Een bijdrage tot de theorie der cyclische oppervlakken en congruenties

EEN BIJDRAGE TOT DE THEORIE DER CYCLISCHE OPPERVLAKKEN EN CONGRUENTIES.

EEN BIJDRAGE TOT DE THEORIE DER CYCLISCHE OPPERVLAKKEN EN CONGRUENTIES.

Diss. Utrecht gr 1914

Een bijdrage tot de theorie der Cyclische Oppervlakken en Congruenties.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. B. J. KOUWER,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE,

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Zaterdag 17 Januari 1914, des namiddags te 4 uur,

DOOR

WILLEM MACALESTER LOUP,

geboren te 's-GRAVENHAGE.

Drukkerij J. VAN BOEKHOVEN, Utrecht.

AAN MIJNE OUDERS.

Hooggeleerde De Vries!

In de eerste plaats wensch ik U te danken voor alles, wat ik van U geleerd heb. Overtuigd van den invloed, dien goed onderwijs op iemands vorming uitoefent, zoo behoef ik U wel niet te zeggen, hoezeer ik er van doordrongen ben, dat Uw voortreffelijke colleges tot de wording van dit proefschrift hebben bijgedragen. In de tweede plaats dank ik U niet minder voor de bereidwilligheid, die ik steeds van U heb mogen ondervinden. Heeft deze arbeid door omstandigheden, van mijn wil onafhankelijk, langer op zich laten wachten, dan gewenscht is, zoo geef ik U hierbij de verzekering, dat Uw aanmoediging niet weinig tot de voltooiing daarvan heeft meegewerkt.

Niet gaarne zou ik dit voorwoord willen afsluiten, zonder mij ook tot U gericht te hebben, Hooggeleerde Kapteijn. *De wijze, waarop Gij de dikwijls netelige quaesties der analyse uiteenzet, heeft steeds mijn bewondering gewekt. Ook al handelt dit onderwerp niet direct over dat gedeelte der wiskunde, hetwelk Gij doceert, zoo ben ik mij toch volkomen van den invloed bewust, dien Uw persoon en Uw leiding op mijn studie hebben uitgeoefend.*

INLEIDING.

Het doel van dit proefschrift is, een bijdrage te leveren tot het onderzoek van stelsels van ∞^2 cirkels in de ruimte van drie afmetingen, zoogenaamde *cirkelcongruenties* (ook wel *cyclische congruenties* geheeten). Tot nog toe heeft men zich bepaald tot de bestudeering van een speciale congruentie, de *normale* cirkelcongruentie, d. w. z. men heeft zich afgevraagd, aan welke voorwaarden een cirkelcongruentie moet voldoen, opdat er ∞^1 oppervlakken kunnen worden aangegeven, zoodanig, dat de normalen dier oppervlakken tevens raaklijnen aan de cirkels zijn. Voor een goed begrip der zaak zullen we echter aan de cirkelcongruenties de theorie der *cirkeloppervlakken* (*cyclische oppervlakken*) vooraf laten gaan. Dat zijn dus oppervlakken, die door een stelsel van ∞^1 cirkels beschreven worden. In tegenstelling met de congruenties zijn deze oppervlakken vrij uitvoerig onderzocht, en wel in twee verhandelingen. De oudste is die van Enneper, getiteld: „*Die cyklischen Flächen*" [1]). In deze verhandeling gaat de schrijver uit van de parametervoorstelling van Gauss, berekent de coëfficiënten E, F, G, L, M, N der twee grondvormen, geeft een indeeling der oppervlakken, al naar gelang twee opeenvolgende cirkels geen punt, één enkel punt, of wel twee punten gemeen hebben, de methoden om deze oppervlakken te beschrijven, en staat uitvoerig stil bij het cyclisch minimaaloppervlak. Het blijkt, dat in zijn formules twee vormen optreden, die wij in het vervolg door S_1 en S_2 zullen voorstellen, en die, gelijk aan nul gesteld, de snijpunten opleveren van twee karakteristieken met een bepaalden cirkel. Houdt men n. l. een bepaalden cirkel in het oog, dan levert $S_1 = 0$ de snijpunten van de karakteristiek van het vlak, waarin de cirkel gelegen is, met dien cirkel, terwijl $S_2 = 0$ de snijpunten oplevert van dien cirkel met het machtvlak van twee bollen, waarop twee opeenvolgende cirkels groote cirkels zijn. Wanneer wij het cyclisch oppervlak als volgt voorstellen:

$$\left.\begin{aligned} x &= f + r\,(a_1 \cos t + b_1 \sin t) \\ y &= g + r\,(a_2 \cos t + b_2 \sin t) \\ z &= h + r\,(a_3 \cos t + b_3 \sin t) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

waarin $f(s)$, $g(s)$, $h(s)$ de kromme der centra is, $r(s)$ de straal van den cirkel, en (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) twee onderling loodrechte richtingen, die het vlak van den cirkel bepalen, dan zijn de genoemde vormen lineaire functies van $\cos t$ en $\sin t$. Enneper gaat deze vormen stilzwijgend voorbij, eveneens haar differentiaalquotiënten naar s en t. De eerste, die de

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1869.

aandacht op deze vormen vestigde was DESMARTRES, in een verhandeling: „*Sur les surfaces à génératrice circulaire*" [1]. Tot uitgangspunt van dezen schrijver dient de kinematica. Hij kiest n.l. een stelsel van ∞^1 ruimtekrommen, één dier krommen in een bepaalden stand, en gaat nu door middel van drie elementaire translaties en rotaties tot den naastvolgenden stand over. Aldus verkrijgt hij zes formules tusschen de translatie- en rotatiecomponenten, en past deze toe op het geval van een stelsel van ∞^1 cirkels. De beide grondvormen van GAUSS worden ook hier opgemaakt, en het is duidelijk, dat de formules van beide schrijvers met eenig gecijfer gemakkelijk met elkander in overeenstemming te brengen zijn.

Daar uit het vervolg zal blijken, dat de theorie der cyclische oppervlakken en congruenties neerkomt op een bespreking der vormen S_1 en S_2, zullen we in deze inleiding de volgende vraag behandelen: Zijn er ook in het algemeene geval, dat men te doen heeft met ∞^1 ruimtekrommen, vormen aan te geven, die een rol spelen, analoog aan die der vormen S_1 en S_2? Zijn hun differentiaalquotiënten naar de ingevoerde parameters eveneens van belang, en kan men er een eenvoudige meetkundige beteekenis aan hechten?

Reeds van te voren is te verwachten, dat de vormen en haar eerste afgeleiden op zullen treden in het lijnelement, de hoogere afgeleiden, wanneer men zich met de kromming der oppervlakken bezighoudt. Op de gestelde vraag dient bevestigend geantwoord te worden. Daartoe gaan we uit van het volgende stelsel van ∞^1 ruimtekrommen:

$$\varphi(x, y, z, s) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (2) \qquad\qquad \psi(x, y, z, s) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Door eliminatie van s vindt men het oppervlak, dat door deze ruimtekrommen beschreven wordt We vragen in de eerste plaats naar de vergelijking van het raakvlak in eenig punt (x, y, z) van dit oppervlak. Voor een bepaalde waarde $s = s_1$ krijgt men de vergelijking van een bepaalde beschrijvende kromme. De richtingscoëfficiënten A, B, C van de raaklijn in eenig punt P dier kromme, worden gevonden uit het stelsel vergelijkingen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} d x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} d z = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} d x + \frac{\partial \psi}{\partial y} d y + \frac{\partial \psi}{\partial z} d z = 0$$

namelijk:

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad B = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \qquad C = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Door den parameter s als functie van (x, y, z) te beschouwen, bijv. $s = \omega(x, y, z)$ kunnen we op het oppervlak een tweede kromme verkrijgen, die door P gaat De richtingscoëfficiënten A', B', C' van de raaklijn aan deze kromme worden gegeven door de vergelijkingen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} d x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} d z + \frac{\partial \varphi}{\partial s} d s = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} d x + \frac{\partial \psi}{\partial y} d y + \frac{\partial \psi}{\partial z} d z + \frac{\partial \psi}{\partial s} d s = 0$$

of:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) d x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right) d y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}\right) d z = 0.$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) d x + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right) d y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}\right) d z = 0.$$

---

[1] Annales de l'Ecole Normale Supérieure 3e Série, T. II 1885.

Voor de grootheid A' is te schrijven:

$$A' \equiv A + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial z}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi}{\partial s}$$

terwijl voor de grootheden B' en C' analoge uitdrukkingen gelden. De vergelijking van het raakvlak in P luidt nu:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0$$

of, met doorzichtige bekorting:

$$\begin{vmatrix} X-x \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial z} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial z}\dfrac{\partial s}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial s}{\partial z}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial s} + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial s}{\partial z} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{\partial s}{\partial y}\right)\dfrac{\partial \psi}{\partial s} \end{vmatrix} = 0.$$

We vermenigvuldigen de eerste kolom met $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, de tweede met $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, de derde met $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ en sommeeren. Daarna de kolommen respectievelijk met $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ en sommeeren wederom. Dan komt er:

$$\begin{vmatrix} \Sigma (X-x)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & Y-y & \Sigma (X-x)\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}\Sigma\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial z} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\dfrac{\partial s}{\partial x} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial \psi}{\partial s}\Sigma\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial z} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\dfrac{\partial s}{\partial x} \end{vmatrix} = 0.$$

Zoodat men ten slotte voor de vergelijking van het raakvlak in het punt $P(x, y, z)$ de volgende uitdrukking vindt:

$$\Sigma (X-x)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wanneer men een bepaalde kromme $s = s_1$ in het oog houdt, dan blijkt uit deze vergelijking, dat voor die punten, waarvoor $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)_{s=s_1} = 0$ is, het raakvlak aan het oppervlak, door de ruimtekrommen beschreven, samenvalt met het raakvlak aan het oppervlak $\varphi(x, y, z, s_1) = 0$. Een analoge eigenschap geldt voor de punten, waarvoor $\left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)_{s=s_1} = 0$ is. In het bijzonder zullen die gevallen moeten worden nagegaan, waarvoor de kromme:

$$\varphi(x, y, z, s_1) = 0, \qquad \psi(x, y, z, s_1) = 0$$

raakt aan, of een hooger contact vertoont met de oppervlakken:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)_{s=s_1} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)_{s=s_1} = 0.$$

Verder blijkt uit vergelijking (4), dat het raakvlak onbepaald wordt, wanneer men gelijktijdig heeft:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (5) \qquad\qquad \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Aan deze beide vergelijkingen, *die ons in het geval van een stelsel van* ∞^1 *cirkels juist* *de genoemde vormen* S_1 *en* S_2 *leveren*, is een eenvoudige meetkundige beteekenis te hechten Gaan we uit van het stelsel vergelijkingen (2) en (3), en vragen we ons af, wanneer dit stelsel een omhullende bezit: m. a w. wanneer is er een ruimtekromme aan te geven, waaraan al de krommen van het stelsel raken? Onafhankelijk van s moet dan voldaan zijn aan het stelsel vergelijkingen (2), (3), (5) en (6) [1]. Deze kromme kunnen we gevoeglijk de *keerkromme* noemen van het oppervlak dat door de ruimtekrommen gevormd wordt. Uit de vergelijking (4) van het raakvlak blijkt, dat dit onbepaald wordt voor een punt dezer kromme, en zij dus singuliere kromme op het oppervlak is Doch buitendien heeft DARBOUX [2]) aangetoond, dat de stelling die BRIOT en BOUQUET voor de regelvlakken gegeven hebben n. l. dat de afstand van twee opeenvolgende rechten van een ontwikkelbaar oppervlak een kleine van de 3e orde is, haar analogon bezit in het algemeene geval van ∞^1 ruimtekrommen. Beschouwt men n. l. twee opeenvolgende krommen van het stelsel, dan is de afstand van twee punten, respectievelijk op elk der krommen gelegen, steeds van dezelfde orde. Bezit het stelsel echter een omhullende, dan is de afstand van twee punten van twee opeenvolgende krommen, in de buurt van hun raakpunt met de omhullende, een kleine van de 3e orde ten opzichte van den afstand van elke andere twee punten op die opeenvolgende krommen aangenomen.

Niet alleen zullen echter de grootheden $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ en $\frac{\partial \psi}{\partial s}$ een rol spelen, maar ook de differentiaalquotiënten van de 2e orde zoodra men n. l. de kromming nagaat van de oppervlakken, die door het stelsel ruimtekrommen gevormd worden. Ook aan deze differentiaalquotiënten is een eenvoudige meetkundige beteekenis te hechten. Immers juist de karakteristieken van een stelsel van ∞^1 oppervlakken leveren een stelsel ruimtekrommen, dat een omhullende bezit [3]). De vergelijking dier kromme wordt blijkbaar gevonden, door uit het stelsel:

$$\varphi(x, y, z, s) = 0 \quad . \quad (2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

x, y, z op te lossen in functie van s. Zoo zullen de drie vergelijkingen:

$$\psi(x, y, z, s) = 0 \quad . \quad (3) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

de krommen leveren, waaraan de karakteristieken van het oppervlakkenstelsel $\psi(x, y, z, s) = 0$ raken. Deze krommen zullen echter slechts in bijzondere gevallen op het oppervlak der ruimtekrommen gelegen zijn, en wel de eerstgenoemde kromme, wanneer onafhankelijk van s voldaan wordt aan het stelsel vergelijkingen (2), (3), (5) en (7), de laatstgenoemde kromme, als identiek aan het stelsel vergelijkingen (2), (3), (6) en (8) voldaan wordt.

We passen deze algemeene beschouwingen toe op een stelsel van ∞^1 cirkels, gegeven door de vergelijkingen:

$$\varphi \equiv \Sigma (x - f)^2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\psi \equiv \Sigma c (x - f) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

waarin (f, g, h) de middelpuntskromme voorstelt, r de straal van den cirkel, en (c_1, c_2, c_3) de richtingscosinus van de normaal op het vlak van den cirkel, in zijn centrum opgericht.

---

[1]) PICARD *Traité d'Analyse*, tome I, pag. 316.
[2]) *Savants Etrangers*, tome XXVII, pag. 41.
[3]) PICARD, l. c. pag. 318.

De vergelijking van het raakvlak in eenig punt (x, y, z) van het oppervlak luidt: (zie verg. 4).

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \Sigma (X - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Sigma (X - x) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

De vergelijking $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ wordt in dit geval:

$$\Sigma f' (x - f) + r r' = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (11)$$

Zij stelt het machtvlak voor van twee bollen, waarop twee opeenvolgende cirkels groote cirkels zijn. De vergelijking $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ wordt:

$$\Sigma c' (x - f) - \Sigma c f' = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (12)$$

Gecombineerd met vergelijking (10) levert zij de karakteristiek van het vlak, waarin de cirkel gelegen is.

Elk dezer vlakken levert voor een bepaalde waarde $s = s_1$ met den, met die waarde correspondeerenden, cirkel twee snijpunten. In de punten, waarin het platte vlak (11) den cirkel snijdt, zal het raakvlak aan het cyclisch oppervlak samenvallen met het raakvlak aan den bol, waarop de cirkel gelegen is, en dus evenwijdig loopen aan de as van den cirkel. Daarentegen zal in de punten, waarin het vlak (12) den cirkel snijdt, het raakvlak aan het cyclisch oppervlak met het vlak van den cirkel samenvallen. Van belang zijn natuurlijk de bijzondere gevallen, waarin de karakteristieken niet meer twee verschillende snijpunten met den cirkel leveren, doch in raaklijnen overgaan.

Het snijpunt der drie platte vlakken (10), (11) en (12) ligt in het algemeen niet op den cirkel. Opdat dit het geval zij, zal de parameter s aan een zekere voorwaarde moeten voldoen, welke gevonden wordt door x, y, z uit het stelsel vergelijkingen (9), (10), (11) en (12) te elimineeren. Is de resulteerende vergelijking algebraïsch, dan leveren haar wortels de kegelpunten van het cyclisch oppervlak. In de meeste gevallen zal de vergelijking echter transcendent zijn. Wordt aan bedoelde vergelijking door alle waarden van s voldaan, dan heeft men niet meer met de meest algemeene soort cyclische oppervlakken te doen Het stelsel cirkels bezit een omhullende, zij raken alle aan een bepaalde ruimtekromme.

Op deze wijze nader op de theorie in te gaan, brengt echter zijn bezwaren mede. De boven besproken differentiaalquotiënten zijn partieel, en de vergelijkingen der kromme lijnen op het cyclisch oppervlak worden door partieele differentiaalvergelijkingen gegeven. Dit vermijdt men door de parametervoorstelling van Gauss. Met behulp van deze voorstelling zullen we dan ook de zoo juist uiteengezette beschouwingen vervolgen. We eindigen deze inleiding met een kort overzicht der verkregen resultaten.

Hoofdstuk I, Cyclische Oppervlakken.

Hoofdstuk II, Cyclische Congruenties.

Overzicht van hoofdstuk I. We hadden reeds gelegenheid op de analogie met de regelvlakken te wijzen, konden n.l. een kromme aangeven, die dezelfde rol speelt als de keerkromme bij de ontwikkelbare oppervlakken. Dit feit voert ons terstond tot een indeeling der cyclische oppervlakken. Als oppervlakken van de 1e soort kiezen we die, waarvoor twee opeenvolgende cirkels geen enkel punt gemeen hebben. Als oppervlakken van de 2e soort kiezen we die oppervlakken, waarvoor twee opeenvolgende cirkels één punt gemeen hebben, en derhalve alle aan een bepaalde ruimtekromme raken. Hebben twee opeenvolgende cirkels twee punten gemeen, dan moeten, daar deze punten gelijke rol spelen, de beschrijvende cirkels noodzakelijk aan twee ruimtekrommen raken, en heeft men met de omhullende ∞^1 bollen te doen. Tot dezelfde indeeling geraakt men door een nadere beschouwing van het snijpunt T der twee karakteristieken S_1 en S_2. Ligt het punt T buiten of binnen den cirkel, dan heeft deze cirkel met den opvolgenden geen enkel punt gemeen. Ligt het punt T op den cirkel, dan hebben twee opeenvolgende cirkels één punt gemeen. Vallen de karakteristieken S_1 en S_2 samen, dan raakt de cirkel aan twee ruimtekrommen. Ten slotte kunnen beide karakteristieken samenvallen met de raaklijn aan de keerkromme, en wordt het cyclisch oppervlak door de osculatiecirkels der keerkromme gevormd. Een belangrijke rol speelt de poollijn van het punt T ten opzichte van den cirkel. Bij sommige vraagstukken worden onze vergelijkingen eenvoudiger, als we één der richtingen, die het vlak van onzen cirkel bepalen (zie verg. 1) bijv. de richting (b_1, b_2, b_3) loodrecht op genoemde poollijn kiezen, welke keuze, zooals blijken zal, steeds mogelijk is. We bereiken hiermee, dat de snijpunten Q en Q' van poollijn en cirkel op gelijken voet behandeld worden. Bij de oppervlakken van de 1e soort zijn nu op elken cirkel vier belangrijke punten aan te geven. Vooreerst de punten Q en Q'. In deze punten raakt de cirkel n. l. aan een kromtelijn van het oppervlak. Verder de snijpunten van den karakteristiek S_2 en den cirkel, in welke punten de cirkel aan een asymptotische lijn van het oppervlak raakt. Wij kunnen hieraan toevoegen, dat de beide hoofdkromtestralen in de punten Q en Q' gemakkelijk te berekenen zijn, en dat, als een cyclisch oppervlak umbilicaalpunten bezit, slechts deze punten als zoodanig kunnen optreden. Wanneer we het gedrag van het raakvlak in de punten van eenzelfden beschrijvenden cirkel nagaan, dan is het punt T als top van een stralenbundel te beschouwen, zoodanig, dat elke straal uit dien bundel den cirkel in twee punten snijdt, waarvoor de raakvlakken elkaar in eenzelfde punt der as ontmoeten. Een wet, analoog aan die welke door Chasles voor de regelvlakken gegeven is, is slechts in een enkel bijzonder geval aan te geven. Heeft men n. l. met oppervlakken van de 2e soort te doen, en is de keerkromme de ontwondene der centrale kromme, dan verandert voor een bepaalden beschrijvenden cirkel de tangens van den standhoek van het raakvlak en het vlak van den cirkel rechtevenredig met de tangens van den hoek, dien de verbindingslijn van centrum en raakpunt met een bepaalde, als oorsprong gekozen, richting maakt.

Bij de regelvlakken is het normalenoppervlak van een bepaalde beschrijvende lijn een paraboloïde. Zoo kan men in ons geval vragen naar het normalenregelvlak van een bepaalden beschrijvenden cirkel. Dit is een oppervlak van den 4en graad. Van dit regelvlak zijn gemakkelijk drie richtkrommen aan te geven: n. l. de beschrijvende cirkel zelf, de as van den cirkel, en een kegelsnee, die in een vlak loodrecht op de raaklijn aan de centrale kromme gelegen is. Heeft men met oppervlakken van de 2e soort te doen, dan ontaardt deze kegelsnee in twee rechten, waarvan één als richtkromme te verwerpen is.

Is het punt T een standvastig punt in de ruimte, dan heeft men met een anallagmatisch oppervlak te doen. De differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën der cirkels is een vergelijking van Riccati. Vier dezer trajectoriën snijden dus op een cirkel een puntquadrupel van constante dubbelverhouding uit. In eenige bijzondere gevallen wordt deze differentiaalvergelijking zeer eenvoudig. Liggen de cirkels n. l. in de normaalvlakken der centrale kromme, dan vindt men de orthogonale trajectoriën door middel van een enkele quadratuur, en treedt alleen de torsie der centrale kromme onder het integraalteeken op. Een ander geval, waarin de differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën direct geïntegreerd kan worden, is dat der oppervlakken van de 2e soort, waarvoor de keerkromme als ontwondene der centrale kromme optreedt. Wil men, dat de orthogonale trajectoriën der cirkels tevens een stelsel geodetische krommen vormen, dan moet het cyclisch oppervlak aan de volgende voorwaarden voldoen: het vlak van den cirkel moet osculatievlak der centrale kromme zijn, terwijl deze kromme zelf een constante torsie bezit, gelijk aan den straal van den cirkel. Deze oppervlakken bezitten tevens de eigenschap, dat twee opeenvolgende orthogonale trajectoriën op elken beschrijvenden cirkel een element insnijden, gelijk aan het correspondeerend element der centrale kromme. De trajectoriën zelve bezitten ook een constante torsie, die niet van kromme tot kromme verandert, en gelijk is aan de torsie der centrale kromme. Ten slotte vragen we ons af, of de cirkels en hun orthogonale trajectoriën een isotherm stelsel kunnen vormen. Als oplossing vinden we o. a. de anallagmatische oppervlakken met isotrope focaalkromme. Men kan zich vervolgens afvragen, of op elken cirkel ook zoodanige punten te vinden zijn, dat de afstand tot den volgenden cirkel een maximum of minimum bedraagt. De aaneenschakeling dezer punten vormt dan een stelsel krommen op het oppervlak, strictie- en elongatielijnen geheeten. Het blijkt, dat op elken cirkel vier punten te vinden zijn, die aan de vraag voldoen. Zij worden uitgesneden door een gelijkzijdige hyperbool, die door het centrum van den cirkel gaat. Voor het geval de cirkels in de normaalvlakken der centrale kromme gelegen zijn, ontaardt deze hyperbool in twee onderling loodrechte lijnen, de karakteristiek $S_2 = 0$, en een middellijn.

Behalve de gevallen, dat de cirkels in de normaalvlakken of de osculatievlakken der centrale kromme gelegen zijn, is er nog een geval, dat vermelding verdient, en wel, dat de cirkels in onderling evenwijdige vlakken gelegen zijn. In dat geval ontaardt de hyperbool eveneens en worden de strictie- en elongatielijnen door de karakteristiek $S_1 = 0$, en een middellijn loodrecht daarop, op het oppervlak uitgesneden. Onderstelt men tevens, dat de centrale kromme vlak is, dan vormen de parameterkrommen, zooals wij ze in vergelijking (1) hebben ingevoerd, een stelsel toegevoegde krommen. Tot deze groep van oppervlakken komt men ook, wanneer men een onderzoek instelt naar het cyclisch minimaaloppervlak. De cirkels zijn in onderling evenwijdige vlakken gelegen, de centrale kromme is vlak, en de coördinaten van een punt dier kromme dubbelperiodieke functies van een parameter. Bij een minimaaloppervlak is de som der hoofdkromtestralen in elk punt van het oppervlak nul. Meer algemeen kan men naar die oppervlakken vragen, waarvoor de gemiddelde kromming voor de punten van eenzelfden beschrijvenden cirkel constant is, maar van cirkel tot cirkel varieert. Alleen een omwentelingsoppervlak voldoet aan de vraag. Nemen we aan, dat de gemiddelde kromming over het geheele oppervlak constant is, dan vindt men het kleinste omwentelingsoppervlak van gegeven volumen. De meridiaankromme is de kromme, die door het brandpunt van een ellips of hyperbool beschreven wordt, wanneer deze, zonder te glijden, langs de as van omwenteling rolt. Stelt men ten slotte de constante gelijk aan nul, dan heeft men weer te doen met een minimaaloppervlak, en vindt als oplossing de catenoïde, het eenige minimaaloppervlak, dat tevens omwentelingsoppervlak is. Ook als men een onderzoek instelt naar de cyclische oppervlakken met constante totale kromming, voorloopig aannemende, dat deze van cirkel tot cirkel varieert, vindt men, dat alleen de omwentelingsoppervlakken aan de vraag voldoen. Bij speciale keuze der constante, vindt men als meridiaankromme de tractrix, waarvan het keerpunt op de omwentelingsas ligt.

Overzicht van hoofdstuk II. Bij de behandeling van de cyclische congruenties zoeken we naar een analogie met de stralencongruenties. Door elken cirkel der congruentie gaan blijkbaar ∞^1 cyclische oppervlakken, die elk een bepaalde kromme op het oppervlak der centra (centraal oppervlak) insnijden. Zijn er nu onder deze ∞^1 oppervlakken ook oppervlakken van de 2ᵉ soort? Het blijkt, dat in elk punt van het centrale oppervlak vier richtingen aan te geven zijn, zoodanig, dat zij als raaklijnen optreden aan centrale krommen, die bij oppervlakken van de 2ᵉ soort behooren. Kiest men op een bepaalden beschrijvenden cirkel een punt, en construeert men in dit punt het raakvlak aan een der cyclische oppervlakken, die door dezen cirkel gaan dan zal het raakvlak in het algemeen een anderen stand innemen, naar mate men een ander cyclisch oppervlak door den cirkel brengt. Men kan zich nu afvragen, of er op elken cirkel ook punten te vinden zijn — focaalpunten — zoodanig, dat het raakvlak hetzelfde is voor alle cyclische oppervlakken, die door dien cirkel te brengen zijn. Het blijkt, dat er op elken cirkel vier punten gelegen zijn, die aan de vraag voldoen. Voor de congruentie vormt het geheel dezer punten vier oppervlakken, de focaaloppervlakken der congruentie geheeten. Aan deze focaaloppervlakken kan nog een andere meetkundige beteekenis gehecht worden. We zagen, dat de congruentie op vier wijzen volgens oppervlakken van de 2ᵉ soort gerangschikt kan worden. Vraagt men nu, waar op elken cirkel de raakpunten met de keerkrommen gelegen zijn, dan komt men terug tot de vier focaalpunten. Een focaaloppervlak is dus ook te beschouwen als de meetkundige plaats van een stelsel keerkrommen, waaraan de cirkels der congruentie noodzakelijk raken. We passen nu voor elken cirkel dezelfde assendraaiïng toe als boven bij de cyclische oppervlakken. Bij elken cirkel behoort een bepaald punt T. Eén der richtingen die het vlak van dien cirkel bepalen, bijv. de richting (b_1, b_2, b_3) kiezen we loodrecht op de poollijn van het punt T. Het blijkt, dat deze keuze steeds mogelijk is, en er op het centrale oppervlak twee stelsels krommen aangegeven kunnen worden, zoodanig, dat, als we deze als centrale krommen van een cyclisch oppervlak kiezen, de bedoelde assendraaiing voor deze oppervlakken plaats heeft gevonden. Genoemde krommen kiezen we als parameterkrommen op het centrale oppervlak. Hierdoor wordt verkregen, dat er een eenvoudig analytisch kenmerk valt aan te geven voor het feit, dat de congruentie op één wijze volgens cyclische oppervlakken gerangschikt kan worden, die als omhullenden van een stelsel ∞^1 bollen beschouwd kunnen worden.

We gaan de volgende speciale gevallen na:

1°. de cirkels liggen in de raakvlakken van het centrale oppervlak;
2°. de cirkels liggen in normaalvlakken van het centrale oppervlak.

Het eerste geval wordt nog onderverdeeld in:

a. de cirkels bezitten een constanten straal;
b. de congruentie is op één wijze volgens omhullenden van ∞^1 bollen te rangschikken.

Geval 1a. Daar de cirkels een constanten straal bezitten, zijn de oppervlakken van de 2ᵉ soort kanaaloppervlakken. De kromtelijnen van het centrale oppervlak bepalen de centrale krommen dezer kanaaloppervlakken. Treedt het punt P als centrum van een bepaalden cirkel der congruentie op, dan zijn de snijpunten van de raaklijnen aan de kromtelijnen in het punt P met den cirkel, de focaalpunten van dien cirkel.

Geval 1b Het centrale oppervlak is noodzakelijk een ontwikkelbaar oppervlak. De beschrijvende lijnen van dit oppervlak treden op als centrale krommen van cyclische oppervlakken, die omhullenden van ∞^1 bollen zijn.

De congruentie is aldus te construeeren. In elk raakvlak door een beschrijvende lijn construeert men een stelsel van ∞^1 cirkels, waarvan de centra op die rechte gelegen zijn. Een dergelijk stelsel bezit steeds een omhullende. Men herhaalt de bewerking voor elk raakvlak.

De cirkelcongruentie, waarmee men zich tot nog toe bezig heeft gehouden, is de *normale congruentie.* Men heeft zich n. l. afgevraagd, aan welke voorwaarden een cirkelcongruentie moet voldoen, opdat er ∞^1 oppervlakken aangegeven kunnen worden, wier normalen raaklijnen aan de cirkels zijn. Oppervlakken, die aan de vraag voldoen, worden gevonden door integratie van een totale differentiaalvergelijking. Nu bezit de totale differentiaalvergelijking een integrabiliteitsvoorwaarde. Wanneer deze voorwaarde niet identiek vervuld wordt, zijn er hoogstens twee oppervlakken, die aan de vraag voldoen, waaruit de volgende, door RIBAUCOUR gegeven, stelling volgt:

Wanneer men bij een cirkelcongruentie drie oppervlakken kan aangeven, wier normalen raaklijnen dezer cirkels zijn, dan zijn er oneindig vele oppervlakken aan te geven, die deze eigenschap bezitten.

De totale differentiaalvergelijking is om te werken tot een differentiaalvergelijking van RICCATI, waaruit de tweede stelling van RIBAUCOUR volgt:

Wanneer er een stelsel van ∞^1 oppervlakken aan te geven is, wier normalen raaklijnen aan een stelsel van ∞^2 cirkels zijn, dan bepalen vier oppervlakken van dit stelsel op alle cirkels een puntquadrupel met constante dubbelverhouding.

We onderzoeken nu, onder welke voorwaarden eenige der door ons beschouwde congruenties normale congruenties zijn. Dan geldt als eerste stelling:

Construeert men in de ∞^2 raakvlakken van een willekeurig oppervlak een stelsel congruente cirkels, waarvan de centra de raakpunten zijn, dan geldt als noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat deze congruentie een normale congruentie zij, dat het centrale oppervlak een pseudosphaerisch oppervlak is.

Tweede geval: de cirkels liggen in normaalvlakken van het centrale oppervlak. Dan gelden de volgende stellingen:

I. *Neemt men op een oppervlak een stelsel kromtelijnen (parameterkrommen $u = const.$) en construeert men in de bij deze krommen behoorende hoofdnormaalvlakken cirkels, waarvan de centra op die kromtelijnen liggen, dan zal de aldus ontstane congruentie een normale congruentie zijn, wanneer men den straal van den cirkel evenredig aan den met het andere hoofdnormaalvlak correspondeerenden hoofdkromtestraal kiest, er zorg voor dragende, dat de verhoudingsfactor voor een en dezelfde parameterkromme constant is.*

We kiezen op het centrale oppervlak een stelsel parameterkrommen, zooals wij ze in het begin van dit overzicht gedefinieerd hebben, en vinden als tweede stelling:

II. *Wanneer men in de normaalvlakken van een stelsel parameterkrommen ($u = const.$) cirkels construeert, waarvan de centra op deze krommen gelegen zijn, terwijl men tot straal dezer cirkels telkenmale een der hoofdkromtestralen kiest, dan zal de aldus ontstane congruentie een normale congruentie zijn.*

HOOFDSTUK I.

Cyclische oppervlakken.

---

§ 1. *Het raakvlak.* In de ruimte van drie afmetingen kan men een cirkel op de volgende wijze voorstellen:

$$\left.\begin{aligned} x &= f + r\,(a_1 \cos t + b_1 \sin t) \\ y &= g + r\,(a_2 \cos t + b_2 \sin t) \\ z &= h + r\,(a_3 \cos t + b_3 \sin t) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hierin zijn (f, g, h) de coördinaten van het middelpunt, (a_1, a_2, a_3) (b_1, b_2, b_3) twee onderling loodrechte, maar overigens geheel willekeurige richtingen, die het vlak van den cirkel bepalen, terwijl r de straal van den cirkel is. Als nevenvoorwaarden gelden dus:

$$\Sigma\, a^2 = 1, \quad \Sigma\, ab = 0, \quad \Sigma\, b^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ten slotte stelt t den hoek voor, dien de voerstraal van het middelpunt naar eenig punt van den omtrek met de richting (a_1, a_2, a_3) maakt. Neemt men aan, dat bovengenoemde grootheden functies van één parameter s zijn, dan heeft men te doen met een stelsel van ∞^1 cirkels, een cyclisch oppervlak. Een eerste vraag is nu naar de vergelijking van het raakvlak in eenig punt (x, y, z) van dit oppervlak. Zooals we in de inleiding gezien hebben, mag hiervoor geschreven worden:

$$[\Sigma\, c' (x - f) - \Sigma\, c f'] \,\Sigma\, (x - f)(X - x) + [\Sigma\, f' (x - f) + r r'] \,\Sigma\, c\,(X - x) = 0. \quad (2^*)$$

Ons rest nog in deze vergelijkingen den parameter t in te voeren. Daartoe brengt men in het stelsel vergelijkingen (1) de grootheden (f, g, h) naar het 1e lid, vermenigvuldigt de vergelijkingen respectievelijk met (f', g', h') daarna met (c_1', c_2', c_3') en telt op. Men vindt dan:

$$\Sigma\, f' (x - f) + r r' = r\,(\Sigma\, a f' \cos t + \Sigma\, b f' \sin t + r') \equiv r\, S_1 \ldots\ldots \quad (3)$$

In 't oog houdend dat $\Sigma\, a c = 0$, $\Sigma\, b c = 0$ is, en dus $\Sigma\, a c' = - \Sigma\, a' c$, en $\Sigma\, b c' = - \Sigma\, b' c$ is vindt men:

$$\Sigma\, c' (x - f) - \Sigma\, c f' = - [r\,(\Sigma\, a' c \cos t + \Sigma\, b' c \sin t) + \Sigma\, c f'] \equiv - S_2 \ldots \quad (4)$$

De vergelijking van het raakvlak luidt derhalve, na invoering van den parameter t:

$$\Sigma\, (X - x)\,[(a \cos t + b \sin t)\, S_2 - c\, S_1] = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De grootheden S_1 en S_2 zijn lineaire functies van $\cos t$ en $\sin t$. Substitueert men in S_1 en S_2:

$$\sin t = \frac{2w}{1 + w^2}, \quad \cos t = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \quad tg\, \frac{t}{2} = w \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

dan correspondeeren met de twee waarden van w, die aan de vergelijking:

$$(r' - \Sigma\, a f')\, w^2 + 2\, w\, \Sigma\, b f' + r' + \Sigma\, a f' = 0$$

voldoen, de punten, waarin het machtvlak van twee bollen waarop twee opeenvolgende cirkels groote cirkels zijn, den cirkel, waarvan we uitgingen, snijdt. Op gelijke wijze correspondeeren met de wortels van de vergelijking:

$$(\Sigma\, c f' - r\, \Sigma\, a' c)\, w^2 + 2\, w\, r\, \Sigma\, b' c + (\Sigma\, c f' + r\, \Sigma\, a' c) = 0$$

de punten, waarin de karakteristiek van het vlak van den cirkel dezen snijdt.

Om de beweging van het raakvlak na te gaan, als het raakpunt een beschrijvenden cirkel doorloopt, zoeken we het snijpunt van het raakvlak met de as van den cirkel. Aan een bepaald cyclisch oppervlak kunnen we een bepaald assenregelvlak toevoegen, met vergelijkingen:

$$x = f + u\, c_1, \quad y = g + u\, c_2, \quad z = h + u\, c_3.$$

We substitueeren nu de coördinaten van een punt der as, dat als snijpunt op zal treden, in de vergelijking (5) van het raakvlak, en vinden:

$$u = -r \frac{r(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t) + \Sigma c f'}{\Sigma a f' \cos t + \Sigma b f' \sin t) + r'} = -r \frac{(\Sigma c f' - r \Sigma a' c) w^2 + 2 w r \Sigma b' c + \Sigma c f' + r \Sigma a' c}{(r' - \Sigma a f') w^2 + 2 w \Sigma b f' + r' + \Sigma a f'} = -r \frac{S_2}{S_1}. \quad (7)$$

Ter loops merken we op, dat:

$$tg\, \alpha = \frac{u}{r} = -\frac{S_2}{S_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

den standhoek tusschen het raakvlak en het vlak van den cirkel bepaalt.

