Begrensde holomorfe functies

Begrensde Holomorfe Functies

B. F. WEVER

BEGRENSDE HOLOMORFE FUNCTIES

Begrensde Holomorfe Functies

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Jhr. Dr. B. C. DE SAVORNIN LOHMAN

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER RECHTSGELEERDHEID

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN OP

Maandag, 1 Juni 1931, des namiddags te 3 uur,

DOOR

BEREND FREDERIK WEVER,

geboren te FINSTERWOLDE

Electr. drukkerij „de Industrie" J. VAN DRUTEN — Utrecht
1931

Aan de nagedachtenis van mijn Vader
Aan mijn Moeder
Aan mijn Vrouw

Het verheugt mij zeer U Hoogleeraren der Faculteit der Wis- en Natuurkunde te Groningen, bij deze gelegenheid mijn welgemeenden dank te kunnen brengen voor het onderwijs, dat ik van U heb mogen ontvangen.

In het bizonder geldt mijn dank U, Hooggeleerde WOLFF, Hooggeachte Promotor. Uwe groote welwillendheid en Uwe voortreffelijke leiding bij het samenstellen van dit proefschrift stemmen mij tot groote erkentelijkheid.

Ook U, Hooggeleerde BARRAU, ZERNIKE en VAN RHIJN, dank ik gaarne voor de leiding, die Gij bij mijn studie hebt gegeven.

HOOFDSTUK I.

De integraal van Poisson.

Van historisch standpunt beschouwd, kunnen we de studie van de integraal van POISSON als volgt samenvatten:

A. [1]) Zij gegeven de eenheidscirkel C en noemen we de poolcoördinaten van een inwendig punt $P:(\rho, \theta)$, de poolcoördinaten van een randpunt A van $C:(1, \varphi)$.

Zij binnen C gegeven een harmonische functie $f(\rho, \theta)$, die continu is op de rand van C.

Noemen we de randwaarden van de functie $f(1, \varphi)$ en de afstand van $P(\rho, \theta)$ tot $A(1, \varphi): r$, dan wordt de functie $f(\rho, \theta)$ in elk inwendig punt van C voorgesteld door de integraal van POISSON:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(1, \varphi)\, d\varphi}{r^2}.$$

B. [1]) Op de omtrek C is gegeven een continue functie $F(\varphi)$. Dan bestaat er binnen C een harmonische functie $f(\rho, \theta)$, die de randwaarden $F(\varphi)$ heeft; deze functie $f(\rho, \theta)$ wordt voorgesteld door de integraal van POISSON:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)\, d\varphi}{r^2}.$$

C. [2]) Op de omtrek C is gegeven een functie $F(\varphi)$, die

---

[1]) Zie: OSGOOD: Lehrbuch der Funktionentheorie, blz. 598 en vlg. BÔCHER: Bull. Amer. Math. Soc., 2 Reihe, Bd 4.

[2]) Zie: P. FATOU: Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Mathematica. Band 30.

sommeerbaar (L) is. Bij deze onderstelling is het probleem zoo algemeen mogelijk gesteld; ook in dit geval bepaalt de integraal van POISSON binnen C een harmonische functie $f(\rho, \theta)$.

Het is echter niet noodzakelijk, dat de functie $f(\rho, \theta)$ nadert tot een bepaalde limiet, als het punt (ρ, θ) nadert tot een punt $(1, \varphi)$; verschillende mogelijkheden, die zich hierbij kunnen voordoen, indien $F(\varphi)$ discontinu is of oneindig wordt in een punt $(1, \varphi)$, zijn bestudeerd door FATOU.

In verband met toepassingen van het onderzoek van FATOU, die in de volgende hoofdstukken worden behandeld, worden in dit hoofdstuk enkele resultaten van FATOU meegedeeld; verschillende stellingen zijn echter op een andere manier bewezen.

2. Stelling 1.

Indien op de eenheidscirkel gegeven is een functie $F(\varphi)$, die sommeerbaar (L) is, dan is de functie $f(\rho, \theta)$, voorgesteld door de integraal van Poisson:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)\, d\varphi}{r^2}$$

harmonisch binnen C.

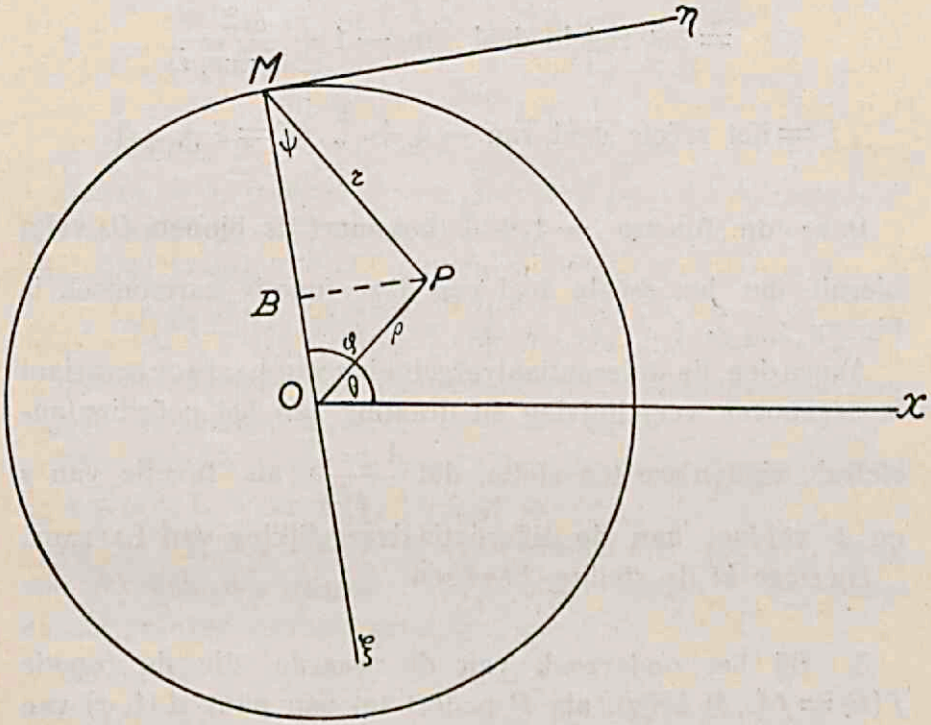
Bewijs. Bij het bepalen van de afgeleiden naar ρ en θ van de functie

$$f(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \rho^2)\, F(\varphi)\, d\varphi}{r^2}$$

merken we op, dat zoo vaak als men wil onder het integraalteeken mag worden gedifferentieerd naar ρ en θ, daar $\frac{1-\rho^2}{r^2}$ en al haar partieele afgeleiden naar ρ en θ continue functies zijn van ρ en θ voor $\rho < 1$ en F sommeerbaar is.

Er blijft dus slechts te bewijzen, dat $\frac{1 - \rho^2}{r^2}$ aan de

differentiaalvergelijking van LAPLACE voldoet, m. a. w. dat $\frac{1-\rho^2}{r^2}$ een harmonische functie van ρ en ϑ is bij vaste φ.



In de bovenstaande figuur zij $\angle P\,M\,O = \psi$, dan is:

$$\rho^2 = 1 + r^2 - 2\,r\cos\psi,$$

dus:
$$\frac{1-\rho^2}{r^2} = -1 + \frac{2\,r\cos\psi}{r^2}$$

Zij $\xi\,M\,\eta$ het rechthoekig coördinatenstelsel met de oorsprong in M, terwijl de ξ-as samenvalt met de lijn $M\,O$ en de η-as samenvalt met de raaklijn in M aan de eenheidscirkel.

Trekken we $P\,B \perp \xi$-as, dan zijn de coördinaten van het punt $P(\rho, \vartheta)$ ten opzichte van dit stelsel:

$$\xi = B\,M = r\cos\psi$$

$$\eta = P\,B = r\sin\psi$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1-\rho^2}{r^2} = -1 + \frac{2r\cos\psi}{r^2} = -1 + \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2} =$$

$$= \text{het reëele deel van } -1 + \frac{2}{\xi+\eta i}$$

$$= \text{het reëele deel van } -1 + \frac{2}{\zeta} \quad (\zeta = \xi + \eta i).$$

Daar de functie $-1 + \frac{2}{\zeta}$ holomorf is binnen C, volgt hieruit dat het reëele deel van deze functie harmonisch is binnen C.

Aangezien de differentiaalvergelijking van LAPLACE invariant is tegenover verschuiving en draaiing van het coördinatenstelsel, vinden we ten slotte, dat $\frac{1-\rho^2}{r^2}$ als functie van ρ en θ voldoet aan de differentiaalvergelijking van LAPLACE.

Hiermee is de stelling bewezen.

3. Bij het onderzoek van de waarde, die de functie $f(P) = f(\rho, \theta)$ krijgt, als P nadert tot een punt $A(1, \varphi)$ van C, moeten we opmerken, dat deze waarde alleen afhankelijk is van de waarden van $F(\varphi)$ in een vaste buurt van A.

