



Eenige sommatiemethoden

<https://hdl.handle.net/1874/288456>

qu. 192, 1927

EENIGE SOMMATIEMETHODEN



J. G. VAN DE PUTTE

Diss.
Utrecht
1927

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

EENIGE SOMMATIEMETHODEN

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK UTRECHT



3969 3399

Diss. Utrecht 1927

Eenige Sommatiethoden

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN
DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN
NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVER-
SITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN
RECTOR-MAGNIFICUS DR. B. J. H. OVINK,
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER
LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS
BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVER-
SITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE
FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE
TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 28 NO-
VEMBER 1927, DES NAMIDDAGS 4 UUR DOOR
JAN GERARDUS VAN DE PUTTE,
GEBOREN TE GOUDA.



AAN MIJN OUDERS
EN MIJN VROUW.

De voltooiing van dit proefschrift biedt mij de gelegenheid U, Hoogleeraren en Lectoren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde dank te zeggen voor het genoten onderwijs en voor hetgeen Gij tot mijn wetenschappelijke vorming hebt bijgedragen.

Inzonderheid dank ik U, Hooggeleerde WOLFF, voor de bereidwilligheid, waarmee gij de taak van Promotor op U genomen hebt en voor den grooten steun, die ik bij de samenstelling van dit proefschrift van U mocht ondervinden.

INHOUD.

	Bladz.
INLEIDING	1
HOOFDSTUK I. ϕ Sommeerbaarheid	10
HOOFDSTUK II. Sommeerbaarheid (α_{kn})	18
HOOFDSTUK III. De Fourierreeks	22
HOOFDSTUK IV. De sommatiemethode van HARDY en RIESZ	29

INLEIDING.

Als men de ontwikkeling van de theorie der oneindige reeksen nagaat, blijkt deze in drie hoofdtijdperken verdeeld te kunnen worden.

Het eerste tijdvak heeft betrekking op den tijd vóór ABEL en CAUCHY. Practisch maakte men toen geen onderscheid tusschen convergente en divergente reeksen, en gaf men zich geen rekenschap van het al of niet geoorloofde van de bewerkingen, die men op deze reeksen toepaste. Wel bemerkt men hier en daar pogingen om een convergentiebewijs op te stellen, zooals bij LEIBNIZ (1646—1716), den bibliothecaris en historiograaf van den hertog van Hannover. LEIBNIZ stelde het convergentie criterium voor alterneerende reeksen op, maar aan den anderen kant schrijft hij $1 - 1 + 1 + \dots = \frac{1}{2}$. De groote mathematicus LEONHARD EULER (1707—1783) is wel een van de merkwaardigste vertegenwoordigers van dit tijdvak. Niet alleen op het gebied van de theorie der oneindige reeksen, maar ook op dat van andere onderdeelen der wiskunde voert hij bewerkingen uit, die volgens de opvatting van den modernen mathematicus niet door den beugel kunnen. Het eigenaardige feit, dat hij, niettegenstaande hij voortdurend foutieve bewerkingen uitvoert, bijna altijd het juiste antwoord vindt, d. w. z. het antwoord, dat men met de tegenwoordige strenge en beter gefundeerde methoden krijgt, is wel een bewijs van zijn mathematisch genie. Wel was EULER zich er van bewust, dat hij met divergente reeksen werkte, maar hij trachtte zich uit de moeilijkheid te redden, door een nieuw sombegrip in te voeren. Hij tracht een functie $f(x)$ te bepalen, die in een reeks ontwikkeld, voor een bepaalde waarde van x juist de divergente reeks oplevert. Als $f(x)$ voor die waarde van x bestaat en gelijk is aan S , dan noemt hij S

de „som” van de reeks. Een bezwaar, reeds door NICOLAAS BERNOULLI tegen deze methode geopperd, is, dat *verschillende* uitdrukkingen voor bijzondere waarden der veranderlijke, dezelfde reeks kunnen leveren. Zoo vinden we bijv. de reeks $1 - 1 + - \dots$ door in de uitdrukking

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + - \dots, \text{ die voor } |x| < 1 \text{ geldt, } x = 1$$

te stellen en krijgen dus $\frac{1}{2} = 1 - 1 + \dots$. Maar eveneens krijgen we, als we in de identiteit

$$\frac{1-x^p}{1-x^q} = 1 - x^p + x^q - x^{p+q} + x^{2q} \dots \quad p < q \text{ en } |x| < 1,$$

x tot 1 laten naderen, tot uitkomst $\frac{p}{q} = 1 - 1 + - \dots$, dus elke willekeurige breuk.

Deze methode, zonder nadere preciseering, is dus te verwerpen. Een feit is 't echter, dat gedurende een eeuw, deze regel door vele wiskundigen werd toegepast en altijd tot juiste uitkomsten leidde, terwijl de gevallen, waarin deze regel niet opging, altijd voortkwamen uit speciaal geconstrueerde voorbeelden. Men ging op deze wijze door, totdat GAUSS, ABEL en CAUCHY zich met deze oneindige reeksen gingen bezighouden.

Met het optreden van deze mannen begint in de Analyse een geheel nieuw tijdperk. Zij stellen namelijk den eisch van exacte behandeling der te bewijzen stellingen. Eigenschappen, die voor een eindig aantal termen gelden, mogen maar niet zonder meer op een oneindig aantal worden overgedragen. Door CAUCHY wordt een strenge definitie der convergentie gegeven en door hem worden verschillende criteria opgesteld en bewezen. ABEL zegt van het werken met divergente reeksen, dat men zich moest schamen er eenig bewijs mede te geven. De divergente reeksen werden dus in de Analyse als contrabande beschouwd, in de Astronomie echter werden ze wel gebruikt. Het handhaven van dezen strengen eisch was oorzaak, dat het leveren der bewijzen van verschillende problemen zeer moeilijk werd.

De vraag is nu, of we ons van de knellende banden van den convergentie-eisch kunnen ontdoen. Dit is gelukt, door aan

het begrip „som” een uitbreiding te geven. We merken daartoe op, dat een oneindige getallenreeks, in welken vorm deze ook gegeven is, zonder meer geen beteekenis heeft, maar dat deze bij definitie moet worden vastgesteld. Zoo definieert men als „som” van een oneindig voortlopende convergente reeks de limiet, waartoe de som van n termen, te beginnen bij den eersten, nadert, als n voortdurend toeneemt. Reeksen, waarbij deze limiet niet bestaat, noemt men divergent. Niets verhindert ons echter een andere definitie van som van een oneindige reeks” in te voeren. Daartoe geven we de volgende bepaling: Zij gegeven een reeks $a_0 + a_1 + \dots$. Voer nu met de termen van deze reeks volkomen gedefinieerde bewerkingen uit, indien deze als resultaat een getal s geven, dan is bij definitie s de som van de reeks $\sum a_n$; daarbij eischen we, dat wanneer deze methode toegepast wordt op convergente reeksen, het getal s gelijk zal zijn aan de som van de reeks, genomen in de oude beteekenis van het woord. Bovendien eischen we, dat de methode zóódanig is, dat als $\sum a_n$ en $\sum b_n$ respectievelijk „sommeerbaar” zijn tot A en B , $\sum (a_n + b_n)$ sommeerbaar tot $A + B$ is.

De methode heeft alleen dan zin, wanneer er minstens één reeks bestaat, die niet volgens de oude, maar wel volgens de nieuwe beteekenis sommeerbaar is.

Door FROBENIUS (1880) en CÉSARO zijn het eerst stappen in deze richting gedaan.

Als $s_n = a_0 + \dots + a_n$ en $s'_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$, terwijl

$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s$, dan wordt s gedefinieerd als „som” van de reeks $\sum a_n$.

Het is gemakkelijk in te zien, dat deze methode van sombepaling voor convergente reeksen dezelfde uitkomst geeft als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$. Toegepast op de reeks $1 - 1 + - \dots$ geeft deze methode als som $1/2$. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n$ bestaat en eindig is, zegt men, dat de reeks sommeerbaar C_1 is.

Heeft deze nieuwe somdefinitie voordeelen boven de

oude? Ja; dit zullen we met enkele voorbeelden aantonen.

Als $\sum a_n = A$ en $\sum b_n = B$ twee convergente reeksen voorstellen, dan is de productreeks $\sum c_n = \sum (a_0 b_n + \dots + a_n b_0)$ altijd C_1 sommeerbaar tot $A B$ d. w. z.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^1 = \frac{C_0 + C_1 + \dots + C_n}{n+1} = A B$$

waarbij $C_\nu = c_0 + \dots + c_\nu = a_0 B_\nu + a_1 B_{\nu-1} + \dots + a_\nu B_0$

$$\text{en } B_\nu = \sum_0^\nu b_n.$$

$$\text{Dus } \sum_{\nu=0}^{\nu=n} C_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (a_0 B_\nu + \dots + a_\nu B_0) = A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \dots + A_n B_0 \quad (A_\nu = \sum_0^\nu a_n).$$

$$\text{en } C_n^1 = \sum_{\nu=0}^n \frac{A_\nu B_{n-\nu}}{n+1} = \sum_{\nu=0}^n \frac{(A_\nu - A) B_{n-\nu}}{n+1} + A \sum_0^n \frac{B_{n-\nu}}{n+1}$$

Daar $A_\nu - A \rightarrow 0$, als $\nu \rightarrow \infty$ en $B_{n-\nu}$ begrensd is, nadert de 1^e term van het tweede lid tot 0, terwijl de laatste tot $A B$ nadert, wegens de convergentie van $\sum b_n$.

Een analoog geval treedt op bij de Fourierreeksen.

Door ¹⁾ FEJÉR is bewezen, dat als $f(x)$ integreerbaar is voor $0 \leq x \leq 2\pi$, en in x_0 een rechtsche en linksche limiet heeft, de Fourierreeks steeds C_1 sommeerbaar is tot $\frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$. (Zie pg. 22 van dit proefschrift). Dus ook hier wordt na invoering van het nieuwe sombegrip een veel eenvoudiger overzicht verkregen.

Door CÉSARO is deze methode verder uitgebreid.

Hij stelt $a_0 + \dots + a_n = s_n = S_n^{(0)}$ en verder voor $k \geq 1$ $S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \dots + S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)}$.

Als nu $\frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} \rightarrow S \left(k \text{ vast en } \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{n! k!} \right)$, dan

is de reeks $\sum a_n$ bij definitie C_k sommeerbaar tot S .

¹⁾ L. FEJÉR. Untersuchungen über die Fourierschen Reihen. Math. Annalen. Bd 58, S. 51. 1903.

Door volledige inductie is gemakkelijk in te zien, dat

$$S_n^{(k)} = \binom{n+k}{k} a_0 + \dots + \binom{k}{k} a_n.$$

We merken op dat als $S_n^{(0)} \equiv 1$, $S_n^{(k)} = \binom{n+k}{k}$. De methode komt dus neer op het vergelijken van de rij s_n met de rij $1, 1, \dots$.

Door HÖLDER is de eerste methode anders uitgebreid.

Deze methode komt neer op 't volgende:

$$\text{Stel} \quad a_0 + \dots + a_n = s_n \text{ en } \frac{s_0 + \dots + s_n}{n+1} = s_n^{(1)}$$

$$\frac{s_0^{(1)} + \dots + s_n^{(1)}}{n+1} = s_n^{(2)} \text{ enz.}$$

Nadert $s_n^{(p)} \rightarrow s$, dan is de reeks H_p sommeerbaar tot s .

Het is gelukt aan te toonen, dat deze 2 laatste methoden aequivalent zijn, zoodat uit de C_k sommeerbaarheid volgt de H_k sommeerbaarheid en omgekeerd.³⁾

Men kan bewijzen, dat een noodzakelijke voorwaarde voor de C_k sommeerbaarheid is, $\frac{a_n}{n^k} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.⁴⁾

Hierdoor wordt dus het gebied, waarin de C_k methode tot een som voert, begrensd, d.w.z. reeksen, waarvoor $\frac{a_n}{n^k}$ niet tot 0 nadert, zijn niet C_k sommeerbaar.

Veel moeilijker is de volgende vraag: Alle convergente reeksen zijn C_k sommeerbaar, waar ligt nu in de verzameling van alle C_k sommeerbare reeksen de scheidslijn tusschen convergente en divergente reeksen? Door HARDY⁵⁾ is bewezen, dat, als $|n a_n| < K$ ($K > 0$), de reeks alleen dan sommeerbaar is, als $\sum a_n$ convergeert.

1) Bull. des sciences math. (2) Bd. 14 S. 114—120. 1890.

2) Math. Ann. Bd. 20. S. 535—549 1882.

3) G. FABER. Sitzungsber. der Bayr. Akad. Math. Phys. Klasse, 1913.

I. SCHUR. Math. Ann. Bd. 74 1913. S. 519—531.

K. KNOPP. Theorie der Unendlichen Reihen S. 481.

4) KNOPP. Theorie der unendlichen Reihen pg. 484.

5) HARDY. Proc. Lond. Matth. Soc. Serie 2 Vol. 8. S. pg. 301—320. 1909.

Een andere methode bestaat hierin, dat, als gegeven is $\sum a_n$, men opschrijft $f(x) = \sum a_n x^n$. Is nu de convergentiestraal van deze reeks ≥ 1 en $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = s$, als x langs de reële as van 0 tot 1 nadert, dan noemen we $\sum a_n$ *A* sommeerbaar tot „som” s . Door ABEL ¹⁾ is reeds bewezen, dat, als $\sum a_n = s$, dus convergeert, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sum a_n x^n = s$, zoodat deze methode voor convergente reeksen de som volgens de oude definitie geeft. Toegepast op de reeks $1 - 1 + 1 - + \dots$ geeft deze methode als „som” $1/2$.

Alle reeksen, die C_k sommeerbaar zijn, zijn ook *A* sommeerbaar. ²⁾ Het is niet moeilijk reeksen te maken, die wél *A* sommeerbaar, maar voor geen enkele waarde van k sommeerbaar C_k zijn.

Een voorbeeld levert hier de functie $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$

$$e^{\frac{1}{1+x}} = 1 + \frac{1}{1!(1+x)} + \dots + \frac{1}{p!(1+x)^p} + \dots$$

Nu is voor $|x| < 1$, $\frac{1}{(1+x)^p} = 1 - \frac{p}{1}x + \dots$

$$+ (-1)^n \times \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n!} x^n + \dots$$

We mogen nu schrijven

$$f(x) = \sum a_n x^n \text{ voor } |x| < 1.$$

$$\text{met } a_n = (-1)^n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n! p!} \quad 3)$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } |a_n| &> \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n! p!} = \\ &= \frac{(p+n-1)!}{(p-1)! n! p!} = \frac{(n+1) \dots (n+p-1)}{p! (p-1)!} > \frac{n^{p-1}}{p! (p-1)!} \end{aligned}$$

Zij nu p vast, dan $\frac{|a_n|}{n^{p-2}} \rightarrow \infty$, als $n \rightarrow \infty$; dit geldt

¹⁾ ABEL. Journal f. d. reine und angew. Math. Bd. 1. pg. 311. 1826.
KNOPP. Theorie der unendl. Reihen pg. 175.

²⁾ KNOPP. Theorie der unendl. Reihen pg. 490.

³⁾ Het bewijs dat deze omvorming geoorloofd is, kan men vinden in KNOPP. Theorie d. u. R. pg. 430—433.

voor iedere p , dus de reeks is voor geen enkele waarde van p , C_p sommeerbaar, echter is ze wel A sommeerbaar tot $e^{\frac{1}{2}}$.

Men kan verder bewijzen, dat als $a_n < \frac{c}{n}$, $c > 0$, voor $n \geq 1$

en $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeert voor $|x| < 1$, terwijl $f(x) \rightarrow s$, als x langs de reële as van $0 \rightarrow 1$ nadert, ook $\sum a_n = s$, zoodat de reeks alleen dan A sommeerbaar is, als ze convergeert. Het bewijs van deze stelling is zeer ingewikkeld.

(Zie E. LANDAU. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. pg. 45—56).

We bespreken verder een sommatie methode ingevoerd door BOREL.¹⁾ Bij de vorige sommatiemethode hebben we opgeschreven

$f(x) = \sum a_n x^n$ voor $|x| < 1$. Als $a_0 + \dots + a_n = s_n$, $n = 0, 1, \dots$. Nu kan $f(x)$ ook geschreven worden als:

$$f(x) = \frac{\sum_0^{\infty} s_n x^n}{\sum_0^{\infty} x^n}$$

Bij die methode wordt dus de reeks $\sum s_n x^n$ vergeleken met de reeks $\sum x^n$. BOREL vergelijkt nu de reeksen

$\sum s_n \frac{x^n}{n!}$ en $\sum \frac{x^n}{n!}$ en hij noemt een reeks sommeerbaar tot som s als $e^{-x} \sum s_n \frac{x^n}{n!} \rightarrow s$, voor $x \rightarrow \infty$.

Nemen we weer als voorbeeld de reeks $1 - 1 + - \dots$. Hier is $s_{2n+1} = 0$ en $s_{2n} = 1$, ($n = 0, 1, \dots$), zoodat

$$\sum s_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{Dus } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1/2.$$

Voor de reeks $1 - 2 + 3 - 4 + - \dots$ wordt

$$s_0 = 1, s_1 = -1, s_{2n} = (n+1), s_{2n+1} = -(n+1), \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

¹⁾ E. BOREL. Lecons sur les séries divergentes.

De reeks $\sum s_n \frac{x^n}{n!}$ wordt nu:

$$1 - \frac{x}{1!} + 2 \frac{x^2}{2!} - 2 \frac{x^3}{3!} + 3 \frac{x^4}{4!} - 3 \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Daar deze reeks absoluut convergeert, mogen we de som gelijk stellen aan

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2 \frac{x^2}{2!} + 3 \frac{x^4}{4!} + \dots\right) - \left(\frac{x}{1!} + 2 \frac{x^3}{3!} + 3 \frac{x^5}{5!} + \dots\right) = \\ & \frac{1}{2x} \left\{ 2x + \frac{4x^3}{2!} + \frac{6x^5}{4!} + \dots \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1!} + \frac{4x^3}{3!} + \frac{6x^5}{5!} + \dots \right) = \\ & \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(x \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \\ & = \frac{2(e^x + e^{-x}) + x(e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x})}{4} = \\ & = \frac{e^x - 2xe^{-x} + 3e^{-x}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \frac{e^x - 2xe^{-x} + 3e^{-x}}{4} = 1/4.$$

Ook deze sommatiethode voldoet aan de voorwaarde, dat ze, toegepast op een convergente reeks, de som van die reeks als uitkomst geeft.

Is nl. $\sum a_n = s$, dan kan bij gegeven $\varepsilon > 0$, N zóó bepaald worden, dat $|s_n - s| < \varepsilon$, voor $n \geq N$.

Dan is

$$\begin{aligned} & \left| e^{-x} \sum_0^\infty s_n \frac{x^n}{n!} - s \right| = e^{-x} \left| \sum_0^\infty (s_n - s) \frac{x^n}{n!} \right| \\ & \leq e^{-x} \left| \sum_0^N (s_n - s) \frac{x^n}{n!} \right| + \varepsilon e^{-x} \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} < 2\varepsilon, \text{ voor } x \text{ voldoende} \\ & \text{groot.} \end{aligned}$$

Zijn twee reeksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$ sommeerbaar tot A en B , dan is ook $\alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$ sommeerbaar tot $\alpha A + \beta B$.

Hierbij moet nog opgemerkt worden, dat uit de sommeerbaarheid van de rij $s_0, s_1, s_2, \dots$ niet volgt die van de rij $s_1, s_2, s_3, \dots$.

Hiervan is door HARDY een eenvoudig voorbeeld gegeven. Beschouw de rij $s_0, s_1, s_2 \dots$ die ontstaat uit:

$$\sin(e^x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$$

Daar $e^{-x} \sin e^x \rightarrow 0$, als $x \rightarrow \infty$, is $s_0, s_1 \dots$ sommeerbaar tot 0. Differentieëren we bovenstaande vergelijking, dan komt er:

$$e^x \cos(e^x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$$

Daar $\cos(e^x)$ niet tot een limiet nadert, als $x \rightarrow \infty$, is de rij $s_1, s_2 \dots$ *niet* sommeerbaar.

In dit proefschrift worden in hoofdstuk I en II twee nieuwe sommatiemethoden besproken. In hoofdstuk III worden enkele stellingen betreffende de sommeerbaarheid van de Fourierreeks afgeleid, waarna in hoofdstuk IV uitvoerig wordt ingegaan op de sommatiemethode, die door HARDY en RIESZ is ingevoerd, en die, vooral op het gebied van de Dirichlet'sche reeksen, belangrijke resultaten heeft gegeven.

HOOFDSTUK I.

§ 1. Bepaling ϕ Sommeerbaarheid.

We zullen in 't volgende een algemeene sommatie-methode bespreken.

Zij gegeven $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ convergent voor $|x| < 1$ en $\phi(x) = \sum_0^\infty A_n x^n$ met de eigenschappen: $\phi(x)$ convergeert voor $|x| < 1$, $A_n > 0$, $A_{n+1} > A_n$ en $\frac{A_n}{A_{n+1}} \rightarrow 1$ als $n \rightarrow \infty$
 $\frac{1}{\phi(x)} = \sum B_n x^n$, $\sum |B_n|$ convergent.

Maak nu op $f(x)\phi(x) = \sum S_n x^n$, convergent voor $|x| < 1$ met $S_n = a_0 A_n + a_1 A_{n-1} + \dots + a_n A_0$.

Als $\frac{S_n}{A_n} \rightarrow L$ voor $n \rightarrow \infty$, dan is bij definitie $\sum a_n$ sommeerbaar ϕ tot „som” L .

§ 2: $\frac{a_n}{A_n} \rightarrow 0$, als $n \rightarrow \infty$ en als tevens $\sum a_n$ sommeerbaar ϕ is tot „ L ”.

We mogen zonder aan de algemeenheid te kort te doen $L = 1$ nemen.

Bewijs: $f(x) = \sum a_n x^n = \sum B_n x^n \sum S_n x^n$, voor $|x| < 1$,
 dan is $a_n = B_0 S_n + B_1 S_{n-1} + \dots + B_n S_0$

$$\text{dus } \frac{a_n}{A_n} = \frac{B_0 S_n + \dots + B_n S_0}{A_n}.$$

Nu is gegeven $\frac{S_n}{A_n} \rightarrow 1$, dus als $S_n = (1 + \varepsilon_n) A_n$, dan kan bij gegeven $\varepsilon > 0$, k zóó bepaald worden, dat $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ voor $n \geq k$.

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{A_n} &= \frac{B_0 A_n + \dots + B_n A_0}{A_n} + \\ &+ \frac{B_0 A_n \varepsilon_n + \dots + B_{n-k} A_k \varepsilon_k + \dots + B_n A_0 \varepsilon_0}{A_n} \end{aligned}$$

De eerste term is 0, omdat $\sum A_n x^n \sum B_n x^n = 1$ voor $|x| < 1$.

De modulus van den 2^{en} term is kleiner dan:

$$\left| \frac{B_0 A_n \varepsilon_n + \dots + B_{n-k} A_k \varepsilon_k}{A_n} \right| + \left| \frac{B_{n-k+1} A_{k-1} \varepsilon_{k-1} + \dots + B_n A_0 \varepsilon_0}{A_n} \right|$$

$$< \frac{\varepsilon A_n \sum_{r=0}^{n-k} |B_r|}{A_n} + M \sum_{r=n-k+1}^n |B_r| < N \varepsilon \text{ voor } n \text{ voldoende}$$

groot, wegens $A_n > A_{n-1}$ en $\sum |B_n|$ convergent. M is max. van $|A_{k-1} \varepsilon_{k-1}|, \dots, |A_0 \varepsilon_0|$; dus $\frac{a_n}{A_n} \rightarrow 0$.

§ 3: Als $\sum a_n$ sommeerbaar ϕ is tot som L , dan
 $f(x) \rightarrow L$, als $x \rightarrow 1$. 1)

Bewijs: We stellen $L = 1$. $\phi(x) = \sum A_n x^n$.

$f(x) \phi(x) = \sum S_n x^n$; er is gegeven, dat $\frac{S_n}{A_n} \rightarrow 1$.

$$f(x) = \frac{\sum S_n x^n}{\sum A_n x^n}, \text{ voor } |x| < 1.$$

Nu is $S_n = A_n (1 + \varepsilon_n)$. Kies bij gegeven $\varepsilon > 0$, k zóó, dat $|\varepsilon_n| < \varepsilon$, voor $n \geq k$.

$$\text{Dus is } f(x) = 1 + \frac{\varepsilon_0 A_0 + \varepsilon_1 A_1 x + \dots + \varepsilon_{k-1} A_{k-1} x^{k-1}}{A_0 + A_1 x + \dots} + \frac{\varepsilon_k A_k x^k + \dots}{A_0 + A_1 x + \dots}$$

Daar $\sum A_n$ divergeert, kan δ zoo gekozen worden, dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ voor } x > 1 - \delta.$$

De modulus van den 2^{en} term is dus kleiner dan $M\varepsilon$, terwijl die van den 3^{en} altijd kleiner is dan ε , waaruit volgt dat $f(x) \rightarrow 1$, als $x \rightarrow 1$.