Uit vergelijking (7) volgt, dat bij een bepaalde waarde van w één bepaalde waarde van u behoort, maar omgekeerd, bij een bepaalde waarde van u een tweetal waarden van w. Of meetkundig: aan elken cirkel kan een vlakkenbundel worden toegevoegd, met vergelijking:

$$r\, S_2 + u\, S_1 = 0$$

of:

$$r^2\, [\Sigma\, c' (x - f) - \Sigma\, c f'] - u\, [\Sigma\, f' (x - f) + r\, r'] = 0.$$

Deze vlakkenbundel snijdt het vlak van den cirkel volgens een stralenbundel met top T (zie fig. I). Noemt men de punten, waarin een straal den cirkel snijdt, geconjugeerde punten, dan heeft men de volgende stellingen:

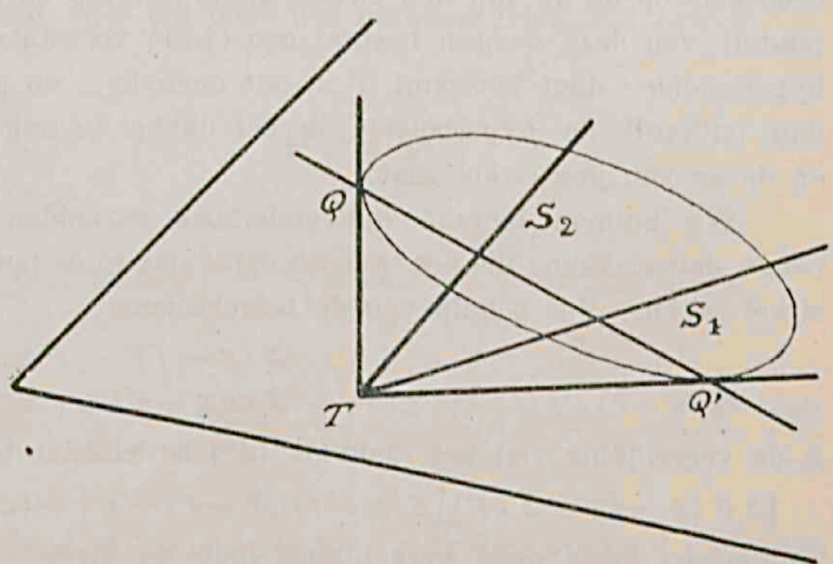

Fig. I.

Raakvlakken in geconjugeerde punten van een bepaalden cirkel aan het oppervlak aangebracht, snijden de as in eenzelfde punt.

Raakvlakken, in die geconjugeerde punten aangebracht, waarin het machtvlak den cirkel snijdt, ($S_1 = 0$, $u = \infty$) *loopen evenwijdig aan de as. In de punten, waarin de karakteristiek* ($S_2 = 0$, $u = 0$) *den cirkel snijdt, vallen ze samen met het vlak van den cirkel.*

Tweemaal zal het voorkomen dat de geconjugeerde punten samenvallen. In dat geval raakt een straal uit den stralenbundel aan den cirkel. De waarden van t, die hiermee correspondeeren, de vertakkingspunten der functie, vindt men uit de vergelijking $\frac{d\,u}{d\,t}=0$.

Nu is:

$$\frac{d\,u}{d\,t}=-r\,\frac{\left(S_1\frac{\partial S_2}{\partial t}-S_2\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)}{S_1^2}.$$

Bedoelde vergelijking luidt derhalve:

$$S_1\frac{\partial S_2}{\partial t}-S_2\frac{\partial S_1}{\partial t}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

of uitgewerkt:

$$(r r' \Sigma b' c-\Sigma c f' \Sigma b f')\cos t+(\Sigma c f' \Sigma a f'-r r' \Sigma a' c)\sin t+r(\Sigma a f' \Sigma b' c-\Sigma b f' \Sigma a' c)=0 \quad (10)$$

een lineaire betrekking in $\cos\,t$ en $\sin\,t$, dus quadratisch in w, waarvan de wortels de poollijn van het punt T bepalen. Naar gelang:

$$\Delta\equiv(r r' \Sigma b' c-\Sigma c f' \Sigma b f')^2+(\Sigma c f' \Sigma a f'-r r' \Sigma a' c)^2-r^2(\Sigma a f' \Sigma b' c-\Sigma b f' \Sigma a' c)^2 \gtreqless 0 \quad (11)$$

zullen de snijpunten van poollijn en cirkel, reeël, samenvallend, of imaginair zijn. Voor het geval $\Delta=0$ is, ligt het punt T op den cirkel. De vergelijkingen $S_1=0$ en $S_2=0$ hebben een wortel gemeen. Uit vergelijking (7) blijkt, dat de waarde van u voor dit punt onbepaald wordt, derhalve het raakvlak ook. Een dergelijk punt treedt dus als kegelpunt van het oppervlak op. Is de vergelijking $\Delta=0$ algebraïsch, dan levert zij de kegelpunten. In de meeste gevallen zal de vergelijking echter transcendent zijn.

Geldt de betrekking:

$$\frac{\Sigma a' c}{\Sigma a f'}=\frac{\Sigma b' c}{\Sigma b f'}=\frac{\Sigma c f'}{r r'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

dan moeten de karakteristieken S_1 en S_2 samenvallen, en is u constant. De normalen op de raakvlakken, in de punten van eenzelfden cirkel, vormen een ontwikkelbaar oppervlak, n. l. een kegel. De cirkel zelf is kromtelijn op het cyclisch oppervlak.

Beschouwen we de doorsnee van twee geconjugeerde raakvlakken, dan steunt deze eensdeels op de as van den cirkel, anderdeels op de poollijn van het punt T. Tusschen de punten van deze rechten bestaat een (1 : 1) verwantschap; de doorsnee beschrijft dus een hyperboloïde. Ligt het punt T in het oneindige, en gaat dus de poollijn door het centrum, dan ontaardt de hyperboloïde in het dubbel te tellen platte vlak, dat door de middellijn en de as van den cirkel gaat.

We kunnen hieraan het onderzoek verbinden naar de klasse van de meetkundige plaats der vlakken, die het cyclisch oppervlak in de punten van een bepaalden beschrijvenden cirkel raken. Met behulp van de betrekkingen:

$$\begin{aligned} \Sigma\,(x-f)^2-r^2&=0.\\ \Sigma\,c\,(x-f)\quad &=0. \end{aligned}$$

is de vergelijking van het raakvlak (2*) herleidbaar tot de gedaante:

$$[\Sigma c'(x-f)-\Sigma c f'][\Sigma(x-f)(X-f)-r^2]+[\Sigma f'(x-f)+r r']\,\Sigma c\,(X-f)=0.$$

Combineert men deze vergelijking met de twee bovenstaande betrekkingen, dan blijkt, dat door eenig punt (X, Y, Z) *vier* raakvlakken gaan, die hun raakpunten op een beschrijvenden cirkel hebben. Het stelsel van ∞^1 vlakken vormt dus een ontwikkelbaar biquadratisch oppervlak. Daar het raakvlak in de snijpunten van den cirkel met de karakteristiek $S_2=0$ met het vlak van den cirkel samenvalt, treedt dit vlak als dubbelvlak op.

§ 2. *Het normalenregelvlak van een bepaalden beschrijvenden cirkel.* Wanneer we een bepaalden beschrijvenden cirkel in het oog vatten kunnen we het centrum gevoeglijk als coördinatenoorsprong kiezen, de richting (a_1, a_2, a_3) als X as, de richting (b_1, b_2, b_3) als Y as, de richting (c_1, c_2, c_3) als Z as. Deze keuze brengt de volgende substituties mede:

(f, g, h) is te vervangen door $(0, 0, 0)$
(a_1, a_2, a_3) „ „ „ „ $(1, 0, 0)$
(b_1, b_2, b_3) „ „ „ „ $(0, 1, 0)$
(c_1, c_2, c_3) „ „ „ „ $(0, 0, 1)$.

Daar de vergelijking van het raakvlak in eenig punt (x, y, z):

$$\Sigma\,(X - x)\,[(a \cos t + b \sin t)\,S_2 - c\,S_1] = 0$$

luidt, zoo wordt de normaal op het raakvlak in dat punt gegeven door:

$$\frac{X - x}{(a_1 \cos t + b_1 \sin t)\,S_2 - c_1 S_1} = \frac{Y - y}{(a_2 \cos t + b_2 \sin t)\,S_2 - c_2 S_1} = \frac{Z - z}{(a_3 \cos t + b_3 \sin t)\,S_2 - c_3 S_1}.$$

Bij de speciale keuze van ons assenstelsel worden deze vergelijkingen eenvoudiger, terwijl tevens de coördinaten (x, y, z) van het steunpunt te vervangen zijn door $(r \cos t, r \sin t, 0)$. De vergelijkingen der normaal luiden nu:

$$\frac{x - r \cos t}{S_2 \cos t} = \frac{y - r \sin t}{S_2 \sin t} = \frac{z}{-S_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Dus is:

$$\frac{x \cos t + y \sin t - r}{1} = -\frac{z\,S_2}{S_1}$$

waaruit:

$$S_1\,(x \cos t + y \sin t - r) + z\,S_2 = 0$$

of:

$$(\Sigma\, a f' \cos t + \Sigma\, b f' \sin t + r')\,(x \cos t + y \sin t - r) + z\,(r\, \Sigma\, a' c \cos t + r\, \Sigma\, b' c \sin t + \Sigma\, c f') = 0.$$

Om de vergelijking van het normalenregelvlak te vinden, moet de grootheid t uit deze vergelijking geëlimineerd worden. Daar voor elk punt der normaal geldt, dat $tg\, t = \frac{y}{x}$, zoo mag:

$$\cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin t = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

gesteld worden. Na substitutie vindt men:

$$\left(\frac{x\, \Sigma\, a f' + y\, \Sigma\, b f'}{\sqrt{x^2 + y^2}} + r'\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2} - r\right) + z\left[\frac{r\,(x\, \Sigma\, a' c + y\, \Sigma\, b' c)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \Sigma\, c f'\right] = 0$$

of:

$$(x\, \Sigma\, a f' + y\, \Sigma\, b f' + z\, \Sigma\, c f' - r r') = -\frac{r z\,(x\, \Sigma\, a' c + y\, \Sigma\, b' c) + r\,(x\, \Sigma\, a f' + y\, \Sigma\, b f') - r'(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

of ten slotte:

$$(x^2 + y^2)\,(x\, \Sigma\, a f' + y\, \Sigma\, b f' + z\, \Sigma\, c f' - r r')^2 = [r'(x^2 + y^2) + r z\,(x\, \Sigma\, a' c + y\, \Sigma\, b' c) - r\,(x\, \Sigma\, a f' + y\, \Sigma\, b f')]^2.$$

De normalen vormen dus een oppervlak van den 4[en] graad. Meetkundig is gemakkelijk in te zien, dat de doorsnee met het vlak van den cirkel een C^4 oplevert, die ontaardt in den cirkel en twee aanvullende rechten. Immers, komt het raakpunt in het vlak $S_1 = 0$ te liggen, dan wordt $u = \infty$, en loopt het raakvlak evenwijdig aan de as. De normalen in de snijpunten van het vlak $S_1 = 0$ met den cirkel liggen alzoo in het vlak van den cirkel. Noemen wij de punten, waarin die normalen den cirkel ten tweeden male ontmoeten, N en N'.

De as van den cirkel is eveneens op het oppervlak gelegen. Substitueert men n. l. $x = 0$, $y = 0$ dan wordt aan bovenstaande vergelijking voldaan. Het is duidelijk, dat de as dubbelrechte op het oppervlak is. Immers: raakvlakken in geconjugeerde punten snijden de as in hetzelfde punt, en derhalve ook de normalen, in de steunpunten dier raakvlakken opgericht. De cirkel en de as zijn alzoo tot richtkrommen van het regelvlak te kiezen. Nu is er nog een derde richtkromme aan te geven, en wel de dubbelkegelsnee, die verkregen wordt door de snijding van de hyperboloïde:

$$r' (x^2 + y^2) + r\, z\, (x\, \Sigma\, a' c + y\, \Sigma\, b' c) - r\, (x\, \Sigma\, a f' + y\, \Sigma\, b f') = 0$$

en het vlak:

$$V \equiv x\, \Sigma\, a f' + y\, \Sigma\, b f' + z\, \Sigma\, c f' - r r' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Omtrent dit platte vlak merken we op, dat zijn stand eenvoudig is aan te geven. De coëfficiënten $\Sigma\, a f'$, $\Sigma\, b f'$ en $\Sigma\, c f'$ zijn n. l. de cosinus van de hoeken, die de raaklijn aan de centrale kromme met de drie richtingen (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) en (c_1, c_2, c_3) maakt. Deze lijn treedt dus als de normaal op bovengenoemd vlak op. Het vlak loopt derhalve evenwijdig aan het vlak $S_1 = 0$, en gaat door de punten N en N'. Immers het vlak $S_1 = 0$ snijdt van de Z as een stuk: $-\frac{r r'}{h'}$ af, terwijl het vlak V een stuk $+\frac{r r'}{\Sigma\, a f'} = +\frac{r r'}{h'}$ van de Z as afsnijdt. De vlakken liggen dus symmetrisch ten opzichte van het middelpunt van den cirkel. Desmartres merkt op, dat van deze dubbelkegelsnee vijf punten gemakkelijk geconstrueerd kunnen worden. Het vlak $S_2 = 0$ snijdt den cirkel n. l. in twee punten wier normalen evenwijdig aan de as loopen. Waar deze normalen het vlak V ontmoeten, vindt men twee punten der dubbelkegelsnee. Verder de punten N en N'; ten slotte het punt, waar de as van den cirkel het vlak V snijdt. Door de drie genoemde richtkrommen is het regelvlak volkomen bepaald. Een serie kegelsneden, die op het oppervlak gelegen is, wordt nog als volgt gevonden.

Normalen, die bij de steunpunten van geconjugeerde raakvlakken behooren, snijden de as in eenzelfde punt. Brengt men een vlak door twee dezer normalen, dan is de aanvullende kromme een kegelsnee.

Bijzondere gevallen:

1°. $\Sigma\, a f' = 0$, $\Sigma\, b f' = 0$ d. w. z. de cirkels liggen in de normaalvlakken der centrale kromme. De vergelijking der hyperboloïde luidt:

$$r' (x^2 + y^2) + r\, z\, (x\, \Sigma\, a' c + y\, \Sigma\, b' c) = 0.$$

Die van het platte vlak V:

$$z\, \Sigma\, c f' - r r' = 0$$

waaruit blijkt, dat de dubbelkegelsnee in dit geval in een cirkel overgaat.

2°. $\Sigma\, c f' = 0$ d. w. z. dat de cirkels in raakvlakken der centrale kromme gelegen zijn, terwijl tevens r constant is.

De hyperboloïde ontaardt in twee platte vlakken:

$$z = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1) \qquad x\, \Sigma\, a' c + y\, \Sigma\, b' c = 0 \; . \; . \; . \quad (2)$$

terwijl de vergelijking van het platte vlak V:

$$x\, \Sigma\, a f' + y\, \Sigma\, b f' = 0 \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

luidt. De doorsnee van de vlakken (2) en (3) is de Z as, die als tweevoudige rechte op het normalenoppervlak optreedt, terwijl de doorsnee der vlakken (1) en (3) in dit geval de karakteristiek S_1 is, die thans in haar geheel op het normalenoppervlak ligt.

§ 3. *Draaiing der richtingen, die het vlak van den cirkel bepalen.* Omtrent de richtingen (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) die het vlak van den cirkel bepalen, hebben we ondersteld, dat ze loodrecht op elkaar staan. Overigens zijn ze willekeurig in het vlak van den cirkel aangenomen. We kunnen nu een vereenvoudiging in onze formules aanbrengen, door één dier richtingen bijv. (b_1, b_2, b_3) zoodanig te kiezen, dat zij loodrecht op de poollijn van het punt T staat. Zij halveert derhalve den hoek, dien de beide raaklijnen uit T aan den cirkel vormen, waardoor de raakpunten Q en Q' op gelijken voet behandeld worden. Laten de nieuwe richtingen aangeduid worden door $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ en onderstellen wij, dat wij daartoe de oude richtingen over een hoek ψ moeten draaien (zie fig. II). Dan zijn de grootheden $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ voorloopig onbekende grootheden, die echter bekend zullen zijn, zoodra de hoek ψ bekend is. Een punt van het oppervlak, dat vroeger aangeduid werd, door:

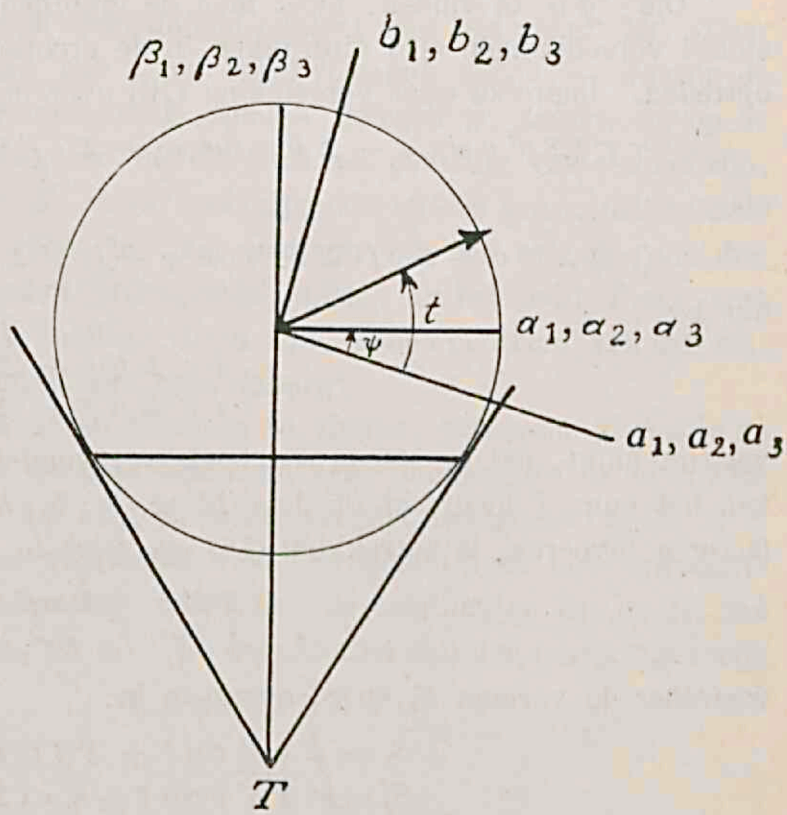

Fig. II.

$$\left.\begin{aligned} x &= f + r\,(a_1 \cos t + b_1 \sin t) \\ y &= g + r\,(a_2 \cos t + b_2 \sin t) \\ z &= h + r\,(a_3 \cos t + b_3 \sin t) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

wordt thans gegeven door het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x &= f + r\,[\alpha_1 \cos(t - \psi) + \beta_1 \sin(t - \psi)] \\ y &= g + r\,[\alpha_2 \cos(t - \psi) + \beta_2 \sin(t - \psi)] \\ z &= h + r\,[\alpha_3 \cos(t - \psi) + \beta_3 \sin(t - \psi)] \end{aligned}$$

Dit eischt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 \cos\psi - \beta_1 \sin\psi \\ a_2 &= \alpha_2 \cos\psi - \beta_2 \sin\psi \\ a_3 &= \alpha_3 \cos\psi - \beta_3 \sin\psi \end{aligned}\right\} \text{ of } \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 \cos\psi + b_3 \sin\psi \\ \alpha_2 &= a_2 \cos\psi + b_2 \sin\psi \\ \alpha_3 &= a_3 \cos\psi + b_3 \sin\psi \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \beta_1 \cos\psi + \alpha_1 \sin\psi \\ b_2 &= \beta_2 \cos\psi + \alpha_2 \sin\psi \\ b_3 &= \beta_3 \cos\psi + \alpha_3 \sin\psi \end{aligned}\right\} \text{ of } \left\{\begin{aligned} \beta_1 &= -\,a_1 \sin\psi + b_1 \cos\psi \\ \beta_2 &= -\,a_2 \sin\psi + b_2 \cos\psi \\ \beta_3 &= -\,a_3 \sin\psi + b_3 \cos\psi \end{aligned}\right.$$

Derhalve:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\,\beta f' &= \Sigma\,a f' \sin\psi - \Sigma\,b f' \cos\psi \\ \Sigma\,\beta' c &= \Sigma\,a' c \sin\psi - \Sigma\,b' c \cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

Daar de hoeken in de punten Q en Q' gelijken sinus bezitten, doch het teeken van den cosinus tegengesteld is, zal, na de draaiing, de coëfficiënt van $\cos t$ in vergelijking (10) moeten verdwijnen. Dit vereischt:

$$r\,r'\,\Sigma\,\beta' c - \Sigma\,c f'\,\Sigma\,\beta f' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Om $tg\,\psi$ te vinden, moet men de grootheden $\Sigma\,\beta' c$ en $\Sigma\,\beta f'$, met behulp van het stelsel vergelijkingen (15) uitdrukken in de grootheden, die in het stelsel vergelijkingen (1) optreden. Daardoor gaat vergelijking (16) over in:

$$r\,r'\,(\Sigma\,a' c \sin\psi - \Sigma\,b' c \cos\psi) - \Sigma\,c f'\,(\Sigma\,a f' \sin\psi - \Sigma\,b f' \cos\psi) = 0$$

of:

$$(r\,r'\,\Sigma\,b' c - \Sigma\,c f'\,\Sigma\,b f') \cos\psi - (r\,r'\,\Sigma\,a' c - \Sigma\,c f'\,\Sigma\,a f') \sin\psi = 0;$$

dus is:

$$tg\,\psi = \frac{r\,r'\,\Sigma\,b' c - \Sigma\,c f'\,\Sigma\,b f'}{r\,r'\,\Sigma\,a' c - \Sigma\,c f'\,\Sigma\,a f'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

waaruit blijkt, dat er steeds een hoek ψ gevonden kan worden, zoodanig, dat de poollijn van het punt T loodrecht op de richting (b_1, b_2, b_3) staat. Wanneer we een evenredigheidsfactor φ invoeren, is betrekking (16) als volgt te schrijven:

$$\frac{\Sigma\,\beta' c}{\Sigma\,\beta f'} = \frac{\Sigma\,c f'}{r\,r'} = \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

waardoor de vormen S_1 en S_2 overgaan in:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &\equiv \Sigma\,\alpha f' \cos t + \Sigma\,\beta f' \sin t + r' \\ S_2 &\equiv r\,\Sigma\,\alpha' c \cos t + \varphi\,r\,(\Sigma\,\beta f' \sin t + r') \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Bijzonder geval naar aanleiding van vergelijking (18). Is $\Sigma\,c f' = 0$, m. a. w. liggen de cirkels in de raakvlakken der centrale kromme, dan geldt:

òf $r\,r' = 0$ d. w. z. de cirkels worden beschreven met constanten straal. In dat geval is $tg\,\psi$ onbepaald, hetgeen hieruit te verklaren is, dat de beide karakteristieken S_1 en S_2 door het middelpunt van den cirkel gaan, dit punt optreedt als punt T, en derhalve de poollijn in het oneindige ligt;

òf $\Sigma\,\beta' c = 0$. De tangens van den draaiingshoek wordt thans gevonden uit vergelijking (15):

$$\Sigma\,a' c \sin\psi - \Sigma\,b' c \cos\psi = 0.$$

$$tg\,\psi = \frac{\Sigma\,b' c}{\Sigma\,a' c}.$$

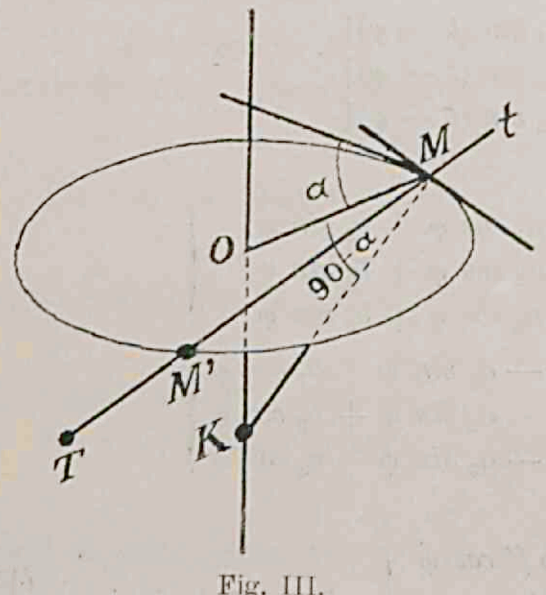

Fig. III.

Vergelijking (10) die de poollijn van het punt T bepaalt, gaat na de draaiing over in:

$$r\,(\varphi\,\Sigma\,\alpha f' - \Sigma\,\alpha' c)\,(\Sigma\,\beta f' + r' \sin t) = 0$$

of:

$$\Sigma\,\beta f' + r' \sin t = 0. \quad . \; . \; . \; (20)$$

Het zal tot geen verwarring aanleiding geven, wanneer we, in plaats van de Grieksche letters, dezelfde letters als vroeger invoeren, daarbij in het oog houdend, dat de zoo juist besproken draaiing uitgevoerd is.

§ 4. *Voorwaarden voor een anallagmatisch oppervlak.* Zij t (zie fig. III) een straal uit den stralenbundel met top T; de punten M en M' zijn dan een paar geconjugeerde punten; de normalen op de raakvlakken, in deze punten aan het cyclisch oppervlak aangebracht, ontmoeten de as in eenzelfde punt K. Nemen we $K M = \frac{r}{sin\, \alpha}$ als straal van een bol, dan heeft deze in de punten M en M' een dubbel contact met het oppervlak. Daar het punt T eensdeels in het machtvlak van twee opeenvolgende bollen — waarop de cirkel C en de naastvolgende cirkel groote cirkels zijn — gelegen is, anderdeels op de karakteristiek van het vlak van den cirkel, zoo zal dit punt het centrum van een bol zijn, die alle dubbelrakende bollen, die door een dezer beschrijvende cirkels gaan, orthogonaal snijdt. Is het punt T stationair, dan moet het het centrum van een bol zijn, die drie opeenvolgende stelsels dubbelrakende bollen orthogonaal snijdt. Is het punt T een vast punt in de ruimte, dan zal het oppervlak anallagmatisch zijn, T het centrum van den bol, die als directrix optreedt, terwijl de deferens een regelvlak is.

We zullen nu de analytische voorwaarden trachten te vinden, waarvoor T een in de ruimte standvastig punt is. We vatten de zaak algemeen aan, denken ons in de ruimte een vast assenstelsel O_1, X_1, Y_1, Z_1 (zie fig. IV), en een beweeglijk assenstelsel O, X, Y, Z. Een willekeurig punt P denken we ons voorloopig vast verbonden met het beweeglijk assenstelsel. Ten opzichte van dit assenstelsel heeft het de coördinaten (x, y, z), ten opzichte van het vaste de coördinaten (x_1, y_1, z_1). De coördinaten van den oorsprong O zijn (x_0, y_0, z_0). De richtingscosinus van de beweeglijke assen ten opzichte van de vaste, lezen we af uit de volgende tabel:

	x	y	z
x_1	a_1	b_1	c_1
y_1	a_2	b_2	c_2
z_1	a_3	b_3	c_3

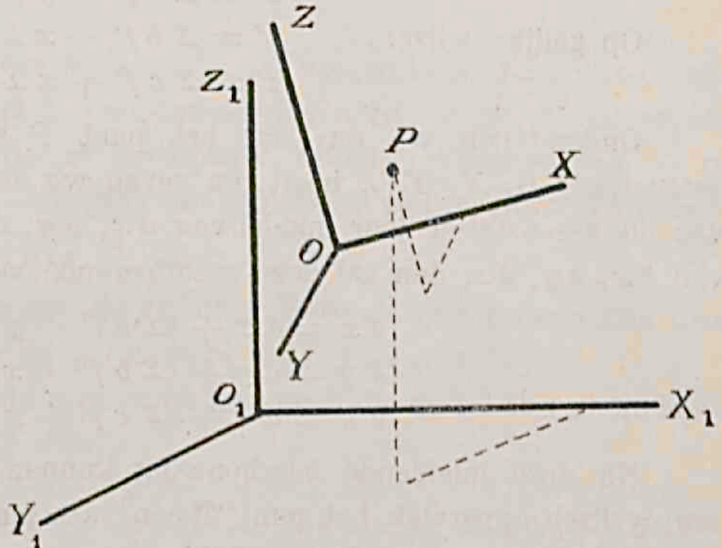

Fig. IV.

De verschillende coördinaten zijn nu door de volgende betrekkingen met elkaar verbonden:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z \\ y_1 &= y_0 + a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z \\ z_1 &= z_0 + a_3\, x + b_3\, y + c_3\, z \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

De, in het beweeglijk stelsel optredende, grootheden denken we ons functies van één parameter s. Om de veranderingen in de coördinaten van eenig punt na te gaan, als het stelsel zich beweegt, differentieeren we bovenstaande betrekkingen naar s. Differentiatie naar s door een accent aangevende, verkrijgt men:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_0' + a_1'\, x + b_1'\, y + c_1'\, z \\ y_1' &= y_0' + a_2'\, x + b_2'\, y + c_2'\, z \\ z_1' &= z_0' + a_3'\, x + b_3'\, y + c_3'\, z \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

We zullen echter alle veranderingen trachten terug te brengen tot veranderingen ten opzichte van het beweeglijke assenstelsel. Blijkbaar gelden de volgende betrekkingen:

$$x' = a_1 x_1' + a_2 y_1' + a_3 z_1'$$
$$y' = b_1 x_1' + b_2 y_1' + b_3 z_1'$$
$$z' = c_1 x_1' + c_2 y_1' + c_3 z_1'$$

Uit dit stelsel elimineeren we de grootheden x_1', y_1', z_1', door middel van het stelsel vergelijkingen (22):

$$x' = a_1 x_0' + a_1 a_1' x + a_1 b_1' y + a_1 c_1' z + a_2 y_0' + a_2 a_2' x + a_2 b_2' y + a_2 c_2' z + \\ + a_3 z_0' + a_3 a_3' x + a_3 b_3' y + a_3 c_3' z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Analoge uitdrukkingen gelden voor y' en z'.

In het oog houdend, dat:

$$\Sigma a^2 = 1 \qquad \Sigma b^2 = 1 \qquad \Sigma c^2 = 1$$

is:

$$\Sigma a a' = 0 \qquad \Sigma b b' = 0 \qquad \Sigma c c' = 0$$

Onderstellen we, dat de oorsprong O een ruimtekromme

$$x_0 = f(s) \qquad y_0 = g(s) \qquad z_0 = h(s)$$

beschrijft, dan gaat verg. (23) over in:

$$x' = \Sigma a f' + y \Sigma a b' - z \Sigma a' c$$

Op gelijke wijze:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \Sigma b f' - x \Sigma a b' - z \Sigma b' c \\ z' &= \Sigma c f' + x \Sigma a' c + y \Sigma b' c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Onderstellen we nu, dat het punt P een eigen beweging ten opzichte van het assenstelsel O, X, Y, Z heeft, en geven we de veranderingen der coördinaten ten opzichte van dit assenstelsel door middel van dx, dy, dz aan, de totale verplaatsingen door middel van δx, δy, δz, dan zal deze resulteerende verplaatsing als volgt voor te stellen zijn:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= dx + (\Sigma a f' + y \Sigma a b' - z \Sigma a' c)\, ds \\ \delta y &= dy + (\Sigma b f' - x \Sigma a b' - z \Sigma b' c)\, ds \\ \delta z &= dz + (\Sigma c f' + x \Sigma a' c + y \Sigma b' c)\, ds \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Na deze inleidende beschouwing kunnen we de voorwaarden nagaan, waarvoor bij een cyclisch oppervlak het punt T een vast punt in de ruimte is. De coördinaten van het punt T vinden we uit de vergelijkingen:

$$x \Sigma a f' + y \Sigma b f' + r r' = 0$$
$$x \Sigma a' c + y \Sigma b' c + \Sigma c f' = 0$$

of, als we ons de draaiing uitgevoerd denken, die bewerkstelligt, dat de richting (b_1, b_2, b_3) loodrecht op de poollijn van het punt T staat, uit:

$$x \Sigma a f' + y \Sigma b f' + r r' = 0$$
$$x \Sigma a' c + y \varphi \Sigma b f' + \varphi r r' = 0$$

De gezochte coördinaten zijn derhalve:

$$x = 0, \qquad y = -\frac{r r'}{\Sigma b f'}, \qquad z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Opdat T een vast punt zij, zal:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

moeten zijn. Substitutie van (26) in (25) geeft, in verband met (27), de volgende voorwaarden:

$$\Sigma\, a\, f' - \frac{r\, r'}{\Sigma\, b\, f'}\, \Sigma\, a\, b' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$\frac{d}{d\, s}\, \frac{r\, r'}{\Sigma\, b\, f'} - \Sigma\, b\, f' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

$$\Sigma\, c\, f' - \frac{r\, r'}{\Sigma\, b\, f'}\, \Sigma\, b'\, c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

De laatste betrekking is per se vervuld, zie vergelijking (16). De tweede betrekking schrijven we aldus:

$$\frac{r\, r'}{\Sigma\, b\, f'}\, \frac{d}{d\, s}\, \frac{r\, r'}{\Sigma\, b\, f'} - r\, r' = 0.$$

Geïntegreerd:

$$y^2 = r^2 + k^2$$

of:

$$T\, O^2 = r^2 + k^2$$

Uit deze laatste betrekking blijkt, dat T het middelpunt is van een bol, die alle bollen, die het oppervlak dubbel aanraken, en hun centra op het assenregelvlak hebben, orthogonaal snijdt. De grootheid k is de straal van den bol, die bij de anallagmatische oppervlakken als directrix optreedt.

§ 5. *Nadere beschouwing der voorwaarde* $\Delta = 0$. De vergelijking $\Delta = 0$ is tevens de voorwaarde, dat het stelsel van ∞^1 cirkels een omhullende bezit, d. w. z. dat er een ruimtekromme aan te geven is, waaraan de ∞^1 exemplaren raken. Wanneer men — de quaestie zoo algemeen mogelijk aanvattende — uitgaat van een stelsel van ∞^1 ruimtekrommen:

$$x = f\,(s,\ t), \quad y = g\,(s,\ t), \quad z = h\,(s,\ t)$$

dan vormen deze een oppervlak. Een kromme lijn op dit oppervlak wordt gevonden door een functionaal verband te leggen tusschen de parameters, bijv. $t = \omega\,(s)$.

De richtingscoëfficiënten van de raaklijn aan zoo'n kromme, die de rol van omhullende moet spelen, worden gegeven door:

$$\delta\, x = \frac{\partial f}{\partial s}\, d\, s + \frac{\partial f}{\partial t}\, d\, t, \quad \delta\, y = \frac{\partial g}{\partial s}\, d\, s + \frac{\partial g}{\partial t}\, d\, t, \quad \delta\, z = \frac{\partial h}{\partial s}\, d\, s + \frac{\partial h}{\partial t}\, d\, t.$$

De richtingscoëfficiënten van de raaklijn aan een der voortbrengende krommen van het stelsel, zijn:

$$d\, x = \frac{\partial f}{\partial t}\, d\, t, \quad d\, y = \frac{\partial g}{\partial t}\, d\, t, \quad d\, z = \frac{\partial h}{\partial t}\, d\, t.$$

Opdat beide krommen elkander raken, moet de betrekking gelden:

$$\frac{\delta\, x}{d\, x} = \frac{\delta\, y}{d\, y} = \frac{\delta\, z}{d\, z} \quad \text{of:} \quad \frac{f_s}{f_t} = \frac{g_s}{g_t} = \frac{h_s}{h_t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Elimineert men uit deze betrekking den parameter t, dan moet — wil het stelsel een omhullende bezitten — de komende vergelijking in s identiek vervuld worden. Zooals we in de inleiding gezien hebben, kunnen we, naar analogie met de regelvlakken, de gevonden kromme gevoeglijk keerkromme van het oppervlak noemen, dat door de ruimtekrommen gevormd wordt.

Werken we vergelijking (31) voor ons stelsel van ∞^1 cirkels uit, dan komt er:

$$\frac{f' + r\,(a_1' \cos t + b_1' \sin t) + r'\,(a_1 \cos t + b_1 \sin t)}{r\,(b_1 \cos t - a_1 \sin t)} = \frac{g' + r\,(a_2' \cos t + b_2' \sin t) + r'\,(a_2 \cos t + b_2 \sin t)}{r\,(b_2 \cos t - a_2 \sin t)} =$$

$$= \frac{h' + r\,(a_3' \cos t + b_3' \sin t) + r'\,(a_3 \cos t + b_3 \sin t)}{r\,(b_3 \cos t - a_3 \sin t)} = \lambda$$

of:

$$f' + r\,(a_1' \cos t + b_1' \sin t) + r'\,(a_1 \cos t + b_1 \sin t) - \lambda\, r\,(b_1 \cos t - a_1 \sin t) = 0.$$
$$g' + r\,(a_2' \cos t + b_2' \sin t) + r'\,(a_2 \cos t + b_2 \sin t) - \lambda\, r\,(b_2 \cos t - a_2 \sin t) = 0.$$
$$h' + r\,(a_3' \cos t + b_3' \sin t) + r'\,(a_3 \cos t + b_3 \sin t) - \lambda\, r\,(b_3 \cos t - a_3 \sin t) = 0.$$

We vermenigvuldigen deze vergelijkingen respectievelijk met $(a_1 \cos t + b_1 \sin t)$, $(a_2 \cos t + b_2 \sin t)$, $(a_3 \cos t + b_3 \sin t)$, daarna met c_1, c_2, c_3, en tellen vervolgens op. Dan komt er:

$$S_1 \equiv \Sigma\, a f' \cos t + \Sigma\, b f' \sin t + r' = 0$$
$$S_2 \equiv r\,(\Sigma\, a' c \cos t + \Sigma\, b' c \sin t) + \Sigma\, c f' = 0$$

waaruit blijkt, dat de voorwaarde (31) te vervangen is door de vergelijkingen $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. We elimineeren uit deze vergelijkingen de grootheden $\cos t$ en $\sin t$, door oplossen en quadrateeren:

$$\frac{\cos t}{\begin{vmatrix} \Sigma\, b f' & r r' \\ \Sigma\, b' c & \Sigma\, c f' \end{vmatrix}} = \frac{\sin t}{\begin{vmatrix} r r' & \Sigma\, a f' \\ \Sigma\, c f' & \Sigma\, a' c \end{vmatrix}} = \frac{1}{r \begin{vmatrix} \Sigma\, a f' & \Sigma\, b f' \\ \Sigma\, a' c & \Sigma\, b' c \end{vmatrix}}$$

De komende vergelijking in s luidt dan:

$$(r r' \Sigma\, b' c - \Sigma\, c f' \Sigma\, b f')^2 + (\Sigma\, a f' \Sigma\, c f' - r r' \Sigma\, a' c)^2 = r^2 (\Sigma\, a f' \Sigma\, b' c - \Sigma\, b f' \Sigma\, a' c)^2$$

zijnde de vergelijking $\Delta = 0$.

