterren aan de grens der zichtbaarheid zou dit verschil 2 à 3 keer zoo groot kunnen zijn. Op grond hiervan lijkt het dat de noemer

[1]) Correctieformule van Struve, Beob. Sat. trab. Vol. XI, blz. 236.

van de massa zeker 5 à 10 eenheden te klein wezen kan, daar volgens Brown + 0.s04 fout in doorgangstijd — 10 eenheden verschil in de noemer geeft. Een correctie voor de schroefwaarde is niet nodig. Met Kepler's wet hield Brown bij de oplossing der vergelijkingen geen rekening. Aan deze metingen kan zeker geen groot gewicht gehecht worden.

H. Hermann Struve, „Beobachtugen der Saturnstrabanten", Publ. de Poulkovo, 2e Série, Vol. XI, 1898.

Struve heeft de methode der onderlinge verbinding toegepast bij rode veldverlichting. Echter zijn Rhea in 1890, en Titan in 1891 en 1892 ook ten opzichte van de randen van de schijf gemeten. Struve's uitgangswaarden voor de schijnbare halve grote assen stemmen niet geheel volgens Kepler's wet overeen. De geringe correcties heb ik aangebracht. De resultaten zijn door Struve herleid op $R = 12.''7872 - 0.''00039\ t^0$ C. De temperatuurcoëfficient is het gemiddelde van een bepaling uit brandpuntsafstand en spoedhoogte en een bepaling aan de hemel. Deze laatste bepaling geeft $-0.''00050$. Het grotere bedrag schrijft Struve toe aan verdikking van de olie en aan spanningen bij lage temperaturen. Hij gelooft met het gemiddelde de waarheid het naast te komen. Dit lijkt mij niet juist. De olie verdikt toch en de spanningen treden op, en doet men niet beter rekening te houden met wat werkelik gebeurt dan met een ideële toestand die niet aanwezig is? Struve schijnt zich bij de bewerking der waarnemingen van de Neptunussatelliet ook op dit standpunt gesteld te hebben. Ik heb de resultaten herleid op $-0.''00050$ met behulp van de gemiddelde temperatuur bij de waarneming. Nog is een correctie nodig, daar Struve gebruikt $\log \varrho = 0.97950$ in plaats van 0.9794958. De gecorrigeerde waarden van Δ vindt men in de tabel. Dit grote werk van Struve, evenals dat onder **E** genoemd, schijnt met zeer veel zorg te zijn uitgevoerd.

K. Hermann Struve, „Beobachtungen des Saturnstrabanten Titan am Königsberger und Berliner Refractor," Berlin, 1908; ook in Abh. Akad. Berlin, 1907.

Saturnus stond te laag voor de verbinding van Titan met andere satellieten. De resultaten uit de waarnemingen in Königsberg zijn van $R = 20.''0778$ herleid op het definitieve $20.''0765$ (w.f. $< 0.''0010$). Deze waarde van R is bepaald uit afstanden aan de hemel van dezelfde orde van grootte als de gemiddelde elongatie van Titan. Voor de schroefwaarde in Berlin-Babelsberg nam Struve aan $22.''670$.

Voor 't midden der meetschroef geldt volgens latere onderzoekingen[1]) R = 22.″6710 (± 0.″0015 w.f.) — 0.″000408 (t — 13,°9 C.). Daar Struve over de temperatuur niets meedeelt en de waarnemingen verricht zijn van 21 Aug. tot 19 Oct. heb ik de waarde van Δ eenvoudig op 22.″6710 herleid. De waarneming geschiedde bij witte of lichtrode veldverlichting, en steeds in 't midden van het veld.

L. G. Struve, „Neue Elemente der inneren Saturnstrabanten", Abh. Akad. Berlin, 1918.

G. Struve heeft bewerkt meer dan 1000 metingen van 1903 tot 1908 verricht door verscheiden waarnemers in Washington, en die van Barnard op Yerkes Observatory van 1910 tot 1914. De satellieten werden onderling verbonden in positiehoek en afstand met de dradenmikrometer. In Washington is voor differentieele refractie en voor instrumentele fouten gecorrigeerd. Struve corrigeerde Barnard's metingen, die minder nauwkeurig zijn, niet voor refractie. De waarnemingen zijn herleid op de afstand ϱ = num. log 0.97950. De waarde van $\log \mu \Delta^3$ heb ik echter met $\log \varrho = 0.9794758$ berekend. Omdat Struve's benaderde waarden van Δ volgens Kepler's wet niet precies voor dezelfde waarde der massa, en niet voor $\mu = 3500$ gelden is nog een correctie nodig.

