



Methoden ter berekening van de zelfinductie voor lange solenoïden

<https://hdl.handle.net/1874/294987>

METHODEN TER BEREKENING

VAN DE ZELFINDUCTIE VOOR

:: LANGE SOLENOÏDEN ::

METHODEN TER BEREKENING VAN DE
ZELFINDUCTIE VOOR LANGE SOLENOÏDEN

FRANCIS DE WYCKEN, B.S., A.M.,

Author of "The History of the

METHODEN TER BEREKENING VAN DE
AFLEIDINGEN VOOR TANGENTEN

'S-GRAVENHAGE - GEBRs. J. & H. VAN LANGENHUYSEN - 1912

WISCONSIN
UNIVERSITY
LIBRARY

Diss. Utrecht 90. 1912

METHODEN TER BEREKENING VAN DE ZELFINDUCTIE VOOR :: LANGE SOLENOÏDEN ::

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN
GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUUR-
KUNDE, AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE
UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNI-
FICUS DR. A. A. NIJLAND, HOOGLEERAAR IN
DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,
VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER
UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN
DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE
TE VERDEDIGEN OP ZATERDAG DEN 23^{STEN}
MAART 1912, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR, DOOR

FRANCISCUS LEONARDUS BERGANSIUS

::

GEBOREN TE MAASTRICHT

::

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Bij het voltooien van dit proefschrift betuig ik gaarne mijn dank aan U, Hooggeleerden in de Wis- en Natuurkundige Faculteit, voor het onderwijs dat ik van U heb ontvangen.

In de eerste plaats richt ik mij daarbij tot U, Hooggeachte Promotor, Hooggeleerde JULIUS. Voor de aanmoedigende belangstelling, waarmede Gij den voortgang van mijn werk hebt gevolgd, ben ik U ten zeerste dankbaar. Gedurende de vele jaren dat ik het voorrecht heb gehad als Uw assistent werkzaam te zijn, heb ik in zoo hooge mate de bewijzen van Uwe welwillendheid en hartelijke belangstelling mogen ondervinden, dat het mij niet mogelijk is mijn dank daarvoor onder woorden te brengen. De jaren in Uw Laboratorium doorgebracht zullen steeds een eerste plaats blijven innemen onder de herinneringen aan mijn verblijf aan de Utrechtsche Hoogeschool.

Ook U Hooggeleerde KAPTEIJN breng ik bij dezen een woord van dank voor de mij betoonde belangstelling bij de samenstelling van dit proefschrift, en voor de welwillendheid, waarmede Gij mij den weg gewezen hebt tot de oplossing van enkele daarbij voorgekomen moeilijkheden.

I N H O U D.

	Bladz.
INLEIDING	1
HOOFDSTUK I.	
Afleiding van de volledige vergelijking van MAXWELL	9
HOOFDSTUK II.	
De coëfficiënt van zelfinductie voor een lange solenoïde met éene laag windingen	18
HOOFDSTUK III.	
De coëfficiënt van zelfinductie voor een lange solenoïde met vele draadlagen	36
HOOFDSTUK IV.	
Sommatiemethode voor de berekening van den coëfficiënt van zelfinductie voor een solenoïde met rechthoekige doorsnede van de windingsruimte. .	50
Methode van ROSA	51
Correcte sommatiemethode	56
Vergelijking van de correcte sommatiemethode met de formule van STEFAN (64), de formule (48) van Hoofdstuk III en de methode van ROSA	64
Benaderingsformules	69
Voorbeelden	73
HOOFDSTUK V.	
Overzicht van de bereikte resultaten.	78
ERRATUM.	80
AANHANGSEL	81

INLEIDING.

In een uitvoerige verhandeling in deel V van het «Bulletin of the Bureau of Standards» hebben EDWARD B. ROSA en LOUIS COHEN een volledig overzicht gegeven van de verschillende formules voor de berekening van de coëfficiënten van onderlinge inductie en van zelfinductie voor alle in de praktijk voorkomende gevallen, betrekking hebbende op quasi stationnaire stroomen in ijzervrije stroomketens. Aan het einde van de verhandeling geven zij een reeks voorbeelden voor de toepassing van de verschillende formules en tevens een verzameling tabellen, die bij de toepassing van die formules nuttig of onmisbaar zijn.

Het streven is altijd daarop gericht zulke formules in een zoodanigen vorm te brengen, dat de uitvoering van de berekening zoo eenvoudig mogelijk en tevens de bereikte resultaten zoo nauwkeurig mogelijk zijn. Vooral tracht men de noodzakelijkheid van het gebruik van speciale tafels te beperken.

De meesten van deze formules bevatten meer of minder snel convergerende reeksen en hebben een beperkte geldigheid. Sommige zijn nauwkeurig voor *kleine* waarden van de daarin voorkomende veranderlijke grootheden, andere juist voor *grootte* waarden. Slechts zeer weinige zijn algemeen geldig voor *alle* waarden, die aan de veranderlijken kunnen gegeven worden.

Tot deze laatste soort behoort de formule van LORENZ voor de zelfinductie ¹⁾ van een solenoïde met éene laag windingen.

Zij luidt:

$$(1) \quad L_s = \frac{4\pi N^2}{3b^2} \left\{ d(4a^2 - b^2)E + db^2F - 8a^3 \right\}$$

¹⁾ Korthedshalve wordt hier en in 't vervolg de uitdrukking «zelfinductie» gebezigd in plaats van «coëfficiënt van zelfinductie». De term «onderlinge inductie» is op dezelfde wijze op te vatten.

waarin

$$d = \sqrt{4a^2 + b^2} \quad a = \text{straal} \quad b = \text{lengte}$$

$$N = \text{geheel aantal windingen.}$$

E en F zijn de complete elliptische integralen van de eerste en tweede soort, waarvoor de modulus $k = \sin \gamma$, terwijl

$$k = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + b^2}}.$$

Deze formule is exact voor solenoïden van elke lengte, doch geldt streng genomen alleen voor een bewikkeling van de solenoïde met oneindig dun metaalband, waarvan de windingen volkomen aaneensluiten zonder electrisch contact te maken. Evenzoo gelden de formules voor solenoïden met eindige rechthoekige doorsnede van de wikkelruimte voor het denkbeeldig geval, dat deze ruimte volkomen opgevuld is met windingen van een quadratischen of rechthoekigen geleider, door oneindig dunne isoleering gescheiden. Om de werkelijke waarden van de zelfinductie voor in de praktijk voorkomende windingen van meer of minder zwaar geïsoleerden ronden draad te vinden, moeten op deze waarden, die we in overeenstemming met de door ROSA gebezigde notaties met L_s ¹⁾ en L_u zullen aanduiden, correcties toegepast worden, waarvoor in de boven genoemde verhandeling de formules en de daarbij noodige tabellen worden gegeven.

De berekening volgens de formule van LORENZ is tamelijk tijdroovend en vereischt de beschikking over speciale tafels voor de logarithmen van E en F , die door LEGENDRE berekend zijn en in deel II van zijn «*Traité sur les Fonctions elliptiques*» zijn opgenomen. Deze tafel geeft de logarithmen in 12 decimalen voor alle waarden van γ van 0° tot 90° , opklimmende met $0,1^\circ$, en met vermelding van de eerste, tweede, derde, enz. verschillen.

Een uittreksel van deze tafel in acht decimalen voor alle waarden te beginnen met 45° is in de verhandeling van ROSA en COHEN opgenomen.

Terwijl nu voor de berekening van de onderlinge inductie voor de verschillende voorkomende gevallen in den regel meer dan één formule beschikbaar is en dit ook het geval is voor de berekening van de zelfinductie voor korte

¹⁾ ROSA spreekt in het eerstgenoemde geval van een «current sheet» in het tweede geval van «uniform distribution of current».

solenoiden, hetzij deze van één enkele laag windingen voorzien zijn, of uit een groot aantal lagen bestaan, blijkt het probleem van de berekening van de nauwkeurige waarde van de zelfinductie voor een *lange* solenoïde met ééne laag slechts door één enkele formule opgelost te zijn, n.l. door de bovengenoemde formule (1) van LORENZ. Voor de berekening van de zelfinductie voor een *lange* solenoïde met *vele* draadlagen is geen enkele formule gegeven, die rechtstreeks deze grootheid als functie van de afmetingen nauwkeurig voorstelt.

De eenige als nauwkeurig aangegeven oplossing van dit probleem wordt in de bovengenoemde verhandeling als «Rosa's methode» in 't kort beschreven en is uitvoeriger te vinden in Bur. of St. IV, 369. Deze methode, die in Hoofdstuk IV nader beschreven en uitvoerig besproken zal worden, is gebleken alleen dan werkelijk nauwkeurig te zijn, als de diepte van de windingen *zeer klein* is vergeleken met den gemiddelden straal.

Een benaderingsformule voor dit geval is door LOUIS COHEN ¹⁾ gegeven in den volgende vorm:

$$(2) \quad L = 4 \pi^2 n^2 m \left\{ \frac{2 a_0^4 + a_0^2 l^2}{\sqrt{4 a_0^2 + l^2}} - \frac{8 a_0^3}{3 \pi} \right\} +$$

$$+ 8 \pi^2 n^2 \left\{ [(m-1) a_1^2 + (m-2) a_2^2 + (m-3) a_3^2 + \dots] \left(\sqrt{a_1^2 + l^2} - \frac{7}{8} a_1 \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} [m(m-1) a_1^2 + (m-1)(m-2) a_2^2 + (m-2)(m-3) a_3^2 + \dots] \left(\frac{a_1 \delta a}{\sqrt{a_1^2 + l^2}} - \delta a \right) -$$

$$\left. - \frac{1}{2} [m(m-1) a_1^2 + (m-2)(m-3) a_2^2 + (m-3)(m-4) a_3^2 + \dots] \frac{\delta a}{8} \right\},$$

waarin :

n = aantal windingen per cM.

m = aantal lagen.

a_0 = gemiddelde straal.

l = lengte.

δa = afstand van twee opvolgende lagen.

$a_1, a_2, a_3 \dots$ enz. = straal eerste, tweede, enz. laag, van binnen naar buiten gerekend.

De twee laatste termen zijn door een vergissing in de afleiding foutief. De juiste gedaante daarvan is als volgt:

¹⁾ Bulletin of the Bureau of Standards IV, 383, 1908.

$$\frac{1}{2} [m(m-1)a_1^2 + (m+1)(m-2)a_2^2 + (m+2)(m-3)a_3^2 + \dots] \left(\frac{a_1 \delta a}{\sqrt{a_1^2 + l^2}} - \delta a \right) - \\ - \frac{1}{2} [m(m-1)a_1^2 + (m-3)(m-2)a_2^2 + (m-6)(m-3)a_3^2 + \dots] \frac{\delta a}{8}.$$

Deze formule is zeer onhandelbaar bij de berekening als het aantal lagen m vrij groot is en geeft bovendien slechts matig nauwkeurige resultaten. Volgens opgave van COHEN bedraagt de fout voor een solenoïde, waarvan de lengte gelijk is aan viermaal den straal, ongeveer een half procent, terwijl bij grootere lengte de nauwkeurigheid toeneemt.

Een bestudeering van de door COHEN gevolgde methode bij de afleiding van bovengenoemde formule leidde mij eerst tot belangrijke vereenvoudiging daarvan en ten slotte tot de volledige oplossing van het probleem, n.l. tot een aan de hoogste eischen van nauwkeurigheid beantwoordende rechtstreeksche formule voor de zelfinductie van een *lange* solenoïde met eindige doorsnede van de wikkelruimte, die voor de uitvoering van de berekening belangrijk eenvoudiger is dan de benaderingsformule van COHEN. Tevens leverde het onderzoek ook nog een zeer nauwkeurige formule voor de zelfinductie van een *lange* solenoïde met *éene* laag windingen.

Voor de afleiding van de beide nieuwe formules is gebruik gemaakt van de door MAXWELL ¹⁾ het eerst gegeven en later door ROSA uitgebreide vergelijking voor de onderlinge inductie van twee even lange concentrische coaxiale cylinders. Deze vergelijking is in den door ROSA ²⁾ gegeven vorm:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{waarin} \\ M = 4 \pi^2 n^2 a^2 [l - 2 A \alpha], \\ \alpha = \frac{l - r + A}{2 A} - \frac{a^2}{16 A^2} \left(1 - \frac{A^3}{r^3} \right) - \frac{a^4}{64 A^4} \left(\frac{1}{2} + \frac{2 A^5}{r^5} - \frac{5 A^7}{r^7} \right) - \\ \quad - \frac{35 a^6}{2048 A^6} \left(\frac{1}{7} - \frac{8 A^7}{7 r^7} + \frac{4 A^9}{r^9} - \frac{3 A^{11}}{r^{11}} \right) - \dots \end{array} \right.$$

$$r = \sqrt{A^2 + l^2}$$

A = straal buitenste cylinder

a = straal binnenste cylinder

n = aantal windingen per cM.

l = lengte.

¹⁾ MAXWELL, Electricity and Magnetism II, § 678.

²⁾ Bur. of St. V, 22, 1909.

De laatste term van α is door ROSA ¹⁾ aan de afleiding toegevoegd. Gedurende het onderzoek bleek mij de groote wenschelijkheid, den volledige vorm voor de in deze vergelijking voorkomende reeks α te kennen.

Voor betrekkelijk korte cylinders heeft deze reeks, die slechts langzaam convergeert, een vrij grooten invloed op de waarde van M , zoodat voor dat geval de opgegeven drie termen volstrekt niet voldoende zijn om een groote nauwkeurigheid bij de berekening te verkrijgen.

MAXWELL zelf geeft slechts in hoofdtrekken aan op welke wijze hij zijn vergelijking verkregen heeft. WEINSTEIN ²⁾ heeft in zijn Duitsche bewerking van MAXWELL de afleiding meer gedetailleerd gegeven. Deze afleiding bevat verschillende kleine onnauwkeurigheden en is daarbij nog in haar geheel foutief, doordat met een verkeerd teeken begonnen wordt. Het resultaat is, dat aan het eind van de ontwikkeling de reeks α met tegengesteld teeken, als boven is aangegeven, vermeld wordt. Bij de substitutie in de uitdrukking voor M wordt deze teekenfout zonder commentaar hersteld, zoodat de eindvergelijking overeenkomt met vergelijking (3) zonder den door ROSA berekenden term.

De ontwikkeling van WEINSTEIN is daarbij zoo weinig overzichtelijk gegeven, dat het zeer moeilijk is daaruit iets omtrent de verdere termen van α te voorspellen. Alleen de wet voor de getallen-coëfficiënten, die vóór de ronde haken staan, heb ik reeds vroeger ³⁾ daaruit afgeleid, waarbij dan de functies van $\frac{A}{r}$ in de ronde haken zoodanig herleid moeten worden, dat de constante term daarvan voor allen $= 1$ wordt.

Ten einde ook de wet voor deze functies op te sporen heb ik de geheele afleiding op streng systematische wijze herhaald en door nog één term meer in de ontwikkeling op te nemen, de wet voor deze functies ondubbelzinnig vastgesteld.

In Hoofdstuk I wordt deze afleiding in haar geheel weergegeven.

Stelt men in de vergelijking van MAXWELL $a = A$, dan levert dit als resultaat de vergelijking voor de zelfinductie van een cylinder, die als uitgangspunt dient voor de berekening van de zelfinductie van een solenoïde met éene laag windingen van ronden draad.

¹⁾ Bur. of St. III, 305, 1907.

²⁾ WEINSTEIN, Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus von J. C. MAXWELL, II, 375, 1883.

³⁾ Verslagen Kon. Acad. v. Wetensch. 19, pag. 1139, 25 Febr. 1911.

J. G. COFFIN ¹⁾ geeft in een verhandeling, waarin hij de vervaardiging en meting van den standaard van zelfinductie voor het «Bureau of Standards» beschrijft, ook een overzicht van de verschillende methoden om de berekening uit te voeren. Hierbij noemt hij ook de vergelijking van MAXWELL, waaraan echter de door ROSA later afgeleide term ontbreekt.

Hij past de formule toe op de berekening van een solenoïde van ± 44 cM. lengte en ± 27 cM. straal en vindt een fout van ongeveer één procent in het resultaat.

Hij besluit deze paragraaf naar aanleiding van dit resultaat met de volgende conclusie: «The formula of this method does not converge very rapidly for coils as short as those to which it had to be applied, so that the labor of extending it, while not very great, was thought unwarranted.» COFFIN heeft hierbij blijkbaar niet gedacht aan de mogelijkheid, dat een volledige kennis van de reeks in de vergelijking van MAXWELL zou kunnen leiden tot een integratie van deze reeks in een voor de praktijk van de berekening geschikten vorm.

Hoofdstuk II geeft een volledig overzicht van de wijze, waarop deze integratie is uitgevoerd onder de beperkende voorwaarde, dat de lengte van de solenoïde niet kleiner is dan de straal. Een vergelijkend onderzoek van de daardoor verkregen formule en de formule van COFFIN voor korte solenoïden met de voor iedere lengte geldige exacte formule van LORENZ toont aan, dat men deze laatste voor de praktijk van de berekening geheel door de twee genoemde formules vervangen kan, zonder aan de allerhoogste eischen van nauwkeurigheid te kort te doen.

Wordt de vergelijking van MAXWELL zoowel naar a als naar A tusschen twee bepaalde grenzen geïntegreerd, dan geeft het resultaat van deze integratie, vermenigvuldigd met den factor 2, een formule voor de zelfinductie van een solenoïde met rechthoekige doorsnede van de wikkelruimte. De integratiegrenzen zijn dan de in- en uitwendige stralen van deze ruimte. De factor 2 ontstaat doordat b.v. voor twee willekeurige elementaire cylinders p en q zoowel de onderlinge inductie van p op q als van q op p moet in rekening gebracht worden.

De wijze waarop de integratie voor dit geval is uitgevoerd, is analoog aan de wijze waarop LOUIS COHEN de drie laatste termen van zijn benaderingsformule

¹⁾ Bur. of St. II, 87, 1906.

heeft afgeleid, met dit verschil, dat LOUIS COHEN zijn rekenwijze op een eindig aantal lagen toepast en daarbij de lagen van binnen naar buiten telt, terwijl bij de door mij gevolgde methode het aantal lagen oneindig groot aangenomen wordt en de telling van buiten naar binnen plaats heeft.

Het groote voordeel van deze wijziging in de methode springt bij vergelijking van de twee afleidingen onmiddellijk in het oog, zooals in Hoofdstuk III, waarin een uitvoerig overzicht van de afleiding gegeven wordt, nader zal aangetoond worden.

In Hoofdstuk IV wordt beschreven op welke wijze de zelfinductie voor een solenoïde met rechthoekige doorsnede van de windingsruimte verkregen wordt, volgens de reeds eerder op pag. 3 vermelde, door ROSA ¹⁾ ontworpen en beschreven correctiemethode, die door hem met uitstekend succes is toegepast om de correctie te berekenen, die aan de zelfinductie van een solenoïde, waarvan de windingen uit aaneengesloten oneindig dun metaalband bestaan, moet aangebracht worden om de zelfinductie te verkrijgen voor een solenoïde met éene laag windingen van dunnen geïsoleerden ronden draad. Bij de toepassing van deze methode op een solenoïde met een groot aantal lagen ²⁾ meent ROSA een even groote nauwkeurigheid van de resultaten te mogen verwachten en bezigt hij zijn methode zelfs om de nauwkeurigheid van de formule van STEFAN voor korte solenoïden met rechthoekige doorsnede te toetsen.

Aanvankelijk in de meening verkeerende, dat de methode van ROSA de juiste waarde van de zelfinductie voor dit geval opleverde, heb ik daarvan gebruik gemaakt om de grootte van de afwijkingen bij de berekening volgens de door mij afgeleide directe formule van Hoofdstuk III te onderzoeken. Ik kwam daarbij tot het geheel onverwachte resultaat, dat deze afwijkingen steeds grooter werden naarmate bij gelijke windingsdiepte de lengte grooter genomen werd en ook wanneer bij gelijke lengte toenemende windingsdiepten aangenomen werden. De fouten waren veel grooter dan uit het ontbreken van de bij de afleiding verwaarloosde termen kon verklaard worden.

Na eenig zoeken vond ik de verklaring; het bleek, dat de methode van ROSA bij toenemende windingsdiepte snel toenemende afwijkingen van de correcte waarden moet opleveren, terwijl bij een zelfde windingsdiepte de fout eerst snel

¹⁾ Bur. of St. II, 161, 1906.

²⁾ Bur. of St. IV, 369, 1908.

toeneemt met de lengte en daarna langzaam tot een bepaalde limiet nadert.

Een zeer uitvoerige berekening was noodig om, bij behoud van het sommeeringsbeginsel, waarop de methode van Rosa berust, voor een paar aangenomen waarden van de windingsdiepte (n.l. 1 en 2 cM. bij 10 cM. gemiddelden straal) de tabellen voor de correctie-grootheid B af te leiden, die bij de berekening van de correcte waarden van de zelfinductie voor solenoïden van de genoemde windingsdiepten en verschillende lengten gebruikt moeten worden.

Deze tabellen zijn gebezigd om de nauwkeurigheid van de formule van Hoofdstuk III voor verschillende lengten te onderzoeken en ook om de boven besproken fouten van Rosa's methode te bepalen.

De resultaten van dit onderzoek zijn in eenige tabellen samengevat en worden verder door graphische voorstellingen toegelicht.

Wat de fout in Rosa's methode betreft ben ik erin geslaagd een eenvoudige uitdrukking te vinden, die deze fout als functie van de lengte en van de windingsdiepte met zoo groote benadering voorstelt, dat door het aanbrengen van de volgens deze uitdrukking berekende waarde als correctie, resultaten verkregen worden, die bijna volkomen overeenstemmen met de waarden, verkregen volgens de strenge sommeeringsmethode en de daaraan gelijkwaardig gebleken complete formule van Hoofdstuk III.

Ten slotte wordt aangetoond, dat door de drie voornaamste termen van de complete formule een benaderingsformule verkregen wordt van buitengewoon eenvoudigen vorm, die voor zeer vele gevallen voldoende nauwkeurig is. Door een uit de graphische voorstelling van de foutenkrommen voor deze formule empirisch geconstrueerden correctieterm kan de nauwkeurigheid van deze benaderingsformule zoodanig verhoogd worden, dat ze voor niet te korte solenoïden aan voor dit geval redelijk te stellen eischen volkomen voldoet.

Een aantal voorbeelden worden behandeld om een vergelijkend overzicht te geven van de nauwkeurigheid, die met de verschillende methoden bereikt kan worden, terwijl een paar volledig uitgewerkte voorbeelden doen zien, dat voor speciale gevallen de berekening volgens de nieuwe formules bijzonder eenvoudig wordt.

Hoofdstuk V bevat een overzicht van de bereikte resultaten, terwijl in een aanhangsel eenige tabellen zijn opgenomen, waarin de voornaamste resultaten van de in Hoofdstuk IV beschreven berekening worden vermeld.

HOOFDSTUK I.

AFLEIDING VAN DE VOLLEDIGE VERGELIJKING VAN MAXWELL.

Gevraagd wordt de coëfficiënt van onderlinge inductie van twee even lange concentrische coaxiale solenoïden. Beiden zijn voorzien van éene laag windingen, waarvan het aantal voor de binnenste n_1 en voor de buitenste n_2 per cM. bedraagt.

We onderstellen nu eerst dat de binnenste solenoïde naar beide zijden tot in het oneindige verlengd is en dat door de windingen een stroom gaat van de eenheid van sterkte, dan is de veldsterkte binnen deze solenoïde constant en gegeven door de uitdrukking

$$H = 4 \pi n_1.$$

De doorsnede van de solenoïde bedraagt πa^2 , zoodat het geheele aantal krachtlijnen door deze doorsnede $4 \pi^2 n_1 a^2$ bedraagt.

Dit aantal krachtlijnen doordringt ieder van de windingen van de buitenste solenoïde, dus in 't geheel $n_2 l$ windingen.

