Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Beschouwingen over politieke rekenkunde

https://hdl.handle.net/1874/295000

A° 192
Phys.

12 Juli
1902

BESCHOUWINGEN OVER POLITIEKE REKENKUNDE.

M. VAN HAAFTEN.

U.
ss.
cht
12

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT
0386 9942

BESCHOUWINGEN

OVER

POLITIEKE REKENKUNDE.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. A. A. NIJLAND, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG 12 JULI 1912, 'S AVONDS TE HALF 8 UUR, DOOR

MARIUS VAN HAAFTEN,
GEBOREN TE DEVENTER.

JOH. ENSCHEDÉ EN ZONEN — HAARLEM.

UNIVERSITEITS BIBLIOTHEEK UTRECHT

Aan mijne Ouders.

Van het voltooien van mijn proefschrift maak ik gaarne gebruik om dank te brengen aan allen, jegens wie ik mij voor genoten onderwijs of voorlichting bij studie verplicht gevoel.

Ik wil hierbij aanvangen met U, Rector, Oud-Leeraren en Leeraren van het Arnhemsch Gymnasium. In het bijzonder het voorrecht om door U, die mij de klassieke letteren doceerdet, te zijn ingeleid in de studie van schrijvers, waarvan de nadere bestudeering in latere jaren voor mij van zooveel beteekenis is geweest, is door mij steeds op hoogen prijs gesteld, en ik gevoel des te meer behoefte om te dezer plaatse van mijn waardeering te getuigen, nu er stroomingen bestaan om voor wis- en natuurkundigen de klassieke opleiding te doen vervallen of althans de studie der oude talen te beperken.

Aan U allen, Oud-hoogleeraren en Hoogleeraren der Leidsche philosofische faculteit, persoonlijk mijn groote erkentelijkheid te betuigen, wil ik wegens de meerdere jaren, die ik reeds aan Uwe leiding en voorlichting onttrokken ben, niet; doch Gij zult U, naar ik vertrouw, wel verzekerd willen houden dat de herinnering aan de uren, onder Uw gehoor doorgebracht, bij mij steeds levendig zal blijven, en dat, al mag ik thans den schijn aannemen van slechts in het algemeen aan U allen te zamen te denken, de invloed van Uwe bijzondere personen nog langen tijd, en van meerderen Uwer voor immer, op mij zal nawerken.

Ten zeerste heb ik het betreurd, Hooggeleerde Kluyver, dat Gij U niet hebt kunnen vereenigen met mijn voornemen om een proefschrift te schrijven op het gebied der toegepaste wiskunde. Ik

meende echter mijn verlangen, om mij geheel te wijden aan den tak van wetenschap, welks practische toepassing mijn werkkring meebracht, om meer dan één reden niet te mogen opofferen aan het genoegen, dat ik mij had voorgesteld van de bewerking eener dissertatie onder Uwe leiding. Ik stel het zeer op prijs, dat Gij mij door Uwen welwillenden raad in staat hebt gesteld tot het bereiken van een doel, waarmee Gij persoonlijk niet instemdet.

Een bijzonder woord van dank tot U, Hooggeleerde KAPTEYN. Gij hebt er in toegestemd om mijn promotor te zijn, terwijl ik noch van U persoonlijk, noch van de Utrechtsche Universiteit, een leerling was. Ik waardeer dit des te meer, omdat ook voor U het door mij gekozen onderwerp — hoezeer het mij zelf ook ter harte gaat — weinig aantrekkelijks kon hebben. De welwillendheid, waarmede Gij mij tegemoet zijt gekomen, de belangstelling waarmede Gij van mijn werk kennis hebt genomen, de hulpvaardigheid waarmede Gij mij voor een bepaalde kwestie een nieuwe oplossing aan de hand hebt gedaan, het geduld waarmede Gij alle proeven hebt doorgezien, en de vriendelijke bejegening welke ik in alle opzichten van U mocht ondervinden, vormen te zamen voor mij een „Kapteynsche Reihe dritter Art", waarvan de geldigheid mij niet beperkt is gebleken tot een bepaald gebied, en waarvoor ik U niet minder dankbaar ben dan de Wetenschap het U is voor de beide reeksen van de eerste en van de tweede soort, welke Uwen naam reeds dragen.

Hooggeleerde BOLLAND! Het valt mij moeilijk om voor mijn gevoelens van erkentelijkheid jegens U de juiste woorden te vinden. Uwe bezielende voordrachten brengen bij Uwe toehoorders niet alleen een verheldering van denken en een verdieping van inzicht teweeg, maar versterken bij hen ook den zin voor studie en de liefde voor de wetenschap. De vele jaren, gedurende welke ik Uwe colleges over verschillende wijsgeerige onderwerpen, eerst te Leiden, en later te Amsterdam, gevolgd heb, maken dat ik mij ten aanzien van mijn ontwikkeling aan U méér verplicht gevoel dan zich in enkele zinnen laat uitdrukken.

Ik acht mij gelukkig, Hooggeleerde OPPENHEIM, Uwe interressante en opgewekte colleges in het Nederlandsch Staatsrecht te hebben mogen bijwonen. Zij hebben bij mij een belangstelling in het staat-

kundige leven wakker geroepen, waarvoor ik, al moge zij zich uiten in een andere richting dan de door U voorgestane, Uw steeds tot eigen raadpleging der bronnen aansporend onderwijs grooten dank schuldig ben.

Uwe colleges over bijzondere gedeelten der hoogere wiskunde, gegeven aan de Amsterdamsche Universiteit, Zeergeleerde Rutgers, zijn door mij evenzeer gewaardeerd om de onderwerpen, die daarvoor door U waren gekozen, als om den vorm, waarin deze door U werden voorgedragen.

Ook een woord van erkentelijkheid jegens U, Zeergeleerde Janse, en U, Hooggeachte Mejuffrouw Landré, voor de door U in opdracht van de Vereeniging van Wiskundige Adviseurs gegeven lessen in de Verzekeringswiskunde, welke mij een gewenschte leiddraad waren bij de studie voor het examen van Candidaat-Actuaris. De wijze, waarop Gij een gehoor, wat uit personen van zoo heterogene opleiding bestond, wist te boeien, heeft mij steeds met bewondering vervuld.

Ten slotte betuig ik mijn hartelijken dank aan mijn vader en aan mijn meisje voor de hulp, verleend bij de bewerking der tafels en het nazien der drukproeven mijner dissertatie.

INHOUD.

Pag.

HOOFDSTUK I. Inleiding 1

HOOFDSTUK II. Rentefuncties 13
§ 1. Inleiding 13
§ 2. Notatie en Classificatie 14
§ 3. Het dualisme van rente en disconto 21
§ 4. Afleiding van formules 23
§ 5. Annuïteiten van hoogere orde 28

HOOFDSTUK III. Afgeleiden van annuiteiten en hare toepassing voor benadering van den rentevoet. . . . 33
§ 1. Inleiding 33
§ 2. Afgeleiden van machtreeksen, welke in betrekking staan tot hoogere annuiteiten 36
§ 3. Afgeleiden van contante waarden van klimmende hoogere annuiteiten 40
§ 4. Afgeleiden van contante waarden van dalende hoogere annuiteiten 47
§ 5. Toepassing 51

HOOFDSTUK IV. Koers en Rente. 57
§ 1. De grondvergelijkingen 57
§ 2. Oplossing der differentievergelijkingen 61
§ 3. De differentievergelijkingen als recursieformules beschouwd 69
§ 4. Lager-algebraische oplossing der grondvergelijking . 73
§ 5. Overzicht der resultaten 82
§ 6. Toepassing 85

Pag.

HOOFDSTUK V. Het dualistisch verband in de verzekeringswiskunde 87

§ 1. Afleiding van lijfrenteformules door letterverwisseling. 87

§ 2. Het dualistisch verband voor verzekeringen bij overlijden 93

HOOFDSTUK VI. Waardebepalingen 97

§ 1. Klimmende en dalende lijfrenten 97

§ 2. Verzekering met afdalende premiën 100

§ 3. Slot 102

HOOFDSTUK VII. Rentetafels 109

§ 1. Toelichting 109

§ 2. Tafel van $\frac{1}{n} a_{\overline{n}|}$ 113

§ 3. Tafel van $\frac{1}{n} (Da)_{\overline{n}|}$ 127

Aangehaalde Litteratuur 141

Stellingen 145

HOOFDSTUK I.

INLEIDING.

„Es gibt keine Mathematische Theorie der Versicherung im „Allgemeinen", zegt G. Bohlman in zijn artikel „Lebensversicherungs-Mathematik" in de Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften [1]).

Dat de theorie der verschillende takken van verzekering reeds in den aanvang vrij sterk uiteenloopt, is in de eerste plaats te danken aan de omstandigheid, dat bij de zaakverzekeringen het door den verzekeraar verschuldigde bedrag niet van te voren geheel vaststaat, doch afhankelijk wordt gesteld van de geleden schade, terwijl dit bedrag bij de persoonsverzekeringen (leven, ziekte, invaliditeit) vooraf wordt bepaald, met dien verstande dat het somtijds een functie kan zijn van den tijd, waarop de uitkeering plaats vindt. [2])

De mogelijkheid om meer in het bijzonder de categorie der persoonsverzekeringen in eenzelfde schema samen te vatten is hierdoor niet uitgesloten. Volgens H. Broggi [3]) kan een dergelijke samen-

---

[1]) B. G. Teubner, Leipzig 1900—1904. Erster Band, Zweiter Theil, p. 857.

[2]) Vgl. Encyclopédie des Sciences Mathématiques. Paris, Gauthiers-Villars, 1911. Tome I, Volume 4, Fascicule 4, p. 493, 494. Technique de l'Assurance sur la Vie. Exposé d'après l'article allemand de G. Bohlman, (Berlin), par H. Poterin du Motel, (Paris). Dit exposé bevat een inleiding over verzekering in het algemeen, welke in de Duitsche uitgave niet voorkomt. Den boven aangehaalden zin van Bohlman vindt men in de Fransche uitgave niet.

[3]) Versicherungsmathematik. Deutsche Ausgabe. B. G. Teubner. Leipzig, 1911. p. 7.

vatting formeel zonder moeilijkheden worden uitgevoerd, is zij tot dusverre nog niet beproefd, maar zou zij vermoedelijk ook weinig practisch nut blijken op te leveren.

Het komt mij vóór, dat dit nut in deze uitspraak te laag wordt aangeslagen, en als de bewuste samenvatting door mij niet wordt ondernomen, dan is het, omdat het reeds als een voldoende taak voor dit proefschrift kan worden beschouwd om te doen zien, hoezeer een goed besef van de éénheid van het waardebegrip in verschillende gevallen zelfs op meer beperkt terrein van belang moet worden geacht, afgezien nog van de wijze, waarop men deze eenheid in samenvattende formules tot uiting kan brengen.

Het nut, waarvan hier sprake was, zou mijns inziens gedeeltelijk kunnen bestaan in een vergemakkelijking van de bestudeering der verschillende takken van persoonsverzekering bij hen, voor wie het gebruik van eenigszins ingewikkelde formules aan den aanvang hunner studie weinig bezwaar oplevert en die zich door een afleiding der formules voor bijzondere typen van persoonsverzekering uit een algemeen schema meer bevredigd gevoelen dan door afzonderlijke studie der verschillende typen na of naast elkaar.

Voor een ander deel zou het zijn nuttige zijde hebben, dat men formules of eigenschappen, welke men voor eenvoudige vormen van verzekering zonder moeite kan vinden, door de analogie in de symbolen ook gemakkelijk op het spoor kan komen bij de meer ingewikkelde vormen.

In hoeverre er bij de samenvatting van alle persoonsverzekeringen tot één schema van een dergelijk nut sprake kan wezen, willen wij thans in het midden laten, om verder uitsluitend de aandacht te vestigen op de mogelijkheid van een andere samenvatting, waarvan het nut gemakkelijker is aan te toonen, namelijk die van de theorie van rente en loterijen (wiskundige theorie van den geldhandel) met de theorie der levensverzekering. [1]) Deze zou dan desgewenscht weer

---

[1]) De overeenkomst van sommige formules uit de theorie van renterekening en van levensverzekering vormt het onderwerp van twee Actuarieele Nota's door H. F. Landré. Archief voor de Verzekeringswetenschap, X (1909), p. 45, en XI (1910), p. 132.

uitgebreid kunnen worden tot de andere takken van persoonsverzekering, zoodat men zou kunnen spreken van een gemeenschappelijken wiskundigen grondslag der geheele zoogenaamde politieke rekenkunde. [1])

Laatstgenoemde kan men voor een dergelijken algemeenen opzet definieeren als de wetenschap, welke zich in hoofdzaak bezighoudt met het nagaan van de waardeverandering van geldsommen, gestort door personen die geld in deposito geven, door koopers van obligatiën, premieloten en loten, of wel door verzekeringnemers, wanneer, zooals hierbij steeds het geval is, de terugbetaling van die geldsommen aan zekere voorwaarden gebonden is, benevens met het uitvoeren van berekeningen welke met deze kwesties in verband staan.

Deze definitie onderstelt ten aanzien van verzekeringen, dat men in eersten aanleg niet vraagt naar de grootte van koopsommen of premiën, vereischt voor de uitkeering van de eenheid van verzekerd bedrag, doch omgekeerd naar de grootte van het verzekerd bedrag, behoorende bij de eenheid van koopsom of premie; de koopsom van een verzekering bij leven wordt dan bijvoorbeeld gevonden als de reciproke waarde van de opbrengst eener tontine. Voor de reserveberekening onderstelt de definitie in beginsel het gebruik van de retrospectieve methode.

Wanneer iemand een geldsom deponeert onder voorwaarde, dat deze na verloop van n jaar met de, naar een vooraf aangegeven rentevoet i, gekweekte rente zonder aftrek van kosten zal worden teruggegeven, dan verandert de waarde der éénheid na n jaar in $(1 + i)^n$.

---

[1]) „Der Inhalt dessen, was wir als politische Arithmetik benennen, ist kein „ganz gleichförmiger, wird auch nicht von allen, die sich damit beschäftigen, „in gleicher Weise begrenzt. Als allen Aufgaben der politischen Arithmetik „gemeinsam kann die Anwendung der Zinsrechnung bezeichnet werden, und „zwar der einfachen und der zusammengesetzten Zinsrechnung, nicht verbunden „oder verbunden mit Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung". M. Cantor. „Politische Arithmetik, oder die Arithmetik des täglichen Lebens." Leipzig. B. G. Teubner 1898, p. 1. Hoewel bij de geldloterijen de rente zeer op den achtergrond treedt, zouden wij de overigens hoogst eenvoudige theorie daarvan ook nog onder de politieke rekenkunde willen rangschikken. Cantor doet dit alleen met de premieleeningen.

Stort van een aantal personen l_x van x jarigen leeftijd ieder een gulden, onder beding, dat de gezamenlijke inleg zonder berekening van rente of kosten gelijkmatig verdeeld zal worden onder de l_{x+n} personen, die na n jaar nog in leven zijn, dan zal de waarde-eenheid voor de overlevenden veranderd wezen in:

$$\frac{l_x}{l_{x+n}}.$$

Geschiedt de inleg met inachtneming van rente en kosten, dan klimt de waarde tot:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad S_{x\,\overline{n}|} = C(1+i)^n \frac{l_x}{l_{x+n}},$$

waarin C als onkostencoëfficient een getal voorstelt, dat kleiner dan één is. Duidt men namelijk den opslag voor kosten op de eenheid van netto koopsom aan door c, dan is:

$$C = \frac{1}{1+c}.$$

Heeft de uitkeering alléén plaats aan de rechthebbenden van de d_{x+n} personen, die wèl aan het einde van het n^{de} jaar nog in leven zijn, doch vervolgens in den loop van het $(n+1)^{ste}$ jaar komen te overlijden, dan klimt de waarde tot:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad {}_{n|1}S_x = C(1+i)^{n+1} \frac{l_x}{l_{x+n}} \frac{l_{x+n}}{d_{x+n}}.$$

Hierbij is ten aanzien der renteberekening ondersteld, dat de uitkeeringen eerst aan het einde van het $(n+1)^{ste}$ jaar plaats vinden.

Door deeling van de gevonden uitdrukkingen op de eenheid verkrijgt men de bedragen, welke contant aanwezig moeten zijn opdat onder bepaalde condities na verloop van tijd de eenheid kan worden uitgekeerd, terwijl men vervolgens door sommatie het bedrag vinden kan, dat contant noodig is voor het doen van een reeks opeenvolgende uitkeeringen (annuïteiten en lijfrenten) of wel van een enkele uitkeering, waarbij het tijdsverloop, waarbinnen aan een bepaalde

voorwaarde voldaan moet zijn, zich over meerdere jaren uitstrekt (verzekering bij overlijden).

Voert men op de gebruikelijke wijze voor de kans, dat een x-jarige na n jaar nog in leven is, ${}_np_x$, en voor de kans dat een x-jarige binnen het jaar sterft q_x in, dan kan voor (2) geschreven worden:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad {}_{n|1}S_x = C(1+i)^{n+1}\,\frac{1}{{}_np_x}\,\frac{1}{q_{x+n}}.$$

Wij merken nu op, dat deze uitdrukking een zuiver product is van factoren, welke ieder voor zich samenhangen met bepaalde voorwaarden waaraan de uitkeering gebonden is, en die dus als oorzaken van de waardeverandering beschouwd kunnen worden, terwijl men hetzelfde gemakkelijk aantoont voor de meer ingewikkelde, mits enkelvoudige — dat is niet door sommatie ontstane — uitdrukkingen, welke men vindt door het aantal voorwaarden, waaraan voldaan moet worden, te vergrooten (b. v. verzekering op meer hoofden).

Men kan dan vooreerst de vraag stellen òf, en zoo ja, in hoeverre deze voorstelling van waarde door een product zich aansluit bij het waardebegrip uit de staathuishoudkunde, met andere woorden of het mogelijk is om waarde in het algemeen zóódanig in productvorm uit te drukken, dat de waarde in de politieke rekenkunde als een bijzonder geval daarvan kan worden opgevat.

Voor de beantwoording dezer vraag, welke als zijnde van niet wiskundigen aard in dit proefschrift minder op haar plaats is, wordt verwezen naar mijn „Korte Inleiding tot de Theorie der Waarde" in het Tijdschrift voor Wijsbegeerte [1]) en „De grondslagen der politieke rekenkunde, II en III" in „De Verzekeringsbode". [2])

Een tweede vraag, die zich thans voordoet is de volgende: In hoeverre mogen nu deze oorzaken van waardeverandering, welker

---

[1]) Jaargang V, 1911, p. 371.

[2]) Jaargang 31, 1912, N°. 28 en 29.

invloed in de afzonderlijke factoren van het product (3) tot uiting komt, als gelijksoortig worden beschouwd?

Wanneer men de waardeverandering der eenheid aan een bepaalde gebeurtenis toeschrijft, dan zal men de grootte der veranderde waarde moeten uitdrukken door een product van twee factoren W en H, waarvan H den invloed der gebeurtenis op zich zelf aanduidt, terwijl W samenhangt met de waarschijnlijkheid van het optreden daarvan. Dat nu de rente, waarvoor de bedoelde gebeurtenis bestaat uit het toevoegen van een zeker kapitaal aan het stamkapitaal, behoort tot de oorzaken waarvoor W gelijk is aan de éénheid, terwijl anders gewoonlijk juist H deze grootte heeft, verleent haar volstrekt geen bijzonder karakter.

Men kan namelijk de tengevolge der levenskans in:

$$\frac{l_x}{l_{x+n}}$$

veranderde waarde-eenheid schrijven als een product der jaarlijksche veranderingen:

$$S = \prod_{m=1}^{m=n} \frac{l_{x+m-1}}{l_{x+m}}.$$

Evenzoo kan men de tengevolge der rente in $(1+i)^n$ veranderde waarde-eenheid schrijven als een product der jaarlijksche veranderingen:

$$S' = \prod_{m=1}^{m=n} \frac{v^{x+m-1}}{v^{x+m}},$$

waarbij:

$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Het is op de overeenkomst dezer vormen dat de invoering der commutatieteekens [1]) berust, terwijl zij ook de analogie van vele formules uit de rentetheorie en de verzekeringswiskunde mogelijk maakt. Het feit, dat de jaarlijksche waardeveranderingen bij de rente steeds gelijk blijven, geeft wel aanleiding tot het invoeren van be-

[1]) Les nombres de commutation D_x, N_x, ainsi que les nombres de commutation C_x, M_x, ont été introduits par J. N. Tetens. Einleitung zur Berechnung der Leibrenten. I. Leipzig 1785 p. 88. (Encycl. des Sciences Math. 1911, l. c. p. 524). De getallen worden door Tetens met andere letters aangeduid. Vgl. ook E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung. II. Teubner. 1910. p. 244, noot.

kortingen bij berekeningen, waarin alleen van rente sprake is, doch men kan niet zeggen dat hierdoor aan de rente als oorzaak van waardeverandering een eigen karakter wordt verleend.

Er is echter nog een andere omstandigheid die hiervoor wèl zou kunnen pleiten. Bij de beschouwing der politieke rekenkunde als leer der verandering van geldswaarden zijn wij uitgegaan van een bedrag, dat op het tegenwoordige oogenblik de grootte één heeft, doch men kan uit een wiskundig oogpunt evengoed uitgaan van een bedrag, waarvan alleen gegeven is dat de waarde ervan op een zeker oogenblik in de toekomst één zal wezen. Het verschil in beide beschouwingswijzen is, dat men in het ééne geval met een positieven, in het andere met een negatieven tijd werkt.

De eerste beschouwingswijze onderstelt dat de rente van het kapitaal ieder jaar opnieuw bij het kapitaal wordt gevoegd en dus steeds zelf rentegevend wordt gemaakt, m. a. w. zij gaat uit van de zoogenaamde Nutzungstheorie, dat is van de theorie die rente als tegenpraestatie voor tijdelijken of altijddurenden kapitaaldienst opvat. De tweede beschouwingswijze laat toe, dat men met E. von Böhm Bawerk [1]) rente voor agio van tegenwoordig boven toekomstig geld houdt, daar het eerste, om redenen die hier niet ter zake dienen, meer waard is dan het tweede, anders gezegd laat niet toe dat men in de rente een oorzaak, maar wèl slechts een maat van waardeverandering ziet.

Door een aanhanger der agio-theorie, Dr. H. Onnen, is in een artikel, getiteld „Rente" [2]) bezwaar gemaakt tegen een ontwikkeling van de wiskundige theorie der renterekening, welke uit zou gaan van de formule:

$$A = a\,(1 + i)^n,$$

waarbij a het aanvangskapitaal en i den rentevoet voorstelt.

Ditzelfde bezwaar zal zich voor de rente doen gevoelen bij een meer algemeene behandeling van de leer der verandering van gelds-

[1]) Vgl. bv. diens: Capital und Capitalzins. I Geschichte und Kritik der Capitalzinstheorien. Innsbruck 1900 p. 313.

[2]) Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indie. Dl. LXXIII. Vgl. ook „De wiskundige theorie van den Geldhandel" van denzelfden schrijver. 's Gravenhage. Gebr. Belinfante. 1906.

waarden. Het zou ons, indien het geldig bleek, kunnen dwingen om niet uit te gaan van de waarde-eenheid in het heden, doch om de waarde-eenheid in de toekomst tot grondslag der beschouwingen te stellen. Technisch valt tegen deze methode niets in te brengen en in de verzekeringswiskunde wordt zij ook gewoonlijk toegepast, maar het gebruik van het woord waardeverandering onderstelt bij geldsommen nu eenmaal dat men uitgaat van een waarde in het heden. Men kan namelijk wèl zeggen dat de waarde van een gulden, waarvan de uitbetaling afhankelijk gesteld wordt van iemands in leven zijn, verandert in:

$$\frac{l_x}{l_{x+n}},$$

maar niet omgekeerd, dat de waarde van een gulden, die bij in leven zijn op den leeftijd $x+n$ wordt uitgekeerd, verandert in:

$$\frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Alleen uit een wiskundig oogpunt gaat iedere waarde in iedere andere over, en is het teeken van den tijd onverschillig.

Een juist inzicht in de hier bedoelde, door Dr. Onnen aangeroerde, kwestie vereischt beschouwingen op economisch terrein, waarvoor een mathematisch proefschrift de juiste plaats niet is. Het onderwerp is door mij besproken in eenige artikelen, getiteld: „De strijd over rente" [1]), „Is rente huur ?", [2]), „De subjectief-objectieve, de subjectieve en de objectieve waardeering der toekomst" [3]) en „De rentetheorie van Von Böhm Bawerk" [4]).

Het komt mij vóór, dat er tegen Von Böhm's Agiotheorie niet weinig is in te brengen, maar in elk geval dient men in de politieke rekenkunde niet uit het oog te verliezen dat zelfs een volgeling van Von Böhm, welke zijn theorie van het kapitaal in het algemeen uitbreidt en mathematisch behandelt, namelijk Knut Wicksell, speciaal van het geldkapitaal opmerkt: „Besonders bei der Frage

[1]) „De Verzekeringsbode" Jaargang 31. 1912. N°. 14.
[2]) Ibidem N°. 15 en 16.
[3]) Ibid. N°. 17 18, 19, 21 en 22.
[4]) Ibid. N°. 23, 24, 25 en 26.

„des Gebrauchs des Geldes kann sich die Nutzungstheorie mit „Erfolg durchführen lassen." [1]) Deze theorie, welke rente beschouwt als aan het stamkapitaal toegevoegde vergoeding voor bewezen diensten, stelt de rente geheel op één lijn met andere oorzaken van waardeverandering, zooals sterfte, uitlotingskansen, invaliditeit, etc. Evengoed als bijvoorbeeld de waarde van een bij een verzekeringsmaatschappij voor een verzekering bij leven gestort bedrag verandering ondergaat door het overlijden van verzekerden, welke samen de groep „verzekerden bij leven" vormen, — men denke hier aan de tontine — wordt zij gewijzigd door toevoeging van rente aan het aanwezige kapitaal.

Het is nu juist op de gelijksoortige werking der verschillende oorzaken van waardeverandering, dat de mogelijkheid om de leer van rente-, loterij- en verzekeringswezen samen te vatten onder één gezichtspunt, namelijk als leer der verandering van geldswaarden, berust.

Zonder nu een dergelijke samenvatting in formules uit te werken, zal hier thans onder meer worden aangetoond, dat een dergelijke algemeenere beschouwingswijze haar practisch nut heeft in zooverre zij het inzicht in het onderling verband van verschillende formules vergemakkelijkt en het inslaan van omwegen bij het oplossen van vraagstukken doet vermijden.

Boven is opgemerkt, dat waardeverandering in verband met bepaalde gebeurtenissen een positieven tijd onderstelt, maar dat men mathematisch gesproken ook latere waarden in vroegere kan doen overgaan. Wij willen in het tweede hoofdstuk beide soorten van waardeovergang in hun onderling verband beschouwen en ons daarbij voorloopig beperken tot het geval, dat alleen de rente als oorzaak van waardeverandering optreedt, zoodat het bewerkstelligen der overgangen respectievelijk de namen oprenten en disconteeren draagt. Het zal dan blijken, dat men alle in de practijk der renterekening voorkomende grootheden kan vinden door uit te gaan van de opgerente en van de gedisconteerde waarde der eenheid, deze op ver-

---

[1]) Uber Wert, Kapital und Rente nach den neueren nationalökonomischen Theorien, Jena 1893, p. 89.

schillende wijzen te sommeeren, en zoonoodig van de gevonden waarden de reciproke te nemen. Tusschen de twee aldus ontstane groepen van grootheden kan nu een dualistisch verband worden aangetoond, hetwelk de mogelijkheid opent om formules uit de ééne groep door eenvoudige letterverwisseling om te zetten in die van de andere. Herhaling der sommatie voert tot eenige nieuwe symbolen, waarvan dat voor de dalende annuïteit $(Da)_{\overline{n}|}$ en zijn analogon voor de dalende tijdelijke lijfrente $(Da)_{x\,\overline{n}|}$ groote practische bruikbaarheid zullen blijken te bezitten.

In het derde hoofdstuk worden de afgeleiden van de grootheden, welke door één- en meervoudige sommatie van de opgerente en de gedisconteerde waarde der eenheid ontstaan, en die, welke met deze grootheden nauw verband houden, onderzocht in verband met hare toepassing bij de benadering van den rentevoet, wanneer de waarde der grootheid zelf en de tijd gegeven zijn. [1])

Het vierde hoofdstuk doet zien tot welke omwegen men somtijds zijn toevlucht zal nemen, wanneer men bij het bepalen van koersen van aan uitloting onderhevige obligatien bij een gegeven nominalen en reëelen rentevoet de gemeenschappelijke basis der politieke rekenkunde uit het oog verliest. Terwijl deze koersbepaling in een overigens ook in andere opzichten voor critiek vatbaar artikel, getiteld: „Het bepalen der reëele rente van effecten" [2]) door Dr. B. Turksma, geschiedde met behulp van de theorie der differentievergelijkingen, gaf juist het besef van gelijksoortigheid der diverse vraagstukken, welke op verandering van geldswaarden betrekking hebben, mij aanleiding om naar een lager-algebraische oplossing der kwestie te zoeken. Deze bleek inderdaad mogelijk door toepassing van eenige zeer eenvoudige bewerkingen, waarbij het in hoofdstuk II ingevoerde symbool $(Da)_{\overline{n}|}$ goeden dienst bewees.

Het dualistisch verband, dat in het tweede hoofdstuk is aange-

---

[1]) Hoofdstuk II en III zijn reeds vroeger, onder denzelfden titel als thans, opgenomen als artikelen in het Archief voor de Verzekeringswetenschap, XI. (1910). p. 209. en p. 462. Zij ondergingen echter uitbreiding en wijziging, dit laatste met name wat de notatie van s en $\mathfrak{s}$ in hoofdstuk III betreft. Voor hoofdstuk IV zie noot in § 1 aldaar.

[2]) Archief Verz. W. VIII. (1906). p. 1.

toond voor symbolen, welke de opgerente waarde der eenheid tot grondslag hebben, aan den eenen kant, en die met de gedisconteerde waarde-eenheid tot grondslag aan den anderen, moet nu krachtens de bovenstaande overwegingen ook bestaan tusschen de correspondeerende symbolen uit de verzekeringswiskunde. Hoewel het bij vergelijking der formules niet onmiddellijk in het oog springt, kan het toch terstond gevonden worden door voorloopig in plaats van het commutatieteeken N_x de sommatie $\sum_{x}^{\infty} D_m$ te bezigen, gelijk in het vierde hoofdstuk geschiedt. Hieruit volgt dan verder, dat men uit iedere formule, waarin uitsluitend symbolen voorkomen welke op rente en op levenskansen betrekking hebben, door eenvoudige letterverwisseling een analogon kan doen ontstaan, van welks geldigheid men van te voren verzekerd is. Ditzelfde blijft ook in beginsel van kracht wanneer andere oorzaken van waardeverandering, zooals bijvoorbeeld de sterftekans, optreden. De letterverwisseling, welke men in dit geval op de dan voorkomende commutatieteekens C_x, M_x en R_x moet toepassen, zijn echter, zooals voor de verzekering bij overlijden wordt aangetoond, te ingewikkeld om eenig practisch nut op te leveren. Een en ander vormt het onderwerp van het vijfde hoofdstuk.

Het bedoelde nut kan in het algemeen bestaan uit het geven van meerdere bekendheid aan de slotwaarden, wat leiden kan tot vermijding van het veel voorkomend gebruik der contante waarden, waar dit niet de aangewezen weg is. Men dient in het oog te houden, dat waardebepalingen voor een reeks van veranderlijke uitkeeringen steeds het gemakkelijkst geschieden voor het tijdstip, waarvoor de uitkeering het grootst is. Hoe men met dezen regel in de practijk rekening kan houden, wordt in het zesde hoofdstuk besproken.

In het zevende hoofdstuk volgen de voor de toepassing van de resultaten van hoofdstuk IV gewenschte tafels van:

$$\frac{1}{n}\, a_{\overline{n}|} \text{ en } \frac{1}{n}\,(D\,a)_{\overline{n}|},$$

terwijl aan het slot de volledige titels van de aangehaalde boeken en tijdschriftartikelen zijn opgegeven.

HOOFDSTUK II.

RENTE-FUNCTIES.

---

§ 1. Inleiding.

Met den naam „rente-functies" kan men in 't algemeen functies aanduiden van rente en tijd; wij zullen dezen naam hier meer in 't bijzonder bezigen voor die rente-functies, welke voor de practijk der rente- en disconto-rekening gebezigd worden, derhalve voor de contante en opgerente waarden van uitkeeringen ineens en van periodieke uitkeeringen, benevens voor de reciproke waarden daarvan.

In het „Institute of Actuaries' Textbook", Part 1, van Ralph Todhunter [1]), kan men op pagina 9 de opmerking vinden, dat disconteeren en oprenten feitelijk op eenzelfde bewerking neêrkomen, terwijl op pagina 10 gezegd wordt, dat de theorie van samengesteld disconto een noodzakelijk gevolg is van de theorie van samengestelden interest. Door van deze opmerkingen partij te trekken, is het mogelijk om met behulp van een geringe uitbreiding van de universeele notatie [2]) een duidelijk overzicht van de verschillende rente-functies en hare vormingswijzen te geven, hetgeen in § 2 zal geschieden. In § 3 zal worden aangetoond, dat tusschen de eigenlijke rente-

---

[1]) Published by the Authority and under the Superintendence of the Institute. London, Charles and Edwin Layton, 1901.

[2]) Op het Tweede Internationale Congres voor Verzekeringswetenschap (Londen 1898) is de in Engeland gebruikelijke notatie als universeele aangenomen. Vgl. Bulletin du Comité permanent des Congrès internationaux d'Actuaires, Bruxelles. Impr. Bruylant. 1901. N°. 5, p. 40, alwaar de notatie in extenso te vinden is. De nota van Sprague, waarvan in het Bulletin sprake is, (p. 48) werd door mij niet ingezien.

functies en de correspondeerende disconto-functies een dualistisch verband bestaat, van welk verband dan in § 4 gebruik zal worden gemaakt voor het afleiden van eenige der voornaamste formules, óók in het geval dat men niet wenscht over te gaan tot de zooeven genoemde uitbreiding der universeele notatie. § 5 zal handelen over de bekende annuïteiten van hoogere orde, mede in verband met de hier ingevoerde annuïteiten van hoogere klasse.

Gemakshalve zullen wij aannemen, dat bij periodieke uitkeeringen de perioden van renteberekening en van uitkeering samen vallen en gelijk zijn aan 1 jaar, [1]) terwijl wij de mogelijkheid, dat de tijd oneindig groot wordt, uitsluiten.

§ 2. Notatie en Classificatie.

Volgens de universeele notatie is:

$$A_{\overline{n}|} = v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$$ [2])

de waarde, die de eenheid, betaalbaar aan het slot van een n-jarig tijdvak, heeft bij den aanvang van dat tijdvak;

$a_{\overline{n}|}$ de waarde, die een gedurende n-jaar betaalbare annuïteit heeft bij den aanvang der uitkeeringen;

$a_{\overline{n}|}$ de waarde, die een gedurende n-jaar betaalbare annuïteit heeft één jaar vóór den aanvang der uitkeeringen.