M. A. Hall Jr., „Mass of Saturn's system from Observations in pairs of Satellites." Pop. Astr. **32**, 1924, blz. 550—552[2]).

Hall heeft hier bewerkt de mikrometriese verbindingen van satellieten onderling van 1909 tot 1916 grotendeels door hemzelf, verder door Eppes en Burton uitgevoerd op Naval Observatory in Washington. Over de waarnemingen en hun bewerking wordt in dit artiekel niet anders meegedeeld dan dat met veldverlichting is waargenomen en dat grote zorg besteed werd aan de bepaling van de schroefwaarde en aan het vermijden van systematiese fouten. Hall's uitgangswaarden voor Δ zijn dezelfde als die van G. Struve, en daar bij de afleiding der resultaten ondersteld is dat Kepler's derde wet geldt, zijn ook hier kleine correcties nodig. Over de gemiddelde afstand waarop de waarnemingen herleid zijn zegt Hall niets. Indien dit is num. log 0.97950, als bij Struve, dan is nog een correctie van —0.1 in μ nodig.

---

1) Veröff. Sternw. Berlin-Babelsberg I, 1915, bladz. 4—5.
2) Een andere publicatie dan die in dit tijdschrift vond ik niet.

Er doet zich in de tabellen der laatste twee publicaties iets zeer merkwaardigs voor, dat in de volgende tabel nog duideliker in 't oog vallen zal. Daarin is opgenomen de waarde $\frac{\delta\Delta}{\Delta}$, zoals G. Struve (1905—1908) en Hall (1909—1915) die meedelen ($\delta\Delta$ is de correctie van waarden van Δ die op zeer weinig na voor $\mu = 3500$ gelden).

Struve's waarden worden van 1905 af vrij regelmatig minder; hetzelfde vertonen Hall's waarden sinds 1909. Het waarnemingsmateriaal is voor de gehele tabel uit Washington en nagenoeg geheel van Hall Jr. en kan dus waarschijnlik als homogeen beschouwd worden. Opmerkelik is nu dat de daling bij Struve begint,

	$\frac{\delta\Delta}{\Delta}$ voor de verbindingen			
	Ti.-Rh.	Rh.-Di.	Rh.-Te.	Di-Te.
1903		+0.00129	+0.00125	+0.00124
1904		+ 71	+ 188	+ 136
1905		+ 262	+ 188	+ 216
1906		+ 170	+ 113	+ 107
1907		+ 81	+ 118	+ 128
1908		+ 55	+ 72	+ 45
1909-10	+0.00108	+ 145		−0.00442
1910-11	+ 92	+ 78	+ 262	+ 173
1911-12	+ 26	+ 46	+ 131	+ 77
1912-13			+ 65	+ 120
1913-14	+ 15			
1914-15	+ 15	+ 84	+ 21	− 9

voor elk der drie verbindingen, na 1905. *In 1905 echter voert Struve de gecorrigeerde ephemeriden van het Berliner Jahrbuch als vergelijkingstafels voor de waarnemingen in.* Tussen 1908 en 1909 is er een sprong in de tabel, *dat is bij de wisseling van berekenaar.* Er is hier meer dan toeval alleen in het spel, en het valt moeilik het vermoeden van zich af te zetten, dat deze eigenaardigheden hun oorzaak hebben in de wijze waarop de eindresultaten tot stand kwamen, en dat zij niet werkelik in de waarnemingen aanwezig zijn. De regelmatige daling van $\frac{\delta\Delta}{\Delta}$ heeft misschien in hetzelfde zijn oorsprong, al valt moeilik in te zien hoe.

De volgende tabel geeft gemiddelden voor elk der afzonderlike publicaties.