Gebruikt men de vergelijkingen S_1 en S_2, zooals ze na de assendraaiing worden, en stelt men in bovenstaande vergelijkingen $\Sigma\, c f' = \varphi\, r r'$ en $\Sigma\, b' c = \varphi\, \Sigma\, b f'$, dan gaat het kenmerk $\Delta = 0$ over in:

$$r^2 (\varphi\, \Sigma\, a f' - \Sigma\, a' c)^2 \, [(\Sigma\, b f')^2 - r'^2] = 0.$$

Zooals we weldra zullen zien, moet de eerste factor $\neq 0$ zijn, daar anders de vormen S_1 en S_2 op een factor na gelijk zouden zijn, in welk geval de karakteristieken samenvallen, de cirkel noodzakelijk aan twee ruimtekrommen raakt, en men te doen heeft met de omhullende van ∞^1 bollen.

§ 6. *Indeeling der cyclische oppervlakken.* Bovenstaande beschouwing geeft ons aanleiding tot een indeeling der cyclische oppervlakken. Als oppervlakken van de 1e soort kiezen we die oppervlakken, waarvoor twee opeenvolgende cirkels geen punt gemeen hebben, of beter uitgedrukt, waarvoor de afstand van twee punten, op twee opeenvolgende cirkels gelegen, steeds van dezelfde orde is. Als oppervlakken van de 2e soort kiezen we die, waarvoor het stelsel cirkels een omhullende bezit. Zij kunnen op de volgende, door Enneper aangegeven, wijze worden voortgebracht. Men neemt op een regelvlak een orthogonale trajectorie der beschrijvende lijnen, en brengt in eenig punt dier kromme het raakvlak aan het oppervlak aan. Vervolgens beschrijft men in het raakvlak een cirkel, waarvan een raaklijn met de raaklijn aan de orthogonale trajectorie samenvalt. Het centrum van den cirkel laat men een, van te voren aangegeven, kromme op het regelvlak doorloopen. Het stelsel van ∞^1 cirkels, dat aldus gevormd wordt, levert het gezochte oppervlak.

De oppervlakken, waarvoor de doorsneden van de vlakken S_1 en S_2 met het vlak van den cirkel samenvallen, zullen we als oppervlakken van de 3e soort kiezen. Vergelijking (7) leert ons, dat het stuk, hetwelk het raakvlak van de as afsnijdt, voor een bepaalde waarde van s constant is. De raakvlakken, in de punten van een bepaalden beschrijvenden cirkel, vormen derhalve een kegel. De normalen op de raakvlakken eveneens, en de cirkel is kromtelijn op het oppervlak. Het vlak van den cirkel valt samen met het machtvlak van twee opeenvolgende bollen. Het cyclisch oppervlak is dus te beschouwen als de omhullende van ∞^1 bollen. De cirkel raakt voortdurend aan twee richtkrommen In een bijzonder geval kunnen deze twee richtkrommen samenvallen, en dus tevens de doorsneden van de vlakken S_1 en S_2 met de raaklijn aan de keerkromme. Men heeft dan met de osculatiecirkels van een bepaalde ruimtekromme te doen.

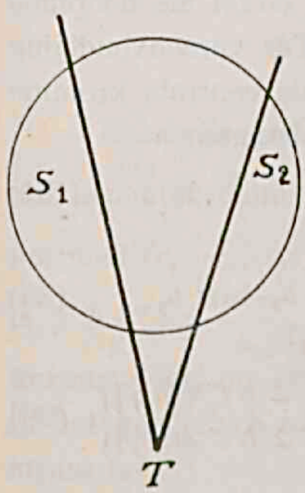

Fig. V.

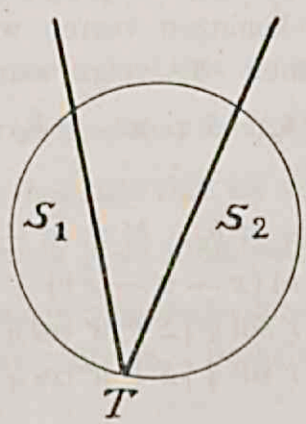

Fig. VI.

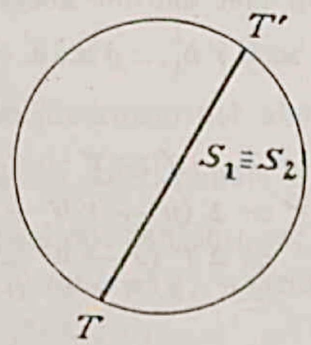

Fig. VIIa.

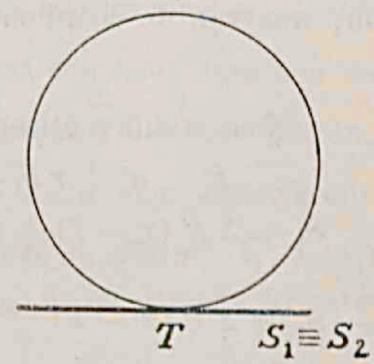

Fig. VIIb.

Aan deze uiteenzetting kunnen we een meetkundige beschouwing vastknoopen De indeeling kan n.l. aan de hand van nevenstaande figuren geschieden. Ligt het snijpunt T der karakteristieken S_1 en S_2 buiten den cirkel, dan heeft men te doen met de oppervlakken van de 1e soort. Ligt het punt T op den cirkel, dan bezit het stelsel cirkels een omhullende: de oppervlakken zijn van de 2e soort. Vallen de karakteristieken S_1 en S_2 samen, dan spelen de punten T en T' dezelfde rol, en moet de cirkel noodzakelijk aan twee ruimtekrommen raken. Het cyclisch oppervlak is als de omhullende van ∞^1 bollen te beschouwen, is dus oppervlak van de 3e soort. Ten slotte kunnen de karakteristieken met de raaklijn aan den cirkel samenvallen (fig. VIIb). Het oppervlak wordt dan door de osculatiecirkels van de keerkromme gevormd.

§ 7. *Analytische voorstelling van de oppervlakken van de 2e soort.* De ruimtekromme, waaraan de cirkels raken, stellen we voor door:

$$x = u(s), \quad y = v(s), \quad z = w(s);$$

den hoek dien de voerstraal TQ (zie fig. VIII) met de raaklijn in T maakt, door φ. Uit den rechthoekigen driehoek TQV volgt, dat $TQ = 2r \sin\varphi$. Projecteert men den voerstraal TQ op de richtingen (b_1, b_2, b_3) en TR (u', v', w'), die het vlak van den cirkel bepalen, dan zijn deze projecties respectievelijk:

$$2\, r\, b_1 \sin^2 \varphi, \qquad 2\, r\, b_2 \sin^2 \varphi, \qquad 2\, r\, b_3 \sin^2 \varphi.$$
$$2\, r\, u' \sin \varphi \cos \varphi, \quad 2\, r\, v' \sin \varphi \cos \varphi, \quad 2\, r\, w' \sin \varphi \cos \varphi.$$

De coördinaten van eenig punt van het oppervlak luiden nu:

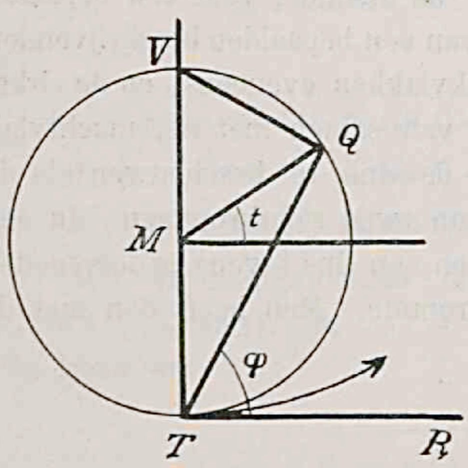

Fig. VIII.

$$\left.\begin{aligned} x &= u + 2\, r \sin \varphi\, (u' \cos \varphi + b_1 \sin \varphi) \\ y &= v + 2\, r \sin \varphi\, (v' \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) \\ z &= w + 2\, r \sin \varphi\, (w' \cos \varphi + b_3 \sin \varphi) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (32)$$

met de voorwaarden:

$$\Sigma\, b\, u' = 0, \quad \Sigma\, c\, u' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

waarin (c_1, c_2, c_3) evenals vroeger de richtingscosinus van de normaal op het vlak van den cirkel zijn.

Onze eerste vraag is naar de vormen S_1 en S_2. Evenals in § 1 beschouwen we den cirkel als doorsnee van een bol met een plat vlak. Ter vereenvoudiging van onze berekeningen voeren we de centrale kromme in, waarvan de coördinaten met die der keerkromme, als volgt, samenhangen:

$$f = u + r\, b_1, \quad g = v + r\, b_2, \quad h = w + r\, b_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Naar s differentieerend:

$$f' = u' + r\, b_1' + r'\, b_1, \quad g' = v' + r\, b_2' + r'\, b_2, \quad h' = w' + r\, b_3' + r'\, b_3. \qquad (35)$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 \equiv \Sigma f' (x - f) + r\, r' &= \Sigma\, (u' + r\, b' + r'\, b)\, (x - u - r\, b) + r\, r' = \\ &= \Sigma f' (x - u = 2\, r \sin \varphi\, [\Sigma f'\, u' \cos \varphi + \Sigma\, b\, f' \sin \varphi] \\ - S_2 \equiv \Sigma\, c' (x - u) \qquad &= \qquad 2\, r \sin \varphi\, [\Sigma\, c'\, u' \cos \varphi + \Sigma\, b\, c' \sin \varphi] \end{aligned}\right\} . \quad (36)$$

Daar:

$$\Sigma\, c'\, u' = - \Sigma\, c\, u'' \text{ en } \Sigma\, b\, c' = - \Sigma\, b'\, c$$

vinden we ten slotte voor den vorm S_2:

$$S_2 \equiv 2\, r \sin \varphi\, [\Sigma\, c\, u'' \cos \varphi + \Sigma\, c\, b' \sin \varphi].$$

In verband met formule (35) kunnen we aan de, in bovenstaande vormen, optredende coëfficiënten een nadere beteekenis hechten. Door sommatie, na geschikte vermenigvuldiging, vinden we n. l. de volgende betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, u'\, f' = \Sigma\, u'^2 + r\, \Sigma\, b'\, u' = 1 - r\, \Sigma\, b\, u'' &= \cos \alpha \\ \Sigma\, b\, f' = r' \qquad\qquad &= \cos \beta \\ \Sigma\, c\, f' = r\, \Sigma\, c\, b' \qquad\qquad &= \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Nu vormen de drie richtingen (u', v', w') (b_1, b_2, b_3) (c_1, c_2, c_3) de assen van een rechthoekig assenstelsel. Drie van de vier coëfficiënten der vormen S_1 en S_2 blijken de richtingscosinus der hoeken te zijn, die de raaklijn aan de middelpuntskromme met de assen van genoemd triëder maakt. Dus $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Aan den 4^en^ coëfficiënt is als volgt een beteekenis te hechten. De grootheden (c_1, c_2, c_3) zijn de richtingscosinus van de normaal op het raakvlak, aan het regelvlak met beschrijvende lijnen (b_1, b_2, b_2). Noemen we ω den hoek, dien de richtingen (c_1, c_2, c_3) en (f'', g'', h'') met elkaar maken, dan leert het theorema van Meusnier:

$$\Sigma\, c\, f'' = \frac{\cos \omega}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_N},$$

welke laatste grootheid de kromming der normaaldoorsnede voorstelt. De vormen S_1 en S_2 gaan nu over in:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &\equiv 2 \sin\varphi \, [\cos\alpha \cos\varphi + \cos\beta \sin\varphi] \\ S_2 &\equiv 2 \sin\varphi \left[\frac{r}{\varrho_N} \cos\varphi + \cos\gamma \sin\varphi\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Uit het vervolg zal echter blijken, dat onze substituties het eenvoudigst uitgevoerd worden, wanneer we, in plaats van den hoek φ, den hoek t invoeren, dien we tot nog toe bezigden. Tusschen de hoeken φ en t bestaat de betrekking: $2\varphi = 90 + t$ (zie fig. VIII). Derhalve:

$$\cos 2\varphi = -\sin t \text{ of: } 1 - 2\sin^2\varphi = -\sin t \text{ en dus } 2\sin^2\varphi = 1 + \sin t.$$

Verder:

$$\sin 2\varphi = \cos t.$$

Daardoor gaat het stelsel (38) over in:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &\equiv \cos\alpha \cos t + \cos\beta\,(1 + \sin t) \\ S_2 &\equiv k \cos t + \cos\gamma\,(1 + \sin t) \end{aligned}\right\} \quad \left[k = \frac{r}{\varrho_N}\right] \ldots\ldots \quad (39)$$

Bijzonder geval. $\cos\alpha = 0$ (zie verg. 37). De raaklijn aan de keerkromme en die der middelpuntskromme kruisen, elkaar loodrecht; $\Sigma\, b\, u'' = \frac{1}{r}$. Daar we den hoek tusschen de normaal (c_1, c_2, c_3) op het raakvlak en de hoofdnormaal der keerkromme ω gesteld hebben, is $\Sigma\, b\, u'' = \frac{\sin\omega}{\varrho}$, waarin ϱ de kromtestraal der keerkromme is. Richt men in het krommingsmiddelpunt een loodlijn op de hoofdnormaal op, dan ontmoet deze de richting (b_1, b_2, b_3) in het geodetisch kromtecentrum. Derhalve $\varrho_g \sin\omega = \varrho$, waarin ϱ_g de geodetische kromtestraal is [1]).

In ons geval heeft men nu $\Sigma\, b\, u'' = \frac{\sin\omega}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{r}$ m. a. w.

$$\varrho_g = r;$$

de straal van den cirkel is dus voortdurend gelijk aan den geodetischen kromtestraal.

Is tevens het regelvlak der lijnen $(b_1\ b_2, b_3)$ ontwikkelbaar, dan verdwijnt de determinant:

$$\begin{vmatrix} f', & g', & h' \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ b_1', & b_2', & b_3' \end{vmatrix}$$

of wel $\Sigma\, c\, b' = 0$, dus ook $\cos\gamma = 0$. De raaklijn aan de middelpuntskromme, valt samen met de richting (b_1, b_2, b_3) d. w. z. de normalen der keerkromme zijn raaklijnen aan de centrale kromme. In dit geval is $\cos\beta = 1$ (zie 37) Dus: $r = s$. De straal van den cirkel is voortdurend gelijk aan de booglengte van den oorsprong van bogen afgerekend. De keerkromme is derhalve de ontwondene van de centrale kromme. De vergelijkingen der karakteristieken luiden in dit geval:

$$S_1 = 1 + \sin t$$
$$S_2 = k \cos t$$

De karakteristiek S_1 valt samen met de raaklijn aan de keerkromme, de karakteristiek S_2 treedt als middellijn op.

---

[1]) Vessiot, Leçons de Géométrie supérieure, pag. 52.

§ 8. *Het raakvlak bij oppervlakken van de 2e soort.* Alles wat in § 1 omtrent het raakvlak in eenig punt van een beschrijvenden cirkel gezegd is, kan hier mutatis mutandis herhaald worden. Voor den tangens van den standhoek ε van het raakvlak en het vlak van den cirkel, geldt: (zie verg. 8):

$$tg\,\varepsilon = -\frac{S_2}{S_1} = -\frac{\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi}{k\cos\varphi + \cos\gamma\sin\varphi} = -\frac{\cos\alpha + \cos\beta\, tg\,\varphi}{k + \cos\gamma\, tg\,\varphi} \quad . \; . \quad (40)$$

In het bijzonder geval van § 7, waarvoor de keerkromme de ontwondene der centrale kromme is, vinden we:

$$tg\,\varepsilon = -\frac{1}{k}\,tg\,\varphi$$

in welke vergelijking een stelling uitgedrukt ligt, analoog aan die van Chasles bij de regelvlakken. Wanneer n. l. het raakpunt den beschrijvenden cirkel doorloopt, verandert de tangens van den standhoek van het raakvlak en het vlak van den cirkel evenredig met den tangens van den hoek, dien de voerstraal TQ met de raaklijn TR maakt (zie fig. VIII).

Uit vergelijking (40) blijkt, dat de standhoek constant is, als:

$$\frac{\cos\alpha}{k} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \text{ of } \cos\alpha\cos\gamma - k\cos\beta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

In dat geval vallen de karakteristieken samen, en heeft men dus te doen met de oppervlakken van de 3e soort.

Een belangrijke opmerking is nog te maken omtrent het *normalenregelvlak* van een bepaalden beschrijvenden cirkel. Wij hebben bij de oppervlakken van de 1e soort gezien, dat er drie richtkrommen aangegeven kunnen worden n. l. de cirkel, de as van den cirkel, en een dubbelkegelsnee. Wij zullen thans aantoonen, dat de dubbelkegelsnee bij de oppervlakken van de 2e soort ontaardt. Daartoe knoopen we vast aan vergelijking (13):

$$\frac{x\cos t + y\sin t - r}{1} = \frac{-z\,S_2}{S_1},$$

de vergelijking van het normalenregelvlak, en substitueeren voor S_1 en S_2 stelsel (39). Dit levert:

$$(x\cos t + y\sin t - r)\,[\cos\alpha\cos t + \cos\beta\,(1 + \sin t)] + z\,[k\cos t + \cos\gamma\,(1 + \sin t)] = 0.$$

Evenals vroeger, vervangen we:

$$\cos t \text{ door } \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin t \text{ door } \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Uit:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - r)\left[\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \cos\beta\right] + \left[\frac{k\,x + y\cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \cos\gamma\right] z = 0,$$

of:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - r\cos\beta + \frac{(x^2 + y^2)\cos\beta + z\,(k\,x + y\cos\gamma) - r\,(x\cos\alpha + y\cos\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

vinden wij ten slotte als eindvergelijking:

$$(x^2 + y^2)\,[x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - r\cos\beta]^2 - [\cos\beta\,(x^2 + y^2) + z\,(k\,x + y\cos\gamma) -$$
$$- r\,(x\cos\alpha + y\cos\beta)]^2 = 0.$$

De dubbelkegelsnee wordt gevonden als doorsnee van het platte vlak V met de hyperboloïde H:

$$V \equiv x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - r \cos\beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (42)$$
$$H \equiv (x^2 + y^2) \cos\beta + z\,(k\,x + y \cos\gamma) - r\,(x \cos\alpha + y \cos\beta) = 0.$$

De laatste vergelijking is met behulp van de eerste te vervangen door:

$$H \equiv (x^2 + y^2) \cos\beta + z\,(k\,x + y \cos\gamma) + r\,(z \cos\gamma - r \cos\beta)$$
$$\equiv (x^2 + y^2 - r^2) \cos\beta + z\,[k\,x + (y + r) \cos\gamma] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (43)$$

We elimineeren z uit de vergelijkingen (42) en (43), en vinden op deze wijze de projectie der dubbelkegelsnee op het $X\,Y$ vlak:

$$z = -\frac{x \cos\alpha + (y - r) \cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Invulling in vergelijking (43) levert:

$$(x^2 + y^2 - r^2) \cos\beta - \frac{x \cos\alpha + (y - r) \cos\beta}{\cos\gamma}\,[k\,x + (y + r) \cos\gamma] = 0,$$

$$(x^2 + y^2 - r^2) \cos\beta - \frac{k\,x\,[x \cos\alpha + (y - r) \cos\beta]}{\cos\gamma} - x\,(y + r) \cos\alpha - (y^2 - r^2) \cos\beta = 0,$$

$$x^2 \cos\beta \cos\gamma - k\,x^2 \cos\alpha - k\,x\,(y - r) \cos\beta - x\,(y + r) \cos\alpha \cos\gamma = 0.$$

Deze vergelijking is te splitsen in $x = 0$, en

$$(\cos\beta \cos\gamma - k \cos\alpha)\,x - (k \cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma)\,y + r\,(k \cos\beta - \cos\alpha \cos\gamma) = 0.$$

De eerste factor is te verwerpen, de tweede factor levert de projectie van de rechte lijn, die in dit geval als 3e richtkromme van het normalenregelvlak optreedt.

§ 9. *Het lijnelement.* Aangaande den eersten grondvorm, die het quadraat van het lijnelement aangeeft, n. l.:

$$d\,l^2 = E\,d\,s^2 + 2\,F\,d\,s\,d\,t + G\,d\,t^2$$

zullen we de volgende quaesties behandelen:

I. Berekening der grootheden E, F en G. Deze drukken we uit in S_1 en S_2 en hun differentiaalquotiënten naar s en t;

II. bespreking van den vorm $H^2 \equiv E\,G - F^2$;

III. de differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën der cirkels;

IV. bepaling der strictie- en elongatielijnen van een cyclisch oppervlak, dat zijn kromme lijnen, waarvan de punten een kleinsten of grootsten afstand tusschen twee opeenvolgende cirkels aangeven;

V. bespreking der oppervlakken, waarvoor de orthogonale trajectoriën der cirkels tevens geodetische lijnen zijn;

VI. behandeling der isocyclische oppervlakken, dat zijn oppervlakken, waarvoor de cirkels en hun orthogonale trajectoriën een isotherm stelsel vormen.

Ad I.

$E \equiv \Sigma\, x_s^2.$

$x_s = f' + r\,(a_1' \cos t + b_1' \sin t) + r'\,(a_1 \cos t + b_1 \sin t)$, zie verg. (1).

$$\Sigma\, x_s^2 = \Sigma\, f'^2 + r^2\,(\Sigma\, a'^2 \cos^2 t + 2\,\Sigma\, a'\,b' \sin t \cos t + \Sigma\, b'^2 \sin^2 t) + r'^2 + 2\,r\,(\Sigma\, a'\,f' \cos t +$$
$$+ \Sigma\, b'\,f' \sin t) + 2\,r'\,(\Sigma\, a\,f' \cos t + \Sigma\, b\,f' \sin t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (44)$$

Deze vorm is om te werken tot:

$$S_1^2 + S_2^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

Bij de gelijkstelling houden we de volgende betrekkingen in het oog:

$$\Sigma f'^2 = (\Sigma a f')^2 + (\Sigma b f')^2 + (\Sigma c f')^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

Om de tweede betrekking te vinden, voeren we, ter bekorting, de vectorschrijfwijze in, n.l.

$$\mathfrak{A}_1 \text{ voor } (a_1, a_2, a_3), \quad \mathfrak{B}_1 \text{ voor } (b_1, b_2, b_3), \quad \mathfrak{C}_1 \text{ voor } (c_1, c_2, c_3).$$

Daar de afgeleide van een eenheidsvector loodrecht op dien vector staat, ligt $\mathfrak{A}'$ in het vlak der vectoren $\mathfrak{B}_1$ en $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}'$ in het vlak der vectoren $\mathfrak{A}_1$ en $\mathfrak{C}_1$. Elk dezer afgeleiden ontbinden we in het vlak, waarin ze gelegen zijn:

$$\mathfrak{A}' = \beta \mathfrak{B}_1 + \gamma \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{B}' = \alpha \mathfrak{B}_1 + \varepsilon \mathfrak{C}_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

Door vectorieele vermenigvuldiging der eerste vergelijking met $\mathfrak{B}_1$, daarna met $\mathfrak{C}_1$ vindt men:

$$\beta = \Sigma a' b, \quad \gamma = \Sigma a' c.$$

De tweede vergelijking vermenigvuldigen we eerst met $\mathfrak{A}_1$, daarna met $\mathfrak{C}_1$. Dit levert:

$$\alpha_1 = \Sigma a b' = - \Sigma a' b, \quad \varepsilon = \Sigma b' c.$$

Vervolgens verheffen we de vergelijkingen (47) in het quadraat. Dan komt er:

$$\Sigma a'^2 = \beta^2 + \gamma^2 = (\Sigma a' b)^2 + (\Sigma a' c)^2.$$
$$\Sigma b'^2 = \alpha^2 + \varepsilon^2 = (\Sigma a' b)^2 + (\Sigma b' c)^2.$$

Ten slotte vermenigvuldigen we de vergelijkingen (47) vectorieel:

$$\Sigma a' b' = \varepsilon \gamma = \Sigma a' c \, \Sigma b' c.$$

Dit leidt tot de volgende betrekking:

$$\Sigma a'^2 \cos^2 t + 2 \Sigma a' b' \sin t \cos t + \Sigma b'^2 \sin^2 t = (\Sigma a' c)^2 \cos^2 t + 2 \Sigma a' c \, \Sigma b' c \sin t \cos t + $$
$$+ (\Sigma b' c)^2 \sin^2 t + (\Sigma a b')^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

Een derde betrekking, die we meermalen zullen gebruiken, wordt gevonden door het stelsel vergelijkingen (47) te combineeren met:

$$\mathfrak{F}' = \lambda \mathfrak{A}_1 + \mu \mathfrak{B}_1 + \nu \mathfrak{C}_1$$

waarin:

$$\lambda = \Sigma a f', \quad \mu = \Sigma b f', \quad \nu = \Sigma c f'.$$

Door vectorieele vermenigvuldiging vinden we:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a' f' &= \mu \beta + \nu \gamma = - \Sigma a b' \, \Sigma b f' + \Sigma a' c \, \Sigma c f' \\ \Sigma b' f' &= \alpha \lambda + \varepsilon \nu = \Sigma a b' \, \Sigma a f' + \Sigma b' c \, \Sigma c f' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

Nu is:

$$S_1^2 = (\Sigma a f' \cos t + \Sigma b f' \sin t + r')^2 = (\Sigma a f')^2 \cos^2 t + (\Sigma b f')^2 \sin^2 t + r'^2 +$$
$$+ 2 \Sigma a f' \, \Sigma b f' \sin t \cos t + 2 r' (\Sigma a f' \cos t + \Sigma b f' \sin t).$$

$$S_2^2 = [r (\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t) + \Sigma c f']^2 = r^2 (\Sigma a' c)^2 \cos^2 t + r^2 (\Sigma b' c)^2 \sin^2 t +$$
$$+ (\Sigma c f')^2 + 2 r^2 \Sigma a' c \, \Sigma b' c \sin t \cos t + 2 r \Sigma c f' (\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t).$$

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a' b'\right)^2 = [\Sigma b f' \cos t - \Sigma a f' \sin t - r \Sigma a b']^2 = (\Sigma b f')^2 \cos^2 t + (\Sigma a f')^2 \sin^2 t +$$
$$+ r^2 (\Sigma a b')^2 - 2 \Sigma a f' \, \Sigma b f' \sin t \cos t - 2 r \Sigma a b' (\Sigma b f' \cos t - \Sigma a f' \sin t).$$

De gelijkheid der vormen (44) en (45) is thans, met behulp van de betrekkingen (47), (48) en (49), zonder meer duidelijk.

Resumeerend hebben wij:

$$E = S_1^2 + S_2^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right)^2 . \quad (50)$$

$$F \equiv \Sigma x_s x_t.$$

$$= r \Sigma [f' + r (a' \cos t + b' \sin t) + r' (a \cos t + b \sin t)] (b \cos t - a \sin t).$$

$$= r [\Sigma b f' \cos t - \Sigma a f' \sin t - r \Sigma a b'].$$

$$= r \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right) \quad (51)$$

$$G \equiv \Sigma x_t^2 = r^2 \Sigma (b \cos t - a \sin t)^2 = r^2 \quad (52)$$

Derhalve:

$$d l^2 = \left[S_1^2 + S_2^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right)^2\right] d s^2 + 2 r \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right) d s\, d t + r^2 d t^2. \quad (53)$$

Ad II.

$$H^2 \equiv E G - F^2 = r^2 (S_1^2 + S_2^2).$$

Ter berekening van dezen vorm, gebruiken we het stelsel vergelijkingen (19):

$$S_1^2 + S_2^2 = [(1 + \varphi^2 r^2)(\Sigma b f')^2 - (\Sigma a f')^2 - r^2 (\Sigma a' c)^2] \sin^2 t + 2 \Sigma b f' (\Sigma a f' + \varphi r^2 \Sigma a' c) \sin t \cos t +$$
$$+ 2 r' (\Sigma a f' + \varphi r^2 \Sigma a' c) \cos t + 2 r' \Sigma b f' (1 + \varphi^2 r^2) \sin t + r'^2 (1 + \varphi^2 r^2) + (\Sigma a f')^2 + r^2 (\Sigma a' c)^2 \quad (54)$$

Het is van belang aangaande deze uitdrukking, die zoowel in den eersten, als in den tweeden grondvorm optreedt, de volgende vragen te stellen:

a. Wanneer is zij te herleiden tot een volkomen quadraat $(\lambda \cos t + \mu \sin t + \nu)^2$?

b. Wanneer zal zij overgaan in een lineaire uitdrukking in $\sin t$ en $\cos t$?

Sub a. Opdat de gelijkheid:

$$S_1^2 + S_2^2 \equiv (\lambda \cos t + \mu \sin t + \nu)^2$$

besta, moet aan de volgende voorwaarden voldaan worden:

$$(1 + \varphi^2 r^2)(\Sigma b f')^2 - (\Sigma a f')^2 - r^2 (\Sigma a' c)^2 = \mu^2 - \lambda^2 \quad (1)$$

$$\Sigma b f' (\Sigma a f' + \varphi r^2 \Sigma a' c) = \lambda \mu \quad (2)$$

$$r' (\Sigma a f' + \varphi r^2 \Sigma a' c) = \lambda \nu \quad (3)$$

$$r' \Sigma b f' (1 + \varphi^2 r^2) = \mu \nu \quad (4)$$

$$r'^2 (1 + \varphi^2 r^2) + (\Sigma a f')^2 + r^2 (\Sigma a' c)^2 = \nu^2 + \lambda^2 \quad (5)$$

We maken het gedurig product der uitdrukkingen (2), (3) en (4) op:

$$\lambda^2 \mu^2 \nu^2 = r'^2 (\Sigma b f')^2 (\Sigma a f' + \varphi r^2 \Sigma a' c)^2 (1 + \varphi^2 r^2)$$

$$\lambda \mu \nu = r' \Sigma b f' (\Sigma a f' + \varphi r^2 \Sigma a' c) \sqrt{1 + \varphi^2 r^2}.$$

Deze uitdrukking deelen we respectievelijk door (2), (3) en (4), en vinden:

$$\lambda = \frac{\Sigma a f' + \varphi r^2 \Sigma a' c}{\sqrt{1 + \varphi^2 r^2}}, \quad \mu = \Sigma b f' \sqrt{1 + \varphi^2 r^2}, \quad \nu = r' \sqrt{1 + \varphi^2 r^2}.$$

Substitutie dezer grootheden in betrekking (5) levert:

$$[(\Sigma a f')^2 + r^2 (\Sigma a' c)^2] (1 + \varphi^2 r^2) = (\Sigma a f' + \varphi r^2 \Sigma a' c)^2$$

of:

$$(\Sigma a' c - \varphi \Sigma a f')^2 = 0.$$

Substitutie in betrekking (1) levert hetzelfde op. De beteekenis van deze voorwaarde is, dat de karakteristieken samenvallen. Dit geval sluiten we uit. Zullen we met *oppervlakken van de 1e soort* te doen hebben, dan is de eenige mogelijkheid $\lambda = 0$ d. w. z.:

$$\Sigma\, a f' = - \varphi\, r^2\, \Sigma\, a' c. \qquad (55)$$

De betrekkingen (1) tot (5) gaan nu over in:

$$\mu^2 = (1 + \varphi^2 r^2) \left[(\Sigma\, b f')^2 - r^2 (\Sigma\, a' c)^2 \right]$$
$$\mu\, \nu = r' \,\Sigma\, b f' (1 + \varphi^2 r^2)$$
$$\nu^2 = (1 + \varphi^2 r^2) \left[r'^2 + r^2 (\Sigma\, a' c)^2 \right].$$

Sluiten we het geval van samenvallen der karakteristieken uit, dan levert de tweede vergelijking ons als eenige oplossing:

$$\mu = r' \sqrt{1 + \varphi^2 r^2}, \qquad \nu = \Sigma\, b f' \sqrt{1 + \varphi^2 r^2},$$

terwijl de 1e en 3e vergelijking als nieuwe voorwaarde meebrengen:

$$r'^2 - (\Sigma\, b f')^2 = - r^2 (\Sigma\, a' c)^2 \qquad (56)$$

De vergelijkingen der karakteristieken luiden nu:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &\equiv \Sigma\, a f' \cos t + \Sigma\, b f' \sin t + r' \\ S_2 &\equiv - \frac{\Sigma\, a f'}{\varphi\, r} \cos t + \varphi\, r\, \Sigma\, b f' \sin t + \varphi\, r\, r' \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

$$S_1^2 + S_2^2 = (1 + \varphi^2 r^2)(r' \sin t + \Sigma\, b f')^2 \qquad (58)$$

Het blijkt, dat de uitdrukking, op een factor na, gelijk is aan het quadraat van een vorm, die, gelijk aan nul gesteld, de poollijn van het punt T aangeeft. Het eerste lid van vergelijking (56) is de grootheid Δ (zie vergelijking 11), waarin te substitueeren is $\Sigma\, c f' = \varphi\, r\, r'$, $\Sigma\, b' c = \varphi\, \Sigma\, b f'$. in het onderhavige geval essentieel negatief. Dan zijn de punten Q en Q', de snijpunten van poollijn en cirkel imaginair, ligt de poollijn dus buiten den cirkel, en het punt T binnen den cirkel. Desmartres noemt deze oppervlakken, cyclische oppervlakken met isotrope focaalkromme. Deze naam is aldus te rechtvaardigen. Wij zetten van uit het centrum op de normaal twee stukken af, respectievelijk $+ r\, i$ en $- r\, i$. Deze punten zijn door Laguerre (*Sur l'emploi des imaginaires dans l'espace* [1])) de focaalpunten van den cirkel genoemd. We zullen aantoonen, dat deze punten in ons geval een *minimaalkromme op het assenregelvlak* beschrijven. Vooraf gaan we na, waarin, bij inachtname der voorwaarden (55) en (56), de uitdrukking:

$$(\Sigma\, a f')^2 + (\Sigma\, b f')^2 + (\Sigma\, c f')^2 = 1$$

overgaat.

$$\varphi^2 r^4 (\Sigma\, a' c)^2 + (\Sigma\, b f')^2 + \varphi^2 r^2 r'^2 = 1$$
$$\varphi^2 r^2 \left[(\Sigma\, b f')^2 - r'^2 \right] + (\Sigma\, b f')^2 + \varphi^2 r^2 r'^2 = 1$$
$$(1 + \varphi^2 r^2)(\Sigma\, b f')^2 = 1 \qquad (59)$$

Om de vergelijking der focaalkromme op het assenregelvlak te vinden, substitueeren we voor u in de betrekkingen:

$$x = f + u\, c_1, \quad y = g + u\, c_2, \quad z = h + u\, c_3$$

de grootheid $r\, i$, en maken vervolgens het lijnelement dezer kromme op:

$$\begin{aligned} d l^2 &= \Sigma\, (f' + i\, r\, c' + i\, r'\, c)^2 \\ &= \Sigma\, f'^2 - r^2\, \Sigma\, c'^2 - r'^2 + 2\, i\, r\, \Sigma\, c' f' + 2\, i\, r'\, \Sigma\, c f'. \end{aligned} \qquad (60)$$

[1]) Journal de Liouville, 2e série $T\ I$, 1872.

