



Kenmerkende getallen van algebraïsche oppervlakken

<https://hdl.handle.net/1874/288497>

A. qu. 192, 1927.

**KENMERKENDE GETALLEN VAN
ALGEBRAÏSCHE OPPERVLAGKEN**



BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

B. VAN SLOOTEN

Diss.
Utrecht
1927

**KENMERKENDE GETALLEN VAN ALGEBRAÏSCHE
OPPERVLAKKEN**

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK UTRECHT



3969 3696

Diss. Utrecht 1927

Kenmerkende getallen van algebraïsche oppervlakken.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. B. J. H. OVINK

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGREPTEN

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Maandag 7 November 1927, des namiddags te 3 uur

DOOR

BERTHA VAN SLOOTEN

geboren te AMERSFOORT.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Electr. drukkerij „de Industrie” J. VAN DRUTEN — Utrecht

1927

AAN MIJN MOEDER

Na een praktijk van een tiental jaren als leerares over te gaan tot het samenstellen van een proefschrift, is een besluit, dat van wijder strekking blijkt te zijn, dan men oppervlakkig zou meenen. Mij tot dit besluit te hebben gebracht is Uw werk, Zeergeleerde BOCKWINKEL. Ik stel er dan ook prijs op U op deze plaats hiervoor mijn erkentelijkheid te betuigen, alsook voor Uw bereidwilligheid mijn hulp en voorspraak te zijn bij de Faculteit te Utrecht, met welke ik door mijn werk zoo weinig contact meer had.

Ook U geldt mijn dank, Hoogleeraren en Oud-Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, voor de wijze, waarop U allen mij inzicht hebt gegeven in de vakken, die steeds mijn bijzondere belangstelling hebben gehad.

Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor, met groote waardeering denk ik terug aan den tijd, dat ik Uw colleges volgen mocht. Uw helderen en boeienden betoogtrant heb ik als docente mij steeds als ideaal voor oogen gesteld.

Voor Uw steun en Uw belangstelling, mij betoond bij het samenstellen van dit proefschrift, betuig ik U mijn oprechten dank.

INLEIDING.

In de Verslagen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam van 1905 verschenen van de hand van Prof. Dr. JAN DE VRIES twee artikelen, resp. getiteld: «Eenige kenmerkende getallen van een algebraïsch oppervlak» (Deel XIII, 2^e gedeelte, bl. 753) en «Over bundels van algebraïsche oppervlakken» (Deel XIV, 1^e gedeelte, bl. 50). Beide werden zeer beknopt gesteld en zijn daardoor niet gemakkelijk te bestudeeren. Het leek dus zeer gewenscht den inhoud ervan in een nieuwe publicatie, in casu dit proefschrift, uitvoeriger te behandelen en nader toe te lichten. Tegelijkertijd was het mogelijk in het artikel «Over bundels van algebraïsche oppervlakken» een verbetering aan te brengen van een paar conclusies, welke onjuist zijn, doordat de schrijver enkele onderdeelen van deze verhandeling baseerde op eenige foutief afgeleide formules (vgl. «Over lineaire stelsels van algebraïsche vlakke krommen», Zittingsverslag van 22 April 1905, Koninkl. Akad. v. Wetensch., Deel XIII, 2^e gedeelte, bl. 748). Weliswaar zijn deze formules in een in 1906 verschenen artikel (Koninkl. Akad. v. Wetensch., Deel XIV, 2^e gedeelte, bl. 844), door hem gecorrigeerd, doch tot een herziening van zijn in «Over bundels van algebraïsche oppervlakken» getrokken conclusies is het toen niet gekomen.

Alvorens over te gaan tot de afleiding van eenige kenmerkende getallen van een algebraïsch oppervlak, mogen hier eenige bijzonderheden omtrent *hoofdraaklijnen* volgen, daar deze in het volgende meermalen ter sprake zullen komen.

De algemeene gedaante der vergelijking van een algebraïsch oppervlak van den n^{en} graad is:

$$A + Bx + Cy + Dz + Ex^2 + Fxy + Gxz + Hy^2 + Iyz + Jz^2 + \dots + Lz^n = 0,$$

of bij invoering der poolcoördinaten:

$$A + B\rho \cos \alpha + C\rho \cos \beta + D\rho \cos \gamma + E\rho^2 \cos^2 \alpha + \dots + L\rho^n \cos^n \gamma = 0. \quad (I)$$

Geeft men nu α , β en γ een bepaalde waarde, d. i. beschouwt men de punten, die op de rechte l liggen, welke, getrokken vanuit den oorsprong, met de drie assen resp. de hoeken α , β en γ maakt, dan bepalen de n waarden van ρ , die nu aan vergelijking (I) voldoen, de ρ 's van de snijpunten van bovengenoemde lijn l met het oppervlak. Verplaatst men nu het snijpunt der coördinatenassen naar het op het oppervlak Φ^n gelegen punt A , dan moet $\rho = 0$ voldoen, dus moet de bekende term ontbreken.

De vergelijking van Φ^n wordt nu dus:

$$B\rho \cos \alpha + C\rho \cos \beta + D\rho \cos \gamma + E\rho^2 \cos^2 \alpha + \dots + L\rho^n \cos^n \gamma = 0. \quad (II)$$

Zal l in A twee samenvallende punten met Φ^n gemeen hebben, dan moet vergelijking (II) voor de bij l behoorende waarden van α , β en γ twee wortels $\rho = 0$ hebben, dus moet de vergelijking deelbaar zijn door ρ^2 , zoodat ook de termen van den eersten graad in ρ moeten wegvallen. De bij l behoorende waarden van α , β en γ moeten dus voldoen aan de voorwaarde

$$B \cos \alpha + C \cos \beta + D \cos \gamma = 0.$$

Door vermenigvuldiging met ρ gaat deze vergelijking over in

$$Bx + Cy + Dz = 0,$$

aan welke vergelijking dus de coördinaten van de punten der raaklijn l moeten voldoen.

Wij zien dus, dat alle raaklijnen in A aan Φ^n liggen in het platte vlak $Bx + Cy + Dz = 0$, het *raakvlak* in A aan Φ^n .

Op overeenkomstige wijze kan aangetoond worden, dat, zal l in A nog een derde punt met Φ^n gemeen hebben, de coördinaten van de punten van l bovendien moeten voldoen aan de vergelijking

$$Ex^2 + Fxy + Gxz + Hy^2 + Iyz + Jz^2 = 0. \quad (III)$$

l ligt dus in het raakvlak en op den door (III) voorgestelden tweedegraadskegel, met top in A . Deze kegel snijdt het raakvlak volgens twee rechte lijnen, zoodat er twee rechten zijn, die in A drie samenvallende punten met ϕ^n gemeen hebben. Deze lijnen worden *hoofdraaklijnen* genoemd.

Dat men door een punt A van ϕ^n twee lijnen kan trekken, die in A drie samenvallende punten met ϕ^n gemeen hebben, kan men ook als volgt afleiden. Het raakvlak in A snijdt ϕ^n volgens een kromme, welke in A een dubbelpunt heeft. Om dit in te zien heeft men slechts te bedenken, dat *elke* rechte lijn door A gaande en in het raakvlak liggend, in A twee samenvallende punten met ϕ^n en dus met de doorsnede van het raakvlak met ϕ^n gemeen heeft. Door dit dubbelpunt A der doorsnede kan men twee lijnen trekken, nl. de raaklijnen in A aan de beide door A gaande takken, die in A drie samenvallende punten met die kromme en dus met ϕ^n gemeen hebben. Dit zijn de bovengenoemde hoofdraaklijnen.

Wij zagen dus, dat de beide in A rakende hoofdraaklijnen, a_1 en a_2 , in het raakvlak liggen. Brengt men door één van deze twee lijnen, bv. door a_1 , een ander vlak V , dan zal V ϕ^n snijden volgens een kromme, die in A een buigpunt heeft. a_1 heeft nl. in A drie samenvallende punten gemeen met ϕ^n , dus ook met de doorsnede van V en ϕ^n , en is dus voor deze doorsnede buigraaklijn in A . Had a_1 in A drie punten met de doorsnede gemeen als raaklijn aan een der takken, gaande door een dubbelpunt in A van de doorsnede, dan zou ook *elke andere* rechte door A in V twee punten in A met ϕ^n gemeen hebben en V dus met het raakvlak samenvallen, hetgeen in strijd is met de onderstelling.

Zoo ook omgekeerd: Een buigraaklijn aan de doorsnede van een plat vlak met ϕ^n is hoofdraaklijn voor ϕ^n , daar de buigraaklijn in het buigpunt drie samenvallende punten met de doorsnede en dus met ϕ^n gemeen heeft. Het buigpunt der doorsnede is raakpunt voor de hoofdraaklijn van ϕ^n .

HOOFDSTUK I.

Afleiding van eenige kenmerkende getallen van een algebraïsch oppervlak ¹⁾.

§ 1. Wanneer wij een oppervlak ϕ^n snijden door een plat vlak α , krijgen wij als doorsnede een kromme α^n . In elk der punten A van deze α^n trekken wij de beide hoofdraaklijnen a_1 en a_2 van ϕ^n en bekijken dan het door deze hoofdraaklijnen gevormde regelvlak A . a_1 en a_2 , beide op regelvlak A liggend, hebben in A elk een punt met α^n gemeen, zoodat A in A twee punten met α^n gemeen heeft; α^n is dus *dubbels-kromme* van A . Een buigraaklijn aan α^n is hoofdraaklijn voor ϕ^n , rakend in het buigpunt en ligt derhalve op A . Daar zoo'n buigraaklijn tevens in α ligt, vormt zij een deel der doorsnede van α met A . α^n bezit $3n(n-2)$ buigpunten. A en α hebben dus gemeen $3n(n-2)$ rechte lijnen en de dubbel te tellen α^n . De doorsnede van A met een plat vlak is dus van den graad $3n(n-2) + 2n = n(3n-4)$, zoodat A is een regelvlak van den graad $n(3n-4)$.

a_1 en a_2 hebben in A elk drie punten met ϕ^n gemeen, dus hebben A en ϕ^n in A zes punten gemeen, zoodat α^n , de m.pl. der punten A , zes maal tot de doorsnede van A met ϕ^n behoort. De totale doorsnede van A met ϕ^n is van den graad $n \times n(3n-4)$, zoodat deze beide oppervlakken, behalve de zes maal te tellen α^n , nog een kromme van den graad $n^2(3n-4) - 6n$ gemeen hebben, welke gevormd wordt door de snijpunten der op A gelegen hoofdraaklijnen met ϕ^n .

¹⁾ Men vindt de bedoelde getallen in SALMON-FIEDLER, «Analytische Geometrie des Raumes», dritte Auflage, II, 622–644, en in SCHUBERT, «Kalkül der abzählenden Geometrie» p. 236.

Deze kromme heeft met α in de eerste plaats gemeen de snijpunten der in α gelegen hoofdraaklijnen met ϕ^n . Zoo'n hoofdraaklijn, buigraaklijn aan α^n , heeft buiten het raakpunt nog $n - 3$ punten met α^n , dus met ϕ^n , gemeen. De $3n(n - 2)(n - 3)$ snijpunten van deze buigraaklijnen met α^n zijn de eenige snijpunten van in α gelegen hoofdraaklijnen a met ϕ^n . De overige snijpunten van lijnen a van A met ϕ^n liggen dus op de hoofdraaklijnen a , die α snijden. Daar A het eenige punt is, dat zoo'n lijn a met α gemeen heeft, moet het snijpunt van a en ϕ^n , zal het in α liggen, samenvallen met het raakpunt A , m. a. w. deze hoofdraaklijn moet in A vier samenvallende punten met ϕ^n gemeen hebben, dus in A vierpuntige raaklijn aan ϕ^n zijn. Daar de m.pl. van de snijpunten der hoofdraaklijnen a en ϕ^n met α $n^2(3n - 4) - 6n$ punten gemeen heeft, waarvan er $3n(n - 2)(n - 3)$ liggen in de snijpunten der in α gelegen hoofdraaklijnen met ϕ^n , zal het $n^2(3n - 4) - 6n + 3n(n - 2)(n - 3) = n(11n - 24)$ maal voorkomen, dat een rechte a in een punt A van α vierpuntige raaklijn is. De m.pl. van de raakpunten der vierpuntige raaklijnen van ϕ^n , de *flecnodale lijn*, heeft dus $n(11n - 24)$ punten met een plat vlak α gemeen.

Hieruit volgt:

De flecnodale lijn is een ruimtekromme van den graad $n(11n - 24)$.

Heeft een rechte lijn l in een punt A van een oppervlak ϕ^3 vier punten met het oppervlak gemeen, dan ligt l geheel op het oppervlak. A is dus een punt van een op het oppervlak gelegen rechte. Ook omgekeerd kan elk punt van een op het oppervlak gelegen rechte opgevat worden als raakpunt van een vierpuntige raaklijn. De m.pl. der raakpunten van de vierpuntige raaklijnen wordt dus gevormd door de op het oppervlak gelegen rechten. Deze m.pl., de *flecnodale lijn*, is hier van den graad $3(11 \times 3 - 24) = 27$, zoodat er op een oppervlak van den derden graad 27 rechte lijnen liggen.

§ 2. Wij snijden nu ϕ^n met een tweede vlak β en be-

schouwen het regelvlak **B**, gevormd door de hoofdraaklijnen, welke ϕ^n in een punt B van β snijden. Zoo'n punt B moet, als punt van ϕ^n en van β , liggen op de doorsnede β^n van ϕ^n met β . Uit elk dezer punten B kan men $(n^2 + 2)(n - 3)$ hoofdraaklijnen aan ϕ^n trekken (zie § 35), zoodat $(n^2 + 2)(n - 3)$ lijnen van regelvlak **B** vlak β snijden in een bepaald punt B van β^n . Deze β^n moet dus $(n^2 + 2)(n - 3)$ maal gerekend worden bij de beschouwing der doorsnede van β met het regelvlak **B**. Een in β gelegen buigraaklijn b snijdt β^n in $n - 3$ punten buiten het raakpunt. Elk van deze $n - 3$ punten $B_1, B_2, \dots, B_{n-3}$ kan opgevat worden als het punt B van β , waarin ϕ^n door deze buigraaklijn gesneden wordt. b ligt dus op **B** als hoofdraaklijn, die ϕ^n in punt B_1 van β snijdt, maar ook als hoofdraaklijn, die ϕ^n in punt B_2 van β snijdt, enz. b behoort dus $n - 3$ maal tot de doorsnede van **B** met β . In β liggen $3n(n - 2)$ buigraaklijnen. De totale doorsnede van **B** met β is dus van den graad $n(n^2 + 2)(n - 3) + 3n(n - 2)(n - 3) = n(n - 1)(n - 3)(n + 4)$.

Hieruit volgt:

*Het regelvlak **B** is van den graad $n(n - 1)(n - 3)(n + 4)$.*

In § 1 vonden wij dat **A** een regelvlak is van den graad $n(3n - 4)$ en dus ϕ^n snijdt volgens een kromme van den graad $n^2(3n - 4)$, tot welke doorsnede α^n zes maal behoort. Behalve α^n hebben **A** en ϕ^n derhalve nog gemeen een kromme van den graad $n^2(3n - 4) - 6n = n(3n^2 - 4n - 6)$. Deze kromme snijdt vlak β in $n(3n^2 - 4n - 6)$ punten. Zoo'n snijpunt is, als punt van **A**, een punt van een hoofdraaklijn r , die haar osculatiepunt in vlak α heeft en is, als punt van ϕ^n en β , het in β gelegen snijpunt van deze hoofdraaklijn met ϕ^n . r osculeert dus ϕ^n in een punt A van α en snijdt ϕ^n in een punt B van β . Er zijn $n(3n^2 - 4n - 6)$ lijnen r . Beweegt B zich dus langs β^n , dan heeft de m.pl. van de osculatiepunten der het regelvlak **B** vormende hoofdraaklijnen $n(3n^2 - 4n - 6)$ punten met vlak α gemeen, zoodat het osculatiepunt een kromme van den graad $n(3n^2 - 4n - 6)$ doorloopt. In zoo'n osculatiepunt heeft **B** drie punten met

ϕ^n gemeen, zoodat de door de osculatiepunten gevormde kromme drie maal behoort tot de doorsnede van $\mathbf{B}$ met ϕ^n . Uit een punt B van β^n kan men $(n^2 + 2)(n - 3)$ hoofdraaklijnen aan ϕ^n trekken. Door B gaan dus $(n^2 + 2)(n - 3)$ rechten van $\mathbf{B}$, die elk in B één punt met ϕ^n gemeen hebben. $\mathbf{B}$ heeft dus in B $(n^2 + 2)(n - 3)$ punten met ϕ^n gemeen.

Tot de doorsnede van $\mathbf{B}$ met ϕ^n behoort, behalve de drie maal te tellen m.pl. der osculatiepunten en de $(n^2 + 2)(n - 3)$ maal te tellen kromme β^n , ook nog de m.pl. (B') der punten B' , die de $\mathbf{B}$ vormende hoofdraaklijnen nog met ϕ^n gemeen hebben buiten het osculatiepunt en het op β^n gelegen snijpunt met ϕ^n .

$$n^2(n-1)(n-3)(n+4) - 3n(3n^2 - 4n - 6) + \\ - n(n^2 + 2)(n-3) = n(n-2)(n-4)(n^2 + 5n + 3).$$

Dus (B') is van den graad $n(n-2)(n-4)(n^2 + 5n + 3)$.

§ 3. Een hoofdraaklijn b , die ϕ^n snijdt in een punt B van β , heeft buiten B en het osculatiepunt A nog $n - 4$ punten B' met ϕ^n gemeen.

Ter bepaling van het aantal malen dat A samenvalt met een der $n - 4$ bij A behoorende punten B' , worden de puntenparen (A, B') uit een rechte l geprojecteerd, d. i. wij brengen vlakken door l , resp. gaande door de verschillende punten A en B' . Wij voegen nu aan het vlak door l en een punt A toe de $n - 4$ vlakken door l , resp. gaande door de $n - 4$ bij A behoorende punten B' .