Publ.	Auteur.	Gemiddelde nummers	Sat.	meth.	μ	Σg	g'
A	Bessel	1—3	Ti.	Hel.	3501.2	1.81	1
B	Hall Sr.	4—6	Ja.	α, δ	3482.2	2.65	0
		7—10	„	p, s	3495.3	1.86	½
C	Hall Sr.	11—13	Ti.	α, δ	3497.5	0.93	0
		14—17	„	p, s	3484.0	1.33	½
		18, 20, 21	Rh.,Di.,Te.	p, s	3483.4	0.28	½
D	de Ball	22, 23	Ja.-Ti.	α, δ p, s	3494.4*	0.82	0
E	H. Struve	24, 25	Ja.	α, δ	3500.2	2.00	½
		26	Ti.	p, s	3495.8	0.71	2
F	Hall Jr.	28—29	Ti.	Hel.	3500.9	1.04	1
G	S. J. Brown	30—35	Ja.-Ti.	α, δ	3489.8*	2.88	0
H	H. Struve	36—42	Te.-En.	p, s	3502.2*	2.17	1
		43—55	Rh.-Te. / Rh.-Di. / Rh.	p, s / x, y	3493.6*	6.86	2
		56, 57	Ti.	x, y	3497.3	1.67	2
K	H. Struve	58—62	Ti.	p, s	3492.6	3.40	2
L	G. Struve	63—74	Rh.-Di. / Rh.-Te. / Di.-Te.	p, s	3486.0*	5.45	
		75—86	Te.-En.	p, s	3486.2*	3.61	
		87—96	Rh.-Di. / Rh.-Te. / Di.-Te. / En.-Div.	p, s	3487.4*	1.81	
		63—96	alle	p, s	3486.2*	9.97	1
M	Hall Jr.	97—106	Ti.-Rh.	p, s	3494.3*	5.42	
		107—110 / 112—115	Rh.-Di. / Rh.-Te. / Di.-Te.	p, s	3491.8*	3.26	
		97—115	alle	p, s	3493.4*	8.68	1

Hierbij is gebruik gemaakt van gewichten omgekeerd evenredig aan de waarschijnlike fouten (laatste kolom der voorgaande tabel). De nummers 19 en 111 zijn verworpen op grond van het abnormale bedrag; eveneens nummer 27 op voorbeeld van Struve (zie blz. 132). Het berekenen van de waarschijnlike fouten, die slechts een of twee eenheden bedragen voor de meeste gemiddelden, heb ik achterwege gelaten daar de onderlinge verschillen vele malen groter zijn. In deze tabel nu zijn de resultaten

afgeleid uit waarneming in rechte klimming en declinatie verworpen, en wel op grond van de grote kans op systematiese fouten wanneer de vergeleken objecten in helderheid verschillen (zie blz. 132, **G**). De Ball's en Brown's resultaten bovendien op grond van het reeds meegedeelde (blz. 131, **D** en blz. 132, **G**) H. Struve's resultaat voor Japetus (**E**) heb ik echter met gewicht $\frac{1}{2}$ behouden (zie noot [1]), blz. 131). Aan de waarden van Hall Sr. door meting van positiehoek en afstand bepaald heb ik gewicht $\frac{1}{2}$ gegeven om de onzekerheid van Hall's schroefwaarde. Die bepalingen waarbij van verbinding der satellieten onderling gebruik is gemaakt zijn met een * aangegeven. Iets biezonders ten opzichte der andere bepalingen vertonen zij echter niet.

Het gemiddelde van alle bepalingen, zonder de recente resultaten van G. Struve en Hall Jr., op grond van het op blz. 135 meegedeelde, is :

$$\mu = 3495.9 \ ,$$

en indien toch deze bepalingen, en wel het gemiddelde uit alle afzonderlike resultaten voor beide publicaties, wordt meegenomen, met gewicht 1 :

$$\mu = 3495.1 \ ,$$

Ik geloof echter dat men deze laatste bepalingen verwerpen moet, omdat een zekere systematiese invloed hierop onmiskenbaar is.

Zolang de grote verschillen tussen de overige afzonderlike resultaten niet opgehelderd zijn, lijkt het zinloos door andere gewichtstoekenning, een betrouwbaarder resultaat te willen vinden.