Tusschen deze drie grootheden bestaan de betrekkingen:

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{0}^{n-1} A_{\overline{m}|}, \quad a_{\overline{n}|} = \sum_{1}^{n} A_{\overline{m}|},$$

waarvoor wij zullen schrijven:

---

[1]) De aanname, dat de periode der renteberekening deelbaar is op die der uitkeeringen, brengt in het onderstaande geen essentiëele veranderingen te weeg, daar zij neêrkomt op de substitutie van $1+i$ door $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$, waarin j de nominale interest en m het quotiënt der perioden voorstelt.

[2]) $A_{\overline{n}|}$ wordt dan beschouwd als koopsom van een „Capital Redemption Assurance". Vgl. Textbook I, p. 131.

$$\mathrm{a}_{\overline{n}|} = \Sigma' A_{\overline{m}|}, \quad a_{\overline{n}|} = \Sigma A_{\overline{m}|}.$$

Overeenkomstig hiermede noemen wij:

$$S_{\overline{n}|} = (1+i)^n$$

de waarde, die de eenheid, betaalbaar aan den aanvang van een n-jarig tijdvak, heeft aan het slot van dat tijdvak;

$\mathrm{s}_{\overline{n}|}$ de waarde, die een gedurende n-jaar betaalbare annuïteit heeft aan het slot der uitkeeringen;

$s_{\overline{n}|}$ de waarde, die een gedurende n-jaar betaalbare annuïteit heeft één jaar ná het slot der uitkeeringen.

Tusschen deze drie grootheden bestaan dan de met de bovenstaande correspondeerende betrekkingen:

$$\mathrm{s}_{\overline{n}|} = \Sigma' S_{\overline{n}|}, \quad s_{\overline{n}|} = \Sigma S_{\overline{n}|}.$$

Deze notatie wijkt in zóóverre van de universeele af, dat de laatste slechts één symbool s kent, wat zij dan aanwendt voor $\Sigma'(1+i)^n$. Hiervoor wordt echter juist dàt lettertype van s gebezigd, wat overeenkomt met a, terwijl men het gebruik van s moest verwachten.

In het Bulletin voornoemd vindt men namelijk opgegeven [1]):

$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \ldots$ etc. $\ldots + v^n =$ value of an annuity for n years certain.

$s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots$ etc. $\ldots + (1+i)^{n-1} =$ the amount of an annuity for n years certain.

Men heeft zich bij de keuze dezer symbolen blijkbaar uitsluitend laten leiden door de practische overweging, dat in de practijk der renterekening wel de post-, doch zelden de praenumerando annuiteit voorkomt, voor welke laatste men dan ook in de universeele notatie geen symbool vindt aangegeven. De geklommen waarde der uitkeeringen aan het einde der periode waarin de n uitkeeringen van $a_{\overline{n}|}$ plaats vinden, is nu $s_{\overline{n}|}$ genoemd om in overeenstemming te komen met het teeken $a_{\overline{n}|}$, maar hierdoor is bewerkt dat, terwijl n in $a_{\overline{n}|}$ het aantal jaren aangeeft dat nog moet verloopen tot aan het oogen-

[1]) Bulletin N°. 5 p. 50.

blik der laatste uitkeering, deze zelfde n in het correspondeerende symbool $s_{\overline{n}|}$ niet, gelijk men zou verwachten, het aantal jaren voorstelt dat verloopen is vanaf het oogenblik der eerste uitkeering. Er is hierbij over het hoofd gezien dat, hetgeen hier amount genoemd wordt, de waarde is op het oogenblik der laatste uitkeering van een zekere reeks, en dat, zóó beschouwd, deze amount $s_{\overline{n}|}$ volstrekt niet verandert of men van de annuiteit $a_{\overline{n}|}$ of wel van $\mathrm{a}_{\overline{n}|}$ spreekt. Men kan dus de amount $\sum_{0}^{n-1}$ evengoed toevoegen aan de discount $a_{\overline{n}|}$ als aan $\mathrm{a}_{\overline{n}|}$, en dan is het toch rationeel om de toevoeging zóó te doen geschieden, dat de formules zoo gelijkmatig mogelijk worden.

Volgens de universeele notatie zou men moeten schrijven:

$$\mathrm{a}_{\overline{n}|} = \sum_{0}^{n-1} v^m, \qquad a_{\overline{n}|} = \sum_{1}^{n} v^m,$$

$$s_{\overline{n}|} = \sum_{0}^{n-1} v^{-m}, \qquad \mathrm{s}_{\overline{n}|} = \sum_{1}^{n} v^{-m}.$$

Wij zullen ons houden aan de boven ingevoerde teekens:

$$\mathrm{a}_{\overline{n}|} = \sum_{0}^{n-1} v^m, \qquad a_{\overline{n}|} = \sum_{1}^{n} v^m.$$

$$\mathrm{s}_{\overline{n}|} = \sum_{0}^{n-1} v^{-m}, \quad s_{\overline{n}|} = \sum_{1}^{n} v^{-m}.$$

De enkelvoudige rentefuncties kunnen nu als volgt in twee groepen worden verdeeld:

I. $A_{\overline{n}|}$, $a_{\overline{n}|}$, $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}$, $\mathrm{a}_{\overline{n}|}$, $\dfrac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}$.

II. $S_{\overline{n}|}$, $s_{\overline{n}|}$, $\dfrac{1}{s_{\overline{n}|}}$, $\mathrm{s}_{\overline{n}|}$, $\dfrac{1}{\mathrm{s}_{\overline{n}|}}$.

Het onderling verband der beide groepen wordt weêrgegeven door:

$$A_{\overline{n}|} = \frac{1}{S_{\overline{n}|}}.$$

Aangezien de functies van de eerste groep uitsluitend betrekking hebben op waarden, berekend door disconteering naar den aanvang van het tijdsverloop, waarover de uitkeeringen plaats vinden, die der tweede groep op waarden, berekend door oprenting naar het slot van dat tijdsverloop, kan men gevoegelijk de eerste groep den naam van disconto- of aanvangs-functies, de tweede dien van oprentings- of slot-functies geven. De aanvangs-functies hebben dus tot symbolen de verschillende typen van de letter **a**, de slot-functies de typen der letter **s** [1]).

Uit:

$$A_{\overline{n}|} = v^n = \frac{1}{S_{\overline{n}|}}$$

volgt terstond, dat alle hier genoemde functies vervat zijn in de algemeene symbolen:

$$\Sigma^{(p)} v^n \text{ en } \Sigma'^{(p)} v^n,$$

mits men slechts aan $\Sigma^{(0)} v^n$ en $\Sigma'^{(0)} v^n$ de beteekenis v^n en aan $\Sigma^{(-p)}$ de beteekenis $\frac{1}{\Sigma^{(p)}}$ toekent.

Is $n > 0$, dan heeft men te doen met functies van de eerste groep, terwijl $n < 0$ functies van de tweede groep oplevert; p heeft hierbij de waarden -1, 0 en 1.

De meest voor de hand liggende uitbreiding der groepen verkrijgt men, door p achtereenvolgens alle geheele negatieve en positieve getallen te laten doorloopen, waarbij wij dan aannemen, dat het accent slechts op het eerste Σ-teeken van toepassing is. Daar men voor $p < 0$ de reciproke functies verkrijgt van $p > 0$, welke verder niets bijzonders opleveren, zullen wij ons beperken tot het bespreken van het geval $0 < p < q$, waarin q een willekeurig groot getal voorstelt.

---

[1]) Het gebruik van A en a is te danken aan het feit, dat zoowel Assurance als annuity met deze letter beginnen; de invoering der letter s schijnt evenwel toevallig te zijn geschied.

Wij zullen nu zeggen dat een functie, die ontstaat door een p-voudige sommatie, behoort tot de klasse p, en stellen:

$$\Sigma^{(p)} A_{\overline{n|}} = (D\,a)_{\overline{n|}\,\overline{p|}}, \qquad \Sigma'^{(p)} A_{\overline{n|}} = (D\,\mathrm{a})_{\overline{n|}\,\overline{p|}},$$

$$\Sigma^{(p)} S_{\overline{n|}} = (I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{p|}}, \qquad \Sigma'^{(p)} S_{\overline{n|}} = (I\,\mathrm{s})_{\overline{n|}\,\overline{p|}}.$$

De beteekenis der letters I en D hierin zal nader worden opgehelderd.

Voor de slotgroep wordt:

$$(I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{0|}} = S_{\overline{n|}},$$

$$(I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{1|}} = \Sigma\, S_{\overline{n|}} = s_{\overline{n|}},$$

$$(I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{2|}} = \Sigma^{(2)} S_{\overline{n|}} = \Sigma\, s_{\overline{n|}}.$$

Nu is:

$$\Sigma\, s_{\overline{n|}} = S_{\overline{n|}} + 2\, S_{\overline{n-1|}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n+1)\, S_{\overline{2|}} + n\, S_{\overline{1|}},$$

zoodat $(I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{2|}}$ de opgerente waarde voorstelt van een annuïteit, die met 1 begint, jaarlijks gedurende n jaar met 1 opklimt, en dus met n eindigt. Daar hieraan volgens de universeele notatie (met wijziging van s in s) het symbool $(I\,s)_{\overline{n|}}$ toekomt, waarbij I Increasing beduidt, terwijl het feit, dat de achtereenvolgende uitkeeringen gelijk zijn aan de reeks der natuurlijke getallen, niet nader in het symbool wordt uitgedrukt, kan men de hier ingevoerde notatie als een uitbreiding van de universeele beschouwen, waarbij genoemd feit door toevoeging van het cijfer $\overline{2|}$ wordt aangegeven. Bedenkt men voorts, dat de reeks der natuurlijke getallen dezelfde is als de reeks der figuurlijke getallen van de tweede orde, mits men de eerste term, die nul is, weglaat [1]), dan kan men zeggen dat in $(I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{2|}}$ de $\overline{2|}$ zoowel verband houdt met de klasse als met de orde der annuïteit. In het algemeen zal men vinden, dat bij een p-voudig herhaalde sommatie, die per definitie een rente-functie van de klasse p oplevert, de uitkeeringen gelijk zijn aan de achtereenvolgende termen

[1]) Vgl. Textbook I, p. 44.

van de reeks der figuurlijke getallen van de orde p, mits men daarbij de termen, die nul zijn, niet mederekent.

Dit alles gaat vrijwel onveranderd dóór, wanneer men s door s vervangt. Men krijgt:

$$(I\,\mathrm{s})_{\overline{n}|\,\overline{0}|} = S_{\overline{n-1}|},$$

$$(I\,\mathrm{s})_{\overline{n}|\,\overline{1}|} = \Sigma' S_{\overline{n}|} = S_{\overline{n}|},$$

$$(I\,\mathrm{s})_{\overline{n}|\,\overline{2}|} = \Sigma'^{(2)} S_{\overline{n}|} = \Sigma\,\mathrm{s}_{\overline{n}|},$$

$$\Sigma\,\mathrm{s}_{\overline{n}|} = S_{\overline{n-1}|} + 2\,S_{\overline{n-2}|} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)\,S_{\overline{1}|} + n.$$

Voert men echter in:

$$A_{\overline{n+1}|}\,(I\,s)_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = \frac{(I\,s)_{\overline{n}|\,\overline{p}|}}{S_{\overline{n+1}|}} = (I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},$$

$$A_{\overline{n-1}|}\,(I\,\mathrm{s})_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = \frac{(I\,\mathrm{s})_{\overline{n}|\,\overline{p}|}}{S_{\overline{n-1}|}} = (I\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{p}|},$$

dan zijn deze nieuwe functies niet te beschouwen als te zijn ontstaan door sommatie van $A_{\overline{n}|}$. Daar evenwel de uitkeeringen nog steeds gelijk zijn aan de reeks van de figuurlijke getallen van de orde p, afgezien van de termen nul, zullen wij deze annuïteiten tòch annuïteiten van de klasse p blijven noemen. De naam annuïteiten van de orde p blijft dan gereserveerd voor de ook in het Textbook met dien naam aangeduide annuïteiten, waarbij de uitkeeringen gelijk zijn aan de reeks van de figuurlijke getallen van de orde p, doch waarbij de termen, die nul zijn, wèl worden medegerekend.

Voor de aanvangsgroep kan men een soortgelijke redeneering volgen als voor de slotgroep is gebezigd.

Men heeft volgens de definitie:

$$(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{0}|} = A_{\overline{n}|},$$

$$(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{1}|} = \Sigma\,A_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|},$$

$$(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{2}|} = \Sigma^{(2)}\,A_{\overline{n}|} = \Sigma\,a_{\overline{n}|},$$

$$\Sigma\,a_{\overline{n}|} = n\,A_{\overline{1}|} + (n-1)\,A_{\overline{2}|} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2\,A_{\overline{n-1}|} + A_{\overline{n}|}.$$

Evenzoo:

$$(D\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{0}|} = A_{\overline{n-1}|},$$

$$(D\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{1}|} = \Sigma'\,A_{\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|},$$

$$(D\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{2}|} = \Sigma'^{(2)}\,A_{\overline{n}|} = \Sigma\,\mathrm{a}_{\overline{n}|},$$

$$\Sigma\,\mathrm{a}_{\overline{n}|} = n + (n-1)\,A_{\overline{1}|} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2\,A_{\overline{n-2}|} + A_{\overline{n-1}|}.$$

$(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{2}|}$ en $(D\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{2}|}$ stellen dus de gedisconteerde waarden vóór van annuïteiten, die met n beginnen, jaarlijks gedurende n jaar met n dalen en derhalve met 1 eindigen. Daar een klimmende annuïteit in de universeele notatie wordt aangeduid door I, de eerste letter van het woord Increasing, behoort de correspondeerende dalende annuïteit, welke aldaar evenmin voorkomt als de dalende lijfrente of de dalende verzekering, te worden gemerkt met D, de eerste letter van het woord Diminishing.

Als algemeene functies heeft men:

$$(D\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{p}|} \text{ en } (D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},$$

terwijl:

$$S_{\overline{n+1}|}\,(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = \frac{(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{p}|}}{A_{\overline{n+1}|}} = (D\,s)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},$$

$$S_{\overline{n-1}|}\,(D\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = \frac{(D\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{p}|}}{A_{\overline{n-1}|}} = (D\,\mathrm{s})_{\overline{n}|\,\overline{p}|},$$

moet worden gesteld.

Het laatste tweetal is niet te beschouwen als te zijn ontstaan door sommatie van $S_{\overline{n}|}$, maar wordt, wegens het karakter der uitkeeringen, tòch tot de klasse p gerekend.

Wanneer wij de reciproque waarden der functies buiten beschouwing laten en van de correspondeerende functies met a en a, s en s alleen die met a en s vermelden, dan krijgen wij als aanvangsgroep:

$$A_{\overline{n}|},\ a_{\overline{n}|},\ (D\,a)_{\overline{n}|},\ (I\,a)_{\overline{n}|},\ (D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},\ (I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},$$

en als slotgroep:

$$S_{\overline{n}|}, s_{\overline{n}|}, (I\,s)_{\overline{n}|}, (D\,s)_{\overline{n}|}, (I\,s)_{\overline{n}|\,\overline{p}|}, (D\,s)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},$$

waarbij $(D\,a)_{\overline{n}|}$, $(I\,a)_{\overline{n}|}$, $(I\,s)_{\overline{n}|}$ en $(D\,s)_{\overline{n}|}$ de schrijfwijze overeenkomstig de universeele notatie is voor:

$$(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{2}|}, (I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{2}|}, (I\,s)_{\overline{n}|\,\overline{2}|}, (D\,s)_{\overline{n}|\,\overline{2}|}.$$

§ 3. Het dualisme van rente en disconto.

De bewerking disconteeren is dezelfde als de bewerking oprenten, mits men daarin het teeken van den tijd omkeert, iets wat voor-eerst neêrkomt op een onderlinge verwisseling van de woorden aanvang en slot [1]). Verder zal een grootheid, die oorspronkelijk met den tijd toenam, met den tijd afnemen, wanneer men den laatste in tegengestelde richting rekent, en omgekeerd. Daar nu de disconto- of aanvangsgroep op dezelfde wijze uit $A_{\overline{n}|}$ is opgebouwd als de oprentings- of slotgroep uit $S_{\overline{n}|}$, kan men de definities van de ééne groep verkrijgen uit die van de andere door onderlinge verwisseling van de woorden disconteeren en oprenten, aanvang en slot, afnemen en toenemen, van de letters D en I en van de verschillende lettertypen a met de correspondeerende lettertypen s.

De gelijksoortigheid van beide groepen treedt nog duidelijker in het licht, wanneer men bedenkt:

$$A_{\overline{n}|} = \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{S_{\overline{n}|}},$$

waarin i essentiëel positief is, zoodat, als men de gevallen $n = 0$ en $n = \infty$ uitzondert:

$$0 < A_{\overline{n}|} < 1, \quad 1 < S_{\overline{n}|} < g,$$

waarin g een groot positief getal voorstelt.

Wij hebben nu uit $A_{\overline{n}|}$ op zuiver formeele wijze verschillende andere functies afgeleid, terwijl het niet moeilijk valt allerlei be-

---

[1]) Het spreekt vanzelf, dat de uitdrukking „één jaar vóór den aanvang" bij de teekenverandering van den tijd overgaat in „één jaar ná het slot", en omgekeerd.

trekkingen tusschen die functies neêr te schrijven. De grootte van $A_{\overline{n}|}$ is bij dat alles echter van geen belang, en men kan het nu louter als een kwestie van afspraak beschouwen om, wanneer de grond-functie in het interval tusschen 0 en 1 ligt, de diverse functies aan te duiden met de lettertypen a, doch om, wanneer zij tusschen 1 en g ligt, de correspondeerende lettertypen s te bezigen.[1])

Dat men:

$$\Sigma^{(2)} S_{\overline{n}|} = (I\,s)_{\overline{n}|},$$

doch:

$$\Sigma^{(2)} A_{\overline{n}|} = (D\,a)_{\overline{n}|}$$

stelde, vindt dan zijn verklaring hierin, dat men bij het omkeeren van den tijd, dat is bij het verwisselen van de woorden slot en aanvang, den naam opklimmende annuïteit blijft geven aan een annuïteit, die van den oorspronkelijken aanvang naar het oorspronkelijk slot toeneemt, zoodat de nieuwe annuïteit, ofschoon formeel geheel gelijk aan de oude, met den naam dalende annuïteit bestempeld en door het symbool D gekenmerkt moet worden. Een onmiddellijk gevolg van een en ander is, dat bij iedere betrekking tusschen functies van de ééne groep, een analoge betrekking tusschen functies van de andere groep bestaat; beide betrekkingen zijn door eenvoudige letterverwisseling uit elkaâr af te leiden.

Heeft men een betrekking tusschen willekeurige rente-functies van beide groepen, dan kan men deze eerst door middel van betrekkingen tusschen functies van één groep geheel uitschrijven in $A_{\overline{n}|}$ en $S_{\overline{n}|}$, en vervolgens met behulp van

$$A_{\overline{n}|} = \frac{1}{S_{\overline{n}|}}$$

in $A_{\overline{n}|}$ òf $S_{\overline{n}|}$ afzonderlijk. Neemt men nu van de laatst verkregen vergelijking door onderlinge verwisseling van S en A het analogon, past hierop toe:

---

[1]) Was de universeele notatie geheel gevolgd, dan zouden juist niet met elkaar correspondeerende typen gebruikt moeten worden.

$$S_{\overline{n}|} = \frac{1}{A_{\overline{n}|}}$$

op analoge wijze als eerst

$$A_{\overline{n}|} = \frac{1}{S_{\overline{n}|}}$$

is gebezigd, en voert men nu de analoge betrekkingen in van die, welke gediend hebben om de oorspronkelijke vergelijking in $A_{\overline{n}|}$ en $S_{\overline{n}|}$ om te zetten, dan verkrijgt men vanzelf het analogon van de oorspronkelijke betrekking.

Wij hebben dus de algemeene

Stelling: Iedere willekeurige betrekking tusschen rente-functies heeft een analogon, dat men verkrijgt door onderlinge verwisseling van de letters I en D, en van de lettertypen s met de correspondeerende lettertypen a.

Men kan bijvoorbeeld de in § 2 voorkomende formules aldus paarsgewijze aan elkaar toevoegen:

$$(I\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = \frac{(I\,\mathrm{s})_{\overline{n}|\,\overline{p}|}}{S_{\overline{n-1}|}}, \qquad (D\,\mathrm{s})_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = \frac{(D\,\mathrm{a})_{\overline{n}|\,\overline{p}|}}{A_{\overline{n-1}|}},$$

$$(I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = \frac{(I\,s)_{\overline{n}|\,\overline{p}|}}{S_{\overline{n+1}|}}, \qquad (D\,s)_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = \frac{(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{p}|}}{A_{\overline{n+1}|}}.$$

Toepassing van de stelling op de linkerbetrekkingen geeft vanzelf het rechter tweetal.

§ 4. Afleiding van formules.

Uit:

$$S_{\overline{n}|} = \frac{1}{v^n}$$

volgt:

$$S_{\overline{n}|} = S_{\overline{1}|}\, S_{\overline{n-1}|},$$

zoodat:

$$s_{\overline{n}|} = \Sigma\, S_{\overline{n}|} = \frac{S_{\overline{1}|}}{1 - S_{\overline{1}|}}\,(1 - S_{\overline{n}|}),$$

$$(I\,s)_{\overline{n}|} = \Sigma\, s_{\overline{n}|} = \frac{S_{\overline{1}|}}{1 - S_{\overline{1}|}}(n - s_{\overline{n}|}).$$

Vermenigvuldiging met $A_{\overline{n+1}|}$ geeft:

$$(I\,a)_{\overline{n}|} = \frac{1}{A_{\overline{1}|} - 1}(n\,A_{\overline{n+1}|} - a_{\overline{n}|}).$$

Letterverwisseling geeft:

$$(D\,a)_{\overline{n}|} = \frac{A_{\overline{1}|}}{1 - A_{\overline{1}|}}(n - a_{\overline{n}|}),$$

$$(D\,s)_{\overline{n}|} = \frac{1}{S_{\overline{n}|} - 1}(n\,S_{\overline{n+1}|} - s_{\overline{n}|}).$$

Bij voortgezette sommatie moeten wij bedenken, dat men $\Sigma\, 1 = n$, als $(n+1)^{\text{ste}}$ term van de figuurlijke getallen van de 2de orde [1]), kan voorstellen door $t_{\overline{n+1}|\,\overline{2}|}$. De vormingswijze der figuurlijke getallen, welke opgesloten ligt in de vergelijking:

$$t_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = \sum_{m=1}^{m=n-1} t_{\overline{m}|\,\overline{p-1}|}\ ^{2}),$$

geeft nu terstond:

$$\Sigma^{(r-1)}\,1 = \sum_{m=1}^{m=n} {}^{(r-2)}\,t_{\overline{m+1}|\,\overline{2}|} = t_{\overline{n+r-1}|\,\overline{r}|},$$

zoodat:

---

[1]) Vgl. Textbook I, p. 44.

[2]) De termen, die nul zijn, worden hierbij meêgeteld, terwijl alle termen van de eerste orde de waarde 1 hebben. De vergelijking luidt in woorden: Iedere term van een bepaalde orde is gelijk aan de som van de voorafgaande termen van de voorafgaande orde.

Term No.	Termen van de orde No.						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0
7	1	6	15	20	15	6	1

$$(I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{r|}} = \Sigma^{(r)}\, S_{\overline{n|}} = \Sigma^{(r-1)}\, s_{\overline{n|}} = \Sigma^{(r-1)}\, \frac{S_{\overline{1|}}}{1 - S_{\overline{1|}}}\,(1 - S_{\overline{n|}}),$$

$$(I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{r|}} = \frac{S_{\overline{1|}}}{1 - S_{\overline{1|}}}\,[t_{\overline{n+r-1|}\,\overline{r|}} - (I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{r-1|}}].$$

Daar bij de notatie $t_{\overline{m|}\,\overline{p|}}$ de termen die nul zijn, meêgeteld worden, heeft men ook:

$$(I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{r|}} = S_{\overline{1|}}(I\,s)_{\overline{n-1|}\,\overline{r|}} + S_{\overline{1|}}\, t_{\overline{n+r-1|}\,\overline{r|}}.$$

Hieruit:

$$(1\,s) \quad . \quad . \quad . \quad (I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{r|}} = (I\,s)_{\overline{n-1|}\,\overline{r|}} + (I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{r-1|}}. \quad [1])$$

Het is duidelijk, dat men in deze vergelijking s vervangen mag door s.

Letterverwisseling geeft:

$$(1\,a) \quad . \quad . \quad . \quad (D\,a)_{\overline{n|}\,\overline{r|}} = (D\,a)_{\overline{n-1|}\,\overline{r|}} + (D\,a)_{\overline{n|}\,\overline{r-1|}}.$$

Hierin mag a vervangen worden door a.

Voor $r = 2$ vindt men de bijzondere gevallen:

$$(I\,s)_{\overline{n|}} = (I\,s)_{\overline{n-1|}} + s_{\overline{n|}},$$

$$(D\,a)_{\overline{n|}} = (D\,a)_{\overline{n-1|}} + a_{\overline{n|}}.$$

Schrijft men de recursieformules $(1\,s)$ en $(1\,a)$ uit voor afdalende waarden r, dan vindt men door optelling der resultaten:

$$(I\,s)_{\overline{n|}\,\overline{r|}} = \sum_{p=1}^{p=r} (I\,s)_{\overline{n-1|}\,\overline{p|}} + S_{\overline{n|}},$$

$$(D\,a)_{\overline{n|}\,\overline{r|}} = \sum_{p=1}^{p=r} (D\,a)_{\overline{n-1|}\,\overline{p|}} + A_{\overline{n|}}.$$

---

[1]) Formules, die door letterverwisseling uit elkaâr zijn te verkrijgen, zullen met eenzelfde nummer, doch met verschillende letter worden aangeduid. De correspondeerende a- en s-formule van een zelfde nummer zijn niet altijd beide in den text opgenomen.

Hieruit:

$$(Ia)_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \sum_{p=1}^{p=r} (Ia)_{\overline{n-1}|\,\overline{p}|} + 1,$$

$$(Ds)_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \sum_{p=1}^{p=r} (Ds)_{\overline{n-1}|\,\overline{p}|} + 1.$$

Formeert men van de in het begin dezer § afgeleide betrekkingen op de in § 2 aangegeven wijze nog de analogien, dan blijkt, dat de vergelijkingen in practische bruikbaarheid somtijds onderdoen voor de desbetreffende vergelijkingen, geschreven in de gewijzigde universeele notatie. [1])

Hoewel nu de symbolen A, S en s voor de bespreking van het dualistisch verband tusschen de aanvangs- en slotgroep goede diensten hebben bewezen, zullen wij thans tot de daarvoor gebruikelijke vormen v, $1+i$ en $(1+i)$ s terugkeeren. [2])

Het formeeren van analogiën komt nu neêr op de onderlinge verwisseling van:

v met $1+i$,

i met $-\frac{i}{1+i} = -d$,

a met s $(1+i)$,

s met a,

I met D.

Kortheidshalve zullen wij ons uitsluitend bepalen tot a en s waarden. Men heeft:

$$(2\,s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{s}_{\overline{n}|} = \Sigma'(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$(3\,s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I\,\mathrm{s})_{\overline{n}|} = \Sigma\,\mathrm{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)\,\mathrm{s}_{\overline{n}|} - n}{i}.$$

---

[1]) De wijziging, hier bedoeld, bestaat in de verandering van s in s en in de invoering van D.

[2]) Ten aanzien van s geschiedt de overgang uitsluitend ter vergelijking met formules in andere boeken, doch niet omdat het gebruik van dit teeken naast s door mij onnoodig wordt geoordeeld.

Door vermenigvuldiging met v^n krijgt men de bekende formule:

$$(4\,a). \quad (I\,a)_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)\,a_{\overline{n}|} - n\,v^n}{i} = a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n\,v^n}{i}.$$

Letterverwisseling geeft:

$$(4\,s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D\,s)_{\overline{n}|} = \frac{n\,(1+i)^n - s_{\overline{n}|}}{i},$$

waaruit door disconteering:

$$(3\,a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D\,a)_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}.$$

Voorts door letterverwisseling uit $(2\,s)$:

$$(2\,a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i},$$

met behulp waarvan:

$$(5\,a). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D\,a)_{\overline{n}|} + (I\,a)_{\overline{n}|} = (n+1)\,a_{\overline{n}|}.$$

Evenzoo:

$$(5\,s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I\,s)_{\overline{n}|} + (D\,s)_{\overline{n}|} = (n+1)\,s_{\overline{n}|},$$

welke formule zoowel door oprenting als door letterverwisseling uit $(5\,a)$ kan verkregen worden.

Voortgezette sommatie van $(2\,s)$ levert op:

$$(6\,s). \quad . \quad (I\,s)_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{1}{d}\,(I\,s)_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|} - \frac{1}{i}\,t_{\overline{n+r-1}|\,\overline{r}|},$$

waaruit door letterverwisseling:

$$(6\,a) \quad . \quad (D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{1}{i}\,t_{\overline{n+r-1}|\,\overline{r}|} - \frac{1}{i}\,(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|}.$$

De som:

$$(7) \qquad (I\,s)_{\overline{n}|\,\overline{r}|} + (D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{1}{d}\,(I\,s)_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|} - \frac{1}{i}\,(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|},$$

verandert niet door letterverwisseling, gevolgd door vermenigvuldiging met v.

(5 a) en (5 s) zijn niet voor voortgezette sommatie vatbaar, daar $(Ia)_{\overline{n}|}$ en $(Ds)_{\overline{n}|}$ niet naar n sommeerbaar zijn. Wel kan sommatie dezer symbolen naar r plaats vinden; deze leidt, gelijk boven reeds is aangetoond, tot:

$$(8) \quad \ldots \quad \sum_{p=1}^{p=r} (Ia)_{\overline{n}|\,\overline{p}|} = (Ia)_{\overline{n+1}|\,\overline{r}|} - 1,$$

en de daarmee verwante betrekkingen. [1])

Daar de grootheden $(Da)_{\overline{n}|}$, $(Ia)_{\overline{n}|}$, $(Is)_{\overline{n}|}$ en $(Ds)_{\overline{n}|}$ in de practijk voorkomen, moge er op gewezen worden, dat krachtens het voorafgaande, tafels van $(Da)_{\overline{n}|}$ en $(Is)_{\overline{n}|}$ gewone somtafels van $a_{\overline{n}|}$ en van $s_{\overline{n}|}$ zijn, waaruit dan met behulp van (5 a) en (5 s) ook de waarden van $(Ds)_{\overline{n}|}$ en $(Ia)_{\overline{n}|}$ op eenvoudige wijze bepaald kunnen worden.

Aan de rente-functies van hoogere dan de tweede klasse kan evenmin practische waarde worden toegekend als aan die van hoogere orde; zij stellen ons echter beter in staat om de in de practijk gebruikte rentefuncties uit een algemeen gezichtspunt te beschouwen en geven meer in 't bijzonder antwoord op de vraag, wat men heeft te verwachten, wanneer men de bewerking, die van een discontotafel een annuïteiten-tafel maakt, weêr op laatstgenoemde zelf toepast, en hiermede in dien zin doorgaat.

§ 5. Annuïteiten van hoogere orde.

Een annuïteit van de orde r is een annuïteit, waarvan de achtereenvolgende uitkeeringen gelijk zijn aan de figuurlijke getallen van de orde r, waarbij nu echter, in tegenstelling met de annuïteiten van hoogere klasse, de getallen, die 0 zijn, mede in aanmerking genomen moeten worden. [2])

---

[1]) Een dergelijke sommatie levert voor annuïteiten van hoogere orde een dadelijk ingaande annuïteit, waarvan iedere uitkeering gelijk is aan het dubbele van de voorafgaande.

[2]) Vgl. Textbook I, p. 44.

Uit deze definitie volgt, wanneer men annuïteiten van hoogere orde met [ ] aanduidt:

$$(9\,a) \ldots\ldots [Ia]_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = v^{r-1}\,(Ia)_{\overline{n-r+1}|\,\overline{r}|}\ ^{1}),$$

$$(10\,s) \ldots\ldots [I\,s]_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = (I\,s)_{\overline{n-r+1}|\,\overline{r}|},$$

waaruit door letterverwisseling, gevolgd door vermenigvuldiging met v, weêr twee analogien met D gevormd kunnen worden, te weten:

$$(9\,s) \ldots\ldots [D\,s]_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = (1+i)^{r-1}\,(D\,s)_{\overline{n-r+1}|\,\overline{r}|},$$

$$(10\,a) \ldots\ldots [D\,a]_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = (D\,a)_{\overline{n-r+1}|\,\overline{r}|}.$$

Voor $(6\,s)$ is te schrijven:

$$(I\,s)_{\overline{n-r+1}|\,\overline{r}|} = \frac{1}{d}\,(I\,s)_{\overline{n-r+1}|\,\overline{r-1}|} - \frac{1}{i}\,t_{\overline{n}|\,\overline{r}|}.$$

Volgens $(10\,s)$ is:

$$(I\,s)_{\overline{n-r+1}|\,\overline{r-1}|} = [I\,s]_{\overline{n-1}|\,\overline{r-1}|},$$

zoodat:

$$[I\,s]_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{1}{d}\,[I\,s]_{\overline{n-1}|\,\overline{r-1}|} - \frac{1}{i}\,t_{\overline{n}|\,\overline{r}|}.$$

Met gebruikmaking van de uit:

$$(11) \ldots\ldots t_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = t_{\overline{n-1}|\,\overline{r}|} + t_{\overline{n-1}|\,\overline{r-1}|}$$

volgende betrekking:

---

[1]) Daar de eerste $r-1$ termen van de figuurlijke getallen van de r^{de} orde nul zijn, heeft een annuïteit van de r^{de} klasse altijd $r-1$ termen minder dan de correspondeerende annuïteit van de r^{de} orde. Bovendien zal men bij de omzetting van de aanvangswaarde van een klimmende annuïteit van de r^{de} klasse in die van de correspondeerende van de r^{de} orde nog moeten disconteeren over de $r-1$ jaren, waarin de uitkeeringen van laatstgenoemde de grootte 0 hebben. Op de berekening van de slotwaarde van een klimmende annuïteit hebben eventueele begintermen, die nul zijn, geen invloed. Bij dalende annuïteiten is de verhouding juist omgekeerd.

$$t_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = t_{\overline{n+1}|\,\overline{r}|} - t_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|},$$

kan de uitdrukking voor $[Is]_{\overline{n}|\,\overline{r}|}$ worden omgezet in:

$$(12\,s). \quad . \quad . \quad . \quad [Is]_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{[Is]_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|} - t_{\overline{n+1}|\,\overline{r}|}}{i}.$$

Hieruit door disconteering:

$$(13\,a) \quad . \quad . \quad . \quad [Ia]_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{[Ia]_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|} - v^n\, t_{\overline{n+1}|\,\overline{r}|}}{i}.$$

Deze betrekkingen zijn volkomen in overeenstemming met de formules [1]):

$$(14\,s) \quad . \quad . \quad s_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{s_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|} + (1+i)^n\, t_{\overline{1}|\,\overline{r}|} - t_{\overline{n+1}|\,\overline{r}|}}{i},$$

$$(15\,a) \quad . \quad . \quad . \quad a_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{a_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|} + t_{\overline{1}|\,\overline{r}|} - v^n\, t_{\overline{n+1}|\,\overline{r}|}}{i},$$

welke als formule (40) en (41) in het Textbook [2]) voorkomen.