Ten einde de grootheden, die in deze uitdrukkingen optreden, te kunnen vervangen door grootheden, die in de vormen S_1 en S_2 optreden, nemen we wederom onzen toevlucht tot vectoren. Daar $\mathfrak{C}_1$ eenheidsvector is, ligt de vector $\mathfrak{C}'$ in het vlak der vectoren $\mathfrak{A}_1$ en $\mathfrak{B}_1$. Dus:

$$\mathfrak{C}' = \zeta\, \mathfrak{A}_1 + \eta\, \mathfrak{B}_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (61)$$

Door vectorieele vermenigvuldiging, eerst met $\mathfrak{A}_1$, daarna met $\mathfrak{B}_1$, vinden we:

$$\zeta = \Sigma\, a\, c', \quad \eta = \Sigma\, b\, c'.$$

Quadrateering der formule (61) levert:

$$\begin{aligned} \Sigma\, c'^2 = \zeta^2 + \eta^2 &= (\Sigma\, a\, c')^2 + (\Sigma\, b\, c')^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (62) \\ &= (\Sigma\, a'\, c)^2 + (\Sigma\, b'\, c)^2 \end{aligned}$$

Evenals vroeger $\mathfrak{F}' = \lambda\, \mathfrak{A}_1 + \mu\, \mathfrak{B}_1 + \nu\, \mathfrak{C}_1$ stellende, vinden wij:

$$\begin{aligned} \Sigma\, c'\, f' = \lambda\, \zeta + \mu\, \eta &= \Sigma\, a\, f'\, \Sigma\, a\, c' + \Sigma\, b\, f'\, \Sigma\, b\, c' \\ &= -(\Sigma\, a\, f'\, \Sigma\, a'\, c + \Sigma\, b\, f'\, \Sigma\, b'\, c) \quad \ldots \ldots \quad (63) \end{aligned}$$

Met behulp van de betrekkingen (62) en (63) gaat formule (60) over in:

$$\begin{aligned} d\,l^2 &= 1 - r^2\, [(\Sigma\, a'\, c)^2 + (\Sigma\, b'\, c)^2] - r'^2 - 2\, i\, r\, (\Sigma\, a\, f'\, \Sigma\, a'\, c + \Sigma\, b\, f'\, \Sigma\, b'\, c) + 2\, i\, \varphi\, r\, r'^2 \\ &= 1 - (\Sigma\, b\, f')^2 - \varphi^2\, r^2\, (\Sigma\, b\, f')^2 - 2\, i\, r\, [-\varphi\, r^2\, (\Sigma\, a'\, c)^2 + \varphi\, (\Sigma\, b\, f')^2] + 2\, i\, \varphi\, r\, r'^2 \\ &= 1 - (1 + \varphi^2\, r^2)\, (\Sigma\, b\, f')^2 - 2\, i\, r\, [\varphi\, r'^2] + 2\, i\, \varphi\, r\, r'^2 \\ &= 1 - (1 + \varphi^2\, r^2)\, (\Sigma\, b\, f')^2 \\ &= 0; \text{ (zie vergelijking 59)}, \end{aligned}$$

waarmee aangetoond is, dat het lijnelement der focaalkromme verdwijnt, en deze dus *minimaalkromme op het assenregelvlak* is.

Opmerking naar aanleiding van de focaalpunten. Wij hebben gezien, dat elk punt der as te beschouwen is als het centrum van een dubbelrakenden bol. De raakpunten van den bol en het cyclisch oppervlak worden gegeven door de snijpunten van den cirkel met een straal uit den stralenbundel met top T. Om de stralen te vinden, die met de focaalpunten correspondeeren, heeft men in vergelijking (7) voor u te substitueeren $+ r\, i$ en $- r\, i$. De gezochte stralen zijn dus:

$$S_1 + i\, S_2 = 0, \text{ en } S_1 - i\, S_2 = 0.$$

Met de twee paren geconjugeerde punten, die deze stralen op den cirkel insnijden, correspondeeren twee nulbollen, die den cirkel ondubbelzinnig bepalen. Dit is het uitgangspunt van LAGUERRE.

Sub b. Opdat de vorm $S_1^2 + S_2^2$ overgaat in een lineaire betrekking tusschen *cos t* en *sin t*, moeten de volgende twee betrekkingen bestaan. (Zie vergelijking 54).

$$(1 + \varphi^2\, r^2)\, (\Sigma\, b\, f')^2 - (\Sigma\, a\, f')^2 - r^2\, (\Sigma\, a'\, c)^2 = 0$$
$$\Sigma\, b\, f'\, (\Sigma\, a\, f' + \varphi\, r^2\, \Sigma\, a'\, c) = 0.$$

Bepalen we ons tot reeële oppervlakken, dan eischt de laatste betrekking:

$$\Sigma\, a\, f' + \varphi\, r^2\, \Sigma a'\, c = 0.$$

De eerste betrekking gaat hierdoor over in:

$$(1 + \varphi^2\, r^2)\, [(\Sigma\, b\, f')^2 - r^2\, (\Sigma\, a'\, c)^2] = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (64)$$

Om de beteekenis van deze betrekkingen na te gaan, beschouwen we wederom het assenregelvlak:

$$x = f + u\, c_1, \quad y = g + u\, c_2, \quad z = h + u\, c_3.$$

Het strictiepunt der as wordt gevonden, door u op te lossen uit de vergelijking:

$$u \Sigma c'^2 + \Sigma c' f' = 0$$ [1].

Vergelijking (63) leert ons:

$$\Sigma c' f' = -(\Sigma a' c \Sigma a f' + \Sigma b' c \Sigma b f').$$

In het oog houdend, dat:

$$\Sigma a f' = -\varphi r^2 \Sigma a' c$$
$$\Sigma b' c = \varphi \Sigma b f'$$

mag voor bovenstaande betrekking geschreven worden:

$$\Sigma c' f' = \varphi [(\Sigma b f')^2 - r^2 (\Sigma a' c)^2] = 0.$$ Zie vergelijking (64).

Vergelijking (65) levert nu $u = 0$, hetgeen ons leert, dat *voor alle cyclische oppervlakken, waarvoor H^2 een lineaire functie is van $\sin t$ en $\cos t$, de centrale kromme strictielijn op het assenregelvlak is.*

Ad III.

Wij beschouwen een willekeurige kromme op het cyclisch oppervlak. De richtingscoëfficiënten der raaklijn, in eenig punt dier kromme, worden gegeven door:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt.$$

De richtingscoëfficiënten van de raaklijn aan den cirkel, die door dat punt gaat, door:

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Wanneer de eerstgenoemde kromme als orthogonale trajectorie van den cirkel optreedt, geldt de betrekking:

$$\Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt\right) \frac{\partial x}{\partial t} = 0,$$

of:

$$F\, ds + G\, dt = 0.$$

$$\left[\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right] ds + r\, dt = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (66)$$

$$r \frac{dt}{ds} + \Sigma b f' \cos t - \Sigma a f' \sin t - r \Sigma a b' = 0. \quad \dots\dots \quad (67)$$

We merken terstond op, dat in de differentiaalvergelijking (66) wel de grootheid S_1, doch S_2 niet optreedt, d. w. z. dat de richting (c_1, c_2, c_3) — de normaal van de platte vlakken, waarin de cirkels gelegen zijn — bij dit vraagstuk geen rol speelt. Dit is een speciaal geval van een bekende stelling [2]). Bepaalt men n. l. de orthogonale trajectoriën van een stelsel vlakke krommen, willekeurig in de ruimte aangenomen, dan blijkt, dat in de differentiaalvergelijking de kromming van de keerkromme der ∞^1 platte vlakken wel, doch de torsie niet optreedt. Ontwikkelt men derhalve het ontwikkelbare oppervlak op een plat vlak, dan is de vraag naar de orthogonale trajectoriën van het gegeven stelsel terug te

---

[1]) Zie bijv. Vessiot l. c. pag. 100.

[2]) Zie bijv. Tisserand—Painlevé, Recueil d'exercices etc. Pag. 411 en vlg.

brengen tot het bepalen van de orthogonale trajectoriën van een stelsel krommen, die alle in hetzelfde platte vlak gelegen zijn.

Voor het geval het stelsel krommen uit ∞^1 cirkels bestaat, zijn de orthogonale trajectoriën te bepalen uit een differentiaalvergelijking van RICCATI. In de ruimte derhalve eveneens. Dit is gemakkelijk te verifiëeren, door in vergelijking (67) te substitueeren:

$$tg\,\frac{t}{2}=w,\quad t=2\,bg\,tg\,w,\quad sin\,t=\frac{2\,w}{1+w^2},\quad cos\,t=\frac{1-w^2}{1+w^2},$$

waardoor deze vergelijking overgaat in:

$$2\,r\frac{d\,w}{d\,s}+\Sigma\,b\,f'\,(1-w^2)-2\,w\,\Sigma\,a\,f'-r\,(1+w^2)\,\Sigma\,a\,b'=0,$$

of:

$$2\,r\frac{d\,w}{d\,s}=(\Sigma\,b\,f'+r\,\Sigma\,a\,b')\,w^2+2\,w\,\Sigma\,a\,f'+(r\,\Sigma\,a\,b'-\Sigma\,b\,f'), \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

een differentiaalvergelijking van RICCATI, waaruit de bekende stelling volgt, dat vier orthogonale trajectoriën een cirkel volgens een puntquadrupel met constante dubbelverhouding snijden.

Bijzondere gevallen.

1°. $\Sigma\,a\,f'=0$, $\Sigma\,b\,f'=0$ d. w. z. de cirkels zijn in de normaalvlakken der middelpuntskromme gelegen. De richting $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ der as valt dus samen met $(f',\ g',\ h')$. De differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën wordt in dit geval zeer eenvoudig. Zij luidt n. l. (zie 67),

$$\frac{d\,t}{d\,s}=\Sigma\,a\,b'$$

en dus:

$$t=\int\Sigma\,a\,b'\,d\,s. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Als nieuw assenstelsel voeren we het triëder van SERRET in, en ontbinden de richtingen $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ en $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, volgens de hoofdnormaal $(h_1,\ h_2,\ h_3)$ en de binormaal $(p_1,\ p_2,\ p_3)$ der middelpuntskromme. Noemen we den hoek tusschen de richtingen $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ en $(h_1,\ h_2,\ h_3)$ ω, dan gelden de volgende betrekkingen:

$$a_1=h_1\cos\omega+p_1\sin\omega,\qquad a_2=h_2\cos\omega+p_2\sin\omega,\qquad a_3=h_3\cos\omega+p_3\sin\omega$$

$$b_1=-h_1\sin\omega+p_1\cos\omega,\quad b_2=-h_2\sin\omega+p_2\cos\omega,\quad b_3=h_3\sin\omega+p_3\cos\omega$$

$$a_1'=h_1'\cos\omega+p_1'\sin\omega+(p_1\cos\omega-h_1\sin\omega)\,\omega'=\left(-\frac{f'}{\varrho}-\frac{p_1}{\tau}\right)\cos\omega+\frac{h_1}{\tau}\sin\omega+(p_1\cos\omega-h_1\sin\omega)\,\omega'$$

$$b_1'=-h_1'\sin\omega+p_1'\cos\omega-(h_1\cos\omega+p_1\sin\omega)\,\omega'=\left(\frac{f'}{\varrho}+\frac{p_1}{\tau}\right)\sin\omega+\frac{h_1}{\tau}\cos\omega-(h_1\cos\omega+p_1\sin w)\,\omega'$$

waaruit volgt:

$$\Sigma\,a'\,c=\frac{1}{\varrho}\cos\omega\quad\text{en}\quad\Sigma\,b'\,c=\frac{1}{\varrho}\sin\omega.$$

Vervolgens stellen we ons de vraag: over welken hoek ψ moeten de richtingen $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ en $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ gedraaid worden, om de draaiing, in § 3 bedoeld, te bewerkstelligen? Daar na de draaiing $\Sigma\,\beta\,f'=0$ is, moet volgens (18) $\Sigma\,\beta'\,c$ eveneens nul zijn. Volgens (15) is:

$$tg\,\psi=\frac{\Sigma\,b'\,c}{\Sigma\,a'\,c}=tg\,\omega$$

dus:

$$\psi=\omega$$

waarmee aangetoond is, dat, na de draaiing, de richtingen, die het vlak van den cirkel bepalen, respectievelijk met de hoofdnormaal en de binormaal der centrale kromme samenvallen:

$$\alpha_1 = h_1, \quad \alpha_2 = h_2, \quad \alpha_3 = h_3.$$

$$\beta_1 = p_1, \quad \beta_2 = p_2, \quad \beta_3 = p_3.$$

$$\Sigma\, \alpha\, \beta' = \Sigma\, h\, p' = \frac{1}{\tau},$$

waardoor vergelijking (69) overgaat in:

$$t = \int \frac{d\,s}{\tau}.$$

De torsiestraal der centrale kromme berekend zijnde, worden de orthogonale trajectoriën in dit geval door een enkele quadratuur gevonden.

De vergelijkingen der karakteristieken luiden:

$$S_1 = r', \quad S_2 = \frac{r}{\varrho} \cos t + 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70)$$

2°. $\Sigma\, c f' = 0$, en tevens r constant, d. w. z. dat de cirkels in de raakvlakken der centrale kromme gelegen zijn. We kiezen de richting (a_1, a_2, a_3) langs (f', g', h') en ontbinden de richtingen (b_1, b_2, b_3) en (c_1, c_2, c_3) weer langs de hoofdnormaal en binormaal der centrale kromme, terwijl ω den hoek voorstelt, dien de richting (c_1, c_2, c_3) met de hoofdnormaal maakt:

$$b_1 = h_1 \sin \omega - p_1 \cos \omega \text{ enz.} \qquad c_1 = h_1 \cos \omega + p_1 \sin \omega \text{ enz.}$$

We berekenen de coëfficiënten der karakteristieken S_1 en S_2:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\, a f' = 1, \qquad\qquad \Sigma\, b f' = 0 \\
&\Sigma\, a' c = \Sigma\, f'' (h_1 \cos \omega + p_1 \sin \omega) = \frac{1}{\varrho} \cos \omega \\
&\Sigma\, b' c = \Sigma\, [(h_1' \sin \omega - p_1' \cos \omega) + (h_1 \cos \omega + p_1 \sin \omega)\, \omega']\, (h_1 \cos \omega + p_1 \sin \omega) \\
&\quad = \Sigma \left[- \left(\frac{f'}{\varrho} + \frac{p}{\tau}\right) \sin \omega - \frac{h_1}{\tau} \cos \omega + (h_1 \cos \omega + p_1 \sin \omega)\, \omega' \right] (h_1 \cos \omega + p_1 \sin \omega) \\
&\quad = - \frac{1}{\tau} + \omega' \\
&\Sigma\, a\, b' = - \Sigma\, a'\, b = - \Sigma\, f'' (h_1 \sin \omega - p_1 \cos \omega) = - \frac{1}{\varrho} \sin \omega.
\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Voor het geval $\omega = 0$ is, d. w. z. dat de cirkels in de rectificeerende vlakken der centrale kromme gelegen zijn, luidt de differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën:

$$r \frac{d\,t}{d\,s} = \sin t$$

of:

$$\frac{d\,t}{\sin t} = \frac{d\,s}{r}$$

$$l\,g\,tg \frac{t}{2} = \frac{s}{r}$$

$$tg \frac{t}{2} = e^{\frac{s}{r}}$$

Om na te gaan, hoe de differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën voor *oppervlakken van de 2e soort* luidt, knoopen we aan bij betrekking (66):

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \cos\beta \cos t - \cos\alpha \sin t = r' \cos t - (1 - r \Sigma b u'') \sin t. \quad \text{(Zie 37).}$$

De grootheid $\Sigma a b'$ gaat thans over in:

$$\Sigma u' b' = - \Sigma b u''.$$

Men vindt derhalve voor de differentiaalvergelijking:

$$[r' \cos t - (1 - r \Sigma b u'') \sin t - r \Sigma b u''] \, d s + r \, d t = 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

of:

$$r \frac{d t}{d s} = - r' \cos t + (1 - r \Sigma b u'') \sin t - r \Sigma b u''$$

$$2 r \frac{d w}{d s} = - r' (1 - w^2) + 2 w (1 - r \Sigma b u'') - r \Sigma b u'' (1 + w^2)$$

$$2 r \frac{d w}{d s} = (r' - r \Sigma b u'') u^2 + 2 (1 - r \Sigma b u'') w - (r' + r \Sigma b u'') \; . \; . \quad (73)$$

Voor § 7, *bijzonder geval*, gaat (72) over in:

$$(1 + \cos t) \, d s + s \, d t = 0.$$

De variabelen zijn te scheiden, en de differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën is direct te integreeren:

$$\frac{d t}{1 + \cos t} = - \frac{d s}{s}$$

$$tg \frac{t}{2} = - l \, s.$$

Uit deze vergelijking moeten $\cos t$ en $\sin t$ bepaald worden, en daarna gesubstitueerd in verg. (1).

De differentiaalvergelijking (73) gaat over in een *lineaire*, wanneer de coëfficiënt van w^2 verdwijnt. Dus:

$$r' - r \Sigma b u'' = 0,$$

of:

$$\frac{r'}{r} = \frac{1}{\varrho_g} . \quad \text{(Zie § 7, bijz. geval).}$$

Wanneer de keerkromme gegeven is, en men den straal van den cirkel à priori zoodanig kiest, dat aan bovenstaande betrekking voldaan is, d. w. z.:

$$l \, r = \int \frac{d s}{\varrho_g},$$

dan gaat (73) over in de volgende lineaire differentiaalvergelijking:

$$\frac{d w}{d s} = \frac{1 - r'}{r} w - \frac{r'}{r}$$

en dus:

$$w = tg \frac{t}{2} = e^{\int \frac{1 - r'}{r} d s} \left[C - \int \frac{r'}{r} \, e^{\int \frac{r' - 1}{r} d s} \, d s \right].$$

Wordt ten slotte het cyclisch oppervlak door de osculatiecirkels der keerkromme gevormd, m. a. w. is $r = \varrho$, $\Sigma\, b\, u'' = \frac{1}{\varrho}$ dan luidt de differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën:

$$2\,\varrho\,\frac{d\,w}{d\,s} = (\varrho' - 1)\,w^2 - (\varrho' + 1).$$

Zij is te integreeren voor het geval $\varrho = s$, d. w. z. dat de kromtestraal steeds gelijk is aan de booglengte, van den oorsprong van bogen afgerekend. Men vindt thans het volgende functionaal verband tusschen de parameters s en t:

$$w = tg\,\frac{t}{2} = l\,s.$$

Daar de cirkels zelf, in het laatste geval, een stelsel kromtelijnen vormen, vormen de orthogonale trajectoriën het andere stelsel.

Ad IV.

Aan het vraagstuk der orthogonale trajectoriën knoopen we dat der strictie- en elongatielijnen vast.

Gaan we uit van twee, willekeurig in de ruimte aangenomen, cirkels, dan kunnen we een onderzoek instellen naar die punten, wier afstand een maximum of minimum bedraagt. Het zal blijken, dat er op elken cirkel vier punten aan te geven zijn, die aan de vraag voldoen. Op het cyclisch oppervlak levert de aaneenschakeling dezer punten vier krommen, strictie- en elongatielijnen geheeten. We zullen de zaak algemeen aanvatten en onderstellen, dat een oppervlak:

$$x = f\,(s,t), \quad y = g\,(s,t), \quad z = h\,(s,t)$$

beschreven wordt door ∞^1 lijnen $s = \text{const.}$ We nemen twee dier lijnen $s = s_1$, $s = s_2$. Kiezen we nu op de eerste kromme voor t een waarde t_1, en op de tweede kromme een waarde $t = t_2$, dan zijn daarmee op die krommen respectievelijk twee punten P_1 en P_2 bepaald. De afstand d dier punten wordt gevonden uit de formule:

$$d^2 = \Sigma\,(x_1 - x_2)^2.$$

Opdat deze afstand een maximum of minimum bedraagt, moet gelijktijdig aan de volgende voorwaarden voldaan worden:

$$\frac{\partial\, d^2}{\partial\, t_1} = 0, \quad \frac{\partial\, d^2}{\partial\, t_2} = 0.$$

of:

$$\Sigma\,(x_1 - x_2)\,\frac{\partial\, x_1}{\partial\, t_1} = 0, \quad \Sigma\,(x_1 - x_2)\,\frac{\partial\, x_2}{\partial\, t_2} = 0,$$

waaruit blijkt, dat de verbindingslijn der punten P_1 en P_2 zoowel loodrecht staat op de raaklijn in het punt P_1, als op die in het punt P_2. Gaan we tot de limiet over, d. w. z. nemen we twee kromme lijnen, die zeer weinig van stand verschillen, dan wordt $P_1\,P_2$ een element van een geodetische kromme, en zal voor bedoelde punten moeten gelden, dat daar ter plaatse de geodetische kromming der orthogonale trajectorie gelijk aan nul is. Heeft men op een oppervlak een willekeurig stelsel parameterkrommen $s = \text{const.}$, $t = \text{const.}$ aangenomen, en is verder $\varphi\,(s,\,t) = \text{const.}$ een stelsel kromme lijnen op dat oppervlak, dan wordt de geodetische kromming in eenig punt van zoo'n kromme gegeven door de formule [1]):

$$\frac{1}{\varrho_g}=\frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial t}-G\frac{\partial \varphi}{\partial s}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2-2F\frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial s}-E\frac{\partial \varphi}{\partial t}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2-2F\frac{\partial \varphi}{\partial s}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2}}\right)\right].$$

Is het stelsel krommen $\varphi=$ const. niet door een vergelijking in eindigen vorm gegeven, maar, zooals in ons geval, door een differentiaalvergelijking, n. l. die der orthogonale trajectoriën:

$$F\,d\,s+G\,d\,t=0,$$

waaruit volgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}:\frac{\partial \varphi}{\partial t}=F:G,$$

dan gaat bovenstaande vorm over in:

$$\frac{1}{\varrho_g}=\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial t}\frac{F^2-E\,G}{\sqrt{E\,G^2-2\,F^2\,G+G\,F^2}}=-\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sqrt{E\,G-F^2}}{\sqrt{G}}.$$

De punten worden dus in ons geval gekarakteriseerd door de vergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(S_1^2+S_2^2\right)=0,$$

en de vergelijking der strictie- en elongatielijnen luidt:

$$S_1\frac{\partial S_1}{\partial t}+S_2\frac{\partial S_2}{\partial t}=0.$$

Na uitwerking vinden wij:

$$(\Sigma\, a\, f'\, cos\, t+\Sigma\, b\, f'\, sin\, t+r')\,(\Sigma\, b\, f'\, cos\, t-\Sigma\, a\, f'\, sin\, t)+r\,(r\,\Sigma\, a'\, c\, cos\, t+ \\ +r\,\Sigma\, b'\, c\, sin\, t+\Sigma\, c\, f')\,(\Sigma\, b'\, c\, cos\, t-\Sigma\, a'\, c\, sin\, t)=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (74)$$

We substitueeren evenals vroeger (zie § 2):

$$cos\, t=\frac{x}{r},\quad sin\, t=\frac{y}{r},$$

waardoor bovenstaande vergelijking overgaat in:

$$(x\,\Sigma\, a f'+y\,\Sigma\, b f'+r r')\,(x\,\Sigma\, b f'-y\,\Sigma\, a f')+r^2\,(x\,\Sigma\, a' c+y\,\Sigma\, b' c+\Sigma\, c f')\,(x\,\Sigma\, b' c-y\,\Sigma\, a' c)=0$$

de vergelijking van een gelijkzijdige hyperbool, die door het middelpunt van den cirkel gaat. De vier strictiepunten zijn dus de snijpunten van deze hyperbool met den cirkel. Twee dezer punten zijn steeds reëel.

Bijzondere gevallen. 1°. De cirkels liggen in de normaalvlakken der centrale kromme, $\Sigma\, a\, f'=0$, $\Sigma\, b\, f'=0$. De vier bedoelde punten worden uitgesneden door de karakteristiek $S_2=0$, en een lijn door het centrum, loodrecht daarop, $\frac{\partial S_2}{\partial t}=0$.

2°. $\Sigma\, a'\, c=0$ en $\Sigma\, b'\, c=0$. Daar:

$$(\Sigma\, a'\, c)^2+(\Sigma\, b'\, c)^2=\Sigma\, c'^{\,2} \text{ (zie verg. 62)}$$

moet, bij deze onderstelling, de richting (c_1, c_2, c_3) constant zijn. De cirkels liggen dus

[1]) Cf. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie pag. 148, ed. 1910.

in onderling evenwijdige vlakken. In dat geval ontaardt de hyperbool in de volgende twee rechten: de karakteristiek $S_1 = 0$, en een loodlijn daarop, door het centrum van den cirkel, $\frac{\partial S_1}{\partial t} = 0$.

Ad V.

In verband met deze quaestie doet zich de volgende vraag voor: aan welke voorwaarden moet het oppervlak voldoen, opdat de orthogonale trajectoriën der cirkels tevens geodetische lijnen zijn. Dan zal aan vergelijking (74) onafhankelijk van de waarde van t voldaan moeten worden.

$$(\Sigma\, a f' \cos t + \Sigma\, b f' \sin t + r')(\Sigma\, b f' \cos t - \Sigma\, a f' \sin t) + r(r\,\Sigma\, a' c \cos t + r\,\Sigma\, b' c \sin t +$$
$$+ \Sigma\, c f')(\Sigma\, b' c \cos t - \Sigma\, a' c \sin t) = 0.$$

Deze vergelijking is van den vorm:

$$A \sin^2 t + B \sin t \cos t + C \cos t + D \sin t + E = 0.$$

Derhalve is te voldoen aan:

$$A = B = C = D = E = 0,$$

of:

$$\Sigma\, a f' \,\Sigma\, b f' + r^2\, \Sigma\, a' c\, \Sigma\, b' c = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$
$$(\Sigma\, b f')^2 - (\Sigma\, a f')^2 - r^2 (\Sigma\, a' c)^2 + r^2 (\Sigma\, b' c)^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$
$$r' \,\Sigma\, b f' + r\, \Sigma\, c f' \,\Sigma\, b' c = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$
$$- r' \,\Sigma\, a f' - r\, \Sigma\, c f' \,\Sigma\, a' c = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Aan de laatste twee voorwaarden is o. a. op de volgende wijze te voldoen: $r' = 0$, $\Sigma\, c f' = 0$. We gebruiken nu de formules (71). Dan eischt de eerste betrekking (wanneer we ons tot reëele oppervlakken bepalen): $\Sigma\, a' c = \frac{\cos \omega}{\varrho} = 0$. Dus $\omega = \frac{\pi}{2}$ d. w. z. dat de cirkels in de osculatievlakken der centrale kromme gelegen zijn. Nu is $\Sigma\, b' c = -\frac{1}{\tau}$. De tweede betrekking levert

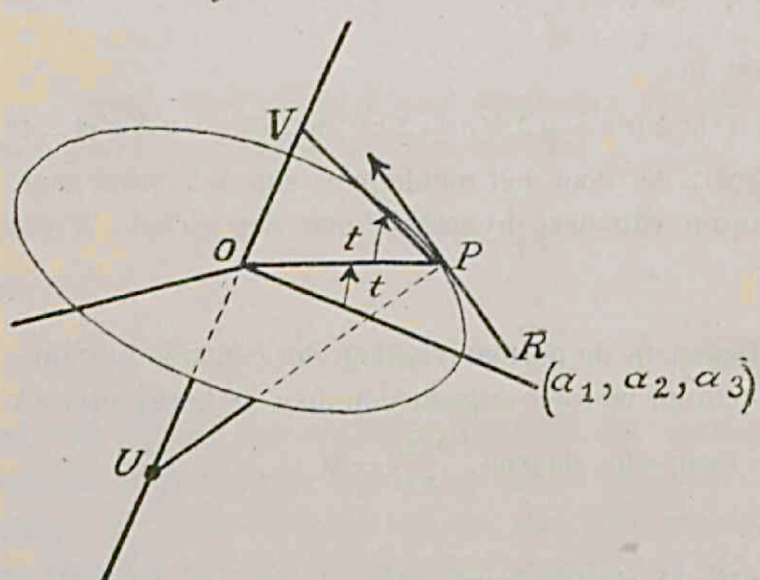

Fig. IX.

$$-1 + \frac{r^2}{\tau^2} = 0 \text{ of } \tau = \pm r = \text{const.}$$

Resumeerend: *het vlak van den cirkel is osculatievlak der centrale kromme. Het centrum van den cirkel beschrijft een kromme met constante torsie, gelijk aan den straal van den cirkel.*

De vergelijkingen der karakteristieken luiden:

$$S_1 = \cos t, \quad S_2 = -\sin t. \quad (75)$$

Deze zeer eenvoudige uitdrukkingen voor de karakteristieken leveren ons nog eenige belangrijke eigenschappen voor dit cyclisch oppervlak. Substitueeren we n. l. de gevonden uitdrukkingen in vergelijking (8), dan vinden we:

$$tg\, \alpha = tg\, t.$$

Beschouwen we fig. IX, waarin PV de raaklijn aan de orthogonale trajectorie is, dan blijkt uit bovenstaande betrekking, dat de hoek, dien deze raaklijn met den voerstraal OP maakt, voortdurend gelijk is aan den hoek, dien laatstgenoemde voerstraal met de vaste richting (a_1, a_2, a_3) insluit.

We beschouwen een element $d\,l$ van een bepaalde orthogonale trajectorie. In formule (53) kunnen we $F = 0$ stellen, terwijl de term met $d\,t^2$ eveneens vervalt, omdat t niet verandert, wanneer we ons in de richting PV voortbewegen. $S_1^2 + S_2^2 = 1$ zijnde, vinden we:

$$d\,l^2 = d\,s^2, \text{ of } d\,l = d\,s.$$

Stelling: Het element, dat twee opeenvolgende beschrijvende cirkels op eenzelfde orthogonale trajectorie uitsnijden, is gelijk aan het correspondeerende element der centrale kromme.

PV raaklijn zijnde aan de orthogonale trajectorie, zoo is PR binormaal dier kromme. Immers de orthogonale trajectorie is in ons geval tevens geodetische kromme, en het vlak VPR treedt als raakvlak aan het cyclisch oppervlak op.

De richtingscosinus der raaklijn	PV zijn:	$\cos^2 t$,	$\sin t \cos t$,	$\sin t$.
Die der binormaal	PR :	$\sin t$,	$\cos t$,	0.
Die der hoofdnormaal	PU :	$\sin t \cos t$,	$\sin^2 t$,	$-\cos t$.

We zullen nu de torsie der orthogonale trajectorie gaan berekenen, moeten hierbij echter in het oog houden, dat bovenstaande richtingscosinus betrekking hebben op een beweeglijk assenstelsel. Wanneer we in het algemeen te doen hebben met drie richtingscosinus A, B, C, dan kunnen we, op dezelfde wijze als in § 4, aantoonen, dat de totale veranderingen, die deze cosinus ondergaan, gevonden worden uit het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\delta A = d\,A + (B \Sigma a\,b' - C \Sigma a'\,c)\,d\,s.$$
$$\delta B = d\,B - (A \Sigma a\,b' + C \Sigma b'\,c)\,d\,s.$$
$$\delta C = d\,C + (A \Sigma a'\,c + B \Sigma b'\,c)\,d\,s.$$

De torsie der trajectorie T stellende, en alles, wat op de trajectorie betrekking heeft, met index $t\,r$ aangevende, zoo levert ons een der formules van SERRET:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{1}{h_3}\right)_{tr} \left(\frac{\delta\,p_3}{\delta\,s}\right)_{tr} = -\frac{1}{\cos t}\left[\frac{d\,p_3 + (p_1 \Sigma a'\,c + p_2 \Sigma b'\,c)\,d\,s}{d\,s}\right]_{tr}$$
$$= -\frac{1}{\cos t} \cdot \cos t \left(-\frac{1}{\tau}\right)$$
$$= \frac{1}{\tau}$$

waaruit blijkt, dat de torsie der trajectorie gelijk is aan de torsie der centrale kromme, een eigenschap, die reeds door LIE gevonden is. Men heeft derhalve de volgende

Stelling: Elke orthogonale trajectorie bezit een constante torsie, die niet van trajectorie tot trajectorie verandert. Zij is gelijk aan de torsie der centrale kromme.

Een andere wijze, om aan het stelsel voorwaarden (1) tot (4) te voldoen, is, $r' \neq 0$ onderstellende.

$$\Sigma a\,f' = 0, \quad \Sigma b\,f' = 0 \text{ en dus } \Sigma c\,f' = 1.$$

Verder:

$$\Sigma a'\,c = 0, \quad \Sigma b'\,c = 0.$$

Daar:

$$(\Sigma a'\,c)^2 + (\Sigma b'\,c)^2 = \Sigma c'^2,$$

brengen de laatste twee voorwaarden mede, dat de richting (c_1, c_2, c_3) constant is. De cirkels liggen dus in onderling evenwijdige vlakken. De eerste drie voorwaarden eischen nu, dat de centra op een rechte lijn gelegen zijn. We hebben derhalve met *omwentelingsoppervlakken* te doen. De vergelijkingen der karakteristieken luiden:

$$S_1 = r', \quad S_2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Ad VI.

We stellen een onderzoek in naar die cyclische oppervlakken, die door de cirkels en hun orthogonale trajectoriën in oneindig kleine vierkantjes verdeeld worden. De hiervoor noodzakelijke en voldoende voorwaarde is, dat de differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën een integreerenden factor bezit. Opdat de differentiaalvergelijking:

$$F\,d\,s + G\,d\,t = 0$$

een integreerenden factor $\frac{\mu}{H}$ bezit, waarin $\mu = f(s)$, zal de volgende betrekking moeten gelden:

$$\frac{\partial \frac{\mu F}{H}}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\mu G}{H}}{\partial s}.$$

Na uitwerking:

$$\frac{\mu H \frac{\partial F}{\partial t} - \mu F \frac{\partial H}{\partial t}}{H^2} = \frac{H \frac{\partial \mu G}{\partial s} - \mu G \frac{\partial H}{\partial s}}{H^2}$$

of:

$$\mu H \frac{\partial F}{\partial t} - \mu F \frac{\partial H}{\partial t} - H \frac{\partial \mu G}{\partial s} + \mu G \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

welke vergelijking, ter vermijding van wortelvormen, na vermenigvuldiging met H, ook in de volgende gedaante gebracht kan worden:

$$\mu H^2 \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2} \mu F \frac{\partial H^2}{\partial t} - H^2 \frac{\partial \mu G}{\partial s} + \frac{1}{2} \mu G \frac{\partial H^2}{\partial s} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

Wanneer men in deze vergelijking de karakteristieken S_1 en S_2 in hun meest algemeenen vorm substitueert, is zij oogenschijnlijk van den 3^en graad in *cos t* en *sin t*. We zullen echter aantoonen, dat de eindvergelijking aldus voorgesteld kan worden:

$$A \sin^2 t + B \sin t \cos t + C \sin t + D \cos t + E = 0 \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

Uitdrukkingen van den 3^en graad treden blijkbaar alleen in de eerste twee termen van vergelijking (78) op. Vervangen we $\cos^2 t$ door $(1 - \sin^2 t)$, dan behoeven we alleen te letten op de coëfficiënten van $\sin^3 t$ en $\sin^2 t \cos t$.

Uit den eersten term volgt als coëfficiënt van $\sin^3 t$: (Zie verg 51 en 54):

$$-r\left[(1 + q^2 r^2)(\Sigma b f')^2 - (\Sigma a f')^2 - r^2 (\Sigma a' c)^2\right] \Sigma b f' + 2 r \Sigma a f' \Sigma b f' (\Sigma a f' + q r^2 \Sigma a' c);$$

als coëfficiënt van $\sin^2 t \cos t$:

$$-r\left[(1 + q^2 r^2)(\Sigma b f')^2 - (\Sigma a f')^2 - r^2 (\Sigma a' c)^2\right] \Sigma a f' - 2 r (\Sigma b f')^2 (\Sigma a f' + q r^2 \Sigma a' c).$$

$$\frac{\partial H^2}{\partial t} = 2\left[(1 + q^2 r^2)(\Sigma b f')^2 - (\Sigma a f')^2 - r^2 (\Sigma a' c)^2\right] \sin t \cos t + 2 \Sigma b f' (\Sigma a f' + q r^2 \Sigma a' c)\left[1 - 2 \sin^2 t\right] + \ldots$$

Vermenigvuldiging met $\frac{1}{2} F$ levert als bijdrage tot de termen met $\sin^3 t$:

$$-r\left[(1 + q^2 r^2)(\Sigma b f')^2 - (\Sigma a f')^2 - r^2 (\Sigma a' c)^2\right] \Sigma b f' + 2 r \Sigma a f' \Sigma b f' (\Sigma a f' + q r^2 \Sigma a' c);$$

tot de termen met $sin^2\, t\, cos\, t$:

$$- r\,[(1 + \varphi^2 r^2)(\Sigma\, b f')^2 - (\Sigma\, a f')^2 - r\,(\Sigma\, a' c)^2]\,\Sigma\, a f' - 2\, r\,(\Sigma\, b f')^2\,(\Sigma\, a f' + \varphi\, r'\,\Sigma\, a' c).$$

Na aftrekking vallen de termen van den 3^{en} graad weg. Aan de eindvergelijking (79) moet nu, onafhankelijk van t, voldaan worden. Dit eischt:

$$A = B = C = D = E = 0.$$

We passen deze theorie op de cyclische oppervlakken met isotrope focaalkromme toe (cf. verg. 58):

$$H = r\sqrt{1 + \varphi^2 r^2}\,(r' \sin t + \Sigma\, b f')$$

$$= \frac{r'}{\Sigma\, b f'}(r' \sin t + \Sigma\, b f') = \frac{r\, r'}{\Sigma\, b f'} \sin t + r \quad \text{(zie verg. (59))}.$$

$$F \equiv r\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\,\Sigma\, a b'\right) = r\,(\Sigma\, b f' \cos t - \Sigma\, a f' \sin t - r\,\Sigma\, a b')$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - r\,(\Sigma\, a f' \cos t + \Sigma\, b f' \sin t).$$

Na substitutie in verg. (77) vinden we:

$$- \mu\, r\left[\frac{r\, r'}{\Sigma\, b f'} \sin t + r\right](\Sigma\, a f' \cos t + \Sigma\, b f' \sin t) - \mu\, r\,(\Sigma\, b f' \cos t - \Sigma\, a f' \sin t -$$

$$- r\,\Sigma\, a b')\,\frac{r\, r'}{\Sigma\, b f'}\cos t - \left(\frac{r\, r'}{\Sigma\, b f'}\sin t + r\right)\left(2\,\mu\, r\, r' + r^2\frac{\partial \mu}{\partial s}\right) + \mu\, r^2\left(\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{r\, r'}{\Sigma\, b f'}\sin t + r'\right) = 0.$$

De termen met $sin^2\, t$ en $sin\, t\; cos\, t$ verdwijnen. De eindvergelijking is van den vorm:

$$A \cos t + B \sin t + C = 0.$$

$A = 0$ levert als eerste voorwaarde:

$$- \mu\, r\,\Sigma\, a f' + \mu\, r\,\Sigma\, a b'\,\frac{r\, r'}{\Sigma\, b f'} = 0$$

of:

$$\Sigma\, a f'\,\Sigma\, b f' - r\, r'\,\Sigma\, a b' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1^0)$$

$B = 0$ levert als tweede voorwaarde:

$$\mu\, r\,\Sigma\, b f' + \left(2\,\mu\, r' + r\frac{\partial \mu}{\partial s}\right)\frac{r\, r'}{\Sigma\, b f'} - \mu\, r\,\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{r\, r'}{\Sigma\, b f'} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2^0)$$

$C = 0$ levert als derde voorwaarde:

$$2\,\mu\, r\, r' + r^2\frac{\partial \mu}{\partial s} = 0, \text{ of } \frac{\partial \mu}{\mu} = - \frac{2\, r\, r'}{r^2}.$$

Na integratie:

$$l\,\mu = - l\, r^2 + l\, c$$

$$\mu = \frac{c}{r^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3^0)$$

Hierdoor gaat de 2^e voorwaarde over in:

$$\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{r\, r'}{\Sigma\, b f'} - \Sigma\, b f' = 0.$$

De eerste en tweede voorwaarde zijn dezelfde als vergelijking (28) en (29). Dit leidt tot de volgende:

Stelling: De cyclische oppervlakken met isotrope focaalkromme, waarop de cirkels en hun orthogonale trajectoriën een isotherm stelsel vormen, zijn noodzakelijk anallagmatische oppervlakken.