De waarnemingen waarin ik het grootste vertrouwen stel zijn die van Hermann Struve. Zij stemmen onderling ook het beste overeen. Met gewichten verenigd geven zij :

$$\mu = 3495.9 \pm 0.9 \text{ w.f.}$$

De waarschijnlike fouten van de laatste gemiddelden zijn ongeveer de eenheid. Zij geven een zeer overdreven indruk van de nauwkeurigheid. Voor de massa van Saturnus afgeleid uit de beweging der satellieten neem ik aan :

$$\mathbf{m_6 = 1 : 3496 \pm 3 \text{ w.f.}}$$

Bijna alle waarnemingen van satellieten pleiten voor een Saturnusmassa die groter is dan wat uit de storingen volgt. Op blz. 92 is daarvoor opgegeven $m_6 = 1 : 3501.5 \pm 0.7$ w.f. Het is moeilik beide waarden te combineren en het veiligst lijkt voorlopig bij de 't laatst aangenomen waarde te blijven staan.

RESULTATEN EN CONCLUSIE

De waarden voor de massa's der acht grote planeten waartoe ik gekomen ben zijn gegeven in de volgende tabel. In de laatste kolom staan Newcomb's massa's ter vergelijking.

Planeten	1 : m	w.f. van 1 : m	m	1 : m (Newcomb)
Mercurius	**9700000**	**1000000**	0.000000103	6000000
Venus	**405050**	**750** [1]	0.0000024688	408000
Aarde	**328160**	**200**	0.0000030473	329390
Mars	**3088000**	**5000**	0.0000003238	3093500
Jupiter	**1047.40**	**0.03**	0.000954745	1047.35
Saturnus	**3496**	**3**	0.00028604	3501.6
Uranus	**22530**	**50**	0.000044385	22869 [2]
Neptunus	**19230**	**40**	0.000052002	19314 [3]
Alle samen	**744.54**	**0.16**	0.00134311	745.80

Het verband tussen de zonsparallaxis en de verhouding der massa's van de zon en van het stelsel aarde-maan wordt uitgedrukt door:

$$\log M \Pi_{\odot}^{3} = \mathbf{8.3496800 \pm 0.0000052\ w.f.}$$

Newcomb gaf: $\log M \Pi_{\odot}^{3} = 8.349674$ [4]).

Als nevenresultaat vond ik voor de maansparallaxis:

$$\Pi_{\mathbb{C}} = \mathbf{3422.''694 \pm 0.''014\ w.f.}$$

---

1) Op blz. 81 staat abusievelik 500 w.f. Ik heb n.l. de onzekerheid in de massa van Venus groter geacht dan de waarschijnlike fout die uit de tabel op blz. 80 volgt uitdrukt.

2) Door Newcomb en Hill aangenomen in de tafels der vier buitenste planeten. Voor de vier binnenste nam Newcomb enige jaren vroeger 22756.

3) Door Newcomb aangenomen in de tafels van Uranus. In die van de zon nam hij 19540.

4) Fundamental Constants, blz. 194.

Hoewel de tijd mij ontbreekt hier uitvoerig terug te komen op hetgeen in de Voorrede, blz. 3 en 4, gezegd is over de constanten van Stockwell waardoor de seculaire veranderingen van vorm en stand der planetenbanen bepaald zijn, is het toch van belang reeds iets mee te delen over wat het resultaat van de correctie dier constanten kan zijn. In de volgende tabel zijn gegeven de door Stockwell gebruikte waarden der massa's met de grootheid ν, die uitdrukt met welk deel deze massa's vermeerderd moeten worden ter herleiding op de in voorgaande tabel gegeven massa's. Tevens is de waarschijnlike fout van ν meegedeeld.

Planeet	$1 : m_i$ Stockwell	ν_i	w.f. van ν_i
Mercurius	4865751	−0.49838	0.05182
Venus	390000	−0.03716	0.00178
Aarde	368689	+0.12350	0.00068
Mars	2680637	−0.13192	0.00141
Jupiter	1047.879	+0.000457	0.000029
Saturnus	3501.6	+0.001602	0.000859
Uranus	24905	+0.10542	0.00245
Neptunus	18780	−0.02340	0.00203

De constanten M_i (zie blz. 4) geeft Stockwell als volgt [1]):

$$M_3 = +0.0113105 + 6512\,\nu_1 + 410140\,\nu_2 + 196140\,\nu_3 + 77329\,\nu_4 - 842300\,\nu_5 - 16240\,\nu_6 - 2960\,\nu_7 - 700\,\nu_8 .$$