Dat zij voor $r > 1$ in elkaâr overgaan is al aanstonds duidelijk. Voor $r = 1$ geldt feitelijk geen der vier betrekkingen, daar zij allen afgeleid zijn met behulp van (11), waaraan alleen beteekenis gehecht kan worden indien $r > 1$ is.

Daar:

$$t_{\overline{1}|\,\overline{r}|} = 0 \text{ voor } r > 1,$$

zou het laatste tweetal geschreven moeten worden in de gedaante:

$$(16\,s). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad s_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{s_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|} - t_{\overline{n+1}|\,\overline{r}|}}{i},$$

$$(17\,a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a_{\overline{n}|\,\overline{r}|} = \frac{a_{\overline{n}|\,\overline{r-1}|} - v^n\, t_{\overline{n+1}|\,\overline{r}|}}{i},$$

met de conditie $r > 1$.

---

[1]) Het Textbook kent alleen klimmende annuïteiten en stelt $[Ia]_{\overline{n}|\,\overline{r}|}$ vóór door $a_{\overline{n}|\,\overline{r}|}$, terwijl $[Is]_{\overline{n}|\,\overline{r}|}$ door $s_{\overline{n}|\,\overline{r}|}$ wordt aangegeven. De s uit het Textbook is overal gewijzigd in s.

[2]) I, p. 46.

Nu is volgens (9 a) en (10 s):

$$s_{\overline{n}|\,\overline{1}|} = [Is]_{\overline{n}|\,\overline{1}|} = (Is)_{\overline{n}|\,\overline{1}|} = s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

$$a_{\overline{n}|\,\overline{1}|} = [Ia]_{\overline{n}|\,\overline{1}|} = (Ia)_{\overline{n}|\,\overline{1}|} = a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i},$$

Uit:

$$(Is)_{\overline{n}|\,\overline{o}|} = (1+i)^n \quad [1])$$

volgt door disconteering:

$$(Is)_{\overline{n}|\,\overline{o}|} = (1+i)^{n-1},$$

$$(Ia)_{\overline{n}|\,\overline{o}|} = v,$$

zoodat door (10 s):

$$s_{\overline{n}|\,\overline{o}|} = [Is]_{\overline{n}|\,\overline{o}|} = (Is)_{\overline{n+1}|\,\overline{o}|} = (1+i)^n,$$

en door (9 a):

$$a_{\overline{n}|\,\overline{o}|} = [Ia]_{\overline{n}|\,\overline{o}|} = (1+i)\,(Ia)_{\overline{n+1}|\,\overline{o}|} = 1.$$

Hieruit blijkt, dat (12 s), (13 a), (16 s) en (17 a) wel niet behoeven door te gaan voor $r = 1$, maar dit inderdaad tòch doen, in tegenstelling met de formules (14 s) en (15 a) uit het Textbook.

Todhunter zegt naar aanleiding van laatstgenoemde betrekkingen slechts [2]):

„It will be observed that, in the derivation of $s_{\overline{n}|}$ and $a_{\overline{n}|}$ from „the general formulas, $s_{\overline{n}|\,\overline{o}|}$ and $a_{\overline{n}|\,\overline{o}|}$ are taken as o, and that in „the derivation of the amounts and present values of the annuities „of orders higher than the first, the terms $(1+i)^n\, t_{\overline{1}|\,\overline{r}|}$ and $t_{\overline{1}|\,\overline{r}|}$ „vanish."

Er wordt hier niet gewezen op het ongeoorloofde van de substitutie $r = o$, en daardoor wordt de schijn gewekt dat aan $s_{\overline{n}|\,\overline{o}|}$ en $a_{\overline{n}|\,\overline{o}|}$ de beteekenis o noodzakelijkerwijze moet toekomen. De verhouding is echter zóó, dat Todhunter aan $s_{\overline{n}|\,\overline{o}|}$ en $a_{\overline{n}|\,\overline{o}|}$ volkomen willekeurig een zekere waarde toekent, om daardoor de vormen voor

---

[1]) Vgl. § 2.

[2]) Textbook I, p. 47.

$s_{\overline{n}|}$ en $a_{\overline{n}|}$, verkregen door de ongeoorloofde substitutie $r = 1$ in de door hem gegeven algemeene uitdrukkingen, sluitend te maken.

De onderstellingen:

$$s_{\overline{n}|\,\overline{o}|} = o \quad \text{en} \quad a_{\overline{n}|\,\overline{o}|} = o$$

leiden in het Textbook slechts dáárom niet tot tegenstrijdigheden, omdat deze grootheden er verder geen rol spelen, aangezien de annuïteiten van hoogere orde er niet van den grond af zijn opgebouwd; de werkelijke beteekenis van bedoelde vormen komt daardoor niet aan het licht. Wil men met deze beteekenis rekening houden, dan behoort men de vormen (14 s) en (15 a) te vervangen door (12 s) en (13 a). [1])

Door letterverwisseling kan men geraken tot soortgelijke uitdrukkingen voor opgerente en gedisconteerde waarden van dalende annuïteiten van hoogere orde, waarop mutatis mutandis al het bovenstaande van toepassing blijft.

Todhunter behandelt in zijn Textbook uitsluitend annuïteiten van hoogere orde, en beschouwt de annuïteit $(I\,a)_{\overline{n}|}$ als iets, wat geheel op zich zelf staat. [2]) Naar mijn meening zou het aanbeveling verdienen om de annuïteiten van hoogere orde geheel te doen vervallen en deze te vervangen door de annuïteiten van hoogere klasse, waarvan de in de practijk niet zelden voorkomenden vormen $(Ia)_{\overline{n}|}$ en $(D\,a)_{\overline{n}|}$ bijzondere gevallen zijn.

---

[1]) De onjuiste beschouwingswijze van Todhunter in Textbook I is des te opmerkelijker, omdat, naar mij achteraf blijkt, in het drie jaar vroeger (1898) verschenen boek „The Theory of Finance" door G. King, den schrijver van Textbook II, de formules (16 s) en (17 a) reeds voorkomen en aan $s_{\overline{n}|\,\overline{o}|}$ en $a_{\overline{n}|\,\overline{o}|}$ ook de goede beteekenis wordt toegekend. Toch is ook daar de substitutie $r = 1$ niet juist behandeld.

[2]) l. c. p. 41.

HOOFDSTUK III.

AFGELEIDEN VAN ANNUÏTEITEN EN HARE TOEPASSING VOOR BENADERING VAN DEN RENTEVOET.

§ 1. Inleiding.

De algemeene beschouwingswijze van de waarde van een reeks periodieke betalingen heeft in het tweede hoofdstuk geleid tot invoering der algemeene symbolen voor annuïteiten van hoogere klasse:

$$(Da)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},\ (Ia)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},\ (Ds)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},\ (Is)_{\overline{n}|\,\overline{p}|},$$

waarmee correspondeeren de annuiteiten van hoogere orde:

$$[Da]_{\overline{n}|\,\overline{p}|},\ [Ia]_{\overline{n}|\,\overline{p}|},\ [Ds]_{\overline{n}|\,\overline{p}|},\ [Is]_{\overline{n}|\,\overline{p}|}.$$

Hiernaast bestaan dan nog dergelijke symbolen, waarin de cursieve lettertypen a en s door de niet cursieve a en s zijn vervangen. Wij willen thans de afgeleiden van deze hoogere annuiteiten onderzoeken. Zij hebben vooreerst een theoretische belangwekkendheid, die bijvoorbeeld tot uiting komt in de ook door Todhunter in zijn Textbook [1]) opgenomen betrekking:

$$a_{\overline{n}|\,i+h} = a_{\overline{n}|} - h\,[I_a]_{\overline{n+1}|\,\overline{2}|} + h^2\,[Ia]_{\overline{n+2}|\,\overline{3}|} - \ldots \text{ etc.}$$

welke met behulp van de reeks van Taylor wordt afgeleid. Hierin stelt h een geringe afwijking van den rentevoet i voor.

De afgeleiden vinden echter ook een practische toepassing.

Bij het oplossen van vraagstukken, die op de theorie der rente

[1]) I. p. 203. form. (14).

betrekking hebben, zal men namelijk somtijds moeten zoeken naar een waarde van r, die voldoet aan de vergelijking:

$$\Phi(n, r) = k,$$

waarin n en k bekende constanten en r een onbekenden rentevoet voorstelt, terwijl de aard van Φ het onmogelijk maakt om r expliciet in n en k uit te drukken.

Heeft men hierbij te doen met een bijzondere functie F, waarvan de waarden voor verschillende bijdragen van n en r in tafels verzameld zijn, of, zoo noodig, gemakkelijk verzameld kunnen worden, dan kan men door middel dezer tafels steeds twee waarden r_1 en r_2 zóódanig bepalen, dat:

$$F(n, r_1) < F(n, r) < F(n, r_2).$$

Door interpolatie is hieruit een benaderde waarde van r te vinden.

Laat bijvoorbeeld gevraagd worden naar welken rentevoet men een postnumerando annuiteit met 20 jarigen duur moet disconteeren, opdat de contante waarde 14 zij. Men vindt nu met behulp eener annuiteitentafel:

$$a_{\overline{20}|\,3{,}75} < a_{\overline{20}|\,r} < a_{\overline{20}|\,3{,}5}$$

Hieruit volgt bij benadering:

$$r = 3{,}5 + 0{,}25\,\frac{a_{\overline{20}|\,3{,}5} - 14}{a_{\overline{20}|\,3{,}5} - a_{\overline{20}|\,3{,}75}}.$$

Als een tweede voorbeeld stellen wij de vraag, naar welken rentevoet men de gegeven premien eener spaarpensioenverzekering, welke jaarlijks afnemen met p per eenheid van de bruto eerstejaarspremie P, moet disconteeren, opdat het postnumerando pensioen van 1 in C overgaat. [1]) Onder spaarpensioenverzekering verstaan wij een verzekering,

---

[1]) Een dergelijke kwestie kan zich voordoen, wanneer aan een verzekeraar in geval van concurrentie de vraag wordt gesteld of hij bereid is om voor een bepaalde premie in afwijking van zijn tarief een bepaald pensioen te verzekeren. Hij kan zich dan den eisch stellen dat de hier gezochte rentevoet, waarnaar hij zich de premies gedisconteerd moet denken opdat het pensioen

gesloten ten behoeve van een x jarige, waardoor deze op den leeftijd $x + n$ een pensioen zal genieten, terwijl gedurende den tijd van x tot $x + n$ geen rekening gehouden wordt met sterftekans, zoodat volgens de formule de betaalde premien ten allen tijde kunnen worden teruggegeven.

Het antwoord op de vraag wordt gegeven door de vergelijking:

$$\left\{a_{\overline{n}|r} - p\,(Ia)_{\overline{n-1}|r}\right\} P = {}_{n|}a_x^{(b)} \,.\, C.$$

Hierin stelt ${}_{n|}a_x^{(b)}$ vóór de netto koopsom van een pensioen ter grootte één, vermeerderd met de contante waarde van den opslag op de premien. Men heeft dus r te bepalen uit:

$$a_{\overline{n-1}|r} - p\,(Ia)_{\overline{n-1}|r} = K,$$

waarin p en K gegeven constanten zijn, en wel:

$$K = \frac{{}_{n|}a_x^{(b)}\, C}{P} - 1.$$

De oplossing kan nu ook weer gevonden worden door middel van interpolatie, doch men kan deze methode niet volgen wanneer men een grootere nauwkeurigheid wil bereiken dan mogelijk is met behulp van de tafels waarover een ieder gewoonlijk beschikt. [1])

Een tweede methode bestaat dáárin, dat men stelt:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad F(n, r) = F(n, r_1 + h) = k.$$

Hierin moet r dan zoodanig gekozen worden, dat zoo goed mogelijk voldaan wordt aan:

$$F(n, r) = F(n, r_1).$$

Ontwikkeling van (1) volgens de reeks van Taylor:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad f(x + h) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{h^p}{p!} D^p f(x),$$

---

de vergrooting $C - 1$ kan ondergaan, niet daalt beneden een zekere grens. Met het stellen dezer vraag in theorie is geen pleidooi voor afwijking van tarieven bedoeld.

[1]) Voor de berekening van $(Ia)_{\overline{n|}}$ zie men Hoofdstuk II, § 4, form. (4a).

waarin $D^p f(x)$ de p^{de} afgeleide van $f(x)$ naar x voorstelt, geeft als eerste benadering:

$$k = F(n, r_1) + h\, D\, F(n, r_1);$$

zoodat:

$$r = r_1 + h = r_1 + \frac{k - F(n, r_1)}{D\, F(n, r_1)}.$$

Meer nauwkeurige waarden van h verkrijgt men door de reeks na den l^{den} differentiaalterm af te breken. De te maken fout kan geschat worden door op te merken, dat het verwaarloosde stuk der reeks gelijk is aan:

$$\frac{h^{l+1}}{(l+1)!} D^{l+1} F(n, r_1 + \vartheta h),$$

waarbij:

$$1 > \vartheta > 0.$$

De berekening van h zal het gemakkelijkst kunnen geschieden, wanneer de achtereenvolgende afgeleiden van $F(n, r_1)$ op eenvoudige wijze met $F(n, r_1)$ zelf of met andere dergelijke functies samenhangen.

In verband hiermede willen wij nagaan, in hoeverre deze samenhang bestaat voor de contante waarden van hoogere annuïteiten, en den vorm bepalen, die de reeks van TAYLOR door substitutie der gevonden uitdrukkingen in eenige bijzondere gevallen aanneemt.

Wij merken nog op, dat voor $l > 2$ de hier volgende beschouwingen weinig practisch belang hebben, daar men in dat geval h zou moeten bepalen door middel van hoogere machtsvergelijkingen in h, terwijl ons een andere benaderingswijze met voldoende nauwkeurigheid ten dienste staat.

§ 2. AFGELEIDEN VAN MACHTREEKSEN, WELKE IN BETREKKING STAAN TOT HOOGERE ANNUÏTEITEN.

Bij hoogere annuïteiten wordt de grootte der uitkeeringen aangewezen door de reeks der figuurlijke getallen van een zekere

orde. Men verstaat hieronder, gelijk in het tweede hoofdstuk is vermeld, getallen, die voldoen aan de betrekking:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad t_{\overline{p|}\,\overline{q|}} = \sum_{s=1}^{s=p-1} t_{\overline{s|}\,\overline{q-1|}},$$

waarbij $t_{\overline{p|}\,\overline{q|}}$ de p^{de} term van de q^{de} orde aanduidt.

Iedere term van de reeks van de eerste orde is 1, terwijl volgens (3) iedere term van de reeks van een willekeurige orde gelijk is aan de som van de voorafgaande termen van de voorafgaande orde.

Men heeft:

$$t_{\overline{p|}\,\overline{1|}} = 1,$$

$$t_{\overline{q|}\,\overline{q|}} = 1,$$

$$t_{\overline{p|}\,\overline{q|}} = 0 \text{ voor } p < q,$$

$$t_{\overline{p|}\,\overline{q|}} = t_{\overline{p-1|}\,\overline{q|}} + t_{\overline{p-1|}\,\overline{q-1|}},$$

$$t_{\overline{p|}\,\overline{q|}} = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{(q-1)!},$$

$$(4) \quad t_{\overline{p+1|}\,\overline{q+1|}} = \binom{p}{q} = \binom{p}{p-q} = t_{\overline{p+1|}\,\overline{p-q+1|}}.$$

In (4) is $\binom{p}{q}$ de bekende schrijfwijze voor de q^{de} binomiaalcoëfficiënt in de ontwikkeling van $(a+b)^p$, als men de coëfficiënt die 1 is, niet meêrekent.

Voorts is:

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D^q x^p = q! \binom{p}{q} x^{p-q},$$

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad D^q \frac{1}{x^p} = (-1)^q q! \binom{p+q-1}{q} \frac{1}{x^{p+q}}.$$

De binominaalcoëfficiënten of figuurlijke getallen treden dus zoowel bij herhaalde sommatie als bij herhaalde differentatie van machten van den veranderlijke op.

Heeft men nu een machtreeks van de gedaante:

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad H\left(\frac{1}{x}\right)_n = \sum_1^n \frac{1}{x^m},$$

en stelt men:

$$H^2\left(\frac{1}{x}\right)_n = \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{x^q},$$

dan verloopt deze reeks als volgt:

$$H^2\left(\frac{1}{x}\right)_n = \frac{n}{x} + \frac{n-1}{x^2} + \ldots \text{ etc.} \ldots + \frac{1}{x^n}.$$

Wordt in het algemeen een m-voudige sommatie voorgesteld door Σ^m, dan kan men met behulp van (3) en (7) voor:

$$H^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = \Sigma^m\left(\frac{1}{x}\right)^n$$

schrijven:

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad H^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{t_{\overline{m+n-p|}\,\overline{m|}}}{x^p},$$

zoodat krachtens (6):

$$(9) \quad D^q H^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^q \frac{q!}{x^q} \sum_{p=1}^{p=n} t_{\overline{p+q|}\,\overline{p|}}\, t_{\overline{m+n-p|}\,\overline{m|}} \frac{1}{x^p}.$$

Leest men in (7) de termen van rechts naar links en stelt men:

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad G\left(\frac{1}{x}\right)_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{x^{n-p+1}},$$

dan wordt:

$$G^2\left(\frac{1}{x}\right)_n = \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{x^{n-q+1}},$$

$$G^2\left(\frac{1}{x}\right)_n = \frac{n}{x^n} + \frac{n-1}{x^{n-1}} + \ldots \text{ etc.} \ldots + \frac{1}{x}.$$

Algemeen:

$$(11). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad G^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{t_{\overline{p+m-1|}\,\overline{m|}}}{x^p},$$

$$(12). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad G^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = \sum_{p=1}^{p=n} \binom{m+p-2}{m-1} \frac{1}{x^p},$$

waarbij te bedenken:

$$(13). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad G\left(\frac{1}{x}\right)_n = H\left(\frac{1}{x}\right)_n.$$

Nu geeft volgens (6) een m-voudige differentiatie van (10):

$$D^m G\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^m m! \sum_{p=1}^{p=n} \binom{m+n-p}{m} \frac{1}{x^{m+n-p+1}},$$

of, als men $n-p+1$ door p vervangt en de grenzen omkeert:

$$D^m G\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^m m! \sum_{p=1}^{p=n} \binom{m+p-1}{m} \frac{1}{x^{m+p}}.$$

Met behulp van (12) vindt men hieruit:

$$(14). \quad . \quad . \quad D^m G\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^m \frac{m!}{x^m} G^{m+1}\left(\frac{1}{x}\right)_n,$$

$$(15). \quad . \quad G^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^{m-1} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} D^{m-1} G\left(\frac{1}{x}\right)_n.$$

Volgens den regel van LEIBNITZ:

$$(16) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D^q (u\,v) = \sum_{p=0}^{p=q} \binom{q}{p} D^p u \; D^{q-p} v$$

heeft men nu:

$$D^q G^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^{m-1} \sum_{p=0}^{p=q} \binom{q}{p} \frac{x^{m-p-1}}{(m-p-1)!} D^{q+m-p-1} G\left(\frac{1}{x}\right)_n,$$

$$D^q G^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^{m-1} \sum_{p=m-q}^{p=m} \binom{q}{m-p} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} D^{q+p-1} G\left(\frac{1}{x}\right)_n,$$

of door (14):

(17)

$$D^q G^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^m \, q \frac{q!}{x^q} \sum_{p=m-q}^{p=m} (-1)^p \binom{q}{m-p} \binom{p+q-1}{q} G^{p+q}\left(\frac{1}{x}\right)_n.$$

Voor $m = 1$ wordt de tweede binominaalcoëfficiënt alleen niet nul voor $p = m$; de formule gaat dan behoorlijk in (14) over.

Uit (14) volgt nog:

$$D^q\left\{\frac{1}{x^{m-1}}\,G^m\left(\frac{1}{x}\right)_n\right\} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\,D^{q+m-1}\,G\left(\frac{1}{x}\right)_n,$$

of, als men stelt:

$$(18). \quad \ldots \quad \frac{1}{x^{m-1}}\,G^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = K^m\left(\frac{1}{x}\right)_n,$$

$$D^q\,K^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^q\,\frac{(q+m-1)!}{(m-1)!}\,\frac{1}{x^{q+m-1}}\,G^{q+m}\left(\frac{1}{x}\right)_n;$$

zoodat volgens (18):

$$(19). \quad D^q\,K^m\left(\frac{1}{x}\right)_n = (-1)^q\,q!\binom{q+m-1}{q}\,K^{q+m}\left(\frac{1}{x}\right)_n.$$

Voor $m = 1$ gaat deze betrekking weêr in (14) over.

§ 3. Afgeleiden van contante waarden van klimmende hoogere annuïteiten.

Onder een annuïteit van de klasse m verstaan wij een annuïteit, waarvan de achtereenvolgende uitkeeringen gelijk zijn aan de figuurlijke getallen van de orde m. Wij tellen hierbij de termen, die nul zijn, wèl meê voor het bepalen der rangnummers van de overige termen, doch kennen er verder geen invloed aan toe. Zoo heeft een annuïteit van de m^{de} klasse met een duur van n jaar n termen, die de rangnummers m tot $m + n$ hebben.

Laat men in de vroeger [1]) afgedrukte tabel der figuurlijke getallen de termen, die nul zijn, geheel weg, en schuift men de kolommen zoo ver mogelijk naar boven, dan krijgt men den

---

[1]) Hoofdstuk II, § 4.

Klügel, Mathem. Wörterbuch, I, p. 310, gebruikt de tabel in dezen vorm onder „Binomiaalcoëfficiënten", doch bezigt onder „Figurirte Zahlen" den driehoek van Pascal, door verdere invulling der rijen tot een rechthoek vervormd, (II, p. 245).

bekenden driehoek van PASCAL [1]), waarin nu de correspondeerende rijen en kolommen, dat wil zeggen getallen op telkens twee lijnen evenwijdig aan de beide rechthoekzijden en even ver verwijderd van het hoekpunt van den rechten hoek, gelijk zijn. Gewoonlijk worden de rechthoekszijden als opstaande zijden geschreven.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Annuïteiten van hoogere klasse zijn dus te definieeren als annuïteiten, waarvan de achtereenvolgende uitkeeringen aangewezen worden door een rij of kolom uit den driehoek van PASCAL. Dat wij bij het aangeven van het nummer van een term steeds rekening houden met de plaats, die zij in de oorspronkelijke opstelling (d.i. vóór de verschuiving) had, geschiedt om het verband te bewaren met de annuïteiten van hoogere orde [2]). Hieronder worden annuï-

---

[1]) Traité du triangle arithmétique. Paris. 1665. Zie ook: Ouevres Complètes de Blaise Pascal. Tome Troisième. Paris. Librairie Hachette. 1872. p. 243. Voor meerdere getalwaarden zie men de boven in den noot aangehaalde plaatsen bij KLÜGEL. Volgens de Enc. der Math. Wiss. I, 2, (p. 1077) komt een tafel der binomiaalcoëfficiënten tot $\binom{40}{21}$ vóór in H. GYLDÉN. Recueil des Tables. Stockh., Astron. Iaktt.,. I (1880).

[2]) Textbook, I, p. 44. Ten aanzien van $[Ia]^{\overline{n}|}$ werd in een noot van Hoofdstuk 2, § 3., de opmerking gemaakt, dat sommatie naar de orde der annuïteit een annuïteit oplevert, waarvan iedere uitkeering het dubbele is van de voorafgaande. De oorzaak hiervan is, dat bij de resulteerende annuïteit de achtereenvolgende uitkeeringen gevormd worden door de sommen van de getallen, die zich in den driehoek van PASCAL op de lijnen evenwijdig aan de hypothenusa bevinden, dat is dus aan de sommen van de binomiaalcoëfficiënten in de ontwikkeling van $(a + b)^p$ voor de verschillende waarden van p. De

teiten verstaan, waarvan de uitkeeringen dezelfde grootte hebben als bij de annuïteiten van hoogere klasse, doch waarbij nu de uitkeeringen van de groote nul denzelfden rol spelen als de overige uitkeeringen.

Duidt men als voren de contante waarde eener klimmende annuïteit aan door I, die eener dalende door D, en onderscheidt men een annuïteit van een bepaalde klasse van die der correspondeerende orde door het gebruik van ( ) in plaats van [ ], dan is vooreerst:

$$(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = \sum_{p=1}^{p=n} v^p\, t_{\overline{n+m-p}|\,\overline{m}|},$$

$$(I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = \sum_{p=1}^{p=n} v^p\, t_{\overline{m+p-1}|\,\overline{m}|}.$$

Door de substitutie:

$$x = 1 + i = \frac{1}{v}$$

volgt hieruit in verband met (8) en (11):

(20) . . . . . $H^m(v)_n = (D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{m}|}$,

(21) . . . . . $G^m(v)_n = (I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{m}|}$.

Verder is:[1])

$$[I\,a]_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = v^{m-1}\,(I\,a)_{\overline{n-m+1}|\,\overline{m}|},$$

$$[D\,a]_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = (D\,a)_{\overline{n-m+1}|\,\overline{m}|};$$

zoodat:

(22) . . . . $v^{m-1}\,(I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = [I\,a]_{\overline{n+m-1}|\,\overline{m}|}$,

(23) . . . . $(D\,a)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = [D\,a]_{\overline{n+m-1}|\,\overline{m}|}$.

Uit (18), (21) en (22) volgt:

(24) . . . . . $K^m(v)_n = [I\,a]_{\overline{n+m-1}|\,\overline{m}|}$

---

eerste 101 uitkeeringen van een dergelijke annuïteit zijn te vinden bij P. A. Violeine, Nouvelles Tables pour les calculs d'Intérêts. Paris 1832, p. 19. De 101e uitkeering, d.i. 2^{100}, vormt een getal van 31 cijfers.

[1]) Hoofdstuk II, § 4.

De boven gevonden vormen (17) en 19) voor de hoogere afgeleiden van G en K wijzen in verband met (21) en (24) aan, dat de afgeleiden van $(I\,a)_{\overline{n|}\,\overline{m|}}$ en $[I\,a]_{\overline{n|}\,\overline{m|}}$ op eenvoudige wijze samenhangen met deze functies zelf. Een dergelijk verband bestaat niet voor de afgeleiden van $(D\,a)_{\overline{n|}\,\overline{m|}}$ en $[D\,a]_{\overline{n|}\,\overline{m|}}$.

Volgens (17) en (21) heeft men:

$$(25)\quad D^q (Ia)_{\overline{n|}\,\overline{m|}} = (-1)^{m-q}\, q!\, v^q \sum_{p=m-q}^{p=m} (-1)^p \binom{q}{m-p} \binom{p+q-1}{q} (Ia)_{\overline{n|}\,\overline{p+q|}}.$$

Voor $m = 1$ wordt (25):

$$(26)\quad \ldots \quad D^q\, a_{\overline{n|}} = (-1)^q\, q!\, v^q\, (Ia)_{\overline{n|}\,\overline{q+1|}}.$$

Derhalve:

$$D\,a_{\overline{n|}} = -\,v\,(I\,a)_{\overline{n|}}\ ^{1}),$$

$$D^2\,a_{\overline{n|}} = 2\,v^2\,(I\,a)_{\overline{n|}\,\overline{3|}}.$$

Wijkt de rentevoet een klein bedrag h af van den rentevoet i, dan wordt dus de reeks van Taylor (2):

(27)

$$(Ia)_{\overline{n|}\,\overline{m|}\,i+h} = (-1)^m \sum_{q=0}^{q=\infty} (-v.h)^q \sum_{p=m-q}^{p=m} (-1)^p \binom{q}{m-p} \binom{p+q-1}{q} (Ia)_{\overline{n|}\,\overline{p+q|}}.$$

Voor $m = 1$ bestaat de tweede som slechts uit den term $p = m$, zoodat:

$$(28)\quad \ldots \quad a_{\overline{n|}\,i+h} = \sum_{q=0}^{q=\infty} (-v\,h)^q\,(I\,a)_{\overline{n|}\,\overline{q+1|}},$$

wat met behulp van (22) om te zetten is in de bekende [2]) betrekking:

$$(29).\quad \ldots \quad a_{\overline{n|}\,i+h} = a_{\overline{n|}} - h\,[I\,a]_{\overline{n+1|}\,\overline{2|}} + h^2\,[I\,a]_{\overline{n+2|}\,\overline{3|}} \ldots \text{etc.} \ldots$$

Uit (28) volgt als eerste benadering:

---

[1]) $(Ia)_{\overline{n|}}$ is de gebruikelijke schrijfwijze voor $(Ia)_{\overline{n|}\,\overline{2|}}$.

[2]) Vgl. § 1.

$$a_{\overline{n}|\,i+h} = a_{\overline{n}|} - v \,.\, h\,(I\,a)_{\overline{n}|}\,,$$

wat door middel van:

$$(30) \ldots\ldots (I\,a)_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)\,a_{\overline{n}|} - n\,v^n}{i} \quad ^{1})$$

overgaat in de benaderingsformule:

$$(31) \ldots\ldots a_{\overline{n}|\,i+h} = a_{\overline{n}|} - h\,\frac{a_{\overline{n}|} - n\,v^{n+1}}{i},$$

welke in den vorm (29) door TODHUNTER [2]) op andere wijze is afgeleid, terwijl zij overigens ook rechtstreeks voortvloeit uit de reeks van TAYLOR en eenvoudige differentiatie van $a_{\overline{n}|}$ [3]).

Ter berekening van h kan men voor (31) schrijven:

$$(32) \ldots\ldots h = i\,\frac{a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|\,i+h}}{a_{\overline{n}|} - n\,v^{n+1}}$$

De substitutie $m = 2$ in (25) geeft:

$$(33) \quad D^q\,(I\,a)_{\overline{n}|} = (-v)^q\,q!\,\{(q+1)\,(I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{q+2}|} - q\,(I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{q+1}|}\}\,.$$

Derhalve:

$$D\,(I\,a)_{\overline{n}|} = -v\,\{2\,(I\,a)_{\overline{n}|\,\overline{3}|} - (I\,a)_{\overline{n}|}\}\,,$$

---

[1]) Hoofdstuk II, § 4, form. (4a).

[2]) Textbook, I, p. 110.

[3]) Aldus bij E. DANIELE, „Sopra un caso particolare di determinazione del tasso di una rendita certa" in Bollettino della Associazione Italiana per l'Incremento della Scienza degli Attuari, N°. 21. Maggio 1909, p. 3.

De aldaar in een noot gemaakte opmerking: „Naturalmente non solo la prima, ma tutte le derivate successive di fn (i. e. $a_{\overline{n}|}$) saranno esprimibili mediante la fn stessa", vormde mede de aanleiding tot dit algemeene onderzoek naar deze en dergelijke hoogere afgeleiden. De mogelijkheid, om alle afgeleiden van $a_{\overline{n}|}$ in $a_{\overline{n}|}$ zelf uit te drukken, blijkt uit (26) in verband met de recursieformule (36), en zoo ten aanzien van $(I\,a)_{\overline{n}|}$ uit (33) en (36). Deze uitdrukkingen leveren echter niets merkwaardigs op.

$$D^2 (I a)_{\overline{n}|} = 2 v^2 \{3 (I a)_{\overline{n}|\overline{4}|} - 2 (I a)_{\overline{n}|\overline{3}|}\}.$$

Voor $m = 2$ gaat (27) over in:

$$(34) \quad (Ia)_{\overline{n}|\, i+h} = \sum_{q=0}^{q=\infty} (-v.h)^q \{(q+1)(Ia)_{\overline{n}|\overline{q+2}|} - q (I a)_{\overline{n}|\overline{q+1}|}\},$$

waaruit men als eerste benadering vindt:

$$(35) \quad . \quad . \quad (I a)_{\overline{n}|\, i+h} = (I a)_{\overline{n}|} - v.h \{2 (I a)_{\overline{n}|\overline{3}|} - (I a)_{\overline{n}|}\}.$$

Ter herleiding van de voorkomende grootheden $(I a)_{\overline{n}|\overline{m}|}$ voor $m > 2$ kan men gebruik maken van de recursieformule:

$$(36) \quad . \quad . \quad (Ia)_{\overline{n}|\overline{m}|} = \frac{1}{d} (Ia)_{\overline{n}|\overline{m-1}|} - \frac{v^n}{i} t_{\overline{n+m-1}|\overline{m}|}\ ^1),$$

waaruit voor $m = 3$ volgt:

$$(I a)_{\overline{n}|\overline{3}|} = \frac{1}{d} (I a)_{\overline{n}|} - \frac{v^n}{i} t_{\overline{n+2}|\overline{3}|}.$$

Hierin is volgens (4):

$$(37) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad t_{\overline{n+2}|\overline{3}|} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Formule (35) wordt nu:

$$(Ia)_{\overline{n}|\overline{i+h}|} = (Ia)_{\overline{n}|} - h \left\{ \left(\frac{2}{d} - 1 \right) v (Ia)_{\overline{n}|} - n (n+1) \frac{v^{n+1}}{i} \right\},$$

of:

$$(38) \quad (Ia)_{\overline{n}|\, i+h} = (Ia)_{\overline{n}|} - \frac{h}{i} \{(1+v)(Ia)_{\overline{n}|} - n (n+1) v^{n+1}\}$$

Ter berekening van h kan men hiervoor schrijven:

$$(39) \quad . \quad . \quad . \quad h = i \frac{(I a)_{\overline{n}|} - (I a)_{\overline{n}|\, i+h}}{(1+v)(I a)_{\overline{n}|} - n (n+1) v^{n+1}}.$$

---

[1]) Hoofdstuk II, § 4, form. (6 s), vermenigvuldigd met v^n.

De overeenkomst, die deze formule vertoont met (32), zal in zekeren zin bestaan tusschen alle waarden van h, die men vindt door in (27) voor m ook waarden, grooter dan 2 te substitueeren.

Het is duidelijk, dat men (38) rechtstreeks kan vinden door middel van de reeks van TAYLOR en eenvoudige differentiatie van $(Ia)_{\overline{n}|}$.

Ten aanzien van de klimmende annuïteiten van hoogere orde volgt uit (19) en (24):

$$D^q [Ia]_{\overline{n+m-1}|\,\overline{m}|} = (-1)^q q! \binom{q+m-1}{q} [Ia]_{\overline{n+m+q-1}|\,\overline{m+q}|},$$

$$(40). \quad D^q [Ia]_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = (-1)^q q! \binom{q+m-1}{q} [Ia]_{\overline{n+q}|\,\overline{m+q}|}.$$

Hieruit:

$$D^q [Ia]_{\overline{n}|} = (-1)^q (q+1)! [Ia]_{\overline{n+q}|\,\overline{q+2}|},$$

zoodat:

$$D\,[Ia]_{\overline{n}|} = -2\,[Ia]_{\overline{n+1}|\,\overline{3}|},$$

$$D^2 [Ia]_{\overline{n}|} = 6\,[Ia]_{\overline{n+2}|\,\overline{4}|}.$$

De reeks van TAYLOR wordt:

$$(41) \quad [Ia]_{\overline{n}|\,\overline{m}|\,i+h} = \sum_{q=0}^{q=\infty} (-h)^q \binom{q+m-1}{q} [Ia]_{\overline{n+q}|\,\overline{m+q}|}.$$

Voor $m=1$ gaat deze betrekking over in (29).