Kiezen we op de eenheidscirkel een interval BAC en is A' een willekeurig punt van de cirkelomtrek buiten dit interval gelegen, dan is:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)\,d\varphi}{r^2} =$$

$$= \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{BAC} \frac{F(\varphi)\,d\varphi}{r^2} + \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{CA'B} \frac{F(\varphi)\,d\varphi}{r^2}.$$

De laatste integraal is in absolute waarde kleiner dan

$$\frac{1-\rho^2}{2\pi} \times \frac{1}{(\text{minim. afstand van } P \text{ tot boog } CA'B)^2} \int_0^{2\pi} |F(\varphi)|\,d\varphi$$

en daar de minimumafstand van P tot boog $CA'B$ grooter blijft dan een vast positief getal als P tot A nadert, volgt hieruit:

$$\frac{1-\rho^2}{2\pi}\left|\int_{CA'B}\frac{F(\varphi)\,d\varphi}{r^2}\right| \to 0 \text{ als } P \to A.$$

4. Stelling 2.

Indien op C gegeven is een functie $F(\varphi)$, die sommeerbaar (L) is en $F(\varphi) \to +\infty$ als $\varphi \to \varphi_0$,
dan volgt hieruit:

$$f(P) = f(\rho, \theta) \to +\infty \text{ als } P(\rho, \theta) \to A(1, \varphi_0).$$

Bewijs. Zonder de algemeenheid van de stelling te schaden, mogen we stellen: $\varphi_0 = 0$.

Daar $F(\varphi) \to +\infty$ als $\varphi \to 0$, bestaat er op C een interval $-h \leq \varphi \leq h$, waar $F(\varphi)$ positief is.

Zij $-\delta \leq \varphi \leq \delta$ een interval binnen het eerste gelegen, zóó gekozen, dat daarop $F(\varphi) > G$ is, waarin G een willekeurig gegeven positief getal is.

Verder is:

$$f(P) = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{F(\varphi)\,d\varphi}{r^2} + \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{F(\varphi)\,d\varphi}{r^2}.$$

De laatste integraal $\to 0$ voor $P \to A$.

De eerste integraal $> \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{G\,d\varphi}{r^2} =$

$$= \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{G\,d\varphi}{r^2} - \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta}\frac{G\,d\varphi}{r^2} =$$

$$= G - (\to 0), \text{ voor } P \to A.$$

Hieruit volgt:

$$f(P) > G - 1, \text{ als } P \text{ dicht genoeg bij } A \text{ is.}$$

Hiermede is de stelling bewezen.

5. Stelling 3.

Onderstelde: *$F(\varphi)$ is sommeerbaar (L) op C;*

$F'(\varphi)$ is eindig in het punt $A(1, \varphi_0)$.

$P(\rho, \theta)$ is een willekeurig punt binnen C op straal OA.

$$f(P) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)\, d\varphi}{r^2}$$

Bewering: $\frac{\partial f(P)}{\partial \theta} \to F'(\varphi_0)$ *als P radiaal nadert tot het punt* $A(1, \varphi_0)$.

Bewijs. Zonder de algemeenheid van de stelling te schaden, mogen we stellen: $\varphi_0 = 0$.

Op C is dus gegeven:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{F(\varphi) - F(0)}{\varphi} = \text{eindige waarde} = K,$$

welke betrekking we mogen vervangen door:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{F(\varphi) - F(0)}{\sin \varphi} = K.$$

Op C is dus: $F(\varphi) = F(0) + K \sin \varphi + g(\varphi)$, waarin $g(\varphi)$ een sommeerbare functie is en waarvan geldt:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{g(\varphi)}{\sin \varphi} = 0.$$

Substitutie van deze uitdrukking voor $F(\varphi)$ in de integraal van Poisson geeft:

$$f(P) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\{F(0) + K \sin \varphi + g(\varphi)\}\, d\varphi}{r^2} =$$

$$= \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{F(0)\, d\varphi}{r^2} + \int_0^{2\pi} \frac{K \sin \varphi}{r^2} + \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)\, d\varphi}{r^2} \right\}$$

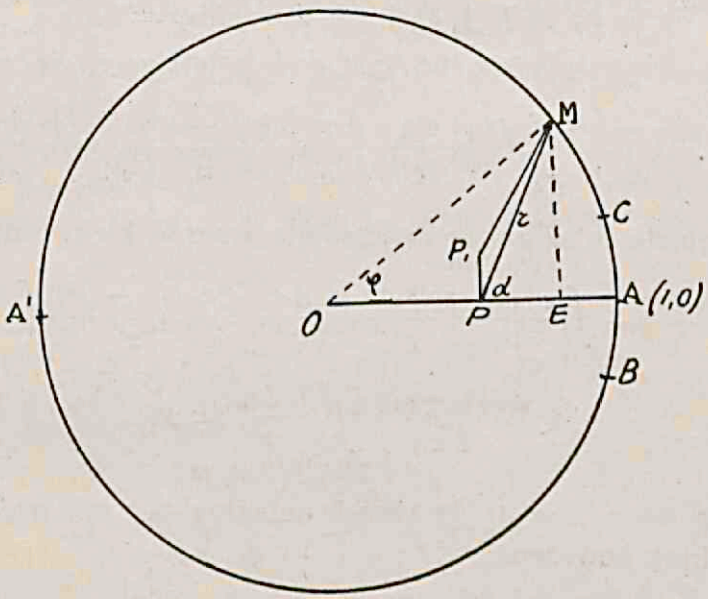
$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(0)\, d\varphi}{r^2} = F(0).$$

Hieruit volgt: $\frac{\partial I_1}{\partial \theta} = \frac{\partial F(0)}{\partial \theta} \equiv 0.$

$$I_2 = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K \sin\varphi \, d\varphi}{r^2} =$$

$= K \times$ de harmonische functie in P, die op C gelijk is aan $\sin\varphi = y$, dus $I_2 = K y$.



In de bijgaande figuur zij $PP_1 \perp OA$.

Op straal OA is: $\frac{\partial y}{\rho \, \partial \theta} = 1$, dus $\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho$

Hieruit volgt: $\frac{\partial I_2}{\partial \theta} = \frac{\partial I_2}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial \theta} = K\rho$

dus $\frac{\partial I_2}{\partial \theta} \to K$ voor $\rho \to 1$.

$$\frac{\partial I_3}{\partial \theta} = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \left(\frac{1}{r^2}\right)}{\partial \theta} g(\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{-2(1-\rho^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial r}{\partial \theta} g(\varphi) \, d\varphi}{r^3}.$$

Uit de figuur volgt onmiddellijk, dat

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = -\rho \sin \alpha, \text{ waarin } \alpha = \angle MPA.$$

Zij nu gegeven een willekeurig getal $\varepsilon > 0$, dan is op C een interval BAC zoo te kiezen, dat op BAC:

$$|g(\varphi)| < \varepsilon |\sin \varphi| \text{ is.}$$

Ten slotte zij $ME \perp OA$; $ME = \sin \varphi = r \sin \alpha$.

Door toepassing van bovenstaande afleidingen vinden we:

$$\frac{\partial I_3}{\partial \theta} = \frac{\rho(1-\rho^2)}{\pi} \int_{BAC} \frac{g(\varphi) \sin \alpha \, d\varphi}{r^3} + \frac{\rho(1-\rho^2)}{\pi} \int_{CA'B} \frac{g(\varphi) \sin \alpha \, d\varphi}{r^3}.$$

De eerste integraal is in absolute waarde kleiner dan

$$\frac{\rho(1-\rho^2)}{\pi} \int_{BAC} \frac{\varepsilon |\sin \varphi| \, |\sin \alpha| \, d\varphi}{r^3} < \frac{\varepsilon \rho (1-\rho^2)}{\pi} \int_{BAC} \frac{d\varphi}{r^2}$$

$$< \frac{2\varepsilon(1-\rho^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r^2} = 2\varepsilon.$$

Daar voor $P \to A$ de tweede integraal tot nul nadert, is de stelling bewezen.

Opmerking. Met behulp van bovenstaande afleiding is op een eenvoudige manier aan te toonen, dat de stelling blijft doorgaan als P angulair nadert tot A. In verband met de afleiding van een analoge stelling voor begrensde holomorfe functies in een volgend hoofdstuk, zullen we hierop niet verder ingaan.

6. Stelling 4.

Indien op C gegeven is een sommeerbare begrensde functie $F(\varphi)$, dan krijgt de functie

$$f(\rho, \theta) = \frac{1-\rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi) \, d\varphi}{r^2}$$

bij radiale nadering van het punt (ρ, θ) tot C voor een ver-

zameling φ-waarden, waarvan de complementaire verzameling de maat nul heeft, de randwaarde $F(\varphi)$.

Bewijs. Volgens een stelling van LEBESGUE is de begrensde sommeerbare functie $F(\varphi)$ op volle φ-maat de afgeleide van haar onbepaalde integraal $G(\varphi)$ [$G(\varphi)$ is een periodieke functie, indien de constante $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\,d\varphi$ van de functie $F(\varphi)$ wordt afgetrokken; in het volgende wordt dit verondersteld].