§ 4. Als $\sum_0^{\infty} a_n$ convergeert en A tot som heeft, dan is $\sum a_n$ sommeerbaar ϕ tot „som” A .

Bewijs: Als $\phi(x) = \sum_0^{\infty} A_n x^n$ met de voorwaarden

$$A_{n+1} > A_n > 0 \text{ en } \frac{A_n}{A_{n+1}} \rightarrow 1, \text{ als } n \rightarrow \infty,$$

1) Hieruit blijkt, dat uit de φ sommeerbaarheid de A sommeerbaarheid volgt.

dan moeten we bewijzen, dat

$$\frac{a_0 A_n + \dots + a_n A_0}{A_n} \rightarrow A, \text{ als } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Nu is
$$\frac{a_0 A_n + \dots + a_n A_0}{A_n} =$$

$$= \frac{a_0 (A_n - A_{n-1}) + (a_0 + a_1) (A_{n-1} - A_{n-2}) + \dots + (a_0 + \dots + a_n) A_0}{A_n} \quad (2)$$

We kunnen, als we $\sum_1^n a_p = A + \varepsilon_n$ stellen, bij gegeven $\varepsilon > 0$, k zóó bepalen, dat $|\varepsilon_n| < \varepsilon$, voor $n \geq k$.

(2) is dan gelijk aan

$$A \frac{(A_n - A_{n-1}) + (A_{n-1} - A_{n-2}) + \dots + A_0}{A_n} + \\ + \frac{\varepsilon_0 (A_n - A_{n-1}) + \varepsilon_1 (A_{n-1} - A_{n-2}) + \dots + \varepsilon_n A_0}{A_n}$$

De eerste term is gelijk aan A ; de modulus van den tweeden term is kleiner dan:

$$\frac{|\varepsilon_0| (A_n - A_{n-1}) + \dots + |\varepsilon_{k-1}| (A_{n-k+1} - A_{n-k})}{A_n} + \varepsilon \frac{A_{n-k}}{A_n}. \quad (3)$$

Als M het maximum is van $|\varepsilon_0|, \dots, |\varepsilon_{k-1}|$, dan is de modulus van (3) kleiner dan

$$M \frac{A_n - A_{n-k}}{A_n} + \varepsilon \quad (4)$$

Nu nadert $\frac{A_{n-k}}{A_n} = \frac{A_{n-k}}{A_{n-k+1}} \cdot \frac{A_{n-k+1}}{A_{n-k+2}} \cdot \dots \cdot \frac{A_{n-1}}{A_n}$ tot 1, als $n \rightarrow \infty$ (k vast), dus voor voldoende groote n is (4) kleiner dan $K\varepsilon$.

§ 5. Zij gegeven $\sum a_n$ is sommeerbaar ϕ tot „som” 1 en $\psi(x) = \sum \alpha_n x^n$, $\alpha_n > \delta > 0$, $\alpha_n < M$;

dan is $\sum a_n$ sommeerbaar $\phi\psi$ tot „som” 1.

Bewijs: $f(x) = \sum a_n x^n$ en $\phi(x) = \sum A_n x^n$. $A_{n+1} > A_n > 0$ en $|x| < 1$.

$$\chi(x) = \phi(x)\psi(x) = \sum A_n x^n \sum \alpha_n x^n = \sum D_n x^n$$

met $D_n = \alpha_0 A_n + \alpha_1 A_{n-1} + \alpha_2 A_{n-2} + \dots + \alpha_n A_0$

Uit de voorwaarden $\delta < \alpha_n < M$ en $\sum A_n$ divergent volgt, dat ook $\sum D_n$ divergent is.

$$f(x) \chi(x) = \sum a_n x^n \sum D_n x^n = \sum (a_0 D_n + a_1 D_{n-1} + \dots + a_n D_0) x^n.$$

Er moet nu bewezen worden, dat

$$\frac{a_0 D_n + a_1 D_{n-1} + \dots + a_n D_0}{D_n} \rightarrow 1, \text{ als } n \rightarrow \infty \quad (1)$$

terwijl gegeven is, dat

$$\frac{a_0 A_n + a_1 A_{n-1} + \dots + a_n A_0}{A_n} \rightarrow 1.$$

$$\text{of} \quad a_0 A_n + a_1 A_{n-1} + \dots + a_n A_0 = (1 + \varepsilon_n) A_n.$$

Geef $\varepsilon > 0$ en kies k zóó, dat voor $n \geq k$, $|\varepsilon_k| < \varepsilon$.

(1) kan nu als volgt geschreven worden:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0(a_0 A_n + a_1 A_{n-1} + \dots + a_n A_0) + a_1(a_0 A_{n-1} + a_1 A_{n-2} + \dots + a_{n-1} A_0) + \dots + a_n(a_0 A_0)}{\alpha_0 A_n + \alpha_1 A_{n-1} + \alpha_2 A_{n-2} + \dots + \alpha_n A_0} = \\ &= \frac{\alpha_0(a_0 A_n + \dots + a_n A_0) + \alpha_1(a_0 A_{n-1} + \dots + a_{n-1} A_0) + \dots + \alpha_n(a_0 A_0)}{\alpha_0 A_n + \alpha_1 A_{n-1} + \alpha_2 A_{n-2} + \dots + \alpha_n A_0} = \\ &= \frac{\alpha_0(1 + \varepsilon_n) A_n + \alpha_1(1 + \varepsilon_{n-1}) A_{n-1} + \dots + \alpha_n(1 + \varepsilon_0) A_0}{\alpha_0 A_n + \alpha_1 A_{n-1} + \alpha_2 A_{n-2} + \dots + \alpha_n A_0} = \\ &= 1 + \frac{\alpha_0 A_n \varepsilon_n + \alpha_1 A_{n-1} \varepsilon_{n-1} + \dots + \alpha_{n-k} A_k \varepsilon_k + \alpha_{n-k+1} A_{k-1} \varepsilon_{k-1} + \dots + \alpha_n A_0 \varepsilon_0}{\alpha_0 A_n + \alpha_1 A_{n-1} + \dots + \alpha_n A_0} = 1 + M_n \end{aligned}$$

$$|M_n| \leq \varepsilon \frac{\alpha_0 A_n + \dots + \alpha_{n-k} A_k}{\alpha_0 A_n + \dots + \alpha_n A_0} + K\varepsilon, \text{ voor } n \text{ voldoende groot,}$$

wegens $\alpha_n < M$ en $D_n \rightarrow \infty$; dus $|M_n| \leq (K+1)\varepsilon$.

De vorm (1) nadert dus tot 1, als $n \rightarrow \infty$

Opmerking: De voorwaarde $\alpha_n < M$ kan vervangen worden door de ruimere voorwaarde $\frac{\alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \rightarrow 0$,¹⁾ als $n \rightarrow \infty$.

¹⁾ Deze voorwaarde is vanzelf vervuld, als omtrent ψ dezelfde onderstellingen gemaakt worden als in § 1 omtrent φ . Want bij gegeven $\varepsilon > 0$ is $a_\nu > (1 - \varepsilon) a_{\nu+1}$ voor $\nu \geq k$, derhalve

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} < \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{n-k} (1 - \varepsilon)^\nu} = \frac{\varepsilon}{1 - (1 - \varepsilon)^{n-k+1}} < 2\varepsilon \text{ voor } n \text{ voldoende groot.}$$

We kunnen dan bij gegeven k en ε , k' zoo bepalen dat $\frac{\alpha_n}{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} < \varepsilon$ voor $n \geq k'$, terwijl we n zoo groot kunnen kiezen, dat $n - k + 1 \geq k'$.

Dan is:

$$\begin{aligned} |M_n| &\leq \varepsilon \frac{\alpha_0 A_n + \dots + \alpha_{n-k} A_k}{\alpha_0 A_n + \dots + \alpha_n A_0} + \left| \frac{\alpha_{n-k+1} A_{k-1} \varepsilon_{k-1} + \dots + \alpha_n A_0 \varepsilon_0}{\alpha_0 A_n + \dots + \alpha_n A_0} \right| \\ &\leq \varepsilon + \frac{|\varepsilon_{k-1}| A_{k-1}}{A_0} \frac{\alpha_{n-k+1}}{\alpha_0 + \dots + \alpha_{n-k+1}} + \frac{|\varepsilon_{k-2}| A_{k-2}}{A_0} \frac{\alpha_{n-k+2}}{\alpha_0 + \dots + \alpha_{n-k+2}} + \\ &\dots + \frac{|\varepsilon_0| A_0}{A_0} \frac{\alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \text{ wegens } A_n > A_{n-1} > 0 \text{ en } \alpha_n > 0. \\ |M_n| &\leq \varepsilon + K\varepsilon = (K+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

De vorm (1) nadert ook nu tot 1.

§ 6. De C_k sommeerbaarheid is een bijzonder geval van de ϕ sommeerbaarheid.

Nemen we $\phi(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n$, $|x| < 1$.

$$\text{en } f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n, \text{ dan is } \frac{S_n}{A_n} = \frac{\binom{n+k}{k} a_0 + \binom{n-1+k}{k} a_1 + \dots + \binom{k}{k} a_n}{\binom{n+k}{k}}$$

Als $\frac{S_n}{A_n} \rightarrow S$, dan nadert dus ook het rechterlid tot die limiet, en dit is juist de voorwaarde, waaraan de reeks $\sum_0^{\infty} a_n$ moet voldoen, opdat ze C_k sommeerbaar is. (Zie pg. 4 en 5).

§ 7. Als gegeven is $f(x) = \sum a_n x^n$ en $g(x) = \sum b_n x^n$ convergent voor $|x| < 1$.

en $\phi = \sum A_n x^n$; $\chi = \sum B_n x^n$ met de voorwaarden

$$\frac{A_n}{A_0 + \dots + A_n} \rightarrow 0, \text{ als } n \rightarrow \infty, {}^1) A_n > A_{n-1} > 0, n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{B_n}{B_0 + \dots + B_n} \rightarrow 0, \text{ als } n \rightarrow \infty, {}^1) B_n > B_{n-1} > 0, n = 1, 2, \dots$$

¹⁾ Aan deze voorwaarden wordt voldaan, als

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} \rightarrow 1 \text{ en } \frac{B_n}{B_{n+1}} \rightarrow 1. \text{ (Zie noot vorige pag.)}$$

f is sommeerbaar ϕ tot F en g is sommeerbaar χ tot G ,
dan is $f g$ sommeerbaar $\phi \chi$ tot „som” $F G$.

Bewijs: Stel $f \phi = \sum S_n x^n$ en $g \chi = \sum T_n x^n$,
dan is gegeven, dat

$$\frac{S_n}{A_n} \rightarrow F \text{ en } \frac{T_n}{B_n} \rightarrow G,$$

terwijl bewezen moet worden, dat

$$\frac{S_0 T_0 + S_1 T_{n-1} + \dots + S_n T_0}{A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \dots + A_n B_0} \rightarrow F G, \quad (1)$$

want de teller is gelijk aan den coëfficiënt van x^n in $f g \phi \chi$.

Nu is $S_n = F A_n (1 + \delta_n)$ en $T_n = G B_n (1 + \varepsilon_n)$

$$\delta_n \rightarrow 0, \varepsilon_n \rightarrow 0, \text{ als } n \rightarrow \infty$$

Dus is (1) gelijk aan:

$$FG \left[1 + \frac{\delta_0 A_0 B_n + \delta_1 A_1 B_{n-1} + \dots + \delta_n A_0 B_n}{A_0 B_n + \dots + A_n B_0} + \frac{\varepsilon_n A_0 B_n + \dots + \varepsilon_0 A_n B_0}{A_0 B_n + \dots + A_n B_0} + \frac{\delta_0 \varepsilon_n A_0 B_n + \delta_1 \varepsilon_{n-1} A_1 B_{n-1} + \dots + \delta_n \varepsilon_0 A_n B_0}{A_0 B_n + \dots + A_n B_0} \right].$$

We bewijzen nu, dat de 2^e term $\rightarrow 0$, als $n \rightarrow \infty$, dan volgt uit symmetrieredenen, dat ook de 3^e term $\rightarrow 0$.

Bij gegeven $\delta > 0$ kiezen we nu k en k' zóó,

$$\text{dat } |\delta_k| < \delta \text{ voor } n \geq k \text{ en } \frac{B_n}{B_0 + \dots + B_n} < \delta \text{ voor } n > k'$$

$$|2^{\text{e}} \text{ term}| \leq \left| \frac{\delta_0 A_0 B_n + \dots + \delta_{k-1} A_{k-1} B_{n-k+1}}{A_0 B_n + \dots + A_n B_0} \right| + \delta \frac{A_k B_{n-k} + \dots + A_0 B_n}{A_0 B_n + \dots + A_n B_0}$$

We kiezen n zóó groot, dat ook $n - k + 1 > k'$. Dan is:

$$|2^{\text{e}} \text{ term}| \leq \frac{|\delta_0| A_0}{A_0} \frac{B_n}{B_n + \dots + B_0} + \frac{|\delta_1| A_1}{A_0} \frac{B_{n-1}}{B_{n-1} + \dots + B_0} + \dots + \frac{|\delta_{k-1}| A_{k-1}}{A_0} \frac{B_{n-k+1}}{B_{n-k+1} + \dots + B_0} + \delta,$$

zoodat $|2^{\text{e}} \text{ term}| < M \delta$.

De modulus van den 4^{en} term is kleiner dan:

$$\frac{|\delta_0 \varepsilon_n| A_0}{A_0} \frac{B_n}{B_n + \dots + B_0} + \dots + \frac{|\delta_{k-1} \varepsilon_{n-k+1}| A_{k-1}}{A_0} \frac{B_{n-k+1}}{B_{n-k+1} + \dots + B_0} + \delta N \frac{A_k B_{n-k} + \dots + A_n B_0}{A_0 B_n + \dots + A_n B_0},$$

waar N de bovenste grens is van $|\varepsilon_p|$, $p = 1, 2, \dots$

Voor voldoende groote waarde van n is deze vorm dus kleiner dan $M\delta$. Hieruit volgt, dat (1) nadert tot FG .

§ 8. Als $\sum a_n$ sommeerbaar ϕ is (1)
en $\phi(x) = \sum A_n x^n$ met de voorwaarden $A_n > A_{n-1} > 0$

$$n = 1, 2, \dots \text{ en } \frac{1}{\phi(x)} = \sum B_n x^n, \quad (2)$$

v_n een getallenrij met de eigenschappen

$$A_n v_n \rightarrow 0, \text{ als } n \rightarrow \infty \text{ en} \quad (3)$$

$$\sum A_n |v_n B_0 + v_{n+1} B_1 + \dots| \text{ convergent,} \quad (4)$$

$$\text{terwijl ook } \sum n |B_n| \text{ convergent is,} \quad (5)$$

dan is $\sum a_n v_n$ convergent en heeft tot som

$$\sum S_n (v_n B_0 + v_{n+1} B_1 + \dots), \quad (6)$$

waar $S_n = a_n A_0 + \dots + a_0 A_n$.

Bewijs: In § 2 pg. 10 hebben we reeds gevonden, dat

$$a_n = B_0 S_n + B_1 S_{n-1} + \dots + B_n S_0.$$

Nu is:

$$\begin{aligned} a_0 v_0 + \dots + a_n v_n &= (B_0 S_0) v_0 + (B_0 S_1 + B_1 S_0) v_1 + \dots \\ &+ (B_0 S_n + \dots + B_n S_0) v_n = S_0 (v_0 B_0 + v_1 B_1 + \dots + v_n B_n) + \\ &S_1 (v_1 B_0 + \dots + v_n B_{n-1}) + \dots + S_n (v_n B_0) \end{aligned} \quad (7)$$

Nu convergeert de reeks (4), dus bij gegeven $\varepsilon > 0$, kan N_1 zoo bepaald worden, dat

$$\sum_{N_1}^{N_1+p} A_n |v_n B_0 + \dots| < \varepsilon, \text{ voor iedere } p \geq 1.$$

Maar uit (1) volgt, dat $\left| \frac{S_n}{A_n} \right| < M$, voor iedere waarde van n ; (8)

dus is

$$\sum_{N_1}^{N_1+p} |S_n| |v_n B_0 + \dots| < M \varepsilon \text{ voor iedere } p \geq 1,$$

zoodat dus ook de reeks (6) convergeert.

Daar $A_n v_n \rightarrow 0$, kunnen we N_2 zóó kiezen, dat

$$|A_n v_n| < \varepsilon, \text{ voor } n > N_2.$$

Als $|A_n v_n| < \varepsilon$, dan is ook $|A_k v_n| < \varepsilon$, voor $k \leq n$ wegens (1)

Neem nu $N > N_1$ en $N > N_2$, dan vinden we, met behulp van (7)

$$\begin{aligned} & \sum_0^{\infty} S_n (v_n B_0 + v_{n+1} B_1 + \dots) - \sum_0^N a_n v_n = \\ & = S_0 (v_{N+1} B_{N+1} + v_{N+2} B_{N+2} + \dots) + S_1 (v_{N+1} B_N + \dots) + \dots \\ & \quad + S_N (v_{N+1} B_1 + \dots) + \sum_{N+1}^{\infty} S_n (v_n B_0 + \dots) \end{aligned}$$

We zullen bewijzen, dat de modulus van dit verschil kleiner is dan een constant aantal malen ε .

Volgens (8) is $|S_n| < M A_n$ voor iedere n .

$$\begin{aligned} \text{Dus } |\text{verschil}| & < M \varepsilon \{ (|B_{N+1}| + |B_{N+2}| + \dots) + \\ & + (|B_N| + |B_{N+1}| + \dots) + \dots + (|B_1| + \dots) \} + M \varepsilon \end{aligned}$$

wegens $|A_k v_{N+p}| < \varepsilon$ voor $p > 0$ en $k < N$

$$\begin{aligned} |\text{verschil}| & < M \varepsilon [|B_1| + 2 |B_2| + \dots \\ & + N |B_N| + (N+1) |B_{N+1}| + (N+1) |B_{N+2}| + \dots] + M \varepsilon. \\ & < M \varepsilon \sum_0^{\infty} n |B_n| + M \varepsilon = K \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus $\sum_0^N a_n v_n \rightarrow \sum_0^{\infty} S_n (v_n B_0 + v_{n+1} B_1 + \dots)$, als $N \rightarrow \infty$.

HOOFDSTUK II.

§ 9. Bepaling sommeerbaarheid (α_{kn}) .

Zij gegeven de reeks $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$ (1)
 en α_{kn} een dubbelrij met de volgende eigenschappen

- 1°. $0 \leq \alpha_{kn} < M$. $k \geq 0$, $n > 0$
- 2°. $\alpha_{kn} \geq \alpha_{k+1,n}$, $k = \nu, \nu + 1, \dots$, ν onafhankelijk van n .
- 3°. $\alpha_{kn} \rightarrow 0$, voor $k \rightarrow \infty$ voor iedere vaste n .
- 4°. $\alpha_{kn} \rightarrow 1$, voor $n \rightarrow \infty$ voor iedere vaste k .

We noemen de reeks $c_1 + c_2 + \dots$ sommeerbaar (α_{kn}) ,
 als $\alpha_{1n}c_1 + \alpha_{2n}c_2 + \dots$ (2)

voor iedere n convergeert en de som S_n van deze reeks voor
 $n \rightarrow \infty$ een limiet S heeft. S noemen we de „som” van de
 reeks (1).

§ 10. Als $c_1 + c_2 + \dots$ convergeert en tot som S heeft,
 dan is de reeks ook sommeerbaar (α_{kn}) tot som S .

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$, kies k zóó, dat

$$|c_{k+1} + c_{k+2} + \dots + c_{k+\nu}| < \varepsilon \quad \nu = 1, 2, 3 \dots$$

De reeks (2), § 9 convergeert. Immers

$$\begin{aligned} |\alpha_{k+1,n}c_{k+1} + \dots + \alpha_{k+\nu,n}c_{k+\nu}| &= |c_{k+1}(\alpha_{k+1,n} - \alpha_{k+2,n}) + \\ &\quad + (c_{k+1} + c_{k+2})(\alpha_{k+2,n} - \alpha_{k+3,n}) + \dots \\ &\quad + (c_{k+1} + \dots + c_{k+\nu-1})(\alpha_{k+\nu-1,n} - \alpha_{k+\nu,n}) + \\ &\quad + (c_{k+1} + \dots + c_{k+\nu})\alpha_{k+\nu,n}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< |c_{k+1}|(\alpha_{k+1,n} - \alpha_{k+2,n}) + |c_{k+1} + c_{k+2}|(\alpha_{k+2,n} - \alpha_{k+3,n}) + \dots \\ &+ |c_{k+1} + \dots + c_{k+\nu}|\alpha_{k+\nu,n} < \varepsilon \alpha_{k+1,n} < M\varepsilon, \text{ voor iedere } \nu, \\ &\text{omdat } \alpha_{kn} \geq \alpha_{k+1,n}. \end{aligned}$$

Dus $S_n = \alpha_{1n} c_1 + \alpha_{2n} c_2 + \dots + \alpha_{kn} c_k + \theta \varepsilon M$, $|\theta| < 1$.

Dit geldt voor iedere n , dus:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= c_1 + c_2 + \dots + c_k + \theta \varepsilon M \\ &= S + \theta' \varepsilon + \theta \varepsilon M, \quad |\theta'| < 1 \end{aligned}$$

Hiermede is het gevraagde bewezen.

§ 11. Als (1) sommeerbaar (α_{kn}) is tot „som” S , dan is $c_2 + c_3 + \dots$ sommeerbaar $(\alpha_{k+1,n})$ tot $S - c_1$.

Bewijs:

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k+1,n} c_{k+1}) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_{kn} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{kn} c_k - \alpha_{1n} c_1 = \\ &= S_n - \alpha_{1n} c_1; \text{ dus } \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = S - c_1. \end{aligned}$$

Op dezelfde manier kunnen we bewijzen, dat

$$\begin{aligned} c_{p+1} + c_{p+2} + \dots \text{ sommeerbaar is } (\alpha_{k+p,n}) \text{ tot} \\ S - (c_1 + c_2 + \dots + c_p), \end{aligned}$$

waarin p vast is en ≥ 1 .

§ 12. Als (1) sommeerbaar (α_{kn}) is tot som S , dan is $c_0 + c_1 + c_2 + \dots$ sommeerbaar $(\alpha_{k-1,n})$ tot $c_0 + S$, ($k \geq 1$)

$$\begin{aligned} \text{Bewijs: } S'_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k-1,n} c_{k-1} = \alpha_{0n} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{kn} c_k = \\ &= \alpha_{0n} c_0 + S_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n &= c_0 + S. \end{aligned}$$

§ 13. *Toepassing op enkele voorbeelden.*

Zij gegeven de reeks:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (1)$$

Neem $\alpha_{kn} = \frac{n}{n+k}$; α_{kn} voldoet aan de gestelde voorwaarden. De reeks (1) is nu (α_{kn}) sommeerbaar tot $1/2$, want

$$S_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2} + \frac{n}{n+3} - + \dots \quad (2)$$

De reeks (2) convergeert voor iedere waarde van n . Immers de reeks is oscilleerend en de termen naderen monotoon tot 0.

We zullen nu bewijzen, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1/2$. Daartoe schrijven we S_n als volgt:

$$S_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{(n+3)(n+4)} + \dots,$$

dus

$$\frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+4)^2} + \dots < S_n < \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \dots$$

en dan is zeker:

$$\frac{n}{2} \int_{n+2}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < S_n < \frac{n}{2} \int_{n-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ of } \frac{n}{2} \frac{1}{n+2} < S_n < \frac{n}{2} \frac{1}{n-1}, (n \geq 2)$$

waaruit direct volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1/2$.

Dezelfde limiet vinden we ook, als we stellen

$$\alpha_{kn} = \frac{\lg(n-k)}{\lg(n+1)}, \text{ als } n \geq k+1$$

en $\alpha_{kn} = 0$, als $n \leq k+1$, $k = 1, 2, \dots$

Ook nu is weer $\alpha_{kn} \geq \alpha_{k+1,n}$ en $\alpha_{kn} \rightarrow 1$, als $n \rightarrow \infty$

$\alpha_{kn} \rightarrow 0$, als $k \rightarrow \infty$

$$S_n = \frac{\lg(n-1) - \lg(n-2) + \dots + (-1)^n \lg 1}{\lg(n+1)}$$

De reeks convergeert weer voor iedere waarde van n .

