P. oct.
1627

P. oct.
1627

P. oct. 1627
Maart 1889 N. 1
P 8 - 1627

VERZAMELING VAN VRAAGSTUKKEN

OP HET GEBIED DER

Analytische Meetkunde van het Platte Vlak.

TOEPASSINGEN VAN DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

DOOR

Dr. P. J. HOLLMAN.

ALKMAAR,
HERMs. COSTER & ZOON.
1888.

TYP. ZUID-HOLL. BOEK- EN HANDELSDRUKKERIJ.

VRAAGSTUKKEN.

1. Zoek de vergelijking eener vlakke kromme lijn, bij welke alle subtangenten de onveranderlijke lengte l hebben.

2. Zoek eene vlakke kromme lijn, bij welke de subtangenten gelijk zijn aan n maal de abscissen.

3. Wat verkrijgt men, wanneer in het vorig vraagstuk de subtangenten gelijk aan n maal de ordinaten genomen worden?

4. Zoek de vlakke kromme lijn, bij welke de verhouding der ordinaten tot de subtangenten dezelfde is als die eener onveranderlijke lijn h tot het verschil van abscis en ordinaat.

5. Zoek de vlakke kromme lijn bij welke alle subnormalen de onveranderlijke lengte l hebben.

6. Hetzelfde als in het vorig vraagstuk gevraagd, wanneer de subnormalen gelijk zijn aan n maal de abscissen.

7. Zoek de vlakke kromme lijn, bij welke de beide coordinaten middenevenredig zijn tusschen de subnormaal en eene standvastige lijn h.

8. Bepaal de vlakke kromme lijn, bij welke de lengte der tangenten, gerekend van het punt van aanraking tot de as der x, de onveranderlijke lengte g hebben.

9. Zoek de kromme, bij welke de tangens gelijk is aan n maal de abscis.

10. Men vraagt naar de vlakke kromme, bij welke de verhouding van subtangens tot tangens dezelfde is als die der abscis tot eene standvastige lijn h.

11. Van welke kromme is de normaal altijd gelijk aan n maal de abscis?

12. Zoek de kromme, bij welke de beide coordinaten middenevenredig zijn tusschen de normaal en eene onveranderlijke lijn h.

13. Zoek de kromme, bij welke alle subtangenten, in poolcoordinaten gerekend, de onveranderlijke lengte g hebben.

14. Hetzelfde als in het vorig vraagstuk wordt gevraagd, wanneer de subtangens gelijk is aan n maal den voerstraal.

15. Hoe wordt de rekening, wanneer alle pool-subnormalen de onveranderlijke lengte g hebben?

16. Zoek nog de kromme, bij welke de pool-subnormalen gelijk zijn aan n maal den voerstraal.

17. Zoek de kromme, bij welke de pooltangenten de onveranderlijke lengte $2r$ hebben.

18. Zoek de kromme, bij welke de som van pool-subtangens en pool-subnormaal gelijk is aan n maal de poolnormaal.

19. Zoek de kromme, bij welke de poolnormaal middenevenredig is tusschen eene standvastige lijn h en de som van pool-subtangens en pool-subnormaal.

20. Zoek eene kromme lijn, bij welke alle normalen door een vast punt (a, b) gaan.

21. Zoek eene kromme, welke de beide volgende eigenschappen heeft:

eerstens dat alle raaklijnen door een gegeven punt gaan;

wanneer men, ten anderen, in twee bepaalde punten eener vaste regte lijn, loodlijnen oprigt, dan moet het product dier loodlijnen, begrensd door de vaste lijn en eene der raaklijnen, steeds dezelfde gegeven waarde k hebben.

22. Zoek eene kromme, onder voorwaarde dat de vlakke inhoud, begrepen tusschen de kromme, de as der x en de ordinaten behoorende bij de abscissen a en α gelijk zij aan g^2.

23. Zoek eene kromme, bij welke de boog, zich uitstrekkende van $x = a$ tot $x = \alpha$ eene gegevene lengte h heeft.

24. De inhoud tusschen abscis, vaste ordinaat en eene kromme is voor elk harer punten evenredig met den inhoud van den regthoek, gevormd door abscis en ordinaat der eindpunten van den boog; welke is die kromme?

25. De inhoud tusschen abscis, vaste ordinaat en eene kromme is voor elk harer punten evenredig met den regthoek gevormd door abscis en ordinaat van het eene eindpunt van den boog, verminderd met den regthoek gevormd door abscis en ordinaat van het andere eindpunt; welke is de kromme?

26. Zoek eene kromme, bij welke de inhoud tusschen eene willekeurige abscis, eene vaste ordinaat en de kromme zelve ten allen tijde evenredig is met het verschil van twee regthoeken, van welke de eene gevormd wordt door eene bepaalde lijn h en de ordinaat van het aanvangspunt des boogs, de andere door de ordinaat van het eindpunt en dezelfde lijn h.

27. Zoek de kromme, voor welke het vierkant der ordinaten middenevenredig is tusschen een onveranderlijk vierkant g^2 en den inhoud, begrensd door de as der x van den oorsprong der coordinaten af gerekend, de kromme zelve en een ordinaat.

28. Voor welke kromme geldt de regel dat de inhouden van alle poolsectors, die van hetzelfde punt af geteld worden, tot elkander staan als de vierkanten der voerstralen, behoorende bij de uiteinden der bogen?

29. Men vraagt hetzelfde als in het vorig vraagstuk, onder voorwaarde dat de poolsectors tot elkander staan als het verschil van de kwadraten der voerstralen, behoorende bij de aanvangs- en eindpunten.

30. Men vraagt naar de kromme, bij welke alle bogen, van hetzelfde punt af geteld, tot elkander staan als de ordinaten der eindpunten.

31. Zoek de kromme, bij welke de boog even lang is als het verschil der voerstralen van de uiteinden diens boogs.

32. Zoek de kromme, bij welke elke boog, mits bij hetzelfde punt aanvangend, middenevenredig is tusschen eene onveranderlijke lijn g en het verschil van de voerstralen der uiteinden van den boog.

33. Bij welke kromme staat de vlakke inhoud tot den overeenkomstigen boog in eene constante verhouding?

34. Zoek de kromme, bij welke het vierkant der bogen, gerekend van een vast punt af, gelijk is aan twee malen den regthoek gevormd door de coordinaten van het eindpunt des boogs.

35. Men heeft eene kromme lijn en beschrijft op hetzelfde coordinatenstelsel eene tweede kromme, welker ordinaten gelijk zijn aan de bogen der eerste kromme. Wanneer nu de inhoud, begrensd door abscis en boog bij de tweede kromme, tot den overeenkomstigen inhoud bij de eerste kromme in eene onveranderlijke verhouding staat, vraagt men die kromme te bepalen.

36. Door een punt zijn een onbepaald aantal regte lijnen getrokken; men vraagt naar de vergelijking der kromme, welke al deze lijnen snijdt onder een hoek, welks goniometrische tangens gelijk g is.

37. Men vraagt de kromme te bepalen, die al de logarithmische spiralen

$$z^1 = a\, e^{\frac{\varphi^1}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

onder den hoek ontmoet, welks goniometrische tangens gelijk g is.

38. Zoek de kromme, die alle parabolen van dezelfde orde met gemeenschappelijke hoofdas en top, maar veranderlijken parameter, loodregt doorsnijdt.

39. Een stelsel van gelijkvormige ellipsen is zoo om eenig middelpunt beschreven, dat al hare hoofdassen langs dezelfde regte lijn vallen; men vraagt naar de kromme, die al deze ellipsen onder regte hoeken ontmoet.

40. Zoek de kromme, die regthoekig alle lijnen ontmoet, voorgesteld door de vergelijking

$$\left(\frac{x^1}{a}\right)^n + \left(\frac{y^1}{b}\right)^n = 1,$$

waarin a het willekeurige bestanddeel is.

41. Zoek nog de kromme, die alle ellipsen, welke hetzelfde brandpunt hebben, loodregt snijdt.

42. Zoek ook de kromme, die alle parabolen met gemeenschappelijken top en veranderlijken parameter zoo doorsnijdt, dat in de ontmoetingspunten de subtangens der kromme gelijk is aan n maal de subtangens der doorgesneden parabool.

43. Men zoeke de kromme, welke alle parabolen met gemeenschappelijken top en veranderlijken parameter zoo snijdt,

dat in de ontmoetingspunten de subnormaal der kromme gelijk is aan de som van subnormaal en subtangens der doorgesneden lijn.

44. Wanneer in de vergelijking $y^1 = ax^{1^n}$ aan het bestanddeel a alle mogelijke waarden worden toegekend, verkrijgt men een onbepaald aantal kromme lijnen; men vraagt nu eene andere kromme zoodanig te bepalen, dat alle hoeken door deze met de gegevene krommen gemaakt door de ordinaat van het snijpunt middendoor gedeeld worden.

45. Bepaal de kromme, die eene gewone parabool, welke in de rigting harer as bewogen wordt, in elken stand zoo ontmoet, dat in het punt van doorsnede de tangens der gevraagde kromme slechts een m^{de} deel is van de tangens der parabool; de lengte der beide tangenten wordt hier gerekend van het punt van aanraking tot eene vaste lijn, loodregt op de as der parabool.

46. Bepaal de kromme, welke alle parabolen met gemeenschappelijke hoofdas en top, maar met veranderlijken parameter zoo snijdt, dat de vlakken, begrensd door elk dezer parabolen, en de coordinaten van het punt van doorsnede dezelfde waarde k^2 bekomen.

47. Zoek de kromme, welke alle door hetzelfde punt gaande regte lijnen zoo snijdt, dat op elke dezer lijnen het stuk, gelegen tusschen het punt van doorsnede en de vaste abscis c, dezelfde lengte k bekomt.

48. Men vraagt naar de kromme, welke alle conische parabolen met gemeenschappelijke hoofdas en top, maar met veranderlijken parameter zoo snijdt, dat de lengte der bogen dezer parabolen, gerekend van den oorsprong tot het punt van doorsnede, voor allen gelijk aan k wordt.

49. Eene gewone parabool rolt zonder glijden langs eene regte lijn; men vraagt de kromme te bepalen, die door het brandpunt beschreven wordt.

50. Eene hyperbolische spiraal rolt zonder glijden langs eene gegeven regte lijn; men vraagt de kromme te bepalen, die door de pool der spiraal beschreven wordt.

51. Zoek de kromme, die, langs eene gewone parabool rollende, eene regte lijn loodregt op de as der parabool beschrijft.

52. Langs welke kromme lijn moet een gegeven ellips rollen, opdat een harer brandpunten eene regte lijn zal beschrijven?

53. Langs welke kromme moet de cardioide rollen, wanneer haar keerpunt eene regte lijn beschrijven zal?

54. Zoek voor regthoekige coordinaten de vergelijking eener vlakke kromme, bij welke alle kromtestralen de onveranderlijke lengte h hebben.

55. Zoek voor regthoekige coordinaten de vergelijking eener vlakke kromme, welke in al hare punten de eigenschap heeft, dat de abscis middenevenredig is tusschen den kromtestraal en eene gegevene lengte h.

56. Hoe wordt de rekening in het vorig vraagstuk bedoeld, wanneer de kromtestraal middenevenredig is tusschen de abscis en eene gegevene lengte h?

57. Zoek nogmaals de kromme in de veronderstelling, dat de kromtestraal omgekeerd evenredig is met de abscis.

58. Zoek met betrekking tot een regthoekig coordinatenstelsel eene vlakke kromme, bij welke de kromtestralen omgekeerd evenredig zijn met de goniometrische tangenten der hoeken, begrepen tusschen de as der abscissen en de raaklijnen aan de kromme.

59. Zoek nog de kromme, bij welke de kromtestralen evenredig zijn met de hoeken, tusschen de raaklijnen en de as der x begrepen.

60. Bij welke kromme staan de kromtestralen in bepaalde verhouding tot de normalen?

61. Zoek, gebruik makende van poolcoordinaten, de kromme, bij welke alle kromtestralen dezelfde lengte r hebben.

62. Zoek, nogmaals gebruik makend van poolcoordinaten, de kromme, bij welke de kromtestralen tot de voerstralen in eene bepaalde verhouding staan.

63. Bij welke kromme lijnen staan de kromtestralen in bepaalde verhouding tot de normalen? Voor de beantwoording dier vraag make men gebruik van poolcoordinaten.

64. Bij welke kromme lijnen staan de kromtestralen in bepaalde verhouding tot de (pool-) tangenten?
Bij de beantwoording dezer vraag make men wederom gebruik van poolcoordinaten.

65. Bij welke kromme zijn de kromtestralen gelijk aan n maal de koorden, gelegen tusschen het aanrakingspunt en een ander op den omtrek der kromme zich bevindend vast punt?

66. Bepaal de kromme, bij welke alle kromtecirkels door het vaste punt (g, h) gaan.

67. Bepaal de kromme, bij welke alle kromtecirkels door twee vaste punten gaan.

68. Bij welke vlakke kromme lijn is de abscis van het middelpunt des kromtecirkels gelijk aan n maal de abscis van het raakpunt?

69. Bij welke vlakke kromme lijn is de ordinaat van het middelpunt des kromtecirkels gelijk aan n maal de ordinaat van het raakpunt?

70. Bepaal de vlakke kromme lijn, bij welke de som der coordinaten van het middelpunt des kromtecirkels gelijk is aan het verschil der coordinaten van het aanrakingspunt.

71. Zoek eene kromme, bij welke de vlakteinhoud tusschen abscissenas en boog, steeds van dezelfde ordinaat af gerekend, in bepaalde verhouding staat tot de goniometrische tangens van den hoek, gelegen tusschen de as der x en de raaklijn, getrokken in het punt, waar de boog haar einde vindt.

72. Zoek eene kromme, bij welke de vlakteinhoud tusschen abscissenas en boog, steeds van dezelfde ordinaat af gerekend, in bepaalde verhouding staat tot den inhoud van den driehoek, begrensd tusschen ordinaat, tangens en subtangens.

73. Zoek eene kromme, bij welke de vlakteinhoud tusschen abscissenas en boog, steeds van dezelfde ordinaat af gerekend, in bepaalde verhouding staat tot den inhoud van het verschil van twee driehoeken, den eenen begrensd door ordinaat, tangens en subtangens van het aanvangspunt, den ander door dezelfde lijnen van het eindpunt des boogs.

74. Zoek eene vlakke kromme lijn, bij welke de inhouden der poolsectoren, allen van hetzelfde punt af gerekend, tot elkander staan als de driehoeken, die op het einde van den boog gevormd worden door de pool, de pooltangens en poolsubtangens.

75. Zoek eene kromme, bij welke de inhouden der poolsectoren, allen van hetzelfde punt af gerekend, tot elkander staan als het verschil der beide driehoeken, begrensd door pool, pooltangens en poolsubtangens van aanvangs- en eindpunt des boogs.

76. Zoek eene kromme, bij welke de vlakteinhoud tusschen abscissenas en boog steeds van dezelfde ordinaat af gerekend, in bepaalde verhouding staat tot den inhoud van

het verschil van twee driehoeken, den eenen begrensd door ordinaat, normaal en subnormaal van het aanvangspunt, den ander door dezelfde lijnen van het eindpunt des boogs.

77. Zoek eene vlakke kromme lijn, bij welke de inhouden der poolsectoren, allen van hetzelfde punt af gerekend, tot elkander staan als de verschillen van twee driehoeken, respectievelijk begrensd door pool, poolnormaal en poolsubnormaal van het begin- en het eindpunt des boogs.

78. Zoek eene vlakke kromme lijn, bij welke de lengten der bogen, die allen van hetzelfde punt af gemeten worden, zich verhouden als de goniometrische tangenten der hoeken, begrepen tusschen eene vaste lijn en de raaklijnen aan de uiteinden der bogen.

79. Men vraagt hetzelfde als in het vorig vraagstuk, met deze wijziging dat de hoek en niet de goniometrische tangens van den hoek in rekening gebragt wordt.

80. Zoek eene vlakke kromme lijn, bij welke de lengten der bogen, die allen van hetzelfde punt af gemeten worden, zich verhouden als de stukken eener vaste regte lijn, begrensd door een vast punt en door de raaklijnen, getrokken aan de eindpunten der bogen.

81. Men vraagt hetzelfde als in het vorig vraagstuk, met deze wijziging, dat de bogen zich zullen verhouden als de stukken der vaste lijn, begrensd tusschen de raaklijn van het aanvangspunt en die van het eindpunt der bogen.

82. Zoek eene vlakke kromme lijn, bij welke de lengten der bogen, allen van hetzelfde punt af geteld, tot elkander staan als het verschil der raaklijnen van het aanvangs- en het eindpunt der bogen.

83. Zoek eene vlakke kromme lijn, bij welke de lengten

der bogen, allen van hetzelfde punt af geteld, tot elkander staan als het verschil der pooltangenten van het aanvangs- en eindpunt der bogen.

84. Hoe wordt de rekening als de bogen in het vorig vraagstuk bedoeld tot elkander staan als de verschillen tusschen de poolnormalen van de aanvangs- en eindpunten der bogen?

85. Men heeft eene vlakke kromme lijn, en beschrijft op hetzelfde coordinatenstelsel eene tweede kromme, welker ordinaten gelijk zijn aan de bogen der eerste kromme. Wanneer nu de vlakteinhouden der tweede kromme, gelegen tusschen de as der x en den boog, en allen van hetzelfde punt af geteld, tot elkander staan als de ordinaten, behoorende tot de eindpunten der bogen van de eerste kromme, vraagt men hieruit beide lijnen te berekenen.

86. Bij welke kromme zijn de lengten der bogen, allen van hetzelfde punt af gerekend, evenredig met de kromtestralen, behoorende bij de eindpunten der bogen?

87. Bij welke kromme is de som van het vierkant der bogen, die allen van hetzelfde punt af geteld worden, en het vierkant der kromtestralen, behoorende bij de eindpunten der bogen, gelijk aan een gegeven vierkant?

88. Bij welke kromme is de kromtestraal in elk punt in onveranderlijke verhouding tot den kromtestraal harer ontwondene, in het punt, waar hij deze ontmoet?

89. Bij welke kromme lijn is de kromtestraal evenredig met het vierkant van den kromtestraal harer ontwondene, in het punt, waar hij deze ontmoet?

90. Zoek nog de kromme, bij welke het vierkant van den kromtestraal evenredig is aan den kromtestraal der ontwondene, voor het punt waarin hij deze ontmoet.

91. Hoe wordt de rekening wanneer de kromtestralen in de vorige vraagstukken genoemd omgekeerd evenredig zijn?

92. Bepaal nog de kromme, wanneer de som van de vierkanten der kromtestralen, in de vorige vraagstukken genoemd, gelijk is aan een gegeven vierkant.

93. Zoek, ten laatste, de vergelijking der kromme lijn, wanneer de kromtestralen, in de vorige vraagstukken vermeld, tot elkander in dezelfde reden staan als de beide coordinaten der ellips, dat is, wanneer men heeft

$$\frac{R^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1.$$

94. Zoek eene kromme lijn, welke het licht zoo terugkaatst dat het zich daarna in een punt vereenigt.

95. Zoek eene kromme lijn, welke het licht zoo breekt, dat het na den doorgang zich in een pnnt vereenigt.

96. Bepaal de kromme lijn door welke evenwijdig invallende lichtstralen zoo teruggekaatst worden, dat zij eene gegevene kromme als catacaustica opleveren.

97. Zoek eene kromme lijn, door welke evenwijdig opvallende lichtstralen zoo gebroken worden, dat zij eene gegevene kromme als diacaustica opleveren.

98. Zoek eene kromme lijn, welke de lichtstralen zoo terugkaatst, dat de catacaustica

$$\eta = m\xi + N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ontstaat.

99. Zoek eene kromme lijn, door welke de lichtstralen zoo gebroken worden dat zij de diacaustica $\eta = m\xi + N$ vormen.

100. Zoek eene kromme lijn, welke de lichtstralen zoo terugkaatst dat de catacaustica

$$\eta^3 = h\xi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ontstaat.

OPLOSSINGEN DER VRAAGSTUKKEN.

---

1. De lengte der subtangens wordt bepaald door de differentiaalformule $y : \frac{dy}{dx}$, en krachtens de opgave van het vraagstuk moet $y \times \frac{dx}{dy} = l$ zijn, zoodat men heeft

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{l},$$

dat is, na integreren,

$$log \frac{y}{A} = \frac{x}{l} \text{ of } y = A\, e^{\frac{x}{l}},$$

zijnde de vergelijking der logarithmische kromme.

Voor de onbepaalde constante, door integreren ontstaan, kan men elke willekeurige waarde stellen, ten blijke dat er een onnoemelijk aantal logarithmische lijnen bestaan, die aan het vraagstuk voldoen.

Wil men de constante bepalen, dan kan dit geschieden door nog eene voorwaarde in het vraagstuk op te nemen, om iets te noemen, de voorwaarde dat de lijn door het punt $(x_1\, y_1)$ zal gaan. Dit geeft aanleiding tot de vergelijking

$$y_1 = A\, e^{\frac{x_1}{l}},$$

waaruit men A oplost en in de oorspronkelijk gevonden vergelijking overbrengt; deze wordt daardoor

$$y = y_1\, e^{\frac{x - x_1}{l}},$$

waarin nu alles bepaald is.

Men kan, om een tweede voorbeeld te noemen, vragen dat in het punt met de abscis x_1 overeenkomende, de tangens

eene bepaalde lengte l_1 zal hebben. Die voorwaarde geeft aanleiding tot de vergelijking

$$l^2 + A^2 e^{\frac{2x_1}{l}} = l_1^2.$$

Elimineert men nu A tusschen deze en de oorspronkelijke vergelijking, dan komt er

$$y = e^{\frac{x-x_1}{l}} \sqrt{(l_1^2 - l^2)}.$$

Wegens het wortelteeken bestaan er twee logarithmische krommen, die symmetrisch ten opzigte van de as der x liggen.

De lezer beproeve de oplossing, wanneer bedongen is dat in het punt met de abscis x_1 overeenkomende de subnormaal eene bepaalde lengte l_1 zal hebben; hij zal vinden

$$y = e^{\frac{x-x_1}{l}} \sqrt{l l_1}.$$

Men kan, om nog een voorbeeld te kiezen, vragen naar de logarithmische lijn, die met de as der x en met de ordinaten, behoorende bij $x = x_1$ en $x = x_2$, eene vlakte van den inhoud I insluit. Die voorwaarde wordt uitgedrukt door

$$\int_{x_1}^{x_2} y \, . \, dx = I.$$

Brengt men hierin voor y de waarde $A e^{\frac{x}{l}}$ over, en integreert men tusschen de vastgestelde grenzen, dan zal men vinden

$$\left(e^{\frac{x_2}{l}} - e^{\frac{x_1}{l}}\right) A \, . \, l = I,$$

en de waarde van A, uit deze afgezonderd en in de oorspronkelijke vergelijking overgebragt, geeft

$$\left(e^{\frac{x_2}{l}} - e^{\frac{x_1}{l}}\right) l \, . \, y = I e^{\frac{x}{l}},$$

waarmede aan den eisch van het vraagstuk voldaan is.

2. Dit voorstel geeft aanleiding tot de vergelijking

$$y \times \frac{dx}{dy} = n x \text{ of } n \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

waaruit door integreren volgt $y^n = A \,.\, x$, of de vergelijking eener parabool van de n^{de} orde. Is $n = 2$, dan vindt men $y^2 = A\, x$, dat is de conische parabool of die van Appolonius.

Wil men dat de lijn door het punt $(x_1\ y_1)$ zal gaan, dan heeft men ${y_1}^n = A\, x_1$, waaruit men de waarde van A kan bepalen, en die overbrengen in de oorspronkelijke vergelijking, als wanneer zij wordt

$$y^n = \frac{{y_1}^n}{x_1} \,.\, x.$$

Zoekt men de parabool, bij welke de raaklijn, behoorende bij $x = x_1$, met de as der x een hoek maakt, welks goniometrische tangens door de bepaalde getallenwaarde m wordt aangegeven, dan geeft deze voorwaarde aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{A^{\frac{1}{n}}}{n} \,.\, {x_1}^{\frac{1-n}{n}} = m,$$

wijl de goniometrische tangens van den hoek, gevormd door de raaklijn en de as der x, in het algemeen door $\frac{d\,y}{d\,x}$ bepaald wordt. Brengt men de waarde van A of $m^n\, n^n \,.\, {x_1}^{n-1}$ over in de oorsponkelijke vergelijking, dan wordt zij

$$y^n = m^n\, n^n\, {x_1}^{n-1}\, x.$$

3. De regte lijn, want de differentiaalvergelijking

$$y \times \frac{d\,x}{d\,y} = n\, y$$

geeft terstond $\mathrm{d}\,x = n\, d\,y$, waaruit door integreren volgt

$$x = n\, y + A.$$

4. De voorwaarde in het vraagstuk geeft aanleiding tot de evenredigheid

$$y : y \times \frac{d\,x}{d\,y} = h : (y - x),$$

waaruit men achtereenvolgens afleidt

$$h\, d\,x = (y - x)\, d\,y,$$
$$h\,(d\,x - d\,y) = (y - h - x)\, d\,y,$$

$$\frac{dx - dy}{h + x - y} = -\frac{dy}{h},$$

en, na integreren,

$$log \frac{h + x - y}{A} = -\frac{y}{h},$$

of $$x = y - h + A e^{-\frac{y}{h}}.$$

Is de constante $A = 0$, dan gaat de gevonden transcendentale vergelijking over in de algebraische $y = x + h$.

5. Hier wordt de differentiaalvergelijking

$$y \times \frac{dy}{dx} = l,$$

waaruit door integreren volgt

$$y^2 = 2lx + A,$$

of de vergelijking eener parabool. De top der parabool ligt daar, waar $x = -\frac{A}{2l}$ is, en de constante door het integreren verkregen heeft geen invloed op den vorm der parabool, maar wel op het nulpunt der coordinaten.

6. Integreert men de hierop betrekking hebbende differentiaalvergelijking

$$y \times \frac{dy}{dx} = nx,$$

dan vindt men $y^2 = nx^2 + A$ of de gewone conische hyperbool.

Waren de subnormalen genomen aan n maal de ordinaten, dan had men wederom eene regte lijn gevonden.

7. De evenredigheid in het vraagstuk bedoeld, wordt uitgedrukt door

$$y \times \frac{dy}{dx} : y = x : h,$$

waaruit $x\,dx = h\,dy$, of, na integreren, $x^2 = 2hy + A$, welke de vergelijking eener parabool is.

8. Het vraagstuk geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{y \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\frac{dy}{dx}} = g,$$

welke zich met weinig moeite laat herleiden tot

$$dx = \frac{\sqrt{(g^2-y^2)}}{y}\, dy.$$

Zet men hierin u voor $\sqrt{(g^2-y^2)}$, dan gaat zij over in

$$dx = -\frac{u^2\, du}{g^2-u^2},$$

of in $$dx = \left(1 - \frac{g}{2}\frac{1}{g-u} - \frac{g}{2}\frac{1}{g+u}\right) du.$$

Integreert men deze laatste, dan komt er

$$x + A = u + \frac{g}{2} log \frac{g-u}{g+u},$$

of, u door de oorspronkelijke waarde $\sqrt{(g^2-y^2)}$ vervangende,

$$x + A = \sqrt{(g^2-y^2)} + \frac{g}{2} log \frac{g-\sqrt{(g^2-y^2)}}{g+\sqrt{(g^2-y^2)}}.$$

Slaat men acht op het teeken dat voor de wortelgrootheid geplaatst kan worden, dan zal men bevinden dat de kromme vier congruente takken heeft.

9. Dit vraagstuk geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{y \sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\frac{dy}{dx}} = n\, x,$$

waarvoor men ook schrijven kan $\sqrt{(n^2 x^2 - y^2)}\, dy = y\, dx$.

Stelt men nu $\sqrt{(n^2 x^2 - y^2)} = u\, x$, dan kan men y en dy in u en du uitdrukken, waardoor de differentiaalvergelijking rationaal wordt; men zal vinden

$$\frac{dx}{x} = \frac{-u^2\, du}{(n+u)(n-u)(1-u)},$$

of

$$2(n+1)(n-1)\frac{dx}{x} = -n(n-1)\frac{du}{n+u} + n(n+1)\frac{du}{n-u} - 2\frac{du}{1-u},$$

waaruit door integreren volgt

$$log\, x^{2(n+1)(n-1)} + C = log\left\{\left(\frac{1}{n+u}\right)^{n(n-1)} \cdot \left(\frac{1}{n-u}\right)^{n(n+1)} \cdot (1-u)^2\right\}$$

dat is

$$log\, x^{2(n+1)(n-1)} + C = log\left\{\left(\frac{1}{n^2-u^2}\right)^{n(n+1)} \cdot (n+u)^{2n} \cdot (1-u)^2\right\}.$$

Brengt men hierin nu wederom $u = \sqrt{(n^2x^2 - y^2)} : x$ over, en geeft men aan de constante C den vorm $2\, log\, A$, dan vindt men ten slotte

$$A\, y^{n(n+1)} = (nx + \sqrt{(n^2x^2 - y^2)})^n \cdot (x - \sqrt{(n^2x^2 - y^2)}).$$

Men kan ook $nx = z\sqrt{(n^2x^2 - y^2)}$ stellen, x en dx in z en dz uitdrukken, integreren en herleiden, als wanneer men tot dezelfde uitkomst zal geraken. De lezer zal goed doen zich hiervan door de uitvoerige bewerking te overtuigen; hij bedenke dat, wanneer het verschil tusschen twee langs onderscheidene wegen verkregen integralen constant is, de laatste dezelfde beteekenis hebben. Dat verschil valt bovendien weg, als de constante door deze of gene voorwaarde bepaald wordt.

Vraagt men naar de lijn, bij welke de tangenten gelijk zijn aan n maal de ordinaten, dan vindt men de regte lijn $x = \sqrt{(n^2 - 1)}\, y + A$.

10. Voor de hier gevraagde verhouding kan men schrijven

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} : \frac{y\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}}{\frac{dy}{dx}} = x : h,$$

of

$$dy = \frac{\sqrt{(h^2 - x^2)}}{x}\, dx.$$

Deze differentiaalvergelijking wordt rationaal, wanneer men $\sqrt{(h^2 - x^2)} = z$ stelt, en het integreren geeft

$$y + A = \sqrt{(h^2 - x^2)} + \frac{h}{2}\, log\, \frac{x^2}{(h + \sqrt{(h^2 - x))^2}},$$

maar

$$\frac{x^2}{(h + \sqrt{(h^2 - x^2)})^2} = \frac{(h + \sqrt{(h^2 - x^2)})\,(h - \sqrt{(h^2 - x^2)})}{(h + \sqrt{(h^2 - x^2)})^2}$$

$$= \frac{h - \sqrt{(h^2 - x^2)}}{h + \sqrt{(h^2 - x^2)}},$$

zoodat men ten slotte heeft

$$y + A = \sqrt{(h^2 - x^2)} + \frac{h}{2} \log \frac{h - \sqrt{(h^2 - x^2)}}{h + \sqrt{(h^2 - x^2)}}.$$

11. Om die vraag te beantwoorden heeft men de vergelijking

$$y \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = nx,$$

of

$$y\,dy = \sqrt{(n^2 x^2 - y^2)}\,dx.$$

Om deze vergelijking rationaal te maken stelt men wederom $\sqrt{(n^2 x^2 - y^2)} = ux$, elimineert y en dy en heeft dan

$$\frac{dx}{x} = \frac{u\,du}{n^2 - u - u^2},$$

waaruit door integreren volgt

$$\log x = A - {}^1/_2 \log(n^2 - u - u^2) - \frac{1}{2\sqrt{(1 + 4n^2)}} \log \frac{2u + 1 + \sqrt{(1 + 4n^2)}}{2u + 1 - \sqrt{(1 + 4n^2)}}.$$

Zet men in deze vergelijking $\log B$ voor A, en vermenigvuldigt men alles met $2\sqrt{(1 + 4n^2)}$, dan wordt zij in algebraischen vorm

$$\frac{2u + 1 + \sqrt{(1 + 4n^2)}}{2u + 1 - \sqrt{(1 + 4n^2)}} \cdot (n^2 - u - u^2)^{\sqrt{(1+4n^2)}} = \left(\frac{B}{x}\right)^{2\sqrt{(1+4n^2)}}.$$

Maar u is gelijk aan $\sqrt{(n^2 x^2 - y^2)} : x$; neemt men dit in aanmerking, dan komt er ten slotte

$$\frac{x(1 + \sqrt{(1 + 4n^2)}) + 2\sqrt{(n^2 x^2 - y^2)}}{x(1 - \sqrt{(1 + 4n^2)}) + 2\sqrt{(n^2 x^2 - y^2)}} (y^2 - x\sqrt{(n^2 x^2 - y^2)})^{\sqrt{(1 + 4n^2)}} =$$

$$= B^{2\sqrt{(1 + 4n^2)}}.$$

Was er gevraagd naar de kromme bij welke de normaal gelijk n maal de ordinaat is, dan zou men de regte lijn $y = \sqrt{(n^2 - 1)}\,x + A$ gevonden hebben.

12. De vraag geeft aanleiding tot de evenredigheid

$$h : x = y : y\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)},$$

waaruit

$$h\,dy = \sqrt{(x^2 - h^2)}\,dx,$$

dat is, integrerende,

$$y + B = \frac{x}{2h} \sqrt{(x^2 - h^2)} - \frac{h}{2} log\,(x + \sqrt{(x^2 - h^2)}).$$

Vervangt men hierin B door $K - \frac{h}{2} log\, h$, dan gaat de vergelijking over in

$$y + K = \frac{x}{2h} \sqrt{(x^2 - h^2)} - \frac{h}{2} log \frac{x + \sqrt{(x^2 - h^2)}}{h}.$$

Maar

$$\frac{x + \sqrt{(x^2 - h^2)}}{h} = \frac{(x + \sqrt{(x^2 - h^2)})\,(x - \sqrt{(x^2 - h^2)})}{h\,(x - \sqrt{(x^2 - h^2)})} = \frac{h}{x - \sqrt{(x^2 - h^2)}}$$

zoodat zij ten slotte wordt

$$y + K = \frac{x}{2h} \sqrt{(x^2 - h^2)} + \frac{h}{2} log \frac{x - \sqrt{(x^2 - h^2)}}{h}.$$

13. Noemt men de ordinaat of voerstraal z, de abscis φ, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$z^2 \frac{d\varphi}{dz} = g, \text{ of } d\varphi = g \frac{dz}{z^2},$$

waaruit door integreren volgt

$$\varphi = A - \frac{g}{z} \text{ of } (A - \varphi)\, z = g,$$

welke de vergelijking is der hyperbolische spiraal.

14. Om hieraan te voldoen heeft men de vergelijking

$$z^2 \frac{d\varphi}{dz} = n z, \text{ of } d\varphi = n \frac{dz}{z},$$

waaruit door integreren volgt

$$\varphi = n\, log \frac{z}{A} \text{ of } z = A\, e^{\frac{\varphi}{n}},$$

welke de vergelijking is der logarithmische spiraal.

15. Men vindt de lijn uit de vergelijking

$$\frac{dz}{d\varphi} = g,$$

waaruit door integreren volgt $z = g\varphi + A$, zijnde de spiraal van Archimedes.

16. Dit vraagstuk geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{dz}{d\varphi} = nz,$$

waaruit wederom door integreren volgt

$$log\frac{z}{A} = n\varphi \text{ of } z = Ae^{n\varphi},$$

zoodat men ook hier de logarithmische spiraal terug vindt.

17. Men vindt de kromme uit de vergelijking

$$\frac{z\sqrt{\left(\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2\right)}}{\frac{dz}{d\varphi}} = 2r, \text{ of uit } d\varphi = \frac{\sqrt{(4r^2 - z^2)}}{z^2}dz,$$

waaruit door integreren volgt

$$\varphi + A = \frac{\sqrt{(4r^2 - z^2)}}{z} + boog\ sin\frac{z}{2r}.$$

Men ziet uit den vorm dezer vergelijking dat er een onbeperkt aantal krommen zijn, die aan de vraag voldoen, niet alleen wegens de constante A, die alle mogelijke waarden kan aannemen, maar ook wijl er een onbeperkt aantal bogen zijn, bij welke de sinus gelijk $\frac{z}{2r}$ wordt.

Zal de lijn door een bepaald punt (a, b) gaan, dan heeft men behalve de algemeene vergelijking de betrekking

$$a + A = \frac{\sqrt{(4r^2 - b^2)}}{b} + boog\ sin\frac{b}{2r};$$

elimineert men A tusschen beiden, dan vindt men

$$\varphi - a = \frac{\sqrt{(4r^2 - z^2)}}{z} - \frac{\sqrt{(4r^2 - b^2)}}{b} + boog\ sin\frac{z}{2r} - boog\ sin\frac{b}{2r}.$$

De lezer zoeke de kromme, bij welke de pooltangens gelijk is aan n maal den voerstraal; hij zal de logarithmische spiraal vinden. Voorts spore hij na waarom er geene kromme bestaat, bij welke de pooltangens kleiner is dan de voerstraal.

18. Men vindt haar uit de vergelijking

$$\frac{z^2}{\frac{dz}{d\varphi}} + \frac{dz}{d\varphi} = n\sqrt{\left\{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2\right\}},$$

of, na herleiding, uit

$$d\varphi = \nu(n^2-1)\frac{dz}{z},$$

dat is, integrerende,

$$\varphi = \nu(n^2-1)\log\frac{z}{A} \text{ of } z = Ae^{\frac{\varphi}{\nu(n^2-1)}},$$

welke de vergelijking is der logarithmische spiraal.

De lezer beproeve te betoogen dat bij laatstgenoemde spiraal de poolnormalen gelijk zijn aan n maal de voerstralen.

19. Uit de voorgeschreven evenredigheid volgt

$$h : \nu\left(\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2\right) = \nu\left(\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + z^2\right) : \frac{z^2}{\frac{dz}{d\varphi}} + \frac{dz}{d\varphi},$$

of na herleiding $dz = h\,d\varphi$, dat is, na integreren, $z = A + h\varphi$, of de vergelijking der spiraal van Archimedes.

20. De vergelijking der normaal bij eene vlakke kromme lijn is in het algemeen

$$(x^1 - x) + (y^1 - y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

en in haar zijn x^1 en y^1 de loopende coordinaten der normaal, daarentegen x en y de coordinaten van het punt der te zoeken lijn, door hetwelk de normaal getrokken is. Voor het vaste punt, dat op alle normalen ligt, wordt de vergelijking

$$(a - x) + (b - y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Integreert men deze vergelijking, dan komt er

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

die een cirkel te kennen geeft, welks middelpunt zamen valt met het gegeven punt.

De straal R blijft onbepaald, zoodat men den cirkel nog aan eene voorwaarde kan laten voldoen, bijv. aan die, dat hij zal gaan door een punt (g, h), voor welk punt de vergelijking wordt $(g-a)^2 + (h-b)^2 = R^2$. Elimineert men R^2

tusschen deze en de oorspronkelijke vergelijking, dan komt er

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(g-a)^2+(h-b)^2,$$

waarin nu niets onbepaalds meer gevonden wordt.

De lezer zoeke uit het onbeperkt aantal cirkels, die allen het punt (a, b) tot middelpunt hebben, den cirkel, die de regte lijn $mx^{11}+ny^{11}+C=0$ aanraakt. Bedenkt hij dat $\frac{dy}{dx}=\frac{dy^{11}}{dx^{11}}$ moet zijn, dan vindt hij

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{m^2+n^2}(ma+nb+C)^2,$$

waarin ook wederom alles bepaald is.

21. Men doet aan de algemeenheid der opgave niet te kort, wanneer men de vaste lijn als as der x aanneemt; het punt, waarin alle raaklijnen elkander ontmoeten, kan men door (a, b) aanduiden, terwijl voor de punten, waarin de loodlijnen worden opgerigt, de abscissen y en y^1 gelden.

Stelt men $dy:dx=p$, dan wordt de vergelijking der raaklijn voor eene vlakke kromme op de algemeenste wijze door

$$y^1-y=(x^1-x)p \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

voorgesteld. Zal die lijn door het punt (a, b) gaan, dan wordt de vergelijking

$$b-y=(a-x)p, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

en elke kromme, welke aan deze vergelijking voldoet, heeft de eigenschap dat al hare raaklijnen door het vaste punt (a, b) gaan.

Wanneer men echter uit (1) y^1 afzondert, dan komt er $y^1=y+(x^1-x)p$, welke vergelijking voor de abscissen y en y^1 overgaat in

$$y^1_y=y+(y-x)p \text{ en } y^1_{y^1}=y+(y^1-x)p,$$

zoodat men naar aanleiding van het vraagstuk heeft

$$y^1_y \times y^1_{y^1}=(y+(y-x)p)(y+(y^1-x)p)=K. \quad \ldots \quad (3)$$

Het komt er dus op aan eene kromme te vinden, die aan (2) en (3) voldoet. Hiertoe kan men p tusschen (2) en (3) elimineren, als wanneer y in functie van x te voorschijn treedt. Maar de gevonden functie moet men in (2) en (3) overbrengen, en zien of deze hierdoor werkelijk identisch

worden; heeft zulks geen plaats, dan bestaat er geene kromme, die aan de gegevens voldoet.

Men kan ook den volgenden weg inslaan: men integreert (2), waardoor men

$$y-b=A(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

verkrijgt, en waarin A de constante bij het integreren ontstaan, te kennen geeft. Hieruit volgt dat men heeft

$$y=b+A(x-a) \text{ en } p=A;$$

brengt men deze uitdrukkingen in (3) over, dan komt er

$$(b+A(g-a))\,(b+A(g^1-a))=K,$$

waaruit x verdwenen is. Men ziet nu in dat er werkelijk eene kromme lijn bestaat, die te gelijker tijd aan (2) en (3) voldoet.

Bepaalt men A, dan gaat de vergelijking (4) over in

$$y-b=\frac{(2a-g-g^1)b\pm\sqrt{(4K(g-a)(g^1-a)+(g^1-g)^2.b^2)}}{2(g-a)(g^1-a)}.(x-a).$$

De laatste vergelijking wijst op twee door het punt (a, b) gaande vaste regte lijnen, welke aan het vraagstuk voldoen, voor zoo verre men mag aannemen dat elke regte lijn en haar raaklijn een zijn of zamenvallen.