In een willekeurig vlak V door l liggen $n(3n^2 - 4n - 6)$ punten A , daar de m.pl. van A een kromme is van den graad $n(3n^2 - 4n - 6)$. Bij elk van deze punten A behooren $n - 4$ punten B' , zoodat aan dit vlak V toegevoegd zijn $(n - 4)n(3n^2 - 4n - 6)$ vlakken door l , resp. gaande door de verschillende punten B' , behoorend bij de in V liggende punten A .

In een willekeurig vlak W door l liggen $n(n - 2)(n - 4)(n^2 + 5n + 3)$ punten B' , daar (B') een kromme is van den graad $n(n - 2)(n - 4)(n^2 + 5n + 3)$. Bij elk punt B' behoort één punt A , zoodat aan elk vlak W zijn toegevoegd

$n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)$ vlakken door l , resp. gaande door de punten A , behoorend bij de in W liggende punten B' .

De vlakken door l worden derhalve gerangschikt in een verwantschap met kenmerkende getallen $n(n-4)(3n^2-4n-6)$ en $n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)$, zoodat het aantal coïncidenties $n(n-4)(3n^2-4n-6) + n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)$ bedraagt.

Nu is het regelvlak **B** van den graad $n(n-1)(n-3)(n+4)$ en wordt dus door l in $n(n-1)(n-3)(n+4)$ punten gesneden. Er rusten derhalve $n(n-1)(n-3)(n+4)$ lijnen b op l . Het vlak door l en zoo'n hoofdraaklijn bevat het osculatiepunt A van deze hoofdraaklijn, alsook de $n-4$ bij dit punt behoorende punten B' . Dit vlak, opgevat als het vlak door l en A , valt dus samen met de $n-4$ vlakken door l , resp. gaande door de $n-4$ bij A behoorende punten B' en levert derhalve een $(n-4)$ voudige coïncidentie. Aangezien er $n(n-1)(n-3)(n+4)$ lijnen b op l rusten, zijn er $n(n-1)(n-3)(n+4)$ van deze $(n-4)$ voudige coïncidenties.

Beschouwen wij nu van de het regelvlak **B** vormende hoofdraaklijnen b , die lijnen, welke niet op l rusten, dus de lijnen b , die het vlak door A en l snijden, dan zal B' in het algemeen buiten het vlak door A en l liggen. Voor een coïncidentie moet B' in A vallen, zoodat b dus in A vier samenvallende punten met ϕ^n gemeen heeft en derhalve een z.g. *vierpuntige* raaklijn is.

Aangezien er buiten de $(n-4)$ voudige coïncidenties nog $n(3n^2-4n-6)(n-4) + n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3) - n(n-1)(n-3)(n+4)(n-4) = 2n(n-4)(3n^2+n-12)$ coïncidenties zijn, liggen er ook $2n(n-4)(3n^2+n-12)$ vierpuntige raaklijnen van ϕ^n op het regelvlak **B**. Elk van deze lijnen snijdt, als lijn van **B**, het oppervlak ϕ^n in een punt van β . In het platte vlak β liggen dus $2n(n-4)(3n^2+n-12)$ snijpunten van ϕ^n met haar vierpuntige raaklijnen.

Hieruit volgt:

De m.pl. van de snijpunten van Φ^n met zijn vierpuntige raaklijnen is een kromme van den graad

$$2n(n-4)(3n^2+n-12).$$

§ 4. In § 1 vonden wij, dat de m.pl. der punten, waar Φ^n een vierpuntige raaklijn heeft, een kromme is van den graad $n(11n-24)$. Deze kromme behoort vier maal tot de doorsnede van Φ^n met het door de vierpuntige raaklijnen gevormde regelvlak, aangezien een vierpuntige raaklijn in het raakpunt vier punten met Φ^n gemeen heeft.

De verdere doorsnede wordt gevormd door de m.pl. der snijpunten van Φ^n met zijn vierpuntige raaklijnen, volgens § 3 een kromme van den graad $2n(n-4)(3n^2+n-12)$.

De graad van de totale doorsnede van Φ^n en het door de vierpuntige raaklijnen gevormde regelvlak, en dus ook het product der graden van deze oppervlakken, is derhalve gelijk aan

$$4n(11n-24) + 2n(n-4)(3n^2+n-12) = \\ 2n^2(n-3)(3n-2).$$

Hieruit volgt:

Het regelvlak gevormd door de vierpuntige raaklijnen is van den graad

$$2n(n-3)(3n-2).$$

Voor $n=3$ wordt $2n(n-3)(3n-2)$ gelijk aan nul; Φ^3 heeft dan ook geen vierpuntige raaklijnen buiten de 27 op het oppervlak gelegen rechten, die geen regelvlak vormen.

§ 5. Een vierpuntige raaklijn heeft met Φ^n behalve het raakpunt F nog $n-4$ punten G gemeen, die wij aan F zullen toevoegen.

Om te vinden hoe vaak F samenvalt met één van deze $n-4$ punten G , worden de puntenparen (F, G) uit een rechte l geprojecteerd.

In een vlak V door l liggen $n(11n-24)$ punten F , daar de m.pl. van F , de flecnodale lijn, een kromme is van den graad $n(11n-24)$. Aan elk van deze punten F zijn

$n - 4$ punten G toegevoegd. Aan het vlak V zijn dus $(n - 4)n(11n - 24)$ vlakken toegevoegd, nl. de vlakken door l en de punten G , toegevoegd aan de in V liggende punten F .

In een vlak W door l liggen $2n(n - 4)(3n^2 + n - 12)$ punten G , daar de m.pl. van G een kromme is van den graad $2n(n - 4)(3n^2 + n - 12)$. Bij elk punt G behoort één punt F . Dus aan W zijn $2n(n - 4)(3n^2 + n - 12)$ vlakken toegevoegd, nl. de vlakken door l en de punten F , toegevoegd aan de in W liggende punten G .

De vlakken door l worden dus gerangschikt in een verwantschap met kenmerkende getallen $n(11n - 24)(n - 4)$ en $2n(n - 4)(3n^2 + n - 12)$, zoodat het aantal coïncidenties bedraagt

$$n(11n - 24)(n - 4) + 2n(n - 4)(3n^2 + n - 12) = \\ n(n - 4)(6n^2 + 13n - 48).$$

In het vlak door l en een vierpuntige raaklijn, die l snijdt, liggen F en elk der $n - 4$ aan F toegevoegde punten G . Het vlak door F en l valt dus samen met elk der $n - 4$ vlakken door l en een dezer punten G . Een dergelijke vierpuntige raaklijn levert dus een $(n - 4)$ voudige coïncidentie.

Daar het regelvlak, gevormd door de vierpuntige raaklijnen, van den graad $2n(n - 3)(3n - 2)$ is, snijdt l dit oppervlak in $2n(n - 3)(3n - 2)$ punten, zoodat er $2n(n - 3)(3n - 2)$ vierpuntige raaklijnen op l rusten.

Deze leveren dus $2n(n - 3)(3n - 2)$ van die $(n - 4)$ voudige coïncidenties.

De overige $n(n - 4)(6n^2 + 13n - 48) - 2n(n - 3)(3n - 2)(n - 4)$ of $5n(n - 4)(7n - 12)$ coïncidenties zijn afkomstig van coïncidenties $F \equiv G$. Zal nl., in geval de vierpuntige raaklijn f de rechte l niet snijdt, het vlak door l en F samenvallen met het vlak door l en een der aan F toegevoegde punten G , dan moet G wel met F samenvallen.

Blijkbaar is f nu vijfpuntige raaklijn.

Het oppervlak ϕ^n bezit dus $5n(n - 4)(7n - 12)$ vijfpuntige raaklijnen.

§ 6. Beschouwen wij nu weer het regelvlak $\mathbf{B}$, gevormd door de hoofdraaklijnen b , die ϕ^n in punten B van het vlak β snijden (zie § 2). Behalve het osculatiepunt A en het snijpunt B heeft zoo'n hoofdraaklijn met ϕ^n nog $n - 4$ punten B' gemeen. Volgens § 2 is de m.pl. (B') van B' een kromme van den graad $n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)$, zoodat er $n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)$ punten B' in het vlak β liggen.

Beschouwen wij nu eerst de in β liggende lijnen b , dus de buigraaklijnen der doorsnede β^n van ϕ^n met β . Zoo'n buigraaklijn b heeft met β^n , en dus ook met ϕ^n , buiten het buigpunt nog $n - 3$ punten gemeen. Wanneer men één van deze punten als een punt B' beschouwt, kan elk der $n - 4$ andere punten als het in β gelegen snijpunt B van b met ϕ^n beschouwd worden. Elk van deze $n - 3$ snijpunten moet dus $n - 4$ maal in rekening gebracht worden. De snijpunten van deze buigraaklijn met β^n vertegenwoordigen derhalve $(n-3)(n-4)$ der in β gelegen punten B' .

β^n bezit $3n(n-2)$ buigraaklijnen, zoodat het aantal der in β gelegen punten B' , geleverd door $\mathbf{B}$ vormende hoofdraaklijnen, die β snijden, bedraagt

$$n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3) - 3n(n-2)(n-3)(n-4) = \\ n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12).$$

Het moet dus $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$ maal voorkomen, dat voor een hoofdraaklijn, die β snijdt, één der punten B' in β ligt en dus samenvalt met B . b raakt nu blijkbaar ϕ^n in B .

Als lijn van $\mathbf{B}$ osculeert b bovendien ϕ^n .

Er zijn dus $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$ hoofdraaklijnen, die ϕ^n in een punt B van β raken.

Een dergelijke lijn, die in het raakpunt B twee samenvallende punten en in het osculatiepunt A drie samenvallende punten met ϕ^n gemeen heeft, noemen wij een raaklijn $t_{2,3}$.

De m.pl. der raakpunten van deze raaklijnen $t_{2,3}$ heeft met β $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$ punten gemeen.

Hieruit volgt:

De raakpunten der raaklijnen $t_{2,3}$ vormen een kromme van den graad $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$.

§ 7. Wanneer wij ϕ^n snijden met een derde vlak γ , krijgen wij als doorsnede een kromme γ^n . Wij beschouwen nu het regelvlak C , gevormd door de dubbelraaklijnen c van ϕ^n , die één van haar raakpunten in een punt C der doorsnede γ^n hebben.

Uit C kan men $(n-3)(n+2)$ lijnen c trekken (zie § 36), die elk in C een punt met γ gemeen hebben. C en γ hebben in C dus $(n-3)(n+2)$ punten gemeen, zoodat γ^n $(n-3)(n+2)$ maal tot de doorsnede van C en γ behoort.

Van de in γ gelegen lijnen c liggen beide raakpunten C_1 en C_2 in γ . c ligt nu op C als dubbelraaklijn aan ϕ^n met één der raakpunten in het punt C_1 van γ en ook als dubbelraaklijn van ϕ^n met één der raakpunten in het punt C_2 van γ . c behoort dus blijkbaar twee maal tot de doorsnede van C met γ . Daar het aantal der dubbelraaklijnen van γ^n , dus ook der in γ gelegen lijnen c , $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$ bedraagt, is de graad van deze doorsnede $n(n-3)(n+2) + n(n-2)(n-3)(n+3) = n(n-3)(n^2+2n-4)$, welk getal tevens den graad van C aangeeft.

§ 8. Wij beschouwen nu de doorsnede van C met ϕ^n .

a). C en ϕ^n hebben gemeen de $2(n-3)(n+2)$ maal te tellen kromme γ^n .

In een punt C van γ heeft nl. elk der $(n-3)(n+2)$ lijnen c , die men door C kan trekken, twee punten met ϕ^n gemeen, daar ze ϕ^n in C raakt.

b). Een lijn c heeft in het tweede raakpunt C' ook twee punten met ϕ^n gemeen, zoodat de m.pl. (C') van C' twee maal tot de doorsnede van C met ϕ^n behoort.

Ter bepaling van den graad van (C') gaan wij nu na hoeveel punten (C') met γ gemeen heeft.

Een in γ liggende lijn c raakt ϕ^n in twee punten, C_1 en C_2 . Men kan nu C_1 als eerste en dus C_2 als tweede of C_2 als eerste en dus C_1 als tweede raakpunt opvatten, zoodat een in γ gelegen lijn c twee in γ gelegen punten C' levert. Het aantal van deze lijnen c bedraagt $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$; zij leveren dus samen $n(n-2)(n-3)(n+3)$ in γ gelegen punten C' .

Zal van een *niet in γ liggende* lijn c ook het *tweede* raakpunt C' in γ liggen, dan moeten C' en C samenvallen; c is nu blijkbaar *vierpuntige* raaklijn in C . Er liggen $n(11n - 24)$ punten $C \equiv C'$ in γ , aangezien de m.pl. der raakpunten van de vierpuntige raaklijnen volgens § 1 een kromme van den graad $n(11n - 24)$ is en γ dus in $n(11n - 24)$ punten snijdt.

Het aantal in γ' gelegen punten C' bedraagt derhalve $n(n-2)(n-3)(n+3) + n(11n-24) = n(n^3 - 2n^2 + 2n - 6)$, zoodat (C') een kromme is van den graad $n(n^3 - 2n^2 + 2n - 6)$.

c). Behalve het in γ liggende raakpunt C en het tweede raakpunt C' heeft een lijn c nog met ϕ^n gemeen $n - 4$ snijpunten S . Beschouwen wij nu weer eerst een *in γ gelegen* lijn c , die γ^n raakt in C_1 en C_2 en snijdt in $n - 4$ punten T . T is nu een punt S , als snijpunt van ϕ^n met een dubbelraaklijn, waarvan het eene raakpunt in het punt C_1 van γ ligt en ook als snijpunt van ϕ^n met een dubbelraaklijn, waarvan het eene raakpunt in het punt C_2 van γ ligt. T vertegenwoordigt dus twee punten S ; op elke dubbelraaklijn van γ^n liggen $n - 4$ punten T ; aan γ^n kan men $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$ dubbelraaklijnen trekken. De snijpunten van γ^n met haar dubbelraaklijnen vertegenwoordigen derhalve $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)(n-4) \times 2$ punten S .

De in γ liggende lijnen c leveren $n(n-2)(n-3)(n+3)(n-4)$ in γ liggende punten S .

Zal van een lijn c , welke γ *snijdt* in C , een punt S in γ liggen, dan moet dit punt S samenvallen met het punt C , zoodat c nu in C drie samenvallende punten met ϕ^n gemeen heeft. Als lijn van C *raakt* zij ϕ^n bovendien in een punt C' ; c is dus een lijn $t_{2,3}$, waarvan het raakpunt in C' en het osculatiepunt in C ligt.

De m.pl. (S) van S heeft dus behalve de bovengenoemde $n(n-2)(n-3)(n+3)(n-4)$ punten S nog met γ gemeen de in γ gelegen osculatiepunten der raaklijnen $t_{2,3}$, zoodat het aantal van deze osculatiepunten en dus ook de graad der m.pl. van de osculatiepunten gelijk is aan den graad van (S) — $n(n-2)(n-3)(n+3)(n-4)$.

d). Volgens § 7 is C een oppervlak van den graad $n(n-3)$

$(n^2 + 2n - 4)$. De doorsnede van C met Φ^n is derhalve van den graad $n^2(n-3)(n^2+2n-4)$. Tot deze doorsnede behoort volgens *a*) de $2(n-3)(n+2)$ maal te tellen kromme γ^n , volgens *b*) de dubbel te tellen kromme (C') en volgens *c*) de kromme (S) , welke laatste dus is van den graad $n^2(n-3)(n^2+2n-4) - 2n(n-3)(n+2) - 2n(n^3 - 2n^2 + 2n - 6) = n(n-4)(n^3 + n^2 - 4n - 6)$.
 $n(n-4)(n^3 + n^2 - 4n - 6) - n(n-2)(n-3)(n+3)(n-4) =$
 $n(n-4)(3n^2 + 5n - 24).$

Hieruit volgt (zie § 8 c):

De m.pl. van de osculatiepunten der hoofdraaklijnen $t_{2,3}$ is een kromme van den graad $n(n-4)(3n^2+5n-24)$.

§ 9. Ter bepaling van den graad van het door de lijnen $t_{2,3}$ gevormde regelvlak, projecteeren wij de osculatiepunten A en de raakpunten B uit een rechte l en voegen aan een punt A toe het met A op één raaklijn $t_{2,3}$ gelegen punt B .

In een vlak V door l liggen $n(n-4)(3n^2+5n-24)$ punten A , daar volgens § 8 de m.pl. (A) dezer punten van den graad $n(n-4)(3n^2+5n-24)$ is. Aan elk punt A is één punt B toegevoegd. Aan vlak V zijn derhalve toegevoegd $n(n-4)(3n^2+5n-24)$ vlakken door l , resp. gaande door de punten B' , behoorend bij de in V gelegen punten A .

In een vlak W door l liggen $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$ raakpunten B , daar volgens § 6 de m.pl. (B) dezer punten van den graad $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$ is. Aan elk punt B is één punt A toegevoegd, dus aan vlak W zijn toegevoegd $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$ vlakken door l , resp. gaande door de punten A , behoorend bij de in W liggende punten B .

De vlakken door l worden derhalve gerangschikt in een verwantschap met kenmerkende getallen $n(n-4)(3n^2+5n-24)$ en $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$, zoodat het aantal coïncidenties bedraagt $n(n-4)(3n^2+5n-24) + n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$, m. a. w. het komt $n(n-4)(3n^2+5n-24) + n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$ maal

voor, dat een vlak V door l samenvalt met het vlak door l en een punt B , toegevoegd aan een der in V liggende punten A .

Zal een lijn $t_{2,3}$, welke l *kruist*, een coïncidentie leveren, dan moeten A en B wel samenvallen; $t_{2,3}$ is nu blijkbaar *vijfpuntige* raaklijn in het punt $A \equiv B$.