Neem eerst $n = 2p$, dan is

$$S_{2p} = \frac{\lg 1 - \lg 2 + \lg 3 - \dots + \lg(2p-1)}{\lg(2p+1)}$$

$$\text{Nu is } \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \dots (2p-2)} = \frac{(2p-1)!}{2^{2p-2} (p-1)!^2} =$$

$$= \frac{(2p)! 2p}{2^{2p} (p!)^2} \sim \frac{(2p)^{2p} e^{-2p} \sqrt{4\pi p} \cdot 2p}{2^{2p} \cdot p^{2p} e^{-2p} 2\pi p} = 2 \sqrt{\frac{p}{\pi}}$$

$$(p! \sim p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}).$$

dus $\lg 1 - \lg 2 + \dots + \lg(2p-1) \sim \lg 2 + 1/2 \lg p - 1/2 \lg \pi$

waaruit volgt, dat $\lim_{p \rightarrow \infty} S_{2p} = 1/2$.

$$\text{Verder is } S_{2p+1} = \frac{\lg 2p}{\lg(2p+2)} - \frac{\lg(2p-1) - \lg(2p-2) + \dots + \lg 1}{\lg(2p+2)}$$

De eerste term nadert tot 1, de 2^e tot $\frac{1}{2}$, als $p \rightarrow \infty$, dus ook

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_{2^p+1} = \frac{1}{2}$$

§ 14. Het is verder gemakkelijk in te zien, dat alle reeksen die A sommeerbaar zijn, (en dan zeker ook alle C_k sommeerbaar) ook (α_{kn}) sommeerbaar zijn.

Zij $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$ een reeks, die A sommeerbaar is, d. w. z. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ convergeert voor $|x| < 1$, terwijl de door de reeks voorgestelde functie $f(x)$ tot een limiet nadert, als x langs de reële as tot 1 nadert.

Neem nu $\alpha_{kn} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$; α_{kn} voldoet aan de gestelde voorwaarden.

$$\text{Dan is } S_n = \sum_1^{\infty} c_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = f\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Daar $f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ tot een limiet nadert, als $n \rightarrow \infty$, nadert S_n tot dezelfde limiet.

HOOFDSTUK III.

§ 15. De Fourier reeks.

Zooals reeds in de inleiding medegedeeld is, is door FEJÉR bewezen, dat de Fourierreeks van een integreerbare functie, die de eigenschap heeft, dat in een punt x_0 van 't interval $0 - 2\pi$, $f(x_0 + 0)$ en $f(x_0 - 0)$ bestaan, steeds sommeerbaar C_1 is tot $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)] = s$. (zie pg. 4).

Het bewijs kan als volgt gegeven worden:

Zij: $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0)$ de Fourier reeks

voor het punt x_0 ,

$$\text{en } S_n(x_0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^n (a_p \cos p x_0 + b_p \sin p x_0),$$

$$\text{dan is } S_n(x_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)] \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Nu moet bewezen worden, dat

$$\frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n} \rightarrow s, \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

$$\begin{aligned} & \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n} = \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)] \frac{\sin t + \sin 3t + \dots + \sin(2n-1)t}{\sin t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } \sin t + \sin 3t + \dots + \sin(2n-1)t &= \frac{1}{\sin t} [\sin^2 t + (\sin^2 2t - \sin^2 t) + \dots \\ &+ \sin^2 nt - \sin^2(n-1)t] = \frac{\sin^2 nt}{\sin t} \end{aligned}$$

$$\text{dus } \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n} = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)] \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$$

Verder is $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 n t}{\sin^2 t} dt = n \frac{\pi}{2}$, want

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 n t}{\sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{\sin t} + \frac{\sin 3 t}{\sin t} + \dots + \frac{\sin (2 n - 1) t}{\sin t} \right) dt = n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Dus

$$\begin{aligned} & \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n} - s = \\ &= \frac{2}{n \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \frac{1}{2} [f(x_0 + 2 t) + f(x_0 - 2 t)] - s \} \frac{\sin^2 n t}{\sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

Het rechterlid nadert tot 0, als $n \rightarrow \infty$.

Want stellen we $\frac{1}{2} [f(x_0 + 2 t) + f(x_0 - 2 t)] - s = \phi(t)$, dan nadert $\phi(t)$ tot 0, als $t \rightarrow 0$.

We kunnen dus δ , bij gegeven $\varepsilon > 0$, zóó kiezen, dat

$$|\phi(t)| < \varepsilon \text{ voor } 0 \leq t \leq \delta \text{ en } |\phi(t)| < M \text{ voor } \delta \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n} - s \right| &\leq \frac{2}{n \pi} \left[\varepsilon \int_0^{\delta} \frac{\sin^2 n t}{\sin^2 t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\phi(t)|}{\sin^2 t} dt \right] \\ &\leq \frac{2}{n \pi} \left[\varepsilon \frac{n \pi}{2} + M' \right] = \varepsilon + \frac{2 M'}{n \pi} < 2 \varepsilon \text{ voor } n > \frac{2 M'}{\pi \varepsilon} \end{aligned}$$

§ 16. We kunnen de vorige stelling als volgt uitbreiden. Zij $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ een rij positieve, monotoon afnemende getallen, zoodanig dat $\sum \alpha_n$ divergeert; dan nadert

$$\frac{\alpha_0 S_0(x_0) + \dots + \alpha_n S_n(x_0)}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \text{ tot } s = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$$

Bewijs:

$$\alpha_0 S_0 + \dots + \alpha_n S_n =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} [f(x_0 + 2 t) + f(x_0 - 2 t)] \times \frac{\alpha_0 \sin t + \dots + \alpha_n \sin (2 n + 1) t}{\sin t} dt.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\alpha_0 S_0 + \dots + \alpha_n S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} - s = \frac{\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \frac{\alpha_0 \sin t + \dots + \alpha_n \sin(2n+1)t}{\sin t} dt}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}$$

waarbij $\phi(t) = \frac{1}{2} [f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)] - s$,
immers:

$$(\alpha_0 + \dots + \alpha_n) s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s \frac{\alpha_0 \sin t + \dots + \alpha_n \sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } & \frac{\alpha_0 \sin t + \dots + \alpha_n \sin(2n+1)t}{\sin t} = \\ & = \frac{\alpha_0 \sin^2 t + \alpha_1 (\sin^2 2t - \sin^2 t) + \dots + \alpha_n (\sin^2(n+1)t - \sin^2 nt)}{\sin^2 t} \\ & = \frac{(\alpha_0 - \alpha_1) \sin^2 t + (\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 2t + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \sin^2 nt + \alpha_n \sin^2(n+1)t}{\sin^2 t} \end{aligned}$$

De teller is > 0 , wegens $\alpha_k > \alpha_{k+1} > 0$.

Kies nu δ bij gegeven $\varepsilon > 0$ zóó, dat $|\phi(t)| < \varepsilon$ voor $0 \leq t \leq \delta$.

Verder is $|\phi(t)| < M$ voor $\delta \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Dan is:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\alpha_0 S_0 + \dots + \alpha_n S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} - s \right| \\ & \leq \frac{\frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{(\alpha_0 - \alpha_1) \sin^2 t + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \sin^2 nt + \alpha_n \sin^2(n+1)t}{\sin^2 t} dt}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \\ & \quad + \frac{\frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} |\phi(t)| \frac{(\alpha_0 - \alpha_1) \sin^2 t + \dots + \alpha_n \sin^2(n+1)t}{\sin^2 t} dt}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \\ & < \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{1(\alpha_0 - \alpha_1) + 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \dots + n(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + (n+1)\alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \right] + \\ & \quad + \frac{2M}{\pi \sin^2 \delta} \frac{(\alpha_0 - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \end{aligned}$$

$$= \varepsilon \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} + \frac{2M}{\pi \sin^2 \delta} \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} < 2\varepsilon$$

voor n voldoende groot, wegens $\sum \alpha_n$ divergent.

§ 17. Als $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ een rij positieve, monotoon toenemende getallen voorstelt, dan nadert

$$\frac{\alpha_n S_0 + \dots + \alpha_0 S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \text{ tot } s, \text{ mits } \frac{\alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \rightarrow 0, \text{ als } n \rightarrow \infty$$

Bewijs:

$$I = \frac{\alpha_n S_0 + \dots + \alpha_0 S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} - s =$$

$$= \frac{\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \frac{\alpha_n \sin t + \dots + \alpha_0 \sin(2n+1)t}{\sin t} dt}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \frac{(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \sin^2 t + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) \sin^2 2t + \dots + (\alpha_1 - \alpha_0) \sin^2 nt + \alpha_0 \sin^2(n+1)t}{(\alpha_0 + \dots + \alpha_n) \sin^2 t} dt$$

$$|I| \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} \frac{1}{2} \frac{(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + 2(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) + \dots + n(\alpha_1 - \alpha_0) + (n+1)\alpha_0}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}$$

$$+ \frac{2M}{\pi \sin^2 \delta} \frac{(\alpha_n - \alpha_{n-1}) + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) + \dots + (\alpha_1 - \alpha_0) + \alpha_0}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}$$

wegens $\alpha_{k+1} > \alpha_k$.

$$|I| \leq \varepsilon \frac{\alpha_n + \dots + \alpha_0}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} + \frac{2M}{\pi \sin^2 \delta} \frac{\alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} < 2\varepsilon$$

voor n voldoende groot.

§ 18. Als $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ een rij positieve getallen voorstelt, waarvoor geldt, dat $\sum |\alpha_{n-1} - \alpha_n|$ convergeert en $\lim \alpha_n > 0$ en eindig, ¹⁾ dan nadert

$$\frac{\alpha_0 S_0 + \dots + \alpha_n S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \text{ tot } s \text{ en eveneens } \frac{\alpha_n S_0 + \dots + \alpha_0 S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \text{ tot } s.$$

¹⁾ $\lim \alpha_n$ eindig, volgt uit: $\alpha_n \leq |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \dots + |\alpha_1 - \alpha_0| + \alpha_0$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \frac{\alpha_0 S_0 + \dots + \alpha_n S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} - s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \frac{\alpha_0 \sin t + \dots + \alpha_n \sin (2n+1)t}{(\alpha_0 + \dots + \alpha_n) \sin t} dt \\
 & = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \frac{(\alpha_0 - \alpha_1) \sin^2 t + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \sin^2 nt + \alpha_n \sin^2 (n+1)t}{(\alpha_0 + \dots + \alpha_n) \sin^2 t} dt \\
 \text{Nu is} \quad & \left| \frac{\alpha_0 S_0 + \dots + \alpha_n S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} - s \right| \leq \frac{2\varepsilon\pi}{\pi^2} \left[\frac{|\alpha_0 - \alpha_1| + \dots + n|\alpha_{n-1} - \alpha_n| + (n+1)\alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \right] \\
 & + \frac{2}{\pi} \frac{M}{\sin^2 \delta} \left[\frac{|\alpha_0 - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_2| + \dots + |\alpha_{n-1} - \alpha_n| + \alpha_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

Hier hebben $\phi(t)$, ε , δ en M dezelfde beteekenis als in § 16.

Daar α_n tot een positieve eindige limiet α nadert, is $\frac{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}{n+1} \sim \alpha$, zoodat dus voor voldoende groote n

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_n > \frac{1}{2} \alpha (n+1).$$

Dan is:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\alpha_0 S_0 + \dots + \alpha_n S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} - s \right| \leq 2\varepsilon \frac{|\alpha_0 - \alpha_1| + \dots + n|\alpha_{n-1} - \alpha_n| + (n+1)\alpha_n}{\alpha(n+1)} \\
 & + \frac{4}{\pi} \frac{M}{\sin^2 \delta} \frac{|\alpha_0 - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_2| + \dots + |\alpha_{n-1} - \alpha_n| + \alpha_n}{\alpha(n+1)} \\
 & \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha} \{ |\alpha_0 - \alpha_1| + \dots + |\alpha_{n-1} - \alpha_n| + \alpha_n \} + \\
 & + \frac{4}{\pi} \frac{M}{\sin^2 \delta} \frac{|\alpha_0 - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_2| + \dots + |\alpha_{n-1} - \alpha_n| + \alpha_n}{\alpha(n+1)}
 \end{aligned}$$

Daar $\sum |\alpha_{n-1} - \alpha_n|$ convergeert en $\lim \alpha_n = \alpha$, is voor voldoende groote n bovenstaande vorm kleiner dan $K\varepsilon$.

$$b) \quad \frac{\alpha_n S_0 + \dots + \alpha_0 S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} - s =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \frac{(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \sin^2 t + \dots + (\alpha_1 - \alpha_0) \sin^2 nt + \alpha_0 \sin^2 (n+1)t}{(\alpha_0 + \dots + \alpha_n) \sin^2 t} dt$$

$$\begin{aligned}
\text{Dus } \left| \frac{\alpha_n S_0 + \dots + \alpha_0 S_n}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} - s \right| &< \frac{2\varepsilon}{\pi} \frac{\pi}{2} \frac{|\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \dots + n|\alpha_1 - \alpha_0| + (n+1)\alpha_0}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \\
&+ \frac{2}{\pi} \frac{M}{\sin^2 \delta} \frac{|\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \dots + |\alpha_1 - \alpha_0| + \alpha_0}{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} \\
&\leq 2\varepsilon \frac{|\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \dots + n|\alpha_1 - \alpha_0| + (n+1)\alpha_0}{\alpha(n+1)} \\
&+ \frac{4}{\pi} \frac{M}{\sin^2 \delta} \frac{|\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \dots + |\alpha_1 - \alpha_0| + \alpha_0}{\alpha(n+1)} \\
&< \frac{2\varepsilon}{\alpha} \{ |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \dots + |\alpha_1 - \alpha_0| + \alpha_0 \} \\
&+ \frac{4}{\pi} \frac{M}{\sin^2 \delta} \frac{|\alpha_n - \alpha_{n-1}| + \dots + |\alpha_1 - \alpha_0| + \alpha_0}{\alpha(n+1)} < K' \varepsilon
\end{aligned}$$

voor n voldoende groot.

§ 19. *Opmerkingen.* Gaan we het bewijs, gegeven onder $a)$ nog eens na, dan zien we, dat de voorwaarden waaraan de α_n 's moeten voldoen, opdat 't gestelde $a)$ juist is, aanmerkelijk verruimd kunnen worden.

Immers, voor het bewijs is voldoende, dat

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum_{k=1}^{k=n} k |\alpha_{k-1} - \alpha_k|}{\sum_{k=0}^{k=n} \alpha_k} \text{ en } \frac{(n+1)\alpha_n}{\sum_{k=0}^{k=n} \alpha_k} < M \\
&\text{en } \frac{\sum_{k=1}^{k=n} |\alpha_{k-1} - \alpha_k|}{\sum_{k=0}^{k=n} \alpha_k} < \varepsilon, \text{ voor } n \text{ voldoende groot.}
\end{aligned}$$

Dan is (1) pg. 26 kleiner dan $K\varepsilon$ voor n voldoende groot.

Aan deze voorwaarden voldoet bijv. $\alpha_n = (n+1)^p$, p geheel en ≥ 0 .

Dan is

$$\frac{\sum_1^n k \{ (k+1)^p - k^p \}}{\sum_0^n (k+1)^p} = \frac{p \sum_1^n k^p + \frac{p(p-1)}{2} \sum_1^n k^{p-1} + \dots + \sum_1^n k}{\sum_0^n (k+1)^p} < \\ < \frac{M_1 n^{p+1} + M_2 n^p + \dots + M_{p+2}}{N n^{p+1}} < M.$$

($M_1, \dots, M_{p+2}, N$ onafhankelijk van n .)

$$\text{Evenzoo } \frac{(n+1)(n+1)^p}{\sum_0^n (k+1)^p} < M \text{ en } \frac{\sum_1^n \{ (k+1)^p - k^p \}}{\sum_0^n (k+1)^p} < \varepsilon,$$

voor n voldoende groot.

§ 20. *Voorbeelden:* Uit § 16 pg. 23 volgt, dat

$$\frac{\frac{S_0}{1} + \frac{S_1}{2} + \dots + \frac{S_{n+1}}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \},$$

als $n \rightarrow \infty$

$$\text{of } \frac{\frac{S_0}{1} + \frac{S_1}{2} + \dots + \frac{S_{n+1}}{n}}{\lg n} \rightarrow \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \}$$

Uit § 17 pg. 25 volgt, dat:

$$\frac{\lg(n+1) S_0 + \lg(n) S_1 + \dots + \lg 1 S_n}{\lg(n+1)!} \rightarrow \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \}$$

$$\text{want } \frac{\lg n}{\lg(n!)} \rightarrow 0, \text{ als } n \rightarrow \infty$$

$$\text{Eveneens } \frac{(n+1)^p S_0 + n^p S_1 + \dots + 1^p S_n}{1 + 2^p + \dots + (n+1)^p} \rightarrow \frac{1}{2} \{ f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) \} \\ (p \text{ geheel } \geq 0)$$

Uit de opmerking onder § 19 pg. 27 volgt, dat ook

$$\frac{1^p S_0 + 2^p S_1 + \dots + (n+1)^p S_n}{1 + 2^p + \dots + (n+1)^p} \text{ tot dezelfde limiet nadert.}$$

HOOFDSTUK IV.

De sommatiemethode van Hardy en Riesz.

§ 21. *Bepaling.* Zij gegeven de reeks $c_1 + c_2 + \dots$, en een rij niet-negatieve getallen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, met de voorwaarden $\lambda_{n+1} > \lambda_n$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, als $n \rightarrow \infty$. Zij verder $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ een rij getallen, waarvoor geldt: $l_n = e^{\lambda_n}$, $n = 1, 2, \dots$

Wij definiëren nu de 2 volgende functies:

$$C_\lambda(\tau) = \sum_{\lambda_n < \tau \leq \lambda_{n+1}} c_n \quad \text{en} \quad C_1(t) = \sum_{l_n < t \leq l_{n+1}} c_n$$

d. w. z. voor gegeven waarde van τ , resp. t , moeten van de reeks $\sum c_n$ de eerste n termen genomen worden, waarbij n bepaald wordt door de betrekking $\lambda_n < \tau \leq \lambda_{n+1}$, resp. $l_n < t \leq l_{n+1}$. $C_\lambda(\tau)$ en $C_1(t)$ zijn dus functies met een aftelbaar aantal discontinuïteitspunten.

$$\text{Stel nu } C_\lambda^x(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega \leq \lambda_{n+1}} (\omega - \lambda_n)^x c_n \text{ en } C_1^x(w) = \sum_{l_n < w \leq l_{n+1}} (w - l_n)^x c_n,$$

$$x > 0$$

$$\text{terwijl } C_\lambda^0(\omega) = C_\lambda(\omega) \text{ en } C_1^0(w) = C_1(w).$$

Men noemt de reeks $\sum c_n$ *sommeerbaar* (λx) , resp. $(l x)$ tot „som” C , als

$$\frac{C_\lambda^x(\omega)}{\omega^x}, \text{ resp. } \frac{C_1^x(w)}{w^x} \rightarrow C, \text{ als } \omega, \text{ resp. } w \rightarrow \infty$$

De vormen $\frac{C_\lambda^x(\omega)}{\omega^x}$ en $\frac{C_1^x(w)}{w^x}$ noemt men *typische gemiddelden* van de orde x , van de 1^e en 2^e soort.

§ 22. Voorstelling van $C_\lambda^z(\omega)$ en $C_1^z(w)$ door middel van een bepaalde integraal.

$$\begin{aligned}
 C_\lambda^z(\omega) &= (\omega - \lambda_1)^z c_1 + (\omega - \lambda_2)^z c_2 + \dots + (\omega - \lambda_n)^z c_n = \\
 &= c_1 \{ (\omega - \lambda_1)^z - (\omega - \lambda_2)^z \} + (c_1 + c_2) \{ (\omega - \lambda_2)^z - (\omega - \lambda_3)^z \} + \dots \\
 &\quad \dots + (c_1 + \dots + c_n) (\omega - \lambda_n)^z = \\
 &= c_1 z \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\omega - \tau)^{z-1} d\tau + (c_1 + c_2) z \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} (\omega - \tau)^{z-1} d\tau + \dots \\
 &\quad + (c_1 + \dots + c_n) z \int_{\lambda_n}^{\omega} (\omega - \tau)^{z-1} d\tau = \\
 &= z \int_{\lambda_1}^{\omega} C_\lambda(\tau) (\omega - \tau)^{z-1} d\tau = z \int_0^{\omega} C_\lambda(\tau) (\omega - \tau)^{z-1} d\tau \\
 &\quad \text{want } C_\lambda(\tau) \equiv 0, \text{ voor } 0 \leq \tau \leq \lambda_1.
 \end{aligned}$$

Evenzoo is $C_1^z(w) = z \int_1^w C_1(t) (w - t)^{z-1} dt$, want $l_1 = e^{\lambda_1} \geq 1$.

§ 23. Bijzondere gevallen. Neem $z = 1$ en $\lambda_n = n$. Dan is

$$\begin{aligned}
 C_\lambda^1(\omega) &= \sum_{\substack{p=1 \\ n < \omega \leq n+1}}^{p=n} (\omega - p) c_p. \quad \text{Nemen we } \omega = n, \text{ dan komt er} \\
 C_\lambda^1(n) &= \sum_{p=1}^{p=n-1} (n - p) c_p = C_1 + C_2 + \dots + C_{n-1}, \\
 &\quad \text{waar } C_p = c_1 + \dots + c_p \\
 \text{dus } \frac{C_\lambda^1(n)}{n} &= \frac{C_1 + \dots + C_{n-1}}{n},
 \end{aligned}$$

waaruit volgt, dat de sommeerbaarheid $(n, 1)$ overeenkomt met de C_1 sommeerbaarheid (zie pg. 3).

Voor $z = 1$ en $\omega = \lambda_n$ vinden we

$$\begin{aligned}
 C_\lambda^1(\lambda_n) &= \sum_{p=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_p) c_p = (\lambda_2 - \lambda_1) C_1 + (\lambda_3 - \lambda_2) C_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) C_{n-1} \\
 \text{dus } \frac{C_\lambda^1(\lambda_n)}{\lambda_n} &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) C_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) C_{n-1}}{\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})}
 \end{aligned}$$

De gedeeltelijke sommen C_p zijn hier van gewichten voorzien.

§ 24. *Definities:* Als $\lambda_n = n$, noemt men $\frac{C_\lambda^\omega(\omega)}{\omega^\omega}$ een arithmetisch gemiddelde; is $\lambda_n = \lg n$, dus $l_n = n$, dan noemt men $\frac{C_\lambda^\omega(\omega)}{\omega^\omega}$ een logaritmisch gemiddelde, $\frac{C_1^\omega(w)}{w^\omega}$ is dan weer een arithmetisch gemiddelde.

§ 25. We toonen nu aan, dat de $(\lambda \omega)$ sommatiemethode, toegepast op een convergente reeks met som A , eveneens A tot som geeft.

Bewijs: Zij de gegeven reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Dan is

$$\omega^{-\omega} A_\lambda^\omega(\omega) = \omega^{-\omega} \omega \int_0^\omega A_\lambda(\tau) (\omega - \tau)^{\omega-1} d\tau.$$

Daar $A = \omega^{-\omega} \omega \int_0^\omega A(\omega - \tau)^{\omega-1} d\tau$, is

$$A - \omega^{-\omega} A_\lambda^\omega(\omega) = \omega^{-\omega} \omega \int_0^\omega \{A - A_\lambda(\tau)\} (\omega - \tau)^{\omega-1} d\tau.$$

Nu kan bij gegeven $\varepsilon > 0$, p zoodanig bepaald worden, dat $|A - A_\lambda(\tau)| < \varepsilon$ voor $\tau \geq p$, terwijl $|A - A_\lambda(\tau)| < M$ voor $\tau \leq 0$. Zij $\omega > p$, dan is

$$\begin{aligned} |A - \omega^{-\omega} A_\lambda^\omega(\omega)| &< \omega^{-\omega} \omega \int_0^p |A - A_\lambda(\tau)| (\omega - \tau)^{\omega-1} d\tau + \\ &+ \varepsilon \omega^{-\omega} \omega \int_p^\omega (\omega - \tau)^{\omega-1} d\tau < M \left\{ 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^\omega \right\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

$\omega_1 > p$ kan nu zóó bepaald worden, dat voor $\omega \geq \omega_1$

$$M \left\{ 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^\omega \right\} < \varepsilon, \text{ dan is}$$

$$|A - \omega^{-\omega} A_\lambda^\omega(\omega)| < 2\varepsilon, \text{ voor } \omega \geq \omega_1.$$

§ 26. Als $\sum a_n$ sommeerbaar (λz) is tot som A en $\sum b_n$ is sommeerbaar (λz) tot som B , dan is $\sum (p a_n \pm q b_n)$ sommeerbaar (λz) tot som $pA \pm qB$.

Bewijs:

Volgens 't gegeven is

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{-z} z \int_0^{\omega} A_{\lambda}(\tau) (\omega - \tau)^{z-1} d\tau = A \text{ en}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{-z} z \int_0^{\omega} B_{\lambda}(\tau) (\omega - \tau)^{z-1} d\tau = B.$$

Hieruit volgt direct:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{-z} z \int_0^{\omega} \{ p A_{\lambda}(\tau) \pm q B_{\lambda}(\tau) \} (\omega - \tau)^{z-1} d\tau = pA \pm qB$$

§ 27. *Sommeerbaarheid* ($lg n, 1$).

Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ is alleen dan sommeerbaar ($lg n, 1$) tot som

$$C, \text{ als } \frac{C_1 + \frac{1}{2} C_2 + \dots + \frac{1}{n} C_n}{lg n} \rightarrow C, \quad (1)$$

en omgekeerd, waar $C_n = c_1 + \dots + c_n$.

Bewijs: We veronderstellen eerst, dat (1) gegeven is; we moeten dan bewijzen, dat:

$$\frac{(\omega - lg 1) c_1 + (\omega - lg 2) c_2 + \dots + (\omega - lg n) c_n}{\omega} \rightarrow C, \text{ als } \omega \rightarrow \infty \quad (2)$$

en $lg n < \omega \leq lg(n+1)$

Nu kan het te bewijzene (2) geschreven worden als:

$$(lg 2 - lg 1) C_1 + (lg 3 - lg 2) C_2 + \dots + (\omega - lg n) C_n \sim C\omega \quad (3)$$

$$\text{Uit (1) volgt: } C_1 + \frac{1}{2} C_2 + \dots + \frac{1}{n} C_n = (C + \varepsilon_n) lg n \quad (4)$$

waar bij gegeven $\varepsilon > 0$, k zóó bepaald kan worden, dat voor $n \geq k$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon$.

Uit (4) volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} C_{n+1} &= (C + \varepsilon_{n+1}) \lg(n+1) - (C + \varepsilon_n) \lg n = \\ &= C \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \varepsilon_{n+1} \lg(n+1) - \varepsilon_n \lg n. \end{aligned} \quad n \geq 1$$

$$\text{Dus } C_{n+1} = (n+1) C \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \varepsilon_{n+1} (n+1) \lg(n+1) - \varepsilon_n (n+1) \lg n.$$

Nu is

$$(n+1) \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = (n+1) \left(\frac{1}{n} - \frac{\theta_n}{2n^2}\right) = 1 + \frac{\delta_n}{n}, \quad 0 < \theta_n < 1, |\delta_n| < 1,$$

en dus

$$C_{n+1} = C + \frac{\delta_n}{n} C + (n+1) \{ \varepsilon_{n+1} \lg(n+1) - \varepsilon_n \lg n \}. \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Substitueeren we nu achtereenvolgens de 3 termen van (5) voor alle waarden van $p \leq n$ in 't linkerlid van (3).

Substitutie van alle C 's in (3) geeft: $C \omega$. (6)

Substitutie van alle $C \frac{\partial_k}{k}$ geeft:

$$C \left\{ (\lg 2 - \lg 1) \frac{\partial_1}{1} + (\lg 3 - \lg 2) \frac{\partial_2}{2} + \dots + (\omega - \lg n) \frac{\partial_n}{n} \right\}.$$

De modulus hiervan is kleiner dan

$$|C| \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = o(\omega). \quad (7)$$

Substitutie van de laatste termen in (3) geeft:

$$\begin{aligned} &(\lg 2 - \lg 1) C_1 + 2(\varepsilon_2 \lg 2 - \varepsilon_1 \lg 1)(\lg 3 - \lg 2) + \\ &+ 3(\varepsilon_3 \lg 3 - \varepsilon_2 \lg 2)(\lg 4 - \lg 3) + \dots + n \{ \varepsilon_n \lg n - \varepsilon_{n-1} \lg(n-1) \} (\omega - \lg n) = \\ &= o(\omega) - \varepsilon_2 \lg 2 \{ 3(\lg 4 - \lg 3) - 2(\lg 3 - \lg 2) \} - \dots \\ &\dots - \varepsilon_{n-1} \lg(n-1) [n(\omega - \lg n) - (n-1) \{ \lg n - \lg(n-1) \}] + n \varepsilon_n \lg n (\omega - \lg n). \end{aligned}$$

De modulus van dezen vorm is kleiner dan:

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega + |\text{som}(k-2) \text{ termen}| + \varepsilon \sum_{p=k}^{n-1} \lg p \left\{ (p+1) \lg\left(1 + \frac{1}{p+1}\right) - p \lg\left(1 + \frac{1}{p}\right) \right\} \\ + \varepsilon \lg n, \text{ want:} \end{aligned} \quad (8)$$

$(p+1) \lg \left(1 + \frac{1}{p+1}\right) > p \lg \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ voor $p \geq 1$, immers de afgeleide van $p \lg \left(1 + \frac{1}{p}\right)$ is $\lg \left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p+1} > 0$, voor $p \geq 1$.

Bovendien is $n \lg n (\omega - \lg n) < n \lg n \left\{ \lg \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} < \frac{n \lg n}{n} = \lg n$.

$$\begin{aligned} \text{Verder is } (p+1) \lg \left(1 + \frac{1}{p+1}\right) - p \lg \left(1 + \frac{1}{p}\right) &< (p+1) \times \\ &\times \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2(p+1)^2} + \frac{1}{3(p+1)^3} \right) - p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} \right) = \\ &= \frac{-1}{2(p+1)} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3(p+1)^2} = \frac{1}{2p(p+1)} + \frac{1}{3(p+1)^2} < \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

De modulus van (8) is dus kleiner dan:

$$\varepsilon \omega + \varepsilon' \omega + \varepsilon \lg(n-1) \sum_{p=k}^{n-1} \frac{1}{p^2} + \varepsilon'' \omega < M \varepsilon \omega. \quad (9)$$

Uit (6), (7), (9) volgt dus, dat (3) $\propto C \omega$ is.

Om omgekeerd te bewijzen, dat uit (3), (4) volgt, kunnen we opmerken, dat (2) geldt voor alle ω , die voldoen aan $\lg n < \omega \leq \lg(n+1)$. We nemen nu $\omega = \lg(n+1)$; dan kunnen we schrijven:

$$(\lg 2 - \lg 1) C_1 + \dots + (\lg(n+1) - \lg n) C_n = (C + \varepsilon_{n+1}) \lg(n+1),$$

$$|\varepsilon_n| < \varepsilon \text{ voor } n \geq k.$$

$$\text{Dus } (\lg(n+1) - \lg n) C_n = (C + \varepsilon_{n+1}) \lg(n+1) - (C + \varepsilon_n) \lg n.$$

$$C_n = C + \frac{\varepsilon_{n+1} \lg(n+1) - \varepsilon_n \lg n}{\lg(n+1) - \lg n}. \quad (10)$$

Substitutie van den 1^{en} term van (10) in 4 geeft:

$$C + \frac{1}{2} C + \dots + \frac{1}{n} C. \text{ Dit is equivalent met } C \lg n. \quad (11)$$

De 2^e term geeft:

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon_2 \lg 2 - \varepsilon_1 \lg 1}{\lg 2 - \lg 1} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_3 \lg 3 - \varepsilon_2 \lg 2}{\lg 3 - \lg 2} + \dots + \frac{1}{n} \frac{\varepsilon_{n+1} \lg(n+1) - \varepsilon_n \lg n}{\lg(n+1) - \lg n} = \\ &= \varepsilon_2 \lg 2 \left\{ \frac{1}{\lg 2 - \lg 1} - \frac{1}{2(\lg 3 - \lg 2)} \right\} + \dots + \varepsilon_n \lg n \left\{ \frac{1}{(n-1) \{ \lg n - \lg(n-1) \}} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n \{ \lg(n+1) - \lg n \}} \right\} + \frac{\varepsilon_{n+1} \lg(n+1)}{n \{ \lg(n+1) - \lg n \}}. \quad (12) \end{aligned}$$

De modulus van (12) is kleiner dan:

$$| \text{som } (k-1) \text{ termen} | + \varepsilon \sum_{p=k}^{p=n-1} \lg(p+1) \left\{ \frac{1}{p \lg\left(1 + \frac{1}{p}\right)} - \frac{1}{(p+1) \lg\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)} \right\} \\ + \varepsilon \frac{\lg(n+1)}{n \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)}. \quad (13)$$

Nu is

$$\frac{1}{p \lg\left(1 + \frac{1}{p}\right)} - \frac{1}{(p+1) \lg\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)} = \frac{(p+1) \lg\left(1 + \frac{1}{p+1}\right) - p \lg\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{p \lg\left(1 + \frac{1}{p}\right) \times (p+1) \lg\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)} \\ < \frac{\frac{1}{p^2}}{\frac{p}{p+1} \frac{p+1}{p+2}} < \frac{2}{p^2} \text{ voor } p \geq 3.$$

Dus de modulus van (13) is kleiner dan:

$$\varepsilon \lg n + 2 \varepsilon \lg n \sum_k^{n-1} \frac{1}{p^2} + 2 \varepsilon \lg(n+1) = M \varepsilon \lg n. \quad (14)$$

Uit (11) en (14) volgt de juistheid van (4).

§ 28. *Bepaling Dirichlet'sche reeksen.*

Onder een Dirichlet'sche reeks van het type λ_n wordt verstaan de reeks $\sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, waarin $s = \sigma + it$ de complexe veranderlijke is en de λ_n 's reële getallen zijn, die voldoen aan de voorwaarden $\lambda_{n+1} > \lambda_n > 0$, voor $n = 1, 2, \dots$ en $\lambda_n \rightarrow \infty$, als $n \rightarrow \infty$.

Voor $\lambda_n = \lg n$, gaat de reeks over in een gewone Dirichlet'sche reeks. Stellen we $e^{\lambda_n} = l_n$, dan gaat de reeks over in de reeks $\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}$.

§ 29. Als $\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}$ sommeerbaar (l, z) is tot „som” $f(s)$, dan is $\sum_{m+1}^{\infty} a_n l_n^{-s}$ sommeerbaar (p, z) tot „som” $g(s) = f(s) - \sum_1^m a_n l_n^{-s}$

en $\sum_{m+1}^{\infty} a_n \left(\frac{l_n}{l_{m+1}} \right)^{-s}$ sommeerbaar (q. z) tot „som” $l_{m+1}^s g(s)$,

met $p_n = l_{m+n}$ en $q_n = p_n - p_1$.

Bewijs: a) Stellen we $a_n l_n^{-s} = c_n$, dan is

$c_1 + \dots + c_m + c_{m+1} + \dots$ sommeerbaar ($l z$) tot „som” $f(s)$

en $c_1 + \dots + c_m$ sommeerbaar ($l z$) tot „som”

$c_1 + \dots + c_m$, volgens § 25, pg. 31.

Volgens § 26, pg. 32 is dus

$o + o + \dots + o + c_{m+1} + \dots$ sommeerbaar ($l z$) tot „som”

$f(s) - (c_1 + \dots + c_m)$

d. w. z. $\frac{c_{m+1} (w - l_{m+1})^z + \dots + c_n (w - l_n)^z}{w^z} \rightarrow f(s) - (c_1 + \dots + c_m)$, als $w \rightarrow \infty$

dus ook $\frac{c_{m+1} (w - p_1)^z + \dots + c_n (w - p_{n-m})^z}{w^z} \rightarrow f(s) - \sum_1^m a_n l_n^{-s}$, als $w \rightarrow \infty$.

b) Daar $\sum_{m+1}^{\infty} a_n l_n^{-s} = \sum_{m+1}^{\infty} c_n (p z)$ sommeerbaar is tot $g(s)$,

nadert

$\frac{a_{m+1} l_{m+1}^{-s} (w - p_1)^z + \dots + a_{m+n} l_{m+n}^{-s} (w - p_n)^z}{w^z}$ tot $g(s)$; ($p_n < w \leq p_{n+1}$)

dus ook

$\frac{a_{m+1} l_{m+1}^{-s} \{ (w + p_1) - p_1 \}^z + \dots + a_{m+n} l_{m+n}^{-s} \{ (w + p_1) - p_n \}^z}{(w + p_1)^z} \rightarrow g(s)$,

als $p_n < w + p_1 \leq p_{n+1}$ en $w \rightarrow \infty$

Nu is

$$\begin{aligned} & \frac{a_{m+1} \{ w - (p_1 - p_1) \}^z}{w^z} + \\ & + \frac{a_{m+2} \left(\frac{l_{m+2}}{l_{m+1}} \right)^{-s} \{ w - (p_2 - p_1) \}^z + \dots + a_{m+n} \left(\frac{l_{m+n}}{l_{m+1}} \right)^{-s} \{ w - (p_n - p_1) \}^z}{w^z} = \\ & = l_{m+1}^s \left(\frac{w + p_1}{w} \right)^z \frac{a_{m+1} l_{m+1}^{-s} \{ (w + p_1) - p_1 \}^z + \dots + a_{m+n} l_{m+n}^{-s} \{ (w + p_1) - p_n \}^z}{(w + p_1)^z}. \end{aligned}$$

Dit nadert tot $l_{m+1}^s g(s)$, als $w \rightarrow \infty$.

§ 30. *Definitie sommeerbaarheid van een integraal.*

Zij gegeven de integraal $\int_0^{\infty} c(x) dx$ en een positieve continue, monotoon toenemende functie $\lambda(u)$, met de voorwaarden $\lambda(u) \rightarrow \infty$ als $u \rightarrow \infty$ en $\lambda(0) = 0$.

Bij de definitie van sommeerbaarheid van reeksen is $C_\lambda(\tau) = c_1 + \dots + c_n$, waarbij n de grootste waarde van de indices van de rij $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ is, waarvoor nog geldt $\lambda_n < \tau$; hier definiëren we $C_\lambda(\tau) = \int_0^\tau c(x) dx$, waarbij n de grootste waarde van de veranderlijke is, waarvoor nog geldt $\lambda(n) \leq \tau$.

Verder definiëren we

$$C_\lambda^\omega(\omega) = \omega \int_0^\omega C_\lambda(\tau) (\omega - \tau)^{\omega-1} d\tau.$$

Nadert $\omega^{-\omega} C_\lambda^\omega(\omega)$ tot een limiet C , als $\omega \rightarrow \infty$, dan is bij definitie $\int_0^\infty c(x) dx$ sommeerbaar (λx) tot C .

Een analoge definitie kan voor $(l x)$ sommeerbaarheid gegeven worden.

§ 31. *Bepalingen en hulpstellingen.*

Voordat we met de theorie voortgaan, zullen we eerst eenige definities geven en enkele hulpstellingen bewijzen, die voor het vervolg van belang zijn.

Onder $[m]$ verstaan we het geheele positieve of negatieve getal, dat voldoet aan de ongelijkheid:

$$[m] \leq m < [m] + 1.$$

Onder $\sum_x^y f(n)$ verstaan we de som van alle waarden van $f(n)$ waarvoor $x \leq n \leq y$ (n geheel).

Verder stellen we $A(p) = \sum_1^p a_n$, $A(p \cdot q) = \sum_p^q a_n$,

dus $A(p \cdot q) = A(q) - A(p-1)$ en $A(1 \cdot p) = A(p)$, waarbij deze notatie ook voor andere letters dan a gebruikt zal worden. Ten slotte $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$.

Hulpstelling 1. Is $g(x)$ een willekeurige functie van x , dan is $\sum_p^q a_p g(p) = \sum_{p=p}^{q-1} A(p, p) \Delta g(p) + A(p, q) g(q)$.

Deze stelling is eigenlijk niet anders dan een andere inkleeding van een bekend theorema van ABEL.

Het bewijs is zeer eenvoudig.

$$\begin{aligned} \sum_p^q a_p g(p) &= a_p g(p) + a_{p+1} g(p+1) + \dots + a_q g(q) = \\ &= a_p \{g(p) - g(p+1)\} + (a_p + a_{p+1}) \{g(p+1) - g(p+2)\} + \dots \\ &+ (a_p + \dots + a_{q-1}) \{g(q-1) - g(q)\} + (a_p + \dots + a_q) g(q) = \\ &= \sum_{p=p}^{q-1} A(p, p) \Delta g(p) + A(p, q) g(q). \end{aligned}$$

Hulpstelling 2. Als $s = \sigma + it$ en $\sigma > 0$ dan is

$$|\Delta e^{-\lambda_n s}| \leq \frac{|s|}{\sigma} \Delta e^{-\lambda_n \sigma}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} |\Delta e^{-\lambda_n s}| &= |e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}| = \left| s \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-us} du \right| \leq |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} |e^{-us}| du = \\ &= |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u\sigma} du = \frac{|s|}{\sigma} \Delta e^{-\lambda_n \sigma} \end{aligned}$$

Hulpstelling 3. Als $f(x)$ een positieve integreerbare functie van x is, $\int_0^\infty f(x) dx$ divergent en $g(x) = o\{f(x)\}$,

dan is $\int_0^x g(x) dx = o\left(\int_0^x f(x) dx\right)$ of anders geschreven:

$$\int_0^x o(f) dx = o\left(\int_0^x f dx\right).$$

Bewijs: Zij ε_k de bovenste grens van $\frac{|g|}{f}$ voor $x \geq k$;

$\varepsilon_k \rightarrow 0$, als $k \rightarrow \infty$.

Dan is

$$\frac{\int_0^x g \, dx}{\int_0^x f \, dx} = \frac{\int_0^k g \, dx}{\int_0^x f \, dx} + O \frac{\int_0^x \varepsilon_k f \, dx}{\int_0^x f \, dx} = o(1) + O(\varepsilon_k) = o(1),$$

daar k willekeurig is.

Hulpstelling 4. Als $f(x)$ en $g(x)$ twee integreerbare functies van x zijn en $f(x) \sim A x^\alpha$; $g(x) \sim B x^\beta$, als $x \rightarrow \infty$, ($\alpha > -1$, $\beta > -1$), dan is

$$h(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) \, dt \sim A B \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} x^{\alpha+\beta+1}.$$

Bewijs: Stel $f(x) = A x^\alpha + f_1(x)$ en $g(x) = B x^\beta + g_1(x)$;
 dus $f_1(x) = o(x^\alpha)$ en $g_1(x) = o(x^\beta)$.

Substitueeren we deze vormen in de gegeven integraal, dan kan deze geschreven worden als een som van vier integralen. Een er van is:

$\int_0^x A x^\alpha B (x-t)^\beta \, dt$. Stel $t = u x$, dan is deze integraal gelijk aan:

$$A B x^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 u^\alpha (1-u)^\beta \, du = A B \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} x^{\alpha+\beta+1}.$$

Een tweede integraal is bijv.

$$\int_0^x f_1(t) B (x-t)^\beta \, dt$$

Kies $\varepsilon > 0$ en bepaal x_1 zóó, dat $|f_1(t)| < \varepsilon t^\alpha$, voor $t \geq x_1$ en $|f_1(t)| < M$ voor $t < x_1$.

Dan is

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f_1(t) B (x-t)^\beta \, dt \right| &\leq |B| \left[\int_0^{x_1} |f_1(t) (x-t)^\beta| \, dt + \varepsilon \int_{x_1}^x t^\alpha (x-t)^\beta \, dt \right] \\ &\leq |B| M \int_0^{x_1} (x-t)^\beta \, dt + \varepsilon O(x^{\alpha+\beta+1}) \\ &\leq \frac{|B| M}{\beta+1} \left\{ x^{\beta+1} - (x-x_1)^{\beta+1} \right\} + \varepsilon O(x^{\alpha+\beta+1}). \quad (1) \end{aligned}$$

Nu is

$$\begin{aligned} x^{\beta+1} - (x - x_1)^{\beta+1} &= x^{\beta+1} - x^{\beta+1} \left(1 - \frac{x_1}{x}\right)^{\beta+1} = \\ &= x^{\beta+1} - x^{\beta+1} \left\{ 1 - \frac{x_1}{x} (\beta+1) \left(1 - \frac{\theta x_1}{x}\right)^{\beta} \right\} = \\ &= x^{\beta} x_1 (\beta+1) \left(1 - \frac{\theta x_1}{x}\right)^{\beta}. \quad [0 < \theta < 1] \end{aligned}$$

Dus (1) kan geschreven worden als:

$$O(x^{\beta}) + o(x^{\alpha+\beta+1}) = o(x^{\alpha+\beta+1}), \text{ omdat } \alpha+1 > 0 \text{ en} \\ \text{dus } O(x^{\beta}) = o(x^{\alpha+\beta+1}).$$

De beide andere integralen zijn eveneens van den vorm $o(x^{\alpha+\beta+1})$.

Hulpstelling 5. Als $\alpha > 0$, $\mu > 0$, dan is

$$C_{\lambda}^{\alpha+\mu}(\omega) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\mu)} \int_0^{\omega} C_{\lambda}^{\alpha}(t) (\omega-t)^{\mu-1} dt,$$

terwijl een analoge betrekking voor $C_1^{\alpha+\mu}(\omega)$ opgesteld kan worden.

$$\text{Bewijs: } C_{\lambda}^{\alpha}(t) = \alpha \int_0^t C_{\lambda}(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \text{ dus}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\alpha+\mu+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\mu)} \int_0^{\omega} C_{\lambda}^{\alpha}(t) (\omega-t)^{\mu-1} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\mu+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\mu)} \alpha \int_0^{\omega} (\omega-t)^{\mu-1} dt \int_0^t C_{\lambda}(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau. \end{aligned}$$

Het integratiegebied wordt gevormd door den driehoek met zijden $t=\tau$, $\tau=0$ en $t=\omega$.

We mogen de integratievolgorde omkeeren en krijgen dan:

$$\frac{\Gamma(\alpha+\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_0^{\omega} C_{\lambda}(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\omega} (\omega-t)^{\mu-1} (t-\tau)^{\alpha-1} dt.$$

Stellen we $t - \tau = (\omega - \tau) u$, waaruit volgt $\omega - t = (\omega - \tau)(1 - u)$, dan wordt bovenstaande integraal:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(z + \mu + 1)}{\Gamma(z) \Gamma(\mu)} \int_0^\omega C_\lambda(\tau) (\omega - \tau)^{\mu + z - 1} d\tau \int_0^1 (1 - u)^{\mu - 1} u^{z - 1} du = \\ &= \frac{\Gamma(z + \mu + 1)}{\Gamma(z) \Gamma(\mu)} \frac{\Gamma(z) \Gamma(\mu)}{\Gamma(z + \mu)} \int_0^\omega C_\lambda(\tau) (\omega - \tau)^{\mu + z - 1} d\tau = C_\lambda^{z + \mu}(\omega). \end{aligned}$$

We kunnen dit bewijs ook geven, door uit te gaan van de reeks voor $C_\lambda^x(t)$, nml.

$$C_\lambda^x(t) = (t - \lambda_1)^x c_1 + \dots + (t - \lambda_n)^x c_n, \quad \lambda_n < t \leq \lambda_{n+1}.$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega C_\lambda^x(t) (\omega - t)^{\mu - 1} dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (t - \lambda_1)^x c_1 (\omega - t)^{\mu - 1} dt + \\ & + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \left\{ (t - \lambda_1)^x c_1 + (t - \lambda_2)^x c_2 \right\} (\omega - t)^{\mu - 1} dt + \dots \\ & + \int_{\lambda_n}^\omega \left\{ (t - \lambda_1)^x c_1 + \dots + (t - \lambda_n)^x c_n \right\} (\omega - t)^{\mu - 1} dt = \\ &= \int_{\lambda_1}^\omega (t - \lambda_1)^x c_1 (\omega - t)^{\mu - 1} dt + \int_{\lambda_2}^\omega (t - \lambda_2)^x c_2 (\omega - t)^{\mu - 1} dt + \dots \\ & \quad + \int_{\lambda_n}^\omega (t - \lambda_n)^x c_n (\omega - t)^{\mu - 1} dt = \\ & \frac{\Gamma(z + 1) \Gamma(\mu)}{\Gamma(z + 1 + \mu)} \left\{ c_1 (\omega - \lambda_1)^{x + \mu} + c_2 (\omega - \lambda_2)^{x + \mu} + \dots + c_n (\omega - \lambda_n)^{x + \mu} \right\} = \\ &= \frac{\Gamma(z + 1) \Gamma(\mu)}{\Gamma(z + 1 + \mu)} C_\lambda^{x + \mu}(\omega). \end{aligned}$$

Hierbij is telkens in den integrand $t - \lambda_p = (\omega - \lambda_p) u$ gesteld.

Het eerste bewijs kan op volkomen dezelfde wijze voor sommeerbaarheid van integralen gegeven worden.