De coëfficiënt van onderlinge inductie wordt dus voor dit geval

$$(4) \quad M = 4 \pi^2 n_1 n_2 a^2 l.$$

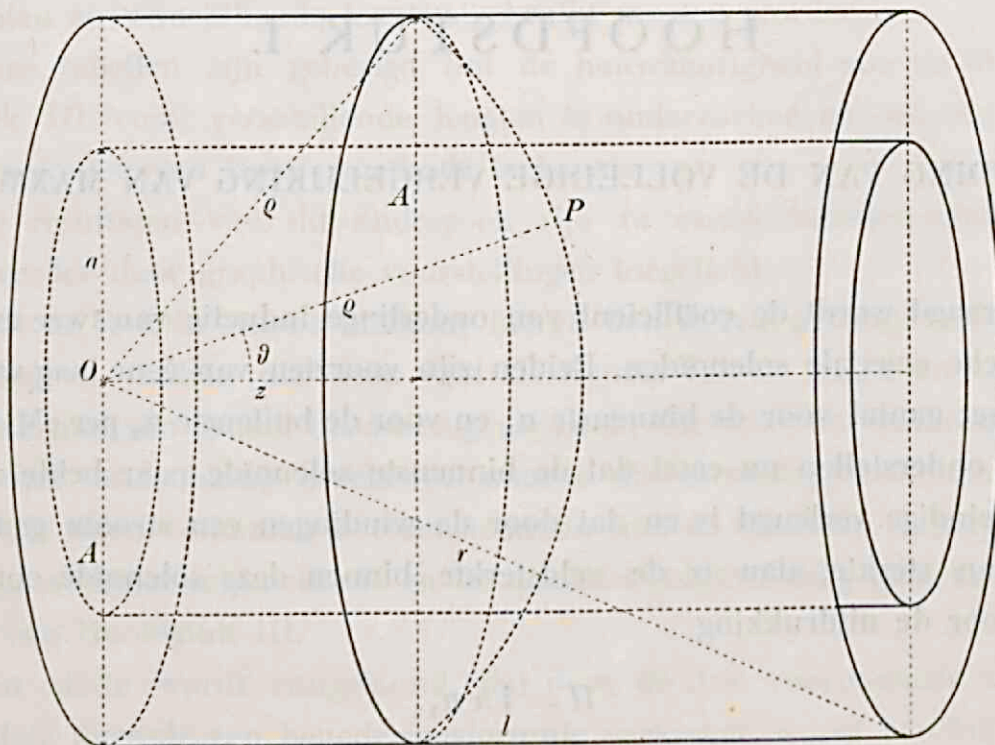
Wordt nu de binnenste solenoïde even lang genomen als de buitenste, dan wordt M kleiner ten gevolge van den demagnetiseerenden invloed van de uiteinden. Deze einden kunnen beschouwd worden als magnetische vlakteladingen, die een inductie teweegbrengen, waarvan de richting tegengesteld is aan de inductiewerking van den stroom door de windingen van de binnenste solenoïde.

Noemen we de inductie van één van de uiteinden van de binnenste sole-

noïde op de buitenste Q' dan is duidelijk dat de gevraagde coëfficiënt van onderlinge inductie gegeven is door de vergelijking

$$(5) \quad M = 4\pi^2 n_1 n_2 a^2 l - 2 Q'.$$

Fig. 1.



De potentiaal in een punt $P (\varrho, \theta)$, teweeggebracht door een vlakke cirkelvormige magnetische laag met dichtheid 1 en straal a , wordt gegeven door de volgende uitdrukking ¹⁾

$$V = 2\pi \left\{ -\varrho P_1 + a + \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{a} P_2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{\varrho^4}{a^3} P_4 + \dots \right\} \quad \text{voor } \varrho < a$$

$$V = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{a^2}{\varrho} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \frac{a^4}{\varrho^3} P_2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{a^6}{\varrho^5} P_4 - \dots \right\} \quad \text{voor } \varrho > a$$

waarin de P 's harmonische bolfuncties zijn behorende bij den hoek θ (fig. 1).

We beschouwen een winding van de buitenste solenoïde op een afstand z van het punt O en construeeren van uit O met straal $\varrho = \sqrt{A^2 + z^2}$ een

¹⁾ THOMSON and TAIT, Treatise on Natural Philosophy § 546, example II.

boloppervlak. De beschouwde winding ligt dus op dit boloppervlak, zoodat de magnetische inductievloeiing door het door de winding begrensde deel daarvan gelijk is aan de inductievloeiing door het vlak van de winding zelve. De radiale component van de magnetische kracht is $-\frac{dV}{d\rho}$, zoodat de inductievloeiing Q door de beschouwde winding gegeven is door de uitdrukking

$$Q = -2\pi\rho^2 \int_0^{\text{arc. cos } z/\rho} \frac{dV}{d\rho} \sin\theta d\theta,$$

of $\cos\theta = \mu$ stellende;

$$(6) \quad Q = 2\pi\rho^2 \int_1^{z/\rho} \frac{dV}{d\rho} d\mu.$$

De geheele inductievloeiing door alle windingen van de buitenste solenoïde wordt nu verkregen door de laatste uitdrukking met $n_1 n_2 dz$ te vermenigvuldigen en tusschen 0 en l te integreeren. De vlakedichtheid van de magnetische laag is namelijk n_1 en het aantal windingen voor een lengte-element dz is $n_2 dz$.

We krijgen dus:

$$(7) \quad Q' = 2\pi\rho^2 n_1 n_2 \int_0^l \int_1^{z/\rho} \frac{dV}{d\rho} d\mu dz.$$

De waarde van deze integraal moet dus uit de bovengenoemde uitdrukking voor V afgeleid worden.

Daar voor de geheele buitenste solenoïde $\rho > a$ is, moeten we gebruik maken van de tweede uitdrukking voor V .

Ten einde de wet van opvolging voor de termen van de in Q' optredende reeks te kunnen opsporen, moeten we bij de afleiding vooral zorgen geen herleidingen op de getallencoëfficiënten toe te passen, die de regelmaat in de opvolging onherkenbaar zouden maken.

Voegen we aan de tweede uitdrukking voor V nog 2 termen toe, dan wordt deze:

$$(8) \quad V = 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \frac{a^2}{\varrho} - \frac{1.1}{2.4} \frac{a^4}{\varrho^3} P_2 + \frac{1.1.3}{2.4.6} \frac{a^6}{\varrho^5} P_4 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \frac{a^8}{\varrho^7} P_6 + \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \frac{a^{10}}{\varrho^9} P_8 \dots \right\};$$

naar ϱ gedifferentieerd en met $2\pi\varrho^2$ vermenigvuldigd geeft zij:

$$(9) \quad 2\pi\varrho^2 \frac{dV}{d\varrho} = -4\pi^2 \left\{ \frac{1}{2} a^2 - \frac{1.3}{2.4} \frac{a^4}{\varrho^2} P_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{a^6}{\varrho^4} P_4 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \frac{a^8}{\varrho^6} P_6 + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \frac{a^{10}}{\varrho^8} P_8 \dots \right\};$$

de P 's worden gegeven door de volgende uitdrukkingen:

$$(10) \quad \begin{cases} P_2 = \frac{3}{2} \left(\mu^2 - 1 \cdot \frac{1}{3} \right) \\ P_4 = \frac{5.7}{2.4} \left(\mu^4 - 2 \cdot \frac{3}{7} \mu^2 + 1 \cdot \frac{1.3}{5.7} \right) \\ P_6 = \frac{7.9.11}{2.4.6} \left(\mu^6 - 3 \cdot \frac{5}{11} \mu^4 + 3 \cdot \frac{3.5}{9.11} \mu^2 - 1 \cdot \frac{1.3.5}{7.9.11} \right) \\ P_8 = \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8} \left(\mu^8 - 4 \cdot \frac{7}{15} \mu^6 + 6 \cdot \frac{5.7}{13.15} \mu^4 - 4 \cdot \frac{3.5.7}{11.13.15} \mu^2 + 1 \cdot \frac{1.3.5.7}{9.11.13.15} \right) \end{cases}$$

We substitueeren deze waarden in bovenstaande uitdrukking (9) en voeren de integratie naar μ uit, waarbij we tevens nog den factor a^2 buiten de accoladen brengen. We vinden dan:

$$\begin{aligned} Q = & -4\pi^2 a^2 \left\{ \frac{1}{2} \mu - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{3}{2} \frac{a^2}{\varrho^2} \left(\frac{1}{3} \mu^3 - \frac{1}{3} \mu \right) + \right. \\ & + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{5.7}{2.4} \frac{a^4}{\varrho^4} \left(\frac{1}{5} \mu^5 - 2 \cdot \frac{1}{7} \mu^3 + \frac{1.3}{5.7} \mu \right) - \\ & - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{7.9.11}{2.4.6} \frac{a^6}{\varrho^6} \left(\frac{1}{7} \mu^7 - 3 \cdot \frac{1}{11} \mu^5 + 3 \cdot \frac{1.5}{9.11} \mu^3 - \frac{1.3.5}{7.9.11} \mu \right) + \\ & \left. + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \cdot \frac{9.11.13.15}{2.4.6} \frac{a^8}{\varrho^8} \left(\frac{1}{9} \mu^9 - 4 \cdot \frac{1}{15} \mu^7 + 6 \cdot \frac{1.7}{13.15} \mu^5 - 4 \cdot \frac{1.5.7}{11.13.15} \mu^3 + \frac{1.3.5.7}{9.11.13.15} \mu \right) \right\} \frac{z}{\varrho}. \end{aligned}$$

We moeten nu in deze uitdrukking de grenzen invoeren. Voor $\mu = 1$ worden alle tusschen ronde haken geplaatste functies $= 0$. We verdrijven de

breuken tusschen de ronde haken door te vermenigvuldigen met den noemer van den coëfficiënt van μ en brengen tevens $\frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^4} \dots$ enz. binnen de haken. We vinden dan:

$$(11) \quad Q = -4\pi^2 a^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{z}{q} - 1 \right) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} a^3 \left(\frac{z^3}{q^3} - \frac{z}{q^3} \right) + \right. \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 7} a^4 \left(7 \frac{z^5}{q^9} - 2 \cdot 5 \frac{z^3}{q^7} + 3 \frac{z}{q^5} \right) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} a^6 \times \\ \times \left(9 \cdot 11 \frac{z^7}{q^{13}} - 3 \cdot 7 \cdot 9 \frac{z^5}{q^{11}} + 3 \cdot 5 \cdot 7 \frac{z^3}{q^9} - 3 \cdot 5 \frac{z}{q^7} \right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15} a^8 \times \\ \left. \times \left(11 \cdot 13 \cdot 15 \frac{z^9}{q^{17}} - 4 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \frac{z^7}{q^{15}} + 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \frac{z^5}{q^{13}} - 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \frac{z^3}{q^{11}} + 3 \cdot 5 \cdot 7 \frac{z}{q^9} \right) \right\}.$$

Deze geheele uitdrukking moet nu met $n_1 n_2 dz$ vermenigvuldigd en tusschen 0 en l geïntegreerd worden, om de waarde van Q' (7) op te leveren.

We krijgen dus:

$$(12) \quad Q' = -4\pi^2 n_1 n_2 a^2 \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{z}{q} - 1 \right) - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} a^3 \left(\frac{z^3}{q^3} - \frac{z}{q^3} \right) + \right. \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 7} a^4 \left(7 \frac{z^5}{q^9} - 2 \cdot 5 \frac{z^3}{q^7} + 3 \frac{z}{q^5} \right) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} a^6 \times \\ \times \left(9 \cdot 11 \frac{z^7}{q^{13}} - 3 \cdot 7 \cdot 9 \frac{z^5}{q^{11}} + 3 \cdot 5 \cdot 7 \frac{z^3}{q^9} - 3 \cdot 5 \frac{z}{q^7} \right) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15} a^8 \times \\ \left. \times \left(11 \cdot 13 \cdot 15 \frac{z^9}{q^{17}} - 4 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \frac{z^7}{q^{15}} + 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \frac{z^5}{q^{13}} - 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \frac{z^3}{q^{11}} + 3 \cdot 5 \cdot 7 \frac{z}{q^9} \right) \right\} dz.$$

We moeten dus de volgende integralen bepalen:

$$\begin{array}{cc} \int_0^l \frac{z}{q} dz & \int_0^l \frac{z}{q^3} dz \dots \text{enz.} \\ \int_0^l \frac{z^3}{q^5} dz & \int_0^l \frac{z^3}{q^7} dz \dots \text{enz.} \\ \text{---} & \text{---} \end{array}$$

waarin

$$q = \sqrt{A^2 + z^2}.$$

Door middel van de betrekking

$$\frac{d}{dz} \varrho^{-n} = -\frac{n z}{\varrho^{n+2}}$$

zijn de integralen van de eerstgenoemde soort gemakkelijk te bepalen, terwijl alle andere door partieele integratie tot de eerste soort teruggebracht kunnen worden.

Schrijven we voor $\int_0^l f(z) dz$ kortheidshalve $\varphi(f(z))$, dan vinden we, als we

tevens $\frac{A}{\sqrt{A^2 + l^2}} = x$ stellen, voor de in Q' voorkomende integralen achtereenvolgens:

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(\frac{z}{\varrho}\right) = A(1 - x^{-1}) \\ \text{---} \\ \varphi\left(\frac{z}{\varrho^3}\right) = A^{-1}\left(\frac{1}{1} - 1 \cdot \frac{1}{1} x\right) \\ \varphi\left(\frac{z^3}{\varrho^5}\right) = A^{-1}\left(\frac{2}{1 \cdot 3} - 1 \cdot \frac{1}{1} x + 1 \cdot \frac{1}{3} x^3\right) \\ \text{---} \\ \varphi\left(\frac{z}{\varrho^5}\right) = A^{-3}\left(\frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} x^3\right) \\ \varphi\left(\frac{z^3}{\varrho^7}\right) = A^{-3}\left(\frac{2}{3 \cdot 5} - 1 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 1 \cdot \frac{1}{5} x^5\right) \\ \varphi\left(\frac{z^5}{\varrho^9}\right) = A^{-3}\left(\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7} - 1 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 2 \cdot \frac{1}{5} x^5 - 1 \cdot \frac{1}{7} x^7\right) \\ \text{---} \\ \varphi\left(\frac{z}{\varrho^7}\right) = A^{-5}\left(\frac{1}{5} - 1 \cdot \frac{1}{5} x^5\right) \\ \varphi\left(\frac{z^3}{\varrho^9}\right) = A^{-5}\left(\frac{2}{5 \cdot 7} - 1 \cdot \frac{1}{5} x^5 + 1 \cdot \frac{1}{7} x^7\right) \\ \varphi\left(\frac{z^5}{\varrho^{11}}\right) = A^{-5}\left(\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 9} - 1 \cdot \frac{1}{5} x^5 + 2 \cdot \frac{1}{7} x^7 - 1 \cdot \frac{1}{9} x^9\right) \\ \varphi\left(\frac{z^7}{\varrho^{13}}\right) = A^{-5}\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - 1 \cdot \frac{1}{5} x^5 + 3 \cdot \frac{1}{7} x^7 - 3 \cdot \frac{1}{9} x^9 + 1 \cdot \frac{1}{11} x^{11}\right) \\ \text{---} \end{array} \right.$$

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \varphi\left(\frac{z}{\varrho^9}\right) &= A^{-7} \left(\frac{1}{7} - 1 \cdot \frac{1}{7} x^7 \right) \\ \varphi\left(\frac{z^3}{\varrho^{11}}\right) &= A^{-7} \left(\frac{2}{7 \cdot 9} - 1 \cdot \frac{1}{7} x^7 + 1 \cdot \frac{1}{9} x^9 \right) \\ \varphi\left(\frac{z^5}{\varrho^{13}}\right) &= A^{-7} \left(\frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 9 \cdot 11} - 1 \cdot \frac{1}{7} x^7 + 2 \cdot \frac{1}{9} x^9 - 1 \cdot \frac{1}{11} x^{11} \right) \\ \varphi\left(\frac{z^7}{\varrho^{15}}\right) &= A^{-7} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} - 1 \cdot \frac{1}{7} x^7 + 3 \cdot \frac{1}{9} x^9 - 3 \cdot \frac{1}{11} x^{11} + 1 \cdot \frac{1}{13} x^{13} \right) \\ \varphi\left(\frac{z^9}{\varrho^{17}}\right) &= A^{-7} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15} - 1 \cdot \frac{1}{7} x^7 + 4 \cdot \frac{1}{9} x^9 - 6 \cdot \frac{1}{11} x^{11} + 4 \cdot \frac{1}{13} x^{13} - 1 \cdot \frac{1}{15} x^{15} \right) \\ &\text{-----} \end{aligned} \right.$$

De wet voor de coëfficiënten in de verschillende groepen en het verband tusschen de opvolgende groepen is zeer duidelijk, zoodat ook voor de volgende niet behandelde termen van Q' de daarin voorkomende integralen onmiddellijk neergeschreven kunnen worden.

We moeten nu de waarden van deze integralen in de termen van Q' (12) substitueeren en dan naar opklimmende machten van x rangschikken.

Als voorbeeld geef ik hier de berekening voor den voorlaatsten term.

$$\begin{aligned} -9 \cdot 11 \varphi\left(\frac{z^7}{\varrho^{13}}\right) &= A^{-5} \left(-\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 11}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{9 \cdot 11}{5} x^5 - 3 \cdot \frac{9 \cdot 11}{7} x^7 + 3 \cdot \frac{9 \cdot 11}{9} x^9 - \frac{9 \cdot 11}{11} x^{11} \right) \\ + 3 \cdot 7 \cdot 9 \varphi\left(\frac{z^5}{\varrho^{11}}\right) &= A^{-5} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9}{5 \cdot 7 \cdot 9} - 3 \cdot \frac{7 \cdot 9}{5} x^5 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{7 \cdot 9}{7} x^7 - 3 \cdot \frac{7 \cdot 9}{9} x^9 \right) \\ - 3 \cdot 5 \cdot 7 \varphi\left(\frac{z^3}{\varrho^9}\right) &= A^{-5} \left(-\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 7} + 3 \cdot \frac{5 \cdot 7}{5} x^5 - 3 \cdot \frac{5 \cdot 7}{7} x^7 \right) \\ + 3 \cdot 5 \varphi\left(\frac{z}{\varrho^7}\right) &= A^{-5} \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 5}{5} x^5 \right) \\ &\text{----- op.} \\ &= A^{-5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 7} \quad 0 \quad - 3 \cdot \frac{2 \cdot 4}{7} x^7 + 3 \cdot \frac{4 \cdot 9}{9} x^9 - \frac{9 \cdot 11}{11} x^{11} \right) \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 7} A^{-5} \left(1 \quad - 3 \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} x^7 + 3 \cdot \frac{4 \cdot 7}{1 \cdot 3} x^9 - \frac{7 \cdot 9}{1 \cdot 3} x^{11} \right) \end{aligned}$$

We herleiden de optredende functies van x zoodanig, dat de bekende term 1 wordt. Daardoor komen successievelijk buiten de haken de getallen-coëfficiënten:

$$\frac{1}{1 \cdot 3}, \quad \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 5}, \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 7} \quad \text{en} \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7 \cdot 9}.$$

Deze moeten als vierden factor toegevoegd worden aan de reeds uit drie factoren bestaande coëfficiënten vóór de ronde haken in Q' (12), zoodat deze reeks nu na verwijdering van identieke factoren in de tellers en noemers als volgt kan geschreven worden:

$$\begin{aligned} \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1.3} &= \frac{1}{2^2.4} = \frac{1}{16} \\ \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{5.7}{2.4} \cdot \frac{1}{5.7} \cdot \frac{1.3}{3.5} &= \frac{1^2.3}{2^2.4^2.6} = \frac{1}{128} \\ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{7.9.11}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7.9.11} \cdot \frac{1.3.5}{5.7} &= \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2.8} = \frac{5}{2048} \\ \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \cdot \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8} \cdot \frac{1}{9.11.13.15} \cdot \frac{1.3.5.7}{7.9} &= \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2.10} = \frac{35}{32768} \end{aligned}$$

MAXWELL heeft zijn vergelijking gebracht in den vorm:

$$(14) \quad M = 4 \pi^2 n_1 n_2 a^2 (l - 2 A \alpha)$$

vergelijkt men dezen vorm met (5) dan wordt dus:

$$(15) \quad \alpha = \frac{Q'}{4 \pi^2 n_1 n_2 a^2 A}$$

Voeren we de hierboven besproken substituties en herleidingen uit, dan vinden we:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \frac{l - r + A}{A} - \\ &- \frac{1}{2^2.4} \frac{a^2}{A^2} (1 - 1.x^3) - \\ &- \frac{1^2.3}{2^2.4^2.6} \frac{a^4}{A^4} \left(1 + 2 \cdot \frac{2}{1} x^5 - 1 \cdot \frac{5}{1} x^7 \right) - \\ &- \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2.8} \frac{a^6}{A^6} \left(1 - 3 \cdot \frac{2.4}{1.3} x^7 + 3 \cdot \frac{4.7}{1.3} x^9 - 1 \cdot \frac{7.9}{1.3} x^{11} \right) - \\ &- \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2.10} \frac{a^8}{A^8} \left(1 + 4 \cdot \frac{2.4.6}{1.3.5} x^9 - 6 \cdot \frac{4.6.9}{1.3.5} x^{11} + 4 \cdot \frac{6.9.11}{1.3.5} x^{13} - 1 \cdot \frac{9.11.13}{1.3.5} x^{15} \right) - \\ &- \dots \dots \dots \text{enz.} \end{aligned} \right.$$

De wet voor de vorming van de getallencoëfficiënten, die vóór de ronde haken staan, behoeft geen nadere toelichting. De bouw van de functies van x in de ronde haken is ook gemakkelijk te volgen. Evenals bij de uitdrukkingen voor

de bolfuncties, waaruit ze ontstaan zijn, treden hier weer de binomiaalcoëfficiënten op. Verder hebben in iedere functie de machten van x tot coëfficiënt een breuk met gelijk aantal factoren in teller en noemer. Dit aantal is steeds één minder dan het ordegetal van de functie in de reeks.

De noemers zijn in iedere functie voor alle termen gelijk.

In iedere functie heeft de eerst voorkomende macht van x tot exponent $2n + 1$, en in den teller van den coëfficiënt $n - 1$ opvolgende *even* factoren, te beginnen met 2. De laatst voorkomende macht van x heeft tot exponent $4n - 1$, en in den teller van den coëfficiënt $n - 1$ opvolgende *oneven* factoren, te beginnen met $2n + 1$.

De tellers van de daartusschen gelegen termen worden verkregen door achtereenvolgens één, twee.... enz. *even* factoren, steeds van voren af aan beginnende, van den eersten coëfficiënt door een gelijk aantal van de *oneven* factoren, ook van het begin af gerekend, van den laatsten coëfficiënt te vervangen.

Een blik op de pag. 15 vermelde berekening voor den voorlaatsten term van α doet zien, dat de in de tellers van de coëfficiënten voorkomende *even* factoren ontstaan zijn uit de verschillen van twee *oneven* factoren uit de tellers van de breuken waaruit ze door optelling afgeleid zijn.

Daar we nu met behulp van bovenstaande regels in staat zijn, van de reeks α zooveel termen neer te schrijven als we verkiezen, stelt deze uitdrukking de door MAXWELL gegeven vergelijking volledig voor.

HOOFDSTUK II.

DE COËFFICIENT VAN ZELFINDUCTIE VOOR EEN LANGE SOLENOÏDE MET ÉENE LAAG WINDINGEN.

Stellen we in de vergelijking van MAXWELL $A = a$ en $n_1 = n_2 = n$, dan gaat deze over in de vergelijking voor de zelfinductie van een cylinder met n windingen per cm.

De vergelijking wordt dan, als we tevens de waarde van α (16) in (14) substitueeren:

$$L_s = 4\pi^2 n^2 a^2 \left\{ r - a + \right. \\ + \frac{1}{2.4} a (1 - 1.x^3) + \\ + \frac{1^2.3}{2.4^2.6} a \left(1 + 2.\frac{2}{1} x^5 - 1.\frac{5}{1} x^7 \right) + \\ + \frac{1^2.3^2.5}{2.4^2.6^2.8} a \left(1 - 3.\frac{2.4}{1.3} x^7 + 3.\frac{4.7}{1.3} x^9 - 1.\frac{7.9}{1.3} x^{11} \right) + \\ \left. + \dots \dots \dots \text{enz.} \right\}$$

We deelen nu binnen de accoladen door a , zoodat we daarvóór in plaats van a^2 , a^3 verkrijgen. Dus

$$(17) \quad L_s = 4\pi^2 n^2 a^3 \left\{ \frac{1}{x} - 1 + \right. \\ + \frac{1}{2.4} (1 - 1.x^3) + \\ + \frac{1^2.3}{2.4^2.6} \left(1 + 2.\frac{2}{1} x^5 - 1.\frac{5}{1} x^7 \right) + \\ + \frac{1^2.3^2.5}{2.4^2.6^2.8} \left(1 - 3.\frac{2.4}{1.3} x^7 + 3.\frac{4.7}{1.3} x^9 - 1.\frac{7.9}{1.3} x^{11} \right) + \\ \left. + \dots \dots \dots \text{enz.} \right\}$$

Deze vergelijking is in dezen vorm voor de berekening van zeer nauwkeurige waarden van de zelfinductie niet te gebruiken, daar wegens de langzame convergentie van de reeks een te groot aantal termen berekend zou moeten worden. Alleen voor zeer lange solenoïden zou men met enkele termen kunnen volstaan, maar dat geval heeft voor de praktijk weinig beteekenis.

Om dus formule (17) voor de berekening van coëfficiënten van zelfinductie bruikbaar te maken, moeten we trachten een eenvoudige uitdrukking te vinden, die zoo nauwkeurig mogelijk de som van de daarin voorkomende oneindig voortlopende reeks weergeeft.

Bij de vervaardiging en uitmeting ¹⁾ van den zeer zorgvuldig bewerkten standaard van zelfinductie voor het «Bureau of Standards» te Washington, is de bij deze meting bereikte nauwkeurigheid door COFFIN geschat op één honderdduizendste. Stellen we nu de grootste toelaatbare fout bij de berekening op de helft van dit bedrag, dus op één tweehonderdduizendste, dan is daarmee aan de hoogste eischen voor de praktijk voldaan. De nauwkeurigheid van de in dit Hoofdstuk af te leiden formule zal blijken nog aanmerkelijk groter te zijn.