Er zijn $5n(n-4)(7n-12)$ vijfpuntige raaklijnen (zie § 5), zoodat de l kruisende lijnen $t_{2,3}$ $5n(n-4)(7n-12)$ coïncidenties leveren.

De overige $n(n-4)(3n^2+5n-24) + n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12) - 5n(n-4)(7n-12)$ coïncidenties zijn dus afkomstig van l snijdende lijnen $t_{2,3}$.

Iedere lijn $t_{2,3}$, welke l *snijdt*, levert een coïncidentie, daar de vlakken door l , resp. gaande door het punt A en het punt B , samenvallen.

Het aantal der op l rustende lijnen $t_{2,3}$ bedraagt derhalve $n(n-4)(3n^2+5n-24) + n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12) - 5n(n-4)(7n-12) = n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$, welk getal tevens aangeeft het aantal snijpunten van de rechte l met het door de lijnen $t_{2,3}$ gevormde regelvlak.

Hieruit volgt:

De lijnen $t_{2,3}$ vormen een regelvlak van den graad

$$n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4).$$

§ 10. Wij snijden nu Φ^n nog met een vierde vlak δ , noemen de doorsnede δ^n en beschouwen het regelvlak **D**, gevormd door de dubbelraaklijnen d , die Φ^n in een punt D van δ , dus van δ^n , snijden.

Door elk punt D kan men $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$ lijnen d trekken (zie § 37), die elk in D één punt met δ gemeen hebben. **D** heeft dus in D $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$ punten met δ gemeen. δ^n moet derhalve $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$ maal gerekend worden bij beschouwing der doorsnede van **D** met δ .

Een in δ liggende dubbelraaklijn d van Φ^n , dus van δ^n , heeft met δ^n behalve de raakpunten nog $n-4$ punten, $S_1, S_2, \dots, S_{n-4}$, gemeen. Daar d achtereenvolgens opgevat

kan worden als een ϕ^n resp. in de punten $S_1, S_2 \dots S_{n-4}$ van δ snijdende dubbelraaklijn, vertegenwoordigt d $n-4$ lijnen van **D** en behoort dus $n-4$ maal tot de doorsnede van **D** met δ .

Het aantal dubbelraaklijnen van δ^n bedraagt $\frac{1}{2} n(n-2)(n-3)(n+3)$.

De doorsnede van **D** met δ is derhalve van den graad $\frac{1}{2} n(n-3)(n-4)(n^2+n+2) + \frac{1}{2} n(n-2)(n-3) \times (n+3)(n-4) = n(n-1)(n+2)(n-3)(n-4)$.

Hieruit volgt:

*De dubbelraaklijnen, welke ϕ^n snijden in een punt van vlak δ , vormen een regelvlak **D** van den graad $n(n-1)(n+2)(n-3)(n-4)$.*

§ 11. In § 7 sneden wij ϕ^n met een vlak γ en beschouwden toen het regelvlak **C**, gevormd door de dubbelraaklijnen, die een van haar raakpunten in een punt C van vlak γ hadden.

Wij vonden in § 8, dat de punten S , welke **C** met ϕ^n gemeen heeft buiten de raakpunten, een kromme van den graad $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$ vormen.

Er zijn dus $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$ dubbelraaklijnen, die een van haar raakpunten C in een vlak γ en een van haar snijpunten S in een willekeurig-plat vlak, bijv. in het bovengenoemde vlak δ , hebben. Anders gezegd: er zijn $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$ lijnen van regelvlak **D**, die een van haar raakpunten C in een vlak γ hebben. De m.pl. van de raakpunten C der **D** vormende lijnen is derhalve een kromme van den graad $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$. In C hebben **D** en ϕ^n twee punten gemeen, zoodat deze kromme twee maal tot de doorsnede van **D** met ϕ^n behoort.

Tot deze doorsnede behoort ook de $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$ maal te tellen kromme δ^n ; uit elk punt D van δ^n vertrekken volgens § 37 immers $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$ lijnen d .

Ten slotte hebben **D** en ϕ^n nog gemeen de buiten δ gelegen snijpunten D' .

Daar **D** een regelvlak is van den graad $n(n-1)(n+2)$

$(n-3)(n-4)$, snijdt $\mathbf{D}$ het oppervlak Φ^n volgens een kromme van den graad $n^2(n-1)(n+2)(n-3)(n-4)$, zoodat de graad van de door de punten D' gevormde kromme (D') bedraagt $n^2(n-1)(n+2)(n-3)(n-4) - 2n(n-4)(n^3 + n^2 - 4n - 6) - \frac{1}{2}n(n-3)(n-4)(n^2 + n + 2) = \frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2 + 5n + 3)$. (D') heeft derhalve $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2 + 5n + 3)$ punten met vlak δ gemeen.

Een in δ liggende lijn d van $\mathbf{D}$ snijdt δ^n in $n-4$ punten, $D_1, D_2 \dots D_{n-4}$, buiten de raakpunten. Het punt D_1 is een punt D' voor d , achtereenvolgens opgevat als een dubbelraaklijn die Φ^n resp. snijdt in een der $n-5$ overige punten, $D_2, D_3 \dots D_{n-4}$, welke punten dus achtereenvolgens opgevat worden als het punt D . Hieruit blijkt dat D_1 $n-5$ der in δ gelegen punten D' vertegenwoordigt. De $n-4$ punten $D_1, D_2 \dots D_{n-4}$ vertegenwoordigen derhalve $(n-4)(n-5)$ snijpunten van (D') met δ .

Aangezien men $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$ dubbelraaklijnen aan δ^n kan trekken, liggen er $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)(n-4)(n-5)$ snijpunten van (D') met δ op deze dubbelraaklijnen.

Zal een punt D' van een δ snijdende lijn c van $\mathbf{D}$ in δ liggen, dan moet D' met D samenvallen; d raakt nu Φ^n in $D \equiv D'$ en is dus een *drievoudige* raaklijn van Φ^n .

Wij vonden, dat er van de $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2 + 5n + 3)$ snijpunten van (D') met δ $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)(n-4)(n-5)$ op de dubbelraaklijnen van δ^n lagen. Elk der overige $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2 + 5n + 12)$ snijpunten is raakpunt van een *drievoudige raaklijn*. De m.pl. van de raakpunten der drievoudige raaklijnen heeft derhalve $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2 + 5n + 12)$ punten met een plat vlak δ gemeen.

Hieruit volgt:

De raakpunten der drievoudige raaklijnen van Φ^n vormen een kromme van den graad

$$\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2 + 5n + 12).$$

§ 12. Elke rechte d van regelvlak $\mathbf{D}$ raakt ϕ^n in twee punten C , snijdt ϕ^n in een punt D van δ en heeft bovendien nog $n - 5$ punten D' met ϕ^n gemeen.

Aangezien het aantal combinaties van $n - 5$ grootheden twee aan twee $\frac{1}{2}(n - 5)(n - 6)$ bedraagt, kan men deze $n - 5$ punten in $\frac{1}{2}(n - 5)(n - 6)$ paren D' , D'' rangschikken. Wij projecteerden deze puntenparen nu uit een rechte l .

In een willekeurig vlak λ' door l liggen $\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(2n^2 + 5n + 3)$ punten D' , aangezien volgens § 11 de m.pl. (D') van D' een kromme is van den graad $\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(2n^2 + 5n + 3)$. Bij elk punt D' behooren $n - 6$ punten D'' , zoodat aan het vlak λ' zijn toegevoegd $\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(2n^2 + 5n + 3)(n - 6)$ vlakken λ'' door l , resp. gaande door de verschillende punten D'' , welke toegevoegd zijn aan de in λ' gelegen punten D' .

Elk der punten D' kan ook opgevat worden als een punt D'' en omgekeerd, zoodat de m.pl. (D'') van D'' eveneens een kromme is van den graad $\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(2n^2 + 5n + 3)$. In een willekeurig vlak λ'' door l liggen dus $\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(2n^2 + 5n + 3)$ punten D'' . Bij elk punt D'' behooren $n - 6$ punten D' , zoodat aan het vlak λ'' zijn toegevoegd $\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(2n^2 + 5n + 3)(n - 6)$ vlakken λ' door l , resp. gaande door de verschillende punten D' , welke zijn toegevoegd aan de in λ'' gelegen punten D'' .

De vlakken door l worden derhalve gerangschikt in een verwantschap met de kenmerkende getallen $\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(n - 6)(2n^2 + 5n + 3)$ en $\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(n - 6)(2n^2 + 5n + 3)$, zoodat het aantal coïncidenties $n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(n - 6)(2n^2 + 5n + 3)$ bedraagt.

Wij beschouwen eerst weer een lijn d van $\mathbf{D}$, welke l snijdt, dus met l in één plat vlak λ ligt.

Het vlak λ' door l en een der $n - 5$ op d gelegen punten D' valt samen met elk der $n - 6$ vlakken door l , resp. gaande door de $n - 6$ aan D' toegevoegde punten D'' , daar elk van deze vlakken samenvalt met vlak λ' . Dit punt D'

geeft dus aanleiding tot $n - 6$, de $n - 5$ op c gelegen punten D' tot $(n - 5)(n - 6)$ coïncidenties $\lambda' \equiv \lambda''$. Van elke lijn d , welke l snijdt, zijn derhalve $(n - 5)(n - 6)$ coïncidenties afkomstig.

D is een regelvlak van den graad $n(n - 1)(n + 2)(n - 3)(n - 4)$, zoodat l **D** snijdt in $n(n - 1)(n + 2)(n - 3)(n - 4)$ punten, m. a. w. er rusten $n(n - 1)(n + 2)(n - 3)(n - 4)$ lijnen d van **D** op l .

Deze lijnen geven aanleiding tot

$$n(n - 1)(n + 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)(n - 6)$$

coïncidenties.

Het aantal coïncidenties, afkomstig van lijnen d van **D**, welke l *kruisen*, bedraagt derhalve $n(n - 2)(n - 4)(n - 5)(n - 6)(2n^2 + 5n + 3) - n(n - 1)(n + 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)(n - 6) = n(n - 4)(n - 5)(n - 6)(n^3 + 3n^2 - 2n - 12)$.

Zal voor een lijn d , welke l *kruist*, het vlak door l en een punt D' samenvallen met het vlak door l en een punt D'' , dan moeten D' en D'' wel samenvallen; het punt $D' \equiv D''$ is dus blijkbaar raakpunt van een *drievoudige* raaklijn.

Een drievoudige raaklijn, rakend in D_1 , D_2 en D_3 , kan men zich ontstaan denken uit de dubbelraaklijn, rakend in D_1 en D_2 , door samenvalling van een punt D' en een punt D'' tot D_3 , maar ook uit de dubbelraaklijn, rakend in D_1 en D_3 , door samenvalling van een punt D' en een punt D'' tot D_2 of uit de dubbelraaklijn, rakend in D_2 en D_3 , door samenvalling van een punt D' en D'' tot D_1 . Een drievoudige raaklijn geeft dus blijkbaar aanleiding tot drie coïncidenties.

Daar het aantal coïncidenties, afkomstig van op **D** gelegen lijnen d , welke l *kruisen*, $n(n - 4)(n - 5)(n - 6)(n^3 + 3n^2 - 2n - 12)$ bedraagt, liggen er op **D** $\frac{1}{3}n(n - 4)(n - 5)(n - 6)(n^3 + 3n^2 - 2n - 12)$ drievoudige raaklijnen, m. a. w. $\frac{1}{3}n(n - 4)(n - 5)(n - 6)(n^3 + 3n^2 - 2n - 12)$ drievoudige raaklijnen snijden ϕ^n in een punt D van δ .

Hieruit volgt:

De m.pl. (D) der snijpunten D van oppervlak ϕ^n met zijn drievoudige raaklijnen is een kromme van den graad

$$\frac{1}{3}n(n - 4)(n - 5)(n - 6)(n^3 + 3n^2 - 2n - 12).$$

§ 13. Beschouwen wij nu de doorsnede van ϕ^n met het door de drievoudige raaklijnen e gevormde regelvlak (e) .

De m.pl. (C) van de raakpunten C der drievoudige raaklijnen van ϕ^n is volgens § 11 een kromme van den graad $\frac{1}{2} n (n-2) (n-4) (n-5) (n^2 + 5n + 12)$. In elk punt van deze kromme hebben ϕ^n en (e) twee punten gemeen, zoodat (C) twee maal in rekening gebracht moet worden.

De m.pl. (D) der snijpunten van ϕ^n met zijn drievoudige raaklijnen is volgens § 12 een kromme van den graad $\frac{1}{3} n (n-4) (n-5) (n-6) (n^3 + 3n^2 - 2n - 12)$.

De graad der doorsnede van ϕ^n met (e) is derhalve $n (n-2) (n-4) (n-5) (n^2 + 5n + 12) + \frac{1}{3} n (n-4) (n-5) (n-6) (n^3 + 3n^2 - 2n - 12) = \frac{1}{3} n^2 (n-3) (n-4) (n-5) (n^2 + 3n - 2)$.

Hieruit volgt:

De drievoudige raaklijnen van ϕ^n vormen een regelvlak van den graad

$$\frac{1}{3} n (n-3) (n-4) (n-5) (n^2 + 3n - 2).^1)$$

§ 14. Evenals in § 1 snijden wij nu het oppervlak ϕ^n met een plat vlak α en trekken in elk punt A der doorsnede α^n de beide hoofdraaklijnen, a_1 en a_2 .

De snijpunten T_1 en T_2 , resp. van a_1 en a_2 , met een plat vlak σ worden met een in σ gelegen punt S verbonden en de stralen $ST_1 \equiv s_1$ en $ST_2 \equiv s_2$ aan elkaar toegevoegd.

Het door de lijnen a gevormde regelvlak is volgens § 1 een oppervlak van den graad $n(3n-4)$ en snijdt σ dus volgens een kromme van den graad $n(3n-4)$. Hieruit volgt dat er $n(3n-4)$ lijnen a rusten op elken straal s ; een straal s snijdt nl. deze kromme in $n(3n-4)$ punten T . Vatten wij elk punt T op als een punt T_1 , dan is aan elk punt T_1 toegevoegd één punt T_2 , nl. het snijpunt met σ der hoofdraaklijn a_2 , waarvan het raakpunt samenvalt met dat der σ in T_1 snijdende hoofdraaklijn a_1 . Aan dezen straal s zijn dus $n(3n-4)$ stralen s_2 toegevoegd.

¹⁾ In SALMON-FIEDLER staat op bl. 638 $n^2 + 3n + 2$ in plaats van $n^2 + 3n - 2$.

a_1 en a_2 zijn verwisselbaar, zoodat wij hier een symmetrische verwantschap krijgen, met kenmerkend getal $n(3n - 4)$.

Het aantal coïncidenties bedraagt derhalve $2n(3n - 4)$.

Wanneer de snijpunten T' en T'' van σ met twee lijnen a' en a'' , welke een gemeenschappelijk raakpunt A hebben, met S op één rechte lijn s liggen, ontstaat een dubbele coïncidentie. Vat men nl. a' op als a_1 en dus a'' als a_2 , dan valt $s_2 \equiv ST''$ langs $s_1 \equiv ST'$; vat men evenwel a'' op als a_1 en dus a' als a_2 , dan valt eveneens $s_2 \equiv ST'$ langs $s_1 \equiv ST''$. De lijn s vertegenwoordigt dus twee coïncidenties.

S ligt nu als punt van $T'T''$ in het vlak door a' en a'' , dus in het raakvlak aan ϕ^n , rakend in het snijpunt A van a' en a'' . Laatstgenoemd vlak is dus één der raakvlakken aan ϕ^n , welke door S gaan. De raakpunten der raakvlakken uit S aan ϕ^n liggen op ϕ^n en op het eerste pooloppervlak van A t. o. v. ϕ^n ; zij vormen derhalve een kromme van den graad $n(n - 1)$, welke kromme het vlak α in $n(n - 1)$ punten A snijdt. Het zal dus $n(n - 1)$ maal voorkomen, dat T' en T'' met S op één lijn liggen, zoodat deze groep blijkbaar $n(n - 1)$ dubbel te tellen coïncidenties bevat.

Beschouwen wij nu de snijpunten A van α^n met de snijlijn der vlakken α en σ . De lijnen a' en a'' , welke door zoo'n snijpunt gaan, snijden σ in hetzelfde punt $A \equiv T' \equiv T''$, zoodat de verbindingslijnen van S , resp. met T' en T'' , samenvallen. Ook hier krijgt men dus een coïncidentie.

Vat men a' op als a_1 en dus ST' als s_1 , dan valt $s_2 \equiv ST''$ samen met $s_1 \equiv ST'$. Vat men evenwel a'' op als a_1 en dus ST'' als s_1 , dan valt eveneens $s_2 \equiv ST'$ met $s_1 \equiv ST''$ samen. Ook een aldus ontstane coïncidentie moet derhalve twee maal in rekening gebracht worden.

Aangezien α^n de snijlijn der vlakken α en σ in n punten A snijdt, bevat deze groep n dubbel te tellen coïncidenties.

De overige coïncidenties zijn afkomstig van in α gelegen *parabolische punten*, d. i. van in α gelegen punten A , waar de beide hoofdtraaklijnen samenvallen. Vallen nl. a_1 en a_2

samen, dan zullen zij σ in hetzelfde punt snijden, zoodat de verbindingslijn van S met het snijpunt van a_1 en σ samenvalt met de verbindingslijn van S met het snijpunt van a_2 en σ . Ook nu ontstaat dus blijkbaar een coïncidentie.

Wij vonden, dat het totale aantal der coïncidenties $s_1 \equiv s_2$ $2n(3n-4)$ bedraagt; dus is het aantal der coïncidenties, geleverd door de in α gelegen parabolische punten $2n(3n-4) - 2n(n-1) - 2n = 4n(n-2)$.

In α liggen derhalve $4n(n-2)$ parabolische punten van Φ^n , zoodat de m.pl. der parabolische punten van Φ^n met een plat vlak $4n(n-2)$ snijpunten heeft.