Partieel integreeren is geoorloofd, dus is:

$$f(\rho,\theta) = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)\,d\varphi}{r^2} = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}\,dG(\varphi) =$$

$$\left[\frac{1}{2\pi}\times\frac{1-\rho^2}{r^2}G(\varphi)\right]_0^{2\pi} - \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r^2}\right)}{\partial\varphi}G(\varphi)\,d\varphi =$$

$$\frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r^2}\right)}{\partial\theta}G(\varphi)\,d\varphi.$$

Beschouwen we ook de functie:

$$F(\rho,\theta) = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{G(\varphi)\,d\varphi}{r^2},$$

dan is: $$f(\rho,\theta) = \frac{\partial F(\rho,\theta)}{\partial\theta}.$$

Toepassing van stelling 3 geeft: voor elke waarde van φ, waarvoor $G(\varphi)$ de afgeleide $F(\varphi)$ heeft, is bij radiale nadering van een punt (ρ,θ) tot het punt $(1,\varphi)$:

$$f(\rho,\theta) = \frac{\partial F(\rho,\theta)}{\partial\theta} \to G'(\varphi) = F(\varphi).$$

Daar $G(\varphi)$ op volle φ-maat de afgeleide $F(\varphi)$ heeft, zal dus $f(\rho,\theta)$ op volle φ-maat radiaal naderen tot $F(\varphi)$.

In verband met de toepassing in de volgende hoofdstukken, vermelden we nog de stelling, die als een omgekeerde van stelling 4 kan worden beschouwd.

Stelling 5. *Gegeven is binnen C een begrensde harmonische functie $f(\rho, \theta)$; bij radiale nadering van een punt (ρ, θ) tot C krijgt $f(\rho, \theta)$ op volle φ-maat een limiet $f(1, \varphi)$.*

Dan wordt de functie binnen C voorgesteld door de integraal van Poisson:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(1, \varphi)\, d\varphi}{r^2}.$$

Bewijs: Zij $\rho < R < 1$, dan is:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho^2) f(\rho, \varphi)\, d\varphi}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \theta)}.$$

Nemen we ρ en θ vast en laten we R naderen tot 1, dan blijft de functie onder het integraalteeken begrensd en nadert op volle φ-maat tot $\frac{(1 - \rho^2) f(1, \varphi)}{r^2}$.

Nu is volgens een stelling van LEBESGUE geoorloofd, de teekens lim en $\int$ te verwisselen, waaruit volgt:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(1, \varphi)\, d\varphi}{r^2}.$$

7. In § 2 is aangetoond, dat $\frac{1 - \rho^2}{r^2}$ het reëele deel is van de holomorfe functie

$$u + v\,i = -1 + \frac{2}{\xi + \eta\, i} = -1 + \frac{2(\xi - \eta\, i)}{\xi^2 + \eta^2},$$

dus $$v = -\frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Daar $$\xi = 1 - \rho \cos(\varphi - \theta)$$

en $$\eta = \rho \sin(\varphi - \theta),$$

vinden we: $$v = -\frac{2\rho \sin(\varphi - \theta)}{r^2}.$$

De harmonische geconjugeerde functie $g(\rho, \theta)$ van de integraal van POISSON:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)\, d\varphi}{r^2}$$

is dus, op een willekeurige additieve constante na, bepaald door de volgende betrekking:

$$g(\rho, \theta) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \theta)\, F(\varphi)\, d\varphi}{r^2}.$$

Stelling 6. *Indien op de eenheidscirkel gegeven is een begrensde sommeerbare functie* $F(\varphi)$, *waarvoor geldt dat*

$$\lim_{\varphi \to 0} F(\varphi) = 0 \quad [\text{óf } \lim_{\varphi \to 0} | F(\varphi) - F(-\varphi) | = 0],$$

dan is noodig en voldoende, opdat $g(\rho, 0)$ *nadert tot een eindige limiet voor* $\rho \to 1$, *dat de integraal*

$$\int_\varepsilon^\pi \frac{| F(\varphi) - F(-\varphi) |\, d\varphi}{tg\, {}^1\!/_2\, \varphi}$$

nadert tot een eindige limiet voor $\varepsilon \to 0$.

Bewijs. Zij A het punt $(1, 0)$ en P een veranderlijk punt van de straal OA.

Dan is:

$$g(P) = g(\rho, 0) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, F(\varphi)\, d\varphi}{r^2} =$$

$$= -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, | F(\varphi) - F(-\varphi) |\, d\varphi}{r^2}.$$

Zij $\varepsilon > 0$.

We verdeelen het interval $(0, \pi)$ in twee deelen $(0, \varepsilon)$ en (ε, π) en we stellen: $\varepsilon = 1 - \rho$.

Dan is:

$$g(P) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin\varphi\, | F(\varphi) - F(-\varphi) |\, d\varphi}{r^2} +$$

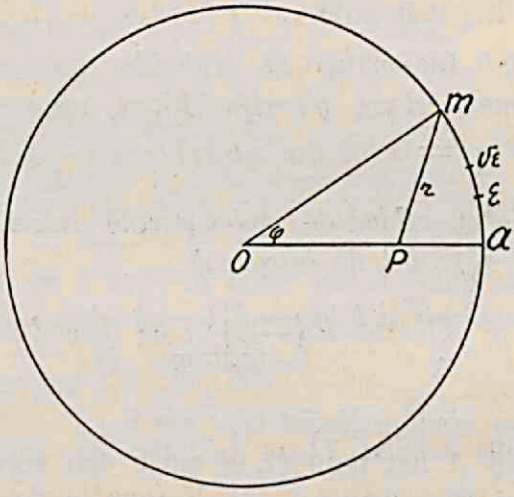
$$-\frac{\rho}{\pi} \int_\varepsilon^{\pi} \frac{\sin\varphi\, | F(\varphi) - F(-\varphi) |\, d\varphi}{r^2}.$$

De eerste integraal is in absolute waarde kleiner dan

$$\frac{1}{\pi} \times \frac{\varepsilon \sin \varepsilon}{(1-\rho)^2} \times$$

$\times$ { maximum van $|F(\varphi) - F(-\varphi)|$ op het interval $(0, \varepsilon)$ }

en daar $\varepsilon = 1 - \rho$ en $\lim_{\varphi \to 0} F(\varphi) = 0$ nadert deze integraal tot nul als $P \to A$.



Zij M een willekeurig punt op het interval (ε, π), dan is:

$$r^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi = 1 + \rho^2 - 2\rho(1 - 2\sin^2 {}^1\!/_2\, \varphi) =$$
$$= (1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 {}^1\!/_2\, \varphi.$$

Hieruit volgt:

$$\sin^2 {}^1\!/_2\, \varphi = \frac{r^2 - (1-\rho)^2}{4\rho} = \frac{r^2 - \varepsilon^2}{4\rho}.$$

Dus:

$$\frac{\rho \sin \varphi}{r^2} = \frac{2\rho \sin {}^1\!/_2\, \varphi \cos {}^1\!/_2\, \varphi \; tg\, {}^1\!/_2\, \varphi}{r^2 \, tg\, {}^1\!/_2\, \varphi} = \frac{2\rho(r^2 - \varepsilon^2)}{4\rho r^2 \, tg\, {}^1\!/_2\, \varphi} =$$
$$= \frac{1}{2\, tg\, {}^1\!/_2\, \varphi} - \frac{\varepsilon^2}{2 r^2 \, tg\, {}^1\!/_2\, \varphi}.$$

Substitutie van deze waarde in de tweede integraal geeft:

$$-\frac{\rho}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\sin\varphi\,\{F(\varphi)-F(-\varphi)\}\,d\varphi}{r^2}=$$

$$=-\frac{\rho}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\{F(\varphi)-F(-\varphi)\}\,d\varphi}{tg\,{}^1\!/_2\,\varphi}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\{F(\varphi)-F(-\varphi)\}\cot g\,{}^1\!/_2\,\varphi\,d\varphi}{r^2}.$$

We verdeelen het interval (ε,π) in de deelen $(\varepsilon,\sqrt{\varepsilon})$ en $(\sqrt{\varepsilon},\pi)$ en we schrijven:

$$\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{\{F(\varphi)-F(-\varphi)\}\cot g\,{}^1\!/_2\,\varphi\,d\varphi}{r^2}=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\{F(\varphi)-F(-\varphi)\}\cot g\,{}^1\!/_2\,\varphi\,d\varphi}{r^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\pi}\frac{\{F(\varphi)-F(-\varphi)\}\cot g\,{}^1\!/_2\,\varphi\,d\varphi}{r^2}=I_1+I_2.$$

Op het interval $(\varepsilon,\sqrt{\varepsilon})$ is:

$\varepsilon\cot g\,{}^1\!/_2\,\varphi <$ vast positief getal M (onafhankelijk van ε).