Hulpstelling 6. Als $z > 0$, $\mu < 1$ en $\mu \leq z$, dan is

$$C_{\lambda}^{z-\mu}(\omega) = \frac{\Gamma(z-\mu+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(1-\mu)} \int_0^{\omega} \frac{dC_{\lambda}^z(t)}{dt} (\omega-t)^{-\mu} dt.$$

$$\text{Bewijs: } \frac{dC_{\lambda}^z(t)}{dt} = \sum_{p=1}^n z(t-\lambda_p)^{z-1} c_p, \quad \lambda_n < t \leq \lambda_{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} \frac{dC_{\lambda}^z(t)}{dt} (\omega-t)^{-\mu} dt &= z \left\{ \int_{\lambda_1}^{\omega} (t-\lambda_1)^{z-1} c_1 (\omega-t)^{-\mu} dt + \right. \\ &+ \int_{\lambda_2}^{\omega} (t-\lambda_2)^{z-1} c_2 (\omega-t)^{-\mu} dt + \dots + \int_{\lambda_n}^{\omega} (t-\lambda_n)^{z-1} c_n (\omega-t)^{-\mu} dt \Big\} = \\ &= \frac{z\Gamma(z)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(z-\mu+1)} \left\{ c_1 (\omega-\lambda_1)^{z-\mu} + \dots + c_n (\omega-\lambda_n)^{z-\mu} \right\} = \\ &= \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(z-\mu+1)} C_{\lambda}^{z-\mu}(\omega). \end{aligned}$$

(Ook hier is weer $t-\lambda_p = (\omega-\lambda_p) u$ gesteld.)

Nemen we in 't bijzonder $\mu = z < 1$, dan komt er

$$\begin{aligned} C_{\lambda}^0(\omega) = C_{\lambda}^z(\omega) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(1-z)} \int_0^{\omega} \frac{dC_{\lambda}^z(t)}{dt} (\omega-t)^{-z} dt = \\ &= \frac{\sin z\pi}{z\pi} \int_0^{\omega} \frac{dC_{\lambda}^z(t)}{dt} (\omega-t)^{-z} dt. \end{aligned}$$

Hulpstelling 7. Als c_n reëel is, $0 \leq \eta \leq \omega$ en $0 < z \leq 1$, dan is

$$|h(\eta, \omega)| = \left| z \int_0^{\eta} C_{\lambda}^z(t) (\omega-t)^{z-1} dt \right| \leq \text{Max}_{0 \leq t \leq \eta} |C_{\lambda}^z(t)|.$$

Is $z = 1$, dan komt er:

$$|h(\eta, \omega)| = \left| \int_0^{\eta} C_{\lambda}^1(t) dt \right| = |C_{\lambda}^1(\eta)| \leq \text{Max}_{0 \leq t \leq \eta} |C_{\lambda}^1(t)|,$$

zoodat de stelling voor $z = 1$ bewezen is.

We kunnen dus nu $z < 1$ veronderstellen en dan voor $C_\lambda(t)$ de formule uit de vorige stelling substitueeren. Dan is

$$\begin{aligned} |h(\eta, \omega)| &= \left| \frac{\sin z \pi}{\pi} \int_0^\eta (\omega - t)^{z-1} dt \int_0^t \frac{d C_\lambda^\times(\tau)}{d \tau} (t - \tau)^{-z} d\tau \right| = \\ &= \left| \frac{\sin z \pi}{\pi} \int_0^\eta \frac{d C_\lambda^\times(\tau)}{d \tau} d\tau \int_\tau^\eta (\omega - t)^{z-1} (t - \tau)^{-z} dt \right| = \\ &= \left| \int_0^\eta \frac{d C_\lambda^\times(\tau)}{d \tau} g(\tau) d\tau \right|, \text{ met } g(\tau) = \frac{\sin z \pi}{\pi} \int_\tau^\eta (\omega - t)^{z-1} (t - \tau)^{-z} dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } 0 < g(\tau) &= \frac{\sin z \pi}{\pi} \int_\tau^\omega (\omega - t)^{z-1} (t - \tau)^{-z} dt + \\ &\quad - \frac{\sin z \pi}{\pi} \int_\tau^\eta (\omega - t)^{z-1} (t - \tau)^{-z} dt. \end{aligned}$$

Stellen we in de eerste integraal $t - \tau = (\omega - \tau)u$, dan vinden we

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \frac{\sin z \pi}{\pi} \int_0^1 (1 - u)^{z-1} u^{-z} du - \frac{\sin z \pi}{\pi} \int_\eta^\omega (\omega - t)^{z-1} (t - \tau)^{-z} dt. \\ g(\tau) &= 1 - \frac{\sin z \pi}{\pi} \int_\eta^\omega (\omega - t)^{z-1} (t - \tau)^{-z} dt. \quad 0 < \tau \leq \eta. \end{aligned}$$

Is nu $\tau < \tau' \leq \eta$, dan is $(t - \tau)^{-z} < (t - \tau')^{-z}$. $t > \eta$, $0 < z < 1$,

waaruit volgt, dat $g(\tau)$ een monotoon dalende functie van τ is. We kunnen dus de tweede middenwaarde stelling toepassen en vinden dan:

$$\begin{aligned} |h(\eta, \omega)| &= |g(0) C_\lambda^\times(\xi)|, \quad 0 < \xi < \eta \\ \text{of } |h(\eta, \omega)| &\leq |C_\lambda^\times(\xi)| \leq \text{Max}_{0 \leq t \leq \eta} |C_\lambda^\times(t)|. \end{aligned}$$

Opm. Wordt de integraal niet over het interval $0 - \eta$, maar over het interval $\eta - \eta'$ ($\omega > \eta' > \eta$) genomen, dan kunnen we opschrijven:

$$\begin{aligned}
& \left| z \int_{\eta}^{\eta'} C_{\lambda}(t) (\omega - t)^{z-1} dt \right| \leq \left| z \int_0^{\eta'} C_{\lambda}(t) (\omega - t)^{z-1} dt \right| + \\
& + \left| \int_0^{\eta} C_{\lambda}(t) (\omega - t)^{z-1} dt \right| \leq \text{Max}_{0 \leq t \leq \eta'} |C_{\lambda}^{\times}(t)| + \text{Max}_{0 \leq t \leq \eta} |C_{\lambda}^{\times}(t)| \\
& \leq 2 \text{Max}_{0 \leq t \leq \eta'} |C_{\lambda}^{\times}(t)|.
\end{aligned}$$

§ 32. We leiden in deze § een resultaat af, dat veel overeenkomst heeft met een analoge stelling betreffende de sommeerbaarheid volgens CÉSARO. Is een reeks sommeerbaar C_k , dan is ze het ook $C_{k'}$, als $k' > k$. Zoo geldt ook hier de stelling:

Als $\sum c_n$ sommeerbaar (λz) is tot som C , dan is zij het ook $(\lambda z')$ tot som C , als $z' > z > 0$.

Bewijs: Uit het gegeven volgt, dat

$$\omega^{-z} z \int_0^{\omega} C_{\lambda}(t) (\omega - t)^{z-1} dt = \omega^{-z} C_{\lambda}^{\times}(\omega) \rightarrow C, \text{ als } \omega \rightarrow \infty;$$

$$\text{dus } C_{\lambda}^{\times}(\omega) \sim C \omega^z. \quad (1)$$

Stellen we nu $z' = z + \mu$, $\mu > 0$ en passen we hulpstelling 5 toe, dan vinden we:

$$C_{\lambda}^{z+\mu}(\omega) = \frac{\Gamma(z + \mu + 1)}{\Gamma(z + 1) \Gamma(\mu)} \int_0^{\omega} C_{\lambda}^{\times}(t) (\omega - t)^{\mu-1} dt.$$

Volgens (1) en hulpstelling 4 is nu

$$\begin{aligned}
C_{\lambda}^{z+\mu}(\omega) & \sim \frac{\Gamma(z + \mu + 1)}{\Gamma(z + 1) \Gamma(\mu)} C \frac{\Gamma(z + 1) \Gamma(\mu - 1 + 1)}{\Gamma(z + 1 + \mu - 1 + 1)} \omega^{z + \mu - 1 + 1} \text{ of} \\
& C_{\lambda}^{z+\mu}(\omega) \sim C \omega^{z+\mu}.
\end{aligned}$$

Opmerkingen:

1. In 't bijzonder is dus elke convergente reeks sommeerbaar (λz) voor alle $z > 0$.

2. Ook deze stelling gaat zonder eenige verandering door voor sommeerbaarheid van integralen.

3. Een analoge stelling kan voor $(l z)$ sommeerbaarheid worden afgeleid.

§ 33. Als $C_\lambda^x(\omega) = O(e^{\rho\omega})$ voor $\rho > 0$, $x > 0$, dan is

$$C_\lambda^{x+\mu}(\omega) = o(e^{(\rho+\delta)\omega}) \text{ voor iedere } \delta > 0, \mu > 0.$$

Bewijs:

$$C_\lambda^{x+\mu}(\omega) = \frac{\Gamma(x+\mu+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\mu)} \int_0^\omega C_\lambda^x(t) (\omega-t)^{\mu-1} dt, \quad (\text{hulpst. 5})$$

Uit 't gegeven volgt, dat $|C_\lambda^x(t)| < M e^{\rho t}$ voort $t > 0$. ($M > 0$)

$$\begin{aligned} \text{Nu is } |C_\lambda^{x+\mu}(\omega)| &\leq \frac{\Gamma(x+\mu+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\mu)} M \int_0^\omega e^{\rho t} (\omega-t)^{\mu-1} dt \\ &\leq M' e^{\rho\omega} \frac{\omega^\mu}{\mu} = \varepsilon e^{(\rho+\delta)\omega}, \end{aligned}$$

voor ω voldoende groot, waaruit het gevraagde volgt.

§ 34. Uit de $(l z)$ sommeerbaarheid volgt de (λz) sommeerbaarheid.

Als $\sum c_n$ sommeerbaar $(l z)$ is tot „som” C , ($l_n = e^{\lambda n}$), dan is deze ook sommeerbaar (λz) tot dezelfde som.

Bewijs:

We veronderstellen c_n reëel en $C = 0$. We doen hierbij niet aan de algemeenheid te kort, omdat, wanneer c_n complex is, de stelling voor het reële en imaginaire deel bewezen kan worden en wanneer $C \neq 0$ is, de eerste term veranderd kan worden in $c_1 - C$. Deze reeks geeft dan gesommeerd 0 tot som.

Daar $\sum c_n (l z)$ sommeerbaar is, nadert

$$w^{-x} \int_0^w C_1(t) (w-t)^{x-1} dt \rightarrow 0, \text{ als } w \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Hieruit moet nu volgen:

$$\omega^{-x} \int_0^\omega C_\lambda(\tau) (\omega-\tau)^{x-1} d\tau \rightarrow 0, \text{ als } \omega \rightarrow \infty. \quad (2)$$

We stellen $\omega = \lg w$ en $\tau = \lg t$; dan is

$C_\lambda(\tau) = C_\lambda(\lg t) = c_1 + c_2 + \dots + c_n$, waarbij n bepaald wordt door de ongelijkheid $\lambda_n < \lg t \leq \lambda_{n+1}$ of $l_n < t \leq l_{n+1}$

Dus $C_\lambda(\tau) = C_1(t)$.

Voeren we de substitutie in (2) uit, dan gaat deze over in:

$$(\lg w)^{-z} \int_1^w C_1(t) (\lg w - \lg t)^{z-1} \frac{dt}{t}. \quad (3)$$

Nu moet bewezen worden, dat (3) nadert tot 0, als $w \rightarrow \infty$, dus, dat

$$\int_1^w C_1(t) (\lg w - \lg t)^{z-1} \frac{dt}{t} = o(\lg w)^z. \quad (4)$$

Stel eerst z geheel.

Uit $C_1^z(t) = \sum_{p=1}^{p=n} (t - l_p)^z c_p$ en $l_n < t \leq l_{n+1}$ volgt, dat

$$C_1(t) = \frac{d}{dt} C_1^1(t); \quad C_1^1(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} C_1^2(t) \text{ enz.}$$

Gaan we nu (4), z maal partieel integreeren, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} & \frac{(\lg w - \lg t)^{z-1}}{t} C_1^1(t) \Big|_{t=1}^{t=w} - \frac{1}{2!} C_1^2(t) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(\lg w - \lg t)^{z-1}}{t} \right\} \Big|_{t=1}^{t=w} + \dots \\ & + \frac{(-1)^{z-1}}{z!} C_1^z(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^{z-1} \left\{ \frac{(\lg w - \lg t)^{z-1}}{t} \right\} \Big|_{t=1}^{t=w} + \\ & + \frac{(-1)^z}{z!} \int_1^w C_1^z(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^z \left\{ \frac{(\lg w - \lg t)^{z-1}}{t} \right\} dt \end{aligned} \quad (5)$$

Alle geïntegreerde termen zijn 0, aan de grenzen $1^1)$ en w behalve de laatste. Deze is echter van de orde $o(\lg w)^z$.

Immers:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \right)^{z-1} \left\{ \frac{(\lg w - \lg t)^{z-1}}{t} \right\} = \frac{1}{t} \left(\frac{d}{dt} \right)^{z-1} \{ \lg w - \lg t \}^{z-1} + \dots \\ & + (\lg w - \lg t)^{z-1} \left(\frac{d}{dt} \right)^{z-1} \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{1}{t} (-1)^{z-1} (z-1)! \frac{1}{t^{z-1}} + \end{aligned}$$

termen met $(\lg w - \lg t)$ als factor.

¹⁾ Want $C_1^p(1) = 0$, omdat $l_1 \geq 1$ is.

Het geïntegreerde stuk wordt dus:

$$\frac{w^{-z} C_1^z(w)}{z} = o(1) = o(lgw)^z. \quad (6)$$

De integraal, die overblijft, is op een constante factor na, gelijk aan:

$$\int_1^w C_1^z(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^z \left\{ \frac{(lgw - lgt)^{z-1}}{t} \right\} dt. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } \left(\frac{d}{dt}\right)^z \left\{ \frac{(lgw - lgt)^{z-1}}{t} \right\} &= (lgw - lgt)^{z-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^z \left(\frac{1}{t}\right) + \\ &+ z \left(\frac{d}{dt}\right) \left\{ (lgw - lgt)^{z-1} \right\} \left(\frac{d}{dt}\right)^{z-1} \left(\frac{1}{t}\right) + \dots + \frac{1}{t} \left(\frac{d}{dt}\right)^z \{ (lgw - lgt)^{z-1} \}. \end{aligned}$$

Werken we $(lgw - lgt)^{z-1}$ uit en voeren we daarna de differentiaties uit, dan krijgt elke term den factor $\frac{1}{t^{z+1}}$ en verder factoren lgw en lgt , waarvan de som van de exponenten $\leq z-1$ is; dus

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^z \left\{ \frac{(lgw - lgt)^{z-1}}{t} \right\} = t^{-z-1} \sum A_{\mu, \nu} (lgw)^\mu (lgt)^\nu, \quad (8)$$

$$\text{met } \mu + \nu \leq z-1, \mu \geq 0, \nu \geq 0$$

Bij substitutie van (8) in (7) splitst deze integraal zich in een som van integralen. Een er van is:

$$(lgw)^\mu A_{\mu, \nu} \int_1^w C_1^z(t) \frac{(lgt)^\nu}{t^{z+1}} dt. \quad (9)$$

$$\text{Daar } C_1^z(t) = o(t^z), \text{ is } C_1^z(t) \frac{(lgt)^\nu}{t^{z+1}} = o\left\{ \frac{(lgt)^\nu}{t} \right\}.$$

Omdat $\int_1^\infty \frac{(lgt)^\nu}{t} dt$ divergeert, is volgens hulpstelling 3,

pg. 38, (9) gelijk aan:

$$(lgw)^{\mu} A_{\mu, \nu} \circ \left\{ \int_1^w \frac{(lgt)^{\nu}}{t} dt \right\} = A_{\mu, \nu} \circ \left\{ (lgw)^{\mu + \nu + 1} \right\} = o(lgw)^z. \quad (10)$$

De modulus van (7) is dus kleiner dan $\varepsilon (lgw)^z$, voor w voldoende groot, waarmee de stelling bewezen is voor z geheel.

Stel nu $0 < z < 1$.

Uit § 32, pg. 44 volgt, dat de reeks $\sum c_n$ sommeerbaar $(l, 1)$ is tot „som” 0, immers $1 > z$; dus $w^{-1} C_1^1(w) \rightarrow 0$, als $w \rightarrow \infty$.

We kunnen dan bij gegeven $\varepsilon > 0$, $w_1 > 1$, zóó kiezen, dat $|C_1^1(t)| < \varepsilon t$, voor $t \geq w_1$ (w_1 vast).

We nemen nu $w > 2w_1$; dan is (4) te schrijven als

$$\int_1^{w_1} + \int_{w_1}^{\frac{w}{2}} + \int_{\frac{w}{2}}^w = I_1 + I_2 + I_3.$$

Daar w_1 vast is, is $|C_1(t)| < K$ voor $t \leq w_1$. Dus:

$$|I_1| < \int_1^{w_1} K (lgw - lgw_1)^{z-1} dt < K w_1 (lgw - lgw_1)^{z-1} = o(lgw)^z, \\ \text{wegens } z - 1 < 0.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{w_1}^{\frac{w}{2}} \frac{d}{dt} \{C_1^1(t)\} (lgw - lgt)^{z-1} \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{\left(lgw - lg \frac{w}{2}\right)^{z-1}}{\frac{w}{2}} C_1^1\left(\frac{w}{2}\right) - \frac{(lgw - lgw_1)^{z-1}}{w_1} C_1^1(w_1) + \\ &\quad - \int_{w_1}^{\frac{w}{2}} C_1^1(t) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(lgw - lgt)^{z-1}}{t} \right\} dt = \\ &= \frac{2}{w} (lg 2)^{z-1} C_1^1\left(\frac{w}{2}\right) - \frac{1}{w_1} \left(lg \frac{w}{w_1}\right)^{z-1} C_1^1(w_1) + \\ &\quad + \int_{w_1}^{\frac{w}{2}} \frac{C_1^1(t)}{t^2} \{ (lgw - lgt)^{z-1} - (1-z)(lgw - lgt)^{z-2} \} dt. \end{aligned}$$

$$|I_2| \leq \frac{2}{w} (lg 2)^{z-1} \varepsilon \frac{w}{2} + \frac{1}{w_1} \left(lg \frac{w}{w_1} \right)^{z-1} \varepsilon w_1 +$$

$$+ \varepsilon \left\{ \int_{w_1}^w \frac{(lg w - lgt)^{z-1}}{t} dt + \int_{w_1}^w \frac{(lg w - lgt)^{z-2}}{t} dt \right\} <$$

$$< M \varepsilon + \varepsilon O(lgw)^{z-1} + \varepsilon \{ O(lgw)^z + O(lgw)^{z-1} \} = o(lgw)^z.$$

Passen we op de 3^e integraal de middenwaarde stelling toe, dan komt er:

$$I_3 = \frac{2}{w} \int_{\frac{w}{2}}^{v_2} C_1(t) (lg w - lgt)^{z-1} dt. \quad \frac{w}{2} < v_2 < w.$$

Nu neemt $\frac{lg w - lgt}{w - t}$ monotoon af, als t monotoon toeneemt

van 1 tot w , immers $\frac{d}{dt} \frac{lg w - lgt}{w - t} = - \frac{\frac{w-t}{t} - (lg w - lgt)}{(w-t)^2} < 0$,

omdat $lg w - lgt = lg \left(1 + \frac{w-t}{t} \right) < \frac{w-t}{t}$, voor $\frac{w}{2} < t < w$.

Dus $\left\{ \frac{lg w - lgt}{w - t} \right\}^{z-1}$ neemt monotoon toe, omdat $z-1 < 0$;

$$\text{en } \lim_{t \rightarrow w} \left(\frac{lg w - lgt}{w - t} \right)^{z-1} = \lim_{t \rightarrow w} \left\{ \frac{lg \left(1 + \frac{w-t}{t} \right)}{w - t} \right\}^{z-1} =$$

$$\lim_{t \rightarrow w} \left\{ \frac{\frac{w-t}{t} - \left(\frac{w-t}{t} \right)^2}{2 \left(1 + \frac{w-t}{t} \right)^2} \right\}^{z-1} = \frac{1}{w^{z-1}}, \quad (0 < \theta < 1).$$

$$\text{Nu is } I_3 = \frac{2}{w} \int_{\frac{w}{2}}^{v_2} C_1(t) (w - t)^{z-1} \left(\frac{lg w - lgt}{w - t} \right)^{z-1} dt =$$

$$= \frac{2}{w} \left(\frac{lg w - lg v_2}{w - v_2} \right)^{z-1} \int_{v_1}^{v_2} C_1(t) (w - t)^{z-1} dt. \quad \left(\frac{w}{2} < v_1 < v_2 < w. \right)$$

$$\text{Dus } |I_3| \leq \frac{2}{w} w^{1-\kappa} \left| \int_{v_1}^{v_2} C_1(t) (w-t)^{\kappa-1} dt \right|.$$

Volgens de opmerking bij hulpstelling 7, pg. 43,

$$\text{is nu } |I_3| \leq 2 w^{-\kappa} \frac{2}{\kappa} \max_{0 \leq t \leq v_2} |C_1^{\kappa}(t)|.$$

Omdat $C_1^{\kappa}(t) = o(t^{\kappa})$, is dus voor voldoende groote w

$$|I_3| \leq \frac{4}{\kappa} w^{-\kappa} o(w^{\kappa}) = o(\lg w)^{\kappa}.$$

Hiermee is dus de stelling ook voor $0 < \kappa < 1$ bewezen.

§ 35. Bijzondere gevallen.

Nemen we $l_n = n$, dan is $\lambda_n = \lg n$; we kunnen dan de vorige stelling als volgt formuleeren:

Als een reeks sommeerbaar is met behulp van arithmetische gemiddelden, dan is ze het ook met behulp van logarithmische (zie pg. 31).

We zien dus, dat de sommatiemethode met behulp van logarithmische gemiddelden die met de arithmetische omvat. Evenzoo volgt uit de $(\lg n, \kappa)$ sommeerbaarheid de $(\lg \lg n, \kappa)$ sommeerbaarheid. We kunnen algemeen zeggen, dat als λ_n een logarithmische functie van n is, de sommatiemethode des te omvangrijker wordt, naarmate λ_n minder snel toeneemt.

§ 36. Als $\sum_1^{\infty} c_n$ sommeerbaar (λ, κ) is tot „som” C en $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > m > 1$, dan is $\sum_1^{\infty} c_n$ convergent met som C .

Bewijs: Uit § 32, pg. 44 volgt, dat het voldoende is, κ geheel te nemen.

Uit het gegeven volgt, dat

$$C_{\lambda}^{\kappa}(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega \leq \lambda_{n+1}} c_p (\omega - \lambda_p)^{\kappa} = C \omega^{\kappa} + o(\omega^{\kappa}). \quad (1)$$

We verdeelen het interval λ_n, λ_{n+1} in κ gelijke deelen l

en substitueeren voor ω in (1) opvolgend $\lambda_n, \lambda_n + l, \dots, \lambda_n + \kappa l$, waar $\kappa l = \lambda_{n+1} - \lambda_n$.

We krijgen zoodoende $\kappa + 1$ vergelijkingen. Van de $(\kappa + 1)$ getallen, die onder elkaar komen te staan, maken we het κ^e verschil op.

Nu is 't κ^e verschil van de rij

$c_p (\lambda_n - \lambda_p)^\kappa, c_p (\lambda_n + l - \lambda_p)^\kappa, \dots, c_p (\lambda_n + \kappa l - \lambda_p)^\kappa$ gelijk aan $\kappa! c_p l^\kappa$.

Verder is $o(\lambda_n + \mu l)^\kappa = o(\lambda_{n+1})^\kappa \quad (\mu \leq \kappa)$

en $o(\lambda_n + \mu_1 l)^\kappa - o(\lambda_n + \mu_2 l)^\kappa = o(\lambda_{n+1})^\kappa$. μ_1 en $\mu_2 < \kappa$.

Maken we dus het κ^e verschil van deze $(\kappa + 1)$ vergelijkingen op, dan krijgen we:

$$\kappa! l^\kappa \sum_1^n c_p = \kappa! l^\kappa C + o(\lambda_{n+1})^\kappa$$

$$\text{dus } \sum_1^n c_p = C + \frac{o(\lambda_{n+1})^\kappa}{\kappa! l^\kappa}$$

$$\text{Daar } \frac{o(\lambda_{n+1})^\kappa}{\kappa! l^\kappa} = o\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right)^\kappa = o\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} \left(1 - \frac{1}{m}\right)}\right)^\kappa = o(1),$$

nadert $\sum_1^n c_p \rightarrow C$, als $n \rightarrow \infty$.

Opm. Aan deze voorwaarde voldoet bijv. $\lambda_n = e^n$.

Als dus een reeks sommeerbaar (e^n, κ) is, dan is ze convergent en een niet-convergente reeks is dus ook niet-sommeerbaar (e^n, κ) .

§ 37. We leiden nu een theorema betreffende de (l, κ) sommeerbaarheid af.