De lezer beproeve de vlakke kromme lijn te bepalen, die de beide volgende eigenschappen heeft: eerstens dat al hare raaklijnen door het vaste punt (a, b) gaan; ten anderen dat, wanneer men uit twee vaste punten (g, h) en (g^1, h^1) loodlijnen op eenige raaklijn laat vallen, het product van twee dergelijke loodlijnen steeds de constante waarde K oplevert. Die rekening zal hem weinig moeite geven, als hij bedenkt dat de loodlijn uit eenig vast punt (g, h) op een raaklijn nedergelaten uitgedrukt wordt door

$$\frac{(x-q)p-(y-h)}{\sqrt{(1+p^2)}}, \text{ waarin } p=\frac{dy}{dx}.$$

22. Volgens het vraagstuk moet voldaan worden aan de vergelijking

$$\int_a^{\alpha} y.dx=g^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

welke toepasselijk is op een onbeperkt aantal kromme lijnen. Wij zullen uit dit getal slechts enkele voorbeelden bijbrengen.

Als eerste voorbeeld noemen wij de vergelijking der regte lijn $y = Ax + b$, waarin A eene willekeurige, b eene bepaalde standvastige voorstelt. Brengt men de waarde van y in (1) over, dan erlangt men na integreren

$$\left(\frac{A}{2}(\alpha + a) + b\right)(\alpha - a) = y^2,$$

waaruit volgt

$$A = \frac{2y^2 - 2b(\alpha - a)}{(\alpha + a)(\alpha - a)},$$

zoodat de vergelijking der gezochte lijn is

$$y = \frac{2y^2 - 2b(\alpha - a)}{(\alpha + a)(\alpha - a)}x + b.$$

Was de vergelijking der lijn $y = cx + B$, waarin c eene bepaalde, B eene onbepaalde constante voorstelt, dan komt men op soortgelijke wijze tot de vergelijking

$$y = \frac{c}{2}(2x - \alpha - a) + \frac{y^2}{\alpha - a}.$$

Als derde voorbeeld nemen wij de vergelijking der parabool $y^2 = Ax$, waarin nu wederom A eene willekeurige constante is. Brengt men de waarde van y uit de vergelijking der parabool genomen in (1) over, dan vindt na het integreren tusschen de bepaalde grenzen voor A eene waarde die de vergelijking der parabool doet overgaan in

$$y^2 = \frac{9}{4}\frac{y^4}{(\alpha \sqrt{\alpha} - a\sqrt{a})^2}x,$$

waarin nu geene willekeurige standvastige meer voorkomt.

Komen in de vergelijking der lijn twee willekeurige standvastigen voor, dan kan men haar aan nog eene voorwaarde laten voldoen. Is bijv. gegeven $y = Ax + B$, waarin aan A en B alle mogelijke waarden kunnen worden toegekend, dan zal men, in (1) overbrengende, wederom vinden

$$y = \frac{2y^2 - 2B(\alpha - a)}{(\alpha + a)(\alpha - a)}x + B; \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wil men dat de lijn door het vaste punt (k, m) zal gaan, dan verdwijnt ook B, en men heeft

$$y-m=\frac{2m(\alpha-a)-2g^2_{\text{eff}}}{(2k-\alpha-a)(\alpha-a)}(x-k).$$

Stelt men als voorwaarde dat de regte lijn met de as der x een hoek zal insluiten, waarvan de goniometrische tangens de waarde h heeft, dan volgt uit (2)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2g^2-2B(\alpha-a)}{(\alpha+a)(\alpha-a)}=h,$$

waaruit men B kan bepalen en in (2) overbrengen.

Beschouwt men de parabool $y=Ax^2+B$, dan zal men door middel van (1) hebben

$$\left(\frac{A}{3}(\alpha^2+\alpha a+a^2)+B\right)(\alpha-a)=g^2;$$

vervolgens

$$y=\frac{3g^2-3B(\alpha-a)}{\alpha^3-a^3}x^2+B, \quad \ldots \quad (3)$$

of, zal de parabool door het punt (k, m) gaan,

$$y-m=\frac{3g^2-3m(\alpha-a)}{(\alpha^2+a\alpha+a^2-3k^2)(\alpha-a)}(x^2-k^2).$$

Maakt men, als boven, $\frac{dy}{dx}$ uit (3) op, dan heeft men

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6g^2-6B(\alpha-a)}{\alpha^3-a^3}k=h;$$

en brengt men de waarde van B, uit deze laatste vergelijking afgeleid, in (3) over, dan komt er

$$y=\frac{h}{6k}(3x^2-\alpha^2-\alpha a-a^2)+\frac{g^2}{\alpha-a}.$$

In het gegeven voorbeeld heeft men A door B uitgedrukt, maar men kan ook B in functie van A bepalen. De lezer beproeve dit; hij zal in beide gevallen tot dezelfde uitkomst geraken, zooals het behoort.

23. Dit vraagstuk geeft in het algemeen aanleiding tot de volgende vergelijking

$$\int_a^\alpha \sqrt{(1+p^2)}\,dx=h, \quad \ldots \quad (1)$$

waarin p wederom gelijk $dy:dx$ is, en voor de wortelgroot-

heid het positieve teeken moet staan, wijl toch $(\alpha - a)$ positief is.

In het algemeen zal men aan het vraagstuk kunnen voldoen door de vergelijkingen van vlakke kromme lijnen, die eene willekeurige standvastige hebben. Als voorbeeld nemen wij de lijn $y = Ax + b$, waarin A eene willekeurige, b eene bepaalde standvastige is; hierdoor gaat (1) over in

$$\sqrt{(1 + A^2)}\,(\alpha - a) = h,$$

zoodat men A kan bepalen. Brengt men de waarde van A over in de vergelijking der lijn, dan komt er

$$y = \frac{\sqrt{(h^2 - (\alpha - a)^2)}}{\alpha - a} x + b.$$

Een ander voorbeeld levert de parabool $y^2 = Ax$, met A als willekeurige standvastige; door deze waarde van y gaat (1) over in

$$\int_a^\alpha \sqrt{\left(1 + \frac{A}{4x}\right)}\, dx = h,$$

of verder uitgewerkt in

$$^1/_2 \sqrt{(A + 4\alpha)}\,\alpha - {}^1/_2 \sqrt{(A + 4a)}\,a + \frac{A}{4} \log \frac{2\sqrt{\alpha} + \sqrt{(A + 4\alpha)}}{2\sqrt{a} + \sqrt{(A + 4a)}} = h,$$

waaruit men A kan bepalen.

Men kan ook aan de opgave voldoen door krommen met twee willekeurige standvastigen, bijv. door $y = Ax + B$. Daarbij gaat (1) over in

$$(\alpha - a)\,\sqrt{(1 + A^2)} = h,$$

in welke vergelijking de willekeurige B niet voorkomt, zoodat men A volledig kan bepalen, waardoor de vergelijking der lijn wordt.

$$y = \frac{\sqrt{(h^2 - (\alpha - a)^2)}}{\alpha - a} x + B. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wegens het onbepaalde van B kan men bedingen dat de lijn aan nog eene voorwaarde voldoen zal, aan het gaan bijv. door een vast punt (k, m); men zal vinden

$$y - m = \frac{\sqrt{(h^2 - (\alpha - a)^2)}}{\alpha - a} (x - k);$$

of men kan als voorwaarde stellen dat de lijn met de as der

x en de ordinaten, overeenkomende met $x=b$ en $x=\beta$ een onbepaalden inhoud g^2 zal insluiten, 't welk aanleiding geeft tot de vergelijking

$$\int_b^\beta \left(\frac{\sqrt{(h^2-(\alpha-a)^2)}}{\alpha-a} x + B \right) . dx = g^2 ;$$

brengt men de waarde van B uit deze vergelijking in (2) over, dan komt er

$$y = {}^1/_2 \frac{\sqrt{(h^2-(\alpha-a)^2)}}{\alpha-a} (2x-\beta-b) + \frac{g^2}{\beta-b} .$$

Als laatste voorbeeld nemen wij nogmaals de parabool $y=Ax^2+Bx+c$, waarin c geheel bepaald, maar A en B willekeurige constanten zijn. Hier gaat de vergelijking (1) over in

$$\int_a^\alpha \sqrt{(1+(2Ax+B)^2)}\, dx = h,$$

of in

$$\frac{2A\alpha+B}{4A} \sqrt{(1+(2A\alpha+B)^2)} - \frac{2Aa+B}{4A} \sqrt{(1+(2Aa+B)^2)} +$$
$$+ \frac{1}{4A} log \frac{2A\alpha+B+\sqrt{(1+(2A\alpha+B)^2)}}{2Aa+B+\sqrt{(1+(2Aa+B)^2)}} = h;$$

zoodat men A in functie van B, of B in functie van A kan uitdrukken. In de vergelijking der parabool blijft dan nog eene onbepaalde constante over, zoodat men haar nog deze of gene voorwaarde kan voorschrijven.

Men kan ook naar de kromme vragen, die voldoet aan de voorwaarden in dit en het vorig vraagstuk genoemd, of aan

$$\int_a^\alpha y . dx = g^2 \quad \text{en} \quad \int_a^\alpha \sqrt{(1+p^2)}\, dx = h.$$

Voor de regte lijn $y=Ax+B$ bijv., waarin A en B onbepaalde constanten voorstellen, heeft men de voorwaarden

$$\left(\frac{A}{2}(\alpha+a)+B \right)(\alpha-a) = g^2, \text{ en } (\alpha-a)\sqrt{(1+A^2)} = h,$$

waaruit men A en B bepalen kan.

24. Laat de vaste ordinaat, van waar men de inhouden begint te tellen, door $x=a$ worden aangewezen, dan volgt uit de gegevens van het vraagstuk de vergelijking

$$n\int_a^x y\,dx = x.y, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin n uit den aard der zaak niet anders dan positief kan zijn. Differentieert men de beide termen dezer vergelijking, dan komt er

$$n\,y\,dx = y\,dx + x\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

of

$$\frac{dy}{y} = (n-1)\frac{dx}{x},$$

dat is, na integreren,

$$\log y = (n-1)\log x + \log A,$$

of

$$y = A\,x^{n-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wanneer A de constante is bij het integreren verkregen.

Door (3) wordt nu wel voldaan aan de differentiaalvergelijking (2), maar men vergete niet dat eene kromme gevraagd wordt, die past bij (1). Van daar is eene proef noodig, die hierin bestaat dat men in (1) y vervangt door $A\,x^{n-1}$, integreert en de komende vergelijking identiek maakt. Dan gaat (1) over in

$$A(x^n - a^n) = A\,x^n,$$

waaraan voldaan kan worden door $A=0$ of door $a=0$ te stellen; in het eerste geval komt er $y=0$, zoodat men eene lijn erlangt, die met de as der x zamenvalt. Maar deze oplossing past niet in het voorstel, wijl er dan geen sprake van een regthoek zijn kan.

Neemt men aan dat $a=0$ is, dan wordt het vraagstuk in zoo verre gewijzigd, dat de vaste ordinaat overeenkomt met $x=0$, en (1) overgaat in

$$\int_0^x y\,dx = x.y,$$

of, wanneer men in haar $A x^{n-1}$ voor y uit (3) overbrengt en integreert,

$$A x^n = A x^n,$$

welke vergelijking nu identiek wordt bij elke waarde van A, zoodat men de gevonden kromme nog aan eene voorwaarde kan laten voldoen.

Voorts heeft men drie gevallen te onderscheiden; is $n > 1$, dan behoort de gevonden lijn tot de klasse der parabolen; is n bijv. gelijk aan $^3/_2$, dan gaat (3) over in $y = A x^{\frac{1}{2}}$ of, met verandering van constante, in $y^2 = Bx$, zoodat men de gewone parabool erlangt.

Is $n = 1$, dan wordt (3) $y = A$, dat is, men heeft eene regte lijn, evenwijdig loopend met de as der x.

Is $n < 1$, dat is, ligt n tusschen 0 en 1, dan behoort de kromme tot de klasse der hyperbolen.

25. Uit het vraagstuk vloeit voort de vergelijking

$$n \int_a^x y\,dx = x.y - a.y_a, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

waarin wederom n eene positieve waarde heeft; door y_a wordt bedoeld dat men overal a voor x geschreven heeft.

Behandelt men de gevonden vergelijking op de wijze als in het vorig vraagstuk werd aangegeven, dan vindt men achtereenvolgens

$$n y\,dx = y.dx + x.dy$$
$$y = A x^{n-1};$$

en neemt men de proef door het vervangen van y door $A x^{n-1}$ en van y_a door $A a^{n-1}$ in (1), dan komt er

$$A(x^n - a^n) = A x^n - A a^n,$$

welke voor elke waarde van A identiek wordt, ten bewijze dat men de kromme nog aan eene voorwaarde kan laten voldoen.

26. De inhoud van den regthoek, betrekking hebbende op een willekeurig eindpunt van den boog, is hier gelijk aan $h.y$. Stelt a de abscis voor van het punt, van waar uit men

de regthoeken begint te tellen, dan is $h.y_a$ de inhoud van den regthoek, betrekking hebbende op het aanvangspunt, waarin men overal x door a vervangen heeft. Het vraagstuk geeft dien ten gevolge aanleiding tot de vergelijking

$$n\int_a^x y.dx = h.y - h.y_a,$$

waaruit door differentieren en integreren, op soortgelijke wijze als in de beide voorgaande vraagstukken, gevonden wordt

$$n\,y\,dx = h\,dy,$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{n\,dx}{h},$$
$$log\,\frac{y}{A} = \frac{n\,x}{h}, \qquad y = A\,e^{\frac{n\,x}{h}}.$$

Neemt men de proef, waarvan wij in de beide voorgaande vraagstukken melding maakten, dat is, stelt men

$$A\,e^{\frac{n\,x}{h}} \quad \text{en} \quad A\,e^{\frac{n\,.\,a}{h}}$$

voor y en y_a in (1), dan wordt zij na integreren identiek voor elke waarde van A, zoodat de gevonden kromme, die tot de logarithmische lijnen behoort, nog aan eene andere voorwaarde voldoen kan.

27. De gevraagde evenredigheid wordt uitgedrukt door

$$g^2 : y^2 = y^2 : \int_o^x y\,dx,$$

en uit haar volgt de vergelijking

$$\int_o^x y\,dx = \frac{y^4}{g^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

welke gedifferentieerd en daarop wederom geintegreerd overgaat in

$$4\,y^2\,dy = g^2\,dx$$
$$y^3 = {}^3/_4\,g^2\,x + A \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

De gevonden kromme is de zoogenaamde eerste cubische parabool, wel te onderscheiden van de tweede of Neil'sche parabool, ook wel de semicubische genaamd.

Welke waarde men ook toekent aan A, door integreren verkregen, immer zal aan (1) voldaan zijn, waarvan men zich op de volgende wijze kan overtuigen. Uit (2) volgt

$$y = \sqrt[3]{(3/4\, g^2 x + A)},$$

waardoor (1) overgaat in

$$\int_0^x \sqrt[3]{(3/4\, g^2 x + A)}\, dx = \frac{1}{g^2}(3/4\, g^2 x + A)^{\frac{4}{3}} = \frac{y^4}{g^2}.$$

Daar nu (1) identiek wordt voor elke waarde van A, kan men eischen dat de kromme aan nog eene voorwaarde voldoen zal.

28. Dit vraagstuk geeft aanleiding tot de vergelijking

$$n\int_a^{\varphi} \frac{z^2}{2}\, d\varphi = z^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin z de voerstraal en φ de abscis in poolcoordinaten beteekenen, en de poolsectors geteld worden van $\varphi = a$.

Door differentieren en opvolgend integreren verkrijgt men

$$\frac{dz}{z} = \frac{n\, d\varphi}{4}$$

$$log\, \frac{z}{A} = \frac{n\varphi}{4}$$

$$z = A\, e^{\frac{n\varphi}{4}}.$$

De gezochte kromme is derhalve de logarithmische spiraal.

Om de reden bij vorige vraagstukken ontvouwd is ook hier eene proef noodig; zij bestaat daarin dat men in (1) z vervangt door $A\, e^{\frac{n\varphi}{4}}$, integreert zooals het teeken aanwijst, en de komende vergelijking identiek maakt. Men zal vinden

$$A^2\left(e^{\frac{n\varphi}{2}} - e^{\frac{na}{2}}\right) = A^2\, e^{\frac{n\varphi}{2}},$$

waaraan niet anders kan voldaan worden dan door $A=0$ te stellen, waardoor ook $z=0$ is, en men op een enkelvoudig punt verwezen wordt. Maar op die wijze is geen poolsector mogelijk. Zie verder het volgende vraagstuk.

29. Hier heeft men de vergelijking

$$n\int_a^{\Phi}\frac{z^2}{2}\,d\Phi = z^2 - z^2{}_a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin door $z^2{}_a$ bedoeld wordt dat men Φ door a vervangen heeft.

Behandelt men deze vergelijking op dezelfde wijze als die in het vorig vraagstuk, dan verkrijgt men door differentieren

$$\frac{dz}{z} = \frac{n\,d\Phi}{4},$$

waaruit door integreren volgt

$$z = A\,e^{\frac{n.\Phi}{4}},$$

zoodat men, even als in het vorig vraagstuk, de logarithmische spiraal als uitkomst verkrijgt. Elimineert men nu z uit (1) en integreert men daarna, dan komt er

$$A^2\left(e^{\frac{n\Phi}{2}} - e^{\frac{n.a}{2}}\right) = A^2\,e^{\frac{n.\Phi}{2}} - A^2\,e^{\frac{n.a}{2}},$$

welke vergelijking voor elke waarde van A identiek wordt, en waaruit blijkt dat men in dit geval eene werkelijke kromme, die aan het vraagstuk voldoet, bepalen kan.

Wijl A geheel willekeurig kan genomen worden, mag men bij het vragen naar de kromme de bepaling maken dat zij aan nog eene voorwaarde onderworpen zal zijn.

30. Noemt men de abscis van het punt, van waar men de bogen begint te tellen, a, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$n\int_a^{x}\sqrt{(1+p^2)}\,dx = y, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

welke na het differentieren harer leden wordt

$$n\sqrt{(1+p^2)} = p,$$

en waaruit men p kan afzonderen; men zal vinden

$$p = \frac{n}{\sqrt{(1-n^2)}}.$$

Integreert men deze vergelijking, dan komt er

$$y = \frac{n}{\sqrt{(1-n^2)}}x + B; \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

en brengt men de waarden voor p en y gevonden in (1) over, den heeft men

$$\frac{n(x-a)}{\sqrt{(1-n^2)}} = \frac{n}{\sqrt{(1-n^2)}}x + B.$$

Zal deze vergelijking identiek worden dan moet

$B = \frac{-n.a}{\sqrt{(1-n^2)}}$ zijn, waardoor (2) overgaat in

$$y = \frac{n}{\sqrt{(1-n^2)}}(x-a),$$

waarin niets onbepaalds meer voorkomt.

31. Stelt men $\frac{dz}{d\varphi} = p$, en bepaalt men dat de boog geteld wordt van het punt $\varphi = a$, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$n\int_a^{\varphi} \sqrt{(z^2+p^2)}\,d\varphi = z - z_a. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Differentieert men de beide leden van (1), dan komt er

$$n\sqrt{(z^2+p^2)} = p,$$

waaruit

$$p = \frac{nz}{\sqrt{(1-n^2)}},$$

en door integreren

$$log\frac{z}{A} = \frac{n\varphi}{\sqrt{(1-n^2)}}$$

of

$$z = Ae^{\frac{n.\varphi}{\sqrt{(1-n^2)}}}.$$

Neemt men de meermalen vermelde proef, dat is, brengt men de waarden van p en z in (1) over, en integreert men de komende vergelijking, dan heeft men achtereenvolgens

$$n\int_a^{\Phi} \nu\left(A^2 e^{\frac{2n\Phi}{\nu(1-n^2)}} + \frac{n^2}{1-n^2} A^2 e^{\frac{2n\Phi}{\nu(1-n^2)}} \right) d\Phi =$$

$$= A e^{\frac{2\Phi}{\nu(1-n^2)}} - A e^{\frac{na}{\nu(1-n^2)}}$$

of

$$\frac{nA}{\nu(1-n^2)} \int_a^{\Phi} e^{\frac{n\Phi}{\nu(1-n^2)}} d\Phi = A e^{\frac{n\Phi}{\nu(1-n^2)}} - A e^{\frac{na}{\nu(1-n^2)}};$$

dat is

$$A\left(e^{\frac{n\Phi}{\nu(1-n^2)}} - e^{\frac{na}{\nu(1-n^2)}} \right) = A e^{\frac{n\Phi}{\nu(1-n^2)}} - A e^{\frac{na}{\nu(1-n^2)}},$$

welke laatste vergelijking voor elke waarde van A identiek wordt.

De gevonden kromme is wederom de logarithmische spiraal, welke wegens het onbepaald zijn van A aan nog eene voorwaarde voldoen kan.

32. Laat a de abscis zijn van het vaste punt of het nulpunt van telling, dan heeft men de volgende evenredigheid

$$g : \int_a^x \nu(1+p^2)\,dx = \int_a^x \nu(1+p^2)\,dx : (x-a),$$

uit welke voortvloeit de vergelijking

$$\int_a^x \nu(1+p^2)\,dx = \sqrt{g(x-a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Na het differentieren en afzonderen van p bekomt men

$$p = \sqrt{\frac{g-4(x-a)}{4(x-a)}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

om deze uitdrukking rationaal te maken stelt men

$$u = \sqrt{\frac{g-4(x-a)}{4(x-a)}}.$$

Elimineert men vervolgens x en dx, waardoor (2) den vorm

$$dy = \frac{g\,du}{2(1+u^2)^2} - \frac{g\,du}{2(1+u^2)}$$

aanneemt, en integreert men de laatste vergelijking, dan vindt men

$$y + A = \frac{g\,u}{4\,(1+u^2)} - \frac{g}{4}\,boog\,tang\,u.$$

Brengt men hierin wederom de waarde van u in functie van x uitgedrukt over, dan wordt de vergelijking

$$y + A = {}^1/_2\,\sqrt{}(g(x-a) - 4\,(x-a)^2) - \frac{g}{4}\,boog\,tang \sqrt{\frac{g-4\,(x-a)}{4\,(x-a)}},$$

of omgezet

$$y + A = \pm {}^1/_2\,\sqrt{}(g(x-a) - 4\,(x-a)^2) - \frac{g}{4}\left(x\pi + boog\,tang \sqrt{\frac{g-4\,(x-a)}{4\,(x-a)}}\right).$$

De gevonden kromme is de gewone cycloide, en bij het beschrijven dezer lijn bewoog zich de cirkel langs de as der ordinaten.

Of de laatstgevonden vergelijking aan (1) voldoet moet nog afzonderlijk nagegaan worden langs den weg, dien wij meermalen beschreven. Dit zij aan den lezer overgelaten; hij zal vinden dat zulks wel het geval is, en men, wegens de onbepaalde waarde van A de cycloide aan nog eene voorwaarde kan laten voldoen.

33. Om de hier bedoelde kromme te vinden moet men de volgende vergelijking oplossen

$$\int_a^x y\,dx = g \int_a^x \sqrt{}(1+p^2)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Differentieert men de beide leden, dan komt er

$$dx = \frac{g\,dy}{\sqrt{}(y^2 - g^2)},$$

waaruit men door integreren vindt

$$x = g\,log\,\frac{y + \sqrt{}(y^2 - g^2)}{B}.$$

Voor deze vergelijking kan men ook schrijven

$$e^{\frac{x}{g}} = \frac{y + \sqrt{}(y^2 - g^2)}{B},$$

waaruit verder volgt

$$\left(Be^{\frac{x}{g}} - y\right)^2 = y^2 - g^2,$$

dat is

$$y = \frac{1}{2B}\left(B^2 e^{\frac{x}{g}} + g^2 e^{-\frac{x}{g}}\right)$$

of de vergelijking van de kettinglijn.

Neemt men de meermalen aangehaalde proef, het overbrengen namelijk der waarden van y en p in (1), dan zal men zien dat de hier gevonden vergelijking aan (1) voldoet, en men zal, wegens het onbepaalde van B, kunnen eischen dat de kromme nog aan eene voorwaarde gehoorzaamt.

34. Dit vraagstuk geeft aanleiding tot de volgende vergelijking

$$\left(\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\, dx\right)^2 = 2.x.y,$$

waaruit volgt

$$\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\, dx = \sqrt{2xy}.$$

Differentieert men de beide leden, dan komt er

$$\sqrt{(1+p^2)}\, dx = \frac{x\,dy + y\,dx}{\sqrt{2xy}},$$

waaruit zich door de hulpvergelijking $y = ux$ de waarden van y en dy laten elimineren; men verkrijgt dan

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1-u} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{du}{(1-u)\sqrt{u}},$$

of ook

$$\frac{dx}{x}\sqrt{2} = \frac{du}{1-u}\sqrt{2} + \frac{du}{(1-u)\sqrt{u}},$$

dat is, na integreren,

$$\log x^{\sqrt{2}} = B + \log\left(\frac{1}{1-u}\right)^{\sqrt{2}} + \log\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}},$$

of, met verandering van constante,

$$x^{\sqrt{2}} = A\left(\frac{1}{1-u}\right)^{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}.$$

Stelt men, eindelijk, in de laatst gevonden vergelijking voor u de waarde $y:x$, dan komt er

$$x^{\nu 2} = A\left(\frac{x}{x-y}\right)^{\nu 2} \cdot \frac{\nu x + \nu y}{\nu x - \nu y}$$

of

$$(\nu x - \nu y)^{(1+\nu 2)} = A\,(\nu x + \nu y)^{(1-\nu 2)}.$$

De lezer onderzoeke of de gevonden vergelijking voor elke waarde van A aan (2) voldoet.

35. Noemt men de ordinaten van de eerste kromme y, dan worden die der andere bepaald door

$$z = \int_o^x \nu(1+p^2)\,dx; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en wanneer a de abscis is van het nulpunt der telling voor de inhouden, dan bestaat er tusschen de eerste en tweede kromme de vergelijking

$$\int_a^x z\,.\,dx = n\int_a^x y\,dx \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Elimineert men z tusschen (1) en (2), dan komt er

$$\int_a^x \int_o^x \nu(1+p^2)\,dx^2 = n\int_o^x y\,dx, \quad \ldots \quad (3)$$

waaruit door twee malen differentieren volgt

$$\nu(1+p^2)\,dx^2 = n\,dy\,dx,$$

of

$$\nu(1+p^2) = np,$$

dat is

$$p = \frac{1}{\nu(n^2-1)}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Integreert men de laatste uitdrukking, dan vindt men voor de vergelijking der eerste kromme

$$y = \frac{1}{\nu(n^2-1)}x + A \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Nu moet men nog onderzoeken of de constante A, door integreren verkregen, algemeen blijven of eene bijzondere waarde erlangen moet. Daartoe brengt men de waarden van p en y uit (4) en (5) in (3) over, waardoor deze laatste wordt

$$\int_a^x \int_o^x \frac{n}{\sqrt{(n^2-1)}} dx^2 = n \int_a^x \left(\frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} x + A \right) dx,$$

of, na integreren,

$$\frac{n}{\sqrt{(n^2-1)}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = n \left\{ \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + A(x-a) \right\}.$$

Deze vergelijking wordt identiek, wanneer $A = 0$ genomen is, zoodat de vergelijking voor de eerste kromme wordt

$$y = \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} x.$$

Brengt men de waarde van p uit (4) in (1) over en integreert men, dan verkrijgt men de tweede kromme

$$z = \frac{n}{\sqrt{(n^2-1)}} x,$$

zoodat de gezochte lijnen twee geheel bepaalde regte lijnen zijn, die beiden door den oorsprong gaan.

36. Wij nemen het punt, waar alle regte lijnen elkander ontmoeten, als oorsprong der coordinaten, opdat die lijnen alle kunnen worden voorgesteld door

$$y^1 = a x^1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

waarin a een willekeurig bestanddeel is, dat wisselt voor elke lijn in het bijzonder.

Brengt men, in het snijpunt der te zoeken kromme met een der gegeven lijnen, raaklijnen aan de kromme en aan de lijn, die doorgesneden wordt, dan sluiten die lijnen met de as der x hoeken in, welker goniometrische tangenten door $\frac{dy^1}{dx^1}$ en $\frac{dy}{dx}$ worden voorgesteld, hebbende het laatste differentiaalquotient betrekking op de gezochte kromme.

Nu is de hoek, door twee elkander snijdende krommen ingesloten, geene andere dan die, welke door de tangenten, gaande door het punt van doorsnede, bepaald wordt, en men heeft derhalve de vergelijking

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy^1}{dx^1}}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy^1}{dx^1}} = g.$$

Brengt men hierin voor $\frac{dy^1}{dx^1}$ de waarde a uit (1) genomen over, en bedenkt men dat voor het snijpunt $x^1 = x$ en $y^1 = y$ worden, dan heeft men voor dat punt

$$\frac{dy - a\,dx}{dx + a\,dy} = g \text{ en } y = ax.$$

Elimineert men uit deze vergelijkingen het deel a, dat van de eene tot de andere lijn verschilt, dan komt er

$$g(x\,dx + y\,dy) = x\,dy - y\,dx,$$

of, beide leden door $x^2 + y^2$ deelende,

$$g\,\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

waaruit door integreren gevonden wordt

$$g\,log\,\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{A} = boog\,tang\,\frac{y}{x},$$

of ook

$$y = x\,tang\left(g\,log\,\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{A}\right),$$

en waaruit blijkt dat de gevonden kromme de logarithmische spiraal is.

De lezer beproeve het vraagstuk op te lossen, wanneer er bepaald is dat de kromme al de lijnen onder regte hoeken zal doorsnijden; hij zal de vergelijking van den cirkel vinden, gelijk men verwachten kon.

Hij beproeve nog het volgend voorstel op te lossen: de kromme te bepalen, die alle parabolen, $y^2 = ax$, met gemeenschappelijken top en veranderlijken parameter onder een hoek doorsnijdt, welks goniometrische tangens gelijk g is; hij zal vinden

$$gy^2 - xy + 2gx^2 = A\left(\frac{2gy - (1 + \sqrt{(1 - 8g^2)})x}{2gy - (1 - \sqrt{(1 - 8g^2)})x}\right)^{\frac{3}{\sqrt{(1 - 8g^2)}}},$$

of

$$log\,\frac{gy^2 - xy + 2gx^2}{B} = \frac{6}{\sqrt{(8g^2 - 1)}}\,boog\,tang\,\frac{2gy - x}{x\sqrt{(8g^2 - 1)}},$$

en

$$\frac{3x\sqrt{2}}{y-x\sqrt{2}} = log\,\frac{E}{y-x\sqrt{2}},$$

geldende de eerste vergelijking voor $g^2 < \frac{1}{8}$, de tweede voor $g^2 > \frac{1}{8}$, de derde voor $g^2 = \frac{1}{8}$.

37. Maakt men gebruik van poolcoordinaten, dan wordt de goniometrische tangens van den hoek, ingesloten tusschen normaal en voerstraal, uitgedrukt door $\frac{dz}{z\,d\varphi}$; geldt dit voor de te zoeken kromme, voor de spiraal (1) zal men eene dergelijke uitdrukking $\frac{dz^1}{z^1\,d\varphi^1}$ hebben. In punten nu, waar de verlangde kromme en de logarithmische lijn (1) elkander ontmoeten, vallen de voerstralen te zamen en de beide normalen vormen een hoek, welks goniometrische tangens is

$$g = \frac{\frac{dz}{z\,d\varphi} - \frac{dz^1}{z^1\,d\varphi^1}}{1 + \frac{dz\,dz^1}{zz^1\,d\varphi\,d\varphi^1}}.$$

Brengt men in deze vergelijking de waarde van $\frac{dz^1}{z^1\,d\varphi^1}$, uit (1) genomen, over, en bedenkt men dat voor punten aan beide lijnen gemeen $z^1 = z$ en $\varphi^1 = \varphi$ worden, dan heeft men twee vergelijkingen

$$z\left(g\,z + \frac{a}{n}e^{\frac{\varphi}{n}}\right)d\varphi + \left(-z + \frac{ag}{n}e^{\frac{\varphi}{n}}\right)dz = 0,$$

$$z = a\,e^{\frac{\varphi}{n}}.$$

Elimineert men a tusschen de beide laatst gevondene, dan komt er

$$\frac{dz}{z} = \frac{1+ng}{n-g}\,d\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dat is, na integreren,

$$log\,\frac{z}{A} = \frac{1+ng}{n-g}\,\varphi \text{ of } z = A\,e^{\frac{1+ng}{n-g}\varphi}; \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

de gezochte kromme is derhalve nogmaals de logarithmische spiraal.

Was er bedongen dat de hoek, waaronder de kromme en de spiraal elkander snijden, eene regte zou zijn, dan wordt g oneindig groot, in welk geval de vergelijkingen (3) niet meer toepasselijk zijn; bedenkt men evenwel dat in (2) n en 1 tegenover de oneindig grooten $-g$ en ng verwaarloosd mogen worden, dan zal men voor (2), na deelen door g, mogen schrijven

$$\frac{dz}{z} = -n\,d\Phi,$$

waaruit door integreren volgt

$$log\,\frac{z}{B} = -n\Phi \text{ of } z = Be^{-n\Phi},$$

zoodat men ook in dit geval de logarithmische spiraal terug vindt.

38. De hier bedoelde parabolen kan men uitdrukken door de vergelijking

$$y^{m+n} = a^m x^n,$$

waarin de beide exponenten $(m+n)$ en n positieve getallen moeten zijn.

Volgt men den meermalen aangegeven weg, dan vindt men voor de differentiaalvergelijking der verlangde kromme

$$(m+n)x\,dx + n\,y\,dy = 0,$$

waaruit door integreren volgt

$$(m+n)x^2 + n\,y^2 = A,$$

of

$$\frac{x^2}{\left(\frac{A}{m+n}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{A}{n}\right)} = 1,$$

zijnde de middelpuntsvergelijking eener ellips.

39. Wanneer de hoofdassen van al deze ellipsen voorgesteld worden door eene willekeurige, veranderlijke grootheid $2a$, dan moeten, wijl de ellipsen gelijkvormig zijn, de nevenassen door $2.m.a$ worden aangewezen, waarbij men zich m

als eene standvastige, echte breuk moet denken. De vergelijking van al deze ellipsen neemt derhalve den vorm aan van

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{m^2 a^2} = 1.$$

Met weinig moeite vindt men hieruit voor de differentiaalvergelijking der gezochte kromme

$$\frac{m^2 dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0,$$

waaruit door integreren volgt

$$m^2 \log y - \log x = \log A$$

of

$$y^{m^2} = A x.$$

Neemt men nu aan dat onze aarde uit louter concentrische, onder elkander gelijkvormige ellipsvormige lagen bestaat, welke door de omdraaijing der aarde om hare as elke op zichzelve in evenwigt zijn, dan duidt de kromme door de laatste vergelijking aangegeven de rigting aan, volgens welke de zwaartekracht de ligchamen in de verschillende punten naar het binnenste der aarde trekt.

40. Op de bekende wijze vindt men men als differentiaalvergelijking der gezochte kromme

$$x dx + y dy = b^n y^{1-n} dy,$$

welke door integreren overgaat in

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{2-n} b^n y^{2-n} + A.$$

Wanneer $n = 2$ is, geeft de vergelijking

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1$$

eene geheele rij ellipsen, maar de vergelijking der te zoeken kromme wordt

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{0} b^2 y^0 + A,$$

zoodat men voor dit geval genoodzaakt is een anderen weg in te slaan. Zet men in de oorspronkelijke differentiaalvergelijking $n = 2$, dan gaat zij over in

$$x dx + y dy = b^2 \frac{dy}{y},$$

en na het integreren in

$$x^2 + y^2 = 2\,b^2 \log \frac{y}{B}.$$

De lezer zoeke nog de kromme, welke alle ellipsen of hyperbolen met gemeenschappelijke hoofdas en veranderlijke nevenas loodregt doorsnijdt; hij zal in beide gevallen de vergelijking

$$x = A\,e^{(x^2 + y^2) : 2\,a^2}$$

vinden.

Werd er gevraagd naar de kromme, die alle parabolen met standvastigen parameter en veranderlijken top loodregt ontmoet, men vond de logarithmische lijn

$$x = b \log \frac{B}{y}.$$

41. Noemt men de excentriciteit e, zoo als dit gebruikelijk is, dan wordt de vergelijking der hier bedoelde ellipsen

$$a^2 y'^2 + (a^2 - e^2) x'^2 = a^2 (a^2 - e^2), \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en voor de differentiaalvergelijking der gezochte kromme bekomt men

$$\left(y \frac{dy}{dx} + x\right)\left(x \frac{dy}{dx} - y\right) = e^2 \frac{dy}{dx}.$$

Stelt men $x^2 + y^2 + e^2 = 2.x.z$ en elimineert men y en dy, dan heeft men

$$\frac{dz}{\sqrt{(z^2 - e^2)}} = \frac{dx}{x},$$

waaruit door integreren volgt

$$\log(z + \sqrt{(z^2 - e^2)}) = \log x + C,$$

of met verandering van constante,

$$z + \sqrt{(z^2 - e^2)} = \frac{x}{B}.$$

Elimineert men nu wederom z en stelt men $A^2 : e^2$ in plaats van B, dan vindt men na eenige herleiding

$$A^2 y^2 + (A^2 - e^2) x^2 = A^2 (A^2 - e^2) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De gevonden vergelijking stemt tot in de minste bijzonderheden met de oorspronkelijke overeen; zij heeft betrekking op ellipsen of hyperbolen, naarmate men $A^2 > e^2$ of $A^2 < e^2$

neemt. Zal de gevonden kromme de gegeven ellipsen werkelijk ontmoeten, dan moet $A^2 < e^2$ genomen worden, want in de punten, waarin de lijnen elkander snijden is $x^1 = x$ en $y^1 = y$. Wanneer men bijgevolg tusschen (1) en (2) x elimineert, wordt

$$y = \frac{1}{e} \sqrt{(a^2 - e^2)(e^2 - A^2)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Maar $a^2 > e^2$, wijl (1) eene ellips voorstelt; bijgevolg moet $A^2 < e^2$ zijn, wijl anders in (3) y onmogelijk wordt en er van snijden geen sprake kan zijn.

Hieruit volgt, ten slotte, dat de kromme eene hyperbool is, die met de gegeven ellipsen dezelfde brandpunten gemeen heeft.

42. De algemeene vergelijking dezer parabolen kan men voorstellen door

$$y^{1\,2} = 2\,a\,x^1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en die tusschen de kromme en de doorgesneden parabool door

$$\frac{y}{p} = n \cdot y^1 \frac{dy^1}{dx^1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin $p = \frac{dy}{dx}$ en n een positief getal is.

Brengt men de waarde van $\frac{dy^1}{dx^1}$ uit (1) genomen in (2) over, dan heeft men

$$\frac{y}{p} = n \cdot a; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

maar in het punt van doorsnede zijn $x^1 = x$ en $y^1 = y$, waardoor voor zulk punt (1) en (3) overgaan in

$$y^2 = 2\,a\,x \text{ en } \frac{y}{p} = n \cdot a.$$

De gezochte kromme wordt nu door de verbinding dezer beide vergelijkingen bepaald. Elimineert men a, dan vindt men $2\,x\,dx - n \cdot y\,dy = 0$, waaruit door integreren afgeleid wordt

$$x^2 - \frac{n}{2} y^2 = A,$$

of

$$\frac{x^2}{A} - \frac{y^2}{\left(\frac{2A}{n}\right)} = 1,$$

dat is, de vergelijking der gewone hyperbool.

43. Voor de algemeene vergelijking dezer parabolen kan men wederom schrijven

$$y^{1\,2} = 2ax^1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en voor die, welke tusschen de kromme en de doorgesneden parabool plaats grijpt,

$$y.p = y^1 \frac{dy^1}{dx^1} + y^1 \frac{dx^1}{dy^1} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Brengt men in (2) de waarden van y^1 en $\frac{dy^1}{dx^1}$ uit (1) genomen over, dan komt er

$$y.p = a + 2x^1; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

maar voor de punten, waarin de lijnen elkander ontmoeten, zijn $x^1 = x$ en $y^1 = y$, zoodat in dit geval (1) en (2) worden

$$y^2 = 2ax \text{ en } y.p = a + 2x.$$

Elimineert men tusschen deze laatsten de veranderlijke grootheid a, dan komt er

$$\frac{2xy.dy - y^2 dx}{x^2} = 4dx,$$

waaruit door integreren volgt

$$\frac{y^2}{x} = B + 4x$$

of, met verandering van constante ($B = 8A$),

$$\frac{(x+A)^2}{A^2} - \frac{y^2}{(2A)^2} = 1,$$

dat is ook ditmaal de vergelijking der gewone hyperbool.

44. Zooals men weet is de hoek door twee elkander snijdende krommen gevormd geene andere dan die ingesloten tusschen de raaklijnen aan beide krommen door het snijpunt getrokken. Zal nu zulk een hoek door de ordinaat van het snijpunt midden door worden gedeeld, dan moet de driehoek gevormd door de as der x en de beide raaklijnen gelijkbee-

nig zijn, met andere woorden, de twee tangenten getrokken van het snijpunt tot de as der x moeten gelijk zijn. Deze voorwaarde geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}=\frac{y^1\sqrt{(dx^{1\,2}+dy^{1\,2})}}{dy^1} \quad \ldots \quad (1)$$

Met behulp der vergelijking $y^1=ax^{1^n}$ kan men dx^1 en dy^1 elimineren, waardoor (1) overgaat in

$$\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}=\frac{y^1\sqrt{(1+n^2a^2x^{1\,2\,(n-1)})}}{n.ax^{1^{n-1}}};$$

voor het punt van doorsnede, waarin $x^1=x$ en $y^1=y$ zijn, heeft men derhalve de beide vergelijkingen

$$y=ax^n \text{ en } \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}=\frac{\sqrt{(1+n^2a^2x^{2\,(n-1)})}}{nax^{n-1}}.$$

Elimineert men a tusschen de laatstgevonden vergelijkingen, dan komt er

$$(nydx+xdy)(nydx-xdy)=0,$$

waaraan voldaan kan worden door

$$nydx+xdy=0, \quad \ldots \quad (2)$$

en door $$nydx-xdy=0.$$

Uit de eerste dezer vergelijkingen vloeit onmiddelijk voort $\frac{ndx}{x}+\frac{dy}{y}=0$, of na integreren $x^ny=A$.

Is nu n positief, dan behooren de gegeven krommen tot de klasse der parabolen, en de gezochte kromme van doorsnede tot die der hyperbolen; is n negatief, dan heeft het omgekeerde plaats; voor $n=1$ liggen in de gegeven vergelijking alle mogelijke regte lijnen, die door den oorsprong gaan, opgesloten, en de gevonden kromme van doorsnede is de gelijkzijdige hyperbool.