Hieruit volgt:

De m.pl. der parabolische punten van Φ^n , de spinodale lijn, is een kromme van den graad $4n(n-2)$.

§ 15. Den graad der *spinodale lijn* kan men ook als volgt afleiden.

Volgens § 35 is YZ in het punt Y buigraaklijn aan het oppervlak Φ^n , wanneer de coördinaten van Y en Z voldoen aan de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} a_y^n &= 0 \\ a_y^{n-1} a_z &= 0 \\ a_y^{n-2} a_z^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Het raakvlak in Y , voorgesteld door $a_y^{n-1} a_z = 0$, raakt in Y aan elk pooloppervlak van Y t. o. v. Φ^n , dus ook aan $a_y^{n-2} a_z^2 = 0$. De doorsnede van $a_y^{n-1} a_z = 0$ en $a_y^{n-2} a_z^2 = 0$, welke als doorsnede van een plat vlak met een tweede-graadsoppervlak van den tweeden graad is, heeft dus in Y een dubbelpunt en is derhalve ontaard in twee elkaar snijdende lijnen, de hoofdraaklijnen in Y aan Φ^n .

Zal Y een *parabolisch* punt zijn, m. a. w. zullen de beide hoofdraaklijnen in Y samenvallen, dan moet het raakvlak $a_y^{n-1} a_z = 0$ twee samenvallende rechten met $a_y^{n-2} a_z^2 = 0$ gemeen hebben, zoodat laatstgenoemd oppervlak een kegel zijn moet.

$$a_y^{n-2} a_z^2 \equiv \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + z_4 \frac{\partial}{\partial y_4} \right)^2 a_y^n \equiv$$

$$z_1^2 \frac{\partial^2 a_y^n}{\partial y_1^2} + 2 z_1 z_2 \frac{\partial^2 a_y^n}{\partial y_1 \partial y_2} + \dots + z_4^2 \frac{\partial^2 a_y^n}{\partial y_4^2} \equiv$$

$$\sum f_{k1} z_k z_1 \text{ als } f_{k1} \equiv \frac{\partial^2 a_y^n}{\partial y_k \partial y_1} \text{ is.}$$

Voor een parabolisch punt Y moet dus $\sum f_{k1} z_k z_1 = 0$ een kegel zijn.

Nu is dit oppervlak een kegel als

$$|f_{k1}|_4 = 0 \text{ is.}$$

Elke factor f_{k1} van een term dezer determinant is van den graad $n - 2$ in de coördinaten van Y , zoodat het door de vergelijking $|f_{k1}| = 0$ voorgestelde oppervlak, het z.g. *oppervlak van HESSE*, van den graad $4(n - 2)$ is; dit oppervlak is blijkbaar de m.pl. der punten, waarvan het tweedegraads pooloppervlak t. o. v. ϕ^n een kegel is.

De op het oppervlak van HESSE gelegen punten van ϕ^n zijn de parabolische punten van ϕ^n ; het oppervlak van HESSE snijdt ϕ^n derhalve volgens de spinodale lijn.

Hieruit volgt:

De spinodale lijn is een kromme van den graad $4n(n - 2)$.

HOOFDSTUK II.

Over bundels van algebraïsche oppervlakken.

§ 16. Den bundel (F^n) van oppervlakken F^n van den n^{en} graad, die gaan door de doorsnede σ der oppervlakken $a_x^n = 0$ en $b_x^n = 0$, kan men voorstellen door de vergelijking:

$$a_x^n + \lambda b_x^n = 0.$$

Wij snijden nu het exemplaar $a_x^n + \lambda_1 b_x^n = 0$ van den bundel met de lijn YZ , aangegeven door $x_k = y_k + \rho z_k$.

De n waarden van ρ , die beantwoorden aan de snijpunten, moeten voldoen aan de vergelijking:

$$\{a_1(y_1 + \rho z_1) + \dots + a_4(y_4 + \rho z_4)\}^n + \lambda_1 \{b_1(y_1 + \rho z_1) + \dots + b_4(y_4 + \rho z_4)\}^n = 0$$

of
$$(a_y + \rho a_z)^n + \lambda_1 (b_y + \rho b_z)^n = 0$$

of
$$a_y^n + n a_y^{n-1} \rho a_z + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a_y^{n-2} \rho^2 a_z^2 + \dots$$

$$+ \lambda_1 (b_y^n + n b_y^{n-1} \rho b_z + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} b_y^{n-2} \rho^2 b_z^2 + \dots) = 0. \quad (I)$$

Kiezen wij nu Y in het op σ gelegen punt S , dan ligt Y zoowel op $a_x^n = 0$ als op $b_x^n = 0$, zoodat $a_y^n = 0$ en $b_y^n = 0$.

Vergelijking (I) gaat derhalve, bij rangschikking naar de opklimmende machten van ρ , over in

$$n a_y^{n-1} \rho a_z + n \lambda_1 b_y^{n-1} \rho b_z + \frac{n(n-1)}{2} a_y^{n-2} \rho^2 a_z^2 + \\ + \frac{n(n-1)}{2} \lambda_1 b_y^{n-2} \rho^2 b_z^2 + \dots = 0.$$

Zal YZ het oppervlak $a_x^n + \lambda_1 b_x^n = 0$ in $Y \equiv S$ raken, dan moet (I) twee wortels $\rho = 0$ hebben, zoodat ook de

termen van den eersten graad in ρ moeten ontbreken. Hiertoe is noodig, dat voldaan is aan

$$a_y^{n-1} a_z + \lambda_1 b_y^{n-1} b_z = 0. \quad (\text{II})$$

(I) heeft drie wortels $\rho = 0$, m. a. w. YZ zal in Y drie samenvallende punten met $a_x^n + \lambda_1 b_x^n = 0$ gemeen hebben, wanneer bovendien

$$a_y^{n-2} a_z^2 + \lambda_1 b_y^{n-2} b_z^2 = 0. \quad (\text{III})$$

Zal dus YZ in het punt $Y \equiv S$ van σ hoofdraaklijn zijn aan een exemplaar $a_x^n + \lambda_1 b_x^n = 0$ van (F^n) , dan moet $a_y^n = 0, b_y^n = 0$, terwijl λ_1 zoowel aan vergelijking (II) als aan vergelijking (III) moet voldoen.

De vergelijkingen (II) en (III) hebben een gemeenschappelijke wortel, als voldaan wordt aan de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} a_y^{n-1} a_z & b_y^{n-1} b_z \\ a_y^{n-2} a_z^2 & b_y^{n-2} b_z^2 \end{vmatrix} = 0$$

of
$$a_y^{n-1} b_y^{n-2} a_z b_z^2 - a_y^{n-2} b_y^{n-1} a_z^2 b_z = 0. \quad (\text{IV})$$

In de onderstelling dat $a_y^n = 0$ en $b_y^n = 0$, is (IV) dus de vergelijking van de m.pl. der hoofdraaklijnen, in het punt $Y \equiv S$ van σ rakend aan de verschillende exemplaren van den bundel.

§ 17. Wij beschouwen nu de hoofdraaklijnen, die men uit een *vast punt* Z aan de oppervlakken F^n kan trekken en waarvan het raakpunt Y ligt op de basiskromme σ van den bundel.

Volgens het bovenstaande moeten nu de coördinaten van Y voldoen aan de vergelijkingen $a_y^n = 0, b_y^n = 0$ en $a_y^{n-1} b_y^{n-2} a_z b_z^2 - a_y^{n-2} b_y^{n-1} a_z^2 b_z = 0$, welke resp. van den graad n, n en $2n - 3$ in de coördinaten van Y zijn. De door deze vergelijkingen voorgestelde oppervlakken hebben derhalve $n^2 (2n - 3)$ snijpunten, zoodat men uit Z $n^2 (2n - 3)$ hoofdraaklijnen kan trekken, van welke het raakpunt op σ ligt.

Onder de *orde* eener stralencongruentie, d. i. eene verzameling van ∞^2 rechte lijnen, verstaat men het aantal stralen, gaande door een willekeurig punt.

Hieruit volgt:

De hoofdraaklijnen in punten der basiskromme vormen een congruentie van de orde $n^2(2n - 3)$.

De in een vast punt $Y \equiv S$ van σ rakende hoofdraaklijnen vormen een kubisch kegelvlak, aangezien vergelijking (IV) van den derden graad in de coördinaten van Z is. Dit kegelvlak snijdt dus een plat vlak V door den top S volgens 3 rechte lijnen, m. a. w. in V liggen 3 in S rakende hoofdraaklijnen.

Een willekeurig plat vlak W heeft met σ n^2 punten gemeen en gaat dus door n^2 punten S van σ . In elk van deze punten S kan men 3 in W gelegen hoofdraaklijnen trekken, zoodat er in W $n^2 \times 3$ in een punt S rakende hoofdraaklijnen liggen.

Onder de klasse eener stralencongruentie verstaat men het aantal stralen, gelegen in een willekeurig plat vlak.

Hieruit volgt:

De hoofdraaklijnen in punten der basiskromme vormen een congruentie, waarvan de klasse $3n^2$ bedraagt.

§ 18. Wij snijden nu den bundel (F^n) met een plat vlak V . De basiskromme σ van (F^n) snijdt V in n^2 punten, de basispunten van den bundel, welke gevormd wordt door de krommen c^n van den n^{en} graad, volgens welke de verschillende exemplaren van den bundel (F^n) vlak V snijden.

Een in V gelegen hoofdraaklijn van F^n , rakend in X , is buigraaklijn in X aan de doorsnede van F^n met V . Het aantal der in V gelegen hoofdraaklijnen, gaande door een punt Y van V , is dus gelijk aan het aantal der buigraaklijnen, die men door Y aan de krommen van (c^n) kan trekken.

Zij $a_x^n + \lambda b_x^n = 0$ (I) de vergelijking van (c^n) , dan wordt de eerste poolkromme van Y t. o. v. het exemplaar $a_x^n + \lambda_1 b_x^n = 0$ (II) van (c^n) voorgesteld door de vergelijking $a_y a_x^{n-1} + \lambda_1 b_y b_x^{n-1} = 0$ (III). Eliminatie van λ_1 uit de vergelijkingen (II) en (III) geeft de m.pl. van de raakpunten der raaklijnen, die men uit Y aan de verschillende exemplaren van den bundel kan trekken, m. a. w. de poolkromme II van Y t. o. v. den bundel.

De vergelijking $\begin{vmatrix} a_x^n & b_x^n \\ a_y a_x^{n-1} & b_y b_x^{n-1} \end{vmatrix} = 0$ is van den graad

$2n - 1$ in de coördinaten van X , zoodat de poolkromme Π van Y t.o.v. den bundel een kromme is van den graad $2n - 1$; de klasse van Π bedraagt derhalve $(2n - 1)(2n - 2) = 4n^2 - 6n + 2$. Door elk punt van V , dus ook door Y , gaat een exemplaar van den bundel; Y ligt derhalve op Π , zoodat men uit Y $4n^2 - 6n$ raaklijnen aan Π kan trekken.

Raakt een uit Y getrokken rechte r de poolkromme Π in het punt X , dan is r voor de door X gaande kromme c^n raaklijn met twee in X samenvallende raakpunten, m. a. w. buigraaklijn in X .

De verbindingslijn van Y met een der basispunten van (c^n) raakt eveneens aan Π .

Om dit aan te toonen kiezen wij O_3 in het basispunt B en als coördinatenassen $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$ de raaklijnen in B aan twee krommen c^n . Wij kunnen nu den bundel voorstellen door de vergelijking:

$$(x_1 x_3^{n-1} + u_2 x_3^{n-2} + \dots) + \lambda (x_2 x_3^{n-1} + v_2 x_3^{n-2} \dots) = 0,$$

waarin u_p en v_p homogene functies van den p^{en} graad van x_1 en x_2 zijn. Eliminatie van λ uit deze vergelijking en de vergelijking $(y_1 x_3^{n-1} + \dots) + \lambda (y_2 x_3^{n-1} + \dots) = 0$ geeft

$$\begin{vmatrix} x_1 x_3^{n-1} \dots & x_2 x_3^{n-1} \dots \\ y_1 x_3^{n-1} \dots & y_2 x_3^{n-1} \dots \end{vmatrix} = 0$$

of $(x_1 y_2 - y_1 x_2) x_3^{2n-2} + \dots = 0,$

de vergelijking der poolkromme van Y t.o.v. den bundel. De term van den graad $2n - 1$ in x_3 ontbreekt, zoodat Π door $O_3 \equiv B$ gaat, terwijl $x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$ de vergelijking is der raaklijn in O_3 aan Π . $x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$ stelt tevens de lijn $Y O_3$ voor, zoodat $Y O_3 \equiv Y B$ in $O_3 \equiv B$ raakt aan Π .

De raaklijnen uit Y aan Π kan men dus in twee groepen verdeelen. De eerste groep bevat de buigraaklijnen uit Y aan de exemplaren van (c^n) , de tweede groep de n^2 verbindingslijnen van Y met de basispunten van den bundel.

Aangezien het totale aantal der raaklijnen uit Y aan Π $4n^2 - 6n$ bedraagt, gaan er dus $4n^2 - 6n - n^2 = 3n(n-2)$ buigraaklijnen aan krommen c^n door Y . Even zoovele door Y gaande hoofdraaklijnen van (F^n) liggen in het vlak V .

Onder den graad van een stralencomplex verstaat men het aantal stralen in een willekeurigen waaier.

Hieruit volgt:

De hoofdraaklijnen van (F^n) vormen een stralencomplex van den graad $3n(n-2)$.

§ 19. In § 16 zagen wij, dat YZ in het punt $Y \equiv S$ der basiskromme σ van $a_x^n + \lambda b_x^n = 0$ hoofdraaklijn is aan het exemplaar $a_x^n + \lambda_1 b_x^n = 0$, wanneer λ_1 en de coördinaten van Y en Z voldoen aan de vergelijkingen $a_y^n = 0$, $b_y^n = 0$, $a_y^{n-1} a_z + \lambda_1 b_y^{n-1} b_z = 0$ (II) en $a_y^{n-2} a_z^2 + \lambda_1 b_y^{n-2} b_z^2 = 0$ (III). YZ is vierpuntige raaklijn in Y , wanneer YZ in Y vier samenvallende punten met $a_x^n + \lambda_1 b_x^n = 0$ gemeen heeft, m. a. w. wanneer vergelijking (I) van § 16 vier wortels $\rho = 0$ heeft. Dit is het geval als λ_1 en de coördinaten van Y en Z bovendien voldoen aan de vergelijking

$$a_y^{n-3} a_z^3 + \lambda_1 b_y^{n-3} b_z^3 = 0. \quad (\text{IV})$$

De in een punt Y van σ rakende vierpuntige raaklijnen liggen dus op de kegelvlakken:

$$a_y^{n-1} b_y^{n-2} a_z b_z^2 - a_y^{n-2} b_y^{n-1} a_z^2 b_z = 0 \quad (\text{V})$$

$$\text{en } a_y^{n-1} b_y^{n-3} a_z b_z^3 - a_y^{n-3} b_y^{n-1} a_z^3 b_z = 0, \quad (\text{VI})$$

die resp. van den graad drie en vier in de coördinaten van Z zijn en dus 12 gemeenschappelijke ribben hebben.

Een van deze gemeenschappelijke ribben is de raaklijn s in Y aan σ , welke raaklijn voorgesteld wordt door de vergelijking $a_y^{n-1} a_z = 0$ en $b_y^{n-1} b_z = 0$. Dat dit in het algemeen geen in Y rakende vierpuntige raaklijn is, blijkt uit de volgende beschouwing. Door elk willekeurig punt P gaat één oppervlak F^n . Kiest men dit punt P op de in Y rakende raaklijn s aan σ , dan snijdt s in het algemeen dit oppervlak F^n in P en raakt F^n , evenals elk ander oppervlak F^n , in Y . Nadert P nu onbepaald tot Y , dan zullen P en Y eindelijk samen-

vallen en zal s in $Y \equiv P$ drie samenvallende punten met dit oppervlak F^n gemeen hebben, m. a. w. voor dit oppervlak in Y driepuntige raaklijn zijn.

De overige 11 gemeenschappelijke ribben vertegenwoordigen de in Y rakende vierpuntige raaklijnen.

Y is derhalve raakpunt van 11 vierpuntige raaklijnen.

In de onderstelling dat $a_y^n = 0$ en $b_y^n = 0$, m. a. w. dat Y op σ ligt, stellen de vergelijkingen (V) en (VI) dus voor de figuur, die gevormd wordt door het raaklijnenoppervlak (s) van σ en het regelvlak τ_4 der vierpuntige raaklijnen, die hun raakpunt op σ hebben.