Als $\sum_1^\infty a_n$ sommeerbaar (l, κ) is, dan is $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s} =$

$= \sum_1^\infty a_n l_n^{-s}$, sommeerbaar (l, κ) voor $|\arg s| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, tot

$$\frac{\Gamma(s + \kappa + 1)}{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s)} \int_1^\infty A_1^\kappa(t) t^{-s - \kappa - 1} dt, \text{ behalve voor } s = 0.$$

Bewijs: Als $c_n = a_n l_n^{-s}$ is, dan is:

$$C_1^x(w) = \sum_1^n c_p (w - l_p)^x = \sum_1^{n-1} A(p) \Delta \{ l_p^{-s} (w - l_p)^x \} + \\ + A(n) l_n^{-s} (w - l_n)^x = - \int_1^w A_1(t) \frac{d}{dt} \left\{ t^{-s} (w - t)^x \right\} dt. \quad (1)$$

(Zie hulpstelling 1, pg. 38).

We stellen x geheel en $\sum_1^\infty a_n$ sommeerbaar (l_x) tot 0; dan is $A_1^x(w) = o(w^x)$.

We gaan (1) x maal partieel integreeren. Alle geïntegreerde termen op één na zijn 0, wegens $l_1 \geq 1$.¹⁾

De overblijvende is

$$\frac{(-1)^x}{x!} A_1^x(w) x! w^{-s} = o(w^x), \text{ gelijkmatig voor } |\arg s| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Vermenigvuldigen we de integraal, die overblijft met w^{-x} , dan moet de limiet bepaald worden van:

$$w^{-x} \frac{(-1)^{x+1}}{x!} \int_1^w A_1^x(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^{x+1} \{ t^{-s} (w - t)^x \} dt, \quad (2)$$

als $w \rightarrow \infty$.

$$\text{Nu is } \left(\frac{d}{dt} \right)^{x+1} \{ t^{-s} (w - t)^x \} = \left(\frac{d}{dt} \right)^{x+1} \left\{ \sum_{\gamma=0}^x G_\gamma t^{-s+x-\gamma} w^\gamma \right\} = \\ = (-1)^{x+1} s(s+1) \dots (s+x) t^{-s-x-1} w^x + \\ + \sum_{\gamma=0}^{x-1} G'_\gamma (s-x+\gamma)(s-x+\gamma+1) \dots (s+\gamma) t^{-s-\gamma-1} w^\gamma. \quad (3)$$

Substitueeren we den eersten term van (3) in (2) dan komt er:

$$\frac{s(s+1) \dots (s+x)}{x!} \int_1^w A_1^x(t) t^{-s-x-1} dt.$$

De integraal bestaat voor $w \rightarrow \infty$ en $\sigma > 0$. De limiet is dan:

$$\frac{\Gamma(s+x+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(s)} \int_1^\infty A_1^x(t) t^{-s-x-1} dt. \quad (4)$$

¹⁾ Vergelijk ook pg. 46.

We moeten nu nog bewijzen, dat

$$I_1 = w^{-\kappa+\gamma} (s - \kappa + \gamma) \dots (s + \gamma) \int_1^w A_1^\kappa(t) t^{-\sigma-\gamma-1} dt \rightarrow 0,$$

als $w \rightarrow \infty$, voor $|\arg s| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ en $\gamma \leq \kappa - 1$.

We veronderstellen eerst $R(s) = \sigma \leq \kappa + 1$; dan is $|s|$ begrensd, wegens $|\arg s| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ en dus

$$|(s - \kappa + \gamma) \dots (s + \gamma)| < K.$$

Is nu w_1 zóó gekozen, dat

$|A_1^\kappa(t)| < \varepsilon (t - 1)^\kappa$ voor $t \geq w_1 > 1$ en heeft men verder

$|A_1^\kappa(t)| < M(t - 1)^\kappa$ voor $t \geq 1$, dan is:

$$\begin{aligned} |I_1| &< w^{-\kappa+\gamma} M K \int_1^{w_1} (t - 1)^\kappa t^{-\sigma-\gamma-1} dt + w^{-\kappa+\gamma} \varepsilon K \int_{w_1}^w t^{\kappa-\sigma-\gamma-1} dt \\ &< w^{-\kappa+\gamma} M K \int_1^{w_1} t^{\kappa-\gamma-1} dt + w^{-\kappa+\gamma} \varepsilon K \int_1^w t^{\kappa-\gamma-1} dt, \end{aligned}$$

omdat $(t - 1)^\kappa < t^\kappa$ en $t^{-\sigma} \leq 1$ voor $t \geq 1$.

$$\text{Dus } |I_1| < w^{-\kappa+\gamma} M K \frac{w_1^{\kappa-\gamma}}{\kappa-\gamma} + w^{-\kappa+\gamma} \varepsilon K \frac{w^{\kappa-\gamma}}{\kappa-\gamma}.$$

Voor w voldoende groot is dus $|I_1| < N\varepsilon$.

Stel nu $R(s) = \sigma > \kappa + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Dan is } |(s - \kappa + \gamma) \dots (s + \gamma)| &< |s + \gamma|^{\kappa+1} \leq \\ &\leq (\sigma + \gamma')^{\kappa+1} (\sec \alpha)^{\kappa+1}, \quad \left(\gamma' = \frac{\gamma}{\sec \alpha} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } |I_1| &< w^{-\kappa+\gamma} (\sigma + \gamma')^{\kappa+1} (\sec \alpha)^{\kappa+1} \times \\ &\times \left[\int_1^{w_1} M (t - 1)^\kappa t^{-\sigma-\gamma-1} dt + \varepsilon \int_1^w (t - 1)^\kappa t^{-\sigma-\gamma-1} dt \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Nu is } I_2 = (\sigma + \gamma')^{\kappa+1} \int_1^{w_1} (t - 1)^\kappa t^{-\sigma-\gamma-1} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sigma + \gamma')^{z+1}}{\sigma + \gamma} (t-1)^z t^{-\sigma-\gamma} \Big|_{t=w_1}^{t=1} + \\
&\dots + \frac{(\sigma + \gamma')^{z+1} z!}{(\sigma + \gamma) \dots (\sigma + \gamma - z + 1)} (t-1) t^{-\sigma-\gamma+z-1} \Big|_{t=w_1}^{t=1} + \\
&+ \frac{(\sigma + \gamma')^{z+1} z!}{(\sigma + \gamma) \dots (\sigma + \gamma - z + 1)} \int_1^{w_1} t^{-\sigma-\gamma+z-1} dt. \quad (5)
\end{aligned}$$

Er treden bij het partieel integreeren geen logarithmische termen op, omdat wegens $\sigma > z + 1$,

$$-\sigma - \gamma + z - 1 < -z - 1 - \gamma + z - 1 \leq -2.$$

De geïntegreerde termen zijn alle 0 voor de grens $t=1$, en voor de grens $t=w_1$ zijn ze kleiner dan $C w_1^{z-\gamma}$, (C constant) omdat

$$\begin{aligned}
&\frac{(\sigma + \gamma')^{z+1}}{(\sigma + \gamma) \dots (\sigma + \gamma - \nu)} (w_1 - 1)^{z-\nu} w_1^{-\sigma-\gamma+\nu} \sim \\
&\sim \sigma^{z-\nu} w_1^{z-\nu-\sigma-\gamma+\nu} < C_\nu w_1^{z-\gamma}
\end{aligned}$$

voor w_1 voldoende groot en $\sigma^{z-\nu} w_1^{-\sigma} < C_\nu < C$ voor $\sigma > 0$
 $(0 \leq \nu \leq z-1).$

De integraal van (5) wordt:

$$\frac{(\sigma + \gamma')^{z+1} z!}{(\sigma + \gamma) \dots (\sigma + \gamma - z)} (1 - w_1^{-\sigma-\gamma+z}).$$

Daar $\frac{(\sigma + \gamma')^{z+1}}{(\sigma + \gamma) \dots (\sigma + \gamma - z)} \sim 1$ is en geen enkele factor van den noemer nul is, voor $\sigma > z + 1$, is dus ook deze integraal kleiner dan een bepaalde constante D . Dus $I_2 < L w_1^{z-\gamma}$. L constant.

Hetzelfde kan voor de grens $t=w$ worden aangetoond.

Ten slotte is dus:

$$\begin{aligned}
|I_1| &< w^{-z+\gamma} (\sec \alpha)^{z+1} \{ M L w_1^{z-\gamma} + \varepsilon L' w^{z-\gamma} \} = \\
&= (\sec \alpha)^{z+1} \left\{ M L \left(\frac{w_1}{w} \right)^{z-\gamma} + \varepsilon L' \right\} < N \varepsilon
\end{aligned}$$

voor w voldoende groot.

Stel nu $0 < \alpha < 1$ en $A = 0$. Dus $A_1^\alpha(w) = o(w^\alpha)$.

We gaan weer uit van den vorm (1):

$$C_1^\alpha(w) = - \int_1^w A_1(t) \frac{d}{dt} \{ t^{-s} (w-t)^\alpha \} dt. \quad (1)$$

Nu is $t^{-s} = w^{-s} + (t^{-s} - w^{-s})$, dus:

$$\begin{aligned} w^{-\alpha} C_1^\alpha(w) &= w^{-\alpha} \int_1^w A_1(t) w^{-s} (w-t)^{\alpha-1} dt + \\ &\quad - w^{-\alpha} \int_1^w A_1(t) \frac{d}{dt} \{ (t^{-s} - w^{-s}) (w-t)^\alpha \} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

De eerste term van (6) is

$$w^{-\alpha-s} A_1^\alpha(w) = o(1), \text{ gelijkmatig voor } |\arg s| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Voor den 2^{en} term kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} &- w^{-\alpha} A_1^1(t) \frac{d}{dt} \{ (t^{-s} - w^{-s}) (w-t)^\alpha \} \Big|_{t=1}^{t=w} + \\ &\quad + w^{-\alpha} \int_1^w A_1^1(t) \frac{d^2}{dt^2} \{ (t^{-s} - w^{-s}) (w-t)^\alpha \} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

De geïntegreerde term is 0, omdat $A_1^1(1) = 0$ en

$$\lim_{t \rightarrow w} (t^{-s} - w^{-s}) (w-t)^{\alpha-1} = \lim_{t \rightarrow w} \frac{t^{-s} - w^{-s}}{w-t} (w-t)^\alpha = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } \frac{d^2}{dt^2} \{ (t^{-s} - w^{-s}) (w-t)^\alpha \} &= s(s+1) t^{-s-2} (w-t)^\alpha + \\ &+ 2\alpha s t^{-s-1} (w-t)^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1) (t^{-s} - w^{-s}) (w-t)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

De 2^o term van (7) splitst zich dus in 3 integralen I_1 , I_2 en I_3 .

$$I_1 = s(s+1) w^{-\alpha} \int_1^w A_1^1(t) t^{-s-2} (w-t)^\alpha dt. \quad (8)$$

Daar $A_1^1(t) = o(t)$, wegens $0 < z < 1$ (§ 32, pg. 44), convergeert de integraal

$$I(w) = \int_1^w A_1^1(u) u^{-s-2} du, \text{ tot een limiet } I, \text{ als } w \rightarrow \infty.$$

Dus deze integraal is zeker $(l\ z)$ sommeerbaar tot dezelfde som, d. w. z.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} w^{-z} z \int_1^w I(t) (w-t)^{z-1} dt = I$$

$$\text{of } \lim_{w \rightarrow \infty} w^{-z} z \int_1^w (w-t)^{z-1} dt \int_1^t A_1^1(u) u^{-s-2} du = I$$

Door omkeering van de integratievolgorde vinden we:

$$I = \lim_{w \rightarrow \infty} w^{-z} \int_1^w A_1^1(u) u^{-s-2} (w-u)^z du.$$

Hieruit volgt, dat de limiet van (8) voor $w \rightarrow \infty$ gelijk is aan

$$I' = s(s+1) \int_1^\infty A_1^1(t) t^{-s-2} dt.$$

Volgens hulpstelling 5, pg. 40 is nu

$$A_1^1(t) = A_1^{z+(1-z)}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(z+1)\Gamma(1-z)} \int_1^t A_1^z(u) (t-u)^{-z} du.$$

Substitueeren we dit, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} I' &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(z+1)\Gamma(1-z)} s(s+1) \int_1^\infty t^{-s-2} dt \int_1^t A_1^z(u) (t-u)^{-z} du = \\ &= \frac{s(s+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(1-z)} \int_1^\infty A_1^z(u) du \int_u^\infty t^{-s-2} (t-u)^{-z} dt. \end{aligned}$$

Na substitutie van $u = vt$, (v is de nieuwe veranderlijke), vinden we, dat:

$$\int_u^\infty t^{-s-2} (t-u)^{-z} dt = u^{-s-z-1} \frac{\Gamma(z+s+1)\Gamma(1-z)}{\Gamma(s+2)}.$$

Dus:

$$\begin{aligned} I' &= \frac{s(s+1)\Gamma(z+s+1)}{\Gamma(1+z)\Gamma(s+2)} \int_1^\infty A_1^z(u) u^{-s-z-1} du = \\ &= \frac{\Gamma(z+s+1)}{\Gamma(1+z)\Gamma(s)} \int_1^\infty A_1^z(u) u^{-s-z-1} du. \end{aligned}$$

Nu moet nog bewezen worden, dat I_2 en I_3 tot 0 naderen, als $w \rightarrow \infty$.

$$I_2 = 2 w^{-z} z s \int_1^w A_1^1(t) t^{-s-1} (w-t)^{z-1} dt.$$

Kies bij gegeven $\varepsilon > 0$, w_1 zóó, dat $|A_1^1(t)| < \varepsilon t$ voor $t \geq w_1$.

Verder is $|A_1^1(t)| \leq M(t-1)$ voor $t \geq 1$.

Dan is:

$$\begin{aligned} |I_2| \leq 2 w^{-z} z s \sec \alpha \left\{ \int_1^{w_1} M(t-1) t^{-\sigma-1} (w-t)^{z-1} dt + \right. \\ \left. + \varepsilon \int_{w_1}^w t^{-\sigma} (w-t)^{z-1} dt \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I_2| \leq 2 w^{-z} z \sec \alpha \left\{ (w-w_1)^{z-1} \sigma \int_1^{w_1} M(t-1) t^{-\sigma-1} dt + \right. \\ \left. + \varepsilon K \int_{w_1}^w (w-t)^{z-1} dt \right\}, \end{aligned}$$

omdat $\sigma t^{-\sigma} < K$ voor $t \geq w_1$, $\sigma > 0$ en $z-1 < 0$ is.

$$\begin{aligned} \text{Nu is } \sigma \int_1^{w_1} (t-1) t^{-\sigma-1} dt &= -(w_1-1) w_1^{-\sigma} + \\ &+ \int_1^{w_1} t^{-\sigma} dt < (w_1-1) w^{-\sigma} + w_1 - 1 < 2 w_1. \end{aligned}$$

$$\text{Dus } |I_2| < 4 z \sec \alpha M \left(1 - \frac{w_1}{w}\right)^{z-1} \frac{w_1}{w} + 2 \varepsilon K w^{-z} \sec \alpha (w-w_1)^z.$$

Voor w voldoende groot, is $|I_2| < N \varepsilon$.

Ten slotte $I_3 = z(z-1)w^{-z} \int_1^w A_1^1(t) (t^{-s} - w^{-s}) (w-t)^{z-2} dt$.

Nu is volgens hulpstelling 2, pg. 38:

$$|t^{-s} - w^{-s}| = |e^{-s \lg t} - e^{-s \lg w}| \leq \sec \alpha |e^{-\sigma \lg t} - e^{-\sigma \lg w}| = \\ = \sec \alpha (t^{-\sigma} - w^{-\sigma}), \text{ dus}$$

$$|I_3| \leq z(1-z)w^{-z} \sec \alpha \cdot M \int_1^{w_1} (t-1)(t^{-\sigma} - w^{-\sigma})(w-t)^{z-2} dt + \\ + z(1-z)w^{-z} \sec \alpha \cdot \varepsilon \int_{w_1}^w t \frac{t^{-\sigma} - w^{-\sigma}}{w-t} (w-t)^{z-1} dt.$$

Nu is $t^{-\sigma} - w^{-\sigma} < 1$, voor $t \leq w_1$ en $\sigma > 0$ en

$\frac{t^{-\sigma} - w^{-\sigma}}{w-t}$ is een monotoon afnemende functie van t ,

waarvan de limiet voor $t \rightarrow w$ gelijk is aan $\sigma w^{-\sigma-1}$, want de teller van de afgeleide naar t is gelijk aan

$-\sigma(w-t)t^{-\sigma-1} + t^{-\sigma} - w^{-\sigma}$. Deze is < 0 , want uit $-\sigma(w-t)t^{-\sigma-1} + t^{-\sigma} - w^{-\sigma} < 0$, volgt

$\sigma + 1 < \sigma \frac{w}{t} + \left(\frac{w}{t}\right)^{-\sigma}$. Als we $\frac{w}{t} = k$ stellen ($k \geq 1$), dan

moeten we dus bewijzen, dat $(k-1)\sigma > 1 - k^{-\sigma}$ is.

Dit volgt uit: $(k-1)\sigma > \sigma \lg k > 1 - e^{-\sigma \lg k} = 1 - k^{-\sigma}$.

$$\text{Dus: } |I_3| < z(1-z)w^{-z} \sec \alpha \left\{ M \int_1^{w_1} (t-1)(w-t)^{z-2} dt + \right. \\ \left. + \varepsilon \frac{1 - w^{-\sigma}}{w-1} \int_{w_1}^w t (w-t)^{z-1} dt \right\}.$$

$$|I_3| < M' w^{-z} \left\{ (w-w_1)^{z-2} \frac{w_1^2}{2} + \varepsilon \frac{1 - w^{-\sigma}}{w-1} \frac{w(w-w_1)^z}{z} \right\},$$

$$\text{dus } |I_3| < \frac{M'}{2} \left(1 - \frac{w_1}{w}\right)^{z-2} \left(\frac{w_1}{w}\right)^2 + \frac{M' \varepsilon}{z} \left(1 - \frac{w_1}{w}\right)^z \frac{w}{w-1}.$$

Als $w \rightarrow \infty$, dan $\frac{w_1}{w} \rightarrow 0$, waaruit volgt, dat $|I_3| < N' \varepsilon$ voor $\sigma > 0$.

Is $\sum_1^\infty a_n$ sommeerbaar $(l z)$ tot A en $A \neq 0$, dan kunnen we de reeks

$$-A \cdot 1^{-s} + a_1 l_1^{-s} + \dots + a_n l_n^{-s} + \dots \text{ beschouwen.}$$

$-A, a_1, \dots$ is sommeerbaar $(l z)$ tot 0, dus de reeks $-A \cdot 1^{-s} + a_1 l_1^{-s} + \dots$ is sommeerbaar $(l z)$ tot:

$$\frac{\Gamma(s+z+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(s)} \int_1^\infty A_1^{\prime z}(t) t^{-s-z-1} dt,$$

$$\text{waar } A_1^{\prime z}(t) = -A(t-1)^z + \sum_{\substack{1 \\ l_n < t \leq l_{n+1}}}^n a_p (t-l_p)^z = -A(t-1)^z + A_1^{\prime z}(t).$$

Verder is gemakkelijk in te zien, dat de reeks $A, 0, 0, \dots$ sommeerbaar $(l z)$ is tot „som” A en dat de som kan worden voorgesteld door:

$$\frac{\Gamma(s+z+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(s)} \int_1^\infty A(t-1)^z t^{-s-z-1} dt, \text{ mits } s \neq 0, \text{ zooals}$$

uit de substitutie $t = \frac{1}{u}$ blijkt.

Tellen we de 2 reeksen bij elkaar op dan vinden we, dat $\sum_1^\infty a_n l_n^{-s}$ sommeerbaar $(l z)$ is tot:

$$\frac{\Gamma(s+z+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(s)} \int_1^\infty A_1^{\prime z}(t) t^{-s-z-1} dt, \text{ gelijkmatig voor}$$

$$|\arg s| \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ en } s \neq 0.$$

Op dezelfde wijze kan aangetoond worden, dat als $\sum_1^\infty a_n l_n^{-s}$ sommeerbaar $(l z)$ is voor $\sigma = \beta$, de reeks gelijkmatig sommeerbaar is tot:

$$\frac{\Gamma(z+1+s-\beta)}{\Gamma(z+1)\Gamma(s-\beta)} \int_1^\infty A_1^{\prime z}(t) t^{-s+\beta-z-1} dt,$$

voor $\arg |s - \beta| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ en met $A_1^z(t) = \sum_{l_m < t \leq l_{m+1}} a_n l_n^{-\beta} (t - l_n)^z$.

§ 38. Als $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ sommeerbaar of eindig ($l z$) is voor $s = \beta$, dan is $|f(s)| = o |t|^{z+1}$, gelijkmatig voor $\sigma \geq \beta + \varepsilon > \beta$.
 ε vast.

Bewijs: We mogen $\beta = 0$ veronderstellen; dan volgt uit § 37, pg. 51, dat

$$f(s) = \frac{\Gamma(s+z+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(s)} \int_1^\infty A_1^z(t) t^{-s-z-1} dt$$

voor $\sigma \geq \varepsilon$ en gelijkmatig voor $|\arg s| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Daar $\sum_1^\infty a_n$ sommeerbaar of eindig ($l z$) is, is $|A_1^z(t)| < M t^z$, voor $t \geq 1$.

Kies ν zóó, dat $\int_\nu^\infty t^{-\sigma-1} dt < \delta$ voor $\sigma \geq \varepsilon$, en splits

$f(s)$ in twee integralen I_1 en I_2 , resp. met grenzen 1 en ν , ν en ∞ .

$$I_1 = -\frac{\Gamma(s+z)}{\Gamma(z+1)\Gamma(s)} A_1^z(\nu) \nu^{-s-z} + \frac{\Gamma(s+z)}{\Gamma(z+1)\Gamma(s)} \int_1^\nu t^{-s-z} \frac{d}{dt} A_1^z(t) dt.$$

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq O |t|^z |A_1^z(\nu)| \nu^{-s-z} + O |t|^z \int_1^\nu t^{-s-z} \left| \frac{d}{dt} A_1^z(t) \right| dt = \\ &= H(\nu) O |t|^z = o |t|^{z+1}. \end{aligned}$$

Eveneens:

$$|I_2| \leq O |t|^{z+1} \int_\nu^\infty M t^{-\sigma-1} dt = \delta O |t|^{z+1} = o |t|^{z+1}.$$

§ 39. *Hulpstelling.* Als $c > 0$, $z > 0$, dan is:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} v^s ds &= \left(1 - \frac{1}{v}\right)^z, \text{ als } v > 1 \\ &= 0, \text{ als } v < 1. \end{aligned}$$

Bewijs: We stellen: $(1-x)^z = \sum_{r=0}^{\infty} B_r^z x^r$.

Deze reeks convergeert *gelijmatig* op het segment $0-1$ wegens $z > 0$.

We mogen deze reeks term voor term integreeren, dus is:

$$\frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^z dx = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^1 B_r^z x^{r+s-1} dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r^z}{s+r} \quad (\sigma > 0)$$

Nu is
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{v^s}{s+r} ds = v^{-r}, \text{ als } v > 1.$$

Beschouw den rechthoek gevormd door de verbindingslijnen van de punten

$$A(c-iR); B(c+iR); C(-R+iR) \text{ en } D(-R-iR). \quad (R > 2r)$$

De functie heeft 1 pool, nml. $s = -r$. Het residu is v^{-r} .

De modulus van de integraal langs BC is kleiner dan:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^c \frac{v^{\sigma}}{\sqrt{(\sigma+r)^2 + R^2}} d\sigma \right| \leq \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^c \frac{v^{\sigma}}{R} d\sigma \right| \leq \frac{v^c}{2\pi R \lg v} < \varepsilon \text{ voor } R \text{ voldoende groot.}$$

Evenzoo is:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-R+iR}^{-R-iR} \frac{v^s}{s+r} ds \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{v^{-R}}{\sqrt{(r-R)^2 + t^2}} dt < < \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{v^{-R}}{\frac{1}{2}R} dt = \frac{2v^{-R}}{\pi} < \varepsilon, \text{ voor } R \text{ voldoende groot.}$$

Ook de integraal langs $DA \rightarrow 0$, als $R \rightarrow \infty$, zoodat dus bij de limiet overblijft:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{v^s}{s+r} ds = v^{-r}.$$

Is $v < 1$, dan is $\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{v^s}{s+r} ds = 0$; dit kunnen we

op ongeveer dezelfde wijze inzien door te nemen den rechthoek met hoekpunten: $A(c - iR)$; $B(c + iR)$; $C(R + iR)$ en $D(-R - iR)$. De functie is holomorf binnen dezen rechthoek, de integraal langs den contour genomen, is dus 0, en wegens $v < 1$, nadert ze langs BC , CD en DA tot 0.