Integreert men de andere der gevonden vergelijkingen (2), dan erlangt men $y=Bx^n$, welke echter niet aan het vraagstuk voldoet, omdat de kromme door haar voorgesteld de oorspronkelijke vergelijking $y^1=ax^{1^n}$ nimmer ontmoet. Om zich hiervan te overtuigen, bedenke men dat in het punt van doorsnede $x^1=x$ en $y^1=y$ worden; elimineert men nu tusschen $y=ax^n$ en $y=Bx^n$ de abscis x, dan komt er $(B-a)=0$, uit welke vergelijking voor y geene bepaalde

waarde kan voortvloeijen. Wanneer voorts $B=a$ is, wordt wel aan die vergelijking voldaan, maar dan houdt elk verschil tusschen de gegevene en de gevonden kromme op.

45. Neemt men de laatstgenoemde loodlijn als as der ordinaten, dan wordt de parabool bij elk harer standen bepaald door $y^{1\,2}=2\,b\,(a+x^1)$, waarin aan a elke willekeurige waarde moet worden gegeven; de voorwaarde in het vraagstuk vermeld geeft vervolgens aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{x\,\surd(dx^2+dy^2)}{dx}=\frac{m\,x^1\,\surd(dx^{1\,2}+dy^{1\,2})}{dx^1},$$

waaruit na het elimineren van dx^1 en dy^1 door bemiddeling van de vergelijking der parabool, volgt

$$\frac{x\,\surd(dx^2+dy^2)}{dx}=\frac{m\,x^1\,\surd(b^2+y^{1\,2})}{y^1}.$$

Wijl nu in het punt van doorsnede $x^1=x$ en $y^1=y$ worden, mag men voor de laatste vergelijking schrijven

$$\frac{\surd(dx^2+dy^2)}{dx}=\frac{m\,\surd(b^2+y^2)}{y},$$

zoodat ook a reeds weggevallen is. Zondert men nu dx en dy van elkander af, dan komt er

$$dx=\frac{y\,dy}{\surd(m^2\,b^2+(m^2-1)\,y^2)},$$

of, na integreren,

$$x+A=\frac{1}{m^2-1}\,\surd(m^2\,b^2+(m^2-1)\,y^2),$$

dat is

$$\frac{x+A)^2}{\left(\frac{m\,b}{1-m^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{m\,b}{\surd(1-m^2)}\right)^2}=1,$$

waaruit blijkt dat de kromme bij $m^2<1$ eene ellips, bij $m^2>1$ eene hyperbool voorstelt.

De lezer beproeve op te maken wat er van het vraagstuk wordt, wanneer $m=1$ genomen wordt; hij zal, als in het vorig vraagstuk, vinden dat de parabolen door de komende kromme (eene parabool, die met de oorspronkelijke hoofdas en parameter gemeen heeft) niet gesneden worden.

46. Noemt men den veranderlijken parameter $2a$, dan worden al de hier bedoelde parabolen aangewezen door de vergelijking

$$y^{1\,2} = 2\,a\,x^1,$$

en de voorwaarde van het vraagstuk geeft aanleiding tot

$$\int_0^{x^1} y^1\,dx^1 = \int_0^{x^1} \sqrt{(2\,a\,x^1)}\,dx^1 = k^2.$$

In de punten, waar de gezochte kromme de anderen ontmoet, is $x^1 = x$ en $y^1 = y$, waardoor de vergelijkingen overgaan in

$$y^2 = 2\,a\,x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$\int_0^{x} \sqrt{(2\,a\,x)}\,dx = k^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Integreert men de laatste vergelijking, dan vindt men

$$^2/_3\,x\,\sqrt{(2\,a\,x)} = k^2,$$

of, na het elimineren van a door bemiddeling van (1),

$$x\,y = {}^3/_2\,k^2,$$

welke eene gelijkzijdige hyperbool te kennen geeft.

Om te doen zien dat men ook langs andere wegen tot dezelfde uitkomst geraakt, laten wij hier nog een paar oplossingen volgen.

Eerstens differentiere men (2), waardoor men vindt

$$\sqrt{(2\,a\,x)}\,dx + \left(\int_0^{x} \frac{\sqrt{2\,x}}{2\,\sqrt{a}}\,dx \right) da = 0,$$

of

$$\sqrt{(2\,a\,x)}\,dx + \left(\int_0^{x} \sqrt{(2\,a\,x)}\,dx \right) \frac{da}{2\,a} = 0;$$

maar wijl $\int_0^{x} \sqrt{(2\,a\,x)}\,dx = k^2$ is, wordt de laatste vergelijking

$$\sqrt{(2\,a\,x)}\,dx + k^2\,\frac{da}{2\,a} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

of $$(\sqrt{x})\,dx = -k^2 \frac{da}{2a\sqrt{2a}}.$$

Integreert men haar, dan heeft men

$$^2/_3\,(A + x\sqrt{x}) = \frac{k^2}{\sqrt{2a}},$$

waarin A de constante is door het integreren ontstaan.

Er blijft over a te elimineren tusschen de laatst gevondene en (1), zoodat de vergelijking der gezochte kromme wordt

$$\left(\frac{A}{\sqrt{x}} + x\right) y = {}^3/_2\,k^2,$$

of $$xy = {}^3/_2\,k^2,$$

wijl alle integralen bij dezelfde standvastige aanvangen en A derhalve gelijk nul moet zijn.

Men kan ook (1) differentieren in de veronderstelling dat x, y en a veranderlijken zijn, en zal vinden

$$y\,dy = a\,dx + x\,da.$$

Elimineert men tusschen deze en (1), met behulp van (3), a en da, dan heeft men verder

$$y\,dx + k^2\left(\frac{dy}{y} - \frac{dx}{2x}\right) = 0,$$

welke met $\sqrt{x} : y$ vermenigvuldigd geeft

$$(\sqrt{x})\,dx = k^2\left(\frac{dx}{2y\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y^2}\,dy\right),$$

en waaruit door integreren volgt

$$^2/_3\,(B + x\sqrt{x}) = k^2\,\frac{\sqrt{x}}{y},$$

of $$\left(\frac{B}{\sqrt{x}} + x\right) y = {}^3/_2\,k^2,$$

dat is, wegens $B = 0$ om de vroeger aangevoerde reden, wederom

$$xy = {}^3/_2\,k^2.$$

De lezer beproeve, naar aanleiding der hier gegeven ontbinding, nog het volgend vraagstuk op te lossen:

Bepaal de kromme, welke alle ellipsen, met gemeenschappelijke hoofd- en veranderlijke nevenas zoo snijdt, dat de vlakken begrensd door elke dezer ellipsen en de coordinaten

van het punt van doorsnede dezelfde waarde k^2 bekomen. Hij zal als vergelijking der kromme vinden

$$y\left(x+\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\,boog\,sin\,\frac{x}{a}\right)=2k^2.$$

47. Wij nemen het punt, waardoor alle regte lijnen getrokken worden, als oorsprong aan, waardoor de algemeenheid van het vraagstuk niet benadeeld, maar de oplossing vereenvoudigd wordt.

Men kan al de gegeven lijnen voorstellen door de vergelijking $y^1=ax^1$, onder voorwaarde dat a bij elke lijn eene andere waarde heeft. De voorwaarde in het vraagstuk omschreven geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\int_c^{x^1}\sqrt{(dx^{1\,2}+dy^{1\,2})}=\int_c^{x^1}\sqrt{(1+a^2)}\,dx^1=k.$$

In de punten, waarin de kromme en de regte lijnen elkander ontmoeten, is $x^1=x$ en $y^1=y$, waardoor onze gestelde vergelijkingen overgaan in

$$y=ax \text{ en } \int_c^{x}\sqrt{(1+a^2)}\,dx=k;$$

integreert men de laatste vergelijking, dan komt er

$$\sqrt{(1+a^2)}\,(x-c)=k,$$

of, hierin a uit $y=ax$ overbrengende,

$$(x^2+y^2)\,(x-c)^2=k^2\,x^2,$$

welke de vergelijking is eener conchoide; is $c=0$, dan vindt men den cirkel.

De lezer beproeve nog de oplossing van dit vraagstuk, op de wijzen als in het vorig geschied is, eerstens door het differentieren der integraalvergelijking, en ten anderen door het differentieren van $y=ax$, in de veronderstelling dat x, y en a veranderlijk zijn.

48. Is $2a$ de veranderlijke parameter, dan kan men al de hier veronderstelde parabolen uitdrukken door de verge-

lijking $y'^2 = 2ax'$, terwijl de lengte der bogen bepaald wordt door

$$\int_0^{x'} \sqrt{(dx'^2 + dy'^2)} = \int_0^{x'} \frac{\sqrt{(2ax' + 4x'^2)}}{2x'} dx' = k.$$

Integreert men de laatste vergelijking en neemt men de integraal van 0 tot x, dan komt er

$$^1/_2 \sqrt{(2ax + 4x^2)} + \frac{a}{2} log \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{(2a + 4x)}}{\sqrt{2a}} = k;$$

brengt men hierin de waarde van a uit de andere vergelijking genomen over, dan wordt die der gezochte kromme

$$2x\sqrt{(y^2 + 4x^2)} + y^2 log \frac{2x + \sqrt{(y^2 + 4x^2)}}{y} = 4kx.$$

De lezer beproeve nog de oplossing van dit vraagstuk: eerstens door het differentieren der gestelde integraalvergelijking; ten anderen door het differentieren van $y^2 = 2ax$, in de veronderstelling dat x, y en a veranderlijk zijn.

49. De kromme hier gevraagd behoort tot de bijzondere soort, welke men trochoiden noemt. De laatste ontstaan wanneer eene kromme lijn zonder glijden rolt langs eene andere, vaste kromme lijn, zoodat de bogen, gemeten langs de vaste en de bewogen lijn gelijk zijn. Elk punt in het vlak der bewogen kromme beschrijft dan eene trochoide of roltrek.

Voorts heeft de bewogen kromme bij elk der verschillende standen, die zij bij het voortrollen inneemt, een punt met de vaste kromme gemeen, in welk punt beide krommen eene aanraking van de eerste orde hebben.

Men noemt voerstraal of radius vector den veranderlijken afstand van het genoemde aanrakingspunt tot het punt dat de roltrek beschrijft.

Laat ons de vaste kromme en de gezochte trochoide bij regthoekige coordinaten voorstellen door de vergelijkingen

$$\eta = f(\xi) \text{ en } y = F(x),$$

terwijl wij de bewogen kromme door de poolvergelijking

$$z = \psi(\Phi)$$

aanduiden.

De oorspronkelijke plaats van het beschrijvend punt A zij de pool, en eene willekeurige door A getrokken lijn de oorsprong der hoeken. Noemt men voorts den hoek, behoorende bij het punt, waar de vaste en bewogen krommen elkander voor het eerst aanraken, γ, dan is de lengte van den boog bij dat punt aanvang nemend, en zich tot een ander willekeurig punt uitstrekkend gegeven door

$$\int_{\gamma}^{\varphi} \nu \left(z^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2} \right) d\varphi.$$

Maar die lengte wordt ook uitgedrukt door

$$\int_{c}^{\xi} \nu \left(1 + \frac{d\eta^2}{d\xi^2} \right) d\xi,$$

als c de abscis is van het punt van aanvang. Men heeft dus de vergelijking

$$\int_{\gamma}^{\varphi} \nu \left(z^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2} \right) d\varphi = \int_{c}^{\xi} \nu \left(1 + \frac{d\eta^2}{d\xi^2} \right) d\xi \ldots (a)$$

Is het punt A bij het voortrollen der kromme in het punt A^1 gekomen, en verbindt men dit punt met dat, B^1, waarin de bewogen en de vaste krommen elkander op dien tijd aanraken, en even zoo A met het overeenkomstig punt B, dan is

$$A^1 B^1 = AB.$$

Nu is AB de voerstraal z en $A^1 B^1$ is gelijk aan

$$\nu ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2),$$

zoodat men heeft

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = z^2. \ldots \ldots (b)$$

Deze vergelijking stelt eene geheele rij op elkander volgende cirkels voor, welker middelpunten op $\eta = f(\xi)$ liggen, en welker stralen achtereenvolgens aan de voerstralen z gelijk zijn. Men kan hier de ordinaat η en de voerstraal z beschouwen als eene functie der abscis ξ van het middelpunt.

Twee onmiddelijk op elkander volgende cirkels, door de laatste vergelijking voorgesteld, snijden elkander in een punt A^1, en de gezochte roltrek wordt gevormd door de geheele rij van al die punten van doorsnede.

Men ziet hieruit dat de trochoide al de genoemde cirkels omhult; om die omhullende te vinden moet men de vergelijking dier cirkels differentieren in de veronderstelling dat ξ eene functie van x is; zoo doende verkrijgt men

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\xi}{y-\eta} + \frac{(x-\xi)+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi}+z\frac{dz}{d\xi}}{y-\eta}\cdot\frac{d\xi}{dx}.$$

Wijl echter in het punt, dat de omhullende kromme met eene der ingehulden gemeen heeft, niet alleen de beide coordinaten, maar ook de raaklijnen dezelfde zijn, moet de uitdrukking met $\frac{d\xi}{dx}$ aangedaan wegvallen, dat is, men moet

$$(x-\xi)+(y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi}+z\frac{dz}{d\xi}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

hebben; maar dan wordt de vergelijking zelve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\xi}{y-\eta} \text{ of } (y-\eta)\frac{dy}{dx}+(x-\xi)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Voor ons doel hebben wij nog eene vergelijking noodig; om haar af te leiden differentieren wij (a) en vinden

$$\nu(z^2\,d\Phi^2+dz^2)=\nu(d\xi^2+d\eta^2),$$

of anders geordend

$$\nu\left(z^2\frac{d\Phi^2}{dz^2}+1\right)dz=\nu\left(1+\frac{d\eta^2}{d\xi^2}\right)d\xi,$$

waaruit volgt

$$\frac{dz}{d\xi}=\frac{\nu\left(1+\frac{d\eta^2}{d\xi^2}\right)}{\nu\left(z^2\frac{d\Phi^2}{dz^2}+1\right)};$$

brengt men deze uitdrukking in (c) over, dan komt er

$$\left\{(x-\xi)+(y-\eta)\frac{dy}{d\xi}\right\}\nu\left(z^2\frac{d\Phi^2}{dz^2}+1\right)+z\,\nu\left(1+\frac{d\eta^2}{d\xi^2}\right)=0 \ldots (e)$$

Keeren wij nu tot het gegeven vraagstuk terug; wanneer de parameter der parabool gelijk $4h$ gesteld en het brandpunt als pool aangenomen wordt, dan is de poolvergelijking der bewogen parabool

$$z=\frac{2h}{1-\cos\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waaruit volgt

$$dz = -\frac{2h\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}\,d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Laat men de as der x van de gezochte trochoide met de gegeven regte lijn zamenvallen, dan wordt de oplossing hierdoor gemakkelijker gemaakt, en toch aan de algemeenheid niet te kort gedaan. De vergelijking der gegeven lijn wordt nu $\eta = 0$, voor elke waarde van ξ, terwijl bovendien $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ is.

Brengt men deze uitdrukkingen over in (c), (b) en (d), dan heeft men na herleiding

$$(x-\xi)\sqrt{((1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi)} = \frac{2h\sin\varphi}{1-\cos\varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$(x-\xi)^2 + y^2 = \frac{4h^2}{(1-\cos\varphi)^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$y\frac{dy}{dx} + (x-\xi) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Uit (5) volgt $(x-\xi) = -y\frac{dy}{dx}$, waardoor (3) en (4) overgaan in

$$y^2\frac{dy^2}{dx^2}((1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi)(1-\cos\varphi)^2 = 4h^2\sin^2\varphi, \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)y^2(1-\cos\varphi)^2 = 4h^2; \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wijl echter

$$(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi = 2(1-\cos\varphi),$$

en

$$\sin^2\varphi = (1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)$$

is, wordt (6), wanneer men haar door $2(1-\cos\varphi)$ deelt,

$$y^2\frac{dy^2}{dx^2}(1-\cos\varphi)^2 = 2h^2(1+\cos\varphi). \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Deelt men vervolgens (8) in (7), dan komt er

$$\frac{2dy^2}{dx^2+dy^2} = 1+\cos\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

waaruit volgt

$$1-\cos\varphi = \frac{2dx^2}{dx^2+dy^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Brengt men deze uitdrukking in (7) over, dan erlangt men eindelijk

$$\frac{dx}{h} = \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - h^2)}} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

als differentiaalvergelijking der gezochte trochoide.

Door integreren ontstaat hieruit voor de vergelijking der kromme zelve

$$\frac{x}{h} = log \frac{y + \sqrt{(y^2 - h^2)}}{B} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Uit (11) en (12) ziet men dat y^2 niet kleiner dan h^2 mag worden, met andere woorden, dat de kleinste ordinaat der trochoide gelijk is aan den brandpundsafstand der bewogen parabool; dit heeft plaats wanneer de parabool met haren top op de as der x staat. Zulk eene bijzondere ligging der parabool geeft het middel aan de hand om de standvastige B, door integreren verkregen, te bepalen; men weet toch dat met $x = 0$ tevens $y = h$ overeenkomt, zoodat (12) wordt

$$0 = log \frac{h}{B},$$

waaruit volgt $B = h$, en de vergelijking (12) der trochoide overgaat in

$$\frac{x}{h} = log \frac{y + \sqrt{(y^2 - h^2)}}{h},$$

dat is ook,

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

of de vergelijking der kettinglijn.

50. De poolvergelijking der hyperbolische spiraal is $z\varphi = r$, waaruit volgt

$$dz = -\frac{r}{\varphi^2} d\varphi.$$

Wij laten ook hier wederom de as der abscissen van de gezochte trochoide zamenvallen met de gegevene lijn, zoodat hare vergelijking wordt $\eta = 0$ voor elke waarde van ξ; voorts is ook hier $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$.

Brengt men deze uitdrukkingen over in (*e*), (*b*) en (*d*) van het vorig vraagstuk, dan komt er

$$(x-\xi).\Phi.\sqrt{(1+\Phi^2)}=r,$$

$$(x-\xi)^2+y^2=\frac{r^2}{\Phi^2},$$

$$y\frac{dy}{dx}+(x-\xi)=0.$$

Uit de laatste vergelijking volgt $(x-\xi)=-y\frac{dy}{dx}$, welke waarde in de beide onmiddelijk voorafgaande vergelijkingen overgebragt geeft

$$y^2\frac{dy^2}{dx^2}.\Phi^2.(1+\Phi^2)=r^2,$$

en

$$y^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\Phi^2=r^2.$$

Tusschen de aldus gevonden vergelijkingen kan men Φ^2 elimineren, waardoor men heeft

$$dx=\frac{\sqrt{(r^2-y^2)}}{y}dy,$$

dat is, na integreren,

$$x+A=\sqrt{(r^2-y^2)}+\frac{r}{2}\,log\frac{r-\sqrt{(r^2-y^2)}}{r+\sqrt{(r^2-y^2)}},$$

voor de vergelijking der trochoide.

51. Dit vraagstuk is in zekeren zin het omgekeerde van het vorige. Laat, om het op te lossen, $\eta^2=4h\xi$ de vergelijking der gegeven parabool zijn, dan volgt uit haar

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\pm\sqrt{\frac{h}{\xi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Verder zij $x=k$ de vergelijking der regte lijn, die loodregt staat op de as der parabool, en door de bewogen kromme moet worden beschreven. Uit haar volgt $dx=0$, waardoor (*d*) van het 49ste vraagstuk overgaat in $(y-\eta)\,dy=0$, zoodat $y=\eta$ is.

Brengt men nu η en k in plaats van y en x in (*b*) van genoemd voorstel over, dan wordt $\xi=k\pm z$, waardoor (1) overgaat in

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{(k \pm z)}}.$$

Door het behoorlijk overbrengen der gevonden waarden in (e) van voorstel 49, komt er

$$d\varphi = \sqrt{h} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{(k \pm z)}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Zal men deze vergelijking integreren, dan moet men er op letten of k positief of negatief of gelijk nul is.

Wil men dat de lijn $x = k$ de parabool zal snijden, dan moet k positief zijn, en vindt men voor de integraal van (2)

$$\varphi = B \pm \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{k}} log \frac{\sqrt{(k \pm z)} - \sqrt{k}}{\sqrt{(k \pm z)} + \sqrt{k}}.$$

Mag de gegeven parabool door de lijn $x = k$ gesneden noch aangeraakt worden, dan moet k negatief zijn, zoodat de integraal wordt

$$\varphi = C \pm 2 \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{-k}} boogtang \frac{\sqrt{(k \pm z)}}{\sqrt{-k}};$$

hierbij is $\sqrt{-k}$ bestaanbaar, wijl k negatief is.

Moet de gegeven parabool door de lijn $x = k$ alleen aangeraakt worden, dan is de top het raakpunt, waarbij $k = 0$ wordt. Voor deze waarde van k gaat de differentiaalvergelijking (2) over in

$$d\varphi = \pm \sqrt{h} \frac{dz}{z\sqrt{\pm z}},$$

waaruit men door integreren bekomt

$$\varphi + E = \pm \frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{\pm z}},$$

of

$$(\varphi + E)^2 (\pm z) = 4h,$$

waarbij men voor $(\pm z)$ het teeken neemt, dat met dat van h overeenstemt.

De gevonden vergelijking behoort tot die spiraal, welke de meetkundige plaats is der eindpunten van de subnormalen der hyperbolische spiraal.

52. Neemt men het brandpunt der ellips als pool, dan is hare vergelijking in poolcoordinaten uitgedrukt $z(a - e\cos\varphi) = b^2$, waaruit

$$\varphi = boog\,cos\frac{az - b^2}{ez},$$

en vervolgens

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{b^2}{z\sqrt{(e^2z^2 - (az-b)^2)}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wijl er verlangd wordt dat de trochoide eene regte lijn zal zijn, kan zij langs de as der x vallen, zoodat hare vergelijking wordt $y = 0$, waarbij ook $\frac{dy}{dx} = 0$ is.

Dit in aanmerking genomen, worden de vergelijkingen (b) en (d) — zie voorstel 49 —

$$(x-\xi)^2 + \eta^2 = z^2 \text{ en } x - \xi = 0,$$

waaruit reeds terstond $\eta = \pm z$ voortvloeit, zoodat (e) — voorstel 49 — overgaat in

$$\eta\frac{d\eta}{d\xi} = \pm\frac{dz}{d\varphi},$$

of, lettende op (1), in

$$\eta\frac{d\eta}{d\xi} = \pm\frac{z\sqrt{(e^2z^2 - (az-b)^2)}}{b^2}.$$

Maar e is gelijk aan $\sqrt{(a^2 - b^2)}$; wanneer men nu nog η voor z schrijft, komt er ten slotte

$$d\xi = \frac{b\,d\eta}{\sqrt{(-b^2 + 2a\eta - \eta^2)}},$$

welke de differentiaalvergelijking der gezochte kromme voorstelt; integreert men haar, dan komt er

$$\xi + B = b\,boog\,sin\frac{\eta - a}{\sqrt{(a^2 - b^2)}},$$

of omgekeerd

$$\eta = a + sin\frac{\xi + B}{b}\sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

53. De vergelijking der cardioide in poolcoordinaten is $z = 2r(1 + cos\varphi)$, waaruit volgt

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\sqrt{(4rz - z^2)}.$$

Laat men de regte lijn langs de as der abscissen vallen, dan verkrijgt men op overeenkomstige wijze als in het vorig vraagstuk

$$d\xi = \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{(4r\eta - \eta^2)}},$$

of na integreren

$$\xi + B = \pm\left(2r\, boog\, cos\, \frac{2r-\eta}{2r} - \sqrt{(4r\eta - \eta^2)}\right),$$

welke de vergelijking is der gewone cycloide.

54. Dit voorstel geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = h,$$

waarin p en q de bekende waarden $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{d^2y}{dx^2}$ voorstellen. Schrijft men $\frac{dp}{dx}$ voor q, dan wordt de bovenstaande vergelijking

$$dx = \frac{h\,.\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}},$$

waaruit door integreren volgt

$$x - A = \frac{hp}{\sqrt{(1+p^2)}}.$$

Zondert men vervolgens p af, dan komt er

$$dy = \frac{(x-A)\,dx}{\sqrt{(h^2-(x-A)^2)}},$$

of, na andermaal integreren,

$$y = B - \sqrt{(h^2-(x-A)^2)},$$

dat is

$$(y-B)^2 + (x-A)^2 = h^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wij vinden dus de vergelijking van een cirkel, die in zoo verre aan het vraagstuk voldoet, als elke cirkel tevens zijn eigen kromtecirkel voorstelt.

In de hier gevonden vergelijking van den cirkel komen twee constanten voor; men kan dien cirkel derhalve nog aan twee voorwaarden laten voldoen, bijv. door te verlangen dat hij door twee gegeven vaste punten (a, b) en (α, β) zal gaan. Brengt men in (1) de coordinaten dier vaste punten over, dan verkrijgt men twee vergelijkingen, waardoor A en B bepaald worden, namelijk

$(a-A)^2+(b-B)^2=h^2$ en $(\alpha-A)^2+(\beta-B)^2=h^2$.

De lezer beproeve nog de standvastigen te bepalen, wanneer geeischt wordt dat de cirkel door het vaste punt (a, b) zal gaan, en de raaklijn in dat punt evenwijdig zal loopen met de regte lijn voorgesteld door $\eta=m\xi+c$; hij zal vinden

$$A=a\pm\frac{h.m}{\sqrt{(1+m^2)}} \text{ en } B=b\mp\frac{h}{\sqrt{(1+m^2)}}.$$

Was er gevraagd den cirkel zoo te bepalen dat er tusschen dezen en de parabool $\eta^2=2k\xi$ in een te bepalen punt eene aanraking van de tweede orde plaats grijpt, dan worden de coordinaten van het punt van aanraking bepaald door

$$\xi=x=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{k}).(\sqrt[3]{h^2}-\sqrt[3]{k^2}),$$

$$\eta=y=\pm(\sqrt[3]{k^2})\sqrt{\sqrt[3]{h^2}-\sqrt[3]{k^2}},$$

terwijl men voor het middelpunt van den cirkel vindt

$$A=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{k})(3.\sqrt[3]{h^2}-\sqrt[3]{k^2}),$$

$$B=\mp(\sqrt[3]{h^2}-\sqrt[3]{k^2})\sqrt{\sqrt[3]{h^2}-\sqrt[3]{k^2}}.$$

De lezer zoeke de reden van een en ander.

55. Aan den eisch van dit voorstel voldoet de vergelijking

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=\frac{x^2}{h} \text{ of } \frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}=\frac{h\,dx}{x^2},$$

waaruit door eenmaal integreren voortvloeit

$$\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=A-\frac{h}{x},$$

of, na afzondering van p,

$$p=\frac{Ax-h}{\sqrt{(-h^2+2Ahx+(1-A^2)x^2)}} \quad \ldots \quad (1)$$

Bij het integreren dezer uitdrukking maakt het werkelijk verschil of A^2 kleiner, grooter of gelijk aan een is. In het eerste geval wordt de integraal, die men in de meeste leerboeken aantreft,

$$y=\pm\frac{1}{1-A^2}\Big\{A\sqrt{(x^2-(Ax-h)^2)}-$$

$$-\frac{h}{\sqrt{(1-A^2)}}\log\frac{(1-A^2)x+Ah+\sqrt{(1-A^2)}\sqrt{(x^2-(Ax-h)^2)}}{B}\Big\}.$$

Is $A^2 > 1$, dan komt er

$$y + C = \pm \frac{1}{1 - A^2} \left\{ A \sqrt{(x^2 - (Ax - h)^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{\sqrt{(A^2 - 1)}} \, boog\, sin \frac{(A^2 - 1)x - Ah}{h} \right\}.$$

Maar is $A^2 = 1$, dan wordt de differentiaalvergelijking (1) herleid tot

$$dy = \frac{(x - h)\, dx}{\sqrt{(2hx - h^2)}},$$

welker integraal is

$$y + E = \frac{x - 2h}{3h} \sqrt{(2hx - h^2)};$$

zij laat zich herleiden tot

$$9h(y + E)^2 = 2(x - h)^3 - 3h(x - h)^2 + h^3,$$

en dan blijkt het terstond dat zij de vergelijking is der semicubische of Neil'sche parabool.

56. In dat geval wordt de vroeger gevonden vergelijking

$$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \sqrt{hx},$$

waarin x hetzelfde teeken als h moet hebben, zal het tweede lid niet onbestaanbaar worden. Zij laat zich terstond herleiden tot

$$\frac{dp}{\sqrt{(1 + p^2)^3}} = \frac{dx}{\sqrt{hx}},$$

waaruit door integreren volgt

$$\frac{p}{\sqrt{(1 + p^2)}} = A + \frac{2\sqrt{hx}}{h}, \quad \ldots \quad (1)$$

en waarin A de constante is door integreren verkregen. Zondert men p af, dan komt er

$$p = \frac{A.h. + 2\sqrt{hx}}{\sqrt{(h^2 - (Ah + 2\sqrt{hx})^2)}}.$$

Om deze differentiaalvergelijking tot een meer handelbaren vorm te brengen stelt men

$$\frac{Ah + 2\sqrt{h.x}}{h} = u,$$

waardoor zij overgaat in

$$dy = \frac{h}{2}\left(\frac{u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)}} - \frac{A\,u\,du}{\sqrt{(1-u^2)}}\right),$$

dat is, na integreren, in

$$y = B \pm \frac{h}{4}((2A-u)\sqrt{(1-u^2)} + boog\,sin\,u).$$

Brengt men in de laatste vergelijking voor u hare vroeger gestelde waarde terug, dan heeft men ten slotte

$$y = B \pm \left\{\frac{A.h-2\sqrt{hx}}{4h}\sqrt{(h^2-(Ah+2\sqrt{hx})^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{4}\,boog\,sin\,\frac{Ah+2\sqrt{hx}}{h}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wil men de gevondene vergelijking op hare eigenschappen onderzoeken, dan kan dit langs den bekwaamsten weg geschieden door eene verbinding van twee andere vergelijkingen. Slaat men een blik op (1), dan wordt men overtuigd dat, welke waarde men aan p moge geven, het quotient $p:\sqrt{(1+p^2)}$ immer tusschen de grenzen -1 en $+1$ zal vallen; men kan derhalve $p:\sqrt{(1+p^2)} = sin\,\omega$ stellen, zoodat (1) overgaat in

$$sin\,\omega = \frac{Ah+2\sqrt{hx}}{h},$$

waaruit

$$x = \frac{h}{4}(A-sin\,\omega)^2.$$

Uit (2) vindt men vervolgens voor y de waarde

$$y = B \pm \frac{h}{4}((2A-sin\,\omega)\,cos\,\omega + \omega).$$

57. De hier gestelde voorwaarde geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{h^2}{x},$$

waarbij h eene lijn van bepaalde lengte beteekent. Zet men de vergelijking om in

$$\frac{h^2\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = x\,dx,$$

dan wordt zij na eenmaal integreren

$$\frac{2h^2p}{\sqrt{(1+p^2)}} = x^2 + A.$$

Zondert men p af en integreert men nogmaals, dan heeft men

$$y + B = \int \frac{(x^2+A)\,dx}{\sqrt{(4h^4-(x^2+A)^2)}} \quad \ldots \quad (1)$$

Om de integraal in het tweede lid dezer vergelijking voorkomende nader te bepalen, doen wij opmerken dat de grootheid onder het wortelteeken onbestaanbaar wordt, bijaldien niet $4h^4 > (x^2+A)^2$ is; men ziet voorts gemakkelijk in dat de veranderlijke x geene andere waarden mag aannemen dan die gelegen zijn tusschen de grenzen $-\sqrt{(2h^2-A)}$ en $+\sqrt{(2h^2-A)}$. Hierbij is de waarde $x=0$ niet uitgesloten, in welk geval de eerstgenoemde ongelijkheid wordt $4h^4 > A^2$. De waarde der constante A ligt derhalve tusschen de grenzen $-2h^2$ en $+2h^2$. Hieruit volgt verder dat de uitdrukking $(2h^2-A)$ immer positief is, en dat de positieve uitdrukking $(2h^2-A)$ immer kleiner is dan $(2h^2+2h^2)$, zoodat ook de breuk $(2h^2-A):4h^2$ immer kleiner is dan $+1$.

Stelt men nu $x = \sqrt{(2h^2-A)}\cos\omega$, dan wordt (1)

$$y + B = -\int \frac{(2h^2-(2h^2-A)\sin^2\omega)\,d\omega}{\sqrt{(4h^2-(2h^2-A)\sin^2\omega}},$$

of na invoering van $c^2 = \frac{2h^2-A}{4h^2} < 1$,

$$y + B = -h\int \frac{(1-2c^2\sin^2\omega)\,d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}},$$

$$= h\left(\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}} - 2\int \sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}\,d\omega\right)$$

De grootheden onder het integraalteeken staande zijn de zoogenaamde elliptische integralen van de eerste en tweede soort, welke men gewoon is aan te duiden door $F((c,\omega))$ en door $E((c,\omega))$. Op deze wijze neemt de gevonden vergelijking den vorm aan van

$$y + B = \pm h\,(F((c,\omega)) - 2\,E((c,\omega))),$$

zoodat de kromme thans bepaald is door deze gevonden waarde van y en de vroeger gestelde van $x = \sqrt{(2h^2-A)}\cos\omega$

58. Het voorstel geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=\frac{h}{p},$$

waarbij h eene lijn van bepaalde lengte voorstelt. Men kan haar vervormen tot

$$dx=\frac{h\,dp}{p\sqrt{(1+p^2)^3}}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

of ook tot

$$dx=\pm\left(-\frac{hp\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}+\frac{h\,dp}{p\sqrt{(1+p^2)}}\right) \ldots \quad (2)$$

Vermenigvuldigt men beide leden van (1) met p, dan komt er

$$dy=\pm\frac{h\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

en integreert men nu (2) en (3), dan vindt men

$$x+A=\pm\left(\frac{h}{\sqrt{(1+p^2)}}+\frac{h}{2}\,log\,\frac{-1+\sqrt{(1+p^2)}}{1+\sqrt{(1+p^2)}}\right)\ldots (4)$$

$$y=B\pm\frac{hp}{\sqrt{(1+p^2)}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

De kromme is derhalve door de verbinding van (4) en (5) volkomen bepaald, en kan door middel van de raaklijnen geconstrueerd worden.

Wil men de gezochte kromme door eene enkele vergelijking voorstellen, dan kan men twee verschillende wegen inslaan; men kan, in de eerste plaats, p uit (5) afzonderen en de gevonden waarde in (4) overbrengen, waardoor men vindt

$$p=\frac{y-B}{\sqrt{(h^2-(y-B)^2)}}$$

en

$$x+A=\pm\left(\sqrt{(h^2-(y-B)^2)}+\frac{h}{2}\,log\,\frac{h-\sqrt{(h^2-(y-B)^2)}}{h+\sqrt{(h^2-(y-B)^2)}}\right)\ldots(6)$$

In de tweede plaats geeft (5) aanleiding tot de vergelijking

$$dx=\pm\frac{\sqrt{(h^2-(y-B)^2)}}{y-B}\,dy;$$

integreert men deze, dan komt wederom (6) te voorschijn.

Schrijft men (5) in den vorm

$$\frac{(y-B)\sqrt{(1+p^2)}}{p}=h,$$

dan leert men hieruit dat, wanneer men eene regte lijn trekt, die op den afstand B met de as der x evenwijdig loopt, de hier gevonden kromme de eigenschap heeft dat elke raaklijn, gerekend van het raakpunt tot aan genoemde evenwijdige lijn, dezelfde lengte h zal hebben.

59. Dit voorstel geeft wederom aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=h\,boog\,tang\,p,$$

waarin h eene lijn van bepaalde lengte beteekent. Zij laat zich terstond herleiden tot

$$dx=\frac{h\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}\,boog\,tang\,p,$$

of, na vermenigvuldiging der beide leden met p, tot

$$dy=\frac{h\,p\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}\,boog\,tang\,p.$$

De beide aldus bepaalde vergelijkingen laten zich integreren, want bedenkt men dat

$$d.\,boog\,tang\,p=\frac{dp}{1+p^2}$$

is, dan worden zij hierdoor herleid tot

$$dx=d\left(\frac{hp}{\sqrt{(1+p^2)}}\,boog\,tang\,p\right)-\frac{h\,p\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}},$$

$$dy=-d\left(\frac{h}{\sqrt{(1+p^2)}}\,boog\,tang\,p\right)+\frac{h\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}},$$

waaruit door integreren volgt

$$x-A=-\frac{h}{\sqrt{(1+p^2)}}(1+p\,boog\,tang\,p),\quad\ldots\quad(1)$$

$$y-B=\frac{h}{\sqrt{(1+p^2)}}(p-boog\,tang\,p).\quad\ldots\quad(2)$$

De gezochte kromme is derhalve bepaald door de verbinding van beide laatste vergelijkingen, en kan door middel der tangenten geconstrueerd worden.

Vermenigvuldigt men (2) met p, en trekt het product bij (1) op, dan komt er

$$(x-A)+(y-B)p=h\sqrt{(1+p^2)}, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waaruit volgt

$$\frac{(x-A)+(y-B)p}{\sqrt{(1+p^2)}}=h,$$

te kennen gevende:

„wanneer men uit het punt (A, B) loodlijnen op de nor-„malen der gezochte kromme laat vallen, dan hebben die „allen dezelfde lengte h."

Uit deze eigenschap volgt dat de gezochte kromme de ontwondene is van den cirkel, welks middelpunt met (A, B) zamenvalt, en welks straal gelijk h is. Lost men p uit (3) op, om hare waarde in (1) of (2) over te brengen, dan wordt de vergelijking van genoemde ontwondene kromme

$$\frac{\sqrt{((x-A)^2+(y-B)^2-h^2)}}{h}=$$

$$=boog\,tang\frac{(x-A)(y-B)+h\sqrt{((x-A)^2+(y-B)^2-h^2)}}{h^2-(y-B)^2}.$$

60. Dit vraagstuk geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=ny\sqrt{(1+p^2)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin n natuurlijk een positief getal verbeeldt.

De normaal strekt zich altijd van het aaarakingspunt tot de as der x uit, de kromme moge hare holle of bolle zijde naar de as gewend hebben, maar de kromtestraal is altijd naar de holle zijde der kromme gekeerd.

Men kan de vergelijking (1) herleiden tot

$$\left(ny\pm\frac{1+p^2}{q}\right)\sqrt{(1+p^2)}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waaruit verder volgt

$$nyq\pm(1+p^2)=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wijl n positief is, volgt uit (3) dat yq negatief wordt, wanneer het bovenste teeken in aanmerking komt, positief daarentegen, wanneer men in (3) het benedenste teeken in

rekening brengt. In het eerste geval wendt de kromme hare holle zijde, in het tweede geval hare bolle zijde naar de as der x.

Vermenigvuldigt men (3) met p, dan komt er

$$\frac{dy}{y} \pm n\frac{p\,dp}{1+p^2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

waaruit door integreren volgt

$$log\frac{y}{B} \pm n\,log\,\sqrt{(1+p^2)} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Neemt men in aanmerking dat $log\,1 = 0$ is, dan wordt de laatste vergelijking

$$\frac{y}{B}\sqrt{(1+p^2)}^{\pm n} = 1, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

of

$$y = B\left(\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)^{\pm n}. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Uit de differentiaalvergelijking $dx = \frac{dy}{p}$ volgt door integreren

$$x = A + \frac{y}{p} + \int \frac{y}{p^2}\,dp,$$

of, wanneer men in deze de waarde van y uit (7) overbrengt,

$$x = A + \frac{B}{p}\left(\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)^{\pm n} + B\int\left(\frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)^{\pm n}\cdot\frac{dp}{p^2}, \ldots (8)$$

zoodat de gezochte kromme bepaald is door de verbinding van (7) en (8), waarin A en B de constanten door integreren verkregen voorstellen.

Is n een geheel getal, dan kan men de uitdrukking in de laatste formule voorkomende integreren; wij zullen hiervan slechts een paar voorbeelden bijbrengen.

Vraagt men naar de kromme, bij welke de normalen gelijk zijn aan de kromtestralen, dan is $n = 1$, zoodat de vergelijkingen (7) en (8) overgaan in

$$y = \frac{B}{\sqrt{(1+p^2)}} \text{ en } x = A - \frac{Bp}{\sqrt{(1+p^2)}},$$

en na het elimineren van p aanleiding geven tot

$$y^2 + (x-A)^2 = B^2,$$

of tot de vergelijking van een cirkel met den straal B, welks middelpunt in de as der x ligt.

Stelt men in (7) en (8) $n=-1$, dan worden deze

$$y=B\sqrt{(1+p^2)} \text{ en } x=A+B\,log\,(p+\sqrt{(1+p^2)}),$$

waaruit men achtereenvolgens afleidt

$$\sqrt{(1+p^2)}=\frac{y}{B} \text{ en } p=\frac{\sqrt{(y^2-B^2)}}{B};$$

elimineert men wederom p, dan komt er

$$x=A+B\,log\,\frac{y+\sqrt{(y^2-B^2)}}{B},$$

waarvoor men kan schrijven

$$e^{\frac{x-A}{B}}=\frac{y+\sqrt{(y^2-B^2)}}{B}$$

of, na afzondering van y,

$$y=\frac{B}{2}\left(e^{\frac{x-A}{B}}-e^{-\frac{x-A}{B}}\right),$$

zoodat men de kettinglijn vindt.

De lezer beproeve de oplossing, wanneer de kromtestralen het dubbel zijn der normalen, dat is, wanneer $n=\pm 2$ genomen wordt.

Voor $n=+2$ zal hij de gewone cycloide vinden, welker basis langs de as der x valt, en waarbij de straal van den bewogen cirkel gelijk $^1/_2\,B$ is; de vergelijking dezer cycloide wordt uitgedrukt door

$$x=A-\sqrt{(By-y^2)}-B\,boog\,tang\,\frac{\sqrt{(By-y^2)}}{y}.$$

Voor $n=-2$ vindt hij met weinig moeite de vergelijking

$$(x-A)^2=4\,B(y-B),$$

de gewone parabool te kennen gevende. Hare as valt zamen met de as der x, en de coordinaten van haren top zijn $x=A$ en $y=B$.