Deze figuur snijden wij nu met de rechte $z_3 = 0, z_4 = 0$. De coördinaten z_1 en z_2 der snijpunten moeten nu voldoen aan de vergelijkingen

$$\begin{aligned} & a_y^{n-1} b_y^{n-2} (a_1 z_1 + a_2 z_2) (b_1 z_1 + b_2 z_2)^2 + \\ & - a_y^{n-2} b_y^{n-1} (a_1 z_1 + a_2 z_2)^2 (b_1 z_1 + b_2 z_2) = 0 \\ & \text{en } a_y^{n-1} b_y^{n-3} (a_1 z_1 + a_2 z_2) (b_1 z_1 + b_2 z_2)^3 + \\ & - a_y^{n-3} b_y^{n-1} (a_1 z_1 + a_2 z_2)^3 (b_1 z_1 + b_2 z_2) = 0, \end{aligned}$$

dus ook aan

$$\begin{aligned} & a_y^{n-1} b_y^{n-2} (a_1 z_1 + a_2 z_2) [b_1^2 z_1^2 + 2 b_1 b_2 z_1 z_2 + b_2^2 z_2^2] + \\ & - a_y^{n-2} b_y^{n-1} [a_1^2 z_1^2 + 2 a_1 a_2 z_1 z_2 + a_2^2 z_2^2] (b_1 z_1 + b_2 z_2) = 0 \\ & \text{en } a_y^{n-1} b_y^{n-3} (a_1 z_1 + a_2 z_2) [b_1^3 z_1^3 + \dots + b_2^3 z_2^3] + \\ & - a_y^{n-3} b_y^{n-1} [a_1^3 z_1^3 + \dots + a_2^3 z_2^3] (b_1 z_1 + b_2 z_2) = 0. \end{aligned}$$

De gelijknamige machten van z_1 bij elkaar nemend krijgt men

$$\begin{aligned} & \underbrace{(a_y^{n-1} b_y^{n-2} a_1 b_1^2 - a_y^{n-2} b_y^{n-1} a_1^2 b_1)}_P z_1^3 + \\ & + Q z_1^2 z_2 + R z_1 z_2^2 + S z_2^3 = 0 \\ & \text{en } \underbrace{(a_y^{n-1} b_y^{n-3} a_1 b_1^3 - a_y^{n-3} b_y^{n-1} a_1^3 b_1)}_{P'} z_1^4 + \\ & + Q' z_1^3 z_2 + R' z_1^2 z_2^2 + S' z_1 z_2^3 + T' z_2^4 = 0. \end{aligned}$$

Zullen deze vergelijkingen een gemeenschappelijken wortel z_1, z_2 hebben, dan moet voldaan zijn aan:

$$\begin{vmatrix} P & 0 & 0 & 0 & P' & 0 & 0 \\ Q & P & 0 & 0 & Q' & P' & 0 \\ R & Q & P & 0 & R' & Q' & P' \\ S & R & Q & P & S' & R' & Q' \\ 0 & S & R & Q & T' & S' & R' \\ 0 & 0 & S & R & 0 & T' & S' \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & T' \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{VII})$$

P, Q, R en S zijn elk van den graad $2n - 3$, P', Q', R', S' en T' van den graad $2n - 4$ in de coördinaten van Y . Het door vergelijking VII voorgestelde oppervlak is derhalve van den graad $4(2n - 3) + 3(2n - 4) = 2(7n - 12)$. Op dit oppervlak en op σ moeten liggen de punten Y der lijnen YZ van de door τ_4 en (s) gevormde figuur, welke de rechte $z_3 = 0, z_4 = 0$ snijden, zoodat $2n^2(7n - 12)$ lijnen YZ van deze figuur de lijn $z_3 = 0, z_4 = 0$ snijden; m. a. w. het aantal snijpunten der bedoelde figuur met de rechte $z_3 = 0, z_4 = 0$ bedraagt $2n^2(7n - 12)$.

Wij snijden vervolgens het raaklijnenoppervlak (s) met de lijn $z_3 = 0, z_4 = 0$.

In de onderstelling dat $a_y^n = 0, b_y^n = 0$, wordt (s) voorgesteld door $a_y^{n-1} a_z = 0$ en $b_y^{n-1} b_z = 0$, welke vergelijkingen voor $z_3 = 0$ en $z_4 = 0$ overgaan in:

$$\left. \begin{aligned} a_y^{n-1} a_1 z_1 + a_y^{n-1} a_2 z_2 &= 0 \\ b_y^{n-1} b_1 z_1 + b_y^{n-1} b_2 z_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Eliminatie van z_1 en z_2 geeft de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} a_y^{n-1} a_1 & a_y^{n-1} a_2 \\ b_y^{n-1} b_1 & b_y^{n-1} b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

welke vergelijking van den graad $2n - 2$ in de coördinaten van Y is. Het door deze vergelijking voorgestelde oppervlak heeft derhalve $n^2(2n - 2)$ snijpunten met σ , zoodat het raaklijnenoppervlak (s) de lijn $z_3 = 0, z_4 = 0$ in $2n^2(n - 1)$

punten snijdt. De door τ_4 en (s) gevormde figuur heeft $2n^2(7n - 12)$ snijpunten met de bedoelde rechte. Hieruit volgt, dat τ_4 een oppervlak is van den graad $2n^2(7n - 12) - 2n^2(n - 1) = 2n^2(6n - 11)$.

De vierpuntige raaklijnen, waarvan de raakpunten op de basiskromme σ liggen, vormen een regelvlak van den graad $2n^2(6n - 11)$, waarop σ elfvoudig is.

§ 20. Beschouwen wij nu een bundel kubische oppervlakken, (F^3).

Een vierpuntige raaklijn l van F_1^3 met raakpunt S_1 op σ ligt geheel op dit oppervlak F_1^3 en snijdt een ander exemplaar F_2^3 in 3 punten S_1, S_2, S_3 , die als punten van F_1^3 en van F_2^3 op σ moeten liggen. Iedere rechte l van τ_4 is derhalve een trisecante van σ . Ook omgekeerd is iedere trisecante van σ een rechte van τ_4 . Immers door elk punt der ruimte, dus ook door een willekeurig punt P der trisecante, gaat één F^3 . Met dit oppervlak F^3 heeft de trisecante vier punten gemeen, nl. P en haar drie snijpunten met σ . De trisecante ligt derhalve op F^3 en is o. a. in elk van haar drie snijpunten met σ vierpuntige raaklijn voor dit oppervlak, dus blijkbaar een drie maal te tellen lijn van τ_4 .

Wij zien dus, dat τ_4 hier overgaat in het drie maal te tellen regelvlak, dat gevormd wordt door de trisecanten van σ .

Ter bepaling van den graad van het laatstgenoemde regelvlak projecteeren wij σ uit een punt O en krijgen dan een projectie σ_1 , waarvan de graad eveneens 9 en dus de klasse $9(9 - 1) - 2d$ bedraagt. Het aantal der raaklijnen aan σ , rustend op een willekeurige rechte p door O , is gelijk aan het aantal der raaklijnen, die men uit het snijpunt van p met het projectievlak aan σ_1 kan trekken, m. a. w. de graad van het raaklijnenoppervlak van σ is gelijk aan de klasse van σ_1 . Volgens § 19 is het raaklijnenoppervlak (s) der basiskromme σ van een bundel (F^n) van den graad $2n^2(n - 1)$, zoodat de graad van het raaklijnenoppervlak der basiskromme σ van (F^3) en dus ook de klasse der projectie σ_1 $2 \times 3^2(3 - 1) = 36$ bedraagt.

Hieruit volgt: $72 - 2d = 36$ of $d = 18$.

Men kan dus uit een willekeurig punt O 18 bisecanten van σ trekken.

Kiezen wij nu het punt O op σ , dan krijgen wij als projectie een kromme σ_2 , waarvan het geslacht gelijk is aan dat van σ_1 en dus $\frac{1}{2}(9-1)(9-2) - 18 = 10$ bedraagt. σ_2 is een kromme van den graad 8. Uit $g=10 = \frac{1}{2}(8-1)(8-2) - \delta$ volgt nu, dat σ_2 11 dubbelpunten bezit. Door het punt O van σ kan men derhalve 11 trisecanten van σ trekken, zoodat σ een elfvoudige kromme is op het door de trisecanten gevormde regelvlak.

Bepalen wij nu de doorsnede van een F^3 met het regelvlak der trisecanten van σ .

Hiertoe behooren, behalve de elf maal te tellen kromme σ , de op F^3 gelegen rechten q . q snijdt nl. een ander exemplaar F^3 in drie punten, die als punten der beide oppervlakken F^3 op σ liggen; q is dus blijkbaar een trisecante van σ . Het aantal der op F^3 gelegen rechten bedraagt (volgens § 1) 27. De bedoelde doorsnede is derhalve van den graad $11 \times 9 + 27 = 126$. Hieruit volgt, dat het regelvlak der trisecanten van σ een oppervlak is van den graad $126:3 = 42$ en dat de graad van τ_4 dus $3 \times 42 = 126$ bedraagt. Dit is in overeenstemming met het in § 19 gevonden getal $2n^2(6n-11)$, daar $[2n^2(6n-11)]_{n=3} = 126$.

§ 21. Volgens § 1 is de *flecnodele lijn* — de m.pl. der punten, waar F^n een vierpuntige raaklijn bezit — een kromme van den graad $n(11n-24)$. Behalve deze kromme heeft F^n met de m.pl. van de raakpunten der vierpuntige raaklijnen van den bundel (F^n) nog gemeen de elf maal te tellen basiskromme σ ; volgens § 19 is een punt S van σ immers raakpunt van elf vierpuntige raaklijnen. De doorsnede is derhalve van den graad $n(11n-24) + 11n^2 = 2n(11n-12)$.

Hieruit volgt:

De raakpunten van de vierpuntige raaklijnen van een bundel (F^n) vormen een oppervlak van den graad $2(11n-12)$.

Voor $n = 3$ gaat dit oppervlak over in het regelvlak gevormd

door de rechten, gelegen op de exemplaren van (F^3) , d.w.z. de trisecanten van σ . Elke rechte van een F^3 is nl. voor dat oppervlak vierpuntige raaklijn, terwijl elk punt der lijn als raakpunt gekozen kan worden. Het oppervlak der trisecanten is van den graad 42, hetgeen in overeenstemming is met het feit, dat $[2(11n - 12)]_{n=3} = 42$.

§ 22. Volgens § 18 is de stralencomplex der hoofdraaklijnen van een bundel (F^n) van den graad $3n(n - 2)$, m.a.w. het aantal stralen in een willekeurigen waaier bedraagt $3n(n - 2)$. Uit een punt Z van vlak V kan men dus $3n(n - 2)$ in V gelegen hoofdraaklijnen trekken.

Zal het raakpunt van een door Z gaande hoofdraaklijn evenals Z in V liggen, dan moet de hoofdraaklijn geheel in V of het raakpunt in Z liggen.

Behalve de raakpunten van bovengenoemde $3n(n - 2)$ hoofdraaklijnen heeft de m.pl. van de raakpunten der door Z gaande hoofdraaklijnen nog met V gemeen de raakpunten der beide hoofdraaklijnen, die men in Z aan het door Z gaande oppervlak kan trekken.

De bedoelde m.pl. (P) is derhalve een kromme van den graad

$$3n(n - 2) + 2.$$

Daar *elk* vlak door Z in Z twee punten met (P) gemeen heeft — nl. de raakpunten der hoofdraaklijnen in Z aan het door Z gaande oppervlak F^n —, heeft de m.pl. der raakpunten van de hoofdraaklijnen, gaande door Z , een dubbelpunt in Z .

Elke hoofdraaklijn snijdt het door haar geosculeerde oppervlak F^n nog in $n - 3$ punten Q .

Zal een punt Q van een door Z gaande hoofdraaklijn evenals Z in V liggen, dan moet de rechte QZ geheel in V liggen of Q moet met Z samenvallen.

De m.pl. der punten Q , gelegen op door Z gaande hoofdraaklijnen, heeft dus met V gemeen de snijpunten van elk der $3n(n - 2)$ door Z gaande en in V gelegen hoofdraaklijnen met het door haar geosculeerde oppervlak, alsook de in Z gelegen punten Q .

Volgens § 35 kan men uit $Z(n^2 + 2)(n - 3)$ hoofdraaklijnen aan het door Z gaande oppervlak F^n trekken; voor elk van deze hoofdraaklijnen is Z een punt Q .

In Z liggen dus $(n^2 + 2)(n - 3)$ punten Q .

De m.pl. der punten Q , gelegen op door Z gaande hoofdraaklijnen, snijdt V derhalve in $3n(n - 2)(n - 3) + (n^2 + 2)(n - 3)$ punten, zoodat deze m.pl. een kromme is van den graad

$$3n(n - 2)(n - 3) + (n^2 + 2)(n - 3) = \\ 2(n - 3)(n - 1)(2n - 1).$$

Vallen van een hoofdraaklijn t_3 het raakpunt P en een der snijpunten Q met het geosculeerde oppervlak samen, dan is de lijn PQ vierpuntige raaklijn in $P \equiv Q$.

Ter bepaling van het aantal dezer coïncidenties projecteeren wij de puntenparen P, Q uit een rechte l en gebruiken dan de bekende formule

$$\varepsilon = p + q - g.$$

Aangezien de m.pl. der raakpunten P van door Z gaande hoofdraaklijnen een kromme is van den graad $3n(n - 2) + 2$, liggen in een willekeurig vlak V door l $3n(n - 2) + 2$ punten P . Aan elk punt P zijn $n - 3$ punten Q toegevoegd, zoodat aan V zijn toegevoegd $\{3n(n - 2) + 2\}(n - 3)$ vlakken door l , resp. gaande door de punten Q , welke toegevoegd zijn aan de in V gelegen punten P ; m. a. w.

$$p = (3n^2 - 6n + 2)(n - 3).$$

In een willekeurig vlak W door l liggen $2(n - 3)(n - 1)(2n - 1)$ punten Q ; de m.pl. van Q is nl. een kromme van den graad $2(n - 3)(n - 1)(2n - 1)$. Daar aan een punt Q één punt P is toegevoegd, beantwoorden aan vlak W $2(n - 3)(n - 1)(2n - 1)$ vlakken door l , resp. gaande door de punten P , die toegevoegd zijn aan de in W gelegen punten Q ; m. a. w.

$$q = 2(n - 3)(n - 1)(2n - 1).$$

Zal het vlak door l en een punt P samenvallen met het vlak door l en een der bij P behoorende punten Q , dan moet PQ met l in één plat vlak liggen of P en Q moeten samenvallen.

Het kegelvlak, dat gevormd wordt door de hoofdraaklijnen, die door Z gaan, is van den graad $3n(n-2)$, zoodat l dit oppervlak in $3n(n-2)$ punten snijdt. Er rusten derhalve $3n(n-2)$ door Z gaande hoofdraaklijnen op l .

Elk der vlakken door l , resp. gaande door de punten $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-3}$ van een dezer hoofdraaklijnen, valt samen met het vlak door l en P , welk vlak dus een $(n-3)$ voudige coïncidentie vertegenwoordigt.

De $3n(n-2)$ door Z gaande hoofdraaklijnen, die rusten op l , leveren dus blijkbaar $3n(n-2)$ van deze $(n-3)$ voudige coïncidenties, m. a. w.

$$g = 3n(n-2)(n-3).$$

Elk der overige $p + q - g$ coïncidenties is ontstaan door het samenvallen van een punt P met één der bijbehorende punten Q .

Er gaan dus

$$(3n^2 - 6n + 2)(n-3) + 2(n-3)(n-1)(2n-1) - \\ 3n(n-2)(n-3) = 2(2n^2 - 3n + 2)(n-3)$$

vierpuntige raaklijnen door een willekeurig punt Z , m. a. w.

De vierpuntige raaklijnen van een bundel (F^n) vormen een congruentie van de orde $2(n-3)(2n^2 - 3n + 2)$.

De doorsneden van een bundel van oppervlakken, (F^n), met een plat vlak V vormen een bundel van krommen, (c^n).

Heeft een F^n een in V gelegen vierpuntige raaklijn, rakend in P , dan is dit punt P een undulatiepunt der doorsnede c^n van F^n met V ; de raaklijn heeft nl. in P vier punten met F^n en dus met c^n gemeen.

Het aantal der in V gelegen vierpuntige raaklijnen is derhalve gelijk aan het aantal undulatiepunten van den bundel (c^n), welk aantal, volgens § 25, $6(n-3)(3n-2)$ bedraagt.

Wij zien dus:

De vierpuntige raaklijnen van een bundel (F^n) vormen een congruentie van de klasse

$$6(n-3)(3n-2).$$

§ 23 ¹⁾. Wanneer wij in een basispunt B aan elke kromme c^n van een bundel de raaklijn trekken, dan krijgen wij een raaklijnenbundel, die projectief verwant is met den bundel der krommen; aan elke kromme is toegevoegd de in B aan die kromme rakende raaklijn.

Een willekeurige rechte l snijdt een c^n in n punten, $T_1, T_2 \dots T_n$, en de in B aan deze kromme rakende rechte in een punt S . De snijpunten van (c^n) met l vormen een involutie van den graad n ; aan elke groep der involutie is één punt S toegevoegd. Wij kiezen voor beide stelsels op l hetzelfde nulpunt. Noemen wij de coördinaten der snijpunten T van l met de krommen x en de coördinaten van de snijpunten S van l met de raaklijnen in B y , dan krijgen wij de vergelijking:

$$(a x^n + b x^{n-1} + \dots + l) y + (a' x^n + b' x^{n-1} + \dots + l') = 0.$$

Valt nu S met één der bijbehorende punten T samen, m. a. w. is y gelijk aan één der bijbehorende waarden van x , dan voldoet $x \equiv y$ aan de vergelijking:

$$(a x^n + b x^{n-1} + \dots + l) x + (a' x^n + b' x^{n-1} + \dots + l') = 0 \text{ of} \\ A x^{n+1} + B x^n + \dots + L = 0,$$

welke vergelijking van den graad $n+1$ in x is. Het zal dus $n+1$ maal voorkomen, dat een c^n haar raaklijn in B snijdt in een punt van l .

Hieruit volgt:

De snijpunten der krommen van den bundel (c^n) met haar raaklijnen in een basispunt B vormen een kromme van den graad $n+1$.

Valt l samen met een raaklijn in B aan een c^n , dan snijdt l deze c^n nog in $n-2$ punten T . Buiten B heeft l met c^{n+1} dus nog $n-2$ punten gemeen, zoodat er drie snijpunten van l met c^{n+1} in B liggen en B een drievoudig punt van c^{n+1} is. Aangezien er dus drie punten T in B met het bijbehorende raakpunt samenvallen, zijn er drie krommen,

¹⁾ Zie „Over lineaire stelsels van algebraïsche vlakke krommen” (Zittingsverslag van 22 April 1905, Kon. Akademie v. Wetensch., Deel XIII, 2^e gedeelte, bl. 750) en „Sitzungsberichte der Akad. in Wien LXI, 86.

die hun raaklijn in B tevens snijden in B ; m. a. w. drie krommen van den bundel hebben in B een buigpunt.