Hieruit volgt:

$$|I_1|\leq\frac{\varepsilon M}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{|F(\varphi)-F(-\varphi)|\,d\varphi}{r^2}$$

$$\leq\frac{M(1-\rho)}{2\pi(1-\rho^2)}\times\{\text{maximum van }|F(\varphi)-F(-\varphi)|\text{ op interval }(\varepsilon,\sqrt{\varepsilon})\}\times\int_{0}^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)\,d\varphi}{r^2}$$

$$\leq\frac{M}{1+\rho}\times\{\text{maximum van }|F(\varphi)-F(-\varphi)|\text{ op interval }(\varepsilon,\sqrt{\varepsilon})\}.$$

Hieruit volgt wegens $\lim_{\varphi\to 0}F(\varphi)=0$:

$|I_1|\to 0$ als $\varepsilon\to 0$, d. w. z. als $(P\to A)$.

Op het interval $(\sqrt{\varepsilon}, \pi)$ is:

$\sqrt{\varepsilon} \operatorname{cotg} {}^1/_2 \varphi <$ vast positief getal G (onafhankelijk van ε).

Hieruit volgt:

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon^{3/2}}{2\pi} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon} \operatorname{cotg} {}^1/_2 \varphi \, |F(\varphi) - F(-\varphi)| \, d\varphi}{r^2}$$

$$\leq \frac{\varepsilon^{3/2}}{2\pi} \times \frac{G}{1-\rho^2} \times \{\text{maximum van } |F(\varphi) - F(-\varphi)| \text{ op interval } (\sqrt{\varepsilon}, \pi)\} \times \int_0^{2\pi} \frac{(1-\rho^2)\, d\varphi}{r^2}$$

$$\leq \sqrt{\varepsilon} \times \frac{G}{1+\rho} \times \{\text{maximum van } |F(\varphi) - F(-\varphi)| \text{ op interval } (\sqrt{\varepsilon}, \pi)\}.$$

Dus wegens de begrensdheid van $F(\varphi)$:

$$|I_2| \to 0 \text{ als } \varepsilon \to 0, \text{ d. w. z. als } P \to A.$$

Ten slotte is dus het resultaat:

Indien $\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{|F(\varphi) - F(-\varphi)| \, d\varphi}{\operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi} \to$ eindige limiet als $\varepsilon \to 0$,

dan nadert $g(\rho, 0)$ tot een eindige limiet voor $\rho \to 1$;
en als $g(\rho, 0) \to \lambda$, dan is:

$$\lambda = \lim_{\varepsilon = 0} - \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{|F(\varphi) - F(-\varphi)| \, d\varphi}{\operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi}.$$

Opmerking. De voorwaarde: $\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{|F(\varphi) - F(-\varphi)| \, d\varphi}{\operatorname{tg} {}^1/_2 \varphi} \to$ eindige limiet als $\varepsilon \to 0$, kan worden vervangen door de volgende:

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{|F(\varphi) - F(-\varphi)| \, d\varphi}{\varphi} \to \text{eindige limiet als } \varepsilon \to 0.$$

De functie $\frac{2}{\varphi} - \operatorname{cotg} {}^1/_2 \varphi$ is begrensd voor $0 \leq \varphi \leq \pi$, het verschil der beide integralen heeft dus een eindige limiet voor $\varepsilon \to 0$.

HOOFDSTUK II.

Begrensde holomorfe functies.

1. Zij gegeven een functie $f(z) = u + vi$, die holomorf is binnen $C: |z| = 1$ en continu op C.

Dan zijn u en v functies, die harmonisch zijn binnen C en continu op C. Noemen we de randwaarden van $f(z)$, u en v respectievelijk $F(\varphi)$, $U(\varphi)$ en $V(\varphi)$, dan is:

$$f(z) = u + vi = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{U(\varphi)\,d\varphi}{r^2} + i\frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{V(\varphi)\,d\varphi}{r^2} =$$

$$= \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\{U(\varphi) + i\,V(\varphi)\}\,d\varphi}{r^2} =$$

$$= \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)\,d\varphi}{r^2}.$$

Fatou heeft aangetoond, dat bovenstaande integraal haar beteekenis blijft houden, indien slechts wordt verondersteld, dat de functie $f(z)$ binnen C begrensd is, zonder eenig gegeven aangaande de rand van C.

In verband hiermee zullen we in dit hoofdstuk enkele randwaardestellingen mededeelen voor begrensde holomorfe functies (stelling van Fatou, stelling van Riess).

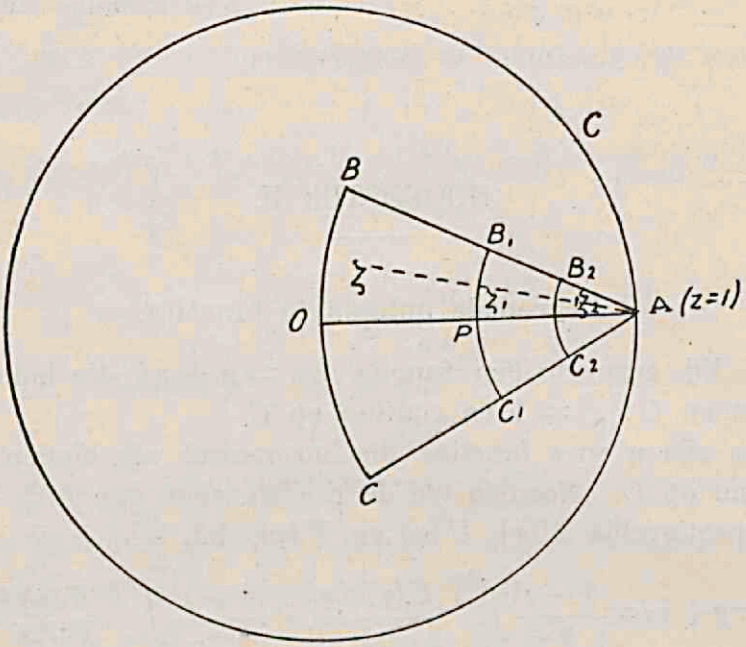
2. Stelling 1.

Als de functie $f(z)$ voor $|z| < 1$ holomorf en begrensd is,

$$f|z| < M,$$

en als $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$,

dan heeft $f(z)$ voor $z \to 1$ nul tot angulaire limiet.



Bewijs: We beschrijven met het punt A $(z = 1)$ tot middelpunt de cirkelbogen

$$B\,C\ ,\ B_1\,C_1\ ,\ B_2\,C_2\ ,\ \ldots\ ,\ B_n\,C_n\ ,\ \ldots\ ,$$

met stralen respectievelijk

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2^2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{2^n}\ ,\ \ldots$$

Noemen we de gebieden

$$B\,C\,C_1\,B_1\,B\ ,\ B_1\,C_1\,C_2\,B_2\,B_1\ ,\ \ldots\ ,\ B_n\,C_n\,C_{n+1}\,B_{n+1}\,B_n\ ,\ldots$$

respectievelijk

$$G_0\ ,\ G_1\ ,\ \ldots\ ,\ G_n\ ,\ \ldots\ ,$$

dan ontstaan de gebieden

$$G_1\ ,\ \ldots\ ,\ G_n\ ,\ \ldots$$

door vermenigvuldiging van G_0 uit A met

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2^2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{2^n}\ ,\ \ldots$$

Zij voor een punt z van $G_0 : \zeta = z - 1$, dan correspondeeren met dit punt in de gebieden

$$G_1 \ , \ G_2 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ , \ G_n \ , \ \ldots\ldots\ldots$$

de punten

$$1 + \frac{\zeta}{2} \ , \ 1 + \frac{\zeta}{2^2} \ , \ \ldots\ldots\ldots \ , \ 1 + \frac{\zeta}{2^n}, \ \ldots\ldots\ldots$$

We beschouwen in G_0 de functierij:

$$\psi_0(\zeta) = f(1 + \zeta)$$

$$\psi_1(\zeta) = f\left(1 + \frac{\zeta}{2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_n(\zeta) = f\left(1 + \frac{\zeta}{2^n}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De functierij $\psi_n(\zeta)$ is in G_0 gelijkmatig begrensd,

$$|\psi_n(\zeta)| < M.$$

Op segment $O\,P$ geldt:

$$\psi_n(\zeta) \to 0 \text{ voor } n \to \infty.$$

Volgens de stelling van VITALI kunnen we hieruit besluiten:

$$\psi_n(\zeta) \to 0 \text{ in het gebied } G_0,$$

dus: $f(z) \to 0$ voor $z \to 1$ in iedere hoek

$$|\arg(1 - z)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

3. *De stelling van Fatou.*

Stelling 2.

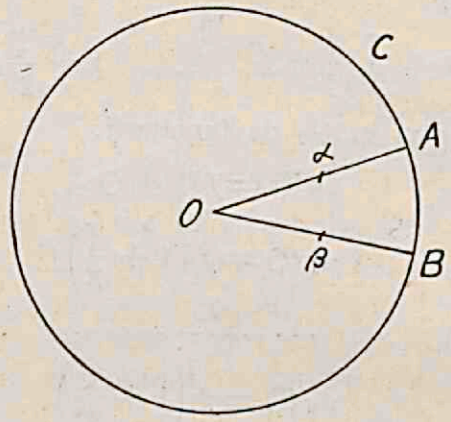
Als de functie $f(z)$ in het gebied $|z| < 1$ holomorf en begrensd is, $|f(z)| < M$,
dan nadert $f(z)$ op volle φ-maat tot een eindige limiet, als z radiaal nadert tot $C : |z| = 1$.