Noemen we korthedshalve de reeks getallencoëfficiënten vóór de ronde haken $c_1, c_2, \dots, c_n$ en de functies van x in de ronde haken $y_1, y_2, \dots, y_n$ dan wordt de som van de reeks voorgesteld door:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n y_n,$$

waarvoor we kunnen schrijven:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n y_n = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n (y_n - 1).$$

Voeren we dit in formule (17) in, dan wordt deze:

$$(18) \quad L_s = 4 \pi^2 n^2 a^3 \left\{ \frac{1}{x} - 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n (y_n - 1) \right\}.$$

We beginnen met een eindigen vorm te zoeken voor

$$S_1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n.$$

¹⁾ Bur. of St. II, 93; 1906.

De algemeene term van deze reeks is:

$$c_n = \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-3)^2 (2n-1)}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2 (2n+2)},$$

vervangen we hierin n door $n-1$, dan krijgen we

$$c_{n-1} = \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-5)^2 (2n-3)}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n-2)^2 2n},$$

hieruit volgt

$$(19) \quad \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{(2n-3)(2n-1)}{2n(2n+2)} = \frac{4n^2 - 8n + 3}{4n^2 + 4n} = \frac{n^2 - 2n + 3/4}{n^2 + n}.$$

De reeks S_1 kan gebracht worden in den vorm van een hypergeometrische reeks. De algemeene gedaante daarvan is:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots \quad 0 < x < 1.$$

De algemeene term hiervan wordt:

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)} x^n;$$

hierin n door $n-1$ vervangen geeft:

$$u_{n-1} = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-2) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-2)}{1 \cdot 2 \dots (n-1) \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-2)} x^{n-1},$$

waaruit volgt:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)} x,$$

of, na herleiding,

$$(20) \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n^2 + (\alpha + \beta - 2)n + (\alpha - 1)(\beta - 1)}{n^2 + (\gamma - 1)n} x.$$

Vergelijken we deze uitdrukking met (19), dan blijkt, dat ze daarin overgaat als we:

$$\alpha + \beta - 2 = 2, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3/4, \quad \gamma - 1 = 1 \quad \text{en} \quad x = 1$$

stellen. Berekenen we hieruit de waarden van α , β en γ , dan vinden we:

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2.$$

De gezochte hypergeometrische reeks wordt dus:

$$(21) \quad F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 1\right) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{64} - \frac{5}{1024} - \dots = 1 - S_1.$$

Nu is in 't algemeen: ¹⁾

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)},$$

dus voor dit geval

$$F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 1\right) = \frac{\Gamma(2) \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3\pi},$$

daar

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

We krijgen dus ten slotte:

$$(22) \quad S_1 = 1 - \frac{8}{3\pi}.$$

Er blijft nu nog over $\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n(y_n - 1)$ in een voor de berekening geschikten vorm te brengen.

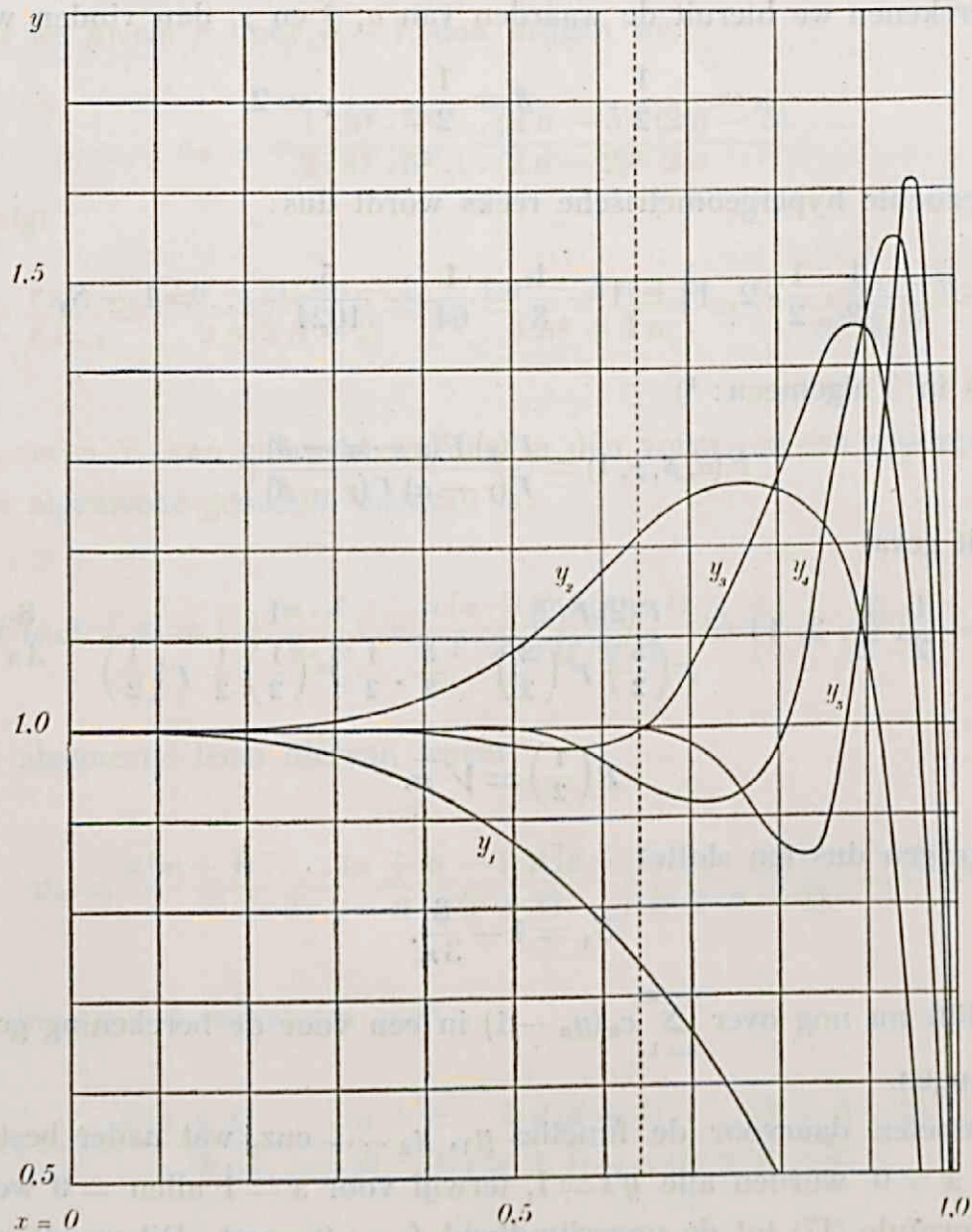
We moeten daarvoor de functies $y_1, y_2, \dots$ enz. wat nader bestudeeren.

Voor $x=0$ worden alle y 's $=1$, terwijl voor $x=1$ allen $=0$ worden en de geheele formule (17) tot de ongerijmdheid $L_s = 0$ voert. Dit wordt verklaard door het feit, dat bij de afleiding van de vergelijking van MAXWELL de laatste integratie tusschen de grenzen 0 en l is uitgevoerd. Nu is voor $x=1$, $l=0$, zoodat dan de integratiegrenzen samenvallen en daardoor de zooeven genoemde ongerijmdheid ontstaat.

¹⁾ Zie o.a. E. T. WHITTAKER, A course of modern analysis, 241.

In fig. 2 zijn de functies $y_1, y_2, \dots$ tot y_5 graphisch voorgesteld. Alle krommen gaan door het punt $x=1, y=0$, dat in de figuur niet is opgenomen, en ook door het punt $x=0, y=1$.

Fig. 2.



De gestippelde ordinaat verdeelt de figuur in twee deelen, waarvan het rechtsche betrekking heeft op korte solenoïden, het linksche op lange solenoïden.

Een solenoïde wordt hierbij gerekend tot de korte als $l < 1,2 a$, tot de lange als $l > 1,2 a$ is.

De motiveering van deze indeeling zal aan het einde van dit hoofdstuk gegeven worden.

Het algemeen karakter van de opvolgende krommen komt hierop neer, dat naarmate het rangnummer van de kromme hoger wordt, deze in het gebied links van de stippellijn steeds kleinere afwijkingen van de lijn $y=1$ vertoont. Daar we voor ons doel alleen de waarden van de y 's in dit gebied nodig hebben, kunnen we dus alle y 's, waarvan het rangnummer hoger is dan een zeker getal p , gelijk 1 stellen, zoodat dan in bovengenoemde som alle elementen waarvoor $n > p$ is, 0 worden.

Met groote benadering hebben we dus

$$(23) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n (y_n - 1) = \sum_{n=1}^{n=p} c_n (y_n - 1).$$

Het voordeel van deze transformatie is, dat de tweede uitdrukking de som van een eindig aantal termen voorstelt, zoodat we deze mogen verschikken, zonder dat dit invloed heeft op de waarde van de som, terwijl de eerste uitdrukking een oneindig voortlopende reeks voorstelt, waarbij wegens de afwisselende teekens zulk een verschikking in 't algemeen *niet* geoorloofd is.

Uit de figuur blijkt, dat we p niet zeer groot behoeven te nemen om bij de berekening nauwkeurige resultaten te verkrijgen. Nemen we b.v. $p=8$ en voeren de berekening uit, dan krijgen we na optelling en rangschikking volgens opklimmende machten van x een vorm van 15 termen, die alle oneven machten van x bevat te beginnen met x^3 en eindigende met x^{15} . Noemen we deze ψ , dan is dus

$$(24) \quad \psi = \sum_{n=1}^{n=8} c_n (y_n - 1).$$

Bij de berekening van de verhouding van de opvolgende getallencoëfficiënten in deze uitdrukking bleek nu, dat deze verhouding te beginnen met den vierden term en voortgaande tot den elfden term nagenoeg constant is en ongeveer 2 bedraagt, om voor de vier laatste termen zeer snel weer af te nemen.

Onder de vooropgestelde beperking, dat we voor x geen grootere waarden dan 0.64 nemen, kunnen we met zeer groote benadering voor de 15 termen van ψ de volgende uitdrukking van vier termen in de plaats stellen:

$$(25) \quad \psi = -0.125 x^3 + 0.0625 x^5 - 0.1172 x^7 + \frac{0.1646 x^9}{1 + 1.96 x^2}$$

De laatste term stelt de som van een oneindig voortlopende meetkundige reeks voor met rede $-1.96 x^2$ en eersten term $0.1646 x^9$, mits voldaan is aan de voorwaarde, dat $1.96 x^2 < 1$ is.

Wanneer we dezen term ontwikkelen dan blijkt, dat de zes eerste termen van deze ontwikkeling zeer kleine verschillen opleveren met de corresponderende termen van ψ . Hierop volgen drie termen met grootere afwijkingen, terwijl bij de drie laatste termen de verschillen relatief zeer groot zijn.

In onderstaande tabel zijn de absolute waarden van de coëfficiënten van ψ en φ naast elkaar geplaatst en in de vierde kolom de verschillen aangegeven. De vijfde kolom geeft de bij de coëfficiënten behorende machten van x en het teeken van den term.

	ψ	φ	$\varphi - \psi$	
1	0.1250	0.1250	0	$- x^3$
2	0.0625	0.0625	0	$+ x^5$
3	0.1172	0.1172	0	$- x^7$
4	0.1640	0.1646	$+ 0.0006$	$+ x^9$
5	0.3075	0.3226	$+ 0.0151$	$- x^{11}$
6	0.5801	0.6323	$+ 0.0522$	$+ x^{13}$
7	1.192	1.239	$+ 0.047$	$- x^{15}$
8	2.534	2.429	$- 0.105$	$+ x^{17}$
9	5.261	4.761	$- 0.500$	$- x^{19}$
10	12.03	9.332	$- 2.695$	$+ x^{21}$
11	24.72	18.29	$- 6.43$	$- x^{23}$
12	37.03	35.85	$- 1.18$	$+ x^{25}$
13	40.61	70.27	$+ 29.66$	$- x^{27}$
14	24.93	137.7	$+ 112.8$	$+ x^{29}$
15	6.456	270.0	$+ 263.5$	$- x^{31}$

Daar nu in het ongunstigste geval, n.l. voor $x=0.64$, de waarde van den term $\frac{0.1646 x^9}{1+1.96 x^2}$ slechts ongeveer $1/400$ van den geheelen coëfficiënt van zelf-inductie vertegenwoordigt, is het duidelijk dat het verschil $\varphi-\psi$ (in 't bovengenoemde geval $1/260000$ van L) steeds uiterst gering zal zijn, zoodat de vervanging van ψ door de veel kortere uitdrukking φ volkomen verantwoord is.

Substitueeren we nu de gevonden waarden van S_1 en φ in vergelijking (18), terwijl we nog

$$(26) \quad \frac{1}{x} + \varphi = \varphi_1(x)$$

stellen, dan krijgen we ten slotte:

$$(27) \quad L_s = 4\pi^2 n^2 a^3 \left(\varphi_1(x) - \frac{8}{3\pi} \right),$$

waarin

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x} - 0.125 x^3 + 0.0625 x^5 - 0.1172 x^7 + \frac{0.1683 x^9}{1 + 2.061 x^2} \quad ^1)$$

$$x = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}} \quad \text{geldend voor } 0 < x < 0.64$$

$$\text{of } \infty > l > 1.2 a$$

$$\frac{8}{3\pi} = 0.84882636.$$

Deze formule geeft nu in eindigen gesloten vorm met zeer groote benadering den coëfficiënt van zelfinductie voor alle solenoïden, waarvan de lengte begrepen is tusschen $1,2 a$ en ∞ .

De uitvoering van de berekening volgens deze formule is uiterst eenvoudig en vereischt, bij het gebruik van een tafel met zeven decimalen, in het ongunstigste geval 30 à 35 minuten, waarbij vooropgesteld is, dat men de logaritmen van de in de formule voorkomende constanten vooraf bepaald heeft.

Voor de berekening van de laatste drie termen van $\varphi_1(x)$ zijn vijf decimalen voldoende, die dus zonder interpolatie in de tafel met zeven decimalen gevonden kunnen worden.

Ten einde de nauwkeurigheid van de met deze formule berekende waarden te onderzoeken, heb ik deze vergeleken met de volgens de volkomen exacte

¹⁾ Om later te vermelden reden zijn de constanten in den laatsten term van $\varphi_1(x)$ eenigszins gewijzigd.

formule van LORENZ berekende waarden. Ik heb hiervoor de formule van LORENZ gebruikt in een door ROSA ¹⁾ gewijzigden vorm n.l.:

$$(28) \quad L_s = a N^2 Q$$

waarin

$$Q = \frac{8\pi}{3} \left\{ \sqrt{1 + \frac{b^2}{4a^2}} \left(\frac{4a^2}{b^2} - 1 \right) E + \sqrt{1 + \frac{b^2}{4a^2}} F - \frac{4a^2}{b^2} \right\}$$

$$\frac{2a}{b} = \operatorname{tg} \gamma \quad N = \text{geheele aantal windingen.}$$

γ is het argument ter bepaling van de zoogenaamde complete elliptische integralen van de eerste en tweede soort E en F . ²⁾

Vervangen we in bovenstaande uitdrukking voor Q , $\frac{2a}{b}$ door $\operatorname{tg} \gamma$ dan wordt deze:

$$(29) \quad Q_L = \frac{8\pi}{3} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma}} (\operatorname{tg}^2 \gamma - 1) E + \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma}} F - \operatorname{tg}^2 \gamma \right\}.$$

Berekenen we nu dezelfde grootheid $Q = \frac{L_s}{a N^2}$ uit formule (27), dan vinden we na herleiding:

$$(30) \quad Q_B = \pi^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \left(\varphi_1(x) - \frac{8}{3\pi} \right),$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x} - 0.125 x^3 + 0.0625 x^5 - 0.1172 x^7 + \frac{0.1683}{1 + 2.061 x^2} x^9;$$

$$\text{nu is } x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}}, \text{ terwijl } \operatorname{tg} \gamma = \frac{2a}{l};$$

$$\text{dus } l^2 = \frac{4a^2}{\operatorname{tg}^2 \gamma}. \text{ Dit in } x \text{ gesubstitueerd en herleid geeft:}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \gamma}}} \text{ of } \frac{1}{x} = \sqrt{1 + \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \gamma}}.$$

¹⁾ Bur. of St. V, 41; 1909.

²⁾ Zie Inleiding pag. 2.

Rosa ¹⁾ heeft voor een aantal waarden van $\lg \gamma$ van 0.2 tot 4.0 de grootheid Q_L berekend en in een tabel vereenigd, die hieronder is weergegeven.

$\frac{2a}{b} = \lg \gamma$	Q_L	$\frac{2a}{b} = \lg \gamma$	Q_L
0.20	3.63240	1.80	19.57938
0.30	5.23368	2.00	20.74631
0.40	6.71017	2.20	21.82049
0.50	8.07470	2.40	22.81496
0.60	9.33892	2.60	23.74013
0.70	10.51349	2.80	24.60482
0.80	11.60790	3.00	25.41613
0.90	12.63059	3.20	26.18009
1.00	13.58892	3.40	26.90177
1.20	15.33799	3.60	27.58548
1.40	16.89840	3.80	28.23494
1.60	18.30354	4.00	28.85335

Door nu de in deze tabel opgegeven waarden van $\lg \gamma$ in Q_B (30) te substitueeren, en de verkregen waarde van Q_B met de in de tabel gegeven Q_L te vergelijken, kon ik een oordeel krijgen over de nauwkeurigheid van de door mij afgeleide formule, en de grenzen bepalen binnen welke aan de gestelde eischen van nauwkeurigheid voldaan werd.

Bij de uitvoering stuitte ik echter op twee bezwaren. Een van deze bezwaren bestond hierin, dat voor de zeer lange solenoïden, waarvoor ik een overeenstemming in acht cijfers verwachtte, de waarden van Q_L in de tabel slechts in zes cijfers gegeven zijn. Het tweede, niet minder groote bezwaar was, dat de waarden van Q_L in de boven weergegeven tabel niet vrij van fouten bleken te zijn. Reeds de eerst opgegeven waarde voor $\lg \gamma = 0.20$, $Q_L = 3.63240$ is foutief en moet zijn $Q_L = 3.63238$. Deze fout is ruim 1000 maal grooter dan het verschil tusschen de waarden van Q_L en Q_B voor dit geval bedraagt.

Ik heb nu, om den juisten vorm van de kromme te bepalen, die de verschillen als functie van de relatieve lengte voorstelt, voor een vijftiental waarden van l , begrepen tusschen $l = a$ en $l = 10 a$, de berekening volgens de beide formules

¹⁾ Bur. of St. V, 114; 1909.

uitgevoerd in 10 decimalen, daarbij gebruik makende van den Thesaurus Logarithmorum van VEGA en voor de logarithmen van E en F van de bovenaangehaalde oorspronkelijke tafels van LEGENDRE.

Ten einde deze toch reeds tamelijk tijdroovende berekeningen niet noodeloos gecompliceerd te maken, heb ik voor het argument γ zoodanige waarden gekozen, dat de logarithmen van $\lg \gamma$, E en F zonder interpolatierekening aan de genoemde tafels ontleend konden worden.

Dat deze maatregel een belangrijke tijdbesparing meebracht, kan het best geïllustreerd worden door de opgave van een stel bij elkaar behoorende waarden van $\lg \gamma$, $\lg E$ en $\lg F$ met de in de tafels daarbij gegeven verschillen.

Voor $\gamma = 63.4^\circ$ vinden we n.l.

$\lg \gamma =$	0.300 3680 295	$D' = +$	525 916	$D'' = +$	40
$\lg E =$	0.071 447 108 316	$\lg F =$	0.353 357 874 771		
$D' = -$	346 919 479	$D' = +$	610 682 568		
$D'' = -$	83 631	$D'' = +$	2 070 386		
$D''' = +$	4 235	$D''' = +$	11 359		

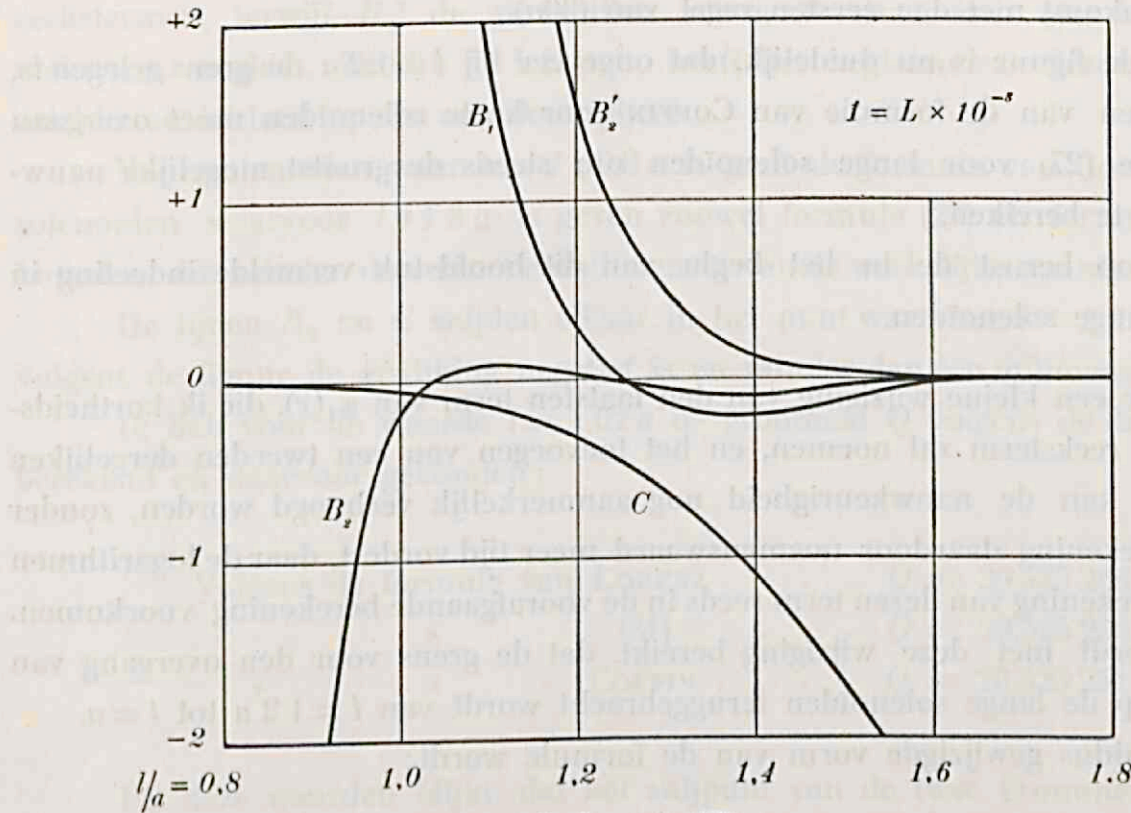
Voor deze waarde van γ is $\lg \gamma = 1.997$ en $l = 1.0015 a$.

Had ik hiervoor in overeenstemming met de tabel van Rosa $\lg \gamma = 2.00$ dus $l = a$ willen nemen, dan zou, eerst voor de bepaling van γ en daarna voor de logarithmen van E en F , een zeer tijdroovende interpolatierekening noodig geweest zijn.

Een overzicht van de resultaten van deze berekening geeft tabel I van het Aanhangsel. De waarden van Q_L en Q_B zijn zoover ingekort, dat de verschillen door getallen van 2 cijfers worden aangegeven. Het gaandeweg korter worden van de getallen in de derde en vierde kolom geeft een duidelijk beeld van de vermindere nauwkeurigheid bij het afnemen van de relatieve lengte, terwijl het zeer snelle stijgen van de vier laatste getallen in de vijfde kolom, die de afwijkingen in millioenste deelen van Q_L uitgedrukt aangeven, erop wijst, dat de formule (27), voor solenoïden waarvan de lengte minder dan $1.2 a$ bedraagt, niet meer aan de gestelde eischen van hooge nauwkeurigheid voldoet.

De lijn B_1 van fig. 3 geeft de in de laatste kolom van de tabel opgegeven afwijkingen weer voor de waarden van $l = 1.1 a$ tot $l = 1.8 a$.

Fig. 3.



B_1	Foutenkromme voor de formule (27),
B_2	" " " " (31) met twee reekstermen,
B'_2	" " " " (31) zonder tweeden reekstern,
C	" " " " van COFFIN.

De lijn C geeft de verschillen weer, die de berekening volgens de formule van COFFIN ¹⁾ voor korte solenoïden met de werkelijke waarden oplevert.

De formule van COFFIN luidt aldus: ²⁾

$$(30a) \quad \left\{ \begin{aligned} L_s = 4\pi a N^2 \left\{ \log \frac{8a}{b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{32} \frac{b^2}{a^2} \left(\log \frac{8a}{b} + \frac{1}{4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{1024} \frac{b^4}{a^4} \left(\log \frac{8a}{b} - \frac{2}{3} \right) + \frac{10}{131072} \frac{b^6}{a^6} \left(\log \frac{8a}{b} - \frac{109}{120} \right) - \right. \\ \left. - \frac{35}{4194304} \frac{b^8}{a^8} \left(\log \frac{8a}{b} - \frac{431}{420} \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

waarin

a = straal, b = lengte, N = totaal aantal windingen.

¹⁾ Bur. of St. II, 113; 1906 en V, 39; 1909.

²⁾ In deze formule en ook in 't vervolg heeft de afkorting $\log$ de betekenis van «natuurlijke logarithme». De gewone logarithme zal als $\lg$ worden aangeduid, terwijl $c \lg$ de zoogenaamde complementaire logarithme voorstelt.

Deze formule is een uitbreiding van de formule van RAYLEIGH en NIVEN ¹⁾, die overeenkomt met den eersten regel van (30a).