Dezelfde substitutie zet (40) om in:

$$(42). \quad . \quad . \quad . \quad D^q a_{\overline{n}|} = (-1)^q q! [Ia]_{\overline{n+q}|\,\overline{q+1}|},$$

waaruit de bekende [1]) formule:

$$[Ia]_{\overline{n}|\,\overline{q}|} = \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} D^{q-1} a_{\overline{n-q+1}|}$$

teruggevonden wordt.

---

[1]) Textbook, I, p. 203.

Voor $m = 2$ geeft (41) als eerste benadering:

$$(43) \quad . \quad . \quad . \quad [Ia]_{\overline{n}|\,i+h} = [Ia]_{\overline{n}|} - 2\,h\,[Ia]_{\overline{n+1}|\overline{3}|},$$

waartoe men ook onmiddellijk geraakt door in de afgebroken reeks van TAYLOR te substitueeren:

$$D\,[Ia]_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = -m\,[Ia]_{\overline{n+1}|\,\overline{m+1}|}\ ^{1}),$$

Deze betrekking vindt men door in (40) $q = 1$ te stellen.

Nu volgt uit de recursieformule:

$$(44) \quad . \quad . \quad . \quad [Ia]_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = \frac{[Ia]_{\overline{n}|\,\overline{m-1}|} - v^n\,t_{\overline{n+1}|\,\overline{m}|}}{i},\ ^{2}),$$

in verband met (37):

$$[Ia]_{\overline{n+1}|\overline{3}|} = \frac{2\,[Ia]_{\overline{n+1}|} - n\,(n+1)\,v^{n+1}}{2\,i};$$

zoodat men voor (43) schrijven kan:

$$[Ia]_{\overline{n}|\,i+h} = [Ia]_{\overline{n}|} - \frac{h}{i}\left\{2\,[Ia]_{\overline{n+1}|} - n\,(n+1)\,v^{n+1}\right\},$$

$$(45) \qquad [Ia]_{\overline{n}|\,i+h} = [Ia]_{n} - \frac{h}{i}\left\{2\,Ia]_{\overline{n}|} - n\,(n-1)\,v^{n+1}\right\}.$$

Hieruit:

$$(46) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad h = i\,\frac{[Ia]_{\overline{n}|} - [Ia]_{\overline{n}|\,i+h}}{2\,[Ia]_{\overline{n}|} - n\,(n-1)\,v^{n+1}}.$$

§ 4. AFGELEIDEN VAN CONTANTE WAARDEN VAN DALENDE HOOGERE ANNUÏTEITEN.

In het voorafgaande is het mogelijk gebleken om de reeks van TAYLOR in betrekkelijk eenvoudigen vorm te brengen voor de contante waarden der gewone annuïteit en van de klimmende annuïteiten van hoogere orde en van hoogere klasse, waaruit dan bij gegeven contante waarden den onbekenden rentevoet benaderd kan worden.

---

[1]) Textbook I, p. 202.

[2]) Hoofdstuk II, § 4, form. (13a).

Bij het zoeken naar eene uitdrukking voor de hoogere afgeleiden van de contante waarden van dalende annuïteiten van hoogere orde of van hoogere klasse, die blijkens (20) en (23) in verband staan met reeksen van gedaante $H^m\left(\frac{1}{x}\right)_n$, stuiten wij evenwel in (9) op een vorm, waaruit het verband met $H^m\left(\frac{1}{x}\right)_n$ en zijn afgeleiden niet blijkt.

Men kan hier echter als volgt te werk gaan.

Uit:

$$(47) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Da)_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i} \quad ^1)$$

en (16) volgt:

$$D^q (Da)_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{k=q} \binom{q}{k} D^{q-k}\left(\frac{1}{i}\right) D^k (n - a_{\overline{n}|}).$$

Een $(m-2)$-voudige sommatie naar n geeft:

$$D^q (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = \sum_{k=0}^{k=q} \binom{q}{k} D^{q-k}\left(\frac{1}{i}\right) D^k \left\{ t_{\overline{n+m-1}|\,\overline{m}|} - (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m-1}|} \right\},$$

of, volgens de door $(m-2)$-voudige sommatie van (47) te verkrijgen formule:

$$(48) \quad . \quad . \quad . \quad (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = \frac{t_{\overline{n+m-1}|\,\overline{m}|} - (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m-1}|}}{i},$$

$$D^q (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = i (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} D^q\left(\frac{1}{i}\right) - \sum_{k=1}^{k=q} \binom{q}{k} D^{q-k}\left(\frac{1}{i}\right) D^k (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m-1}|}.$$

Krachtens (6) komt er:

$$(49) \quad D^q (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} = \left(\frac{-1}{i}\right)^q q! (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m}|} + \sum_{k=0}^{k=q} \left(\frac{-1}{i}\right)^{q-k+1} \frac{q!}{k!} D^k (Da)_{\overline{n}|\,\overline{m-1}|}.$$

Deze reductieformule zet de afgeleiden van dalende annuïteiten van de m^{de} klasse om in de annuïteiten zelf van gelijke klasse en

---

^{1}) Hoofdstuk II, § 4, form. (3a),

in de afgeleiden van de annuïteiten van lagere klasse. Zij maakt het evenwel niet mogelijk om de reeks van TAYLOR voor $(Da)_{\overline{n}|\,\overline{m}}$ in eenvoudigen vorm voor te stellen.

Voor $m = 1$ wordt:

$$(Da)_{\overline{n}|\,\overline{m-1}|} = A_{\overline{n}|} = v^n,$$

daar immers de klasse eener annuïteit niets anders voorstelt dan het aantal keeren, dat men v^n naar n heeft gesommeerd. [1])

Uit (49) volgt dus:

$$D^q a_{\overline{n}|} = \left(\frac{-1}{i}\right)^q q!\, a_{\overline{n}|} + \sum_{k=1}^{k=q} \left(\frac{-1}{i}\right)^{q-k+1} q! \binom{n+k-1}{k} v^{n+k} (-1)^k k,$$

$$(50) \quad D^q a_{\overline{n}|} = \left(\frac{-1}{i}\right)^q q! \left\{ a_{\overline{n}|} - \sum_{k=1}^{k=q} i^{k-1} \binom{n+k-1}{k} v^{n+k} \right\}$$

Hieruit:

$$(51). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D\, a_{\overline{n}|} = -\frac{1}{i}\,(a_{\overline{n}|} - n\, v^{n+1}) \quad [2]),$$

$$(52) \quad . \quad . \quad D^2 a_{\overline{n}|} = \frac{2}{i^2} \left\{ a_{\overline{n}|} - n\, v^{n+1} - \frac{n\,(n+1)\,i}{2}\, v^{n+2} \right\}.$$

Voor $m = 2$ geeft (49):

$$D^q (D\, a)_{\overline{n}|} = \left(\frac{-1}{i}\right)^q q! \left\{ (D\, a)_{\overline{n}|} + \sum_{k=1}^{k=q} \frac{(-i)^{k-1}}{k!}\, D^k a_{\overline{n}|} \right\},$$

of, in verband met (42):

$$D_q (D\, a)_{\overline{n}|} = \left(\frac{-1}{i}\right)^q q! \left\{ (D\, a)_{\overline{n}|} - \sum_{k=1}^{k=q} i^{k-1} [I\, a]_{\overline{n+k}|\,\overline{k+1}|} \right\}.$$

Substitutie van (22) geeft:

$$(53) \quad D^q (D\, a)_{\overline{n}|} = \left(\frac{-1}{i}\right)^q q! \left\{ (D\, a)_{\overline{n}|} - \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{k=q} d^k (I\, a)_{\overline{n}|\,\overline{k+1}|} \right\}. \quad [3])$$

---

[1]) Hoofdstuk II, § 2.

[2]) Men verwarre $D\, a_{\overline{n}|}$ niet met $(D\, a)_{\overline{n}|}$.

[3]) $d = i\, v$.

Hieruit volgt met behulp van (22):

$$(54) \quad . \quad . \quad . \quad D(Da)_{\overline{n}|} = -\frac{1}{i}\left\{(Da)_{\overline{n}|} - [Ia]_{\overline{n}|}\right\},$$

wat ook onmiddellijk uit (47) of uit een eenvoudige sommatie van (51) naar n voortvloeit.

Door middel van (47) en (30) is voor (54) te schrijven:

$$(55). \quad . \quad . \quad . \quad D(Da)_{\overline{n}|} = \frac{1}{i^2}(2\,a_{\overline{n}|} - n\,v^{n+1} - n).$$

Sommatie naar n geeft:

$$D(Da)_{\overline{n}|\,\overline{3}|} = \frac{1}{i^2}\left\{2\,(Da)_{\overline{n}|} - v\,(Ia)_{\overline{n}|} - t_{\overline{n+2}|\,\overline{3}|}\right\},$$

of, volgens (48) en (54):

$$D(Da)_{\overline{n}|\,\overline{3}|} = -\frac{1}{i}\left\{(Da)_{\overline{n}|\,\overline{3}|} + D(Da)_{\overline{n}|}\right\},$$

welke betrekking men ook kan vinden door in (49) $q = 1$ en $m = 3$ te nemen.

Voor $q = 2$ wordt (53):

$$D^2(Da)_{\overline{n}|} = \frac{2}{i^2}\left\{(Da)_{\overline{n}|} - v\,(Ia)_{\overline{n}|} - v\,.\,d\,(Ia)_{\overline{n}|\,\overline{3}|}\right\},$$

of met behulp van (36):

$$(56) \quad D^2(Da)_{\overline{n}|} = \frac{1}{i^2}\left\{2\,(Da)_{\overline{n}|} - 4\,v\,(Ia)_{\overline{n}|} + n\,(n+1)\,v^{n+2}\right\}.$$

Dezelfde formule vindt men ook gemakkelijk door differentiatie van (55) met in achtneming van (54).

Door middel van (30) en (47) kan men (56) omzetten in:

$$(57) \quad D^2(Da)_{\overline{n}|} = \frac{1}{i^2}\,n\,(n+1)\,v^{n+2} - \frac{2}{i^3}\,(3\,a_{\overline{n}|} - 2\,n\,v^{n+1} - n),$$

welke betrekking ook door rechtstreeksche differentiatie van (55) ontstaat.

Daar de hoogere afgeleiden van $(Da)_{\overline{n}|\overline{m}|}$ noch in het algemeene geval — (49) —, noch voor $m = 2$ — (53) —, een eenvoudige gedaante verkregen, zullen wij hierbij volstaan met de vermelding van de eerste benadering voor $(Da)_{\overline{n}|}$.

Volgens (2) en (54) vindt men:

$$(58) \quad . \quad . \quad (Da)_{\overline{n}|\,i+h} = (Dn)_{\overline{n}|} - \frac{h}{i}\left\{(Da)_{\overline{n}|} - [Ia]_{\overline{n}|}\right\};$$

zoodat:

$$(59) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad h = i\,\frac{(Da)_{\overline{n}|} - (Da)_{\overline{n}|\,i+h}}{(Da)_{\overline{n}|} - [Ia]_{\overline{n}|}}.$$

Daar volgens (23) $[Da]_{\overline{n}|\overline{m}|}$ slechts van $(Da)_{\overline{n}|\overline{m}|}$ verschilt wat het aantal termen, welke geen invloed hebben, aangaat, behoeft deze grootheid niet afzonderlijkte worden besproken.

§ 5. Toepassing.

Het boven aangehaalde artikel van E. Daniele geeft gelegenheid om door een voorbeeld aan te toonen, hoezeer het bij de toepassing der benaderingsformules noodig is om in het oog te houden, dat de uitkomsten der benaderingen des te onnauwkeuriger worden, naar mate h een grootere waarde heeft.

Het ter genoemder plaatse gestelde probleem luidde namelijk, overgezet in de gebruikelijke notatie: de reëele rente r te bepalen van een reeks van n periodieke uitkeeringen, wanneer de rentevoet gedurende de eerste ν jaren i, en vervolgens i_1 bedraagt.

Men vindt terstond als oplossing:

$$(60) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a_{\overline{n}|r} = a_{\overline{\nu}|\,i} + v^{\nu}\, a_{\overline{n-\nu}|\,i_1}.$$

De schrijver wenscht nu r expliciet in i, i_1, n en ν uit te drukken en stelt daartoe:

$$r = i + h.$$

De afgebroken reeks van Taylor:

$$a_{\overline{n}|\,i+h} = a_{\overline{n}|} + h\,D\,a_{\overline{n}|},$$

geeft in verband met (60):

$$h = \frac{a_{\overline{\nu}|} + v^{\nu} a_{\overline{n-\nu}|} i_1 + a_{\overline{n}|}}{D a_{\overline{n}|}},$$

of door (51):

(61). . . . . $h = i v^{\nu} \frac{a_{\overline{n-\nu}|} - a_{\overline{n-\nu}|} i_1}{a_{\overline{n}|} - n v^{n+1}}.$

Voor de waarden:

$$i = 4{,}5,\ i_1 = 5,\ n = 10 \text{ en } \nu = 4,$$

wordt gevonden:

$$h = 0{,}1771.$$

$$r = i + h = 4{,}6771.$$

Nu levert (60) op:

$$a_{\overline{10}|\,r} = 7{,}8438,$$

terwijl men met behulp van een der aan het slot dezer paragraaf te noemen tafels [1]) kan vinden:

$$a_{\overline{10}|\,4{,}625} = 7{,}8643.$$

$$a_{\overline{10}|\,4{,}75} = 7{,}8163.$$

Stellen wij dus:

$$r = 4{,}625 + h,$$

en nemen wij aan dat de rentevoet voor symbolen, waar deze niet afzonderlijk vermeld is, 4,625 bedraagt, dan is:

$$h = 4{,}625 \,.\, \frac{a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|r}}{a_{\overline{n}|} - n v^{n+1}},$$

waaruit:

$$h = 0{,}05318.$$

$$r = 4{,}67818.$$

---

[1]) Gebezigd is: V. Baerlocher. Zinseszins — etc. — Rechnung. Zürich 1885.

Neemt men:

$$r_1 = 4{,}678$$

en stelt men voor een nauwkeuriger benadering:

$$r_2 = 4{,}678 + k,$$

dan is weêr:

$$k = 4{,}678 \,.\, \frac{a_{\overline{n}|r_1} - a_{\overline{n}|r_2}}{a_{\overline{n}|r_1} - n\, v_{r_1}^{n+1}}.$$

Men vindt:

$$a_{\overline{n}|r_1} = 7{,}8439\ ^{1}),$$

$$v_{r_1}^{n+1} = 0{,}60477,$$

$$k = 0{,}00026$$

$$r_2 = 4{,}6783.$$

Maakt men gebruik van het feit, dat de complementaire logarithmen van annuïteiten met gelijken duur, waarvan de rentevoet telkens met $^1/_8$ % klimt, vrijwel een meetkundige reeks vormen [2]), dan vindt men door interpolatie eveneens:

$$r = 4{,}6783,$$

terwijl het resultaat van Daniele luidt:

$$r = 4{,}6771.$$

Neemt men aan, dat de waarde r_2 van r volkomen juist is, dan

---

[1]) Afgerond op vijf decimalen vindt men 7.84395.

[2]) Vgl. V. Baerlocher, l. c. p. 25. Tafels van de logarithmen van $(1 + i)^n$ en van de complementaire logarithmen van $a_{\overline{n}|}$ tegen een rentevoet, die van $1^1/_2$ % tot 6 % telkens met $^1/_8$ % opklimt, zijn in dit boek opgenomen. Zij zijn ontleend aan: Fedor Thoman, „Theory of compound interest and annuïties, with logarithmic tables." London, 1859. (Een Fransche uitgave, vertaald door Bouchard, verscheen te Paris in 1878, terwijl er ook een ongedateerde afzonderlijke Fransche uitgave der tafels bestaat). De tafels komen verder voor in W. Inwood. „Tables." London, 25 th. Edition, 1899, en in H. Charlon. Théorie mathématique des opérations financières. 2e Edition, Paris 1878.

bevat de door interpolatie gevonden r een fout 0,0000, terwijl zich in de r van DANIELE een fout 0,0012 bevindt.

Hieruit blijkt vooreerst, dat de aangegeven wijze van interpolatie der complementaire logarithmen tot zeer bruikbare resultaten voert; zoodat zij wegens hare beknoptheid de voorkeur boven de beide andere methoden van berekening verdient, en tevens, dat de methode van DANIELE, in tegenstelling met de door den schrijver uitgesproken meening [1],) zich niet bijzonder voor practische toepassing leent.

Zij brengt immers weliswaar de bewerking tot het naslaan van tafels en tot een weinig omvangrijke berekening terug, [2]) doch op een wijze, die slechts weinig eenvoudiger is dan die, waarop enkelvoudige toepassing der reeks van TAYLOR hetzelfde doet, want de weg, waarlangs laatstgenoemde methode leidde tot $r = 4{,}67818$, is zeker niet veel langer dan die, welke DANIELE voerde tot $r = 4{,}6771$. Vergeleken met de door voortgezette benadering gevonden waarde $r = 4{,}6783$ vindt men als fouten respectievelijk 0,0001 en 0,0012, zoodat, bij toepassing van de methode van DANIELE, de nauwkeurigheid in het hier besproken geval geringer is, en, wanneer de gezochte reëele rente ongeveer midden tusschen twee niet te dicht bijeen liggende gegeven renten inligt, zelfs véél geringer moet zijn dan de waarde, die door middel van (60) werd gevonden.

Als tafels van $a_{\overline{n}|}$ en v^n, welke dienen kunnen om de rente in te sluiten tusschen twee grenzen, die niet verder dan $^1/_8$ % uiteenliggen, komen, behalve de boven in den noot genoemde VAN BAERLOCHER, THOMAN, INWOOD en CHARLON, in aanmerking [3]):

W. H. OAKES. Tables of Compound Intrest 1877.

---

[1]) Lo scopo, come si vede, è modesto, ma ha in compenso un carattere pratico e di attualità, l. c. p. 2.

[2]) Aggiungio che la formola, che ora andremo a trovare, è di calcolo simplicissimo, renducendosi questo in buona parte a letture tabulare, l. c. p. 2

[3]) Volledige titels in het overzicht der aangehaalde litteratuur.

W. M. J. Werker. Die zusammengesetzte Zinsen und Zeitrenten oder Annuitätenrechnung II. Utrecht und Berlin 1893.

S. Spitzer. Tabellen für die Zinseszinsen und Rentenrechnung. 4e Ausgabe 1897.

A. Arnaudeau. Tables des intérêts composés, annuités et amortissements pour les taux variant de dixièmes en dixièmes. Paris, Gauthier—Villars 1906. [1])

Is men bij de bepaling van r uit:

$$a_{\overline{n}|r} = k$$

tevreden met gewone interpolatie tusschen de bovengenoemde grenzen, dan kan met vrucht gebruik maken van:

W. H. Oakes. Tables for finding the Intermediate Rates of Interest in an Annuity—Certain, 1887.

Men past als gewoonlijk toe de interpolatieformule:

$$r = i - (i - i_1)\frac{a_{\overline{n}|r} - a_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|r_1} - a_{\overline{n}|i}},$$

De tafel is ingericht voor $i - i_1 = 0{,}125$. Zij geeft de waarden van $a_{\overline{n}|}$ en van:

$$\frac{0{,}125}{a_{\overline{n}|i_1} - a_{\overline{n}|i}}$$

van $i = {}^3/_4\,\%$ door opklimming met ${}^1/_8\,\%$ tot $i = 10\,\%$.

---

[1]) Vgl. Dr. J. P. Janse. Boekbeschouwing. Archief Verz. W. IX, p. 79.

HOOFDSTUK IV.

KOERS EN RENTE.

§ 1. De Grondvergelijkingen.

In Hoofdstuk I is opgemerkt, dat het uit het oog verliezen van den gemeenschappelijken basis der politieke rekenkunde als leer der verandering van geldswaarden aanleiding kan zijn tot het inslaan van omwegen bij het oplossen van sommige vraagstukken, en werd in verband daarmee gewezen op het artikel, getiteld „Het bepalen der reëele rente van effecten", door Dr. B. Turksma.[1]) De bedoelde kwestie wordt aldaar behandeld met behulp van differentievergelijkingen, terwijl de op grond van de overeenkomst met de bepaling der reserve uit de verzekeringswiskunde te verwachten lager-algebraische oplossing niet alleen mogelijk, maar wegens hare kortheid ook verkieselijk zal blijken. Voor een critiek van de wijze, waarop de oplossing door Dr. Turksma is uitgevoerd, wordt verwezen naar mijn reeds vroeger verschenen artikel „Koers en Rente"[2]). De oplossingen zullen thans in § 2 gegeven worden, zooals zij in verband met de in laatstgenoemd artikel gemaakte opmerkingen komen te luiden, terwijl in § 3 de in § 2 besproken differentie-vergelijkingen op andere wijze worden behandeld. In § 4 volgt dan de lager-alge-

[1]) Archief Verz. W. VIII, (1906), p. 1.

[2]) Archief Verz.W. XI, (1910), p. 330. Aldaar was ten aanzien van s en s de universeele notatie gevolgd. (Vgl. noot op p. 338.) Bedoelde critiek is hier vervallen, terwijl het artikel werd omgewerkt en uitgebreid.

braische oplossing van de gestelde kwestie, terwijl het hoofdstuk met een in § 5 uitgewerkt voorbeeld wordt besloten.

Onder de reëele rente r van een leening, gesloten tegen een rentevoet i, verstaat men den rentevoet, waarnaar eene à pari uitgegeven en à pari aflosbare leening van hetzelfde bedrag gesloten had moeten worden, zóódanig, dat de naar dien rentevoet r gedisconteerde waarde van rente en aflossingen der tweede leening gelijk zijn aan de eveneens naar r gedisconteerde waarde van rente en aflossingen der eerste leening, vermeerderd of verminderd met de contante waarde van de winst of het verlies, aan de koers van uitgifte of aan de aflossing verbonden.

Het bepalen van de reëele rente bij gegeven wijze van aflossing en koers van uitgifte is te beschouwen als een bijzonder geval van de vraag naar het algemeen verband tusschen bij elkaar behoorenden koers en reëelen rentevoet, daar men zich de vergelijkingen, welke dit verband uitdrukken, in beginsel zoowel naar den koers als naar den rentevoet opgelost kan denken. Bij nadere beschouwing blijkt zich echter de vorm der vergelijkingen tegen een expliciete oplossing naar r te verzetten, terwijl oplossing naar den koers steeds mogelijk is. Men vindt nu, zooals nader zal worden aangetoond,[1]) voor den koers x uitdrukkingen welke, behalve constanten of een factor r, slechts rentefuncties bevatten, waarvan de waarde voor diverse grootten van r en n in tafels vereenigd zijn.[2]) Zóódoende kan de gezochte grootheid r ingesloten worden tusschen twee waarden r_1 en r_2, waarvoor geldt:

$$x_{r_1} < x < x_{r_2}.$$

Hierin is x de gegeven koers, terwijl x_{r_1} en x_{r_2} de waarden voorstellen welke de uitdrukking x aanneemt, wanneer daarin r respectievelijk door r_1 en r_2 wordt vervangen. Op de in Hoofdstuk III aangegeven wijze kan nu, hetzij door interpolatie, hetzij door toepassing van de reeks van Taylor, een waarde van r benaderd worden.

Het bepalen van de reëele rente bij een gegeven koers wordt op deze wijze in hoofdzaak gereduceerd tot het bepalen van den koers

---

[1]) Zie de formules (31), (32) en (33) in § 5 van dit Hoofdstuk.

[2]) Vgl. Hoofdstuk III, § 5 en Hoofdstuk VII.

bij een gegeven reëelen rentevoet, zoodat wij ons alleen met dit laatste vraagstuk zullen bezig houden.

Onder den koers x van een bedrag a, dat nog gedurende n jaar moet uitstaan tegen een reëelen rentevoet r en een nominalen rentevoet i, verstaan wij de naar r gedisconteerde contante waarde van al hetgeen per nominale eenheid van het bedrag aan rente en aflossing zal worden ontvangen.

Noemt men de aflossing per eenheid in het m^{e} jaar na het tijdstip der koersbepaling U_m, en de rente per eenheid I_m, dan wordt het verband tusschen koers en rente weergegeven door de vergelijking:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{U_m + I_m}{(1+r)^m}.$$

Hierbij is ondersteld, dat het einde van een periode van rentebetaling, waarvoor wij één jaar nemen, samenvalt met het tijdstip der koersbepaling. [1])

Wil men rekenen met den tijd q, die nog verloopen moet aleer de leening in haar geheel is afgelost, dan moet men schrijven:

$$x = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{U_{n-q+1} + I_{n-q+1}}{(1+r)^q},$$

of, als men $n - q + 1$ door q vervangt, d.w.z. de termen der reeks in omgekeerde volgorde leest:

$$x = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{U_q + I_q}{(1+r)^{n-q+1}}.$$

U_q en I_q stellen dan vóór de bedragen, welke per nominale eenheid van het nog uitstaand bedrag respectievelijk aan aflossing en rente zullen worden betaald aan het einde van het jaar, waarvan het begin q jaar verwijderd is van het tijdstip der laatste aflossing. De bedragen der laatste aflossing en rentebetaling worden in dit geval aangeduid door U_1 en I_1, in het eerste door U_n en I_n.

---

[1]) Formule (1) komt in eenigszins anderen vorm vóór in het aangehaalde artikel van Dr. Turksma, doch wordt aldaar voor het gebruik in de meeste gevallen ongeschikt geoordeeld (p. 3 en 4).

Bij de lager-algebraische oplossing der gestelde kwestie wordt in hoofdzaak alleen de eerste wijze van tijdsaanduiding gebezigd, zoodat dan ook daarvoor formule (1) als de grondvergelijking is te beschouwen. De tweede wijze van tijdsaanduiding wordt toegepast bij de oplossing door middel van differentie-vergelijkingen. De resultaten worden in beide gevallen dezelfde, omdat de oplossingen slechts functies zijn van den totalen duur n.

De grondvorm der differentie-vergelijkingen wordt als volgt afgeleid.

Laat op een tijdstip, n jaar vóór de laatste aflossing, het uitstaand bedrag 1 en de koers $F(n)$ wezen, dan is de waarde van het uitstaand bedrag eveneens $F(n)$. Daar na één jaar een reëele rente r gemaakt is, groeit deze waarde in dien tijd van $F(n)$ aan tot $(1 + r)$. $F(n)$. De nominale rente bedraagt i, terwijl de grootte van het uitgelote bedrag gelijk is aan de uitlotingskans van dat jaar, welke wij door u_n zullen voorstellen. Het bedrag, dat na de uitloting nog uitstaat, is $1 - u_n$, terwijl de waarde daarvan wordt aangegeven door:

$$(1 - u_n)\ F(n - 1).$$

Gelijkstelling der waarden aan het einde van het jaar levert op:

$$(2) \ldots (1 + r)\ F(n) = i + u_n + (1 - u_n)\ F(n - 1).$$

De oplossing der grondvergelijkingen zal worden gegeven voor drie leeningstypen, welke wij met de letters α, β en γ aanduiden, en wel:

α. Leeningen, die ineens in haar geheel worden afgelost.

β. Leeningen, waarvan door uitloting telkens een gelijk gedeelte van het oorspronkelijk bedrag wordt afgelost.

γ. Annuiteits-leeningen met interest i, waarvan de aflossingen gelijk zijn aan die van een annuiteits-leening met interest p, terwijl de reëele rente r bedraagt.

Gelijkstelling van i en p geeft de gewone annuiteits-leening, welke wij δ zullen noemen, terwijl eindelijk ook nog p en r aan elkaar gelijk gesteld kunnen worden.

§ 2. Oplossing der differentie-vergelijkingen.

In de grondvergelijking:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad (1+r)\,F(n) = i + u_n + (1-u_n)\,F(n-1)$$

heeft $F(o)$ als koers van een contant betaalbaar bedrag de waarde 1; voor alle leeningstypen is de uitlotingskans u_n in het jaar van de laatste uitloting eveneens 1, zoodat steeds geldt:

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(1) = \frac{1+i}{1+r}.$$

Tot (3) kan men ook onafhankelijk van (2) besluiten door op te merken, dat $F(1)$ de waarde moet voorstellen van de eenheid, die gedurende één jaar naar i wordt opgerent en vervolgens naar r wordt gedisconteerd.

Om uit (2) den constanten term te verwijderen stelt men:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(n) = f(n) + C,$$

en kiest C zóódanig, dat in de nieuwe vergelijking de som der constanten nul wordt. Men vindt:

$$C = \frac{i}{r}.$$

$F(n)$ moet dan opgelost worden met behulp van:

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(n) = f(n) + \frac{i}{r},$$

$$(6) \quad . \quad . \quad (1+r)\,f(n) = (1-u_n)\,f(n-1) + u_n\left(1 - \frac{i}{r}\right),$$

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(1) = \frac{1+i}{1+r} - \frac{i}{r}.$$

Leeningstype α.

De aflossing vindt in haar geheel plaats aan het einde van het jaar, waarvan het begin 1 jaar van het afloopen der leening verwijderd is, zoodat:

$$u_n = 0 \text{ voor } n > 1,$$
$$u_n = 1 \text{ voor } n = 1.$$

Voor $n > 1$ wordt (6):

(8) . . . . . $(1 + r)\, f(n) = f(n - 1).$

Voor $n = 1$ geldt (7).

De algemeene oplossing van (8) is:

$$f(n) = \frac{C}{(1 + r)^n}.$$

Uit (7) volgt dan:

$$C = 1 - \frac{i}{r},$$

(9) . . . . . $F(n) = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) \frac{1}{(1 + r)^n}.$

Leeningstype β.

Daar ieder jaar een gelijk gedeelte van het oorspronkelijke bedrag wordt afgelost, heeft men voor alle voorkomende waarden van n:

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

Formule (6) wordt na vermenigvuldiging met n:

$$n\,(1 + r)\, f(n) = (n - 1)\, f(n - 1) + 1 - \frac{i}{r}.$$

Ten einde deze vergelijking om te zetten in een met constante coefficienten stelt men:

$$n\, f(n) = \Phi\,(n),$$

(10) . . . . $(1 + r)\, \Phi(n) = \Phi(n - 1) + 1 - \frac{i}{r}.$

Uit (7) volgt:

(11) . . . . . $\Phi(1) = \frac{1 + i}{1 + r} - \frac{i}{r}.$

Voor:

$$\varphi(n) = C$$

vindt men uit (10):

$$C = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

De algemeene oplossing van (10) zonder constanten is:

$$\varphi(n) = \frac{C_1}{(1+r)^n}.$$

De algemeene oplossing van (10) wordt:

$$\varphi(n) = \frac{C_1}{(1+r)^n} + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

Uit (11) volgt:

$$C_1 = -\frac{1}{r}\left(1 - \frac{i}{r}\right),$$

$$\varphi(n) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{i}{r}\right)\left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right],$$

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{i}{r}\right)\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r},$$

(12) . . . $$F(n) = \frac{i}{r} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{i}{r}\right)\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}.$$

Leeningstype γ.

Is de aflossing gelijk aan die van een annuiteits-leening met den interest p, dan moet de uitlotingskans afzonderlijk worden bepaald.

Daar bij een annuiteits-leening de vrijgevallen rente van iedere voorafgaande aflossing gebezigd wordt voor de daaropvolgende aflossing, vormen de aflossingen een meetkundige reeks met de reden $1 + p$. Is voor een zeker jaar, waarvan het begin n jaar verwijderd is van de laatste aflossing, de uitstaande schuld k, dan is de aflossing voor dat jaar ku_n, de overblijvende schuld $k(1 - u_n)$ en de

aflossing voor het volgende jaar $k(1 - u_n)\, u_{n-1}$ Na deeling door k heeft men dus:

$$(13) \ldots\ldots\ldots (1 - u_n)\, u_{n-1} = (1 + p)\, u_n.$$

Deeling door $u_n\, u_{n-1}$ en substitutie van:

$$\frac{1}{u_n} = f(n)$$

geeft:

$$(14) \ldots\ldots\ldots f(n) - (1 + p) f(n - 1) = 1.$$

Voor:

$$f(n) = C$$

wordt:

$$C = -\frac{1}{p}.$$

De algemeene oplossing van (14) zonder constante, d. i. van:

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = 1 + p,$$

is:

$$f(n) = C_1 (1 + p)^n.$$

De algemeene oplossing van (14) wordt:

$$f(n) = C_1 (1 + p)^n - \frac{1}{p},$$

en van (13):

$$u_n = \frac{1}{C_1 (1 + p)^n - \frac{1}{p}}.$$

Uit:

$$u_1 = 1$$

volgt dan:

$$C_1 = \frac{1}{p},$$

$$u_n = \frac{p}{(1 + p)^n - 1}.$$

Substitutie in (6) geeft:

$$(1+r)f(n) = \left[1 - \frac{p}{(1+p)^n - 1}\right] f(n-1) + \\ + \frac{p}{(1+p)^n - 1}\left(1 - \frac{i}{r}\right),$$

$$(1+r)\frac{(1+p)^n - 1}{(1+p)^n} f(n) = \frac{(1+p)^{n-1} - 1}{(1+p)^{n-1}} f(n-1) + \\ + \frac{p}{(1+p)^n}\left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

Stel:

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad \frac{(1+p)^n - 1}{(1+p)^n} f(n) = \varphi(n),$$

dan wordt:

$$(16) \quad (1+r)\,\varphi(n) - \varphi(n-1) = \frac{p}{(1+p)^n}\left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

Uit (7) en (15) volgt:

$$\varphi(1) = \frac{p}{1+p}\left[\frac{1+i}{1+r} - \frac{i}{r}\right].$$

De algemeene oplossing der vergelijking zonder tweede lid is:

$$\varphi(n) = \frac{C_2}{(1+r)^n}.$$

Een oplossing der geheele vergelijking is:

$$\varphi(n) = \frac{C_3}{(1+p)^n}.$$

Door substitutie in (16) blijkt:

$$C_3 = \frac{p(r-i)}{r(r-p)},$$

zoodat:

$$\varphi(n) = \frac{p(r-i)}{r(r-p)} \cdot \frac{1}{(1+p)^n} + \frac{C_2}{(1+r)^n}.$$

Met behulp van de waarde van $\varphi(1)$ vindt men hieruit:

$$C_2 = -\frac{p}{r}\frac{r-i}{r-p},$$

$$\varphi(n) = \frac{p(r-i)}{r(r-p)}\left[\frac{1}{(1+p)^n} - \frac{1}{(1+r)^n}\right],$$

$$f(n) = \frac{p(r-i)}{r(r-p)}\frac{(1+p)^n}{(1+p)^n-1}\left[\left(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right)-\left(1-\frac{1}{(1+p)^n}\right)\right].$$

De algemeene oplossing van (2) voor leeningstype γ wordt dus aangegeven door:

(17)

$$F(n) = \frac{i}{r} + \left(1-\frac{i}{r}\right)\frac{1}{r-p}\left[\frac{p}{1-\frac{1}{(1+p)^n}}\left(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right)-p\right].$$

Leeningstype δ.