Bewijs. Binnen C zij:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots + a_n z^n + \ldots\ldots$$

We beschouwen ook de functie

$$F(z)=\int_0^z f(t)\,dt=\frac{a_0 z}{1}+\frac{a_1 z^2}{2}+\ldots\ldots+\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}+\ldots\ldots$$



Zijn α en β twee willekeurige punten binnen C, dan is:

$$|F(\alpha)-F(\beta)|=\left|\int_\beta^\alpha f(t)\,dt\right|\leq M|\beta-\alpha|.$$

De functie $F(z)$ is dus begrensd binnen C, bovendien gelijkmatig continu binnen en op C.

Laten we $\alpha\to A$ en $\beta\to B$, dan vinden we

$$|F(A)-F(B)|\leq M|B-A|$$

Noemen we de limietwaarden van $F(z)$ op C: $F(\varphi)$, dan volgt uit de bovenstaande betrekking, dat de functie $F(\varphi)$ begrensde differentiequotiënten heeft; $F(\varphi)$ heeft dus een afgeleide voor een verzameling φ-waarden, waarvan de complementaire verzameling de maat nul heeft en

$$\left|\frac{d\,F(\varphi)}{d\,\varphi}\right|\leq M.$$

De functie $F(z)$ wordt voorgesteld door de integraal van Poisson

$$F(z)=\frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F(\varphi)\,d\,\varphi}{r^2}.$$

Verder is: $f(z) = \frac{\partial F(z)}{i z \partial \theta}$.

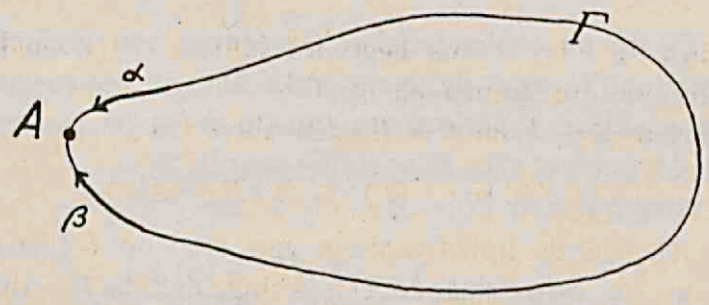
Toepassing van stelling 3, hoofdstuk I, geeft:
$\frac{\partial F(z)}{i \partial \theta}$ nadert op volle φ-maat tot $\frac{d F(\varphi)}{i d \varphi}$, als z radiaal nadert tot C.

Hieruit volgt dus:
$f(z)$ nadert op volle φ-maat tot een eindige limiet, als z radiaal nadert tot C.

In verband met stelling 1 van dit hoofdstuk, merken we nog op, dat $f(z)$ op volle φ-maat een angulaire limiet heeft.

4. Stelling 3.

Onderstelde: Gegeven is een Jordansche kromme Γ en een functie $f(z)$, holomorf en begrensd binnen Γ; op de boog α van Γ zij: $f(z) \to K$ voor $z \to A$, op de boog β van Γ zij: $f(z) \to L$ voor $z \to A$. (Zie onderstaande figuur).



Bewering: $L = K$.

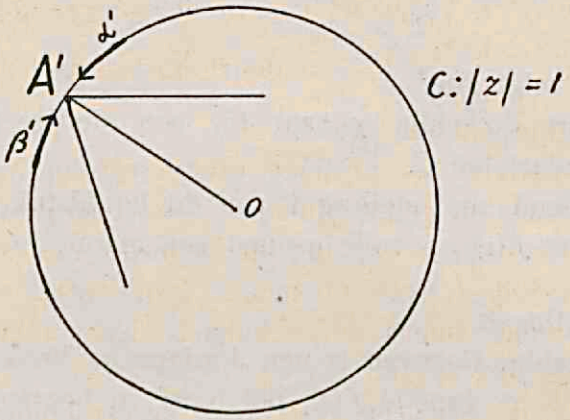
Bewijs: We beelden Γ en het gebied binnen Γ af op de cirkelschijf $|z| \leq 1$. (de correspondeerende bogen en punten zijn in de onderstaande figuur aangegeven door accenten).

De functie $f(z)$ gaat over in een functie $F(z)$, holomorf en begrensd binnen C, dus voor $|z| \leq 1$ is: $|F(z)| < M$.

$F(z)$ is een begrensde complexe harmonische functie en wordt dus voorgesteld door de integraal van Poisson.

Op straal $O A'$ geldt: $F(z) \to {}^1/_2 (K + L)$ voor $z \to A'$.

Als $L \neq K$ is, heeft $F(z)$ op twee verschillende koorden naar A' verschillende limieten, volgens de elementaire eigenschappen van de integraal van Poisson.



Dit is in tegenspraak met stelling I van dit hoofdstuk. Hieruit volgt: $L = K$.

5. Zij op de eenheidscirkel C gegeven een perfecte puntverzameling E van de maat nul. Dan is het mogelijk op C een positieve sommeerbare functie $F(\varphi)$ te construeeren, die in de punten van E oneindig wordt. [1])

De integraal van Poisson:

$$f(\rho, \theta) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi)\, d\varphi}{r^2}$$

bepaalt dan binnen C een harmonische functie, die in alle punten van E de waarde $+\infty$ krijgt (zie stelling 2, hoofdstuk I); bovendien is $f(\rho, \theta)$ binnen C positief.

Zij de functie $F(\varphi)$ verder zoo geconstrueerd, dat op elk segment binnen een complementair interval van E gelegen, $F(\varphi)$ begrensde differentiequotienten heeft. Dan krijgt de geconjugeerde harmonische functie $g(\rho, \theta)$ van $f(\rho, \theta)$ bepaalde

---

[1]) Zie Fatou: Acta Math., Band 30, blz. 342.

waarden op C, behalve in de punten van E (zie stelling 6, hoofdstuk I).

De functie $\varphi(z) = f(\rho, \theta) + i\, g(\rho, \theta)$ is holomorf binnen C en krijgt een oneindige waarde in alle punten van E; daar $f(\rho, \theta)$ positief is, krijgt $\varphi(z)$ nooit de waarde nul binnen C.

De functie $\frac{1}{\varphi(z)}$ is dus holomorf binnen C, continu op C en nul in alle punten van E.

Met behulp van het principe van de verdichting van singulariteiten is het mogelijk binnen C een begrensde holomorfe functie te construeeren, die de waarde nul krijgt in een puntverzameling E' van C, zoodat E' niet aftelbaar en overal dicht is; maar steeds blijft volgens deze methode E' van de maat nul. [1])

De vraag, door FATOU gesteld, of er een holomorfe functie binnen C bestaat, die bij radiale nadering tot C in alle punten van C de waarde nul krijgt, terwijl $f(z)$ niet identiek nul is, moet ontkennend worden beantwoord.

Stelling 4.

Onderstelde: *$f(z)$ is holomorf binnen de eenheidscirkel C; $a\,b$ is een boog van C, waarvan alle punten P de eigenschap hebben dat $f(z) \to 0$ als z radiaal $\to P$.*

Bewering: $f(z) \equiv 0$.

Bewijs: We beweren, dat $a\,b$ een deelboog $c\,d$ bevat, zoodanig dat de functie $f(z)$ in sector $O\,c\,d$ begrensd is.

Ontkenning beteekent n.l., dat $|f(z)|$ in iedere deelsector $O\,c\,d$ van sector $O\,a\,b$ onbegrensd is.

Er bestaat dan binnen deelsector $O\,c\,d$ een punt z_1, waar $|f(z)| > 1$ is.

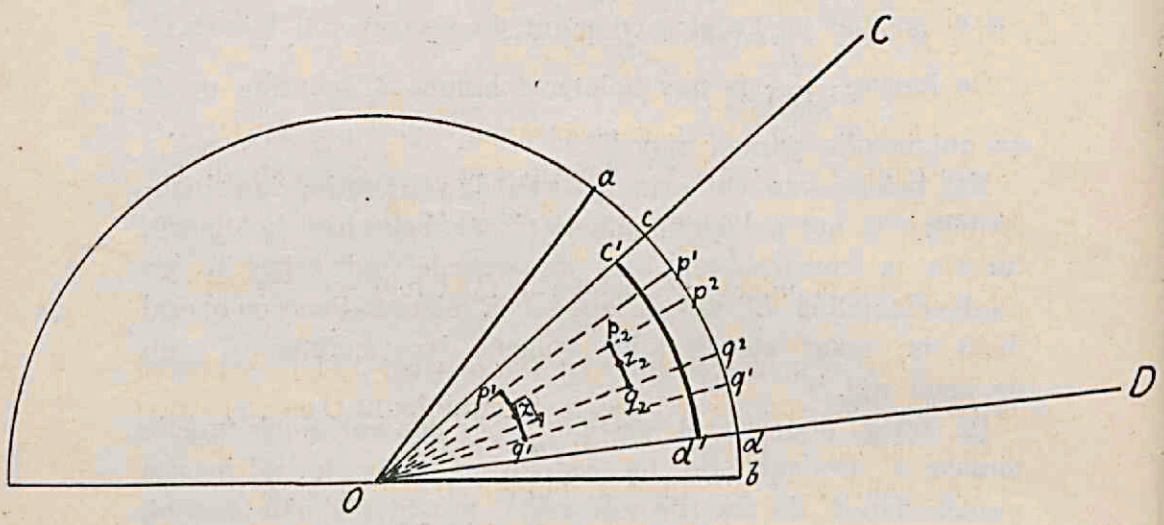
In verband met de continuiteit van $f(z)$ bestaat er dan een cirkelboog $p_1\,q_1$ met straal $|z_1|$, bevattende het punt z_1 en binnen $O\,c\,d$ gelegen, waarop overal geldt:

$$|f(z)| > 1.$$

[1]) Zie FATOU: Acta Math., Band 30, blz. 393.