Nu is:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} v^s ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r^z}{s+r} v^s ds.$$

$$\text{Daar } \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r^z}{s+r} = \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} = O|t|^{-z-1}, \quad z > 0 \text{ en}$$

langs den integratieweg $|v^s| = v^c$, mogen de integratie en sommatie verwisseld worden, dus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} v^s ds &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=0}^{\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{B_r^z}{s+r} v^s = \sum_{r=0}^{\infty} B_r^z v^{-r} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{v}\right)^z, \text{ als } v > 1 \\ &= 0, \text{ als } v < 1. \end{aligned}$$

§ 40. Als $\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}$ sommeerbaar ($l z$), is tot $f(s)$ voor $s = \beta$, en $c > 0$, $c > \beta$, dan is

$$w^{-z} \sum_{\substack{1 \\ l_m < w < l_{m+1}}}^m a_n (w - l_n)^z = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} w^s ds.$$

Bewijs: Onder $\left(\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}\right)_{(l z)} = f(s)$ zullen we verstaan, dat

$$\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s} \text{ sommeerbaar } (l z) \text{ is tot } f(s).$$

$$\text{Dus } w \left(\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}\right)_{(l z)} = w^s f(s) \text{ en } w^s \left(\sum_1^m a_n l_n^{-s}\right)_{(l z)} = w^s \sum_1^m a_n l_n^{-s}.$$

Volgens § 29, pg. 35, is nu ook:

$$w^s \left(\sum_{m+1}^{\infty} a_n l_n^{-s}\right)_{(p z)} = w^s \left\{ f(s) - \sum_1^m a_n l_n^{-s} \right\} = g(s),$$

met $p_n = l_{m+n}$.

Volgens § 37, pg. 59 is:

$$w^s \left(\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s} \right)_{(1, \kappa)} = w^s \frac{\Gamma(\kappa + s - \beta + 1)}{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s - \beta)} \int_1^{\infty} A_1'^{\kappa}(u) u^{-s + \beta - \kappa - 1} du$$

en eveneens

$$w^s \left(\sum_1^m a_n l_n^{-s} \right)_{(1, \kappa)} = w^s \frac{\Gamma(\kappa + s - \beta + 1)}{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s - \beta)} \int_1^{\infty} \alpha_1'^{\kappa}(u) u^{-s + \beta - \kappa - 1} du,$$

waar $\alpha_1'^{\kappa}(u) \equiv A_1'^{\kappa}(u)$ voor $1 \leq u \leq l_{m+1}$.

$$\text{Dus } g(s) = w^s \frac{\Gamma(\kappa + s - \beta + 1)}{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s - \beta)} \int_{l_{m+1}}^{\infty} B_1^{\kappa}(u) u^{-s + \beta - \kappa - 1} du,$$

alles voor $\arg |s - \beta| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$

$$\text{en } B_1(u) = A_1'^{\kappa}(u) - \alpha_1'^{\kappa}(u) = \sum_{m+1}^r a_n l_n^{-\beta} (u - l_n)^{\kappa}.$$

We zullen nu aantonen, dat

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s) \frac{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s)}{\Gamma(\kappa + 1 + s)} ds = 0.$$

We kiezen daartoe als integratieweg de zijden van den rechthoek $ABCD$ met hoekpunten $A(c - iR)$; $B(c + iR)$, $C(R + iR)$, $D(R - iR)$.

De integraal over dezen rechthoek is 0, omdat de functie holomorf is, binnen en op den contour.

We schatten eerst de integraal langs CD .

$$\text{Nu is } B_1^{\kappa}(u) = (l_{m+1})^{-\beta} \sum_{m+1}^r a_n \left(\frac{l_n}{l_{m+1}} \right)^{-\beta} (u - l_n)^{\kappa}.$$

Daar $\sum_{m+1}^{\infty} a_n \left(\frac{l_n}{l_{m+1}} \right)^{-\beta}$ sommeerbaar ($q. \kappa$) is (zie pg. 36), is

dus

$$B_1^{\kappa}(u) = (l_{m+1})^{-\beta} O(u^{\kappa}), \text{ dus } |B_1^{\kappa}(u)| \leq (l_{m+1})^{-\beta} M u^{\kappa}.$$

Verder is $\left| \frac{\Gamma(z+s-\beta+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(s-\beta)} \right| = O|t|^{z+1}$ en $\left| \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} \right| = O|t|^{-z-1}$.

Dus:

$$|g(R+it)| \leq w^R O(R)^{z+1} \int_{l_{m+1}}^{\infty} (l_{m+1})^{-\beta} M u^z u^{-R+\beta-z-1} du = \\ = \left(\frac{w}{l_{m+1}} \right)^R O(R)^z.$$

$$\text{dus } \left| \int_{R-iR}^{R+iR} g(s) \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} ds \right| \leq \left(\frac{w}{l_{m+1}} \right)^R O(R)^z \times O(R)^{-z-1}, \text{ 2 } R < \varepsilon,$$

voor R voldoende groot, wegens $w < l_{m+1}$.

We schatten nu de integraal langs BC .

$$g(s) = w^s \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n^{-s} \right)_{(p, z)} = \left(\frac{w}{l_{m+1}} \right)^s \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{l_n}{l_{m+1}} \right)^{-s} \right\}_{(q, z)} = \\ = \left(\frac{w}{l_{m+1}} \right)^s h(s), \text{ met } q_n = p_n - p_1.$$

(Zie § 29, pg. 36).

Volgens § 38, pg. 60 is $h(s) = o|t|^{z+1}$ gelijkmatig voor $\sigma \geq c$; verder is $\frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} = O|t|^{-z-1}$.

$$\text{Hieruit volgt: } \left| \int_B^C g(s) \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} ds \right| < \\ < \varepsilon \int_c^R \left(\frac{w}{l_{m+1}} \right)^{\sigma} R^{z+1} M R^{-z-1} d\sigma < K\varepsilon, \text{ wegens } w < l_{m+1}.$$

Evenzoo nadert de integraal langs DA tot 0, zoodat we ten slotte vinden:

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s) \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} ds = 0, \\ \text{of } \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} w^s \left\{ f(s) - \sum_1^m a_n l_n^{-s} \right\} \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} ds = 0.$$

Uit § 39, pg. 60 volgt dus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} w^s ds &= \frac{1}{2\pi i} \sum_1^m \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} \left(\frac{w}{l_n}\right)^s ds = \\ &= \sum_1^m a_n \left(1 - \frac{l_n}{w}\right)^z = w^{-z} \sum_1^m a_n (w - l_n)^z. \end{aligned}$$

§ 41. *Uitbreiding.*

Op analoge wijze kunnen we afleiden:

$$w^{-z} \sum_1^m a_n l_n^{-s_0} (w - l_n)^z = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s-s_0)}{\Gamma(z+1+s-s_0)} w^{s-s_0} ds,$$

$l_m < w < l_{m+1}$

mits $c > \sigma_0$ en $c > \beta$ is.

Het is mogelijk, dat de functie $f(s)$, die holomorf is voor $\sigma > \beta$, over de lijn $\sigma = \beta$ analytisch kan worden voortgezet, zoodat dus $f(s)$ holomorf is voor $\sigma > \gamma$, waar $\gamma < \beta$ is. Voldoet $f(s)$ bovendien nog aan de voorwaarde, dat $f(s) = o|t|^{z+1}$ gelijkmatig voor $\sigma \geq \gamma + \varepsilon > \gamma$, (1), dan is ook

$$w^{-z} \sum_1^m a_n (w - l_n)^z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} f(s) \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s)}{\Gamma(z+1+s)} w^s ds,$$

$l_m < w < l_{m+1}$

$\delta > \gamma,$

want passen we het theorema van CAUCHY toe op den rechtehoek $ABCD$ gevormd door de hoekpp. $A(\delta - iR)$, $B(\delta + iR)$, $C(c + iR)$, $D(c - iR)$, dan volgt uit de onderstelling (1), dat de integralen langs BC en DA tot 0 naderen, als $R \rightarrow \infty$, zoodat dus

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} = \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}$$

Eveneens is dan ook:

$$w^{-z} \sum_1^m a_n l_n^{-s_0} (w - l_n)^z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} f(s) \frac{\Gamma(z+1)\Gamma(s-s_0)}{\Gamma(z+1+s-s_0)} w^{s-s_0} ds,$$

$l_m < w < l_{m+1}$

mits $\delta > \sigma_0$ en $\delta > \gamma$.

§ 42. We veronderstellen nu, dat de reeks $\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}$ sommeerbaar $(l z)$ is voor $\sigma > \beta$ voor voldoende groote waarden van z , zoodat dus de „som”functie $f(s)$ holomorf is voor $\sigma > \beta$. We kunnen nu de vraag stellen aan welke voorwaarden de functie $f(s)$, indien deze over de lijn $\sigma = \beta$ een analytische voortzetting bezit, nog moet voldoen, opdat de reeks $\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}$ ook voor waarden van $\sigma < \beta$ nog sommeerbaar zij. Bij dat onderzoek worden dus, in tegenstelling met het voorafgaande, eigenschappen van de reeks afgeleid uit die van de „som”functie.

§ 43. Als $\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}$ sommeerbaar $(l k)$ is voor $\sigma > \beta$ en $f(s)$ is holomorf voor $\sigma > \gamma$, waar $\gamma < \beta$, (dus $f(s)$ is voortzetbaar over de lijn $\sigma = \beta$), en $f(s) = O|t|^{z'}$ gelijkmatig voor $\sigma \geq \gamma + \varepsilon > \gamma$, $z' > 0$, dan is $\sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s}$ sommeerbaar $(l z)$ voor $\sigma > \gamma$, mits $z > z'$ is.

Bewijs: Uit het gegeven volgt, dat we p (geheel) zóó groot kunnen kiezen, dat de reeks $(l \cdot z + p)$ sommeerbaar is voor $\sigma > \beta$ en $z + p \geq k$; daar $f(s) = O|t|^{z'}$, is dus zeker $f(s) = o|t|^{z+p}$ voor $\sigma \geq \gamma + \varepsilon$. $f(s)$ voldoet dus aan alle in § 41 genoemde voorwaarden, zoodat:

$$w^{-z-p} \sum_1^m a_n l_n^{-s_0} (w - l_n)^{z+p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} f(s) \frac{\Gamma(z+p+1)\Gamma(s-s_0)}{\Gamma(z+p+1+s-s_0)} w^{s-s_0} ds,$$

$$l_m < w < l_{m+1}$$

mits $\delta > \sigma_0 > \gamma$.

We kunnen dit ook als volgt schrijven:

$$\sum_1^m a_n l_n^{-s_0} (w - l_n)^{z+p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} f(s) \frac{\Gamma(z+p+1)\Gamma(s-s_0)}{\Gamma(z+p+1+s-s_0)} w^{z+p+s-s_0} ds.$$

We gaan nu beide leden naar w differentieeren. De differentiatie onder het integraalteeken is geoorloofd, omdat de integraal gelijkmatig en absoluut convergeert voor alle $p \geq 0$;

immers $f(s) = O|t|^{z'}$ en $\frac{\Gamma(z+p+1)\Gamma(s-s_0)}{\Gamma(z+p+1+s-s_0)} = O|t|^{-z-p-1}$,

$$\text{dus } f(s) \frac{\Gamma(\kappa + p + 1) \Gamma(s - s_0)}{\Gamma(\kappa + p + 1 + s - s_0)} = O|t|^{\kappa' - \kappa - p - 1} = O|t|^{-1 - \kappa}. \\ (\alpha > 0)$$

Voeren we de differentiatie uit, dan komt er:

$$(\kappa + p) \sum_1^m a_n l_n^{-s_0} (w - l_n)^{\kappa + p - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} f(s) \frac{\Gamma(\kappa + p + 1) \Gamma(s - s_0)}{\Gamma(\kappa + p + 1 + s - s_0)} \times \\ \times (\kappa + p + s - s_0) w^{\kappa + p + s - s_0 - 1} ds \\ \text{of } \sum_1^m a_n l_n^{-s_0} (w - l_n)^{\kappa + p - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} f(s) \frac{\Gamma(\kappa + p) \Gamma(s - s_0)}{\Gamma(\kappa + p + s - s_0)} \times \\ \times w^{\kappa + p - 1 + s - s_0} ds.$$

Deze formule heeft denzelfden vorm als bovenstaande, alleen is p vervangen door $p - 1$.

Na p differentiaties (die alle geoorloofd zijn) vinden we tenslotte:

$$w^{-\kappa} \sum_1^m a_n l_n^{-s_0} (w - l_n)^{\kappa} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} f(s) \frac{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s - s_0)}{\Gamma(\kappa + 1 + s - s_0)} w^{s - s_0} ds.$$

Kies nu $\eta > \gamma$ zóó, dat $\sigma_0 - 1 < \eta < \sigma_0 < \delta$ en integreer $\frac{1}{2\pi i} \int f(s) \frac{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s - s_0)}{\Gamma(\kappa + 1 + s - s_0)} w^{s - s_0} ds$ langs den rechthoek

$ABCD$ met hoekpunten $A(\eta - iR)$, $B(\eta + iR)$, $C(\delta + iR)$ en $D(\delta - iR)$.

De integrand heeft binnen den contour 1 pool, namelijk $s = s_0$. Het residu is daar:

$$\lim_{s=s_0} (s - s_0) f(s) \frac{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s - s_0)}{\Gamma(\kappa + 1 + s - s_0)} w^{s - s_0} = f(s_0).$$

Schatten we nu eerst weer de integraal langs BC .

$$\text{Daar } f(s) = O|t|^{\kappa'} \text{ en } \frac{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s - s_0)}{\Gamma(\kappa + 1 + s - s_0)} = O|t|^{-\kappa - 1},$$

$$\text{is } \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\eta + iR}^{\delta + iR} f(s) \frac{\Gamma(\kappa + 1) \Gamma(s - s_0)}{\Gamma(\kappa + 1 + s - s_0)} w^{s - s_0} ds \right| < \\ < M \int_{\eta}^{\delta} R^{\kappa' - \kappa - 1} w^{\sigma - \sigma_0} d\sigma < \varepsilon$$

voor R voldoende groot, wegens $\kappa' < \kappa$.

Hetzelfde geldt voor de integraal langs AD .

De modulus van de integraal langs AB is

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\eta-iR}^{\eta+iR} f(s) \frac{\Gamma(\kappa+1) \Gamma(s-s_0)}{\Gamma(\kappa+1+s-s_0)} w^{s-s_0} ds \right| < \\ w^{\eta-\sigma_0} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} f(\eta+it) \frac{\Gamma(\kappa+1) \Gamma(\eta+it-s_0)}{\Gamma(\kappa+1+\eta+it-s_0)} dt \right|.$$

Deze integraal bestaat, als $R \rightarrow \infty$, dus de modulus is kleiner dan $M_1 w^{\eta-\sigma_0}$.

We vinden dus

$$f(s_0) = \theta M_1 w^{\eta-\sigma_0} + 2\theta' \varepsilon + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} f(s) \frac{\Gamma(\kappa+1) \Gamma(s-s_0)}{\Gamma(\kappa+1+s-s_0)} w^{s-s_0} ds.$$

$$\begin{aligned} |\theta| &< 1. \\ |\theta'| &< 1. \end{aligned}$$

$$f(s_0) = \theta M_1 w^{\eta-\sigma_0} + 2\theta' \varepsilon + w^{-\kappa} \sum_1^m a_n l_n^{-s_0} (w - l_n)^{\kappa}.$$

$$l_m < w < l_{m+1}$$

Daar $\eta < \sigma_0$, nadert $w^{\eta-\sigma_0} \rightarrow 0$, als $w \rightarrow \infty$, dus

$$\lim_{w \rightarrow \infty} w^{-\kappa} \sum_1^m a_n l_n^{-s_0} (w - l_n)^{\kappa} = f(s_0), \text{ d. w. z. } \sum_1^{\infty} a_n l_n^{-s_0}$$

is sommeerbaar (l_n) tot „som” $f(s_0)$.

§ 43. HET VERMENIGVULDIGEN VAN REEKSSEN.

Als gegeven zijn twee reeksen $\sum_0^{\infty} a_n$ en $\sum_0^{\infty} b_n$, dan kan men op verschillende manieren de productreeks $\sum_0^{\infty} c_n$ van deze twee reeksen definiëren. Men kan de reeksen $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ en $\sum_0^{\infty} b_n x^n$ formeel met elkaar vermenigvuldigen, (d. w. z. elken term van de eene reeks met elken term van de andere) en dan de coëfficiënt van x^n gelijk aan c_n stellen.

Bekend is, dat als de 3 reeksen convergeeren en $\sum_0^{\infty} a_n = A$; $\sum_0^{\infty} b_n = B$ en $\sum_0^{\infty} c_n = C$, $AB = C$ is, 't is namelijk gemak-

kelijk te bewijzen, dat de reeks $\sum_0^\infty c_n$ steeds C_1 sommeerbaar is tot AB (zie inleiding pag. 4); convergeert nu $\sum_0^\infty c_n$, dan zal de som eveneens voorgesteld worden door AB .

In plaats van uit te gaan van de reeksen $\sum_0^\infty a_n x^n$ en $\sum_0^\infty b_n x^n$ kan men ook de volgende reeksen opschrijven:

$$\sum_0^\infty a_m e^{-\lambda_m x}, \sum_0^\infty b_n e^{-\mu_n x}, (\lambda_{m+1} > \lambda_m, \mu_{m+1} > \mu_m,$$

$\left. \begin{matrix} \lambda_m \\ \mu_m \end{matrix} \right\} \rightarrow \infty, \text{ als } m \rightarrow \infty$), deze reeksen formeel met elkaar vermenigvuldigen, de termen $a_m b_n$ rangschikken naar de opklimmende grootte van $\lambda_m + \mu_n$, en deze reeks als productreeks definiëren. Men noemt deze dan het Dirichlet'sche product van de reeksen A en B van het type $(\lambda \mu)$.

§ 44. Als $\sum_1^\infty a_n$ en $\sum_1^\infty b_n$ absoluut convergeeren, dan zal ook de reeks $\sum_1^\infty c_n$ absoluut convergeeren; in dit geval toch is de volgorde van de termen $a_m b_n$ onverschillig.

Evenals bij de andere definitie van vermenigvuldiging geldt ook hier de stelling:

Als $\sum_1^\infty a_n = A$ absoluut convergeert en $\sum_1^\infty b_n$ convergeert, dan is $\sum_1^\infty c_n$ convergent en gelijk aan AB , waarbij de termen $a_m b_n$ zoo gerangschikt zijn, dat in de reeks $\sum c_n$, $a_m b_n$ na $a_{m'}, b_{n'}$ komt, als $\lambda_m + \mu_n > \lambda_{m'} + \mu_{n'}$ ($\lambda_m \rightarrow \infty$ en $\mu_n \rightarrow \infty$).

Bewijs: De termen, waarvoor $\lambda_m + \mu_n = \lambda_{m'} + \mu_{n'}$, nemen we bij elkaar en beschouwen we als één term. We zullen verder eerst $B=0$ stellen. We moeten dan bewijzen, dat de som van de reeks $\sum_1^\infty c_n = \sum a_m b_n = 0$ is.

Uit de absolute convergentie van $\sum_1^\infty a_n$ en $B=0$, volgt, dat bij gegeven $\varepsilon > 0$, p zóó bepaald kan worden, dat

$$\sum_{p+1}^{p+q} |a_n| < \varepsilon \text{ en } \left| \sum_0^{p+r} b_n \right| < \varepsilon \text{ voor } \begin{matrix} q=1, 2, \dots \\ r=0, 1, \dots \end{matrix}$$

We nemen nu van de reeks $\sum c_n$ ν termen $a_m b_n$ en stellen de som voor door C_ν ; ν kan zóó groot gekozen worden, dat in de som voorkomt de term $a_p b_p$; dan komen zeker voor de termen $a_{p_1} b_{p_2}$, als $p_1 < p$ en $p_2 < p$, omdat

$$\lambda_{p_1} + \mu_{p_2} < \lambda_p + \mu_p.$$

Nemen we in C_ν alle termen bij elkaar die de factor a_1 , de factor a_2 enz. gemeen hebben, dan kan C_ν worden voorgesteld door:

$$\begin{aligned} C_\nu = & a_1 (b_1 + b_2 + \dots + b_p + \dots + b_{\nu_1}) + \\ & + a_2 (b_1 + \dots + b_p + \dots + b_{\nu_2}) + \dots \\ & + a_p (b_1 + \dots + b_p + \dots + b_{\nu_p}) + \dots + a_M (b_1 + \dots + b_{\nu_M}). \end{aligned}$$

Wegens $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ is $\nu_1 \dots > \nu_2 > \dots > \nu_p > \dots \nu_M$ en $\nu_p \geq p$, terwijl verder $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_M = \nu$.

Dus:

$$|C_\nu| < \varepsilon \sum_1^p |a_n| + N \sum_{p+1}^M |a_n|, \text{ waar } N = \text{Max} \left| \sum_1^n b_n \right|; n = 1, 2, \dots$$

$$|C_\nu| < \varepsilon A + N\varepsilon = \varepsilon (N + A).$$

Als nu $p \rightarrow \infty$, dan nadert ook $\nu \rightarrow \infty$ en $C_\nu \rightarrow 0$.

Is $B \neq 0$, dan zal de som van de reeks $(b_1 - B) + b_2 + \dots = 0$ zijn, dus:

$$\begin{aligned} C_\nu' = & a_1 (b_1 + \dots + b_{\nu_1}) + \dots + a_M (b_1 + \dots + b_{\nu_M}) + \\ & - (a_1 + \dots + a_M) B \rightarrow 0 \end{aligned}$$

volgens 't zoeven bewezene,

zoodat $a_1 (b_1 + \dots + b_{\nu_1}) + \dots + a_M (b_1 + \dots + b_{\nu_M}) \rightarrow A B$,
als $\nu \rightarrow \infty$.

§ 45. We kunnen algemeen bewijzen: Als $\sum_0^\infty a_n$ sommeerbaar ($\lambda \alpha$) is tot A en $\sum_0^\infty b_n$ ($\mu \beta$) tot B , dan is $\sum_0^\infty c_p = a_m b_n$ sommeerbaar ($\nu \gamma$) tot C en $C = A B$, met $\gamma = \alpha + \beta + 1$ en waarbij de reeks ν_p bestaat uit de getallen $\lambda_m + \mu_n$ gerangschikt in toenemende grootte.

Bewijs:

$$\begin{aligned} A_\lambda^\alpha(\omega) = \sum_{\lambda_n < \omega \leq \lambda_{n+1}} a_n (\omega - \lambda_n)^\alpha, \quad B_\mu^\beta(\omega) = \sum_{\mu_n < \omega \leq \mu_{n+1}} b_n (\omega - \mu_n)^\beta \\ \text{en } C_\nu^\gamma(\omega) = \sum_{\nu_n < \omega \leq \nu_{n+1}} c_n (\omega - \nu_n)^\gamma. \end{aligned}$$

We weten, dat:

$$A_{\lambda}^{\alpha}(\omega) = \alpha \int_0^{\omega} A_{\lambda}(\tau) (\omega - \tau)^{\alpha-1} d\tau \approx A \omega^{\alpha} \text{ en}$$

$$B_{\mu}^{\beta}(\omega) = \beta \int_0^{\omega} B_{\mu}(\tau) (\omega - \tau)^{\beta-1} d\tau \approx B \omega^{\beta}, \text{ wegens } (\lambda \alpha),$$

resp. $(\mu \beta)$ sommeerbaarheid.

We zullen een analoge formule voor $C_{\nu}'(\omega)$ opstellen.

$$\text{Nu is } C_{\nu}'(\omega) = \sum_{\lambda_m + \mu_n < \omega} a_m b_n (\omega - \lambda_m - \mu_n)^{\gamma}.$$

$$\text{Beschouw de integraal } \int_0^{\omega} A_{\lambda}^{\alpha}(\tau) B_{\mu}^{\beta}(\omega - \tau) d\tau. \quad (1)$$

De term a_m komt in $A_{\lambda}^{\alpha}(\tau)$ voor, zoodra $\tau > \lambda_m$ en de term b_n in $B_{\mu}^{\beta}(\omega - \tau)$, zoodra $\omega - \tau > \mu_n$ of $\tau < \omega - \mu_n$.

In (1) komt de term $a_m b_n$ dus voor met den coëfficiënt

$$\int_{\lambda_m}^{\omega - \mu_n} (\tau - \lambda_m)^{\alpha} (\omega - \tau - \mu_n)^{\beta} d\tau. \quad (2)$$

Stellen we hierin $\tau - \lambda_m = (\omega - \lambda_m - \mu_n) u$,

$$\begin{aligned} \text{dan is } \omega - \tau - \mu_n &= \omega - \lambda_m - \mu_n - (\omega - \lambda_m - \mu_n) u = \\ &= (\omega - \lambda_m - \mu_n) (1 - u). \end{aligned}$$

De integraal (2) gaat dan over in:

$$(\omega - \lambda_m - \mu_n)^{\alpha + \beta + 1} \int_0^1 u^{\alpha} (1 - u)^{\beta} du = \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} (\omega - \lambda_m - \mu_n)^{\gamma}.$$

Hieruit zien we dat:

$$C_{\nu}'(\omega) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \int_0^{\omega} A_{\lambda}^{\alpha}(\tau) B_{\mu}^{\beta}(\omega - \tau) d\tau.$$

Uit hulpstelling 4, pg. 39, volgt nu direct, dat

$C_{\nu}'(\omega) \approx A B \omega^{\gamma}$, waarmee het gevraagde bewezen is.