Door p gelijk aan i te stellen vindt men uit (17) als algemeene oplossing van (2) voor leeningstype δ:

$$(18)\ \ldots\ F(n) = \frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{r} : \frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}.$$

Vergelijking (6) kan altijd op algemeene wijze worden behandeld, wanneer slechts het quotient van telkens 2 achtereenvolgende aflossingen constant is. Stelt men namelijk voor de aflossingen:

$$U_{m-1} = k\, U_m,$$

dan geldt voor de uitlotingskans:

$$u_n = \frac{U_n}{\sum_1^n U_m} = \frac{1}{\sum_0^{n-1} k^m} = \frac{k-1}{k^n-1},$$

$$(19)\ \ldots\ \frac{1-u_n}{u_n} = k\frac{k^{n-1}-1}{k-1} = \frac{k}{u_{n-1}}.$$

Nu wordt (6) na deeling door $k^n u_n$:

$$(1+r)\,\frac{f(n)}{k^n\,u_n} = \frac{1-u_n}{u_n}\cdot\frac{1}{k^n}f(n-1) + \frac{1}{k^n}\left(1-\frac{i}{r}\right),$$

of, in verband met (19):

$$(1+r)\frac{f(n)}{k^n\,u_n} = \frac{f(n-1)}{k^{n-1}\,u_{n-1}} + \frac{1}{k^n}\left(1-\frac{i}{r}\right).$$

Stel:

$$\frac{f(n)}{k^n\,u_n} = \psi\,(n)$$

dan wordt:

$$(20). \quad . \quad . \quad (1+r)\,\psi\,(n) - \psi\,(n-1) = \frac{1}{k^n}\left(1-\frac{i}{r}\right).$$

Uit (7) volgt:

$$\psi\,(1) = \frac{1}{k}\left[\frac{1+i}{1+r} - \frac{i}{r}\right].$$

De algemeene oplossing der vergelijking zonder tweede lid is:

$$\psi\,(n) = \frac{C_1}{(1+r)^n}.$$

Een bijzondere oplossing van (20) is:

$$\psi\,(n) = \frac{C_2}{k^n},$$

waarin C_2 bepaald wordt door:

$$(1+r)\,C_2 - k\,C_2 = 1 - \frac{i}{r},$$

$$C_2 = \frac{r-i}{r(1+r-k)}.$$

De algemeene oplossing van (20) wordt:

$$\psi\,(n) = \frac{C_1}{(1+r)^n} + \frac{r-i}{k^n\,r(1+r-k)}.$$

Hieruit met behulp van de gevonden waarde van $\psi\,(1)$:

$$C_1 = -\frac{r-i}{r(1+r-k)},$$

$$\psi(n) = \frac{r-i}{r(1+r-k)}\left[\frac{1}{k^n} - \frac{1}{(1+r)^n}\right],$$

$$f(n) = \frac{r-i}{r(1+r-k)}\left[\frac{1}{k^n} - \frac{1}{(1+r)^n}\right] k^n u_n.$$

De algemeene oplossing van (2) wordt:

$$(21)\ .\quad F(n) = \frac{i}{r} + \frac{r-i}{r(1+r-k)}\left[\frac{1}{k^n} - \frac{1}{(1+r)^n}\right] k^n u_n.$$

Voor type α, waarbij geen uitlotingen plaats vinden, is k als verhouding van twee grootheden met de waarde nul onbepaald, en geldt de vergelijking dus niet.

Voor type β zetten de substitutiën:

$$k = 1 \qquad u_n = \frac{1}{n}$$

het resultaat (21) om in (12), terwijl (21) voor de bij type γ behoorende substituties:

$$k = 1 + p \qquad u_n = \frac{p}{(1+p)^n - 1}$$

overgaat in (17).

Wij hebben hier het geval, dat het quotient van twee aflossingen gelijk was aan een rentevoet p, vermeerderd met de eenheid, beschouwd als een bijzonder type van het geval, dat dit quotient gelijk was aan een willekeurige constante k. Uit een formeel oogpunt zijn echter beide gevallen volkomen aan elkaar gelijk, daar men voor iedere constante k stellen mag:

$$k = 1 + p,$$

mits men p hierin niet uitsluitend als een rentevoet, die uit den aard der zaak steeds positief en niet zeer groot is, maar als een willekeurige constante beschouwt. Men kan ook zeggen dat van iedere

annuiteits-leening, waarvan het quotient van telkens twee opeenvolgende aflossingen gelijk is aan een constante k, deze aflossingen gelijk zijn aan die van een annuiteits-leening met den rentevoet $k - 1 = p$, mits men hierbij in het oog houdt dat deze rentevoet alle positieve en negatieve waarden mag hebben en ook nul kan zijn.

Zóó beschouwd is niet alleen leeningstype δ, maar ook type β een bijzonder geval van type γ, namelijk het geval:

$$p = 0.$$

Voor deze waarde van p ziet men dan ook ten aanzien van (21) door toepassing van den regel van BERNOULLI de bovenstaande bij type γ behoorende substituties overgaan in die van type β, terwijl dezelfde bewerking de oplossing (17) van type γ omzet in de oplossing (12) van type β.

§ 3. DE DIFFERENTIE-VERGELIJKINGEN ALS RECURSIEFORMULES BESCHOUWD.

Men kan de in de vorige paragrafen voorkomende differentievergelijkingen ook oplossen door deze als recursie-formules te beschouwen. De oplossingen krijgen dan een eenigszins andere gedaante.

Leeningstype α.

Door invoering van de gebruikelijke notatie:

$$v = \frac{1}{1 + r}$$

gaat de grondvergelijking:

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad (1 + r) F(n) = i + u_n + (1 - u_n) F(n - 1)$$

voor type α na vermenigvuldiging met v over in:

$$F(n) = iv + v F(n - 1).$$

Vervangt men hierin n door $n - 1$, vermenigvuldigt men dan

opnieuw met v en past men deze bewerking bij herhaling op het komende resultaat toe, dan vindt men:

$$v\,F(n-1) = i\,v^2 + v^2\,F(n-2),$$
$$v^2\,F(n-2) = i\,v^3 + v^3\,F(n-3),$$
$$v^m\,F(n-m) = i\,v^{m+1} + v^{m+1}\,F(n-m-1),$$
$$v^{n-2}\,F(2) = i\,v^{n-1} + v^{n-1}\,F(1).$$

Telt men deze $n-1$ vergelijkingen op bij de uit (3) volgende betrekking

$$v^{n-1}\,F(1) = i\,v^n + v^n,$$

dan komt er:

$$(22) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(n) = v^n + i \sum_{1}^{n} v^m.$$

Leeningstype β.

Voor type β wordt de grondvergelijking (2) na vermenigvuldiging met nv:

$$n\,F(n) = n\,i\,v + v + v\,(n-1)\,F(n-1).$$

Op de voor type α aangegeven wijze vindt men:

$$v(n-1)\,F(n-1) = (n-1)\,i\,v^2 + v^2 + v^2\,(n-2)\,F(n-2),$$
$$v^2\,(n-2)\,F(n-2) = (n-2)\,i\,v^3 + v^3 + v^3\,(n-3)\,F(n-3),$$
$$v^m(n-m)\,F(n-m) = (n-m)\,i\,v^{m+1} + v^{m+1} + v^{m+1}(n-m-1)\,F(n-m-1),$$
$$2\,v^{n-2}\,F(2) = 2\,i\,v^{n-1} + v^{n-1}\,F(1).$$

Telt men deze $n-1$ vergelijkingen op bij de uit (3) volgende betrekking:

$$v^{n-1}\,F(1) = i\,v^n + v^n,$$

dan komt er:

$$n\,F(n) = i \sum_{m=1}^{m=n} (n-m+1)\,v^m + \sum_{1}^{n} v^m,$$

$$(23). \quad . \quad . \quad F(n) = \frac{1}{n}\left[\sum_{1}^{n} v^m + i \sum_{m=1}^{m=n} (n-m+1)\,v^m\right].$$

Leeningstype γ.

De uitlotingskans u_n wordt hier bepaald door:

$$(24). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u_n = \frac{1}{f(n)},$$

terwijl:

$$(14). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(n) = (1+p) f(n-1) + 1.$$

Nu wordt als boven:

$$(1+p) f(n-1) = (1+p)^2 f(n-2) + (1+p),$$
$$(1+p)^2 f(n-2) = (1+p)^3 f(n-3) + (1+p)^2,$$
$$(1+p)^m f(n-m) = (1+p)^{m+1} f(n-m-1) + (1+p)^m,$$
$$(1+p)^{n-2} f(2) = (1+p)^{n-1} f(1) + (1+p)^{n-2}.$$

Telt men deze $n-1$ vergelijkingen op bij de uit (24) volgende betrekking:

$$(1+p)^{n-1} f(1) = (1+p)^{n-1},$$

dan komt er:

$$f(n) = \sum_{m=0}^{m=n-1} (1+p)^m,$$

$$(25) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u_n = \frac{1}{\sum_{m=0}^{m=n-1} (1+p)^m}.$$

Voor type γ gaat de grondvergelijking (2), wanneer men daarin kortheidshalve de uitlotingskans voorloopig u_n blijft noemen en op grond van § 2 onderstelt, dat voldaan wordt aan:

$$(19) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1-u_n}{u_n} = \frac{k}{u_{n-1}} = \frac{1+p}{u_{n-1}},$$

over in:

$$\frac{F(n)}{u^n} = v\left(1 + \frac{i}{u_n}\right) + v\frac{1-u_n}{u_n} F(n-1).$$

Stel:

$$\frac{F(n)}{u_n} = \varphi(n),$$

dan is:

(26). . . . $\varphi(1) = F(1) = \frac{1+i}{1+r} = v\left(1+\frac{i}{u_1}\right),$

$$\varphi(n) = v\left(1+\frac{i}{u_n}\right) + v\,k\,\varphi(n-1),$$

$$v\,k\,\varphi(n-1) = v^2\,k\left(1+\frac{i}{u_{n-1}}\right) + v^2\,k^2\,\varphi(n-2),$$

$$v^2\,k^2\,\varphi(n-2) = v^3\,k^2\left(1+\frac{i}{u_{n-2}}\right) + v^3\,k^3\,\varphi(n-3),$$

$$v^m\,k^m\,\varphi(n-m) = v^{m+1}\,k^m\left(1+\frac{i}{u_{n-m}}\right) + v^{m+1}\,k^{m+1}\varphi(n-m-1),$$

$$v^{n-2}\,k^{n-2}\,\varphi(2) = v^{n-1}\,k^{n-2}\left(1+\frac{i}{u_2}\right) + v^{n-1}\,k^{n-1}\,\varphi(1),$$

Telt men deze $n-1$ vergelijkingen op bij de uit (26) volgende betrekking:

$$v^{n-1}\,k^{n-1}\,\varphi(1) = v^n\,k^{n-1}\left(1+\frac{i}{u_1}\right),$$

dan komt er:

$$\varphi(n) = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{m=n} v^m\,k^m\left(1+\frac{i}{u_{n-m+1}}\right),$$

(27) . . . $F(n) = \frac{u_n}{k}\sum_{m=1}^{m=n} v^m\,k^m\left(1+\frac{i}{u_{n-m+1}}\right).$

Boven is opgemerkt, dat men type β beschouwen mag als het bijzonder geval van type γ, waarvoor:

$$p = 0.$$

Men ziet dan ook voor deze conditie (27) terstond in (23) overgaan, daar:

$$\underset{p=0}{Lim}\, u_n = \frac{1}{n}, \qquad \underset{p=0}{Lim}\, k = 1.$$

$$\underset{p=0}{Lim}\frac{u_n}{u_{n-m+1}}=\underset{p=0}{Lim}\frac{(1+p)^{n-m+1}-1}{(1+p)^n-1}=\frac{n-m+1}{n}.$$

Voor:

$$k=1+p$$

wordt (27):

$$(28)\ \ F(n)=\frac{1}{\sum_{m=1}^{m=n}(1+p)^{-m}}\cdot\frac{1}{(1+)^{n+1}}\cdot\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{1+p}{1+r}\right)^m \left[1+i\frac{(1+p)^{n-m+1}-1}{p}\right].$$

Nu is:

$$(29)\quad \frac{1}{(1+p)^{n+1}}\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{1+p}{1+r}\right)^m=\frac{1}{r-p}\left[\frac{1}{(1+p)^n}-\frac{1}{(1+r)_n}\right]$$

$$=\frac{1}{r-p}\left[r\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{(1+r)^m}-p\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{(1+p)^m}\right].$$

(28) wordt: [1])

$$(30).\ \ F(n)=\frac{1}{r-p}\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{(1+p)^m}\left[\left\{\frac{1}{(1+p)^n}-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}+i\left\{\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{(1+p)^m}-\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1}{(1+r)_n}\right\}\right].$$

§ 4. Lager-algebraische oplossing der grondvergelijkingen.

Wij gaan thans over tot de lager-algebraische afleiding van de bijzondere uitdrukkingen, die het verband tusschen koers en reëele rente weergeven. Het is hierbij eenvoudiger om den tijd te rekenen vanaf het oogenblik der koersbepaling, zoodat het jaar der laatste uitkeering wordt aangegeven door n.

In de in § 1 besproken formule:

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ x=\sum_{m=1}^{m=n}\frac{U_m+I_m}{(1+r)^m},$$

stelle men:

---

[1]) De schrijfwijze houdt verband met de later in te voeren universeele notatie.

$$I_m = i\, J_m.$$

J_m is dan het bedrag, waarover in het m^e jaar na het tijdstip koersbepaling, rente wordt betaald.

Noem de contante waarde der aflossingen H, en de contante waarde van de bedragen, waarover rente wordt uitgekeerd, K, dan is:

$$H = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{U_m}{(1+r)^m},$$

$$K = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{J_m}{(1+r)^m},$$

terwijl (1) overgaat in:

(31) . . . . . $x = H + i\, K.$

Geschieden oprenting en disconteering over denzelfden tijd tegen denzelfden rentevoet, dan heffen zij elkander op; derhalve blijft dan de contante waarde van een nominaal uitstaand bedrag ter grootte *één* onveranderd *één*, onverschillig hoe de toekomstige aflossing plaats vinden moge.

Hieruit volgt:

(34) [1]) . . . . . $1 = H + r\, K.$

Eliminatie van H of K tusschen (31) en (34) geeft:

(32) . . . . . $x = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) H,$

(33) . . . . . $x = 1 + (i - r)\, K.$

Leeningstype α.

Hier is:

$$U_m = 0 \text{ voor } m < n,$$

$$U_m = 1 \text{ voor } m = n,$$

---

[1]) Een uitvoerige verificatie dezer vergelijking is te vinden bij C. L. Landré: „Het afdoen van schuld door periodieke betalingen". Archief Verz. W. VI. (1903.) p. 270.

$$J_m = 1,$$

$$H = \frac{1}{(1+r)^n} = A_{\overline{n}|},$$

$$K = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{(1+r)^m} = a_{\overline{n}|},$$

(31α). . . . . $x = A_{\overline{n}|} + i\, a_{\overline{n}|},$

(32α). . . . . $x = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) A_{\overline{n}|},$

(33α). . . . . $x = 1 + (i - r)\, a_{\overline{n}|}.$

Leeningstype β.

$$U_m = \frac{1}{n},$$

$$J_m = \frac{n - m + 1}{n},$$

$$H = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{(1+r)^m} = \frac{1}{n}\, a_{\overline{n}|},$$

$$K = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{m=n} \frac{n - m + 1}{(1+r)^m} = \frac{1}{n}\, (Da)_{\overline{n}|}.$$

De waarde:

$$K = \frac{1}{n}\, (Da)_{\overline{n}|}$$

volgt onmiddellijk uit de overweging, dat K de contante waarde voorstelt van een reeks bedragen, welke met 1 begint en vervolgens steeds met $\frac{1}{n}$ afneemt.

(31β) . . . . . $x = \frac{1}{n} \left[a_{\overline{n}|} + i\, (Da)_{\overline{n}|} \right],$

(32β) . . . . . $x = \frac{i}{r} + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{i}{r}\right) a_{\overline{n}|},$

(33β) . . . . . $x = 1 + \frac{1}{n}\, (i - r)\, (Da)_{\overline{n}|}.$

Leeningstype γ.

De uitlotingskans u_n voor eenig jaar n wordt, onverschillig of men den tijd n rekent vanaf het oogenblik der koersbepaling of wel tot aan het tijdstip van de laatste uitloting, als verhouding van het in het n^e jaar uit te loten bedrag tot dat, hetwelk dan nog totaal moet worden uitgeloot, bepaald door:

$$(35) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u_n = \frac{U_n}{\sum_{m=1}^{m=n} U_m}.$$

Daar nu bij iedere aflossing de rente van de vorige aflossing voor schulddelging gebezigd wordt, vormen de achtereenvolgende aflossingen een meetkundige reeks met de reden $1+p$, zoodat:

$$\sum_{m=1}^{m=n} U_m = U_n \sum_{m=0}^{m=n-1} (1+p)^m,$$

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u_m = \frac{1}{\sum_{m=0}^{m=n-1} (1+p)^m}.$$

Vergelijking vau de afleiding dezer formule met die uit § 3 of met die der overeenkomstige betrekking:

$$u_n = \frac{p}{(1+p)^n - 1}$$

uit § 2 doet zien, dat ook hier de lager-algebraische behandeling de eenvoudigste is.

Door gebruik te maken van de in Hoofdstuk II ingevoerde notatie:

$$s_{\overline{n}|} = \sum_{m=0}^{m=n-1} (1+r)^n,$$

kan men voor (25) schrijven:

$$u_n = \frac{1}{s'_{\overline{n}|}},$$

waarbij het accent aanduidt, dat het symbool betrekking heeft op den rentevoet p.

De bepaling van u_n kan ook als volgt geschieden:

Daar bij een gegeven wijze van aflossing de uitlotingskans niet van de grootte der schuld afhangt, kan men aannemen, dat het nog uitstaand bedrag voor een gegeven tijdstip n jaar vóór de laatste aflossing één is, zoodat:

$$\sum_{m=1}^{m=n} U_m = 1.$$

Hierdoor gaat (35) over in:

$$u_n = U_n.$$

Tot delging der schuld is nu aan rente en aflossing noodig een jaarlijksche betaling van:

$$\frac{1}{a'_{\overline{n}|}},$$

waarbij het accent weer duidt op den rentevoet p. Daar de schuld 1 is, bedraagt de rente in het n^e jaar p, zoodat men voor de aflossing vindt:

(36) . . . . . $U_n = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} - p,$

en ook:

$$u_n = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} - p,$$

wat men gemakkelijk omzet in den boven gevonden vorm:

$$u_n = \frac{1}{s'_{\overline{n}|}},$$

en in:

$$u_n = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} \frac{1}{(1+p)^n}.$$

Wij geven hier de bepaling der uitlotingskansen ter vergelijking met de wijze van afleiding uit de §§ 2 en 3; de kennis daarvan is echter voor de lager-algebraische afleiding van den koers, dat is dus van de uitdrukkingen H en K geheel overbodig.

Rekent men den tijd vanaf het oogenblik der koersbepaling,

dan kan men, daar het eerste jaar na de koersbepaling gelijk is aan het n^{e} jaar voor de laatste aflossing, inplaats van (36) schrijven:

$$U_1 = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} - p\,,$$

$$U_1 = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} \frac{1}{(1+p)^n}.$$

Daar de achtereenvolgende aflossingen een meetkundige reeks vormen met de reden $1+p$, wordt:

$$U_m = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} (1+p)^{m-n-1}.$$

$$H = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{U_m}{(1+r)^m},$$

$$(37) \ldots \quad H = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} \frac{1}{(1+p)^{n+1}} \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{1+p}{1+r}\right)^m,$$

$$H = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} \frac{1}{r-p} \left[\frac{1}{(1+p)^n} - \frac{1}{(1+r)^n}\right],$$

$$(38) \ldots \ldots \quad H = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} \frac{A_{\overline{n}|} - A'_{\overline{n}|}}{p-r},$$

$$(39) \ldots \ldots \quad H = \frac{1}{r-p} \left[r \frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}} - p\right].$$

$$J_m = \sum_{q=m}^{q=n} U_q = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} \sum_{q=m}^{q=n} (1+p)^{q-n-1}.$$

$$K = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{J_m}{(1+r)^m}.$$

$$K = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} \sum_{m=1}^{m=n} \left[\frac{1}{(1+r)^m} \sum_{q=m}^{q=n} (1+p)^{q-n-1}\right].$$

Men kan aantoonen:

$$\sum_{m=1}^{m=n} \left[\frac{1}{(1+r)^m} \sum_{q=m}^{q=n} (1+p)^{q-n-1}\right] = \sum_{q=1}^{q=n} \left[\frac{1}{(1+p)^{q+1}} \sum_{m=1}^{m=q} \left(\frac{1+p}{1+r}\right)^m\right],$$

zoodat in verband met (37):

$$(40) \ldots\ldots\ldots\ldots K = \sum_{1}^{n} H,$$

mits men daarbij bedenkt, dat de factor:

$$\frac{1}{a'_{\overline{n|}}}$$

in H als constant beschouwd moet worden [1]).

Uit (38) en (40) volgt:

$$K = \frac{1}{a'_{\overline{n|}}} \frac{\sum_{m=1}^{m=n} A_{\overline{n|}} - \sum_{m=1}^{m=n} A'_{\overline{n|}}}{p - r},$$

$$(41) \ldots\ldots\ldots K = \frac{1}{a'_{\overline{n|}}} \frac{a_{\overline{n|}} - a'_{\overline{n|}}}{p - r},$$

$$(42) \ldots\ldots\ldots K = \frac{1}{r - p} \left[1 - \frac{a_{\overline{n|}}}{a'_{\overline{n|}}} \right].$$

De uitdrukkingen voor H en K kunnen in plaats van op de hier gevolgde rechtstreeksche methode op veel kortere wijze door eliminatie worden gevonden.

Voor type γ zijn de aflossingen, en dus ook de bedragen, waar-

---

[1]) Type γ ging voor:

$$p = 0$$

over in type β. Nu is:

$$\underset{p=0}{Lim} \frac{1}{a'_{\overline{n|}}} = \frac{1}{n}.$$

Voor type β moet dus (40) ook doorgaan, wanneer men den factor $\frac{1}{n}$ in H als constante beschouwt. Wij vonden dan ook:

$$H = \frac{1}{n} a_{\overline{n|}},$$

$$K = \frac{1}{n} (Da)_{\overline{n|}} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{m=n} a_{\overline{m|}}.$$

Bij type α is er geen constante factor en geldt (40) zonder meer:

$$H = A_{\overline{n|}},$$

$$K = \sum_{1}^{n} A_{\overline{m|}} = a_{\overline{n|}}.$$

over rente wordt uitgekeerd, gelijk aan de correspondeerende grootheden van een annuiteitsleening met een rentevoet p.

Daar de koers der leening volgens de in § 1 gegeven definitie niet van de grootte van het nog uitstaand bedrag afhangt, kan dit voor het oogenblik der koersbepaling op *één* gesteld worden. Een dergelijke leening kan worden afbetaald door een jaarlijksche betaling van:

$$\frac{1}{a'_{\overline{n}|}},$$

waarbij het accent weer aanduidt, dat de gebezigde rentevoet p is. De contante waarde dezer betalingen, gedisconteerd naar den rentevoet r, wordt vanzelf weergegeven door:

$$(43) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x_1 = \frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}}.$$

Volgens (31) is ook:

$$x_1 = H + p\,K,$$

zoodat:

$$H + p\,K = \frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}}.$$

Wij vonden reeds:

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad H + r\,K = 1.$$

Eliminatie van K of van H tusschen de laatste twee vergelijkingen leidt onmiddellijk tot de uitdrukkingen (39) en (42) voor H en K.

De uitdrukkingen voor den koers worden:

$$(31\gamma) \ldots\ldots \quad x = \frac{1}{a'_{\overline{n}|}}\left[\frac{A'_{\overline{n}|} - A_{\overline{n}|}}{r-p} + i\,\frac{a'_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|}}{r-p}\right]$$

$$(32\gamma) \ldots\ldots \quad x = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right)\frac{1}{r-p}\left(r\,\frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}} - p\right)$$

$$(33\gamma) \ldots\ldots\ldots \quad x = 1 + \frac{i-r}{r-p}\left(1 - \frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}}\right)$$

Leeningstype δ.

Door de substitutie:

$$p = i$$

gaat (33γ) terstond over in:

$$(44) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{a_{\overline{n}|}}{a''_{\overline{n}|}},$$

waarbij het dubbele accent op den rentevoet i duidt.

De afleiding van (44) kan ook op dezelfde wijze plaats vinden als boven bij (43) is geschied. Wij wijzen er op, dat (44) dezelfde formule is als (18) van § 2 en komen verder op leeningstype δ niet terug.

Men kan bij type γ ook nog substitueeren:

$$p = r.$$

Nu is:

$$-\frac{\partial A_{\overline{n}|}}{\partial r} = n A_{\overline{n+1}|},$$

$$(45) \ldots\ldots \quad -\frac{\partial a_{\overline{n}|}}{\partial r} = v \sum_{m=1}^{m=n} m A_{\overline{m}|} = v (Ia)_{\overline{n}|}.$$

Door toepassing van den regel van Bernoulli vindt men dan uit (38) en (41):

$$\underset{p=r}{Lim}\, H = \frac{n A_{\overline{n+1}|}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{n}{s_{\overline{n}|}},$$

$$\underset{p=r}{Lim}\, K = v \frac{(Ia)_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} = \frac{(Is)_{\overline{n}|}}{s_{\overline{n}|}}.$$

H volgt ook uit de overweging, dat de aflossingen een meetkundige reeks vormen met de reden $1 + r$, zoodat hun contante waarden allen gelijk zijn aan die der eerste aflossing, dat is aan:

$$\frac{1}{1+r} \frac{1}{s_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}}.$$

De som der contante waarden is dus vanzelf $\frac{n}{s_{\overline{n}|}}$.

Voor den koers der leening vindt men:

$$(31\varepsilon) \quad \ldots \ldots \ldots \quad x = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} [n + i\,(Is)_{\overline{n}|}],$$

$$(32\varepsilon) \quad \ldots \ldots \ldots \quad x = \frac{i}{r} + \left[1 - \frac{i}{r}\right] \frac{n}{s_{\overline{n}|}},$$

$$(33\varepsilon) \quad \ldots \ldots \ldots \quad x = 1 + (i - r) \frac{(Is)_{\overline{n}|}}{s_{\overline{n}|}}.$$

Wij merken nog op, dat men in (45) een middel heeft tot afleiding der formule voor $(Ia)_{\overline{n}|}$. De differentiatie kan namelijk ook aldus worden uitgevoerd:

$$-\frac{\partial a_{\overline{n}|}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{A_{\overline{n}|} - 1}{r} = \frac{1}{r}(a_{\overline{n}|} - n\, A_{\overline{n+1}|}).$$

Gelijkstelling der beide waarden van $-\frac{\partial a_{\overline{n}|}}{\partial r}$ geeft:

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n}|} - n\, A_{\overline{n}|}}{r}.$$

§ 5. Overzicht der resultaten.

Wij groepeeren nu de gevonden resultaten voor de typen α, β en γ naar de hoofdformules (31), (32) en (33), daarbij lettende op de definities:

$$v^n = \frac{1}{(1+r)^n} = A_{\overline{n}|},$$

$$\sum_{m=1}^{m=n} v^m = \frac{1 - A_{\overline{n}|}}{r} = a_{\overline{n}|},$$

$$\sum_{m=1}^{m=n} \sum_{q=1}^{q=m} v^q = \sum_{m=1}^{m=n} (n - m + 1) v^m = \sum_{m=1}^{m=n} a_{\overline{n}|} = (Da)_{\overline{n}|}.$$

Men heeft:

$$(31)\ .\quad \begin{cases} & x = H + i\,K\,, \\ (\alpha) & x = A_{\overline{n}|} + i\,a_{\overline{n}|}\,, \\ (\beta) & x = \dfrac{1}{n}\left[a_{\overline{n}|} + i\,(Da)_{\overline{n}|}\right], \\ (\gamma) & x = \dfrac{1}{a'_{\overline{n}|}}\left[\dfrac{A'_{\overline{n}|} - A_{\overline{n}|}}{r-p} + i\,\dfrac{a'_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|}}{r-p}\right]. \end{cases}$$

Deze formules (α), (β) en (γ) komen respectievelijk overeen met de formules (22), (23) en (30) uit § 3, zoodat men volgens (31) kan zeggen dat de oplossingswijze, waarbij de differentie-vergelijkingen als recursieformules worden gesommeerd, den koers beschouwt als de som van de contante waarden der aflossingen en de contante waarde der rente.

Voorts is:

$$(32)\ .\quad \begin{cases} & x = \dfrac{i}{r} + \left(1 - \dfrac{i}{r}\right) H\,, \\ (\alpha) & x = \dfrac{i}{r} + \left(1 - \dfrac{i}{r}\right) A_{\overline{n}|}\,, \\ (\beta) & x = \dfrac{i}{r} + \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{i}{r}\right) a_{\overline{n}|}\,, \\ (\gamma) & x = \dfrac{i}{r} + \left(1 - \dfrac{i}{r}\right)\dfrac{1}{r-p}\left[r\,\dfrac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}} - p\right]. \end{cases}$$

Deze formules (α), (β) en (γ) komen respectievelijk overeen met de formules (9), (12) en (17) uit § 2.

Uit:

$$\underset{n=\infty}{Lim}\ \frac{a_{\overline{n}|}}{a''_{\overline{n}|}} = \frac{i}{r}\,,$$

waarbij het dubbele accent op den rentevoet i duidt, blijkt dat $\dfrac{i}{r}$ de contante waarde is van een perpetuiteit of onaflosbare leening, gesloten tegen een rentevoet i en gedisconteerd naar een rentevoet r.

De formules (32) en de overeenkomstige uit § 2, welke laatsten gevonden waren door gewone oplossing van differentie-vergelijkingen, beschouwen derhalve den koers als de contante waarde der aflossin-

gen H, vermeerderd met het verschil van twee perpetuiteiten. De beteekenis hiervan treedt het duidelijkst aan het licht in:

$$(32\alpha) \quad \ldots \ldots \quad x = A_{\overline{n}|} + \frac{i}{r}(1 - A_{\overline{n}|}),$$

waar men aan:

$$\frac{i}{r} - \frac{i}{r} A_{\overline{n}|}$$

als het verschil van de dadelijk ingaande met de n-jaar uitgestelde perpetuïteit terstond de met i vermenigvuldigde n-jarige annuïteit herkent.

Uit (31) en (32) volgt nog:

$$(46) \quad \ldots \ldots \ldots \quad K = \frac{1 - H}{r}.$$

Ten slotte vonden wij:

$$(33) \quad \begin{cases} & x = 1 + (i - r) K, \\ (\alpha) & x = 1 + (i - r) a_{\overline{n}|}, \\ (\beta) & x = 1 + \frac{1}{n}(i - r)(Da)_{\overline{n}|}, \\ (\gamma) & x = 1 + \frac{i - r}{r - p}\left[1 - \frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}}\right]. \end{cases}$$

Terwijl de formules (31) en (32) zoowel uit de differentie-vergelijkingen als — langs korteren weg — uit de lager-algebraische behandeling resulteeren, vindt men de formule (33) rechtstreeks alleen volgens laatstgenoemde methode. Daar de vormen (33) zich het meest voor practische toepassing leenen, mag men dit nog als een bijzonder voordeel van bedoelde methode aanmerken, want, al kan men achteraf gezien de vormen (31) en (32) gemakkelijk in (33) omzetten, zoo zal men toch niet licht aan de algemeene mogelijkheid van een dergelijke omzetting denken, wanneer het resultaat niet eerst van elders — dat is dus hier uit de lager-algebraische oplossing — bekend is.

De vorm (33) beschouwt den koers als het uitgeleende bedrag zelf, verminderd met een product, bestaande uit het verschil van reëelen en nominalen rentevoet als ééne en de contante waarde K der bedragen, waarover rente moet worden uitgekeerd, als andere factor, waarbij K, hetzij rechtstreeks, hetzij door middel van (40)

of (46) uit H bepaald kan worden. De beteekenis hiervan blijkt het best, wanneer men:

(33) . . . . . $x = 1 - (r - i) K$

door redeneering afleidt.

Leent een persoon A aan B een bedrag 1 tegen een rentevoet i, die lager is dan de reëele rentevoet r, dan ontvangt A aan rente zekere bedragen, waarvan wij de contante waarde, gedisconteerd naar den rentevoet r, I zullen noemen. Had A echter zijn geld uitgeleend aan een derden persoon C tegen den reëelen rentevoet r, dan zou hij aan rente bedragen ontvangen hebben, welker contante waarde, gedisconteerd naar r, wij door R voorstellen.

Het in rekening brengen van een reëelen rentevoet komt nu neer op de onderstelling, dat A zijn geld aan B ter leen gaf, terwijl hij het aan C kon leenen, m. a. w. dat hij op het bedrag 1 een verlies neemt, waarvan de contante waarde wordt aangegeven door $R - I$.

Alzoo:

$$x = 1 - (R - I).$$

Dezen vorm kan men in (33) omzetten door te bedenken dat I en R als contante waarden der bedragen aan rente, die telkens over het nog uitstaande gedeelte der leening moeten worden betaald, producten zijn van den rentevoet i en den rentevoet r met de som der contante waarden van de bedragen, waarover telkens rente verschuldigd is.

§ 6. Toepassing.

De toepassing van de vormen (33) vereischt naast de bestaande tafels van $a_{\overline{n}|}$ het bezit van tafels van:

$$\frac{1}{n}(Da)_{\overline{n}|},$$

welke daarom hierachter zijn opgenomen. De eveneens hierbij gegeven tafels van:

$$\frac{1}{n}\, a_{\overline{n}|},$$

welker berekening noodig was als controle op de tafels van:

$$\frac{1}{n}(Da)_{\overline{n}|}$$

maken, dat ook de vormen (31) en (32) gemakkelijk kunnen worden aangewend.

Wenscht men bij het zoeken naar een reëelen rentevoet bij een gegeven koers de grenzen der rente niet verder dan $^1/_8$ pCt. uiteen te houden, of bevat bij gezochten koers de gegeven reële rentevoet een oneven aantal achtste deelen, dan kunnen de tafels uit Hoofdstuk VII niet gebezigd worden, doch is men aangewezen op de tafels, genoemd in Hoofdstuk III § 5. In dit geval bezige men voor type β niet (33β), doch (32β).

Ten slotte moge één voorbeeld worden uitgewerkt.

Er wordt een leening gesloten van f 130,000 tegen 3.5 pCt. 's jaars. Gedurende de eerste 10 jaren wordt jaarlijks f 3000, gedurende de volgende 20 jaren jaarlijks f 5000 afgelost. Men vraagt den koers van uitgifte zóódanig te bepalen, dat een reële rente van 4 pCt. wordt gemaakt.

Splits de leening in twee andere, namelijk in één waarop jaarlijks gedurende 30 jaar f 5000 wordt ontvangen, en één waarop jaarlijks gedurende 10 jaar f 2000 wordt terugbetaald. Men heeft nu te doen met twee leeningen van type β, zoodat volgens (33β):

$$x_{10} = 1 - 0{,}005\,\frac{(Da)_{\overline{10}|}}{10} = 0{,}97639.$$

$$x_{30} = 1 - 0{,}005\,\frac{(Da)_{\overline{30}|}}{30} = 0{,}94705.$$

De gezochte koers van uitgifte X wordt bepaald door:

$$13\,X = 15\,x_{30} - 2\,x_{10}.$$

$$X = 0{,}94254.$$

De koers van uitgifte moet dus $94^1/_4$ procent bedragen.

