



Over differentiaal van gebroken orde en haar gebruik bij de afleiding van bepaalde integralen

<https://hdl.handle.net/1874/294743>

A 192 in 4^e
1904.

Over Differentialen van gebroken orde
en haar gebruik bij de
afleiding van bepaalde integralen.

J. G. RUTGERS.





Over Differentialen van gebroken orde en haar gebruik
bij de afleiding van bepaalde integralen.

Over Differentialen van gebroken orde en haar gebruik
bij de afleiding van bepaalde integralen.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

D^R. C. H. H. SPRONCK

Hoogleeraar in de Faculteit der Geneeskunde

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Vrijdag 8 Juli 1904, des namiddags te 2 uren

DOOR

JOHANNES GEORGE RUTGERS

geboren te 's-HERTOGENBOSCH.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

AAN MIJNE OUDERS.

Aan alle Hoogleraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, wier onderwijs ik genoten heb, breng ik bij het einde van mijne studie aan de Universiteit mijn dank.

In 't bijzonder geldt dit U, Hooggeleerde W. KAPTEIJN, Hooggeachte Promotor! Uwe voortreffelijke colleges zullen bij mij in dankbare herinnering blijven, en niet minder de belangstelling en bereidwilligheid, die ik steeds van U ondervond.

Ook aan U, Hooggeleerde J. DE VRIES en Hooggeleerde W. H. JULIUS, voel ik mij voor Uw onderricht ten zeerste verplicht.

Voor 't deel, dat Gij, Zeer Geleerde S. L. VAN OSS, hebt bijgedragen tot mijne wetenschappelijke vorming, betuig ik U mijne erkentelijkheid.

INLEIDING.

De eerste, die eene uitgebreide theorie gaf over differentialen van gebroken orde, was LIOUVILLE in 1832 (Journal de l'Ecole Polytechnique t. XIII en XV, CRELLE's Journal Bd. XI en XII). Uitgaande van de definitie:

$$D_x^\xi e^{mx} = \frac{d^\xi}{dx^\xi} e^{mx} = -\xi \int e^{mx} dx^{-\xi} = m^\xi \cdot e^{mx},$$

waarin ξ en m geheel willekeurige grootheden zijn, ontwikkelt hij de algemeene formule:

$$D_x^\xi f(x) = \frac{(-1)^\xi}{\Gamma(-\xi)} \int_0^\infty f(x+y) y^{-\xi-1} dy, \dots \dots \dots (A)$$

waarbij $\xi < 0$ en $f(x) = \sum A_n e^{-m_n x}$, terwijl alle $m_n > 0$, zoodat $f(x) = 0$ voor $x = \infty$; ingeval ξ en m_n complex zijn, hebben die voorwaarden betrekking op de reële gedeelten. Zooals hij zelf hierbij opmerkte, stelt deze formule ons in staat vele bepaalde integralen af te leiden; evenwel heeft hij er nooit zoodanige toepassingen van gegeven. Dit is gedaan door mijn vader in zijne dissertatie: «Over differentialen van gebroken orde en haar gebruik bij de afleiding van bepaalde integralen» (Leiden 1870). 't Was hierdoor, dat mijn aandacht op dit onderwerp werd gevestigd.

Om namelijk in (A) waarden voor het eerste lid te vinden, moet men de functie $f(x)$ eerst ontwikkelen zoo mogelijk in reeksen van exponentieelen, waarna de definitie rechtstreeks kan worden toegepast. Met behulp zijner definitie vond LIOUVILLE echter ook de algemeene uitdrukking:

$$D_x^\xi \frac{1}{x^m} = \frac{(-1)^\xi \Gamma(m+\xi)}{x^{m+\xi} \Gamma(m)}, \dots \dots \dots (1)$$

waarbij $m > 0$ en $m + \xi > 0$, maar overigens m en ξ willekeurig zijn. 't Is dus ook voldoende om $f(x)$ te ontwikkelen naar opklimmende machten van $\frac{1}{x}$, ten einde onder toepassing van (1) eveneens waarden voor het eerste lid van (A) te vinden.

Sinds die theorie van LIOUVILLE zijn vele verhandelingen over differentialen van gebroken orde verschenen. Voordat ik deze echter leerde kennen, was 't mij gelukt, uitgaande van eene andere definitie dan die van LIOUVILLE, eene nieuwe formule te vinden, die zich er ook toe leent vele bepaalde integralen af te leiden. Hoewel mij nu naderhand bleek, dat eene soortgelijke formule direct als speciaal geval is te verkrijgen uit reeds algemeener opgezette beschouwingen over

differentialen van gebroken orde, meende ik toch tot 't geven van de afleiding dier formule en hare toepassingen over te kunnen gaan, omdat:

1°. er nog een wezenlijk verschil optreedt tusschen de voorwaarden, waaronder die formules zijn te bezigen, — en

2°. zulke toepassingen van die formule, voor zoover mij bekend, nog niet zijn gegeven.

Voor het doel, dat ik mij voor oogen stelde, is 't derhalve voldoende alleen die verhandelingen hier te bespreken, welke daar 't nauwste mede samenhangen. Dit is geschied in het «Historisch overzicht», terwijl ik mijne eigen ontwikkelingen heb verdeeld over de twee daarop volgende hoofdstukken. In het eerste daarvan is, behoudens enkele opmerkingen ten aanzien van het gekozen uitgangspunt, de formule afgeleid, die een verband aangeeft tusschen die differentialen van gebroken orde en de bepaalde integralen, en zijn met het oog op deze formule van een beperkt aantal van functies de gewenschte differentialen van gebroken orde ontwikkeld; in het tweede hoofdstuk zijn met behulp van meerbedoelde formule de waarden van verscheidene bepaalde integralen afgeleid.

Historisch overzicht.

1. In de dissertatie van Dr. K. BOCHOW over: «Der Differentialquotient zu beliebigem Index» (Halle 1885) vindt men een «Uebersicht ueber die bisherige Entwicklung dieser Theorie und ausfuhrliche Darstellung der reellen Differentiation zu beliebigem reellem Index.» In dat overzicht ontbreekt er echter te veel aan kritische beschouwing dan dat men daarheen zou kunnen verwijzen. Zonder meer worden er resultaten van verschillende schrijvers in medegedeeld, die onderling veel overeenkomst vertoonen, en dus oogenschijnlijk alle op juiste wijze zijn afgeleid; toch zijn er enkele onbetrouwbaar te noemen, waarop wij de aandacht willen vestigen.

2. Wanneer men het begrip «differentialen van gebroken orde» bij definitie wil vastleggen, zal men dit natuurlijk zóó trachten te doen, dat daaruit voor geheele orde resultaten verkregen worden, die overeenstemmen met de gewone analyse. 't Is hierom reeds duidelijk, dat er verschillende uitgangspunten mogelijk zijn.

3. Zoo kan men uit eene verhandeling van EULER («Commentarii Acad. Petrop. V. 1730—'34»), die gedeeltelijk door LIOUVILLE is overgenomen in Crelle's Journal Bd. XI p. 16—19, de volgende definitie van hem opstellen:

$$D_x^\xi x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \xi + 1)} x^{\mu - \xi},$$

waarbij de Γ -functies in de plaats gesteld zijn voor hare bekende bepaalde integralen, zoodat als voorwaarden hierbij moeten gelden: $\mu > -1$ en $\mu - \xi > -1$; ξ is dus nog niet geheel willekeurig aan te nemen. Ten deele is dan ook slechts waar, wat LIOUVILLE dienaangaande opmerkt: «que ses raisonnements ont quelque chose de vague et incomplet».

4. Hierom stelde LIOUVILLE zijne reeds genoemde definitie op:

$$D_x^\xi e^{mx} = m^\xi \cdot e^{mx} \cdot \dots \dots \dots (1)$$

waarbij ξ nu wèl willekeurig is. Maar op de algemeenheid, die LIOUVILLE er aan toekende, mag ze evenmin aanspraak maken, daar eene willekeurige functie nu eerst gedifferentieerd kan worden, wanneer ze te ontwikkelen is in reeksen van exponentieelen.

Zijne definitie toepassende op de beide leden der bekende vergelijking:

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x e^{-\alpha x} \alpha^{m-1} d\alpha, \text{ waarin } m > 0 \text{ en } x > 0,$$

vindt hij:

$$D_x^\xi \frac{1}{x^m} = \frac{(-1)^\xi}{\Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{\xi+m-1} d\alpha = \frac{(-1)^\xi \Gamma(m+\xi)}{x^{m+\xi} \Gamma(m)} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dus een eindige waarde, mits $m + \xi > 0$. Dezelfde uitdrukking verkrijgt hij, wanneer $x < 0$, door dan namelijk uit te gaan van eene andere soortgelijke integraal, zoodat (1) in 't algemeen te gebruiken is voor $m > 0$ en $m + \xi > 0$. Niet geoorloofd is 't, wat LIOUVILLE doet en BOCHOW blijkbaar goedkeurt, eene algemeenere beteekenis aan de Γ -functies in (2) toe te kennen, namelijk die, welke voortvloeit uit de volgende definitie van GAUSS:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{z(1+z) \dots (n-1+z)} n^z.$$

Deze uitdrukking wordt slechts oneindig voor alle negatieve geheele waarden van z , met inbegrip van nul, terwijl de Γ -functies, voorkomende in (2), oneindig worden voor alle negatieve waarden harer argumenten, omdat ze daar de plaats vervullen van hare overeenkomstige bepaalde integralen.

5. Bij het zoeken naar $D_x^\xi \sin mx$ en $D_x^\xi \cos mx$ begaat LIOUVILLE eene onnauwkeurigheid. Hij vindt:

$$D_x^\xi \sin mx = m^\xi \sin \left(mx + \xi \frac{\pi}{2} \right), \text{ en } D_x^\xi \cos mx = m^\xi \cos \left(mx + \xi \frac{\pi}{2} \right) \quad . \quad . \quad (3)$$

en merkt nu op, dat verandering van m in $-m$ geeft:

$$D_x^\xi \sin mx = -(-m)^\xi \sin \left(\xi \frac{\pi}{2} - mx \right), \text{ en } D_x^\xi \cos mx = (-m)^\xi \cos \left(\xi \frac{\pi}{2} - mx \right) \quad (4)$$

wat voor ξ niet geheel met de voorgaande uitdrukkingen in strijd is. Niettemin accepteert hij beide waarden en voegt er als verklaring aan toe, dat men (3) of (4) moet gebruiken, naargelang $\sin mx$ en $\cos mx$ te beschouwen zijn als de limiet ($n = 0$) van $e^{nx} \sin mx$, $e^{nx} \cos mx$ of van $e^{-nx} \sin mx$, $e^{-nx} \cos mx$. In de dissertatie van mijn vader wordt slechts aan (3) vastgehouden, maar geeischt $m > 0$ (zie pag. 24—25). Met evenveel recht zou men evenwel kunnen eischen $m < 0$, zoodat de moeilijkheid daarmede niet is opgeheven.

LIOUVILLE gaat als volgt te werk:

$$D_x^\xi \sin mx = D_x^\xi \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} = \frac{e^{imx} (im)^\xi - e^{-imx} (-im)^\xi}{2i},$$

en daar:

$$i^\xi = e^{i\xi \frac{\pi}{2}} \text{ en } (-i)^\xi = e^{-i\xi \frac{\pi}{2}},$$

substitueert hij:

$$(im)^\xi = m^\xi e^{i\xi \frac{\pi}{2}} \text{ en } (-im)^\xi = m^\xi e^{-i\xi \frac{\pi}{2}},$$

waarna hij komt tot (3). Wanneer hij gesubstitueerd had:

$$(im)^\xi = (-m)^\xi e^{-i\xi \frac{\pi}{2}} \text{ en } (-im)^\xi = (-m)^\xi e^{i\xi \frac{\pi}{2}},$$

zou hij tot (4) gevoerd zijn. Tot zoodanige substituties heeft hij echter niet het recht. Evenals zijne definitie dezelfde is voor een positieven of negatieven coëfficiënt van x , zoo zal ook voor $D_x^\xi \sin mx$ eene uitdrukking gevonden moeten worden, die dezelfde blijft bij verandering van m in $-m$; bij hare afleiding zal men dus alleen zoodanige substituties mogen uitvoeren, die op zichzelf reeds

geene verandering ondergaan, wanneer men m door $-m$ vervangt. Men handele dan ook als volgt:

$$\begin{aligned} D_x^{\xi} \sin m x &= \frac{e^{i m x} (i m)^{\xi} - e^{-i m x} (-i m)^{\xi}}{2 i} = \frac{1}{2 i} \left\{ e^{i m x + \xi \lg i m} - e^{-i m x + \xi \lg -i m} \right\} = \\ &= \frac{1}{2 i} \left\{ \cos (m x - i \xi \lg i m) + i \sin (m x - i \xi \lg i m) - \right. \\ &\quad \left. - \cos (m x + i \xi \lg -i m) + i \sin (m x + i \xi \lg -i m) \right\} = \\ &= \frac{1}{i} \sin \left\{ m x - i \frac{\xi}{2} (\lg i m - \lg -i m) \right\} \sin i \frac{\xi}{2} (\lg i m + \lg -i m) + \\ &\quad + \sin \left\{ m x - i \frac{\xi}{2} (\lg i m - \lg -i m) \right\} \cos i \frac{\xi}{2} (\lg i m + \lg -i m) = \\ &= \sin \left\{ m x - i \frac{\xi}{2} (\lg i m - \lg -i m) \right\} e^{\frac{\xi}{2} (\lg i m + \lg -i m)}. \end{aligned}$$

Hierin kan men nog nemen:

$$\begin{aligned} \lg i m - \lg -i m &= \lg i + \lg m - \lg i - \lg -m = \lg m - \lg -m \\ \lg i m + \lg -i m &= \lg i + \lg m + \lg -i + \lg m = \lg m^2, \end{aligned}$$

waardoor men ten slotte vindt:

$$\begin{aligned} D_x^{\xi} \sin m x &= (m^2)^{\frac{\xi}{2}} \sin \left\{ m x - i \frac{\xi}{2} (\lg m - \lg -m) \right\} \\ \text{Op gelijke wijze leidt men af:} \\ D_x^{\xi} \cos m x &= (m^2)^{\frac{\xi}{2}} \cos \left\{ m x - i \frac{\xi}{2} (\lg m - \lg -m) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

6. De waarden, die men volgens (1) voor $D_x^{\xi} f(x)$ vindt, zijn niet de meest algemeene. Wanneer $\xi = -a =$ negatief geheel, moet aan die bijzondere waarde volgens de integraalrekening worden toegevoegd: $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{a-1} c_m x^m$ om tot de algemeene te komen. LIOUVILLE heeft dan ook bij de ontwikkeling zijner theorie twee hoofdstukken gewijd aan die complementaire functie $\varphi(x)$, ingeval ξ willekeurig is (Zie Journal de l'Ecole Polytechnique t. XIII p. 94—106, en CRELLE's Journal Bd. XI, p. 1—10), waarin hij langs twee verschillende wegen tot denzelfden uitkomst wordt gevoerd, dat namelijk de complementaire functie, ingeval ξ niet geheel is, eene geheele algebraïsche functie is van een onbepaald, doch eindig aantal termen, — dus:

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m.$$

We zullen aantoonen, dat dit resultaat, hoewel langs twee geheel van elkaar verschillende wegen in volkomen overeenstemming met elkaar verkregen, toch fout is.

Zijn eerste bewijs steunt op een voorafgegeven theorema, dat zegt, dat elke geheele algebraïsche functie $\sum c_m x^m$ ontwikkeld kan worden in eene reeks van exponentieelen $\sum a_n e^{m_n x}$, waarin alle exponenten m_n oneindig klein zijn, — en omgekeerd. De volgende beschouwing overtuigt ons gemakkelijk van de juistheid hiervan. We weten:

$$x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hx} - e^{-hx}}{2h}, \text{ dus } x^m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{hx} - e^{-hx})^m}{2^m h^m},$$

hetgeen na ontwikkeling volgens het binomium van NEWTON in den teller geeft eene reeks van

exponentieelen met oneindig kleine exponenten, alleen wanneer m positief geheel en eindig is. Zoo m niet positief geheel is, geldt bovendien die ontwikkeling niet meer bij de limiet $h = 0$. Indien $m = 0$, kunnen we schrijven voor $c_0 = c_0 \lim_{h=0} e^{hx}$.

Om nu te komen tot de complementaire functie $\varphi(x)$ merkt LIOUVILLE op, dat men aan de bijzondere waarde volgens (1) voor $D_x^\xi f(x)$ kan toevoegen zoodanige functie $\varphi(x)$, die verdwijnt door toepassing van de tegenovergestelde bewerking, dus waarvoor geldt: $D_x^{-\xi} \varphi(x) = \psi(x) = 0$, of anders uitgedrukt: elke functie $\varphi(x) = D_x^\xi \psi(x)$, indien $\psi(x) = 0$. Ten einde op $\psi(x)$ de definitie toe te kunnen passen, moet ze bestaan uit een som van exponentieelen, b. v.:

$$\psi(x) = \lim_{h=0} (e^{hx} - e^{-hx}) = 0.$$

LIOUVILLE gaat uit van:

$$\psi(x) = c_0 \lim_{h=0} h^{\frac{1}{2}} \frac{e^{hx} - e^{-hx}}{2h} = 0,$$

neemt $\xi = \frac{1}{2}$, en vindt dan:

$$D_x^{\frac{1}{2}} \psi(x) = c_0 \lim_{h=0} h^{\frac{1}{2}} \frac{e^{hx} h^{\frac{1}{2}} - e^{-hx} (-h)^{\frac{1}{2}}}{2h} = c_0 \lim_{h=0} \frac{e^{hx} - e^{-hx} \sqrt{-1}}{2} = \frac{1 - \sqrt{-1}}{2} c_0 = c'_0 = \varphi(x).$$

Uitgaande van eene andere functie $\psi(x) = 0$ vindt hij op soortgelijke wijze: $\varphi(x) = c'_0 + c'_1 x$, enz. waarna hij ten slotte het besluit trekt, dat $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, zoo ξ niet geheel is.

Waarin LIOUVILLE's fout schuilt, wordt duidelijk, na hetgeen we hebben opgemerkt bij het bepalen der waarden van $D_x^\xi \sin mx$ en $D_x^\xi \cos mx$ volgens (1). Blijkens de opmerkingen, die wij daarbij maakten, moet men ook nu als volgt handelen:

$$D_x^{\frac{1}{2}} \psi(x) = c_0 \lim_{h=0} h^{\frac{1}{2}} \frac{e^{hx} h^{\frac{1}{2}} - e^{-hx} (-h)^{\frac{1}{2}}}{2h} = \frac{c_0}{2} \lim_{h=0} \left\{ e^{hx} - e^{-hx - \frac{1}{2}(lg h - lg - h)} \right\} = 0,$$

daar $\lim_{h=0} \frac{1}{2} (lg h - lg - h) = 0$, — terwijl de bewerking van L. neerkomt op:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{2} (lg h - lg - h) = \lim_{h=0} \frac{1}{2} (lg h - lg h - lg - 1) = -\frac{1}{2} lg - 1,$$

wat geenszins te rechtvaardigen is. Hij verliest uit 't oog, dat bij de limiet h en $-h$ gelijktijdig nul worden; verschil in teeken bestaat dan niet meer. Met even weinig recht had hij kunnen nemen:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{2} (lg - 1 + lg - h - lg - h) = +\frac{1}{2} lg - 1.$$

Zonder deze gekunstelde methode van L. verder te vervolgen en hare onjuistheid aan te toonen, zullen we er ons liever dadelijk van overtuigen, dat algemeen $\varphi(x) = 0$, wanneer $\xi \geq 0$. De eisch was te voldoen aan: $D_x^{-\xi} \varphi(x) = 0$, dus moet al vast: $\varphi(x) = \sum a_n e^{m_n x}$, waardoor de voorwaarde wordt: $\sum a_n m_n^{-\xi} e^{m_n x} = 0$. Dit brengt in de eerste plaats al met zich mee, dat de exponenten m_n oneindig klein moeten zijn.

Maar volgens het op de vorige bladzijde genoemde theorema van LIOUVILLE moet dan $\varphi(x)$ zijn eene geheele algebraïsche functie, dus $\varphi(x) = \sum_{n=0, 1, \dots}^m c_n x^n$, waarin nu nog de waarde van m zal blijken af te hangen van ξ . Tot het opsporen dier voorwaarde kunnen wij nu ook twee wegen inslaan.

Ten eerste komen we door de substitutie:

$$x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hx} - e^{-hx}}{2h} \text{ tot: } \varphi(x) = \sum_{n=0,1,\dots}^m c_n x^n = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0,1,\dots}^m (a_n e^{nhx} + a_{-n} e^{-nhx}),$$

waarin de coëfficiënten a in hunne noemers h bevatten, hoogstens tot de macht m , zoodat aan:

$$D_x^{-\xi} \varphi(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0,1,\dots}^m \left\{ a_n (nh)^{-\xi} e^{nhx} + a_{-n} (-nh)^{-\xi} e^{-nhx} \right\} = 0$$

door geen enkele waarde van n voldaan wordt, zoo $\xi \geq 0$, en door alle waarden van $n < -\xi$, zoo $\xi < 0$. We vinden dus niet alleen, dat $\varphi(x) = 0$, wanneer $\xi \geq 0$, — maar tevens, dat

$\varphi(x) = \sum_{n=0,1,\dots}^m c_n x^n$, waarin m het eerste geheele getal voorstelt $< -\xi$, wanneer $\xi < 0$.

Tot ditzelfde resultaat worden we gevoerd door gebruik te maken van (2). Dit toepassende op

$\varphi(x) = \sum_{n=0,1,\dots}^m c_n x^n$ krijgen we als voorwaarde:

$$D_x^{-\xi} \varphi(x) = \sum_{n=0,1,\dots}^m c_n \frac{(-1)^{-\xi} \Gamma(-n-\xi)}{\Gamma(-n)} x^{n+\xi} = 0.$$

En daar de Γ -functies hierbij in de plaats staan voor hare overeenkomstige bepaalde integralen, zal hieraan, voor alle waarden van x , slechts voldaan kunnen worden, wanneer gelijktijdig $\Gamma(-n-\xi)$ eindig en $\Gamma(-n) = \infty$, dus wanneer $-\xi > n \geq 0$. We zien hieruit voor den dag treden, dat geen enkele waarde van n voldoet, zoo $\xi \geq 0$, terwijl te nemen is $n = 0, 1, 2, \dots$ enz., mits $< -\xi$, zoo $\xi < 0$.

Het tweede bewijs, dat LIOUVILLE geeft van zijne complementaire functie, berust ook op de toepassing van (2), waarin hij echter, zooals we reeds opmerkten, ten onrechte aan de Γ -functies eene algemeenere beteekenis heeft toegekend, die maakt, dat aan:

$$D_x^{-\xi} \varphi(x) = D_x^{-\xi} \sum c_n x^n = \sum c_n \frac{(-1)^{-\xi} \Gamma(-n-\xi)}{\Gamma(-n)} x^{n+\xi} = 0,$$

bij ξ niet geheel, voldaan wordt door alle positieve geheele waarden van n , met inbegrip van nul, daar dan $\Gamma(-n) = \infty$ en $\Gamma(-n-\xi)$ eindig is. In die foutieve onderstelling vindt hij weer $\varphi(x) = \sum_{n=0,1,\dots}^m c_n x^n$, waarin m willekeurig is.

7. Eene andere onnauwkeurigheid begaat L. bij het volgende. Hij neemt:

$$m_n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-m_n h}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{m_n h}}{h},$$

naargelang m_n grooter of kleiner is dan nul, in de uitdrukking:

$$D_x^{\xi} f(x) = D_x^{\xi} \sum A_n e^{m_n x} = \sum A_n e^{m_n x} \cdot m_n^{\xi},$$

en ontwikkelt volgens het binomium van NEWTON:

$$(1 - e^{-m_n h})^{\xi} (h > 0 \text{ en } m_n > 0), \text{ en } (1 - e^{m_n h})^{\xi} (h > 0 \text{ en } m_n < 0).$$

Na substitutie vindt hij dan, ingeval:

$$m_n > 0 : D_x^{\xi} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x - k - 1 h)}{h^{\xi}},$$

$$m_n < 0 : D_x^{\xi} f(x) = (-)^{\xi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x - k - 1 h)}{h^{\xi}}.$$

Aan dezen opzet van het vraagstuk is de onmogelijkheid al vooraf in te zien. Na eenige juiste herleidingen vindt hij echter:

$$k = (\mu - p - \alpha) c_{p+\alpha} b^{p+\alpha-\mu} \int_0^1 (1-y)^{\mu-p-\alpha-1} y^{p+\alpha} dy = c_{p+\alpha} b^{p+\alpha-\mu} \frac{\Gamma(p+\alpha+1) \Gamma(\mu-p-\alpha+1)}{\Gamma(\mu+1)},$$

en merkt hij hierbij nog uitdrukkelijk op, dat dit slechts geldt zoolang $\mu > p + \alpha > -1$. Toch voegt hij er onmiddellijk aan toe: «es lässt sich aber auf alle Werthe von μ und $p + \alpha$ ausdehnen, wenn man das Γ einer negativen Zahl als durch das Gesetz: $\Gamma(n) = \frac{1}{n} \Gamma(n+1)$ aus den positiven abgeleitet definirt» (de veranderde notatie is ook hierin doorgevoerd), zoodat hij zonder eenige voorwaarde vindt:

$$c_{p+\alpha} = k b^{\mu-p-\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(p+\alpha+1) \Gamma(\mu-p-\alpha+1)},$$

waarna hij komt tot (8). Aan deze uitdrukking moet evenwel verbonden blijven de voorwaarde $\mu > p + \alpha > -1$, omdat de Γ -functies in de plaats staan van hare overeenkomstige bepaalde integralen en alzoo aan dat teeken geene algemeenere beteekenis mag worden toegekend; zoodra hare argumenten nul of negatief zijn, vertegenwoordigen ze oneindig groote waarden.