We projecteeren deze cirkelboog $p_1 q_1$ uit O op C en we noemen de projectie $p' q'$.

In de deelsector $O p' q'$ is dan $|f(z)|$ onbegrensd.



In het gebied $p_1 q_1 q' p'$ bestaat dus een punt z_2, waar $|f(z)| > 2$ is.

Er bestaat een cirkelboog $p_2 q_2$ met straal $|z_2|$, bevattende het punt z_2 en binnen het gebied $p_1 q_1 q' p'$ gelegen, waarop overal geldt:

$$|f(z)| > 2.$$

We projecteeren deze cirkelboog $p_2 q_2$ uit O op C en we noemen de projectie $p^2 q^2$.

In de deelsector $O p^2 q^2$ is dan $|f(z)|$ onbegrensd.

In het gebied $p_2 q_2 q^2 p^2$ bestaat dus een punt z_3, waar $|f(z)| > 3$ is.

Er bestaat een cirkelboog $p_3 q_3$ met straal $|z_3|$, bevattende het punt z_3 en binnen het gebied $p_2 q_2 q^2 p^2$ gelegen, waarop overal geldt:

$$|f(z)| > 3.$$

Wordt de constructie op deze manier voortgezet, dan vinden we:

Het gebied $p_{n-1} q_{n-1} q^{n-1} p^{n-1}$ bevat een punt z_n, waar $|f(z)| > n$ is.

Er bestaat een cirkelboog $p_n q_n$ met straal $|z_n|$, bevattende het punt z_n en binnen het gebied $p_{n-1} q_{n-1} q^{n-1} p^{n-1}$ gelegen, waarop overal geldt:

$$|f(z)| > n.$$

De projecties van de cirkelbogen

$$p_1 q_1 \ , \ p_2 q_2 \ , \ \ldots\ldots \ , \ p_n q_n \ , \ \ldots\ldots$$

op C, hebben op C een gemeenschappelijk punt P. De verbindingslijn $O P$ snijdt alle cirkelbogen $p_n q_n$ en op straal $O P$ is dus

$$\lim_{|z| \to 1} \sup |f(z)| = +\infty.$$

$f(z)$ kan dus in iedere deelsector van $O a b$ niet onbegrensd zijn.

Zij $O c d$ een deelsector van $O a b$, waar $|f(z)|$ begrensd is en zij $c' d'$ een cirkelboog met middelpunt O en met straal $\rho < 1$, terwijl c' ligt op $O c$ en d' op $O d$.

Dan geldt voor elk punt z, binnen $O c' d'$ gelegen:

$$2 \pi i f(z) = \int_{O c' d' O} \frac{f(t)\, d t}{t - z}.$$

Daar de functie onder het integraalteeken begrensd is en daar boog $c d$ een volle maat van punten heeft waar z radiaal tot nul nadert, mogen we toepassen:

$$\lim \int = \int \lim,$$

dus:

$$2 \pi i f(z) = \int_{O c} \frac{f(t)\, d t}{t - z} - \int_{O d} \frac{f(t)\, d t}{t - z}.$$

De functie, voorgesteld door het verschil van deze integralen is echter holomorf in elk punt z binnen $\angle C O D$ gelegen, waarin C ligt op het verlengde van $O c'$ en D op het verlengde van $O d'$.

Derhalve is $f(z)$ voortzetbaar over $c d$ en de uitgebreide functie is nul op $c d$, dus

$$f(z) \equiv 0.$$

5. In de vorige §§ is aangetoond, dat een functie $f(z)$, die holomorf en begrensd is binnen de eenheidscirkel C, op

volle φ-maat nadert tot een eindige limiet $F(\varphi)$ als z radiaal nadert tot C en dat $F(\varphi)$ op volle φ-maat niet constant kan zijn, tenzij $f(z)$ constant is. In aansluiting hiermee geven we nog een bewijs van de stelling van RIESS, die inhoudt, dat $F(\varphi)$ slechts op een φ-maat nul eenzelfde radiale randwaarde kan hebben.

Voordat we overgaan tot het bewijs van deze stelling, bewijzen we eerst de volgende hulpstelling.

Hulpstelling.

Onderstelde: $f(z) = u + v\,i$ is holomorf voor $|z| < 1$;
$f(0) \neq 0$;
γ is een cirkel met straal < 1.

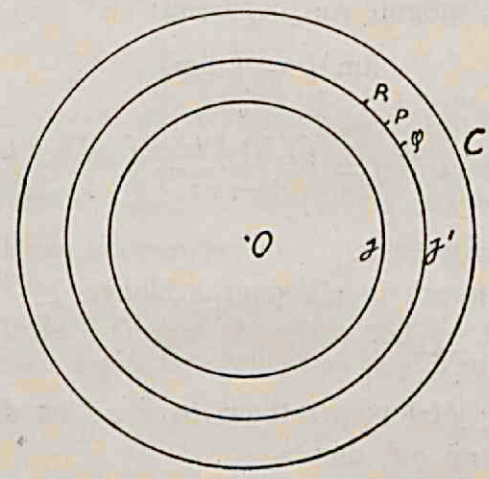
Bewering: $2\pi \log |f(0)| \leq \int_\gamma \log |f(z)|\, d\varphi$.

Bewijs. Zij ρ de straal van cirkel γ en

$$I(\rho) = \int_\gamma \log |f(z)|\, d\varphi.$$

Dan is:

$$I(\rho) = {}^1/_2 \int_\gamma \log |f(z)|^2\, d\varphi = {}^1/_2 \int_\gamma \log (u^2 + v^2)\, d\varphi.$$



$f(z)$ heeft binnen iedere cirkel met straal $\rho < 1$ slechts een eindig aantal nulpunten, want indien een oneindig aantal nulpunten aanwezig waren, dan hadden deze een ver-

dichtingspunt en dan was $f(z)$ overal nul. De stelling is dan triviaal.

Zij γ' een cirkel, waarop een nulpunt P van $f(z)$ ligt en zij QPR een interval op γ' (boog $QPR \to 0$ wil zeggen: $Q \to P$ en $R \to P$).

Dan bestaat volgens het kenmerk van GOURSAT:

$$\lim_{\text{boog } QPR \to 0} \int_{\gamma' - \text{boog } QPR} \log |f(z)| \, d\varphi$$

en in verband met de continuiteit van $f(z)$ mogen we hieruit besluiten:

bij elke ε $(0 < \varepsilon < 1)$ bestaat een getal δ, zoodanig dat

$$\left| \int_{\gamma'} \log |f(z)| \, d\varphi - \int_{\gamma''} \log |f(z)| \, d\varphi \right| < \varepsilon \text{ is,}$$

als de stralen ρ' en ρ'' van γ' en γ'' voldoen aan

$$|\rho' - \rho''| < \delta.$$

$I(\rho)$ is dus een continue functie van ρ.

Zij $I'(\rho)$ de afgeleide van $I(\rho)$ naar ρ, dan is:

$$I'(\rho) = {}^1/_2 \int_{\gamma} \frac{2\left(u\frac{\partial u}{\partial \rho} + v\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)}{u^2 + v^2} d\varphi, \text{ voor iedere } \gamma \text{ waarop } f(z)$$

nergens nul is.