§ 10. Aangaande den *tweeden grondvorm:*

$$L\, d\, s^2 + 2\, M\, d\, s\, d\, t + N\, d\, t^2$$

zullen we de volgende quaesties behandelen:

I. berekening der grootheden L, M en N. Deze drukken we uit in de karakteristieken S_1 en S_2, en hun differentiaalquotiënten naar s en t;

II. bespreking van de vierkantsvergelijking der hoofdkromtestralen;

III. opmerking aangaande de kromtelijnen;

IV. opmerking aangaande de asymptotische lijnen.

Ad I.

Bij definitie is:

$$L \equiv \Sigma\, l\, x_{s\,s}, \qquad M \equiv \Sigma\, l\, x_{s\,t}, \qquad N \equiv \Sigma\, l\, x_{t\,t}$$

waarin l, m en n de richtingscosinus der normaal zijn:

$$l = \frac{r}{H}\left[(a_1 \cos t + b_1 \sin t)\, S_2 - c_1\, S_1\right] \text{ (zie verg. 5)}$$

$$m = \frac{r}{H}\left[(a_2 \cos t + b_2 \sin t)\, S_2 - c_2\, S_1\right]$$

$$n = \frac{r}{H}\left[(a_3 \cos t + b_3 \sin t)\, S_2 - c_3\, S_1\right]$$

$$L \equiv \Sigma\, l\, x_{s\,s} = \frac{r}{H}\, \Sigma\left[(a \cos t + b \sin t)\, S_2 - c\, S_1\right]\left[f'' + r\,(a'' \cos t + b'' \sin t) + 2\, r'\,(a' \cos t + \right.$$
$$\left. + b' \sin t) + r''\,(a \cos t + b \sin t)\right] = \frac{1}{H}\left[r\,(\Sigma\, a\, f'' \cos t + \Sigma\, b\, f'' \sin t + r'')\, S_2 - \right.$$
$$- r^2\,(\Sigma\, a'^2 \cos^2 t + 2\, \Sigma\, a'\, b' \sin t \cos t + \Sigma\, b'^2 \sin^2 t)\, S_2 - 2\, r\, r'\,(\Sigma\, a'\, c \cos t + \Sigma\, b'\, c \sin t)\, S_1 -$$
$$\left. - \left\{r^2\,(\Sigma\, a''\, c \cos t + \Sigma\, b''\, c \sin t) + r\, \Sigma\, c\, f''\right\} S_1\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (80)$$

Het is te verwachten, dat bij uitwerking van deze formule de afgeleiden van S_1 en S_2 naar s zullen optreden.

Deze afgeleiden zullen we in de eerste plaats berekenen:

$$S_1 = \Sigma\, a\, f' \cos t + \Sigma\, b\, f' \sin t + r'$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial s} = \Sigma\, a\, f'' \cos t + \Sigma\, b\, f'' \sin t + \Sigma\, a'\, f' \cos t + \Sigma\, b'\, f' \sin t + r''.$$

De eerste term van vergelijking (80) is om te werken tot:

$$r\,(\Sigma\, a\, f'' \cos t + \Sigma\, b\, f'' \sin t + r'')\, S_2 = r\, S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s} - r\,(\Sigma\, a'\, f' \cos t + \Sigma\, b'\, f' \sin t)\, S_2.$$

Deze uitdrukking vervormen wij met behulp van de vergelijkingen (49):

$$r\,(a\, f'' \cos t + \Sigma\, b\, f'' \sin t + r'')\, S_2 = r\, S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s} - r\, \Sigma\, c\, f'\,(\Sigma\, a'\, c \cos t + \Sigma\, b'\, c \sin t)\, S_2 +$$
$$+ r\, \Sigma\, a\, b'\,(- \Sigma\, a\, f' \sin t + \Sigma\, b\, f' \cos t)\, S_2 =$$
$$= r\, S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s} - r\, \Sigma\, c\, f'\,(\Sigma\, a'\, c \cos t + \Sigma\, b'\, c \sin t)\, S_2 + r\, \Sigma\, a\, b' \frac{\partial S_1}{\partial t}\, S_2. \quad . \quad (81)$$

$$S_2 = r\,(\Sigma\, a'\, c \cos t + \Sigma\, b'\, c \sin t) + \Sigma\, c\, f'.$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial s} = r'\,(\Sigma\, a'\, c \cos t + \Sigma\, b'\, c \sin t) + r\,(\Sigma\, a'\, c' \cos t + \Sigma\, b'\, c' \sin t) + r\,(\Sigma\, a''\, c \cos t +$$
$$+ \Sigma\, b''\, c \sin t) + \Sigma\, c'\, f' + \Sigma\, c\, f''.$$

De laatste term van vergelijking (80) gaat nu over in:

$$-\left[r^2\left(\Sigma a'' c \cos t + \Sigma b'' c \sin t\right) + r \Sigma c f'''\right] S_1 = -r S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} +$$

$$+ r r' \left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right) S_1 + r^2 \left(\Sigma a' c' \cos t + \Sigma b' c' \sin t\right) S_1 + r \Sigma c' f' S_1. \quad (82)$$

Teneinde deze uitdrukking te vervormen, berekenen we: $\Sigma a' c'$, $\Sigma b' c'$ en memoreeren $\Sigma c' f'$ (verg. (63)).

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}' &= \beta\, \mathfrak{B}_1 + \gamma\, \mathfrak{C}_1 \\ \mathfrak{B}' &= \alpha\, \mathfrak{A}_1 + \varepsilon\, \mathfrak{C}_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

$$\mathfrak{C}' = \zeta\, \mathfrak{A}_1 + \eta\, \mathfrak{B}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

Derhalve:

$$\Sigma a' c' = \beta \eta = \Sigma a' b\, \Sigma b c' = \Sigma a b'\, \Sigma b' c$$

$$\Sigma b' c' = \alpha \zeta = \Sigma a b'\, \Sigma a c' = -\Sigma a b'\, \Sigma a' c$$

$$\Sigma a' c' = -\left(\Sigma a f'\, \Sigma a' c + \Sigma b f'\, \Sigma b' c\right).$$

Zoodat vergelijking (82) te vervangen is door:

$$-\left[r^2\left(\Sigma a'' c \cos t + \Sigma b'' c \sin t\right) + r \Sigma c f'''\right] S_1 = -r S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} +$$

$$+ r r' \left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right) S_1 + r \Sigma a b' S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} - r\left(\Sigma a f'\, \Sigma a' c + \Sigma b f'\, \Sigma b' c\right) S_1. \quad (83)$$

De uitdrukkingen (81) en (83) substitueeren we in (80). Dan komt er:

$$L = \frac{1}{H}\Big[r\left(S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s} - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s}\right) + r \Sigma a b' \left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} + S_2 \frac{\partial S_1}{\partial t}\right) - r^2 \left(\Sigma a'^2 \cos^2 t +\right.$$

$$+ 2 \Sigma a' b' \sin t \cos t + \Sigma b'^2 \sin^2 t\big) S_2 - r r' \left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right) S_1 - r \Sigma c f' \left(\Sigma a' c \cos t +\right.$$

$$\left. + \Sigma b' c \sin t\right) S_2 - r\left(\Sigma a f'\, \Sigma a' c + \Sigma b f'\, \Sigma b' c\right) S_1\Big]. \quad \ldots\ldots \quad (84)$$

De 4e en 5e term van deze vergelijking nemen we samen:

$$-r\left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)\left(r S_1 + \Sigma c f' S_2\right) = -r\left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)\big[\{S_1 -$$

$$-\left(\Sigma a f' \cos t + \Sigma b f' \sin t\right)\} S_1 + \{S_2 - r\left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)\} S_2\big] =$$

$$= -r\left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)\left(S_1^2 + S_2^2\right) + r\left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)\left(\Sigma a f' \cos t +\right.$$

$$\left. + \Sigma b f' \sin t\right) S_1 + r^2 \left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)^2 S_2 \quad \ldots\ldots \quad (85)$$

Nu is:

$$r\left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)\left(\Sigma a f' \cos t + \Sigma b f' \sin t\right) S_1 =$$

$$= r\left[\Sigma a f'\, \Sigma a' c \cos^2 t + \Sigma b f'\, \Sigma b' c \sin^2 t + \left(\Sigma a' c\, \Sigma b f' + \Sigma b' c\, \Sigma a f'\right) \sin t \cos t\right] S_1 =$$

$$= r\left[\left(\Sigma a f'\, \Sigma a' c + \Sigma b f'\, \Sigma b' c\right) - \Sigma a f'\, \Sigma a' c \sin^2 t + \left(\Sigma a' c\, \Sigma b f' + \Sigma b' c\, \Sigma a f'\right) \sin t \cos t -\right.$$

$$\left. - \Sigma b f'\, \Sigma b' c \cos^2 t\right] S_1 =$$

$$= r\left(\Sigma a f'\, \Sigma a' c + \Sigma b f'\, \Sigma b' c\right) S_1 - r\left(\Sigma b' c \cos t - \Sigma a' c \sin t\right)\left(\Sigma b f' \cos t - \Sigma a f' \sin t\right) S_1 =$$

$$= r\left(\Sigma a f'\, \Sigma a' c + \Sigma b f'\, \Sigma b' c\right) S_1 - r S_1 \frac{\partial S_1}{\partial t} \frac{\partial S_2}{\partial t}.$$

Hierdoor gaat vergelijking (85) over in:

$$-r\left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)\left(r' S_1 + \Sigma c f' S_2\right) = -r\left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)\left(S_1^2 + S_2^2\right) +$$

$$+ r\left(\Sigma a f'\, \Sigma a' c + \Sigma b f'\, \Sigma b' c\right) S_1 - r S_1 \frac{\partial S_1}{\partial t} \frac{\partial S_2}{\partial t} + r^2 \left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right)^2 S_2.$$

Deze uitdrukkingen substitueeren we in vergelijking (84), zoodat we ten slotte, met inachtname van vergelijking (48) vinden:

$$L = \frac{-1}{H}\Big[r\left(S_1^2 + S_2^2\right)\left(\Sigma a' c \cos t + \Sigma b' c \sin t\right) + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right)\Big(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} -$$

$$- r S_2 \Sigma a b'\Big) + r\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right)\Big] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

Voor de grootheden M en N vinden we eenvoudiger uitdrukkingen:

$$M \equiv \Sigma\, l\, x_{st} = \frac{r}{H} \Sigma\, [(a \cos t + b \sin t)\, S_2 - c\, S_1,\; r\,(b' \cos t - a' \sin t) + r'\,(b \cos t - a \sin t)] =$$

$$= \frac{r}{H}\, [r\, \Sigma\, a\, b'\, S_2 - r\, (\Sigma\, b'\, c \cos t - \Sigma\, a'\, c \sin t)\, S_1] = \frac{r}{H} \left(r\, \Sigma\, a\, b'\, S_2 - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right) \quad (87)$$

$$N \equiv \Sigma\, l\, x_{tt} = \frac{r}{H} \Sigma\, [(a \cos t + b \sin t)\, S_2 - c\, S_1,\; - r\,(a \cos t + b \sin t)] = - \frac{r^2}{H} S_2. \quad (88)$$

Ad II.

De vierkantsvergelijking der hoofdkromtestralen in eenig punt van het cyclisch oppervlak luidt:

$$\begin{vmatrix} E - L\,\varrho & F - M\,\varrho \\ F - M\,\varrho & G - N\,\varrho \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Met behulp van de juist berekende waarden, kunnen we deze vergelijking onder de volgende gedaante brengen:

$$\begin{vmatrix} E - L\,\varrho & r\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right) - \frac{r\,\varrho}{H}\left(r\, \Sigma\, a\, b'\, S_2 - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right) \\ r\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right) - \frac{r\,\varrho}{H}\left(r\, \Sigma\, a\, b'\, S_2 - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right) & r\left(1 + \frac{\varrho}{H} S_2\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (90)$$

We onderzoeken het gedrag van deze vergelijking in de snijpunten van de poollijn van het punt T met den cirkel, de punten Q en Q'. Die punten worden gegeven door de volgende betrekking:

$$S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0.$$

Vergelijking (90) gaat nu over in:

$$\begin{vmatrix} E - L\,\varrho & r\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right) - \frac{r\,\varrho}{H}\left(r\, \Sigma\, a\, b' - \frac{\partial S_1}{\partial t}\right) S_2 \\ r\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right) - \frac{r\,\varrho}{H}\left(r\, \Sigma\, a\, b' - \frac{\partial S_1}{\partial t}\right) S_2 & r^2\left(1 + \frac{\varrho}{H} S_2\right) \end{vmatrix} = 0$$

of:

$$\begin{vmatrix} E - L\,\varrho & \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right)\left(1 + \frac{\varrho}{H} S_2\right) \\ \left(1 + \frac{\varrho}{H} S_2\right)\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right) & \left(1 + \frac{\varrho}{H} S_2\right) \end{vmatrix} = 0.$$

De determinant bevat een factor $\left(1 + \frac{\varrho}{H} S_2\right)$. Een der hoofdkromtestralen wordt dus gevonden uit de vergelijking:

$$\varrho_1 = - \frac{H}{S_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

De andere hoofdkromtestraal wordt gevonden uit de betrekking:

$$(E - L\,\varrho_2) - \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right)^2 \left(1 + \frac{\varrho_2}{H} S_2\right) = 0.$$

$$E - \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right)^2 - \left[L + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right)^2 \frac{S_2}{H}\right] \varrho_2 = 0.$$

$$(S_1^2 + S_2^2) - \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right)^2 S_2 - (S_1^2 + S_2^2)(S_2 - \Sigma c f') - \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right)\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - r S_2 \Sigma a b'\right) - r\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right)\right] \frac{\varrho_2}{H} = 0.$$

$$(S_1^2 + S_2^2) + \left[(S_1^2 + S_2^2)(S_2 - \Sigma c f') + r\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right)\right] \frac{\varrho_2}{H} = 0.$$

$$\varrho_2 = - \frac{H (S_1^2 + S_2^2)}{(S_1^2 + S_2^2)(S_2 - \Sigma c f') + r\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

We moeten nu onderscheid maken tusschen de hoofdkromtestralen in het punt Q en die in het punt Q'. Bij de keuze, die we gedaan hebben, omtrent de richtingen (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) bezitten de hoeken, die met die punten correspondeeren, gelijken sinus, doch is het teeken van den cosinus verschillend.

Voor Q substitueeren we:

$$sin\, t = - \frac{\Sigma b f'}{r'}, \quad cos\, t = \frac{\sqrt{r'^2 - (\Sigma b f')^2}}{r'}.$$

Voor Q' substitueeren we:

$$sin\, t = - \frac{\Sigma b f'}{r'}, \quad cos\, t = - \frac{\sqrt{r'^2 - (\Sigma b f')^2}}{r'}.$$

We kunnen ons bepalen tot het geval:

$$r'^2 - (\Sigma b f')^2 > 0.$$

Is $r'^2 - (\Sigma b f')^2 \lesseqgtr 0$ dan heeft men òf te doen met oppervlakken van de tweede soort, òf met het geval, dat de punten Q en Q' imaginair zijn.

Voorbeeld. We onderstellen, dat de cirkels in de normaalvlakken der centrale kromme gelegen zijn, en dat we de, in § 3 besproken, draaiing toegepast hebben. In § 9 III (bijzonder geval 1°.) hebben we gezien, dat dan de richtingen (a_1, a_2, a_3) en (b_1, b_2, b_3) samenvallen met de hoofdnormaal en binormaal der centrale kromme. We nemen buitendien aan, dat de straal van den cirkel voortdurend gelijk genomen wordt aan den, met het centrum correspondeerenden, kromtestraal der centrale kromme. De formules (70) zijn thans te gebruiken in den volgenden vorm:

$$S_1 = r', \quad S_2 = cos\, t + 1.$$

Voor het punt Q substitueeren we:

$$sin\, t = 0, \quad cos\, t = 1.$$

Voor het punt Q' substitueeren we:

$$sin\, t = 0, \quad cos\, t = - 1.$$

Q.	Q'.
$S_1 = r'$.	$S_1 = r'$.
$S_2 = 2$.	$S_2 = 0$.
$H^2 = r^2 (r'^2 + 4)$.	$H^2 = (r r')^2$.
$\varrho_1 = - \frac{1}{2} r \sqrt{r'^2 + 4}$.	$\varrho_1 = - \infty$.
$\varrho_2 = \frac{- r (r'^2 + 4) \sqrt{r'^2 + 4}}{(r'^2 + 4) - 2 r r''}$.	$\varrho_2 = \frac{- r r'^3}{- r'^2} = r r'$.

Om ons tot een concreet geval te bepalen, onderstellen we, dat de kromtestraal van de centrale kromme in elk punt gelijk is aan de booglengte, van den oorsprong van bogen afgerekend, dus $\varrho = r = s$. Dan geldt:

$Q.$	$Q'.$
$\varrho_1 = -\frac{1}{2} s \sqrt{5}.$	$\varrho_1 = -\infty.$
$\varrho_2 = \frac{-5 s \sqrt{5}}{5} = -s \sqrt{5}.$	$\varrho_2 = s.$

Umbilicaalpunten. Voor umbilicaalpunten geldt:

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}.$$

De voorwaarde $F N - G M = 0$ levert bij uitwerking:

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right) S_2 + \left(r \Sigma a b' S_2 - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right) = 0,$$

of:

$$S_2 \frac{\partial S_1}{\partial t} - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

waaruit blijkt, dat bij een cyclisch oppervlak slechts de punten Q en Q' als umbilicaalpunten kunnen optreden.

Een tweede voorwaarde, waaraan voldaan moet worden, vindt men uit de vergelijking:

$$E M - F L = 0,$$

welke tweede voorwaarde ook gevonden kan worden, door in het oog te houden, dat $\varrho_1 = \varrho_2$, of:

$$\frac{1}{S_2} = \frac{S_1^2 + S_2^2}{(S_1^2 + S_2^2)(S_2 - \Sigma c f') + r \left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right)}.$$

Na uitwerking:

$$(S_1^2 + S_2^2) \Sigma c f' - r \left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

Wanneer we deze vergelijking toepassen op bovenstaand voorbeeld, vinden we als oplossing $s = 0$. Immers:

$$\varrho_1 = \varrho_2 \text{ dus, } \frac{1}{2} s \sqrt{5} = 0, \text{ of } s = 0,$$

waaruit blijkt, dat voor dit oppervlak het punt Q, in den oorsprong van bogen, umbilicaalpunt is.

Gemiddelde en totale kromming. Na uitwerking, luidt de vierkantsvergelijking (89):

$$(L N - M^2) \varrho^2 + (E N + G L - 2 F M) \varrho + E G - F^2 = 0.$$

We beschouwen achtereenvolgens de gemiddelde kromming:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2 F M - E N - G L}{H^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

en de totale kromming:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{L N - M^2}{H^2}.$$

Voor *minimaaloppervlakken* geldt:

$$E\,N + G\,L - 2\,F\,M = 0$$

of:

$$\left[(S_1^2 + S_2^2) + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\,\Sigma\,a\,b'\right)^2\right] S_2 + \left[(S_1^2 + S_2^2)(S_2 - \Sigma\,c\,f') + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\,\Sigma\,a\,b'\right)\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - r\,S_2\,\Sigma\,a\,b'\right) - r\left(S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s} - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s}\right)\right] - 2\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\,\Sigma\,a\,b'\right)\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} - r\,S_2\,\Sigma\,a\,b'\right) = 0.$$

De termen met den factor $\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\,\Sigma\,a\,b'\right)$ te zamen nemende, verkrijgen wij:

$$(S_1^2 + S_2^2)(2\,S_2 - \Sigma\,c\,f') + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\,\Sigma\,a\,b'\right)\left(S_2 \frac{\partial S_1}{\partial t} - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right) + r\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right) = 0. \quad (96)$$

Deze vergelijking is van den vorm:

$$A\,sin^3\,t + B\,sin^2\,t\,cos\,t + C\,sin^2\,t + D\,sin\,t\,cos\,t + E\,sin\,t + F\,cos\,t + G = 0. \quad (97)$$

Zij zal vervuld moeten worden, onafhankelijk van de waarde, die men aan t geeft. Dit eischt:

$$A = B = C = D = E = F = G = 0.$$

$A = 0$. Termen met $sin^3\,t$ kunnen alleen uit den eersten term van vergelijking (96) voortkomen. Wanneer wij $cos^2\,t$ door $(1 - sin^2\,t)$ vervangen, vinden wij voor den coëfficiënt A:

$$2\,\varphi\,r\,\Sigma\,b\,f'\,[(1 + \varphi^2\,r^2)(\Sigma\,b\,f')^2 - (\Sigma\,a\,f')^2 - r^2\,(\Sigma\,a'\,c)^2] - 4\,r\,\Sigma\,a'\,c\,\Sigma\,b\,f'\,(\Sigma\,a\,f' + \varphi\,r^2\,\Sigma\,a'\,c).$$

Deze uitdrukking bevat als factor $\Sigma\,b\,f'$. De eerste voorwaarde luidt derhalve:

$$\Sigma\,b\,f' = 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Deze voorwaarde in het oog houdend, schrijven wij het begin van vergelijking (96) als volgt:

$$\{-[(\Sigma\,a\,f')^2 + r^2\,(\Sigma\,a'\,c)^2]\,sin^2\,t + 2\,r'\,(\Sigma\,a\,f' + \varphi\,r^2\,\Sigma\,a'\,c)\,cos\,t \ldots\}\,(2\,r\,\Sigma\,a'\,c\,cos\,t \ldots).$$

De coëfficiënt van $sin^2\,t\;cos\,t$ bevat als factor $\Sigma\,a'\,c$. Als tweede voorwaarde geldt:

$$\Sigma\,a'\,c = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

Na invoering dezer twee voorwaarden luidt vergelijking (96):

$$[-(\Sigma\,a\,f')^2\,sin^2\,t + 2\,r'\,\Sigma\,a\,f'\,cos\,t + r'^2\,(1 + \varphi^2\,r^2) + (\Sigma\,a\,f')^2]\,\Sigma\,c\,f' - (\Sigma\,a\,f'\,sin\,t +$$

$$r\,\Sigma\,a\,b')\,\varphi\,r\,r'\,\Sigma\,a\,f'\,sin\,t + r\left[(\Sigma\,a\,f'\,cos\,t + r')\frac{\partial}{\partial s}\Sigma\,c\,f' - \Sigma\,c\,f'\left(\frac{\partial}{\partial s}\Sigma\,a\,f'\,cos\,t + r''\right)\right] = 0.$$

Hieruit blijkt, dat de coëfficiënten C en D bij de gemaakte onderstellingen van zelf verdwijnen. Opdat $E = 0$ is, vinden we als derde voorwaarde:

$$\Sigma\,a\,b' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

$F = 0$ of:

$$2\,r'\,\Sigma\,a\,f'\,\Sigma\,c\,f' - r\,\Sigma\,c\,f'\,\frac{\partial}{\partial s}\,\Sigma\,a\,f' + r\,\Sigma\,a\,f'\,\frac{\partial}{\partial s}\,\Sigma\,c\,f' = 0$$

$$\frac{2\,r\,r'}{r^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial s}\,\Sigma\,c\,f'}{\Sigma\,c\,f'} = \frac{\frac{\partial}{\partial s}\,\Sigma\,a\,f'}{\Sigma\,a\,f'}.$$

Integratie levert:

$$d\, l\, r^2\, \Sigma\, c\, f' = d\, l\, \Sigma\, a\, f'$$

$$r^2\, \Sigma\, c\, f' = k^2\, \Sigma\, a\, f' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (101)$$

Een tweede integraal wordt gevonden uit de laatste voorwaarde $G = 0$, of:

$$[r'^2 + (\Sigma\, c\, f')^2 + (\Sigma\, a\, f')^2]\, \Sigma\, c\, f' - r\, r''\, \Sigma\, c\, f' + r\, r' \frac{\partial}{\partial s} \Sigma\, c\, f' = 0.$$

Door middel van vergelijking (101) elimineeren we de grootheid $\Sigma\, a\, f'$. Dan luidt bovenstaande vorm:

$$[r'^2 + (\Sigma\, c\, f')^2 + \frac{r^4}{k^4} (\Sigma\, c\, f')^2]\, \Sigma\, c\, f' - r\, r''\, \Sigma\, c\, f' + r\, r' \frac{\partial}{\partial s} \Sigma\, c\, f' = 0.$$

In plaats van s kiezen we den straal r als onafhankelijk veranderlijke. Men verkrijgt dan:

$$\frac{r^4}{k^4} (\Sigma\, c\, f')^3 + \Sigma\, c\, f' + (\Sigma\, c\, f')^3 + r \frac{d\, \Sigma\, c\, f'}{d\, r} = 0.$$

Om deze vergelijking te integreeren, beschouwen we $(\Sigma\, c\, f')^2$ als een functie van r^2. Dit levert ons:

$$\left(1 + \frac{r^4}{k^4}\right) (\Sigma\, c\, f')^4 + (\Sigma\, c\, f')^2 + r^2 \frac{d\, (\Sigma\, c\, f')^2}{d\, r^2} = 0.$$

Stel:

$$(\Sigma\, c\, f')^2 = p, \quad r^2 = q.$$

Dan gaat bovenstaande vergelijking over in:

$$q \frac{d\, p}{d\, q} + p + \left(1 + \frac{q^2}{k^4}\right) p^2 = 0$$

$$\frac{d\, p}{d\, q} + \frac{1}{q}\, p + \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{k^4}\right) p^2 = 0.$$

Deze differentiaalvergelijking is terug te brengen tot een lineaire [1]).

De integraal luidt:

$$\frac{1}{p} = -\, e^{\int \frac{d\, q}{q}} \left[c - \int e^{-\int \frac{d\, q}{q}} \left(\frac{q}{k^4} + \frac{1}{q}\right) d\, q\right].$$

$$\frac{1}{p} = -\, q \left[c - \int \left(\frac{1}{k^4} + \frac{1}{q^2}\right) d\, q\right]. \quad (c = a^2 \text{ stellende})$$

$$\frac{1}{p} = -\, q \left[a^2 - \frac{q}{k^4} + \frac{1}{q}\right] = \left[\frac{q^2}{k^4} - a^2\, q - 1\right]$$

$$p = \frac{k^4}{q^2 - a^2\, k^4\, q - k^4}$$

$$\Sigma\, c\, f' = \frac{k^2}{\sqrt{r^4 - a^2\, k^4\, r^2 - k^4}}.$$

We interpreteeren de verkregen resultaten $\Sigma\, b\, f' = 0$ brengt met zich mede $\Sigma\, b'\, c = 0$ (zie verg. 18).

$$(\Sigma\, a'\, c)^2 + (\Sigma\, b'\, c)^2 = \Sigma\, c'^2$$

zijnde, is met het oog op (99) $\Sigma\, c'^2 = 0$, dus (c_1, c_2, c_3) constant. De cirkels liggen

---

[1]) Cf. Serret—Harnack, Lehrbuch der Diff. und Integralrechnung III § 678.

derhalve in onderling evenwijdige vlakken. Daar de richting (b_1, b_2, b_3) in het vlak der richtingen (a_1, a_2, a_3) en (c_1, c_2, c_3) gelegen is, geldt:

$$(\Sigma\, a\, b')^2 + (\Sigma\, c\, b')^2 = \Sigma\, b'^2.$$

Beide termen in het eerste lid dezer vergelijking gelijk nul zijnde (zie verg. 100), zoo moet ook de richting (b_1, b_2, b_3) constant zijn, en derhalve de richting (a_1, a_2, a_3), loodrecht op deze beide, eveneens. De richting (c_1, c_2, c_3) kiezen we als Z as, (a_1, a_2, a_3) als X as, (b_1, b_2, b_3) als Y as; dan moet, $\Sigma\, b\, f' = 0$ zijnde, het centrum van den cirkel een vlakke kromme in het $X\,Z$ vlak beschrijven. Vergelijking (102) gaat bij deze aanname over in:

$$d\,z = \frac{k^2\, d\, r}{\sqrt{r^4 - a^2\, k^4\, r^2 - k^4}}$$

terwijl de eerste integraal (101) ons levert:

$$d\,x = \frac{r^2 d\, r}{\sqrt{r^4 - a^2\, k^4\, r^2 - k^4}}.$$

Deze laatste twee vergelijkingen geven de differentiaalvergelijking der centrale kromme. De coördinaten van een punt dier kromme zijn dubbelperiodieke functies van den parameter r. De vergelijkingen der karakteristieken luiden:

$$S_1 = \Sigma\, a\, f' \cos t + r, \quad S_2 = \Sigma\, c\, f' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (103)$$

Het hier besproken oppervlak is het minimaaloppervlak van Riemann [1]).

We hadden bovenstaand vraagstuk iets algemeener kunnen aanvatten, n. l. kunnen vragen naar die cyclische oppervlakken, waarvoor de gemiddelde kromming, langs een beschrijvenden cirkel constant $= k$ is, maar van cirkel tot cirkel varieert. Blijkbaar zal de betrekking:

$$2\, F\, M - E\, N - G\, L = k\, H^2$$

wederom voor alle waarden van t vervuld moeten zijn. Na uitwerking luidt bovenstaande vergelijking:

$$(S_1^2 + S_2^2)(2\, S_2 - \Sigma\, c\, f') + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right)\left(S_2 \frac{\partial S_1}{\partial t} - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right) + r\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right) = \frac{k\, H^3}{r^2} \quad (104)$$

Het tweede lid dezer vergelijking doet ons terstond zien, dat alleen een oplossing te zoeken is onder de cyclische oppervlakken, waarvoor H een rationale functie van $\cos t$ en $\sin t$ is, m. a. w. onder de cyclische oppervlakken met isotrope focaalkromme. Dus:

$$H^2 = r^2\,(1 + q^2\, r^2)\,(r' \sin t + \Sigma\, b\, f')^2$$
$$H^3 = r^3\,(1 + q^2\, r^2)\,\sqrt{1 + q^2\, r^2}\,(r' \sin t + \Sigma\, b\, f')^3.$$

Men substitueert nu in vergelijking (104) voor S_1 en S_2 de formules (57), vervangt in de komende uitdrukking $\cos^2 t$ door $(1 - \sin^2 t)$, en vindt een uitdrukking in $\cos t$ en $\sin t$, analoog aan (97). De coëfficiënten van deze uitdrukking moeten alle gelijk aan nul gesteld worden. Op deze wijze te werk gaande, vindt men, onder de oppervlakken van de 1° soort geen enkel bestaanbaar oppervlak, dat aan de vraag voldoet. Daar H rationaal in $\cos t$ en $\sin t$ moet zijn, zal alleen de omhullende van ∞^1 bollen een oplossing leveren. In dit

---

[1]) Cf. Riemann, Ges. Werke, Pag. 329 en vlg.

geval is echter een der hoofdkromtestralen, wanneer men zich langs een beschrijvenden cirkel beweegt, constant, n. l. gelijk aan den straal van den cirkel. Daar de som der hoofdkromtestralen volgens onderstelling, constant is, zal de andere hoofdkromtestraal voor een bepaalden, beschrijvenden cirkel eveneens constant moeten zijn. Daaruit volgt, dat alleen de omwentelingsoppervlakken aan de vraag zullen voldoen. We kunnen direct substitueeren:

$$S_1 = r', \quad S_2 = 1 \text{ (zie 76).}$$

Vergelijking (104) gaat nu over in:

$$(r'^2 + 1) - r\,r'' = r\,k\,(1 + r'^2)\sqrt{1 + r'^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}} - \frac{r\,r''}{(1 + r'^2)\sqrt{1 + r'^2}} = r\,k.$$

We vermenigvuldigen deze vergelijking in haar geheel met r:

$$\frac{r'}{\sqrt{1 + r'^2}} - \frac{r\,r'\,r''}{(1 + r'^2)\sqrt{1 + r'^2}} = r\,r'\,k$$

$$\frac{d\,r}{\sqrt{1 + r'^2}} + r\,d\,\frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}} = k\,r\,d\,r$$

of:

$$d\,\frac{r}{\sqrt{1 + r'^2}} = k\,r\,d\,r$$

$$\frac{r}{\sqrt{1 + r'^2}} = \int k\,r\,d\,r.$$

Deze vergelijking verheffen we in 't quadraat:

$$\frac{r^2}{1 + r'^2} = \left(\int k\,r\,d\,r\right)^2.$$

We voeren nu, in plaats van s, den straal r als onafhankelijk veranderlijke, z als afhankelijk veranderlijke in.

Dus:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\frac{d\,r}{d\,s}} = \frac{d\,z}{d\,r}.$$

Daardoor gaat onze differentiaalvergelijking over in:

$$r^2\left(\frac{d\,z}{d\,r}\right)^2 = \left(\int k\,r\,d\,r\right)^2 \left[1 + \left(\frac{d\,z}{d\,r}\right)^2\right]$$

of:

$$\left[r^2 - \left(\int k\,r\,d\,r\right)^2\right]\left(\frac{d\,z}{d\,r}\right)^2 = \left(\int k\,r\,d\,r\right)^2$$

$$\frac{d\,z}{d\,r} = \frac{\int k\,r\,d\,r}{\sqrt{r^2 - \left(\int k\,r\,d\,r\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (105)$$

waarmee de differentiaalvergelijking der meridiaankromme gevonden is.

We kunnen ons vraagstuk iets specialiseeren, door te onderstellen, dat k een absolute constante is, d. w. z. dat de gemiddelde kromming thans niet meer van cirkel tot cirkel varieert, maar over het geheele oppervlak constant is. Vergelijking (105) gaat dan over in:

$$d\,z = \frac{(r^2 \mp b^2)\,d\,r}{\sqrt{4\,a^2\,r^2 - (r^2 \mp b^2)^2}}$$

waarin we de grootheid $k = \frac{1}{2a}$ gesteld hebben. Men vindt hier het kleinste omwentelingsoppervlak van gegeven volumen. De meridiaankromme is de kromme, die door het brandpunt van een ellips of hyperbool beschreven wordt, wanneer deze, zonder te glijden, langs de Z as rolt [1]).

Is ten slotte $k = 0$, dan heeft men weer met een minimaaloppervlak te doen, en gaat vergelijking (105) over in:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}$$

waarin c de integratieconstante is.

$$dz = \frac{c\,dr}{\sqrt{r^2 - c^2}}$$

$$\frac{z - a}{c} = l\,\frac{r + \sqrt{r^2 - c^2}}{c}$$

$$\frac{r + \sqrt{r^2 - c^2}}{c} = e^{\frac{z-a}{c}}, \quad \frac{r - \sqrt{r^2 - c^2}}{c} = e^{-\frac{z-a}{c}}$$

$$r = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{z-a}{c}} + e^{-\frac{z-a}{c}}\right)$$

de vergelijking der kettinglijn. Het beschreven oppervlak is de *catenoïde*, het eenige minimaaloppervlak, dat tevens omwentelingsoppervlak is.