Wordt n een gebroken getal, bijv. $n=^1/_2$, dan vervalt men in elliptische integralen der eerste en tweede soort; men vindt voor $n=^1/_2$

$$x+A=\frac{B}{\sqrt{2}}(F((c,\omega))-2\,E((c,\omega))).$$

61. Duidt men den voerstraal door z, den hoek der coordinaten door φ aan, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(z^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2+2p^2-zq}=r,$$

waarin p en q de differentiaalquotienten $\frac{dz}{d\varphi}$ en $\frac{d^2z}{d\varphi^2}$ aanwijzen. Vermenigvuldigt men de vergelijking met den noemer van het eerste lid, dan komt er

$$\sqrt{(z^2+p^2)^3}=r(z^2+2p^2-zq). \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Stelt men vervolgens

$$p^2+z^2=u^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en differentieert men deze vergelijking, dan heeft men

$$p\,dp+z\,dz=u\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wijl echter $p\,dp=\frac{dz}{d\varphi}\,dp=\frac{dp}{d\varphi}\,dz=q\,dz$ is, kan men (3) omzetten in

$$(q+z)\,dz=u\,du,$$

waardoor (1) overgaat in

$$u^3=r(2u^2-z^2-zq),$$

of in

$$u^3=r\left(2u^2-\frac{zu\,du}{dz}\right),$$

waaruit volgt

$$\frac{dz}{z}=\frac{r\,du}{2ru-u^2},$$

of

$$\frac{2\,dz}{z}=\frac{du}{u}+\frac{du}{2r-u}.$$

Integreert men deze vergelijking, dan erlangt men eene logarithmische uitdrukking, die zich zonder meer laat herleiden tot

$$z^2=\frac{Au}{2r-u}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en waarin A de constante van het integreren is. Elimineert men vervolgens u tusschen (2) en (4), dan volgt daaruit

$$d\varphi = \frac{(A+z^2)\,dz}{z\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}},$$

of $$d\varphi = \frac{A\,dz}{z\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}},$$

waaruit door andermaal integreren voortvloeit

$$\varphi + B = \frac{1}{2}\,boog\,tang\,\frac{(2r^2-A)z^2-A^2}{A\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}} +$$

$$+\,{}^1/_2\,boog\,tang\,\frac{z^2-(2r^2-A)}{\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}}.$$

Vereenigt men de bogen door optellen, dan wordt de vergelijking eenvoudiger en gelijk aan

$$\varphi + B = {}^1/_2\,boog\,tang\,\frac{(A-z^2)\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}}{A^2-2r^2z^2+z^4}.$$

Zal men de hier verkregen kromme nader leeren kennen, dan moet hare vergelijking nog vervormd worden. Voor deze kan men reeds terstond schrijven

$$tang\,(2\varphi+2B) = \frac{(A-z^2)\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}}{A^2-2r^2z^2+z^4};$$

in deze laatste brengt men *sin* : *cos* voor *tangens* over, verheft de beide leden tot de tweede magt, ontwikkelt en stelt 1 voor $sin^2(2\varphi+2B)+cos^2(2\varphi+2B)$, waarop men, na uit beide leden voor als nog den vierkantswortel getrokken te hebben, zal vinden

$$A^2-2r^2z^2+z^4 = 2z^2(r^2-A)\,cos\,(2\varphi+2B).$$

Brengt men nu in deze vergelijking voor $cos\,(2\varphi+2B)$ hare waarde $-1+2(cos\,\varphi\,cos\,B-sin\,\varphi\,sin\,B)^2$, dan vindt men na enkele herleidingen, en na bij beide leden r^2 opgetrokken te hebben,

$$(z\,cos\,\varphi-\sqrt{(r^2-A)}\,cos\,B)^2+(z\,sin\,\varphi+\sqrt{(r^2-A)}\,sin\,B)^2 = r^2.$$

Maar nu is $z\,cos\,\varphi = x$ en $z\,sin\,\varphi = y$, en van daar wordt de laatste vergelijking

$$(x-\sqrt{(r^2-A)}\,cos\,B)^2+(y+\sqrt{(r^2-A)}\,sin\,B)^2 = r^2,$$

waaruit men terstond bespeurt, gelijk ook verwacht mogt worden, dat de verkregen vergelijking een cirkel aanwijst, die in zoo verre met de opgaaf strookt als elke cirkel tevens zijn eigen kromtecirkel is.

Door het onbepaalde van A en B kan men eischen dat de cirkel aan sommige voorwaarden voldoen zal.

61. Duidt men den voerstraal door z, den hoek der coordinaten door φ aan, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(z^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2+2p^2-zq}=r,$$

waarin p en q de differentiaalquotienten $\frac{dz}{d\varphi}$ en $\frac{d^2z}{d\varphi^2}$ aanwijzen. Vermenigvuldigt men de vergelijking met den noemer van het eerste lid, dan komt er

$$\sqrt{(z^2+p^2)^3}=r(z^2+2p^2-zq). \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Stelt men vervolgens

$$p^2+z^2=u^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en differentieert men deze vergelijking, dan heeft men

$$p\,dp+z\,dz=u\,du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wijl echter $p\,dp=\frac{dz}{d\varphi}dp=\frac{dp}{d\varphi}dz=q\,dz$ is, kan men (3) omzetten in

$$(q+z)\,dz=u\,du,$$

waardoor (1) overgaat in

$$u^3=r(2u^2-z^2-zq),$$

of in

$$u^3=r\left(2u^2-\frac{zu\,du}{dz}\right),$$

waaruit volgt

$$\frac{dz}{z}=\frac{r\,du}{2ru-u^2},$$

of

$$\frac{2\,dz}{z}=\frac{du}{u}+\frac{du}{2r-u}.$$

Integreert men deze vergelijking, dan erlangt men eene logarithmische uitdrukking, die zich zonder meer laat herleiden tot

$$z^2=\frac{Au}{2r-u}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en waarin A de constante van het integreren is. Elimineert men vervolgens u tusschen (2) en (4), dan volgt daaruit

$$d\varphi = \frac{(A+z^2)\,dz}{z\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}},$$

of $$d\varphi = \frac{A\,dz}{z\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}},$$

waaruit door andermaal integreren voortvloeit

$$\varphi + B = \frac{1}{2}\,boog\,tang\,\frac{(2r^2-A)z^2-A^2}{A\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}} +$$

$$+\,{}^1/_2\,boog\,tang\,\frac{z^2-(2r^2-A)}{\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}}.$$

Vereenigt men de bogen door optellen, dan wordt de vergelijking eenvoudiger en gelijk aan

$$\varphi + B = {}^1/_2\,boog\,tang\,\frac{(A-z^2)\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}}{A^2-2r^2z^2+z^4}.$$

Zal men de hier verkregen kromme nader leeren kennen, dan moet hare vergelijking nog vervormd worden. Voor deze kan men reeds terstond schrijven

$$tang\,(2\varphi+2B) = \frac{(A-z^2)\sqrt{(4r^2z^2-(A+z^2)^2)}}{A^2-2r^2z^2+z^4};$$

in deze laatste brengt men *sin : cos* voor *tangens* over, verheft de beide leden tot de tweede magt, ontwikkelt en stelt 1 voor $sin^2(2\varphi+2B)+cos^2(2\varphi+2B)$, waarop men, na uit beide leden voor als nog den vierkantswortel getrokken te hebben, zal vinden

$$A^2-2r^2z^2+z^4 = 2z^2(r^2-A)\cos(2\varphi+2B).$$

Brengt men nu in deze vergelijking voor $cos(2\varphi+2B)$ hare waarde $-1+2(cos\varphi\,cos B - sin\varphi\,sin B)^2$, dan vindt men na enkele herleidingen, en na bij beide leden r^2 opgetrokken te hebben,

$$(z\cos\varphi - \sqrt{(r^2-A)}\cos B)^2 + (z\sin\varphi + \sqrt{(r^2-A)}\sin B)^2 = r^2.$$

Maar nu is $z\cos\varphi = x$ en $z\sin\varphi = y$, en van daar wordt de laatste vergelijking

$$(x-\sqrt{(r^2-A)}\cos B)^2 + (y+\sqrt{(r^2-A)}\sin B)^2 = r^2,$$

waaruit men terstond bespeurt, gelijk ook verwacht mogt worden, dat de verkregen vergelijking een cirkel aanwijst, die in zoo verre met de opgaaf strookt als elke cirkel tevens zijn eigen kromtecirkel is.

Door het onbepaalde van A en B kan men eischen dat de cirkel aan sommige voorwaarden voldoen zal.

62. Wanneer men gebruik maakt van de verkortingen der vorige opgave, komt men tot de vergelijking

$$\frac{(z^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2+2p^2-zq}=nz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin wederom n een positief getal moet voorstellen. Bedenkt men dat $q=\frac{dp}{d\Phi}=\frac{dz}{d\Phi}\cdot\frac{dp}{dz}=p\frac{dp}{dz}$ is, en elimineert men q, dan gaat de vergelijking over in

$$\sqrt{(z^2+p^2)^3}\,dz=nz^3\,dz+2np^2\,z\,dz-nz^2\,p\,dp. \ldots (2)$$

Stelt men nu de hulpvergelijking

$$p=zu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

en elimineert men p en dp uit (2), dan komt er

$$\sqrt{(1+u^2)^3}\,z^3\,dz=nz^3(1+u^2)\,dz-nz^4\,u\,du, \ldots (4)$$

waaruit volgt

$$\frac{dz}{z}=\frac{nu\,du}{(1+u^2)(n-\sqrt{(1+u^2)})}. \quad \ldots \quad (5)$$

Wanneer men nu in (3) p vervangt door $\frac{dz}{d\Phi}$, dan heeft men $\frac{dz}{z}=u\,d\Phi$, waardoor (5) overgaat in

$$d\Phi=\frac{n\,du}{(1+u^2)(n-\sqrt{(1+u^2)})}. \quad \ldots \quad (6)$$

De beide laatste vergelijkingen laten zich gemakkelijk integreren, wanneer men $\sqrt{(1+u^2)}$ door v vervangt; hierdoor gaan zij over in

$$\frac{dz}{z}=\frac{n\,dv}{v(n-v)}=\frac{dv}{n-v}+\frac{dv}{v} \quad \ldots \quad (7)$$

en in

$$d\Phi=\frac{n\,dv}{v(n-v)\sqrt{(v^2-1)}}=\frac{dv}{(n-v)\sqrt{(v^2-1)}}+\frac{dv}{v\sqrt{(v^2-1)}} \ldots (8)$$

Uit (7) volgt door integreren

$$z=\frac{Av}{n-v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Bij het integreren van (8) lette men op of n kleiner, grooter of gelijk aan een is. In het eerste geval wordt de integraal

$$\varphi = B + \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}} \, boog\,tang \, \frac{1-nv}{\sqrt{(1-n^2)(v^2-1)}} + boog\,tang\,\sqrt{(v^2-1)}$$

of, wanneer hierin v uit (9) overbrengt,

$$\varphi = B + \frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}} \, boog\,tang \, \frac{(1-n^2)z + A}{\sqrt{((1-n^2)(n^2z^2-(A+z)^2)}} +$$

$$+ boog\,tang \, \frac{\sqrt{(n^2z^2-(A+z)^2)}}{A+z}.$$

Zal de hier voorkomende wortelgrootheid niet onbestaanbaar worden, dan moeten de waarden van z blijven tusschen $-\frac{A}{1+n}$ en $-\frac{A}{1-n}$.

Is $n > 1$, dan heeft men

$$\varphi = C + \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} \, log \, \frac{1-nv-\sqrt{((n^2-1)(v^2-1))}}{n-v} + boog\,tang\,\sqrt{(v^2-1)}.$$

Brengt men hierin wederom de waarde van v uit (9) over, dan komt er

$$\varphi = C + \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} \, log \, \frac{-(n^2-1)z + A - \sqrt{((n^2-1)(n^2z^2-(z+A)^2))}}{n.A} +$$

$$+ boog\,tang \, \frac{\sqrt{(n^2z^2-(A+z)^2)}}{A+z}.$$

Hier, waar $n > 1$ is, moeten de waarden van z tusschen de grenzen $-\frac{A}{n+1}$ en $+\frac{A}{n-1}$ liggen; voor andere waarden wordt de grootheid onder het wortelteeken onbestaanbaar.

Is $n = 1$, dan moet men om eene oplossing te vinden, tot (8) teruggaan. Vermenigvuldigt men teller en noemer der breuk in die vergelijking voorkomende met $v+1$, dan neemt zij den volgenden vorm aan

$$d\varphi = \frac{dv}{\sqrt{(v^2-1)^3}} + \frac{dv}{v\sqrt{(v^2-1)^3}},$$

en geeft bij integreren

$$\varphi = G + \frac{v}{\sqrt{(v^2-1)}} = \frac{1}{\sqrt{(v^2-1)}} + boog\,tang\,\sqrt{(v^2-1)};$$

brengt men hierin weder v uit (9) over, en houdt men in het oog dat $n = 1$ is, dan komt er

$$\varphi = G + boog\,tang \, \frac{\sqrt{((-A)(A+2z))}}{A+z} - \frac{\sqrt{((-A)(A+2z))}}{A}.$$

Hierin moeten de beide factoren $-A$ en $A+2z$ hetzelfde teeken hebben, wijl anders de grootheid onder het wortelteeken onbestaanbaar wordt.

63. De lengte der normaal wordt, zooals bekend is, uitgedrukt door $\surd(z^2+p^2)$, en de opgave geeft derhalve aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(z^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2+2p^2-zq}=n\surd(z^2+p^2),$$

waarin n natuurlijk een positief getal voorstelt. Zij laat zich herleiden tot

$$n(z^2+2p^2-zq)\pm(z^2+p^2)=0.$$

Nu is $q=\frac{dp}{d\varphi}=\frac{dz}{d\varphi}\cdot\frac{dp}{dz}=p\frac{dp}{dz}$, waardoor de vorige vergelijking overgaat in

$$(n\pm1)z^2+(2n\pm1)p^2-nzp\frac{dp}{dz}=0.$$

Neemt men nu de hulpvergelijking $p=zu$, dan volgt uit haar

$$\frac{dp}{dz}=u+z\frac{du}{dz},$$

waardoor men p en $\frac{dp}{dz}$ uit de vorige vergelijking kan elimineren; dit doende zal men vinden

$$\frac{dz}{z}=\frac{n}{n\pm1}\cdot\frac{u\,du}{1+u^2}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

waaruit door integreren volgt

$$log\frac{z}{A}=\frac{n}{2(n\pm1)}log(1+u^2),$$

of

$$z=A(1+u^2)^{\frac{n}{2(n\pm1)}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Zet men in de hulpvergelijking $p=zu$ voor p de waarde $\frac{dz}{d\varphi}$, dan gaat deze over in $\frac{dz}{d\varphi}=z.u$ of in $\frac{dz}{z}=u\,d\varphi$, of eindelijk, met het oog op (1), in

$$d\varphi = \frac{n}{n \pm 1} \cdot \frac{du}{1+u^2},$$

waaruit door integreren

$$\varphi + B = \frac{n}{n \pm 1} \, boog\, tang\, u,$$

dat is

$$u = tang \frac{(n \pm 1)(\varphi + B)}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De gezochte kromme, die met de verschillende waarden van n aan verandering onderworpen is, wordt derhalve bepaald door de vergelijkingen (2) en (3), of door

$$z\left(cos \frac{(n \pm 1)(\varphi + B)}{n}\right)^{\frac{n}{n \pm 1}} = A,$$

ontstaan door het elimineren van u tusschen (2) en (3).

Laat ons haar nader bepalen voor enkele waarden van n.

Zij, in de eerste plaats, $n = 1$, dat is, veronderstellen wij de kromtestralen gelijk aan de pool-normalen, en bepalen wij ons bij het bovenst of positieve teeken, dan wordt de laatste vergelijking $z(cos\, 2(\varphi + B))^{\frac{1}{2}} = A$, of $z^2 cos\, 2(\varphi + B) = A^2$, of eindelijk $z^2 cos^2(\varphi + B) - z^2 sin^2(\varphi + B) = A^2$, dat is die der gelijkzijdige hyperbool, welke men terstond herkent, bijaldien men de poolcoordinaten tot een regthoekig stelsel herleidt.

Vestigt men zijne aandacht op het negatieve teeken, dan is men verpligt tot de oorspronkelijke vergelijking terug te keeren; deze wordt in dit bijzonder geval

$$p\left(p - z\frac{dp}{dz}\right) = 0,$$

waaraan men voldoen kan door $p = 0$ en door $\left(p - z\frac{dp}{dz}\right) = 0$. Uit den laatsten factor volgt $\frac{dz}{z} = \frac{dp}{p}$, waaruit door integreren gevonden wordt $log \frac{z}{A} = log\, p$ of $z = Ap$, dat is wederom, $\frac{dz}{z} = \frac{d\varphi}{A}$, en na andermaal integreren $log \frac{z}{B} = \frac{\varphi}{A}$ of $z = Be^{\frac{\varphi}{A}}$, zoodat men de logarithmische spiraal vindt.

Gaat men uit van den eersten factor $p=0$, dan vindt men door integreren $z=B$, welke algemeene integraal eene bijzondere is der vergelijking $p-z\frac{dp}{dz}=0$.

Is in de oorspronkelijk gevonden vergelijking $n=2$ genomen, dan vindt men $z^3(1+cos\,3(\varphi+B))=2A^3$, wanneer men het positieve teeken, $z(1+cos(\varphi+B))=2A$, of de vergelijking eener gewone parabool, bijaldien men het negatieve teeken in rekening brengt.

Stelt men $n={}^1/_2$, dan vindt men in het eene geval $z^3(cos\,3(\varphi+B))=A^3$, in het andere, of het in rekening brengen van het negatieve teeken, $z=A\,cos(\varphi+B)$, welke vergelijking een cirkel te kennen geeft met den straal $A:2$.

Den lezer zal het niet moeijelijk vallen hieraan, zoo 't hem goed dunkt, verdere uitbreiding te geven.

64. De lengte der pooltangens wordt, zoo als bekend is, voorgesteld door $\frac{z\sqrt{(z^2+p^2)}}{p}$, en de vraag geeft derhalve aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{\sqrt{(z^2+p^2)^3}}{z^2+2p^2-zq}=n\,\frac{z\sqrt{(z^2+p^2)}}{p},$$

waarin n wederom een positief getal aanduidt.

De gevonden vergelijking laat zich herleiden tot

$$nz(z^2+2p^2-zq)\pm p(z^2+p^2)=0,$$

of tot

$$nz(z^2+2p^2)\pm p(z^2+p^2)-nz^2p\frac{dp}{dz}=0.$$

Neemt men nu zijne toevlugt tot de hulpvergelijking $p=zu$, en gaat men voorts te werk als bij het vorig vraagstuk werd opgegeven, dan erlangt men twee differentiaalvergelijkingen van de eerste orde:

$$\frac{dz}{z}=\frac{n\,u\,du}{(n\pm u)(1+u^2)}=\frac{n}{1+n^2}\left(\mp\frac{n\,du}{n\pm u}+\frac{(\pm 1+nu)\,du}{1+u^2}\right),$$

$$d\varphi=\frac{n\,du}{(n\pm u)(1+u^2)}=\frac{n}{1+n^2}\left(\frac{du}{n\pm u}+\frac{(n\mp u)\,du}{1+u^2}\right),$$

welke door het integreren worden

$$log\,\frac{z}{A}=\frac{n}{1+n^2}\left(n\,log\,\frac{\sqrt{(1+u^2)}}{n\pm u}\pm boog\,tang\,u\right),$$
$$\Phi+B=\frac{n}{1+n^2}\left(n\,boog\,tang\,u\mp log\,\frac{\sqrt{(1+u^2)}}{n\pm u}\right).$$

65. Laat (a, b) de coordinaten van het vaste punt verbeelden, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}=n\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2)},$$

waarin n wederom een positief getal voorstelt.

Schrijft men voor de bepaalde vergelijking

$$\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}=\frac{dx}{n\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2)}},$$

dan ziet men terstond in dat zij zich laat integreren, wanneer men haar vermenigvuldigt met de uitdrukking

$$(x-a)+(y-b)p=\frac{(x-a)\,dx+(y-b)\,dy}{dx},$$

als wanneer zij overgaat in

$$\frac{(x-a)\,dp+(y-b)\,p\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}=\frac{(x-a)\,dx+(y-b)\,dy}{n\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2)}}\ldots.(1)$$

Van het tweede lid dezer vergelijking vindt men de integraal regtstreeks; integreert men het eerste lid of de linkerzijde bij gedeelten, dan heeft men

$$\int\frac{(x-a)\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}=\frac{(x-a)\,p}{\sqrt{(1+p^2)}}-\int\frac{dy}{\sqrt{(1+p^2)}},$$
$$\int\frac{y-b)\,p\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}=-\frac{y-b}{\sqrt{(1+p^2)}}+\int\frac{dy}{\sqrt{(1+p^2)}},$$

zoodat de eerste integraal van (1) wordt

$$\frac{(x-a)\,p-(y-b)}{\sqrt{(1+p^2)}}=\frac{1}{n}(A+\sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2)},\ldots(2)$$

zijnde A wederom de constante bij het integreren verkregen.

Om de tweede integraal te verkrijgen, dat is, (2) te integreren, brengt men de regthoekige in poolcoordinaten over, waardoor men het voordeel heeft in dit geval een geschikteren vorm te erlangen.

Neemt men het vaste punt (a, b) als pool, dan is $x-a=z\cos\varphi$ en $y-b=z\sin\varphi$, waardoor onze vergelijking overgaat in

$$\frac{z^2\,d\varphi}{\sqrt{(dz^2+z^2\,d\varphi^2)}}=\frac{A+z}{n},$$

waaruit

$$d\varphi=\pm\frac{(A+z)\,dz}{z\sqrt{(n^2z^2-(A+z)^2)}}.$$

Bij het integreren dezer vergelijking lette men er op of n kleiner, grooter of gelijk een is.

In het eerste geval, $n<1$, wordt de integraal

$$\varphi=H+\frac{1}{\sqrt{(1-n^2)}}\,boog\,tang\,\frac{(1-n^2)z+A}{\sqrt{(1-n^2)(n^2z^2-(z+A)^2)}}-$$
$$-boog\,tang\,\frac{z+A}{\sqrt{(n^2z^2-(z+A)^2)}};$$

zal de grootheid onder het wortelteeken niet onbestaanbaar worden, dan moeten de waarden van z tusschen $-\frac{A}{1+n}$ en $-\frac{A}{1-n}$ blijven.

Is $n>1$, dan heeft de integraal den vorm van

$$\varphi=\pm\left\{K+\frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}}\,log\,[(n^2-1)z-A+\sqrt{((n^2-1)(n^2z^2-(z+A)^2))}]\right.$$
$$\left.-boog\,tang\,\frac{z+A}{\sqrt{(n^2z^2-(z+A)^2)}}\right\},$$

en de grenzen van z liggen tusschen $-\frac{A}{n+1}$ en $+\frac{A}{n-1}$.

Is $n=1$, dan wordt de differentiaalvergelijking

$$d\varphi=\frac{(A+z)\,dz}{z\sqrt{(-A^2-2Az)}},$$

waaruit door integreren volgt

$$\varphi=\pm\left\{L-\frac{\sqrt{((-A)(A+2z))}}{A}-boog\,tang\,\frac{A+z}{\sqrt{((-A)(A+2z))}}\right.$$

Zal de grootheid onder het wortelteeken bestaanbaar blijven, dan moeten de factoren $(-A)$ en $(A+2z)$ hetzelfde teeken hebben, opdat hun product positief zal zijn.

66. De algemeene vergelijking der kromtecirkels is

$$\left(x^1 - x + \frac{(1+p^2)p}{q}\right)^2 + \left(y^1 - y - \frac{1+p^2}{q}\right)^2 = \frac{(1+p^2)^3}{q^2},$$

waarin x^1 en y^1 de loopende coordinaten des kromtecirkels voorstellen, x en y de coordinaten zijn van het aanrakingspunt der gezochte kromme, en p en q de bekende afkortingen voor $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{d^2y}{dx^2}$ te kennen geven. Voor het vaste punt (g, h), door hetwelk al de kromtecirkels der kromme gaan, wordt bovenstaande vergelijking

$$\left(g - x + \frac{(1+p^2)p}{q}\right)^2 + \left(h - y - \frac{1+p^2}{q}\right)^2 = \frac{(1+p^2)^3}{q^2},$$

en elke kromme, welker vergelijking voldoet aan deze differentiaalvergelijking der tweede orde, heeft de eigenschap dat al hare kromtecirkels door het punt (g, h) gaan.

Uit de hier gegeven vergelijking volgt

$$(g-x)^2 + (h-y)^2 + 2((g-x)p - (h-y))\frac{1+p^2}{q} = 0,$$

dat is

$$\frac{q}{1+p^2} = -2\,\frac{(g-x)p - (h-y)}{(g-x)^2 + (h-y)^2},$$

of

$$\frac{dp}{1+p^2} = 2\,\frac{d\left(\frac{y-h}{x-g}\right)}{1+\left(\frac{y-h}{x-g}\right)^2}.$$

Integreert men deze vergelijking, dan komt er

$$boog\ tang\ p + boog\ tang\ C = 2\ boog\ tang\ \frac{y-h}{x-g},$$

waarin $boog\ tang\ C$ de constante is door integreren verkregen.

Men kan de hier gevonden vergelijking ook aldus omzetten:

$$boog\ tang\ \frac{p+C}{1-Cp} = boog\ tang\ \frac{2(x-g)(y-h)}{(x-g)^2 - (y-h)^2}.$$

Om deze vergelijking verder te integreren, neemt men zijn toevlugt tot de hulpvergelijking $y - h = (x-g)u$, welke naar x gedifferentieerd geeft

$$p = u + (x-g)\frac{du}{dx}.$$

Elimineert men p en $y-h$, dan komt er

$$\frac{dx}{x-g}=\frac{1+2Cu-u^2}{(1+u^2)(u-C)}du=\frac{du}{u-C}-\frac{2u\,du}{1+u^2},$$

waaruit door integreren volgt

$$log\frac{x-g}{E}=log(u-C)-log(1+u^2)$$

of

$$\frac{x-g}{E}=\frac{u-C}{1+u^2}.$$

Brengt men in deze laatste vergelijking de waarde van u of $\frac{y-h}{x-g}$ over, dan wordt zij

$$\left(x-g+\frac{E.C}{2}\right)^2+\left(y-h-\frac{E}{2}\right)^2=\frac{E^2}{4}(1+C^2),$$

of, wanneer men $-A$ en $+B$ plaatst voor $\frac{CE}{2}$ en $\frac{E}{2}$,

$$(x-(g+A))^2+(y-(h+B))^2=A^2+B^2,$$

waarin men nu A en B als standvastigen bij het integreren verkregen kan beschouwen.

Uit den vorm der verkregen vergelijking blijkt dat de gezochte kromme een cirkel is, die in zoo verre aan de opgaaf voldoet als elke cirkel ook zijn eigen kromtecirkel is. Wegens de willekeurige standvastigen A en B kan men bepalen dat de gevonden kromme nog aan enkele voorwaarden zal voldoen, dat zij bijv. door den oorsprong zal gaan, door eenig gegeven vast punt loopen, enz.

67. Voor elk der vaste punten (g,h) en (g^1,h^1) wordt de algemeene vergelijking der kromtecirkels, bij de oplossing van het vorig vraagstuk vermeld,

$$\left(g-x+\frac{(1+p^2)p}{q}\right)^2+\left(h-y-\frac{1+p^2}{q}\right)^2=\frac{(1+p^2)^3}{q^2},$$

en

$$\left(g^1-x+\frac{(1+p^2)p}{q}\right)^2+\left(h^1-y-\frac{1+p^2}{q}\right)^2=\frac{(1+p^2)^3}{q^2}.$$

Deze vergelijkingen laten zich terstond herleiden tot

$$(g-x)^2+(h-y)^2+2((g-x)p-(h-y)).\frac{1+p^2}{q}=0$$

en

$$(g^1-x)^2+(h^1-y)^2+2((g^1-x)p-(h^1-y)).\frac{1+p^2}{q}=0.$$

Laat men de as der x door de vaste punten (g, h) en (g^1, h^1) gaan, dan worden de gevonden vergelijkingen eenvoudiger, wijl dan $h=0$ en $h^1=0$ zijn, zonder dat zulks van invloed is op de algemeenheid der opgave. De vergelijkingen worden dan

$$(g-x)^2+y^2+2((g-x)p+y).\frac{1+p^2}{q}=0, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$(g^1-x)^2+y^2+2((g^1-x)p+y).\frac{1+p^2}{q}=0, \quad . \quad . \quad (2)$$

en elke kromme, door welke voldaan wordt aan deze beide differentiaalvergelijkingen, heeft de eigenschap dat al hare kromtecirkels door de beide gegeven punten gaan.

Zien wij hoe zulk eene kromme bepaald wordt.

Integreert men de vergelijking (1) volgens de methode in het vorig vraagstuk vermeld, dan heeft men

$$(x-(g+A))^2+(y-B)^2=A^2+B^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin wederom A en B de beide constanten, bij het integreren verkregen, voorstellen.

De gevonden integraal voldoet wel aan de vergelijking (1), maar dit is niet voldoende, zij mag ook met (2) niet in tegenspraak zijn. Men bepale daarom de waarden van y, p en q uit (3) en brenge die in (2) over, dan valt ook x weg en men behoudt

$$(g^1-g)((g^1-g)-2A)=0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

maar g en g^1 behooren tot verschillende punten, hebben daarom ook verschillende waarden, zoodat men aan (4) slechts voldoen kan door $g^1-g=2A$, waaruit

$A=\frac{g^1-g}{2}$, zoodat de vergelijking (3) wordt

$$\left(x-\frac{g^1+g}{2}\right)^2+(y-B)^2=\left(\frac{g^1-g}{2}\right)^2+B^2, \quad . \quad . \quad (5)$$

met andere woorden, de hier gevonden integraal voldoet zoowel aan (2) als aan (1).

Men kan nog een anderen weg inslaan, men kan de vergelijkingen (1) en (2) van elkander aftrekken en heeft dan

$$2(g-g^1)\left(\frac{g^1+g}{2}-x+\frac{(1+p^2)p}{q}\right)=0;$$

wijl echter g en g^1 tot verschillende punten behooren, en derhalve in het algemeen niet aan elkander gelijk kunnen zijn, mag men uit de laatste vergelijking alleen afleiden

$$\frac{g^1+g}{2}-x+\frac{(1+p^2)p}{q}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dat is, na eenige verschikking,

$$\frac{dp}{(1+p^2)p}=\frac{dx}{x-\frac{g^1+g}{2}},$$

of ook

$$\frac{dp}{p}-\frac{pdp}{1+p^2}=\frac{dx}{x-\frac{g^1+g}{2}}.$$

Integreert men deze vergelijking, dan komt er

$$log\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=log\frac{x-\frac{g^1+g}{2}}{H}$$

of

$$\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=\frac{x-\frac{g^1+g}{2}}{H};$$

zondert men hieruit p af, dan heeft men verder

$$p=\frac{x-\frac{g^1+g}{2}}{\sqrt{\left(H^2-\left(x-\frac{g^1+g}{2}\right)^2\right)}};$$

en hieruit volgt door andermaal integreren

$$y-B=-\sqrt{\left(H^2-\left(x-\frac{g^1+g}{2}\right)^2\right)}$$

of

$$\left(x-\frac{g^1+g}{2}\right)^2+(y-B)^2=H^2, \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarin H en B wederom de constanten zijn bij het integreren verkregen.

De hier gevonden vergelijking is de algemeene integraal van (6), maar men moet de integraal vinden die aan (1) en (2) voldoet; daarom bepaalt men y, p en q uit (7) en brengt

die waarden in (1) en (2) over. In beide gevallen vindt men

$$H^2 = \left(\frac{g^1 - g}{2}\right)^2 + B^2,$$

waardoor (7) overgaat in

$$\left(x - \frac{g^1 + g}{2}\right)^2 + (y - B)^2 = \left(\frac{g^1 - g}{2}\right)^2 + B^2,$$

zoodat men (5) terug vindt, gelijk het behoort.

Eene derde methode bestaat hierin dat men q tusschen (1) en (2) elimineert; dit geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\frac{(g - x)p + y}{(g - x)^2 + y^2} - \frac{(g^1 - x)p + y}{(g^1 - x)^2 + y^2} = 0,$$

of tot

$$\frac{d\left(\frac{y}{x - g}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x - g}\right)^2} - \frac{d\left(\frac{y}{x - g^1}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x - g^1}\right)^2} = 0.$$

Uit de laatste volgt door integreren

$$boog\ tang \frac{y}{x - g} - boog\ tang \frac{y}{x - g^1} = boog\ tang\ K,$$

of

$$boog\ tang \frac{(x - g^1)y - (x - g)y}{(x - g^1)(x - g) + y^2} = boog\ tang\ K,$$

dat is

$$\frac{(x - g^1)y - (x - g)y}{(x - g^1)(x - g) + y^2} = K,$$

of

$$K(x^2 - (g^1 + g)x + g g^1) + K y^2 + (g^1 - g)y = 0,$$

welke vergelijking zich gemakkelijk laat vervormen tot

$$\left(x - \frac{g^1 + g}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{g^1 - g}{2K}\right)^2 = \left(\frac{g^1 - g}{2}\right)^2 + \left(\frac{g^1 - g}{2K}\right)^2,$$

dat is, wanneer men $\frac{g^1 - g}{2K}$ door $-B$ vervangt,

$$\left(x - \frac{g + g^1}{2}\right)^2 + (y - B)^2 = \left(\frac{g^1 - g}{2}\right)^2 + B^2,$$

zoodat men ook langs dezen weg (5) terug vindt.

68. Om die vraag te beantwoorden heeft men de vergelijking

$$x - \frac{p(1+p^2)}{q} = nx,$$

waarin n een positief getal is.

Deze vergelijking laat zich vervormen tot

$$(n-1)x + \frac{p(1+p^2)}{q} = 0,$$

of tot

$$\frac{dx}{x} + (n-1)\left(\frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{1+p^2}\right) = 0,$$

als wanneer zij, na integreren, geeft

$$log\frac{x}{A} + (n-1)\,log\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0.$$

Bedenkt men dat $log\,1 = 0$ is, dan mag men voor haar schrijven

$$\frac{x}{A}\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)^{n-1} = 1,$$

of

$$x = A\left(\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}\right)^{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nu volgt uit de differentiaalvergelijking $dy = p\,dx$ door integreren

$$y = B + px - \int x\,dp,$$

of, wanneer men in deze uitdrukking de voor x gevonden waarde overbrengt

$$y = B + Ap\left(\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}\right)^{n-1} - A\int\left(\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}\right)^{n-1} dp \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De laatst gevonden integraal kan niet verder behandeld worden, zoo lang men de waarde van n niet kent. In de vraag liggen derhalve een onbeperkt aantal krommen opgesloten, die allen door de verbinding van (1) en (2) bepaald worden.

Stelt men $n = 1$, dan worden deze vergelijkingen $x = A$ en $y = B$; zij geven een enkel punt te kennen, zoodat er geen kromme lijn bestaat, die aan de hier gestelde voorwaarde van $n = 1$ voldoet.

Voor $n=2$ worden (1) en (2)

$$x=\frac{A\sqrt{(1+p^2)}}{p} \text{ en } y=B+A\,log\,\frac{1+\sqrt{(1+p^2)}}{p},$$

en elimineert men p tusschen deze vergelijkingen, dan komt er

$$y=B+A\,log\,\frac{x+\sqrt{(x^2-A^2)}}{A},$$

welke zich laat omzetten in

$$x=\frac{A}{2}\left(e^{\frac{y-B}{A}}-e^{-\frac{y-B}{A}}\right),$$

en derhalve de gewone kettinglijn te kennen geeft.

Voor $n=3$ worden de vergelijkingen (1) en (2)

$$x=\frac{A(1+p^2)}{p^2} \text{ en } y=B+\frac{2A}{p},$$

en men vindt na het elimineren van p tusschen deze

$$(y-B)^2=4A(x-A),$$

of de vergelijking der gewone parabool, welker hoofdas evenwijdig loopt met de as der x, en welker top in het punt $x=A$ en $y=B$ ligt.

Wanneer het positieve getal n geen geheel is, doet men beter de vergelijkingen (1) en (2) niet in verband met elkander te beschouwen, maar uit (1) de differentialen dx en dy af te zonderen, en het integreren te beproeven. Laat bijv. $n={}^1/_2$ zijn, dan wordt (1)

$$x=A\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)^{1/2},$$

en hieruit volgt voor p de uitdrukking

$$p=\frac{x^2}{\sqrt{((A^2+x^2)(A^2-x^2))}};$$

zal de noemer in haar niet onbestaanbaar worden, dan moet x tusschen de grenzen $-A$ en $+A$ blijven; stelt men daarom

$$x=A\cos\omega,$$

dan gaat de laatste uitdrukking over in

$$dy=-\frac{A\cos^2\omega\,d\omega}{\sqrt{(1+\cos^2\omega)}}=-\frac{A(1-\sin^2\omega)\,d\omega}{\sqrt{(2-\sin^2\omega)}}$$

of, wanneer men c^2 schrijft voor ${}^1/_2$, in

$$dy = \frac{A}{\sqrt{2}} \frac{1-2(1-c^2 \sin^2\omega)}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}} d\omega,$$

waaruit verder volgt

$$y+B = \frac{A}{\sqrt{2}}\left(\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}} - 2\int \sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}\, d\omega\right),$$

of, wanneer men de elliptische integralen der eerste en tweede soort aanduidt door het teeken, dat Legendre heeft voorgeslagen,

$$y+B = \frac{A}{\sqrt{2}}(F((c_1\omega)) - 2E((c_1\omega))).$$

De lezer beproeve de integraal op te maken, wanneer $n = \frac{3}{2}$ genomen is, hij zal vinden

$$y+B = \frac{A}{\sqrt{2}} F((c_1\omega)).$$

69. Aan deze vraag wordt voldaan door de vergelijking

$$y + \frac{1+p^2}{q} = ny,$$

waarin n wederom een positief getal is. Zij laat zich herleiden tot

$$\frac{dx}{y} = (n-1)\frac{dp}{1+p^2},$$

of, beide leden met p vermenigvuldigende, tot

$$\frac{dy}{y} = (n-1)\frac{p\,dp}{1+p^2},$$

waaruit door integreren volgt

$$log\frac{y}{A} = (n-1)\, log\sqrt{(1+p^2)}$$

of

$$y = A\sqrt{(1+p^2)^{n-1}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Integreert men de differentiaalvergelijking $dx = dy:p$, dan komt er

$$x = B + \frac{y}{p} + \int \frac{y}{p^2}\, dp,$$

of, wanneer men hierin voor y de uitdrukking uit (1) overbrengt,

$$x = B + \frac{A}{p} \sqrt{(1+p^2)^{n-1}} + A \int \sqrt{(1+p^2)^{n-1}} \frac{dp}{p^2}; \quad \ldots \quad (2)$$

ook hier kan de laatst gevonden integraal niet verder behandeld worden, zoo lang men de waarde van n niet kent. In de vraag liggen derhalve een onbeperkt aantal krommen opgesloten, die alle door de verbinding van (1) en (2) bepaald worden, en afhankelijk zijn van de waarde van n. Stelt men $n = 1$, dan vindt men als in het vorig vraagstuk de vergelijkingen van een punt $y = A$ en $x = B$, zoodat ook hier voor deze bijzondere waarde van n geen kromme bestaat, die aan de vraag voldoet.

Stelt men $n = 2$, dan worden de vergelijkingen (1) en (2)

$$y = A\sqrt{(1+p^2)} \text{ en } x = B + A \log (p + \sqrt{(1+p^2)});$$

en wanneer men p tusschen deze laatste elimineert, vindt men

$$x = B + A \log \frac{y + \sqrt{(y^2 - A^2)}}{A},$$

welke vergelijking zich laat herleiden tot

$$y = \frac{A}{2} \left(e^{\frac{x-B}{A}} - e^{-\frac{x-B}{A}} \right),$$

en wederom de kettinglijn te kennen geeft; zij verschilt van de vergelijking der vorige opgave in zoo verre als de coordinaten tegen elkander verwisseld zijn.

De lezer zoeke de integraal in de veronderstelling dat $n = 3$ is; hij zal vinden

$$(x - B)^2 = 4A(y - A),$$

of de vergelijking der gewone parabool, welker hoofdas met de as der y evenwijdig loopt, en welker top gevonden wordt, waar $y = A$ en $x = B$ is.

Wordt het positieve getal n door een breuk voorgesteld, dan volgt men de handelwijze in het vorig vraagstuk gegeven. Is bijv. $n = {}^1/_2$, dan zal de lezer met weinig moeite vinden

$$x + B = \frac{A}{\sqrt{2}} (F((c, \eta)) - 2E((c, \eta))).$$

Was er bepaald dat $n = 1\,{}^1/_2$ moet genomen worden, dan werd de integraal

$$x+B=\frac{A}{\sqrt{2}}F((c,\eta)).$$

De beide laatste integralen komen overeen met die uit het vorig vraagstuk, alleen met dit verschil dat de coordinaten verwisseld zijn.

70. De voorwaarde hier genoemd wordt uitgedrukt door de vergelijking

$$x-\frac{p(1+p^2)}{q}+y+\frac{1+p^2}{q}=x-y,$$

waaruit men achtereenvolgens afleidt

$$2y=\frac{(1+p^2)(1-p)}{q}$$

$$\frac{dx}{2y}=\frac{dp}{(1+p^2)(p-1)},$$

$$\frac{dy}{2y}=\frac{p.dp}{(1+p^2)(p-1)},$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dp}{1+p^2}-\frac{p\,dp}{1+p^2}+\frac{dp}{p-1},$$

$$log\frac{y}{C}=boog\,tang\,p-log\sqrt{(1+p^2)}+log(p-1),$$

$$log\frac{y\sqrt{(1+p^2)}}{C(p-1)}=boog\,tang\,p,$$

$$y=\frac{C(p-1)}{\sqrt{(1+p^2)}}.e^{boog\,tang\,p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Uit de differentiaalvergelijking $dx=dy:p$ volgt door integreren

$$x-A=\frac{y}{p}+\int\frac{y}{p^2}dp,$$

of, wanneer men voor y de gevonden waarde overbrengt,

$$x-A=\frac{C(p-1)}{p\sqrt{(1+p^2)}}e^{boog\,tang\,p}+C\int\frac{p-1}{p^2\sqrt{(1+p^2)}}e^{boog\,tang\,p}.dp. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De hier aangewezen integraal laat zich gemakkelijk ontwikkelen, wanneer men $boog\,tang\,p=u$ stelt; daaruit toch volgt $p=tang\,u$ en $dp=du:cos^2u$, zoodat

$$\int\frac{p-1}{p^2\sqrt{(1+p^2)}}e^{boog\,tang\,p}.dp=\int\left(\frac{1}{sin\,u}-\frac{cos\,u}{sin^2u}\right)e^u\,du=\frac{1}{sin\,u}e^u$$

wordt.