9. Van de resultaten van RIEMANN's onderzoekingen willen we nog noemen:

$$D_x^\xi f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_k^x (x-t)^{-\xi-1} f(t) dt + \varphi_\xi \dots \dots \dots (9)$$

waarin: $\varphi_\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n \frac{x^{-\xi-n}}{\Gamma(-\xi-n+1)}$, $\xi < 0$ en $f(t)$ continu is tusschen de grenzen k en x .

$$D_x^\xi x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\xi+1)} x^{\mu-\xi} + \varphi_\xi \dots \dots \dots (10)$$

zoo μ niet negatief geheel is; (10) leidt hij af uit (9) door te nemen $k=0$ en $f(x) = x^\mu$; men ziet dan echter dadelijk in, dat moet optreden de voorwaarde $\mu > -1$.

Hoe weinig waarde we blijkens 't voorgaande aan (9) ook kunnen toekennen, willen we toch bij dat resultaat nog eenige oogenblikken stilstaan.

Aan de grens k is een groote willekeur verbonden. Men neme slechts k zóó, dat eene bepaalde functie $f(t)$ tusschen de grenzen k en x continu blijft. Voor k zal men dus altijd verschillende waarden kunnen kiezen, b. v. k_1 en k_2 . Als verschil der beide bepaalde integralen, die men hierdoor in (9) verkrijgt, vindt men dan:

$$\frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{k_1}^{k_2} (x-t)^{-\xi-1} f(t) dt \dots \dots \dots (11)$$

terwijl $f(t)$ continu zal zijn tusschen de grenzen k_1 en k_2 . Neemt men nu in (8):

$$\mu = -\xi - 1, \alpha = 0, b = x \text{ en } x - b = -t,$$

en vervangt men p door n , dan komt men tot:

$$\frac{(x-t)^{-\xi-1}}{\Gamma(-\xi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{-\xi-1-n}}{\Gamma(-\xi-n)} \cdot \frac{(-t)^n}{\Gamma(n+1)} \dots \dots \dots (12)$$

hetgeen RIEMANN substitueert in (11), waardoor dit wordt van de gedaante φ_ξ en waarmee hij dan heeft aangetoond, dat men in (9) voor k alle mogelijke waarden kan kiezen, mits $f(t)$ slechts continu is tusschen k en x . Die substitutie van RIEMANN nu, voorgesteld door (12),

komt overeen met eene ontwikkeling volgens het binomium van NEWTON, en is daarom in den aangegeven vorm slechts geldig, wanneer $t < x$. Blijkens (11) varieert t van k_1 tot k_2 , welke grenzen afhangen van de continuïteit der functie $f(t)$, — en terwijl x variabel is, kan men dus onmogelijk aannemen x grooter of kleiner dan t . Ingeval $t > x$ zou men in (11) moeten substitueeren:

$$\frac{(x-t)^{-\xi-1}}{\Gamma(-\xi)} = (-1)^{-\xi-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{\xi-1-n}}{\Gamma(-\xi-n)} \cdot \frac{(-x)^n}{\Gamma(n+1)} \quad \dots \quad (13)$$

waardoor (11) geenszins meer is van de gedaante φ_ξ .

Men ziet hier derhalve uit, hoe weinig betrouwbaar ook RIEMANN's resultaten zijn. Neemt men ten slotte in (9): $k = x$, dan vindt men de vreemde uitdrukking: $D_x^\xi f(x) = \varphi_\xi$, welke ook niet kan bijdragen tot verhooging van het inzicht in de differentialen van gebroken orde, zooals RIEMANN die gedefinieerd wilde zien.

10. L. SOHNKE komt in zijne verhandeling «Ueber den Zusammenhang hypergeometrische Reihen mit höheren Differentialquotienten und vielfachen Integralen» (Progr. des Friedrich-Collegiums zu Königsberg i. Pr. 1867) tot de twee definities:

$$D_x^\xi x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\xi+1)} x^{\mu-\xi} \text{ en } D_x^\xi x^\mu = (-1)^\xi \frac{\Gamma(-\mu+\xi)}{\Gamma(-\mu)} x^{\mu-\xi},$$

waarin ξ en μ willekeurig zijn, dus aan de Γ -functies de meest algemeene beteekenis is toegekend. Op algemeene geldigheid kunnen deze definities, evenmin als die van LIOUVILLE, aanspraak maken, zooals reeds dadelijk hieruit blijkt, dat men volgens de eerste bij $\left. \begin{array}{l} \xi \text{ niet} \\ \mu \text{ neg.} \end{array} \right\}$ geheel of $\left. \begin{array}{l} \mu \text{ niet} \\ \mu - \xi \text{ neg.} \end{array} \right\}$ geheel, en volgens de tweede bij $\left. \begin{array}{l} \xi \text{ niet} \\ \mu - 1 \text{ pos.} \end{array} \right\}$ geheel of $\left. \begin{array}{l} \mu \text{ niet} \\ \mu - \xi - 1 \text{ pos.} \end{array} \right\}$ geheel, waarden verkrijgt, die onafhankelijk zijn van μ , ξ en x .

De laatste uitdrukking komt overeen met een resultaat van LIOUVILLE (mits $\mu < 0$); de eerste, die daar als 't ware tegenover staat, was ook juist mijn uitgangspunt, waartoe ik gevoerd werd, toen mij bleek, dat uit de definitie van LIOUVILLE geene algemeene uitdrukking was af te leiden voor $D_x^\xi x^\mu$, wanneer $\mu > 0$. SOHNKE heeft echter met behulp dier definities geen formules afgeleid, die tot 't vinden van bepaalde integralen zouden kunnen dienen.

11. Een belangrijken stap deed GRÜN WALD door het invoeren van grenzen bij de differentialen van gebroken orde, waardoor eene algemeene theorie mogelijk gemaakt wordt. («Ueber begrenzte Derivationen und deren Anwendung». Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig, Bd. XII, 1867). De aard der functie onaangetast latende, onderzoekt hij de uitdrukking:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\xi} \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{\xi}{n} f(x-nh) \quad \dots \quad (14)$$

waarin x , h en ξ willekeurig zijn. Voor ξ geheel stelt (14) de gewone differentiaalquotienten voor. Bij ξ niet geheel laat GRÜN WALD de reeks in 't oneindige doorloopen ($m = \infty$), waardoor $(x-nh)$ eene bepaalde waarde u verkrijgt, die in 't algemeen eindig is. Hij toont nu aan, dat bij $\xi \leq -1$ de uitdrukking (14) eene bepaalde eindige functie is van ξ , x , u en f , indien $x-u$ eindig is en $f(x)$ in 't geheele rechte lijnige gebied van $x=u$ tot $x=x$ eindig en

continu verloopt. Na eenige eigenschappen van (14) te hebben bewezen, komt hij er toe onder de genoemde voorwaarden uitdrukking (14) te noemen: $D_x^\xi f(x)_{x=u}^{x=x}$.

Ten slotte vindt hij het volgende resultaat:

$$D_x^\xi f(x)_{x=u}^{x=x} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_u^x (x-t)^{-\xi-1} f(t) dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

waarbij als voorwaarden optreden: reëel gedeelte van $\xi \leq -1$, $x-u$ eindig en $f(t)$ eindig en continu tusschen u en x .

12. Verder in hunne beschouwingen gaan nog Most (Zeitschrift für Mathematik und Physik. XVI, 1874), SCHIMPF (Progr. des Gymn. zu Bochum, 1885) en von SCHÄWEN (Progr. des Gymn. zu Strasburg, Westpr., Ostern 1881 und 82). Zij kiezen zoodanige uitgangspunten, dat de integralen, die men voor $D_x^\xi f(x)_{x=u}^{x=x}$ in de plaats kan stellen eene grootere geldigheid verkrijgen, en dus ook doorgaan voor $\xi > -1$; men moet ze dan evenwel niet langs eene rechte lijn uitstrekken, maar langs eene kromme, die een punt x insluit.

't Is ons echter niet te doen om eene zoo algemeen mogelijke theorie over differentialen van gebroken orde, waarom we van eene bespreking dier verhandelingen kunnen afzien. Alleen willen wij nog wijzen op het resultaat van BOCHOW:

$$D_x^\xi f(x)_{x=u}^{x=x} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_u^x (x-t)^{-\xi-1} f(t) dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

waarbij nu als voorwaarden gelden: ξ (reëel) < 0 en $f(t)$ eindig en continu tusschen de grenzen u en x . Ten aanzien van de reële waarden van ξ is deze uitdrukking dus algemeener dan die van GRÜNWALD.

13. We gaan thans over tot het geven van onze eigen beschouwingen over differentialen van gebroken orde, waarbij van den aanvang af meer 't oog gericht was op haar gebruik bij de afleiding van bepaalde integralen. In den loop daarvan zullen wij gelegenheid vinden de bestaande verschilpunten met de formules van GRÜNWALD en BOCHOW uiteen te zetten.

HOOFDSTUK I.

1. Zooals we reeds opmerkten, nemen we als uitgangspunt aan de volgende definitie voor differentialen van gebroken orde:

$$D_x^\xi x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\xi+1)} x^{n-\xi},$$

waarin ξ geheel willekeurig is en aan de Γ -functies de beteekenis zij toegekend, die voortvloeit uit de volgende difinitie van GAUSS:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{z(1+z) \dots (n-1+z)} n^z.$$

Deze uitdrukking wordt slechts oneindig voor alle negatieve geheele waarden van het argument z , met inbegrip van nul.

2. Op de volgende wijze overtuigt men er zich gemakkelijk van, dat met de vooropgestelde definitie voor ξ positief en negatief geheel uitkomsten verkregen worden, die ook de gewone differentiaal- en integraalrekening opleveren.

Onderstellen we het geval: $n \geq 0$, dan zal bij $\xi = a =$ positief geheel:

$$D_x^a x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-a+1)} x^{n-a} = \frac{n(n-1) \dots (n-a+1) \Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n-a+1)} x^{n-a} = n(n-1) \dots (n-a+1) x^{n-a},$$

en bij $\xi = -a =$ negatief geheel:

$$D_x^{-a} x^n = \int x^a dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+a+1)} x^{n+a} = \frac{\Gamma(n+1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+a) \Gamma(n+1)} x^{n+a} = \frac{x^{n+a}}{(n+1)(n+2) \dots (n+a)}.$$

Ingeval $n < 0$ kunnen we nemen $n = -m$ ($m > 0$), en zal dan bij ξ positief of negatief geheel:

$$D_x^\xi x^{-m} = \frac{\Gamma(-m+1)}{\Gamma(-m-\xi+1)} x^{-m-\xi} = \frac{\pi \sin(-m-\xi+1)\pi}{\pi \sin(-m+1)\pi} \cdot \frac{\Gamma(m+\xi)}{\Gamma(m)} x^{-m-\xi},$$

onder toepassing der eigenschap: $\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, welke geldt voor alle waarden van z .

En daar voor ξ geheel: $\sin(-m-\xi+1)\pi = (-1)^\xi \sin(-m+1)\pi$,

zoo voor ξ geheel: $D_x^\xi x^{-m} = (-1)^\xi \frac{\Gamma(m+\xi)}{\Gamma(m)} x^{-m-\xi}.$

Wanneer dus $\xi = a =$ positief geheel, vinden we:

$$D_x^a x^{-m} = (-1)^a \frac{\Gamma(m+a)}{\Gamma(m)} x^{-m-a} = (-1)^a m(m+1) \dots (m-a+1) x^{-m-a},$$

en wanneer $\xi = -a =$ negatief geheel, komt er:

$$D_x^{-a} x^{-m} = \int_a^x x^{-m} dx = (-1)^{-a} \frac{\Gamma(m-a)}{\Gamma(m)} x^{-m+a} = \frac{(-1)^a x^{-m+a}}{(m-1)(m-2) \dots (m-a)}.$$

Indien m geheel is, krijgen we, zoo $a \geq m$, in dit laatste geval eene afwijking, want de integraalrekening leert ons, dat dan:

$$\int_a^x x^{-m} dx = \frac{(-1)^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} x^{-m+1} = \frac{(-1)^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \int_a^x \lg x \cdot dx^{a-m}.$$

3. We hadden reeds gelegenheid te constateeren, dat deze definitie niet algemeen geldt, omdat ze ons, zoo ξ niet geheel is, in den steek laat, wanneer n of $n - \xi$ negatief geheel is. Bovendien kunnen we volgens de aangenomen definitie alleen die functies naar x differentieeren, welke bestaan uit een som van een zeker aantal machten van x , of in een zoodanige som of convergente oneindig voortlopende reeks zijn te ontwikkelen. Zoodra hierbij negatieve geheele machten van x optreden, worden alle differentiaalën blijkens de definitie oneindig groot, zoodat we genoodzaakt zijn zulke functies al direct van behandeling uit te sluiten.

4. Zij $f(x) = \sum a_n x^n$ eene functie, die aan de gestelde voorwaarden voldoet, dan is dus:

$$D_x^\xi f(x) = \sum a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\xi+1)} x^{n-\xi} \dots \dots \dots (I)$$

Dit is echter niet de eenige waarde, die men daarvoor kan vinden. Wanneer $\xi = -a =$ negatief geheel, leert de integraalrekening ons reeds, dat men aan de waarde in (I) nog moet toevoegen de complementaire functie $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{a-1} c_m x^m$ om tot de algemeene waarde van

$D_x^{-a} f(x) = \int_a^x f(x) dx$ te komen; men voegt dus aan de bijzondere waarde volgens (I) toe eene functie $\varphi(x)$, die door a -malige differentiatie verdwijnt.

Wil men derhalve bij willekeurige ξ de algemeene waarde van $D_x^\xi f(x)$ vinden, dan zal men aan het tweede lid van (I) moeten toevoegen de meest algemeene uitdrukking van $\varphi(x)$, die voldoet aan den eisch: $D_x^{-\xi} \varphi(x) = 0$. Dit sluit onmiddellijk in zich, dat die complementaire functie moet bestaan uit eene reeks van machten van x ; we worden dus gevoerd tot de vraag, voor welke waarden van m voldaan wordt aan de betrekking:

$$D_x^{-\xi} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\xi+1)} x^{m+\xi} = 0;$$

de functie $\varphi(x)$ zal dan bestaan uit eene reeks van die machten m van x met willekeurige constante coëfficiënten.

Wanneer ξ geheel is, zullen de resultaten weer overeenstemmen met de gewone analyse. Zoo zal bij $\xi = a =$ positief geheel door geen enkele waarde van m voldaan kunnen worden aan de voorwaarde:

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+a+1)} x^{m+a} = \frac{x^{m+a}}{(m+1)(m+2)\dots(m+a)} = 0$$

voor alle waarden van x . Hierbij is dus, zooals gewenscht wordt, $\varphi(x) = 0$.

Is $\xi = -a =$ negatief geheel, dan moet voldaan worden aan:

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-a+1)} x^{m-a} = m(m-1)\dots(m-a+1) x^{m-a} = 0$$

voor alle waarden van x , wat plaats heeft, wanneer $m = 0, 1, 2, \dots, a-1$. De complementaire functie is bij a -malige integratie ook werkelijk: $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{a-1} c_m x^{a-m-1}$.

Bij ξ niet geheel zal nu: $\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\xi+1)} x^{m+\xi} = 0$ voor alle waarden van x , wanneer $\Gamma(m+\xi+1) = \infty$, dus wanneer $m = -\xi - a$, waarbij $a = 1, 2, \dots$ enz. In dit algemeene geval krijgen we derhalve voor de complementaire functie: $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{-\xi-m-1}$.

Als resultaat hebben we dus gevonden:

$$D_x^\xi f(x) = \sum a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\xi+1)} x^{n-\xi} + \begin{cases} 0 \\ \sum_{m=0}^{-\xi-1} c_m x^{-\xi-m-1} \\ \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{-\xi-m-1} \end{cases}, \text{ zoo } \xi \begin{cases} \text{pos. geheel} \\ \text{neg. geheel,} \\ \text{niet geheel} \end{cases}$$

hetgeen we als volgt kunnen samenvatten:

$$D_x^\xi f(x) = \sum a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\xi+1)} x^{n-\xi} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{\Gamma(-\xi-m-1)} x^{-\xi-m-1} \quad \text{. . . (II)}$$

5. Om tot de formule te komen, die een verband aangeeft tusschen bepaalde integralen en onze onbepaalde integralen van gebroken orde, gaan we uit van de bekende vergelijking van EULER:

$$\int_0^1 (1-z)^{-\xi-1} z^n dz = \int_0^1 z^{-\xi-1} (1-z)^n dz = \frac{\Gamma(-\xi) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\xi+1)},$$

welke geldt voor willekeurige ξ en n , wier reële gedeelten respectievelijk < 0 en > -1 zijn. Door vermenigvuldiging van de 3 leden dezer vergelijking met $a_n x^{n-\xi}$ krijgen we bij sommatie over n :

$$\int_0^1 x^{-\xi} (1-z)^{-\xi-1} \sum a_n (xz)^n dz = \int_0^1 x^{-\xi} z^{-\xi-1} \sum a_n \{x(1-z)\}^n dz = \Gamma(-\xi) \sum a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\xi+1)} x^{n-\xi},$$

en wanneer nu: $\sum a_n x^n = f(x)$, herleidt dit zich blijkens (I) tot:

$$\int_0^1 (1-z)^{-\xi-1} f(xz) dz = \int_0^1 z^{-\xi-1} f\{x(1-z)\} dz = \Gamma(-\xi) x^\xi D_x^\xi f(x) \quad \text{. . . (A)}$$

We hebben hierbij in 't oog te houden, dat $f(x) = \sum a_n x^n$, waarbij alle $n > -1$, voorts $\xi < 0$, en voor $D_x^\xi f(x)$ genomen moet worden de bijzondere waarde uit (I).

6. Substitueeren we in de eerste integraal van (A) als nieuwe veranderlijke: $t = xz$, dan krijgen we:

$$D_x^\xi f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_0^x (x-t)^{-\xi-1} f(t) dt \quad \text{. (III)}$$

welk resultaat we nu gemakkelijk kunnen vergelijken met de formule van GRÜNWARD en BOCHOW,

waarin we stellen: $u = 0$; deze wordt dan:

$$D_x^\xi f(x)_{x=0}^x = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_0^x (x-t)^{-\xi-1} f(t) dt,$$

waarbij volgens de afleiding van GRÜNWARD als voorwaarde geldt: reëel gedeelte van $\xi \leq -1$, en volgens die van BOCHOW: ξ reëel < 0 , terwijl bij beiden geeischt wordt, dat $f(t)$ eindig en continu is tusschen de grenzen 0 en x , zoodat zij mogen substitueeren: $f(x) = \sum a_n x^n$, mits alle $n \geq 0$. Onder deze voorwaarden is dan ook onze $D_x^\xi f(x) \equiv D_x^\xi f(x)_{x=0}^x$, hetgeen gemakkelijk is in te zien; maar 't is juist te danken aan 't invoeren van onbegrensde (onbepaalde) differentiaal van gebroken orde, dat onze formule (III) iets uitgebreider is dan die van GRÜNWARD en BOCHOW; wij mogen daarin namelijk substitueeren: $f(x) = \sum a_n x^n$, waarbij alle $n > -1$, terwijl 't reële gedeelte van ξ kleiner moet zijn dan nul. Die uitbreiding is niet van belang ontbloot bij de toepassingen, die wij er van zullen maken, namelijk het opsporen van bepaalde integralen.

GRÜNWARD en BOCHOW hebben niet opgemerkt, dat hunne formule gebruikt kan worden voor 't afleiden van bepaalde integralen. Bij de enkele toepassingen, die zij ervan geven, bepalen zij zich tot het vinden van differentiaal van gebroken orde van zoodanige functies, die, gesubstitueerd in de bepaalde integraal, toelaten deze op eenvoudige wijze uit te drukken. Dat 't mogelijk is van geheele reeksen van functies voor $D_x^\xi f(x)$ waarden te vinden, onafhankelijk van die bepaalde integraal, hebben zij niet ingezien; zij hadden zich daartoe slechts te bepalen tot $f(x) = \sum a_n x^n$, (mits $n \geq 0$), na gevonden te hebben met behulp hunner formule eene uitdrukking voor $D_x^\xi x^n$ ($\xi < 0$).

We zien evenwel, dat de toepassingen, die van onze formule gemaakt kunnen worden, veel talrijker zijn, daar wij mogen substitueeren: $f(x) = \sum a_n x^n$, waarbij $n > -1$, m. a. w. zoodanige functies, waarvoor geldt $\lim_{x=0} \{x f(x)\} = 0$. Onder de toepassingen, die wij zullen geven, geldt bij vele functies bovendien: $\lim_{x=0} f(x) = \infty$, van welke GRÜNWARD en BOCHOW zich niet mogen bedienen.

7. Eene algemeener uitdrukking dan (A) krijgen we door daarin te substitueeren: $z = y^r$; en vervangen we ξ door $-p$, dan komt er, zoo $r > 0$:

$$\int_0^1 y^{r-1} (1-y)^{p-1} f(xy^r) dy = \int_0^1 y^{pr-1} f\{x(1-y^r)\} dy = \frac{\Gamma(p)}{r x^p} \int f(x) dx^p. \quad (B)$$

Ten overvloede moge hierbij nog gewezen worden op de voorwaarden:

$p > 0$ en $\lim_{x=0} \{x f(x)\} = 0$, terwijl $\int_0^p f(x) dx^p = D_x^{-p} f(x)$ bepaald moet worden volgens (I).

Eene eenvoudige toepassing vindt men al dadelijk in de substitutie: $f(x) = x^{q-1}$ ($q > 0$),

waardoor men krijgt, daar: $\int_0^1 x^{q-1} dx^p = \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} x^{p+q-1}$:

$$\int_0^1 (1-y)^{p-1} y^{qr-1} dy = \int_0^1 (1-y)^{q-1} y^{pr-1} dy = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{r \Gamma(p+q)} = \frac{1}{r} B(p, q),$$

dus voor $r = 1$ de bekende integraal van EULER.

8. Op deze wijze kan men vele bepaalde integralen afleiden; men behoeft slechts uit te gaan van functies, die ontwikkeld kunnen worden naar het theorema van MACLAURIN, en te substitueeren:

$${}^p\int f(x) dx^p = {}^p\int \sum a_n x^n dx^p = \sum a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)} x^{n+p} \dots \dots (IV)$$

waarbij $p > 0$ en $n > -1$.

In het algemeen zal bij willekeurige p het tweede lid van (IV) niet te sommeeren zijn, en verkrijgt men dus eene eindige uitdrukking daarvoor, wanneer die oneindig voortlopende reeks convergeert, wat meestal alleen het geval is voor $x < 1$.

Waar het noodig is, zullen wij ons echter bepalen tot die bijzondere waarden van p , die toelaten het tweede lid van (IV) wel te sommeeren; we hebben dan tevens het voordeel gekregen, dat de voorwaarde $x < 1$, waaronder (IV) zou gelden, vervalt, hetgeen door de volgende overwegingen duidelijk is te maken.