De verbindingslijn van B met een punt P van c^{n+1} is raaklijn in B aan de door P gaande c^n .

Een raaklijn r uit B aan c^{n+1} raakt derhalve in B aan de kromme, die gaat door het raakpunt A . r raakt in A aan c^{n+1} , d. i. in A liggen twee samenvallende snijpunten van r met de door A gaande c^n , zoodat r ook in A aan de bedoelde c^n raakt. r is dus een dubbelraaklijn, waarvan één der raakpunten in B ligt.

Het aantal der raaklijnen, die men uit het drievoudige punt B van c^{n+1} aan c^{n+1} kan trekken, bedraagt $(n+1)n - 6 - 6 = (n+4)(n-3)$.

Hieruit volgt:

$(n+4)(n-3)$ dubbelraaklijnen hebben een harer raakpunten in B .

Een straal l door een basispunt B snijdt elk der krommen c^n in $n-1$ buiten B gelegen punten, zoodat op l een involutie van den graad $n-1$ ontstaat. Aangezien deze involutie $2(n-2)$ dubbelpunten heeft, raken er buiten B $2(n-2)$ krommen c^n aan l . Elk van deze $2(n-2)$ krommen snijdt l nog in $n-3$ punten; één snijpunt ligt nl. in het basispunt B en twee in het raakpunt A . Op l liggen derhalve buiten B $2(n-2)(n-3)$ punten S der satellietkromme (S) van B .

Ligt een der punten S in B , dan heeft de betrokken c^n ook in B twee punten met l gemeen, m. a. w. l raakt behalve in A ook in B aan c^n ; l is nu blijkbaar een dubbelraaklijn van c^n , terwijl één der raakpunten in B ligt. Aangezien $(n+4)(n-3)$ dubbelraaklijnen een van haar raakpunten in B hebben, is B een $(n+4)(n-3)$ voudig punt S .

Wij zien dus, dat l en (S) in B $(n+4)(n-3)$ punten en buiten B $2(n-2)(n-3)$ punten gemeen hebben; het totale aantal der snijpunten van l met (S) bedraagt derhalve

$$(n+4)(n-3) + 2(n-2)(n-3) = 3n(n-3).$$

Hieruit volgt:

De satellietkromme (S) van B is van den graad $3n(n-3)$.

Aangezien aan een rechte l door B $2(n-2)$ krommen c^n raken, liggen op l buiten B $2(n-2)$ raakpunten A . De poolkromme is van den graad $2n-1$, zoodat het aantal der in B gelegen snijpunten van l met de poolkromme bedraagt $2n-1-2(n-2)=3$, m. a. w.

B is een drievoudig punt der poolkromme van B .

Aangezien het basispunt B een $(n+4)(n-3)$ voudig punt van zijn satellietkromme en een drievoudig punt van zijn poolkromme is, vallen $3(n+4)(n-3)$ der snijpunten van deze krommen in B . (I)

De verbindingslijn l van B met een ander basispunt B' van den bundel snijdt een kromme c^n buiten B en B' nog in $n-2$ punten. De snijpunten van l met de krommen vormen dus een involutie van den graad $n-2$. Daar deze involutie $2(n-3)$ dubbelpunten bezit, raken $2(n-3)$ krommen aan BB' . Elk van deze krommen werpt een punt S in B' , zoodat B' een $2(n-3)$ voudig punt der satellietkromme van B is.

Volgens § 18 raakt BB' in B' aan de poolkromme van B .

In elk der overige n^2-1 basispunten B' liggen dus $2(n-3)$ der snijpunten van de poolkromme en de satellietkromme van B . (II)

Een door B gaande buigraaklijn raakt volgens § 18 in het buigpunt aan de poolkromme van B . Daar ook de satellietkromme van B in het buigpunt raakt aan deze buigraaklijn, hebben poolkromme en satellietkromme van B in het buigpunt twee punten gemeen.

Door een willekeurig punt P kan men volgens § 18 $3n(n-2)$ buigraaklijnen aan exemplaren van den bundel trekken. Valt P in B dan moet dit aantal met 9 verminderd worden; elk der drie in B rakende buigraaklijnen moet nl. drie maal in rekening gebracht worden.

$2\{3n(n-2)-9\}$ der snijpunten van poolkromme met satellietkromme van B vallen derhalve in de buigpunten der buigraaklijnen, die door B gaan. (III)

Dat een buigraaklijn in B drie maal in rekening gebracht moet worden, ziet men gemakkelijk in bij de beschouwing van een bundel (c^3).

Uit een willekeurig punt kan men $3 \times 3 (3 - 2) = 9$ buigraaklijnen aan krommen c^3 van den bundel trekken. Een door een basispunt B gaande buigraaklijn l moet haar buigpunt R in B hebben; viel R buiten B , dan had l vier punten gemeen met de c^3 , waarvoor zij buigraaklijn is, nl. drie punten in R en één punt in B , hetgeen onmogelijk is. Door B gaan dus slechts de 3 buigraaklijnen, die hun buigpunt in B hebben, zoodat zij blijkbaar elk drie maal geteld moeten worden.

De overige snijpunten van poolkromme met satellietkromme van B liggen in de raakpunten Q der door B gaande dubbelraaklijnen.

Vat men nl. de dubbelraaklijn op als een raaklijn in $Q_1 (Q_2)$, dan kan men zich het tweede raakpunt $Q_2 (Q_1)$ ontstaan denken door het samenvallen van twee punten S . De satellietkromme raakt de dubbelraaklijn dus zoowel in Q_1 als in Q_2 . Daar de poolkromme eveneens door Q_1 en Q_2 gaat, hebben poolkromme en satellietkromme in Q_1 en in Q_2 een punt gemeen.

Elk der raakpunten van de door B gaande dubbelraaklijnen vertegenwoordigt dus blijkbaar een snijpunt van poolkromme en satellietkromme van B .

Nu zijn poolkromme en satellietkromme van B resp. van den graad $2n - 1$ en $3n(n - 3)$, zoodat het totale aantal der snijpunten $3n(n - 3)(2n - 1)$ bedraagt.

Van deze gemeenschappelijke punten liggen er volgens (I) $3(n + 4)(n - 3)$ in B , volgens (II) $2(n - 3)(n^2 - 1)$ in de overige basispunten en volgens (III) $2\{3n(n - 2) - 9\}$ in de buigpunten der door B gaande buigraaklijnen.

De overige snijpunten liggen in de raakpunten der dubbelraaklijnen, die men uit B kan trekken, zoodat het aantal van deze raakpunten bedraagt

$$3n(n - 3)(2n - 1) - 3(n + 4)(n - 3) - 2(n - 3)(n^2 - 1) \\ - 2\{3n(n - 2) - 9\} = 4(n - 3)(n - 4)(n + 1).$$

Aan de krommen van den bundel kan men derhalve uit B $2(n - 3)(n - 4)(n + 1)$ dubbelraaklijnen trekken, waarvan geen der beide raakpunten in B valt.

§ 24. Volgens § 23 hebben $(n + 4)(n - 3)$ dubbel-raaklijnen van den bundel (c^n) harer raakpunten in het basispunt B ; de m.pl. (D) van de raakpunten D der dubbel-raaklijnen gaat dus blijkbaar $(n + 4)(n - 3)$ maal door B , m. a. w. B is een $(n + 4)(n - 3)$ voudig punt van (D) .

Aan een willekeurige kromme c^n kan men $\frac{1}{2}n(n - 2)(n^2 - 9)$ dubbelraaklijnen trekken; op elk van deze dubbelraaklijnen liggen 2 punten D .

c^n heeft derhalve met (D) buiten de basispunten $n(n - 2)(n^2 - 9)$ en in de basispunten $n^2 \times (n + 4)(n - 3)$ punten gemeen. Het totale aantal der snijpunten van c^n met (D) bedraagt dus

$$n(n - 2)(n^2 - 9) + n^2(n + 4)(n - 3) = \\ n(n - 3)(2n^2 + 5n - 6).$$

Hieruit volgt:

(D) is een kromme van den graad $(n - 3)(2n^2 + 5n - 6)$.

Elke dubbelraaklijn snijdt de betrokken kromme c^n nog in $n - 4$ punten W , terwijl men aan c^n $\frac{1}{2}n(n - 2)(n^2 - 9)$ dubbelraaklijnen kan trekken.

Door een basispunt B gaan $2(n - 3)(n - 4)(n + 1)$ dubbelraaklijnen, waarvan geen der raakpunten in B ligt. Voor elk van deze lijnen is B een punt W , zoodat B een $2(n - 3)(n - 4)(n + 1)$ voudig punt is van de m.pl. (W) der snijpunten W .

c^n heeft derhalve met (W) buiten de basispunten $\frac{1}{2}n(n - 2)(n^2 - 9)(n - 4)$ en in de basispunten $n^2 \times 2(n - 3)(n - 4)(n + 1)$ punten gemeen, zoodat het totale aantal der snijpunten van c^n met (W) bedraagt

$$\frac{1}{2}n(n - 2)(n - 4)(n^2 - 9) + 2n^2(n - 3)(n - 4)(n + 1) = \\ \frac{1}{2}n(n - 3)(n - 4)(5n^2 + 5n - 6).$$

Hieruit volgt:

(W) is een kromme van den graad

$$\frac{1}{2}(n - 3)(n - 4)(5n^2 + 5n - 6).$$

Valt voor een dubbelraaklijn r een der $n - 4$ punten W samen met een der beide raakpunten D , bijv. met D_1 , dan is r buigraaklijn in het punt $D_1 \equiv W$ en raakt bovendien de betrokken c^n in D_2 , m. a. w. r is een raaklijn $t_{2,3}$ (zie § 6).

Ter bepaling van het aantal der raaklijnen $t_{2,3}$ van den bundel verbinden wij de punten D en W met een in het vlak van den bundel gelegen punt M^1 .

Aan de verbindingslijn d van M met een punt D voegen wij nu toe de $n - 4$ verbindingslijnen w van M resp. met de verschillende snijpunten W van de in D rakende dubbelraaklijn met de betrokken c^n .

Aangezien (D) een kromme is van den graad $(n - 3)$ ($2n^2 + 5n - 6$), snijdt een willekeurige straal d door M de m.pl. (D) in $(n - 3)(2n^2 + 5n - 6)$ punten D . Bij elk van deze punten D behooren $n - 4$ punten W , zoodat aan straal d zijn toegevoegd $(n - 3)(2n^2 + 5n - 6)(n - 4)$ stralen w .

Daar (W) een kromme is van den graad $\frac{1}{2}(n - 3)(n - 4)$ ($5n^2 + 5n - 6$) snijdt een willekeurige straal w door M de m.pl. (W) in $\frac{1}{2}(n - 3)(n - 4)(5n^2 + 5n - 6)$ punten. Bij elk punt W behooren twee punten D , zoodat aan straal w zijn toegevoegd $(n - 3)(n - 4)(5n^2 + 5n - 6)$ stralen d .

De stralen door M worden dus blijkbaar gerangschikt in een verwantschap met de kenmerkende getallen

$$(n - 3)(n - 4)(2n^2 + 5n - 6) \text{ en } (n - 3)(n - 4)(5n^2 + 5n - 6).$$

Het aantal der coïncidenties bedraagt derhalve

$$(n - 3)(n - 4)(2n^2 + 5n - 6) + (n - 3)(n - 4)(5n^2 + 5n - 6) = \\ (n - 3)(n - 4)(7n^2 + 10n - 12).$$

Deze coïncidenties kunnen tot twee groepen gebracht worden.

¹⁾ De door Dr. J. DE VRIES gevolgde methode op bl. 751 van Deel XIII der Verslagen van de Kon. Akademie van Wetensch. is gecorrigeerd op bl. 843 van Deel XIV der genoemde Verslagen.

Eerste groep.

Gaat de dubbelraaklijn r door M , dan valt elk der verbindingslijnen van M resp. met de verschillende bij het eene raakpunt D_1 behoorende punten W samen met de verbindingslijn van M met D_1 . De $n - 4$ stralen w , welke toegevoegd zijn aan de verbindingslijn van M met het andere raakpunt D_2 , vallen eveneens samen met de lijn MD_2 .

Deze dubbelraaklijn vertegenwoordigt dus $2(n - 4)$ coïncidenties.

Aangezien door M $2n(n - 2)(n - 3)$ dubbelraaklijnen aan krommen van den bundel getrokken kunnen worden, leveren de door M gaande dubbelraaklijnen

$$4n(n - 2)(n - 3)(n - 4) \text{ coïncidenties.}$$

Tweede groep.

Gaat de dubbelraaklijn niet door M , dan kan een straal d alleen dan samenvallen met een der aan hem toegevoegde stralen w , wanneer een raakpunt D samenvalt met een der daaraan toegevoegde snijpunten W .

Het aantal der tot deze groep behoorende coïncidenties bedraagt

$$(n - 3)(n - 4)(7n^2 + 10n - 12) - 4n(n - 2)(n - 3)(n - 4) = 3(n - 3)(n - 4)(n^2 + 6n - 4).$$

Het aantal der rechten, welke met een kromme van den bundel (c^n) een tweepuntige en tevens een driepuntige aanraking hebben, bedraagt derhalve

$$3(n - 3)(n - 4)(n^2 + 6n - 4).$$

§ 25. Beschouwen wij nu de m.pl. (I) der buigpunten I van (c^n). In een basispunt hebben 3 krommen van den bundel een buigpunt, zoodat (I) met 3 takken door elk basispunt gaat.

Aangezien een kromme c^n $3n(n - 2)$ buigpunten bezit, bedraagt het aantal snijpunten van een c^n met (I)

$$3n(n - 2) + 3n^2 = 6n(n - 1),$$

zoodat (I) een kromme is van den graad $6(n - 1)$. (I)

Een c^n wordt door een van haar buigraaklijnen nog in

$n - 3$ punten V gesneden. De $3n(n - 2)$ buigraaklijnen van c^n leveren derhalve $3n(n - 2)(n - 3)$ op c^n gelegen punten V .

Uit een basispunt kan men $3(n - 3)(n + 1)$ buigraaklijnen aan de krommen van den bundel trekken (zie § 23); voor elk van deze buigraaklijnen is het basispunt een punt V , zoodat (V) met $3(n - 3)(n + 1)$ takken door B gaat.

Wij vinden dus, dat het aantal snijpunten van c^n met (V) bedraagt

$$3n(n - 2)(n - 3) + n^2 \times 3(n - 3)(n + 1),$$

zoodat (V) een kromme is van den graad

$$3(n - 2)(n - 3) + 3n(n - 3)(n + 1) = \\ 3(n - 3)(n^2 + 2n - 2). \quad (\text{II})$$

Nu verbinden wij elk buigpunt I door een straal i en elk punt V door een straal v met een punt O , gelegen in het vlak van den bundel.

Daar, volgens (I), (I) een kromme is van den graad $6(n - 1)$, snijdt elke straal van den ontstanen waaier de kromme (I) in $6(n - 1)$ punten I . Aan elk van deze snijpunten zijn $n - 3$ punten V toegevoegd, zoodat bij elken straal van den waaier, opgevat als een lijn i , $6(n - 1)(n - 3)$ stralen v behooren.

Volgens (II) is (V) een kromme van den graad $3(n - 3)(n^2 + 2n - 2)$, zoodat elke straal van den waaier de kromme (V) in $3(n - 3)(n^2 + 2n - 2)$ punten V snijdt. Daar aan elk punt V één punt I is toegevoegd, behooren bij elken straal, opgevat als een lijn v , $3(n - 3)(n^2 + 2n - 2)$ stralen i .

De stralen van den waaier met top O worden derhalve gerangschikt in een verwantschap met de kenmerkende getallen $6(n - 1)(n - 3)$ en $3(n - 3)(n^2 + 2n - 2)$, zoodat het aantal coïncidenties bedraagt

$$6(n - 1)(n - 3) + 3(n - 3)(n^2 + 2n - 2).$$

Gaat een buigraaklijn door O , dan valt de verbindingslijn OI van O met het op deze buigraaklijn gelegen punt I samen met elk der $n - 3$ verbindingslijnen van O met de bij I behorende punten V . Deze buigraaklijn vertegenwoordigt derhalve $n - 3$ coïncidentie-stralen.

Daar men uit O $3n(n-2)$ buigraaklijnen aan krommen van den bundel kan trekken, leveren de door O gaande buigraaklijnen $3n(n-2)$ van deze $(n-3)$ voudige coïncidenties.

De overige $6(n-1)(n-3) + 3(n-3)(n^2 + 2n - 2) - 3n(n-2)(n-3)$ coïncidenties zijn afkomstig van coïncidenties $I \equiv V$.

Het aantal undulatiepunten der krommen van een bundel bedraagt derhalve

$$6(n-3)(3n-2)^1).$$

§ 26. De hoofdraaklijnen t_3 , gaande door een willekeurig punt Z , vormen een kegelvlak van den graad $3n(n-2)$ (zie § 18). Elke beschrijvende lijn van dit kegelvlak heeft met het betrokken oppervlak, behalve het buigpunt, nog $n-3$ punten Q gemeen. De m.pl. van deze punten Q is volgens § 22 een kromme van den graad $2(n-3)(n-1)(2n-1)$. Wij voegen nu aan een punt Q toe de $n-4$ punten Q' , welke de door Q gaande buigraaklijn, buiten het buigpunt en het punt Q , nog met het geosculeerde oppervlak gemeen heeft en projecteeren de puntenparen (Q, Q') uit een rechte l .

In een willekeurig vlak q door l liggen $2(n-3)(n-1)(2n-1)$ punten Q . Aan elk van deze punten Q zijn $n-4$ punten Q' toegevoegd, dus bij elk vlak q behooren $2(n-3)(n-1)(2n-1)(n-4)$ vlakken q' door l , resp. gaande door de punten Q' , welke toegevoegd zijn aan de in vlak q gelegen punten Q .