Nemen we in 't bijzonder $\alpha = \beta = 0$, dan is $\gamma = 1$.

De productreeks is dan sommeerbaar $(\gamma, 1)$ tot AB en in 't geval, dat deze bovendien convergeert tot C , is $C = AB$.

§ 46. Als andere toepassing van het vermenigvuldigen van reeksen met toepassing van de Dirichlet'sche regel, geven we nu nog, eenigszins gewijzigd, de door LANDAU bewezen stelling: ¹⁾

Als gegeven zijn 4 getallen τ, ρ, τ' en ρ' met de voorwaarden $\tau \geq 0, \tau' \geq 0, \tau + \tau' > 0, \rho + \tau \geq \rho'$ en $\rho' + \tau' \geq \rho$

en de reeksen $\sum_1^\infty \frac{a_m}{m^\rho}$ en $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^{\rho'}}$ convergeeren, (1)

terwijl $\sum_1^\infty \frac{a_m}{m^{\rho+\tau}}$ en $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n^{\rho'+\tau'}}$ absoluut convergeeren, (2)

dan convergeert $\sum_1^\infty \frac{c_p}{p^s}$ voor $s \geq \frac{\rho\tau' + \rho'\tau + \tau\tau'}{\tau + \tau'}$, waarbij $c_p = \sum_{mn=p} a_m b_n$. Hier is dus $\lambda_m = \lg m, \mu_n = \lg n$.

Bewijs: We stellen $\frac{\rho\tau' + \rho'\tau + \tau\tau'}{\tau + \tau'} = \omega, \frac{\tau}{\tau + \tau'} = \eta$ en

$$\frac{\tau'}{\tau + \tau'} = \eta', \sum_1^x \frac{a_m}{m^\rho} = A_x \text{ en } \sum_1^\infty \frac{a_m}{m^\rho} = A.$$

Hieruit volgt, dat η en η' niet beide tegelijk 0 kunnen zijn, we mogen dus $\eta \neq 0$ veronderstellen. Bovendien is $\eta + \eta' = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Nu is } \sum_1^x \frac{|a_m|}{m^\omega} &= \sum_1^x \frac{|a_m|}{m^{\rho+\tau}} \cdot m^{\rho+\tau-\omega} \leq \\ &\leq x^{\rho+\tau-\omega} \sum_1^x \frac{|a_m|}{m^{\rho+\tau}} \leq \frac{M}{x^\omega - \rho - \tau}, \end{aligned} \quad (3)$$

wegens $\rho + \tau - \omega \geq 0$ en (2).

$$\text{Eveneens } \sum_1^x \frac{|b_n|}{n^\omega} \leq \frac{M}{x^\omega - \rho' - \tau'}. \quad (4)$$

Nu kan bij gegeven $\varepsilon > 0$, x zóó bepaald worden, dat $|A_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, voor $n \geq x$.

¹⁾ Rendiconti di Palermo vol. 24, 1907, pg. 111 en v.v.

Dan is:
$$\sum_{m=x+1}^{\infty} \frac{a_m}{m^{\omega}} = \sum_{m=x+1}^{\infty} \frac{a_m m^{-\rho}}{m^{\omega-\rho}} = \sum_{m=x+1}^{\infty} \frac{(A_m - A) - (A_{m-1} - A)}{m^{\omega-\rho}} =$$

$$= -\frac{A_x - A}{(x+1)^{\omega-\rho}} + (A_{x+1} - A) \left\{ \frac{1}{(x+1)^{\omega-\rho}} - \frac{1}{(x+2)^{\omega-\rho}} \right\} + \dots,$$

want $\omega - \rho = \frac{\tau(\rho' + \tau' - \rho)}{\tau + \tau'} \geq 0.$

Stellen we $\frac{a_m}{m^{\omega}} = \alpha_m$ en $\frac{b_n}{n^{\omega}} = \beta_n$, dan is dus:

$$\left| \sum_{m=x+1}^{\infty} \alpha_m \right| < \frac{\varepsilon}{x^{\omega-\rho}} \quad (5) \text{ en eveneens } \left| \sum_{n=x+1}^{\infty} \beta_n \right| < \frac{\varepsilon}{x^{\omega-\rho'}}. \quad (6)$$

$$\text{Nu is } \sum_1^q \frac{c_p}{p^{\nu}} = \sum_1^{[q^{\nu'}]} \alpha_m \sum_1^{\left[\frac{q}{m}\right]} \beta_n + \sum_{[q^{\nu'}+1]}^q \alpha_m \sum_1^{\left[\frac{q}{m}\right]} \beta_n, \quad (7)$$

waarbij de eerste term van het 2^e lid van (7) een verkorte

schrijfwijze is voor $\sum_{m=1}^{m=[q^{\nu'}]} \alpha_m (\beta_1 + \dots + \beta_n)$ met $n = \left[\frac{q}{m}\right]$.

We vergelijken nu (7) met den vorm:

$$\sum_1^{[q^{\nu'}]} \alpha_m \times \sum_1^{\infty} \beta_n + \sum_1^{\infty} \alpha_m \times \sum_1^{[q^{\nu}]} \beta_n - \sum_1^{[q^{\nu'}]} \alpha_m \times \sum_1^{[q^{\nu}]} \beta_n. \quad (8)$$

Deze vorm nadert tot $\sum_1^{\infty} \alpha_m \times \sum_1^{\infty} \beta_n$, als $q \rightarrow \infty$, voor $\nu' \geq 0$.

We trekken nu (8) van (7) af en bewijzen, dat het verschil tot 0 nadert, als $q \rightarrow \infty$. Dit verschil is:

$$\sum_1^{[q^{\nu'}]} \alpha_m \cdot \left\{ \sum_1^{\left[\frac{q}{m}\right]} \beta_n - \sum_1^{\infty} \beta_n \right\} + \sum_{[q^{\nu'}+1]}^q \alpha_m \cdot \sum_1^{\left[\frac{q}{m}\right]} \beta_n + \sum_1^{[q^{\nu'}]} \alpha_m \times \sum_1^{[q^{\nu}]} \beta_n - \sum_1^{\infty} \alpha_m \times \sum_1^{[q^{\nu}]} \beta_n. \quad (9)$$

Nu is $\sum_1^{[q^n]} \beta_n \cdot \sum_1^{[q/n]} \alpha_m = \sum_1^{[q^{n'}]} \alpha_m \times \sum_1^{[q^n]} \beta_n + \sum_{[q^{n'}+1]}^q \alpha_m \cdot \sum_1^{[q/m]} \beta_n$. (10)

We zien dit het gemakkelijkst in, met behulp van fig. 1.

Zij AB de kromme, met de vergelijking $mn = q$; voor het punt $P(m, n)$ is dus $mn < q$.

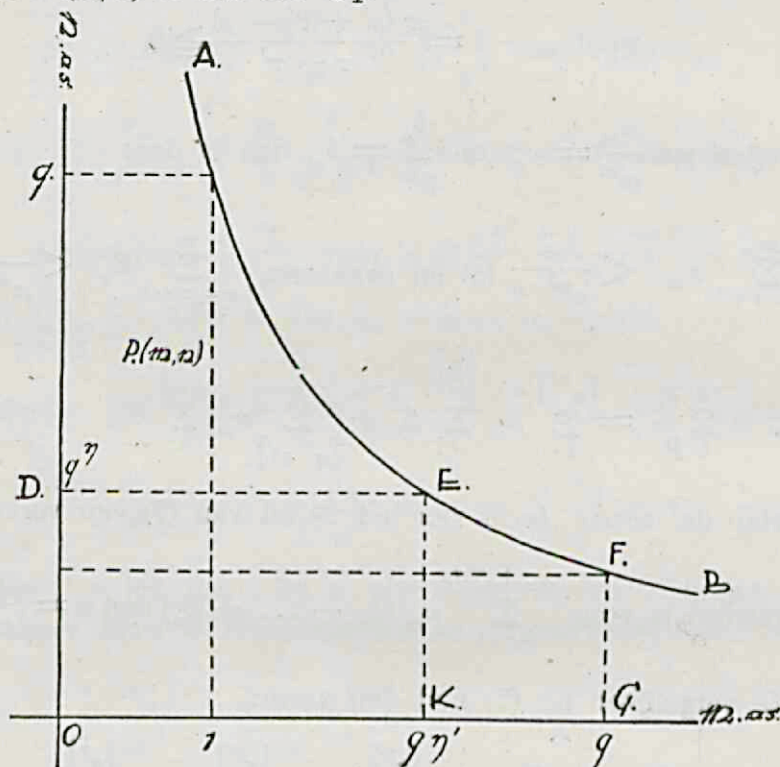


FIG. 1.

Nu is $\sum_1^{[q^n]} \beta_n \cdot \sum_1^{[q/n]} \alpha_m$, de som van alle $\alpha_m \beta_n$ waarvoor geldt, dat 't punt (m, n) binnen of op $ODEFGO$ ligt.

Dit gebied kan gesplitst worden in $ODEKO$ en $EFGKE$.

Het eerste gebied levert $\sum_1^{[q^{n'}]} \alpha_m \times \sum_1^{[q^n]} \beta_n$, het tweede

$\sum_{[q^{n'}+1]}^q \alpha_m \cdot \sum_1^{[q/m]} \beta_n$. Voor het geval, dat $q^{n'}$ geheel is, moeten

de punten op EK alleen tot het eerste gebied gerekend worden.

Door toepassing van (10) kunnen we (9) als volgt schrijven:

$$\sum_1^{[q\eta']} \alpha_m \left\{ \sum_1^{\left[\frac{q}{m}\right]} \beta_n - \sum_1^{\infty} \beta_n \right\} + \sum_1^{[q\eta]} \beta_n \left\{ \sum_1^{\left[\frac{q}{n}\right]} \alpha_m - \sum_1^{\infty} \alpha_m \right\}. \quad (11)$$

Als η en $\eta' \neq 0$ zijn, dan is (11) gelijk aan

$$- \sum_1^{[q\eta']} \alpha_m \cdot \sum_1^{\infty} \beta_n - \sum_1^{[q\eta]} \beta_n \sum_1^{\infty} \alpha_m \quad (12)$$

$$\text{en } \left[\frac{q}{m}\right] \geq \left[\frac{q}{[q\eta']}\right] \geq q^{\eta}; \quad \left[\frac{q}{n}\right] \geq q^{\eta'}.$$

Voor voldoende groote q zijn $[q^{\eta}]$ en $[q^{\eta'}] > x$,

$$\text{dus } \left| \sum_1^{\infty} \beta_n \right| < \frac{\varepsilon}{q^{\eta(\omega - \rho')}} \quad \text{en} \quad \left| \sum_1^{\infty} \alpha_m \right| < \frac{\varepsilon}{q^{\eta'(\omega - \rho)}}$$

wegens (5) en (6).

Uit (3) en (4) volgt verder, dat de modulus van (12) kleiner is dan:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_1^{[q\eta']} \frac{|a_m|}{m^{\rho+\tau} m^{\omega-\rho-\tau}} \cdot \frac{1}{q^{\eta(\omega-\rho')}} + \varepsilon \sum_1^{[q\eta]} \frac{|b_n|}{n^{\rho'+\tau'} n^{\omega-\rho'-\tau'}} \cdot \frac{1}{q^{\eta'(\omega-\rho)}} < \\ & < \frac{\varepsilon}{q^{\eta'(\omega-\rho-\tau)} + \eta(\omega-\rho')} \sum_1^{[q\eta']} \frac{|a_m|}{m^{\rho+\tau}} + \frac{\varepsilon}{q^{\eta(\omega-\rho'-\tau')} + \eta'(\omega-\rho)} \sum_1^{[q\eta]} \frac{|b_n|}{n^{\rho'+\tau'}} < \end{aligned}$$

$< 2 M \varepsilon$, omdat $\eta'(\omega - \rho - \tau) + \eta(\omega - \rho') = 0$ en ook

$$\eta(\omega - \rho' - \tau') + \eta'(\omega - \rho) = 0.$$

Hieruit volgt, dat

$$\sum_1^q \frac{c_p}{p^{\omega}} \rightarrow \sum_1^q \frac{a_m}{m^{\omega}} \times \sum_1^q \frac{b_n}{n^{\omega}}, \text{ als } q \rightarrow \infty.$$

Als $\eta' = 0$, kan het bewijs op dezelfde wijze gegeven worden. Enkele uitdrukkingen vereenvoudigen zich dan.

§ 47. Zij gegeven twee rijen positieve, monotoon toenemende getallen $\lambda_1, \lambda_2, \dots; \mu_1, \mu_2, \dots; (\lambda_n \rightarrow \infty; \mu_n \rightarrow \infty, \text{ als } n \rightarrow \infty)$ en twee convergente reeksen $\sum_1^\infty a_m = A, (1)$ en $\sum_1^\infty b_n = B, (2)$ terwijl $\left| \frac{\lambda_m a_m}{\lambda_m - \lambda_{m-1}} \right| < K$ en $\left| \frac{\mu_n b_n}{\mu_n - \mu_{n-1}} \right| < K (3)$ voor alle waarden van m en $n \geq 2$. Maakt men nu alle mogelijke combinaties $\lambda_m + \mu_n$ op en rangschikt men deze in toenemende grootte in een rij $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \rightarrow \infty$, dan convergeert

$$\sum_1^\infty c_r, \text{ waar } \sum_1^p c = \sum_{\lambda_m + \mu_n \leq \nu_p} a_m b_n \quad 1) \quad (4)$$

Bewijs: We voeren 3 voor $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ continue, monotoon toenemende functies $\lambda(x), \mu(y)$ en $\nu(z)$ in, met de voorwaarden

$\lambda(m) = \lambda_m, \mu(n) = \mu_n, \nu(p) = \nu_p$ en $\lambda(x) = \mu(y) = 0$ voor $x = 0, y = 0$.

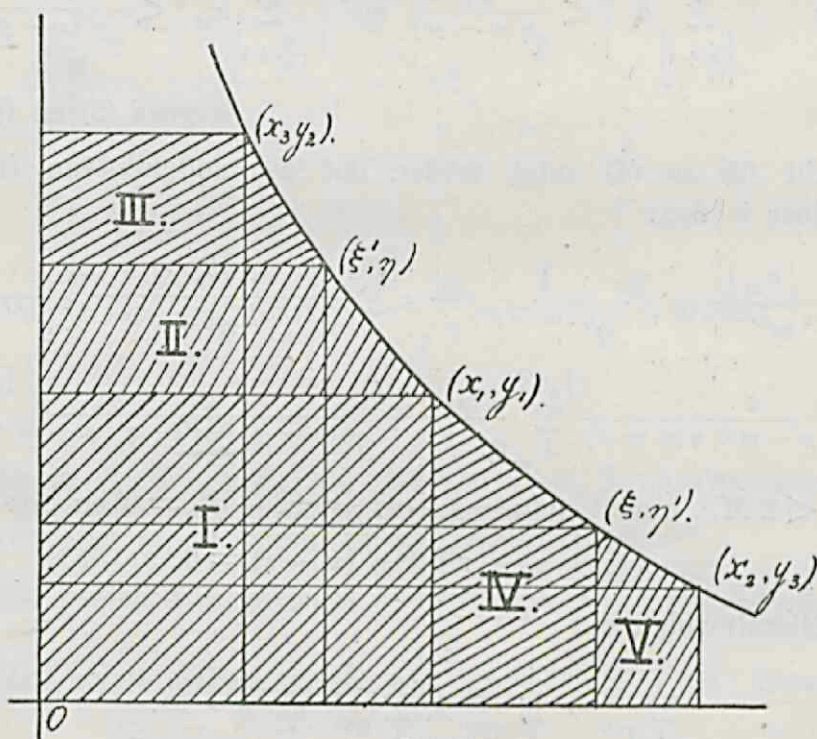


FIG. 2.

1) Proc. Lond. Math. Soc. ser. 2, vol. 10, 1911, pg. 396 v.v.
Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung vol. 23, 1914, pg. 80—84.

Als we nu opschrijven

$$\lambda(x) + \mu(y) = \nu(z) \quad (5)$$

dan stelt deze vergelijking voor iedere waarde van z een kromme voor. Beschouw de kromme $\lambda(x) + \mu(y) = \nu(p)$, p constant en geheel (fig. 2); voor een punt (x_1, y_1) op de kromme geldt dus $\lambda(x_1) + \mu(y_1) = \nu(p)$ en voor een punt (ξ, η) binnen het gebied begrensd door de kromme en de coördinaatassen is $\lambda(\xi) + \mu(\eta) < \nu(p)$.

Kies nu x_2 en y_2 zóó, dat $\lambda(x_2) = \mu(y_2) = \nu(p)$,
dus $\mu(y_3) = \lambda(x_3) = 0$.

Verder kiezen we x_1 en y_1 zóó, dat $\lambda(x_1) = \mu(y_1) = \frac{1}{2} \nu(p)$. (7)
 ξ en η kiezen we respectievelijk tusschen x_1 en x_2 , y_1 en y_2 , zóó, dat

$$\lambda(\xi) = \lambda(x_2) - \sqrt{\lambda(\xi)}, \text{ resp. } \mu(\eta) = \mu(y_2) - \sqrt{\mu(\eta)}. \quad (8)$$

Hieruit volgt, dat $\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{\lambda(x_2)}{\lambda(\xi)} = 1$, dus ook $\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{\lambda(\xi)}{\lambda(x_2)} = 1$

en $\lambda(x_2) - \lambda(\xi) \rightarrow \infty$, als $x \rightarrow \infty$. (9)

Daar $\lambda(x_1) = \frac{1}{2} \lambda(x_2)$, is

$$\lambda(\xi) - \lambda(x_1) = \frac{1}{2} \lambda(x_2) - \sqrt{\lambda(\xi)} = \lambda(x_2) \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\lambda(\xi)}{\lambda(x_2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda(x_2)}{\lambda(\xi)}}} \right].$$

Dit nadert tot ∞ , als $x_2 \rightarrow \infty$. (10)

Hetzelfde geldt voor de functie $\mu(y)$.

Tenslotte bepalen we η' en ξ' zóó, dat

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) + \mu(\eta') &= \nu(p) \text{ en} \\ \lambda(\xi') + \mu(\eta) &= \nu(p). \end{aligned} \quad (11)$$

Sommeeren we $\sum a_m b_n$ nu over de 5 gearceerde gebieden, dan komt er:

$$\begin{aligned} \sum_1^p c_r &= \sum a_m b_n = \sum_{m=1}^{[x_1]} a_m \sum_{n=1}^{[y_1]} b_n + \sum_{n=[y_1+1]}^{[\eta]} b_n (a_1 + \dots + a_{m_n}) + \\ &+ \sum_{n=[\eta+1]}^{[y_2]} b_n (a_1 + \dots + a_{m_n}) + \sum_{m=[x_1+1]}^{[\xi]} a_m (b_1 + \dots + b_{n_m}) + \\ &+ \sum_{m=[\xi+1]}^{[x_2]} a_m (b_1 + \dots + b_{n_m}), \end{aligned} \quad (12)$$

waar m_n en n_m voldoen aan de betrekkingen:

$$\begin{aligned}\mu(n) + \lambda(m_n) &= \nu(p) \text{ en} \\ \lambda(m) + \mu(n_m) &= \nu(p).\end{aligned}\quad (13)$$

Uit (13) volgt, dat $m_n > m_{n+1}$ en $n_m > n_{m+1}$.

$$\text{Nu is } A = \sum_1^\infty a_m = \sum_1^M a_m + \sum_{M+1}^\infty a_m = \sum_0^M a_m + \varepsilon_M. \quad (14)$$

$$|\varepsilon_M| < \varepsilon \text{ voor } M \geq M'.$$

$$\text{Evenzoo } B = \sum_1^\infty b_n = \sum_1^N b_n + \varepsilon_N, \quad |\varepsilon_N| < \varepsilon \text{ voor } N \geq N'.$$

We kunnen nu p zóó groot kiezen, dat $[x_1 + 1] \geq M'$ en $\lambda(x_2) - \lambda(\xi) = \nu(p) - \lambda(\xi) = \mu(n_\xi)$ zóó groot is, dat

$$\begin{aligned}n_{[\xi]} &\geq N' \text{ en dus zeker} \\ n_m &\geq N' \text{ voor } [\xi] \geq m.\end{aligned}$$

Dan is de 4^e term van (12) gelijk aan

$$\sum_{m=[x_1+1]}^{[\xi]} a_m (b_1 + \dots + b_{n_m}) = B \sum_{[x_1+1]}^{[\xi]} a_m - \sum_{m=[x_1+1]}^{[\xi]} \varepsilon_{n_m} a_m, \quad (15)$$

waar $|\varepsilon_{n_m}| < \varepsilon$.

Nu is wegens (3)

$$\sum_{[x_1+1]}^{[\xi]} |a_m| < K \sum_{[x_1+1]}^{[\xi]} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}. \quad (16)$$

Daar $\lambda_m > \lambda_{m-1}$ is, is

$$\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} < -\lg \left(1 - \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right) = \lg \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}},$$

$$\text{dus } \sum_{[x_1+1]}^{[\xi]} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} < \lg \frac{\lambda_{[\xi]}}{\lambda_{[x_1]}} < \lg \frac{\lambda(x_2)}{\lambda(x_1)} = \lg 2.$$

Dus de modulus van (15) is kleiner dan $2B\varepsilon + \varepsilon K \lg 2$.

Eenzelfde schatting kan geschieden voor den 2^{en} term van (12).

Schatten we nu den 5^{en} term van (12).

Als $K_1 = \max |b_1 + \dots + b_{n_m}|$, $n_m = 1, 2, \dots$

$$\text{dan is } \left| \sum_{[\xi+1]}^{[x_2]} a_m (b_1 + \dots + b_{n_m}) \right| < K_1 \sum_{[\xi+1]}^{[x_2]} |a_m| <$$

$$< K_1 K \sum_{[\xi+1]}^{[x_2]} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} < K_1 K \lg \frac{\lambda [x_2]}{\lambda [\xi]} < \varepsilon$$

wegens $\frac{\lambda(x_2)}{\lambda(\xi)} \rightarrow 1$.

Hetzelfde geldt voor den 3^{en} term, zoodat tenslotte

$$\sum_1^p c_r = \sum_{m=1}^{[x_1]} a_m \sum_{n=1}^{[y_1]} b_n + K' \varepsilon,$$

$$\text{dus } \sum_1^\infty c_r = A B.$$

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De voorwaarde $\frac{A_n}{A_{n+1}} \rightarrow 1$, als $n \rightarrow \infty$, op pag. 10 van dit proefschrift kan vervangen worden door de voorwaarde $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{A_n}{A_{n+1}}$ vanaf een gegeven n .

II.

Bij het bewijs, dat LANDAU van stelling 142 geeft in „Theorie der Zahlen und der Idealen”, is verzuimd de functie $F(m)$ voor toenemende waarden van m te onderzoeken.

III.

De stelling onder § 8 van „De beginselen der congruentiën” van G. SCHOUTEN is zonder nadere beperking niet juist.

IV.

Het bewijs, dat G. H. HARDY geeft op pag. 176—178 van Proc. Lond. Math. Soc. ser. 2. vol. 12. 1912 is onvolledig.

V.

In zijn „Leçons sur les fonctions de variables réelles” geeft E. BOREL op pag. 66 een onjuiste definitie van de functie $\delta = \phi(\epsilon)$.

VI.

De afleiding van de eigenschappen van de elementen van een drievlakshoek, die S. W. F. MARGADANT geeft op pag. 171 van het Bijv. v. h. Nieuw-Tijdschrift voor Wisk. 3^e jaargang, is foutief.

VII.

Een propaedeutische Meetkundecursus voor leerlingen, zooals voorgesteld door Mevr. T. EHRENFEST-AFANASSJEEWA, is niet aan te bevelen.

Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven.

VIII.

Bij het bepalen van lijnbreedten met den interferometer van FABRY en PEROT is de dikte van de zilverlaag, waarbij de grootste nauwkeurigheid verkregen wordt, een functie van den totalen duur van het onderzoek.

Deze uitspraak laat zich generaliseeren.

IX.

Voor astronomen is de bestudeering der Relativiteitstheorie gewenscht.

X.

De conclusie, die J. BERTRAND in „Calcul des Probabilités” op pag. 28 uit vraagstuk 15 trekt, is onjuist.

J. BERTRAND. „Calcul des Probabilités”, 2^e ed.

XI.

Toepassingen van het theorema van BAYES, waarbij de waarschijnlijkheden *a priori* onbekend zijn, hebben in 't algemeen weinig beteekenis.

XII.

De theorie over de oorzaken van de cirkelvormige gedaante van de maankraters, gegeven door K. DE BOER, is niet overtuigend.

Astr. Nachr. Bd. 223, pg. 178.