Veronderstellen we, dat eene bepaalde functie $f(x)$ ontwikkeld kan worden naar MACLAURIN, zoodat: $f(x) = \sum a_n x^n$ ($n > -1$), onder de voorwaarde voor convergentie: $x < 1$, dan zal de reeks in 't tweede lid van:

$${}^p\int f(x) dx^p = \sum a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)} x^{n+p}$$

ook convergeeren voor $x < 1$, zoo $p > 0$. We nemen nu aan, dat die reeks te sommeeren is en te schrijven in den eindigen vorm $F(x)$, dan geldt reeds voor alle waarden van $x < 1$:

$${}^p\int f(x) dx^p = F(x).$$

Maar nu in deze betrekking in 't geheel geen oneindige reeksen meer optreden, en we dus in die reeksontwikkelingen slechts het hulpmiddel hebben te zien, waarmede we van $f(x)$ komen op $F(x)$, zal:

${}^p\int f(x) dx^p = F(x)$, als identiteit voor de oneindig vele waarden van $x < 1$, nu ook gelden voor alle waarden van x . Want is p positief geheel, dan wordt met behulp van de integraalrekening, zonder gebruik te maken van reeksontwikkelingen, hetzelfde resultaat verkregen als met onze definitie, zooals we in den aanvang van dit hoofdstuk hebben laten zien; en hoewel de gebruikte reeksen slechts mogen convergeeren voor $x < 1$, zal in dat geval die betrekking toch gelden voor alle waarden van x , — maar dan ook bij geheel willekeurige waarden van $p > 0$, omdat die krachtens onze definitie op ééne lijn staan met de positieve geheele.

Nemen we als voorbeeld:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_0^\infty \frac{(p+1)^{n/1}}{1^{n/1}} x^n = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+1)} x^n,$$

dan krijgen we onder toepassing van (IV):

$${}^p\int f(x) dx^p = {}^p\int \frac{dx^p}{(1-x)^{p+1}} = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{1}{1-x} = F(x),$$

welk resultaat nu, zoo p positief geheel is, ook verkregen wordt met behulp van de gewone analyse, zonder gebruik te maken van die reeksontwikkelingen, en dan geldt voor alle waarden van x ; om genoemde reden zal dit dan ook 't geval zijn bij willekeurige $p > 0$.

9. Gaan we thans over tot het vinden van differentiaal van gebroken orde van verschillende functies van x , dan bepalen we ons slechts, met 't oog op formule (B), waarmede we in het

volgende hoofdstuk vele bepaalde integralen zullen afleiden, tot die functies, welke daarin te substitueeren zijn, dus waarvoor geldt: $\lim_{x=0} \{x f(x)\} = 0$, terwijl we in $D_x^\xi f(x)$ slechts nemen $\xi = -p$ en $p > 0$, en wel die bijzondere waarden van p , waarvoor het tweede lid van (IV) is te sommeeren.

10. Zij: $f(x) = x^{q-2} \lg(1 \mp x) = -\sum_1^\infty (\pm 1)^n \frac{x^{n+q-2}}{n} (q > 0),$

dan krijgt men volgens (IV):

$$^p \int x^{q-2} \lg(1 \mp x) dx^p = -\sum_1^\infty (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+q-1)}{\Gamma(n+p+q-1)} \cdot \frac{x^{n+p+q-2}}{n},$$

en wanneer nu:

1^o. $p = a + 1$, $q = b + 2$, vindt men, in de onderstelling, dat $\frac{a}{b} = 0, 1, 2 \dots$ enz.

$$\begin{aligned} &^{a+1} \int x^b \lg(1 \mp x) dx^{a+1} = \\ &= -\sum_1^\infty (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+b+1)}{\Gamma(n+a+b+2)} \frac{x^{n+a+b+1}}{n} = -\sum_1^\infty (\pm 1)^n \frac{x^{n+a+b+1}}{n(n+b+1)(n+b+2)\dots(n+a+b+1)} = \\ &= -\sum_1^\infty (\pm 1)^n \left\{ \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \cdot \frac{x^{n+a+b+1}}{n} + \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1}}{m!(a-m)!(b+m+1)} \cdot \frac{x^{n+a+b+1}}{n+b+m+1} \right\} = \\ &= -\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} x^{a+b+1} \sum_1^\infty (\pm 1)^n \frac{x^n}{n} + \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m x^{a-m}}{m!(a-m)!(b+m+1)} \sum_{n=b+m+2}^\infty (\pm 1)^{n-m-b-1} \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

Hiervoor is het volgende te schrijven:

$$\begin{aligned} &^{a+1} \int x^b \lg(1-x) dx^{a+1} = \\ &= \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} x^{a+b+1} \lg(1-x) + \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1} x^{a-m}}{m!(a-m)!(b+m+1)} \left\{ \lg(1-x) + \sum_1^{b+m+1} \frac{x^n}{n} \right\}. \text{ (V)} \\ &^{a+1} \int x^b \lg(1+x) dx^{a+1} = \\ &= \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} x^{a+b+1} \lg(1+x) + (-1)^b \sum_{m=0}^a \frac{x^{a-m}}{m!(a-m)!(b+m+1)} \left\{ \lg(1+x) + \sum_1^{b+m+1} (-1)^n \frac{x^n}{n} \right\}. \text{ (VI)} \end{aligned}$$

2^o. $p = a + 1$, $q = b + \frac{1}{2}$. Dit geeft de volgende herleiding:

$$\begin{aligned} &^{a+1} \int x^{b-\frac{1}{2}} \lg(1 \mp x) dx^{a+1} = \\ &= -\sum_1^\infty (\pm 1)^n \frac{\Gamma\left(n+b-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+a+b+\frac{1}{2}\right)} \frac{x^{n+a+b-\frac{1}{2}}}{n} = -\sum_1^\infty (\pm 1)^n \frac{x^{n+a+b-\frac{1}{2}}}{n\left(n+b-\frac{1}{2}\right)\left(n+b+\frac{1}{2}\right)\dots\left(n+a+b-\frac{1}{2}\right)} = \\ &= -\sum_1^\infty (\pm 1)^n \left\{ \frac{\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)} \frac{x^{n+a+b-\frac{1}{2}}}{n} + \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1}}{m!(a-m)!\left(b+m-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n+a+b-\frac{1}{2}}}{n+b+m-\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= -\frac{\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)} x^{a+b-\frac{1}{2}} \sum_1^\infty (\pm 1)^n \frac{x^n}{n} + 4 \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m x^{a-m}}{m!(a-m)!(2b+2m-1)} \sum_{n=b+m}^\infty (\pm 1)^{n-b-m+1} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1}, \end{aligned}$$

zoodat wij hierdoor krijgen :

$$\begin{aligned} x^{a+1} \int x^{b-\frac{3}{2}} \lg(1-x) dx^{a+1} &= \frac{\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)} x^{a+b-\frac{1}{2}} \lg(1-x) + \\ &+ 2 \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m x^{a-m}}{m!(a-m)!(2b+2m-1)} \left\{ \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 2^{\frac{b+m-1}{2}} \frac{x^{\frac{n+1}{2}}}{2n+1} \right\} \quad \text{(VII)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{a+1} \int x^{b-\frac{3}{2}} \lg(1+x) dx^{a+1} &= \frac{\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)} x^{a+b-\frac{1}{2}} \lg(1+x) + \\ &+ (-1)^{b+1} 4 \sum_{m=0}^a \frac{x^{a-m}}{m!(a-m)!(2b+2m-1)} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sum_{n=0}^{b+m-1} (-1)^n \frac{x^{\frac{n+1}{2}}}{2n+1} \right\} \quad \text{(VIII)} \end{aligned}$$

3°. $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, geeft:

$$\frac{1}{2} \int x^{-\frac{3}{2}} \lg(1 \mp x) dx^{\frac{1}{2}} = - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) x^{n-1}}{\Gamma(n) n} = \frac{2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{4^{n/1}} x^n,$$

dus:

$$\frac{1}{2} \int x^{-\frac{3}{2}} \lg(1 \mp x) dx^{\frac{1}{2}} = \frac{2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{x} \left\{ \sqrt{1 \mp x} - 1 \right\} \quad \text{(IX)}$$

4°. $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{3}{2}$, dan:

$$\frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} \lg(1 \mp x) dx^{\frac{1}{2}} = - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{x^n}{n} = - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\frac{1}{2}^{n/1}}{4^{n/1}} \frac{x^n}{n},$$

dus:

$$\frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} \lg(1 \mp x) dx^{\frac{1}{2}} = 2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \lg \frac{1+\sqrt{1 \mp x}}{2} \quad \text{(X)}$$

5°. $p = \frac{1}{2}$, $q = 1$, dan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int x^{-1} \lg(1-x) dx^{\frac{1}{2}} &= \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{n} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n+1} = - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n/1}}{3^{n/1}} \cdot \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n+1}, \end{aligned}$$

of:

$$\frac{1}{2} \int x^{-1} \lg(1-x) dx^{\frac{1}{2}} = - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{x}} (\arcsin \sqrt{x})^2 \quad \text{(XI)}$$

11. Zij:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} x^{q-\frac{3}{2}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+q-1}}{2n+1} \\ f_2(x) &= x^{q-\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+q-1}}{2n+1}, \end{aligned}$$

dan kunnen we deze samenvatten onder:

$$f(x) = \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^{n+q-1}}{2^{n+1}} \quad (q > 0),$$

waardoor we krijgen onder toepassing van (IV):

$$\int_0^p f(x) dx = \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(n+p+q)} \cdot \frac{x^{n+p+q-1}}{2^{n+1}}.$$

We bepalen ons nu tot de bijzondere gevallen:

1°. $p = a + 1$, $q = b + \frac{1}{2}$, dan komt er:

$$\begin{aligned} & \int_0^{a+1} f(x) dx = \\ &= \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma\left(n+b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+a+b+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n+a+b+\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} = \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^{n+a+b+\frac{1}{2}}}{(2n+1)\left(n+b+\frac{1}{2}\right)\left(n+b+\frac{3}{2}\right)\dots\left(n+a+b+\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \left\{ \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} \cdot \frac{x^{n+a+b+\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} + \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1}}{m!(a-m)!(2b+2m)} \cdot \frac{x^{n+a+b+\frac{1}{2}}}{n+b+m+\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} x^{a+b} \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} + \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1} x^{a-m}}{m!(a-m)!(b+m)} \sum_{b+m}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

dus:

$$\begin{aligned} & \int_0^{a+1} x^{b-1} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot dx = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} x^{a+b} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \\ & + \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1} x^{a-m}}{m!(a-m)!(b+m)} \left\{ \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 2^{\frac{b+m-1}{2}} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} \right\} \dots \quad (\text{XII}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{a+1} x^{b-1} \operatorname{arctg} \sqrt{x} \cdot dx = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} x^{a+b} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \\ & + (-1)^{b+1} \sum_{m=0}^a \frac{x^{a-m}}{m!(a-m)!(b+m)} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sum_0^{b+m-1} (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} \right\}. \quad (\text{XIII}) \end{aligned}$$

2°. $p = a + 1$, $q = b + 1$, geeft:

$$\begin{aligned} & \int_0^{a+1} f(x) dx = \\ &= \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+b+1)}{\Gamma(n+a+b+2)} \cdot \frac{x^{n+a+b+1}}{2^{n+1}} = \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^{n+a+b+1}}{(2n+1)(n+b+1)(n+b+2)\dots(n+a+b+1)} = \\ &= \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \left\{ \frac{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n+a+b+1}}{2^{n+1}} + \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1}}{m!(a-m)!(2b+2m+1)} \frac{x^{n+a+b+1}}{n+b+m+1} \right\} = \\ &= \frac{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)} x^{a+b+\frac{1}{2}} \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} + \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1} x^{a-m}}{m!(a-m)!(2b+2m+1)} \sum_{b+m+1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{n}, \end{aligned}$$

dus:

$$\begin{aligned} & \int x^{b-\frac{1}{2}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot dx^{a+1} = \\ & = \frac{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)} x^{a+b+\frac{1}{2}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + 2 \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m x^{a-m}}{m!(a-m)!(2b+2m+1)} \left\{ \lg(1-x) + \sum_1^{b+m} \frac{x^n}{n} \right\}. \quad (\text{XIV}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int x^{b-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} \cdot dx^{a+1} = \\ & = \frac{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)} x^{a+b+\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + (-1)^{b+1} \sum_{m=0}^a \frac{x^{a-m}}{m!(a-m)!(2b+2m+1)} \left\{ \lg(1+x) + \sum_1^{b+m} (-1)^n \frac{x^n}{n} \right\}. \quad (\text{XV}) \end{aligned}$$

3°. $p = a + \frac{1}{2}$, $q = \frac{3}{2}$, dan:

$$\begin{aligned} & \int x^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx^{a+\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+a+\frac{3}{2}\right)} \frac{x^{n+a+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{a+1}^\infty (\pm 1)^{n-a-1} \frac{\Gamma\left(n-a-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} x^n = \\ & = (\pm 1)^{a+1} \frac{\Gamma\left(-a-\frac{1}{2}\right)}{2} \left\{ \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} x^n - \sum_0^a (\pm 1)^n \frac{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} x^n \right\}, \end{aligned}$$

of:

$$\int x^{a+\frac{1}{2}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot dx^{a+\frac{1}{2}} = (-1)^{a+1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{3}{2}\right)} \left\{ (1-x)^{a+\frac{1}{2}} - \sum_0^a \frac{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} x^n \right\}. \quad (\text{XVI})$$

$$\int x^{a+\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} \cdot dx^{a+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(a+\frac{3}{2}\right)} \left\{ (1+x)^{a+\frac{1}{2}} - \sum_0^a (-1)^n \frac{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} x^n \right\}. \quad (\text{XVII})$$

4°. $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Men krijgt dan:

$$\int x^{\frac{1}{2}} f(x) dx^{\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x}} \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{\frac{1}{2}^{n/1}}{1^{n/1}} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1},$$

dus:

$$\int x^{-\frac{1}{2}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot dx^{\frac{1}{2}} = \frac{2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x}} \operatorname{arcsin} \sqrt{x} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\text{XVIII})$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} \cdot dx^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x}} \lg(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\text{XIX})$$

12. Zij $f(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \lg(1+\sqrt{x})$, dan krijgen we, daar:

$$2 \lg(1+\sqrt{x}) = \lg(1-x) + \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};$$

$$\int x^{q-\frac{3}{2}} \lg(1+\sqrt{x}) dx^p = \frac{1}{2} \int x^{q-\frac{3}{2}} \lg(1-x) dx^p + \frac{1}{2} \int x^{q-\frac{3}{2}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx^p.$$

Indien nu:

1°. $p = a + 1$, $q = b + 1$, komt er volgens (VII) en (XIV), zoo men in (VII) b door $b + 1$ vervangt:

$$\begin{aligned} \int x^{b-\frac{1}{2}} \lg(1 + \sqrt{x}) \cdot dx^{a+1} &= \frac{\Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a + b + \frac{3}{2}\right)} x^{a+b+\frac{1}{2}} \lg(1 + \sqrt{x}) + \\ &+ 2 \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m x^{a-m}}{m!(a-m)!(2b+2m+1)} \left\{ \lg(1 + \sqrt{x}) + \sum_{n=1}^{b+m} \frac{x^n}{2n} - \sum_{n=0}^{b+m} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}. \quad (\text{XX}) \end{aligned}$$

2°. $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, geeft volgens (XI) en (XVIII):

$$\int x^{-1} \lg(1 + \sqrt{x}) \cdot dx^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x}} \arcsin \sqrt{x} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{x}} (\arcsin \sqrt{x})^2. \quad (\text{XXI})$$

13. Zij $f(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \lg(1 - \sqrt{x})$, dan krijgen we, daar:

$$\begin{aligned} \lg(1 - \sqrt{x}) &= \lg(1 - x) - \lg(1 + \sqrt{x}): \\ \int x^{q-\frac{3}{2}} \lg(1 - \sqrt{x}) dx^p &= \int x^{q-\frac{3}{2}} \lg(1 - x) dx^p - \int x^{q-\frac{3}{2}} \lg(1 + \sqrt{x}) dx^p. \end{aligned}$$

Is nu weer:

1°. $p = a + 1$, $q = b + 1$, dan komt er volgens (VII) en (XX), zoo men in (VII) b door $b + 1$ vervangt:

$$\begin{aligned} \int x^{b-\frac{1}{2}} \lg(1 - \sqrt{x}) \cdot dx^{a+1} &= \frac{\Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a + b + \frac{3}{2}\right)} x^{a+b+\frac{1}{2}} \lg(1 - \sqrt{x}) + \\ &+ 2 \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1} x^{a-m}}{m!(a-m)!(2b+2m+1)} \left\{ \lg(1 - \sqrt{x}) + \sum_{n=1}^{b+m} \frac{x^n}{2n} + \sum_{n=0}^{b+m} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}. \quad (\text{XXII}) \end{aligned}$$

2°. $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, geeft volgens (XI) en (XXI):

$$\int x^{-1} \lg(1 - \sqrt{x}) \cdot dx^{\frac{1}{2}} = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x}} \arcsin \sqrt{x} - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{x}} (\arcsin \sqrt{x})^2. \quad (\text{XXIII})$$

14. Zij: $f(x) = 2x^b \lg(1 + \sqrt{1 \mp x}) = 2x^b \lg \frac{1 + \sqrt{1 \mp x}}{2} + 2x^b \lg 2 = 2x^b \lg 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{2}{1^{n/1}} \frac{x^{n+b}}{n}$,
dan:

$$\begin{aligned} \int x^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx^{a+\frac{1}{2}} &= 2 \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)} x^{a+b+\frac{1}{2}} \lg 2 - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+b+1)}{\Gamma\left(n+a+b+\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n+a+b+\frac{1}{2}}}{n} = \\ &= 2 \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)} x^{a+b+\frac{1}{2}} \lg 2 - \frac{x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d^b}{dx^b} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^{n+b}}{n(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2}) \dots (n+a+b+\frac{1}{2})} = \\ &= \frac{2\Gamma(b+1)}{\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)} x^{a+b+\frac{1}{2}} \lg 2 - \frac{x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{3}{2}\right)} x^b \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^n}{n} + \sum_{m=0}^{a+b} \frac{(-1)^{m+1} x^{b-m-\frac{1}{2}}}{m!(a+b-m)!\left(m+\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-m} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

We vinden dus: $\int x^b \lg(1 + \sqrt{1-x}) dx^{a+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+\frac{3}{2})} x^{a+b+\frac{1}{2}} \lg 2 +$

$$+ \frac{x^{a+b+\frac{1}{2}}}{2 \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+b+\frac{3}{2})} x^b \lg(1-x) + 2 \sum_{m=0}^{a+b} \frac{(-1)^m x^{b-m-\frac{1}{2}}}{m! (a+b-m)! (2m+1)} \left[\lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 2 \sum_{n=0}^m \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right] \right\} \quad (\text{XXIV})$$

$$\int x^b \lg(1 + \sqrt{1+x}) dx^{a+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+\frac{3}{2})} x^{a+b+\frac{1}{2}} \lg 2 +$$

$$+ \frac{x^{a+b+\frac{1}{2}}}{2 \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+b+\frac{3}{2})} x^b \lg(1+x) + 4 \sum_{m=0}^{a+b} \frac{x^{b-m-\frac{1}{2}}}{m! (a+b-m)! (2m+1)} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right] \right\}. \quad (\text{XXV})$$

15. Zij: $f(x) = \frac{(\operatorname{arcsin} \sqrt{x})^3}{x \sqrt{x}} = \sum_0^\infty \frac{1^{n/1}}{3^{n/1}} \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{n+1},$

dan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{(\operatorname{arcsin} \sqrt{x})^3}{x \sqrt{x}} dx^{\frac{1}{2}} &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{x^n}{n+1} = \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_0^\infty \frac{x^n}{(2n+1)(n+1)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_0^\infty \left\{ \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \right\} x^n = 2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_0^\infty \frac{x^n}{2n+1} - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{n}, \end{aligned}$$

of:

$$\frac{1}{2} \int \frac{(\operatorname{arcsin} \sqrt{x})^3}{x \sqrt{x}} dx^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{x}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{x} \lg(1-x). \quad (\text{XXVI})$$

16. Zij: $f_1(x) = x^{b-1} \frac{\operatorname{arcsin} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \sum_0^\infty \frac{1^{n/1}}{3^{n/1}} x^{n+b-\frac{1}{2}}$

$$f_2(x) = x^{b-1} \frac{\lg(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1^{n/1}}{3^{n/1}} x^{n+b-\frac{1}{2}},$$

dan kunnen we deze samenvatten, en krijgen we:

$$\begin{aligned} \int x^{a+\frac{1}{2}} f(x) dx^{a+\frac{1}{2}} &= \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \frac{\Gamma(n+b+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+a+b+1)} x^{n+a+b} = \\ &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) x^{a+b+\frac{1}{2}} \frac{d^b}{dx^b} \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{x^{n+b-\frac{1}{2}}}{(n+\frac{1}{2})(n+1)(n+2)\dots(n+a+b)} = \\ &= 2 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) x^{a+b+\frac{1}{2}} \frac{d^b}{dx^b} \sum_0^\infty (\pm 1)^n \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})} \frac{x^{n+b-\frac{1}{2}}}{2n+1} + \sum_{m=0}^{a+b-1} \frac{(-1)^{m+1}}{m! (a+b-1-m)! (2m+1)} \frac{x^{n+b-\frac{1}{2}}}{n+m+1} \right\} = \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^{a+b+\frac{1}{2}} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})} x^{b-1} \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} + \sum_{m=0}^{a+b-1} \frac{(-1)^{m+1} x^{b-m-\frac{3}{2}}}{m! (a+b-1-m)! (2m+1)} \sum_{n=m+1}^\infty (\pm 1)^{n-m-1} \frac{x^n}{n} \right\}, \end{aligned}$$

dus:

$$a + \frac{1}{2} \int x^{b-1} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx^{a+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^{a+b+\frac{1}{2}} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)} x^{b-1} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=0}^{a+b-1} \frac{(-1)^m x^{b-m-\frac{3}{2}}}{m! (a+b-1-m)! (2m+1)} \left[\lg(1-x) + \sum_1^m \frac{x^n}{n} \right] \right\}. \quad (\text{XXVII})$$

$$a + \frac{1}{2} \int x^{b-1} \frac{\lg(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}} dx^{a+\frac{1}{2}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^{a+b+\frac{1}{2}} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)} x^{b-1} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{a+b-1} \frac{x^{b-m-\frac{3}{2}}}{m! (a+b-1-m)! (2m+1)} \left[\lg(1+x) + \sum_1^m (-1)^n \frac{x^n}{n} \right] \right\}. \quad (\text{XXVIII})$$

17. Zij: $f(x) = \frac{x^{q-1}}{(1 \mp x)^r} = \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{r^{n/1}}{1^{n/1}} x^{n+q-1} (q > 0),$

dan:

$$\int^p f(x) dx^p = \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r) \Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(n+p+q)} x^{n+p+q-1}.$$

We onderscheiden hierbij de volgende gevallen:

$r = p - q$ is positief geheel (of nul), negatief geheel en niet geheel.