De grootheden g_i en β_i zijn op dezelfde wijze gegeven. De coëfficienten zijn meegedeeld in eenheden der zevende decimaal. Zij zijn door de wijze van hun ontstaan slechts zeer ruwe benaderingen tot de eerste differentiaalquotienten van M naar elk der massa's, de massa's van Stockwell telkens als eenheid en als uitgangswaarde genomen. Hoe ruw deze benadering is moge met enkele voorbeelden aangetoond worden. De som der absolute waarden van alle acht grootheden M_i is de maximale waarde van de excentriciteit der aardbaan. Stockwell geeft hiervoor: 0.0677352. Ik heb de grootheden M_i gecorrigeerd overeenkomstig de boven gegeven waarden van ν, en vind: 0.0623331. Alleen voor de grootheid ν_3, die op de massa van het stelsel aarde-maan betrekking heeft,

---

1) Smithsonian Contributions to Knowledge, XVIII, 1870, Art. 3, blz. 96—99. De hier bedoelde constanten M_i duidt Stockwell aan met N''_{i-1}, als i de cijfers van 1 tot 8 voorstelt. De grootheden ν_i noemt hij μ''_{i-1}.

vindt men bij Stockwell de gegevens om ook het quadraat ervan in rekening te brengen. Doet men dit, dan moet $+ 196140\, \nu_3$ in de boven gegeven uitdrukking voor M_3, vervangen worden door $+ 266490\, \nu_3 - 1407000\, \nu^2_3$, en voor de maximale waarde der excentriciteit volgt: 0.0589073. De invloed van ν^2_3 alleen brengt reeds 5.5 % verschil. Wat zal de invloed van de quadraten der overige grootheden ν zijn? Zie de buitengewoon grote waarden ook van ν_1, ν_4, ν_7! Het is zelfs niet te zeggen of de maximale waarde der excentriciteit afgerond 0.05, 0.06 of 0.07 bedraagt!

Een ander voorbeeld: De grootheid g_3 die de frequentie van de sinuskromme $M_3 \sin (g_3 t + \beta_3)$ bepaalt (zie blz. 4). Corrigerend Stockwell's waarde, vind ik zonder ν^2_3 en met ν^2_3 een verschil van $-0.''0842$. In 7700000 jaren reeds geeft dit alleen in 't argument van de sinus 180^0 verschil.

De conclusie die hieruit te trekken valt is deze: Hoogstwaarschijnlik is Stockwell's werk onvoldoende voor het verkrijgen van inzicht in het quantitatief verloop over zeer lange tijdperken van de seculaire veranderingen in vorm en stand der planetenbanen. Zijn resultaten met betrekking tot uiterste waarden van de excentriciteiten en de hellingen, en tot het bestaan van gemiddelde bewegingen der perihelia en der knopen moeten worden herzien op grond van een geheel nieuwe berekening der constanten, met behulp van massa's die veel meer dan die van Stockwell de waarheid nabij komen. Alleen als aan deze laatste eis voldaan is zal men ook Stockwell's methode voor correctie der constanten kunnen behouden. De onzekerheid van de tegenwoordig aan te nemen massa's is, behalve voor Mercurius, reeds gering genoeg. Verscheidene van Stockwell's gevolgtrekkingen zullen wellicht een essentieele wijziging ondergaan.

Wat de toepassing van Stockwell's resultaten, na correctie, op palaeoklimatologiese en geologiese vraagstukken betreft: niet de tegenwoordige onzekerheid der massa's waarover ik in de Voorrede sprak (blz. 4), maar het feit dat Stockwell's massa's zo sterk van de waarheid afwijken, maakt dat zijn formules niet zijn aan te wenden over tijdvakken van meer dan enige honderdduizenden van jaren. Waarschijnlik is het tijdvak van 650000 jaren waarover Milankovitch in „Die Klimate der Geologischen Vorzeit" van Köppen en Wegener, de berekening uitstrekt al te groot om met zekerheid conclusies te kunnen trekken voor het vraagstuk der diluviale ijstijden.

Ik stel mij voor, zo spoedig de gelegenheid daartoe zijn zal, op deze kwesties terug te komen, als ook de hier gevonden massa's toe te passen op een berekening van het Onveranderlik Vlak van Laplace.