HOOFDSTUK V.

HET DUALISTISCH VERBAND IN DE VERZEKERINGS-WISKUNDE.

§ 1. Afleiding van lijfrente-formules door letterverwisseling.

In Hoofdstuk II werd gewezen op het feit, dat er tusschen rentefuncties van de algemeene gedaante $\Sigma^{(p)} A_{\overline{n}|}$ en de correspondeerende disconto-functies $\Sigma^{(p)} S_{\overline{n}|}$, waarbij n alle niet negatieve geheele getallen kan doorloopen, een dualistisch verband bestaat, aangezien men feitelijk slechts te doen heeft met twee verschillende schrijfwijzen van eenzelfde functie

$$\Sigma^{(p)} v^n$$

voor de twee gevallen:

$$n > 0 \text{ en } n < 0.$$

Bij een tijdsverloop n met de eindpunten A (aanvang) en S (slot), waarbij de tijd in de richting van A naar S positief gerekend wordt, krijgt de waarde-eenheid in den aanvang A de waarde $S_{\overline{n}|}$ in het slot S, en omgekeerd de waarde-eenheid in het slot S de waarde $A_{\overline{n}|}$ in den aanvang A.

De definitie van $A_{\overline{n}|}$ kan dus uit die van $S_{\overline{n}|}$, of omgekeerd die van $S_{\overline{n}|}$ uit die van $A_{\overline{n}|}$ worden afgeleid door onderlinge verwisseling van de letters A en S en van de woorden aanvang en slot.

Ditzelfde blijft ook gelden voor de algemeene functies $\Sigma^{(p)} A_{\overline{n}|}$ en $\Sigma^{(p)} S_{\overline{n}|}$, terwijl men bij de symbolen, welke voor de voorstelling

dezer functies bij verschillende waarden van p gebezigd worden, indachtig moet zijn om steeds de overeenkomstige lettertypen a en s in elkaar te doen overgaan. a wordt derhalve s, terwijl a veranderd wordt in s, en omgekeerd.

Daar de verwisseling hierop neerkomt, dat het gekozen tijdsinterval in tegengestelde richting wordt doorloopen, terwijl een klimmen in de eene richting een dalen in de andere beduidt, zal men hierbij de begrippen klimmen en dalen en de correspondeerende symbolen I (Increasing) en D (Diminishing) eveneens in elkaar moeten doen overgaan.

De juistheid van het hier bedoelde beginsel hangt niet samen met de omstandigheid, dat de waarde-verandering voor iedere tijdseenheid dezelfde is, zoodat de toepassing volkomen geoorloofd blijft wanneer behalve de rente ook de levenskans van een bepaald persoon als oorzaak van waarde-verandering optreedt.

Hierbij zal ook de leeftijd van den persoon bij de aanvangsuitkeering vervangen moeten worden door die bij de slotuitkeering, en omgekeerd, en zoo noodig de leeftijd één jaar vóór de aanvangsuitkeering door den leeftijd een jaar ná de slotuitkeering, en omgekeerd, tenzij die aanvangsleeftijden voorkomen als indices in lijfrente-symbolen, waar het gebruik nu eenmaal steeds opgave van den aanvangsleeftijd verlangt.

Men kan van het bovenstaande gebruik maken voor het geven van een overzichtelijke afleiding der 12 meest voor de hand liggende lijfrente-formules.

Een p-voudige sommatie van:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_x \overline{\underline{1}\,|\,m} = \frac{D_{x+m}}{D_x}$$

geeft:

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \sum_{m=0}^{m=n-1}{}^{(p)} A_x \overline{\underline{1}\,|\,m} = \sum_{m=0}^{m=n-1}{}^{(p)} \frac{D_{x+m}}{D_x},$$

waarbij algemeen:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma_m^{(0)} F(m) = F(m),$$

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \sum_{0}^{n-1}{}^{(1)} m = \sum_{0}^{n-1} m = \sum_{n-1}^{0} m,$$

$$(5) \quad \ldots \quad \sum_{0}^{n-1}{}^{(2)} m = \sum_{0}^{n-1} \sum_{0}^{r} m = \sum_{0}^{n-1} \sum_{0}^{m} r = \sum_{1}^{n} \sum_{0}^{m-1} r .$$

Voor $p = 1$ krijgt het linkerlid van (2) als som van contante waarden van uitkeeringen bij in leven zijn de beteekenis van contante waarde eener praenumerando-lijfrente, zoodat volgens de gebruikelijke notatie:

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \sum_{m=0}^{m=n-1} A_{x\,\overline{m}|}^{1} = a_{x\,\overline{n}|},$$

formule (2) overgaat in:

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad a_{x\,\overline{n}|} = \frac{1}{D_x} \sum_{m=0}^{m=n-1} D_{x+m}.$$

Herhaling der sommatie in (6) geeft in verband met (5):

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \sum_{m=0}^{m=n-1}{}^{(2)} A_{x\,\overline{m}|}^{1} = \sum_{m=0}^{m=n} a_{x\,\overline{m}|}.$$

Hierin heeft het rechterlid als som van contante waarden van praenumerando-lijfrenten met toenemenden duur de beteekenis van contante waarde eener dalende lijfrente, beginnende met n en jaarlijks afnemende met 1.

Schrijven wij overeenkomstig de vroeger ingevoerde notatie voor dalende annuiteiten:

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \sum_{m=1}^{m=n} a_{x\,\overline{m}|} = (Da)_{x\,\overline{n}|},$$

dan wordt dus:

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \sum_{m=0}^{m=n-1}{}^{(2)} A_{x\,\overline{m}|}^{1} = (Da)_{x\,\overline{n}|}.$$

Noemen wij den leeftijd bij de slotuitkeering y, dan is:

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad y - x = n - 1.$$

Volgens (7) is dan:

$$(12\,a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{x\,\overline{n}|} = \frac{1}{D_x} \sum_{x}^{y} D_m,$$

en volgens (6) en (10):

$$(13\,a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (Da)_{x\,\overline{n}|} = \frac{1}{D_x} \sum_{x}^{y} \sum_{x}^{r} D_m.$$

Daar tusschen alle aanvangs- en slotwaarden de betrekking:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D_x\,(\mathrm{v\,a})_{x\,\overline{n}|} = D_y\,(\mathrm{v\,s})_{x\,\overline{n}|}$$

bestaat, waarbij v het algemeene teeken is voor een varieerende annuiteit, en niet verward moet worden met v, de 1 jaar gedisconteerde waarde der éénheid, volgt uit (13 a):

$$(13\,s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (D\,s)_{x\,\overline{n}|} = \frac{1}{D_y} \sum_{x}^{y} \sum_{x}^{r} D_m.$$

Letterverwisseling in (12a), (13a) en (13s) geeft nu terstond:

$$(12\,s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad s_{x\,\overline{n}|} = \frac{1}{D_y} \sum_{y}^{x} D_m,$$

$$(15\,s) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I\,s)_{x\,\overline{n}|} = \frac{1}{D_y} \sum_{y}^{x} \sum_{y}^{r} D_m,$$

$$(15\,a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I\,a)_{x\,\overline{n}|} = \frac{1}{D_x} \sum_{y}^{x} \sum_{y}^{r} D_m.$$

(12 a) en (12 s) kunnen evenals (15 a) en (15 s) ook uit elkaar worden afgeleid met behulp van (14).

Op de commutatieteekens N [1]) en S mag de verwisseling van aanvangs- en slotleeftijd *niet* worden toegepast, daar zij in:

---

[1]) Volgens de universeele notatie behoort de N vet te worden gedrukt, daar:

$$N_x = \sum_{x+1}^{\infty} D_m, \quad \mathbf{N}_x = \sum_{x}^{\infty} D_m.$$

Dit is echter, o. a. naar het voorbeeld van Czuber, (Wahrscheinlichkeitsrechnung, Teubner, 1910, II. p. 244.) om typografische redenen nagelaten. Op de wijzigingen, welke de universeele notatie m. i. ten aanzien der commutatieteekens behoort te ondergaan, hoop ik bij een andere gelegenheid terug te komen.

$$(16) \ldots\ldots\ldots \sum_{x}^{y} D_m = N_x - N_{y+1}$$

wèl het linker, doch niet het rechterlid onveranderd laat; om deze reden kunnen genoemde teekens eerst thans worden ingevoerd.

Men heeft:

$$(17) \ldots\ldots \sum_{x}^{y} D_m = \sum_{y}^{x} D_m = N_x - N_{x+n},$$

Hieruit:

$$\sum_{x}^{y}\sum_{x}^{r} D_m = \sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{m=0}^{m=r} D_{x+m} = \sum_{r=0}^{r=n-1} (N_x - N_{x+r+1}),$$

$$(18) \ldots \sum_{x}^{y}\sum_{x}^{r} D_m = n\,N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}.$$

Evenzoo:

$$\sum_{y}^{x}\sum_{y}^{r} D_m = \sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{m=0}^{m=r} D_{x+n-m-1},$$

$$\sum_{y}^{x}\sum_{y}^{r} D_m = \sum_{r=0}^{r=n-1} (N_{x+n-r-1} - N^{x+n}),$$

$$(19) \ldots \sum_{y}^{x}\sum_{y}^{r} D_m = -(n\,N_{x+n} - S_x + S_{x+n}).$$

Door (17), (18) en (19) gaan de tweetallen (12), (13) en (15) over in:

$$(20\,\mathrm{a}) \ldots\ldots \mathrm{a}_{x\,\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

$$(20\,\mathrm{s}) \ldots\ldots \mathrm{s}_{x\,\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n-1}},$$

$$(21\mathrm{a}) \ldots (D\mathrm{a})_{x\,\overline{n}|} = \frac{n\,N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x},$$

$$(21\,\mathrm{s}) \ldots (D\mathrm{s})_{x\,\overline{n}|} = \frac{n\,N_x - S_{x+1} + S_{x+n-1}}{D_{x+n-1}},$$

$$(22\,\mathrm{a}) \ldots (I\mathrm{a})_{x\,\overline{n}|} = -\frac{n\,N_{x+n} - S_x + S_{x+n}}{D_x},$$

$$(22\,\mathrm{s}) \ldots (I\mathrm{s})_{x\,\overline{n}|} = = \frac{n\,N_{x+n} - S_x + S_{x+n}}{D_{x+n-1}}.$$

De tellers hebben betrekking op de leeftijden der uitkeeringen, de noemers op de leeftijden voor de tijdstippen, waarop de waarde berekend wordt.

Geschiedt de waardeberekening in de drie a-formules op een tijdstip, vallende één jaar vóór de eerste uitkeering en neemt men aan dat de leeftijd bij deze uitkeering $x + 1$ bedraagt. dan vindt men onmiddellijk de correspondeerende a-formules door in de linkerleden a in a te veranderen en in de tellers der rechterleden x met 1 te vermeerderen.

Geschiedt de waardeberekening in de drie s-formules op een tijdstip, vallende één jaar ná de laatste uitkeering, en laat men x zijn beteekenis van leeftijd bij de eerste uitkeering behouden, dan vindt men de correspondeerende s-formules door in de linkerheden s in s te veranderen en in de noemers der rechterleden x met 1 te vermeerderen.

Alzoo:

$$(20\,a) \quad . \quad . \quad . \quad a_{x\,\overline{n}|} = a_{x\,\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x},$$

$$(20\,s) . \quad . \quad . \quad . \quad s_{x\,\overline{n}|} = s_{x\,\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}},$$

$$(21\,a) . \quad . \quad (Da)_{x\overline{n}|} = \frac{n\,N_{x+1} - S_{x+2} + S_{x+n+2}}{D_x},$$

$$(21\,s) . \quad . \quad (Ds)_{x\,\overline{n}|} = \frac{n\,N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_{x+n}},$$

$$(22\,a) . \quad . \quad (Ia)_{x\,\overline{n}|} = -\frac{n\,N_{x+n+1} - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x},$$

$$(22\,s) . \quad . \quad (Is)_{x\,\overline{n}|} = \frac{n\,N_{x+n} - S_x + S_{x+n}}{D_{x+n}}.$$

Tusschen correspondeerende a- en s-formules bestaat volgens (14) het verband:

$$(\mathrm{v\ a})_{x\,\overline{n}|}\,D_x = (\mathrm{v\ s})_{x\,\overline{n}|}\,D_{x+n-1}.$$

Dit verband vervalt evenwel bij correspondeerende a- en s-formules, omdat in eerstgenoemden x den leeftijd een jaar vóór de

eerste uitkeering, in laatstgenoemden den leeftijd bij de eerste uitkeering voorstelt.

§ 2. Het dualistisch verband voor verzekeringen bij overlijden.

Wij merken nu op, dat men in (1) het accent van m op x mag overbrengen, mits men in den teller van het rechterlid D door C vervangt. Het is van te voren duidelijk, dat het dóórvoeren van deze wijziging in de drie a-formules neerkomt op het vervangen van a door A, benevens het plaatsen van een accent op x in de linkerleden en op het één plaats in het alphabet terugschuiven der hoofdletters in de tellers der rechterleden.

Men vindt zoodoende voor de koopsommen der tijdelijke verzekeringen bij overlijden:

$$(20\,A) \quad . \quad . \quad . \quad A^1_{x\,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x},$$

$$(21\,A) \quad . \quad . \quad (DA)^1_{x\,\overline{n}|} = \frac{n\,M_x - R_{x+1} + R_{x+n+1}}{D_x},$$

$$(22\,A) \quad . \quad . \quad (IA)^1_{x\,\overline{n}|} = -\frac{n\,M_{x+n} - R_x + R_{x+n}}{D_x}.$$

(20 A) en (21 A) laten zich, evenals de correspondeerende formules (20 a) en (21 a), door directe sommatie afleiden:

$$_{m\,|\,1}A_x = \frac{C_{x+m}}{D_x},$$

$$A^1_{x\,\overline{n}|} = \sum_{m=0}^{m=n-1} {}_{m\,|\,1}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x},$$

$$(DA)^1_{x\,\overline{n}|} = \sum_{m=1}^{m=n} A^1_{x\,\overline{m}|} = \frac{1}{D_x}\left(n\,M_x - \sum_{m=1}^{m=n} M_{x+m}\right).$$

Het rechterlid van deze vergelijking voert in verband met de definitie:

$$R_x = \sum_{x}^{\infty} M_m,$$

tot (21 A).

Uit de beteekenis der symbolen volgt vanzelf, analoog aan de evenzeer voor lijfrenten geldende formule (5a) van Hoofdstuk II, § 4:

(23) . . . $(DA)^{1}_{x\,\overline{n}|} + (IA)^{1}_{x\,\overline{n}|} = (n+1)\,A^{1}_{x\,\overline{n}|}$.

Uit deze betrekking leidt men (22 A) gemakkelijk af.

Toepassing van letterverwisseling, juist zooals deze bij de lijfrenten plaats kon vinden, is hier uitgesloten, omdat er tusschen de aanvangs- en de slotwaarden der koopsommen geen dualistisch verband kan worden aangetoond; de laatstgenoemden zijn namelijk allen nul. Door te bedenken, dat de slotwaarden der lijfrenten de beteekenis hebben van retrospectieve reserve-formules per eenheid van premie voor verzekeringen bij leven, kan men echter inzien dat dit verband moet bestaan tusschen de contante waarde der eerste n premiën P eener verzekering bij overlijden met m jarigen duur en de retrospectieve reserve-formule, geldende een jaar na betaling der n^{e} premie, of wel, als men de retrospectieve reserve per eenheid van premie voorstelt door ${}_{n}S^{1}_{x\,\overline{m}|}$, tusschen laatstgenoemd symbool en $a_{x\,\overline{n}|}$.

Betaalt een x jarige aan het begin van een jaar een premie P op voorwaarde dat, indien hij in den loop van dat jaar overlijdt, hem een kapitaal 1 wordt uitgekeerd, dan klimt P na n jaar tot:

$$\frac{D_x}{D_{x+n}}\left(P - \frac{C_x}{D_x}\right).$$

De eenheid van premie klimt dus tot:

$$\frac{1}{D_{x+n}}\left(D_x - \frac{C_x}{P}\right),$$

waaruit:

$${}_{n}S^{1}_{x\,\overline{m}|} = \frac{1}{D_{x+n}} \sum_{r=0}^{r=n-1} \left(D_{x+r} - \frac{C_{x+r}}{P}\right).$$

Men komt ook tot deze betrekking door in het rechterlid van:

$$a_{x\,\overline{n}|} = \frac{\sum_{r=0}^{r=n-1} D_{x+r}}{D_x} -$$

aanvangsleeftijd en bereikten leeftijd te verwisselen — wat den teller onveranderd laat — en vervolgens in den teller D door:

$$D - \frac{C}{P}$$

te vervangen.

Daar deze omzettingen zich, ook al voert men geen hoogere commutatieteekens dan D en C in, niet beperken tot de leeftijden, kan men wel zeggen, dat het beginsel der letterverwisseling zijn practische beteekenis verliest, zoodra er sprake is van uitkeeringen bij overlijden; voor lijfrenten en verzekeringen bij leven kan men er echter zeer wel gebruik van maken, terwijl de daardoor ontstane meer algemeene bekendheid met de slotwaarden, waarvoor de officieele notatie ten aanzien van verzekeringen zelfs nog geen symbolen aangeeft, allicht zal leiden tot vermijding van het nog vaak voorkomend gebruik van contante waarden waar zulks volstrekt niet aangewezen is.

HOOFDSTUK VI.

WAARDEBEPALINGEN.

§ 1. Klimmende en dalende lijfrenten.

Aan het einde van het vorige hoofdstuk werd de meening uitgesproken, dat meerdere bekendheid met de slotwaarden zou kunnen leiden tot vermijding van het nog vaak voorkomend gebruik van contante waarden, waar deze rekenwijze niet werkelijk de kortste is.[1]) Zoo wordt bijvoorbeeld gewoonlijk de regel over het hoofd gezien, dat men voor een reeks van geleidelijk veranderende uitkeeringen de waarde het gemakkelijkst berekent voor het tijdstip, waarop de uitkeering het grootst is, daar zij dan gevonden kan worden door sommatie van de waarden van niet uitgestelde gelijkblijvende uitkeeringen; de waarde op ieder ander tijdstip is hieruit gemakkelijk af te leiden.

Hoewel voor dezen regel kennis der slotwaarden gewenscht is, vereischt zijn toepassing toch niet steeds het gebruik daarvan, wanneer aanvangswaarden gezocht worden, aangezien bijvoorbeeld de

[1]) De overweging, dat contante waarden dikwijls gebezigd worden waar het gebruik van slot- of aangegroeide waarden de voorkeur zou verdienen, gaf onder meer L. J. Harmsen aanleiding tot het publiceeren van een studie „Berekeningen in de Levensverzekeringswiskunde op te bouwen uit het verleden". (Batavia 1909). Dit boek wordt hier slechts volledigheidshalve, doch, uitgezonderd dan wat de aanleiding tot de publicatie betreft, zonder verdere instemming aangehaald. Vgl. Dr. G. J. D. Mounier. Boekbeschouwing. Archief Verz. W. IX (1907), p. 560.

minder gemakkelijk berekenbare contante waarden van klimmende uitkeeringen steeds met behulp van:

$$(1) \quad \ldots \quad (Da)_{x\,\overline{n}|} + (Ia)_{x\,\overline{n}|} = (n+1)\,a_{x\,\overline{n}|},$$

of van de daaraan analoge formules, in contante waarden van dalende uitkeeringen kunnen worden omgezet. Maar wat de regel wèl vereischt, is de invoering van de tot dusverre nog niet gebruikelijke symbolen voor de contante en geklommen waarden van dalende annuiteiten en lijfrenten in de theorie van renterekening en levensverzekering.

Deze invoering heeft zoowel theoretische als practische voordeelen. Vragen wij bijvoorbeeld naar de afleiding voor de formule van $(Ia)_{x\,\overline{n}|}$.

Uit de vanzelf sprekende betrekking (1) volgt in verband met:

$$(Da)_{x\,\overline{n}|} = \sum_{m=1}^{m=n} a_{x\,\overline{m}|},$$

terstond:

$$(Ia)_{x\,\overline{n}|} = \frac{(n+1)(N_x - N_{x+n}) - \sum_{m=1}^{m=n} (N_x - N_{x+m})}{D_x},$$

$$(Ia)_{x\,\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n\,N_{x+n}}{D_x}.$$

De gewoonlijk gegeven afleiding dezer formule is, hoewel misschien schijnbaar eenvoudiger, inderdaad toch gekunstelder. Men vindt bijvoorbeeld bij E. Czuber: [1])

„Die auf n Jahre abgekürzte, mit 1 beginnende und jährlich um „1 steigende Rente auf das Leben (x) werde mit $(Ia)_{x\,\overline{n}|}$ bezeichnet; „zunächst ergibt sich für sie der Ausdruck:

$$(Ia)_{x\,\overline{n}|} = \frac{D_x + 2\,D_{x+1} + 3\,D_{x+2} + \ldots\ldots n\,D_{x+n-1}}{D_x};$$

„mit hilfe der Kolumnen N und S läszt aber der Zähler eine ein„fachere Berechnung zu; es ist nähmlich:

---

[1]) Wahrscheinlichkeitsrechnung, II. (B. G. Teubner. 1910). p. 249.

$$D_x + D_{x+1} + \ldots\ldots D_{x+n-1} = N_x \qquad - N_{x+n},$$

$$D_{x+1} + \ldots\ldots D_{x+n-1} = N_{x+1} \qquad - N_{x+n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_{x+n-1} = N_{x+n-1} - N_{x+n};$$

„die Summen der linken Seiten ergibt den Zähler, die der rech-„ten ist:

$$S_x - S_{x+n} - n\,N_{x+n};$$

„mithin hat man:

$$(Ia)_{x\,\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n\,N_{x+n}}{D_x}.\text{„}$$

De ontbinding van den teller is wel eenvoudig, maar zij ligt in den gedachtengang van Czuber en andere leerboeken in het minst niet voor de hand, terwijl bij de eerste wijze van afleiding der formule de beschouwing van $(Da)_{x\,\overline{n}|}$ als som van gelijkblijvende lijfrenten geheel overeenkomt met de wijze waarop dit symbool is ingevoerd. [1])

De practische voordeelen, aan de invoering van $(Da)_{x\,\overline{n}|}$ verbonden, zijn vrij belangrijk, want niet alleen voor het afleiden der formule van $(Ia)_{x\,\overline{n}|}$, maar ook bij het uitvoeren van becijferingen, waarin klimmende lijfrenten voorkomen, kan $(Da)_{x\,\overline{n}|}$ goeden dienst bewijzen, daar de berekening van een tafel van $(Ia)_{x\,\overline{n}|}$ veel meer arbeid kost dan het samenstellen van een tafel van $(Da)_{x\,\overline{n}|}$, terwijl invoering van laatstgenoemde grootheid de betrokken formule niet veel ingewikkelder maakt. Wij zullen dit laten zien voor de berekening van premiën met zoogenaamd gegarandeerd klimmend dividend, of, juister gezegd, van afdalende premiën, in de onderstelling, dat men — gelijk de practijk dit somtijds eischt — een geheel tarief van dergelijke premiën heeft samen te stellen. Voor enkele afzonderlijke gevallen loont het samenstellen van een aparte tafel, hoe eenvoudig deze ook zij, vanzelf de moeite niet.

---

[1]) Vgl. Hoofdstuk V, § 1, form. (9).

§ 2. Verzekeringen met afdalende premiën.

Wanneer een verzekering, waarbij de duur der premiebetaling beperkt is, zeggen wij bijvoorbeeld een gemengde verzekering, gesloten is op voorwaarde dat de premie P gedurende vijf jaar constant zal blijven, om vervolgens ieder jaar te verminderen met een zeker percentage, bijvoorbeeld 3 procent, van alle betaalde premiën, dan vindt men zonder eenige berekening, door te stellen:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 0.03\ P = p,$$

en door de koopsom te beschouwen als de contante waarde der te ontvangen premiën:

$$(2) \quad \ldots \quad A_{x\,\overline{n}|} = P\mathrm{a}_{x\,\overline{n}|} - p\,(Ia)_{x\,\overline{n-1}|} + p\,(Ia)_{x\,\overline{4}|}.$$

Deeling door P geeft in verband met (1) voor de contante waarde der veranderlijke lijfrente:

$$(3) \quad \ldots \quad (\mathrm{va})_{x\,\overline{n}|} = \mathrm{a}_{x\,\overline{n}|} - 0.03\,(Ia)_{x\,\overline{n-1}|} + 0.03\,(Ia)_{x\,\overline{4}|}.$$

Stelt men de contante waarde eener dalende praenumerando lijfrente voor door:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{m=1}^{m=n} \mathrm{a}_{x\,\overline{m}|} = (D\mathrm{a})_{x\,\overline{n}|},$$

dan is, daar men een klimmende lijfrente kan beschouwen als het verschil van een gelijkblijvende en een dalende:

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad (Ia)_{x\,\overline{n-1}|} = n\,\mathrm{a}_{x\,\overline{n}|} - (D\mathrm{a})_{x\,\overline{n}|}.$$

Stelt men in (3):

$$0.03\,(Ia)_{x\,\overline{4}|} = K,$$

dan is K voor denzelfden leeftijd bij verschillenden duur een constante, die het gemakkelijkst bepaald wordt met behulp van de uit (5) volgende betrekking:

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad K = 0.03\,[5\,\mathrm{a}_{x\,\overline{5}|} - (D\mathrm{a})_{x\,\overline{5}|}].$$

(3) gaat thans over in:

$$(7) \quad \ldots \quad (\mathrm{va})_{x\,\overline{n}|} = (1 - 0.03\,n)\,\mathrm{a}_{x\,\overline{n}|} + 0.03\,(D\mathrm{a})_{x\,\overline{n}|} + K.$$

Maakt men nu door eenvoudige optelling een gewone somtafel van $a_{x\,\overline{m}|}$, dan blijkt uit (4) dat men hieruit iedere waarde van $(Da)_{x\,\overline{n}|}$ terstond kan aflezen; zij doet dus volgens (6) tevens dienst voor de bepaling van K.

De juistheid der somtafel kan desgewenscht onafhankelijk van de optelling gecontroleerd worden door uitsluitend voor de hoogste waarde van n de berekening uit te voeren naar de uit (4) volgende formule:

$$(Da)_{x\,\overline{n}|} = \frac{1}{D_x} \sum_{m=1}^{m=n} (N_x - N_{x+m}),$$

$$(8) \quad \ldots \quad (Da)_{x\,\overline{n}|} = \frac{n\,N_x - S_{x+1} + S_{x+n+1}}{D_x}.$$

Deze somtafels, welker vervaardiging vooral met een zelfschrijvende optelmachine zeer snel verloopt, hebben onder meer het voordeel, dat zij bruikbaar blijven wanneer het aantal jaren gedurende hetwelk men de premie contant wenscht te houden, verandert; het is alleen de waarde van K, die in dit geval een wijziging ondergaat. Ook deze nieuwe waarde van K wordt met behulp der tafels gemakkelijk gevonden.

De gezochte premie is het quotient van $A_{x\,\overline{n}|}$ en $(va)_{x\,\overline{n}|}$ uit (7).

Voor de berekening der renten met klimmenden leeftijd en dalenden duur, gelijk men deze voor de reserve noodig heeft, bedenke men, dat de premie na een m-jarig bestaan der verzekering $P - mp$ bedraagt, mits m niet kleiner zij dan 5; voor de volgende jaren wordt zij $P - mp - p$, $P - mp - 2p$, $P - mp - 3p$, enz.

Voor de contante waarde der lijfrente na het m-jarig bestaan vindt men derhalve onder de voorwaarde $m \geqq 5$, door de contante waarde der premiën in (2) met weglating van $p\,(Ia)_{x\,\overline{4}|}$ door P te deelen:

$$(9) \quad {}_m(va)_{x\,\overline{n}|} = (1 - 0.03\,m)\,a_{x+m\,\overline{n-m}|} - 0.03\,(Ia)_{x+m|\,\overline{n-m-1}|},$$

of met behulp van (5):

$$(10) \quad {}_m(va)_{x\,\overline{n}|} = (1 - 0.03\,n)\,a_{x+m\,\overline{n-m}|} + 0.03\,(Da)_{x+m\,\overline{n-m}|}.$$

Is $m < 5$, dan moet hierbij nog rekening worden gehouden met het feit, dat de premie gedurende de eerste vijf verzekeringsjaren constant blijft. Zoo zal voor $m = 2$ het rechter lid vermeerderd moeten worden met de contante waarde der $5 - 2 = 3$ gedeeltelijke premiën $\frac{2\,p}{P}$, $\frac{3\,p}{P}$ en $\frac{4\,p}{P}$, dat is dus met:

$$_2K = 0.03\,[2\,a_{x+2\,\overline{5-2|}} + (Ia)_{x+2\,\overline{5-3|}}],$$

of algemeen met:

$$_mK = 0.03\,[m a_{x+m\,\overline{5-m|}} + (Ia)_{x+m\,\overline{5-m-1|}}].$$

Hiervoor kan met behulp van (5) weer geschreven worden:

(11) . . $_mK = 0.03\,[5\,a_{x+m\,\overline{5-m|}} - (Da)_{x+m\,\overline{5-m|}}]$.

Door vergelijking van (6) en (11) blijkt, dat men $_mK$ uit K vindt door op de daarin voorkomende lijfrenten de leeftijdsverhooging en duurvermindering m toe te passen, terwijl de duur 5, welke er als losse factor in voorkomt, onveranderd blijft. Ditzelfde geldt blijkens (7) en (10) ook voor de uitdrukkingen $_m(va)_{x\,\overline{n|}}$ en $(va)_{x\,\overline{n|}}$; hierbij is het de losse factor n, welke niet verandert.

De algemeene formule der rente na m-jarig bestaan der verzekering wordt derhalve:

(12) $_m(va)_{x\,\overline{n|}} = (1 - 0.03\,n)\,a_{x+m\,\overline{n-m|}} + 0.03\,(Da)_{x+m\,\overline{n-m|}} + {}_mK$.

De substitutie $m \geqq 5$ in (11) doet $_mK$ vanzelf nul worden, daar algemeen:

$$a_{x\,\overline{n-m|}} = (Da)_{x\,\overline{n-m|}} = 0$$

voor $m \geqq n$.

§ 3. Slot.

De in § 1 vermelde regel, dat voor een reeks van geleidelijk veranderende uitkeeringen de waarde het gemakkelijkst bepaald wordt voor het tijdstip waarop de uitkeering het grootst is, geldt natuurlijk evenzeer voor het meer eenvoudige geval, dat de uitkeeringen gedurende een zekeren tijd constant zijn, daarna sprongsgewijze veranderen om vervolgens constant te blijven. Zij wordt ook hier

dikwijls verwaarloosd. Bij de bepaling van de contante waarde eener uitgestelde lijfrente, waar dus de waarde gevonden moet worden voor een oogenblik waarop de uitkeeringen nog de grootte nul hebben, ziet men door toepassing van:

$$m|n\, a_x = a_{x\,\overline{m+n}|} - a_{x\,\overline{m}|},$$

den regel gewoonlijk wel in acht nemen. Anders is het echter gesteld bij kwesties van iets ingewikkelder aard.

Nemen wij bijvoorbeeld het volgende vraagstuk, opgegeven door de Commissie uit de Vereeniging van Wiskundige Adviseurs, belast met het examineeren van hen, die in 1911 den titel van Candidaat-Actuaris wilden verwerven.

Een vereeniging heeft een schuld van f 10.000, die zij als volgt in 20 jaren moet terugbetalen: gedurende de eerste 10 jaren betaalt zij een postnumerando annuïteit, die half zoo groot is, als die, welke zij gedurende de laatste 10 jaren betaalt.

Hoe groot is die annuïteit gedurende de eerste 10 jaren?

Rentevoet 4 pCt.

$$Log\ 1.04 = 0.0170333.$$

De Commissie publiceert[1]) zelf als de oplossing, welke zij voor de juiste houdt, de volgende:

„Zij de annuïteit der eerste 10 jaren x, dan kan ter bepaling „van x de volgende vergelijking worden opgesteld:

(13)

$$10000 = \frac{x}{1+i} + \frac{x}{(1+i)^2} + \cdots \frac{x}{(1+i)^{10}} + \frac{2x}{(1+i)^{11}} + \cdots \frac{2x}{(1+i)^{20}},$$

$$10000 = x \left\{ \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{20}}}{i} + \frac{\frac{1}{(1+i)^{10}} - \frac{1}{(1+i)^{20}}}{i} \right\};$$

„waaruit volgt:

$$(14) \ldots\ldots \quad x = \frac{10000\, i\, (1+i)^{20}}{(1+i)^{20} + (1+i)^{10} - 2}.$$

---

[1]) Examen-opgaven met oplossingen. Negende examen voor Candidaat-Actuaris, gehouden 27 en 28 December 1911. Archief Verz. W. XII (1912), p. 444.

Berekening.

$10\ log\ (1+i) = 0.17033$ $\qquad$ $(1+i)^{10} = 1.4802$

$20\ log\ (1+i) = 0.34067$ $\qquad$ $(1+i)^{20} = 2.1911$

3.6713

$2. —$

noemer 1.6713

$log\ 10000\ i = 2.60206$

$20\ log\ (1+i) = 0.34067$

$c\ log\ 1.6713 = 9.77695 — 10$

$log\ x = 2.71968$

$x = 524.42$

$2\ x = 1048.84.$"

Al mag men den candidaat-actuaris op een examen een dergelijke wijze van oplossen niet als onjuist aanrekenen, zoo behoort zij m. i. toch om twee redenen door den actuaris vermeden te worden.

In de eerste plaats omdat de gebruikelijke symbolen niet zijn gebezigd. De oplossing had namelijk terstond neergeschreven kunnen worden in den vorm:

(15) . . . . . $10000 = x\,(a_{\overline{20}|} + v^{10}\,a_{\overline{10}|})$.

In de practijk zou men nu x becijferen met behulp van een tafel van $a_{\overline{n}|}$ en van v^n; maar ook al wil men op een examen ten behoeve van het onderzoek naar de cijfervaardigheid van den examinandus zoodanige tafels niet ter beschikking stellen, dan behoort de oplossing toch niet gegeven te worden in den vorm (13), maar in den vorm (15). Daarnà kan men haar zoo noodig in (14) omzetten.

De oplossing (13) is zuiver algebraisch en kan geleverd worden door iemand, die nooit actuarieel onderwijs heeft genoten. De taak van dit laatste is juist om annuïteiten, uitgestelde annuïteiten, lijfrenten, en andere grootheden, waarvan men de waarden in tafels kan vinden, terstond als zoodanig te doen herkennen en zonder

bemiddeling van reeksen in symbolen te doen neerschrijven.[1]) De leerling in de algebra mag de oplossing (13) geven, doch de actuaris behoort onmiddellijk de oplossing (15) te zien, en mag zich eerst daarnà bedenken dat deze, als de omstandigheden dit eischen, in de vormen (13) of (14) kan worden omgezet.

De tweede reden waarom de oplossing der Commissie, en evenzeer de in (15) gegevene, mij niet aanbevelenswaardig schijnt, is dat zij den regel, dat waardebepalingen gewoonlijk het best geschieden naar de zijde van de grootste uitkeering, niet in acht neemt. De met inachtneming hiervan neergeschreven betrekking:

$$(16) \ldots\ldots \quad 10000\, v^{-21} = x\,(s_{\overline{20}|} + s_{\overline{10}|}),$$

geeft het resultaat:

$$x = 524{,}39$$

met minder becijfering dan (15).