In het eerste geval kan p elk willekeurig getal voorstellen, terwijl we in de andere gevallen tot bijzondere waarden van p , q en r moeten overgaan, wil men het tweede lid van bovenstaande betrekking kunnen sommeeren. Zij:

1°. $r = p + q + a$, dan krijgt men:

$$\int^p \frac{x^{q-1}}{(1 \mp x)^{p+q+a}} dx^p = \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+a)} \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+q)}{\Gamma(q) \Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n+p+q+a)}{\Gamma(n+p+q)} x^{n+p+q-1} = \\ = \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+a)} \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{q^{n/1}}{1^{n/1}} \frac{d^a}{dx^a} x^{n+p+q+a-1} = \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+a)} \frac{d^a}{dx^a} \frac{x^{p+q+a-1}}{(1 \mp x)^q}. \quad (\text{XXIX})$$

2°. $p = a + 1$, $q = b + 1$, $r = c + 1$, terwijl $c \leq a + b$:

$$\int^{a+1} \frac{x^b}{(1 \mp x)^{c+1}} dx^{a+1} = \sum_0^\infty (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+c+1)}{\Gamma(c+1) \Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n+b+1)}{\Gamma(n+a+b+2)} x^{n+a+b+1} = \\ = \frac{x^{a+b+1}}{\Gamma(c+1) dx^b} \sum_{c+1}^\infty (\pm 1)^{n-c-1} \frac{x^{n+b-c-1}}{n(n+1) \dots (n+a+b-c)} = \\ = (\pm 1)^{c+1} \frac{x^{a+b+1}}{\Gamma(c+1) dx^b} \sum_{m=0}^{a+b-c} \frac{(-1)^m x^{b-c-m-1}}{m! (a+b-c-m)!} \sum_{c+m+1}^\infty (\pm 1)^{n-m} \frac{x^n}{n},$$

dus:

$$\int^{a+1} \frac{x^b}{(1 \mp x)^{c+1}} dx^{a+1} = (\pm 1)^c \frac{x^{a+b+1}}{\Gamma(c+1) dx^b} \sum_{m=0}^{a+b-c} \frac{(\mp 1)^{m+1} x^{b-c-m-1}}{m! (a+b-c-m)!} \left\{ \lg(1 \mp x) + \sum_1^{c+m} (\pm 1)^n \frac{x^n}{n} \right\}. \quad (\text{XXX})$$

3°. $p = \frac{1}{2}$, $q = b + \frac{1}{2}$, $r = c + 1$, terwijl $c \leq b - 1$, dan:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int \frac{x^b}{(1 \mp x)^{c+1} \sqrt{x}} dx &= \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+c+1)}{\Gamma(c+1) \Gamma(n+1)} \frac{\Gamma\left(n+b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+b+1)} x^{n+b} = \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(c+1)} x^b \frac{d^c}{dx^c} \sum_b^{\infty} (\pm 1)^{n-b} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)} x^{n-b+c} = \\
&= (\pm 1)^b \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(c+1)} x^b \frac{d^c}{dx^c} x^{c-b} \left\{ \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{4^{n/1}} x^n - \sum_0^{b-1} (\pm 1)^n \frac{1}{4^{n/1}} x^n \right\} = \\
&= (\pm 1)^b \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(c+1)} x^b \frac{d^c}{dx^c} \frac{1}{x^{b-c}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 \mp x}} - \sum_0^{b-1} (\pm 1)^n \frac{1}{2^{n/2}} x^n \right\} \dots \dots \dots \text{(XXXI)}
\end{aligned}$$

4°. $p = a + \frac{1}{2}$, $q = b + 1$, $r = c + \frac{1}{2}$, terwijl $c \leq a + b$, dan:

$$\begin{aligned}
x^{a+\frac{1}{2}} \int f(x) dx^{a+\frac{1}{2}} &= \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma\left(n+c+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n+b+1)}{\Gamma\left(n+a+b+\frac{3}{2}\right)} x^{n+a+b+\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)} \frac{d^b}{dx^b} \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma\left(n+c+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+a+b+\frac{3}{2}\right)} x^{n+b} = \\
&= (\pm 1)^c \frac{2 x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)} \frac{d^b}{dx^b} \sum_{m=0}^{a+b-c} \frac{(-1)^m x^{b-c-m-\frac{1}{2}}}{m! (a+b-c-m)!} \sum_{c+m}^{\infty} (\pm 1)^{n-m} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1}
\end{aligned}$$

dus:

$$x^{a+\frac{1}{2}} \int \frac{x^b}{\sqrt{(1-x)^{2c+1}}} dx^{a+\frac{1}{2}} = \frac{x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)} \frac{d^b}{dx^b} \sum_{m=0}^{a+b-c} \frac{(-1)^m x^{b-c-m-\frac{1}{2}}}{m! (a+b-c-m)!} \left\{ \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 2 \sum_0^{c+m-1} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\} \text{(XXXII)}$$

$$x^{a+\frac{1}{2}} \int \frac{x^b}{\sqrt{(1+x)^{2c+1}}} dx^{a+\frac{1}{2}} = (-1)^c \frac{2 x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)} \frac{d^b}{dx^b} \sum_{m=0}^{a+b-c} \frac{x^{b-c-m-\frac{1}{2}}}{m! (a+b-c-m)!} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sum_0^{c+m-1} (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\} \text{(XXXIII)}$$

Wanneer $r - p - q$ niet geheel is, kunnen we nog de volgende gevallen onderscheiden:

5°. $p = a + 1$, $q = b + \frac{1}{2}$, $r = c + 1$, dan:

$$\begin{aligned}
x^{a+1} \int f(x) dx^{a+1} &= \sum_0^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+c+1)}{\Gamma(c+1) \Gamma(n+1)} \frac{\Gamma\left(n+b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+a+b+\frac{3}{2}\right)} x^{a+b+\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} \sum_b^{\infty} (\pm 1)^n \frac{x^{n-b+c}}{\left(n+\frac{1}{2}\right) \left(n+\frac{3}{2}\right) \dots \left(n+a+\frac{1}{2}\right)} = \\
&= (\pm 1)^b \frac{2 x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m x^{c-b-m-\frac{1}{2}}}{m! (a-m)!} \sum_{b+m}^{\infty} (\pm 1)^{n-m} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1},
\end{aligned}$$

dus:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^b dx^{a+1}}{(1-x)^{c+1} \sqrt{x}} = \frac{x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m x^{c-b-m-\frac{1}{2}}}{m! (a-m)!} \left\{ \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 2 \sum_{n=0}^{b+m-1} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}. \quad (\text{XXXIV})$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^b dx^{a+1}}{(1+x)^{c+1} \sqrt{x}} = (-1)^b \frac{x^{a+b+\frac{1}{2}}}{\Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} \sum_{m=0}^a \frac{x^{c-b-m-\frac{1}{2}}}{m! (a-m)!} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sum_{n=0}^{b+m-1} (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}. \quad (\text{XXXV})$$

6°. $p = \frac{1}{2}$, $q = b+1$, $r = c+1$, dan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int f(x) dx^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma(n+c+1)}{\Gamma(c+1) \Gamma(n+1)} \frac{\Gamma(n+b+1)}{\Gamma(n+b+\frac{3}{2})} x^{n+b+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{x^{b+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} x^{n-b+c} = (\pm 1)^b \frac{x^{b+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} x^{c-b-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{2^{n/2}}{3^{n/2}} x^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

dus:

$$\frac{1}{2} \int \frac{x^b}{(1-x)^{c+1}} dx^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{b+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} x^{c-b-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \sum_{n=0}^{b-1} \frac{2^{n/2}}{3^{n/2}} x^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \quad (\text{XXXVI})$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{x^b}{(1+x)^{c+1}} dx^{\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^b x^{b+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} x^{c-b-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\lg(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}} - \sum_{n=0}^{b-1} (-1)^n \frac{2^{n/2}}{3^{n/2}} x^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \quad (\text{XXXVII})$$

18. Indien we beschouwen de Besselsche functie:

$$I_{\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2n}}{n! \Gamma(n+\lambda+1)},$$

waarin λ willekeurig is, en nemen:

$$f(x) = x^{\frac{\nu}{2}} I_{\nu}(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+\frac{\nu}{2}}}{2^{2n+\nu} \Gamma(n+1) \Gamma(n+\nu+1)},$$

volgt als voorwaarde, waaraan wij de functie willen laten voldoen: 't reële gedeelte van $\nu > -1$, of: ν negatief geheel. Zij:

1°. $R(\nu) > -1$, dan:

$$\int_{-1}^{+1} x^{\frac{\nu}{2}} I_{\nu}(\sqrt{x}) dx^{\rho+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+\frac{\nu}{2}+\rho+1}}{2^{2n+\nu} \Gamma(n+1) \Gamma(n+\nu+\rho+2)} = 2^{\rho+1} x^{\frac{\nu+\rho+1}{2}} I_{\nu+\rho+1}(\sqrt{x}). \quad (\text{XXXVIII})$$

2°. $\nu = -\alpha =$ negatief geheel, dan:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} x^{-\frac{\alpha}{2}} I_{-\alpha}(\sqrt{x}) dx^{\rho+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-\frac{\alpha}{2}+\rho+1}}{2^{2n-\alpha} \Gamma(n+1) \Gamma(n-\alpha+\rho+2)} = \\ &= 2^{\rho+1} x^{\frac{\rho-\alpha+1}{2}} \left\{ I_{\rho-\alpha+1}(\sqrt{x}) - \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{(-1)^n x^{n+\frac{\rho-\alpha+1}{2}}}{2^{2n+\rho-\alpha+1} n! \Gamma(n+\rho-\alpha+2)} \right\}. \quad (\text{XXXIX}) \end{aligned}$$

19. Zoo kunnen we met behulp van de hypergeometrische reeks ook eenige belangrijke betrekkingen afleiden.

We kunnen deze schrijven in den volgende vorm:

$$F(\alpha \beta \gamma x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(n+\alpha) \Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+\gamma)} x^n, \quad (x < 1).$$

Nemen we nu:

$$1^0. \quad f(x) = x^{\delta-1} F(\alpha \beta \delta x) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha) \Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+\delta)} x^{n+\delta-1}, (\delta > 0),$$

dan volgt:

$$\gamma-\delta \int x^{\delta-1} F(\alpha \beta \delta x) dx^{\gamma-\delta} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha) \Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+\gamma)} x^{n+\gamma-1} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} F(\alpha \beta \gamma x), (\delta > 0) \quad . \quad (XL)$$

$$2^0. \quad f(x) = x^{\alpha-1} F(\delta \beta \gamma x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta) \Gamma(\beta)} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+\delta) \Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+\gamma)} x^{n+\alpha-1}, (\alpha > 0),$$

dan wordt:

$$\delta-\alpha \int x^{\alpha-1} F(\delta \beta \gamma x) dx^{\delta-\alpha} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta) \Gamma(\beta)} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha) \Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+\gamma)} x^{n+\delta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\delta)} x^{\delta-1} F(\alpha \beta \gamma x), (\alpha > 0) \quad . \quad (XLI)$$

20. Deze voorbeelden ter bepaling van integralen van gebroken orde volgens onze vooropgestelde definitie, willen we niet met andere vermeerderen. Op gelijke wijze kan men de differentiaal van gebroken orde van verscheidene functies afleiden, hetgeen echter het doel van onze beschouwingen niet is. Bovendien hebben we ons slechts bepaald tot functies, die voldoen aan: $\lim_{x=0} \{x f(x)\} = 0$.

Nog zij opgemerkt, voordat we overgaan tot het volgende hoofdstuk, dat aan deze bijzondere waarden der ontwikkelde integralen van gebroken orde moet worden toegevoegd de complementaire functie: $\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{\Gamma(p-m-1)} x^{p-m-1}$ (zie II: $\xi = -p$), zoo men de algemeene waarden wil kennen. Wij hebben haar opzettelijk overal weggelaten, omdat het gebruik, dat wij van die integralen van gebroken orde maken, slechts die bijzondere waarden vordert.

HOOFDSTUK II.

1. Na de ontwikkelingen in het vorige hoofdstuk kunnen we nu van vele bepaalde integralen hare waarden berekenen, waartoe, zooals we reeds opmerkten, formule (B) ons in staat stelt. Wanneer we hiervan voorbeelden hebben laten zien, zullen we in (B) nieuwe veranderlijken invoeren, waardoor we komen op formules, waarin de bepaalde integraal andere grenzen heeft, zoodat we door substitutie van verschillende functies $f(x)$ ook daaruit nieuwe reeksen van bepaalde integralen kunnen afleiden.

De uitkomsten, die we verkregen hebben, komen voor een deel overeen met die, welke vermeld staan in de «Nouvelles Tables d'intégrales définies» par BIERENS DE HAAN (1867); deze zijn aangegeven door 't teeken +; voor een gering deel wijken ze er van af, en wel die, welke gekenmerkt zijn door 't teeken *; de overige *niet-gemerkte* geven de waarden aan van bepaalde integralen, die er *niet* in voorkomen.

2. Wanneer we dus allereerst in formule:

$$\int_0^1 y^{r-1} (1-y)^{p-1} f(xy^r) dy = \int_0^1 y^{pr-1} f\{x(1-y^r)\} dy = \frac{\Gamma(p)}{rx^p} \int f(x) dx^p, (p > 0). \quad (B)$$

substitueeren: $f(x) = x^{a-2} \lg(1 \mp x)$, en in de verschillende gevallen, genoemd onder N°. 10 van het vorige hoofdstuk, de onbepaalde integraal in het rechterlid van (B) vervangen door hare bijbehorende waarde, krijgen we, zoo we nemen $x = p^2$, volgens de betrekkingen, voorgesteld door (V) tot (XI), respectievelijk de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^{br+r-1} (1-y)^a \lg(1-p^2 y^r) dy &= \int_0^1 y^{ar+r-1} (1-y)^b \lg(1-p^2 + p^2 y^r) dy = \\ &= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{r\Gamma(a+b+2)} \lg(1-p^2) + \frac{\Gamma(a+1)}{r} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1} p^{-2(b+m+1)}}{m!(a-m)!(b+m+1)} \left\{ \lg(1-p^2) + \sum_{n=1}^{b+m+1} \frac{p^{2n}}{n} \right\}. \quad (a_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^{br+r-1} (1-y)^a \lg(1+p^2 y^r) dy &= \int_0^1 y^{ar+r-1} (1-y)^b \lg(1+p^2 - p^2 y^r) dy = \\ &= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{r\Gamma(a+b+2)} \lg(1+p^2) + (-1)^b \frac{\Gamma(a+1)}{r} \sum_{m=0}^a \frac{p^{-2(b+m+1)}}{m!(a-m)!(b+m+1)} \left\{ \lg(1+p^2) + \sum_{n=1}^{b+m+1} (-1)^n \frac{p^{2n}}{n} \right\}. \quad (a_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^{br-\frac{r}{2}-1} (1-y)^a \lg(1-p^2 y^r) dy &= \int_0^1 y^{ar+r+1} (1-y)^{b-\frac{3}{2}} \lg(1-p^2 + p^2 y^r) dy = \\ &= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b-\frac{1}{2})}{r\Gamma(a+b+\frac{1}{2})} \lg(1-p^2) + \frac{2\Gamma(a+1)}{r} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m p^{-(2b+2m-1)}}{m!(a-m)!(2b+2m-1)} \left\{ \lg \frac{1+p}{1-p} - 2 \sum_{n=0}^{b+m-1} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (a_3) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 y^{b-r-\frac{r}{2}-1} (1-y)^a \lg(1+p^2 y^r) dy = \int_0^1 y^{a+r+1} (-y)^{b-\frac{3}{2}} \lg(1+p^2 - p^2 y^r) dy =$$

$$= \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b-\frac{1}{2})}{r \Gamma(a+b+\frac{1}{2})} \lg(1+p^2) + (-1)^{b+1} \frac{4 \Gamma(a+1)}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{-(2b+2m-1)}}{m! (a-m)! (2b+2m-1)!} \left\{ \arctg p - \sum_{n=0}^{b+m-1} (-1)^n \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (a_4)$$

$$\int_0^1 \frac{y^{-\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{1-y^r}} \lg(1 \mp p^2 y^r) dy = \int_0^1 \frac{y^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{(1-y^r)^3}} \lg(1 \mp p^2 \pm p^2 y^r) dy = \frac{2\pi}{r} \left\{ \sqrt{1 \mp p^2} - 1 \right\}. \quad (a_5)$$

$$\int_0^1 \frac{y^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{1-y^r}} \lg(1 \mp p^2 y^r) dy = \int_0^1 \frac{y^{\frac{r}{2}-1}}{\sqrt{1-y^r}} \lg(1 \mp p^2 \pm p^2 y^r) dy = \frac{2\pi}{r} \lg \frac{1 + \sqrt{1 \mp p^2}}{2}. \quad (a_6)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{y \sqrt{1-y^r}} \lg(1 - p^2 y^r) dy = \int_0^1 \frac{y^{\frac{r}{2}-1}}{1-y^r} \lg(1 - p^2 + p^2 y^r) dy = -\frac{2}{r} (\arcsin p)^2. \quad (a_7)$$

Door bijzondere waarden voor a , b , p en r te kiezen, kunnen uit deze vergelijkingen eene menigte bepaalde integralen gevonden worden, waarvan we enkele voorbeelden zullen laten zien.

Stelt men in (a_1) en (a_2) : $a = 0$, $r = 1$, in (a_3) en (a_4) : $a = 0$, $r = 2$, in (a_5) en (a_6) : $r = 2$, in (a_7) : $r = 2q$, dan gaan deze over in:

$$\int_0^1 y^b \lg(1 - p^2 y) dy = \int_0^1 (1-y)^b \lg(1 - p^2 + p^2 y) dy = \frac{(p^{2b+2} - 1) \lg(1 - p^2)}{(b+1)p^{2(b+1)}} - \frac{1}{(b+1)p^{2(b+1)}} \sum_{n=1}^{b+1} \frac{p^{2n}}{n}. \quad (1)$$

$$\int_0^1 y^b \lg(1 + p^2 y) dy = \int_0^1 (1-y)^b \lg(1 + p^2 - p^2 y) dy = \frac{\{p^{2b+2} + (-1)^b\} \lg(1 + p^2)}{(b+1)p^{2(b+1)}} + \frac{(-1)^b}{(b+1)p^{2(b+1)}} \sum_{n=1}^{b+1} (-1)^n \frac{p^{2n}}{n}. \quad (2)$$

$$\int_0^1 y^{2(b-1)} \lg(1 - p^2 y^2) dy = \int_0^1 y (1 - y^2)^{b-1} \lg(1 - p^2 + p^2 y^2) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \frac{(p^{2b-1} + 1) \lg(1 + p) + (p^{2b-1} - 1) \lg(1 - p)}{(2b-1)p^{2b-1}} - \frac{2}{(2b-1)p^{2b-1}} \sum_{n=0}^{b-1} \frac{p^{2n+1}}{2n+1}. \quad (3)$$

$$\int_0^1 y^{2(b-1)} \lg(1 + p^2 y^2) dy = \int_0^1 y (1 - y^2)^{b-1} \lg(1 + p^2 - p^2 y^2) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \frac{\lg(1 + p^2)}{2b-1} + \frac{(-1)^{b+1} \cdot 2}{(2b-1)p^{2b-1}} \left\{ \arctg p - \sum_{n=0}^{b-1} (-1)^n \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (4)$$

$$\int_0^1 \lg(1 \mp p^2 y^2) \frac{dy}{y^2 \sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 \lg(1 \mp p^2 \pm p^2 y^2) \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)^3}} = \pi \left\{ \sqrt{1 \mp p^2} - 1 \right\}. \quad (5)$$

$$\int_0^1 \lg(1 \mp p^2 y^2) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 \lg(1 \mp p^2 \pm p^2 y^2) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi \lg \frac{1 + \sqrt{1 \mp p^2}}{2}. \quad (6)+$$

$$\int_0^1 \lg(1 - p^2 y^{2q}) \frac{dy}{y \sqrt{1-y^{2q}}} = \int_0^1 \frac{y^{q-1}}{1-y^{2q}} \lg(1 - p^2 + p^2 y^{2q}) dy = -\frac{1}{q} (\arcsin p)^2. \quad (7)$$

Bepaalt men zich nu tot $p = 1$, dan krijgt men hieruit de volgende integralen:

$$\int_0^1 y^b \lg(1 - y) \cdot dy = \int_0^1 (1-y)^b \lg y \cdot dy = -\frac{1}{(b+1)} \sum_{n=1}^{b+1} \frac{1}{n}. \quad (8)+$$

$$\int_0^1 y^b \lg(1 + y) \cdot dy = \frac{\{1 + (-1)^b\} \lg 2}{b+1} + \frac{(-1)^b}{b+1} \sum_{n=1}^{b+1} \frac{(-1)^n}{n}. \quad (9)+$$

$$\int_0^1 y^{2(b-1)} \lg(1 - y^2) \cdot dy = \int_0^1 y (1 - y^2)^{b-1} \lg y^2 \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{2b-1} \left\{ \lg 2 - \sum_{n=0}^{b-1} \frac{1}{2n+1} \right\}. \quad (10)*$$

$$\int_0^1 y^{2(b-1)} \lg(1+y^2) \cdot dy = \frac{\lg 2}{2b-1} + (-1)^{b+1} \frac{2}{2b-1} \left\{ \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{b-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right\}. \quad (11)^*$$

$$\int_0^1 \lg(1-y^2) \cdot \frac{dy}{y^2 \sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 \lg y^2 \cdot \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)^3}} = -\pi \dots \dots \dots (12)$$

$$\int_0^1 \lg(1+y^2) \cdot \frac{dy}{y^2 \sqrt{1-y^2}} = \pi (\sqrt{2}-1) \dots \dots \dots (13)$$

$$\int_0^1 \lg(1-y^2) \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 \lg y^2 \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\pi \lg 2. \dots \dots \dots (14)^+$$

$$\int_0^1 \lg(1+y^2) \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi \lg \frac{1+\sqrt{2}}{2} \dots \dots \dots (15)^+$$

$$\int_0^1 \lg(1-y^{2q}) \cdot \frac{dy}{y \sqrt{1-y^{2q}}} = \int_0^1 \frac{y^{q-1}}{1-y^{2q}} \lg y^{2q} \cdot dy = -\frac{\pi^2}{4q} \dots \dots \dots (16)^+$$

In (a₁) tot (a₄) kan men aan a nog alle geheele waarden toekennen, waardoor men tot vele andere integralen komt; wij hebben ons slechts bepaald tot $a=0$.

We kunnen nog opmerken, dat de som der integralen in (8) en (9) ons voert tot (10), zoo b even is; wanneer $b=2c+1$ = oneven, ontstaat:

$$\int_0^1 y^{2c+1} \lg(1-y^2) \cdot dy = -\frac{1}{2(c+1)} \sum_{n=1}^{c+1} \frac{1}{n} \dots \dots \dots (17)^+$$

welk resultaat we ook rechtstreeks verkrijgen uit (a₁) door hierin te nemen: $a=0$, $p=1$, $r=2$.

3. De substitutie: $f_1(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ in de eerste integraal van formule (B) levert in de gevallen, genoemd onder N^o. 11 van het eerste hoofdstuk, volgens de betrekkingen (XII), (XIV), (XVI) en (XVIII), zoo men neemt: $x=p^2$ en $r=2q$, de volgende integralen:

$$\int_0^1 y^{2bq-1} (1-y^{2q})^a \lg \frac{1+py^q}{1-py^q} \cdot dy = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b)}{2^q \Gamma(a+b+1)} \lg \frac{1+p}{1-p} +$$

$$+ \frac{\Gamma(a+1)}{2^q} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^{m+1} p^{-2(b+m)}}{m! (a-m)! (b+m)} \left\{ \lg \frac{1+p}{1-p} - 2^{\frac{b+m-1}{2}} \sum_{n=0}^{b+m-1} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\} \dots \dots (b_1)$$

$$\int_0^1 y^{2bq+q-1} (1-y^{2q})^a \lg \frac{1+py^q}{1-py^q} \cdot dy = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+\frac{1}{2})}{2^q \Gamma(a+b+\frac{3}{2})} \lg \frac{1+p}{1-p} +$$

$$+ \frac{\Gamma(a+1)}{q} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m p^{-(2b+2m+1)}}{m! (a-m)! (2b+2m+1)} \left\{ \lg(1-p^2) + \sum_{n=1}^{b+m} \frac{p^{2n}}{n} \right\} \dots \dots (b_2)$$

$$\int_0^1 y^{2q-1} (1-y^{2q})^a \lg \frac{1+py^q}{1-py^q} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^{2q}}} = \frac{(-1)^{a+1} \pi}{(2a+1) p^{2a+1} q} \left\{ (1-p^2)^{a+\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^a \frac{(-2a-1)^{n/2}}{2^{n/2}} p^{2n} \right\} \dots (b_3)$$

$$\int_0^1 \lg \frac{1+py^q}{1-py^q} \cdot \frac{dy}{y \sqrt{1-y^{2q}}} = \frac{\pi}{q} \arcsin p. \dots \dots \dots (b_4)^+$$

Stelt men in (b₁) en (b₂): $a=0$, $q=1$, in (b₃) achtereenvolgens $a=0$ en $a=1$, dan gaan deze algemeene vergelijkingen over in de bijzondere:

$$\int_0^1 y^{2b-1} \lg \frac{1+py}{1-py} \cdot dy = \frac{p^{2b}-1}{2bp^{2b}} \lg \frac{1+p}{1-p} + \frac{1}{bp^{2b}} \sum_{n=0}^{b-1} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \dots \dots (18)$$

$$\int_0^1 y^{2b} \lg \frac{1+py}{1-py} \cdot dy = \frac{1}{(2b+1)p^{2b+1}} \left\{ (p^{2b+1}+1) \lg(1+p) - (p^{2b+1}-1) \lg(1-p) + \sum_{n=1}^b \frac{p^{2n}}{n} \right\} \dots (19)$$

$$\int_0^1 y^{2q-1} \lg \frac{1+py^q}{1-py^q} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^{2q}}} = \frac{\pi}{pq} (1 - \sqrt{1-p^2}) \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

$$\int_0^1 y^{2q-1} \sqrt{1-y^{2q}} \lg \frac{1+py^q}{1-py^q} \cdot dy = \frac{\pi}{3p^3q} \left\{ \sqrt{(1-p^2)^3} + 3p^2 - 1 \right\} \quad . \quad (21)$$

Wanneer men in deze laatste integralen neemt $p = 1$, gaan ze over in:

$$\int_0^1 y^{2b-1} \lg \frac{1+y}{1-y} \cdot dy = \frac{1}{b} \sum_0^{b-1} \frac{1}{2n+1} \cdot (22); \quad \int_0^1 y^{2b} \lg \frac{1+y}{1-y} \cdot dy = \frac{2}{2b+1} \left\{ \lg 2 + \sum_1^b \frac{1}{2n} \right\} \cdot (23)$$

$$\int_0^1 y^{2q-1} \lg \frac{1+y^q}{1-y^q} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^{2q}}} = \frac{\pi}{q} \cdot . \quad . \quad . \quad (24); \quad \int_0^1 y^{2q-1} \sqrt{1-y^{2q}} \lg \frac{1+y^q}{1-y^q} \cdot dy = \frac{2\pi}{3q} \cdot . \quad (25)$$

We kunnen nog opmerken, dat (18) en (19) ook verkregen worden door (1) van (2) af te trekken; op gelijke wijze volgen (22) en (23) uit (8) en (9).