TOEVOEGSELS

1°. Bij 't geen op blz. 64 gezegd is over de bepaling der parallactiese vereffening.

De bepaling uit occultaties is echter ook niet vrij van systematiese fouten. Occultaties omstreeks de beide kwartierstanden van de maan zijn voor de bepaling het meest geschikt, daar de vereffening dan zijn maximale waarde heeft. Bij eerste kwartier echter wordt het einde der occultatie te laat, bij laatste kwartier het begin te vroeg waargenomen. In beide gevallen is een te grote waarde der afgeleide vereffening en dus ook van de zonsparallaxis het gevolg. Het is gemakkelik in te zien dat waarschijnlik de bepaling uit occultaties gedurende de tweede helft der synodiese maansomloop de nauwkeurigste waarde voor de vereffening geven zal.

Te laat vind ik in M.N. **64**, 1904 Cowell's onderzoek, in M.N. **83**, 1923 dat van Crommelin en Cullen naar de parallactiese vereffening uit de meridiaanwaarnemingen te Greenwich. Cowell leidt uit de waarnemingen van de verlichte rand der maanschijf, verricht te Greenwich van 1847 tot 1901, af: $\Pi_\odot = 8.''787 \pm 0.''018$ w.f. Deze waarnemingen zijn echter onderhevig aan sterke systematiese fouten van dezelfde periode als die der parallactiese vereffening: de synodiese maand. Crommelin en Cullen bepalen uit waarnemingen van de rand en van de krater Mösting A: $\Pi_\odot = 8.''784$, en uit waarnemingen van de krater alleen: $\Pi_\odot = 8.''778$. In het eerste resultaat is de systematiese fout der randwaarnemingen althans ten dele geëlimineerd, en is in het tweede niet aanwezig. Toch geloof ik dat beide resultaten achter staan bij dat uit occultaties, daar zowel de waarnemingen van de krater als die van de rand, veel meer dan die der occultaties — die bovendien veel eenvoudiger is, en een eenvoudiger bewerking toelaat — de invloed ondervindt van de maandelikse wisseling in de belichting van de maan door de zon, en dus in de tabellen op blz. 65 en blz. 83 toch niet hadden moeten worden meegerekend al had ik er eerder kennis van gekregen.

2°. Op blz. 67 is bij $\delta\Pi_C$ verzuimd mee te delen in welke een-

heden de variaties zijn uitgedrukt. Voor δg is dit $^{cm}/_{sec^2}$, voor δA de meter, voor $\delta\left(\frac{1}{\mu}\right)$ en δE de eenheid.

3°. Bij § 14, blz. 81.

In M.N. **85**, 1925, blz. 855, 856 deelt Spencer Jones mee de correctie aan Newcomb's Venusmassa $\nu = -0.0115 \pm 0.0048$ w.f., bepaald uit heliometriese waarnemingen van Mars verricht aan de Kaap van 1894 tot 1924. Hieruit volgt $m_2 = 1 : 412700$, maar deze kleine waarde lijkt in strijd met de waarden op blz. 80 meegedeeld. Ik geloof dat men er geen al te groot gewicht aan hechten moet. De afwijking is geheel van dezelfde orde als de verschillen die Newcomb vond in de resultaten uit waarnemingen van de zon voor verschillende tijdperken en observatoria, en als die Ross vond uit de waarnemingen van Mars voor verschillende perioden. In dit verband is echter het artiekel van Fotheringham in M.N. **87**, 1926, blz. 142, getiteld „Trepidation" interessant. Fotheringham betoogt in tegenstelling tot Spencer Jones (M.N. **87**, 1926) dat die merkwaardige parallel lopende fluctuaties in de bewegingen van Mercurius, Venus, Aarde, Mars en de Maan niet toegeschreven kunnen worden aan onregelmatigheden in de aardrotatie, maar dat zij veel eer aanwijzingen zijn voor een van de zon uitgaande „trepidation", iets als een fluctuerende variatie in de aantrekkingskracht van de zon. Hij gelooft deze ook te kunnen vinden in een schijnbare fluctuatie van de Venusmassa, en tracht deze massa voor te stellen als volgt: $m_2 = a + b\varphi$, waarin a en b constanten zijn, en φ de fluctuatie der maansbeweging voorstelt. Hij vindt (blz. 167):

$$m_2 = \frac{1 - (0.0556 \pm 0.0069 \text{ w.f.})\,\varphi}{409300 \pm 790 \text{ w.f.}}.$$

$m_2 = 1 : 409300$ komt overeen met een fluctuatie *nul* ten opzichte ener gemiddelde maansbeweging die Fotheringham afleidt. In hoeverre echter dit getal de massa van Venus voorstelt is een open vraag!