Men bedenke, dat vele leerboeken over renterekening en o. a. ook de algemeen verspreide „Nederlandsche Almanak voor Levens-„verzekering", niet alleen tafels van v^n, v^{-n} en $a_{\overline{n}|}$, maar ook van $s_{\overline{n}|}$ bevatten. Beschikt men, gelijk in Textbook I, niet over een tafel van $s_{\overline{n}|}$, doch wel over een van $s_{\overline{n}|}$ (aldaar $s_{\overline{n}|}$ genoemd), dan schrijve men voor (16):

$$10000\, v^{-20} = x\,(s_{\overline{20}|} + s_{\overline{10}|}).$$

In het hier besproken vraagstuk is de becijfering volgens (16) slechts dáárom korter dan die volgens (15), omdat de schuld een rond getal is en er dus in het linkerlid van (16) geen vermenigvuldiging behoeft plaats te vinden.

Heeft het bedrag der schuld geen ronden vorm, dan zijn de bewerkingen voor dit geval in lengte gelijk, maar bij een iets ingewikkelder gedaante van het vraagstuk is men met formule (16) steeds

---

[1]) Zelfs in vele nieuwere leerboeken wordt dit m. i. te veel uit het oog verloren. Men zie b.v. de behandeling der renterekening in de laatste uitgave van: C. L. Landré. Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung. Jena. 1911.

[2]) Samengesteld door W. Gosler. Uitgaaf boekdrukkerij v/h. Gebr. Binger.

in het voordeel. Neemt bijvoorbeeld de annuïteit, waarmede de schuld gedelgd wordt, gedurende de laatste jaren nog eenmaal op dezelfde wijze in grootte toe, dan vermeerdert dit de bewerking in (15) met een vermenigvuldiging en een optelling, doch in (16) slechts met een enkele optelling.

Beter is het nog, om den bedoelden regel voor waardebepalingen toe te passen volgens de boven [1]) genoemde methode, dat is hier door gebruikmaking van:

$$m|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}.$$

Men vindt:

$$10000 = 2x\, a_{\overline{20}|} - x\, a_{\overline{10}|},$$

$$x = \frac{10000}{2\, a_{\overline{20}|} - a_{\overline{10}|}} = 524{,}39.$$

Voor het thans behandelde geval zijn de verschillen in gemakkelijkheid der becijfering volgens de onderscheiden methoden van oplossing slechts gering, zoodat de hieraan gewijde bespreking overbodig schijnt, doch bij ingewikkelder vraagstukken treedt het belang eener goede methode veel sterker op den voorgrond.

En het is ten slotte toch juist het zoeken naar de eenvoudigste methode van oplossing, waar het in de politieke rekenkunde eigenlijk om gaat. De vóórkomende problemen zijn zelden van zóó ingewikkelden aard, dat hij, die slechts een oppervlakkige studie van de politieke rekenkunde heeft gemaakt, er geen oplossing voor zal weten te geven, zij het dan ook ten koste van veel gecijfer, en daardoor ook met veel kans op fouten. Maar wat de voortgezette studie kan leeren, dat is het als van nature geven van de oplossing, die zèlf met het geringst aantal algebraische bewerkingen gevonden kan worden, en welker berekening in verband met de beschikbare tafels en andere rekenmiddelen het minste gecijfer kost en daardoor de grootste kans biedt op een juist resultaat.

Dat ter vergemakkelijking van het bereiken van dit doel de invoering eener universeele notatie van zeer groot belang is geweest,

[1]) p. 103.

behoeft wel geen betoog; aan te toonen, dat zij nog wijziging en aanvulling behoeft, is almede een doel geweest, dat ik mij bij het samenstellen van mijn proefschrift voor oogen heb gesteld.

De uitspraak „Les Mathématiques, c'est l'art de donner le juste „nom aux justes choses", die, naar ik meen, aan POINCARÉ te danken is,[1]) geldt niet in meerdere mate voor de zuivere wiskunde dan voor de toegepaste; en, al zal de actuaris moeilijk kunnen instemmen met de door dezen schrijver geuite zinsnede: „Les *seuls* „faits mathématiques dignes de retenir notre attention et suscepti- „bles d'être utiles, sont ceux qui peuvent nous faire connaître une „loi mathematique",[2]) zoo zal toch ook hij zich bij de opstelling en bewerking zijner formules zooveel mogelijk moeten laten leiden door „le sentiment de la beauté mathématique, de l'harmonie des „nombres et des formes",[3]) dat in de zuivere wiskunde zulk een groote rol speelt.

---

[1]) Vgl. hiervoor „Science et Methode". Paris. FLAMMARION. 1909. p. 140.
[2]) Ibid. p. 58. Curs. van mij.
[3]) Ibid. p. 57.

HOOFDSTUK VII.

RENTETAFELS.

§ 1. Toelichting.

Uit het in Hoofdstuk IV ter sprake gebrachte artikel van Dr. B. Turksma [1]) blijkt, dat de in genoemd hoofdstuk behandelde uitdrukkingen voor den koers van effecten bij gegeven uitlotingswijze, reëelen en nominalen rentevoet, aan een practische behoefte voldoen. De schrijver heeft dan ook aan zijn artikel tafels [2]) toegevoegd van de waarden van drie verschillende vormen, welke een rol speelden in de door hem gevonden uitdrukkingen. Deze laatsten kunnen echter worden omgezet in de in Hoofdstuk IV voorkomende eenvoudiger vormen.

De toepassing van de het meest voor de practijk geschikte formules [3]) maakt naast de bestaande tafels van:

$$a_{\overline{n}|} \text{ en } \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

het bezit van een tafel van:

$$\frac{1}{n}(Da)_{\overline{n}|}$$

gewenscht, welke daarom hierachter wordt gegeven.

---

[1]) „Het bepalen der reëele rente van effecten". Archief Verz. W. VIII. (1906). p. 1.

[2]) Zie hierover: „Koers en Rente". Archief Verz. W. XI. (1910). p. 344.

[3]) Hoofdstuk IV. § 5, form. (33).

De bewerking is geschied door de waarden $a_{\overline{n}|}$, afgerond op 7 decimalen, naar n te sommeeren en de gevonden sommen door de correspondeerende waarden van n te deelen. De waarden van $a_{\overline{n}|}$ zijn hierbij door omstandigheden ontleend aan drie verschillende tafels, namelijk die van BAERLOCHER, PEREIRE en WERKER [1]).

Ter contrôle van de gevonden somtafel zijn de waarden van $(Da)_{\overline{n}|}$ voor $n = 25$, 50, 75 en 100 ook berekend met behulp van:

$$(Da)_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}.$$

De uitkomst mag met de waarden van $(Da)_{\overline{n}|}$, gevonden volgens de eerste methode, slechts een gering verschil in de laatste decimalen opleveren. [2])

De contrôle van de in 5 decimalen gegeven tafel van:

$$\frac{1}{n}(Da)_{\overline{n}|}$$

is geschied, door de waarden dezer grootheid ook te berekenen volgens de formule:

---

[1]) Voor volledige titels zie „Aangehaalde litteratuur."

Oorspronkelijk werd alleen BAERLOCHER gebezigd, waarin voor de tafel van $a_{\overline{n}|}$ de rentevoet tusschen 2 en 5 procent met $\frac{1}{2}$ procent opklimt. Een later genomen besluit om binnen deze grenzen den rentevoet met $\frac{1}{4}$ procent te doen stijgen, maakte het gebruik van een andere tafel noodzakelijk, waarvoor PEREIRE gekozen werd. Hierin bleek echter de rentevoet $4^1/_4$ en $4^3/_4$ te ontbreken.

[2]) Bij deze contrôle kwamen in de tafel van BAERLOCHER voor $a_{\overline{n}|}$ — aldaar genoteerd $f_n(i)$ —, de volgende drukfouten aan het licht:

Voor $i = 2\%$, $n = 100$, (p. 157) staat 42,0983516 in plaats van 43,0983516.

Voor $i = 4\frac{1}{2}\%$, $n = 38$, (p. 166) staat 17,0499902 in plaats van 18,0499902.

Voor $i = 5\%$, $n = 62$, (p. 169) staat 18,0288340 in plaats van 19,0288340.

Met het oog op de hier gevonden fouten zijn de aan BAERLOCHER ontleende waarden van $a_{\overline{n}|}$ voor $n = 25$, 50, 75 en 100, welke voor contrôle van de tafel van $(Da)_{\overline{n}|}$ gebezigd zijn, vergeleken met correspondeerende waarden uit de tafel van PEREIRE, en accoord bevonden.

$$\frac{1}{n}(Da)_{\overline{n}|} = \frac{1 - \frac{1}{n} a_{\overline{n}|}}{i},$$

waarbij:

$$\frac{1}{n} a_{\overline{n}|}$$

in 7 decimalen genomen is.

Dat de uitkomsten van beide methoden in de vijfde decimaal een verschil van 1 mogen vertoonen, blijkt reeds terstond uit de becijfering voor $n = 2$ en $i = 0{,}01$. Het verschil is nimmer grooter dan 1.

De voor deze contrôlerekening benoodigde tafel van:

$$\frac{1}{n} a_{\overline{n}|},$$

is na afronding op 5 decimalen mede afgedrukt, daar zij dienst kan doen om de volgens form. (33 β) verrichte koersbepalingen gemakkelijk met behulp van form. (32 β) te controleeren, terwijl zij ook bij vraagstukken van anderen aard somtijds toepassing kan vinden. Door haar gebruik als contrôlemiddel voor de berekening van:

$$\frac{1}{n}(Da)_{\overline{n}|}$$

is zij tegelijk zelf gecontroleerd, daar wegens de deeling door i een fout in de eerste tafel zich i^{-1} maal vergroot in de daaruit berekende tafel der dalende annuïteiten zal voordoen. Voor een rentevoet, inliggende tusschen 1 % en 7%, varieert i^{-1} van 100 tot 14.

§ 2.

TAFEL VAN:

$$\frac{1}{n}\, a_{\overline{n}|}.$$

$\frac{1}{n}\, a_{\overline{n}|}$

n	1 %	2 %	$2^1/_2$ %	$2^3/_4$ %	3 %	n
1	0,99010	0,98039	0,97561	0,97324	0,97087	1
2	0,98520	0,97078	0,96371	0,96021	0,95673	2
3	0,98033	0,96129	0,95201	0,94742	0,94287	3
4	0,97549	0,95193	0,94049	0,93486	0,92927	4
5	0,97069	0,94269	0,92917	0,92252	0,91594	5
6	0,96591	0,93357	0,91802	0,91039	0,90287	6
7	0,96117	0,92457	0,90706	0,89849	0,89004	7
8	0,95646	0,91569	0,89627	0,88679	0,87746	8
9	0,95178	0,90692	0,88565	0,87530	0,86512	9
10	0,94713	0,89826	0,87521	0,86401	0,85302	10
11	0,94251	0,88971	0,86493	0,85292	0,84115	11
12	0,93792	0,88128	0,85481	0,84202	0,82950	12
13	0,93336	0,87295	0,84486	0,83131	0,81807	13
14	0,92884	0,86473	0,83507	0,82079	0,80686	14
15	0,92434	0,85662	0,82543	0,81045	0,79586	15
16	0,91987	0,84861	0,81594	0,80029	0,78507	16
17	0,91543	0,84070	0,80660	0,79030	0,77448	17
18	0,91101	0,83289	0,79741	0,78049	0,76408	18
19	0,90663	0,82518	0,78836	0,77084	0,75388	19
20	0,90228	0,81757	0,77946	0,76136	0,74387	20
21	0,89795	0,81006	0,77069	0,75205	0,73405	21
22	0,89365	0,80264	0,76206	0,74289	0,72441	22
23	0,88938	0,79531	0,75357	0,73388	0,71494	23
24	0,88514	0,78808	0,74521	0,72503	0,70565	24
25	0,88093	0,78094	0,73698	0,71633	0,69653	25

$\frac{1}{n}\, a_{\overline{n}|}$

n	1 %	2 %	2 1/2 %	2 3/4 %	3 %	n
26	0,87674	0,77389	0,72887	0,70778	0,68757	26
27	0,87258	0,76692	0,72089	0,69937	0,67878	27
28	0,86844	0,76005	0,71303	0,69110	0,67015	28
29	0,86434	0,75325	0,70529	0,68297	0,66167	29
30	0,86026	0,74655	0,69768	0,67498	0,65335	30
31	0,85620	0,73993	0,69017	0,66712	0,64518	31
32	0,85217	0,73339	0,68279	0,65939	0,63715	32
33	0,84817	0,72693	0,67551	0,65178	0,62927	33
34	0,84420	0,72055	0,66835	0,64431	0,62152	34
35	0,84025	0,71425	0,66129	0,63695	0,61392	35
36	0,83632	0,70802	0,65434	0,62972	0,60645	36
37	0,83242	0,70188	0,64750	0,62261	0,59911	37
38	0,82854	0,69581	0,64075	0,61561	0,59191	38
39	0,82469	0,68981	0,63411	0,60872	0,58483	39
40	0,82087	0,68389	0,62757	0,60195	0,57787	40
41	0,81707	0,67804	0,62112	0,59529	0,57103	41
42	0,81328	0,67226	0,61478	0,58874	0,56432	42
43	0,80954	0,66655	0,60852	0,58229	0,55772	43
44	0,80581	0,66091	0,60236	0,57594	0,55123	44
45	0,80210	0,65534	0,59629	0,56970	0,54486	45
46	0,79842	0,64983	0,59031	0,56356	0,53860	46
47	0,79476	0,64440	0,58441	0,55751	0,53244	47
48	0,79112	0,63902	0,57861	0,55156	0,52639	48
49	0,78751	0,63372	0,57289	0,54571	0,52044	49
50	0,78392	0,62847	0,56725	0,53994	0,51460	50

$\frac{1}{n} a_{\overline{n}|}$

n	1%	2%	$2^1/_2$%	$2^3/_4$%	3%	n
51	0,78036	0,62329	0,56169	0,53427	0,50885	51
52	0,77681	0,61817	0,55621	0,52869	0,50320	52
53	0,77329	0,61311	0,55082	0,52319	0,49764	53
54	0,76979	0,60812	0,54550	0,51778	0,49218	54
55	0,76631	0,60318	0,54025	0,51246	0,48681	55
56	0,76286	0,59830	0,53509	0,50722	0,48153	56
57	0,75942	0,59348	0,52999	0,50206	0,47633	57
58	0,75601	0,58871	0,52497	0,49697	0,47122	58
59	0,75262	0,58400	0,52002	0,49197	0,46620	59
60	0,74925	0,57935	0,51514	0,48704	0,46126	60
61	0,74590	0,57475	0,51033	0,48219	0,45640	61
62	0,74257	0,57020	0,50559	0,47742	0,45162	62
63	0,73927	0,56571	0,50092	0,47271	0,44692	63
64	0,73598	0,56127	0,49631	0,46808	0,44229	64
65	0,73272	0,55688	0,49176	0,46351	0,43774	65
66	0,72947	0,55255	0,48728	0,45902	0,43326	66
67	0,72625	0,54826	0,48286	0,45459	0,42885	67
68	0,72304	0,54402	0,47850	0,45023	0,42452	68
69	0,71986	0,53983	0,47421	0,44594	0,42025	69
70	0,71669	0,53569	0,46997	0,44171	0,41605	70
71	0,71355	0,53160	0,46579	0,43754	0,41192	71
72	0,71042	0,52756	0,46167	0,43343	0,40785	72
73	0,70732	0,52356	0,45760	0,42938	0,40384	73
74	0,70423	0,51960	0,45359	0,42540	0,39990	74
75	0,70116	0,51569	0,44964	0,42147	0,39602	75

$\frac{1}{n}\,a_{\overline{n}|}$

n	1%	2%	$2\frac{1}{2}$%	$2\frac{3}{4}$%	3%	n
76	0,69811	0,51183	0,44573	0,41759	0,39221	76
77	0,69508	0,50801	0,44189	0,41378	0,38845	77
78	0,69207	0,50423	0,43809	0,41002	0,38474	78
79	0,68908	0,50050	0,43434	0,40631	0,38110	79
80	0,68610	0,49681	0,43065	0,40266	0,37751	80
81	0,68315	0,49316	0,42700	0,39906	0,37398	81
82	0,68021	0,48955	0,42340	0,39551	0,37049	82
83	0,67729	0,48598	0,41986	0,39202	0,36707	83
84	0,67439	0,48245	0,41635	0,38857	0,36369	84
85	0,67150	0,47896	0,41290	0,38517	0,36037	85
86	0,66864	0,47550	0,40949	0,38182	0,35709	86
87	0,66579	0,47209	0,40612	0,37852	0,35387	87
88	0,66295	0,46872	0,40280	0,37526	0,35069	88
89	0,66014	0,46538	0,39952	0,37205	0,34756	89
90	0,65734	0,46208	0,39629	0,36888	0,34447	90
91	0,65456	0,45881	0,39309	0,36576	0,34143	91
92	0,65180	0,45558	0,38994	0,36268	0,33844	92
93	0,64905	0,45239	0,38683	0,35964	0,33549	93
94	0,64632	0,44923	0,38376	0,35664	0,33258	94
95	0,64361	0,44611	0,38073	0,35369	0,32971	95
96	0,64091	0,44301	0,37774	0,35078	0,32689	96
97	0,63823	0,43996	0,37478	0,34790	0,32410	97
98	0,63557	0,43693	0,37186	0,34507	0,32136	98
99	0,63292	0,43394	0,36898	0,34227	0,31866	99
100	0,63029	0,43098	0,36614	0,33951	0,31599	100

$\frac{1}{n}\, a_{\overline{n}|}$

n	$3^1/_4\,\%$	$3^1/_2\,\%$	$3^3/_4\,\%$	$4\,\%$	$4^1/_4\,\%$	n
1	0,96852	0,96618	0,96386	0,96154	0,95923	1
2	0,95328	0,94985	0,94644	0,94305	0,93968	2
3	0,93836	0,93388	0,92944	0,92503	0,92066	3
4	0,92375	0,91827	0,91285	0,90747	0,90215	4
5	0,90944	0,90301	0,89665	0,89036	0,88415	5
6	0,89543	0,88809	0,88085	0,87369	0,86662	6
7	0,88171	0,87351	0,86541	0,85744	0,84957	7
8	0,86828	0,85924	0,85035	0,84159	0,83297	8
9	0,85512	0,84530	0,83564	0,82615	0,81682	9
10	0,84224	0,83166	0,82128	0,81109	0,80109	10
11	0,82962	0,81832	0,80725	0,79641	0,78578	11
12	0,81726	0,80528	0,79356	0,78209	0,77087	12
13	0,80515	0,79252	0,78018	0,76813	0,75635	13
14	0,79328	0,78004	0,76712	0,75451	0,74221	14
15	0,78166	0,76783	0,75435	0,74123	0,72843	15
16	0,77027	0,75588	0,74189	0,72827	0,71502	16
17	0,75911	0,74420	0,72970	0,71563	0,70195	17
18	0,74818	0,73276	0,71780	0,70329	0,68922	18
19	0,73747	0,72157	0,70617	0,69126	0,67681	19
20	0,72697	0,71062	0,69481	0,67952	0,66472	20
21	0,71668	0,69990	0,68370	0,66806	0,65293	21
22	0,70659	0,68941	0,67285	0,65687	0,64145	22
23	0,69671	0,67915	0,66224	0,64595	0,63025	23
24	0,68701	0,66910	0,65187	0,63529	0,61934	24
25	0,67751	0,65926	0,64173	0,62488	0,60869	25

$\frac{1}{n}\,a_{\overline{n}|}$

n	$3^1/_4\,\%$	$3^1/_2\,\%$	$3^3/_4\,\%$	$4\,\%$	$4^1/_4\,\%$	n
26	0,66820	0,64963	0,63181	0,61472	0,59832	26
27	0,65907	0,64020	0,62212	0,60480	0,58819	27
28	0,65012	0,63097	0,61264	0,59511	0,57832	28
29	0,64134	0,62192	0,60337	0,58565	0,56869	29
30	0,63273	0,61307	0,59431	0,57640	0,55930	30
31	0,62429	0,60440	0,58544	0,56737	0,55014	31
32	0,61601	0,59590	0,57677	0,55855	0,54119	32
33	0,60789	0,58758	0,56828	0,54993	0,53247	33
34	0,59992	0,57943	0,55998	0,54151	0,52395	34
35	0,59211	0,57145	0,55186	0,53327	0,51564	35
36	0,58445	0,56362	0,54391	0,52523	0,50752	36
37	0,57693	0,55596	0,53613	0,51737	0,49960	37
38	0,56955	0,54845	0,52852	0,50968	0,49186	38
39	0,56231	0,54109	0,52107	0,50217	0,48431	39
40	0,55521	0,53388	0,51377	0,49482	0,47693	40
41	0,54824	0,52681	0,50664	0,48764	0,46973	41
42	0,54140	0,51988	0,49965	0,48061	0,46269	42
43	0,53469	0,51309	0,49280	0,47374	0,45581	43
44	0,52810	0,50643	0,48610	0,46702	0,44909	44
45	0,52164	0,49990	0,47954	0,46045	0,44253	45
46	0,51529	0,49350	0,47311	0,45401	0,43611	46
47	0,50906	0,48722	0,46681	0,44772	0,42984	47
48	0,50294	0,48107	0,46065	0,44157	0,42371	48
49	0,49693	0,47503	0,45461	0,43554	0,41772	49
50	0,49104	0,46911	0,44870	0,42964	0,41186	50

$\frac{1}{n} a_{\overline{n}|}$

n	$3^1/_4\,\%$	$3^1/_2\,\%$	$3^3/_4\,\%$	$4\,\%$	$4^1/_4\,\%$	n
51	0,48524	0,46331	0,44289	0,42387	0,40613	51
52	0,47956	0,45761	0,43721	0,41822	0,40053	52
53	0,47397	0,45202	0,43164	0,41269	0,39505	53
54	0,46849	0,44654	0,42619	0,40728	0,38969	54
55	0,46310	0,44116	0,42084	0,40197	0,38445	55
56	0,45781	0,43589	0,41559	0,39678	0,37932	56
57	0,45261	0,43071	0,41045	0,39170	0,37430	57
58	0,44751	0,42563	0,40542	0,38672	0,36939	58
59	0,44249	0,42064	0,40048	0,38184	0,36458	59
60	0,43756	0,41575	0,39563	0,37706	0,35988	60
61	0,43272	0,41094	0,39088	0,37238	0,35527	61
62	0,42796	0,40622	0,38622	0,36779	0,35077	62
63	0,42328	0,40159	0,38165	0,36329	0,34635	63
64	0,41869	0,39705	0,37717	0,35888	0,34203	64
65	0,41417	0,39258	0,37277	0,35456	0,33779	65
66	0,40973	0,38820	0,36846	0,35033	0,33365	66
67	0,40536	0,38389	0,36423	0,34618	0,32959	67
68	0,40107	0,37967	0,36007	0,34211	0,32561	68
69	0,39686	0,37551	0,35600	0,33812	0,32171	69
70	0,39271	0,37143	0,35200	0,33421	0,31789	70
71	0,38863	0,36743	0,34807	0,33037	0,31414	71
72	0,38462	0,36349	0,34422	0,32661	0,31047	72
73	0,38068	0,35962	0,34044	0,32291	0,30688	73
74	0,37680	0,35582	0,33672	0,31929	0,30335	74
75	0,37299	0,35209	0,33308	0,31574	0,29989	75

$\frac{1}{n} a_{\overline{n}|}$

n	$3^1/_4\,\%$	$3^1/_2\,\%$	$3^3/_4\,\%$	$4\,\%$	$4^1/_4\,\%$	n
76	0,36924	0,34842	0,32949	0,31225	0,29651	76
77	0,36555	0,34481	0,32598	0,30883	0,29318	77
78	0,36192	0,34127	0,32253	0,30547	0,28992	78
79	0,35835	0,33778	0,31913	0,30218	0,28672	79
80	0,35484	0,33436	0,31580	0,29894	0,28359	80
81	0,35139	0,33099	0,31253	0,29577	0,28051	81
82	0,34799	0,32768	0,30931	0,29265	0,27749	82
83	0,34464	0,32443	0,30615	0,28959	0,27453	83
84	0,34135	0,32123	0,30305	0,28658	0,27162	84
85	0,33811	0,31808	0,30000	0,28363	0,26877	85
86	0,33492	0,31498	0,29700	0,28073	0,26597	86
87	0,33178	0,31194	0,29405	0,27788	0,26322	87
88	0,32869	0,30895	0,29116	0,27509	0,26052	88
89	0,32565	0,30600	0,28831	0,27234	0,25787	89
90	0,32266	0,30310	0,28551	0,26964	0,25526	90
91	0,31971	0,30025	0,28276	0,26698	0,25271	91
92	0,31681	0,29745	0,28005	0,26438	0,25020	92
93	0,31395	0,29469	0,27739	0,26181	0,24773	93
94	0,31114	0,29197	0,27478	0,25929	0,24531	94
95	0,30837	0,28930	0,27220	0,25682	0,24293	95
96	0,30564	0,28667	0,26967	0,25438	0,24059	96
97	0,30295	0,28408	0,26718	0,25199	0,23829	97
98	0,30031	0,28153	0,26473	0,24964	0,23603	98
99	0,29770	0,27902	0,26232	0,24733	0,23381	99
100	0,29513	0,27655	0,25995	0,24505	0,23163	100

$\frac{1}{n} a_{\overline{n}|}$

n	$4^1/_2\,\%$	$4^3/_4\,\%$	$5\,\%$	$6\,\%$	$7\,\%$	n
1	0,95694	0,95465	0,95238	0,94340	0,93458	1
2	0,93633	0,93301	0,92971	0,91670	0,90401	2
3	0,91632	0,91202	0,90775	0,89100	0,87477	3
4	0,89688	0,89166	0,88649	0,86628	0,84680	4
5	0,87800	0,87191	0,86590	0,84247	0,82004	5
6	0,85965	0,85275	0,84595	0,81955	0,79442	6
7	0,84181	0,83417	0,82662	0,79748	0,76990	7
8	0,82449	0,81613	0,80790	0,77622	0,74641	8
9	0,80764	0,79862	0,78976	0,75574	0,72391	9
10	0,79127	0,78163	0,77217	0,73601	0,70236	10
11	0,77536	0,76514	0,75513	0,71699	0,68170	11
12	0,75155	0,74913	0,73860	0,69865	0,66189	12
13	0,74483	0,73358	0,72258	0,68098	0,64290	13
14	0,73020	0,71848	0,70705	0,66393	0,62468	14
15	0,71597	0,70382	0,69198	0,64748	0,60719	15
16	0,70213	0,68958	0,67736	0,63162	0,59042	16
17	0,68866	0,67574	0,66318	0,61631	0,57431	17
18	0,67556	0,66229	0,64942	0,60153	0,55884	18
19	0,66280	0,64923	0,63607	0,58727	0,54398	19
20	0,65040	0,63653	0,62311	0,57350	0,52970	20
21	0,63832	0,62419	0,61053	0,56019	0,51598	21
22	0,62656	0,61220	0,59832	0,54734	0,50278	22
23	0,61512	0,60053	0,58646	0,53493	0,49010	23
24	0,60398	0,58919	0,57494	0,52293	0,47789	24
25	0,59313	0,57816	0,56376	0,51133	0,46614	25

$\frac{1}{n} a_{\overline{n}|}$

n	$4^1/_2\,\%$	$4^3/_4\,\%$	$5\,\%$	$6\,\%$	$7\,\%$	n
26	0,58256	0,56743	0,55289	0,50012	0,45484	26
27	0,57227	0,55699	0,54233	0,48928	0,44395	27
28	0,56225	0,54684	0,53208	0,47879	0,43347	28
29	0,55248	0,53696	0,52211	0,46865	0,42337	29
30	0,54296	0,52735	0,51242	0,45883	0,41363	30
31	0,53369	0,51799	0,50299	0,44933	0,40425	31
32	0,52465	0,50888	0,49383	0,44013	0,39520	32
33	0,51584	0,50001	0,48493	0,43122	0,38648	33
34	0,50726	0,49138	0,47626	0,42259	0,37806	34
35	0,49889	0,48297	0,46783	0,41424	0,36993	35
36	0,49072	0,47478	0,45963	0,40614	0,36209	36
37	0,48276	0,46680	0,45166	0,39829	0,35451	37
38	0,47500	0,45903	0,44389	0,39068	0,34720	38
39	0,46743	0,45146	0,43633	0,38331	0,34013	39
40	0,46004	0,44408	0,42898	0,37616	0,33329	40
41	0,45283	0,43688	0,42181	0,36922	0,32669	41
42	0,44580	0,42987	0,41484	0,36249	0,32030	42
43	0,43894	0,42304	0,40804	0,35596	0,31412	43
44	0,43224	0,41637	0,40143	0,34962	0,30813	44
45	0,42570	0,40987	0,39498	0,34346	0,30234	45
46	0,41931	0,40353	0,38870	0,33749	0,29674	46
47	0,41308	0,39735	0,38257	0,33168	0,29131	47
48	0,40699	0,39132	0,37661	0,32604	0,28605	48
49	0,40105	0,38543	0,37079	0,32056	0,28096	49
50	0,39524	0,37969	0,36512	0,31524	0,27601	50

$\frac{1}{n} a_{\overline{n}|}$

n	$4^1/_2\,\%$	$4^3/_4\,\%$	$5\,\%$	$6\,\%$	$7\,\%$	n
51	0,38957	0,37408	0,35959	0,31006	0,27123	51
52	0,38403	0,36861	0,35419	0,30503	0,26658	52
53	0,37861	0,36327	0,34893	0,30013	0,26207	53
54	0,37332	0,35805	0,34380	0,29537	0,25770	54
55	0,36815	0,35296	0,33879	0,29074	0,25345	55
56	0,36309	0,34798	0,33390	0,28623	0,24933	56
57	0,35815	0,34312	0,32913	0,28184	0,24533	57
58	0,35331	0,33838	0,32447	0,27757	0,24144	58
59	0,34859	0,33374	0,31993	0,27341	0,23766	59
60	0,34397	0,32920	0,31549	0,26936	0,23399	60
61	0,33945	0,32477	0,31115	0,26541	0,23041	61
62	0,33502	0,32044	0,30692	0,26156	0,22694	62
63	0,33070	0,31621	0,30278	0,25782	0,22356	63
64	0,32647	0,31207	0,29874	0,25416	0,22028	64
65	0,32232	0,30802	0,29479	0,25060	0,21708	65
66	0,31827	0,30407	0,29092	0,24713	0,21396	66
67	0,31430	0,30019	0,28715	0,24374	0,21093	67
68	0,31042	0,29641	0,28346	0,24044	0,20797	68
69	0,30661	0,29270	0,27985	0,23721	0,20510	69
70	0,30289	0,28907	0,27632	0,23406	0,20229	70
71	0,29924	0,28552	0,27287	0,23099	0,19956	71
72	0,29567	0,28205	0,26950	0,22799	0,19689	72
73	0,29217	0,27865	0,26619	0,22507	0,19429	73
74	0,28874	0,27532	0,26296	0,22221	0,19176	74
75	0,28538	0,27206	0,25980	0,21941	0,18928	75

$\frac{1}{n}\, a_{\overline{n}|}$

n	$4^1/_2\,\%$	$4^3/_4\,\%$	$5\,\%$	$6\,\%$	$7\,\%$	n
76	0,28209	0,26887	0,25670	0,21668	0,18687	76
77	0,27887	0,26574	0,25367	0,21401	0,18452	77
78	0,27570	0,26267	0,25071	0,21141	0,18222	78
79	0,27260	0,25967	0,24780	0,20886	0,17997	79
80	0,26957	0,25673	0,24496	0,20636	0,17778	80
81	0,26659	0,25385	0,24217	0,20393	0,17563	81
82	0,26367	0,25103	0,23944	0,20154	0,17354	82
83	0,26080	0,24826	0,23676	0,19921	0,17149	83
84	0,25799	0,24554	0,23414	0,19693	0,16949	84
85	0,25524	0,24288	0,23157	0,19469	0,16753	85
86	0,25253	0,24027	0,22906	0,19251	0,16562	86
87	0,24988	0,23771	0,22659	0,19037	0,16375	87
88	0,24728	0,23520	0,22417	0,18827	0,16192	88
89	0,24472	0,23274	0,22180	0,18622	0,16012	89
90	0,24221	0,23033	0,21947	0,18421	0,15837	90
91	0,23986	0,22796	0,21719	0,18224	0,15665	91
92	0,23734	0,22563	0,21495	0,18031	0,15497	92
93	0,23496	0,22335	0,21275	0,17842	0,15333	93
94	0,23263	0,22111	0,21060	0,17656	0,15171	94
95	0,23035	0,21891	0,20848	0,17475	0,15013	95
96	0,22810	0,21675	0,20641	0,17297	0,14858	96
97	0,22589	0,21463	0,20437	0,17122	0,14707	97
98	0,22372	0,21255	0,20237	0,16950	0,14558	98
99	0,22159	0,21050	0,20041	0,16782	0,14412	99
100	0,21950	0,20849	0,19848	0,16618	0,14269	100

§ 3.