4. Indien in formule (B) genomen wordt: $f_2(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, krijgt men, onder substitutie van: $x = p^2$ en $r = 2$, volgens (XIII), (XV), (XVII) en (XIX), de volgende vier integralen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^{2b-1} (1-y^2)^a \operatorname{arctg} py \cdot dy &= \int_0^1 y^{2a+1} (1-y^2)^{b-1} \operatorname{arctg} p \sqrt{1-y^2} \cdot dy = \\ &= \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b)}{2 \Gamma(a+b+1)} \operatorname{arctg} p + (-1)^{b+1} \frac{\Gamma(a+1)}{2} \sum_{m=0}^a \frac{p^{-2(b+m)}}{m! (a-m)! (b+m)} \left\{ \operatorname{arctg} p - \sum_0^{b+m-1} (-1)^n \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\} \cdot (c_1) \\ \int_0^1 y^{2b} (1-y^2)^a \operatorname{arctg} py \cdot dy &= \int_0^1 y^{2a+1} (1-y^2)^b \operatorname{arctg} p \sqrt{1-y^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \\ &= \frac{\Gamma(a+1) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(a+b + \frac{3}{2}\right)} \operatorname{arctg} p + (-1)^{b+1} \frac{\Gamma(a+1)}{2} \sum_{m=0}^a \frac{p^{-(2b+2m+1)}}{m! (a-m)! (2b+2m+1)} \left\{ \lg(1+p^2) + \sum_1^{b+m} (-1)^n \frac{p^{2n}}{n} \right\} \cdot (c_2) \\ \int_0^1 y (1-y^2)^a \operatorname{arctg} py \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} &= \int_0^1 y^{2a} \operatorname{arctg} p \sqrt{1-y^2} \cdot dy = \\ &= \frac{\pi}{2(2a+1)p^{2a+1}} \left\{ (1+p^2)^{a+\frac{1}{2}} - \sum_0^a (-1)^n \frac{\left(-a - \frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} p^{2n} \right\} \quad . \quad . \quad (c_3) \\ \int_0^1 \operatorname{arctg} py \cdot \frac{dy}{y \sqrt{1-y^2}} &= \int_0^1 \operatorname{arctg} p \sqrt{1-y^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2} \lg(p + \sqrt{1+p^2}) \cdot (c_4)^+ \end{aligned}$$

Bepalen wij ons in (c₁) en (c₂) tot $a = 0$ en $p = 1$, in (c₃) tot $a = 0$ en $a = 1$, dan volgen hieruit voor de eerste integralen:

$$\int_0^1 y^{2b-1} \operatorname{arctg} y \cdot dy = \left\{ 1 + (-1)^{b+1} \right\} \frac{\pi}{8b} + \frac{(-1)^{b-1}}{2b} \sum_0^{b-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot . \quad . \quad (26)$$

$$\int_0^1 y^{2b} \operatorname{arctg} y \cdot dy = \frac{\pi}{4(2b+1)} + \frac{(-1)^{b+1}}{2(2b+1)} \left\{ \lg 2 + \sum_1^b \frac{(-1)^n}{n} \right\} \cdot . \quad . \quad (27)$$

$$\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \operatorname{arctg} py \cdot dy = \frac{\pi}{2p} (\sqrt{1+p^2} - 1) \cdot . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$\int_0^1 y \sqrt{1-y^2} \operatorname{arctg} py \cdot dy = \frac{\pi}{6p^3} \left\{ 2\sqrt{(1+p^2)^3} - 3p^2 - 2 \right\} \cdot . \quad . \quad (29)$$

5. Zoo krijgen we bij de substitutiën: $f(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \lg(1+\sqrt{x})$ en $f(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \lg(1-\sqrt{x})$

in de eerste integraal van formule (B), wanneer men stelt: $x = p^2$ en $r = 2q$, volgens de betrekkingen (XX) tot (XXIII):

$$\int_0^1 y^{2bq+q-1} (1-y^2)^a \lg(1+py^q) \cdot dy = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+\frac{1}{2})}{2q \Gamma(a+b+\frac{3}{2})} \lg(1+p) +$$

$$+ \frac{\Gamma(a+1)}{q} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m p^{-(2b+2m+1)}}{m! (a-m)! (2b+2m+1)} \left\{ \lg(1+p) + \sum_{n=1}^{b+m} \frac{p^{2n}}{2n} - \sum_{n=0}^{b+m} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (d_1)$$

$$\int_0^1 \lg(1+py^q) \cdot \frac{dy}{y \sqrt{1-y^{2q}}} = \frac{\pi}{2q} \arcsin p - \frac{1}{2q} (\arcsin p)^2 \quad \dots \quad (d_2)^*$$

$$\int_0^1 y^{2bq+q-1} (1-y^2)^a \lg(1-py^q) \cdot dy = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma(b+\frac{1}{2})}{2q \Gamma(a+b+\frac{3}{2})} \lg(1-p) -$$

$$- \frac{\Gamma(a+1)}{q} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m p^{-(2b+2m+1)}}{m! (a-m)! (2b+2m+1)} \left\{ \lg(1-p) + \sum_{n=1}^{b+m} \frac{p^{2n}}{2n} + \sum_{n=0}^{b+m} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (d_3)$$

$$\int_0^1 \lg(1-py^q) \cdot \frac{dy}{y \sqrt{1-y^{2q}}} = -\frac{\pi}{2q} \arcsin p - \frac{1}{2q} (\arcsin p)^2 \quad \dots \quad (d_4)^*$$

(d_1) en (d_3) zijn voor $a = 0$ slechts bijzondere gevallen van (2) en (1); (d_2) en (d_4) gaan voor $p = 1$ over in:

$$\int_0^1 \lg(1+y^q) \cdot \frac{dy}{y \sqrt{1-y^{2q}}} = \frac{\pi^2}{8q} \cdot (30); \quad \int_0^1 \lg(1-y^q) \cdot \frac{dy}{y \sqrt{1-y^{2q}}} = -\frac{3\pi^2}{8q} \cdot (31)$$

De som van (d_2) en (d_4) geeft ons (7) terug.

6. Wanneer men in de eerste integraal van formule (B) substitueert: $f(x) = x^b \lg(1+\sqrt{1 \mp x})$, krijgt men volgens (XXIV) en (XXV) de vergelijkingen:

$$\int_0^1 y^{br+r-1} (1-y^r)^a \lg(1+\sqrt{1-xy^r}) \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^r}} = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2}) \Gamma(b+1)}{r \Gamma(a+b+\frac{3}{2})} \lg 2 +$$

$$+ \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2r \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+b+\frac{3}{2})} x^b \lg(1-x) + 2 \sum_{m=0}^{a+b} \frac{(-1)^m x^{b-m-\frac{1}{2}}}{m! (a+b-m)! (2m+1)} \left[\lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 2 \sum_{n=0}^m \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right] \right\}. \quad (e_1)$$

$$\int_0^1 y^{br+r-1} (1-y^r)^a \lg(1+\sqrt{1+xy^r}) \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^r}} = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2}) \Gamma(b+1)}{r \Gamma(a+b+\frac{3}{2})} \lg 2 +$$

$$+ \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{2r \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d^b}{dx^b} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+b+\frac{3}{2})} x^b \lg(1+x) + 4 \sum_{m=0}^{a+b} \frac{x^{b-m-\frac{1}{2}}}{m! (a+b-m)! (2m+1)} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right] \right\}. \quad (e_2)$$

Hieruit zijn weer vele bepaalde integralen te berekenen.

Nemen wij slechts: $a = 0$, $b = 0$, en $x = p^2$, $r = 2$, dan ontstaan:

$$\int_0^1 \lg(1+\sqrt{1-p^2 y^2}) \cdot \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \lg 2 - 1 + \frac{1}{2p} \{ (1+p) \lg(1+p) - (1-p) \lg(1-p) \}. \quad (32)$$

$$\int_0^1 \lg(1 + \sqrt{1 + p^2 y^2}) \cdot \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \lg 2 - 1 + \frac{1}{2} \lg(1 + p^2) + \frac{1}{p} \operatorname{arctg} p. \quad (33)$$

Voor $p = 1$ gaan deze over in:

$$\int_0^1 \lg(1 + \sqrt{1 - y^2}) \cdot \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 2 \lg 2 - 1. \quad (34); \quad \int_0^1 \lg(1 + \sqrt{1 + y^2}) \cdot \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \lg 2 - 1. \quad (35)$$

7. Ingeval we in formule (B) nemen: $f(x) = \frac{(\arcsin \sqrt{x})^2}{x \sqrt{x}}$, $x = p^2$ en $r = 2$, vinden we volgens (XXVI) de integralen:

$$\int_0^1 \frac{(\arcsin p y)^2}{y^2 \sqrt{1 - y^2}} dy = \int_0^1 \frac{(\arcsin p \sqrt{1 - y^2})^2}{\sqrt{(1 - y^2)^3}} dy = \frac{\pi}{2} \left\{ (1 + p) \lg(1 + p) + (1 - p) \lg(1 - p) \right\}. \quad (f)$$

welke voor $p = 1$ overgaan in:

$$\int_0^1 \frac{(\arcsin y)^2}{y^2 \sqrt{1 - y^2}} dy = \int_0^1 \frac{(\arccos y)^2}{\sqrt{(1 - y^2)^3}} dy = \pi \lg 2. \quad (36)+$$

8. De substitutie: $f_1(x) = x^{b-1} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}}$ in formule (B) geeft blijkens (XXVII), zoo $p = a + \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 y^{b-1} (1 - y^2)^a \cdot \frac{\arcsin \sqrt{x y^r}}{\sqrt{(1 - y^r)(1 - x y^r)}} dy = \int_0^1 y^{a r + \frac{r}{2} - 1} (1 - y^r)^{b-1} \frac{\arcsin \sqrt{x(1 - y^r)}}{\sqrt{1 - x + x y^r}} dy = \\ & = \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}{2^r} x \frac{d^b}{d x^b} \left\{ \pi x^{b-1} \lg \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{a+b-1} \frac{(-1)^m x^{b-m-\frac{3}{2}}}{m!(a+b-1-m)!(2m+1)} \left[\lg(1-x) + \sum_{n=1}^m \frac{x^n}{n} \right] \right\}. \quad (g) \end{aligned}$$

Stellen we hierin achtereenvolgens $b = 0$ en $b = 1$, terwijl we na uitwerking nemen: $x = p^2$ en $r = 2$, dan komt er:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \arcsin p y \cdot \frac{(1 - y^2)^a dy}{y \sqrt{(1 - y^2)(1 - p^2 y^2)}} = \int_0^1 \arccos \sqrt{1 - p^2 + p^2 y^2} \cdot \frac{y^{2a} dy}{(1 - y^2) \sqrt{1 - p^2 + p^2 y^2}} = \\ & = \frac{\pi}{4} \lg \frac{1+p}{1-p} + \frac{1^{a/2}}{2^{a+1}} \pi p^2 \sum_{m=0}^{a-1} \frac{(-1)^m p^{-2m-3}}{m!(a-1-m)!(2m+1)} \left\{ \lg(1 - p^2) + \sum_{n=1}^m \frac{p^{2n}}{n} \right\}. \quad (g_1) \\ & \int_0^1 \arcsin p y \cdot \frac{y(1 - y^2)^a dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - p^2 y^2)}} = \int_0^1 \arccos \sqrt{1 - p^2 + p^2 y^2} \cdot \frac{y^{2a} dy}{\sqrt{1 - p^2 + p^2 y^2}} = \\ & = \frac{\pi}{2(2a+1)} \frac{p}{1-p^2} - \frac{1^{a/2}}{2^{a+2}} \pi p^2 \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m p^{-2m-3}}{m!(a-m)!} \left\{ \lg(1 - p^2) + \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{p^2}{1-p^2} + \sum_{n=1}^m \frac{p^{2n}}{n} - \frac{1}{2m+1} \sum_{n=1}^m p^{2n} \right\}. \quad (g_2) \end{aligned}$$

Nemen we in de eerste integraal van (g_1) achtereenvolgens: $a = 0$, $a = 1$, in die van (g_2) : $a = 0$, dan volgen:

$$\int_0^1 \arcsin p y \cdot \frac{dy}{y \sqrt{(1 - y^2)(1 - p^2 y^2)}} = \frac{\pi}{4} \lg \frac{1+p}{1-p}. \quad (37)$$

$$\int_0^1 \arcsin p y \cdot \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - p^2 y^2}} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{4p} \left\{ (1 + p) \lg(1 + p) + (1 - p) \lg(1 - p) \right\}. \quad (38)$$

$$\int_0^1 \arcsin p y \cdot \frac{y dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - p^2 y^2)}} = -\frac{\pi}{4p} \lg(1 - p^2). \quad (39)+$$

Deze laatste integraal volgt ook als verschil van (37) en (38). De tweede integralen van (g_1) en (g_2) gaan voor $a = 1$, $p = 1$ over in:

$$\int_0^1 \arccos y \cdot \frac{y dy}{1 - y^2} = \frac{\pi}{2} \lg 2. \quad (40)+; \quad \int_0^1 y \arccos y \cdot dy = \frac{\pi}{8}. \quad (41)+$$

9. In de eerste integraal van (B) gesubstitueerd: $f_2(x) = x^{b-1} \frac{\lg(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}}$ geeft volgens (XXVIII), zoo we slechts nemen: $b = 0$ en $b = 1$, en stellen: $x = p^2$, $r = 2$:

$$\int_0^1 \lg(py + \sqrt{1+p^2 y^2}) \cdot \frac{(1-y^2)^a dy}{y \sqrt{(1-y^2)(1+p^2 y^2)}} = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} p -$$

$$- \frac{1^{a/2}}{2^{a+1}} \pi p^2 \sum_{m=0}^{a-1} \frac{p^{-2m-3}}{m!(a-1-m)!(2m+1)} \left\{ \lg(1+p^2) + \sum_1^m (-1)^n \frac{p^{2n}}{n} \right\} \quad (h_1)$$

$$\int_0^1 \lg(py + \sqrt{1+p^2 y^2}) \cdot \frac{(1-y^2)^a y dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+p^2 y^2)}} = \frac{\pi}{2(2a+1)} \frac{p}{1+p^2} +$$

$$+ \frac{1^{a/2}}{2^{a+1}} \pi p^2 \sum_{m=0}^a \frac{p^{-2m-3}}{m!(a-m)!} \left\{ \lg(1+p^2) - \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{p^2}{1+p^2} + \sum_1^m (-1)^n \frac{p^{2n}}{n} - \frac{1}{2m+1} \sum_1^m (-1)^n p^{2n} \right\} \quad (h_2)$$

Bepalen we ons tot: $a = 0$ en $a = 1$ in (h_1) , tot $a = 0$ in (h_2) , dan gaan ze over in:

$$\int_0^1 \lg(py + \sqrt{1+p^2 y^2}) \cdot \frac{dy}{y \sqrt{(1-y^2)(1+p^2 y^2)}} = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} p \quad \dots \quad (42)$$

$$\int_0^1 \lg(py + \sqrt{1+p^2 y^2}) \cdot \sqrt{\frac{1-y^2}{1+p^2 y^2}} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} p - \frac{\pi}{4p} \lg(1+p^2) \quad (43)$$

$$\int_0^1 \lg(py + \sqrt{1+p^2 y^2}) \cdot \frac{y dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+p^2 y^2)}} = \frac{\pi}{4p} \lg(1+p^2) \quad \dots \quad (44)$$

wetke laatste integraal weer is 't verschil van (42) en (43).

De waarden dezer integralen voor $p = 1$ volgen vanzelf.

10. Wanneer we in formule:

$$\int_0^1 y^{r-1} (1-y^r)^{p-1} f(xy^r) dy = \int_0^1 y^{pr-1} f\{x(1-y^r)\} dy = \frac{\Gamma(p)}{r x^p} \int f(x) dx^p, \quad (p > 0). \quad (B)$$

substitueeren: $f(x) = \frac{x^{q-1}}{(1 \mp x)^q}$, waarin we volgens het eerste geval, genoemd onder N°. 17 van het vorige hoofdstuk, aannemen $r = p + q + a$, krijgen we volgens (XXIX) de vergelijking:

$$\int_0^1 \frac{y^{qr-1} (1-y^r)^{p-1} dy}{(1 \mp x)^{p+q+a}} = \int_0^1 \frac{y^{pr-1} (1-y^r)^{q-1} dy}{(1 \mp x \pm x y^r)^{p+q+a}} = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{r x^{p+q-1} \Gamma(p+q+a)} \frac{d^a x^{p+q+a-1}}{dx^a} \frac{1}{(1 \mp x)^q} \quad (k)$$

Het rechterlid ontwikkeld volgens het theorema van LEIBNITZ geeft:

$$\frac{d^a x^{p+q+a-1}}{dx^a} \frac{1}{(1 \mp x)^q} = \sum_{n=0}^a \binom{a}{n} \frac{d^{a-n} x^{p+q+a-1}}{dx^{a-n}} \cdot \frac{d^n 1}{dx^n (1 \mp x)^q},$$

en daar:

$$\frac{d^{a-n} x^{p+q+a-1}}{dx^{a-n}} = (a-n)! \binom{p+q+a-1}{a-n} x^{n+p+q-1}, \quad \frac{d^n 1}{dx^n (1 \mp x)^q} = (\pm 1)^n \frac{q^{n/1}}{(1 \mp x)^{n+q}},$$

zoo kunnen we voor (k) schrijven, wanneer we stellen: $x = \frac{s}{t}$:

$$\int_0^1 \frac{y^{qr-1} (1-y^r)^{p-1} dy}{(t \mp s y^r)^{p+q+a}} = \int_0^1 \frac{y^{pr-1} (1-y^r)^{q-1} dy}{(t \mp s \pm s y^r)^{p+q+a}} =$$

$$= \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{r \Gamma(p+q+a) t^{p+a} (t \mp s)^q} \sum_0^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \left(\frac{s}{t \mp s}\right)^n \quad (k_1)$$

Eene menigte integralen kunnen hieruit worden afgeleid.

Gaan we over tot de substitutie: $p + q = 1$, dan treedt als voorwaarde op: $0 < p < 1$, daar p en q door ons grooter dan nul geeischt worden. Voorts is: $\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \pi \operatorname{cosec} p\pi$, zoodat (k_1) voor $q = 1 - p$ en $r = 1$ overgaat in:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-y)^{1-p} y^p} \cdot \frac{dy}{(t \mp s y)^{a+1}} = \int_0^1 \frac{1}{(1-y)^p y^{1-p}} \cdot \frac{dy}{(t \mp s \pm s y)^{a+1}} =$$

$$= \frac{\pi \operatorname{cosec} p \pi}{1^{a/1} t^{p+a} (t \mp s)^{1-p}} \sum_0^a (\pm 1)^n (a-n)! \left[\left(\frac{a}{n} \right) \right]^2 (1-p)^{n/1} \left(\frac{s}{t \mp s} \right)^n, (0 < p < 1) \quad (45)^*$$

terwijl uit de 1^e integraal van (k_1) volgt voor: $a = 0$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $r = 2$, $t = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+s y^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2 \sqrt{1+s}} \cdot \dots \dots \dots (46)^+$$

Uit (45) zijn nu vele integralen te vinden door aan s en t willekeurige waarden toe te kennen, aan a positief geheele met inbegrip van nul, en aan p die, welke voldoen aan $0 < p < 1$.

Wanneer we in (k_1) stellen: $p = b$, $q = c$, wordt de 1^e integraal:

$$\int_0^1 \frac{y^{cr-1} (1-y^r)^{b-1} dy}{(t \mp s y^r)^{a+b+c}} = \frac{(b-1)! (c-1)!}{r \cdot (a+b+c-1)! t^{a+b} (t \mp s)^{a+c}} \sum_0^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{a+b+c-1}{a-n} c^{n/1} \left(\frac{s}{t \mp s} \right)^n. (47)$$

Nemen we echter: $p + q = b + 1$ en $r = 1$, dan volgt, daar:

$\Gamma(b+1-p) = (1-p)^{b/1} \Gamma(1-p)$ en $\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \pi \operatorname{cosec} p \pi$, onder de voorwaarde $q > 0$, dus: $p < b + 1$:

$$\int_0^1 \frac{y^{b-p}}{(1-y)^{1-p}} \cdot \frac{dy}{(t \mp s y)^{a+b+1}} = \frac{(1-p)^{b/1} \cdot \pi \operatorname{cosec} p \pi}{(a+b)! t^{p+a} (t \mp s)^{b+1-p}} \sum_0^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{a+b}{a-n} (b+1-p)^{n/1} \left(\frac{s}{t \mp s} \right)^n. (48)$$

Voorts geven de volgende substituties in de 1^e integraal van (k_1) :

$$1^e. \quad p = b + \frac{1}{2}, \quad q = c + 1, \quad r = 2, \quad t = 1, \quad s = p^2$$

$$2^e. \quad p = b + 1, \quad q = c + \frac{1}{2}, \quad r = 2, \quad t = 1, \quad s = p^2$$

aanleiding tot de volgende integralen:

$$\int_0^1 \frac{y^{2c+1} (1-y^2)^b dy}{\sqrt{(1-y^2) (1 \mp p^2 y^2)^{2a+2b+2c+3}}} = \frac{2^a \cdot 1^{b/2} \cdot 2^{c/2}}{1^{a+b+c+1/2} (1 \mp p^2)^{c+1}} \sum_0^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{a+b+c+\frac{1}{2}}{a-n} (c+1)^{n/1} \left(\frac{p^2}{1 \mp p^2} \right)^n. (49)$$

$$\int_0^1 \frac{y^{2c-1} (1-y^2)^b dy}{\sqrt{(1 \mp p^2 y^2)^{2a+2b+2c+3}}} = \frac{2^a \cdot 2^{b/2} \cdot 1^{c/2}}{1^{a+b+c+1/2} \sqrt{(1 \mp p^2)^{2c+1}}} \sum_0^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{a+b+c+\frac{1}{2}}{a-n} \left(c + \frac{1}{2} \right)^{n/1} \left(\frac{p^2}{1 \mp p^2} \right)^n. (50)$$

Ten slotte geeft de substitutie: $p = b + \frac{1}{2}$, $q = c + \frac{1}{2}$, $r = 1$ nog:

$$\int_0^1 \frac{y^c (1-y)^b dy}{(t \mp s y)^{a+b+c+1} \sqrt{y(1-y)}} = \frac{1^{b/2} \cdot 1^{c/2} \cdot \pi}{2^{b+c} (a+b+c)! t^{a+b+\frac{1}{2}} (t \mp s)^{c+\frac{1}{2}}} \sum_0^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{a+b+c}{a-n} \left(c + \frac{1}{2} \right)^{n/1} \left(\frac{s}{t \mp s} \right)^n. (51)$$

Uit (47) tot (51) zijn nu weer vele integralen te berekenen, door aan a , b en c verschillende waarden toe te kennen. Enkele voorbeelden zullen we hiervan geven.