STELLINGEN

1

De dradenmikrometer is ongeschikt voor de nauwkeurige meting van grote afstanden.

2

Voor het vergelijken van de aantrekkingskracht der aarde aan het oppervlak met die op kosmiese afstanden, verdient het gebruik van het product van de gravitatieconstante en de gemiddelde dichtheid der aarde de voorkeur boven dat van de versnelling der zwaartekracht aan het oppervlak voor de breedte (geocentries of geografies) $\varphi_* = \text{arc sin } \sqrt{\frac{1}{3}}$ . . .

3

De stelselmatige fotografiese waarneming van de satellieten van Uranus met reflectoren kan materiaal van grote waarde leveren voor de kennis van die fotografiese effecten die de meting van afstanden op de fotografiese plaat onbetrouwbaar maken.

4

De onzekerheid die reeds meer dan veertig jaren omtrent de massa van Saturnus bestaat is de Sterrekunde onwaardig.

5

Newcomb zegt ten onrechte: „It can not, I conceive, be doubted that the visible photosphere is an equipotential surface." (Fundamental Constants, blz. 111).

6

Het stelsel Aarde-Maan moet worden opgevat als dubbelplaneet.

7

Kobold overdrijft in niet geringe mate als hij zegt: „Die Kenntniss des wahren Ortes der Körper im Raume für zwei Zeitpunkte würde uns alle Geheimnisse, die über ihre Bewegungen und ihre Anordnung noch ausgebreitet sind, in einfachster und sicherster Weise enthüllen." (Der Bau des Fixsternsystems, blz. 68).

8

Hermann Struve's resultaat voor de afmetingen van Saturnus, afgeleid uit waarnemingen van de verduisteringen der satellieten, is aan systematiese fouten onderhevig. (Sitz. ber. Berlin, 1915, blz. 805).

9

De nauwkeurige waarneming van het „Spica-verschijnsel" kan de verklaring brengen van de kleuren der dubbelsterren. Ten dele zijn deze kleuren aan physiologiese eigenaardigheden van het oog toe te schrijven. (A.N. **211**, kol. 203, 237, 381 ; A.N. **214**, kol. 85).

10

Het onderzoek van Hopfner : „Die Verteilung der solaren Wärmestrahlung auf der Erde" bevat logiese fouten die de resultaten illusoir maken. (Sitz. ber. Wien, **114**, IIa, 1905, blz. 1315).

11

De geophysicus Harold Jeffreys verwerpt ten onrechte de astronomiese verklaring der ijstijden in de geest van de theorie van James Croll. (H. Jeffreys, „The Earth", Cambridge, 1924, blz. 263).

12

De vormen van het maansoppervlak geven geen steun aan de hypothese dat primaire gebergtevorming op aarde het resultaat zijn zou van plooiing der aardkorst tengevolge van inkrimping door afkoeling.

13

De theorie die de platte of lichtgebogen vlakken en de scherpe ribbels van een zeker soort stenen die in de Gooise heidevelden voorkomen, aan de slijpende werking van met zand beladen wind toeschrijft, is onvoldoende voor de verklaring der verschijnselen.

14

Einstein's algemene relativiteitstheorie heeft tot nog toe in de waarneming geen voldoende bevestiging gevonden.

15

De metingen van Leo der „halfwaardebreedten" van heliumlijnen bewijzen niet dat de bandenlijnen door He_2 moleculen worden uitgezonden. (Ann. d. Physik, **81**, 1926, blz. 787—789).

16

Bij het natuurkundeonderwijs ga steeds de ervaring van het dagelikse leven en het experiment, nooit de theorie, voorop. De wiskundige inkleding worde niet verwaarloosd, maar kome achterna. Bij het maken van vraagstukken zij de aanschouwelike voorstelling de belangrijkste factor voor de bevordering van het inzicht.