Brengt men de hier bepaalde waarden in (1) en (2) over, dan heeft men

$$y = C(\sin u - \cos u).e^u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$x - A = C(\sin u + \cos u).e^u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en de verbinding van beiden leert ons de gezochte kromme kennen; zij is eene logarithmische spiraal, waarvan men zich op de volgende wijze overtuigt:

Welke ook de waarde moge wezen van de constante A, door het integreren verkregen, men kan het punt, welks coordinaten zijn $x = A$ en $y = 0$, in elk geval als pool aannemen en

$$x - A = z\cos\varphi; \; y = z\sin\varphi$$

stellen. Dan worden de laatst gevondene vergelijkingen (3) en (4)

$$z\sin\varphi = C(\sin u - \cos u).e^u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$z\cos\varphi = C(\sin u + \cos u).e^u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Deelt men deze in elkander, dan komt er

$$tang\,\varphi = \frac{\sin u - \cos u}{\sin u + \cos u} = \frac{sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right)}{cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right)} = tang\left(u - \frac{\pi}{4}\right).$$

Hieruit volgt dat $\varphi = u - \frac{\pi}{4}$ of ook $u = \varphi + \frac{\pi}{4}$ is.

Brengt men (5) en (6) tot de tweede magt en neemt men de som, dan heeft men

$$z^2 = 2\,C^2\,e^{2u} \text{ of } z = (\sqrt{2}).Ce^u \text{ of } z = (\sqrt{2})\,Ce^{\varphi + \frac{\pi}{4}},$$

welke de poolvergelijking der logarithmische spiraal is.

71. Laat a de abscis zijn van het punt der kromme, van waar uit de vlakteinhoud geteld wordt, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$\int_a^x y\,dx = h^2.p, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin h eene lijn is van bepaalde lengte. Differentieert men deze vergelijking, dan heeft men

$$y\,dx = h^2\,dp, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welke vergelijking zich laat integreren, wanneer men haar met p vermenigvuldigt; dan toch bekomt men $y\,dy = h^2\,p\,dp$, waarvan de integraal is

$$y^2 + A = h^2\,p^2.$$

Voor de laatste vergelijking kan men schrijven

$$dx = \frac{h\,dy}{\sqrt{(y^2 + A)}},$$

in welken vorm zij zich nogmaals laat integreren, en dan geeft

$$x = h\,log\,\frac{y + \sqrt{(y^2 + A)}}{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

of

$$y = \frac{1}{2B}\left(B^2 . e^{\frac{x}{h}} - A . e^{-\frac{x}{h}}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin men wederom de kettinglijn herkent. A en B zijn de constanten bij het integreren verkregen.

De gevonden integraal met twee standvastigen voldoet aan de vergelijking (2), die van de tweede orde is, terwijl men toch eene kromme vraagt, die voldoen zal aan (1) of aan eene differentiaalvergelijking der eerste orde. Men mag daarom niet verzuimen een proef te nemen, hierin bestaande dat men de waarden van y en p in (1) overbrengt, haar integreert en ziet of zij identisch kan worden gemaakt.

Volgt men werkelijk den hier aangewezen weg, dan gaat (1) over in

$$\frac{h}{2B}\left(B^2 . e^{\frac{x}{h}} + A\,e^{-\frac{x}{h}}\right) - \frac{h}{2B}\left(B^2\,e^{\frac{a}{h}} + A\,e^{-\frac{a}{h}}\right) =$$

$$= \frac{h}{2B}\left(B^2\,e^{\frac{x}{h}} + A\,e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Uit deze vergelijking vloeit onmiddelijk voort

$$B^2\,e^{\frac{a}{h}} + A\,e^{-\frac{a}{h}} = 0,$$

dat is

$$A = -B^2\,e^{\frac{2a}{h}},$$

zoodat men voor (3) en (4) erlangt

$$x = h \log \frac{y + \sqrt{\left(y^2 - B^2 e^{\frac{2a}{h}}\right)}}{B},$$

en

$$y = \frac{B}{2}\left(e^{\frac{2x}{h}} + e^{\frac{2a}{h}}\right)e^{-\frac{x}{h}},$$

welke nu met de enkele constante B zijn aangedaan, zoodat men de kromme nog aan eene voorwaarde kan laten voldoen. Moet zij, bijv. door het punt (α, β) gaan, dan wordt hare vergelijking

$$y\left(e^{\frac{2\alpha}{h}} + e^{\frac{2a}{h}}\right) = \beta\left(e^{\frac{2x}{h}} + e^{\frac{2a}{h}}\right)e^{\frac{\alpha - x}{h}}.$$

72. De differentiaalformule der subtangens is $y:p$, en van daar wordt de inhoud van den op voorgeschreven wijze begrensden driehoek uitgedrukt door $y^2:2p$. Is nu a de abscis van het vaste punt der kromme, van waar uit de vlakteinhouden geteld worden, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$n\int_a^x y.dx = \frac{y^2}{2p}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

waarin n wederom een positief getal voorstelt. Differentieert men deze vergelijking, dan komt er

$$n.y.dx = \frac{y\,dy}{p} - \frac{y^2\,dp}{2p^2} \text{ of } 2np^2\,dx = 2p\,dy - y\,dp,$$

waarvoor men, daar $p\,dx = dy$ is, ook kan schrijven

$$2(n-1)\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0.$$

De laatste vergelijking laat zich integreren en geeft dan

$$2(n-1)\log y + \log p = \log A \text{ of } y^{2(n-1)}p = A,$$

waaruit door andermaal integreren volgt

$$\frac{1}{2n-1}.y^{2n-1} = Ax + B.$$

Hier verkeeren wij in het geval bij het vorig vraagstuk besproken; de gevonden integraal met twee standvastigen

behoort bij eene differentiaalvergelijking der tweede orde, terwijl toch het vraagstuk slechts aanleiding geeft tot eene differentiaalvergelijking van de eerste orde. Men moet derhalve onderzoeken of de gevonden kromme ook in tegenspraak is met de gestelde vergelijking (1); daartoe brengt men in haar de uitdrukkingen voor y en p over, en vindt dan

$$\frac{1}{2A}((2n-1)(Ax+B))^{\frac{2n}{2n-1}} - \frac{1}{2A}((2n-1)(Aa+B))^{\frac{2n}{2n-1}} = \\ = \frac{1}{2A}((2n-1)(Ax+B))^{\frac{2n}{2n-1}},$$

waaruit onmiddelijk volgt $Aa+B=0$, zoodat $B=-Aa$ is, waardoor de gevonden vergelijking wordt

$$\frac{1}{2n-1}y^{2n-1} = A(x-a),$$

waarin nu slechts eene constante door integreren verkregen voorkomt; de kromme kan derhalve nog aan de eene of andere voorwaarde onderworpen worden.

Voor wij van haar afstappen doen wij opmerken dat wanneer $n > {}^1/_2$ is, de kromme tot de parabolen behoort; ligt n tusschen 0 en ${}^1/_2$, dan behoort zij tot de klasse der hyperbolen. Alleen voor $n = {}^1/_2$ moet men tot de oorspronkelijke integraalvergelijking

$${}^1/_2 \int_a^x y.dx = \frac{y^2}{2p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

terug keeren, welke na differentieren en twee malen integreren aanleiding geeft tot

$$y = Ce^{Ax},$$

of tot eene logarithmische lijn, waarbij A en C de constanten bij het integreren verkregen voorstellen. Brengt men nu de waarden van y en p in (2) over, dan komt er

$$\frac{C}{2A}(e^{Ax} - e^{Aa}) = \frac{C}{2A}e^{Ax},$$

waaruit volgt

$$\frac{C}{2A}e^{A.a} = 0,$$

aan welke vergelijking alleen voldaan kan worden door $C=0$ te stellen, waardoor ook $y=0$ wordt, dat is, de logarithmische lijn valt zamen met de as der x. Maar deze waarde kan niet in aanmerking komen, omdat zij niet voldoet aan de opgave van het vraagstuk.

73. De inhoud van den driehoek, begrensd door de lijnen, in het vraagstuk vermeld, en betrekking hebbende op het eindpunt van den boog, wordt hier, als in het vorig vraagstuk, uitgedrukt door $y^2:2p$. Is verder a de abscis van het punt, van waar uit de telling der inhouden gerekend wordt te beginnen, dan is $y_a^2:2p_a$ de inhoud van den driehoek begrensd door dezelfde lijnen, maar nu met betrekking tot het punt, van waar uit de bogen geteld worden, zoodat het vraagstuk aanleiding geeft tot de vergelijking

$$n\int_a^x y.dx=\frac{y^2}{2p}-\frac{y_a^2}{2p_a}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

waarin n wederom een positief getal is. Differentieert men deze vergelijking, dan komt er

$$n.y.dx=\frac{ydy}{p}-\frac{y^2dp}{2p^2},$$

waarvan de eerste integraal, zie het vorig vraagstuk, is

$$y^{2(n-1)}p=A,$$

en de tweede integraal

$$\frac{1}{2n-1}y^{2n-1}=Ax+B,$$

zijnde A en B wederom de constanten bij het integreren verkregen.

Substitueert men nu in (1) voor y, p, y_a en p_a de overeenkomstige uitdrukkingen, dan gaat zij over in

$$\frac{1}{2A}((2n-1)(Ax+B))^{\frac{2n}{2n-1}}-\frac{1}{2A}((2n-1)(Aa+B))^{\frac{2n}{2n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2A}((2n-1)(Ax+B))^{\frac{2n}{2n-1}}-\frac{1}{2A}((2n-1)(Aa+B))^{\frac{2n}{2n-1}}.$$

Men ziet dat deze vergelijking identiek wordt voor elke waarde van A en B, en men derhalve de gevonden kromme nog aan twee voorwaarden onderwerpen kan.

Ook hier moet men drie gevallen onderscheiden; is $n > {}^1/_2$, dan behoort de kromme door de gevonden vergelijking aangewezen tot de klasse der parabolen; ligt n tusschen 0 en ${}^1/_2$, dan moet zij tot de klasse der hyperbolen gebragt worden. Maar is $n = {}^1/_2$, dan kan men niet anders dan tot de oorspronkelijke vergelijking (1) terugkeeren; brengt men hierin $n = {}^1/_2$ over, en integreert men, na het differentieren, twee achtereenvolgende malen, dan vindt men als in het vorig vraagstuk de logarithmische lijn $y = Ce^{Ax}$, met de constanten A en C. Brengt men nu in (1) de uitdrukkingen voor y, p, y_a en p_a over, nadat men in haar $n = {}^1/_2$ gesteld heeft, dan komt er

$$\frac{C}{2A}(e^{Ax} - e^{Aa}) = \frac{C}{2A}(e^{Ax} - e^{Aa}),$$

en deze vergelijking wordt identiek voor elke waarde van A en C, zoodat men ook de transcendentale kromme aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

74. Noemt men den voerstraal z, en den hoek der coordinaten φ, dan is $z^2 : \frac{dz}{d\varphi}$ de differentiaaluitdrukking voor de subtangens, en wijst ${}^1/_2 z^3 : \frac{dz}{d\varphi}$ den inhoud aan van den driehoek op de voorgeschreven wijze begrensd. Is nu a de abscis voor het punt der kromme, van waar men de poolsectoren begint te tellen, dan geeft de vraag aanleiding tot de vergelijking

$$n \int_a^{\varphi} \frac{z^2}{2} d\varphi = {}^1/_2 z^3 : \frac{dz}{d\varphi}, \quad \ldots \quad (1)$$

waarin n wederom een positief getal is. Zet men p voor $\frac{dz}{d\varphi}$, en differentieert men de vergelijking, dan komt er

$$\frac{nz^2}{2} d\varphi = \frac{3z^2 dz}{2p} - \frac{z^3 dp}{2p^2},$$

of

$$(n-3)\frac{dz}{z}+\frac{dp}{p}=0,$$

waaruit door integreren

$$log\, z^{n-3}+log\, p=log\, A,$$

dat is

$$z^{n-3}p=A,$$

of, nogmaals integrerend,

$$\frac{z^{n-2}}{n-2}=A(\Phi+B), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zijnde A en B de constanten bij het integreren ontstaan.

Nu moet men de meermalen besproken proef nemen, dat is, men moet onderzoeken of de gevonden kromme aan (1) voldoet. Brengt men derhalve voor z en p hare uitdrukkingen in (1) over, dan vloeit uit haar voort

$$\frac{1}{2}(n-2)^{\frac{n}{n-2}}A^{\frac{2}{n-2}}\left((\Phi+B)^{\frac{n}{n-2}}-(a+B)^{\frac{n}{n-2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(n-2)^{\frac{n}{n-2}}A^{\frac{2}{n-2}}(\Phi+B)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Uit deze vergelijking volgt terstond $a+B=0$ of $B=-a$, waardoor (2) overgaat in

$$\frac{z^{n-2}}{n-2}=A(\Phi-a),$$

en waarin nu, zoo als het behoort, slechts eene constante voorkomt.

Men heeft hier rekening te houden met drie verschillende gevallen: is $n>2$, dan behoort de gevonden kromme tot de klasse der parabolische spiralen; voor $n<2$ vindt men de hyperbolische spiralen, en voor $n=2$ moet men tot (1) teruggaan, die dan wordt

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\int_a^{\Phi}\frac{z^2}{2}d\Phi=z^3:2p \text{ of } \frac{dz}{z}=A\,d\Phi,$$

dat is, na integreren,

$$log\frac{z}{C}=A\Phi \text{ of } z=Ce^{A\Phi}.$$

Brengt men nu voor z en p hare uitdrukkingen in (3) over, dan heeft men

$$\frac{C^2}{2A}(e^{2A\Phi} - e^{2Aa}) = \frac{C^2}{2A}e^{2A\Phi},$$

waaruit volgt

$$\frac{C^2}{2A}e^{2Aa} = 0,$$

aan welke vergelijking alleen voldaan kan worden door $C=0$ te stellen; maar dan heeft men ook $z=0$, zoodat de kromme tot een enkel punt herleid wordt, en niet meer voldoen kan aan de voorwaarden in het vraagstuk vermeld. Voor n kan men derhalve elke positieve waarde, alleen met uitzondering van $n=2$, stellen.

75. Hier wordt, even als in de vorige opgave, de inhoud van den driehoek, op de voorgeschreven wijze begrensd, en behoorende tot het eindpunt van den boog, uitgedrukt door $z^3 : 2p$. Is voorts a de coordinatenhoek van het punt, van waar af de poolsectoren geteld worden, dan wordt de inhoud van den driehoek tot dit punt behoorend uitgedrukt door $z_a^3 : 2p_a$, zoodat de opgave aanleiding geeft tot de vergelijking

$$n\int_a^{\Phi} \frac{z^2}{2}\,d\Phi = \frac{z^3}{2p} - \frac{z_a^3}{2p_a},$$

waarin n wederom een positief getal voorstelt.

Na differentieren wordt die vergelijking

$$(n-3)\frac{dz}{z} + \frac{dp}{p} = 0,$$

waaruit, gelijk in het vorig vraagstuk, voortvloeit

$$z^{n-3}p = A,$$

of, na andermaal integreren,

$$\frac{z^{n-2}}{n-2} = A(\Phi + B),$$

waarbij A en B de constanten door integreren verkregen, voorstellen.

Neemt men hier de proef, gelijk in vraagstuk 74, dat is, brengt men de uitdrukkingen voor z, p, z_a en p_a in (1) over dan wordt zij identiek, welke ook de waarden van A en B

mogen wezen, ten blijke dat men de gevonden vergelijking nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

Voor $n>2$ vindt men de parabolische, voor $n<2$ hyperbolische spiralen; alleen voor $n=2$ moet men tot (1) terugkeeren, geheel als in het vorig vraagstuk, en vindt men de logarithmische spiraal met twee willekeurige standvastigen, zoodat hier $n=2$ eene bruikbare kromme leert kennen.

76. De differentiaalformule der subnormaal is $y.p$, en van daar wordt de inhoud van elken driehoek, begrensd op de wijze als in het vraagstuk is aangegeven, voor elk willekeurig punt van den boog uitgedrukt door $y^2 p:2$. Is a de abscis van het punt des boogs, van waar uit men den inhoud begint te tellen, dan wordt de inhoud van den driehoek met betrekking tot dat punt voorgesteld door $y_a^2 p_a:2$, zoodat het vraagstuk aanleiding geeft tot de vergelijking

$$n\int_a^x y.dx=\frac{y^2 p}{2}-\frac{y_a^2 p_a}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin n wederom een positief getal voorstelt. Differentieert men deze vergelijking, dan komt er

$$2n\,dx=2p.dy+y\,dp,$$

of, met $p=\frac{dy}{dx}$ vermenigvuldigende en omzettend,

$$\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\,\frac{p.dp}{n-p^2},$$

waaruit na integreren

$$log\,\frac{y}{H}=-\frac{1}{4}\,log\,(n-p^2) \text{ of } log\left(\frac{y^4}{H^4}\,(n-p^2)\right)=0,$$

dat is

$$\frac{y^4}{H^4}.(n-p^2)=1.$$

Zondert men hieruit p af en vervangt men H^4 door $n.B^4$, dan heeft men

$$dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{y^2\,dy}{\sqrt{((y^2+B^2)(y^2-B^2))}}\;; \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zal deze vergelijking niet onbestaanbaar worden, dan mag geene waarde van y liggen tusschen de grenzen $-B$ en $+B$. Neemt men zijne toevlugt tot de hulpvergelijking

$$y = B : \cos\omega, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dan laat zich (2) omzetten in

$$dx = \frac{B}{\sqrt{n}} \cdot \frac{d\omega}{(\cos^2\omega)\sqrt{(1+\cos^2\omega)}},$$

of in

$$dx = \frac{B}{\sqrt{n}} \frac{d\omega}{(\cos^2\omega)\sqrt{(2-\sin^2\omega)}},$$

of ook, na c^2 voor $^1/_2$ geschreven te hebben, in

$$dx = \frac{B}{\sqrt{2n}} \frac{d\omega}{(\cos^2\omega)\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}},$$

waaruit door gedeeltelijk integreren volgt

$$x = A + \frac{B}{\sqrt{2n}} \Big\{ 2\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}\tan g\,\omega + \\ + \int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}} - 2\int \sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}\,d\omega \Big\},$$

en hierin zijn A en B de constanten bij het integreren ontstaan. De uitdrukkingen, voor welke het integraalteeken is blijven staan, zijn elliptische integralen van de eerste en tweede soort, zoodat men voor de laatste vergelijking mag schrijven

$$x = A + \frac{B}{\sqrt{2n}} \Big\{ 2\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}\tan g\,\omega + F((c,\omega)) - 2E((c,\omega)) \Big\}, \quad \ldots \quad (4)$$

en de kromme geheel bepaald is door (3) en (4).

Er blijft over de proef te nemen, welke wij reeds meermalen ter sprake bragten; de beste weg hiertoe is de waarde van dx uit (2) in (1) over te brengen, waardoor men verkrijgt

$$\sqrt{n}\int_{y_a}^{y} \frac{y^3\,dy}{\sqrt{(y^4-B^4)}} = \frac{y^2 p}{2} - \frac{y_a^2 p_a}{2}.$$

Integreert men deze vergelijking en brengt men voor p en p_a de hierop betrekking hebbende uitdrukkingen over, dan vindt men

$$\frac{\sqrt{n}}{2}(\sqrt{(y^4-B^4)} - \sqrt{(y_a^4-B^4)}) = \frac{\sqrt{n}}{2}(\sqrt{(y^4-B^4)} - \sqrt{(y_a^4-B^4)}),$$

welke vergelijking voor elke waarde van A en B identiek wordt, zoodat men de gevonden kromme nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

77. Duidt men, als vroeger, den voerstraal door z, den coordinatenhoek of abscis door φ aan, dan is $\frac{dz}{d\varphi}$ de differentiaalformule der poolsubnormaal, en de inhoud van den driehoek, op de bovengenoemde wijze begrensd, wordt voor elk willekeurig eindpunt van den boog uitgedrukt door $\frac{1}{2}z\frac{dz}{d\varphi}$. Is verder a de abscis van het punt, van waar af de inhoud der poolsectoren wordt geteld, dan is de inhoud van den driehoek met dit punt overeenkomend $\frac{1}{2}z_a\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)_a$, zoodat de vraag aanleiding geeft tot de vergelijking

$$n\int_a^{\varphi}\frac{z^2}{2}\,d\varphi=\frac{1}{2}z\frac{dz}{d\varphi}-\frac{1}{2}z_a\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)_a, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin n wederom een positief getal voorstelt.

Differentieert men de beide leden der vergelijking, dan komt er

$$nz^2=\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2+z\frac{d^2z}{d\varphi^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wanneer men nu $\frac{dz}{d\varphi}=p$ stelt, dan is $\frac{d^2z}{d\varphi^2}=\frac{dp}{d\varphi}=$
$=\frac{dz}{d\varphi}\cdot\frac{dp}{dz}=p\frac{dp}{dz}$, waardoor (2) overgaat in

$$nz^2=p^2+z.p.\frac{dp}{dz}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Neemt men vervolgens zijne toevlugt tot de hulpvergelijking

$$p=z.u, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en differentieert men haar, dan komt er

$$\frac{dp}{dz}=u+z\frac{du}{dz}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

of, wanneer men p en $\frac{dp}{dz}$ met behulp van (3) elimineert,

$$\frac{dz}{z} = \frac{u\,du}{n - 2u^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Men kan ook (4) omzetten in $\frac{dz}{z} = u\,d\varphi$, zoodat men, lettende op (6), erlangt

$$d\varphi = \frac{du}{n - 2u^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Uit (6) volgt door integreren

$$log\,\frac{z}{A} = -\frac{1}{4}\,log\,(n - 2u^2),$$

of
$$(n - 2u^2)\,z^4 = A^4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Integreert men (7), dan vindt men

$$\varphi + B = \frac{1}{2\sqrt{2n}}\,.\,log\,\frac{\sqrt{n} + u\sqrt{2}}{\sqrt{n} - u\sqrt{2}} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

De gezochte kromme wordt derhalve door de verbinding van (8) en (9) bepaald; elimineert men u, dan komt er

$$\varphi + B = \frac{1}{2\sqrt{2n}}\,.\,log\,\frac{z^2\sqrt{n} + \sqrt{(nz^4 - A^4)}}{z^2\sqrt{n} - \sqrt{(nz^4 - A^4)}}, \quad \ldots \quad (10)$$

zoodat uit de hier gevonden poolvergelijking blijkt dat de kromme tot de klasse der spiralen behoort.

Zondert men z^2 uit (10) af, dan vindt men door differentieren ook de waarde van $z\frac{dz}{d\varphi}$, en brengt men de uitdrukkingen voor beiden in (1) over, dan vindt men, na het integreren, eene vergelijking, die identiek wordt voor elke waarde van A en B, zoodat men de gevonden kromme nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

78. Gemakshalve, wijl het aan de algemeenheid der opgave niet te kort doet, nemen wij de vaste lijn als as der x, en noemen a de abscis van het punt der kromme, van waar uit de bogen geteld worden, zoodat het vraagstuk aanleiding geeft tot de vergelijking

$$\int_a^x \sqrt{(1 + p^2)}\,dx = h\,.\,p, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

waarin h eene lijn van bepaalde lengte is. Differentieert men de beide leden dezer vergelijking, dan heeft men

$$\sqrt{(1+p^2)}\,dx = h.dp \text{ of } dx = \frac{h.dp}{\sqrt{(1+p^2)}}, \quad \ldots \quad (2)$$

welke uitdrukking zich laat integreren, zoodat men bekomt

$$x = h\,log\frac{p+\sqrt{(1+p^2)}}{A}$$

of, p afzonderende,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(Ae^{\frac{x}{h}} - \frac{1}{A}e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

welke andermaal geintegreerd

$$y+B = \frac{h}{2}\left(Ae^{\frac{x}{h}} + \frac{1}{A}e^{-\frac{x}{h}}\right) \quad \ldots \quad (3)$$

oplevert. De hier gevonden kromme met de onbepaalde constanten A en B, door het integreren ontstaan, is de kettinglijn. Brengt men, gelijk wij vroeger meermalen deden, voor p de uitdrukking in (1) over, dan wordt deze vergelijking

$$\frac{h}{2}\left(Ae^{\frac{x}{h}} - \frac{1}{A}e^{-\frac{x}{h}}\right) - \frac{h}{2}\left(Ae^{\frac{a}{h}} - \frac{1}{A}e^{-\frac{a}{h}}\right) = \frac{h}{2}\left(Ae^{\frac{x}{h}} - \frac{1}{A}e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

waaruit volgt

$$Ae^{\frac{a}{h}} - \frac{1}{A}e^{-\frac{a}{h}} = 0, \text{ of } A = e^{-\frac{a}{h}},$$

zoodat (3) wordt

$$y+B = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x-a}{h}} + e^{-\frac{x-a}{h}}\right), \quad \ldots \quad (3)$$

waarin nu slechts eene enkele onbepaalde constante voorkomt, zoodat men de gevonden vergelijking aan nog eene voorwaarde kan laten voldoen.

Men kan nog een anderen weg inslaan; men kan de beide leden van (2) met p vermenigvuldigen, zoodat er komt

$$dy = \frac{hp\,dp}{\sqrt{(1+p^2)}},$$

waaruit na integreren volgt

$$y+B = h\sqrt{(1+p^2)}.$$

Zondert men uit deze vergelijking p af, dan vindt men

$$dx = \frac{h.dy}{\sqrt{((y+B)^2 - h^2)}},$$

waaruit door andermaal integreren volgt

$$x = h\,log\,\frac{y+B+\sqrt{((y+B)^2-h^2)}}{C},$$

of

$$y+B = \frac{1}{2}\left(C.e^{\frac{x}{h}} + \frac{h^2}{C}.e^{-\frac{x}{h}}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zoodat men nogmaals de kettinglijn vindt met de constanten B en C. Deze zijn niet volkomen dezelfde van vroeger, maar brengt men wederom in (1) de uitdrukking voor p over, dan wordt zij

$$\frac{C}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - \frac{h^2}{C^2}\,e^{-\frac{x}{h}}\right) - \frac{C}{2}\left(e^{\frac{a}{h}} - \frac{h^2}{C^2}.e^{-\frac{a}{h}}\right) = \frac{C}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - \frac{h^2}{C^2}\,e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

waaruit volgt

$$e^{\frac{a}{h}} - \frac{h^2}{C^2}e^{-\frac{a}{h}} = 0, \text{ of } C = h\,e^{-\frac{a}{h}},$$

zoodat men voor (4) erlangt

$$y+B = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x-a}{h}} + e^{-\frac{x-a}{h}}\right),$$

welke met (3) volkomen overeenstemt.

79. Blijven coordinaten en punt van telling dezelfde als bij de vorige opgave, dan heeft men te voldoen aan de vergelijking

$$\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\,dx = h\,.\,boog\,tang\,p, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin h eene lijn van bepaalde lengte voorstelt.

Na differentieren en opvolgend integreren vindt men

$$\sqrt{(1+p^2)}\,dx = \frac{h.dp}{1+p^2} \text{ of } dx = \frac{h.dp}{(1+p^2)^{3/2}}$$

en

$$x+A = \frac{h.p}{\sqrt{(1+p^2)}}.$$

Zondert men p af en integreert men andermaal, dan komt er

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x+A}{\sqrt{(h^2-(x+A)^2)}} \text{ en } y+B = -\sqrt{(h^2-(x+A)^2)} \ldots . (2)$$

of $$(x+A)^2+(y+B)^2 = h^2,$$

waaruit blijkt dat de kromme een cirkel is.

Brengt men de uitdrukking voor p uit (2) in (1) over, dan wordt deze

$$\int_a^x \frac{h\,.\,dx}{\sqrt{(h^2-(A+x)^2)}} = h\ boog\ tang \frac{x+A}{\sqrt{(h^2-(A+x)^2)}}$$

of, de grenzen in aanmerking nemende,

$$h\ boog\ tang \frac{x+A}{\sqrt{(h^2-(x+A)^2)}} - h\ boog\ tang \frac{a+A}{\sqrt{(h^2-(x+A)^2)}} =$$

$$= h\ boog\ tang \frac{x+A}{\sqrt{(h^2-(x+A)^2)}},$$

waaruit volgt $A+a=0$ of $A=-a$, zoodat de vergelijking van den gevonden cirkel ten slotte wordt

$$(x-a)^2+(y+B)^2 = h^2;$$

zij is met eene onbepaalde constante B aangedaan, zoodat men haar aan nog eene voorwaarde kan laten voldoen.

80. Dit vraagstuk wordt het gemakkelijkst opgelost, wanneer men de gegeven vaste regte lijn als as der y neemt, en de as der x door het vaste punt laat gaan.

De algemeene vergelijking der raaklijnen, getrokken aan vaste kromme lijnen, is

$$y^1 - y = (x^1 - x)p.$$

Hierin zijn x^1 en y^1 de loopende coordinaten der raaklijn, en x en y de coordinaten van het punt der kromme, waarin de aanraking plaats grijpt.

Daar, waar de raaklijn de as der y snijdt, is $x^1 = 0$, zoodat de vorige vergelijking wordt

$$y^1 = y - px,$$

waardoor het stuk bepaald is van de as der y, begrensd tusschen de as der x en de raaklijn.

Is nu a de abscis van het punt, van waar uit de bogen geteld worden, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking

$$n\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\,dx = y - px, \quad \ldots\ldots (1)$$

waarin n een positief getal verbeeldt. Differentieert men de beide leden der vergelijking, dan heeft men

$$n\sqrt{(1+p^2)}\,dx = -x\,dp \text{ of } \frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)}} = -\frac{n\,dx}{x},$$

waaruit door integreren

$$log\,(p+\sqrt{(1+p^2)}) = n\,log\,\frac{A}{x},$$

of $$p+\sqrt{(1+p^2)} = \frac{A^n}{x^n}, \text{ dat is, } dy = \frac{A^{2n}-x^{2n}}{2A^n x^n}dx.$$

Integreert men de laatste vergelijking andermaal, dan komt er

$$y = B + \frac{A^n x^{-n+1}}{2(-n+1)} - \frac{A^{-n}x^{n+1}}{2(n+1)}, \quad \ldots\ldots (2)$$

waarin A en B de constanten, door integreren verkregen, voorstellen. Substitueert men, zoo als in de vorige vraagstukken, de uitdrukkingen voor y en p in (1) dan gaat deze over in

$$\frac{n}{2}\int_a^x (A^n x^{-n} + A^{-n}x^n)\,dx =$$

$$= B + \frac{A^n x^{-n+1}}{2(-n+1)} - \frac{A^{-n}x^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{1}{2}(A^n x^{-n} - A^{-n}x^n)x,$$

of in

$$\frac{nA^n}{2(-n+1)}(x^{-n+1}-a^{-n+1}) + \frac{nA^{-n}}{2(n+1)}(x^{n+1}-a^{n+1}) =$$

$$= B + \frac{nA^n x^{-n+1}}{2(-n+1)} + \frac{nA^{-n}x^{n+1}}{2(n+1)},$$

waaruit volgt

$$B = -\frac{nA^n a^{-n+1}}{2(-n+1)} - \frac{nA^{-n}a^{n+1}}{2(n+1)},$$

zoodat (2) nu wordt

$$y = \frac{A^n}{2(-n+1)}(x^{-n+1} - n a^{-n+1}) - \frac{A-n}{2(n+1)} x^{n+1} + n a^{n+1}),$$

waarin slechts eene constante voorkomt.

Men moet hier drie gevallen onderscheiden; is $n > 1$, dan behoort de gevonden kromme tot de klasse der hyperbolen; ligt n tusschen 0 en 1, dan moet zij tot de klasse der parabolen gebragt worden. Maar mogt $n = 1$ zijn, dan is men verpligt tot de oorspronkelijke vergelijking (1) terug te keeren; deze wordt in dit geval

$$\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\, dx = y - px, \quad \ldots \quad (3)$$

dat is, na differentieren, ordenen en integreren,

$$dy = \frac{A^2 - x^2}{2Ax} dx,$$

welke, op hare beurt geintegreerd, geeft

$$y = \frac{A}{2} \log \frac{x}{C} - \frac{x^2}{4A}, \quad \ldots \quad (4)$$

met de constanten A en C. Brengt men vervolgens de uitdrukkingen voor y en p in (3) over, dan volgt daaruit

$$\int_a^x \left(\frac{A}{2x} + \frac{x}{2A} \right) dx = \frac{A}{2} \log \frac{x}{C} + \frac{x^2 - 2A^2}{4A},$$

of

$$\frac{A}{2} \log \frac{x}{a} + \frac{x^2 - a^2}{4A} = \frac{A}{2} \log \frac{x}{C} + \frac{x^2 - 2A^2}{4A}.$$

De laatste vergelijking wordt identiek voor de waarden van $A = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ en van $C = a$, waardoor (4) zich herleiden laat tot

$$y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(a \log \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a} \right),$$

waaruit nu elke willekeurige constante verdwenen is, zoodat men de kromme aan geene andere voorwaarde meer onderwerpen kan.

81. Men kan hier, als in het vorig vraagstuk, de gegeven vaste lijn als as der y nemen, en aan de as der x eene willekeurige rigting geven. In dit geval wordt het gedeelte van de as der ordinaten, begrepen tusschen de as der x en de raaklijn van een willkeurig punt des boogs voorgesteld door $y - px$. Is voorts a de abscis van het punt, van waaruit de telling der bogen wordt gerekend een aanvang te nemen, dan wordt het gedeelte, begrensd tusschen de as der abscissen en de raaklijn behoorend bij dat punt voorgesteld door $y_a - p_a a$. Het stuk van de as der ordinaten in het voorstel bedoeld vindt derhalve zijne uitdrukking in $(y - px) - -(y_a - ap_a)$, en het voorstel geeft aanleiding tot de vergelijking

$$n \int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\, dx = (y - px) - (y_a - ap_a), \quad \ldots \quad (1)$$

waarin n een positief getal voorstelt. Na het differentieren van beide leden der vergelijking heeft men

$$n \sqrt{(1+p^2)}\, dx = -x\, dp,$$

waarvan — zie het vorig vraagstuk — de algemeene integraal is

$$y = B + \frac{A^n x^{-n+1}}{2(-n+1)} - \frac{A^{-n} x^{n+1}}{2(n+1)}.$$

Brengt men nu, als vroeger, voor y, p, y_a en p_a de uitdrukkingen in (1) over, dan verandert deze in

$$\frac{nA^n}{2(-n+1)}(x^{-n+1} - a^{-n+1}) + \frac{nA^{-n}}{2(n+1)}(x^{n+1} - a^{n+1}) =$$

$$= \left(B + \frac{nA^n x^{-n+1}}{2(-n+1)} + \frac{nA^{-n} x^{n+1}}{2(n+1)}\right) - \left(B + \frac{nA^n a^{-n+1}}{2(-n+1)} + \frac{nA^{-n} a^{n+1}}{2(n+1)}\right)$$

welke vergelijking identiek wordt voor elke waarde der constanten A en B, zoodat men de gevonden kromme nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen. En deze regel is algemeen: zelfs, wanneer $n = 1$ is, en men tot de oorspronkelijke vergelijking terug moet keeren, vindt men

$$y = \frac{A}{2} \log \frac{x}{C} - \frac{x^2}{4A};$$

neemt men uit haar de uitdrukkingen voor y, p, y_a en p_a,

om die in (1) met $n = 1$ over te brengen, dan vindt men eene vergelijking, die identiek wordt voor elke waarde der constanten A en C, waaruit voortvloeit dat men ook hier de kromme aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

82. De lengte der raaklijn, gelegen tusschen een willekeurig punt der kromme en de as der x, wordt, gelijk bekend is, uitgedrukt door $y\sqrt{(1+p^2)}:p$. Is nu a de abscis van het punt, van waar uit de lengte der bogen geteld wordt, dan is de lengte der raaklijn voor dat punt $y_a\sqrt{(1+p_a)}:p_a$, zoodat de opgave aanleiding geeft tot de vergelijking

$$n\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\,dx = \pm\left(\frac{y\sqrt{(1+p^2)}}{p} - \frac{y_a\sqrt{(1+p_a^2)}}{p_a}\right), \ldots (1)$$

waarin nu n wederom een positief getal voorstelt. Differentieert men de beide leden, dan komt er

$$n\sqrt{(1+p^2)}\,dx = \pm\sqrt{(1+p^2)}\,dx \mp \frac{y\,dp}{p^2\sqrt{(1+p^2)}};$$

vermenigvuldigt men deze vergelijking met $p\sqrt{(1+p^2)}$, dan gaat zij achtereenvolgens over in

$$n(1+p^2)\,dy = \pm(1+p^2)\,dy \mp \frac{y\,dp}{p},$$

$$(n \mp 1)(1+p^2)\,dy \pm \frac{y\,dp}{p} = 0,$$

$$\frac{dy}{y} \pm \frac{dp}{(n \mp 1).p.(1+p^2)} = 0,$$

$$\frac{dy}{y} \pm \frac{1}{n \mp 1}\left(\frac{dp}{p} + \frac{p\,dp}{1+p^2}\right) = 0.$$

Uit deze laatste vergelijking volgt door integreren

$$log\,\frac{y}{A} \pm \frac{1}{n \mp 1}\,log\,\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0$$

of, wanneer men in aanmerking neemt dat $log\,1 = 0$ is,

$$\frac{y}{A}\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)^{\pm\frac{1}{n \mp 1}} = 1,$$

dat is

$$y = A\left(\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}\right)^{\pm\frac{1}{n \mp 1}} \ldots \quad (2)$$

Uit de differentiaalvergelijking $dx = dy : p$ volgt door integreren

$$x + B = \frac{y}{p} + \int \frac{y}{p^2}\, dp,$$

of, wanneer men de waarde van y uit de laatstgevonden vergelijking hierin overbrengt,

$$x + B = \frac{A}{p}\left(\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}\right)^{\pm\frac{1}{n\mp 1}} + A\int\left(\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}\right)^{\pm\frac{1}{n\mp 1}} \cdot \frac{dp}{p^2} \ldots\ldots (3)$$

Men kan de laatste vergelijking niet verder behandelen, zoo lang men de waarde van n niet kent; van die waarde hangt het af welke kromme men zal vinden, zoodat het aantal dezer onbeperkt is. Zij worden allen bepaald door de verbinding van (2) en (3), behalve voor het geval dat $n = 1$ is; dan toch moet men zijne toevlugt nemen tot de oorspronkelijke vergelijking (1), waarin nu $n = 1$ gesteld is, en vindt men $dp = 0$, waaruit door twee maal integreren $y = Ax + B$ afgeleid wordt. Neemt men de meermalen besproken proef, dan zal het blijken dat de dan komende vergelijking identiek wordt voor elke waarde van A en B, zoodat men de lijn nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

Wil men verder in het vraagstuk doordringen, dan moet men onderscheiden of $1 : (n \mp 1)$ een geheel getal is of niet. In het eerste geval kan men de integraal

$$\int\left(\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}\right)^{\pm\frac{1}{n\mp 1}} \cdot \frac{dp}{p^2}$$

in zuiver algebraischen, logarithmischen of cyclometrischen vorm uitdrukken.

Laat, om hiervan een voorbeeld bij te brengen, $n = {}^1/_2$ gegeven zijn, dan worden de vergelijkingen (1), (2) en (3)

$$\frac{1}{2}\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\, dx = \frac{y\sqrt{(1+p^2)}}{p} - \frac{y_a\sqrt{(1+p_a^2)}}{p_a}, \ldots (4)$$

$$y = \frac{Ap^2}{1+p^2}, \ldots (5), \quad x + B = \frac{Ap}{1+p^2} + A\,\text{boogtang}\,p. \ldots (6)$$

Brengt men de waarde van p uit (5) in (6) over, dan wordt deze

$$x+B=\nu(Ay-y^2)+A\,boog\,tang\,\frac{y}{\nu(Ay-y^2)}.$$

De gevonden kromme is derhalve de gewone cycloide met de twee constanten A en B. Maakt men de meermalen vermelde proef, dan zal men bevinden dat de constanten algemeen blijven, en men de kromme derhalve nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen. Zondert men toch uit (5) de uitdrukking $\nu(1+p^2)$ af, dan heeft men $\nu(1+p^2)=$ $=p\,\nu A:\nu y$, waardoor (4) overgaat in

$$\frac{\nu A}{2}\int_a^x \frac{p}{\nu y}\,dx=\sqrt{Ay}-\sqrt{Ay_a},$$

welke laatste vergelijking omgezet kan worden in

$$\frac{\nu A}{2}\int_{y_a}^{y} \frac{1}{\nu y}\,dy=\sqrt{Ay}-\sqrt{Ay_a},$$

of in

$$\nu A(\nu y-\nu y_a)=\sqrt{Ay}-\sqrt{Ay_a},$$

en te kennen geeft dat zij identiek wordt voor elke waarde van y en die der constanten.

Zij nog $n=2$, dan worden de vergelijkingen (1), (2) en (3)

$$2\int_a^x \nu(1+p^2)\,dx=\frac{y\,\nu(1+p^2)}{p}-\frac{y_a\,\nu(1+p_a^2)}{p_a}, \quad \ldots\ldots (7)$$

$$y=\frac{A\,\nu(1+p^2)}{p}, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$x+B=\frac{A\,\nu(1+p^2)}{2p^2}+\frac{A}{2}\,log\frac{-1+\nu(1+p^2)}{p}. \quad \ldots \quad (9)$$

Nu volgt uit (8) $p=A:\nu(y^2-A^2)$, waardoor (9) overgaat in

$$x+B=\frac{y}{2A}\nu(y^2-A^2)+\frac{A}{2}\,log\frac{y-\nu(y^2-A^2)}{A}.$$

Hieruit blijkt dat de gevonden kromme de ontwondene is der kettinglijn; wil men de proef nemen of zij zich verdraagt met (7), dan zondert men uit (8) de wortelgrootheid

$\sqrt{(1+p^2)}$ af, en brengt hare waarde of $yp:A$ in (7) over, welke daardoor wordt

$$2\int_a^x \frac{yp}{A}\,dx = \frac{y^2}{A} - \frac{y_a^2}{A} \text{ of ook } 2\int_{y_a}^{y} \frac{y}{A}\,dy = \frac{y^2}{A} - \frac{y_a^2}{A},$$

dat is

$$\frac{y^2}{A} - \frac{y_a^2}{A} = \frac{y^2}{A} - \frac{y_a^2}{A},$$

ten blijke dat de vergelijking identiek wordt voor elke waarde der veranderlijke y en der constanten A en B, zoodat men de gevonden kromme nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

Wanneer men, eindelijk, $n = {}^3/_2$ stelt en, als in de beide vorige gevallen, alleen het bovenst teeken in aanmerking neemt, dan worden de vroeger gevonden vergelijkingen (1), (2) en (3)

$$\frac{3}{2}\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\,dx = \frac{y\sqrt{(1+p^2)}}{p} - \frac{y_a\sqrt{(1+p_a^2)}}{p_a}, \ldots (10)$$

$$y = \frac{A(1+p^2)}{p^2}, \ldots (11) \quad x + B = \frac{2A}{3p^3}, \ldots (12)$$

of, wanneer men p tusschen (11) en (12) elimineert,

$$(y-A)^3 = \frac{9A}{4}(x+B)^2,$$

zoodat men in dit geval de semicubische of Neil'sche parabool vindt.