Onderzoek der cyclische oppervlakken met *constante totale kromming*. Het product der hoofdkromtestralen stellen we k, voorloopig aannemende, dat dit product van cirkel tot cirkel varieert. Dan zal de vergelijking:

$$L\,N - M^2 = k\,H^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

wederom voor alle waarden van t vervuld moeten zijn.

$$L\,N - M^2 = \frac{r^2}{H^2} S_2 \left[(S_1^2 + S_2^2)(S_2 - \Sigma c f') + \left(\frac{\partial S_1}{\partial t} - r \Sigma a b'\right)\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} - r S_2 \Sigma a b'\right) + \right.$$
$$\left. + r\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right)\right] - \frac{r^2}{H^2}\left(r \Sigma a b' S_2 - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right)^2$$
$$= \frac{r^2}{H^2}\left[S_2 (S_1^2 + S_2^2)(S_2 - \Sigma c f') + r\left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right) S_2 + \left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - r S_2 \Sigma a b'\right)\left(S_2 \frac{\partial S_1}{\partial t} - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right)\right]$$

zoodat vergelijking (106) overgaat in:

$$r^2 \left[S_2 (S_1^2 + S_2^2)(S_2 - \Sigma c f') + r S_2 \left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial s} - S_2 \frac{\partial S_1}{\partial s}\right) + \left(S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t} - r S_2 \Sigma a b'\right)\left(S_2 \frac{\partial S_1}{\partial t} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right)\right] = k\,H^4. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

Om een oplossing te vinden, zouden we deze vergelijking wederom moeten rangschikken naar machten van *cos t* en *sin t*, en in de verkregen eindvergelijking de coëfficiënten elk afzonderlijk gelijk aan nul moeten stellen. Wij komen dan tot de conclusie, dat geen enkel reëel oppervlak aan de vraag voldoet, uitgezonderd de omwentelingsoppervlakken. Derhalve substitueeren we:

$$S_1 = r', \quad S_2 = 1,$$

[1]) Serret—Harnack, l. c. III § 755 en § 895.

waardoor we voor vergelijking (107) de volgende differentiaalvergelijking vinden:

$$- r\, r'' = k\, (1 + r'^2)^2\, r^2$$

$$\frac{-2\, r'\, r''}{(1 + r'^2)^2} = 2\, k\, r\, r' \qquad \dots\dots\dots \qquad (108)$$

welke differentiaalvergelijking geïntegreerd moet worden. Zoolang we de grootheid k nog als functie van s beschouwen, valt omtrent deze vergelijking niets te zeggen. Onderstellen we echter, dat k een absolute constante is, dus niet meer van cirkel tot cirkel verandert, dan is vergelijking (108) te integreeren. Men vindt n. l.:

$$d\, \frac{1}{1 + r'^2} = k\, d\, r^2$$

$$\frac{1}{1 + r'^2} = k\, (r^2 + c).$$

We voeren, evenals boven, den straal r als onafhankelijk veranderlijke, z als afhankelijk veranderlijke in:

$$\frac{\left(\frac{d\,z}{d\,r}\right)^2}{\left(\frac{d\,z}{d\,r}\right)^2 + 1} = k\, (r^2 + c)$$

$$d\,z = \frac{d\,r\, \sqrt{k\, (r^2 + c)}}{\sqrt{1 - k\, (r^2 + c)}}.$$

Onderstelt men k negatief $= - m^2$, en kiest men c zoodanig, dat:

$$k\, c = - m^2\, c = 1$$

dan gaat bovenstaande vergelijking over in:

$$d\,z = \frac{d\,r\, \sqrt{1 - m^2\, r^2}}{m\, r} = \frac{d\,r}{m\, r\, \sqrt{1 - m^2\, r^2}} - \frac{m\, r\, d\, r}{\sqrt{1 - m^2\, r^2}}.$$

Integratie geeft:

$$z - z_0 = \frac{1}{m}\, l\, \frac{\sqrt{1 - m^2\, r^2} - 1}{m\, r} + \frac{\sqrt{1 - m^2\, r^2}}{m}.$$

Voor m positief is dit de vergelijking der *tractrix*, die haar keerpunt in $z = z_0$, $r = - \frac{1}{m}$ heeft [1]).

Ad III.

De differentiaalvergelijking der kromtelijnen luidt:

$$(E\, M - F\, L)\, d\, s^2 + (E\, N - G\, L)\, d\, s\, d\, t + (F\, N - G\, M)\, d\, t^2 = 0.$$

We drukken den laatsten term dezer vergelijking in de karakteristieken en haar afgeleiden uit:

$$(F\, N - G\, M) = - r^3 \left(\frac{\partial\, S_1}{\partial\, t} - r\, \Sigma\, a\, b'\right) S_2 - r^3 \left(r\, \Sigma\, a\, b'\, S_2 - S_1 \frac{\partial\, S_2}{\partial\, t}\right) =$$

$$= - r^3 \left(S_2 \frac{\partial\, S_1}{\partial\, t} - S_1 \frac{\partial\, S_2}{\partial\, t}\right).$$

---

1) Serret—Harnack l. c. § 756.

Hieruit blijkt, dat, wanneer men de richtingen der kromtelijnen in de punten Q en Q' bepaalt, voor welke punten de uitdrukking $S_2 \frac{\partial S_1}{\partial t} - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}$ verdwijnt, de differentiaalvergelijking een factor $d\,s$ bevat, en één der richtingen derhalve gegeven wordt door $s =$ const., hetgeen er op wijst, dat *elke cirkel in de punten Q en Q' aan een kromtelijn raakt.*

Speciaal geval, waarin de integratie der differentiaalvergelijking uit te voeren is. We onderstellen, dat we met een cyclisch oppervlak te doen hebben, waarvoor de orthogonale trajectoriën der cirkels een stelsel geodetische krommen zijn (zie § 9, V) De differentiaalvergelijking dezer krommen luidt dan:

$$2\,\tau \frac{d\,w}{d\,s} = -\frac{\tau}{\varrho} w^2 + 2\,w - \frac{\tau}{\varrho}, \quad \text{(zie verg. 68)}$$

$$\frac{d\,w}{d\,s} = -\frac{1}{2\,\varrho} w^2 + \frac{1}{\tau} w - \frac{1}{2\,\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

Wij hebben gezien, dat de centrale kromme constante torsie bezit; we nemen aan, dat zij tevens constante kromming bezit, m. a. w. we kiezen tot centrale kromme, de gewone schroeflijn. De uitdrukking in het tweede lid van bovenstaande vergelijking, bevat nu constante coëfficiënten. De wortels der vergelijking:

$$\frac{1}{2\,\varrho} w^2 - \frac{1}{\tau} w + \frac{1}{2\,\varrho} = 0$$

of:

$$w^2 - \frac{2\,\varrho}{\tau} w + 1 = 0$$

te weten:

$$w_1 = \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\tau}, \quad w_2 = \frac{\varrho - \sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\tau}$$

zijn particuliere integralen der RICCATI'sche differentiaalvergelijking.

Twee particuliere integralen bekend zijnde, zoo wordt de bepaling der orthogonale trajectoriën tot een enkele quadratuur teruggebracht. Stel n. l.

$$w = w_1 + \frac{1}{\eta}$$

dan gaat vergelijking (109) over in:

$$\frac{d\frac{1}{\eta}}{d\,s} = -\frac{1}{2\,\varrho}\left(w_1 + \frac{1}{\eta}\right)^2 + \frac{1}{\tau}\left(w_1 + \frac{1}{\eta}\right) - \frac{1}{2\,\varrho}$$

$$-\frac{1}{\eta^2}\frac{d\,\eta}{d\,s} = -\frac{1}{2\,\varrho}\left(w_1^2 + \frac{2\,w_1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2}\right) + \frac{1}{\tau}\left(w_1 + \frac{1}{\eta}\right) - \frac{1}{2\,\varrho}.$$

Daar w_1 een integraal van vergelijking (109) is, mag hiervoor geschreven worden:

$$-\frac{1}{\eta^2}\frac{d\,\eta}{d\,s} = -\frac{w_1}{\varrho\,\eta} - \frac{1}{2\,\varrho\,\eta^2} + \frac{1}{\tau\,\eta}$$

$$\frac{d\,\eta}{d\,s} = \left(\frac{w_1}{\varrho} - \frac{1}{\tau}\right)\eta + \frac{1}{2\,\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110)$$

Stel:

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{\eta_0}$$

waaruit volgt:

$$\eta_0 = \frac{1}{w_2 - w_1}$$

dan zal η_0 een integraal zijn van vergelijking (110). We stellen nu:

$$\eta = \eta_0 + \vartheta;$$

dan is:

$$\frac{d\,\eta}{d\,s} = \frac{d\,\eta_0}{d\,s} + \frac{d\,\vartheta}{d\,s}.$$

Derhalve:

$$\frac{d\,\eta_0}{d\,s} + \frac{d\,\vartheta}{d\,s} = \left(\frac{w_1}{\varrho} - \frac{1}{\tau}\right)(\eta_0 + \vartheta) + \frac{1}{2\,\varrho}.$$

Daar η_0 een integraal is van vergelijking (110), mag voor bovenstaande vorm geschreven worden:

$$\frac{d\,\vartheta}{d\,s} = \left(\frac{w_1}{\varrho} - \frac{1}{\tau}\right)\vartheta.$$

$$\vartheta = e^{\int\left(\frac{w_1}{\varrho} - \frac{1}{\tau}\right)d\,s}.$$

$$\vartheta = e^{\frac{\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\varrho\,\tau}s}.$$

Nu is:

$$\vartheta = \eta - \eta_0 = \frac{1}{w - w_1} - \frac{1}{w_2 - w_1},$$

en dus:

$$\frac{1}{w - w_1} = e^{\frac{\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\varrho\,\tau}s} + \frac{1}{w_2 - w_1},$$

$$\frac{1}{w - w_1} = e^{\frac{\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\varrho\,\tau}s} - \frac{\tau}{2\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}},$$

$$w - w_1 = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}\,e^{\frac{\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\varrho\,\tau}s} - \frac{\tau}{2}},$$

$$w = \frac{\varrho + \sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\tau} + \frac{\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}\,e^{\frac{\sqrt{\varrho^2 - \tau^2}}{\varrho\,\tau}s} - \frac{\tau}{2}}.$$

Hiermede is w, en dus ook $tg\,\frac{t}{2}$ als een functie van s gevonden. Om nu de vergelijking der orthogonale trajectoriën in eindigen vorm neer te kunnen schrijven, dienen uit bovenstaande uitdrukking $\cos t$ en $\sin t$ afzonderlijk bepaald te worden, en daarna gesubstitueerd in de vergelijkingen van het cyclisch oppervlak (stelsel 1). De cirkels en de aldus gevonden krommen kiezen we tot parameterkrommen. Daar de orthogonale trajectoriën in ons geval tevens geodetische krommen zijn, geldt: $E = 1$, $F = 0$. Daar $S_1 = \cos t$, $S_2 = -\sin t$ is, is:

$$G = r^2, \quad L = \sin t, \quad M = r\left(\frac{r}{\varrho}\sin t + \cos^2 t\right), \quad N = r^2 \sin t.$$

De differentiaalvergelijking der kromtelijnen luidt thans:

$$M\,d\,s^2 + (N - G\,L)\,d\,s\,d\,t - G\,M\,d\,t^2 = 0,$$

of:

$$d\,s^2 - r^2\,d\,t^2 = 0,$$

$$d\,t = \pm\frac{d\,s}{r},$$

$$t = \pm\frac{s}{r} + c,$$

waarmee de kromtelijnen van dit cyclisch oppervlak bepaald zijn.

Ad IV.

Op een willekeurig oppervlak worden *toegevoegde* richtingen gegeven door de differentiaalvergelijking:

$$L\, d\, s\, \delta\, s + M\, (d\, s\, \delta\, t + \delta\, s\, d\, t) + N\, d\, t\, \delta\, t = 0.$$

Aan welke voorwaarde moet voldaan worden, opdat de *parameterkrommen een toegevoegd stelsel* vormen? De cirkels zelve zijn de parameterkrommen $s = \text{const.}$ Wanneer we veranderingen, die op de cirkels betrekking hebben, met d aangeven, dan worden, de aan de cirkels toegevoegde krommen, gevonden uit de differentiaalvergelijking:

$$M\, \delta\, s + N\, \delta\, t = 0.$$

Opdat de parameterkrommen $t = \text{const.}$ met de cirkels een toegevoegd stelsel vormen, zal men moeten hebben:

$$M = 0,$$

$$M \equiv \frac{r}{H}\left[r\, \Sigma\, a\, b'\, S_2 - S_1 \frac{\partial S_2}{\partial t}\right] = \frac{r}{H}\, [r\, \Sigma\, a\, b'\, (r\, \Sigma\, a'\, c \cos t + \varphi\, r\, \Sigma\, b\, f' \sin t + \varphi\, r\, r') -$$
$$- r\, (\Sigma\, a\, f' \cos t + \Sigma\, b\, f' \sin t + r')\, (- \Sigma\, a'\, c \sin t + \varphi\, \Sigma\, b\, f' \cos t)].$$

De voorwaarde $M = 0$ is aldus te schrijven:

$$\Sigma\, b\, f'\, (\Sigma\, a'\, c + \varphi\, \Sigma\, a\, f') \sin^2 t + [\Sigma\, a\, f'\, \Sigma\, a'\, c - \varphi\, (\Sigma\, b\, f')^2] \sin t \cos t + (r'\, \Sigma\, a'\, c +$$
$$+ \varphi\, r\, \Sigma\, b\, f'\, \Sigma\, a\, b') \sin t - (\varphi\, r'\, \Sigma\, b' f' - r\, \Sigma\, a\, b'\, \Sigma\, a'\, c) \cos t + \varphi\, r\, r'\, \Sigma\, a\, b' = 0.$$

Aan deze uitdrukking zal voor alle waarden van t voldaan moeten worden. Opdat men met oppervlakken van de eerste soort te doen hebbe, zullen de volgende voorwaarden vervuld moeten zijn:

$$\Sigma\, b\, f' = 0, \quad \Sigma\, a'\, c = 0, \quad \Sigma\, a\, b' = 0.$$

Deze voorwaarden zijn dezelfde als (98), (99) en (100), die we bij het minimaaloppervlak van Riemann aantroffen. De cirkels liggen dus in onderling evenwijdige vlakken, en de centrale kromme is vlak. Terloops merken we op, dat de differentiaalvergelijking der orthogonale trajectoriën der cirkels door een enkele quadratuur geïntegreerd kan worden. Zij luidt:

$$r \frac{d\, t}{d\, s} = \Sigma\, a\, f' \sin t.$$

$$\frac{d\, t}{\sin t} = \frac{\Sigma\, a\, f'}{r}\, d\, s$$

$$lg\, tg\, \frac{t}{2} = \int \frac{\Sigma\, a\, f'}{r}\, d\, s.$$

Voor een willekeurig oppervlak worden de *asymptotische* lijnen gegeven door de differentiaalvergelijking:

$$L\, d\, s^2 + 2\, M\, d\, s\, d\, t + N\, d\, t^2 = 0.$$

Daar voor de cyclische oppervlakken $N = \frac{r^2}{H}\, S_2$ is, geldt de volgende stelling:

In de punten, waarin de karakteristiek $S_2 = 0$ den cirkel snijdt, raakt deze aan een asymptotische lijn van het oppervlak.

HOOFDSTUK II.

Cyclische Congruenties.

---

§ 1. *Focaalpunten en focaaloppervlakken.* Wanneer we het algemeene geval beschouwen, en uitgaan van het stelsel vergelijkingen:

$$\varphi(x, y, z, u, v) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1) \qquad \psi(x, y, z, u, v) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dan stelt voor een bepaalde waarde van u en v zoowel de eerste. als de tweede vergelijking een oppervlak voor. De doorsnee dezer twee oppervlakken is een ruimtekromme. Daar elk der parameters u en v ∞^1 waarden kan bezitten, heeft men met een tweevoudige oneindigheid van ruimtekrommen te doen, een zoogenaamde congruentie. Legt men een functionaal verband tusschen de parameters u en v, bijv.:

$$u = \omega(s), \qquad u = \chi(s)$$

dan licht men uit de tweevoudige oneindigheid der ruimtekrommen een enkelvoudige oneindigheid, derhalve een oppervlak der congruentie. Houdt men een bepaalde ruimtekromme in het oog, dan kunnen er door deze kromme ∞^1 oppervlakken gebracht worden, al naarmate men een ander functionaal verband tusschen de parameters kiest. Onze eerste vraag is naar de vergelijking van het raakvlak in eenig punt $P(x, y, z)$ aan een bepaald oppervlak, dat door een bepaalde ruimtekromme gebracht is. Bedoelde vergelijking luidt:

$$\Sigma(X - x)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u} d\,u + \frac{\partial \psi}{\partial v} d\,v\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} d\,u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} d\,v\right)\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Zij kan terstond worden afgeleid uit hoofdstuk I, (verg. 4), door elk differentiaalquotiënt van den vorm q_s door $(q_u\, d\,u + q_v\, d\,v)$ te vervangen. Brengt men haar in de gedaante:

$$\Sigma(X - x)\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) d\,u + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) d\,v\right] = 0$$

dan blijkt ten duidelijkste, dat het raakvlak in het punt P varieert, al naar mate men een ander functionaal verband legt tusschen de parameters, en dus een ander oppervlak door de bepaalde ruimtekromme brengt. De vraag rijst nu, of het niet mogelijk is, zoodanige punten op de ruimtekromme te vinden, dat het raakvlak in zoo'n punt hetzelfde is voor alle oppervlakken, die door de ruimtekromme te brengen zijn. Dan zal vergelijking (3) onafhankelijk moeten zijn van $\frac{d\,u}{d\,v}$, hetgeen vereischt:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial \psi}{\partial v}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

een betrekking tusschen de parameters u en v, die een oppervlak voorstelt. Combineeren wij deze vergelijking met de vergelijkingen (1) en (2), dan zal de, door deze laatste vergelijkingen voorgestelde, ruimtekromme het oppervlak (4) in het algemeen in een eindig aantal punten snijden, die de eigenschap bezitten, dat het raakvlak, in die punten aangebracht, hetzelfde is voor alle oppervlakken, welke door de ruimtekromme te brengen zijn. Deze punten heeten *focaalpunten.*

Bovenstaande uiteenzetting zullen we op een stelsel van ∞^2 cirkels toepassen, gegeven door de vergelijkingen:

$$\Sigma (x - f)^2 - r^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\Sigma c (x - f) \quad = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

waarin (f, g, h), r, (c_1, c_2, c_3) thans functies van twee parameters u en v zijn. Het oppervlak:

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v)$$

het zoogenaamde centrale oppervlak, treedt als meetkundige plaats van de middelpunten der cirkels op. Voor een bepaalde waarde van u en v heeft men met een bepaalden cirkel te doen. Legt men een functionaal verband tusschen de parameters u en v:

$$u = \omega(s), \quad v = \chi(s) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

dan licht men een stelsel ∞^1 cirkels uit de congruentie, derhalve een cyclisch oppervlak. Houdt men een bepaalden cirkel in het oog, dan zal men door dezen cirkel ∞^1 cyclische oppervlakken kunnen brengen, die verschillen, naar gelang men een ander functionaal verband (7) kiest. De vergelijking van het raakvlak in eenig punt P van een, door een bepaalden cirkel gebracht, cyclisch oppervlak, wordt gegeven door vergelijking (3), waarin:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \Sigma f_u (x - f) + r r_u, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \Sigma f_v (x - f) + r r_v \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial u} = \Sigma c_u (x - f) - \Sigma c f_u, & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} = \Sigma c_v (x - f) - \Sigma c f_v \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

Opdat nu het raakvlak hetzelfde is voor alle cyclische oppervlakken, die door dien beschrijvenden cirkel gebracht kunnen worden, moet aan vergelijking (4) voldaan worden, derhalve aan:

$$\frac{\Sigma f_u (x - f) + r r_u}{\Sigma c_u (x - f) - \Sigma c f_u} = \frac{\Sigma f_v (x - f) + r r_v}{\Sigma c_v (x - f) - \Sigma c f_v} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Voor een bepaalde waarde van u en v zal gelijktijdig aan de vergelijkingen (5), (6) en (9) voldaan moeten worden. Nu stelt de laatste vergelijking een hyperboloïde voor. De doorsnee met het platte vlak (6) levert een kegelsnee, die den cirkel, waarvan we uitgingen, in 4 punten snijdt. Wij komen dus tot de volgende stelling:

Op elken cirkel van een cirkelcongruentie liggen vier punten, focaalpunten geheeten, die de eigenschap bezitten, dat het daar ter plaatse aangebrachte raakvlak hetzelfde is voor alle cyclische oppervlakken, die door dien cirkel te brengen zijn.

Evenals in het vorig hoofdstuk kiezen we, in plaats van het stelsel vergelijkingen (5) en (6), liever de parametervoorstelling van Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} x = f + r (a_1 \cos t + b_1 \sin t) \\ y = g + r (a_2 \cos t + b_2 \sin t) \\ z = h + r (a_3 \cos t + b_3 \sin t) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

waarin thans (f, g, h), r, (a_1, a_2, a_3). (b_1, b_2, b_3) functies van de parameters u en v zijn. Op dezelfde wijze, als we toen tot de vormen S_1 en S_2 gekomen zijn, voert ons thans het stelsel vergelijkingen (8) tot de volgende vormen:

$$\left.\begin{array}{ll} S_1^u \equiv \Sigma\, a f_u \cos t + \Sigma\, b f_u \sin t + r_u, & S_1^v \equiv \Sigma\, a f_v \cos t + \Sigma\, b f_v \sin t + r_v \\ S_2^u \equiv r\,(\Sigma\, a_u c \cos t + \Sigma\, b_u c \sin t) + \Sigma\, c f_u, & S_2^v \equiv r\,(\Sigma\, a_v c \cos t + \Sigma\, b_v c \sin t) + \Sigma\, c f_v \end{array}\right\} \quad (11)$$

De vergelijking (3) van het raakvlak gaat nu over in:

$$\Sigma\,(X - x)\,[(a_1 \cos t + b_1 \sin t)\,(S_2^u\, d u + S_2^v\, d v)] + \Sigma\,(X - x)\,[c_1\,(S_1^u\, d u + S_1^v\, d v)] = 0 \quad (12)$$

terwijl de voorwaarde (4) luidt:

$$\frac{S_1^u}{S_2^u} = \frac{S_1^v}{S_2^v} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

of:

$$\frac{\Sigma\, a f_u \cos t + \Sigma\, b f_u \sin t + r_u}{r\,(\Sigma\, a_u\, c \cos t + \Sigma\, b_u\, c \sin t) + \Sigma\, c f_u} = \frac{\Sigma\, a f_v \cos t + \Sigma\, b f_v \sin t + r_v}{r\,(\Sigma\, a_v\, c \cos t + \Sigma\, b_v\, c \sin t) + \Sigma\, c f_v} . \quad (14)$$

Substitueeren we in deze vergelijking:

$$\sin t = \frac{2\,w}{1 + w^2}, \quad \cos t = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \quad tg\,\frac{t}{2} = w, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

dan gaat zij over in:

$$\frac{(r_u - \Sigma\, a f_u)\, w^2 + 2\, r\, \Sigma\, b f_u\, w + (r_u + \Sigma\, a f_u)}{(\Sigma\, c f_u - r\, \Sigma\, a_u c)\, w^2 + 2\, r\, \Sigma\, b_u c\, w + (\Sigma\, c f_u + r\, \Sigma\, a_u c)} = \frac{(r_v - \Sigma\, a f_v)\, w^2 + 2\, r\, \Sigma\, b f_v\, w + (r_v + \Sigma\, a f_v)}{(\Sigma\, c f_v - r\, \Sigma\, a_v c)\, w^2 + 2\, r\, \Sigma\, b_v c\, w + (\Sigma\, c f_v + r\, \Sigma\, a_v c)}$$

een vierdemachtsvergelijking in w, die ons wederom de vier focaalpunten levert. Het raakvlak in een focaalpunt heet *focaalvlak*. Om de vergelijking der vier focaalvlakken te vinden, die bij een bepaalden cirkel behooren, moet men de wortels der vierdemachtsvergelijking in vergelijking (15) substitueeren, vindt op deze wijze vier stellen waarden voor $\sin t$ en $\cos t$, en voegt deze in de vergelijking (12) van het raakvlak.

De tweevoudige oneindigheid der cirkels voert ook tot een tweevoudig oneindig aantal focaalpunten. De meetkundige plaats dezer punten is gemakkelijk neer te schrijven. Evenals bij de bepaling der focaalvlakken, lost men de vierdemachtsvergelijking in w op, en substitueert het daarmee correspondeerend stelsel waarden voor $\sin t$ en $\cos t$ in het stelsel vergelijkingen (10). In de buurt van den cirkel, waarvan we uitgingen, zal deze meetkundige plaats uit vier verschillende bladen bestaan. Zij heet het *focaaloppervlak* der congruentie.

Wij hebben gezien, dat door een bepaalden cirkel ∞^1 cyclische oppervlakken gebracht kunnen worden. Een tweede vraag, die ons zal bezighouden, is de volgende: zijn er onder deze cyclische oppervlakken ook oppervlakken van de 2e soort? Het antwoord hierop wordt ons gegeven door hoofdstuk I § 5. Op analoge wijze redeneerend, als daar ter plaatse, vinden wij, dat aan de volgende twee betrekkingen voldaan moet worden:

$$\left.\begin{array}{l} S_1^u\, d u + S_1^v\, d v = 0 \\ S_2^u\, d u + S_2^v\, d v = 0 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

$$(\Sigma\, a f_u \cos t + \Sigma\, b f_u \sin t + r_u)\, d u + (\Sigma\, a f_v \cos t + \Sigma\, b f_v \sin t + r_v)\, d v = 0$$

$$[r\,(\Sigma\, a_u\, c \cos t + \Sigma\, b_u c \sin t) + \Sigma\, c f_u]\, d u + [r\,(\Sigma\, a_v\, c \cos t + \Sigma\, b_v\, c \sin t) + \Sigma\, c f_v]\, d v = 0,$$

welke vergelijkingen in de volgende gedaante gebracht kunnen worden:

$$(\Sigma\, a f_u\, d u + \Sigma\, a f_v\, d v) \cos t + (\Sigma\, b f_u\, d u + \Sigma\, b f_v\, d v) \sin t + (r_u\, d u + r_v\, d v) = 0.$$

$$r\,(\Sigma\, a_u\, c\, d u + \Sigma\, a_v\, c\, d v) \cos t + r\,(\Sigma\, b_u c\, d u + \Sigma\, b_v\, c\, d v) \sin t + (\Sigma\, c f_u\, d u + \Sigma\, c f_v\, dv) = 0.$$

Elimineert men uit deze twee vergelijkingen de grootheden $\sin t$ en $\cos t$, op dezelfde wijze, als we dit in genoemde paragraaf gedaan hebben, dan vindt men de volgende vierdemachtsvergelijking in $\frac{d\,u}{d\,v}$:

$$\begin{vmatrix} \Sigma a f_u du + \Sigma a f_v dv & \Sigma b f_u du + \Sigma b f_v dv \\ r(\Sigma a_u c du + \Sigma a_v c dv) & r(\Sigma c b_u du + \Sigma c b_v dv) \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma a f_u du + \Sigma a f_v dv & r_u\,du + r_v\,dv \\ r(\Sigma a_u c du + \Sigma a_v c dv) & \Sigma c f_u\,du + \Sigma c f_v\,dv \end{vmatrix}^2 +$$

$$+ \begin{vmatrix} \Sigma b f_u\,du + \Sigma b f_v\,dv & r_u\,du + r_v\,dv \\ r(\Sigma c b_u\,du + \Sigma c b_v\,dv) & \Sigma c f_u\,du + \Sigma c f_v\,dv \end{vmatrix}^2 \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Lost men deze vergelijking naar $\frac{d\,u}{d\,v}$ op, dan vindt men vier lineaire differentiaalvergelijkingen, welke ons, na integratie, vier vergelijkingen leveren, van den vorm:

$$u = \varphi_k(v) + const. \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Substitueert men deze betrekkingen, die een functionaal verband tusschen de parameters leggen, in de vergelijkingen der congruentie (10), dan zullen de aldus verkregen cyclische oppervlakken noodzakelijk oppervlakken van de 2e soort zijn. Derhalve geldt de volgende

Stelling: Onder de ∞^1 cyclische oppervlakken, die door een bepaalden cirkel van een cirkelcongruentie gebracht kunnen worden, zijn vier oppervlakken van de 2e soort. Elke cirkelcongruentie is dus op vier wijzen volgens oppervlakken van de 2e soort te rangschikken.

Substitueert men het door (18) gegeven functionaal verband in de vergelijking van het centrale oppervlak:

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v),$$

dan verkrijgt men $4 \times \infty^1$ ruimtekrommen, die als centrale krommen optreden van oppervlakken van de 2e soort. Men kan dus ook zeggen: in elk punt van het centrale oppervlak zijn vier richtingen aan te geven, die als raaklijnen aan centrale krommen van oppervlakken van de 2e soort optreden. Nu hebben wij onder oppervlakken van de 2e soort zoodanige cyclische oppervlakken verstaan, waarvoor de cirkels alle aan een bepaalde ruimtekromme raken. Het ligt voor de hand naar de raakpunten van elken cirkel met die ruimtekromme te vragen. Daartoe moeten we uit het stelsel vergelijkingen (16) de grootheden $d\,u$ en $d\,v$ elimineeren: wij vinden dan:

$$\frac{S_1^u}{S_2^u} = \frac{S_1^v}{S_2^v},$$

dezelfde vergelijking als vergelijking (13), waaruit blijkt, dat de focaalpunten tevens als raakpunten optreden met de keerkrommen van de oppervlakken van de 2e soort, waarin iedere cirkelcongruentie gerangschikt kan worden.

§ 2. *Draaiing der richtingen, die het vlak van den cirkel bepalen.* Alvorens over te gaan tot een beschouwing van de vierdemachtsvergelijking der focaalpunten, en van die, welke ons in de congruentie de oppervlakken van de 2e soort levert, passen we voor elken cirkel de assendraaiing toe, die we in hoofdstuk I § 3 besproken hebben, kiezen dus de richting (b_1, b_2, b_3) zoodanig, dat ze loodrecht op de poollijn van het punt T staat. Daartoe denken we ons eerst een functionaal verband $u = \omega(s)$, $v = \chi(s)$ tusschen de parameters u en v. We krijgen dan met een cyclisch oppervlak te doen, waarvan de vergelijkingen in twee parameters s en t uitgedrukt zijn, en kunnen nu de redeneeringen van genoemde paragraaf herhalen, waarbij we elk differentiaalquotiënt van den vorm q_s door $(q_u\, d u + q_v\, d v)$ te vervangen hebben. De tangens van den hoek, waarover de richtingen, die het vlak van den cirkel bepalen, gedraaid moeten worden, is derhalve gegeven door de vergelijking:

$$tg\,\psi = \frac{(r r_u du + r r_v d v)(\Sigma b_u c\, du + \Sigma b_v c\, d v) - (\Sigma c f_u du + \Sigma c f_v d v)(\Sigma b f_u du + \Sigma b f_v d v)}{(r r_u du + r r_v d v)(\Sigma a_u c\, du + \Sigma a_v c\, d v) - (\Sigma c f_u du + \Sigma c f_v d v)(\Sigma a f_u du + \Sigma a f_v d v)}$$

$$= \frac{A\, du^2 + B\, du\, dv + C\, dv^2}{A' du^2 + B' du\, dv + C' dv^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

waarin:

$$A = \begin{vmatrix} r r_u & \Sigma b f_u \\ \Sigma c f_u & \Sigma c b_u \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} r r_v & \Sigma b f_v \\ \Sigma c f_v & \Sigma c b_v \end{vmatrix}.$$

Uit vergelijking (19) blijkt, dat de assendraaiing overbodig is, wanneer men den teller of den noemer van de breuk gelijk aan nul kiest, dus wanneer bijv.:

$$A\, du^2 + B\, du\, dv + C\, dv^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Deze vergelijking levert in het algemeen twee verschillende waarden voor $\frac{d u}{d v}$:

$$\frac{d u}{d v} = \omega_1 (u, v), \quad \frac{d u}{d v} = \omega_2 (u, v).$$

Integreert men deze differentiaalvergelijkingen:

$$u = \int \omega_1 (u, v)\, d v + c_1, \quad u = \int \omega_2 (u, v)\, d v + c_2,$$

dan vindt men, na substitutie in de vergelijkingen van het centrale oppervlak, op dit oppervlak twee stelsels krommen, waarvan de punten, wanneer men zich langs een dusdanige kromme voortbeweegt, als centra van cirkels optreden, waarvoor de richting (b_1, b_2, b_3) loodrecht op de poollijn van het punt T staat. Deze stelsels krommen kiezen we als parameterkrommen. Voor de differentiaalvergelijking (20) eischt dit: $A = 0$ en $C = 0$, of:

$$\frac{\Sigma c f_u}{r r_u} = \frac{\Sigma c b_u}{\Sigma b f_u} = \lambda, \quad \frac{\Sigma c f_v}{r r_v} = \frac{\Sigma c b_v}{\Sigma b f_v} = \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Met behulp van deze betrekkingen gaan de vormen S_2^u en S_2^v over in:

$$S_2^u = r\, [\Sigma a_u\, c \cos t + \lambda\, \Sigma b f_u \sin t + \lambda\, r_u].$$
$$S_2^v = r\, [\Sigma a_v\, c \cos t + \mu\, \Sigma b f_v \sin t + \mu\, r_v].$$

De vergelijking, die de focaalpunten levert, luidt thans:

$$\frac{\Sigma a f_u \cos t + \Sigma b f_u \sin t + r_u}{\Sigma a f_v \cos t + \Sigma b f_v \sin t + r_v} = \frac{\Sigma a_u c \cos t + \lambda\, (\Sigma b f_u \sin t + r_u)}{\Sigma a_v c \cos t + \mu\, (\Sigma b f_v \sin t + r_v)} \quad . \quad . \quad (22)$$

terwijl de vergelijking, die ons de oppervlakken van de 2e soort levert, verkregen wordt door $\cos t$ en $\sin t$ te elimineeren uit het stelsel:

$$(\Sigma a f_u\, d u + \Sigma a f_v\, d v) \cos t + (\Sigma b f_u\, d u + \Sigma b f_v\, d v) \sin t + r_u\, d u + r_v\, d v = 0.$$
$$(\Sigma a_u c\, d u + \Sigma a_v c\, d v) \cos t + (\lambda\, \Sigma b f_u\, d u + \mu\, \Sigma b f_v\, d v) \sin t + (\lambda\, r_u\, d u + \mu\, r_v\, d v) = 0.$$

welke eliminatie ons de volgende vergelijking levert:

$$\begin{vmatrix} \Sigma a f_u d u + \Sigma a f_v d v & r_u d u + r_v d v \\ \Sigma a_u c\, d u + \Sigma a_v c\, d v & \lambda\, r_u d u + \mu\, r_v d v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \Sigma b f_u d u + \Sigma b f_v d v & r_u d u + r_v d v \\ \lambda\, \Sigma b f_u d u + \mu\, \Sigma b f_v d v & \lambda\, r_u d u + \mu\, r_v d v \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma a f_u d u + \Sigma a f_v d v & \Sigma b f_u d u + \Sigma b f_v d v \\ \Sigma a_u c\, d u + \Sigma a_v c\, d v & \lambda\, \Sigma b f_u d u + \mu\, \Sigma b f_v d v \end{vmatrix}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

We beschouwen in het bijzonder het geval:

$$\lambda = \mu = \varphi.$$

Bij deze onderstelling gaat vergelijking (23) over in:

$$[(\varphi \Sigma a f_u - \Sigma a_u c) d u + (\varphi \Sigma a f_v - \Sigma a_v c) d v]^2 [(\Sigma b f_u d u + \Sigma b f_v d v)^2 - \\ - (r_u d u + r_v d v)^2] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

waaruit blijkt, dat twee wortels van de vierdemachtsvergelijking samenvallen. Deze dubbel te tellen wortel voert ons tot de differentiaalvergelijking:

$$(\varphi \Sigma a f_u - \Sigma a_u c) d u + (\varphi \Sigma a f_v - \Sigma a_v c) d v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Zij legt, na integratie, een functionaal verband tusschen de parameters u en v, waarvan wij de beteekenis willen nagaan. Daartoe brengen wij haar in de volgende gedaante:

$$\frac{\Sigma a_u c d u + \Sigma a_v c d v}{\Sigma a f_u d u + \Sigma a f_v d v} = \varphi.$$

Uit vergelijking (21) kan men afleiden:

$$\frac{\Sigma c b_u d u + \Sigma c b_v d v}{\Sigma b f_u d u + \Sigma b f_v d v} = \frac{\Sigma c f_u d u + \Sigma c f_v d v}{r r_u d u + r r_v d v} = \varphi,$$

waarbij wij voor u die functie van v kiezen, welke ons door de differentiaalvergelijking (25) gegeven wordt. Derhalve geldt de evenredigheid:

$$\frac{\Sigma a_u c d u + \Sigma a_v c d v}{\Sigma a f_u d u + \Sigma a f_v d v} = \frac{\Sigma c b_u d u + \Sigma c b_v d v}{\Sigma b f_u d u + \Sigma b f_v d v} = \frac{\Sigma c f_u d u + \Sigma c f_v d v}{r r_u d u + r r_v d v} = \varphi$$

of:

$$\frac{\Sigma a' c}{\Sigma a f'} = \frac{\Sigma b' c}{\Sigma b f'} = \frac{\Sigma c f'}{r r'} = \varphi.$$

Dit is juist de conditie, dat de karakteristieken S_1 en S_2 samenvallen; waaruit blijkt, dat er op het centrale oppervlak één stelsel krommen te kiezen is, gegeven door de differentiaalvergelijking (25), zoodanig, dat, wanneer men deze als centrale krommen van cyclische oppervlakken kiest, de congruentie in ∞^1 cyclische oppervlakken gerangschikt wordt, die als de omhullenden van ∞^1 bollen beschouwd kunnen worden. De vergelijkingen dezer omhullenden zelve vindt men, door het functionaal verband, dat de integraal van vergelijking (25) ons levert, in de vergelijkingen (10) der congruentie te substitueeren. Behalve den dubbel te tellen wortel, levert vergelijking (24) twee enkelvoudige wortels, die ons tot de volgende differentiaalvergelijkingen leiden:

$$(\Sigma b f_u + r_u) d u + (\Sigma b f_v + r_v) d v = 0$$

en

$$(\Sigma b f_u - r_u) d u + (\Sigma b f_v - r_v) d v = 0.$$

De integralen dezer beide vergelijkingen leveren ons, na substitutie in de vergelijkingen der congruentie, de oppervlakken van de 2e soort, waarin de congruentie gerangschikt kan worden.