Uit de figuur is nu duidelijk, dat ongeveer bij $l = 1.2 a$ de grens gelegen is, waarbij men van de formule van COFFIN voor korte solenoïden moet overgaan op formule (27) voor lange solenoïden om steeds de grootst mogelijke nauwkeurigheid te bereiken.

Hierop berust de in het begin van dit hoofdstuk vermelde indeeling in korte en lange solenoïden.

Door een kleine wijziging van den laatsten term van $q_1(x)$, die ik korthedshalve den reeksterm zal noemen, en het toevoegen van een tweeden dergelijken reeksterm, kan de nauwkeurigheid nog aanmerkelijk verhoogd worden, zonder dat de berekening daardoor noemenswaard meer tijd vordert, daar de logaritmen voor de berekening van dezen term reeds in de voorafgaande berekening voorkomen. Tevens wordt met deze wijziging bereikt, dat de grens voor den overgang van de korte op de lange solenoïden teruggebracht wordt van $l = 1.2 a$ tot $l = a$.

De aldus gewijzigde vorm van de formule wordt:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} L_s &= 4\pi^2 n^2 a^3 \left(q_1(x) - \frac{8}{3\pi} \right) \\ q_1(x) &= \frac{1}{x} - 0.125 x^3 + 0.0625 x^5 - 0.1172 x^7 + \frac{0.1668 x^9}{1 + 1.998 x^2} - \frac{0.0883 x^{19}}{1 + 1.998 x^2} \end{aligned} \right.$$

Hiermede berekend zijn de grootste afwijkingen voor $l > 1.02 a$ kleiner dan één millioenste, terwijl voor $l = a$ de afwijking nog slechts 1.8 millioensten bedraagt en voor nog kortere solenoïden zeer snel toeneemt.

De constanten 0.1668, 0.0883 en 1.998 voorkomende in de twee laatste termen van $q_1(x)$ (31) zijn volgens de methode van de kleinste kwadraten bepaald. Dit is ook het geval met de constanten 0.1683 en 2.061 uit den laatsten term van (27). Het vrij groote aantal volgens de formule van LORENZ zeer nauwkeurig berekende waarden van Q , voor het gebied waarin de verschillen het grootst zijn, n.l. van $l = a$ tot $l = 1.8 a$, verschaft de gegevens, om de aanvankelijk uit de gedaante van ψ door schatting verkregen en in (25) vermelde waarden van deze constanten door het aanbrengen van correcties zoodanig te verbeteren, dat de som van de kwadraten van de overblijvende afwijkingen minimum werd.

¹⁾ Bur. of St. V, 39; 1909.

De lijn B_2 fig. 3 geeft de afwijkingen weer voor de formule (31) met twee reekstermen, terwijl B_2' de verschillen weergeeft als men in (31) den tweeden reeksterm weglaat. Zoodra $l > 1.45 a$ is, heeft het weglaten van dezen term geen merkbaaren invloed op de nauwkeurigheid.

Voor solenoïden waarvoor $l < 0.8 a$ is geeft de formule van COFFIN en voor solenoïden waarvoor $l > 1.8 a$ is geven zoowel formule (27) als formule (31) uitkomsten, die minder dan één tienmillioenste van de werkelijke waarde verschillen.

De lijnen B_2 en C snijden elkaar in het punt waarvoor $l = \pm 1.02 a$, terwijl volgens de figuur de afwijking negatief is en minder dan één millioenste bedraagt.

Ik heb voor de waarde $l = 1.02 a$ de grootheid Q volgens de drie formules berekend en daarvoor gevonden:

Volgens de formule van LORENZ	$Q = 20.525\ 266$
» » (31)	$Q = 20.525\ 256$
» » » COFFIN	$Q = 20.525\ 251$

Uit deze waarden blijkt, dat het snijpunt van de twee krommen werkelijk zeer dicht bij het punt $l = 1.02 a$ en iets links daarvan gelegen moet zijn.

Ten slotte volgen hier de volledige berekeningen voor dezelfde solenoïde volgens de drie formules. Ik heb daarvoor genomen de afdeelingen 1 + 2 van den grooten standaard van zelfinductie van het «Bureau of Standards» te Washington.

De afmetingen daarvan zijn $a = 27,0862$ cM., $b = l = 32,6912$ cM. terwijl volgens opgave van E. B. Rosa ¹⁾ de waarde van L_s 0.112 722 henry bedraagt.

¹⁾ Bur. of St. II, 172; 1906.

Volgens de formule van LORENZ (1)

Gegeven: $2a = 54.1724$, $b = 32.6912$, $N = 472$.Vooraf bepaalde logaritmen: $lg \frac{4\pi}{3} = 0.622\,0886$, $c\,lg\,3600 = 6.44370 - 10$.

$lg\,2a = 1.733\,7781^{**}$	$4a^2 = 2934.649^{**}$	$4a^2 = 2934.649$
$lg\,4a^2 = 3.467\,5562$	$b^2 = 1068.715^{**}$	$b^2 = 1068.715$
$lg\,8a^3 = 5.201\,3343$	$d^2 = 4003.364$	$4a^2 - b^2 = 1865.934$
$lg\,b = 1.514\,4309^{**}$	$lg\,lg\,\gamma = 0.219\,3472$	$D\,1'' = 47.6$
$lg\,b^2 = 3.028\,8618$	$lg\,lg\,58^\circ 53' 20'' = \frac{205}{267}$	$\frac{2\,67}{47.6} = 5.61$
$lg\,2a = 1.733\,7781$		
$c\,lg\,b = 8.485\,5691 - 10$		
$lg\,lg\,\gamma = 0.219\,3472$	$\gamma = 58^\circ 53' 25''.61^{**}$	$lg\,325.61 = 2.51270^*$
	$= 58.8^\circ + 325''.61$	$c\,lg\,3600 = 6.44370 - 10$
	$= 58.89045^0$	8.95640
$lg\,d^2 = 3.602\,4250^{**}$		$h = 0.09045^*$
$lg\,d = 1.801\,2125$		
$lg\,4a^2 - b^2 = 3.270\,8964^{**}$		
$lg\,N = 2.673\,9420^*$		
$lg\,N^2 = 5.347\,8840$		
	Interpolatieformule voor $lg\,E$ en $lg\,F$	
	$f(A+h) = f(A) + k(\Delta_1 - \frac{1-k}{2}\Delta_2)$, $k = 10h$	
	$k = 0.9045$ $\frac{1-k}{2} = 0.048$	
voor 58.8°	$\Delta_1 = +52595$	$\Delta_2 = +165$
$lg\,F = 0.3273\,3041^*$	-8	$+0.048 = 8$
$+4\,7565$	$lg\,52587 = 4.72089^*$	
voor $\gamma\,lg\,F = 0.3278\,0606$	$lg\,k = 9.95640 - 10$	
	$4.67729 \dots + 47565^*$	
voor 58.8°	$\Delta_1 = -33897$	$\Delta_2 = -25$
$lg\,E = 0.0872\,4764^*$	$+1$	$+0.048 = 1$
$-3\,0658$	$lg\,-33896 = 4.53015^*(-)$	
voor $\gamma\,lg\,E = 0.0869\,4106$	$lg\,k = 9.95640 - 10$	
	$4.48655 \dots - 30658^*$	
$lg\,F = 0.327\,8061$	$lg\,E = 0.086\,9411$	$lg\,U = 5.110\,8970^{**}$
$lg\,d = 1.801\,2125$	$lg\,d = 1.801\,2125$	$lg\,\frac{4\pi}{3} = 0.622\,0886$
$lg\,b^2 = 3.028\,8618$	$lg\,(4a^2 - b^2) = 3.270\,8964$	$lg\,N^2 = 5.347\,8840$
$5.157\,8804$	$5.159\,0500$	$c\,lg\,b^2 = 6.971\,1382 - 10$
$143\,840.23^{**}$	$144\,228.14^{**}$	$lg\,L_s = 8.052\,0078$
$144\,228.14$		$L_s = 0.112\,7218^{**} \text{ henry}$
$288\,068.37$		
$8a^3 = 158\,977.05^{**}$		
$129\,091.32 = U$		

Volgens formule (31).

Gegeven: $a = 27.0862$, $l = 32.6912$, $N = 472$.

Vooraf bepaalde logarithmen en constante:

$$\begin{array}{lll}
 \lg 0.125 = 9.096\,9100 - 10 & \lg 0.1668 = 9.222\,20 - 10 & \lg 4\pi^2 = 1.596\,3597 \\
 \lg 0.0625 = 8.795\,88 - 10 & \lg 0.0883 = 8.945\,96 - 10 & \\
 \lg 0.1172 = 9.068\,93 - 10 & \lg 1.998 = 0.300\,60 & \frac{8}{3\pi} = 0.848\,8264.
 \end{array}$$

$\lg a = 1.432\,7481^{**}$	$\alpha^2 = 733.6623^{**}$	neg. termen
$\lg a^2 = 2.865\,4962$	$l^2 = 1068.7147^{**}$	$\lg 0.125 = 9.096\,9100 - 10$
$\lg a^3 = 4.298\,2443$	$r^2 = 1802.3770$	$\lg x^3 = 9.414\,4759 - 10$
$\lg l = 1.514\,4309^{**}$	pos. termen	$8.511\,3859 - 10$
$\lg l^2 = 3.028\,8618$	$\frac{1}{x} = +1.567\,3816^{**}$	$-0.032\,4628^{**}$
$\lg r^2 = 3.255\,8456^{**}$		
$\lg r = 1.627\,9228$	$\lg 0.0625 = 8.795\,88 - 10$	$\lg 0.1172 = 9.068\,93 - 10$
$c \lg a = 8.567\,2519 - 10$	$\lg x^5 = 9.024\,13 - 10$	$\lg x^7 = 8.633\,78 - 10$
$\lg \frac{1}{x} = 0.195\,1747$	$7.820\,01$	$7.702\,71 - 10$
	$+0.006\,6070^*$	$-0.005\,0432^*$
$\lg x = 9.804\,8253 - 10$	$\lg 0.1668 = 9.222\,20 - 10$	$\lg 0.0883 = 8.9460 - 10$
$\lg x^2 = 9.609\,6506 - 10$	$\lg x^9 = 8.243\,43 - 10$	$\lg x^{19} = 6.2917 - 10$
$\lg x^3 = 9.414\,4759 - 10$	$c \lg p = 9.741\,53 - 10$	$c \lg p = 9.7415 - 10$
$9.609\,65 - 10$	$7.207\,16 - 10$	$4.9792 - 10$
$\lg x^5 = 9.024\,13 - 10$	$+0.001\,6112^*$	$-0.000\,0095^*$
$9.609\,65 - 10$		
$\lg x^7 = 8.633\,78 - 10$	$+1.567\,3816$	$-\frac{8}{3\pi} = -0.848\,8264$
$9.609\,65 - 10$	$0.006\,6070$	$0.032\,4628$
	$0.001\,6112$	$0.005\,0432$
$\lg x^9 = 8.243\,43 - 10$	$+1.575\,5998$	$0.000\,0095$
$\lg x^{10} = 8.048\,25 - 10$	$-0.886\,3419$	$-0.886\,3419$
$\lg x^{19} = 6.291\,68 - 10$	$0.689\,2579 = P$	
$\lg 1.998 = 0.300\,60$	$\lg P = 9.838\,3818 - 10^{**}$	
$\lg x^2 = 9.609\,65 - 10$	$\lg 4\pi^2 = 1.596\,3597$	
$9.910\,25 - 10$	$\lg N^2 = 5.347\,8840$	
$0.813\,3^*$	$\lg a^3 = 4.298\,2443$	
$1 + 1.998\,x^2 = 1.813\,3 = p$	$c \lg l^2 = 6.971\,1382 - 10$	
$c \lg p = 9.741\,53 - 10^*$	$\lg L_s = 8.052\,0080$	
$\lg N = 2.673\,9420^*$	$L_s = 0.112\,7218^{**}$ henry.	
$\lg N^2 = 5.347\,8840$		

Volgens de formule van COFFIN (30a).

Gegeven: $a = 27.0862$, $b = 32.6912$, $N = 472$.

Vooraf bepaalde logaritmen en constanten:

$$\begin{aligned} \frac{109}{120} &= 0.908\ 33 & \frac{431}{420} &= 1.026\ 19 & \lg 4\pi &= 1.099\ 2099 \\ \lg \frac{1}{32} &= 8.494\ 8500 - 10 & \lg \frac{10}{2^{17}} &= 5.882\ 49 - 10 & \text{clg mod} &= 0.362\ 2157 \\ \lg \frac{1}{1024} &= 6.989\ 70 - 10 & \lg \frac{35}{2^{22}} &= 4.921\ 41 - 10 & \lg 8 &= 0.903\ 0900 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg a &= 1.432\ 7481^{**} \\ \lg 8 &= 0.903\ 0900 \\ \text{clg } b &= 8.485\ 5691 - 10 \\ \lg 8a/b &= 0.821\ 4072 \\ \lg \lg 8a/b &= 9.914\ 5585^{**} \\ \text{clg mod.} &= 0.362\ 2157 \\ \lg \log 8a/b &= 0.276\ 7742 \\ \log 8a/b = p &= 1.891\ 3600^{**} \\ p - \frac{1}{2} &= 1.391\ 3600 \\ p + \frac{1}{4} &= 2.141\ 36 \\ p - \frac{2}{3} &= 1.224\ 69 \\ &1.891\ 36 \\ &0.908\ 33 \\ p - \frac{109}{120} &= 0.983\ 03 \\ &1.891\ 36 \\ &1.026\ 19 \\ p - \frac{431}{420} &= 0.865\ 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg b &= 1.514\ 4309^{**} \\ \text{clg } a &= 8.567\ 2519 - 10 \\ \lg b/a = \lg q &= 0.081\ 6828 \\ \lg q^2 &= 0.163\ 3656 \\ \lg q^4 &= 0.326\ 73 \\ \lg q^6 &= 0.490\ 10 \\ \lg q^8 &= 0.653\ 46 \\ \lg N &= 2.673\ 9420^{*} \\ \lg N^2 &= 5.347\ 8840 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pos. termen.} \\ \lg \left(p + \frac{1}{4} \right) &= 0.330\ 6897^{**} \\ \lg 1/32 &= 8.494\ 8500 - 10 \\ \lg q^2 &= 0.163\ 3656 \\ &8.988\ 9053 - 10 \\ &+ 0.097\ 4777^{**} \\ \lg \left(p - \frac{109}{120} \right) &= 9.992\ 57 - 10^{*} \\ \lg 10/2^{17} &= 5.882\ 49 - 10 \\ \lg q^6 &= 0.490\ 10 \\ &6.365\ 16 - 10 \\ &+ 0.000\ 2318^{*} \\ p - \frac{1}{2} &= 1.391\ 3600 \\ &0.097\ 4777 \\ &0.000\ 2318 \\ &+ 1.489\ 0695 \\ &- 0.002\ 5704 \\ &1.486\ 4991 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{neg. termen.} \\ \lg \left(p - \frac{2}{3} \right) &= 0.088\ 03^{*} \\ \lg 1/1024 &= 6.989\ 70 - 10 \\ \lg q^4 &= 0.326\ 73 \\ &7.404\ 46 - 10 \\ &- 0.002\ 5378^{*} \\ \lg \left(p - \frac{431}{420} \right) &= 9.937\ 10 - 10^{*} \\ \lg 35/2^{22} &= 4.921\ 41 - 10 \\ \lg q^8 &= 0.653\ 46 \\ &5.512\ 97 - 10 \\ &- 0.000\ 0326^{*} \\ &0.002\ 5378 \\ &0.000\ 0326 \\ &- 0.002\ 5704 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg 1.486\ 4991 &= 0.172\ 1646^{**} \\ \lg 4\pi &= 1.099\ 2099 \\ \lg a &= 1.432\ 7481 \\ \lg N^2 &= 5.347\ 8840 \\ \lg L_s &= 8.052\ 0066 \end{aligned}$$

$$L_s = 0.112\ 7215^{**} \text{ henry.}$$

In deze berekeningen zijn alle getallen, waarvoor het gebruik van een tafel vereischt werd, door één of twee sterretjes aangegeven. Eén sterretje beteekent, dat het getal onmiddellijk uit de tafel verkregen is, twee sterretjes, dat bij het gebruik van de tafel een interpolatieberekening noodig was. Uit het aantal getallen, dat op deze wijze gemerkt is, kan men ongeveer den voor iedere berekening vereischten tijd berekenen, hoewel daarbij natuurlijk ook de aard van de uit te voeren bewerkingen in aanmerking moet genomen worden.

Het eenvoudigst zijn de bewerkingen bij de berekening volgens de in dit Hoofdstuk afgeleide formule (31), daar deze zich hoofdzakelijk bepalen tot optellen, vermenigvuldigen met of deelen door 2, terwijl nergens in de berekening bijzondere aandacht gevorderd wordt.

De formule van COFFIN is ook nog zeer gemakkelijk in de toepassing, hoewel de omzetting van gewone in natuurlijke logarithmen daarbij al meer aandacht en dus meer tijd van den rekenaar in beslag neemt.

De formule van LORENZ is verreweg het meest tijdroovend, zoowel door het grootere aantal malen, dat het gebruik van een tafel noodig is, als door den aard van de uit te voeren bewerkingen. Vooral de interpolatieberekeningen met eerste en tweede verschillen voor de bepaling van $lg E$ en $lg F$ zijn lastig en tijdroovend.

HOOFDSTUK III.

DE COËFFICIENT VAN ZELFINDUCTIE VOOR EEN LANGE SOLENOÏDE MET VELE DRAADLAGEN.

De coëfficiënt van zelfinductie voor een solenoïde met rechthoekige doorsnede van de windingsruimte, wordt gevonden door de uitdrukking voor de onderlinge inductie van twee elementen daarvan tweemaal over deze ruimte te integreeren.

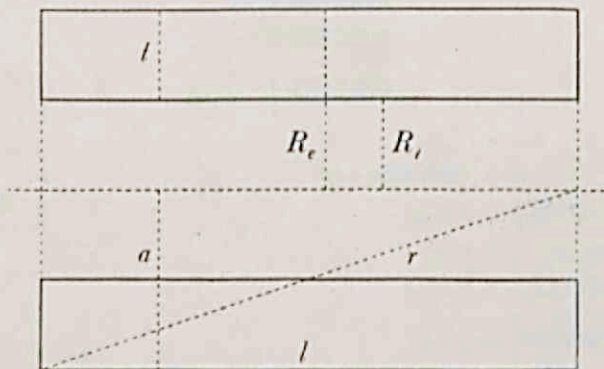
Als elementen van de solenoïde beschouwen we cylindervlakken waarvoor de onderlinge inductie door de vergelijking van MAXWELL gegeven is.

Deze vergelijking wordt, wanneer we ons voorloopig tot drie termen van de reeks beperken en de breuken herleiden:

$$(32) \quad M = 4\pi^2 n^2 a^2 \left[\sqrt{A^2 + l^2} - A + \frac{1}{8} \frac{a^2}{A} \left(1 - \frac{A^3}{r^3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{64} \frac{a^4}{A^3} \left(1 + 4 \frac{A^5}{r^5} - 5 \frac{A^7}{r^7} \right) + \frac{5}{1024} \frac{a^6}{A^5} \left(1 - 8 \frac{A^7}{r^7} + 28 \frac{A^9}{r^9} - 21 \frac{A^{11}}{r^{11}} \right) + \dots \right].$$

Voor de notaties raadplege men fig. 1, pag. 10.

Fig. 4.



Het aantal lagen dat op de solenoïde is aangebracht bedrage m_1 , het aantal windingen per cM. n . De beteekenis van de verdere te bezigen letters is in fig. 4 aangegeven.

We denken ons nu ieder van de m_1 lagen onderverdeeld in een oneindig groot aantal μ lagen, zoodat we dus in 't geheel μm_1 lagen verkrijgen.

We stellen nu korthedshalve:

$$(33) \quad \mu m_1 = m.$$

Den straal van de buitenste laag a_1 en den afstand van twee opeenvolgende lagen δa noemende, worden de stralen van deze lagen dus achtereenvolgens:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = a_1 - \delta a \\ a_3 = a_1 - 2 \delta a \\ \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \\ a_m = a_1 - (m - 1) \delta a. \end{array} \right.$$

Noemen we nu de onderlinge inductie van twee willekeurige lagen met stralen a_p en a_q , M_{pq} , dan wordt de zelfinductie van de solenoïde gegeven door de vergelijking:

$$(35) \quad L_u = \frac{2}{\mu^2} \sum_{p=1}^{p=q} \sum_{q=1}^{q=m} M_{pq}.$$

Door de vergrooing van het aantal lagen in de verhouding van 1 tot μ zou de zelfinductie μ^2 maal te groot worden. Daarom moet het resultaat van de integratie door μ^2 gedeeld worden om de zelfinductie voor het eindig aantal m_1 lagen te verkrijgen.

We vervangen in (32) A door a_p en a door a_q en stellen in plaats van de getallen coëfficiënten $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{64}$ en $\frac{5}{1024}$ korthedshalve c_1 , c_2 en c_3 .

Verder laten we om het overzicht gemakkelijker te maken de termen, waarin machten van $\frac{A}{r}$ voorkomen voorloopig weg. We krijgen dan

$$M_{pq} = 4 \pi^2 n^2 a_q^2 \left[\sqrt{a_p^2 + l^2} - a_p + c_1 \frac{a_q^2}{a_p} + c_2 \frac{a_q^4}{a_p^3} + c_3 \frac{a_q^6}{a_p^5} \right].$$

We geven nu aan q achtereenvolgens de waarden $1, 2, 3 \dots m$, en aan p de waarden $1, 2 \dots q$ en substitueeren de boven (34) gegeven waarden van de stralen in de uitdrukking tusschen de vierkante haken. We ontwikkelen den wortelvorm en voeren voor de drie laatste termen de deeling uit, waarbij we om

dezelfde reden, als zooeven voor de termen met de machten van $\frac{A}{r}$ is opgemerkt, voorloopig alleen de termen met de eerste macht van δa behouden.

Stellen we nu nog ter bekorting $\sqrt{a_1^2 + l^2} = r$ dan vinden we voor de termen van de te bepalen som (35) achtereenvolgens:

			c_1	c_2	c_3
$M_{1,1} = 4\pi^2 n^2 a_1^2 \left\{ r - a_1 \right.$			$+ a_1$	$+ a_1$	$+ a_1 \left. \right\}$
$M_{1,2} = 4\pi^2 n^2 a_2^2 \left\{ r - a_1 \right.$			$+ a_1 - 2\delta a$	$+ a_1 - 4\delta a$	$+ a_1 - 6\delta a \left. \right\}$
$M_{2,2} = 4\pi^2 n^2 a_2^2 \left\{ r - \frac{a_1 \delta a}{r} - a_1 + \delta a \right.$			$+ a_1 - 1\delta a$	$+ a_1 - 1\delta a$	$+ a_1 - 1\delta a \left. \right\}$
$M_{1,3} = \quad , \quad a_3^2 \left\{ 1 - 1 \right.$			$+ 1 - 4$	$+ 1 - 8$	$+ 1 - 12 \left. \right\}$
$M_{2,3} = \quad , \quad a_3^2 \left\{ 1 - 1 - 1 + 1 \right.$			$+ 1 - 3$	$+ 1 - 5$	$+ 1 - 7 \left. \right\}$
$M_{3,3} = \quad , \quad a_3^2 \left\{ 1 - 2 - 1 + 2 \right.$			$+ 1 - 2$	$+ 1 - 2$	$+ 1 - 2 \left. \right\}$
$M_{1,4} = \quad , \quad a_4^2 \left\{ 1 - 1 \right.$			$+ 1 - 6$	$+ 1 - 12$	$+ 1 - 18 \left. \right\}$
$M_{2,4} = \quad , \quad a_4^2 \left\{ 1 - 1 - 1 + 1 \right.$			$+ 1 - 5$	$+ 1 - 9$	$+ 1 - 13 \left. \right\}$
$M_{3,4} = \quad , \quad a_4^2 \left\{ 1 - 2 - 1 + 2 \right.$			$+ 1 - 4$	$+ 1 - 6$	$+ 1 - 8 \left. \right\}$
$M_{4,4} = \quad , \quad a_4^2 \left\{ 1 - 3 - 1 + 3 \right.$			$+ 1 - 3$	$+ 1 - 3$	$+ 1 - 3 \left. \right\}$
$M_{1,5} = \quad , \quad a_5^2 \left\{ 1 - 1 \right.$			$+ 1 - 8$	$+ 1 - 16$	$+ 1 - 24 \left. \right\}$
$M_{2,5} = \quad , \quad a_5^2 \left\{ 1 - 1 - 1 + 1 \right.$			$+ 1 - 7$	$+ 1 - 13$	$+ 1 - 19 \left. \right\}$
$M_{3,5} = \quad , \quad a_5^2 \left\{ 1 - 2 - 1 + 2 \right.$			$+ 1 - 6$	$+ 1 - 10$	$+ 1 - 14 \left. \right\}$
$M_{4,5} = \quad , \quad a_5^2 \left\{ 1 - 3 - 1 + 3 \right.$			$+ 1 - 5$	$+ 1 - 7$	$+ 1 - 9 \left. \right\}$
$M_{5,5} = \quad , \quad a_5^2 \left\{ 1 - 4 - 1 + 4 \right.$			$+ 1 - 4$	$+ 1 - 4$	$+ 1 - 4 \left. \right\}$
			enz.		