Neemt men wederom uit (11) de wortelgrootheid $\sqrt{(1+p^2)}$, en brengt men hare waarde in (10) over, dan wordt deze

$$\frac{3}{2}\int_{y_a}^{y} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{A}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{y^3} - \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{y_a^3},$$

en zal het, als in het vorig voorbeeld, blijken dat men de kromme, wegens de onbepaalde constanten, nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

In de gevallen, waarin $1:(n \mp 1)$ een breuk wordt, is het

geschikter uit (2) regtstreeks de differentialen dx en dy af te zonderen en daarop te integreren.

Wordt bijv. $n=1$ gesteld, en neemt men van het dubbele teeken alleen het onderste in aanmerking, dan worden (1) en (2)

$$\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\,dx = -\frac{y\sqrt{(1+p^2)}}{p} + \frac{y_a\sqrt{(1+p_a^2)}}{p_a}, \ldots (13)$$

en

$$y = A\left(\frac{\sqrt{(1+p^2)}}{p}\right)^{-1/2} \ldots\ldots (14)$$

Zondert men nu dx en dy van elkander af, dan komt er

$$dx = \frac{\sqrt{(A^2+y^2)(A^2-y^2)}}{y^2}\,dy, \ldots (15)$$

waarin voor de wortelgrootheid alleen het positieve teeken mag worden genomen, wijl men anders in tegenspraak komt met (14).

Zal de grootheid onder het wortelteeken bestaanbaar blijven, dan moeten voorts alle waarden van y liggen tusschen $-A$ en $+A$, zoodat men

$$y = A\cos\omega \ldots\ldots\ldots (16)$$

kan stellen, waardoor nu (15) overgaat in

$$dx = -A\frac{\sin^2\omega}{\cos^2\omega}\sqrt{(1+\cos^2\omega)}\,d\omega,$$

of in

$$dx = -A\frac{\sin^2\omega}{\cos^2\omega}\sqrt{(2-\sin^2\omega)}\,d\omega.$$

Schrijft men hierin c^2 voor $^1/_2$, dan laat zich de laatste vergelijking vervormen tot

$$dx = -A\sqrt{2}\left(\frac{1}{\cos^2\omega}\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)} - \sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}\right)d\omega,$$

waaruit door integreren volgt

$$x = B - A\sqrt{2}\left\{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}\,tang\,\omega + \int\frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}} - 2\int\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}\,d\omega\right\},$$

dat is

$$x = B - A\sqrt{2}\left\{\sqrt{(1-c^2\sin^2\omega)}\,tang\,\omega + F((c,\omega)) - 2E((c,\omega))\right\}, \ldots (17)$$

wanneer men voor de elliptische integralen van de eerste en tweede soort wederom het afkortingsteeken van Legendre bezigt.

De gezochte kromme is derhalve bepaald door (16) en (17), wijl zoowel x als y in functie van ω zijn uitgedrukt. Brengt men $\nu(1+p^2)=A^2p:y^2$ uit (14) over in (13), dan vindt men

$$\int_a^x \frac{A^2p}{y^2}dx=-\frac{A^2}{y}+\frac{A^2}{y_a} \text{ of } \int_{y_a}^{y}\frac{A^2}{y^2}dy=-\frac{A^2}{y}+\frac{A^2}{y_a},$$

of, na integreren,

$$A^2\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y_a}\right)=-\frac{A^2}{y}+\frac{A^2}{y_a},$$

welke vergelijking wederom identiek wordt voor elke waarde van y en de constante A, zoodat zij tot de vroeger reeds meermalen gemaakte gevolgtrekking aanleiding geeft.

Met nog een voorbeeld nemen wij afscheid van dit vraagstuk; wij stellen nog $n={}^1/_2$, en brengen van het dubbel teeken alleen het onderst in rekening. Bij deze veronderstelling worden de vergelijkingen (1) en (2)

$$\frac{1}{2}\int_a^x \nu(1+p^2)dx=-\frac{y\nu(1+p^2)}{p}+\frac{y_a\nu(1+p_a^2)}{p_a},$$

$$y=A\left(\frac{\nu(1+p^2)}{p}\right)^{-{}^2/_3},$$

en uit de laatste vloeit voort

$$dx=\frac{\nu(A^3y-y^4)}{y^2}dy. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Om het integreren dezer vergelijking mogelijk te maken, differentieert men de breuk $\nu(A^3y-y^4):y$, en vindt dan

$$d\left(\frac{\nu(A^3y-y^4)}{y}\right)=\frac{(-A^3y-2y^4)dy}{2y^2\nu(A^3y-y^4)};$$

voegt men bij den teller der tweede breuk $(3A^3y-3A^3y)$, dan verkrijgt de vergelijking den volgenden vorm

$$d\left(\frac{\nu(A^3y-y^4)}{y}\right)=\frac{\nu(A^3y-y^4)}{y^2}dy-\frac{3A^3dy}{2y\nu(A^3y-y^4)},$$

of, met het oog op (18) en na het integreren,

$$x = B + \frac{\sqrt{(A^3 y - y^4)}}{y} + \frac{3A^3}{2} \int \frac{dy}{y\sqrt{(A^3 y - y^4)}} \ldots (19)$$

Om den vorm onder het integraalteeken verder te kunnen behandelen, ontbindt men het verschil $A^3 y - y^4$ in twee factoren van den tweeden graad, zoodat men het product $(A^2 + Ay + y^2)(Ay - y^2)$ bekomt, en zet dan

$$y = \frac{\alpha + \beta z}{1 + z}, \ldots \ldots \ldots (20)$$

waardoor de beide factoren $A^2 + Ay + y^2$ en $Ay - y^2$ respectievelijk worden

$$\frac{(A^2 + A\alpha + \alpha^2) + (2A^2 + A\alpha + A\beta + 2\alpha\beta)z + (A^2 + A\beta + \beta^2)z^2}{(1+z)^2},$$

en

$$\frac{(A\alpha - \alpha^2) + (A\alpha + A\beta - 2\alpha\beta)z + (A\beta - \beta^2)z^2}{(1+z)^2}.$$

Zullen echter in de tellers van beide breuken de eerste magten van z wegvallen, dan moet voldaan zijn aan:

$2A^2 + A\alpha + A\beta + 2\alpha\beta = 0$ en $A\alpha + A\beta - 2\alpha\beta = 0$,

waaruit gevonden wordt

$$\alpha = \frac{A}{2}(-1 + \sqrt{3}), \text{ en } \beta = \frac{A}{2}(-1 - \sqrt{3}),$$

zoodat (20) overgaat in

$$y = \frac{A}{2} \times \frac{(-1 + \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})z}{1 + z}. \ldots (21)$$

Brengt men de hier bepaalde waarden over, dan komt er

$$\frac{3A^3}{2} \int \frac{dy}{y\sqrt{(A^3 y - y^4)}} =$$

$$-6A \int \frac{(1+z)\,dz}{((-1+\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})z)\sqrt{((1+z^2)((2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})z^2)\sqrt{3})}}.$$

Vermenigvuldigt men teller en noemer der laatste breuk met $(-1+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})z$, dan gaat zij over in

$$\frac{3A^3}{2} \int \frac{dy}{y\sqrt{(A^3 y - y^4)}} =$$

$$= -6A\sqrt[4]{3} \int \frac{z\,dz}{\sqrt{\{(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})z^2)^3 . (1+z^2)\}}} -$$

$$-A\sqrt[4]{27} \int \frac{((-1+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})z^2)\,dz}{\sqrt{\{(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})z^2)^3\,(1+z^2)\}}}.$$

Om de hier aangewezen integralen te bepalen, stelt men

$$z = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})}} \cos\omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

waardoor de vergelijking overgaat in

$$\frac{3A^3}{2}\int \frac{dy}{y\sqrt{(A^3y-y^4)}} =$$

$$= +6A\sqrt[4]{3}\int \frac{(\cos\omega)\,d\omega}{(\sin\omega)^2\sqrt{(4-(2-\sqrt{3})(\sin\omega)^2)}} +$$

$$+A\sqrt[4]{27}\int \frac{(2\sqrt{3}-(-1+\sqrt{3})(\sin\omega)^2)\,d\omega}{(\sin\omega)^2\sqrt{(4-(2-\sqrt{3})(\sin\omega)^2)}}.$$

Stelt men eindelijk tot verdere bekorting

$$c = {}^1/_2\sqrt{(2-\sqrt{3})},$$

of substitueert men $4c^2$ voor $2-\sqrt{3}$, dan bekomt men

$$\frac{3A^3}{2}\int \frac{dy}{y\sqrt{(A^3y-y^4)}} = 3A\sqrt[4]{3}\int \frac{(\cos\omega)\,d\omega}{(\sin\omega)^2\sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)}} +$$

$$+3A\sqrt[4]{3}\int \frac{d\omega}{(\sin\omega)^2\sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)}} -$$

$$-\frac{A(-1+\sqrt{3})\sqrt[4]{27}}{2}\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)}}.$$

Nu is

$$\int \frac{(\cos\omega)\,d\omega}{(\sin\omega)^2\sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)}} = \frac{\sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)}}{\sin\omega}$$

en

$$\int \frac{d\omega}{(\sin\omega)^2\sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)}} = -\frac{\cos\omega\sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)}}{\sin\omega} +$$

$$+\int \frac{d\omega}{\sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)}} - \int \sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)}\,d\omega.$$

De vormen, die hier nog onder het integraalteeken voorkomen, zijn de zoogenaamde elliptische integralen van de eerste en tweede soort, zoodat men voor de vergelijking (19) mag schrijven

$$x = B + \frac{\sqrt{(A^3y-y^4)}}{y} - 3A\sqrt[4]{3}\,\frac{1+\cos\omega}{\sin\omega}\sqrt{(1-c^2(\sin\omega)^2)} +$$

$$+\frac{A(1+\sqrt{3})\sqrt[4]{27}}{2}.F((c,\omega)) - 3A\sqrt[4]{3}E((c,\omega)). \quad . \quad . \quad (23)$$

Wanneer men nu ook z tusschen (21) en (22) elimineert bekomt men

$$y = \frac{A}{2} \times \frac{(-1+\sqrt{3})(1+\cos\omega)}{1+(2-\sqrt{3})\cos\omega}, \quad \ldots \quad (24)$$

zoodat de gevonden kromme door de verbinding van (23) en (24) wordt bepaald.

Zondert men uit de tweede vergelijking van dit voorbeeld de wortelgrootheid $\sqrt{(1+p^2)}$ af, en brengt men hare waarde $\frac{p(\sqrt{A})^3}{(\sqrt{y})^3}$ in de eerste over, dan zal men na eenige omzetting en het integreren eene vergelijking vinden, die identiek wordt voor elke waarde der veranderlijke y en der onbepaalde constanten A en B, waaruit blijkt dat men de kromme nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

83. Zij wederom z de voerstraal en Φ de coordinatenhoek of abscis, dan wordt de lengte der tangens in een willekeurig punt voorgesteld door $z\sqrt{(z^2+p^2)}:p$, waarin $p = dz:d\Phi$.

Is nu a de abscis van het punt, van waar uit de bogen geteld worden, dan is de lengte der tangens voor dat punt gelijk aan $z_a\sqrt{(z_a^2+p_a^2)}:p_a$, zoodat de opgaaf aanleiding geeft tot de vergelijking

$$n\int_a^{\Phi}\sqrt{(p^2+z^2)}\,d\Phi = \pm\left(\frac{z\sqrt{(z^2+p^2)}}{p} - \frac{z_a\sqrt{(z_a^2+p_a^2)}}{p_a}\right), \ldots (1)$$

waarin n een positief getal voorstelt. Differentieert men de beide leden dezer vergelijking, dan heeft men

$$n\sqrt{(p^2+z^2)}\,d\Phi = \pm\frac{p(2z^2+p^2)\,dz - z^3\,dp}{p^2\sqrt{(p^2+z^2)}},$$

of

$$np^2(p^2+z^2)\,d\Phi = \pm p(2z^2+p^2)\,dz \mp z^3\,dp,$$

of ook

$$np^2(p^2+z^2) = \pm p^2(2z^2+p^2) \mp z^3\frac{dp}{d\Phi}. \quad \ldots \quad (2)$$

Met behulp der vergelijking

$$p = zu \quad \ldots \quad (3)$$

laat zich (2) herleiden tot

$$nu^2(1+u^2) = \pm u^2(1+u^2) \mp \frac{du}{d\Phi},$$

of tot

$$(n \mp 1)\, u^2 (1 + u^2) = \mp \frac{du}{d\varphi},$$

waaruit volgt

$$\frac{du}{d\varphi} = \mp (n \mp 1)\, u^2 (1 + u^2),$$

of

$$\frac{du}{d\varphi} = (\mp n + 1)\, u^2 (1 + u^2),$$

of

$$d\varphi = \frac{1}{(\mp n + 1)} \cdot \frac{du}{(1 + u^2)\, u^2},$$

dat is

$$d\varphi = \frac{1}{(\pm n - 1)} \cdot \left(-\frac{du}{u^2} + \frac{du}{1 + u^2} \right). \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Schrijft men (3) op de volgende wijze

$$\frac{dz}{d\varphi} = z \,.\, u,$$

dan volgt hieruit

$$d\varphi = \frac{dz}{z \,.\, u};$$

of met het oog op (4)

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{(\pm n - 1)} \left(-\frac{du}{u} + \frac{u\, du}{1 + u^2} \right). \quad . \quad . \quad (5)$$

Integreert men nu (4), dan komt er

$$\varphi + A = \frac{1}{(\pm n - 1)} \left(\frac{1}{u} - boog\, tang\, \frac{1}{u} \right), \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en integreert men (5), dan heeft men nog

$$log \frac{z}{B} = \frac{1}{(\pm n - 1)} (-log\, u + {}^1/_2\, log\, (1 + u^2)),$$

of

$$log \frac{z}{B} = \frac{1}{2\,(\pm n - 1)}\, log \frac{1 + u^2}{u^2},$$

dat is

$$z^{2\,(\pm n - 1)} = B^{2\,(\pm n - 1)} \,.\, \frac{1 + u^2}{u^2} \,. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Door de vergelijkingen (6) en (7) heeft men nu φ en z in

functie van u uitgedrukt, en het integreren algemeen opgenomen. Elimineert men u tusschen de laatstgenoemde vergelijkingen, dan heeft men eindelijk

$$\varphi + A = \frac{1}{(\pm n - 1)} \left\{ \frac{\sqrt{(z^{2(\pm n-1)} - B^{2(\pm n-1)})}}{B^{(\pm n-1)}} - \right.$$
$$\left. - boog\,tang \frac{\sqrt{(z^{2(\pm n-1)} - B^{2(\pm n-1)})}}{B^{(\pm n-1)}} \right\} . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wijl deze laatste vergelijking twee standvastigen als gevolg van het integreren bevat, terwijl de differentiaalvergelijking (1) slechts van de eerste orde is, moet men zich nog overtuigen of (8) en (1) met elkander strooken. Hiertoe differentieert men (8), brengt de daaruit voortvloeijende waarde van $\sqrt{(z^2 + p^2)}$ in (1) over, en vindt dan na integreren

$$\pm \frac{n}{B^{(\pm n-1)}} \left(z^{\pm n} - \frac{z^{\pm n}}{a} \right) = + \left(\frac{z^{\pm n}}{B^{(\pm n-1)}} - \frac{\frac{z^{\pm n}}{a}}{B^{(\pm n-1)}} \right),$$

of eene vergelijking die identiek wordt voor elke waarde der veranderlijke z en de beide constanten A en B, waaruit blijkt dat men (8) nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

Stelt men $n = 1$ en neemt men van het dubbele teeken het onderste in aanmerking, dan wordt (8)

$$\varphi + A = -\frac{\sqrt{(B^4 - z^4)}}{2z^2} + \frac{1}{2} boog\,tang \frac{\sqrt{(B^4 - z^4)}}{z^2}.$$

Maar wil men bij $n = 1$ het bovenst teeken in rekening brengen, dan moet men, wijl nu in (8) een nul in den noemer komt, en men derhalve met eene uitzondering te doen heeft, tot (2) terugkeeren. Deze vergelijking wordt in het gegeven geval

$$z^2 \left(p^2 - z \frac{dp}{d\varphi} \right) = 0.$$

Uit haar volgt $p^2 - z \frac{dp}{d\varphi} = 0$ of $p \frac{dz}{d\varphi} - z \frac{dp}{d\varphi} = 0$, of $p\,dz - z\,dp = 0$, waaruit na twee malen integreren $log \frac{z}{K} = H\varphi$, dat is $z = Ke^{H\varphi}$, waarin H en K de constanten bij het integreren ontstaan, beteekenen.

De hier gevonden kromme is de logarithmische spiraal.

Brengt men de waarden van z en p in (1), waarin nu $n=1$ gesteld is, over, en integreert men haar, dan komt er

$$\frac{K}{H}\sqrt{(1+K^2)}.(e^{H\Phi}-e^{H\alpha})=\frac{K}{H}\sqrt{(1+K^2)}.(e^{H\Phi}-e^{H\alpha}),$$

waaruit blijkt dat zij identiek wordt voor elke waarde der constanten H en K, zoodat men deze logarithmische spiraal nog aan twee voorwaarden kan laten voldoen.

84. De lengte der normalen wordt uitgedrukt door $\sqrt{(z^2+p^2)}$, zoodat de opgaaf aanleiding geeft tot de vergelijking

$$n\int_{\alpha}^{\Phi}\sqrt{(p^2+z^2)}\,d\Phi=\pm(\sqrt{(z^2+p^2)}-\sqrt{(z_\alpha^2+p_\alpha^2)}),$$

waarin n wederom een positief getal is. Differentieert men de beide leden, dan komt er

$$n\sqrt{(z^2+p^2)}\,d\Phi=\pm\frac{z\,dz+p\,dp}{\sqrt{(z^2+p^2)}},$$

of

$$n(z^2+p^2)\,d\Phi=\pm(z\,dz+p\,dp),$$

of

$$\pm n(z^2+p^2)=z\frac{dz}{d\Phi}+p\frac{dz}{d\Phi}\cdot\frac{dp}{dz},$$

dat is ook

$$\pm n(z^2+p^2)=zp+p^2\frac{dp}{dz}.$$

Neemt men vervolgens zijne toevlugt tot de hulpvergelijking $p=zu$, dan bekomt men

$$\frac{dz}{z}=\frac{u\,du}{(\pm n-u)(1+u^2)},$$

en

$$d\Phi=\frac{du}{(\pm n-u)(1+u^2)}.$$

Deze vergelijkingen laten zich gemakkelijker integreren, wanneer men haar brengt tot den vorm

$$\frac{dz}{z}=\frac{1}{1+n^2}\left(\frac{n^2\,du}{\pm n-u}-\frac{(\pm n+u)\,du}{1+u^2}\right),$$

en $$d\varphi = \frac{1}{1+n^2}\left(\frac{\mp n\,du}{\pm n - u} + \frac{(-1 \pm n u)\,du}{1+u^2}\right);$$

men vindt dan terstond

$$log\,\frac{z}{A} = \frac{1}{1+n^2}(-n^2\,log(\pm n - u) - {}^1/_2\,log(1+u^2) \mp n\,boog\,tang\,u),$$

en

$$\varphi + B = \frac{1}{1+n^2}\left(\mp n\,log(n-u) \pm \frac{n}{2}\,log(1+u^2) - boog\,tang\,u\right),$$

waarvoor men ook schrijven mag

$$z^{1+n^2}(\pm n - u)^{n^2}\sqrt{(1+u^2)} = A^{1+n^2}\,e^{\mp n\,boog\,tang\,u},$$

en

$$(1+n^2)(\varphi + B) = \pm log\left(\frac{\sqrt{(1+u^2)}}{\pm n - u}\right)^n - boog\,tang\,u.$$

85. Als men de ordinaten der eerste kromme door y, die der tweede kromme door z aanduidt, heeft men de vergelijking

$$z = \int_o^x \sqrt{(1+p^2)}\,dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Is a de abscis van het punt, van waar af de inhouden der tweede kromme geteld worden, dan heeft men om dien inhoud te bepalen de uitdrukking $\int_a^x z\,dx$, waaruit als tweede vergelijking voortvloeit

$$\int_a^x z\,dx = h\,y$$

of, met het oog op (1),

$$\int_a^x \int_o^x \sqrt{(1+p^2)}\,dx^2 = h.y, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin h eene lijn van bepaalde lengte voorstelt. Differentieert men de beide leden dezer vergelijking twee malen achter elkander, dan komt er

$$\sqrt{(1+p^2)}\,dx^2 = h\,d^2y,$$

waaruit

$$dx = \frac{h\,dp}{\sqrt{(1+p^2)}},$$

dat is, na integreren,

$$x = h\,log\frac{p+\sqrt{(1+p^2)}}{A}.$$

Zondert men hieruit p af, dan heeft men

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2A}\left(A^2 e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en uit haar volgt door andermaal integreren

$$y+B = \frac{h}{2A}\left(A^2 e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

De laatst gevondene is de vergelijking van de eerste kromme, en A en B zijn de constanten bij het integreren verkregen. Om de tweede kromme te vinden moet men de waarde van p uit (3) in (1) overbrengen; men vindt dan

$$z = \frac{1}{2A}\int_o^x \left(A^2 e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) dx,$$

dat is, na integreren,

$$z = \frac{h}{2A}\left\{\left(A^2 e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) - (A^2-1)\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wijl de vergelijking (2) eene oorspronkelijke is, moet men nog onderzoeken of de constanten A en B algemeen mogen blijven, dan of men aan haar bepaalde waarden moet toekennen. Daartoe brengt men de uitdrukkingen voor y en p in (2) over, en bekomt dan, na twee malen integreren,

$$\frac{h^2}{2A}\left(A^2 e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) - \frac{h^2}{2A}\left(A^2 e^{\frac{a}{h}} + e^{-\frac{a}{h}}\right) - \frac{A^2-1}{2A}.h(x-a) =$$

$$= -hB + \frac{h^2}{2A}\left(A^2 e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

welke vergelijking identiek wordt voor de waarden van

$$B = \frac{h}{2A}\left(A^2 e^{\frac{a}{h}} + e^{-\frac{a}{h}}\right)$$

en

$$A = \pm 1.$$

De vergelijkingen (4) en (5) gaan door deze waarden over in

$$y = \pm \frac{h}{2} \left\{ \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right) - \left(e^{\frac{a}{h}} + e^{-\frac{a}{h}} \right) \right\}$$

en in

$$z = \pm \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right).$$

Hieruit blijkt dat zoowel de eerste als de tweede kromme tot de kettinglijnen behooren; zij liggen beiden aan de eene of de andere zijde van de as der x, naarmate men van het dubbele teeken het bovenste of onderste in rekening brengt.

86. Om deze vraag te beantwoorden moet men gebruik maken van de vergelijking

$$n \int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\, dx = \pm \frac{\sqrt{(1+p^2)^3}}{q}, \quad \ldots \quad (1)$$

waarin n wederom een geheel getal voorstelt. Zet men ter bekorting

$$s = \int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\, dx \text{ en } ds = \sqrt{(1+p^2)}\, dx,$$

dan wordt (1)

$$\frac{ds}{s} = \pm n \frac{dp}{1+p^2},$$

waaruit door integreren volgt

$$s = C e^{\pm n \, boog\, tang\, p}.$$

Op nieuw gedifferentieerd komt er

$$ds = \pm n\, e^{\pm n \, boog\, tang\, p} \cdot \frac{dp}{1+p^2} \quad \ldots \quad (2)$$

Om deze vergelijking verder te kunnen behandelen zet men $boog\, tang\, p = u$, waaruit volgt $p = tang\, u$; $ds = \sqrt{(1+p^2)}\, dx = \frac{dx}{\cos u}$ en $\frac{dp}{1+p^2} = du$, als wanneer (2) overgaat in

$$dx = \pm n\, C e^{\pm n\, u}\, Cos\, u\, du,$$

dat is, na vermenigvuldiging met $p = tang\, u$, in

$$dy = \pm n\, C e^{\pm n\, u}\, Sin\, u\, du.$$

Na integreren heeft men eindelijk de volgende verbinding van twee vergelijkingen:

$$x - A = \pm \frac{n \cdot C}{1 + n^2} (\pm n \cos u + \sin u) e^{\pm n u}, \quad \ldots \quad (3)$$

en

$$y - B = \pm \frac{n\, C}{1 + n^2} (\pm n \sin u - \cos u) e^{\pm n u}. \quad \ldots \quad (4)$$

In deze beide vergelijkingen komen drie constanten voor, maar (1) is eene differentiaalvergelijking van de tweede orde, en daarom moet men, als bij de vorige vraagstukken, narekenen of men aan (1) voldoen kan, wanneer de drie constanten algemeen blijven, dan wel of er eene betrekking bestaat, waardoor de eene functie wordt van de beide anderen.

Om u tusschen (3) en (4) te elimineren kan men den volgenden weg inslaan: men make, in de eerste plaats, de som op van de vierkanten dezer vergelijkingen, waardoor men vindt

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = \frac{n^2 C^2}{1 + n^2} \cdot e^{\pm 2 n u},$$

en waaruit

$$u = \pm \frac{1}{2n} log \left(\frac{1 + n^2}{n^2} \cdot \frac{(x - A)^2 + (y - B)^2}{C^2} \right); \quad \ldots \quad (5)$$

vervolgens deele men (4) in (3), dat aanleiding geeft tot

$$\frac{x - A}{y - B} = \frac{\pm n \cos u + \sin u}{\pm n \sin u - \cos u},$$

welke laatste, wanneer men $\pm n = cot \lambda = \frac{cos \lambda}{sin \lambda}$ stelt, overgaat in

$$\frac{x - A}{y - B} = \frac{cos (u - \lambda)}{sin (u - \lambda)} = cotg (u - \lambda).$$

Hieruit volgt

$$u - \lambda = boog\, cotg \frac{x - A}{y - B}, \text{ of}$$

$$u = \lambda + boog\, cotg \frac{x - A}{y - B} = boog\, cotg (\pm n) + boog\, cotg \frac{x - A}{y - B},$$

dat is,

$$u = boog\, cotg \frac{\pm n (y - B) - (x - A)}{\pm n (x - A) + (y - B)},$$

waardoor (5) overgaat in

$$boog\,cotg\,\frac{\pm n(y-B)-(x-A)}{\pm n(x-A)+(y-B)} = \pm\frac{1}{2n}\,log\left(\frac{1+n^2}{n^2}\cdot\frac{(x-A)^2+(y-B)^2}{C^2}\right),$$

zoodat men de vergelijking der logarithmische spiraal vindt. Men lette er op dat van de dubbele teekens de bovenste en onderste bij elkander behooren.

87. Deze vraag geeft aanleiding tot de vergelijking

$$\left(\int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\,dx\right)^2 + \frac{(1+p^2)^3}{q^2} = a^2, \quad \ldots\ldots (1)$$

waarin a eene lijn van gegevene lengte is. Stelt men ook hier $s = \int_a^x \sqrt{(1+p^2)}\,dx$ en $ds = \sqrt{(1+p^2)}\,dx$, dan kan men (1) vervormen tot

$$\frac{(1+p^2)\sqrt{(1+p^2)}}{q} = \sqrt{(a^2-s^2)},$$

of tot

$$\frac{dp}{1+p^2} = \frac{ds}{\sqrt{(a^2-s^2)}},$$

waaruit door integreren volgt

$$C + boog\,tang\,p = boog\,sin\,\frac{s}{a},$$

welke vergelijking, wanneer men $boog\,tang\,p = u$ stelt, overgaat in

$$C + u = boog\,sin\,\frac{s}{a},$$

of in

$$s = a\,sin\,(C+u).$$

Differentieert men de laatste, dan komt er

$$ds = a\,cos\,(C+u).\,du. \quad \ldots\ldots (2)$$

Uit $boog\,tang\,p = u$ volgt $p = tang\,u$, en verder

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{(1+p^2)}} = (cos\,u)\,ds,$$

en

$$dy = \frac{p\,ds}{\sqrt{(1+p^2)}} = (sin\,u)\,ds.$$

Brengt men hierin de waarde van ds uit (2) over, dan heeft men

$$dx = a\cos u\cos(C+u)\,du,$$
$$dy = a\sin u\cos(C+u)\,du,$$

of

$$dx = a(\cos^2 u\cos C - \sin u\cos u\sin C)\,du,$$
$$dy = a(\cos u\sin u\cos C - \sin^2 u\sin C)\,du.$$

Door integreren volgt hieruit

$$x+A = \frac{a}{2}\{(\cos u\cos C - \sin u\sin C)\sin u + u\cos C\},$$

$$y+B = \frac{a}{2}\{(\sin u\cos C + \cos u\sin C)\sin u - u\sin C\},$$

of

$$x+A = \frac{a}{2}(\cos(u+C)\sin u + u\cos C),$$

$$y+B = \frac{a}{2}(\sin(u+C)\sin u - u\sin C).$$

Wijl echter (1) eene differentiaalvergelijking der tweede orde is, moet men, gelijk bij de vorige opgaven, nagaan of zij strookt met de veronderstelling, dat de drie constanten door het integreren ontstaan algemeen blijven, dan wel of men de eene als eene functie der beide anderen beschouwen moet. Dit onderzoek, waarop wij meermalen wezen, mogen wij hier aan den lezer overlaten. Geeft deze of gene voorwaarde aanleiding dat de constante $C=0$ wordt, dan laat zich u tusschen de laatst gevonden vergelijkingen gemakkelijk elimineren; men zou vinden

$$x+A = \frac{a}{4}\,boog\cos\frac{\frac{a}{4}-(y+B)}{\frac{a}{4}} + \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-\left(\frac{a}{4}-(y+B)\right)^2},$$

of de vergelijking der gewone cycloide, welker beschrijvende cirkel den straal $a:4$ heeft. De waarden $x+A$ kunnen onbepaald groot worden, maar die van $y+B$ liggen tusschen 0 en $a:2$.

88. Voor een willekeurig punt (x, y) eener kromme lijn wordt de kromtestraal R uitgedrukt door $\sqrt{(1+p^2)^3}:q$,

waarin $p = dy : dx$ en $q = d^2 y : dx^2$ zijn. Noemt men de coördinaten van het uiteinde diens kromtestraals (ξ, η), dan wordt de kromtestraal r der ontwondene voor dit punt uitgedrukt door

$$r = \frac{\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)^3}}{d^2\eta\, d\xi - d^2\xi\, d\eta},$$

en het vraagstuk geeft aanleiding tot de vergelijking $r = n R$ of tot

$$\frac{\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)^3}}{d^2\eta\, d\xi - d^2\xi\, d\eta} = \frac{n\sqrt{(1+p^2)^3}}{q}, \quad \ldots \quad (1)$$

waarin n een positief getal is. Het eerste lid dezer vergelijking bevat de tweede differentialen $d^2\eta$ en $d^2\xi$, wijl ξ en η als functien van x of van de onafhankelijk veranderlijke beschouwd moeten worden.

Het komt er nu op aan eene betrekking te vinden tusschen R en r. Voor x, y, ξ, η en R heeft men blijkbaar de vergelijkingen

$$(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 = R^2, \quad \ldots \quad (2)$$
$$(y-\eta)p + (x-\xi) = 0, \quad \ldots \quad (3)$$
$$(y-\eta)q + (1+p^2) = 0. \quad \ldots \quad (4)$$

Differentieert men deze vergelijkingen in de veronderstelling dat al de veranderlijken functien van x zijn, dan komt er

$$[(y-\eta)p + (x-\xi)]\,dx - [(y-\eta)\,d\eta + (x-\xi)\,d\xi + R\,dR] = 0, \ldots (5)$$
$$[(y-\eta)q + (1+p^2)]\,dx - (p\,d\eta + d\xi) = 0, \ldots (6)$$
$$(y-\eta)\,dq + 3pq\,dx - q\,d\eta = 0. \quad \ldots \quad (7)$$

Uit (3) en (4) volgt

$$x - \xi = +\frac{p(1+p^2)}{q} \text{ en } y - \eta = -\frac{1+p^2}{q},$$

waardoor (5), (6) en (7) herleid worden tot

$$p(1+p^2)\,d\xi - (1+p^2)\,d\eta + qR\,dR = 0, \quad \ldots \quad (8)$$
$$p\,d\eta + d\xi = 0, \quad \ldots \quad (9)$$
$$3pq^2\,dx - (1+p^2)\,dq - q^2\,d\eta = 0. \quad \ldots \quad (10)$$

Van deze drie vergelijkingen hebben de eerste en de derde volkomen dezelfde beteekenis, waarvan men zich op de volgende wijze kan overtuigen: brengt men $R = \sqrt{(1+p^2)^3} : q$ tot de tweede magt, en differentieert men de komende vergelijking, dan heeft men

$R\,dR = \frac{(1+p^2)^2}{q^3}(3pq^2\,dx - (1+p^2)\,dq)$; uit (9) vloeit bovendien voort $d\xi = -p\,d\eta$. Substitueert men deze waarden in (8), dan vindt men (10), zoodat men in werkelijkheid slechts twee vergelijkingen ter bepaling van $d\xi$ en $d\eta$ overhoudt. Uit (9) en (10) heeft men

$$d\xi = -\frac{p}{q^2}(3pq^2\,dx - (1+p^2)\,dq),$$

en

$$d\eta = +\frac{1}{q^2}(3pq^2\,dx - (1+p^2)\,dq);$$

uit (9) volgt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{p},$$

dat is, na andermaal differentieren,

$$\frac{d^2\eta \,.\, d\xi - d^2\xi\, d\eta}{d\xi^2} = \frac{q}{p^2}\,dx,$$

of

$$d^2\eta \,.\, d\xi - d^2\xi\, d\eta = \frac{q}{p^2} \,.\, d\xi^2 \,.\, dx = +\frac{1}{q^3}\left(3pq^2 - (1+p^2)\frac{dq}{dx}\right)^2 dx^3,$$

en hierdoor gaat de uitdrukking voor r over in

$$r = \frac{1}{q^2}\left(3pq^2 - (1+p^2)\frac{dq}{dx}\right)\frac{\sqrt{(1+p^2)^3}}{q},$$

of, met het oog op de waarde van R, in

$$r = \frac{1}{q^2}\left(3pq^2 - (1+p^2)\frac{dq}{dx}\right).R. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Uit de voorwaarde van het vraagstuk of uit $r = nR$, vloeit derhalve voort dat men heeft de differentiaalvergelijking der derde orde

$$\frac{1}{q^2}\left(3pq^2 - (1+p^2)\frac{dq}{dx}\right) = n,$$

of

$$\frac{dq}{q} = \frac{3p-n}{1+p^2}\,.\,dp,$$

waaruit door integreren volgt

$$log\,(C\,.\,q) = \frac{3}{2}\,log\,(1+p^2) - n\,boog\,tang\,p,$$

of

$$Cq = \sqrt{(1+p^2)^3}\,.\,e^{-n\,boog\,tang\,p}.$$

De laatste vergelijking kan men omzetten in

$$dx = \frac{C.dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} . e^{n\, boog\, tang\, p}, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

of, na vermenigvuldiging der beide leden met p, in

$$dy = \frac{Cp\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} e^{n\, boog\, tang\, p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Deze beide vergelijkingen nemen een handelbaarder vorm aan, wanneer men $boog\, tang\, p = u$ stelt; dan toch is $p = tang\, u$, $dp = du : cos^2 u$, $\sqrt{(1+p^2)} = 1 : cos\, u$ en (12) en (13) gaan over in

$$dx = C.(cos\, u)\, e^{n\, u}\, du,$$
$$dy = C(sin\, u)\, e^{n\, u}\, du.$$

Bij het integreren vindt men

$$x - A = \frac{C}{1+n^2} (n\, cos\, u + sin\, u)\, e^{n\, u}, \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

en

$$y - B = \frac{C}{1+n^2} (n\, sin\, u - cos\, u)\, e^{n\, u}, \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

waarin nu wederom A, B en C de constanten bij het integreren verkregen voorstellen.

De verbinding dezer vergelijkingen geeft eene logarithmische spiraal te kennen, waarvan men zich op de volgende wijze overtuigen kan: brengt men de vergelijkingen (14) en (15) tot de tweede magt en neemt men de som, dan heeft men

$$(x-A)^2 + (y-B)^2 = \frac{C^2}{1+n^2} e^{2\,n\,u},$$

of

$$u = \frac{1}{2n} log \left\{ (1+n^2) . \frac{(x-A)^2 + (y-B)^2}{C^2} \right\} . \quad . \quad . \quad (16)$$

Deelt men (15) in (14), dan komt er

$$\frac{x-A}{y-B} = \frac{n\, cos\, u + sin\, u}{n\, sin\, u - cos\, u},$$

welke vergelijking, wanneer men $n = cotg\, \lambda = \frac{cos\, \lambda}{sin\, \lambda}$ stelt, overgaat in

$$\frac{x-A}{y-B} = \frac{cos\,(u-\lambda)}{sin\,(u-\lambda)} = cotg\,(u-\lambda);$$

en uit haar volgt

$$u - \lambda = boog\,cotg\,\frac{x-A}{y-B},$$

of

$$u = \lambda + boog\,cotg\,\frac{x-A}{y-B} = boog\,cotg\,n + boog\,cotg\,\frac{x-A}{y-B},$$

of

$$u = boog\,cotg\,\frac{n(y-B)-(x-A)}{n(x-A)+(y-B)},$$

zoodat (16) wordt

$$boog\,cotg\,\frac{n(y-B)-(x-A)}{n(x-A)+(y-B)} = \frac{1}{2n}\,log\left\{(+n^2)\,\frac{(x-A)^2+(y-B)^2}{C^2}\right\};$$

uit den hier gevonden vorm herkent men de logarithmische spiraal.

Men kan nog een anderen weg inslaan, men kan de waarde van R differentieren en vindt dan

$$dR = \frac{1}{q^2}\left(3pq^2 - (1+p^2)\,\frac{dq}{dx}\right)\sqrt{(1+p^2)}\,dx,$$

of, lettend op (11) en $d\omega$ voor $\sqrt{(1+p^2)}\,dx$ schrijvende,

$$r = R\,\frac{dR}{d\omega}.$$

Brengt men deze waarde van r over in de vergelijking $r = nR$, van waar wij uitgingen, dan komt er $dR = n\,d\omega$, waaruit door integreren volgt $R = n(\omega + K)$.

In de tweede plaats stelt men $p = tang\,u$, waaruit achtereenvolgens voortvloeit: $dp = du : cos^2 u$; $\sqrt{(1+p^2)} = 1 : cos\,u$; $dx = d\omega : \sqrt{(1+p^2)} = (cos\,u)\,d\omega$; $dy = \frac{p\,d\omega}{\sqrt{(1+p^2)}} = (sin\,u)\,d\omega$; $R = \frac{\sqrt{(1+p^2)^3}}{q} = \frac{d\omega}{du}$. Maar R vonden wij gelijk aan $n(\omega+K)$, derhalve is $\frac{d\omega}{du} = n(\omega+K)$ of $\frac{d\omega}{\omega+K} = n\,du$, dat is, na integreren $\omega + K = He^{n\,u}$. Differentieert men de laatste vergelijking op nieuw, dan komt er $d\omega = n\,He^{n\,u}\,du$, of, voor de constante H schrijvende $C:n$,

$$dx = (cos\,u)\,d\omega = C(cos\,u)\,e^{n\,u}\,du,$$

en

$$dy = (sin\,u)\,d\omega = C(sin\,u)\,e^{n\,u}\,du,$$

zoodat men de vergelijkingen, vroeger gevonden, terug erlangt.

89. Noemt men den kromtestraal voor eenig punt der te zoeken kromme R, en duidt men door r den kromtestraal der ontwondene aan voor het punt, waar de eerstgenoemde lijn de ontwondene ontmoet, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking $a R = r^2$, waarin door a eene lijn van bepaalde lengte wordt aangeduid. Brengt men in deze uitdrukking de waarde van r of $R\,dR : d\omega$, in het vorig vraagstuk bepaald, over, dan heeft men $R^{\frac{1}{2}}\,dR = a^{\frac{1}{2}}\,d\omega$, waaruit door integreren volgt $4R^3 = 9a(\omega + K)^2$; vervangt men hierin R door de vroeger gevonden waarde $da : du$, dan wordt de laatste vergelijking

$$du = \left(\frac{4}{9a}\right)^{1/3} . (\omega + K)^{-2/3}\, d\omega,$$

waaruit door integreren volgt

$$u + C = \sqrt[3]{12} . \left(\frac{\omega + K}{a}\right)^{\frac{1}{3}},$$

of

$$\omega + K = \frac{a}{12}(u + C)^3.$$

Differentieert men deze laatste vergelijking weder, dan komt er

$$d\omega = \frac{a}{4}(u + C)^2\, du.$$

Men heeft derhalve ten slotte

$$dx = (\cos u)\, d\omega = \frac{a}{4}(u + C)^2 (\cos u)\, du,$$

en

$$dy = (\sin u)\, d\omega = \frac{a}{4}(u + C)^2 (\sin u)\, du,$$

zoodat de gezochte kromme bepaald wordt door de verbinding der vergelijkingen

$$x - A = \frac{a}{4}\{(u + C)^2 \sin u + 2(u + C)\cos u - 2\sin u\},$$

$$y - B = \frac{a}{4}\{-(u + C)^2 \cos u + 2(u + C)\sin u + 2\cos u\},$$

waarin A, B en C de constanten bij het integreren verkregen voorstellen.