Resumeerend, kunnen we zeggen, *dat het geval $\lambda = \mu$ ons leert, dat elke cirkelcongruentie bij deze onderstelling op één wijze volgens omhullenden van ∞^1 bollen, doch op twee wijzen volgens cyclische oppervlakken met een keerkromme gerangschikt kan worden.*

Wat de vergelijking der focaalpunten betreft, deze luidt bij de onderstelling $\lambda = \mu = \varphi$:

$$\frac{\Sigma a f_u \cos t + \Sigma b f_u \sin t + r_u}{\Sigma a f_v \cos t + \Sigma b f_v \sin t + r_v} = \frac{\Sigma a_u c \cos t + \varphi (\Sigma b f_u \sin t + r_u)}{\Sigma a_v c \cos t + \varphi (\Sigma b f_v \sin t + r_v)}$$

of wel:

$$\frac{\Sigma\, a\, f_u \cos t + \Sigma\, b\, f_u \sin t + r_u}{\Sigma\, a\, f_v \cos t + \Sigma\, b\, f_v \sin t + r_v} = \frac{(\varphi\, \Sigma\, a\, f_u - \Sigma\, a_u\, c) \cos t}{(\varphi\, \Sigma\, a\, f_v - \Sigma\, a_v\, c) \cos t}$$

Zij bevat als factor: $\cos t$. Met den wortel $\cos t = 0$, en dus $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$, correspondeeren twee der focaalpunten. Bij de keuze, die we omtrent de richting (b_1, b_2, b_3) gedaan hebben, zal juist deze richting de gevonden focaalpunten op den cirkel insnijden (zie fig. II). De beide andere focaalpunten worden gevonden uit de vergelijking:

$$\frac{\Sigma\, a\, f_u \cos t + \Sigma\, b\, f_u \sin t + r_u}{\Sigma\, a\, f_v \cos t + \Sigma\, b\, f_v \sin t + r_v} = \frac{\varphi\, \Sigma\, a\, f_u - \Sigma\, a_u\, c}{\varphi\, \Sigma\, a\, f_v - \Sigma\, a_v\, c},$$

welke betrekking lineair is in $\sin t$ en $\cos t$, en dus quadratisch in w.

§ 3. *Nader verband met het centrale oppervlak.* De boven verkregen resultaten winnen aan overzichtelijkheid, wanneer we een nauwer verband leggen tusschen de congruentie en het centrale oppervlak, door n. l. de coëfficiënten der vormen S_1 en S_2 in de coëfficiënten der twee grondvormen van Gauss uit te drukken.

Onderstellen we, dat een willekeurig oppervlak voorgesteld wordt door:

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v)$$

dan zullen we een stel formules memoreeren, dat een verband legt tusschen de partieel afgeleiden van de tweede orde $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, en die van de eerste orde $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, en $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ [1]). Daartoe voeren we de volgende notaties in [2]):

$$\left.\begin{array}{lll} X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} f_u, & Y_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} g_u, & Z_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} h_u \\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} f_v, & Y_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} g_v, & Z_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} h_v \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

terwijl:

$$X_3 = c_1, \quad Y_3 = c_2, \quad Z_3 = c_3$$

de richtingscosinus der normaal zijn. Dan gelden de volgende condities:

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma\, X_1^2 = 1 & \Sigma\, X_2^2 = 1 & \Sigma\, X_3^2 = 1 \\ \Sigma\, X_1 X_3 = 0 & \Sigma\, X_2 X_3 = 0 & \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (27)$$

We zullen nu betrekkingen trachten te vinden van den vorm:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial u} = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial u} = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3 \\ \frac{\partial Z_1}{\partial u} = \alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3 \end{array}\right\} \ldots (28) \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial v} = \varepsilon X_1 + \zeta X_2 + \eta X_3 \\ \frac{\partial Y_1}{\partial v} = \varepsilon Y_1 + \zeta Y_2 + \eta Y_3 \\ \frac{\partial Z_1}{\partial v} = \varepsilon Z_1 + \zeta Z_2 + \eta Z_3 \end{array}\right\} \ldots (29)$$

Hierin moeten de coëfficiënten α, β, γ en ε, ζ, η berekend worden. Daartoe

---

[1]) Deze formules komen te pas bij het bewijs, dat de vorm van een oppervlak volkomen bepaald is, wanneer de zes invarianten E, F, G en L, M, N gegeven zijn. Cf. Vessiot l. c. pag. 62 en vlg.

[2]) Bianchi l. c. pag. 93.

beschouwen we eerst het eerste drietal vergelijkingen, vermenigvuldigen die respectievelijk met (X_1, Y_1, Z_1), daarna met (X_2, Y_2, Z_2), ten slotte met (X_3, Y_3, Z_3) en tellen vervolgens op:

$$\Sigma X_1 \frac{\partial X_1}{\partial u} = 0 = \alpha + \beta \Sigma X_1 X_2 = \alpha + \beta \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \text{. . . . . (30)}$$

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \alpha \Sigma X_1 X_2 + \beta \quad = \alpha \frac{F}{\sqrt{EG}} + \beta \quad \text{. . . . . (31)}$$

$$\Sigma X_3 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \gamma.$$

Ons rest de berekening der grootheden $\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u}$ en $\Sigma X_3 \frac{\partial X_1}{\partial u}$. Nu is $X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} f_u$, waaruit volgt:

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{f_{uu}\sqrt{E} - f_u \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u}}{E} \quad \text{. . . . . (32)}$$

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \Sigma f_v f_{uu} - \frac{F}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u}}{E} \quad \text{. . . . . (33)}$$

Nu is $\Sigma f_u f_v = F$, en dus:

$$\Sigma f_{uu} f_v + \Sigma f_u f_{uv} = \frac{\partial F}{\partial u}$$

of:

$$\Sigma f_{uu} f_v = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v}.$$

Deze uitdrukking substitueeren we in vergelijking (33), waardoor zij overgaat in:

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial u} \right).$$

Voor de vergelijkingen (30) en (31) vinden wij nu:

$$\alpha + \beta \frac{F}{\sqrt{EG}} = 0.$$

$$\alpha \frac{F}{\sqrt{EG}} + \beta = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial u} \right).$$

Uit deze twee betrekkingen zijn de grootheden α en β te berekenen. Men vindt:

$$\alpha = \frac{F}{H^2} \left(- \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \quad \text{. . . . . . . (34)}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{EG}}{H^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \quad \text{. . . . . . . (35)}$$

Om de grootheid γ te berekenen, vermenigvuldigen we de vergelijking (32) met X_3, en sommeeren. Men vindt dan terstond:

$$\gamma = \frac{L}{\sqrt{E}} \quad \text{. . . . . (36)}$$

Op dezelfde wijze berekenen we de coëfficiënten ε, ζ en η uit het stelsel vergelijkingen (29):

$$\Sigma X_1 \frac{\partial X_1}{\partial v} = 0 = \varepsilon + \zeta \, \Sigma X_1 X_2 = \varepsilon + \zeta \frac{F}{\sqrt{E G}}.$$

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \varepsilon \, \Sigma X_1 X_2 + \zeta = \varepsilon \frac{F}{\sqrt{E G}} + \zeta.$$

$$\Sigma X_3 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \eta.$$

De te berekenen grootheden zijn thans: $\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v}$ en $\Sigma X_3 \frac{\partial X_1}{\partial v}$:

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{f_u}{\sqrt{E}} = \frac{\sqrt{E} f_{uv} - f_u \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{E} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \Sigma f_v f_{uv} - \frac{F}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{E} = \frac{1}{\sqrt{E G}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \right).$$

De grootheden ε en ζ moeten nu opgelost worden uit het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\varepsilon + \zeta \frac{F}{\sqrt{E G}} = 0.$$

$$\zeta + \varepsilon \frac{F}{\sqrt{E G}} = \frac{1}{\sqrt{E G}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \right).$$

Men vindt:

$$\varepsilon = \frac{F}{H^2} \left(- \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \right). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{E G}}{H^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{F}{E} \frac{\partial E}{\partial v} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

De grootheid η wordt wederom direct gevonden, door vergelijking (37) met X_3 te vermenigvuldigen, en te sommeeren:

$$\eta = \frac{M}{\sqrt{E}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

Op gelijke wijze moet nu met de grootheden X_2, Y_2 en Z_2 gehandeld worden, ten einde haar afgeleiden naar u en v in de zes invarianten van Gauss uit te drukken. Wij stellen wederom:

$$\frac{\partial X_2}{\partial u} = \varrho X_1 + \sigma X_2 + \tau X_3. \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = \varphi X_1 + \chi X_2 + \psi X_3.$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial u} = \varrho Y_1 + \sigma Y_2 + \tau Y_3. \qquad \frac{\partial Y_2}{\partial v} = \varphi Y_1 + \chi Y_2 + \psi Y_3.$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial u} = \varrho Z_1 + \sigma Z_2 + \tau Z_3. \qquad \frac{\partial Z_2}{\partial v} = \varphi Z_1 + \chi Z_2 + \psi Z_3.$$

Berekening der grootheden ϱ, σ en τ:

$$\Sigma X_1 \frac{\partial X_2}{\partial u} = \varrho + \sigma \Sigma X_1 X_2.$$

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_2}{\partial u} = 0 = \varrho \Sigma X_1 X_2 + \sigma.$$

$$\Sigma X_3 \frac{\partial X_2}{\partial u} = \tau.$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{f_v}{\sqrt{G}} = \frac{\sqrt{G} f_{uv} - f_v \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{G}.$$

$$\Sigma X_1 \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \Sigma f_u f_{uv} - \frac{F}{G\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{F}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \right).$$

De grootheden ϱ en σ worden gevonden uit het stelsel vergelijkingen:

$$\varrho + \sigma \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{F}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \right).$$

$$\varrho \frac{F}{\sqrt{EG}} + \sigma = 0.$$

Waaruit volgt:

$$\varrho = \frac{\sqrt{EG}}{H^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{F}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

$$\sigma = \frac{F}{H^2} \left(- \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{F}{G} \frac{\partial G}{\partial u} \right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (42)$$

terwijl men voor de grootheid τ vindt:

$$\tau = \frac{M}{\sqrt{G}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

Bepaling der grootheden φ, χ en ψ:

$$\Sigma X_1 \frac{\partial X_2}{\partial v} = \varphi + \chi \Sigma X_1 X_2.$$

$$\Sigma X_2 \frac{\partial X_2}{\partial v} = 0 = \varphi \Sigma X_1 X_2 + \chi.$$

$$\Sigma X_3 \frac{\partial X_2}{\partial v} = \psi.$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{f_v}{\sqrt{G}} = \frac{f_{vv} \sqrt{G} - f_v \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v}}{G} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{f_v}{G\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial v}.$$

$$\Sigma X_1 \frac{\partial X_2}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \Sigma f_u f_{vv} - \frac{F}{G\sqrt{EG}} \frac{\partial G}{\partial v}.$$

$\Sigma f_u f_v = F$ zijnde, vindt men na differentiatie naar v:

$$\Sigma f_u f_{vv} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u},$$

en dus:

$$\Sigma X_1 \frac{\partial X_2}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{F}{G} \frac{\partial G}{\partial v} \right).$$

Dit voert ons tot de vergelijkingen:

$$\varphi + \chi \frac{F}{\sqrt{E\,G}} = \frac{1}{\sqrt{E\,G}}\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial v}\right).$$

$$\varphi \frac{F}{\sqrt{E\,G}} + \chi = 0.$$

Op gelijke wijze als te voren vindt men:

$$\varphi = \frac{\sqrt{E\,G}}{H^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial v}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

$$\chi = \frac{F}{H^2}\left(-\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial v}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$$\psi = \frac{N}{\sqrt{G}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Deze vergelijkingen moeten nu nog gecompleteerd worden, door uitdrukkingen te zoeken voor de afgeleiden naar u en v van de richtingscosinus der normaal. Wij stellen weer:

$$\frac{\partial X_3}{\partial u} = p\,X_1 + q\,X_2 + r\,X_3, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = p'\,X_1 + q'\,X_2 + r'\,X_3,$$

terwijl voor $\frac{\partial Y_3}{\partial u}$, $\frac{\partial Z_3}{\partial u}$ en $\frac{\partial Y_3}{\partial v}$, $\frac{\partial Z_3}{\partial v}$ analoge uitdrukkingen gelden. Berekenen wij de grootheden p, q en r:

$$\Sigma\,X_1 \frac{\partial X_3}{\partial u} = p + q\,\Sigma\,X_1\,X_2.$$

$$\Sigma\,X_2 \frac{\partial X_3}{\partial u} = p\,\Sigma\,X_1\,X_2 + q.$$

$$\Sigma\,X_3 \frac{\partial X_3}{\partial u} = 0 = r.$$

$$\Sigma\,X_1 \frac{\partial X_3}{\partial u} = \Sigma \frac{f_u}{\sqrt{E}}\frac{\partial c}{\partial u} = -\frac{L}{\sqrt{E}}.$$

$$\Sigma\,X_2 \frac{\partial X_3}{\partial u} = \Sigma \frac{f_v}{\sqrt{G}}\frac{\partial c}{\partial u} = -\frac{M}{\sqrt{G}}.$$

Derhalve moeten de grootheden p en q opgelost worden uit het stelsel vergelijkingen:

$$-\frac{L}{\sqrt{E}} = p + q\frac{F}{\sqrt{E\,G}} \text{ en } -\frac{M}{\sqrt{G}} = p\frac{F}{\sqrt{E\,G}} + q,$$

waaruit volgt:

$$p = \frac{F\,M - G\,L}{H^2}\sqrt{E}, \quad q = \frac{F\,L - E\,M}{H^2}\sqrt{G},$$

zoodat:

$$\frac{\partial X_3}{\partial u} = \sqrt{E}\,\frac{F\,M - G\,L}{H^2}\,X_1 + \sqrt{G}\,\frac{F\,L - E\,M}{H^2}\,X_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Op volkomen gelijke wijze vindt men:

$$\frac{\partial X_3}{\partial v} = \sqrt{E}\,\frac{F\,N - G\,M}{H^2}\,X_1 + \sqrt{G}\,\frac{F\,M - E\,N}{H^2}\,X_2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Onze vergelijkingen worden belangrijk eenvoudiger, voor het geval men met een stelsel *orthogonale* parameterkrommen te doen heeft. In de zoo juist berekende coëfficiënten moet nu $F = 0$ gesteld worden. De eindvergelijkingen luiden dan:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial u} &= -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \frac{L}{\sqrt{E}} X_3 \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2 + \frac{M}{\sqrt{E}} X_3\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_2}{\partial u} &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1 + \frac{M}{\sqrt{G}} X_3 \\ \frac{\partial X_2}{\partial v} &= -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \frac{N}{\sqrt{G}} X_3\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_3}{\partial u} &= -\frac{L}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{M}{\sqrt{G}} X_2 \\ \frac{\partial X_3}{\partial v} &= -\frac{M}{\sqrt{E}} X_1 - \frac{N}{\sqrt{G}} X_2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Nog eenvoudiger worden de vergelijkingen, wanneer men de *kromtelijnen* tot *parameterkrommen* van het oppervlak kiest. In dat geval is $M = 0$ te stellen, en geldt bovendien:

$$L = -\frac{E}{r_2}, \quad N = -\frac{G}{r_1}\ ^{1)}.$$

§ 4. *Toepassing van het voorgaande op eenige bijzondere congruenties.* Wij beschouwen de volgende bijzondere gevallen:

A. de cirkels liggen in de raakvlakken van het centrale oppervlak.

B. de cirkels liggen in normaalvlakken van het centrale oppervlak.

A.

De onderstelling, dat de cirkels in de raakvlakken van het centrale oppervlak gelegen zijn, derhalve $\Sigma c f_u = 0$, $\Sigma c f_v = 0$, brengt volgens vergelijking (28) de volgende onderverdeeling met zich mede:

1°. $r_u = r_v = 0$ d. w. z. de cirkels bezitten een constanten straal.

2°. $\Sigma c b_u = 0$, $\Sigma c b_v = 0$ d. w. z. dat het centrale oppervlak een ontwikkelbaar oppervlak is, zooals we weldra zullen zien.

Sub 1°. We vragen in de eerste plaats naar de differentiaalvergelijking, die op het centrale oppervlak de middelpuntskrommen van de oppervlakken der 2e soort bepaalt. Die oppervlakken zelf zijn kanaaloppervlakken; immers de cirkels bezitten een constanten straal, en raken alle aan eenzelfde ruimtekromme. De richting (a_1, a_2, a_3), die thans in het raakvlak gelegen is, ontbinden we in de richtingen (X_1, Y_1, Z_1) en (X_2, Y_2, Z_2) (zie fig. X). Den hoek, dien zij met de richting (X_1, Y_1, Z_1) maakt, stellen we ϑ; den hoek, dien zij met de richting (X_2, Y_2, Z_2) maakt, ω. De ontbondene in de richting (X_1, Y_1, Z_1) een oogenblik x stellende, en die in de

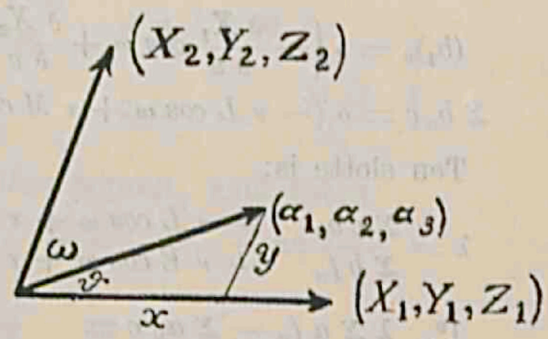

Fig. X.

[1]) Voor dit bijzonder geval zijn de formules neergeschreven in Bianchi, l. c. pag. 93. Tevens wordt daar ter plaatse een andere afleiding gegeven voor het algemeene geval.

richting (X_2, Y_2, Z_2) y, heeft men de volgende evenredigheid:

$$\frac{x}{\sin\omega} = \frac{y}{\sin\vartheta} = \frac{1}{\sin(\vartheta+\omega)} = \varrho.$$

Derhalve:

$$x = \varrho \sin\omega, \quad y = \varrho \sin\vartheta,$$

en

$$a_1 = \varrho\,(X_1 \sin\omega + X_2 \sin\vartheta), \quad a_2 = \varrho\,(Y_1 \sin\omega + Y_2 \sin\vartheta), \quad a_3 = \varrho\,(Z_1 \sin\omega + Z_2 \sin\vartheta).$$

Voor de richting (b_1, b_2, b_3), die loodrecht op de richting (a_1, a_2, a_3) staat, geldt:

$$b_1 = \varrho\,(-X_1 \cos\omega + X_2 \cos\vartheta), \quad b_2 = \varrho\,(-Y_1 \cos\omega + Y_2 \cos\vartheta), \quad b_3 = \varrho\,(-Z_1 \cos\omega + Z_2 \cos\vartheta).$$

De richting (c_1, c_2, c_3) valt samen met de normaal, dus $c_1 = X_3$, $c_2 = Y_3$, $c_3 = Z_3$.

De vierdemachtsvergelijking (23) in $\frac{du}{dv}$, die de middelpuntskrommen van de oppervlakken van de 2e soort levert, luidt bij de gemaakte onderstellingen:

$$\begin{vmatrix} \Sigma\, a f_u\, du + \Sigma\, a f_v\, dv & \Sigma\, b f_u\, du + \Sigma\, b f_v\, dv \\ \Sigma\, a_u c\, du + \Sigma\, a_v c\, dv & \lambda\, \Sigma\, b f_u\, du + \mu\, \Sigma\, b f_v\, dv \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Bedoelde krommen zijn derhalve twee aan twee dubbel te tellen. De vergelijking kan in de volgende gedaante gebracht worden:

$$\begin{aligned} &\Sigma\, b f_u [(\lambda\, \Sigma\, a f_u - \Sigma\, a_u c)\, du + (\lambda\, \Sigma\, a f_v - \Sigma\, a_v c)\, dv]\, du + \\ &\Sigma\, b f_v [(\mu\, \Sigma\, a f_u - \Sigma\, a_u c)\, du + (\mu\, \Sigma\, a f_v - \Sigma\, a_v c)\, dv]\, dv = 0 \quad . \;\; . \;\; . \quad (52) \end{aligned}$$

Wij zullen nu de hierin optredende coëfficiënten berekenen. Het stelsel (26) in het oog houdend, en ter bekorting $\frac{1}{\sqrt{E}} = \nu$, $\frac{1}{\sqrt{G}} = \tau$ stellende, vindt men:

$$\Sigma\, a f_u = \varrho\,(\nu E \sin\omega + \tau F \sin\vartheta) \qquad \Sigma\, a f_v = \varrho\,(\nu F \sin\omega + \tau G \sin\vartheta)$$

$$\Sigma\, b f_u = \varrho\,(-\nu E \cos\omega + \tau F \cos\vartheta) \qquad \Sigma\, b f_v = \varrho\,(-\nu F \cos\omega + \tau G \cos\vartheta)$$

$$(a_1)_u = \varrho \left(\frac{\partial X_1}{\partial u} \sin\omega + \frac{\partial X_2}{\partial u} \sin\vartheta\right) + \ldots$$

termen, die na vermenigvuldiging met (c_1, c_2, c_3) en daarop gevolgde sommatie, wegvallen:

$$(a_1)_v = \varrho \left(\frac{\partial X_1}{\partial v} \sin\omega + \frac{\partial X_2}{\partial v} \sin\vartheta\right) + \ldots$$

$$\Sigma\, a_u c = \varrho\,(\nu L \sin\omega + \tau M \sin\vartheta) \qquad \Sigma\, a_v c = \varrho\,(\nu M \sin\omega + \tau N \sin\vartheta)$$

$$(b_1)_u = \varrho \left(-\frac{\partial X_1}{\partial u} \cos\omega + \frac{\partial X_2}{\partial u} \cos\vartheta\right) + \ldots$$

$$(b_1)_v = \varrho \left(-\frac{\partial X_1}{\partial v} \cos\omega + \frac{\partial X_2}{\partial v} \cos\vartheta\right) + \ldots,$$

$$\Sigma\, b_u c = \varrho\,(-\nu L \cos\omega + \tau M \cos\vartheta) \qquad \Sigma\, b_v c = \varrho\,(-\nu M \cos\omega + \tau N \cos\vartheta).$$

Ten slotte is:

$$\lambda = \frac{\Sigma\, c\, b_u}{\Sigma\, b f_u} = \frac{-\nu L \cos\omega + \tau M \cos\vartheta}{-\nu E \cos\omega + \tau F \cos\vartheta} \qquad \mu = \frac{\Sigma\, c\, b_v}{\Sigma\, b f_v} = \frac{-\nu M \cos\omega + \tau N \cos\vartheta}{-\nu F \cos\omega + \tau G \cos\vartheta}.$$

1°. $\lambda\, \Sigma\, a f_u - \Sigma\, a_u c =$

$$= \frac{(-\nu L \cos\omega + \tau M \cos\vartheta)(\nu E \sin\omega + \tau F \sin\vartheta) - (\nu L \sin\omega + \tau M \sin\vartheta)(-\nu E \cos\omega + \tau F \cos\vartheta)}{-\nu E \cos\omega + \tau F \cos\vartheta} =$$

$$= \frac{\nu\tau (EM - FL) \cos\omega \sin\vartheta + \nu\tau (EM - FL) \sin\omega \cos\vartheta}{-\nu E \cos\omega + \tau F \cos\vartheta} = \frac{\nu\tau (EM - FL) \sin(\vartheta+\omega)}{-\nu E \cos\omega + \tau F \cos\vartheta}. \quad (53)$$

$2^0.\quad \lambda\,\Sigma\, a\, f_v - \Sigma\, a_v\, c =$

$$= \frac{(-\nu\, L\cos\omega + \tau\, M\cos\vartheta)(\nu\, F\sin\omega + \tau\, G\sin\vartheta) - (\nu\, M\sin\omega + \tau\, N\sin\vartheta)(-\nu\, E\cos\omega + \tau\, F\cos\vartheta)}{-\nu\, E\cos\omega + \tau\, F\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{\nu^2 (E\,M - F\,L)\cos\omega\sin\omega + \nu\,\tau\,(E\,N - G\,L)\sin(\vartheta + \omega) + \tau^2 (M\,G - F\,N)\sin\vartheta\cos\vartheta}{-\nu\, E\cos\omega + \tau\, F\cos\vartheta}. \quad (54)$$

$3^0.\quad \mu\,\Sigma\, a\, f_u - \Sigma\, a_u\, c =$

$$= \frac{(-\nu\, M\cos\omega + \tau\, N\cos\vartheta)(\nu\, E\sin\omega + \tau\, F\sin\vartheta) - (\nu\, L\sin\omega + \tau\, M\sin\vartheta)(-\nu\, F\cos\omega + \tau\, G\cos\vartheta)}{-\nu\, F\cos\omega + \tau\, G\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{-\nu^2 (E\,M - F\,L)\cos\omega\sin\omega + \nu\,\tau\,(E\,N - L\,G)\sin(\vartheta - \omega) - \tau^2 (M\,G - F\,N)\sin\vartheta\cos\vartheta}{-\nu\, F\cos\omega + \tau\, G\cos\vartheta}. \quad (55)$$

$4^0.\quad \mu\,\Sigma\, a\, f_v - \Sigma\, a_v\, c =$

$$= \frac{(-\nu\, M\cos\omega + \tau\, N\cos\vartheta)(\nu\, F\sin\omega + \tau\, G\sin\vartheta) - (\nu\, M\sin\omega + \tau\, N\sin\vartheta)(-\nu\, F\cos\omega + \tau\, G\cos\vartheta)}{-\nu\, F\cos\omega + \tau\, G\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{\nu\,\tau\,(F\,N - M\,G)\cos\omega\sin\vartheta + \nu\,\tau\,(F\,N - G\,M)\cos\vartheta\sin\omega}{-\nu\, F\cos\omega + \tau\, G\cos\vartheta} = \frac{\nu\,\tau\,(F\,N - G\,M)\sin(\vartheta + \omega)}{-\nu\, F\cos\omega + \tau\, G\cos\vartheta}. \quad (56)$$

Na substitutie van de uitdrukkingen (53), (54), (55) en (56) in vergelijking (52), gaat deze over in:

$$(E\,M - F\,L)\,d\,u^2 + (E\,N - G\,L)\,d\,u\,d\,v + (F\,N - G\,M)\,d\,v^2 = 0,$$

welke differentiaalvergelijking de kromtelijnen op het centrale oppervlak aangeeft. Men heeft derhalve de volgende

Stelling: Construeert men in de raakvlakken van eenig oppervlak ∞^2 congruente cirkels, die de raakpunten tot centra hebben, dan bepalen de kromtelijnen van het oppervlak de middelpuntskrommen van de kanaaloppervlakken der congruentie.

We kiezen nu de kromtelijnen tot parameterkrommen. De vergelijkingen der congruentie zijn dan in den volgenden vorm te brengen:

$$\begin{aligned} x &= f + r\,(X_1\cos t + X_2\sin t).\\ y &= g + r\,(Y_1\cos t + Y_2\sin t).\\ z &= h + r\,(Z_1\cos t + Z_2\sin t).\end{aligned}$$

De richting (a_1, a_2, a_3) valt nu samen met de richting (X_1, Y_1, Z_1), en de richting (b_1, b_2, b_3) met (X_2, Y_2, Z_2). Bij deze aanname gaan de coëfficiënten der vormen S_1 en S_2 over in:

$$\left.\begin{array}{llll} \Sigma\, a\, f_u = \sqrt{E}, & \Sigma\, b\, f_u = 0, & \Sigma\, a_u\, c = -\dfrac{\sqrt{E}}{r_2}, & \Sigma\, a_v\, c = 0 \\ \Sigma\, a\, f_v = 0, & \Sigma\, b\, f_v = \sqrt{G}, & \Sigma\, b_u\, c = 0, & \Sigma\, b_v\, c = -\dfrac{\sqrt{G}}{r_1} \end{array}\right\} \quad ..(57)$$

Vergelijking (14), die op elken cirkel de focaalpunten bepaalt, luidt thans:

$$\frac{\dfrac{\sqrt{E}}{r_2}\cos t}{\dfrac{\sqrt{G}}{r_1}\sin t} = \frac{\sqrt{E}\cos t}{\sqrt{G}\sin t}$$

of:

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\sin t\cos t = 0. \quad \text{Dus } t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi.$$

Construeert men derhalve in eenig punt P van het centrale oppervlak, in het raakvlak, een cirkel met straal r, dan snijden de raaklijnen aan de kromtelijnen door P, op den cirkel de focaalpunten uit.

In de buurt van den cirkel zullen de vergelijkingen der focaaloppervlakken als volgt luiden:

$$\begin{aligned} x &= f \pm r\, X_1 & \qquad x &= f \pm r\, X_2 \\ y &= g \pm r\, Y_1 & \qquad y &= g \pm r\, Y_2 \\ z &= h \pm r\, Z_1 & \qquad z &= h \pm r\, Z_2 \end{aligned}$$

Vragen we thans naar de focaalvlakken, dat zijn de raakvlakken in de focaalpunten. De coördinaten van het focaalpunt (x, y, z) stellende, vindt men in het eerste geval voor de vergelijkingen der focaalvlakken:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ f_u \pm r \dfrac{\partial X_1}{\partial u} & g_u \pm r \dfrac{\partial Y_1}{\partial u} & h_u \pm r \dfrac{\partial Z_1}{\partial u} \\ f_v \pm r \dfrac{\partial X_1}{\partial v} & g_v \pm r \dfrac{\partial Y_1}{\partial v} & h \pm r \dfrac{\partial Z_1}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

en in het tweede geval:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ f_u \pm r \dfrac{\partial X_2}{\partial u} & g_u \pm r \dfrac{\partial Y_2}{\partial u} & h_u \pm r \dfrac{\partial Z_2}{\partial u} \\ f_v \pm r \dfrac{\partial X_2}{\partial v} & g_v \pm r \dfrac{\partial Y_2}{\partial v} & h_v \pm r \dfrac{\partial Z_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

We herleiden den eersten determinant door de kolommen respectievelijk met X_1, Y_1, Z_1, te vermenigvuldigen, daarna met X_3, Y_3 en Z_3, en vervolgens te sommeeren; den tweeden determinant door de kolommen respectievelijk met X_2, Y_2, Z_2 te vermenigvuldigen, daarna met X_3, Y_3, Z_3 en te sommeeren. Dan verkrijgt men in het eerste geval:

$$\begin{vmatrix} \Sigma\,(X - x)\, X_1 & \ldots & \Sigma\,(X - x)\, X_3 \\ \sqrt{E} & \ldots & \pm \dfrac{r\, L}{\sqrt{E}} \\ 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

en in het tweede geval:

$$\begin{vmatrix} \Sigma\,(X - x)\, X_2 & \ldots & \Sigma\,(X - x)\, X_3 \\ 0 & \ldots & 0 \\ \sqrt{G} & \ldots & \pm \dfrac{r\, N}{\sqrt{G}} \end{vmatrix} = 0.$$

Na uitwerking leveren deze determinanten:

$$\Sigma\,(X - x) \left[\frac{r\, L}{\sqrt{E}}\, X_1 \mp \sqrt{E}\; X_3\right] = 0.$$

$$\Sigma\,(X - x) \left[\frac{r\, N}{\sqrt{G}}\, X_3 \mp \sqrt{G}\; X_3\right] = 0.$$

In het oog houdend, dat de parameterkrommen kromtelijnen zijn, mag men voor L en N schrijven: $-\dfrac{E}{r_2}$ en $-\dfrac{G}{r_1}$. De vergelijkingen der focaalvlakken luiden derhalve:

$$\Sigma\,(X - x)\,[r\, X_1 \pm r_2\, X_3] = 0 \text{ en } \Sigma\,(X - x)\,[r\, X_2 \pm r_1\, X_3] = 0.$$

Hieruit blijkt, dat het eerste paar vlakken door de richting (X_2, Y_2, Z_2), het tweede paar door de richting (X_1, Y_1, Z_1) heengaat. Wanneer men den hoek tusschen twee focaalvlakken α stelt, geldt:

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma\,(r\,X_1 \pm r_2\,X_3)\,(r\,X_2 \pm r_1\,X_3)}{\sqrt{(r^2+r_1^2)\,(r^2+r_2^2)}} = \frac{\pm\, r_1\, r_2}{\sqrt{(r^2+r_1^2)\,(r^2+r_2^2)}}.$$

Al naar gelang de focaalpunten $\frac{\pi}{2}$ of π verschillen, dient in deze formule het plus- of het minteeken gekozen te worden. De hoek is dus een functie van de hoofdkromtestralen in het centrum van den cirkel; zijn teeken wordt door het teeken van de totale kromming in dat centrum bepaald.

Sub 2°. Voor het geval de cirkels in de raakvlakken van het centrale oppervlak gelegen zijn, blijkt, dat zich nog een tweede mogelijkheid kan voordoen, n. l.:

$$\Sigma\, c\, b_u = 0, \qquad \Sigma\, c\, b_v = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Nu geldt: $\lambda = \mu = 0$. Uit de algemeene beschouwingen van § 2 volgt, dat er op het centrale oppervlak een stelsel krommen valt aan te geven, zoodanig, dat, wanneer men deze als centrale krommen van cyclische oppervlakken kiest, deze oppervlakken als omhullenden van ∞^1 bollen beschouwd kunnen worden. We zullen in de eerste plaats de beteekenis der voorwaarden (58) nagaan. Daartoe drukken we de grootheden in het eerste lid in de coëfficiënten der grondvormen van het centrale oppervlak uit. We kiezen eerst weer als parameterkrommen die krommen, die, als centrale krommen van cyclische oppervlakken gekozen, aanleiding geven tot oppervlakken, waarvoor de richting (b_1, b_2, b_3) loodrecht op de poollijn van het punt T staat. Evenals in het vorig geval, geldt:

$$a_1 = \varrho\,(X_1 \sin\omega + X_2 \sin\vartheta), \qquad a_2 = \ldots \text{ enz.}$$
$$b_1 = \varrho\,(-X_1 \cos\omega + X_2 \cos\vartheta), \; b_2 = \ldots \text{ enz.}$$

terwijl de richting (c_1, c_2, c_3) als normaal op het oppervlak optreedt.

$$(b_1)_u = \varrho \left(-\frac{\partial X_1}{\partial u}\cos\omega + \frac{\partial X_2}{\partial u}\cos\vartheta\right) + \ldots$$

termen, die, na vermenigvuldiging met (c_1, c_2, c_3) en gevolgde optelling, verdwijnen:

$$(b_1)_v = \varrho \left(-\frac{\partial X_1}{\partial v}\cos\omega + \frac{\partial X_2}{\partial v}\cos\vartheta\right) + \ldots$$

Derhalve:

$$\Sigma\, c\, b_u = \varrho \left(-\Sigma\, X_3 \frac{\partial X_1}{\partial u}\cos\omega + \Sigma\, X_3 \frac{\partial X_2}{\partial u}\cos\vartheta\right) = 0.$$
$$\Sigma\, c\, b_v = \varrho \left(-\Sigma\, X_3 \frac{\partial X_1}{\partial v}\cos\omega + \Sigma\, X_3 \frac{\partial X_2}{\partial v}\cos\vartheta\right) = 0.$$

Met behulp van de formules (36), (40), (43), (46), gaan bovenstaande betrekkingen over in:

$$-\frac{L}{\sqrt{E}}\cos\omega + \frac{M}{\sqrt{G}}\cos\vartheta = 0.$$

$$-\frac{M}{\sqrt{E}}\cos\omega + \frac{N}{\sqrt{G}}\cos\vartheta = 0.$$

Dit eischt:

$$L N - M^2 = 0,$$

m. a. w. *het centrale oppervlak is een ontwikkelbaar oppervlak*; welk resultaat ons er toe leidt, een nieuw stelsel parameterkrommen in te voeren, n. l. de beschrijvende lijnen, en haar orthogonale trajectoriën Kiezen we de rechte lijnen tot parameterkrommen $u = \text{const.}$, dan mogen we in het stelsel vergelijkingen (49), (50) en (51) de grootheden M en N gelijk aan nul stellen. De coëfficiënten der vormen S_1 en S_2 zijn nu gelijkluidend aan de coëfficiënten in het vorig geval. (Sub 1°. verg. 57). Alleen verdwijnt bovendien de grootheid $\Sigma\, b_v\, c$, omdat $r_1 = \infty$ is.

Om op het centrale oppervlak de krommen te vinden, die als centrale krommen van oppervlakken van de 2e soort optreden, substitueeren we de genoemde coëfficiënten in vergelijking (17), hetwelk ons levert:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{E}\, d u & \sqrt{G}\, d v \\ -\dfrac{r\sqrt{E}}{r_2}\, d u & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \sqrt{E}\, d u & r_u\, d u + r_v\, d v \\ -\dfrac{r\sqrt{E}}{r_2}\, d u & 0 \end{vmatrix}^2.$$

$$G\, d u^2\, d v^2 = d u^2\, (r_u\, d u + r_v\, d v)^2 \qquad (59)$$

Deze vergelijking bevat een dubbel te tellen wortel $u = \text{const.}$ De rechte lijnen van het ontwikkelbaar oppervlak treden dus als centrale krommen van cyclische oppervlakken op, die omhullenden van ∞^1 bollen zijn. Dit was te verwachten, daar de congruentie aldus te construeeren is: in elk raakvlak door een bepaalde beschrijvende lijn van een ontwikkelbaar oppervlak, construeert men een stelsel van ∞^1 cirkels, waarvan de centra op die rechte gelegen zijn. Een dergelijk stelsel bezit steeds een omhullende. Men herhaalt de bewerking voor elk raakvlak. Het aldus gevormde stelsel van ∞^2 cirkels voldoet aan de vraag.

De beide andere wortels van vergelijking (59) worden gevonden uit:

$$r_u\, d u + (r_v + \sqrt{G})\, d v = 0 \quad \text{en} \quad r_u\, d u + (r_v - \sqrt{G})\, d v = 0$$

welke vergelijkingen, na integratie, de centrale krommen van cyclische oppervlakken leveren, waarvan de cirkels slechts aan één ruimtekromme raken. Wanneer r alleen een functie van v is ($r_u = 0$), derhalve alleen varieert, wanneer men zich langs een beschrijvende lijn beweegt, dan gaan bovenstaande vergelijkingen over in: $d v = 0$, welke wortel ons de orthogonale trajectoriën levert, die dubbel geteld moeten worden. In dat geval is de congruentie echter op één wijze volgens kanaaloppervlakken te rangschikken.