Daar het bij het opmaken van bovenstaand schema uitsluitend te doen is, om de wetten voor de optredende getallencoëfficiënten vast te stellen, zijn ter bevordering van de duidelijkheid van af de derde groep alleen deze coëfficiënten

vermeld en is vóór de accoladen de gemeenschappelijke factor $4\pi^2 n^2$ door een aanhalingsteeken vervangen. Verder zijn de factoren c_1 , c_2 en c_3 aan het hoofd van het schema geplaatst boven de kolommen waarin ze als gemeenschappelijken factor voorkomen.

De wetten voor de getallenreeksen, zoowel in verticale als in horizontale richting, zijn zeer duidelijk, zoodat onmiddellijk aan te geven is hoe de coëfficiënten voor de niet behandelde termen van de reeks uit MAXWELL's vergelijking zullen luiden.

De optelling van de in het schema opgenomen termen levert als resultaat:

$$\begin{aligned} \Sigma \Sigma M_{pq} = 4\pi^2 n^2 \bigg\{ & [a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + 4a_4^2 + 5a_5^2 + \dots] \left(r - a_1 [1 - c_1 - c_2 - c_3] \right) + \\ & + [a_2^2 + 3a_3^2 + 6a_4^2 + 10a_5^2 + \dots] \left(\delta a - \frac{a_1 \delta a}{r} \right) - \\ & - [3a_2^2 + 9a_3^2 + 18a_4^2 + 30a_5^2 + \dots] c_1 \delta a - \\ & - [5a_2^2 + 15a_3^2 + 30a_4^2 + 50a_5^2 + \dots] c_2 \delta a - \\ & - [7a_2^2 + 21a_3^2 + 42a_4^2 + 70a_5^2 + \dots] c_3 \delta a \bigg\}. \end{aligned}$$

De vier termen waarin δa voorkomt kunnen tot één term vereenigd worden door de factoren 3, 5 en 7 van de drie laatste reeksen naar den tweeden factor van den term over te brengen. We krijgen dan

$$\begin{aligned} (37) \quad \Sigma \Sigma M_{pq} = 4\pi^2 n^2 \bigg\{ & [a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + 4a_4^2 + 5a_5^2 + \dots] \left(r - a_1 [1 - c_1 - c_2 - c_3] \right) + \\ & + [a_2^2 + 3a_3^2 + 6a_4^2 + 10a_5^2 + \dots] \left(\delta a - \frac{a_1 \delta a}{r} - \delta a [3c_1 + 5c_2 + 7c_3] \right) \bigg\}. \end{aligned}$$

Vergelijkt men deze uitdrukking met de formule van COHEN, [Inleiding (2)] dan ziet men dat de tweede en derde term van deze laatste, wat den vorm betreft, veel overeenkomst vertoonen met de eerste en tweede term van (37). Het verschil is hoofdzakelijk gelegen in de coëfficiënten in de reeksen tusschen de vierkante haken. In de formule van COHEN zijn dat functies van m , terwijl in (37) deze coëfficiënten eenvoudige getallen zijn. Gaat men de afleiding van COHEN nauwkeurig na, dan blijkt, dat daarin grootheden van den vorm $(a_1 + m\delta a)^{-n}$ naar opklimmende machten van δa ontwikkeld zijn, terwijl $m\delta a$ grooter kan zijn dan a_1 en $\lim m\delta a/a_1 = \infty$ is, zoodat voor een groot aantal gevallen divergeerende reeksen ontstaan.

Deze term is:

$$\frac{m^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \Delta^n.$$

We behoeven dus van de getallenreeksen alleen het ordegetal en de waarde van het constante verschil te bepalen.

Voor den term met δa^2 b.v. geeft deze bepaling:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & & & & \\ & 2 & & 8 & & 6 & \\ 2 & 10 & & 14 & & 6 & \\ 12 & 24 & & 20 & & 6 & \\ 36 & 44 & & & & & \\ 80 & & & & & & \end{array} \quad \text{dus } \triangle_n = 6, \quad n = 3,$$

$$R = \frac{6 m^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{m^4}{4}.$$

Op dezelfde wijze vinden we:

$$P = \frac{m^2}{2}, \quad Q = \frac{2 m^3}{3}.$$

We laten nu voor het vervolg den index van a_1 weg, daar klaarblijkelijk $a_1 = a$. De reeks in den eersten term van (37) wordt dus:

$$\frac{m^2}{2} a^2 - \frac{2 m^3}{3} a \delta a + \frac{m^4}{4} \delta a^2.$$

Nu is $m \delta a = R_e - R_i = t$.

Dit invoerende en de breuken verdrijvende krijgen we:

$$\frac{1}{12} [6 m^2 a^2 - 8 m^2 a t + 3 m^2 t^2].$$

We brengen nu $m^2 a^2$ buiten de haken:

$$\frac{m^2 a^2}{12} \left[6 - 8 \frac{t}{a} + 3 \frac{t^2}{a^2} \right]. \quad (38)$$

Stellen we nu nog $\frac{t}{a} = \varrho$, dan vinden we ten slotte:

$$(40) \quad \frac{m^2 a^2}{12} [6 - 8 \varrho + 3 \varrho^2].$$

Passen we dezelfde bewerking toe op de reeks in den tweeden term van (37), dan vinden we daarvoor:

$$(41) \quad \frac{m^3 a^2}{12} \cdot \frac{1}{5} [10 - 15 \varrho + 6 \varrho^2].$$

We substitueeren nu deze uitdrukkingen (40) en (41) in (37), daarbij in den tweeden term één factor m naar het tweede deel daarvan overbrengende, waardoor δa in t overgaat en vinden dan:

$$\Sigma \Sigma M_{pq} = \frac{1}{3} \pi^2 n^2 m^2 a^2 \left\{ [6 - 8\varrho + 3\varrho^2] \left(r - a[1 - S_1] \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} [10 - 15\varrho + 6\varrho^2] \left(1 - S_2 - \frac{a}{r} \right) t \right\}.$$

Hierin is

$$S_1 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots c_n, \\ S_2 = 3c_1 + 5c_2 + 7c_3 + 9c_4 + \dots (2n+1)c_n.$$

In Hoofdstuk II pag. 21 hebben we gezien dat

$$S_1 = 1 - \frac{8}{3\pi}, \quad \text{dus} \quad 1 - S_1 = \frac{4}{3\pi}.$$

Op dezelfde wijze kan nu aangetoond worden dat

$$S_2 = 1 - \frac{4}{3\pi}, \quad \text{dus} \quad 1 - S_2 = \frac{4}{3\pi}.$$

We deelen nu binnen de accoladen door a , waardoor in den tweeden term de factor $\frac{t}{a} = \varrho$ optreedt, en substitueeren tevens de boven aangegeven waarden voor $1 - S_1$ en $1 - S_2$.

Substitueeren we dan in (35). dan vinden we als we weer $\frac{a}{r} = x$ stellen,

$$(42) \quad L_u = \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 \left\{ [6 - 8\varrho + 3\varrho^2] \left(\frac{1}{x} - \frac{8}{3\pi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} [10 - 15\varrho + 6\varrho^2] \left(\frac{4}{3\pi} - x \right) \varrho \right\}.$$

Stellen we in deze vergelijking $\varrho = 0$ dus $t = 0$ en $m_1 = 1$, dan moet ze overgaan in de vergelijking voor de zelfinductie van een solenoïde met éene laag. We krijgen dan

$$L_s = 4 \pi^2 n^2 a^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{8}{3\pi} \right).$$

Vergelijken we deze met formule (27) van Hoofdstuk II, dan zien we dat ze daarin overgaat, als we tusschen de haken nog de in het vorige hoofdstuk met φ aangeduide functie van x invoegen of, wat op 't zelfde neerkomt, $\frac{1}{x}$ door $\varphi_1(x)$ vervangen.

Daar voor dit geval de eischen van nauwkeurigheid niet zoo hoog behoeven gesteld te worden, kunnen we hier met de uitdrukking van $\varphi_1(x)$ met één reeksterm volstaan. Om later te vermelden reden is de teller van den reeksterm een weinig gewijzigd, nl.

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x} - 0.125 x^3 + 0.0625 x^5 - 0.1172 x^7 + \frac{0.1594 x^9}{1 + 2.061 x^2}.$$

Tot ditzelfde resultaat zouden we gekomen zijn, als we de tot nu toe verwaarloosde termen

$$-c_1 \frac{a^2 A^2}{r^3}, + 4 c_2 \frac{a^4 A^2}{r^5}, - 5 c_2 \frac{a^4 A^4}{r^7} \text{ enz.}$$

op dezelfde wijze in de ontwikkeling hadden opgenomen.

Het is duidelijk, dat de ontwikkeling van deze termen ook bijdragen levert met δa , die dus in den tweeden term moeten opgenomen worden, zoodat in dien term tusschen de ronde haken, behalve de constante $\frac{4}{3\pi}$, een functie van x moet optreden waarvan de eerste term $-x$ is. Daar de tweede term van (42) altijd klein zal zijn vergeleken bij den eersten, kunnen we hiervoor met de ontwikkeling van de boven opgegeven 3 termen ruimschoots volstaan.

Als voorbeeld moge hier de ontwikkeling van den term $\frac{a^2 A^2}{r^3}$ wat uitvoeriger behandeld worden.

Voeren we weer de indices p en q in, dan wordt deze term

$$\frac{a_q^2 a_p^2}{(\sqrt{a_p^2 + l^2})^3};$$

nu is:

$$\begin{aligned} a_q &= a_1 - (q-1) \delta a, \\ a_p &= a_1 - (p-1) \delta a, \end{aligned}$$

zoodat we na substitutie en herleiding, waarbij we de termen met δa^2 verwaarloozen, de volgende uitdrukking verkrijgen:

$$(a_1^4 - 2[p + q - 2] a_1^3 \delta a)(r^2 - 2(p - 1) a_1 \delta a)^{-3/2}$$

Stellen we nu $2(p - 1) a_1 \delta a = u$, dan wordt de tweede factor:

$$(r^2 - u)^{-3/2} = r^{-3} \left(1 - \frac{u}{r^2}\right)^{-3/2}.$$

Nu is

$$(1 - y)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2} y + \dots,$$

dus

$$(r^2 - u)^{-3/2} = \frac{1}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{u}{r^5}$$

of, de waarde van u substitueerende,

$$(r^2 - 2(p - 1) a_1 \delta a)^{-3/2} = \frac{1}{r^3} + 3 \frac{(p - 1) a_1 \delta a}{r^5};$$

deze uitdrukking met den eersten factor vermenigvuldigd geeft:

$$\frac{a_1^4}{r^3} - \frac{2[p + q - 2] a_1^3 \delta a}{r^3} + \frac{3(p - 1) a_1^5 \delta a}{r^5}.$$

We krijgen dus ten slotte, als we termen met δa^2 en hogere machten van δa verwaarloozen:

$$\frac{a^2 A^2}{r^3} = \frac{a_1^4}{r^3} - \frac{2[p + q - 2] a_1^3 \delta a}{r^3} + \frac{3(p - 1) a_1^5 \delta a}{r^5}.$$

Evenzoo de twee andere opgenoemde termen ontwikkelende, vinden we:

$$\frac{a^4 A^2}{r^5} = \frac{a_1^6}{r^5} - \frac{2[p + 2q - 3] a_1^5 \delta a}{r^5} + \frac{5(p - 1) a_1^7 \delta a}{r^7},$$

$$\frac{a^4 A^4}{r^7} = \frac{a_1^8}{r^7} - \frac{4[p + q - 2] a_1^7 \delta a}{r^7} + \frac{7(p - 1) a_1^9 \delta a}{r^9}.$$

Geven we nu in deze uitdrukkingen aan q de waarden $1.2\dots m$, en aan p de waarden $1.2\dots q$, dan krijgen we het volgende schema, analoog aan het op pag. 38 gegeven schema voor de hoofdtermen.

		$-c_1$	$+4c_2$	$-5c_2$
$M_{1.1} \dots 4\pi^2 n^2 a_1^2 \left\{ \frac{a_1^4}{r_3} \right\}$		$+\frac{a_1^6}{r^5}$	$+\frac{a_1^8}{r^7}$	
$M_{1.2}$	$a_2^2 \left\{ \frac{a_1^4}{r_3} - 1 \cdot \frac{2a_1^3}{r^3} \delta a \right\}$	$+\frac{a_1^6}{r^5} - 2 \cdot \frac{2a_1^5 \delta a}{r^5}$	$+\frac{a_1^8}{r^7} - 1 \cdot \frac{4a_1^7 \delta a}{r^7}$	
$M_{2.2}$	$a_2^2 \left\{ \frac{a_1^4}{r^3} - 2 \frac{2a_1^3}{r^3} \delta a + 1 \frac{3a^5}{r^5} \delta a \right\}$	$+\frac{a_1^6}{r^5} - 3 \cdot \frac{2a_1^5 \delta a}{r^5} + 1 \cdot \frac{5a^7}{r^7} \delta a$	$+\frac{a_1^8}{r^7} - 2 \cdot \frac{4a_1^7 \delta a}{r^7} + 1 \cdot \frac{7a_1^9}{r^9} \delta a$	
$M_{1.3}$	$a_3^2 \left\{ +1 - 2 \right\}$	$+1 - 4$	$+1 - 2$	
$M_{2.3}$	$a_3^2 \left\{ +1 - 3 \right\} +1$	$+1 - 5 +1$	$+1 - 3 +1$	
$M_{3.3}$	$a_3^2 \left\{ +1 - 4 \right\} +2$	$+1 - 6 +2$	$+1 - 4 +2$	
$M_{1.4}$	$a_4^2 \left\{ +1 - 3 \right\}$	$+1 - 6$	$+1 - 3$	
$M_{2.4}$	$a_4^2 \left\{ +1 - 4 \right\} +1$	$+1 - 7 +1$	$+1 - 4 +1$	
$M_{3.4}$	$a_4^2 \left\{ +1 - 5 \right\} +2$	$+1 - 8 +2$	$+1 - 5 +2$	
$M_{4.4}$	$a_4^2 \left\{ +1 - 6 \right\} +3$	$+1 - 9 +3$	$+1 - 6 +3$	
$M_{1.5}$	$a_5^2 \left\{ +1 - 4 \right\}$	$+1 - 8$	$+1 - 4$	
$M_{2.5}$	$a_5^2 \left\{ +1 - 5 \right\} +1$	$+1 - 9 +1$	$+1 - 5 +1$	
$M_{3.5}$	$a_5^2 \left\{ +1 - 6 \right\} +2$	$+1 - 10 +2$	$+1 - 6 +2$	
$M_{4.5}$	$a_5^2 \left\{ +1 - 7 \right\} +3$	$+1 - 11 +3$	$+1 - 7 +3$	
$M_{5.5}$	$a_5^2 \left\{ +1 - 8 \right\} +4$	$+1 - 12 +4$	$+1 - 8 +4$	
		enz.		

enz.

We voegen nu alle termen waarin δa voorkomt bij elkaar en vervangen daarbij $\frac{a}{r}$ door x . Voeren we dan weer met de daarbij optredende reeksen de boven beschreven herleidingen uit en substitueeren voor c_1 en c_2 de getallenwaarden daarvan, nl. $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{64}$, dan vinden we voor de som van al deze termen:

$$\frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 \cdot \frac{1}{5} [10 - 15q + 6q^2] \left[\frac{3}{4} x^3 - x^5 + \frac{5}{4} x^7 - \frac{35}{64} x^9 \right] q.$$

Schrijven we nu den van q afhankelijken tweeden term van de vergelijking (12) in den vorm

$$(44) \quad [10 - 15q + 6q^2] \left(\varphi_2(x) + \frac{4}{15\pi} \right) q,$$

dan wordt

$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{20}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^7 - \frac{7}{64}x^9.$$

Bij de ontwikkeling zijn nu ook de termen met δa^2 afgeleid voor den vorm onder het wortelteeken in vergelijking (32), voor de hoofdtermen van de reeks, en voor den term $-c_1 \frac{a^2 A^2}{r^3}$.

Als resultaat vinden we voor de som van deze termen

$$(45) \quad \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 \cdot \frac{1}{15} [15 - 24q + 10q^2] \left[\frac{1}{2}x - \frac{9}{8}x^3 + \frac{15}{16}x^5 + S_3 \right] q^2,$$

waarin

$$S_3 = c_1 + 6c_2 + 15c_3 + 28c_4 \dots + n(2n-1)c_n.$$

Substitueeren we hierin de getallenwaarden van $c_1, c_2 \dots$ enz. dan krijgen we:

$$(46) \quad S_3 = \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{64} + 15 \frac{5}{1024} + 28 \frac{35}{16384} + \dots \text{enz.}$$

Deze reeks blijkt nu voor een oneindig groot aantal termen divergent te zijn, zoodat we daarvoor geen som kunnen bepalen.

De verklaring van het optreden van deze divergeerende reeks moet gezocht worden in het verschikken van termen in reeksen met afwisselende teekens, die niet absoluut convergent zijn.

Noemen we de hoofdtermen van de reeks α , die in de elementen van den integraal L_u voorkomen, gerangschikt volgens hunne grootte, $u_1, u_2, u_3 \dots$ enz. dan komt de hier gevolgde integratiemethode hierop neer, dat we eerst ieder van de grootheden u in een convergeerende reeks naar opklimmende machten van δa ontwikkeld hebben en ter bepaling van Σu alle termen met $a, \delta a$ en δa^2 telkens tot één term vereenigd hebben.

Schematisch voorgesteld wordt dit dus:

$$u_1 = c_{1,1} a - c_{2,1} \delta a + c_{3,1} \frac{\delta a^2}{a} \dots$$

$$u_2 = c_{1,2} a - c_{2,2} \delta a + c_{3,2} \frac{\delta a^2}{a} \dots$$

$$u_3 = c_{1,3} a - c_{2,3} \delta a + c_{3,3} \frac{\delta a^2}{a} \dots$$

$$-----$$

$$u_n = c_{1,n} a - c_{2,n} \delta a + c_{3,n} \frac{\delta a^2}{a} \dots$$

$$\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty c_{1,n} a - \sum_1^\infty c_{2,n} \delta a + \sum_1^\infty c_{3,n} \frac{\delta a^2}{a} \dots$$

Deze wijze van sommeeren is alleen geoorloofd, als alle termen positief zijn. Bij afwisselende teekens is het zeer goed mogelijk, dat een of meer van de reeksen, gevormd door de vertikaal onder elkaar staande coëfficiënten, divergent is. In het hier behandelde geval blijkt nu $\sum_1^\infty c_{3,n}$ divergent te zijn.

We kunnen nu toch de som van de reeks $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ enz. met voor de praktijk voldoende nauwkeurigheid bepalen, door de reeks waarvan we uitgegaan zijn bij een bepaalden term af te breken, zoodat dan ook S_3 een eindig aantal termen bevat.

Nemen we van de oorspronkelijke reeks uit de vergelijking van MAXWELL de 100 eerste termen, dan bedraagt de som van de overige termen in het ongunstigste geval (nl. voor een solenoïde waarvan de lengte gelijk is aan den straal) ongeveer één vijftigduizendste van de geheele waarde van de zelf-inductie, zoodat deze verwaarloozing op het resultaat geen merkbaren invloed zal hebben.

We moeten dus de som van de 100 eerste termen van de reeks S_3 bepalen.

De algemeene term van deze reeks kan herleid worden tot de volgende gedaante:

$$u_n = \frac{1}{2^4 n} \left[\frac{2 n!}{n! n!} \right]^2 \frac{n}{n+1}.$$

Door middel van de formule van STIRLING voor $n!$ nl.:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{2(12n)^2} \right),$$

kan de limiet van u_n gemakkelijk bepaald worden. We vinden daarvoor:

$$(47) \quad \lim u_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{n}{(n+1)(4n+1)}.$$

Deze uitdrukking geeft reeds voor kleine waarden van n een zeer scherpe benadering. Voor $n=5$ b.v. bedraagt de fout slechts één duizendste van de werkelijke waarde.

We berekenen nu de vier eerste boven (46) opgegeven termen direkt, verder den vijfden tot den tienden term met behulp van de uitdrukking voor $\lim u_n$ (47). Ten slotte wordt van 10 tot 30 iedere vijfde term en van 30 tot 100 iedere tiende term berekend. Door deze laatste waarden op niet te kleine schaal graphisch uit te zetten, kunnen we de som van deze termen met voldoende nauwkeurigheid bepalen. We vinden op deze wijze:

$$S_{3(100)} = 1,26.$$

Voegen we nu de nieuw gevonden termen (44) en (45) in vergelijking (42) en brengen we den factor $1/15$ in den derden term naar het tweede lid van dien term, dan krijgen we ten slotte als formule voor den coëfficiënt van zelfinductie voor een solenoïde met rechthoekige doorsnede van de windingsruimte:

$$(48) \quad L_u = \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 \left\{ C_1 \left[\varphi_1(x) - \frac{8}{3\pi} \right] + C_2 \left[\varphi_2(x) + \frac{8}{30\pi} \right] \varrho + \right. \\ \left. + C_3 [\varphi_3(x) + 0.084] \varrho^2 + f(\varrho_0) \right\},$$

waarin: (zie fig. 4, pag. 36)

a = straal van het buitenoppervlak met inbegrip van de isoleering,

n = aantal windingen per cM., m_1 = aantal lagen,

t = windingsdiepte, l = lengte, a_0 = gemiddelde straal,

$$\varrho = \frac{t}{a}, \quad x = \frac{a}{r}, \quad r = \sqrt{a^2 + l^2}, \quad \varrho_0 = \frac{t}{a_0},$$

$$C_1 = 6 - 8\varrho + 3\varrho^2,$$

$$C_2 = 10 - 15\varrho + 6\varrho^2,$$

$$C_3 = 15 - 24\varrho + 10\varrho^2,$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^5 - \frac{15}{128}x^7 + \frac{0.1594x^9}{1 + 2.061x^2},$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{20}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^7 - \frac{7}{64}x^9,$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{30}x - \frac{3}{40}x^3 + \frac{1}{16}x^5.$$

De beteekenis van den term $f(\varrho_0)$ zal in het volgende hoofdstuk nader toegelicht worden.

HOOFDSTUK IV.

SOMMATIEMETHODE VOOR DE BEREKENING VAN DEN COËFFICIENT VAN ZELFINDUCTIE VOOR EEN SOLENOÏDE MET RECHTHOEKIGE DOORSNEDE VAN DE WINDINGSRUIMTE.

Ten einde de nauwkeurigheid van de in Hoofdstuk III afgeleide formule te kunnen toetsen, en den invloed van de bij de ontwikkeling verwaarloosde termen te bepalen, moeten we volgens een andere onafhankelijke methode de waarde van L_n trachten te vinden. De zekerste weg in alle dergelijke gevallen is de zoogenaamde sommatiemethode, die bij een correcte toepassing de meest betrouwbare waarden voor de zelfinductie oplevert.

De algemeene formule voor deze methode is:

$$(49) \quad L_n = n L_1 + 2 \{ (n-1) M_1 + (n-2) M_2 + \dots + M_{n-1} \}.$$

L_n is de zelfinductie van een solenoïde met éene laag van n windingen. L_1 stelt voor de zelfinductie van een enkele winding, $M_1, M_2, M_3 \dots$ enz. stellen voor de onderlinge inducties van twee windingen, waarvan de onderlinge afstand gelijk is aan 1, 2, 3, ..., enz. maal den afstand van twee opeenvolgende windingen.

Alvorens tot de beschrijving van deze methode over te gaan, wil ik eerst eenige nieuw in te voeren notaties en verkortingen bespreken, waarvan in dit Hoofdstuk herhaaldelijk gebruik gemaakt zal worden.

Ingevoerd worden de volgende notaties:

$L_1^-, L_2^-, L_3^-, \dots L_n^-$ = zelfinductie van een solenoïde, voorzien van 1, 2, 3, ..., n aaneensluitende windingen van oneindig dun metaalband van 1 cm. breedte,

$M_1^-, M_2^-, M_3^-, \dots, M_n^- =$ onderlinge inductie van twee zulke windingen, waarvan de onderlinge afstand 1, 2, 3, ..., n cM. bedraagt.

$L_1^\square, L_2^\square, L_3^\square, \dots, L_n^\square =$ zelfinductie van een solenoïde met éene laag aansluitende windingen, waarvan de doorsnede gevormd wordt door een kwadraat van 1 cM. zijde.

$M_1^\square, M_2^\square, M_3^\square, \dots, M_n^\square =$ onderlinge inductie van twee zulke windingen, waarvan de onderlinge afstand 1, 2, 3, ..., n cM. bedraagt.

Kortheidshalve zal in deze gevallen respectievelijk van «bandvormige windingen» en «quadratische windingen» gesproken worden.

Als standaardwaarde voor den straal a_0 is aangenomen 10 cM. Voor de quadratische windingen is daarmee de gemiddelde straal bedoeld.

Beschouwen we nu een solenoïde, bestaande uit n' quadratische windingen en passen de sommatie formule (49) toe, dan krijgen we:

$$(50) \quad L_u = L_{n'}^\square = n' L_1^\square + 2 \{ (n' - 1) M_1^\square + (n' - 2) M_2^\square + \dots M_{n'-1}^\square \}.$$

Berekenen we dus de grootheden $L_1^\square, M_1^\square, M_2^\square, \dots$ enz. en substitueeren deze waarden in (50), dan kunnen we de waarde van L_u met groote nauwkeurigheid bepalen, daar voor de berekening van al deze grootheden zeer nauwkeurige formules zijn afgeleid. Het is duidelijk, dat de toepassing van deze methode in dezen vorm voor groote waarden van n' zeer tijdroovend wordt en dus voor het hier behandelde geval, waarvoor n' steeds vrij groot is, niet bruikbaar is.