Stel in (49): $b = 0$, en achtereenvolgens: $c = 0$, $a = 0$ en $a = 1$, voorts $c = 1$, $a = 0$, dan volgen hieruit:

$$\int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{(1-y^2) (1 \mp p^2 y^2)^3}} = \frac{1}{1 \mp p^2} \cdot (52)^+, \quad \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{(1-y^2) (1 \mp p^2 y^2)^5}} = \frac{3 \mp p^2}{3 (1 \mp p^2)^2} \cdot (53)^+,$$

$$\int_0^1 \frac{y^3 dy}{\sqrt{(1-y^2) (1 \mp p^2 y^2)^5}} = \frac{2}{3 (1 \mp p^2)^2} \cdot \dots \dots \dots (54)^+$$

Stel in (51): $b = 0$, $c = 0$, dan volgt:

$$\int_0^1 \frac{1}{(t \mp sy)^{a+1}} \frac{dy}{V y (1-y)} = \frac{\pi}{a! t^{a+\frac{1}{2}} (t \mp s)^{\frac{1}{2}}} \sum_0^a (\pm 1)^n (a-n)! \left[\frac{a}{n} \right] \left(\frac{1}{2} \right)^{n/1} \left(\frac{s}{t \mp s} \right)^n. \quad (55)^*$$

En hieruit volgt voor $a = 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{t \mp sy} \cdot \frac{dy}{V y (1-y)} = \frac{\pi}{V t (t \mp s)}. \quad \dots \dots \dots (56)^+$$

11. Op gelijke wijze kunnen we bij de substitutie: $f(x) = \frac{x^{q-1}}{(1 \mp x)^r}$ in de eerste integraal van formule (B) de gevallen behandelen, waarbij $r - p - q$ negatief geheel is. We krijgen dan allereerst, na vervanging der onbepaalde integralen in het rechterlid door hare waarden volgens (XXX) tot (XXXIII), achtereenvolgens de vergelijkingen:

$$\int_0^1 \frac{y^{br+r-1} (1-y^r)^a dy}{(1-xy^r)^{c+1}} = (\pm 1)^c \frac{\Gamma(a+1)}{r \Gamma(c+1)} \frac{d^b}{dx^b} \sum_{m=0}^{a+b-c} \frac{(\mp 1)^{m+1} x^{b-c-m-1}}{m! (a+b-c-m)!} \left\{ \lg(1 \mp x) + \sum_1^{c+m} (\pm 1)^n \frac{x^n}{n} \right\}, (c \leq a+b). \quad (l)$$

$$\int_0^1 \frac{y^{br+\frac{r}{2}-1} dy}{(1 \mp xy^r)^{c+1} V 1-y^r} = (\pm 1)^b \frac{\pi}{r \Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} \left\{ \frac{1}{x^{b-c} V 1 \mp x} - \frac{1}{x^{b-c}} \sum_0^{b-1} (\pm 1)^n \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} x^n \right\} =$$

$$= (\pm 1)^b \frac{\pi}{r \cdot 1^{c/1} \cdot x^b} \left\{ (\pm 1)^c \sum_0^c (\mp 1)^n \frac{1^{n/2} (b-c)^{n/1} \binom{c}{n}}{2^n x^{n-c} V (1 \mp x)^{2(c-n)+1}} - \sum_0^{b-1} (\pm 1)^n \frac{1^{n/2}}{2^{n/2}} (n-b+1)^{c/1} x^n \right\}, (c \leq b-1). \quad (m)$$

$$\int_0^1 \frac{y^{br+r-1} (1-y^r)^a dy}{V (1-y^r) (1-xy^r)^{2c+1}} = \frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})}{r \Gamma(c+\frac{1}{2})} \frac{d^b}{dx^b} \sum_{m=0}^{a+b-c} \frac{(-1)^m x^{b-c-m-\frac{1}{2}}}{m! (a+b-c-m)!} \left\{ \lg \frac{1+Vx}{1-Vx} - 2 \sum_0^{c+m-1} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}, (c \leq a+b). \quad (n)$$

$$\int_0^1 \frac{y^{br+r-1} (1-y^r)^a dy}{V (1-y^r) (1+xy^r)^{2c+1}} = (-1)^c \frac{2 \Gamma(a+\frac{1}{2})}{r \Gamma(c+\frac{1}{2})} \frac{d^b}{dx^b} \sum_{m=0}^{a+b-c} \frac{x^{b-c-m-\frac{1}{2}}}{m! (a+b-c-m)!} \left\{ \operatorname{arctg} Vx - \sum_0^{c+m-1} (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}, (c \leq a+b). \quad (p)$$

Door verschillende waarden aan a , b , c , x en r toe te kennen, kan men hieruit weer vele integralen berekenen. We zullen ons slechts tot de volgende voorbeelden bepalen.

1°. Stel in (m) achtereenvolgens:

$$b = 1, c = 0, r = 2, x = q; \quad b = 2, c = 0, r = 2, x = q,$$

dan volgen:

$$\int_0^1 \frac{y^2}{(1 \mp q y^2)} \cdot \frac{dy}{V 1-y^2} = \mp \frac{\pi}{2q} \left\{ 1 - \frac{1}{V 1 \mp q} \right\}. \quad \dots \dots \dots (57)^+$$

$$\int_0^1 \frac{y^4}{(1 \mp q y^2)} \cdot \frac{dy}{V 1-y^2} = \frac{\pi}{4q^2} \left\{ \mp q - 2 + \frac{2}{V 1 \mp q} \right\}. \quad \dots \dots \dots (58)^+$$

2°. Stel in (n) en (p): $r = 2$, $x = p^2$, en achtereenvolgens: $b = 0$, $c = a$; $b = 1$, $c = a + 1$, dan volgen:

$$\int_0^1 \frac{y (1-y^2)^a dy}{V (1-y^2) (1-p^2 y^2)^{2a+1}} = \frac{1}{2 p^{2a+1}} \left\{ \lg \frac{1+p}{1-p} - 2 \sum_0^{a-1} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad \dots \quad (59)$$

$$\int_0^1 \frac{y (1-y^2)^a dy}{V (1-y^2) (1+p^2 y^2)^{2a+1}} = \frac{(-1)^a}{p^{2a+1}} \left\{ \operatorname{arctg} p - \sum_0^{a-1} (-1)^n \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad \dots \quad (60)$$

$$\int_0^1 \frac{y^3 (1-y^2)^a dy}{V (1-y^2) (1-p^2 y^2)^{2a+3}} = \frac{1}{(2a+1) p^{2a+3}} \left\{ \frac{1}{1-p^2} - \frac{2a+1}{2p} \lg \frac{1+p}{1-p} + 2 \sum_0^a \frac{a-n}{2n+1} p^{2n} \right\}. \quad (61)$$

$$\int_0^1 \frac{y^2 (1-y^2)^a dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+p^2 y^2)^{2a+3}}} = \frac{(-1)^{a+1}}{(2a+1)p^{2a+3}} \left\{ \frac{1}{1+p^2} - \frac{2a+1}{p} \operatorname{arctg} p + 2 \sum_0^a (-1)^n \frac{a-n}{2n+1} p^{2n} \right\}. \quad (62)$$

12. Ten slotte krijgen we bij de substitutie: $f(x) = \frac{x^{q-1}}{(1 \mp x)^r}$ nog de gevallen, waarin $r - p - q$ niet geheel is; volgens de betrekkingen (XXXIV) tot (XXXVII) geven deze aanleiding tot de vergelijkingen:

$$\int_0^1 \frac{y^{br+\frac{r}{2}-1} (1-y^r)^a dy}{(1-xy^r)^{c+1}} = \frac{\Gamma(a+1)}{r\Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m x^{c-b-m-\frac{1}{2}}}{m!(a-m)!} \left\{ \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 2 \sum_0^{b+m-1} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}. \quad (q)$$

$$\int_0^1 \frac{y^{br+\frac{r}{2}-1} (1-y^r)^a dy}{(1+xy^r)^{c+1}} = (-1)^b \frac{\Gamma(a+1)}{r\Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} \sum_{m=0}^a \frac{x^{c-b-m-\frac{1}{2}}}{m!(a-m)!} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sum_0^{b+m-1} (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}. \quad (r)$$

$$\int_0^1 \frac{y^{br+r-1} dy}{(1-xy^r)^{c+1} \sqrt{1-y^r}} = \frac{2}{r\Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} x^{c-b-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \sum_0^{b-1} \frac{2^{n/2}}{3^{n/2}} x^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \quad (s)$$

$$\int_0^1 \frac{y^{br+r-1} dy}{(1+xy^r)^{c+1} \sqrt{1-y^r}} = \frac{(-1)^b \cdot 2}{r\Gamma(c+1)} \frac{d^c}{dx^c} x^{c-b-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\lg(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}} - \sum_0^{b-1} (-1)^n \frac{2^{n/2}}{3^{n/2}} x^{n+\frac{1}{2}} \right\}. \quad (t)$$

We zien, dat ook deze vergelijkingen toelaten vele bepaalde integralen te berekenen.

Stel in (s) en (t): $c = 0$, $r = 1$, $x = p^2$, dan volgen:

$$\int_0^1 \frac{y^b dy}{(1-p^2 y) \sqrt{1-y}} = \frac{2 \arcsin p}{p^{2b+1} \sqrt{1-p^2}} - \frac{1}{p^{2b}} \sum_0^{b-1} \frac{2^{n/2}}{3^{n/2}} p^{2n} \quad \dots \quad (63)^*$$

$$\int_0^1 \frac{y^b dy}{(1+p^2 y) \sqrt{1-y}} = (-1)^b \frac{2 \lg(p + \sqrt{1+p^2})}{p^{2b+1} \sqrt{1+p^2}} - \frac{(-1)^b}{p^{2b}} \sum_0^{b-1} (-1)^n \frac{2^{n/2}}{3^{n/2}} p^{2n}. \quad (64)$$

Op gelijke wijze kunnen we uit de andere vergelijkingen bijzondere waarden aan a , b , c , r en x toekennen; de waarden dier integralen zijn dan gemakkelijk te vinden.

13. Eenige belangrijke formules vindt men, wanneer men in de eerste integraal van formule (B) substitueert: $f(x) = x^{\frac{\nu}{2}} I_{\nu}(\sqrt{x})$. Vervangt men daarna x door x^2 en neemt men $r = 2$, dan krijgt men volgens (XXXVIII) en (XXXIX):

$$\int_0^1 I_{\nu}(xy) y^{\nu+1} (1-y^2)^{\varrho} dy = \frac{2^{\varrho} \Gamma(\varrho+1)}{x^{\varrho+1}} I_{\nu+\varrho+1}(x), \left(\begin{matrix} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{matrix} \right) \quad \dots \quad (v)$$

$$\int_0^1 I_{-\alpha}(xy) y^{1-\alpha} (1-y^2)^{\varrho} dy = \frac{2^{\varrho} \Gamma(\varrho+1)}{x^{\varrho+1}} \left\{ I_{\varrho-\alpha+1}(x) - \sum_0^{\alpha-1} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\varrho-\alpha+1}}{n! \Gamma(n+\varrho-\alpha+2)} \right\}, \left(\begin{matrix} \alpha \text{ pos. geheel} \\ R(\varrho) > -1 \end{matrix} \right), \quad (w)$$

Stellen we $y = \cos \varphi$, dan kunnen we voor deze integralen ook het volgende schrijven, daar voor α geheel: $I_{-\alpha}(z) = (-1)^{\alpha} I_{\alpha}(z)$:

$$\frac{x^{\varrho+1}}{2^{\varrho} \Gamma(\varrho+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\nu}(x \cos \varphi) \cos^{\nu+1} \varphi \cdot \sin^{2\varrho+1} \varphi d\varphi = I_{\nu+\varrho+1}(x), \left(\begin{matrix} R(\nu) > -1 \\ R(\varrho) > -1 \end{matrix} \right) \quad \dots \quad (65)$$

$$\begin{aligned} & (-1)^{\alpha} \frac{x^{\varrho+1}}{2^{\varrho} \Gamma(\varrho+1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\alpha}(x \cos \varphi) \cos^{1-\alpha} \varphi \cdot \sin^{2\varrho+1} \varphi d\varphi = \\ & = I_{\varrho-\alpha+1}(x) - \sum_0^{\alpha-1} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\varrho-\alpha+1}}{n! \Gamma(n+\varrho-\alpha+2)}, \left(\begin{matrix} \alpha \text{ pos. geheel} \\ R(\varrho) > -1 \end{matrix} \right) \quad \dots \quad (66) \end{aligned}$$

Stelt men in (65): $\nu = -\frac{1}{2}$, $\varrho = n - \frac{1}{2}$, dan vindt men, daar $I_{-\frac{1}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos y$,

op eenvoudige wijze de bekende uitdrukking:

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \varphi) \sin^{2n} \varphi d\varphi, \left(R(n) > -\frac{1}{2}\right) \quad (67)$$

Formule (65) komt in denzelfden vorm voor in 't «Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen» von Dr. NIELS NIELSEN (p. 181; 1904), en is 't eerst gegeven door SONINE (Mathem. Annalen Bd. 16, p. 36; 1880). Kan $\nu + \varrho + 1$ daarin slechts waarden hebben > -1 , — in (66) daarentegen kan $\varrho - \alpha + 1$ alle waarden vertegenwoordigen, zoodat men met behulp van (67) tot eene uitdrukking kan komen voor $I_\lambda(x)$ (nu λ geheel willekeurig), waarin eene dubbele integraal optreedt. Om haar in de eenvoudigste gedaante te krijgen, zullen we eerst de integralen van (66) en (67) door 't invoeren van nieuwe veranderlijken andere grenzen geven.

Stel in (66): $\varrho = \lambda + \alpha - 1$, en neem als nieuwe veranderlijke: $y = x \cos \varphi$, dan krijgt men na eenige herleiding:

$$I_\lambda(x) = \frac{(-1)^\alpha}{2^{\lambda+\alpha-1} \Gamma(\lambda+\alpha) x^\lambda} \int_0^x I_\alpha(y) \cdot (x^2 - y^2)^{\lambda+\alpha-1} y^{1-\alpha} dy + \sum_0^{\alpha-1} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}}{n! \Gamma(n+\lambda+1)}, \left(\alpha \text{ pos. geheel}, R(\lambda) > -\alpha\right),$$

terwijl de substitutie: $n = \alpha$, $x = y$ en $\cos \varphi = \frac{z}{y}$ in (67) ons voert tot:

$$I_\alpha(y) = \frac{1}{2^{\alpha-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} y^\alpha \int_0^y (y^2 - z^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos z \cdot dz.$$

Vervangen we dus in de voorgaande integraal $I_\alpha(y)$ door deze waarde, dan vindt men:

$$I_\lambda(x) = \frac{(-1)^\alpha}{2^{\lambda+\alpha-2} \cdot 4^{\alpha/2} \cdot \pi \Gamma(\lambda+\alpha) x^\lambda} \int_0^x \frac{(x^2 - y^2)^{\lambda+\alpha-1}}{y^{2\alpha-1}} dy \int_0^y (y^2 - z^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos z dz + \sum_0^{\alpha-1} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}}{n! \Gamma(n+\lambda+1)}, (R(\lambda) > -\alpha, \text{ en } \alpha \text{ pos. geheel}). \quad (68)$$

Hierin kunnen we nu aan α steeds zoodanige waarden geven, dat $R(\lambda) > -\alpha$.

14. Ten slotte resten ons nog de betrekkingen (XL) en (XLI), waarvan we gebruik kunnen maken; we komen dan tot integralen, waarbij de hypergeometrische reeks onder het integraalteeken voorkomt. Stellen we in de eerste integraal van formule (B): $r = 1$, en vervangen we xy door y , dan gaat ze over in:

$$\int_0^x (x-y)^{p-1} f(y) dy = \Gamma(p) \int_0^1 f(x) dx^p, (p > 0),$$

en nemen we nu achtereenvolgens: $f(x) = x^{\delta-1} F(\alpha \beta \delta x)$, en $f(x) = x^{\alpha-1} F(\delta \beta \gamma x)$, dan krijgen we blijkens de genoemde betrekkingen:

$$\int_0^x F(\alpha \beta \delta y) \cdot y^{\delta-1} (x-y)^{\gamma-\delta-1} dy = \frac{\Gamma(\gamma-\delta) \Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} F(\alpha \beta \gamma x), \left(\begin{matrix} \gamma > \delta > 0 \\ x < 1 \end{matrix}\right). \quad (x)$$

$$\int_0^x F(\delta \beta \gamma y) \cdot y^{\alpha-1} (x-y)^{\delta-\alpha-1} dy = \frac{\Gamma(\delta-\alpha) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\delta)} x^{\delta-1} F(\alpha \beta \gamma x), \left(\begin{matrix} \delta > \alpha > 0 \\ x < 1 \end{matrix}\right). \quad (y)$$

Stelt men in (x): $\delta = \alpha$, dan volgt, daar: $F(\alpha \beta \alpha y) = \frac{1}{(1-y)^\beta}$:

$$\int_0^x \frac{y^{\alpha-1} (x-y)^{\gamma-\alpha-1}}{(1-y)^\beta} dy = \frac{\Gamma(\gamma-\alpha) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} F(\alpha \beta \gamma x), \left(\begin{matrix} \gamma > \alpha > 0 \\ x < 1 \end{matrix}\right). \quad (z)$$

Indien in (y) en (z) niet aan de genoemde voorwaarden wordt voldaan, maar respectievelijk aan: $\delta > \beta > 0$ en $\gamma > \beta > 0$, behoeft men in die vergelijkingen slechts α en β onderling te verwisselen.

15. We hebben ons tot nu toe hoofdzakelijk beziggehouden met het berekenen van integralen met grenzen 0 en 1. We kunnen komen tot integralen met andere grenzen door in de integralen van formule (B) nieuwe veranderlijken aan te nemen. Stelt men daarin $r = 1$, dan gaat ze over in:

$$\int_0^1 (1-y)^{p-1} f(xy) dy = \int_0^1 y^{p-1} f\{x(1-y)\} dy = \frac{\Gamma(p)}{x^p} \int f(x) dx^p, \quad (p > 0).$$

Substitueert men nu: $y = \frac{1}{1+z^r}$, dan krijgt men de formule:

$$\int_0^\infty \frac{z^{pr-1}}{(1+z^r)^{p+1}} f\left(\frac{x}{1+z^r}\right) dz = \int_0^\infty \frac{z^{r-1}}{(1+z^r)^{p+1}} f\left(\frac{xz^r}{1+z^r}\right) dz = \frac{\Gamma(p)}{r x^p} \int f(x) dx^p, \quad \left(\begin{matrix} r > 0 \\ p > 0 \end{matrix}\right). \quad (C)$$

De willekeurige grenzen s en t krijgt men door de substitutie: $y = \frac{t^r - z^r}{t^r - s^r}$, waardoor men komt op:

$$\int_s^t z^{r-1} (z^r - s^r)^{p-1} f\left(x \frac{t^r - z^r}{t^r - s^r}\right) dz = \int_s^t z^{r-1} (t^r - z^r)^{p-1} f\left(x \frac{z^r - s^r}{t^r - s^r}\right) dz = \left(\frac{t^r - s^r}{x}\right)^p \frac{\Gamma(p)}{r} \int f(x) dx^p, \quad \left(\begin{matrix} r > 0 \\ p > 0 \end{matrix}\right). \quad (D)$$

Hieruit leidt men af:

1°. Voor $s = 0$:

$$\int_0^t z^{pr-1} f\left\{\frac{x}{t^r} (t^r - z^r)\right\} dz = \int_0^t z^{r-1} (t^r - z^r)^{p-1} f\left(\frac{xz^r}{t^r}\right) dz = \left(\frac{t^r}{x}\right)^p \frac{\Gamma(p)}{r} \int f(x) dx^p. \quad (E)$$

2°. Voor: $r = 1$, $s = -1$ en $t = 1$:

$$\int_{-1}^1 (1+z)^{p-1} f\left\{\frac{x}{2} (1-z)\right\} dz = \int_{-1}^1 (1-z)^{p-1} f\left\{\frac{x}{2} (1+z)\right\} dz = \frac{2^p \Gamma(p)}{x^p} \int f(x) dx^p. \quad (F)$$

Vervangt men in formule (B): y door $\frac{1}{z}$, dan ontstaat:

$$\int_1^\infty \frac{(z^r - 1)^{p-1}}{z^{pr+1}} f\left(\frac{x}{z^r}\right) dz = \int_1^\infty \frac{1}{z^{pr+1}} f\left\{\frac{x}{z^r} (z^r - 1)\right\} dz = \frac{\Gamma(p)}{r x^p} \int f(x) dx^p. \quad (G)$$

terwijl in diezelfde formule de substitutie: $y = e^{-rz}$ geeft:

$$\int_0^\infty (1 - e^{-rz})^{p-1} f(x e^{-rz}) dz = \int_0^\infty e^{-prz} f\{x(1 - e^{-rz})\} dz = \frac{\Gamma(p)}{r x^p} \int f(x) dx^p. \quad (H)$$

16. Het spreekt vanzelf, dat we met deze verschillende formules niet alle substituties voor $f(x)$ zullen herhalen, die we in formule (B) hebben uitgevoerd. Tot eenige voorbeelden zullen wij ons bepalen om slechts aan te toonen, hoe gemakkelijk ook deze nieuwe formules ons in staat stellen vele bepaalde integralen te vinden.

Wanneer we in formule (C) substitueeren: $f(x) = x^{q-2} \lg(1-x)$, en alleen die waarden aan p en q toekennen, die in het vorige hoofdstuk aanleiding gaven tot de betrekkingen (IX), (X) en (XI), krijgen we, zoo in de eerste twee uitdrukkingen gesteld wordt: $1-x = p^2$, $r = 2$, en in de derde: $x-1 = p^2$, $r = 2$, de volgende integralen:

$$\int_0^\infty \lg \frac{p^2 + z^2}{1 + z^2} \cdot \frac{dz}{z^2} = \int_0^\infty \lg \frac{1 + p^2 z^2}{1 + z^2} \cdot \frac{dz}{z^2} = \pi (p-1) \dots \dots \dots (69)$$

$$\int_0^\infty \lg \frac{p^2 + z^2}{1 + z^2} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \int_0^\infty \lg \frac{1 + p^2 z^2}{1 + z^2} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \pi \lg \frac{p+1}{2} \dots \dots \dots (70)$$

$$\int_0^\infty \lg \frac{z^2 - p^2}{z^2 + 1} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \int_0^\infty \lg \frac{1 - p^2 z^2}{1 + z^2} \cdot \frac{dz}{z \sqrt{1 + z^2}} = -(\arccos p)^2 \dots \dots \dots (71)$$

Vervangen we hierin p door q , en trekken we de komende integralen van deze af, dan volgen:

$$\int_0^\infty \lg \frac{p^2 + z^2}{q^2 + z^2} \cdot dz = \int_0^\infty \lg \frac{1 + p^2 z^2}{1 + q^2 z^2} \cdot \frac{dz}{z^2} = \pi (p - q). \quad (72)$$

$$\int_0^\infty \lg \frac{p^2 + z^2}{q^2 + z^2} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \int_0^\infty \lg \frac{1 + p^2 z^2}{1 + q^2 z^2} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \pi \lg \frac{p + 1}{q + 1}. \quad (73)$$

$$\int_0^\infty \lg \frac{z^2 - p^2}{z^2 - q^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \int_0^\infty \lg \frac{1 - p^2 z^2}{1 - q^2 z^2} \cdot \frac{dz}{z \sqrt{1 + z^2}} = (\arccos q)^2 - (\arccos p)^2. \quad (74)$$

Neemt men hierin: $p = 1$ en $q = 0$, dan krijgt men:

$$\int_0^\infty \lg \frac{1 + z^2}{z^2} \cdot dz = \int_0^\infty \lg (1 + z^2) \cdot \frac{dz}{z^2} = \pi. \quad (75); \quad \int_0^\infty \lg \frac{1 + z^2}{z^2} \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \int_0^\infty \lg (1 + z^2) \cdot \frac{dz}{1 + z^2} = \pi \lg 2. \quad (76)$$

en

$$\int_0^\infty \lg \frac{z^2 - 1}{z^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int_0^\infty \lg (1 - z^2) \cdot \frac{dz}{z \sqrt{1 + z^2}} = \frac{\pi}{4}. \quad (77)$$

Voert men dezelfde substituties uit in formule (D), dan krijgt men voor $r = 1$ de integralen:

$$\int_s^t \lg \frac{(1-x)t-s+xz}{t-s} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-s)(t-z)^3}} = \int_s^t \lg \frac{t-(1-x)s-xz}{t-s} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(t-z)(z-s)^3}} = \frac{2\pi}{t-s} (\sqrt{1-x}-1). \quad (\alpha_1)$$

$$\int_s^t \lg \frac{(1-x)t-s+xz}{t-s} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-s)(t-z)}} = \int_s^t \lg \frac{t-(1-x)s-xz}{t-s} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(t-z)(z-s)}} = 2\pi \lg \frac{1+\sqrt{1-x}}{2}. \quad (\alpha_2)$$

$$\int_s^t \lg \frac{(1-x)t-s+xz}{t-s} \cdot \frac{dz}{(t-z)\sqrt{z-s}} = \int_s^t \lg \frac{t-(1-x)s-xz}{t-s} \cdot \frac{dz}{(z-s)\sqrt{t-z}} = -\frac{2}{\sqrt{t-s}} (\arcsin \sqrt{x})^2. \quad (\alpha_3)$$

En daar:

$$\int_s^t \lg (t-s) \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-s)(t-z)}} = \lg (t-s) \int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy = \pi \lg (t-s),$$

volgt uit (α_2) :

$$\int_s^t \lg \{(1-x)t-s+xz\} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-s)(t-z)}} = \int_s^t \lg \{t-(1-x)s-xz\} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(t-z)(z-s)}} = 2\pi \lg \frac{(1+\sqrt{1-x})\sqrt{t-s}}{2}. \quad (\alpha_4)$$

(α_1) , (α_2) en (α_3) gaan voor $x = t-s$ en $x = 1$ respectievelijk over in:

$$\int_s^t \lg (1-t+z) \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-s)(t-z)^3}} = \int_s^t \lg (1+s-z) \cdot \frac{dz}{\sqrt{(t-z)(z-s)^3}} = \frac{2\pi}{t-s} (\sqrt{1-t+s}-1). \quad (78)$$

$$\int_s^t \lg (1-t+z) \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-s)(t-z)}} = \int_s^t \lg (1+s-z) \cdot \frac{dz}{\sqrt{(t-z)(z-s)}} = 2\pi \lg \frac{1+\sqrt{1-t+s}}{2}. \quad (79)$$

$$\int_s^t \lg (1-t+z) \cdot \frac{dz}{(t-z)\sqrt{z-s}} = \int_s^t \lg (1+s-z) \cdot \frac{dz}{(z-s)\sqrt{t-z}} = -\frac{2}{\sqrt{t-s}} (\arcsin \sqrt{t-s})^2. \quad (80)$$

$$\int_s^t \lg \frac{z-s}{t-s} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-s)(t-z)^3}} = \int_s^t \lg \frac{t-z}{t-s} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(t-z)(z-s)^3}} = \frac{2\pi}{s-t}. \quad (81)$$

$$\int_s^t \lg \frac{z-s}{t-s} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-s)(t-z)}} = \int_s^t \lg \frac{t-z}{t-s} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(t-z)(z-s)}} = -2\pi \lg 2. \quad (82)$$

$$\int_s^t \lg \frac{z-s}{t-s} \cdot \frac{dz}{(t-z)\sqrt{z-s}} = \int_s^t \lg \frac{t-z}{t-s} \cdot \frac{dz}{(z-s)\sqrt{t-z}} = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{t-s}}. \quad (83)$$

Voor $x = 1$ gaat (α_4) over in:

$$\int_s^t \lg (z-s) \cdot \frac{dz}{\sqrt{(z-s)(t-z)}} = \int_s^t \lg (t-z) \cdot \frac{dz}{\sqrt{(t-z)(z-s)}} = \pi \lg \frac{t-s}{4}. \quad (84)$$

Nemen we in deze vergelijkingen: $s = 0$, dan komen we op integralen, die ook rechtstreeks kunnen verkregen worden, onder dezelfde substituties voor $f(x)$, uit formule (E).