Omdat Q en Q' verwisselbaar zijn, krijgt men een symmetrische verwantschap; het kenmerkend getal dezer verwantschap is $2(n-3)(n-1)(2n-1)(n-4)$, zoodat het aantal coïncidenties $4(n-3)(n-1)(2n-1)(n-4)$ bedraagt.

Wanneer het vlak q door l en Q samenvalt met het vlak q' door l en een der aan Q toegevoegde punten Q' , liggen l , Q en Q' in één plat vlak, zoodat, in het algemeen, de rechte QQ' de rechte l snijdt. Elke rechte QQ' gaat

¹⁾ De door Dr. J. DE VRIES gevolgde methode op bl. 752 van Deel XIII der Verslagen van de Kon. Akademie v. Wetensch. is gecorrigeerd op bl. 844 van Deel XIV dezer Verslagen.

door het punt Z ; $Q Q' Z$ is nu dus een der buigraaklijnen, die door Z gaan en op l rusten. Het vlak q door l en een der $n - 3$ op $Q Q' Z$ gelegen punten Q valt samen met elk der vlakken door l , resp. gaande door de $n - 4$ bij Q behoorende punten Q' . Een dergelijke rechte t_3 vertegenwoordigt derhalve een $(n - 3)(n - 4)$ voudige coïncidentie.

Aangezien het kegelvlak, dat gevormd wordt door de rechten t_3 , welke door Z gaan, van den graad $3n(n - 2)$ is, snijdt l dit kegelvlak in $3n(n - 2)$ punten. $3n(n - 2)$ der door Z gaande hoofdraaklijnen rusten derhalve op l .

Hieruit volgt:

De hoofdraaklijnen door het punt Z , die rusten op de rechte l , leveren $3n(n - 2)(n - 3)(n - 4)$ coïncidenties $q \equiv q'$.

Zal het vlak q door l en Q samenvallen met het vlak q door l en een der aan Q toegevoegde punten Q' , terwijl $Q Q'$ de rechte l niet snijdt, dan moeten Q en Q' samenvallen.

Het aantal coïncidenties $Q \equiv Q'$ bedraagt derhalve:

$$4(n - 3)(n - 1)(2n - 1)(n - 4) - 3n(n - 2)(n - 3)(n - 4) = \\ (n - 3)(n - 4)(5n^2 - 6n + 4),$$

zoodat er $(n - 3)(n - 4)(5n^2 - 6n + 4)$ raaklijnen $t_{3,2}$ door het punt Z gaan.

Hieruit volgt:

De raaklijnen $t_{2,3}$ aan de oppervlakken van een bundel (F^n) vormen een congruentie van de orde

$$(n - 3)(n - 4)(5n^2 - 6n + 4).$$

§ 27. De doorsneden der oppervlakken F^n van een bundel (F^n) met een plat vlak V vormen een bundel van krommen c^n .

Zal een der oppervlakken F^n een in V gelegen raaklijn $t_{2,3}$ hebben, osculeerend in het punt I en rakend in het punt R , dan is $t_{2,3}$ voor de doorsnede c^n buigraaklijn in I en raaklijn in R , daar $t_{2,3}$ in I en R resp. drie en twee punten met F^n , en dus met c^n , gemeen heeft. De rechte $t_{2,3}$ ligt nl. geheel in V en kan dus slechts in V gelegen punten van F^n — m. a. w. punten van c^n — met F^n gemeen hebben.

Wij vinden dus, dat het aantal in V gelegen raaklijnen $t_{2,3}$ van (F^n) gelijk is aan het aantal raaklijnen $t_{2,3}$ van den bundel (c^n) , welke gevormd wordt door de doorsneden der oppervlakken F^n met V . Volgens § 24 is laatstgenoemd aantal gelijk aan $3(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$.

Hieruit volgt:

De raaklijnen $t_{2,3}$ aan de oppervlakken van een bundel (F^n) vormen een congruentie van de klasse

$$3(n-3)(n-4)(n^2+6n-4).$$

§ 28. Beschouwen wij nu de hoofdraaklijnen in een punt S der basiskromme σ van den bundel (F^n) aan de oppervlakken F^n .

Deze rechten t_3 vormen volgens § 17 een kubisch kegelvlak. In een willekeurig vlak V door S liggen derhalve drie hoofdraaklijnen t_3 , die haar osculatiepunt in S hebben. Elk van deze rechten t_3 snijdt het door haar geosculeerde oppervlak nog in $n-3$ punten Q .

S is raakpunt van elf vierpuntige raaklijnen (zie § 19), dus elf punten Q liggen in S , m. a. w. S is een *elfvoudig* punt der m.pl. (Q) van de punten Q .

Hieruit volgt:

Het aantal snijpunten van (Q) met V bedraagt $3(n-3) + 11 = 3n + 2$, zoodat (Q) een kromme is van den graad $3n + 2$.

Wij voegen nu aan een punt Q toe de $n-4$ buiten het buigpunt en het punt Q gelegen snijpunten Q' van SQ met het betrokken oppervlak en projecteeren de puntenparen (Q, Q') uit een rechte l .

In een willekeurig vlak q door l liggen $3n + 2$ punten Q , daar (Q) een kromme is van den graad $3n + 2$. Aan elk punt Q zijn $n-4$ punten Q' toegevoegd, zoodat bij vlak q behooren $(3n + 2)(n-4)$ vlakken q' door l , resp. gaande door de punten Q' , die toegevoegd zijn aan de in q gelegen punten Q .

Deze symmetrische verwantschap heeft dus het kenmerkend getal $(3n + 2)(n-4)$, zoodat het aantal coïncidenties $2(3n + 2)(n-4)$ bedraagt.

De rechte l snijdt bovengenoemd kubisch oppervlak in drie punten. Op l rusten dus drie der hoofdraaklijnen in S . Elk van deze hoofdraaklijnen levert een $(n-3)(n-4)$ voudige coïncidentie, daar het vlak door l en een der $n-3$ punten Q , gelegen op een l snijdende rechte t_3 , samenvalt met elk der vlakken door l , resp. gaande door de $n-4$ aan Q toegevoegde punten Q' .

De overige $2(3n+2)(n-4) - 3(n-3)(n-4)$ coïncidenties zijn afkomstig van coïncidenties $Q \equiv Q'$. Het aantal der in een punt S van de basiskromme σ osculeerende raaklijnen $t_{3,2}$ bedraagt dus

$2(3n+2)(n-4) - 3(n-3)(n-4) = (n-4)(3n+13)$, m.a.w. het oppervlak (R_3) , gevormd door de osculatiepunten R_3 der raaklijnen $t_{2,3}$ van (F^n) , gaat met $(n-4)(3n+13)$ bladen door σ .

§ 29. Om den graad van (R_3) te bepalen, beschouwen wij de doorsnede van (R_3) met een oppervlak F^n van den bundel.

Volgens § 8 vormen de osculatiepunten der hoofdraaklijnen $t_{2,3}$ van F^n een kromme van den graad $n(n-4)(3n^2+5n-24)$.

Behalve deze kromme hebben (R_3) en F^n nog gemeen de $(n-4)(3n+13)$ maal te tellen basiskromme σ , zoodat de doorsnede van (R_3) met F^n een kromme is van den graad

$$n(n-4)(3n^2+5n-24) + n^2(n-4)(3n+13) = \\ 6n(n-1)(n-4)(n+4).$$

Hieruit volgt:

De osculatiepunten der hoofdraaklijnen $t_{2,3}$ van (F^n) vormen een oppervlak van den graad

$$6(n-1)(n-4)(n+4).$$

§ 30. Wij willen nu den graad bepalen van het kegelvlak (d) , dat gevormd wordt door de dubbelraaklijnen d van (F^n) , waarvan een der beide raakpunten in het punt S der basiskromme σ ligt.

De raaklijn s in S aan σ snijdt een oppervlak F^n buiten S nog in $n-2$ punten; s heeft nl. in S twee samenvallende

punten met σ en dus met elk oppervlak F^n gemeen. De snijpunten van s met de oppervlakken F^n vormen derhalve een involutie van den graad $n - 2$.

Vallen twee der $n - 2$ buiten S gelegen snijpunten van s met F^n , nl. S_1 en S_2 , samen, dan raakt s in het punt $S_1 \equiv S_2$ aan F^n ; aangezien s in S aan σ en dus aan elk oppervlak F^n raakt, is s voor dit oppervlak F^n een dubbelraaklijn, waarvan een der raakpunten in S ligt.

De involutie van den graad $n - 2$ heeft $2(n - 3)$ dubbelpunten, dus komt het $2(n - 3)$ maal voor, dat twee buiten S gelegen snijpunten van s met een der oppervlakken F^n samenvallen; s is dus voor $2(n - 3)$ oppervlakken een dubbelraaklijn, waarvan een der raakpunten in S ligt, m. a. w. s is een $2(n - 3)$ maal te tellen lijn van het oppervlak (d) .

Het raakvlak V in S aan een der oppervlakken F^n van den bundel snijdt F^n volgens een kromme c^n , die in S een dubbelpunt heeft (zie de inleiding).

Een dubbelraaklijn d aan F^n zal, als raaklijn in S aan F^n , in dit raakvlak V liggen en daar d F^n nog in een tweede punt raakt, is d een raaklijn uit S aan de doorsnede c^n .

Het dubbelpunt S van c^n verlaagt de klasse van c^n met twee, zoodat men uit een willekeurig punt P van V $n(n - 1) - 2$ raaklijnen aan c^n kan trekken. Ligt P in het dubbelpunt S , dan moet dit aantal nog met vier verminderd worden, zoodat men uit S $n(n - 1) - 6$ raaklijnen aan c^n , of wel dubbelraaklijnen aan F^n , kan trekken; iedere rechte in V door S raakt nl. in S aan F^n als lijn door S van het raakvlak in S aan F^n .

In het vlak V door S liggen derhalve $n(n - 1) - 6$ dubbelraaklijnen d en bovendien de $2(n - 3)$ maal als dubbelraaklijn d te tellen rechte s ; s ligt nl. als raaklijn in S aan de op F^n gelegen kromme σ in het raakvlak in S aan F^n .

De graad der doorsnede van V met het kegelvlak (d) bedraagt dus

$$n(n - 1) - 6 + 2(n - 3) = (n - 3)(n + 4).$$

Hieruit volgt:

Het kegelvlak (d) , gevormd door de dubbelraaklijnen d

van (F^n) , waarvan een der raakpunten in het punt S der basiskromme σ ligt, is van den graad

$$(n-3)(n+4).$$

§ 31. Het kegelvlak (d) snijdt dus een willekeurig vlak W door S volgens $(n-3)(n+4)$ lijnen d , die elk het betrokken oppervlak, behalve in S , nog in een tweede punt, R_2 , raken.

In W liggen, behalve deze $(n-3)(n+4)$ punten R_2 , nog de in S gelegen punten R_2 .

Wanneer voor een dubbelraaklijn d het tweede raakpunt, R_2 , eveneens in S ligt, dan heeft d in S met het betrokken oppervlak vier samenvallende punten gemeen, m. a. w. r is voor dit oppervlak F^n een vierpuntige raaklijn in S .

Volgens § 19 hebben *elf* vierpuntige raaklijnen t_4 haar raakpunt in een punt S der basiskromme σ van een bundel (F^n) , zoodat S een elfvoudig punt R_2 is.

In W liggen derhalve $(n-3)(n+4) + 11$ punten R_2 .

Hieruit volgt:

De m.pl. (R_2) der tweede raakpunten R_2 is een kromme van den graad $n^2 + n - 1$.

§ 32. Behalve de beide raakpunten S en R_2 heeft een dubbelraaklijn d nog $n-4$ punten V met het betrokken oppervlak gemeen.

Hieruit volgt, dat in W op de $(n-3)(n+4)$ in W gelegen dubbelraaklijnen $(n-3)(n+4)(n-4)$ punten V liggen.

Ligt een der punten V in S , dan heeft d met het betrokken oppervlak F^n in S en R_2 resp. 3 en 2 punten gemeen, m. a. w. d is een raaklijn $t_{2,3}$, waarvan het osculatiepunt in S ligt.

Volgens § 28 osculeeren $(n-4)(3n+13)$ rechten $t_{2,3}$ in het punt S een der oppervlakken van den bundel.

Wij vinden dus, dat S een $(n-4)(3n+13)$ voudig punt van de m.pl. (V) der snijpunten V is.

In het platte vlak W liggen dus blijkbaar $(n-3)(n+4)(n-4) + (n-4)(3n+13)$ punten V .

Hieruit volgt:

De m.pl. (V) is een kromme van den graad
 $(n - 4)(n^2 + 4n + 1)$.

§ 33. Valt een der punten V samen met het tweede raakpunt R_2 , dan heeft d in S en R_2 resp. 2 en 3 punten met het betrokken oppervlak gemeen, m. a. w. d is een raaklijn $t_{2,3}$, waarvan het raakpunt in S ligt.

Ter bepaling van het aantal coïncidenties $R_2 \equiv V$, voegen wij aan een punt R_2 toe de met R_2 op een dubbelraaklijn d gelegen punten V en projecteeren de puntenparen (R_2, V) uit een rechte l .

In een willekeurig vlak α door l liggen $(n - 4)(n^2 + 4n + 1)$ punten V , daar (V) een kromme is van den graad $(n - 4)(n^2 + 4n + 1)$. Aan elk dezer punten V is één punt R_2 toegevoegd, zoodat bij het vlak α behooren $(n - 4)(n^2 + 4n + 1)$ vlakken door l , resp. gaande door de verschillende punten R_2 , welke toegevoegd zijn aan de in α gelegen punten V .

Het eene kenmerkende getal der verwantschap, waarin de vlakken door l gerangschikt worden door de verwantschap $(R_2 V)$, is dus

$$(n - 4)(n^2 + 4n + 1).$$

In een vlak β door l liggen $n^2 + n - 1$ punten R_2 , daar de m.pl. (R_2) een kromme is van den graad $n^2 + n - 1$. Aan elk punt R_2 zijn $n - 4$ punten V toegevoegd, zoodat bij vlak β behooren $(n - 4)(n^2 + n - 1)$ vlakken door l , resp. gaande door de verschillende punten V , die toegevoegd zijn aan de in β gelegen punten R_2 .

Voor het tweede kenmerkende getal der verwantschap, waarin de vlakken door l gerangschikt worden, vinden wij dus

$$(n - 4)(n^2 + n - 1).$$

Hieruit volgt:

Het aantal coïncidenties bedraagt:

$$(n - 4)(n^2 + 4n + 1) + (n - 4)(n^2 + n - 1).$$

Daar het kegelvlak, dat gevormd wordt door de dubbelraaklijnen d , van den graad $(n - 3)(n + 4)$ is, snijdt l

dit kegelvlak in $(n-3)(n+4)$ punten, d. w. z. er rusten $(n-3)(n+4)$ rechten d op l . Elk dezer $(n-3)(n+4)$ dubbelraaklijnen vertegenwoordigt een $(n-4)$ voudige coïncidentie. Het vlak door l en het op een l snijdende lijn d gelegen punt R_2 valt nl. samen met elk der $n-4$ vlakken door l , resp. gaande door de verschillende aan R_2 toegevoegde punten V .

De overige $(n-4)(n^2+4n+1) + (n-4)(n^2+n-1) - (n-3)(n+4)(n-4)$ coïncidenties zijn afkomstig van coïncidenties $R \equiv V$.

Hieruit volgt:

Het aantal raaklijnen $t_{2,3}$, waarvan het raakpunt in S ligt, bedraagt:

$$(n-4)(n^2+4n+1) + (n-4)(n^2+n-1) - (n-3)(n+4)(n-4) = (n-4)(n^2+4n+12).$$

In S vallen derhalve $(n-4)(n^2+4n+12)$ raakpunten R van raaklijnen $t_{2,3}$ samen, zoodat σ een $(n-4)(n^2+4n+12)$ maal te tellen kromme van het door genoemde raakpunten gevormde oppervlak (R) is.

Ter bepaling van den graad van (R) beschouwen wij de doorsnede van dit oppervlak met een oppervlak F^n .

Volgens § 6 vormen de raakpunten R der raaklijnen $t_{2,3}$ van een oppervlak F^n een kromme van den graad

$$n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12).$$

Behalve deze kromme hebben F^n en (R) nog gemeen de $(n-4)(n^2+4n+12)$ maal te tellen basiskromme σ .

De graad der doorsnede van F^n met (R) bedraagt derhalve $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12) + n^2(n-4)(n^2+4n+12) = 2n(n-4)(n^3+2n^2+10n-12)$.

Hieruit volgt:

De raakpunten der raaklijnen $t_{2,3}$ van een bundel (F^n) vormen een oppervlak van den graad

$$2(n-4)(n^3+2n^2+10n-12).$$

§ 34. Beschouwen wij nu nog eens het kubisch kegelvlak, dat gevormd wordt door de hoofdraaklijnen t_3 van een bundel (F^n), waarvan het osculatiepunt ligt in het punt S der basiskromme σ .

Volgens § 16 is de raaklijn s in S aan σ een ribbe van dit kegelvlak.

Een willekeurig vlak V snijdt het kubisch kegelvlak volgens een kromme c^3 . De rechte s snijdt V , als lijn van het kegelvlak, in een punt P van deze doorsnede c^3 . Aangezien de klasse van c^3 3×2 bedraagt, kan men uit het op c^3 gelegen punt P $3 \times 2 - 2$ of 4 raaklijnen r aan c^3 trekken. Het vlak door SP en r is raakvlak aan het kegelvlak, zoodat men door s vier raakvlakken aan het kegelvlak kan leggen.

De rechte s is als raaklijn aan σ raaklijn voor elk oppervlak F^n en ligt dus in elk der raakvlakken in S , resp. aan de verschillende oppervlakken F^n . Eén der beide beschrijvende lijnen q van het kegelvlak, welke behalve s gelegen zijn in een vlak W , gaande door s , bepaalt aan welk oppervlak F^n het vlak W raakvlak is. De tweede in W gelegen lijn q is de andere hoofdraaklijn in S aan het oppervlak F^n , waarvoor W raakvlak is.