Rosa ¹⁾ heeft de sommatiemethode voor dit geval in een voor de toepassing zeer gemakkelijken vorm gebracht, en daar ik het principe van zijn methode geheel heb overgenomen, zal ik beginnen met zijn methode te beschrijven.

METHODE VAN ROSA.

Rosa berekent eerst de zelfinductie van een solenoïde, bestaande uit n' bandvormige windingen (fig. 5), waarvan de straal gelijk is aan den gemiddelden

¹⁾ Bur. of St. IV, 369; 1908.

Fig. 5.

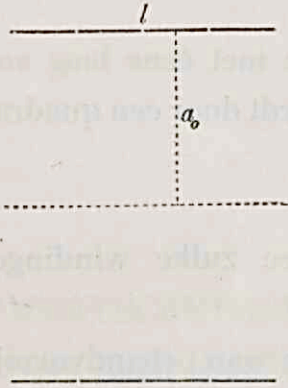


Fig. 6.

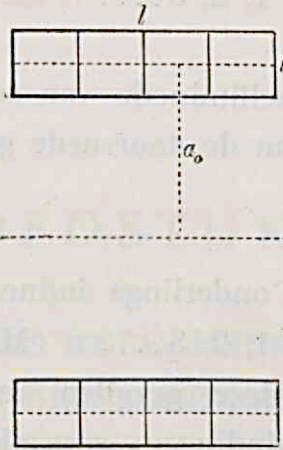
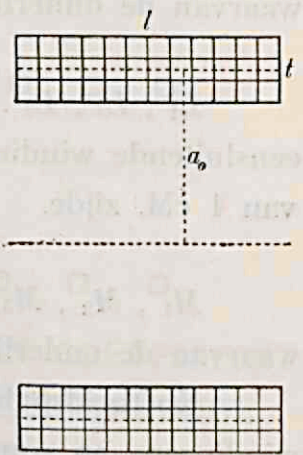


Fig. 7.



straal a_0 van de solenoïde met windingsdiepte t en $n' = \frac{l}{t}$ quadratische windingen (fig. 6).

De zelfinductie van deze laatste L_u en van de eerste L_s noemende, berekent hij de correctie om van L_s op L_u te komen, zoodat

$$(51) \quad L_u = L_s - \Delta_1 L,$$

waaruit volgt:

$$\Delta_1 L = L_s - L_u.$$

Passen we nu zoowel op L_s als op L_u de sommatieformule (49) toe, dan krijgen we:

$$L_s = n' L_1^- + 2 \{ (n' - 1) M_1^- + (n' - 2) M_2^- + \dots + M_{n'-1}^- \},$$

$$L_u = n' L_1^\square + 2 \{ (n' - 1) M_1^\square + (n' - 2) M_2^\square + \dots + M_{n'-1}^\square \}.$$

Deze twee uitdrukkingen van elkaar afgetrokken geeft, als we $M_1^- - M_1^\square = \Delta_1$, $M_2^- - M_2^\square = \Delta_2 \dots$ enz. stellen,

$$(52) \quad \Delta_1 L = n' (L_1^- - L_1^\square) + 2 \{ (n' - 1) \Delta_1 + (n' - 2) \Delta_2 \dots + \Delta_{n'-1} \}.$$

Rosa brengt nu de correctie in den vorm:

$$(53) \quad \Delta_1 L = 4 \pi a_0 n' (A + B),$$

waarin A betrekking heeft op het verschil in de zelfinducties en B op de verschillen in de onderlinge inducties.

Vergelijken we nu (52) en (53) met elkaar, dan volgt daaruit:

$$(54) \quad A = \frac{L_1^- - L_1^\square}{4\pi a_0},$$

$$(55) \quad B = \frac{2}{n'} \left\{ (n' - 1) \delta_1 + (n' - 2) \delta_2 + \dots + \delta_{n'-1} \right\},$$

waarin:

$$(56) \quad \begin{cases} \delta_1 = \frac{\Delta_1}{4\pi a_0} = \frac{M_1^- - M_1^\square}{4\pi a_0}, \\ \delta_2 = \frac{\Delta_2}{4\pi a_0} = \frac{M_2^- - M_2^\square}{4\pi a_0}, \\ \dots \dots \dots \text{enz.} \end{cases}$$

Voor de berekening van A wordt gebruik gemaakt van de formules van RAYLEIGH en NIVEN en van WEINSTEIN.

Volgens de eerste formule is

$$(57) \quad L_1^- = 4\pi a_0 \left\{ \log \frac{8a_0}{b} - \frac{1}{2} + \frac{b^2}{32a_0^2} \left(\log \frac{8a_0}{b} + \frac{1}{4} \right) \right\},$$

en volgens de formule van WEINSTEIN:

$$(58) \quad L_1^\square = 4\pi a_0 \left\{ \log \frac{8a_0}{b} - 1.1949 + \frac{b^2}{24a_0^2} \left(\log \frac{8a_0}{b} + 0.8777 \right) \right\}.$$

Substitueeren we deze waarden in (54) dan vinden we na herleiding:

$$(59) \quad A = 0.6949 - \frac{b^2}{96a_0^2} \left(\log \frac{8a_0}{b} + 2.76 \right).$$

Hierin is b de breedte van de bandvormige winding en dus tevens de zijde van het kwadraat voor de quadratische winding, en a_0 de gemiddelde straal.¹⁾

Voor de berekening van den correctieterm B is het noodig, de door (56) gedefinieerde waarden van $\delta_1, \delta_2, \dots$ enz. te kennen. Voor de bepaling van deze grootheden, die zeer snel afnemen, heeft ROSA gebruik gemaakt van het door MAXWELL²⁾ ingevoerde beginsel van den *Geometrisch Gemiddelden Afstand*.

¹⁾ Tabel V van het Aanhangsel geeft voor eenige waarden van b/a_0 de daarbij behorende waarden van A .

²⁾ MAXWELL II, § 693.

Een paar voorbeelden kunnen de beteekenis van dit begrip duidelijk maken.

a.) Trekt men uit een punt P , gelegen buiten een lijn van bepaalde lengte, lijnen naar alle punten van deze lijn en noemt men deze afstanden achtereenvolgens $d_1, d_2, \dots, d_n$, dan is de *Geometrisch Gemiddelde Afstand* R van het punt P tot de beschouwde lijn gedefinieerd door de volgende vergelijking:

$$(60) \quad R = \sqrt[n]{d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n} \quad \text{voor } n = \infty,$$

waaruit volgt:

$$\log R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \log d_n.$$

b.) Laat men het punt P een tweede lijn van bepaalde lengte doorloopen, dan stelt de door (60) bepaalde grootheid de *G. G. A.* van de twee beschouwde lijnen voor. n is dan het geheele aantal van de mogelijke puntenparen.

c.) Ligt het punt P op de gegeven lijn en laat men het tevens de geheele lijn doorloopen, dan stelt (60) de *G. G. A.* van de lijn tot zichzelf voor.

Zonder verdere toelichting is nu wel duidelijk, dat men op analoge wijze komt tot de *G. G. A.* van een punt tot een vlakke figuur, van twee vlakke figuren tot elkaar, en van een vlakke figuur tot zichzelf.

Het bovengenoemde beginsel van den *G. G. A.* bij de berekening van coëfficiënten van onderlinge inductie en van zelfinductie komt nu op het volgende neer. Vervangen we in een uitdrukking voor de onderlinge inductie van twee lijnvormige cirkels, die een functie van den straal en den onderlingen afstand d is, dezen afstand door den *G. G. A.* van twee vlakke figuren, dan stelt het resultaat van deze substitutie de onderlinge inductie voor van twee cirkelvormige ringen, waarvan de doorsneden gevormd worden door deze vlakke figuren. Daarbij wordt verondersteld, dat de stroom gelijkmatig over deze doorsneden verdeeld is. Voert men den *G. G. A.* van een figuur tot zichzelf in, dan ontstaat daardoor de vergelijking voor de zelfinductie van een ring, waarvan deze figuur de doorsnede is. Het hier beschreven beginsel is alleen streng geldig voor rechtlijnige geleiders, en mag op cirkelvormige ringen alleen toegepast worden, als de afmetingen van de doorsneden zeer klein zijn vergeleken bij den gemiddelden straal.

Volgens een door MAXWELL ¹⁾ gegeven vergelijking is de onderlinge inductie

¹⁾ Bur. of St. V, 10; 1909.

van twee op een kleinen afstand d van elkaar gelegen cirkels met straal a bij benadering:

$$(61) \quad M = 4 \pi a \left\{ \log \frac{8a}{d} - 2 \right\}.$$

Noemen we de *G. G. A.* van twee in elkaars verlengde gelegen lijnen van 1 cM. lengte, waarvan de gemiddelde afstand d is, R_d^- en evenzoo van twee op onderlingen afstand d gelegen quadraten met zijde van 1 cM. $R_d^\square$, dan krijgen we bij toepassing van het boven beschreven beginsel:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_d^- = 4 \pi a \left\{ \log \frac{8a}{R_d^-} - 2 \right\}, \\ \text{en} \\ M_d^\square = 4 \pi a_0 \left\{ \log \frac{8a}{R_d^\square} - 2 \right\}. \end{array} \right.$$

Substitueeren we deze waarden in (56) dan krijgen we na herleiding:

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \log \frac{R_1^\square}{R_1^-} \\ \delta_2 = \log \frac{R_2^\square}{R_2^-} \\ \dots\dots\dots \text{enz.} \end{array} \right.$$

Is de zijde van de quadraten en evenzoo de lengte van de lijnen in plaats van 1 cM. t cM., dan worden de *G. G. A.* respectievelijk $R_d^\square t$ en $R_d^- t$. De verhouding van deze twee grootheden is dus onafhankelijk van t , zoodat dus ook de uit de natuurlijke logarithmen van deze verhoudingen (de δ 's) berekende correctieterm B onafhankelijk van t en een zuivere functie van n' is.

De fout in Rosa's methode is nu hierin gelegen, dat alleen in rekening gebracht wordt de invloed van de windingsdiepte op de waarde van den correctieterm A , doch dat de correctieterm B voor alle windingsdiepten bij gelijk aantal windingen als constant wordt aangenomen, terwijl bij een correcte berekening van deze B blijkt, dat zelfs voor matige waarden van de windingsdiepte (b.v. 1 cM. bij 10 cM. gemiddelden straal) de invloed daarvan op de waarde van B vrij aanzienlijk is en den *wel* in rekening gebrachten invloed op A verre overtreft.

CORRECTE SOMMATIEMETHODE.

Willen we dus de sommatiemethode volgens het door ROSA aangegeven schema op correcte wijze toepassen, dan moet de correctieterm B volgens strenge formules voor bepaalde waarden van de windingsdiepte berekend worden.

Ik zal hier nu een overzicht geven van de berekeningen die hiervoor noodig waren, en van de daarbij gebruikte formules.

Om de waarden van $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ (56) te bepalen, die voor de berekening van den tabel voor B noodig zijn, moeten we kennen:

$$\begin{array}{cccc} M_1^-, & M_2^-, & M_3^- \dots & M_n^-, \text{ en} \\ M_1^\square, & M_2^\square, & M_3^\square \dots & M_n^\square. \end{array}$$

De eerste reeks grootheden zijn bepaald volgens een methode, die uit de sommatieformule is afgeleid. Passen we deze formule achtereenvolgens toe op solenoïden van 0, 1, 2, 3, ..., enz. cM. lengte, die dus uit evenveel bandvormige ringen bestaan als door de lengte wordt aangegeven, en maken we van de aldus verkregen uitdrukkingen de eerste en tweede verschilreeksen op, dan blijkt de tweede verschilreeks juist de gezochte grootheden op te leveren, vermenigvuldigd met den factor 2.

Het onderstaande schema kan dit duidelijk maken:

n	L_n^-	Δ_1	Δ_2
0	0	L_1^-	$2 M_1^-$
1	L_1^-	$L_1^- + 2 M_1^-$	$2 M_2^-$
2	$2 L_1^- + 2 M_1^-$	$L_1^- + 2 M_1^- + 2 M_2^-$	$2 M_3^-$
3	$3 L_1^- + 4 M_1^- + 2 M_2^-$	$L_1^- + 2 M_1^- + 2 M_2^- + 2 M_3^-$	
4	$4 L_1^- + 6 M_1^- + 4 M_2^- + 2 M_3^-$		
	 enz.		

Ik heb nu voor alle geheele waarden van $l=1$ tot $l=25$ cM. deze zelf-inducties zeer nauwkeurig berekend. Voor $l=1$ tot $l=10$ is gebruik gemaakt van de formule van COFFIN (30a) en voor $l=11$ tot $l=25$ van de formule (31)

met twee reekstermen, waarbij door middel van een in de ordinaatrichting sterk vergroote foutenkromme de noodige correcties zijn aangebracht.

Door nu van deze getallen behalve de eerste en tweede, ook de hogere verschilreeksen op te maken, kon deze berekening op eventueele fouten scherp gecontroleerd worden. Van af de tweede verschilreeks zijn al deze reeksen, wat de absolute waarden betreft, van boven naar beneden afdalend. Een betrekkelijk kleine fout in een van de getallen van de eerste kolom, kan nu de regelmaat in de hogere verschilreeksen verstoren. Hoe kleiner deze fout is, des te hoger zal de orde van de reeks zijn, waarin de invloed van deze fout op in 't oog loopende wijze zichtbaar wordt.

In onderstaand schema is weergegeven, hoe zich de invloed van de verhoging van een van de getallen in de eerste kolom met eene eenheid van de laatste decimaal, in de opvolgende kolommen van de verschilreeksen, voortplant.

								+ 1
							+ 1	— 8
						+ 1	— 7	+ 28
					+ 1	— 6	+ 21	— 56
			+ 1	— 5	+ 15	— 35	+ 70	
		+ 1	— 4	+ 10	— 20	+ 35	— 56	
	+ 1	— 3	+ 6	— 10	+ 15	— 21	+ 28	
+ 1	— 1	+ 1	— 1	+ 1	— 1	+ 1	— 1	+ 1
<i>L</i>	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$	$\triangle_4$	$\triangle_5$	$\triangle_6$	$\triangle_7$	$\triangle_8$

Daar nu gezorgd is, door het aanbrengen van de kleinst mogelijke wijzigingen in de getallen van de eerste kolom, dat tot en met de achtste verschilreeks geen in 't oog loopende onregelmatigheden vertoont, is uit bovenstaand schema gemakkelijk op te maken, dat de overblijvende fouten slechts zeer gering kunnen zijn. Een van de waarden uit de eerste kolom, nl. die voor $l = 20$ cM. is volgens de formule van LORENZ, die bij uitzondering voor dit speciale geval zeer eenvoudig wordt, berekend. Bij het aanbrengen van de hier genoemde kleine veranderingen is deze waarde voor $l = 20$ cM. onveranderd gelaten, evenals de zeven eerste waarden, die volgens de formule van COFFIN tot in de laatste decimaal nauwkeurig zijn.

Daar nu voor de berekening van de δ 's niet de waarden van de grootheden $M_1^-, M_2^-, \dots$ enz. zelf, doch deze grootheden gedeeld door $4\pi a_0$ vereischt werden, zijn ook bij de boven beschreven berekening niet de waarden van L_n^- doch de waarden van $\frac{L_n^-}{4\pi a_0}$ bepaald.

In tabel II zijn deze waarden in de tweede kolom opgegeven, zooals deze berekening ze na het aanbrengen van de besproken kleine correcties heeft opgeleverd. Ik acht deze waarden van 1 tot 25 tot in de laatste decimaal betrouwbaar, zoodat de uit de tweede verschillen afgeleide waarden van $\frac{M_1^-}{4\pi a_0}, \frac{M_2^-}{4\pi a_0}, \dots$ enz. zeker tot in de vijfde decimaal nauwkeurig zijn.

Deze waarden zijn in de derde kolom aangegeven.

Voor de berekening van de grootheden

$$\frac{M_1^{\square}}{4\pi a_0}, \frac{M_2^{\square}}{4\pi a_0}, \dots \text{ enz.}$$

zijn verschillende methoden gebezigd, die voor ieder van de aangegeven gevallen, de grootste waarborg van nauwkeurigheid aanbieden.

De eerste en verreweg de grootste is berekend uit de zelfinducties van één enkele winding en een solenoïde van twee windingen.

We hebben nl.:

$$L_2^{\square} = 2 L_1^{\square} + 2 M_1^{\square},$$

waaruit volgt:

$$M_1^{\square} = \frac{L_2^{\square} - 2 L_1^{\square}}{2}.$$

$L_1^{\square}$ is berekend volgens de boven genoemde formule van WEINSTEIN (58),

$L_2^{\square}$ is berekend volgens de formule van STEFAN ¹⁾, die aldus luidt:

$$(64) \quad L_n = 4\pi a N^2 \left\{ \left(1 + \frac{3b^2 + c^2}{96a^2} \right) \log \frac{8a}{\sqrt{b^2 + c^2}} - y_1 + \frac{b^2}{16a^2} y_2 \right\},$$

a = straal, b = lengte, c = diepte,

N = geheel aantal windingen.

¹⁾ Bur. of St. V, 47; 1909.

y_1 en y_2 zijn constanten, die door STEFAN voor verschillende waarden in tabel 1) gebracht zijn. Het argument waarvoor de waarden in deze tabel gelden, is de verhouding $\frac{c}{b}$ of $\frac{b}{c}$, zoodanig gekozen, dat deze verhouding kleiner dan 1 is. Voor het hier behandelde geval is $\frac{c}{b} = \frac{1}{2}$, en zijn de waarden van y_1 en y_2 respectievelijk:

$$y_1 = 0.79600, \quad y_2 = 0.3066.$$

De waarden $\frac{M_2^{\square}}{4\pi a_0}$ tot $\frac{M_{10}^{\square}}{4\pi a_0}$ zijn berekend volgens een door ROSA 2) afgeleide formule, nl.

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} M^{\square} = M^0 + \Delta M^{\square}, \\ \text{waarin} \\ \Delta M^{\square} = \frac{\pi b^2 N^2}{6 a_0} \left\{ \log \frac{8 a_0}{d} - 1 - \frac{a_0^2 b^2}{5 d^4} - \frac{3 d^2}{16 a_0^2} \left(\log \frac{8 a_0}{d} - \frac{4}{3} \right) + \frac{17 b^2}{240 d^2} \right\}. \end{array} \right.$$

Hierin stelt M^0 de onderlinge inductie voor van de centrale cirkels, d den onderlingen afstand van de quadratische ringen, b de zijde van het quadrat. N is het geheele aantal windingen; voor het beschouwde geval is dit = 1.

Deze formule geeft zeer nauwkeurige waarden, wanneer de afstand d niet grooter is dan de straal, met uitzondering van het geval, dat de ringen in contact zijn.

De grootheden $M_2^0, M_3^0, \dots$ enz., die voor de toepassing van formule (65) moeten bepaald worden, zijn berekend volgens de exacte formule van MAXWELL 3) voor de onderlinge inductie van twee cirkels:

$$(66) \quad M = 4\pi \sqrt{Aa} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) F - \frac{2}{k} E \right\};$$

A en a zijn de stralen en d is de afstand van de middelpunten, terwijl

$$k = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + d^2}} = \sin \gamma; \quad (67)$$

F en E zijn de reeds meer vermelde elliptische integralen.

1) Deze tabel is als tabel VI in het Aanhangsel opgenomen.

2) Bur. of St. V, 18; 1909.

3) Bur. of St. V, 6; 1909.

De waarden van de uitdrukking

$$\lg \frac{M}{\sqrt{A} a} = \lg \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) F - \frac{2}{k} E \right\}$$

zijn in tabel ¹⁾ gebracht voor alle waarden van $\gamma = 60^\circ$ tot $\gamma = 89^\circ 54'$, opklimmende met tiende graden.

Door interpolatie in deze tafel voor de verschillende berekende waarden van γ werden onmiddellijk de voor de berekening vereischte grootheden verkregen, nl. $\frac{M_2^0}{4\pi a_0}$, $\frac{M_3^0}{4\pi a_0}$, enz.

Voor de afstanden $d = 2$ tot $d = 10$ cM. zijn nu ook de waarden van

$$\frac{\triangle M_2^\square}{4\pi a_0}, \frac{\triangle M_3^\square}{4\pi a_0}, \dots \text{ tot } \frac{\triangle M_{10}^\square}{4\pi a_0}$$

volgens formule (65) berekend.

Door optelling van de corresponderende waarden uit de twee laatst vermelde berekeningen werden nu verkregen:

$$\frac{M_2^\square}{4\pi a_0}, \frac{M_3^\square}{4\pi a_0}, \dots \text{ tot } \frac{M_{10}^\square}{4\pi a_0}.$$

De waarden daarvan zijn in kolom 4 van tabel II vermeld.

Voor waarden van d grooter dan a_0 zijn de onderlinge inducties van de quadratische ringen berekend volgens de methode van LYLE ²⁾.

Deze methode komt hierop neer, dat de onderlinge inductie van twee quadratische ringen verkregen wordt, door in een uitdrukking voor de onderlinge inductie van twee cirkels, in plaats van den gemiddelden straal a_0 , een gewijzigden straal in te voeren, die gegeven wordt door de vergelijking:

$$(67) \quad R = a_0 \left(1 + \frac{b^2}{24 a_0^2} \right),$$

waarin b de zijde van het kwadraat voorstelt.

¹⁾ MAXWELL, II, 317.
Bur. of St. V, 110; 1909.

²⁾ Phil. Mag., 3, 310; 1902; Bur. of St. V, 16; 1909.

Daar de tabel van MAXWELL ons voor dit geval reeds spoedig in den steek laat, is voor de berekening van de onderlinge inductie van twee cirkels op grooteren afstand gebruik gemaakt van de formule van NAGAOKA ¹⁾.

Deze luidt:

$$M = 4\pi\sqrt{Aa} \left\{ 4\pi q^{3/2} (1 + \varepsilon) \right\},$$

waarin $\varepsilon = 3q^4 - 4q^6 + 9q^8 - 12q^{10} + \dots$,

$$q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + \dots,$$

$$l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} \quad k' = \frac{\sqrt{(A - a)^2 + d^2}}{\sqrt{(A + a)^2 + d^2}}.$$

Voor gelijke cirkels wordt dit, als we $4\pi a$ naar het eerste lid overbrengen:

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{M}{4\pi a} = \left\{ 4\pi q^{3/2} (1 + \varepsilon) \right\}, \\ \varepsilon = 3q^4 - 4q^6 + \dots, \\ q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + \dots, \\ l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}, \quad k' = \frac{d}{\sqrt{4a^2 + d^2}}. \end{array} \right.$$

Deze formule is zeer gemakkelijk voor de berekening, daar voor groote waarden van den afstand d , ε zeer klein is en de reeks q zoo sterk convergeert, dat alleen de eerste term behoeft berekend te worden.

Is b.v. $a = 10$ cM. $d = 20$ cM. dan is:

$$\frac{l}{2} = 0.043\,2395, \quad 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 = 0.000\,0003, \quad \varepsilon = 0.000\,0104.$$

Door nu in (68) de waarde van den door (67) gedefinieerden aequivalenten

¹⁾ Phil. Mag., 6, 19; 1903; Bur. of St. V, 8; 1909.

In Bur. of St. ontbreekt de factor 2 in den tweeden term van q .

straal te substitueeren en aan d achtereenvolgens de waarden 11, 12, enz. te geven, zijn berekend de grootheden:

$$\frac{M_{11}^{\square}}{4\pi a_0}, \frac{M_{12}^{\square}}{4\pi a_0}, \dots \text{enz.},$$

die eveneens in kolom 4 van tabel II te vinden zijn.

Kolom 5 geeft de waarden van de δ 's, die uit de getallen in de kolommen 3 en 4 door aftrekking verkregen zijn.

De wijze, waarop nu uit deze δ 's de tabel voor den correctieterm B is afgeleid, wordt door onderstaand schema duidelijk gemaakt.

	B	n
$2\delta_1 = 0.23918$		
$2\delta_2 = \frac{4390}{28308}$	$2\delta_1 = 0.23918 : 2 = 0.11959$	2
$2\delta_3 = \frac{1814}{30122}$	$\frac{28308}{52226 : 3 = 0.17409}$	3
$2\delta_4 = \frac{966}{31088}$	$\frac{30122}{82348 : 4 = 0.20587}$	4
	$\frac{31088}{1.13436 : 5 = 0.22687}$	5
	enz.	

Op dezelfde wijze, als hierboven voor de windingsdiepte 1 cM. beschreven is, zijn nu ook de waarden van de δ 's voor de windingsdiepte 2 cM. en denzelfden gemiddelden straal van 10 cM. berekend en is ook daaruit een tabel voor B afgeleid. De door Rosa berekende waarden van de δ 's en B gelden voor de windingsdiepte 0.

Tabel III geeft een overzicht van de waarden van de δ 's voor de drie gevallen, terwijl Tabel IV de daaruit berekende waarden van B eveneens voor de drie gevallen bevat. De waarden van B voor $\varrho_0 = 0.1$ en $\varrho_0 = 0.2$ zijn tot 4 decimalen afgekort, om ze direct vergelijkbaar te maken met de door Rosa berekende waarden.