Wanneer men die substituties uitvoert in de tweede integraal van formule (H), en neemt: $x = 1$, krijgt men de volgende integralen:

$$\int_0^\infty \frac{z e^{rz}}{V(e^{rz}-1)^3} dz = \frac{2\pi}{r^2} \quad (85); \quad \int_0^\infty \frac{z dz}{V e^{rz}-1} = \frac{2\pi}{r^2} \lg 2 \quad (86); \quad \int_0^\infty \frac{z dz}{e^{\frac{r}{2}z} - e^{-\frac{r}{2}z}} = \frac{\pi^2}{2r^2} \quad (87)^+$$

17. Wanneer men in de tweede integraal van formule (E) en in de eerste integraal van formule (G) substitueert: $f_1(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, terwijl men zich bepaalt tot die waarden van p en q , welke ons voerden tot de betrekkingen (XVI) en (XVIII), vindt men, zoo $r = 2$ en $x = p^2$:

$$\int_0^t z (t^2 - z^2)^a \lg \frac{t+pz}{t-pz} \cdot \frac{dz}{V t^2 - z^2} = (-1)^{a+1} \frac{\pi t^{2a+1}}{(2a+1)p^{2a+1}} \left\{ (1-p^2)^{a+\frac{1}{2}} - \sum_0^a \frac{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} p^{2n} \right\} \quad (\beta_1)$$

$$\int_0^t \lg \frac{t+pz}{t-pz} \cdot \frac{dz}{z V t^2 - z^2} = \frac{\pi}{t} \arcsin p \quad \dots \quad (88)$$

$$\int_1^\infty (z^2-1)^a \lg \frac{z+p}{z-p} \cdot \frac{dz}{z^{2a} V z^2-1} = (-1)^{a+1} \frac{\pi}{(2a+1)p^{2a+1}} \left\{ (1-p^2)^{a+\frac{1}{2}} - \sum_0^a \frac{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} p^{2n} \right\} \quad (\beta_2)$$

$$\int_1^\infty \lg \frac{z+p}{z-p} \cdot \frac{dz}{V z^2-1} = \pi \arcsin p \quad \dots \quad (89)$$

Uit (β_1) en (β_2) kan men nu weer vele integralen afleiden door verschillende waarden aan a (pos. geheel of nul) en p (willekeurig) toe te kennen.

18. Zoo volgen uit de substitutie: $f_2(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ in de tweede integraal der formules (C) en (E) en in de eerste integraal van formule (G), in verband met de betrekkingen (XVII) en (XIX), wanneer men neemt $r = 2$, en in (C): $x = p^2$, in (E): $x = p^2 t^2$, in (G): $x = \frac{1}{p^2}$:

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg} \frac{pz}{V 1+z^2} \cdot \frac{dz}{V (1+z^2)^{2a+3}} = \frac{\pi}{2(2a+1)p^{2a+1}} \left\{ (1+p^2)^{a+\frac{1}{2}} - \sum_0^a (-1)^n \frac{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} p^{2n} \right\} \quad (\gamma_1)$$

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg} \frac{pz}{V 1+z^2} \cdot \frac{dz}{z V 1+z^2} = \frac{\pi}{2} \lg (p + V 1+p^2) \quad \dots \quad (90)^+$$

$$\int_0^t \operatorname{arctg} pz \cdot \frac{(t^2-z^2)^a z dz}{V t^2 - z^2} = \frac{\pi}{2(2a+1)p^{2a+1}} \left\{ (1+p^2 t^2)^{a+\frac{1}{2}} - \sum_0^a (-1)^n \frac{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} p^{2n} t^{2n} \right\} \quad (\gamma_2)$$

$$\int_0^t \operatorname{arctg} pz \cdot \frac{dz}{z V t^2 - z^2} = \frac{\pi}{2t} \lg (pt + V 1+p^2 t^2) \quad \dots \quad (91)$$

$$\int_1^\infty \operatorname{arccotg} pz \cdot \frac{(z^2-1)^a dz}{z^{2(a+1)} V z^2-1} = \frac{\pi}{2(2a+1)} \left\{ (1+p^2)^{a+\frac{1}{2}} - \sum_0^a (-1)^n \frac{\left(-a-\frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} p^{2(a-n)+1} \right\} \quad (\gamma_3)$$

$$\int_1^\infty \operatorname{arccotg} pz \cdot \frac{dz}{V z^2-1} = \frac{\pi}{2} \lg \frac{1+V 1+p^2}{p} \quad \dots \quad (92)$$

19. Door in de tweede integraal van formule (E) te nemen: $f(x) = x^{b-\frac{1}{2}} \lg(1 \pm \sqrt{x})$, $p = a + 1$, $r = 2$ en $x = z^2$, vindt men volgens (XX) en (XXII) gecombineerd:

$$\int_0^t z^{2b} (t^2 - z^2)^a \lg \frac{t \pm sz}{t} \cdot dz = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(a + b + \frac{3}{2}\right)} t^{2a+2b+1} \lg(1 \pm s) \pm$$

$$\pm \Gamma(a+1) t^{2a+2b+1} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m s^{-(2b+2m+1)}}{m! (a-m)! (2b+2m+1)} \left\{ \lg(1 \pm s) + \sum_{n=1}^{b+m} \frac{s^{2n}}{2n} \mp \sum_{n=0}^{b+m} \frac{s^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (\delta_1)$$

En daar:

$$\int_0^t z^{2b} (t^2 - z^2)^a \lg t \cdot dz = \frac{t^{2a+2b+1} \lg t}{2} \int_0^1 (1-y)^a \cdot y^{b-\frac{1}{2}} dy = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(a + b + \frac{3}{2}\right)} t^{2a+2b+1} \lg t,$$

komt er na sommatie:

$$\int_0^t z^{2b} (t^2 - z^2)^a \lg(t \pm sz) dz = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(a + b + \frac{3}{2}\right)} t^{2a+2b+1} \lg t (1 \pm s) \pm$$

$$\pm \Gamma(a+1) t^{2a+2b+1} \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m s^{-(2b+2m+1)}}{m! (a-m)! (2b+2m+1)} \left\{ \lg(1 \pm s) + \sum_{n=1}^{b+m} \frac{s^{2n}}{2n} \mp \sum_{n=0}^{b+m} \frac{s^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (\delta_2)$$

Voor $a = 0$ krijgt men hieruit:

$$\int_0^t z^{2b} \lg(t \pm sz) dz = \frac{t^{2b+1}}{(2b+1) s^{2b+1}} \left\{ s^{2b+1} \lg t (1 \pm s) \pm \lg(1 \pm s) \pm \sum_{n=1}^b \frac{s^{2n}}{2n} - \sum_{n=0}^b \frac{s^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (93)$$

Had men voor de substitutie genomen: $f(x) = x^{-1} \lg(1 \pm \sqrt{x})$, $p = \frac{1}{2}$, $r = 2$ en $x = t^2$, dan volgde volgens (XXI) en (XXIII) gecombineerd:

$$\int_0^t \lg(1 \pm z) \cdot \frac{dz}{z \sqrt{t^2 - z^2}} = \pm \frac{\pi}{2t} \arcsin t - \frac{1}{2t} (\arcsin t)^2. \quad (94)$$

Wanneer men beide genoemde substituties uitvoert in de eerste integraal van formule (G), terwijl $r = 2$, $x = p^2$, komt men tot:

$$\int_1^\infty \frac{(z^2 - 1)^a}{z^{2(a+b+1)}} \lg \frac{z \pm p}{z} \cdot dz = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(a + b + \frac{3}{2}\right)} \lg(1 \pm p) \pm$$

$$\pm \Gamma(a+1) \sum_{m=0}^a \frac{(-1)^m p^{-(2b+2m+1)}}{m! (a-m)! (2b+2m+1)} \left\{ \lg(1 \pm p) + \sum_{n=1}^{b+m} \frac{p^{2n}}{2n} \mp \sum_{n=0}^{b+m} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (\delta_3)$$

$$\int_1^\infty \lg \frac{z \pm p}{z} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \pm \frac{\pi}{2} \arcsin p - \frac{1}{2} (\arcsin p)^2. \quad (95)$$

Uit (δ_3) volgt voor $a = 0$:

$$\int_1^\infty \lg \frac{z \pm p}{z} \cdot \frac{dz}{z^{2(b+1)}} = \frac{1}{(2b+1) p^{2b+1}} \left\{ (p^{2b+1} \pm 1) \lg(1 \pm p) \pm \sum_{n=1}^b \frac{p^{2n}}{2n} - \sum_{n=0}^b \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (96)$$

20. De substitutie: $f(x) = \frac{(\arcsin \sqrt{x})^2}{x \sqrt{x}}$, $p = \frac{1}{2}$, geeft bij $r = 2$ volgens (XXVI) in formule (C), zoo $x = 1$:

$$\int_0^\infty (\operatorname{arccotg} z)^2 dz = \int_0^\infty (\operatorname{arctg} z)^2 \frac{dz}{z^2} = \pi \lg 2. \quad (97)$$

in de tweede integraal van formule (E), zoo $x = p^2 t^2$:

$$\int_0^t (\arcsin pz)^2 \cdot \frac{dz}{z^2 \sqrt{t^2 - z^2}} = \frac{\pi}{2t^2} \left\{ (1 + pt) \lg(1 + pt) + (1 - pt) \lg(1 - pt) \right\}. \quad (98)$$

en in de eerste integraal van formule (G), zoo $x = \frac{1}{p^2}$:

$$\int_1^\infty (\operatorname{arccosec} pz)^2 \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\pi}{2p} \left\{ (p+1) \lg(p+1) - 2p \lg p + (p-1) \lg(p-1) \right\}. \quad (99)$$

21. Wanneer we eindelijk nog substitueeren: $f(x) = \frac{x^{q-1}}{(1-x)^{p+q+a}}$ in formule (C), krijgen we volgens (XXIX), na herleiding volgens het theorema van LEIBNITZ, zoo: $r=1$, en $1-x=t$:

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}(1+z)^a dz}{(t+z)^{p+q+a}} = \int_0^\infty \frac{z^{q-1}(1+z)^a dz}{(1+tz)^{p+q+a}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{t^q \Gamma(p+q+a)} \sum_0^a (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \left(\frac{1-t}{t}\right)^n. \quad (\varepsilon_1)$$

Na substitutie in de eerste integraal van formule (D) komt er, zoo $r=1$ en $x = \frac{g(t-s)}{gt+h}$:

$$\int_s^t \frac{(z-s)^{p-1}(t-z)^{q-1}}{(g+hz)^{p+q+a}} dz = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+a)} \cdot \frac{(t-s)^{p+q-1}}{(h+gs)^q(h+gt)^{p+a}} \sum_0^a (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \left(\frac{gt}{h+gs}\right)^n. \quad (\varepsilon_2)$$

Hieruit volgt voor $s=0$:

$$\int_0^t \frac{z^{p-1}(t-z)^{q-1}}{(g+hz)^{p+q+a}} dz = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+a)} \cdot \frac{t^{p+q-1}}{h^q(h+gt)^{p+a}} \sum_0^a (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \left(\frac{gt}{h}\right)^n. \quad (\varepsilon_3)$$

Na substitutie in formule (F) volgt, zoo $x = \frac{h-g}{h+k}$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{(1+z)^{p-1}(1-z)^{q-1} dz}{\{(g+h+2k)+(g-h)z\}^{p+q+a}} &= \int_{-1}^1 \frac{(1-z)^{p-1}(1+z)^{q-1} dz}{\{(g+h+2k)-(g-h)z\}^{p+q+a}} = \\ &= \frac{1}{2^{a+1}(h+k)^{p+a}(g+k)^q} \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+a)} \sum_0^a (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \left(\frac{h-g}{g+k}\right)^n. \quad (\varepsilon_4) \end{aligned}$$

terwijl we met behulp van de eerste integraal van formule (G) krijgen, zoo $x = \frac{g}{h}$:

$$\int_1^\infty \frac{z^a(z-1)^{p-1} dz}{(hz-g)^{p+q+a}} = \frac{1}{h^{p+a}(h-g)^q} \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+a)} \sum_0^a (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \left(\frac{g}{h-g}\right)^n. \quad (\varepsilon_5)$$

Kennen we nu in deze vergelijkingen (ε_1) tot (ε_5) aan p en q verschillende waarden toe, dan krijgen we weer vele bepaalde integralen, zooals we reeds hebben aangetoond met vergelijking (k_1). We zullen dit hier dus niet herhalen. Voor $a=0$ krijgen we hieruit:

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1} dz}{(t+z)^{p+q}} = \int_0^\infty \frac{z^{q-1} dz}{(1+tz)^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{t^q \Gamma(p+q)} \cdot \dots \quad (100)$$

$$\int_s^t \frac{(z-s)^{p-1}(t-z)^{q-1} dz}{(g+hz)^{p+q}} = \frac{(t-s)^{p+q-1}}{(h+gs)^q(h+gt)^p} \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \dots \quad (101)^*$$

$$\int_0^t \frac{z^{p-1}(t-z)^{q-1} dz}{(g+hz)^{p+q}} = \frac{t^{p+q-1}}{h^q(h+gt)^p} \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \dots \quad (102)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+z)^{p-1}(1-z)^{q-1} dz}{\{(g+h+2k)+(g-h)z\}^{p+q}} = \int_{-1}^1 \frac{(1-z)^{p-1}(1+z)^{q-1} dz}{\{(g+h+2k)-(g-h)z\}^{p+q}} = \frac{1}{(g+k)^q(h+k)^p} \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)} \quad (103)^*$$

$$\int_1^\infty \frac{(z-1)^{p-1} dz}{(hz-g)^{p+q}} = \frac{1}{h^p(h-g)^q} \cdot \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \dots \quad (104)$$

22. Nu blijft ons nog over aan te toonen, hoe men, met behulp van formule (B), komt tot integralen van goniometrische functies, genomen tusschen de grenzen 0 en $\frac{\pi}{4}$, en 0 en $\frac{\pi}{2}$.

Stellen we daartoe in formule (B) achtereenvolgens: $y = \operatorname{tg} z$, $y = \sin 2z$ en $y = \sin z$, dan krijgt men:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{r-1} z \cdot (1 - \operatorname{tg}^r z)^{p-1} f(x \operatorname{tg}^r z) \frac{dz}{\cos^2 z} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{pr-1} z \cdot f\{x(1 - \operatorname{tg}^r z)\} \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{\Gamma(p)^p}{r x^p} \int f(x) dx^p. \quad (K)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{r-1} 2z \cdot (1 - \sin^r 2z)^{p-1} f(x \sin^r 2z) \cos 2z \cdot dz = \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{pr-1} 2z \cdot f\{x(1 - \sin^r 2z)\} \cos 2z \cdot dz = \frac{\Gamma(p)^p}{2 r x^p} \int f(x) dx^p. \quad (L) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} z \cdot (1 - \sin^r z)^{p-1} f(x \sin^r z) \cos z \cdot dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{pr-1} z \cdot f\{x(1 - \sin^r z)\} \cos z \cdot dz = \frac{\Gamma(p)^p}{r x^p} \int f(x) dx^p. \quad (M)$$

23. Substitueeren we nu in formule (K): $f(x) = x^{q-2} \operatorname{tg}(1 \mp x)$, dan vinden we in verband met de betrekkingen: (V) tot (XI) — waaruit tevens de bijzondere waarden voortvloeien, die we achtereenvolgens aan p en q moeten toekennen —, terwijl we ons bepalen tot $a = 0$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 - x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{\operatorname{tg}^{br+r-1} z dz}{\cos^2 z} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 - x + x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg}^r z)^b \operatorname{tg}^{r-1} z dz}{\cos^2 z} = \\ & = \frac{1}{(b+1)r x^{b+1}} \left\{ (x^{b+1} - 1) \operatorname{tg}(1 - x) - \sum_{n=1}^{b+1} \frac{x^n}{n} \right\}. \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 + x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{\operatorname{tg}^{br+r-1} z dz}{\cos^2 z} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 + x - x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg}^r z)^b \operatorname{tg}^{r-1} z dz}{\cos^2 z} = \\ & = \frac{1}{(b+1)r x^{b+1}} \left\{ [x^{b+1} + (-1)^b] \operatorname{tg}(1 + x) + (-1)^b \sum_{n=1}^{b+1} (-1)^n \frac{x^n}{n} \right\}. \quad (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 - x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{\operatorname{tg}^{br-\frac{r}{2}-1} z dz}{\cos^2 z} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 - x + x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg}^r z)^{b-\frac{3}{2}} \operatorname{tg}^{r-1} z dz}{\cos^2 z} = \\ & = \frac{2}{(2b-1)r x^{b-\frac{1}{2}}} \left\{ (1 + x^{b-\frac{1}{2}}) \operatorname{tg}(1 + \sqrt{x}) - (1 - x^{b-\frac{1}{2}}) \operatorname{tg}(1 - \sqrt{x}) - 2 \sum_{n=0}^{b-\frac{1}{2}} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}. \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 + x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{\operatorname{tg}^{br-\frac{r}{2}-1} z dz}{\cos^2 z} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 + x - x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg}^r z)^{b-\frac{3}{2}} \operatorname{tg}^{r-1} z dz}{\cos^2 z} = \\ & = \frac{2}{(2b-1)r} \operatorname{tg}(1 + x) + (-1)^{b+1} \frac{4}{(2b-1)r x^{b-\frac{1}{2}}} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sum_{n=0}^{b-\frac{1}{2}} (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1} \right\}. \quad (54) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 \mp x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{dz}{\cos^2 z \operatorname{tg}^{\frac{r}{2}+1} z \sqrt{1 - \operatorname{tg}^r z}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 \mp x \pm x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{\operatorname{tg}^{\frac{r}{2}-1} z dz}{\cos^2 z \sqrt{(1 - \operatorname{tg}^r z)^3}} = \frac{2\pi}{r} \left\{ \sqrt{1 \mp x} - 1 \right\}. \quad (55)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 \mp x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{\operatorname{tg}^{\frac{r}{2}-1} z dz}{\cos^2 z \sqrt{1 - \operatorname{tg}^r z}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 \mp x \pm x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{\operatorname{tg}^{\frac{r}{2}-1} z dz}{\cos^2 z \sqrt{1 - \operatorname{tg}^r z}} = \frac{2\pi}{r} \operatorname{tg} \frac{1 + \sqrt{1 \mp x}}{2}. \quad (56)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 - x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{dz}{\sin z \cos z \sqrt{1 - \operatorname{tg}^r z}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(1 - x + x \operatorname{tg}^r z) \cdot \frac{\operatorname{tg}^{\frac{r}{2}-1} z dz}{\cos^2 z (1 - \operatorname{tg}^r z)} = -\frac{2}{r} (\operatorname{arcsin} \sqrt{x})^2. \quad (57)$$

Stelt men in de eerste integralen van (52), (54), (55) en (56): $x = 1$ en $r = 2$, terwijl men

zich bij de laatste twee bepaalt tot het onderste teeken, dan vindt men hieruit na eenige herleiding de volgende integralen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \cos z \cdot \frac{\sin^{2b+1} z dz}{\cos^{2b+3} z} = -\frac{1}{4(b+1)} \left\{ [1 + (-1)^b] \lg 2 + (-1)^b \sum_1^{b+1} \frac{(-1)^n}{n} \right\}. \quad (105)^+$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \cos z \cdot \frac{\sin^{2b} z dz}{\cos^{2b+2} z} = -\frac{\lg 2}{2(2b-1)} + \frac{(-1)^b}{2b-1} \left\{ \frac{\pi}{4} - \sum_0^{b-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right\}. \quad (106)^+$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \cos z \cdot \frac{\cos z dz}{\sin^2 z \sqrt{\cos 2z}} = -\frac{\pi}{2} (\sqrt{2}-1). \quad (107); \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \cos z \cdot \frac{dz}{\cos z \sqrt{\cos 2z}} = -\frac{\pi}{2} \lg \frac{1+\sqrt{2}}{2}. \quad (108)$$

Stelt men daarentegen in de tweede integralen van (ζ_1) , (ζ_3) , (ζ_5) , (ζ_6) en (ζ_7) : $x = 1$, terwijl men zich bij (ζ_5) en (ζ_6) nu bepaalt tot het bovenste teeken, dan volgen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \frac{(1 - \lg^r z)^b \lg^{r-1} z dz}{\cos^2 z} = -\frac{1}{(b+1)r^2} \sum_1^{b+1} \frac{1}{n} \cdot \cdot \cdot \quad (109)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \frac{(1 - \lg^r z)^{b-1} \lg^{r-1} z dz}{\cos^2 z \sqrt{1 - \lg^r z}} = \frac{4}{(2b-1)r^2} \left\{ \lg 2 - \sum_0^{b-1} \frac{1}{2n+1} \right\} \cdot \quad (110)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \frac{\lg^{\frac{r}{2}-1} z dz}{\cos^2 z \sqrt{(1 - \lg^r z)^3}} = -\frac{2\pi}{r^2}. \quad (111); \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \frac{\lg^{\frac{r}{2}-1} z dz}{\cos^2 z \sqrt{1 - \lg^r z}} = -\frac{2\pi}{r^2} \lg 2. \quad (112)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \frac{\lg^{\frac{r}{2}-1} z dz}{\cos^2 z (1 - \lg^r z)} = -\frac{\pi^2}{2r^2} \cdot \cdot \cdot \quad (113)$$

Door deze voorbeelden zij weer genoegzaam aangetoond, dat de vergelijkingen (ζ_1) tot (ζ_7) toelaten vele bepaalde integralen te vinden.