Volgens de differentiaalvergelijkingen van CAUCHY-RIEMANN is:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial v}{\rho \, \partial \varphi} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} &= -\frac{\partial u}{\rho \, \partial \varphi} \end{aligned}\right\},$$

dus:

$$I'(\rho) = \int_{\gamma} \frac{u\frac{\partial v}{\partial \varphi} - v\frac{\partial u}{\partial \varphi}}{\rho(u^2 + v^2)} d\varphi = \frac{1}{\rho}\int_{\gamma} \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \text{ (toename van } Bg\,tg\frac{v}{u} \text{ bij rondgang over } \gamma)$$

$$= \frac{1}{\rho} \text{ (wijziging bij rondgang over } \gamma \text{ van arg. } f(z))$$

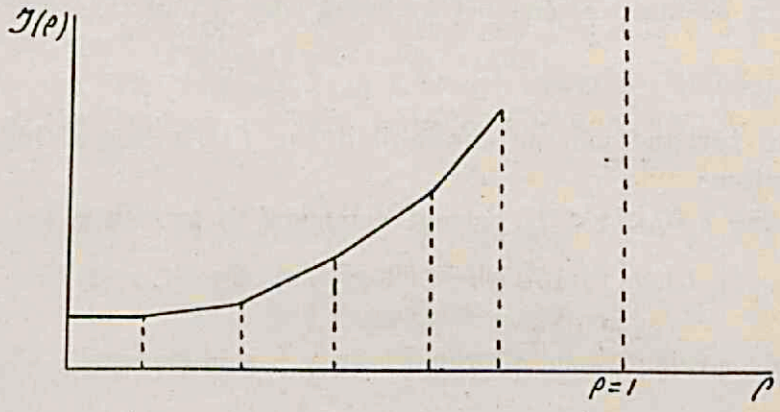
$$= \frac{2\pi}{\rho} \times \text{het aantal wortels van } f(z) \text{ binnen } \gamma.$$

Hieruit volgt:

$I'(\rho) \geq 0$, behalve voor geïsoleerde ρ-waarden.

$I(\rho)$ is dus een groeiende functie van ρ.

In verband met de continuiteit kan $I(\rho)$ dus als volgt graphisch worden voorgesteld:



Ten slotte vinden we:

$$I(0) \leq I(\rho),$$

en daar $I(\rho)$ in de buurt van $\rho = 0$ constant is, volgt:

$$2\pi \log |f(0)| \leq \int_{\gamma} \log |f(z)| \, d\varphi.$$

Stelling 5 (Stelling van Riess).

Onderstelde: *Binnen* $C: |z| = 1$ *is* $f(z)$ *een begrensde niet constante holomorfe functie,*

$$|f(z)| < M;$$

α *is een complex getal,* $|\alpha| \leq M$.

Bewering: *De verzameling van de punten* φ, *waar*

$$\lim_{t \to 1} f(\rho e^{\varphi i}) = \alpha$$

is van de maat nul.

Bewijs: We nemen eerst aan dat $f(0) \neq \alpha$.

Passen we de voorgaande hulpstelling toe op de functie $f(z) - \alpha$, dan is:

$$2\pi \log |f(0) - \alpha| \leq \int_{0}^{2\pi} \log |f(\rho e^{\varphi i}) - \alpha| \, d\varphi.$$

Zij ε een vast getal, $0 < \varepsilon < 1$.

We noemen $E_n(\varepsilon)$ de verzameling der argumenten φ, waarvoor:

$$\left| f\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{\varphi i}\right\} - \alpha \right| < \varepsilon \text{ is}$$

en zij $\mu\, E_n(\varepsilon)$ de hoekmaat van de verzameling $E_n(\varepsilon)$.

Dan is:

$$2\pi \log |f(0) - \alpha| \leq \mu\, E_n(\varepsilon) \log \varepsilon + 2\pi \log (2M).$$

Hieruit volgt:

$$-\mu\, E_n(\varepsilon) \log \varepsilon \leq 2\pi \log (2M) - 2\pi \log |f(0) - \alpha|$$

$$\leq \text{constante} = c,$$

dus: $$\mu\, E_n(\varepsilon) \leq \frac{c}{-\log \varepsilon} = \frac{c}{\log \frac{1}{\varepsilon}}.$$

De argumenten der stralen, waarop $f(z) \to \alpha$ voor $|z| \to 1$ vormen een verzameling, die een deel is van

$$\lim_{n \to \infty} \text{inf. } E_n(\varepsilon).$$

Bijgevolg is de maat daarvan hoogstens $\dfrac{c}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$.

Daar ε een willekeurig positief getal is, is die maat nul.

Is $f(0) = \alpha$, dan brengt men dit geval door middel van een lineaire transformatie op het voorafgaande terug, daar $f(z) \equiv \alpha$ in de onderstelling uitgesloten is.

HOOFDSTUK III.

Begrensde machtreeksen.

1. Binnen $C: |z| = 1$ zij gegeven een holomorfe functie $f(z)$, met

$$|f(z)| \leq 1;$$

binnen C is:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots + a_n z^n + \ldots\ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

In deze paragraaf zullen we eerst wijzen op enkele bekende eigenschappen van de coëfficienten a_n.

A. $|a_n| \leq 1$.

Zij γ een cirkel met straal $\rho < 1$, dan is:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z^{n+1}}.$$

Volgens stelling 2, hoofdstuk II, nadert $f(\rho e^{\varphi i})$ op volle maat tot een limiet $f(t)$ voor $\rho \to 1$,

$$|f(t)| \leq 1,$$

en daar $\frac{f(z)}{z^{n+1}}$ begrensd is voor $\rho < |z| < 1$, mogen we schrijven:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)\, i\, d\varphi}{(e^{\varphi i})^n} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt \leq 1.$$

B. $s_n = a_0 + a_1 z + \ldots\ldots + a_n z^n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ is voor alle functies $f(z)$ met bovengenoemde eigenschappen een begrensde functie voor elke vaste n.

Uit $|a_n| \leq 1$ volgt onmiddellijk:

$$|s_n| \leq |a_0| + |a_1| + \ldots\ldots + |a_n| \leq n + 1.$$

C. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ is convergent.

Bewijs: Zij $f(z) = u + v\,i$, dan is voor $\rho < 1$:

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho\, e^{\varphi i})|^2\, d\varphi = \int_0^{2\pi} (u^2 + v^2)\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} (u + v\,i)\ (u - v\,i)\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n e^{n\varphi i} \times \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m}\, \rho^m\, e^{-m\varphi i} \right\} d\varphi =$$

$$\sum_{(n,\,m)=0}^{\infty} a_n\, \overline{a_m}\, \rho^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{(n-m)\varphi i}\, d\varphi.$$

($\overline{a}$ beteekent het toegevoegd complex getal van a).

Verder is: $$\int_0^{2\pi} e^{(n-m)\varphi i}\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \{\cos(n - m)\varphi + i \sin(n - m)\varphi\}\, d\varphi.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n - m)\varphi\, d\varphi = 2\pi, \text{ als } n = m$$

$$= 0, \text{ als } n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n - m)\varphi\, d\varphi \equiv 0.$$

Hieruit volgt: $\int_0^{2\pi} |f(\rho\, e^{\varphi i})|^2\, d\varphi = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}$.

Verder is: $$\int_0^{2\pi} |f(\rho\, e^{\varphi i})|^2\, d\varphi \leq 2\pi.$$

Hieruit kunnen we besluiten:

$$\lim_{\rho \to 1} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leq 2\pi,$$

dus:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq 1.$$

D. $s_n = a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ is voor alle functies $f(z)$, die aan bovengenoemde eischen voldoen, geen begrensde functie van n, d. w. z. er bestaan functies $f(z)$, waarvoor $s_n \neq O(1)$.

In verband hiermee verwijzen we naar de functie van FEJÉR [1]). Door LANDAU [2]) is aangetoond, dat voor de verzameling van alle functies $f(z)$ met genoemde eigenschappen, de bovenste grens van

$$|s_n| = |a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_n|$$

voor elke vaste n de waarde G_n heeft, waarin

$$G_n = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1 \times 3 \times 5 \ldots\ldots \times (2\nu - 1)}{2 \times 4 \times 6 \ldots\ldots \times 2\nu} \right)^2,$$

en voor $n \to \infty$ is $G_n \backsim \frac{1}{\pi} \log n$.

Dus: $s_n = O(\log n)$, d. w. z. $\frac{|s_n|}{\log n}$ is begrensd voor alle waarden van n.

Ten slotte verwijzen we nog naar de functie van BOHR, [3]) waarmee is aangetoond, dat de betrekking:

$$s_n = O(\log n)$$

niet mag worden vervangen door de scherpere betrekking:

$$s_n = o(\log n).$$

---

[1], [2]) Zie LANDAU: Darstellung und Begründing einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.

[3]) Zie: H. BOHR: Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe. Nachrichten von der Königlichen Ges. der Wiss. zu Göttingen. Jahrgang 1916, Jahrgang 1917.

2. Stelling 1.

Binnen $C: |z| = 1$ *is* $f(z)$ *holomorf en* $|f(z)| \leq 1$.

Binnen C *is:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Verder zij: $$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu.$$

Dan is voor elke waarde van n*:*

$$|s_n| \leq \frac{1}{\pi} \log n + o(\log n),$$

dus: $$s_n = O(\log n).$$

Bewijs: Zij Γ een cirkel met straal $\rho < 1$ en $A\,B\,C$ een cirkelboog met straal $\frac{\rho}{n}$ en middelpunt $z = \rho$.

Dan is:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDA} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}.$$

De contour $A\,B\,C\,D\,A$ noemen we Γ'.