De lezer beproeve het meer algemeene vraagstuk op te lossen, waarbij de $(n-1)^{\text{ste}}$ magt van den kromtestraal der

te zoeken kromme in bepaalde verhouding staat tot de n^{de} magt van den kromtestraal der ontwondene, in het punt waar hij dezen ontmoet, en waarbij derhalve wordt uitgegaan van de vergelijking $aR^{n-1}=r^n$; hij zal vinden de differentiaalvergelijkingen

$$dx=(\cos u)\,d\omega=\frac{a}{n^n}(u+C)^n(\cos u)\,du,$$

en

$$dy=(\sin u)\,d\omega=\frac{a}{n^n}(u+C)^n(\sin u)\,du,$$

welke voor $n=1$ opleveren

$$x-A=a\{(u+C)\sin u+\cos u\},$$
$$y-B=a\{-(u+C)\cos u+\sin u\}.$$

90. Dit vraagstuk, in zekeren zin het omgekeerde van het vorige, wordt gevonden uit de vergelijking $R^2=ar$, waarin a eene lijn is van bepaalde lengte. Gaat men te werk als vroeger is opgegeven, dan vindt men achtereenvolgens:

$$-\frac{dR}{R}=\frac{d\omega}{a};\quad R=He^{\frac{\omega}{a}};\quad du=\frac{d\omega}{H}e^{-\frac{\omega}{a}};\quad u+C=-\frac{a}{H}e^{-\frac{\omega}{a}};\quad -\frac{\omega}{a}=\log\left(-\frac{H}{a}(u+C\right.$$

$$\omega=a\log\left(-\frac{a}{H}\cdot\frac{1}{u+C}\right);\quad \omega=a\log\left(-\frac{a}{H}\right)+a\log\frac{1}{u+C}.$$

Zet men in de laatste vergelijking $-K$ voor $\log\left(-\frac{a}{H}\right)$, dan gaat zij over in

$$\omega+K=a\log\frac{1}{u+C},$$

waaruit door differentieren wordt afgeleid

$$d\omega=-a\frac{du}{u+C},$$

zoodat men verder heeft

$$dx=-\frac{a\,du}{u+C}\cos u,$$

$$dy=-\frac{a\,du}{u+C}\sin u.$$

Om deze vergelijkingen verder te kunnen behandelen stelt men $u+C=z$, waardoor zij worden

$$dx = -\frac{a\,dz}{z}\cos(z - C),$$

en

$$dy = -\frac{a\,dz}{z}\sin(z - C),$$

of, na ontwikkeling van $\cos(z - C)$ en $\sin(z - C)$,

$$dx = -\frac{a\,dz}{z}(\cos z \cos C + \sin z \sin C),$$

en

$$dy = -\frac{a\,dz}{z}(\sin z \cos C - \cos z \sin C).$$

Vermenigvuldigt men men de hier verkregen vergelijkingen achtereenvolgens met $\sin C$ en $\cos C$, en telt men de producten zamen, dan heeft men

$$\sin C\,dx + \cos C\,dy = -\frac{a\,dz}{z}\sin z;$$

maar vermenigvuldigt men de eerst genoemde vergelijkingen achtereenvolgens met $\cos C$ en $\sin C$, en trekt men de producten van elkander af, dan komt er

$$\cos C\,dx - \sin C\,dy = -\frac{a\,dz}{z}\cos z.$$

Door integreren volgt uit deze vergelijkingen

$$x\sin C + y\cos C = A - a\int\frac{dz}{z}\sin z,$$

en

$$x\cos C - y\sin C = B - a\int\frac{dz}{z}\cos z.$$

Om de hier aangeduide integralen te bepalen, moet men $\sin z$ en $\cos z$ in reeksen naar de opklimmende magten van z ontwikkelen en dan integreren; men zal vinden

$$x\sin C + y\cos C = A - a\left(z - \frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{3!} + \frac{1}{5}\cdot\frac{z^5}{5!} - \frac{1}{7}\cdot\frac{z^7}{7!} + - \cdots\right)$$

en

$$x\cos C - y\sin C = B - a\left(\log z - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4}\cdot\frac{z^4}{4!} - \frac{1}{6}\cdot\frac{z^6}{6!} + - \cdots\right).$$

Deze reeksen, bij welke de wet van opvolging in het oog valt, convergeren voor elke waarde van z.

Kortheidshalve is 1.2 door 2!; 1.2.3 door 3!; 1.2.3.4 door 4!; 1.2.3.4.5 door 5!, enz. aangeduid.

Het vraagstuk hier ontwikkeld is een bijzonder geval van

het meer algemeene, begrepen in de formule $R^n = a r^{n-1}$; de lezer beproeve dit laatste op te lossen: hij zal vinden

$$x \sin C + y \cos C = A + (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} a \int \frac{dz}{z^{n-1}} \sin z,$$

en

$$x \cos C - y \sin C = B + (-1)^{n-1} (n-1)^{n-1} a . \int \frac{dz}{z^{n-1}} \cos z,$$

waarin nu wederom $\sin z$ en $\cos z$ in reeksen naar de opklimmende magten van z ontwikkeld, de leden der reeksen door z^{n-1} gedeeld en vervolgens geintegreerd moeten worden.

91. Is wederom a eene lijn van bepaalde lengte, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de vergelijking $Rr = a^2$, en men vindt achteenvolgens $R^2 \, dR = a^2 . d\omega$; $R = \sqrt[3]{(3 a^2 (\omega + K))}$;

$$du = \frac{1}{\sqrt[3]{3a^2}} \times \frac{d\omega}{\sqrt[3]{(\omega + K)}}; \quad u + C = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3a^2}} \sqrt[3]{(\omega + K)^2};$$

$$\omega + K = \frac{2a . \sqrt{2}}{3} (u + C)^{\frac{3}{2}}; \quad d\omega = (a \sqrt{2}) \sqrt{(u + C)} \, du;$$

$$dx = (a \sqrt{2})(\sqrt{u + C}) \cos u \, du;$$

$$dy = (a \sqrt{2})(\sqrt{u + C}) \sin u \, du;$$

$$x \sin C + y \cos C = A + a \sqrt{2} \int z^{\frac{1}{2}} (\sin z) \, dz;$$

$$x \cos C - y \sin C = B + a \sqrt{2} \int z^{\frac{1}{2}} (\cos z) \, dz;$$

$$x \sin C + y \cos C = A + 2a \left(\frac{1}{5} z - \frac{1}{9} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{1}{13} \cdot \frac{z^5}{5!} - \frac{1}{17} \cdot \frac{z^7}{7!} + - \cdots \right) \sqrt{2z^3},$$

$$x \cos C - y \sin C = B + 2a \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{11} \cdot \frac{z^4}{4!} - \frac{1}{15} \cdot \frac{z^6}{6!} + - \cdots \right) \sqrt{2z^3}.$$

De eene formule volgt zoo geleidelijk uit de andere, dat de lezer, na het ontwikkelde in de vorige vraagstukken, den gedachtengang gemakkelijk kan volgen.

92. Ook hier kunnen wij zonder verdere verklaring de vergelijkingen opschrijven, welke achtereenvolgens voortvloeijen uit de eene, $R^2 + r^2 = a^2$, waartoe het vraagstuk aanleiding geeft; zij zijn de volgende:

$$d\omega = \frac{R\,dR}{\sqrt{(a^2 - R^2)}},$$

$$R = \sqrt{(a^2 - (\omega + K)^2)},$$

$$du = \frac{d\omega}{\sqrt{(a^2 - (\omega + K)^2)}},$$

$$u + C = boog\,sin\,\frac{\omega + K}{a},$$

$$\omega + K = a\,sin\,(u + C),$$

$$d\omega = a\,cos\,(u + C)\,du,$$

$$dx = a\,cos\,(u + C)\,cos\,u\,du,$$

$$dy = a\,cos\,(u + C)\,sin\,u\,.\,du.$$

De laatsten kan men nog herleiden tot den vorm

$$dx = a\,(cos^2\,u\,cos\,C - sin\,u\,cos\,u\,sin\,C)\,du,$$

$$dy = a\,(cos\,u\,sin\,u\,cos\,C - sin^2\,u\,sin\,C)\,du.$$

Uit deze volgt door integreren

$$x + A = \frac{a}{2}\{(cos\,u\,cos\,C - sin\,u\,sin\,C)\,sin\,u + u\,cos\,C\},$$

$$y + B = \frac{a}{2}\{(sin\,u\,cos\,C + cos\,u\,sin\,C)\,sin\,u - u\,sin\,C\},$$

of

$$x + A = \frac{a}{2}\,(cos\,(u + C)\,sin\,u + u\,cos\,C),$$

$$y + B = \frac{a}{2}\,(sin\,(u + C)\,sin\,u - u\,sin\,C).$$

Wordt door deze of gene bepaling de constante C, bij het integreren verkregen, toevallig nul, dan kan men u elimineren. De laatste vergelijkingen toch herleiden zich dan tot

$$x + A = \frac{a}{2}\,(cos\,u\,sin\,u + u);\ y + B = \frac{a}{2}\,sin^2\,u;$$

of tot

$$x + A = \frac{a}{4}\,(2\,u + sin\,2\,u);\ y + B = \frac{a}{4}\,(1 - cos\,2\,u).$$

Hieruit volgen

$$cos\,2\,u = \frac{\frac{a}{4} - (y + B)}{\frac{a}{4}},\ \text{en}\ \ 2\,u = boog\,cos\,\frac{\frac{a}{4} - (y + B)}{\frac{a}{4}},$$

zoodat men ten slotte heeft

$$x+A=\frac{a}{4}\,boog\,cos\,\frac{\frac{a}{4}-(y+B)}{\frac{a}{4}}+\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-\left(\frac{a}{4}-y-B\right)^2},$$

of de vergelijking der gewone cycloide, welker voortbrengende cirkel den straal van $\frac{a}{4}$ heeft.

93. In het hier bedoelde geval zijn a en b lijnen van gegeven lengte; gaat men te werk als bij de oplossing der vorige vraagstukken, dan heeft men achtereenvolgens:

$$\frac{R^2}{a^2}+\frac{r^2}{b^2}=1;$$

$$d\omega=\frac{a.R.dR}{b\sqrt{(a^2-R^2)}};\quad R=\frac{\sqrt{a^4-b^2(\omega+K)^2}}{a};$$

$$du=\frac{a\,d\omega}{\sqrt{(a^4-b^2(\omega+K)^2)}};\quad u+H=\frac{a}{b}\,boog\,sin\,\frac{b(\omega+K)}{a^2};$$

$$\omega+K=\frac{a^2}{b}\,sin\,\frac{b(u+H)}{a}.$$

Geeft men aan de constante H bij het integreren verkregen den vorm $\frac{aC}{b}$, dan wordt de laatste vergelijking

$$\omega+K=\frac{a^2}{b}\,sin\left(\frac{b.u}{a}+C\right),$$

waaruit door differentieren volgt

$$d\omega=a\,cos\left(\frac{bu}{a}+C\right)du,$$

zoodat de gezochte kromme bepaald wordt door de vergelijkingen

$$x+A=a\int cos\left(\frac{bu}{a}+C\right)cos\,u\,du,$$

$$y+B=a\int cos\left(\frac{bu}{a}+C\right)sin\,u\,du.$$

Zij laten zich omzetten in

$$x+A=a\int\left(cos\,\frac{bu}{a}\,cos\,u\,cos\,C-sin\,\frac{bu}{a}\,cos\,u\,sin\,C\right)du,$$

$$y+B=a\int\left(cos\,\frac{bu}{a}\,sin\,u\,cos\,C-sin\,\frac{bu}{a}\,sin\,u\,sin\,C\right)du.$$

Nu is

$$\cos\frac{bu}{a}\cos u = +\frac{1}{2}\cos\frac{a+b}{a}u + \frac{1}{2}\cos\frac{a-b}{a}u,$$

$$\sin\frac{bu}{a}\cos u = +\frac{1}{2}\sin\frac{a+b}{a}u - \frac{1}{2}\sin\frac{a-b}{a}u,$$

$$\cos\frac{bu}{a}\sin u = +\frac{1}{2}\sin\frac{a+b}{a}u + \frac{1}{2}\sin\frac{a-b}{a}u,$$

$$\sin\frac{bu}{a}\sin u = -\frac{1}{2}\cos\frac{a+b}{a}u + \frac{1}{2}\cos\frac{a-b}{a}u.$$

Brengt men deze uitdrukkingen in de vroeger gevonden vergelijkingen over, dan bekomt men na integreren

$$x+A = \frac{a^2}{2(a+b)}\left(\sin\frac{a+b}{a}u\cos C + \cos\frac{a+b}{a}u\sin C\right)$$
$$+\frac{a^2}{2(a-b)}\left(\sin\frac{a-b}{a}u\cos C - \cos\frac{a-b}{a}u\sin C\right),$$

$$y+B = -\frac{a^2}{2(a+b)}\left(\cos\frac{a+b}{a}u\cos C - \sin\frac{a+b}{a}u\sin C\right)$$
$$-\frac{a^2}{2(a-b)}\left(\cos\frac{a-b}{a}u\cos C + \sin\frac{a-b}{a}u\sin C\right),$$

dat is

$$x+A = \frac{a^2}{2(a+b)}\sin\left(\frac{a+b}{a}u+C\right) + \frac{a^2}{2(a-b)}\sin\left(\frac{a-b}{a}u-C\right),$$

$$y+B = -\frac{a^2}{2(a+b)}\cos\left(\frac{a+b}{a}u+C\right) - \frac{a^2}{2(a-b)}\cos\left(\frac{a-b}{a}u-C\right).$$

De hier gevonden vergelijkingen voldoen, welke ook de betrekking moge wezen tusschen a en b; alleen niet, wanneer $a-b=0$ wordt. Dan moet men tot de oorspronkelijke vergelijking terugkeeren en dit geval afzonderlijk behandelen, gelijk in het vorig vraagstuk geschiedde.

Geven nevenvoorwaarden aanleiding tot de vergelijking $C=0$, dan worden de gevonden vergelijkingen

$$x+A = \frac{a^2}{2(a-b)}\sin\frac{a-b}{a}u + \frac{a^2}{2(a+b)}\sin\frac{a+b}{a}u,$$

$$y+B = -\frac{a^2}{2(a-b)}\cos\frac{a-b}{a}u - \frac{a^2}{2(a+b)}\cos\frac{a+b}{a}u.$$

De verbinding dezer vergelijkingen doet de gewone epicycloide kennen, welker vaste cirkel een straal heeft van

$a^2 b:(a^2-b^2)$, terwijl de straal van den beschrijvenden cirkel door $a^2:2(a+b)$ wordt uitgedrukt. Men kan zich hiervan op de volgende wijze overtuigen: schrijft men $a\eta:(a-b)$ voor u, dan gaan de laatst gevonden vergelijkingen over in

$$x+A=\frac{a^2}{2(a-b)}\sin\eta+\frac{a^2}{2(a+b)}\sin\frac{a+b}{a-b}\eta,$$

$$y+B=-\frac{a^2}{2(a-b)}\cos\eta-\frac{a^2}{2(a+b)}\cos\frac{a+b}{a-b}\eta,$$

welke men vervormen kan tot

$$x+A=\left(\frac{a^2 b}{a^2-b^2}+\frac{a^2}{2(a+b)}\right)\sin\eta+$$

$$+\frac{a^2}{2(a+b)}\sin\frac{\frac{a^2 b}{a^2-b^2}+\frac{a^2}{2(a+b)}}{\frac{a^2}{2(a+b)}}\eta,$$

$$y+B=-\left(\frac{a^2 b}{a^2-b^2}+\frac{a^2}{2(a+b)}\right)\cos\eta$$

$$-\frac{a^2}{2(a+b)}\cos\frac{\frac{a^2 b}{a^2-b^2}+\frac{a^2}{2(a+b)}}{\frac{a^2}{2(a+b)}}\eta.$$

Valt de oorsprong der coordinaten zamen met het middelpunt van den vasten cirkel, dan is $A=0$ en $B=0$.

94. Hier moet men twee gevallen onderscheiden: de lichtstralen loopen allen evenwijdig of gaan van een lichtend punt uit. In het eerste geval maakt men bij zijne berekening gebruik van een coordinatenstelsel, welks as der x evenwijdig loopt met de lichtstralen; in het ander geval zorgt men dat die as door het lichtend punt gaat. Is nu $F(x,y)=0$ de vergelijking op regthoekige coordinaten der terugkaatsende kromme, terwijl door ξ en η de coordinaten der catacaustica ten opzigte van dezelfde regthoekige coordinaten worden aangewezen, dan heeft men tusschen de coordinaten van beide kromme lijnen de betrekkingen

$$\xi=x+(u-p)\frac{dx}{du}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\eta = y + u(u-p)\frac{dx}{du}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

In deze vergelijkingen staat p voor $dy:dx$ en is u de goniometrische tangens van den hoek, begrensd door de as der x en den teruggekaatsten lichtstraal. Wijl echter de catacaustica in dit bijzonder geval zich herleidt tot een punt, het brandpunt, welks coordinaten g en h mogen genoemd zijn, moet men in de gestelde vergelijkingen ξ en η vervangen door g en h, en elke kromme die voldoet aan deze beide differentiaalvergelijkingen der tweede orde, heeft de eigenschap in het voorstel genoemd.

De eerste dezer vergelijkingen laat zich herleiden tot $(x-g)\,du + u\,dx - dy = 0$, waaruit door integreren volgt

$$(x-g)\,u - y + A = 0, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

als men de constante bij het integreren verkregen A noemt. Men heeft nu wel de integraal van (1), maar men moet nog in het bijzonder nagaan of (3) ook met (2) in overeenstemming is.

Nu volgt uit (3) $y = A + (x-g)u$ en $p = u + (x-g)\frac{du}{dx}$; brengt men deze waarden van y en p in (2) over, dan herleidt zij zich tot $h = A$, waardoor (3) overgaat in

$$y - h = (x-g)u, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

welke aan (1) en (2) te gelijk voldoet.

Voor de verdere behandeling maakt het verschil of de oorspronkelijke lichtstralen evenwijdig loopen of van een lichtend punt uitgaan. In het eerste geval is $u = 2p:(1-p^2)$, waarvan men zich door het ontwerpen eener eenvoudige figuur gemakkelijk overtuigt. Brengt men die waarde van u in (4) over, dan vindt men na eenige herleiding

$$(y-h)p^2 + 2(x-g)p = (y-h),$$

of ook

$$\frac{(y-h)p + (x-g)}{\sqrt{((y-h)^2 + (x-g)^2)}} = 1,$$

waaruit door integreren volgt

$$\sqrt{((y-h)^2 + (x-g)^2)} = x + E$$

of

$$(y-h)^2 = 2(g+E)\left(x - \frac{g-E}{2}\right). \quad \ldots \quad (5)$$

De gevonden kromme is derhalve eene gewone parabool met den parameter $2(g+E)$, welker hoofdas op den afstand $y=h$ evenwijdig loopt met de as der x, en welker top bepaald is door de coordinaten $y=h$ en $x={}^1/_2(g-E)$. Voor andere waarden der constante E vindt men andere parabolen, zoodat men met regt kan spreken van eene geheele rij dier krommen, uitgedrukt door (5), welke evenwel allen hetzelfde brandpunt (g,h) met elkander gemeen hebben.

Lichtstralen, evenwijdig met de hoofdas op een dezer parabolen, welke ook, vallend, worden allen naar dat brandpunt teruggekaatst.

Wanneer, in het ander geval, de lichtstralen van een punt uitgaan, wordt u uitgedrukt door

$$u=\frac{2(x-x_1)p-y(1-p^2)}{2yp+(x-x_1)(1-p^2)},$$

waarin x_1 de abscis is van het lichtend punt.

Brengt men die waarde in (4) over, dan wordt zij

$$y-h=(x-g)\frac{2(x-x_1)p-y(1-p^2)}{2yp+(x-x_1)(1-p^2)},$$

of

$$[(x-x_1)(y-h)+(x-g)y]p^2+2[(x-x_1)(x-g)-(y-h)y]p-$$
$$-(x-x_1)(y-h)-(x-g)y=0,$$

welke na vermenigvuldiging met

$$(x-x_1)(y-h)-(x-g)y$$

overgaat in

$$(x-g)^2y^2+2(x-x_1)^2(x-g)(y-h)p+2y^2(x-g)(y-h)p+$$
$$+(x-x_1)^2(y-h)^2p^2=(y-h)^2(x-x_1)^2+2(x-g)^2(x-x_1)yp+$$
$$+2(y-h)^2(x-x_1)yp+(x-g)^2y^2p^2.$$

Trekt men bij beide leden den vorm

$$(x-g)^2(x-x_1)^2+(y-h)^2y^2p^2$$

dan erlangt men

$$((x-x_1)^2+y^2)[(x-g)+(y-h)p]^2=((x-g)^2+(y-h)^2)[(x-x_1)+yp]^2,$$

waaruit eindelijk volgt

$$\frac{(x-x_1)+yp}{\sqrt{((x-x_1)^2+y^2)}}\pm\frac{(x-g)+(y-h)p}{\sqrt{((x-g)^2+(y-h)^2)}}=0.$$

Deze vergelijking laat zich onmiddelijk integreren en geeft

$$\sqrt{((x-x_1)^2+y^2)}\pm\sqrt{((x-g)^2+(y-h)^2)}=C.$$

Vestigt men zijne opmerkzaamheid op de laatst gevonden vergelijking, dan ziet men dat zij uit twee gedeelten is zamengesteld; het eerste of $\sqrt{((x-x_1)^2+y)^2}$ is gelijk aan den voerstraal, van het lichtend punt tot de terugkaatsende kromme getrokken; het ander gedeelte of $\sqrt{((x-g)^2+(y-h)^2)}$ vertegenwoordigt den voerstraal tusschen het vaste brandpunt en bovengenoemde kromme. Hieruit volgt dat de som of het verschil der beide voerstralen gelijk is aan de constante C, en derhalve de rij der gevonden krommen uit louter ellipsen of hyperbolen bestaan, welke allen dezelfde onveranderlijke excentriciteit $\sqrt{((g-x_1)^2+h^2)}$ hebben.

95. Ook hier moet men twee gevallen onderscheiden; de lichtstralen loopen onderling evenwijdig of gaan van een enkel lichtend punt uit. Met het oog hierop kiest men wederom het coordinatenstelsel op de wijze als in het vorig vraagstuk werd aangegeven. Was daar de hoek van inval gelijk aan dien van terugkaatsing, hier bij de diacaustica geldt als algemeene wet dat de verhouding, waarin de sinus van den hoek van inval tot die van den hoek van breking staat, constant of immer dezelfde is.

Laat ons de brekings- of refractiekromme voorstellen door de vergelijking $F(x, y) = 0$, en de coordinaten der diacaustica aanduiden door ξ en η, dan bestaan er tusschen beide krommen de vergelijkingen

$$\xi = x + (v+p)\frac{dx}{dv}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\eta = y - v(v+p)\frac{dx}{dv}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

waarin $p = dy:dx$ en v de goniometrische tangens is van den hoek gevormd door de as der x en den gebroken lichtstraal. Zijn de oorspronkelijke lichtstralen evenwijdig, dan is

$$v = -\frac{p+\sqrt{(\lambda^2(1+p^2)-1)}}{1-p\sqrt{(\lambda^2(1+p^2)-1)}}, \quad \ldots \quad (3)$$

waarbij λ de verhouding is van de sinus van den hoek van inval tot die van den hoek van breking.

Gaan de lichtstralen allen van een punt uit, dan is

$$v = \frac{-[(x-x_1)+yp]\cdot p + \sqrt{\lambda^2[(x-x_1)^2+y^2](1+p^2)-[(x-x_1)+yp]^2}}{+[(x-x_1)+yp]+p\sqrt{\lambda^2[(x-x_1)^2+y^2](1+p^2)-[(x-x_1)+yp]^2}},$$

waarin nu x_1 de abscis is van het lichtend punt.

Noemt men de coordinaten van het gegeven brandpunt g en h, dan geven (1) en (2) aanleiding tot

$$g = x + (v+p)\frac{dx}{dv}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$h = y - v(v+p)\frac{dx}{dv}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en elke kromme, welke te gelijker tijd voldoet aan deze beide differentiaalvergelijkingen der tweede orde, heeft de eigenschap in het vraagstuk bedoeld. Integreert men (5), onder voorwaarde dat de integraal ook aan (6) zal voldoen, gelijk wij dit in het vorig vraagstuk deden, dan vindt men

$$(y-h)+(x-g)v = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Zijn nu de oorspronkelijke lichtstralen evenwijdig, dan moet men in (7) voor v de waarde uit (3) genomen overbrengen, waardoor zij overgaat in

$$(y-h)-(x-g)p = [(y-h)p+(x-g)]\sqrt{(\lambda^2(1+p^2)-1)}.$$

Brengt men de laatste vergelijking tot de tweede magt, dan laat zij zich met geringe moeite vervormen tot

$$\mp\lambda\frac{(y-h)p+(x-g)}{\sqrt{((y-h)^2+(x-g)^2)}} = 1,$$

en geeft dan geintegreerd

$$\mp\lambda\sqrt{(y-h)^2+(x-g)^2} = x+E,$$

of

$$\frac{\left(x-\frac{\lambda^2 g+E}{\lambda^2-1}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\lambda^2-1}\right)^2\cdot(g+E)^2}+\frac{(y-h)^2}{\frac{1}{\lambda^2-1}(g+E)^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wijl men aan de standvastige E, bij het integreren verkregen, een onbeperkt aantal verschillende waarden kan geven, is de laatste vergelijking het beeld eener geheele rij van kromme lijnen, welke allen behooren tot de ellipsen of hyperbolen, naarmate $\lambda^2 > 1$ of $\lambda^2 < 1$ is. De hoofdas van al deze kromme lijnen loopt op den afstand $y = h$ evenwijdig

met de as der x, evenwijdig dus ook met de oorspronkelijke lichtstralen.

Voor de hoofdas vindt men de uitdrukking

$$\frac{2\lambda(g+E)}{\lambda^2-1}, \text{ voor de nevenas } \frac{2(g+E)}{\sqrt{(\lambda^2-1)}}.$$

De ordinaten van de uiteinden der groote as en die der brandpunten hebben de waarde h; voor de abscissen vindt men in het eerste geval

$$\frac{\lambda g-E}{\lambda+1} \text{ en } \frac{\lambda g+E}{\lambda-1},$$

in het tweede geval

$$g \text{ en } g+\frac{2(g+E)}{\lambda^2-1};$$

de excentriciteit wordt uitgedrukt door $\frac{2(g+E)}{\lambda^2-1}$.

Gaan de oorspronkelijke lichtstralen allen van een punt uit, dan moet men in (7) voor v de uitdrukking (4) overbrengen, waardoor zij overgaat in

$$[(x-g)p-(y-h)].[(x-x_1)+yp]=$$
$$[(x-g)-(y-h)p]\sqrt{\lambda^2(1+p^2).[(x-x_1)^2+y^2]-[(x-x_1)+yp]^2}.$$

Brengt men ook deze vergelijking tot de tweede magt, dan heeft men na geringe vervorming,

$$[(x-g)^2+(y-h)^2].[(x-x_1)+yp]^2.(1+p^2)=$$
$$=[(x-g)+(y-h)p]^2.\lambda^2(1+p^2)[(x-x_1)^2+y^2),$$

waaruit volgt

$$\frac{(x-x_1)+yp}{\sqrt{((x-x_1)^2+y^2)}}\mp\lambda\frac{(x-g)+(y-h)p}{\sqrt{((x-g)^2+(y-h)^2)}}=0.$$

De laatste vergelijking laat zich onmiddelijk integreren en geeft dan

$$\sqrt{((x-x_1)^2+y^2)}\mp\lambda\sqrt{(x-g)^2+(y-h)^2}=C,$$

welke kromme in het algemeen tot den vierden graad opklimt, en alleen in het bijzonder geval van $C=0$ zich tot den tweeden graad laat terugbrengen.

96. Laat het coordinatenstelsel zoo genomen worden dat de as der x evenwijdig loopt met de invallende lichtstralen; zij verder de gegeven vergelijking der catacaustica

$$\Phi(\xi,\eta)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Vroeger vonden wij $\xi = x + (u-p)\frac{dx}{du}$ en

$\eta = y + u(u-p)\frac{dx}{du}$; brengen wij deze waarden in (1) over, dan herleidt zij zich tot

$$\varphi\left\{\left(x+(u-p)\frac{dx}{du}\right),\left(y+u(u-p)\frac{dx}{du}\right)\right\}=0, \quad . \quad . \quad (2)$$

of tot

$$\varphi(M, N)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wanneer men $x+(u-p)\frac{dx}{du}=M$ en $y+u(u-p)\frac{dx}{du}=N$ stelt. Differentieert men (3), dan komt er

$$\left(\frac{d_M\varphi}{dM}+u\frac{d_N\varphi}{dN}\right)\left(2-q\frac{dx}{du}-(u-p)\frac{d^2x}{du^2}\right)=0, \quad . \quad . \quad (4)$$

aan welke vergelijking voldaan wordt door

$$2-q\frac{dx}{du}-(u-p)\frac{d^2x}{du^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en door

$$\frac{d_M\varphi}{dM}+u\frac{d_N\varphi}{dN}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De differentiaalvergelijking (5), welke van de derde orde is, laat zich zonder verderen omhaal integreren en geeft

$$x+(u-p)\frac{dx}{du}=A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

zijnde A de constante bij het integreren verkregen. Brengt men deze waarde in (2) over, dan wordt zij

$$\varphi\left\{A,\left(y+u(u-p)\frac{dx}{du}\right)\right\}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

uit welken vorm men af mag leiden dat de waarde der uitdrukking $y+u(u-p)\frac{dx}{du}$ onafhankelijk is van x en y. Duidt men haar door B aan, dan is

$$y+u(u-p)\frac{dx}{du}=B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

en bestaat er tusschen A en B de geheel bepaalde vergelijking

$$\varphi(A, B)=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Vermenigvuldigt men (7) met u en trekt men het product van (9) af, dan houdt men over

$$y - B = (x - A)u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Hiermede heeft men eene eerste stamvergelijking verkregen, wel is waar met twee constanten, maar wijl A en B volgens (10) van elkander afhankelijk zijn, kan men een van beiden elimineren en eene stamvergelijking met eene constante vinden.

Zal men de vergelijking (11) verder behandelen, dan moet men voor u hare waarde $2p:(1-p^2)$ invoeren, waardoor (11) wordt

$$(y - B)(1 - p^2) = 2(x - A)p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

of, na integreren op de wijze als in voorstel 94 geschiedde,

$$\sqrt{(y - B)^2 + (x - A)^2} = x + E, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

welke vergelijking slechts schijnbaar drie constanten heeft; men kan toch met behulp van (10) A of B elimineren.

Vergelijkt men nu de vergelijkingen (1) en (10) met elkander, dan bespeurt men dat tusschen A en B dezelfde betrekking bestaat als tusschen ξ en η; men kan derhalve de constanten A en B vervangen door de coordinaten ξ en η, bij de gegeven catacaustica behoorende, waardoor (13) overgaat in

$$\sqrt{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} = x + E, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

of, na vervorming, in

$$(y - \eta)^2 = 2(\xi + E)\left(x - \frac{\xi - E}{2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Wegens het onbepaalde der constante E is (15) het beeld van een onbeperkt aantal kromme lijnen, alle behoorende tot de conische parabolen; haar parameter wordt uitgedrukt door $2(\xi + E)$, haar top bepaald door $x = {}^1/_2(\xi - E)$ en $y = \eta$; haar hoofdas loopt op den afstand $y = \eta$ evenwijdig met de as der abscissen, en de coordinaten van haar brandpunt zijn ξ en η, waarmede te kennen gegeven wordt dat de brandpunten van al de hier bedoelde parabolen zamenvallen met de voorgeschreven of gegeven catacaustica.

Uit het 94ste vraagstuk is gebleken dat, wanneer op de parabool lichtstralen evenwijdig met de as vallen, de catacaustica zich herleidt tot een enkel punt, het brandpunt.

Dien ten gevolge kan geen enkele der hier gevonden parabolen tot de vorming der catacaustica voor meer dan een enkel punt bijdragen, en is dan ook geen enkele dezer parabolen als de gezochte terugkaatsingskromme te beschouwen. Men moet derhalve onderzoeken of uit het onbeperkt aantal dezer parabolen rijen kunnen worden gevonden zoodanig, dat elke rij bestaat uit aan elkander grenzende en opvolgend snijdende parabolen, en de krommen van doorsnede bovendien voldoen aan de differentiaalvergelijking (2), terwijl zij te gelijker tijd voor elk punt eene aanraking der tweede orde hebben met eene der snijdende parabolen. Al deze krommen van doorsnede zijn osculerende krommen en worden door eene enkelvoudige singuliere integraal bepaald *). Om deze te zoeken kan men verschillende wegen inslaan; wil men bijv. de enkelvoudige singuliere integraal uit de algemeene afleiden, dan bedenke men dat de constanten bij het integreren verkregen voor alle elkander snijdende parabolen onafhankelijk zijn van x en y. Differentieert men met betrekking hierop de vergelijking (14), dan komt er

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x-\xi) \pm \sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2}}{y-\eta} \quad \ldots \quad (16)$$

Bij de krommen van doorsnede daarentegen moeten de constanten functien zijn van x; en differentieert men, dit in acht nemende, de vergelijking (14), dan heeft men, behalve (16), ook nog

$$\left((y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi} + (x-\xi)\right)\frac{d\xi}{dx} \pm \left(\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}\right)\frac{dE}{dx} = 0 \ldots (17)$$

Differentieert men (16) nogmaals, dan heeft men verder

$$\left((y-\eta) - (x-\xi)\frac{d\eta}{d\xi}\right)\left[(x-\xi) \mp \sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}\right]\frac{d\xi}{dx} = 0, \ldots (18)$$

waaruit alleen volgen kan

$$(y-\eta) - (x-\xi)\frac{d\eta}{d\xi} = 0. \quad \ldots \quad (19)$$

Deze vergelijking is het beeld der regte lijn, die door het

*) Zie mijne verhandeling over de singuliere integralen bij de differentiaalvergelijkingen der eerste en tweede orde, in het Wiskundig Archief, deel VII, stuk I en II en deel VIII, stuk I.

punt (x, y) der gezochte kromme gaat, en te gelijker tijd de raaklijn in het punt (ξ, η) der gegeven catacaustica.

Verbindt men nu (17) en (19), dan vindt men

$$(d\eta^2 + d\xi^2) \pm \sqrt{(d\eta^2 + d\xi^2)}.dE = 0, \quad . \quad . \quad (20)$$

of

$$\sqrt{(d\eta^2 + d\xi^2)} \pm dE = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

waaruit volgt

$$dE = \mp \sqrt{(d\eta^2 + d\xi^2)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

of

$$E = K \mp \int \sqrt{(d\eta^2 + d\xi^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

De vergelijking (14) gaat nu over in

$$\sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = x + K \mp \int \sqrt{(d\eta^2 + d\xi^2)}. \ . \ . \ . \quad (24)$$

Met deze vergelijking moet men vervolgens verbinden (19), (1) en

$$\frac{d_\xi \Phi}{d\xi} + \frac{d_\eta \Phi}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

dat is, men moet de integraal in (24) bepalen, en dan de drie bestanddeelen ξ, η en $d\eta$ elimineren, als wanneer ook $d\xi$ verdwijnt, en men eene vergelijking overhoudt tusschen x, y en de constante K. Deze nieuwe vergelijking is de enkelvoudig singuliere integraal tot (2), en wijl de constante K onbepaald blijft en derhalve elke waarde kan aannemen, stelt zij eene geheele rij of reeks van regelmatig op elkander volgende terugkaatsingskrommen daar, welke alle de voorgeschreven catacaustica opleveren, zoo namelijk de lichtstralen evenwijdig met de as der x invallen.

Men kan ook nog een anderen weg inslaan, men kan (10) en (11) differentieren, in de veronderstelling dat A en B functien van x zijn; men verkrijgt dan

$$\frac{d_A \Phi}{dA} \cdot \frac{dA}{dx} + \frac{d_B \Phi}{dB} \frac{dB}{dx} = 0 \text{ en } \frac{dB}{dx} - u \frac{dA}{dx} = 0.$$

Elimineert men nu tusschen deze vergelijkingen een der differentiaalquotienten $\frac{dA}{dx}$ of $\frac{dB}{dx}$, dan valt ook het andere weg, en er blijft alleen over

$$\frac{d_A \Phi}{dA} + u \frac{d_B \Phi}{dB} = 0.$$

Door middel van deze laatste vergelijking en van (10) kan men A en B in u uitdrukken, zoodat (11) overgaat in

$$y - ux = \psi(u),$$

waar de vorm $\psi(u)$ afhangt van $\Phi(A, B) = 0$.

Brengt men vervolgens de waarde van u of $2p:(1-p^2)$ in deze laatste vergelijking over, dan komt er eene differentiaalvergelijking der eerste orde. Integreert men die, dan vindt men de boven vermelde vergelijking tusschen x, y en K terug.

Loopen de lichtstralen niet evenwijdig, maar komen zij uit een enkel punt, dan rigt men het regthoekig coordinatenstelsel zoo in, dat de as der abscissen door het lichtend punt gaat, veronderstelt dat de gegeven catacaustica bepaald wordt door (1), en zal dan voor de gezochte terugkaatsingskromme (2) vinden, waaruit, langs den weg daar gevolgd (10) en (11) voortvloeijen. In de laatste vergelijking moet nu voor u de waarde uit (94) worden overgebragt, die namelijk, waarbij men uitgaat van de veronderstelling dat het licht uit een enkel punt voortkomt. Behandelt men haar vervolgens gelijk daar is aangegeven, dan komt er wederom

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = C.$$

De uitdrukking $\sqrt{((x-x_1)^2+y^2)}$ in deze vergelijking stelt den voerstraal voor, getrokken uit het lichtend punt naar eenig punt (x, y) der reflectiekromme. Even zoo geeft de uitdrukking $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ den voerstraal te kennen, die loopt van eenig punt (ξ, η) der catacaustica naar een punt (x, y) der reflectiekromme. Geeft men nu aan de grootheid onder het wortelteeken voorkomend eene positieve waarde, dan stelt de laatste vergelijking eene rij of reeks van ellipsen voor; in het ander geval zijn enkel hyperbolen in haar begrepen. Elk punt (ξ, η) der catacaustica is een brandpunt, terwijl het lichtend punt ligt in het andere brandpunt, maar van al de ellipsen in deze vergelijking begrepen is geen enkele in staat van de gegeven catacaustica meer dan een punt te vormen; daarom kan ook geen enkele dezer ellipsen als de gezochte terugkaatsingskromme worden aangemerkt. Men moet derhalve wederom nagaan of de opvol-

gende snijdingen van al deze ellipsen ook eene kromme van doorsnede kunnen opleveren, die aan de differentiaalvergelijking (2) voldoet, en tevens met de snijdende ellipsen eene aanraking van de tweede orde heeft. Deze krommen van doorsnede worden wederom door de enkelvoudige singuliere integraal aangewezen. Hoe men haar in het onderhavige geval opzoekt, behoeven wij niet uit elkander te zetten, daar hier alles van toepassing is wat wij boven vermeldden.

Laat men in de laatste vergelijking de negatieve waarde voor het wortelteeken gelden, dan vindt men enkel hyperbolen. De lichtstraal, die bij zulk eene kromme lijn van het eene brandpunt uitgaat, wordt door haar zoo teruggekaatst, dat zij, naar de andere zijde verlengd, door het tweede brandpunt zou loopen. De teruggekaatste lichtstralen worden derhalve verstrooid, zij divergeren en kunnen dus ook geene catacaustica vormen.

97. Zij het coordinatenstelsel wederom een regthoekig en zoo ingerigt, dat de as der abscissen evenwijdig loopt met de invallende lichtstralen; laat de gegeven diacaustica voor gesteld worden door

$$\varphi(\xi, \eta) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en brengen wij in haar voor ξ en η de uitdrukkingen vroeger gevonden over, dan komt er voor de gezochte refractie kromme de differentiaalvergelijking van de tweede orde

$$\varphi\left\{\left(x+(v+p)\frac{dx}{dv}\right), \left(y-v(v+p)\frac{dx}{dv}\right)\right\} = 0, \ . \ . \ . \ (2)$$

waarvoor men kortheidshalve kan schrijven

$$\varphi(Q, R) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Differentieert men nu deze laatste, dan komt er

$$\left(\frac{d_Q\varphi}{dQ} - v\frac{d_R\varphi}{dR}\right).\left(2+q\frac{dx}{dv} - (v+p)\frac{d^2v}{dv^2}\right) = 0, \ . \ . \ . \ (4)$$

aan welke vergelijking voldaan wordt door

$$\frac{d_Q\varphi}{dQ} - v\frac{d_R\varphi}{dR} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

of door

$$2+q\frac{dx}{dv} - (v+p)\frac{d^2v}{dv^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De laatste laat zich onmiddelijk integreren en geeft

$$x+(v+p)\frac{dx}{dv}=A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hierdoor gaat (2) over in

$$\varphi\left(A,\left(y-v(v+p)\frac{dx}{dv}\right)\right)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

waaruit men ziet dat de uitdrukking $y-v(v+p)\frac{dx}{dv}$ eene van x en van y onafhankelijke waarde heeft.

Noemt men haar B en stelt men dus

$$y-v(v+p)\frac{dx}{dv}=B, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

dan heeft men tusschen A en B de betrekking $\varphi(A,B)=0$. Vermenigvuldigt men (7) met v, en trekt men het product bij (9), dan komt er

$$(y-B)+(x-A)v=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

als eene eerste stamvergelijking met de constanten A en B, welke door $\varphi(A,B)=0$ van elkander afhankelijk zijn, zoodat men een van beiden kan elimineren en dan eene stamvergelijking met eene constante heeft.

Om nu de vergelijking (10) verder te kunnen behandelen moet men voor v hare in een vorig vraagstuk reeds genoemde waarde overbrengen, waardoor men heeft

$$(y-B)-(x-A)p=((y-B)p+(x-A))\sqrt{\lambda^2(1+p^2)-1} \ldots (11)$$

Behandelt men deze vergelijking, zoo als wij in het 95ste vraagstuk reeds deden, dan komt er

$$\mp\lambda\sqrt{(y-B)^2+(x-A)^2}=x+E, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

welke schijnbaar drie, in de werkelijkheid slechts twee constanten heeft, omdat A en B van elkander afhangen volgens $\varphi(A,B)=0$. En vergelijkt men deze met (1), dan ziet men dat tusschen A en B dezelfde betrekking bestaat als tusschen ξ en η; men kan derhalve A en B vervangen door ξ en η, waaruit volgt

$$\mp\lambda\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}=x+E \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

of

$$\frac{\left(x-\frac{\lambda^2\xi+E}{\lambda^2-1}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\lambda^2-1}\right)^2(\xi+E)^2}+\frac{(y-\eta)^2}{\frac{1}{\lambda^2-1}(\xi+E)^2}=1. \quad . \quad (14)$$

De geheele rij of reeks der gevonden krommen bestaat dus uit ellipsen of hyperbolen, naarmate $\lambda^2 > 1$ of $\lambda^2 < 1$ is.