17

De wijze waarop in vele leerboeken der Sterrekunde de elliptiese vorm van de banen van de aarde en van de maan in verband met de schijnbare diameter of met de parallaxis wordt gebracht, is misleidend, en dus te verwerpen.

18

Het standpunt waarop P. Wijdenes zich stelt bij zijn zeer onvoldoende behandeling van de onbepaalde vorm ener rationale breuk in „Lagere Algebra", I, blz. 142, behoort niet thuis in een leerboek dat aanspraak maakt op de naam „Leerboek voor de acte Wiskunde L.O."

19

Voor de afleiding van alle fundamentele grootheden uit de waarneming is noodzakelik dat bij internationale afspraak een standaard van uitgangswaarden, vergelijkingstafels, grootheden en methoden van reductie en rekenmethoden wordt vastgesteld.

20

„In a case where our ignorance is complete, all hypotheses which do not violate known facts are admissible". (Simon Newcomb, „Fundamental Constants", blz. 111).

LIJST VAN AFKORTINGEN.

Abh. Akad. Berlin. Abhandlungen der Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften, Berlin.

A. J. Astronomical Journal.

A. N. Astronomische Nachrichten.

Ap. J. Astrophysical Journal.

Astr. Pap. Astronomical Papers prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac.

Beob. Marstrab. Beobachtungen der Marstrabanten in Washington, Pulkowa und Lick Observatory, van H. Struve, Mémoires de l'Ac. imp. des Sciences de St. Pétersbourg, 8e Série, Vol. VIII, 1898.

Beob, Sat. trab. 1e Abth. Beobachtungen der Saturnstrabanten, erste Abtheilung, Beobachtungen am 15-zölligen Refractor von Hermann Struve. Supplément aux Observations de Poulkova, St. Pétersbourg, 1888.

Beob. Sat. trab. Vol. XI. Beobachtungen der Saturnstrabanten am 30-zölligen Pulkowaer Refractor von Hermann Struve. Publications de Poulkovo, Série 2, Vol. XI, St. Pétersbourg, 1898.

Bull. Astr. Bulletin Astronomique.

Bull. Poulkovo. Bulletin de l' Observatoire Central de Russie à Poulkovo.

Cape Annals. Annals of the Cape Observatory.

„Fundamental Constants" of F. C. The Elements of the four inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy, by Simon Newcomb, Washington, 1895.

Mém. St. Pét. Mémoires de l' Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

M. N. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.

M. R. A. S. Memoirs of the Royal Astronomical Society.

Publ.Wash. VI. Publications of the Washington Naval Observatory. 2nd Series. Vol. VI.

Sitz. ber. Berlin. Sitzungsberichte der Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften, Berlin.

Transact. Yale Obs. Transactions of the Astronomical Observatory of Yale University.

Versl. K. A. W. Verslagen van de vergaderingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
V. J. S. A. G. Vierteljahrschrift der Astronomische Gesellschaft.
Wash. Obs. Washington Observations.

VERBETERINGEN.

Blz. 5, regel 8 v. o. Het groot deel.... moet zijn: Een groot deel....
„ 62, „ 7 v. o. De waarschijnlike fout van T moet zijn: $\pm\ 0.^{d}0000015 = 0.^{s}13$.
„ 67, „ 9 v. o. + **0.″0136 w.f.** moet zijn ± **0.″0136 w.f.**
„ 79, „ 8, 9 v. o. Venus de Aarde moet zijn: Venus en de Aarde.
„ 80, „ 5 v. o. $\nu = 0.0079$ moet zijn: $\nu = +\ 0.0079$.
„ 81, „ 3 v. b. ± **500 w.f.** moet zijn: ± **750 w.f.** Ik heb n.l. de onzekerheid van de Venusmassa groter geacht dan de waarschijnlike fout die uit de tabel op blz. 80 volgt, uitdrukt.
„ 81, „ 17 v. b. Fundamental constants moet zijn: Fundamental Constants.

VERBETERINGEN

Blz. 60, regel 3 v. o. 86164.^{s}100 moet zijn: 86164.^{s}100.
„ 66, „ 5 v. o. $\left(\frac{r^2}{r_1}\right)^2$ moet zijn: $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$.
„ 74, „ 8 v. o. Enke moet zijn: Encke.