24. Voeren we dezelfde substitutie: $f(x) = x^{r-2} \lg(1 \mp x)$ uit in formule (M) , dan krijgen we volgens de reeds genoemde betrekkingen, zoo we nemen: $r = 2$ en $x = p^2$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 - p^2 \sin^2 z) \cdot \sin^{2b+1} z \cos z dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 - p^2 \cos^2 z) \cdot \cos^{2b+1} z \sin z dz = \\ &= \frac{1}{2(b+1)p^{2(b+1)}} \left\{ (p^{2b+2} - 1) \lg(1 - p^2) - \sum_1^{b+1} \frac{p^{2n}}{n} \right\} \cdot \cdot \cdot \quad (\eta_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\lg(1 + p^2 \sin^2 z) \cdot \sin^{2b+1} z \cos z dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 - p^2 \cos^2 z) \cdot \cos^{2b+1} z \sin z dz = \\ &= \frac{1}{2(b+1)p^{2(b+1)}} \left\{ [p^{2b+2} + (-1)^b] \lg(1 + p^2) + (-1)^b \sum_1^{b-1} \frac{(-1)^n p^{2n}}{n} \right\} \cdot \quad (\eta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 - p^2 \sin^2 z) \cdot \sin^{2b-2} z \cos z dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 - p^2 \cos^2 z) \cdot \cos^{2b-2} z \sin z dz = \\ &= \frac{1}{(2b-1)p^{2b-1}} \left\{ (1 + p^{2b-1}) \lg(1 + p) - (1 - p^{2b-1}) \lg(1 - p) - 2 \sum_0^{b-1} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (\eta_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 + p^2 \sin^2 z) \cdot \sin^{2b-2} z \cos z dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 - p^2 \cos^2 z) \cdot \cos^{2b-2} z \sin z dz = \\ &= \frac{1}{2b-1} \lg(1 + p^2) + (-1)^{b+1} \frac{2}{(2b-1)p^{2b-1}} \left\{ \arctg p - \sum_0^{b-1} \frac{(-1)^n p^{2n+1}}{2n+1} \right\}. \quad (\eta_4) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 \mp p^2 \sin^2 z) \frac{dz}{\sin^2 z} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 \mp p^2 \cos^2 z) \frac{dz}{\cos^2 z} = \pi (\sqrt{1 \mp p^2} - 1) \quad (75)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 \mp p^2 \sin^2 z) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 \mp p^2 \cos^2 z) dz = \pi \lg \frac{1 + \sqrt{1 \mp p^2}}{2} \quad (76)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 - p^2 \sin^2 z) \frac{dz}{\sin z} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg(1 - p^2 \cos^2 z) \frac{dz}{\cos z} = -(\arcsin p)^2 \quad (77)$$

Ook uit deze vergelijkingen kan men weer vele andere bepaalde integralen afleiden.

Stelt men in (71), (73), (75), (76) en (77): $p = 1$, terwijl men zich bij (75) en (76) bepaalt tot het bovenste teeken, dan vindt men:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos z \cdot \sin^{2b+1} z \cos z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin z \cdot \cos^{2b+1} z \sin z dz = -\frac{1}{4(b+1)} \sum_{n=1}^{b+1} \frac{1}{n} \quad (114)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos z \cdot \sin^{2b-2} z \cos z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin z \cdot \cos^{2b-2} z \sin z dz = \frac{1}{2b-1} \left\{ \lg 2 - \sum_{n=0}^{b-1} \frac{1}{2n+1} \right\} \quad (115)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos z \cdot \frac{dz}{\sin^2 z} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin z \cdot \frac{dz}{\cos^2 z} = -\frac{\pi}{2} \quad (116)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos z \cdot dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin z \cdot dz = -\frac{\pi}{2} \lg 2 \quad (117)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos z \cdot \frac{dz}{\sin z} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin z \cdot \frac{dz}{\cos z} = -\frac{\pi^2}{8} \quad (118)$$

Neemt men in (114) en (115) achtereenvolgens $b = 0$ en $b = 1$, dan volgen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos z \cdot \sin 2z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin z \cdot \sin 2z dz = -\frac{1}{8} \quad (119)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos z \cdot \frac{\cos z}{\sin^2 z} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin z \cdot \frac{\sin z}{\cos^2 z} dz = -\lg 2 \quad (120)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos z \cdot \sin^3 z \cos z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin z \cdot \cos^3 z \sin z dz = -\frac{1}{8} \quad (121)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \cos z \cdot \cos z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg \sin z \cdot \sin z dz = \lg 2 - 1 \quad (122)$$

25. Wanneer we in formule (L) substitueeren: $f_1(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, en aan p en q de waarden toekennen, die aanleiding gaven tot de betrekkingen (XII), (XIV), (XVI) en (XVIII), vinden we, zoo we stellen $x = 1$ en $r = 2$, en ons bij de eerste twee bepalen tot $a = 0$, na eenige herleidingen achtereenvolgens:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \frac{\cos z - \sin z}{\cos z + \sin z} \cdot \sin^{2b-1} 2z \cos 2z dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \cos^{2b-1} 2z \sin 2z dz = -\frac{1}{4b} \sum_{n=0}^{b-1} \frac{1}{2n+1} \quad (123)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \frac{\cos z - \sin z}{\cos z + \sin z} \cdot \sin^{2b} 2z \cos 2z dz = \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \cos^{2b} 2z \sin 2z dz = -\frac{1}{2(2b+1)} \left\{ \lg 2 + \sum_{n=1}^b \frac{1}{2n} \right\} \quad (124) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \frac{\cos z - \sin z}{\cos z + \sin z} \cdot \cos^{2a} 2z \sin 2z dz =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \sin^{2a} 2z \cos 2z dz = (-1)^{a+1} \frac{\pi}{4(2a+1)} \sum_0^a \frac{\left(-a - \frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} \quad (125)^*$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \frac{\cos z - \sin z}{\cos z + \sin z} \cdot \frac{dz}{\sin 2z} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg \cdot \frac{dz}{\cos 2z} = -\frac{\pi^2}{8} \quad (126)^+$$

Stel in de tweede integraal van (124): $b = 0$, dan komt er:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \sin 2z dz = -\frac{1}{2} \lg 2 \quad (127)^+$$

Men kan aan de waarde der integralen in (125) een anderen vorm geven, die voor de berekening gemakkelijker is. Men heeft n.l.:

$$(-1)^{a+1} \frac{\pi}{4(2a+1)} \sum_0^a \frac{\left(-a - \frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} = \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}{8} \sum_0^a \frac{\Gamma\left(n - a - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}{8} \sum_0^a \frac{\Gamma\left(-n - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a-n+1)} =$$

$$= -\frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{8 \Gamma(a+1)} \sum_0^a (-1)^n \binom{a}{a-n} \frac{\Gamma(n+1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{8 \Gamma(a+1)} \int_0^1 \sum_0^a (-1)^n \binom{a}{a-n} y^n (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = -\frac{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{8 \Gamma(a+1)} \int_0^1 (1-y)^{a-\frac{1}{2}} dy =$$

$$= -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left\{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)\right\}^2}{8 \Gamma(a+1) \Gamma\left(a + \frac{3}{2}\right)} = -2^{2a-3} \frac{\left\{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)\right\}^2}{\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2a+1)},$$

zoodat (125) wordt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \frac{\cos z - \sin z}{\cos z + \sin z} \cdot \cos^{2a} 2z \sin 2z dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \lg \lg z \cdot \sin^{2a} 2z \cos 2z dz = -2^{2a-3} \frac{\left\{\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)\right\}^2}{\left(a + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2a+1)} \quad (125a)^+$$

Wanneer we in de eerste integraal van formule (K) substitueeren: $f_2(x) = x^{q-\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, en aan p en q die waarden toekennen, die aanleiding geven tot de betrekkingen (XIII), (XV), (XVII) en (XIX), krijgen we, zoo we ons ook hier bij de eerste twee bepalen tot $a = 0$ en voorts stellen $x = 1$ en $r = 2$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2b-1} z}{\cos^{2b+1} z} \cdot z dz = \frac{1}{2b} \left\{ [1 + (-1)^{b+1}] \frac{\pi}{4} + (-1)^b \sum_0^{b-1} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right\} \quad (128)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2b} z}{\cos^{2b+2} z} \cdot z dz = \frac{1}{2(2b+1)} \left\{ \frac{\pi}{2} + (-1)^{b+1} \lg 2 + (-1)^{b+1} \sum_1^{b+1} \frac{(-1)^n}{n} \right\} \quad (129)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin z \cos^a 2z}{\cos^{2a+1} z \sqrt{\cos 2z}} \cdot z dz = \frac{\pi}{2(2a+1)} \left\{ 2^a \sqrt{2} - \sum_0^a (-1)^n \frac{\left(-a - \frac{1}{2}\right)^{n/1}}{1^{n/1}} \right\} \quad (130)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{z dz}{\sin z \sqrt{\cos 2z}} = \frac{\pi}{2} \lg(1 + \sqrt{2}). \quad \dots \dots \dots (131)+$$

Nemen we in (128) en (129) respectievelijk: $b = 1$, $b = 0$ en in (130): $a = 0$ en $a = 1$, dan komt er:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin z}{\cos^3 z} \cdot z dz = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad \dots (132)+; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{z dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \lg z \right) \quad \dots \dots (133)+$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\lg z}{\sqrt{\cos 2z}} \cdot z dz = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2} - 1). \quad (134); \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin z \sqrt{\cos 2z}}{\cos^3 z} \cdot z dz = \frac{\pi}{4} (4\sqrt{2} - 5). \quad (135)$$

26. In de eerste integraal van formule (M) achtereenvolgens gesubstitueerd: $f(x) = \frac{(\arcsin \sqrt{x})^2}{x \sqrt{x}}$ en $f(x) = x^{b-1} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, geeft ons blijkens (XXVI) en (XXVII), zoo we nemen: $x = 1$ en $r = 2$, de volgende integralen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z^2 dz}{\sin^2 z} = \pi \lg 2 \quad \dots \dots \dots (136)+$$

en:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \sin^{2b-1} z \cos^{2a-1} z dz &= \frac{1^{a/2} \pi}{2^{a+2}} \left[\frac{d^b}{dx^b} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right)} x^{b-1} \lg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{m=0}^{a+b-1} \frac{(-1)^m x^{b-m-\frac{3}{2}}}{m! (a+b-1-m)! (2m+1)} \left(\lg(1-x) + \sum_1^m \frac{x^n}{n} \right) \right\} \right]_{x=1} \quad \dots (9) \end{aligned}$$

De vergelijking (9) laat weer toe vele bepaalde integralen te vinden. Zoo krijgt men bij de substituties: $a = 0$, $b = 0$; $a = 0$, $b = 1$; $a = 1$, $b = 0$ en $a = 1$, $b = 1$ achtereenvolgens:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z dz}{\sin 2z} = \infty. \quad (137); \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \lg z dz = \infty. \quad (138)+; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cotg z dz = \frac{\pi}{2} \lg 2. \quad \dots (139)+$$

en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} z \sin 2z dz = \frac{\pi}{4} \quad \dots \dots \dots (140)+$$

27. Substitueeren we ten slotte weer: $f(x) = \frac{x^{q-1}}{(1 \mp x)^r}$, waarbij we ons alleen zullen bezighouden met het eerste geval, genoemd onder n°. 17 van het eerste hoofdstuk, waarin $r = p + q + a$, dan vinden we met behulp van de eerste integraal van formule (K) blijkens de betrekking (XXIX), zoo we hierin het theorema van LEIBNITZ hebben toegepast, de volgende vergelijking:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{q-1} z (\cos^r z - \sin^r z)^{p-1} \cos^{(a+1)r-1} z \cdot dz}{(\cos^r z \mp x \sin^r z)^{p+q+a}} = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{r \Gamma(p+q+a)} \sum_{n=0}^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \frac{x^n}{(1 \mp x)^{n+q}}. \quad (X)$$

Stellen we hierin achtereenvolgens $r = 1$ en $r = 2$, dan volgen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2q-1} z \cos^a z (\cos z - \sin z)^{p-1} dz}{(\cos z \mp x \sin z)^{p+q+a}} = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+a)} \sum_{n=0}^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \frac{x^n}{(1 \mp x)^{n+q}}. \quad (\chi_1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2q-1} z \cos^{2a+1} z \cos^{p-1} 2z dz}{(\cos^2 z \mp x \sin^2 z)^{p+q+a}} = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{2 \Gamma(p+q+a)} \sum_{n=0}^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \frac{x^n}{(1 \mp x)^{n+q}}. \quad (\chi_2)$$

Hieruit zijn vele bepaalde integralen af te leiden door aan x , p en q verschillende willekeurige positieve waarden toe te kennen.

Zoo volgt uit (χ_2) bij het onderste teeken voor $x = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{2q-1} z \cos^{2a+1} z \cos^{p-1} 2z dz = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{2 \Gamma(p+q+a)} \sum_{n=0}^a (-1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} \frac{q^{n/1}}{2^{n+q}}. \quad (141)$$

Stelt men hierin $q = a + 1$, en vervangt men $2z$ door z , dan vindt men na eenige herleiding:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} z \cos^{p-1} z dz = \frac{1^{a/1}}{p^{2a+1/1}} \sum_{n=0}^a (-1)^n 2^{a-n} (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+2a}{a-n} (a+1)^{n/1}. \quad (142)$$

We kunnen een eenvoudigere uitdrukking voor de waarde van deze integraal vinden. De gevonden waarde laat zich namelijk als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^a (-1)^n 2^{a-n} \binom{a}{n} \frac{\Gamma(p) \Gamma(n+a+1)}{\Gamma(n+a+p+1)} &= \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^a \left\{ \sum_{n=0}^a (-1)^n \binom{a}{n} 2^{a-n} (1-y)^n \right\} dy = \\ &= \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^a 2^a \left(1 - \frac{1-y}{2}\right)^a dy = \int_0^1 y^{p-1} (1-y^2)^a dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{p}{2}-1} (1-y)^a dy = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2 \Gamma\left(a + \frac{p}{2} + 1\right)}, \end{aligned}$$

zoodat:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} z \cos^{p-1} z dz = \frac{\Gamma(a+1) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2 \Gamma\left(a + \frac{p}{2} + 1\right)} = \frac{2^{a/2}}{p^{a+1/2}} \dots \dots \dots (142a)$$

Nemen we achtereenvolgens: $p = 2b + 1$ en $p = 2b + 2$, dan krijgen we:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} z \cos^{2b} z dz = \frac{2^{a/2} \cdot 1^{b/2}}{3^{a+b/2}} \cdot (143)^+; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} z \cos^{2b+1} z dz = \frac{1^{a/1} \cdot 1^{b/1}}{2 \cdot 1^{a+b+1/1}} \cdot (144)^+$$

Voeren we dezelfde substitutie uit in formule (M), terwijl $r = 2$, dan komen we op de vergelijking:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2q-1} z \cos^{2p-1} z dz}{(1 \mp x \sin^2 z)^{p+q+a}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2p-1} z \cos^{2q-1} z dz}{(1 \mp x \cos^2 z)^{p+q+a}} = \\ &= \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{2 \Gamma(p+q+a)} \sum_{n=0}^a (\pm 1)^n (a-n)! \binom{a}{n} \binom{p+q+a-1}{a-n} q^{n/1} \frac{x^n}{(1 \mp x)^{n+q}}. \quad (\lambda) \end{aligned}$$

Hieruit volgt voor $p + q = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^{2p-1} z dz}{(1 \mp x \sin^2 z)^{a+1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{2p-1} z dz}{(1 \mp x \cos^2 z)^{a+1}} = \frac{\pi \operatorname{cosec} p \pi}{2 \cdot 1^{a/1}} \sum_{n=0}^a (\pm 1)^n (a-n)! \left[\binom{a}{n} \right]^2 (1-p)^{n/1} \frac{x^n}{(1 \mp x)^{n+1-p}}, \quad (0 < p < 1). \quad (145)$$

Stellen we daarentegen in de eerste integraal van (λ) : 1°. $p = b + \frac{1}{2}$, $q = c + 1$, $x = p^2$;
2°. $p = b + 1$, $q = c + \frac{1}{2}$, $x = p^2$, dan krijgen we bij het bovenste teeken achtereenvolgens:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2c+1} z \cos^{2b} z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^{2a+2b+2c+3}}} = \frac{2^a \cdot 1^{b/2} \cdot 2^{c/2}}{1^{a+b+c+1/2} (1-p^2)^{c+1}} \sum_{n=0}^a (a-n)! \binom{a}{n} \binom{a+b+c+\frac{1}{2}}{a-n} (c+1)^{n/1} \left(\frac{p^2}{1-p^2}\right)^n. \quad (146)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2c} z \cos^{2b+1} z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^{2a+2b+2c+3}}} = \frac{2^a \cdot 2^{b/2} \cdot 1^{c/2}}{1^{a+b+c+1/2} \sqrt{(1-p^2)^{2c+1}}} \sum_{n=0}^a (a-n)! \binom{a}{n} \binom{a+b+c+\frac{1}{2}}{a-n} \left(c+\frac{1}{2}\right)^{n/1} \left(\frac{p^2}{1-p^2}\right)^n. \quad (147)$$

Uit deze twee vergelijkingen kan men weer vele bepaalde integralen afleiden. Stelt men in beide achtereenvolgens: $a = 0$ met $b = 0, c = 0$; $b = 0, c = 1$; $b = 1, c = 0$; en $a = 1$ met $b = 0, c = 0$, dan vindt men:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^3}} = \frac{1}{1-p^2}. \quad (148)^+; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}. \quad (149)^+$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^5}} = \frac{2}{3(1-p^2)^2}. \quad (150)^+; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 z \cos z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^5}} = \frac{1}{3\sqrt{(1-p^2)^3}}. \quad (151)^+$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z \cos^2 z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^5}} = \frac{1}{3(1-p^2)}. \quad (152)^+; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^5}} = \frac{2}{3\sqrt{1-p^2}}. \quad (153)^+$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^5}} = \frac{3-p^2}{3(1-p^2)^2}. \quad (154)^+; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z dz}{\sqrt{(1-p^2 \sin^2 z)^5}} = \frac{3-2p^2}{3\sqrt{(1-p^2)^3}}. \quad (155)^+$$

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De door mij gevonden uitdrukking voor de Besselsche functie (Hoofdstuk II, p. 37, verg. (68)):

$$I_{\lambda}(x) = \frac{(-1)^{\alpha}}{2^{\lambda+\alpha-2} \cdot 4^{\alpha/2} \cdot \pi \Gamma(\lambda+\alpha) x^{\lambda}} \int_0^x \frac{(x^2-y^2)^{\lambda+\alpha-1}}{y^{2\alpha-1}} dy \int_0^y \frac{(y^2-z^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos z}{dz} dz + \sum_0^{\alpha-1} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}}{n! \Gamma(n+\lambda+1)},$$

waarin λ alle reële, imaginaire en complexe waarden kan vertegenwoordigen, en α (pos. geheel) > 't reële gedeelte van $(-\lambda)$, — is algemeener dan de tot nu toe bekende uitdrukkingen, waarbij $I_{\lambda}(x)$ in den vorm van eene bepaalde integraal staat geschreven.

II.

In zijne verhandeling: «Ueber die Anwendung der Differentialquotienten mit beliebigem Index zum Integriren von Differentialgleichungen» (Zeitschrift für Mathematik und Physik XVI Leipzig 1871, p. 197) beweert MOST ten onrechte: . . . «dass die von LIOUVILLE als Ausgangspunkt gewählte Gleichung: $\frac{d^{\mu} e^{\nu x}}{dx^{\mu}} = \nu^{\mu} \cdot e^{\nu x}$ nicht allgemeingiltig genug ist, um als Definition brauchbar zu sein, wie ja denn auch LIOUVILLE bei Behandlung der Funktion $e^{\beta x} + e^{-\beta x}$ auf Widersprüche gestossen ist».

III.

De door LIOUVILLE langs twee geheel van elkaar verschillende wegen afgeleide uitdrukking voor zijne complementaire functie (Journal de l'Ecole Polytechnique t. XIII p. 94—106; CRELLE's Journal Bd. XI p. 1—10) is niet juist (zie diss. p. 5—7).

IV.

Als definitie voor differentialen van gebroken orde is het uitgangspunt van RIEMANN (Gesammelte Werke, von WEBER und DEDEKIND, 1867, p. 332) niet te gebruiken.

V.

In de «Oeuvres Complètes de N. H. ABEL» t. I (par L. SYLOW et S. LIE, 1881) vindt men de afleiding van een «valeur de l'expression $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$ » (pag. 18—21), aangegeven door eene dubbele integraal. In de «Notes» (t. II) schrijft SYLOW dienaangaande: «Comme l'a remarqué M. BERTRAND (Annali di matematica pura ed applicata, série 1, t. I), les formules du numéro 2 sont inexactes, l'intégrale double qui exprimerait $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$ étant évidemment nulle».

Voegt men echter aan die dubbele integraal toe den eisch: $y > 0$, die blijkens de afleiding van ABEL optreedt, dan kan die dubbele integraal ook oneindig groote waarden vertegenwoordigen, zooals juist plaats heeft bij de eenige toepassing, die ABEL van zijne formule geeft, en waardoor hij komt tot:

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + \frac{y^2}{4t^2}} dt.$$

De bepaalde integraal hierin is oneindig groot.

De fout in ABEL's afleiding schuilt in de volgende aanname:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 y^2} v^{-2n} dv = \frac{\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)}{y^{1-2n}} = \frac{(-1)^n 2^n \sqrt{\pi}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}.$$

De waarde van deze integraal is oneindig groot.

VI.

BERGBOHM maakt bij zijne «Neue Integrationsmethoden» (1892 en '93) gebruik van logaritmen met een oneindig kleine grootheid tot grondtal en neemt daarbij ten onrechte aan, dat de natuurlijke logarithe van oneindig kleine grootheden eindig is.

Zijne ontwikkelingen blijven evenwel volkomen juist, wanneer men in plaats van een oneindig kleine grootheid een eindig getal, verschillend van e , als basis der logaritmen aanneemt.

VII.

In zijne «Neue Integrationsmethoden» (1892, p. 17) zegt BERGBOHM: «Bekanntlich werden alle Differentiale aus folgender Fundamentalgleichung $f(x + dx) - f(x) = df(x)$ gewonnen» — in de onderstelling namelijk, dat men de hoogere machten van dx verwaarloost ten opzichte van de eerste macht.

Dit uitgangspunt maakt, dat zijne methode slechts toepasselijk is op die functies $f(x)$, waarvoor $f(x + dx)$ ontwikkeld kan worden naar opklimmende machten van dx volgens het theorema van TAYLOR.

VIII.

Volledigheidshalve moet in de verhandeling van Prof. Dr. J. DE VRIES over «Orthogonale Comitanten» (Verslagen der Koninkl. Acad. van Wetensch. te Amsterdam VIII, 1900, p. 566) nog vermeld worden de meetkundige beteekenis van het verdwijnen van den simultanen invariant: $a_f^2 \equiv f_a^2$.

Deze is, dat het stralenpaar, aangewezen door $a_x^2 = 0$ ($f_x^2 = 0$) harmonisch gelegen is met de stralen, die loodrecht staan op het stralenpaar $f_x^2 = 0$ ($a_x^2 = 0$).

IX.

De voorstelling der 600-cel door STRINGHAM is aanschouwelijker dan het model van SCHLEGEL. (Zie van Dr. S. L. VAN OSS: «Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen». Verhandelingen der Koninkl. Acad. van Wetensch. te Amsterdam VII, 1899).

X.

H. VON HELMHOLTZ zegt in zijne «Vorlesungen über theoretische Physik» (Bd. I. 2, p. 13; 1898) ten onrechte: «Es giebt viele Bewegungserscheinungen, die sich am einfachsten beschreiben lassen, wenn man zu gewissen Zeitpunkten Unstetigkeiten der Differentialquotienten der Geschwindigkeiten annimmt.»

De kromme, die de versnelling van een stoffelijk punt als functie van den tijd weergeeft, moet, evenals het geval is bij de snelheid, eene vloeiende, continu-verlopende lijn zijn, waarin geen hoekpunten optreden.

XI.

Bij proefneming over kleurgewaarwordingen begaat men een principiëelen fout, wanneer men den collimatorspleet van den spectroscop verwijdt tot verhooging der lichtsterkte. (Zie o. a. over de verplaatsing der neutrals: VAN DER WEIJDE'S «Methodisch onderzoek der kleurstelsels van kleurblinden». Proefschrift. Utrecht, 1882).

XII.

Het bewijs, dat NERNST geeft van de tweede hoofdwet der mechanische warmtetheorie (Theoretische Chemie, p. 15—23; 1898), is niet volledig.

XIII.

De PLÜCKERSche meetkunde, waarbij de rechte lijn als ruimte-element wordt aangenomen, is eene meetkunde van vier afmetingen.

XIV. cl

In hunne «Theorie des Kreisels» (1897) hadden KLEIN en SOMMERFELD zich liever moeten bedienen van een rechtsch in plaats van een linksch assenkruis van coördinaten.

XV.

Wanneer men de theorie der kleurenergieën (H. VON HELMHOLTZ: *Physiol. Optik.*; 1896) in verband wil brengen met de resultaten van psychologisch onderzoek (EBBINGHAUS: *Grundzüge der Psychologie I*; 1902), moet men noodzakelijk de intensiteit als factor invoeren, hetgeen kan geschieden door gebruikmaking van een drie-assenkruis.

XVI.

De afleiding van stereometrische stellingen uit de meetkunde der ruimte van vier afmetingen heeft volkomen bewijskracht.

XVII.

Het is gewenscht de golflengte van het licht als eenheid van lengte in te voeren.