De hoofdassen al dezer ellipsen of hyperbolen loopen op den afstand $y = \eta$ evenwijdig met de as der x, en derhalve ook met de invallende lichtstralen.

Beschouwt men de vergelijking (8) van het 95ste vraagstuk in verband met de hier gevonden vergelijking (14), dan ziet men dat, gelijk zich daar de gebroken lichtstralen in het gegeven brandpunt (g, h) moesten verzamelen, zij hier zich in het brandpunt (ξ, η) vereenigen, met andere woorden, elk punt der gegeven diacaustica $\Phi(\xi, \eta) = 0$ is een brandpunt van eene der hier gevonden ellipsen of hyperbolen. Geene enkele derhalve dezer kromme lijnen kan van de gegeven diacaustica meer dan een enkel punt daarstellen, geen enkele kan dus ook de refractiekromme zijn. Men moet derhalve ook hier nagaan of de opvolgende snijdingen van al deze ellipsen ook eene kromme van doorsnede kunnen opleveren, die aan de differentiaalvergelijking (2) voldoet, en tevens met de snijdende ellipsen eene aanraking van de tweede orde heeft. Deze krommen van doorsnede worden door de enkelvoudig singuliere integraal aangewezen. Hoe men die vindt hebben wij in het vorig vraagstuk uitvoerig aangewezen; volgt de lezer den weg daar afgebakend, dan zal hij aan het einde zijner rekening de volgende vier vergelijkingen hebben:

$$\mp\lambda\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = x + K \mp \lambda \int \sqrt{d\eta^2 + d\xi^2};$$

$$(y-\eta) - (x-\xi)\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

$$\Phi(\xi, \eta) = 0,$$

$$\frac{d_\xi \Phi}{d\xi} + \frac{d_\eta \Phi}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0.$$

Na integreren en het elimineren van ξ, η en $d\eta$, waarbij $d\xi$ tevens wegvalt, blijft eene vergelijking tusschen x, y en de constante K over. Zij is de enkelvoudige singuliere integraal van (2) en tevens het beeld der lijn van breking of der refractiekromme, welke de gegeven diacaustica te voorschijn roept.

In het hier behandelde geval waren de lichtstralen evenwijdig; komen zij uit een enkel punt, het lichtpunt, dan blijft de gang van zaken, behoudens kleine wijzigingen, dezelfde. Wij geven daarom alleen de voornaamste formules, het aan den lezer overlatende die te vertolken.

De voorgeschreven vergelijking der diacaustica zij $\Phi(\xi, \eta) = 0$; de differentiaalvergelijking van de tweede orde der refractiekromme

$$\Phi\left\{\left(x + (v+p)\frac{dx}{dv}\right), \left(y - v(v+p)\frac{dx}{dv}\right)\right\} = 0,$$

of

$$\Phi(Q, R) = 0,$$

waaruit door differentieren

$$2 + q\frac{dx}{dv} - (v+p)\frac{d^2v}{dv^2} = 0,$$

$$\frac{d_Q\Phi}{dQ} - v\frac{d_R\Phi}{dR} = 0;$$

of na integreren

$$\Phi(A, B) = 0;\ (y - B) + (x - A)v = 0.$$

Hierin de waarde van v overbrengende en te werk gaande als bij het 95ste vraagstuk werd aangegeven, komt er

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} \mp \lambda \sqrt{(x-A)^2 + (y-B)^2} = C,$$

of

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} \mp \lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = C.$$

Om de singuliere integraal te vinden, differentieert men de laatste vergelijking, en behandelt haar zoo als in vraagstuk 95, zoodat men vindt

$$(y - \eta) - (x - \xi)\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

en

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} \mp \lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = K \pm \lambda \int \sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)}.$$

Maakt men nog

$$\frac{d_\xi\Phi}{d\xi} + \frac{d_\eta\Phi}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

op, dan kan men na integreren uit de gevonden formulen ξ, η en $d\eta$ elimineren, als wanneer $d\xi$ mede wegvalt en men eene vergelijking erlangt tusschen x, y en de constante K. De laatste is de verlangde enkelvoudige singuliere integraal.

98. Behandelden wij in de vorige vraagstukken algemeene gevallen, hier hebben wij met een bijzonder te doen; wij

hebben derhalve de vroeger opgespoorde algemeene regelen slechts in toepassing te brengen.

Brengt men in de vergelijking der catacaustica voor ξ en η de vroeger gevonden uitdrukkingen over, dan heeft men voor de gezochte reflectiekromme de volgende differentiaalvergelijking der tweede orde:

$$y - mx - N + (u - m)(u - p)\frac{dx}{du} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Om deze vergelijking regtstreeks te integreren, vermenigvuldigt men haar met du, waardoor zij overgaat in

$$m\,dy - mu\,dx - mx\,du - u\,dy + u^2\,dx + y\,du - N\,du = 0; \ldots (3)$$

voegt men bij de laatste het identisch verschil $ux\,du - ux\,du$, dan komt er

$$(m - u)(dy - u\,dx - x\,du) + (y - ux - N)\,du = 0, \quad . \quad . \quad (4)$$

welke zich laat integreren, wanneer men haar door $(m-u)^2$ deelt; dan toch gaat zij over in

$$\frac{(m - u)(dy - u\,dx - x\,du) + (y - ux - N)\,du}{(m - u)^2} = 0, \quad . \quad . \quad (5)$$

welke na integreren

$$\frac{y - ux - N}{m - u} = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

oplevert, of

$$y - (mA + N) = (x - A)u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Zal men deze differentiaalvergelijking der eerste orde verder behandelen, dan moet men er op letten of de lichtstralen evenwijdig invallen, of uit een punt, het lichtpunt voortkomen.

In het eerste geval moet men voor u de uitdrukking $2p:(1-p^2)$ in (7) overbrengen, waardoor men

$$(y - (mA + N))(1 - p^2) = 2(x - A)p \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

erlangt, welke als in voorstel 94 behandeld de vergelijking

$$\pm\sqrt{(y - (mA + N))^2 + (x - A)^2} = x + E \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

oplevert, met de constanten A en E. Voor A mag men ξ in de plaats stellen, zoodat de laatste vergelijking overgaat in

$$\pm\sqrt{(y - (m\xi + N))^2 + (x - \xi)^2} = x + E. \quad . \quad . \quad (10)$$

of, lettend op (1), in

$$\pm\sqrt{(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} = x + E. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

De gevonden vergelijking wijst, wegens het onbepaalde der standvastige E, op een onbeperkt aantal parabolen, welker assen evenwijdig met de lichtstralen loopen, maar waarvan geen enkele in staat is meer dan een punt der catacaustica te vormen. Wij hebben bij vorige vraagstukken dit geval reeds besproken, en wendt men de methode aan daar — bij het 96ste vraagstuk — uiteengezet, dan erlangt men de vergelijkingen

$$(y-\eta)-(x-\xi)m=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

en

$$\pm\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}=x+K\mp\xi\sqrt{(1+m^2)}. \quad . \quad (13)$$

Elimineert men het verschil $(y-\eta)$ tusschen deze, dan komt er

$$\pm(x-\xi)\sqrt{(1+m^2)}=x+K\mp\xi\sqrt{(1+m^2)},$$

of

$$x(-1\pm\sqrt{(1+m^2)})=K. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Elimineert men nog het bestanddeel η tusschen (1) en (12), dan valt ook ξ weg, en er blijft over

$$y=mx+N.$$

Wijl nu bij het elimineren van η ook telkens ξ wegvalt, is het onmogelijk eenige betrekking te vinden tusschen de gegeven catacaustica, in dit geval eene regte lijn, en de kromme, welke de lichtstralen terugkaatst. Men mag hieruit het gevolg trekken dat er bij evenwijdig invallend licht geene reflectiekromme bestaat, die eene regte lijn als catacaustica oplevert.

Wat zal er gebeuren als het licht uit een punt komt? In dit tweede geval moet men voor u de andere, vroeger medegedeelde uitdrukking invoeren, waardoor (7) overgaat in

$$\begin{aligned}(y-(mA+N))\,(2yp+(x-x_1)(1-p^2))=\\ =(x-A)\,(2(x-x_1)p-y(1-p^2)).\end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Behandelt men deze vergelijking wederom op de wijze als in het tweede geval van vraagstuk 94, dan bekomt men

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}+\sqrt{(y-(mA+N))^2+(x-A)^2}=C, \ldots (17)$$

waarin A en C wederom twee constanten zijn bij het integreren verkregen. Hier moet men aan beide worteluitdrukkingen eene positieve waarde geven, wijl hyperbolen, zooals wij

mede vroeger reeds zagen, niet in aanmerking kunnen komen.

Vervangt men A door ξ, dan gaat de laatste vergelijking over in

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}+\sqrt{(y-(m\xi+N))^2+(x-\xi)^2}=C, \ldots (18)$$

of, met het oog op (1), in

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}+\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}=C.$$

De gevonden vergelijking wijst, wegens het onbepaalde der standvastige C, op een onbeperkt aantal ellipsen, welker eene brandpunt met het lichtend punt moet zamenvallen, en welker ander brandpunt overeenkomt met eenig punt der regte lijn, als catacaustica aangenomen. In een vorig meer algemeen vraagstuk hebben wij reeds gezien dat geen enkele der hier gevonden ellipsen in staat is meer dan een punt der catacaustica te vormen, en er op gewezen dat men de enkelvoudige singuliere integraal moet opzoeken. Wendt men de methode aan, bij het 97ste vraagstuk uiteengezet, dan vindt men de vergelijkingen

$$(y-\eta)-(x-\xi)m=0 \quad \ldots \quad (20)$$

en

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}+\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}=K-\xi\sqrt{(1+m^2)} \ldots (21)$$

Elimineert men tusschen deze het verschil $(y-\eta)$, dan komt er

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}+(x-\xi)\sqrt{(1+m^2)}=K-\xi\sqrt{(1+m^2)}$$

of

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}+x\sqrt{(1+m^2)}=K. \quad \ldots \quad (22)$$

Elimineert men nog η tusschen (1) en (20), dan valt ook ξ weg, en er blijft over

$$y=mx+N, \quad \ldots \quad (23)$$

zoodat het niet mogelijk is eene betrekking te vinden tusschen de gegeven catacaustica en de lijn van reflectie; men besluit hieruit dat er ook bij divergerend licht geene reflectiekromme bestaat, die eene regte lijn als catacaustica oplevert.

Men kan nog een anderen weg inslaan om tot de oplossing te komen, men kan (2) andermaal differentieren, waarbij men verkrijgt

$$(u-m)\left(2-q\frac{dx}{du}-(u-p)\frac{d^2u}{du^2}\right)=0; \ldots (24)$$

aan deze vergelijking wordt voldaan door

$$2-q\frac{dx}{du}-(u-p)\frac{d^2u}{du^2}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

of door

$$u-m=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Gaat men van (25) uit, dan vindt men door integreren

$$(y-B)=(x-A)u. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Zal deze vergelijking voldoen aan de differentiaalvergelijking (2), dan moet tusschen A en B de betrekking

$$B=mA+N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

plaats grijpen. En zal men (27) nogmaals kunnen integreren, dan moet men zich afvragen of de lichtstralen evenwijdig loopen, dan of zij uit een punt stralen.

In het eerste geval verkrijgt men

$$\pm\sqrt{(y-B)^2+(x-A)^2}=x+E,$$

in het ander

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}+\sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2}=C.$$

Op deze wijze komt men terug op de vroeger gevonden vergelijkingen (11) en (19), en andermaal tot de overtuiging dat er geene reflectiekromme bestaat, bij welke als catacaustica eene regte lijn behoort.

Gaat men van (26) uit, dan heeft men $u=m$, 't welk te kennen geeft dat u standvastig is. Nu moet men voor alles onderzoeken of $u=m$ de differentiaalvergelijking eener enkelvoudig singuliere integraal is of niet. Ten dien einde elimineert men B tusschen (27) en (28) en erlangt dan

$$y-(mA+N)=(x-A)u,$$

welke vergelijking, wanneer men u door m vervangt, wordt

$$y=mx+N.$$

Hier is de constante A weggevallen, zonder dat zij eenige bestemming gevonden heeft, waaruit volgt dat $u=m$ niet de differentiaalvergelijking eener enkelvoudig singuliere integraal kan zijn. Nogmaals komt men derhalve tot de overtuiging dat er geene reflectiekromme bestaat, bij welke eene regte lijn als catacaustica behoort.

99. Het vraagstuk komt zoo nabij aan het voorgaande dat wij ons veroorloven mogen alleen de voornaamste formules af te schrijven, het gerust aan den lezer overlatende den leidenden draad te vinden.

Zet men voor ξ en η de bekende uitdrukkingen, dan heeft men

$$y - mx - N - (v+m)(v+p)\frac{dx}{dv} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijking met dv, trekt men er het identieke verschil $vxdv - vxdv$ bij, deelt men haar door $(v+m)^2$, dan vindt men na integreren en verschikken

$$y - (mA+N) + (x-A)v = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Loopen de lichtstralen evenwijdig, dan brengt men in de laatste vergelijking de vroeger bepaalde waarde van v in functie van p over, en behandelt haar als bij vraagstuk 95 is aangegeven; vervolgens wijdt men zijne aandacht aan de standvastigen A en B, die door eene vergelijking of betrekking aan elkander verbonden zijn, en vindt dan, lettend op de vergelijking der diacaustica,

$$\mp\lambda\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = x + E.$$

Van de rij der ellipsen door deze laatste vergelijking uitgedrukt zoekt men de singuliere integraal door

$$(y-\eta) - (x-\xi)m = 0,$$

$$\mp\lambda\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = x + K \pm \lambda\xi\sqrt{(1+m^2)},$$

elimineert $(y-\eta)$ tusschen haar, en vervolgens η tusschen de voorlaatste en de vergelijking der diacaustica, waarop men vindt $y = mx + N$, en daaruit besluit dat er geene refractiekromme bestaat, bij welke eene regte lijn als diacaustica behoort.

In het ander geval, waarin de lichtstralen uit een enkel punt komen, moet men wederom de overeenkomstige, vroeger aangegeven waarde van v in (2) overbrengen, en met de komende vergelijking handelen, als in vraagstuk 95 is aangegeven. Men zal ten slotte vinden

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} \mp \lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = C,$$

welke vergelijking in het algemeen tot den vierden graad opklimt.

Om verder de enkelvoudig singuliere integraal te vinden heeft men

$$(y-\eta)-(x-\xi)m=0, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} \mp \lambda \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = K \pm \lambda \xi \sqrt{(1+m^2)}.$$

Elimineert men het verschil $y-\eta$ tusschen deze laatsten, dan komt er

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} \mp \lambda(x-\xi)\sqrt{(1+m^2)} = K \pm \lambda\xi\sqrt{(1+m^2)}$$

of

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} \mp \lambda x \sqrt{(1+m^2)} = K;$$

doet men dit nog met η tusschen de vergelijking der diacaustica en (3), dan valt ook ξ weg en er blijft over $y=mx+N$, ten blijke wederom dat er geen refractiekromme bestaat, bij welke eene regte lijn als diacaustica behoort.

Men kan hier, even als in het vorig vraagstuk, de vergelijking (1) nogmaals differentieren; zij wordt dan

$$(v+m)\left(2+q\frac{dx}{dv}-(v+p)\frac{d^2v}{dv^2}\right)=0,$$

en aan haar wordt voldaan door

$$2+q\frac{dx}{dv}-(v+p)\frac{d^2v}{dv^2}=0, \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

en door $v+m=0$.

Gaat men van (4) uit, dan komt er na integreren

$$(y-B)+(x-A)v=0,$$

met de beide constanten A en B, die, zal aan (1) voldaan worden, van elkander afhangen volgens $B=mA+N$.

Loopen de lichtstralen evenwijdig, dan is de uitslag der berekening

$$\mp\lambda\sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2}=x+E;$$

komen zij uit een enkel punt, dan vindt men

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} \mp \lambda \sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2}=C,$$

zoodat men de vergelijkingen, bij de eerste oplossing gevonden, terug erlangt.

Gaat men uit van $v=-m$, dan is v constant, en brengt men die standvastige waarde over in

$$y-(mA+N)+(x-A)v=0,$$

dan komt er wederom $y=mx+N$, waaruit op nieuw voortvloeit dat er geene refractiekromme bestaat, bij welke eene regte lijn als diacaustica behoort.

100. De differentiaalvergelijking van de tweede orde der gezochte reflectiekromme is

$$\left(y+u(u-p)\frac{dx}{du}\right)^3 = h\left(x+(u-p)\frac{dx}{du}\right)^2, \quad \ldots \quad (2)$$

welke na differentieren overgaat in

$$\left\{3u\left(y+u(u-p)\frac{dx}{du}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -2h\left(x+(u-p)\frac{dx}{du}\right)\right\}\cdot\left\{2-q\frac{dx}{du}-(u-p)\frac{d^2u}{du^2}\right\}=0 \ldots (3)$$

Aan haar kan voldaan worden door de differentiaalvergelijking der derde orde

$$2-q\frac{dx}{du}-(u-p)\frac{d^2u}{du^2}=0, \quad \ldots \quad (4)$$

welke na integreren overgaat in eene der eerste orde, wanneer aan (2) en (4) voldaan wordt door de verbinding van

$$B^3 = hA^2 \quad \ldots \quad (5) \text{ en } y-B=(x-A)u \quad \ldots \quad (6)$$

Loopen de lichtstralen evenwijdig, dan is de algemeene integraal bepaald door de verbinding van (5) en van

$$\pm\sqrt{(y-B)^2+(x-A)^2}=x+E \quad \ldots \quad (7)$$

of, wat hetzelfde is, door de vergelijkingen (1) en

$$\pm\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}=x+E. \quad \ldots \quad (8)$$

Zal men, evenwel, de reflectiekromme vinden, dan moet men niet de algemeene, maar een enkelvoudige singuliere integraal trachten op te sporen, wat langs verschillende wegen geschieden kan.

Wil men haar uit de algemeene afleiden, dan gaan de twee eerste der vier vergelijkingen, in vraagstuk 97 hiertoe aangewezen, over in

$$(y-\eta)-(x-\xi)\frac{2h\xi}{3\eta^2}=0 \quad \ldots \quad (9)$$

$$\pm\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}=x+K\mp\frac{1}{27}\sqrt{(4h^3+9\xi^3)^3}\ldots(10)$$

Maar nu is $\frac{2h\xi}{3\eta^2}=\frac{2h\xi^2}{3\xi\eta^2}=\frac{2\eta^3}{3\xi\eta^2}=\frac{2\eta}{3\xi}$, waardoor (9) wordt

$$(y-\eta)-(x-\xi)\frac{2\eta}{3\xi}=0 \quad \ldots \quad (11)$$

Verder is $\sqrt{(4h^{\frac{3}{2}}+9\xi^{\frac{3}{2}})^3}=\frac{\sqrt{(4(h\xi^2)^{\frac{3}{2}}+9\xi^2)^3}}{\xi^2}=$

$$\frac{\sqrt{(4\eta^2+9\xi^2)^3}}{\xi^2}=\left(\frac{4h}{\eta}+9\right)\sqrt{4\eta^2+9\xi^2},$$

waardoor (10) wordt

$$\pm\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}=x+K\mp\left(\frac{4h}{27\eta}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{4\eta^2+9\xi^2} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Elimineert men nu eerst het verschil $(y-\eta)$ en daarop het verschil $(x-\xi)$ tusschen (11) en (12), dan heeft men

$$\frac{-3\xi\pm\sqrt{4\eta^2+9\xi^2}}{3\xi}.x=K\mp\frac{4h}{27\eta}\sqrt{4\eta^2+9\xi^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

en

$$\frac{-3\xi\pm\sqrt{4\eta^2+9\xi^2}}{2\eta}.y=K-\frac{\xi}{2}\pm\left(\frac{1}{6}-\frac{4h}{27\eta}\right)\sqrt{4\eta^2+9\xi^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Men heeft derhalve, wegens de onbepaalde waarde der constante K, eene geheele rij reflectiekrommen, die geregeld op elkander volgen; zij worden allen bepaald door (1), (13) en (14), en wijl x en y zich voordoen als functien van ξ en η, kan men deze krommen door de coordinaten der gegeven catacaustica construeren.

Voorts merke men op dat, wanneer men tusschen (1) en (13) η of ξ elimineert, in het eerste geval ξ, in het ander η eene functie wordt van x en K, waaruit voortvloeit dat de vergelijkingen (1), (13) en (14) betrekking hebben op eene enkelvoudige singuliere, niet op eene particuliere integraal.

Men kan nog een anderen weg inslaan om de enkelvoudig singuliere integraal te bepalen, men kan de vergelijkingen (5) en (6) differentieren in de veronderstelling dat ook A en B functien van x zijn. Dan bekomt men

$$3B^2\frac{dB}{dx}=2h.A.\frac{dA}{dx}, \text{ en } \frac{dB}{dx}=u\frac{dA}{dx}.$$

Elimineert men vervolgens $\frac{dB}{dx}$ tusschen deze vergelijkingen, dan valt ook $\frac{dA}{dx}$ weg, en er blijft over

$$3B^2u=2hA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Elimineert men eindelijk A en B tusschen deze en (5) en (6), dan volgt hieruit

$$y - ux = \frac{4h}{27} \cdot \frac{1}{u^2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Men moet zich nu overtuigen dat de gevonden vergelijking ook aan (2) voldoet, verder of de bij (16) behoorende integraal eene enkelvoudig singuliere of eene enkelvoudig particuliere is. Uit (16) leidt men achtereenvolgens af

$$y = ux + \frac{4h}{27} \cdot \frac{1}{u^2},$$

$$p = u + \left(x - \frac{8h}{27u^3}\right) \cdot \frac{du}{dx},$$

$$q = 2\frac{du}{dx} + \frac{8h}{9u^4} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(x - \frac{8h}{27u^3}\right) \cdot \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Brengt men de hier gevonden uitdrukkingen voor y en p over in (2), dan wordt zij identiek; er bestaat derhalve tusschen (2) en (16) geen tegenspraak, maar brengt men de waarden van p en q in (4) over, dan wordt zij

$$-\frac{8h}{9u^4} \cdot \frac{du}{dx} = 0,$$

zoodat er nu wel degelijk tegenspraak is. Door de genomen proef is men overtuigd dat de integraal bij (16) behoorende werkelijk eene enkelvoudig singuliere integraal van (2) is.

Om de vergelijking (16) verder te kunnen behandelen moet men, wanneer de lichtstralen in dezelfde rigting op de reflectiekrommen vallen, in haar voor u de uitdrukking $2p:(1-p^2)$ overbrengen, zij wordt dan

$$y - \frac{2p}{1-p^2} \cdot x = \frac{h}{27} \cdot \frac{(1-p^2)^2}{p^2}; \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

uit haar volgt door differentieren

$$p - \frac{2p}{1-p^2} - \frac{2(1+p^2)x}{(1-p^2)^3} \cdot \frac{dp}{dx} = -\frac{2h}{27} \cdot \frac{(1+p^2)(1-p^2)}{p^3} \cdot \frac{dp}{dx};$$

vermenigvuldigt men deze vergelijking met $-\frac{p\,dx}{1+p^2}$, dan gaat zij over in

$$\frac{p^2\,dx}{1-p^2} + \frac{2xp\,.\,dp}{(1-p^2)^2} = \frac{2h}{27} \cdot \left(\frac{dp}{p^2} - dp\right),$$

waaruit door integreren volgt

$$\frac{p^2}{1-p^2}x = L - \frac{2h}{27}\cdot\frac{1+p^2}{p} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Vermenigvuldigt men (17) met p, en brengt dan in haar voor $\frac{p^2}{1-p^2}x$ de overeenkomstige uitdrukking uit (18) over, dan vindt men

$$p\,.\,y = 2L - \frac{4h}{27}\cdot\frac{1+p^2}{p} + \frac{h}{27}\cdot\frac{(1-p^2)^2}{p} \quad \ldots \quad (19)$$

Wijl de constante L, bij het integreren verkregen, onbepaald bleef, leveren de vergelijkingen (18) en (19) eene geheele reeks van regelmatig op elkander volgende reflectiekrommen; wijl verder in haar x en y als functien van p voorkomen, kunnen deze krommen door de tangenten geconstrueerd worden.

Dat de verbinding der hier gevonden vergelijkingen (18) en (19) dezelfde krommen opleveren als de verbinding van (13) en (14), daarvan kan men zich op de volgende wijze overtuigen: men differentieert de vergelijking (8) en bekomt dan

$$p = \frac{-(x-\xi) \pm \sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}}{y-\eta} +$$

$$+ \frac{y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi}+(x-\xi)}{y-\eta}\cdot\frac{d\xi}{dx} \pm \frac{\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}}{y-\eta}\cdot\frac{dE}{dx}.$$

Wijl echter

$$\left((y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi}+(x-\xi)\right)\frac{d\xi}{dx} \pm \sqrt{((y-\eta)^2+(x-\xi)^2)}\,\frac{dE}{dx} = 0$$

moet zijn, zoo herleidt zich de pas gevonden vergelijking tot

$$p = \frac{-(x-\xi) \pm \sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}}{y-\eta};$$

elimineert men tusschen haar en (11) het verschil $(y-\eta)$, dan valt ook $(x-\xi)$ weg, en de laatste vergelijking gaat over in

$$p = \frac{-3\xi \pm \sqrt{(4\eta^2+9\xi^2)}}{2\eta}.$$

Uit deze kan men de waarden opmaken van $\frac{p^2}{1-p^2}$ en

$\frac{1+p^2}{p}$; brengt men die over in (18) en (19), dan vindt men, na luttele herleiding,

$$\frac{-3\xi \pm \nu(4\eta^2+9\xi^2)}{3\xi} x = 2L \mp \frac{4h}{27.\eta} \nu(4\eta^2+9\xi^2),$$

en

$$\frac{-3\xi \pm \nu(4\eta^2+9\xi^2)}{2\eta} y = 2L - \frac{\xi}{2} \pm \left(\frac{1}{6} - \frac{4h}{27\eta}\right)\nu(4\eta^2+9\xi^2).$$

Vervangt men, eindelijk, in de laatste vergelijkingen $2L$ door K, dan vallen zij geheel zamen met (13) en (14), wat te bewijzen was.

Er was nog een derde weg om de enkelvoudig singuliere integraal te bepalen; bij de eerste oplossing stelden wij den tweeden factor van (3) gelijk nul, maar men kan met hetzelfde regt den eersten factor voor deze rekening bestemmen en vindt dan

$$3u\left(y+u(u-p)\frac{dx}{du}\right)^2 = 2h\left(x+(u-p)\frac{dx}{du}\right), \ldots (20)$$

dat is, met het oog op (2),

$$3u\left(x+(u-p)\frac{dx}{du}\right) = 2\left(y+u(u-p)\frac{dx}{du}\right),$$

of

$$u(u-p)\frac{dx}{du} = 2y - 3ux.$$

Elimineert men $\frac{dx}{du}$ tusschen deze laatste en (2), dan komt er

$$y - ux = \frac{4h}{27} \cdot \frac{1}{u^2}.$$

Nu zou men moeten nagaan of de hier gevonden vergelijking ook in tegenspraak is met (2) en met (20), om tot de wetenschap te komen of de integraal bij deze laatste vergelijkiug behoorende eene enkelvoudig particuliere of enkelvoudig singuliere is; wijl echter de laatste met (16) overeenkomt vervalt dit onderzoek.

Zijn de opvallende lichtstralen divergent, komen zij uit een enkel punt, dan wordt de algemeene integraal bepaald door de vergelijkingen

$B^3 = h \cdot A^2$ en $\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} + \sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2} = C$
of, wat hetzelfde is, door

$\eta^3 = h\xi^2$ en $\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} + \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = C.$

Wil men de enkelvoudig singuliere integraal uit de algemeene vinden, dan gaan de twee eerste der vier vergelijkingen, in vraagstuk 97 daartoe aangewezen, over in

$$(y-\eta) - (x-\xi)\frac{2\eta}{3\xi} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} + \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} =$$
$$= K - \left(\frac{1}{3} + \frac{4h}{27\eta}\right) \cdot \sqrt{(4\eta^2+9\xi^2)}. \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Wegens de onbepaalde constante K heeft men hier wederom eene geheele rij, regelmatig op elkander volgende reflectiekrommen, die allen bepaald zijn door (1), (21) en (22); en wijl x en y uitgedrukt zijn in functie van ξ en η, kunnen ook al die krommen geconstrueerd worden door de coordinaten der gegeven catacaustica.

Men mag verder niet vergeten dat, naarmate men η of ξ tusschen (1) en (22) elimineert, in het eerste geval ξ, in het ander η zich voordoet als functie van x en K, waardoor het bewijs geleverd is dat de verbinding van (1), (21) en (22) eene enkelvoudig singuliere, niet eene enkelvoudig particuliere integraal oplevert.

Wilde men de enkelvoudig singuliere integraal uit de eerste stamvergelijking of uit de differentiaalvergelijking der tweede orde afleiden, dan vond men in beide gevallen weder de vergelijking (16), waarin nu voor u de overeenkomstige vroeger gegeven uitdrukking moet worden overgebragt.

De lezer beproeve de refractiekromme te vinden, welke het licht zoo breekt, dat daardoor de diacaustica $\eta^3 = h\xi^2$ ontstaat.

Gaat hij, bij evenwijdig invallend licht, uit van de differentiaalvergelijking der tweede orde

$$\left(y - v(v+p)\frac{dx}{dv}\right)^3 = h\left(x + (v+p)\frac{dx}{dv}\right)^2,$$

dan vindt hij de algemeene integraal door de verbinding der vergelijkingen

$$\eta^3 = h\xi^2 \text{ en } \mp\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = x+E, \ldots (23)$$

en daaruit de vergelijkingen der enkelvoudig singuliere integraal

$$\frac{-3\xi \mp \lambda\sqrt{(4\eta^2+9\xi^2)}}{3\xi}x = K \pm \lambda\frac{4h}{27\eta}\sqrt{(4\eta^2+9\xi^2)}, \ldots (24)$$

$$\frac{-3\xi \mp \lambda\sqrt{(4\eta^2+9\xi^2)}}{2\eta}y = K - \frac{\xi}{2} \pm \lambda\left(\frac{1}{6}-\frac{4h}{27\eta}\right)\sqrt{(4\eta^2+9\xi^2)}. \ldots (25)$$

Legt hij de differentiaalvergelijkingen der eerste orde $B^3 = hA^2$ en $y - B + (x-A)v = 0$ tot grondslag zijner berekeningen, dan vindt hij

$$y + vx = \frac{4h}{27}\cdot\frac{1}{v^2},$$

en vervolgens

$$\frac{\sqrt{\lambda^2(1+p^2)}-1}{-\lambda^2 p+\sqrt{\lambda^2(1+p^2)}-1}x = L + \frac{8\lambda^2 h}{27(\lambda^2-1)^2}(p-\sqrt{\lambda^2(1+p^2)}-1). \ldots (26)$$

en

$$(\sqrt{\lambda^2(1+p^2)}-1)y = L(\lambda^2-1) + \frac{8\lambda^2 h}{27(\lambda^2-1)}(p-\sqrt{\lambda^2(1+p^2)}-1) +$$

$$+\frac{4h}{27(\lambda^2-1)^2}(-\lambda^2 p+\sqrt{\lambda^2(1+p^2)}-1)^2\cdot\sqrt{\lambda^2(1+p^2)}-1., \ldots (27)$$

welke geheel overeenkomen met (24) en (25). Om dit aan te toonen differentieert men (23), zondert p af en brengt de uitdrukking voor deze grootheid over in (26) en (27)); men zal dan, na eenige herleidingen en na het vervangen van $L(\lambda^2-1)$ door K, (24) en (25) uit (26) en (27) zien te voorschijn treden.

Gaat hij, eindelijk, uit van de differentiaalvergelijking

$$3v\left(y - v(v+p)\frac{dx}{dv}\right)^2 = -2h\left(x+(v+p)\frac{dx}{dv}\right),$$

op de wijze als wij boven als derde wijze van handelen opgaven, dan komt hij wederom tot de vergelijking

$$y + vx = \frac{4h}{27}\cdot\frac{1}{v^2}. \ldots (28)$$

Loopen de lichtstralen niet evenwijdig, komen zij uit een

punt, dan zal men als algemeene integraal vinden de verbinding der vergelijkingen

$$\eta^3 = h\xi^2 \text{ en } \sqrt{(x-x_1)^2+y^2} \mp \lambda \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = C,$$

voor de enkelvoudig singuliere integraal

$$(y-\eta) - (x-\xi)\frac{2\eta}{3\xi},$$

en

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} \mp \lambda \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} =$$
$$= K \pm \lambda\left(\frac{1}{3}+\frac{4h}{27\eta}\right)\sqrt{(4\eta^2+9\xi^2)}.$$

Tot verdere oefening kunnen nog de volgende vraagstukken dienen.

Gegeven $\eta^2 = 2h\xi$ als vergelijking der catacaustica vraagt men hieruit de reflectiekromme te bepalen.

De gezochte terugkaatsingskromme hangt hier af van de differentiaalvergelijking der tweede orde

$$\left(y+u(u-p)\frac{dx}{du}\right)^2 = 2h\left(x+(u-p)\frac{dx}{du}\right),$$

waaruit men door differentieren en opvolgend twee malen integreren vindt

$$B^2 = 2hA \text{ en } (y-B) = (x-A)u.$$

Loopen de lichtstralen evenwijdig, dan wordt de algemeene integraal uitgedrukt door

$$\eta^2 = 2h\xi \text{ en } \pm\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = x+E.$$

Maar de reflectiekrommen worden bepaald door enkelvoudig singuliere integralen. Leidt men deze uit de algemeene af, volgens de vergelijkingen

$$(y-\eta)+(x-\xi)\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

$$\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = x+K\mp\int\sqrt{(d\eta^2+d\xi^2)};$$

dan vindt men

$$y-\eta-(x-\xi)\frac{h}{\eta} = 0,$$

en

$$\pm\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = x+K\mp\frac{\eta\sqrt{(h^2+\eta^2)}}{2h}+$$
$$+\frac{h}{2}\log\frac{-\eta\pm\sqrt{(h^2+\eta^2)}}{h},$$

om door het elimineren van $(y-\eta)$, en later van $(x-\xi)$, te komen tot

$$\frac{-\eta \pm \sqrt{(h^2+\eta^2)}}{\eta} x = K + \frac{h}{2} log \frac{-\eta \pm \sqrt{(h^2+\eta^2)}}{h}$$

en

$$\frac{-\eta \pm \sqrt{(h^2+\eta^2)}}{h} y = K + \frac{\eta(-\eta \pm \sqrt{(h^2+\eta^2)}}{2h} + \frac{h}{2} log \frac{-\eta \pm \sqrt{(h^2+\eta^2)}}{h}.$$

Men kan de enkelvoudig singuliere integraal ook uit een der beide stamvergelijkingen afleiden, waardoor men komt tot de diflerentiaalvergelijking der eerste orde

$$y - ux = \frac{h}{2u},$$

waarin men nu voor u de vroeger genoemde waarde overbrengt, haar differentieert, vervormt en opvolgend integreert, zoodat x en y als functien van p voorkomen, of

$$\frac{p^2}{1-p^2} x = L + \frac{h}{4} log\, p,$$

$$py = 2L + \frac{h}{4}(1-p^2) + \frac{h}{2} log\, p.$$

De lezer toone nog aan dat de hier gevonden vergelijkingen geheel overeenkomen met de onmiddelijk voorafgaande.

Loopen de lichtstralen niet evenwijdig, komen zij uit een enkel punt, dan wordt de algemeene integraal $\eta^2 = 2h\xi$ en $\sqrt{(x-x_1)^2+\eta^2} + \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = C$; voor de vergelijkingen der enkelvoudig singuliere integraal vindt men in dit geval

$$(y-\eta) - (x-\xi)\frac{h}{\eta} = 0,$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} + \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = K - \frac{\eta\sqrt{(h^2+\eta^2)}}{2h} + \frac{h}{2} log \frac{-\eta + \sqrt{(h^2+\eta^2)}}{h}.$$

Zoek nog de refractiekromme, wanneer als diacaustica gegeven is $\eta^2 = 2h\xi$.

Loopen de invallende lichtstralen evenwijdig, dan vindt men voor de algemeene integraal de verbinding der vergelijkingen

$$\eta^2 = 2h\xi \text{ en } \mp\lambda\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = x+E,$$

voor de enkelvoudig singuliere integraal, dat is, voor de refractiekromme zelve, de verbinding van

$$\frac{-\eta\mp\lambda\sqrt{(h^2+\eta^2)}}{\eta}x = K - \frac{\lambda h}{2}\log\frac{-\eta\mp\sqrt{(h^2+\eta^2)}}{h},$$

en

$$\frac{-\eta\mp\lambda\sqrt{(h^2+\eta^2)}}{h}y = K + \frac{\eta(-\eta\mp\lambda\sqrt{(h^2+\eta^2)})}{2h} - \frac{\lambda h}{2}\log\frac{-\eta\mp\sqrt{(h^2+\eta^2)}}{h}.$$

Zijn de lichtstralen divergent, komen zij uit een enkel punt, dan is de algemeene integraal bepaald door

$$\eta^2 = 2h\xi \text{ en } \sqrt{(x-x_1)^2+y^2}\mp\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = C,$$

de enkelvoudig singuliere integraal door

$$(y-\eta)-(x-\xi)\frac{h}{\eta} = 0,$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2}\mp\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = K \pm$$

$$\pm\frac{\lambda\eta\sqrt{(h^2+\eta^2)}}{2h} - \frac{\lambda h}{2}\log\frac{-\eta\pm\sqrt{(h^2+\eta^2)}}{h}.$$

De lezer bepale nog de kromme, die de lichtstralen zoo terugkaatst, dat de catacaustica een cirkel $\eta^2+\xi^2 = k^2$ wordt.

Hij zal vinden dat de reflectiekromme uitgedrukt wordt door de differentiaalvergelijking der tweede orde

$$\left(y+u(u-p)\frac{dx}{du}\right)^2+\left(x+(u-p)\frac{dx}{du}\right)^2 = k^2,$$

waarvan de algemeene integraal opgesloten is in

$$\eta^2+\xi^2 = k^2 \text{ en } \pm\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = x+E.$$

Verder vindt hij voor de vergelijkingen der enkelvoudig singuliere integraal

$$\frac{-\eta\pm k}{\eta}x = K \pm k\left(\frac{\xi}{\eta} - boog\ tang\frac{\xi}{\eta}\right),$$

$$\frac{-\eta\pm k}{\xi}y = -K - \frac{k^2}{\xi} \pm k\left(\frac{\eta}{\xi} + boog\ tang\frac{\xi}{\eta}\right).$$

Gaat men hier uit van een der beide eerste stamvergelijkingen, dan komt men tot de differentiaalvergelijking der eerste orde

$$y-ux = \pm k\sqrt{(1+u^2)},$$

waaruit men verder als gezochte vergelijking afleidt

$$\frac{p^2}{1-p^2}x = L \mp k\left(\frac{p}{1-p^2} - boog\ tang\ p\right),$$

$$p \,.\, y = 2L \mp k(p - 2\ boog\ tang\ p).$$

De lezer beproeve deze laatste vergelijking te herleiden tot de onmiddelijk voorafgaande.

Komen de lichtstralen wederom uit een punt, dan is de algemeene integraal gegeven door de verbinding van

$\eta^2 + \xi^2 = k^2$ en $\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = C$,

de enkelvoudig singuliere integraal door

$$(y-\eta) + (x-\xi)\frac{\xi}{\eta} = 0,$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = K - k\ boog\ tang\ \frac{\xi}{\eta}.$$

Stelt de vergelijking van den cirkel $\eta^2 + \xi^2 = k^2$ eene diacaustica voor, dan vindt men bij evenwijdig opvallend licht voor de algemeene integraal de verbinding

$\eta^2 + \xi^2 = k^2$ en $\mp\lambda\sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = x + E$,

voor de enkelvoudig singuliere integraal

$$(y-\eta) - (x-\xi)\frac{\xi}{\eta} = 0,$$

$$\mp\lambda\sqrt{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2} = x + K \pm \lambda k\ boog\ tang\ \frac{\xi}{\eta},$$

of

$$\frac{-\eta \mp \lambda k}{\eta}x = K \mp \lambda k\left(\frac{\xi}{\eta} - boog\ tang\ \frac{\xi}{\eta}\right),$$

en

$$\frac{-\eta \mp \lambda k}{\xi}y = -K - \frac{k^2}{\xi} \mp \lambda k\left(\frac{\eta}{\xi} + boog\ tang\ \frac{\xi}{\eta}\right).$$

Bij divergend licht wordt de algemeene integraal

$\xi^2 + \eta^2 = k^2$ en $\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} \mp \lambda\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = C$;

voor de enkelvoudig singuliere integraal vindt men

$$(y-\eta) + (x-\xi)\frac{\xi}{\eta} = 0$$

en

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} \mp \lambda\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = K \pm \lambda k\ boog\ tang\ \frac{\xi}{\eta}.$$

Is de gegeven catacaustica eene eene hypocycloide $\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$, dan wordt bij invallend licht de enkelvoudig singuliere integraal of de reflectiekromme

$$(y-\eta)\sqrt[3]{\xi} + (x-\xi)\sqrt[3]{\eta} = 0,$$

$$\pm\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = x + K \mp \frac{3}{2}\sqrt[3]{k\xi^2};$$

bij divergerend, uit een punt komend licht

$$(y-\eta)\sqrt[3]{\xi} + (x-\xi)\sqrt[3]{\eta} = 0,$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} + \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = K - \frac{3}{2}\sqrt[3]{k\xi^2}.$$

Stelt de hypocycloide eene diacaustica voor, dan wordt bij evenwijdig invallend licht de refractiekromme of de enkelvoudig singuliere integraal uitgedrukt door

$$(y-\eta)\sqrt[3]{\xi} + (x-\xi)\sqrt[3]{\eta} = 0,$$

$$\mp\lambda\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = x + K \pm \frac{3}{2}\lambda\sqrt[3]{k\xi^2};$$

bij divergerend, uit een punt komend licht door

$$(y-\eta)\sqrt[3]{\xi} + (x-\xi)\sqrt[3]{\eta} = 0,$$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+y^2} \mp \lambda\sqrt{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2} = K \pm \frac{3}{2}\lambda\sqrt[3]{k\xi^2}.$$