Voor de windingsdiepte 2 cM. is de abscis n_0 van het snijpunt ongeveer 9.5, terwijl voor de windingsdiepte 1 cM. deze abscis ongeveer 19 bedraagt. Het product van deze twee grootheden, nl. $t n_0$, blijkt dus voor deze kromme lijnen nagenoeg constant te zijn. De beteekenis hiervan is, dat voor een onderlingen afstand, die 1,9 maal den gemiddelden straal bedraagt, de onderlinge inductie van twee bandvormige windingen even groot is als de onderlinge inductie van twee quadratische windingen, onafhankelijk van de verhouding $\frac{t}{a_0}$, mits de zijde van het kwadraat gelijk is aan de breedte van de bandvormige winding.

Voor afstanden kleiner dan $1,9 a_0$ is de onderlinge inductie van de bandvormige windingen *groot*, voor afstanden grooter dan $1,9 a_0$, *kleiner* dan voor de quadratische windingen.

Het is nu ook wel dadelijk in te zien, dat bij de berekening van den correctieterm B volgens het pag. 62 gegeven schema voor de drie besproken gevallen, de resultaten van deze berekening, m. a. w. de drie tabellen voor B , vrij groote verschillen moeten opleveren, die met het toenemen van n grooter worden en daarbij tot een bepaalde limiet naderen, daar de waarde van B zelf voor oneindig groote n tot een bepaalde limiet nadert, voorgesteld door de vergelijking:

$$B_{\infty} = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \delta_n.$$

VERGELIJKING VAN DE CORRECTE SOMMATIEMETHODE MET DE FORMULE
VAN STEFAN (64), DE FORMULE (48) VAN HOOFDSTUK III
EN DE METHODE VAN ROSA.

De tabellen II en IV bevatten nu alle gegevens, om voor de windingsdiepte 1 cM. en den gemiddelden straal 10 cM., de nauwkeurige waarde van L_n te bepalen voor alle in tabel II opgegeven lengten. Ook voor andere waarden van de windingsdiepte kunnen deze tabellen gebruikt worden. De getallen in de tweede kolom van tabel II moeten dan door t^2 gedeeld worden. Voor een windingsdiepte, waarvoor de waarde van B niet rechtstreeks in tabel IV te vinden is, moet in horizontale richting geïnterpoleerd worden, met inachtneming van het tweede verschil dat daarvoor als constant wordt aangenomen. Ook een extrapolatie voor waarden van q_0 grooter dan 0.2 zal, indien deze niet te ver gaat, aan de nauwkeurigheid van de resultaten geen schade doen.

Vergelijken we nu met de op deze wijze verkregen waarden, die we als volkomen correct zullen beschouwen en met L_{uc} zullen aanduiden, de resultaten

die bij de berekening volgens de formule van STEFAN (64), de methode van ROSA en de formule (48) van Hoofdstuk III verkregen worden, dan kunnen we uit de gevonden verschillen de foutenkrommen voor deze drie gevallen afleiden.

Ten einde deze berekening voor de formule (48) zoo eenvoudig mogelijk te maken, is deze op de volgende wijze getransformeerd:

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_n = \Phi(x) - C \\ \text{waarin:} \\ \Phi(x) = \frac{K_1}{x} - c_1 x - c_3 x^3 + c_5 x^5 - c_7 x^7 - c_9 x^9 + \frac{c_r x^9}{1 + 2.061 x^2}, \end{array} \right.$$

terwijl de in $\Phi(x)$ voorkomende coëfficiënten en de constante C bepaald worden door de volgende uitdrukkingen:

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 (6 - 8\varrho + 3\varrho^2) \\ c_1 = \frac{1}{5} K_2 - \frac{1}{30} K_3 \\ c_3 = \frac{1}{8} K_1 - \frac{3}{20} K_2 + \frac{3}{40} K_3 \\ c_5 = \frac{1}{16} K_1 - \frac{1}{5} K_2 + \frac{1}{16} K_3 \\ c_7 = \frac{15}{128} K_1 - \frac{1}{4} K_2 \\ c_9 = \frac{7}{64} K_2 \\ c_r = 0.1594 K_1 \\ C = \frac{8 K_1}{3 \pi} - \frac{8 K_2}{30 \pi} - 0.084 K_3 - \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 f(\varrho_0), \end{array} \right.$$

terwijl:

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 (10 - 15\varrho + 6\varrho^2) \varrho, \\ K_3 &= \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 (15 - 24\varrho + 10\varrho^2) \varrho^2. \end{aligned}$$

Alle onder (70) genoemde grootheden, die als coëfficiënten en als constante in formule (69) voorkomen, zijn alleen afhankelijk van den straal, de windingsdiepte, het aantal windingen per cM. en het aantal lagen, en onafhankelijk van

de lengte. Voor een bepaald stel aangenomen waarden van de opgenoemde grootheden (a, t, n, m_1) zijn het dus constanten, waardoor de berekening voor verschillende lengten alleen neerkomt op de berekening van x en de verschillende machten daarvan en substitutie van deze waarden in (69).

Voor al voor lange solenoïden wordt deze berekening zeer eenvoudig, daar dan de hogere machten van x , of geheel verwaarloosd kunnen worden, of slechts zeer kleine termen opleveren, waarvoor men dus bij de berekening met drie- of vierdecimalige logaritmen volstaan kan.

De beteekenis van den in Hoofdstuk III niet nader gedefinieerden term $f(\varrho_0)$ in formule (48), die in (70) in de constante C voorkomt is nu deze, dat daardoor de invloed van alle bij de afleiding van formule (48) verwaarloosde hogere machten van δa voorgesteld wordt. Gaat men de ontwikkeling na en beschouwt men den vorm van formule (48) nader, dan is duidelijk dat achter de opgegeven drie termen tusschen de accoladen zouden moeten volgen, termen van de gedaante:

$$C_4 (\varphi_4(x) + p_4) \varrho^3, \quad C_5 (\varphi_5(x) + p_5) \varrho^4 \dots \text{enz.},$$

waarin $C_4, C_5, \dots$ enz. functies van ϱ zijn analoog aan C_1, C_2 en C_3 .

$\varphi_4(x), \varphi_5(x) \dots$ enz. zijn zuivere functies van x , terwijl $p_4, p_5 \dots$ enz. constanten voorstellen.

Gaat men nu de opeenvolgende functies $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots$ enz. na, dan blijkt dat deze functies, vooral voor lange solenoïden met uitzondering van $\varphi_1(x)$ zeer klein zijn, en, vergeleken bij de constanten in de corresponderende termen, steeds meer op den achtergrond treden, zoodat de kleinere termen voor lange solenoïden alleen van ϱ afhangen en dus voor een bepaalde aangenomen waarde van ϱ constant zijn.

Bij de berekening van L_u volgens formule (48), voor verschillende lengten bij 1 cM. windingsdiepte, en vergelijking van de verkregen waarden met de correcte waarden, die uit de tabellen II en IV werden berekend, bleek nu, dat de verschillen voor alle waarden van de lengte, grooter dan 20 cM. praktisch constant waren. Dit constante verschil bedroeg 34.9. Door nu voor $f(\varrho_0)$ in (48) een zoodanige waarde aan te nemen, dat $\frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 f(\varrho_0) = 34.9$ werd, kon voor alle solenoïden van meer dan 20 cM. lengte nagenoeg volmaakte overeenstemming verkregen worden en bleken ook de fouten voor solenoïden tusschen 10 en 20 cM. nog zeer gering te zijn.

Ook voor de windingsdiepte 2 cM. kon nu berekend worden, welke waarde aan $f(\varrho_0)$ toegekend moest worden om een even goede overeenstemming te verkrijgen.

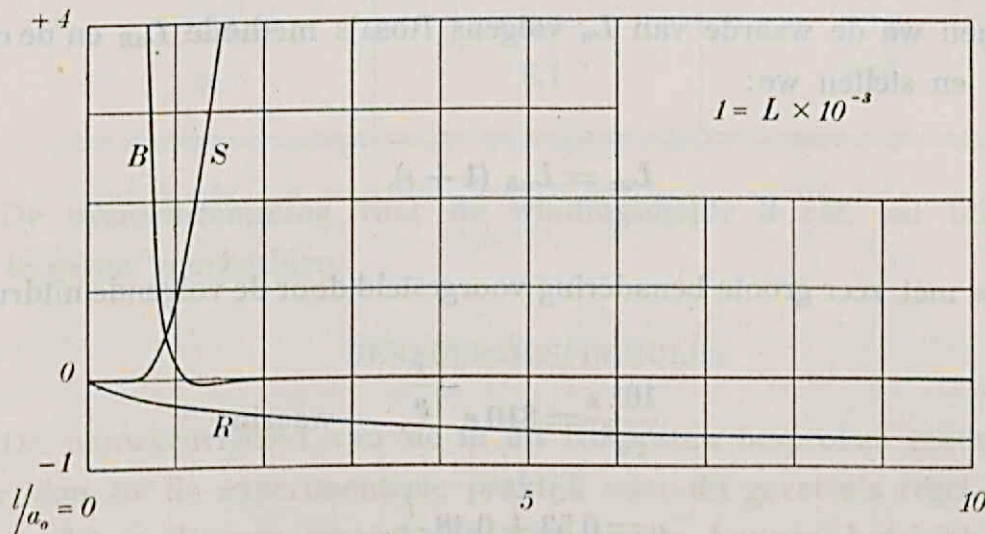
De twee aldus gevonden waarden van $f(\varrho_0)$ zijn nu:

$$\begin{array}{ll} \text{voor } \varrho_0 = 0.1 & f(\varrho_0) = -0.00458, \\ \text{„ } \varrho_0 = 0.2 & f(\varrho_0) = -0.01284. \end{array}$$

Daar nu voor $\varrho_0 = 0$, ook $f(\varrho_0) = 0$ wordt, beschikken we over drie waarden van deze functie, waarbij de veranderlijke ϱ_0 met gelijke intervallen toeneemt en kunnen we dus voor andere, tusschen de opgenoemde gelegen waarden van ϱ_0 een eenvoudige interpolatierekening toepassen, waarbij dan het tweede verschil constant aangenomen wordt. Dit is de reden, waarom in (48) deze kleine term op deze wijze en niet als $f(\varrho)$ is voorgesteld. De intervallen zouden dan *niet* gelijk zijn, waardoor de mogelijkheid voor een eenvoudige interpolatie vervalt.

De resultaten van de berekeningen ter bepaling van de foutenkrommen voor de drie op pag. 65 vermelde methoden voor $\varrho_0 = 0.1$ zijn in fig. 9 graphisch voorgesteld.

Fig. 9.



S	Foutenkromme voor de formule van STEFAN voor $\varrho_0 = 0.1$
B	„ „ „ „ (69) „ „ „
R	„ „ „ methode van ROSA „ „ „

De lijn S in fig. 9 stelt het verloop van de fouten voor, die bij de berekening volgens de formule van STEFAN (64) gevonden zijn. De lijn B geeft deze fouten voor de formule (69), die natuurlijk gelijkwaardig is aan formule (48). De lijn R

geeft aan op welke wijze, bij de berekening volgens Rosa's methode, de berekende waarden van de werkelijke waarden afwijken.

De lijnen B en S snijden elkaar in een punt waarvoor $l = 0.9 a_0$, terwijl de gemeenschappelijke fout voor die lengte één tweeduizendste bedraagt.

Daar men nu de afmetingen van een solenoïde met vele draadlagen door allerlei oorzaken toch niet met zeer groote nauwkeurigheid kan bepalen, behoeven ook bij de berekening voor dit geval niet zulke hoge eischen aan de nauwkeurigheid gesteld te worden.

De formule van STEFAN (64) voor $l < 0.9 a_0$ en formule (48) of (69) voor $l > 0.9 a_0$ geven voor dit geval voldoende nauwkeurigheid. Ook de methode van ROSA zou voor de windingsdiepte van 1 cm. nog voldoende nauwkeurig zijn. Nu blijkt echter voor grootere windingsdiepten bij gelijke lengte de fout van Rosa's methode evenredig met het kwadraat van de windingsdiepte toe te nemen, zoodat voor grootere waarden daarvan deze methode voor nauwkeurige berekening niet te gebruiken is.

Ik ben erin geslaagd de fout van Rosa's methode, die dus een functie blijkt te zijn van de relatieve lengte $\frac{l}{a_0}$ en de windingsdiepte $q_0 = \frac{t}{a_0}$, door een vrij eenvoudige empirische vergelijking voor te stellen.

Noemen we de waarde van L_u volgens Rosa's methode L_{uR} en de correcte waarde L_{uc} , en stellen we:

$$(70) \quad L_{uc} = L_{uR} (1 + \epsilon),$$

dan wordt ϵ met zeer groote benadering voorgesteld door de volgende uitdrukking:

$$\frac{10^4 \epsilon}{q_0^2} = 810 e^{-\frac{1}{\mu}}, \quad \text{waarin:}$$

$$\mu = 0.53 + 0.48 \frac{l}{a_0}.$$

Hieruit volgt:

$$(71) \quad \log \frac{10^4 \epsilon}{q_0^2} = 6.697 - \frac{1}{\mu}.$$

Onderstaande tabel ¹⁾ geeft voor $\rho_0 = 0.1$, een vergelijkend overzicht van de werkelijke en de volgens (71) berekende waarden van ε voor verschillende waarden van $\frac{l}{a_0}$. De werkelijke waarden zijn door middel van tabel IV bepaald en worden door de lijn R van fig. 9 voorgesteld.

$\frac{l}{a_0}$	$10^4 \varepsilon$	
	werkelijke waarde	berekende waarde
0.5	2.2	2.21
1.0	3.0	3.01
1.5	3.6	3.64
2.0	4.0	4.14
2.5	4.4	4.54
3.0	4.8	4.88
4.0	5.4	5.39
5.0	5.9	5.76
10.0	6.7	6.72
∞	8.1	8.10

De overeenstemming voor de windingsdiepte 2 cm. zal blijken uit de straks te geven voorbeelden.

BENADERINGSFORMULES.

De nauwkeurigheid van de in dit Hoofdstuk besproken methoden is veel groter dan in de experimentele praktijk voor dit geval als regel verlangd zal worden. Het is daarom wenschelijk ook nog te kunnen beschikken over een benaderingsformule, die bij den grootst mogelijken eenvoud van vorm, toch een redelijke nauwkeurigheid bij de berekening oplevert. Een formule die aan deze

¹⁾ Tabel VII van het Aanhangsel geeft voor een aantal verschillende waarden van ρ_0 en l/a_0 de daarbij behorende waarden van ε .

eischen voldoet, wordt verkregen door van formule (48) alleen den eersten term te nemen en daarin van $\varphi_1(x)$ de drie laatste termen te verwaarloozen.

Deze benaderingsformule kan in den volgenden zeer eenvoudigen vorm geschreven worden:

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_u = \frac{K_1}{x} - \frac{K_1}{8} x^3 - \frac{8 K_1}{3 \pi}, \\ \text{waarin:} \\ K_1 = \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 (6 - 8 \varrho + 3 \varrho^2). \end{array} \right.$$

Voor de notaties zie pag. 49.

Voor $\varrho = 0$ en $m_1 = 1$ krijgen we hieruit de benaderingsformule voor L , dus

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_s = \frac{K_1}{x} - \frac{K_1}{8} x^3 - \frac{8 K_1}{3 \pi}, \\ \text{waarin:} \\ K_1 = 4 \pi^2 n^2 a^3. \end{array} \right.$$

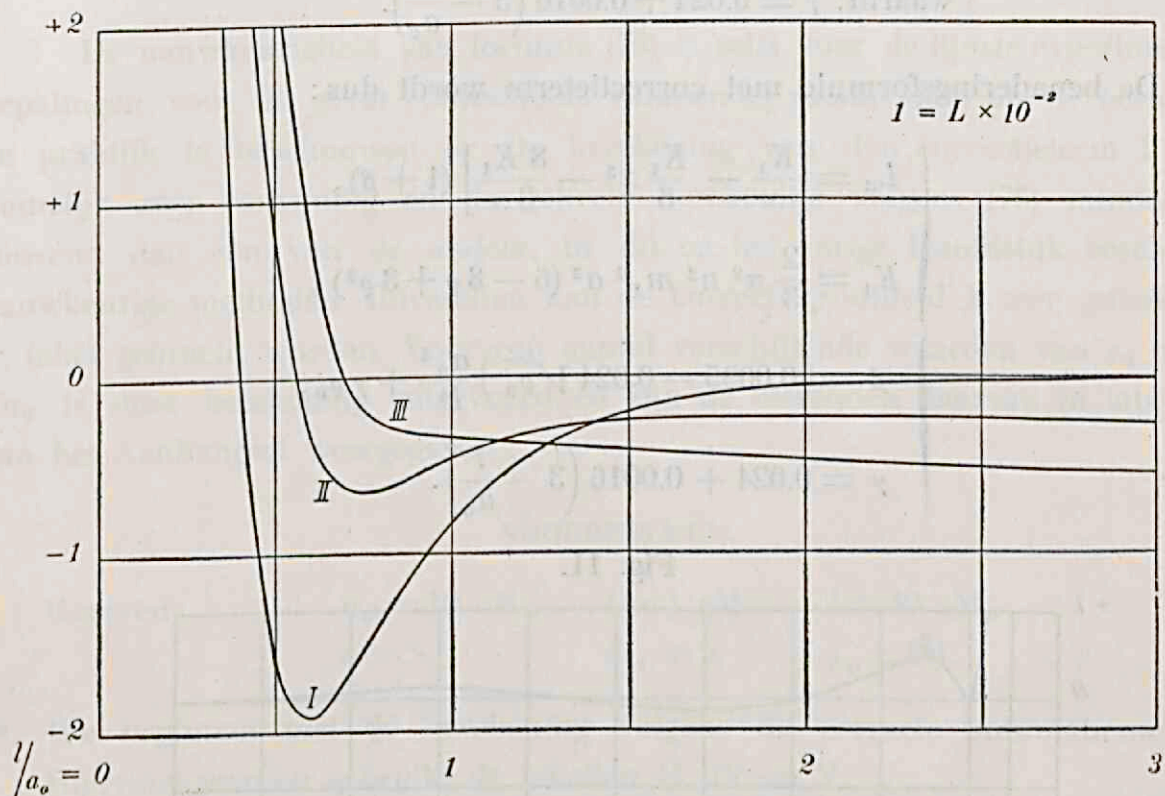
Ook voor deze twee formules zijn door vergelijking met L_{uc} de foutenkrommen bepaald, waarbij voor formule (72) de berekening voor de beide waarden van de windingsdiepte, nl. 1 en 2 cM. is uitgevoerd.

In fig. 10 zijn deze drie foutenkrommen voor alle waarden van l/a_0 tot 3.0 voorgesteld. Uit deze lijnen blijkt, dat voor $l > 1.5 a_0$ deze formules een zeer goede benadering geven en wel des te beter naarmate t kleiner is. Voor $l < 1.5 a_0$ zijn de grootere waarden van t in 't voordeel. Zelfs voor de zeer korte solenoïden, waarvan de lengte begrepen is tusschen $0.5 a_0$ en a_0 blijven de fouten beneden 2 procent.

Vergelijkt men formule (72) met de in de Inleiding genoemde formule van LOUIS COHEN (2), dan behoeft het wel geen nader betoog, dat formule (72) in alle opzichten de voorkeur verdient. De nauwkeurigheid van (72) blijkt daarbij ook aanmerkelijk grooter te zijn dan die van de formule van COHEN. Voor een windingsdiepte van 1 cM. en een gemiddelden straal van 10 cM., waarbij vijf lagen van vijf windingen per cM. aangenomen werden, bleek de fout van laatstgenoemde formule voor een lengte van 10 cM., 12 maal grooter te zijn dan de fout van formule (72); voor 20 en 40 cM. lengte zijn deze fouten respectievelijk nog 4 en 3 maal grooter. Voor deze berekening zijn de twee laatste termen van (2) in

hunne (pag. 4) opgegeven ware gedaanten gebezigd. De foutieve vormen flatteeren de resultaten voor de langere solenoïden, terwijl voor de korte de fouten grooter worden. Voor $l = \pm 1.5 a_0$ gaat de foutenkromme voor de formule van COHEN

Fig. 10.



I	Foutenkromme voor formule (73)
II	„ „ „ „ (72) $t = 1$ cM.
III	„ „ „ „ (72) $t = 2$ „

in zeer steile richting door de abscis-as. Geteekend op de schaal van fig. 9 zou deze lijn voor $l = a_0$ een hoogte moeten hebben van 57 cM. *boven* de as, om voor $l = 2a_0$ tot 11 cM. *onder* de as te dalen, en na het bereiken van een minimum bij ongeveer $2.5 a_0$ vrij scherp om te buigen en daarna langzamer tot de as terug te keeren.

Evenals bij de methode van Rosa heb ik ook voor de in fig 10. voorgestelde fouten-krommen een eenvoudige empirische vergelijking opgesteld, die de drie lijnen met vrij groote benadering voorstelt voor de waarden van l grooter dan a_0 .

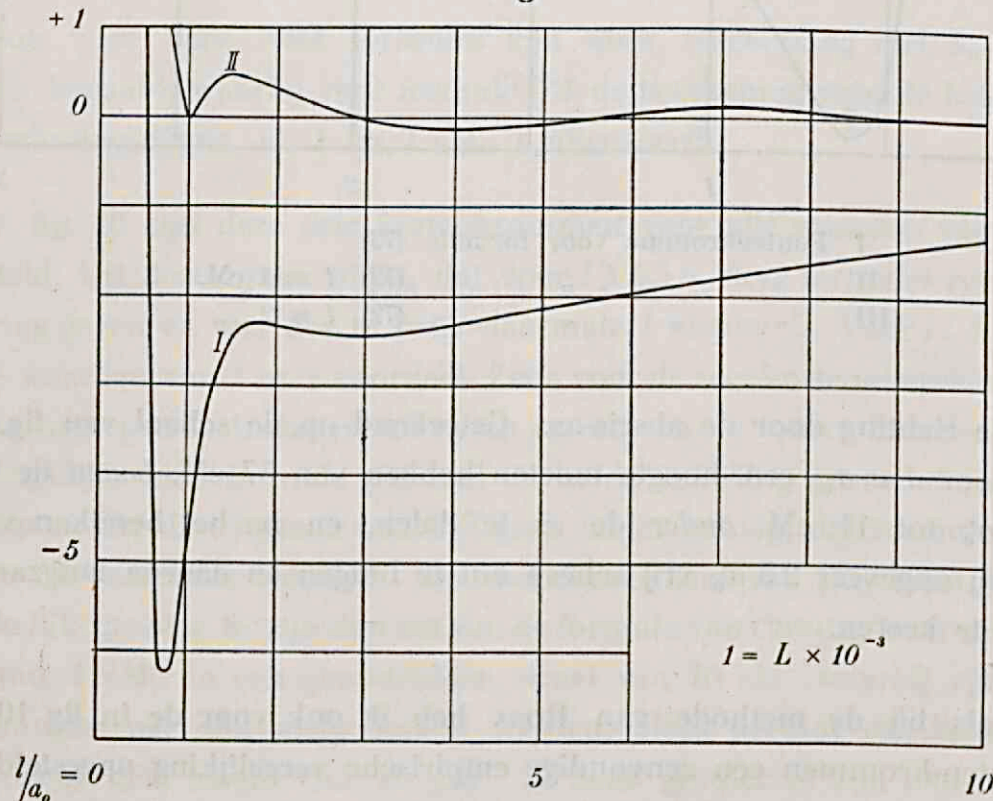
Noemen we de fout van formule (72), in deelen van L_{uc} uitgedrukt, β , dan wordt deze empirische vergelijking:

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = \left(0.0095 - 0.024 \sqrt{\varrho_0} \right) \frac{a_0^4}{l^4} + \gamma \varrho_0, \\ \text{waarin: } \gamma = 0.024 + 0.0016 \left(3 - \frac{l}{a_0} \right). \end{array} \right.$$

De benaderingsformule met correctieterm wordt dus:

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_u = \left[\frac{K_1}{x} - \frac{K_1}{8} x^3 - \frac{8 K_1}{3 \pi} \right] (1 + \beta), \\ K_1 = \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m_1^2 a^3 (6 - 8 \varrho + 3 \varrho^2), \\ \beta = \left(0.0095 - 0.024 \sqrt{\varrho_0} \right) \frac{a_0^4}{l^4} + \gamma \varrho_0, \\ \gamma = 0.024 + 0.0016 \left(3 - \frac{l}{a_0} \right). \end{array} \right.$$

Fig. 11.



I Foutenkromme voor formule (72) $l = 1$ cM., $\varrho_0 = 0.1$
 II " " " " (75) " " " "

In fig. 11 is voor de windingsdiepte van 1 cM. graphisch weergegeven, hoe door het invoeren van den correctieterm $1 + \beta$, vooral voor lengten grooter dan 30 cM. de fouten van formule (72) tot een zeer gering bedrag teruggebracht worden.

Ook voor andere waarden van l geeft formule (75) fontenkrommen, die geheel analoog zijn aan de lijn II van fig. 11.