Vallen de beide hoofdraaklijnen q samen, zooals dit bij een raakvlak door s aan het kegelvlak het geval is, dan heeft het betrokken oppervlak in S een *parabolisch punt*.

Daar men door s vier raakvlakken aan het kegelvlak kan aanbrengen, is S voor vier oppervlakken een parabolisch punt, zoodat de basiskromme σ een viervoudige kromme is op de m.pl. der parabolische punten van den bundel (F^n).

Ter bepaling van den graad van deze m.pl. beschouwen wij de doorsnede van bedoelde m.pl. met een oppervlak F^n .

Volgens § 14 vormen de op een oppervlak F^n gelegen parabolische punten een kromme van den graad $4n(n-2)$. Behalve deze kromme heeft de m.pl. der parabolische punten van den bundel (F^n) met F^n nog gemeen de vier maal te tellen kromme σ , zoodat de graad van de doorsnede bedraagt:

$$4n(n-2) + 4n^2 = 8n(n-1).$$

Hieruit volgt:

De parabolische punten der oppervlakken van een bundel (F^n) vormen een oppervlak van den graad

$$8(n-1).$$

HOOFDSTUK III.

Afleiding van enkele der gebruikte formules.

§ 35. *Bepaling van het aantal der buigraakklijnen, die men uit een punt Z aan het oppervlak ϕ^n kan trekken.*

Snijdt men het oppervlak $a_x^n = 0$ met de rechte lijn YZ , voorgesteld door de vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 = \lambda y_1 + \mu z_1 \\ x_2 = \lambda y_2 + \mu z_2 \\ x_3 = \lambda y_3 + \mu z_3 \\ x_4 = \lambda y_4 + \mu z_4 \end{cases}, \text{ dan}$$

moeten de λ en μ van elk der n snijpunten voldoen aan de vergelijking

$$\begin{aligned} & \{a_1(\lambda y_1 + \mu z_1) + a_2(\lambda y_2 + \mu z_2) + a_3(\lambda y_3 + \mu z_3) + \\ & \quad + a_4(\lambda y_4 + \mu z_4)\}^n = 0 \text{ of } (\lambda a_y + \mu a_z)^n = 0 \text{ of} \\ & \lambda^n a_y^n + n \lambda^{n-1} \mu a_y^{n-1} a_z + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} \lambda^{n-2} \mu^2 a_y^{n-2} a_z^2 + \dots \\ & \quad \dots + \mu^n a_z^n = 0. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Zal de lijn YZ het oppervlak in Y snijden, dan ligt Y op het oppervlak, dus $a_y^n = 0$, zoodat de vergelijking gedeeld kan worden door μ en daardoor overgaat in:

$$\begin{aligned} & n \lambda^{n-1} a_y^{n-1} a_z + \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \mu a_y^{n-2} a_z^2 + \dots \\ & \quad \dots + \mu^{n-1} a_z^n = 0. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Elk der stellen λ en μ , welke aan (II) voldoen, beantwoordt aan één der buiten Y gelegen snijpunten van YZ met $a_x^n = 0$.

Zal YZ het oppervlak in Y raken, dan moet één der bovengenoemde snijpunten in Y vallen, dus moet aan (II) voldaan worden door $\mu = 0$, zoodat nu $n \lambda^{n-1} a_y^{n-1} a_z = 0$

of, daar $n \neq 0$ is, $a_y^{n-1} a_z = 0$. Wanneer men nu ook nog door μ deelt, gaat (II) over in:

$$\frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} a_y^{n-2} a_z^2 + \dots + \mu^{n-2} a_z^n = 0. \quad (\text{III})$$

Zal YZ buigraaklijn in Y zijn, dan moet bovendien $a_y^{n-2} a_z^2 = 0$, hetgeen op overeenkomstige wijze aangetoond kan worden.

Dus YZ is buigraaklijn in Y , als

$$\left. \begin{aligned} a_y^n &= 0 \\ a_y^{n-1} a_z &= 0 \\ a_y^{n-2} a_z^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Kiest men nu een bepaald punt Z , van waaruit men de buigraaklijnen ZY aan het oppervlak trekt, dan moeten de raakpunten Y liggen op de oppervlakken $a_y^n = 0$, $a_y^{n-1} a_z = 0$ en $a_y^{n-2} a_z^2 = 0$, welke oppervlakken resp. van den graad n , $n-1$ en $n-2$ in de coördinaten van Y zijn en dus $n(n-1)(n-2)$ snijpunten hebben.

Uit het punt Z kan men dus $n(n-1)(n-2)$ buigraaklijnen aan het oppervlak trekken.

Kiest men het punt Z op het oppervlak, dan moet elk der hoofdraaklijnen aan het oppervlak met het raakpunt in Z drie maal in rekening gebracht worden, dus

uit een op het oppervlak gelegen punt Z kan men $n(n-1)(n-2) - 6 = (n^2 + 2)(n-3)$ buigraaklijnen trekken.

Dat elk der hoofdraaklijnen, rakend in het punt Z , drie maal gerekend moet worden, ziet men gemakkelijk als volgt in.

Voor $n=3$ heeft elke hoofdraaklijn door een op ϕ^3 gelegen punt Z haar raakpunt in Z , daar zij anders meer dan drie punten met het derdegraads oppervlak gemeen zou hebben. Het aantal hoofdraaklijnen met raakpunt in Z bedraagt 2, terwijl men uit een buiten ϕ^3 gelegen punt $3 \times 2 \times 1$ of 6 hoofdraaklijnen aan ϕ^3 kan trekken. De 2 hoofdraaklijnen, rakend in Z , vertegenwoordigen dus 6 door Z gaande hoofdraaklijnen, zoodat zij elk drie maal geteld moeten worden.

§ 36. *Bepaling van het aantal der dubbelraaklijnen aan ϕ^n , waarvan een der raakpunten in het punt C van ϕ^n ligt.*

Alle lijnen, die ϕ^n in C raken, liggen in het raakvlak V in C aan ϕ^n . Dit raakvlak snijdt ϕ^n volgens een kromme ρ^n , die in C een dubbelpunt heeft. Zal de in C rakende lijn c ϕ^n nog in een tweede punt raken, dan moet c een uit C getrokken raaklijn aan ρ^n zijn. Zij moet nl. nog in een tweede punt C' twee samenvallende punten met ϕ^n en dus, als lijn van V , met ρ^n gemeen hebben. Aangezien ρ^n in C een dubbelpunt heeft, is de klasse van ρ^n gelijk aan $n(n-1)-2$.

Men kan door C twee raaklijnen trekken, die ρ^n in C raken, nl. één aan elk der door het dubbelpunt gaande takken. Daar een dergelijke raaklijn in C drie samenvallende punten met ρ^n , en dus met ϕ^n , gemeen heeft, is zij hoofd-raaklijn voor ϕ^n met raakpunt in C , en derhalve geen in C rakende dubbelraaklijn. Deze raaklijnen moeten dubbel geteld worden, daar zij ontstaan zijn door het samenvallen van twee raaklijnen, als gevolg van het tot de kromme naderen van een punt P tot C .

Men kan dus uit C $n(n-1)-2-2 \times 2 = (n-3)(n+2)$ raaklijnen aan ρ^n trekken, zoodat ook $(n-3)(n+2)$ dubbelraaklijnen een van haar raakpunten in C hebben.

Uit een punt C van een oppervlak ϕ^n kan men dus $(n-3)(n+2)$ dubbelraaklijnen aan ϕ^n trekken, die een van haar raakpunten in C hebben.

§ 37. *Bepaling van het aantal der dubbelraaklijnen, die men uit een punt Z aan een oppervlak ϕ^n kan trekken.*

Een plat vlak V door den top Z van het kegelvlak O , dat gevormd wordt door de raaklijnen r , getrokken uit een punt Z , aan een oppervlak ϕ^n , snijdt ϕ^n volgens een kromme c^n . Aangezien men uit het punt Z $n(n-1)$ raaklijnen aan de kromme c^n kan trekken en elk dezer raaklijnen in het raakpunt twee samenvallende punten met c^n en dus ook met ϕ^n gemeen heeft, m. a. w. een lijn r is, snijdt het vlak V het omhullingskegelvlak volgens $n(n-1)$ rechten r .

Hieruit volgt:

De raaklijnen, getrokken uit een punt Z aan een oppervlak ϕ^n , vormen

een kegelvlak O van den graad $n(n-1)$.

Onder de *klasse* van een oppervlak ϕ^n verstaat men het aantal raakvlakken aan ϕ^n , gaande door een willekeurige rechte AB .

Wanneer een vlak W door AB ϕ^n raakt in het punt C , ligt C op ϕ^n , op het eerste pooloppervlak van A t. o. v. ϕ^n als raakpunt der raaklijn AC uit A aan ϕ^n , alsook op het eerste pooloppervlak van B t. o. v. ϕ^n als raakpunt der raaklijn BC uit B aan ϕ^n , welke oppervlakken resp. van den graad $n, n-1$ en $n-1$ zijn en dus $n(n-1)^2$ snijpunten hebben. Door AB kan men derhalve $n(n-1)^2$ raakvlakken aan ϕ^n leggen, m. a. w.

de klasse van ϕ^n bedraagt $n(n-1)^2$.

Ook door de rechte ZY , gaande door den top Z van het omhullingskegelvlak O , zal men dus $n(n-1)^2$ raakvlakken aan ϕ^n kunnen leggen. Daar elk raakvlak door ZY aan ϕ^n tevens raakvlak aan het kegelvlak O is en ook omgekeerd een raakvlak door ZY aan O raakt aan ϕ^n , gaan door ZY even zooveel raakvlakken aan O , waaruit volgt, dat ook het kegelvlak O is een oppervlak van de klasse $n(n-1)^2$.

Wij snijden O nu met een vlak U , gaande door het punt Y , en krijgen dan als doorsnede een kromme $\alpha^{n(n-1)}$, aangezien O een oppervlak is van den graad $n(n-1)$.

Een raakvlak door YZ aan O snijdt U volgens een raaklijn uit Y aan de doorsnede $\alpha^{n(n-1)}$, terwijl ook een raaklijn uit Y aan $\alpha^{n(n-1)}$ de snijlijn is van U met een raakvlak door YZ aan O , zoodat het aantal der raaklijnen, die men uit Y aan $\alpha^{n(n-1)}$ kan trekken, overeenstemt met het aantal der raakvlakken aan O , gaande door YZ . Laatstgenoemd aantal bedraagt $n(n-1)^2$, dus

de klasse der doorsnede $\alpha^{n(n-1)}$ is gelijk aan $n(n-1)^2$.

Door een beschrijvende lijn r van het kegelvlak O gaat

in het algemeen één raakvlak aan ϕ^n , nl. het raakvlak in het raakpunt R van r . Dit vlak raakt tevens aan het kegelvlak O .

Is r dubbelraaklijn voor ϕ^n , rakend in de punten R_1 en R_2 , dan gaan door r twee raakvlakken aan ϕ^n , resp. rakend in R_1 en R_2 . Deze raakvlakken zijn ook raakvlakken voor het kegelvlak O , zoodat O blijkbaar met twee bladen door r gaat, m. a. w. r is dubbelribbe voor het omhullingskegelvlak. De beide raakvlakken door r snijden vlak U volgens twee raaklijnen aan $\alpha^{n(n-1)}$, die elkaar snijden in het snijpunt D van r met U , zoodat $\alpha^{n(n-1)}$ in D een dubbelpunt bezit.

Wij zien dus, dat elke dubbelraaklijn uit Z aan ϕ^n dubbelribbe voor het omhullingskegelvlak is, welke dubbelribbe weer een dubbelpunt der doorsnede $\alpha^{n(n-1)}$ levert.

Het aantal der dubbelraaklijnen, die men uit Z aan ϕ^n kan trekken, stemt dus blijkbaar overeen met het aantal der dubbelpunten van $\alpha^{n(n-1)}$.

Is r een der door Z gaande hoofdraaklijnen aan ϕ^n , dan kan men zich r uit een dubbelraaklijn ontstaan denken door het samenvallen der raakpunten R_1 en R_2 . Door r gaan nu twee samenvallende raakvlakken aan ϕ^n , en dus ook aan het kegelvlak O , zoodat O door r gaat met twee bladen, die een gemeenschappelijk raakvlak hebben, m. a. w. r is een keerribbe van het omhullingskegelvlak. Deze beide samenvallende raakvlakken snijden vlak U volgens twee samenvallende raaklijnen aan de doorsnede $\alpha^{n(n-1)}$, in het snijpunt K van r met U , m. a. w. $\alpha^{n(n-1)}$ heeft in K een keerpunt.

Elke hoofdraaklijn aan ϕ^n , gaande door Z , is blijkbaar een keerribbe van het omhullingskegelvlak, welke keerribbe weer een keerpunt der doorsnede $\alpha^{n(n-1)}$ levert.

Het aantal der door Z gaande hoofdraaklijnen stemt dus blijkbaar overeen met het aantal der keerpunten van $\alpha^{n(n-1)}$.

Volgens § 35 kan men uit een punt Z $n(n-1)(n-2)$ hoofdraaklijnen aan een oppervlak ϕ^n trekken; $\alpha^{n(n-1)}$ bezit derhalve $n(n-1)(n-2)$ keerpunten.

Aangezien de klasse eener kromme door een dubbelpunt met twee en door een keerpunt met drie verlaagd wordt,

is de klasse der doorsnede $\alpha^{n(n-1)}$ gelijk aan $n(n-1) \{n(n-1) - 1\} - 3n(n-1)(n-2) - 2$ maal het aantal dubbelpunten van $\alpha^{n(n-1)}$.

Daar wij reeds gevonden hebben, dat $\alpha^{n(n-1)}$ een kromme is van de klasse $n(n-1)^2$, krijgen wij de vergelijking: $n(n-1)^2 = n(n-1) \{n(n-1) - 1\} - 3n(n-1)(n-2) - 2$ maal het aantal dubbelpunten van $\alpha^{n(n-1)}$.

Het aantal dubbelpunten van $\alpha^{n(n-1)}$ bedraagt derhalve $\frac{1}{2} [n(n-1) \{n(n-1) - 1\} - 3n(n-1)(n-2) - n(n-1)^2] = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3)$.

Nu is het aantal dubbelraaklijnen aan ϕ^n , gaande door het punt Z , gelijk aan het aantal dubbelpunten van $\alpha^{n(n-1)}$.

Hieruit volgt:

Door het punt Z gaan $\frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3)$ dubbelraaklijnen aan het oppervlak ϕ^n .

Beschouwen wij nu het geval, dat het punt Z ligt op het oppervlak ϕ^n .

Volgens § 36 kan men uit $Z(n-3)(n+2)$ dubbelraaklijnen aan ϕ^n trekken, die een van haar raakpunten in Z hebben. Elk van deze dubbelraaklijnen vervangt twee der dubbelraaklijnen, die door een niet op ϕ^n gelegen punt gaan.

Dit ziet men gemakkelijk in, wanneer men $n=4$ stelt. Ligt punt Z op ϕ^4 , dan moet van elk der door Z gaande dubbelraaklijnen een der raakpunten in Z liggen, daar zij anders meer dan vier punten met het vierdegraadsoppervlak gemeen zou hebben. Het aantal der dubbelraaklijnen, die ϕ^n in Z raken, bedraagt $(4-3)(4+2) = 6$. Deze 6 dubbelraaklijnen moeten dus alle door Z gaande dubbelraaklijnen vertegenwoordigen.

Het aantal dubbelraaklijnen aan ϕ^4 , gaande door een buiten ϕ^4 gelegen punt, bedraagt $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$.

Hieruit volgt, dat elk der bovengenoemde 6 dubbelraaklijnen dubbel geteld moet worden.

Door een buiten het oppervlak ϕ^n gelegen punt kan men $\frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3)$ dubbelraaklijnen aan ϕ^n trekken.

Elk der $(n - 3)(n + 2)$ dubbelraaklijnen, waarvan een der raakpunten in Z ligt, moet twee maal in rekening gebracht worden bij de beschouwing der door Z gaande dubbelraaklijnen.

Hieruit volgt:

Het aantal der dubbelraaklijnen, gaande door een op ϕ^n gelegen punt Z en waarvan geen der raakpunten in Z ligt, bedraagt

$$\frac{1}{2} n (n - 1) (n - 2) (n - 3) - 2 (n - 3) (n + 2) = \\ \frac{1}{2} (n - 3) (n - 4) (n^2 + n + 2).$$

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Het is onmogelijk de oppervlakken en inhouden van figuren op juiste wijze elementair te behandelen.

II.

De gebruikelijke behandeling van integralen over gebieden (van een vlak) is onjuist en noodeloos lastig.

III.

De conclusie: «In een puntenreeks zijn ∞^5 involuties van den tweeden graad» is onjuist.

J. A. BARRAU. Analytische Meetkunde, Deel I bl. 84.

IV.

De stelling van STEWART behoort meer op den voorgrond gesteld te worden dan gewoonlijk geschiedt.

V.

Bij de beschrijving van flitspectra, opgenomen met de prisma-camera, verdient het aanbeveling de sterkte der flitsboogjes op te geven voor *eenige* punten langs den omtrek.

VI.

De besluiten van ESKELAND over de intensiteitsverhoudingen der componenten van het kwiktriplet $2p - 2s$ zijn niet voldoende door zijn proeven gestaafd.

Phys. Z. 28. 89. 1927.

VII.

De inhoud van het artikel van WYNN-WILLIAMS «An investigation into the Theory of the *Three Point Gap*» is niet in overeenstemming met den titel.

Phil. Mag. Feb. 1926. Vol. 1. N^o. 2. p. 353.

VIII.

Ten onrechte meent CROMMELIN, dat door JAN VAN MUSSCHENBROEK geen luchtpompen met scheeve cylinder vervaardigd zijn.

Physica. 7. 176. 1927.