TAFEL VAN:

$$\frac{1}{n}(Da)_{\overline{n}|}.$$

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	1 %	2 %	$2^1/_2$ %	$2^3/_4$ %	3 %	n
1	0,99010	0,98039	0,97561	0,97324	0,97087	1
2	1,48025	1,46098	1,45152	1,44683	1,44217	2
3	1,96716	1,93528	1,91969	1,91197	1,90432	3
4	2,45086	2,40339	2,38026	2,36884	2,35751	4
5	2,93138	2,86540	2,83337	2,81759	2,80195	5
6	3,40873	3,32141	3,27916	3,25838	3,23783	6
7	3,88294	3,77149	3,71777	3,69139	3,66532	7
8	4,35403	4,21574	4,14931	4,11675	4,08462	8
9	4,82203	4,65424	4,57393	4,53463	4,49589	9
10	5,28695	5,08708	4,99174	4,94518	4,89932	10
11	5,74883	5,51433	5,40288	5,34853	5,29508	11
12	6,20769	5,93608	5,80745	5,74484	5,68332	12
13	6,66354	6,35241	6,20558	6,13424	6,06422	13
14	7,11641	6,76340	6,59739	6,51686	6,43792	14
15	7,56632	7,16912	6,98299	6,89285	6,80459	15
16	8,01329	7,56966	7,36249	7,26233	7,16437	16
17	8,45735	7,96508	7,73601	7,62544	7,51741	17
18	8,89851	8,35547	8,10363	7,98229	7,86386	18
19	9,33153	8,74089	8,46549	8,33301	8,20386	19
20	9,77224	9,12142	8,82168	8,67772	8,53754	20
21	10,20484	9,49712	9,17229	9,01654	8,86504	21
22	10,63464	9,86807	9,51743	9,34959	9,18649	22
23	11,06166	10,23434	9,85720	9,67697	9,50202	23
24	11,48589	10,59598	10,19169	9,99879	9,81175	24
25	11,90738	10,95309	10,52100	10,31517	10,11580	25

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	1 %	2 %	2½ %	2¾ %	3 %	n
26	12,32614	11,30570	10,84521	10,62622	10,41430	26
27	12,74219	11,65390	11,16443	10,93202	10,70736	27
28	13,15556	11,99772	11,47873	11,23269	10,99511	28
29	13,56626	12,33727	11,78821	11,52833	11,27764	29
30	13,97431	12,67257	12,09294	11,81903	11,55507	30
31	14,37972	13,00371	12,39302	12,10489	11,82750	31
32	14,78253	13,33073	12,68853	12,38599	12,09504	32
33	15,18275	13,65369	12,97954	12,66244	12,35779	33
34	15,58039	13,97266	13,26613	12,93432	12,61585	34
35	15,97549	14,28769	13,54839	13,20172	12,86931	35
36	16,36804	14,59883	13,82639	13,46473	13,11828	36
37	16,75808	14,90614	14,10020	13,72342	13,36285	37
38	17,14562	15,20968	14,36989	13,97789	13,60310	38
39	17,53068	15,50950	14,63554	14,22821	13,83913	39
40	17,91328	15,80565	14,89723	14,47445	14,07102	40
41	18,29344	16,09818	15,15500	14,71671	14,29886	41
42	18,67117	16,38715	15,40895	14,95505	14,52273	42
43	19,04649	16,67260	15,65912	15,18954	14,74271	43
44	19,41942	16,95459	15,90559	15,42027	14,95888	44
45	19,78998	17,23316	16,14842	15,64730	15,17132	45
46	20,15818	17,50835	16,38768	15,87069	15,38011	46
47	20,52404	17,78023	16,62342	16,09053	15,58531	47
48	20,88758	18,04883	16,85571	16,30687	15,78701	48
49	21,24882	18,31421	17,08460	16,51978	15,98527	49
50	21,60777	18,57639	17,31015	16,72933	16,18016	50

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	1%	2%	$2^1/_2$%	$2^3/_4$%	3%	n
51	21,96444	18,83544	17,53243	16,93558	16,37175	51
52	22,31886	19,09139	17,75148	17,13858	16,56010	52
53	22,67104	19,34429	17,96736	17,33841	16,74529	53
54	23,02099	19,59418	18,18013	17,53511	16,92737	54
55	23,36874	19,84110	18,38983	17,72875	17,10641	55
56	23,71430	20,08510	18,59653	17,91938	17,28246	56
57	24,05768	20,32620	18,80027	18,10706	17,45559	57
58	24,39891	20,56446	19,00110	18,29184	17,62586	58
59	24,73799	20,79991	19,19907	18,47378	17,79332	59
60	25,07494	21,03259	19,39423	18,65293	17,95802	60
61	25,40977	21,26255	19,58663	18,82934	18,12002	61
62	25,74251	21,48981	19,77630	19,00306	18,27939	62
63	26,07317	21,71441	19,96331	19,17413	18,43615	63
64	26,40176	21,93639	20,14769	19,34261	18,59038	64
65	26,72830	22,15580	20,32949	19,50855	18,74211	65
66	27,05279	22,37265	20,50875	19,67199	18,89139	66
67	27,37527	22,58699	20,68551	19,83297	19,03828	67
68	27,69573	22,79885	20,85982	19,99154	19,18282	68
69	28,01420	23,00827	21,03171	20,14774	19,32506	69
70	28,33069	23,21527	21,20122	20,30162	19,46504	70
71	28,64522	23,41990	21,36841	20,45322	19,60278	71
72	28,95779	23,62218	21,53329	20,60258	19,73839	72
73	29,26842	23,82214	21,69592	20,74973	19,87184	73
74	29,57713	24,01983	21,85632	20,89473	20,00321	74
75	29,88393	24,21526	22,01454	21,03760	20,13252	75

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	1 %	2 %	2½ %	2¾ %	3 %	n
76	30,18883	24,40847	22,17061	21,17838	20,25983	76
77	30,49185	24,59948	22,32456	21,31712	20,38515	77
78	30,79300	24,78834	22,47644	21,45384	20,50855	78
79	31,09229	24,97506	22,62627	21,58859	20,63005	79
80	31,38974	25,15968	22,77409	21,72139	20,74968	80
81	31,68536	25,34222	22,91993	21,85229	20,86749	81
82	31,97916	25,52272	23,06382	21,98131	20,98350	82
83	32,27116	25,70119	23,20580	22,10849	21,09776	83
84	32,56137	25,87767	23,34590	22,23386	21,21028	84
85	32,84979	26,05218	23,48413	22,35746	21,32112	85
86	33,13645	26,22475	23,62055	22,47931	21,43029	86
87	33,42136	26,39541	23,75517	22,59944	21,53783	87
88	33,70453	26,56418	23,88802	22,71789	21,64377	88
89	33,98597	26,73109	24,01914	22,83468	21,74814	89
90	34,26569	26,89615	24,14855	22,94984	21,85096	90
91	34,54370	27,05940	24,27627	23,06340	21,95227	91
92	34,82003	27,22086	24,40234	23,17538	22,05210	92
93	35,09467	27,38055	24,52678	23,28583	22,15046	93
94	35,36765	27,53850	24,64962	23,39475	22,24740	94
95	35,63897	27,69473	24,77088	23,50218	22,34293	95
96	35,90864	27,84925	24,89058	23,60814	22,43708	96
97	36,17668	28,00211	25,00876	23,71266	22,52987	97
98	36,44310	28,15330	25,12543	23,81576	22,62133	98
99	36,70791	28,30287	25,24062	23,91747	22,71149	99
100	36,97112	28,45082	25,35436	24,01780	22,80036	100

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	$3^1/_4\,\%$	$3^1/_2\,\%$	$3^3/_4\,\%$	$4\,\%$	$4^1/_4\,\%$	n
1	0,96852	0,96618	0,96386	0,96154	0,95923	1
2	1,43754	1,43294	1,42836	1,42382	1,41930	2
3	1,89672	1,88917	1,88168	1,87424	1,86686	3
4	2,34628	2,33515	2,32411	2,31315	2,30229	4
5	2,78647	2,77113	2,75594	2,74089	2,72598	5
6	3,21749	3,19737	3,17746	3,15776	3,13827	6
7	3,63956	3,61411	3,58895	3,56409	3,53952	7
8	4,05290	4,02159	3,99068	3,96017	3,93005	8
9	4,45770	4,42004	4,38291	4,34630	4,31020	9
10	4,85417	4,80970	4,76590	4,72276	4,68027	10
11	5,24250	5,19078	5,13989	5,08983	5,04056	11
12	5,62288	5,56349	5,50512	5,44776	5,39138	12
13	5,99550	5,92805	5,86183	5,79683	5,73301	13
14	6,36053	6,28465	6,21025	6,13728	6,06571	14
15	6,71816	6,63350	6,55058	6,46935	6,38977	15
16	7,06854	6,97479	6,88306	6,79329	6,70543	16
17	7,41186	7,30870	7,20788	7,10931	7,01294	17
18	7,74827	7,63543	7,52524	7,41764	7,31255	18
19	8,07794	7,95513	7,83535	7,71850	7,60449	19
20	8,40101	8,26800	8,13839	8,01209	7,88898	20
21	8,71763	8,57418	8,43456	8,29862	8,16625	21
22	9,02797	8,87386	8,72402	8,57828	8,43651	22
23	9,33215	9,16719	9,00695	8,85126	8,69995	23
24	9,63033	9,45432	9,28353	9,11775	8,95679	24
25	9,92263	9,73541	9,55392	9,37792	9,20721	25

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	$3^1/_4\,\%$	$3^1/_2\,\%$	$3^3/_4\,\%$	$4\,\%$	$4^1/_4\,\%$	n
26	10,20919	10,01060	9,81827	9,63195	9,45140	26
27	10,49014	10,28004	10,07675	9,88001	9,68955	27
28	10,76561	10,54386	10,32951	10,12227	9,92181	28
29	11,03572	10,80220	10,57670	10,35887	10,14838	29
30	11,30060	11,05519	10,81845	10,58997	10,36940	30
31	11,56035	11,30297	11,05491	10,81573	10,58504	31
32	11,81510	11,54566	11,28621	11,03629	10,79545	32
33	12,06495	11,78337	11,51248	11,25178	11,00078	33
34	12,31003	12,01623	11,73386	11,46235	11,20118	34
35	12,55042	12,24436	11,95047	11,66813	11,39678	35
36	12,78625	12,46786	12,16242	11,86925	11,58773	36
37	13,01760	12,68685	12,36984	12,06583	11,77414	37
38	13,24458	12,90144	12,57283	12,25798	11,95616	38
39	13,46729	13,11172	12,77152	12,44584	12,13390	39
40	13,68582	13,31781	12,96601	12,62952	12,30749	40
41	13,90026	13,51979	13,15640	12,80911	12,47703	41
42	14,11071	13,71777	13,34280	12,98475	12,64264	42
43	14,31724	13,91183	13,52530	13,15651	12,80444	43
44	14,51995	14,10208	13,70401	13,32452	12,96252	44
45	14,71892	14,28860	13,87901	13,48887	13,11700	45
46	14,91423	14,47148	14,05040	13,64964	13,26796	46
47	15,10596	14,65080	14,21827	13,80695	13,41550	47
48	15,29419	14,82664	14,38271	13,96087	13,55972	48
49	15,47900	14,99909	14,54379	14,11149	13,70071	49
50	15,66045	15,16822	14,70160	14,25891	13,83856	50

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	$3^1/_4\,\%$	$3^1/_2\,\%$	$3^3/_4\,\%$	$4\,\%$	$4^1/_4\,\%$	n
51	15,83863	15,33411	14,85623	14,40319	13,97335	51
52	16,01360	15,49683	15,00774	14,54443	14,10516	52
53	16,18543	15,65646	15,15622	14,68270	14,23408	53
54	16,35419	15,81307	15,30173	14,81808	14,36018	54
55	16,51994	15,96673	15,44436	14,95063	14,48353	55
56	16,68275	16,11749	15,58416	15,08044	14,60422	56
57	16,84269	16,26544	15,72121	15,20757	14,72231	57
58	16,99980	16,41063	15,85557	15,33208	14,83786	58
59	17,15416	16,55312	15,98731	15,45406	14,95096	59
60	17,30582	16,69298	16,11648	15,57355	15,06166	60
61	17,45483	16,83027	16,24316	15,69062	15,17002	61
62	17,60126	16,96504	16,36740	15,80532	15,27611	62
63	17,74516	17,09734	16,48925	15,91774	15,37998	63
64	17,88658	17,22724	16,60877	16,02791	15,48169	64
65	18,02557	17,35479	16,72603	16,13589	15,58131	65
66	18,16218	17,48004	16,84106	16,24174	15,67888	66
67	18,29647	17,60304	16,95393	16,34550	15,77445	67
68	18,42848	17,72383	17,06468	16,44724	15,86808	68
69	18,55826	17,84248	17,17337	16,54699	15,95981	69
70	18,68585	17,95902	17,28003	16,64482	16,04970	70
71	18,81130	18,07351	17,38473	16,74075	16,13780	71
72	18,93466	18,18598	17,48749	16,83485	16,22413	72
73	19,05596	18,29648	17,58837	16,92715	16,30876	73
74	19,17525	18,40505	17,68741	17,01769	16,39173	74
75	19,29257	18,51174	17,78466	17,10653	16,47306	75

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	$3^1/_4\,\%$	$3^1/_2\,\%$	$3^3/_4\,\%$	$4\,\%$	$4^1/_4\,\%$	n
76	19,40796	18,61658	17,88014	17,19370	16,55282	76
77	19,52146	18,71962	17,97391	17,27923	16,63103	77
78	19,63311	18,82089	18,06600	17,36318	16,70773	78
79	19,74295	18,92044	18,15645	17,44557	16,78297	79
80	19,85100	19,01829	18,24530	17,52644	16,85677	80
81	19,95732	19,11449	18,33257	17,60583	16,92917	81
82	20,06192	19,20907	18,41832	17,68377	17,00021	82
83	20,16485	19,30207	18,50257	17,76031	17,06991	83
84	20,26615	19,39351	18,58535	17,83545	17,13832	84
85	20,36583	19,48343	18,66669	17,90926	17,20546	85
86	20,46394	19,57186	18,74664	17,98174	17,27136	86
87	20,56051	19,65884	18,82522	18,05293	17,33606	87
88	20,65556	19,74439	18,90245	18,12287	17,39958	88
89	20,74913	19,82854	18,97838	18,19158	17,46194	89
90	20,84124	19,91133	19,05302	18,25909	17,52319	90
91	20,93193	19,99278	19,12640	18,32542	17,58333	91
92	21,02122	20,07291	19,19856	18,39061	17,64241	92
93	21,10914	20,15176	19,26952	18,45467	17,70044	93
94	21,19571	20,22935	19,33930	18,51764	17,75744	94
95	21,28097	20,30571	19,40793	18,57954	17,81345	95
96	21,36493	20,38086	19,47544	18,64039	17,86848	96
97	21,44762	20,45483	19,54184	18,70021	17,92256	97
98	21,52908	20,52764	19,60716	18,75903	17,97571	98
99	21,60931	20,59932	19,67143	18,81687	18,02795	99
100	21,68834	20,66988	19,73467	18,87375	18,07930	100

$\frac{1}{n}\ Da_{\overline{n}|}$

n	$4^1/_2\,\%$	$4^3/_4\,\%$	$5\,\%$	$6\,\%$	$7\,\%$	n
1	0,95694	0,95465	0,95238	0,94340	0,93458	1
2	1,41480	1,41033	1,40590	1,38839	1,37130	2
3	1,85952	1,85224	1,84501	1,81660	1,78897	3
4	2,29152	2,28084	2,27025	2,22873	2,18853	4
5	2,71121	2,69659	2,68209	2,62545	2,57086	5
6	3,11899	3,09991	3,08103	3,00744	2,93681	6
7	3,51524	3,49123	3,46750	3,37528	3,28716	7
8	3,90032	3,87096	3,84197	3,72960	3,62268	8
9	4,27459	4,23948	4,20484	4,07094	3,94408	9
10	4,63840	4,59716	4,55653	4,39985	4,25203	10
11	4,99209	4,94438	4,89743	4,71686	4,54718	11
12	5,33596	5,28148	5,22791	5,02244	4,83014	12
13	5,67034	5,60879	5,54835	5,31707	5,10148	13
14	5,99552	5,92665	5,85908	5,60121	5,36177	14
15	6,31178	6,23536	6,16046	5,87528	5,61151	15
16	6,61942	6,53523	6,45279	6,13969	5,85121	16
17	6,91870	6,82654	6,73639	6,39484	6,08133	17
18	7,20989	7,10958	7,01157	6,64111	6,30231	18
19	7,49322	7,38463	7,27861	6,87885	6,51459	19
20	7,76896	7,65193	7,53779	7,10840	6,71856	20
21	8,03733	7,91174	7,78938	7,33010	6,91461	21
22	8,29856	8,16431	8,03363	7,54426	7,10309	22
23	8,55287	8,40987	8,27081	7,75117	7,28436	23
24	8,80048	8,64865	8,50113	7,95114	7,45873	24
25	9,04159	8,88086	8,72484	8,14443	7,62652	25

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	$4^1/_2\,\%$	$4^3/_4\,\%$	$5\,\%$	$6\,\%$	$7\,\%$	n
26	9,27640	9,10672	8,94217	8,33130	7,78803	26
27	9,50510	9,32643	9,15331	8,51202	7,94354	27
28	9,72788	9,54019	9,35848	8,68681	8,09331	28
29	9,94491	9,74818	9,55788	8,85591	8,23760	29
30	10,15638	9,95058	9,75170	9,01954	8,37665	30
31	10,36244	10,14759	9,94012	9,17791	8,51068	31
32	10,56327	10,33936	10,12333	9,33123	8,63993	32
33	10,75902	10,52605	10,30149	9,47968	8,76459	33
34	10,94983	10,70784	10,47476	9,62346	8,88487	34
35	11,13587	10,88487	10,64332	9,76274	9,00095	35
36	11,31726	11,05729	10,80730	9,89769	9,11301	36
37	11,49415	11,22525	10,96687	10,02848	9,22123	37
38	11,66667	11,38888	11,12216	10,15525	9,32576	38
39	11,83495	11,54831	11,27331	10,27817	94,2677	39
40	11,99912	11,70368	11,42046	10,39738	9,52439	40
41	12,15929	11,85510	11,56372	10,51300	9,61877	41
42	12,31558	12,00271	11,70323	10,62518	9,71005	42
43	12,46811	12,14661	11,83911	10,73404	9,79835	43
44	12,61698	12,28692	11,97147	10,83970	9,88380	44
45	12,76230	12,42375	12,10041	10,94228	9,96650	45
46	12,90417	12,55720	12,22606	11,04190	10,04658	46
47	13,04269	12,68738	12,34850	11,13864	10,12413	47
48	13,17796	12,81438	12,46785	11,23263	10,19926	48
49	13,31007	12,93829	12,58420	11,32396	10,27207	49
50	13,43911	13,05921	12,69763	11,41271	10,34264	50

$\frac{1}{n}\, Da_{\overline{n}|}$

n	$4^1/_2\,\%$	$4^3/_4\,\%$	$5\,\%$	$6\,\%$	$7\,\%$	n
51	13,56516	13,17723	12,80824	11,49899	10,41107	51
52	13,68832	13,29243	12,91613	11,58289	10,47744	52
53	13,80866	13,40490	13,02136	11,66447	10,54182	53
54	13,92626	13,51471	13,12402	11,74383	10,60430	54
55	14,04120	13,62195	13,22419	11,82105	10,66495	55
56	14,15356	13,72668	13,32195	11,89619	10,72384	56
57	14,26340	13,82898	13,41736	11,96932	10,78103	57
58	14,37079	13,92893	13,51050	12,04052	10,83659	58
59	14,47581	14,02658	13,60144	12,10986	10,89058	59
60	14,57851	14,12201	13,69024	12,17738	10,94305	60
61	14,67896	14,21528	13,77696	12,24316	10,99407	61
62	14,77723	14,30644	13,86167	12,30726	11,04369	62
63	14,87337	14,39557	13,94442	12,36972	11,09196	63
64	14,96744	14,48271	14,02527	12,43061	11,13892	64
65	15,05949	14,56792	14,10429	12,48997	11,18463	65
66	15,14959	14,65126	14,18151	12,54786	11,22913	66
67	15,23778	14,73278	14,25700	12,60431	11,27246	67
68	15,32411	14,81252	14,33079	12,65939	11,31466	68
69	15,40863	14,89055	14,40295	12,71314	11,35577	69
70	15,49139	14,96690	14,47352	12,76558	11,39584	70
71	15,57244	15,04162	14,54254	12,81678	11,43489	71
72	15,65183	15,11476	14,61006	12,86676	11,47297	72
73	15,72959	15,18635	14,67612	12,91557	11,51010	73
74	15,80577	15,25645	14,74075	12,96324	11,54631	74
75	15,88040	15,32509	14,80401	13,00981	11,58165	75

$\frac{1}{n} Da_{\overline{n}|}$

n	$4^1/_2\,\%$	$4^3/_4\,\%$	$5\,\%$	$6\,\%$	$7\,\%$	n
76	15,95354	15,39231	14,86592	13,05531	11,61613	76
77	16,02522	15,45815	14,92653	13,09978	11,64978	77
78	16,09547	15,52264	14,98587	13,14324	11,68264	78
79	16,16434	15,58583	15,04398	13,18572	11,71473	79
80	16,23185	15,64773	15,10088	13,22726	11,74607	80
81	16,29804	15,70840	15,15662	13,26789	11,77669	81
82	16,36295	15,76786	15,21122	13,30763	11,80661	82
83	16,42661	15,82615	15,26472	13,34651	11,83585	83
84	16,48905	15,88329	15,31714	13,38455	11,86444	84
85	16,55030	15,93931	15,36851	13,42178	11,89239	85
86	16,61039	15,99424	15,41887	13,45822	11,91972	86
87	16,66934	16,04811	15,46823	13,49389	11,94646	87
88	16,72719	16,10095	15,51662	13,52882	11,97262	88
89	16,78397	16,15279	15,56407	13,56303	11,99822	89
90	16,83969	16,20364	15,61061	13,59654	12,02328	90
91	16,89439	16,25353	15,65625	13,62936	12,04781	91
92	16,94810	16,30249	15,70102	13,66153	12,07183	92
93	17,00082	16,35055	15,74495	13,69305	12,09535	93
94	17,05259	16,39771	15,78805	13,72394	12,11839	94
95	17,10344	16,44402	15,83034	13,75422	12,14096	95
96	17,15338	16,48947	15,87185	13,78391	12,16308	96
97	17,20243	16,53411	15,91259	13,81303	12,18475	97
98	17,25062	16,57794	15,95259	13,84159	12,20600	98
99	17,29796	16,62099	15,99186	13,86960	12,22683	99
100	17,34448	16,66328	16,03042	13,89708	12,24725	100

AANGEHAALDE LITTERATUUR. [1])

Archief voor de Verzekeringswetenschap en aanverwante vakken, uitgegeven door de Vereeniging van Wiskundige adviseurs bij Nederlandsche Maatschappijen van Levensverzekering. 's-Gravenhage, M. Nijhoff.

Arnaudeau A. Tables des intérêts composés, annuités et amortissements, pour les taux variant de dixièmes en dixièmes et des epoques variant de 1 à 400 suivant les taux. Paris, Gauthier Villars, 1906.

Bärlocher F. Zinseszins-, Renten-, Anleihen-, Obligationenrechnung. Zürich. Verlag von Orell Füssli & Co.

Bawerk. E. von Böhm. Zie Böhm.

Bohlman G. Lebensversicherungsmathematik. Enc. der Math. Wiss. [2]) I, 2, p. 857.

Böhm. E. von — Bawerk. Capital und Capitalzins. I. Geschichte und Kritik der Capitalzinstheoriën. Wagnersche Universitäts Buchhandlung. Innsbruck. 1900.

Broggi H. Versicherungsmathematik. Deutsche Ausgabe. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin. 1911.

Bulletin du Comité permanent des Congrès internationaux d'Actuaires, Bruxelles. Impr. Bruylant. 1901. No. 5.

Cantor. M. Politische Arithmetik, oder die Arithmetik des täglichen Lebens. B. G. Teubner. Leipzig. 1898.

Charlon H. Théorie mathématique des opérations financières. 2e Edition, Paris, 1878.

Czuber E. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2 Bde. B. G. Teubner. Leipzig und Berlin, 1908 u. 1910.

---

[1]) Ter wille van meerdere volledigheid bij het noemen van tafels van bijzondere constructie zijn door mij enkele dergelijke boeken aangehaald zonder dat ik in de gelegenheid was om deze te raadplegen. Ditzelfde geldt van de geciteerde 1e uitgave van Pascal's „Traité du triangle arithmétique."

[2]) Zie „Encyklopädie."

Daniele E. „Sopra un caso particolare di determinazione del tasso di una rendita certa." Bollettino della Associazione Italiana per l'Incremento della Scienza degli Attuari, No. 21. Maggio 1909.

Encyclopédie des Sciences Mathématiques. Edition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk. Paris, Gauthier-Villars. — Leipzig, B. G. Teubner. 1911.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Erster Band in zwei Teilen. Arithmetik und Algebra. Redigiert von W. F. Meyer. Leipzig. B. G. Teubner. 1898—1904.

Goey. A. H. J. de, Zie Janse.

Gosler W. Nederlandsche Almanak van Levensverzekering. Uitgaaf drukkerij v/.h. Gebr. Binger.

Gyldén H. Recueil des Tables. Stockh. Astron. Iaktt. I, (1880).

Haaften M. van. „Rentefuncties" [1]) Archief. Verz. W. XI. (1910). p. 209.

——— „Koers en Rente" [2]) Archief Verz. W. XI. (1910). p. 330.

——— „Afgeleiden van annuiteiten en hunne toepassing voor benadering van den rentevoet" [3]). Archief Verz. W. XI (1910) p. 462.

——— Korte inleiding tot de theorie der waarde. Tijdschrift voor Wijsbegeerte. Amsterdam, W.Versluys. — Leiden E. J. Brill. [4]) V (1911) p. 371.

——— „De strijd over rente". „De Verzekeringsbode" [5]). Jrg. 31. (1912) No. 14.

——— „Is rente huur?" „De Verzekeringsbode." Jrg. 31. No. 15 en 16.

——— „De subjectief-objectieve, de subjectieve en de objectieve waardeering der toekomst." „De Verzekeringsbode". Jrg. 31. No. 17, 18, 19, 21 en 22.

——— „De rentetheorie van Von Böhm Bawerk." „De Verzekeringsbode." Jrg. 31, No. 23, 24, 25 en 26.

——— „De Grondslagen der politieke rekenkunde.". „De Verzekeringsbode." Jrg. 31. No. 27, 28 en 29.

Harmsen L. J. „Berekeningen in de Levensverzekeringswiskunde op te bouwen uit het verleden." Batavia. Javasche Boekhandel. 1909.

Inwood W. Tables. London, 25th. Edition, 1899.

Janse Dr. J. P. Boekbeschouwing (Arnaudeau, Tables). Archief. Verz. W. IX. (1907) p. 79.

---

[1]) Zie noot in Hoofdstuk I, p. 10.

[2]) Zie noot in Hoofdstuk IV § 1.

[3]) Zie noot in Hoofdstuk I, p. 10.

[4]) De VI[e] en volgende jaargangen verschijnen te Haarlem bij de erven F. Bohn.

[5]) Zie „Verzekeringsbode."

Janse Dr. J. P. en A. H. J. de Goey. Examenopgaven met oplossingen. Negende examen voor Candidaat-Actuaris, gehouden 27 en 28 December 1911. Archief Verz. W. XII. (1912) p. 444.

King G. The theory of finance. Ch. & E. Layton. London. 1898.

——— Zie Textbook.

Klügel G. S. Mathematisches Wörterbuch. Leipzig, im Schwickertschen Verlage. 1805.

Landré. C. L. Het afdoen van schuld door periodieke betalingen. Archief. Verz. W. VI. (1903). p. 270.

——— Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung. Vierte Auflage, verbessert und vermehrt von H. F. Landré. Jena. G. Fischer. 1911.

Landré. H. F. Actuarieele Nota's. Archief Verz. W. X. (1909). p. 45 en XI. (1910). p. 132.

Mounier. Dr. G. J. D. Boekbeschouwing (Harmsen, „Berekeningen etc."). Archief. Verz. W. IX. (1907). p. 560.

Motel. H. Poterin du. Technique de l'Assurance sur la Vie. Exposé d'après l'article allemand de G. Bohlmann. Enc. des Sc. Math. [1]) I, 4, fasc. 4. (1911).

Oakes. W. H. Table of compound interest for each rate between $^3/_4$ and 10 percent per annum, proceeding by intervals of one eighth and from 1 year to 100 years. London. 1877.

——— Tables for finding the intermediate rates of interest between $^3/_4$ and 10 per cent, in an annuity-certain. The present value of £ 1 per annum (or period) for any number of years (or periods) not exceeding 100 being given. London 1887.

Onnen. Dr. H. De wiskundige theorie van den geldhandel. 's-Gravenhage. Gebr. Belinfante. 1906.

——— „Rente." Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indië. Dl. LXXIII. 1906. Decemberaflevering.

Pascal. B. Traité du triangle arithmétique. Paris. 1665.

——— Oeuvres Complètes. Paris. Librairie Hachette. 1872.

Pereire. E. Tables de l'intérêt composé, des annuités et de l'amortissement. Gauthier-Villars. Paris. 1898.

Poincaré. H. Science et Méthode. Paris. E. Flammarion. 1909.

Poterin du Motel. H. Zie Motel.

Spitzer. S. Tabellen für die Zinses-Zinsen- und Renten-Rechnung, mit Anwendung derselben auf die Berechnung von Anlehen, Construction von Amortisationsplänen, etc. 2. Auflage. Wien. 1875.

Tetens. J. N. Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. I. Leipzig, bey Weidmanns Erben und Reich. 1785.

Textbook. Institute of Actuaries Textbook of the principles of interest,

[1]) Zie Encyclopédie.

life annuities and assurances. Published by the Authority, and under the Superintendence of the Institut.

Part I. Interest (including annuities certain). New Edition by R. Todhunter.

Part II. Life contingencies (including Life annuities and assurances). Second Edition by G. King.

London, Ch. & Layton, 1901 and 1902.

Thoman. F. Theory of compound interest and annuities, with logaritmic tables. London, 1859.

———— Tables logarithmiques pour les calculs d'intérêt composé et d'amortissement, Paris. s.d.

———— Théorie des intérêts composés et des annuités, suivi de tables logarithmiques. Traduit de l'Anglais par Bouchard et précédé d'un avertissement de J. Bertrand, Paris, 1878.

Todhunter. R. Zie Textbook.

Turksma Dr. B. Het bepalen der reëele rente van effecten. Archief. Verz.W. VIII. (1906). p. 1.

Verzekeringsbode De. Algemeen weekblad voor verzekering. (Officieel orgaan van de Vereeniging voor Levensverzekering onder hoofdredactie van W. F. H. Liefrinck-Teupken. Uitgave Nijgh en Van Ditmar's Uitgeversmaatschappij, Rotterdam.

Violeine. P. A. Nouvelles Tables pour les calculs d'Intérêts simples et composés. Paris. Chez l'auteur et chez Landois. 1832.

Werker W. M. J. Die zusammengesetzte Zinsen- und Zeitrenten- oder Annuitätenrechnung. Mit fünf Haupttafeln: Aufzinsungs- und Abzinsungs-Tafeln, und einigen suppletoiren Tafeln. Utrecht, J. L. Beyers. Berlin, Puttkammer & Mühlbrecht· 1893. 2 Bde.

Wicksell. K. Ueber Wert, Kapital und Rente nach den neueren nationalökonomischen Theorien. G. Fischer. Jena. 1893.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De universeele notatie voor renterekening en levensverzekeringswiskunde, gelijk deze voorkomt in het „Bulletin du Comité permanent des Congrès internationaux d'Actuaires," [1]) behoort zóódanig te worden gewijzigd en uitgebreid, dat een dualistische behandeling van aanvangs- en slotfuncties mogelijk wordt.

II.

De in de meer uitgebreide leerboeken van renterekening [2]) behandelde annuïteiten van hoogere orde:

a) zijn ontstaan doordat men bij een poging, om voor de annuïteit $a_{\overline{n}|}$ een meer algemeene uitdrukking te vinden, geen acht heeft geslagen op den regel, dat de waarde van een reeks periodiek in dezelfde richting veranderende uitkeeringen het gemakkelijkst wordt bepaald voor dàt tijdstip, waarop de uitkeeringen het grootst zijn;

b) bevatten als bijzonder geval geen andere annuïteiten dan de genoemde $a_{\overline{n}|}$, en leenen zich ook niet voor practische toepassingen;

c) vormen derhalve een nuttelooze Spielerei, welke uit alle leer- of handboeken behoort te verdwijnen.

---

[1]) Bruxelles. Impr. Bruylant. 1901. N°. 5. p. 40. „La Notation universelle". Extraite des „Transactions of the Second International Actuarial Congress".

[2]) Institute of Actuaries' Textbook. Part I. Interest, (including annuities-certain) bij R. Todhunter. London, Ch. & E. Layton. 1901.

The Theory of Finance, bij G. King. London. Ch. & E. Layton. 1898.

III.

De behandeling der annuïteiten van hoogere orde behoort te worden vervangen door de behandeling der annuïteiten van hoogere klasse:

a) bij welke de regel onder II*a* genoemd, wèl is in acht genomen;

b) die als bijzonder geval, behalve de annuïteit $a_{\overline{n}|}$, ook de algemeen gebruikelijke annuïteit $(Ia)_{\overline{n}|}$ en de in dit proefschrift besproken annuïteit $(Da)_{\overline{n}|}$ in zich bevatten;

c) waarvan de uiteenzetting eenvoudiger is dan die van de annuïteiten van hoogere orde.

IV.

Met het oog op de substitutie $r = 1$ laat zoowel de behandeling van:

$$a_{n|\,r|} = \frac{a_{n|\,\overline{r-1}|} + t_{1|\,r|} - v^n\, t_{\overline{n+1|\,r|}}}{i}$$

door TODHUNTER [1]), als die van:

$$a_{\overline{n}|\,r|} = \frac{a_{n|\,\overline{r-1}|} - v^n\, t_{\overline{n+1|\,r|}}}{i}$$

door KING [2]), aan juistheid te wenschen over. Hetzelfde geldt voor de correspondeerende s formules.

V.

Wanneer V een onbekende functie is van x, y en z, dan is de voorstelling:

$$V = K\,C\,F,$$

---

[1]) l. c. p. 46.

[2]) l. c. p. 58.

waarbij de drie factoren respectievelijk den invloed van elk der drie veranderlijken op V aanduiden, even algemeen als de voorstelling:

$$V = \Phi\,(x, y, z),$$

en in sommige gevallen [1]) boven laatstgenoemde te verkiezen.

VI.

De door FORSYTH [2]) aangegeven methode van integratie der totale differentiaalvergelijkingen:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

waarbij aan de voorwaarde:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

voldaan is, kan niet zelden door een kortere worden vervangen.

VII.

De wijze, waarop FORSYTH [3]) de orthogonale trajectorien van de ellipsen:

$$y = a\,(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

bepaalt, verdient voor dit vraagstuk geen aanbeveling.

---

[1]) Vgl. mijn: „Korte Inleiding tot de Theorie der Waarde." Tijdschrift voor Wijsbegeerte. Jaargang V. p. 372.

[2]) A Treatise on Differential Equations. Third Edition. London. MACMILLAN. 1903. p. 287.

[3]) l. c. p. 136.

VIII.

De definitie van gevallen van gelijke kans van LAPLACE verdient de voorkeur boven die van VON KRIES. [1])

IX.

De meening, dat de aarde stilstaat, is niet minder waar dan de meening, dat zij om de zon draait en zich met de zon door het hemelruim beweegt.

X.

Ten onrechte meent DRUDE [2]) aangetoond te hebben, dat lichtstralen steeds een orthotomisch systeem vormen.

XI.

De bewering, dat de naam thermometer wijziging behoeft, daar warmte slechts gemeten zou kunnen worden met den calorimeter, is onjuist.

XII.

Men kan niet volhouden, dat rolsteenen hun rondheid steeds uitsluitend aan door rolling of op andere wijze veroorzaakte slijtage te danken moeten hebben.

XIII.

Het geloof aan wonderen kan niet op natuurwetenschappelijke gronden worden bestreden.

---

[1]) Vgl. Dr. O. POSTMA. Over de Grondslagen der Waarschijnlijkheidsrekening. Nieuw Archief voor Wiskunde. (DELSMAN en NOLTHENIUS. Amsterdam). Reeks II. Dl. VIII (1909). p. 158.

[2]) Lehrbuch der Optik. Leipzig. S. HIRZEL. 1900. p. 14.

XIV.

De instelling van een afzonderlijk doctoraat in de wis- en staathuishoudkunde en van correspondeerende acten M. O. zou, bij een juiste regeling van onderwijs en examens:

a) zoowel aan de studie der wiskunde als aan die der staathuishoudkunde ten goede komen;

b) in het algemeen een aantal goed onderlegde personen beschikbaar stellen voor benoeming tot ambten, welke thans moeten worden bekleed door personen, wier opleiding niet in overeenstemming is met hun werkkring;

c) in het bijzonder ook een oplossing geven van de ten onzent in verzekeringskringen hangende kwestie van de opleiding van den actuaris.