De focaalpunten, die op elken cirkel gelegen zijn, worden, evenals in het vorig geval, gegeven door:

$$\sin t \cos t = 0,$$

dus $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$. Hieruit blijkt, dat voor $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ de beschrijvende lijnen in haar geheel als focaallijnen optreden, en dus de raakvlakken aan het oppervlak als focaalvlakken, een resultaat, dat eveneens te voorzien was.

§ 5. *De normale cirkelcongruentie* [1]). Onderzoeken we thans, onder welke voorwaarden de bovenstaande congruentie, een zoogenaamde normale congruentie is. We vatten de

[1]) Cf. Bianchi l. c. hoofdstuk XIII, Vessiot l. c. pag. 294 en vlg.

zaak algemeen aan, en vragen naar de conditie, dat er voor een stelsel van ∞^2 cirkels ∞^1 oppervlakken aangegeven kunnen worden, waarvan de normalen als raaklijnen aan de cirkels optreden. Onze congruentie denken we ons voorgesteld door:

$$x = f + r\,(a_1 \cos t + b_1 \sin t).$$
$$y = g + r\,(a_2 \cos t + b_2 \sin t).$$
$$z = h + r\,(a_3 \cos t + b_3 \sin t).$$

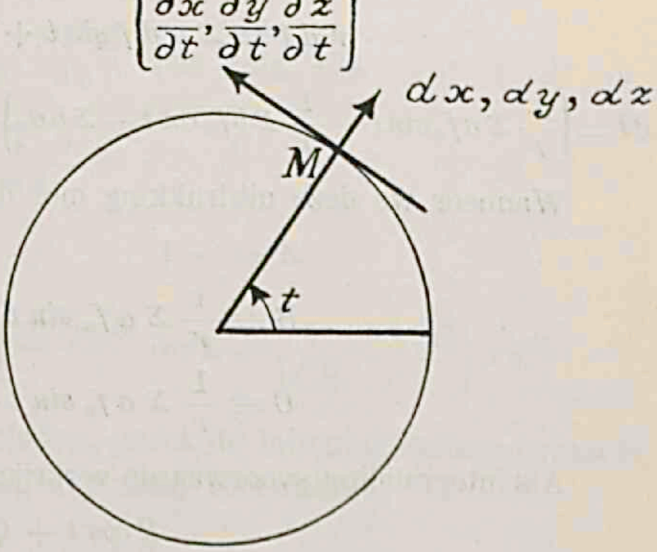

Fig. XI.

Het is nu zaak, een zoodanige waarde van t te bepalen, (zie fig. XI) dat de raaklijn, in het uiteinde M van den voerstraal aangebracht, als normaal van een zeker oppervlak optreedt. Substitueert men in bovenstaande vergelijkingen:

$$t = \omega\,(u, v)$$

dan verkrijgt men een oppervlak. Onderstel, dat dit oppervlak aan de vraag voldoet, en duid de richtingscosinus van de raaklijn in M aan dit oppervlak door $d\,x$, $d\,y$, $d\,z$ aan. De richtingscosinus van de raaklijn aan den cirkel zijn: $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$. Derhalve luidt de voorwaarde voor het bestaan van een dergelijk oppervlak:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial t}\, d\,x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

of daar:

$$d\,x = \frac{\partial x}{\partial u}\, d\,u + \frac{\partial x}{\partial v}\, d\,v + \frac{\partial x}{\partial t}\, d\,t,$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t}\, d\,u + \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial t}\, d\,v + \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 d\,t = 0,$$

welke vergelijking van den vorm:

$$A\,d\,t + B\,d\,u + C\,d\,v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

is. Aan deze totale differentiaalvergelijking moet nu $t = \omega\,(u, v)$ als integraal voldoen. Opdat er ∞^1 oppervlakken zijn, die aan de vraag voldoen, moet bovenstaande differentiaalvergelijking onbepaald te integreeren zijn, d. w. z. dat de integrabiliteitsvoorwaarde:

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial v}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial t}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

voor alle waarden van t, u en v vervuld moet zijn. Is dit niet het geval, dan zal er slechts een beperkt aantal oppervlakken zijn, dat aan de vraag voldoet. Zij worden bepaald door de wortels van vergelijking (62), die aan vergelijking (61) voldoen.

We werken de differentiaalvergelijking (60) uit:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = r\,(-\,a_1 \sin t + b_1 \cos t), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = r\,(-\,a_2 \sin t + b_2 \cos t), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = r\,(-\,a_3 \sin t + b_3 \cos t).$$

$$d\,x = d\,f + r\,(-\,a_1 \sin t + b_1 \cos t)\,d\,t + r\,(\cos t\,d\,a_1 + \sin t\,d\,b_1) + (a_1 \cos t + b_1 \sin t)\,d\,r,$$

terwijl voor $d\,y$ en $d\,z$ analoge uitdrukkingen gelden.

Derhalve luidt de totale differentiaalvergelijking:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial t} d x = r(-\Sigma a d f \sin t + \Sigma b d f \cos t + r d t + r \Sigma b d a) = 0$$

of:

$$r d t = \Sigma a d f \sin t + \Sigma b d f \cos t - r \Sigma b d a \quad \ldots \ldots \quad (63)$$

$$dt = \left(\frac{1}{r} \Sigma a f_u \sin t - \frac{1}{r} \Sigma b f_u \cos t - \Sigma b a_u\right) du + \left(\frac{1}{r} \Sigma a f_v \sin t - \frac{1}{r} \Sigma b f_v \cos t - \Sigma b a_v\right) dv. \quad (64)$$

Wanneer we deze uitdrukking met de formule (61) vergelijken, vinden we:

$$A = -1$$

$$B = \frac{1}{r} \Sigma a f_u \sin t - \frac{1}{r} \Sigma b f_u \cos t - \Sigma b a_u$$

$$C = \frac{1}{r} \Sigma a f_v \sin t - \frac{1}{r} \Sigma b f_v \cos t - \Sigma b a_v.$$

Als integrabiliteitsvoorwaarde verkrijgt men dus een lineaire uitdrukking in $\sin t$ en $\cos t$:

$$P \cos t + Q \sin t + R = 0,$$

waarin P, Q en R functies van u en v zijn. Opdat er nu een stelsel van ∞^1 oppervlakken aan te geven is, waarvan de normalen als raaklijnen aan de cirkels optreden, moet bovenstaande uitdrukking identiek vervuld zijn, hetgeen vereischt:

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0.$$

Is zij niet identiek vervuld, dan zullen er hoogstens twee oppervlakken zijn, die aan de vraag voldoen; hetgeen blijkt, wanneer men in vergelijking (65) de meermalen besproken substitutie $tg \frac{t}{2} = w$ uitvoert, welke vergelijking daardoor quadratisch in w wordt. Derhalve geldt de volgende, door RIBAUCOUR gegeven, stelling:

Wanneer men bij een cirkelcongruentie drie oppervlakken kan aangeven, waarvan de normalen raaklijnen der cirkels zijn, dan zijn er ∞^1 oppervlakken aan te geven, die deze eigenschap bezitten.

Door de substitutie:

$$\sin t = \frac{2 w}{1 + w^2}, \quad \cos t = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \quad tg \frac{t}{2} = w,$$

gaat vergelijking (63) over in:

$$2 d w = (1 + w^2) \Sigma a d b + \frac{2 w}{r} \Sigma a d f + \frac{w^2 - 1}{r} \Sigma b d f$$

of:

$$d w = (\alpha w^2 + \beta w + \gamma) d u + (\alpha' w^2 + \beta' w + \gamma') d v$$

waarin α, β, γ, α', β', γ' bekende functies van u en v zijn. Deze vergelijking draagt het karakter van de differentiaalvergelijking van RICCATI, hetgeen ons tot de tweede stelling van RIBAUCOUR voert:

Wanneer bij een cirkelcongruentie ∞^1 oppervlakken aan te geven zijn, waarvan de normalen raaklijnen der cirkels zijn, dan snijden vier oppervlakken van dit stelsel op elken cirkel der congruentie een puntquadrupel met constante dubbelverhouding uit.

Toepassing op de congruentie A. Vergelijking (64) werken we nader uit, voor het geval we te doen hebben met een congruentie, waarvan de cirkels een constanten straal bezitten, en in de raakvlakken van een oppervlak gelegen zijn. Dan dienen de coëfficiënten, die in deze vergelijking optreden, berekend te worden. Dit is grootendeels reeds geschied in het stelsel (57). Ons rest nog de bepaling der grootheden $\Sigma\, b\, a_u$ en $\Sigma\, b\, a_v$:

$$\Sigma\, b\, a_u = \Sigma\, X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \text{ (zie verg. 49).}$$

$$\Sigma\, b\, a_v = \Sigma\, X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Hierdoor gaat vergelijking (64) over in:

$$d\,t = \left(\frac{\sqrt{E}}{r} \sin t + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) d\,u + \left(-\frac{\sqrt{G}}{r} \cos t - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) d\,v.$$

Opdat er ∞^1 oppervlakken aan de vraag voldoen, moet de integrabiliteitsvoorwaarde (62) identiek vervuld worden. Daar $A = -1$ is, luidt deze voorwaarde:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial B}{\partial v}\right) + B \frac{\partial C}{\partial t} - C \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

of, na invulling:

$$-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r} \cos t + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r} \sin t + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{E}}{r} \sin t + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) \frac{\sqrt{G}}{r} \sin t + \left(\frac{\sqrt{G}}{r} \cos t + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) \frac{\sqrt{E}}{r} \cos t = 0$$

of:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{d\,u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)\right] + \frac{\sqrt{E\,G}}{r^2} = 0$$

of:

$$-\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{\sqrt{E\,G}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)\right].$$

Nu heeft het tweede lid dezer vergelijking een eenvoudige meetkundige beteekenis. Het stelt n. l. de totale kromming $\frac{1}{r_1 r_2}$ in het centrum van den cirkel voor [1]). Derhalve is voor bovenstaande voorwaarde te schrijven:

$$\frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{r^2}.$$

Dit voert ons tot de volgende

Stelling: Opdat een cirkelcongruentie, die uit ∞^2 cirkels met constanten straal bestaat, tevens een normale congruentie is, geldt als noodzakelijke en voldoende voorwaarde, dat het centrale oppervlak een constante, negatieve, kromming bezit, derhalve een zoogenaamd pseudosphaerisch oppervlak is.

---

[1]) Cf. BIANCHI l. c. pag. 67.

§ 6. *Beschouwing der congruentie B.* Terwijl we in het vorig geval aannamen, dat de cirkels in de raakvlakken van het centrale oppervlak gelegen waren, nemen we thans aan, dat zij in normaalvlakken van het centrale oppervlak liggen, zoodat men heeft:

$$\Sigma\, a\, f_u = 0\,, \quad \Sigma\, a\, f_v = 0.$$

De richting (a_1, a_2, a_3) treedt dus als normaal van het oppervlak op. Substitueeren we deze voorwaarden in vergelijking (23), die ons de centrale krommen van de oppervlakken van de 2e soort levert, dan gaat zij over in:

$$(\mu - \lambda)^2 (r_v \Sigma\, b\, f_u - r_u \Sigma\, b\, f_v)^2\, d\,u^2\, d\,v^2 = (\Sigma\, a_u\, c\, d\,u + \Sigma\, a_v\, c\, d\,v)^2 \left[(\Sigma\, b\, f_u\, d\,u + \Sigma\, b\, f_v\, d\,v)^2 - \right.$$
$$\left. - (r_u\, d\,u + r_v\, d\,v)^2\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (66)$$

Naar aanleiding van deze vergelijking zullen we, behalve het algemeene, nog een bijzonder geval beschouwen, n.l.:

$$\Sigma\, a_u\, c = 0\,, \quad \Sigma\, a_v\, c = 0.$$

In het algemeene geval vormen de parameterkrommen, zooals wij ze in § 2 gedefinieerd hebben, geen orthogonaal stelsel. De coëfficiënten der vormen S_1 en S_2, die in vergelijking (66) optreden, moeten nu met behulp van de formules van § 3 in de coëfficiënten der grondvormen van Gauss uitgedrukt worden, leveren echter ingewikkelde uitdrukkingen, die niet eenvoudig te interpreteeren zijn. Willen de resultaten gemakkelijk in woorden gebracht kunnen worden, dan moeten we specialiseeren. We nemen daarom aan, dat we met een orthogonaal stelsel parameterkrommen te doen hebben, dat dus $F = 0$ is, waardoor we gebruik mogen maken van de vergelijkingen (49), (50) en (51).

Daar de as van den cirkel in het raakvlak gelegen is, en de richting (b_1, b_2, b_3), die er loodrecht op staat eveneens, stellen we:

$$c_1 = X_1 \cos\vartheta + X_2 \sin\vartheta \text{ enz.}$$
$$b_1 = - X_1 \sin\vartheta + X_2 \cos\vartheta \text{ enz.}$$

terwijl:

$$a_1 = X_3, \quad a_2 = Y_3, \quad a_3 = Z_3.$$

$$(b_1)_u = - \frac{\partial X_1}{\partial u} \sin\vartheta + \frac{\partial X_2}{\partial u} \cos\vartheta - (X_1 \cos\vartheta + X_2 \sin\vartheta)\, \vartheta_u.$$

$$(b_1)_v = - \frac{\partial X_1}{\partial v} \sin\vartheta + \frac{\partial X_2}{\partial v} \cos\vartheta - (X_1 \cos\vartheta + X_2 \sin\vartheta)\, \vartheta_v.$$

En dus:

$$\Sigma\, c\, b_u = - \Sigma\, X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} \sin^2\vartheta + \Sigma\, X_1 \frac{\partial X_2}{\partial u} \cos^2\vartheta - \vartheta_u.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \vartheta_u.$$

$$\Sigma\, c\, b_v = - \Sigma\, X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} \sin^2\vartheta + \Sigma\, X_1 \frac{\partial X_2}{\partial v} \cos^2\vartheta - \vartheta_v.$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \vartheta_v.$$

In het oog houdend, dat:

$$\frac{1}{\sigma_u} = -\frac{1}{\sqrt{E G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sigma_v} = -\frac{1}{\sqrt{E G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$$ [1])

waarin σ_u de geodetische kromtestraal in eenig punt der parameterkromme $u = \text{const.}$, σ_v die in eenig punt der parameterkromme $v = \text{const}$ is, mag men voor bovenstaande vormen schrijven:

$$\Sigma\, c\, b_u = -\left(\frac{\sqrt{E}}{\sigma_v} + \vartheta_u\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

$$\Sigma\, c\, b_v = \frac{\sqrt{G}}{\sigma_u} - \vartheta_v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

$$\Sigma\, a_u\, c \equiv \Sigma \frac{\partial X_3}{\partial u}(X_1 \cos\vartheta + X_2 \sin\vartheta) = \left(-\frac{L}{\sqrt{E}}\cos\vartheta - \frac{M}{\sqrt{G}}\sin\vartheta\right) \quad \ldots \quad (69)$$

$$\Sigma\, a_v\, c \equiv \Sigma \frac{\partial X_3}{\partial v}(X_1 \cos\vartheta + X_2 \sin\vartheta) = \left(-\frac{M}{\sqrt{E}}\cos\vartheta - \frac{N}{\sqrt{G}}\sin\vartheta\right) \quad \ldots \quad (70)$$

$$\Sigma\, a_u\, b \equiv \Sigma \frac{\partial X_3}{\partial u}(-X_1 \sin\vartheta + X_2 \cos\vartheta) = \frac{L}{\sqrt{E}}\sin\vartheta - \frac{M}{\sqrt{G}}\cos\vartheta \quad \ldots \quad (71)$$

$$\Sigma\, a_v\, b \equiv \Sigma \frac{\partial X_3}{\partial v}(-X_1 \sin\vartheta + X_2 \cos\vartheta) = \frac{M}{\sqrt{E}}\sin\vartheta - \frac{N}{\sqrt{G}}\cos\vartheta \quad \ldots \quad (72)$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, b\, f_u &= -\sqrt{E}\sin\vartheta \\ \Sigma\, b\, f_v &= \sqrt{G}\cos\vartheta \end{aligned}\right\} \ldots (73) \qquad \left.\begin{aligned} \Sigma\, c\, f_u &= \sqrt{E}\cos\vartheta \\ \Sigma\, c\, f_v &= \sqrt{G}\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (74)$$

met welk stelsel formules wij bereikt hebben, dat de coëfficiënten der vormen S_1 en S_2 in de coëfficiënten van de grondvormen van Gauss uitgedrukt zijn.

Wij zullen de voorwaarden nagaan, waaraan voldaan moet worden, opdat deze congruentie een normale congruentie is. De totale differentiaalvergelijking (64) gaat bij onze onderstellingen over in:

$$d t + \left(\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_u \cos t + \Sigma\, b\, a_u\right) d u + \left(\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_v \cos t + \Sigma\, b\, a_v\right) d v = 0.$$

$$d t + B\, d u + C\, d v = 0.$$

De integrabiliteitsvoorwaarde luidt nu:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial C}{\partial u}\right) + B\frac{\partial C}{\partial t} - C\frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

Na uitwerking:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_u \cos t + \Sigma\, b\, a_u\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_v \cos t + \Sigma\, b\, a_v\right] -$$

$$-\left(\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_u \cos t + \Sigma\, b\, a_u\right)\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_v \sin t + \left(\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_v \cos t + \Sigma\, b\, a_v\right)\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_u \sin t = 0$$

of:

$$\frac{\partial}{\partial v}\Sigma\, b\, a_u - \frac{\partial}{\partial u}\Sigma\, b\, a_v + \left(\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_u \Sigma\, b\, a_v - \frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_v \Sigma\, b\, a_u\right)\sin t + \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_u\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_v\right)\right]\cos t = 0.$$

---

[1]) Bianchi l. c. pag. 147.

Zullen er ∞^1 oppervlakken bestaan, waarvan de normalen als raaklijnen aan de cirkels der congruentie optreden, dan moet bovenstaande vergelijking voor alle waarden van t vervuld zijn. Zij is derhalve te splitsen in de volgende 3 voorwaarden:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial}{\partial v}\Sigma\, b\, a_u - \dfrac{\partial}{\partial u}\Sigma\, b\, a_v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . & \text{I} \\[2ex] \dfrac{\dfrac{1}{r}\Sigma\, b\, f_u}{\dfrac{1}{r}\Sigma\, b\, f_v} = \dfrac{\Sigma\, b\, a_u}{\Sigma\, b\, a_v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \text{II} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r}\Sigma\, b\, f_u\right) = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r}\Sigma\, b\, f_v\right) \quad . \quad . \quad . \quad . & \text{III}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Wij beschouwen in het bijzonder de tweede voorwaarde. Na uitwerking levert deze:

$$\frac{-\sqrt{E}\, sin\, \vartheta}{\sqrt{G}\, cos\, \vartheta} = \frac{\dfrac{L}{\sqrt{E}}\, sin\, \vartheta - \dfrac{M}{\sqrt{G}}\, cos\, \vartheta}{\dfrac{M}{\sqrt{E}}\, sin\, \vartheta - \dfrac{N}{\sqrt{G}}\, cos\, \vartheta}.$$

$$M\sqrt{E\,G}\, cos\, 2\,\vartheta + \frac{1}{2}(N\,E - L\,G)\, sin\, 2\,\vartheta = 0.$$

$$tg\, 2\,\vartheta = \frac{2\,M\sqrt{E\,G}}{G\,L - E\,N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Deze vergelijking leert ons, welke functie de hoek ϑ van de parameters u en v moet zijn, of, anders gezegd, welken hoek de as van den cirkel met de parameterkrommen moet maken, opdat de congruentie een normale congruentie zij. Voor het geval de kromtelijnen tot parameterkrommen gekozen worden, moet de hoek ϑ noodzakelijk 0 of $\frac{\pi}{2}$ zijn, m. a. w. de as van den cirkel is raaklijn aan de kromtelijn. Neem bijv. $\vartheta = 0$. Dan is:

$$\Sigma\, b\, f_u = \Sigma\, b\, a_u = 0.$$

$$\frac{1}{r}\Sigma\, b\, f_v = \frac{\sqrt{G}}{r},\ \Sigma\, b\, a_v = \frac{\sqrt{G}}{r_1}.$$

De voorwaarden I en III houden nu in, dat de grootheden in het tweede lid dezer vergelijkingen alleen functies van den parameter v zijn, hetwelk meebrengt, dat het quotiënt $\frac{r}{r_1}$ eveneens een functie van v alleen is, m. a. w.:

$$r = r_1\, \varphi\, (v).$$

Kiest men $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, dan vindt men op gelijke wijze als voorwaarde:

$$r = r_2\, \psi\, (u).$$

Derhalve geldt de volgende

Stelling: Neemt men op een oppervlak een stelsel kromtelijnen (parameterkrommen $u =$ const.) *en construeert men in de bij deze krommen behoorende hoofdnormaalvlakken cirkels, waarvan de centra op die kromtelijnen gelegen zijn, dan zal de aldus ontstane congruentie een normale congruentie zijn, wanneer men den straal van den cirkel evenredig aan den, met het andere hoofdnormaalvlak correspondeerenden, hoofdkromtestraal kiest, er zorg voor dragende, dat de verhoudingsfactor voor een en dezelfde parameterkromme constant is.*

De voorwaarde II van vergelijking (75) voert ons nog tot een ander bijzonder geval. Onderstel, dat gelijktijdig voldaan wordt aan de volgende gelijkheden:

$$\frac{1}{r}\,\Sigma\, b\, f_u = \Sigma\, b\, a_u \quad \text{en} \quad \frac{1}{r}\,\Sigma\, b\, f_v = \Sigma\, b\, a_v \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

Wij vatten de zaak thans zoo algemeen mogelijk aan, onderstellen dat de parameterkrommen op het centrale oppervlak zoodanig gekozen zijn, dat voor elken cirkel de richting (b_1, b_2, b_3) loodrecht op de poollijn van het punt T staat, welke keuze, zooals wij gezien hebben, steeds mogelijk is. In dat geval luiden onze coëfficiënten:

$$\Sigma\, b\, f_u = \varrho\sqrt{E}\,\Sigma\, X_1(-X_1\cos\omega + X_2\cos\vartheta) = \varrho\left(-\sqrt{E}\cos\omega + \frac{F}{\sqrt{G}}\cos\vartheta\right).$$

$$= \frac{\varrho}{\sqrt{G}}(-\sqrt{EG}\cos\omega + F\cos\vartheta).$$

$$\Sigma\, b\, f_v = \varrho\sqrt{G}\,\Sigma\, X_2(-X_1\cos\omega + X_2\cos\vartheta) = \frac{\varrho}{\sqrt{E}}(-F\cos\omega + \sqrt{EG}\cos\vartheta).$$

$$\Sigma\, a_u\, b = \varrho\,\Sigma\left(\sqrt{E}\,\frac{FM-GL}{H^2}\,X_1 + \sqrt{G}\,\frac{FL-EM}{H^2}\,X_2\right)(-X_1\cos\omega + X_2\cos\vartheta).$$

$$= \varrho\,\Sigma\left[\left(-\sqrt{E}\,\frac{FM-GL}{H^2} - \frac{F}{\sqrt{E}}\,\frac{FL-EM}{H^2}\right)\cos\omega + \left(\frac{F}{\sqrt{G}}\,\frac{FM-GL}{H^2} + \sqrt{G}\,\frac{FL-EM}{H^2}\right)\cos\vartheta\right].$$

$$\Sigma\, a_v\, b = \varrho\,\Sigma\left(\sqrt{E}\,\frac{FN-GM}{H^2}\,X_1 + \sqrt{G}\,\frac{FM-EN}{H^2}\,X_2\right)(-X_1\cos\omega + X_2\cos\vartheta).$$

$$= \varrho\,\Sigma\left[\left(-\sqrt{E}\,\frac{FN-GM}{H^2} - \frac{F}{\sqrt{E}}\,\frac{FM-EN}{H^2}\right)\cos\omega + \left(\frac{F}{\sqrt{G}}\,\frac{FN-GM}{H^2} + \sqrt{G}\,\frac{FM-EN}{H^2}\right)\cos\vartheta\right].$$

Deze grootheden vullen we in de vergelijkingen (75) in, en vinden dan twee lineaire betrekkingen in $\cos\omega$ en $\cos\vartheta$. Dus is te voldoen aan:

$$\begin{vmatrix} E(FM-GL)+F(FL-EM)+\frac{1}{r}H^2E & F(FM-GL)+G(FL-EM)+\frac{1}{r}H^2F \\ E(FN-GM)+F(FM-EN)+\frac{1}{r}H^2F & F(FN-GM)+G(FM-EN)+\frac{1}{r}H^2G \end{vmatrix} = 0.$$

Na uitwerking, en deeling door H^2, volgt hieruit:

$$(LN-M^2)\,r^2 + (EN+GL-2FM)\,r + EG - F^2 = 0,$$

zijnde de vergelijking der hoofdkromtestralen, waaruit blijkt, dat de vergelijkingen (75) impliceeren, dat de straal van den cirkel aan een der hoofdkromtestralen gelijk genomen wordt. De voorwaarden I en III van het stelsel (75) zijn nu door een enkele te vervangen, bijv. de eerste. Deze drukt uit, dat:

$$\Sigma\, b\, a_u\, d\,u + \Sigma\, b\, a_v\, d\,v$$

een totale differentiaal is. Beschouwen nu onze totale differentiaalvergelijking (64), dan is deze, bij inachtname van vergelijking (75), als volgt te schrijven:

$$\frac{d\,t}{1+\cos t} = -(\Sigma\, b\, a_u\, d\,u + \Sigma\, b\, a_v\, d\,v).$$

Het tweede lid is dus een totale differentiaal, en de verlangde voorwaarde hiermee vervuld. Dit leidt tot de volgende

Stelling: Construeert men in de normaalvlakken van een stelsel parameterkrommen (zooals ze boven door ons gedefinieerd zijn) *een stelsel van* ∞^2 *cirkels, waarvan de centra op dat oppervlak gelegen zijn, en waarvan de straal gelijk is aan een der hoofdkromtestralen, dan is deze congruentie noodzakelijk een normale congruentie.*

§ 7. *Congruentie B; het centrale oppervlak is een ontwikkelbaar oppervlak.* Behalve de onderstelling, dat de cirkels in normaalvlakken van het centrale oppervlak gelegen zijn, nemen we aan, dat de voorwaarden:

$$\Sigma\, a_u\, c = 0\,, \quad \Sigma\, a_v\, c = 0$$

vervuld zijn. We kiezen de parameterkrommen eerst weer zoo algemeen mogelijk, dus zoodanig, dat zij als centrale krommen van cyclische oppervlakken optreden, waarbij de richting (b_1, b_2, b_3) voor elken cirkel loodrecht op de poollijn van het punt T staat. Bij deze onderstelling, gaat vergelijking (66) over in:

$$(d\,u\,d\,v)^2 = 0$$

waaruit volgt, dat de parameterkrommen zelven optreden als de centrale krommen van de oppervlakken van de tweede soort, waarin de congruentie gerangschikt kan worden. Wat de focaalpunten betreft, zoo blijkt uit vergelijking (22), dat deze gegeven worden door het stelsel vergelijkingen:

$$\Sigma\, b\, f_u \sin t + r_u = 0\,, \quad \Sigma\, b\, f_v \sin t + r_v = 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (78)$$

Daar de term met $\cos t$ in deze vergelijkingen ontbreekt, worden zij op elken cirkel door een stelsel lijnen, loodrecht op de richting (b_1, b_2, b_3) [zie fig. II] ingesneden.

Gaan wij thans de beteekenis van de voorwaarden: $\Sigma\, a_u\, c = 0$, $\Sigma\, a_v\, c = 0$ na:

$$\Sigma\, a_u\, c \equiv \varrho\, \Sigma\, \frac{\partial X_3}{\partial u}\,(X_1 \sin\omega + X_2 \sin\vartheta).$$

$$\Sigma\, a_v\, c \equiv \varrho\, \Sigma\, \frac{\partial X_3}{\partial v}\,(X_1 \sin\omega + X_2 \sin\vartheta).$$

Met behulp van de formules (47) en (48) gaan bovenstaande uitdrukkingen over in:

$$\sqrt{E}\,\frac{F\,M - L\,G}{H^2}\,\sin\omega + \sqrt{G}\,\frac{F\,L - E\,M}{H^2}\,\sin\vartheta = 0,$$

$$\sqrt{E}\,\frac{F\,N - G\,M}{H^2}\,\sin\omega + \sqrt{G}\,\frac{F\,M - E\,N}{H^2}\,\sin\vartheta = 0,$$

d. z. twee lineaire betrekkingen in $\sin\omega$ en $\sin\vartheta$. Dus is te voldoen aan:

$$\begin{vmatrix} F\,M - L\,G & F\,L - E\,M \\ F\,N - G\,M & F\,M - E\,N \end{vmatrix} = 0\,,$$

of:

$$(E\,G - F^2)\,(L\,N - M^2) = 0.$$

Daar de eerste factor verschillend van nul is, geldt:

$$L\,N - M^2 = 0\,,$$

m. a. w. ook in dit geval *is het centrale oppervlak een ontwikkelbaar oppervlak.* Dit leidt ons tot het invoeren van een nieuw stelsel parameterkrommen, de beschrijvende lijnen, en haar orthogonale trajectoriën. De beschrijvende lijnen kiezen we als de parameterkrommen $u = \text{const}$. In het oog houdend, dat de parameterkrommen tevens kromtelijnen zijn, en voor een regelvlak, zoowel r_1 als σ_u oneindig is, vindt men voor de coëfficiënten der vormen S_1 en S_2: [zie de verg. 71—75]:

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma\, b\, f_u = -\sqrt{E}\, sin\, \vartheta & \Sigma\, c\, b_u = -\left(\dfrac{\sqrt{E}}{\sigma_v} + \vartheta_u\right) \\ \Sigma\, b\, f_v = \sqrt{G}\, cos\, \vartheta & \Sigma\, c\, b_v = -\vartheta_v \\ \Sigma\, c\, f_u = \sqrt{E}\, cos\, \vartheta & \Sigma\, a_u\, b = \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}\, sin\, \vartheta \\ \Sigma\, c\, f_v = \sqrt{G}\, sin\, \vartheta & \Sigma\, a_v\, b = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (79)$$

Om de centrale krommen van de oppervlakken van de 2e soort te vinden, moeten wij, bij deze keuze van parameterkrommen, bovenstaande grootheden in vergelijking (17) invullen. Dit levert:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{E}\, sin\, \vartheta\, d\, u - \sqrt{G}\, cos\, \vartheta\, d\, v & r_u\, d\, u + r_v\, d\, v \\ r\left(\dfrac{\sqrt{E}}{\sigma_v} + \vartheta_u\right) d\, u + r\, \vartheta_v\, d\, v & \sqrt{E}\, cos\, \vartheta\, d\, u + \sqrt{G}\, sin\, \vartheta\, d\, v \end{vmatrix}^2 = 0.$$

We beschouwen speciaal het geval: $\vartheta = const. = \frac{\pi}{2}$. Dan bezit bovenstaande vergelijking een factor: $d\, u = 0$. De integraal $u = \text{const.}$, levert ons de beschrijvende lijnen, die dubbel geteld moeten worden De congruentie kan derhalve aldus geconstrueerd worden: men gaat uit van een onwikkelbaar oppervlak, en construeert in het normaalvlak, dat door een bepaalde beschrijvende lijn gaat, een stelsel cirkels, waarvan de centra op die beschrijvende lijn gelegen zijn. De aldus gevormde congruentie is tevens een normale congruentie, als de straal evenredig genomen wordt aan den bij elk punt behoorenden hoofdkromtestraal, er zorg voor dragende, dat de verhoudingsfactor voor een en dezelfde beschrijvende lijn constant is. Immers, daar $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ is, en dus $\Sigma\, b\, f_v = \Sigma\, a_v\, b = 0$ is, gaan de beide voorwaarden I en II in een enkele over, die tot de conditie:

$$r = r_2\, \psi\, (u)$$

voert. Bij deze keuze van parameterkrommen worden de focaalpunten gevonden uit:

$$\frac{\Sigma\, b\, f_u\, sin\, t + r_u}{\Sigma\, b\, f_v\, sin\, t + r_v} = \frac{r\, \Sigma\, b_u\, c\, sin\, t + \Sigma\, c\, f_u}{r\, \Sigma\, b_v\, c\, sin\, t + \Sigma\, c\, f_v} \text{ zie verg. (14)}$$

of:

$$r\,(\Sigma\, b\, f_u\, \Sigma\, b_v\, c - \Sigma\, b\, f_v\, \Sigma\, b_u\, c)\, sin^2\, t + (\Sigma\, b\, f_u\, \Sigma\, c\, f_v - \Sigma\, b\, f_v\, \Sigma\, c\, f_u)\, sin\, t + r_u\, \Sigma\, c\, f_v - r_v\, \Sigma\, c\, f_u = 0$$

een quadratische vergelijking in $sin\, t$, hetgeen overeenkomt met vergelijking (78). In het speciale geval, dat:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

is (en dus ook in het geval der normale congruentie), verdwijnt de coëfficiënt van den term van den 2en graad, doordat $\Sigma\, b\, f_v = 0$ wordt. De beteekenis hiervan blijkt het duidelijkst uit vergelijking (78). De tweede vergelijking gaat nu over in: $r_v = 0$. Voeren we de substitutie $tg\,\frac{t}{2} = w$ uit, dan is zij als volgt te schrijven:

$$2\,\Sigma\, b\, f_v\, w + r_v\,(1 + w^2) = 0.$$

Voor $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, en dus $\Sigma\, b\, f_v = 0$ vindt men: $w = \pm\, i$. Twee der focaalpunten vallen derhalve met de imaginaire cirkelpunten samen. De andere twee focaalpunten vindt men uit de vergelijking:

$$(\Sigma\, b\, f_u\, \Sigma\, c\, f_v - \Sigma\, b\, f_v\, \Sigma\, c\, f_u)\, sin\, t + r_u\, \Sigma\, c\, f_v - r_v\, \Sigma\, c\, f_u = 0.$$

Substitueert men hierin de in (79) berekende grootheden, dan verkrijgt men:

$$\sqrt{E\,G}\, sin\, t - r_u \sqrt{G} = 0$$

en dus:

$$sin\, t = \frac{r_u}{\sqrt{E}}.$$

---

f 5485

STELLINGEN.

I.

De, in dit proefschrift ingevoerde, vormen S_1 en S_2 zullen, niet alleen bij het onderzoek van een enkelvoudige of meervoudige oneindigheid van cirkels, maar ook bij dat van een enkel- of meervoudige oneindigheid van ruimtekrommen, een belangrijke rol kunnen spelen.

II.

Bianchi schrijft, terwijl hij een cirkel analytisch voorstelt op de wijze, als op blz. 1 van dit proefschrift is geschied: in der Ebene des Kreises ziehen wir zwei aufeinander senkrechte, im übrigen *willkürliche* Durchmesser.

Bij verschillende vraagstukken is het evenwel niet gewenscht, dat deze willekeur blijft bestaan.

Bianchi, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, pag 347, ed. 1910.

III.

In zijn: *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, zegt Lamé:

Toutes les fois qu'il s'agit de résoudre deux problèmes analogues, l'un dans l'espace l'autre sur le plan, il vaut mieux commencer par resoudre celui de l'espace.

Het is niet wenschelijk, deze methode, als algemeen geldend, te aanvaarden.

IV.

Bij vraagstukken, die over functies van een *reëele* veranderlijke handelen, kan het, tot beter inzicht van zich voordoende moeilijkheden, dikwijls van voordeel zijn het onderzoek tot het *complexe* gebied uit te breiden.

V.

Wanneer een stelling, zoowel voor *niet-analytische* als voor *analytische* functies geldt, verdient het aanbeveling, dat in de handboeken over functietheorie, het bewijs dier stelling voor eerstgenoemde functies ook vermeld wordt.

VI.

HAGEN's afleiding der foutenwet, zooals deze in MERRIMAN (*a Textbook on the Method of Least Squares*) gegeven wordt, is aan bedenking onderhevig.

VII.

Ten onrechte zegt MERRIMAN; (l. c. pag. 205):

The probable error being the most natural unit of comparison, it is certainly to be desired that it alone should be used, and the mean error be discarded.

VIII.

MARCONI heeft waargenomen, dat radiogrammen bij nacht beter overgeseind worden dan bij dag. De verklaring, die FLEMING van dit verschijnsel tracht te geven, is niet zeer waarschijnlijk.

MARCONI, *Proc. Roy. Soc.* 1902.

FLEMING, *Cantor Lectures on Hertzian Wave Telegraphy*, pag. 69.

IX.

GERDIEN's bezwaren tegen de theorie van EBERT, ter verklaring van het electrische veld der atmosfeer, tasten deze theorie niet in haar grondslagen aan.

H. EBERT, *Phys. Zeitschr.* 5, 1904. H. GERDIEN, *Ph. Z.* 6, 1905.

X.

De onderzoekingen van FISCHER en HENE maken het bestaan van een chemisch-actieve modificatie der stikstof onwaarschijnlijk.

R. J. STRUTT, *Proc. Roy. Soc.* 1911 en 1912, *85 A*, *86 A*, *87 A*.

FISCHER en HENE, *Ber. D. Chem. Ges.* 46 N°. 3, 1913.

XI.

Door zijne, op de vergelijking van VAN DER WAALS toegepaste, mathematische bewerkingen komt WICKSELL tot resultaten, die met de werkelijkheid in strijd zijn.

S. D. WICKSELL, *Phil. Mag.* XXIV, 1912.

XII.

Bij de afleiding van de bewegingsvergelijkingen heeft PICARD in de dynamica het begrip „*champ de forces constantes*” ingevoerd. Dit is noch noodzakelijk, noch gewenscht.

E. PICARD, *Quelques réflexions sur la Mécanique*, Paris 1902.