De nauwkeurigheid van formule (75) is zelfs voor de fijnste experimenteele bepalingen voor dit geval ruimschoots voldoende, zoodat deze als de beste voor de praktijk te beschouwen is. De berekening van den correctieterm $1 + \beta$ is namelijk zeer eenvoudig en de geheele berekening volgens (75) minder tijdroovend dan een van de andere, in dit en het vorige Hoofdstuk beschreven, nauwkeurige methoden. Bovendien kan de correctiegrootheid β zeer gemakkelijk in tabel gebracht worden. Voor een aantal verschillende waarden van q_0 en van l/a_0 is deze berekening uitgevoerd en zijn de resultaten daarvan in tabel VIII van het Aanhangsel weergegeven.

VOORBEELDEN.

Gegeven: $a_0 = 10$ cM., $t = 1$ cM., $l = 40$ cM.,
 $n = 5$, $m_1 = 5$, $q_0 = 0.1$.

1°. We beginnen met de berekening volgens de correcte sommatiemethode. Hiervoor worden gebruikt de tabellen II, IV en V.

Volgens tabel II is $L_{40}^- : 4 \pi a_0 = 1028.100$
 „ „ IV „ $B_{(40,0.1)} = 0.3151$
 „ „ V „ $A_{(0.1)} = 0.6942$

verder is $n' = l/t = 40$.

Substitueeren we in (51) de door (53) gegeven waarde van $\triangle_1 L$, en deelen beide leden van de vergelijking door $4 \pi a_0$, dan krijgen we:

$$\frac{L_u}{4 \pi a_0} = \frac{L_s}{4 \pi a_0} - n' (A + B).$$

Hierin de bovenvermelde waarden substitueerende, krijgen we als we $4 \pi a_0$ naar het tweede lid overbrengen:

$$L_{40}^\square = 40 \pi [1028.100 - 40 (0.3151 + 0.6942)].$$

Dit is de zelfinductie voor een solenoïde van 40 quadratische windingen van 1 cM. zijde, corresponderende met fig. 6 pag. 52. Om nu de zelfinductie te verkrijgen voor vijf lagen van vijf windingen per cM. analoog aan het in fig. 7 aangegeven geval voor drie lagen van drie windingen per cM., moet met $n^2 m_1^2$, dus met 625 vermenigvuldigd worden. We krijgen dus voor de correcte waarde van de zelfinductie:

$$\begin{aligned} L_{uc} &= 25000 \pi [1028.100 - 40 \times 1.0093] \\ &= 246932 \pi = 77576000 \text{ cM,} \quad \text{of} \\ L_{uc} &= \mathbf{77.5760 \text{ M.H. (millihenry).}} \end{aligned}$$

De geheele berekening komt nu als volgt te staan:

$$\begin{array}{rcl} L_{40}^- : 4 \pi a_0 &= & 1028.100 \quad A = 0.6942 \\ \Delta_1 L : 4 \pi a_0 &= & 40.372 \quad B = 0.3151 \\ L_{40}^\square : 4 \pi a_0 &= & 987.728 \quad A + B = 1.0093 \\ & & \frac{\Delta_1 L}{4 \pi a_0} = n' (A + B) = 40.372 \\ \lg 987.728 &= & 2.994\,6373 \\ \lg 4 \pi a_0 &= & 2.099\,2099 \\ \lg n^2 m_1^2 &= & 2.795\,8800 \\ \lg L_{uc} &= & 7.889\,7272 \quad L_{uc} \mathbf{77.5760 \text{ M. H.}} \end{array}$$

2°. Volgens de methode van Rosa krijgen we op dezelfde wijze:

$$\begin{array}{rcl} L_{40}^- : 4 \pi a_0 &= & 1028.100 \quad A = 0.6942 \\ \Delta_1 L : 4 \pi a_0 &= & 40.908 \quad B = 0.3285 \\ & & 987.192 \quad A + B = 1.0227 \\ & & \frac{\Delta_1 L}{4 \pi a_0} = 40.908 \\ \lg 987.192 &= & 2.994\,4016 \\ \lg 4 \pi a_0 &= & 2.099\,2099 \\ \lg n^2 m_1^2 &= & 2.795\,8800 \\ \lg L_R &= & 7.889\,4915 \quad L_{uR} = \mathbf{77.5339 \text{ M. H.}} \end{array}$$

3°. Passen we nu op deze waarde de door (70) en (71) gegeven correctie toe, dan vinden we, door berekening volgens (71) of in tabel VII van het Aanhangel, voor de gegevens van dit voorbeeld: $\epsilon = 0.000539$.

We krijgen dus volgens (70):

$$L_{uc} = 1.000539 \times 77.5339,$$

of:

$$L_{uc} = 77.5757 \text{ M. H.}$$

4°. Berekening volgens formule (69) van Hoofdstuk IV die geheel gelijkwaardig is met formule (48) van Hoofdstuk III.

Berekenen we eerst de door (70) gedefinieerde constanten voor dit geval, en ook de waarden van $x, x^3, \dots$ enz. voor de gegevens van het voorbeeld, dan vinden we, na substitutie van deze waarden in (69), voor de verschillende termen daarvan achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} K_1/x &= 157957.6, & -c_1 x &= -309.1, & -c_3 x^3 &= -67.9, \\ -C &= -33460.2, & +c_5 x^5 &= +1.3, & -c_7 x^7 &= -0.2. \end{aligned}$$

Vereenigen we deze termen met inachtneming van de teekens, dan vinden we:

$$L_{40}^{\square} = 124121.5;$$

deze waarde met $n^2 m_1^2 = 625$ vermenigvuldigd en door 10^6 gedeeld, geeft:

$$L_u = 77.5760 \text{ M. H.}$$

Deze waarde komt volmaakt overeen met de waarde L_{uc} volgens de correcte sommatiemethode.

5°. Volgens de benaderingsformule (72) vinden we:

$$\frac{K_1}{x} = 157957.6, \quad -\frac{K_1}{8} x^3 = -82.1, \quad -\frac{8 K_1}{3 \pi} = -34042.3,$$

waaruit volgt:

$$L_{40}^{\square} = 123833.2;$$

of, met 625 vermenigvuldigd en door 10^6 gedeeld:

$$L_u = 77.396 \text{ M. H.}$$

6°. De waarde van β (74) is voor dit geval volgens tabel VIII, 0.0022.

Dit in formule (75) gesubstitueerd geeft:

$$L_u = 77.566.$$

7°. Ten slotte is ook volgens de formule van COHEN (2) de berekening voor dit geval uitgevoerd, waarbij de twee laatste termen in hun ware gedaante (zie pag. 4) zijn gebruikt. Het resultaat van deze berekening geeft:

$$L_u = 77.014.$$

In onderstaande twee tabellen is nu voor de windingsdiepten 1 en 2 cM. en 10 cM. gemiddelden straal, een overzicht gegeven van de berekening volgens de zeven hierboven toegepaste methoden, voor drie solenoïden van verschillende lengten. De methoden zijn gerangschikt volgens de nauwkeurigheid, waarbij de nauwkeurigste bovenaan geplaatst is, en de uitkomsten van de bovenvermelde berekeningen als leiddraad voor deze rangschikking gebruikt zijn. De zelfinducties zijn in millihenry uitgedrukt.

$$a_0 = 10 \text{ cM.}, \quad t = 1 \text{ cM.}, \quad n = 5, \quad m_1 = 5.$$

Gebezigde methode	lengte		
	10 cM.	40 cM.	100 cM.
1°. correcte sommatiemethode	12.2056	77.5760	219.039
2°. formule (48) of (69)	12.2070	77.5760	219.039
3°. Rosa met correctie (70)	12.2056	77.5757	219.029
4°. benaderings-form. met corr. (75)	12.204	77.566	219.03
5°. Rosa zonder corr.	12.202	77.534	218.88
6°. benaderings-form. zonder corr. (72)	12.148	77.396	218.76
7°. formule van COHEN	12.910	77.014	218.75

$$a_0 = 10 \text{ cM.}, \quad l = 2 \text{ cM.}, \quad n = 5, \quad m_1 = 5.$$

Gebezigde methode	lengte		
	10 cM.	40 cM.	100 cM.
1°. correcte sommatiethode	2.88300	18.6520	52.8745
2°. formule (48) of (69)	2.88637	18.6520	52.8745
3°. ROSA met correctie (70)	2.88324	18.6528	52.8726
4°. benaderings-form. met corr. (75) . .	2.8848	18.658	52.869
5°. ROSA zonder corr.	2.8798	18.613	52.731
6°. benaderings-form. zonder corr. (72) .	2.8727	18.574	52.732

Ten slotte volgt hier als voorbeeld een van de op pag. 56 vermelde berekeningen voor de zeer nauwkeurige waarden van L_s , nl. voor $l = 25 \text{ cM.}$ Ik zal hier uit die berekening alleen de waarden van de termen aangeven, waaruit het eindresultaat verkregen wordt. Deze termen zijn, gerangschikt volgens de grootte:

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{100 \pi}{x} = + 845.899 \ 709 \\
 &- \frac{800}{3} = - 266.666 \ 667 \\
 &- \frac{100 \pi}{8} x^3 = - 2.011 \ 652 \\
 &+ \frac{100 \pi}{16} x^5 = + 0.138 \ 735 \\
 &- 11.72 x^7 = - 0.035 \ 883 \\
 &+ \frac{16.68 \pi x^9}{1 + 1.998 x^2} = + 0.005 \ 522
 \end{aligned}$$

Daar nu het tweede van de bovengenoemde getallen, $800/3$ in alle berekeningen voorkomt, blijkt hieruit dat bij deze berekening alleen voor de bepaling van het eerste getal de logarithmentafel met 10 decimalen vereischt werd, en wel éénmaal zonder en éénmaal met interpolatie. Alle andere getallen kunnen met de zeventdecimalige tafel berekend worden. Een berekening volgens de formule van LORENZ, met dezelfde nauwkeurigheid als voor deze reeks berekeningen vereischt werd, zou zeker vier- à vijfmaal meer tijd gevorderd hebben.

HOOFDSTUK V.

OVERZICHT VAN DE BEREIKTE RESULTATEN.

Bij een terugblik op den inhoud van dit proefschrift kunnen we de resultaten van het daarin beschreven onderzoek als volgt samenvatten.

In de eerste plaats is door formule (16) van Hoofdstuk I de volledige vorm voor de vergelijking van MAXWELL verkregen, waarvan tot dusver slechts drie termen waren afgeleid.

De bestudeering van dezen volledige vorm voor de reeks α (16) heeft het mogelijk gemaakt, aan de in Hoofdstuk II afgeleide formule (31) voor de zelfinductie van lange solenoïden met éene laag windingen, een zoodanige gedaante te geven dat reeds voor de betrekkelijk korte solenoïden, waarvan de lengte begrepen is tusschen één en tweemaal den straal, de fouten niet meer dan één millioenste bedragen, terwijl voor de langere de fouten nog veel geringer zijn. Daar nu bij de vervaardiging en meting van een standaard van zelfinductie, volgens de schatting van COFFIN (zie Hoofdstuk II pag. 19) geen grootere nauwkeurigheid dan één honderdduizendste bereikt wordt, heeft het geen zin bij de berekening nog grooter nauwkeurigheid te verlangen dan hier met formule (31) verkregen is. De formule van LORENZ [(1) en (28)], die tot nu toe voor dit geval de eenige was, kan dus vervangen worden door de veel eenvoudiger formule (31) met twee reekstermen. Het voordeel van deze laatste is vooral voor grootere lengten zeer opvallend door de kleinheid van de laatste termen van $\varphi_1(x)$. De hoofdoorzaak van de groote nauwkeurigheid voor de grootere lengten is gelegen in de volkomen exacte waarde van de constante $\frac{8}{3\pi}$, die het resultaat is der integratie van de reeks getallen-coëfficiënten van α . Voor de kortere solenoïden wordt de nauwkeurigheid bepaald door de reekstermen, die in dat geval een grooten invloed hebben.

Wat de berekening van de zelfinductie voor een solenoïde met eindige windingsdiepte betreft, heeft het onderzoek een rijken oogst aan bruikbare en zeer nauwkeurige methoden opgeleverd.

In Hoofdstuk IV zijn vier nieuwe methoden besproken die, met de formule (48) van Hoofdstuk III, het aantal methoden voor dit geval van twee op zeven hebben gebracht. De twee methoden, waarover ik bij het begin van het onderzoek beschikte, waren geen van beide zeer nauwkeurig, terwijl van de vijf nieuwe methoden er vier zeer nauwkeurig zijn, en de vijfde nog even nauwkeurig blijkt te zijn als de beste van de twee oorspronkelijke methoden, nl. die van Rosa, terwijl de formule van COHEN in dit opzicht de laatste plaats inneemt.

De zeven verschillende methoden zijn nu, in volgorde van de nauwkeurigheid gerangschikt:

- 1°. De correcte sommatie methode door middel van de formule (31) voor de berekening van L_s en de tabellen IV en V voor de berekening van $\triangle_1 L = 4 \pi a_0 n' (A + B)$.
- 2°. De formule (48) van Hoofdstuk III of de daaraan gelijkwaardige formule (69) van Hoofdstuk IV.
- 3°. De methode van Rosa met correctieterm $1 + \varepsilon$, volgens de formules (70) en (71).
- 4°. De benaderingsformule (75) met correctieterm $1 + \beta$ (74).
- 5°. De methode van Rosa.
- 6°. De benaderingsformule (72).
- 7°. De formule van COHEN (2).

De onder 4°. genoemde methode is voor de praktijk de meest geschikte en naar verhouding van de bereikte nauwkeurigheid verreweg de eenvoudigste van alle.

ERRATUM.

Op pag. 67 is verzuimd de op pag. 43, regel 7 v. b. aangekondigde motiveering van de wijziging in den teller van den reeksterm voor formule (48) te vermelden.

De teller van dezen term is zoodanig gekozen, dat de foutenkromme B van Fig. 9 voor $l = 1.1 a_0$ de abscis-as snijdt.

TABEL I.

γ	l/a	Q_L	Q_B	$\frac{Q_B - Q_L}{Q_L} 10^6$
11.3°	10.0090	3.629 372 590	3.629 372 605	+ 0.00
16.7°	6.6664	5.233 891 979	5.233 891 992	+ 0.00
26.6°	3.9939	8.084 683 33	8.084 683 76	+ 0.05
38.7°	2.4964	11.620 067 93	11.620 067 33	— 0.05
45.0°	2.0000	13.588 917 59	13.588 916 92	— 0.05
48.0°	1.8008	14.581 904 0	14.581 901 8	— 0.15
53.1°	1.5017	16.385 821	16.385 800	— 1.29
55.0°	1.4004	17.104 882	17.104 847	— 2.05
57.0°	1.2988	17.895 702	17.895 676	— 1.46
58.0°	1.2498	18.305 774	18.305 768	— 0.30
59.0°	1.2017	18.726 605	18.726 657	+ 2.79
60.1°	1.1501	19.202 97	19.203 12	+ 7.8
61.2°	1.0995	19.694 60	19.694 95	+ 17.9
62.2°	1.0545	20.155 92	20.156 60	+ 33.7
63.4°	1.0015	20.729 3	20.730 7	+ 66.4

TABEL II.

 $a_0 = 10 \text{ cM.}$ $l = 1 \text{ cM.}$

$l=d=n$	$L_l^- t^2 : 4 \pi a_0$	$M_d^- : 4 \pi a_0$	$M_d^\square : 4 \pi a_0$	δ_n
1	3.883 474	2.504 123	2.384 532	+ 0.119 591
2	12.775 193	1.736 536	1.714 584	21 952
3	25.139 983	1.342 841	1.333 772	9 069
4	40.190 454	1.080 492	1.075 664	4 828
5	57.401 908	0.889 004	0.886 087	2 917
6	76.391 370	0.742 309	0.740 409	1 900
7	96.865 449	0.626 513	0.625 222	1 291
8	118.592 553	0.533 258	0.532 343	915
9	141.386 173	0.457 023	0.456 378	645
10	165.093 838	0.394 025	0.393 565	460
11	189.589 552	0.341 527	0.341 191	336
12	214.768 319	0.297 442	0.297 182	260
13	240.541 970	0.260 173	0.259 986	187
14	266.835 968	0.228 494	0.228 374	120
15	293.586 953	0.201 449	0.201 379	70
16	320.740 836	0.178 267	0.178 225	42
17	348.251 252	0.158 309	0.158 281	28
18	376.078 285	0.141 049	0.141 037	+ 12
19	404.187 415	0.126 068	0.126 071	- 3
20	432.548 681	0.113 024	0.113 037	13
21	461.135 995	0.101 627	0.101 647	20
22	469.926 567	0.091 640	0.091 662	22
23	518.900 418	0.082 854	0.082 881	27
24	548.039 976	0.075 106	0.075 136	30
25	577.329 746			
29	695.7389	0.047 634	0.047 666	32
30	725.6022			
39	997.6051	0.022 152	0.022 176	24
40	1028.0997			
49	1304.1356	0.011 878	0.011 893	15
50	1334.9467			
75	2110.2896			
100	2890.5564			

TABEL III.

Waarden van δ_n voor verschillende windingsdiepten.

n	$q_0 = 0$	$q_0 = 0.1$	$q_0 = 0.2$
1	+ 0.12025	+ 0.11959	+ 0.11786
2	2249	2195	2057
3	958	907	783
4	530	483	371
5	337	292	191
6	233	190	99
7	171	129	48
8	131	92	20
9	103	64	+ 4
10	83	46	— 5
11	69	34	10
12	58	26	12
13	49	19	13
14	43	12	13
15	37	7	13
16	34	4	12
17	30	3	11
18	27	+ 1	10
19	25	0	9
20	22	— 1	9
21	20	2	8
22	18	2	7
23	16	3	7
24	15	3	6
25	13	3	5

TABEL IV.

Waarden van den correctieterm B als functie van q_0 en n' .

n'	$q_0 = t/a_0$			n'	$q_0 = t/a_0$		
	0.0 ¹⁾	0.1	0.2		0.0	0.1	0.2
1	0.0000	0.0000	0.0000	30	0.3218	0.3107	0.2913
2	0.1202	0.1196	0.1179	35	0.3256	0.3133	0.2931
3	0.1753	0.1741	0.1709	40	0.3285	0.3151	0.2944
4	0.2076	0.2059	0.2013	45	0.3309	0.3166	0.2954
5	0.2292	0.2269	0.2210	50	0.3328	0.3177	0.2962
6	0.2446	0.2419	0.2348	55	0.3344	0.3186	0.2968
7	0.2563	0.2545	0.2450	60	0.3358	0.3194	0.2973
8	0.2656	0.2618	0.2527	65	0.3369	0.3200	0.2977
9	0.2730	0.2688	0.2587	70	0.3379	0.3205	0.2980
10	0.2792	0.2746	0.2636	75	0.3388	0.3210	0.2983
11	0.2844	0.2794	0.2676	80	0.3396	0.3214	0.2986
12	0.2888	0.2834	0.2708	85	0.3403	0.3217	0.2989
13	0.2927	0.2869	0.2736	90	0.3409	0.3220	0.2991
14	0.2961	0.2898	0.2759	95	0.3415	0.3223	0.2993
15	0.2991	0.2924	0.2780	100	0.3420	0.3225	0.2994
16	0.3017	0.2947	0.2797	125	0.3440	0.3235	0.3000
17	0.3041	0.2968	0.2812	150	0.3453	0.3241	0.3005
18	0.3062	0.2986	0.2826	175	0.3462	0.3245	0.3008
19	0.3082	0.3002	0.2838	200	0.3469	0.3248	0.3010
20	0.3099	0.3016	0.2848	300	0.3485	0.3256	0.3015
21	0.3116	0.3029	0.2858	400	0.3493	0.3260	0.3018
22	0.3131	0.3041	0.2867	500	0.3498	0.3262	0.3020
23	0.3145	0.3052	0.2874	600	0.3501	0.3264	0.3021
24	0.3157	0.3062	0.2881	700	0.3503	0.3265	0.3022
25	0.3169	0.3071	0.2888	800	0.3505	0.3266	0.3022
26	0.3180	0.3080	0.2894	900	0.3506	0.3266	0.3023
27	0.3190	0.3087	0.2899	1000	0.3508	0.3267	0.3023
28	0.3200	0.3095	0.2904	2000	0.3512	0.3269	0.3025
29	0.3209	0.3101	0.2909	4000	0.3515	0.3270	0.3026
30	0.3218	0.3107	0.2913	∞	0.3517	0.3271	0.3027

¹⁾ De waarden voor $\rho_0 = 0$ zijn van 1 tot 30 overgenomen uit de tabel van Rosa, Bur. of St. V, 118; 1909.

TABEL V.

Waarden van den correctieterm A als functie van q_0 (59).

q_0	A
0.00	0.6949
0.10	0.6942
0.15	0.6933
0.20	0.6922
0.25	0.6909

TABEL VI.

Waarden van de constanten y_1 en y_2 voor de formule van STEFAN (64).

$\frac{b}{c}$ of $\frac{c}{b}$	y_1	y_2	$\frac{b}{c}$ of $\frac{c}{b}$	y_1	y_2
0.00	0.500 00	0.1250	0.50	0.796 00	0.3066
0.05	.548 99	.1269	0.55	.808 15	.3437
0.10	.592 43	.1325	0.60	.818 23	.3839
0.15	.631 02	.1418	0.65	.826 48	.4274
0.20	.665 20	.1548	0.70	.833 11	.4739
0.25	.695 32	.1714	0.75	.838 31	.5234
0.30	.721 72	.1916	0.80	.842 25	.5760
0.35	.744 69	.2152	0.85	.845 09	.6317
0.40	.764 54	.2423	0.90	.846 97	.6902
0.45	.781 54	.2728	0.95	.848 01	.7518
0.50	.796 00	.3066	1.00	.848 34	.8162

TABEL VII.

Waarden van de correctiegrootheid ε voor Rosa's methode (71).

l/a_0	$q_0 = t/a_0$				
	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
0.5	0.00006	0.00022	0.00050	0.00088	0.00138
1.0	08	30	068	120	188
1.5	09	36	082	146	228
2.0	10	41	093	166	259
2.5	11	45	102	182	284
3.0	12	49	110	195	305
4.0	14	54	121	216	337
5.0	14	58	129	230	360
10.0	17	67	151	269	420
∞	20	81	182	324	506

TABEL VIII.

Waarden van de correctiegrootheid β in formule (75).

l/a_0	$q_0 = t/a_0$				
	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20
1.0	0.0095	0.0055	0.0046	0.0043	0.0042
1.2	38	33	36	41	48
1.4	20	24	32	40	50
1.6	12	19	29	40	51
1.8	8	17	28	39	51
2.0	5	15	27	38	50
2.5	2	13	25	37	49
3.0	1	13	24	36	48
4.0	0	11	22	34	45
5.0	0	10	21	31	42
10.0	0	6	13	19	26

STELLINGEN.

I.

Rosa's methode, voor de berekening van den coëfficiënt van zelfinductie voor een solenoïde met eindige windingsdiepte, is niet meer dan een goede benaderingsmethode.

II.

Als van een reeks met positieve termen

$$\lim. \frac{u_n}{u_{2n}} = k$$

is, dan is de reeks convergent als $k > 2$,

en divergent als $k \leq 2$.

III.

Geldt voor een convergeerende reeks met positieve termen:

$$\lim. u_n = \varphi(n),$$

dan is

$$\lim. \sum_1^{\infty} u_n = \sum_1^p u_n + \int_{p+\frac{1}{2}}^{\infty} \varphi(n) dn.$$

IV.

Het verdient aanbeveling in de leerboeken over Hoogere Algebra, bij de behandeling van de oneindig voortlopende reeksen de formule van STIRLING voor $n!$ te vermelden.

V.

De lunaire ijs-theorie van FAUTH is onhoudbaar.

VI.

Onze kennis omtrent de maansbeweging is nog niet voldoende, om daaruit met zekerheid de elementen van een zoneclips te berekenen.

VII.

De verklaring van het door STEFANI opgemerkte verschijnsel, dat de groote meerderheid van de grootere zonnevlekken aan de van de aarde afgewende zijde van de zon ontstaan, moet in de zon zelve gezocht worden.

VIII.

Bij de verklaring van het solarisatieverschijnsel in de fotografische plaat, verdient de hypothese van A. P. H. TRIVELLI die het achtereenvolgens ontstaan van ontwikkelbare en niet ontwikkelbare subhaloïden aanneemt, de voorkeur boven de hypothese van W. H. IDZERDA die bij voortgezette lichtinwerking een regeneratie van het subhaloïd tot een normaal fijnkorrelig haloïd onderstelt.

IX.

Ten onrechte meent WALTER, dat zijne resultaten bij het bepalen van de absorptiespectra der zoogenaamde «phosphoren», niet overeen te brengen zijn met de theorie van LENARD omtrent de verklaring van de phosphorescentie.

X.

Er bestaan geen elektrische ladingen kleiner dan die van het electron.

XI.

Ten onrechte meent PLANCK,¹⁾ dat het voldoende is te wijzen op de discontinuïteit in scheikundige eigenschappen van de moleculen van verschillende stoffen, om aan het paradox van GIBBS zijne tegenstrijdigheid te ontnemen.

XII.

Het is niet mogelijk een scherpe grens aan te geven tusschen paramagnetische en ferromagnetische stoffen.

XIII.

De radioactieve «Rückstoss» biedt een weg voor het directe bewijs, dat lood het inactieve eindproduct der Uranium-Radium-reeks is.

¹⁾ M. PLANCK, Vorlesungen über Thermodynamik, pag. 211; 1905.