Dan is:

$$s_n = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma'} \frac{f(z)\,dz}{z} + \int_{\Gamma'} \frac{f(z)\,dz}{z^2} + \ldots + \int_{\Gamma'} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} \right\} =$$

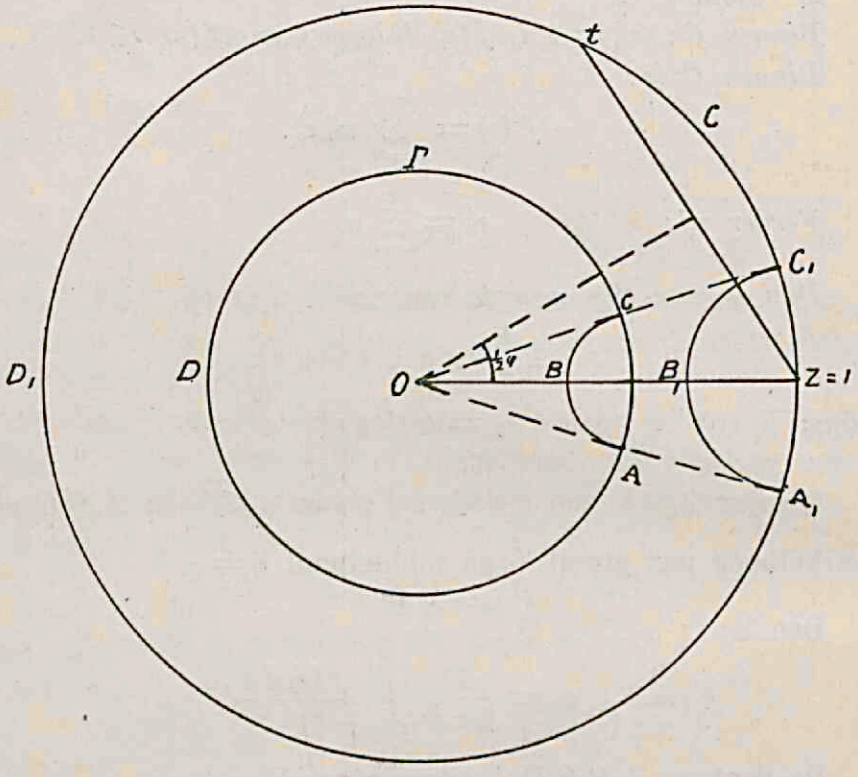
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{(z^{n+1} - 1)\, f(z)\,dz}{(z-1)\, z^{n+1}}.$$

Door splitsing van de integrant volgt:

$$s_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(z)\,dz}{(1-z)\, z^{n+1}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(z)\,dz}{1-z}.$$

De laatste integraal heeft de waarde nul, daar $\frac{f(z)}{1-z}$ binnen en op Γ' holomorf is.

Zij $A_1\,B_1\,C_1$ een cirkelboog met straal $\frac{1}{n}$ en middelpunt $z = 1$.



De contour $A_1 B_1 C_1 D_1 A_1$ noemen we Γ''.

De functie $\frac{f(z)}{(1-z)\,z^{n+1}}$ is begrensd in het gebied tusschen Γ' en Γ''; daar $\frac{f(z)}{(1-z)\,z^{n+1}}$ op volle maat van Γ'' nadert tot een eindige limiet, mogen we schrijven:

$$s_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''} \frac{f(t)\,dt}{(1-t)\,t^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{A_1 B_1 C_1} \frac{f(t)\,dt}{(1-t)\,t^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 D_1 A_1} \frac{f(t)\,dt}{(1-t)\,t^{n+1}}.$$

Op boog $A_1 B_1 C_1$ is: $t = 1 + \frac{1}{n} e^{\varphi i}$,

dus: $dt = \frac{1}{n} e^{\varphi i}\, i\, d\varphi$

$$|1-t| = \frac{1}{n}$$

$$|t^{n+1}| \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(is dus naar onderen begrensd).

Hieruit volgt:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1 D_1 A_1}\frac{f(t)\,dt}{(1-t)\,t^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_1 D_1 A_1}\frac{|f(t)|\,.\,\frac{1}{n}\,d\varphi}{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\times\frac{\pi}{n}\times n\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \leq \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = o(\log n).$$

Op boog $C_1 D_1 A_1$ is: $|f(t)| \leq 1$

$$|1-t| = 2\sin {}^1\!/_2\,\varphi$$

$$|t^{n+1}| = 1$$

Hieruit volgt:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1 D_1 A_1}\frac{f(t)\,dt}{(1-t)\,t^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=\frac{1}{n}}^{\varphi=2\pi-\frac{1}{n}}\frac{d\varphi}{2\sin {}^1\!/_2\,\varphi} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{d\varphi}{2\sin {}^1\!/_2\,\varphi} < 2\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{d\varphi}{\varphi} = 2(\log n + \log\pi) = O(\log n).$$

Stellen we ${}^1\!/_2\,\varphi = \psi$, dan krijgen we scherper:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{d\varphi}{2\sin {}^1\!/_2\,\varphi} \leq \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{2\,d\psi}{2\sin\psi} = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\psi}{\sin\psi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\log tg\,{}^1\!/_2\,\psi\,\Big|_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{\pi}\log tg\,{}^1\!/_4\,\pi - \frac{1}{\pi}\log tg\left(\frac{1}{4n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\log tg\left(\frac{1}{4n}\right).$$

Voor $n \to \infty$ is:

$$-\frac{1}{\pi}\log tg\left(\frac{1}{4n}\right) \sim -\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{4n}\right) \sim \frac{1}{\pi}\log 4n \sim \log n.$$

Hieruit volgt:

$$|s_n| \leq o(\log n) + \frac{1}{\pi}\log n.$$

3. Stelling 2.

Onderstelde: *Binnen* $C: |z| = 1$ *is* $f(z)$ *holomorf met* $|f(z)| \leq 1$;

de Fatou'sche limiet van $f(z)$ *op* $C: f(t)$, *is approximatief continu in* $z = 1$.

Bewering: $s_n(1) = o(\log n)$.

Bewijs: In de vorige paragraaf is aangetoond:

$$s_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^1} \frac{f(t)\,dt}{(1-t)\,t^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^1} \frac{|f(t) - f(1)|\,dt}{t^{n+1}(1-t)} + f(1).$$

Wegens de begrensdheid (onafhankelijk van n) van de bijdrage van de integraal geleverd door de cirkelboog $A_1B_1C_1$ $\left(\text{straal } \frac{1}{n}\right)$, blijft nog te bewijzen:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{|f(t) - f(1)|\,d\varphi}{\varphi} = o(\log n).$$

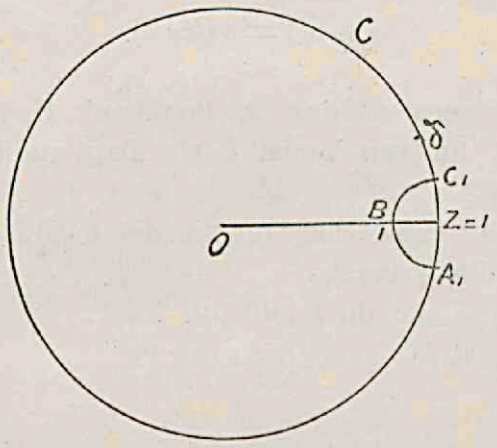
We stellen: $\int_0^{\varphi} |f(t) - f(1)|\,d\varphi = F(\varphi)$.

Daar $f(t) - f(1)$ approximatief nadert tot nul voor $t \to 1$, d. i. voor $\varphi \to 0$, heeft volgens een bekende stelling $F(\varphi)$ voor $\varphi = 0$ de afgeleide nul, dus:

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{F(\varphi)}{\varphi} = 0.$$

Zij ε een willekeurig positief getal; dan bestaat er een getal δ, zoodat voor $0 \leq \varphi \leq \delta$, geldt:

$$F(\varphi) < \varepsilon\, \varphi.$$



Voor deze vaste δ is:

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{|f(t) - f(1)|\, d\varphi}{\varphi} < 2 \int_{\delta}^{\pi} \frac{d\varphi}{\varphi} = 2 \log \varphi \Big|_{\delta}^{\pi} =$$

$$2(\log \pi - \log \delta) = \text{constante} = o(\log n).$$

Verder is: $\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{|f(t) - f(1)|\, d\varphi}{\varphi} = \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{1}{\varphi}\, dF(\varphi) =$

$$= \frac{1}{\varphi} F(\varphi) \Big|_{\frac{1}{n}}^{\delta} + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} F(\varphi)\, \frac{d\varphi}{\varphi^2}$$

$$\leq \frac{F(\delta)}{\delta} - n\, F\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\varepsilon\, \varphi}{\varphi^2}\, d\varphi$$

$$\leq o(1) + \varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{d\varphi}{\varphi}$$

$= o(1) + \varepsilon(\log \delta + \log n) < 2\, \varepsilon \log n$ voor n voldoend groot.

Hieruit volgt: $s_n = o(\log n)$.

4. Stelling 3.

Binnen $C: |z| = 1$ *is gegeven een holomorfe functie* $f(z)$ *met* $|f(z)| < 1$.

Dan is op volle φ*-maat:*

$$s_n(\varphi) = o(\log n).$$

Bewijs: Volgens stelling 2, hoofdstuk II, nadert $f(z)$ op volle φ-maat tot een limiet $F(\varphi)$, als z radiaal nadert tot een punt van C.

$F(\varphi)$ is een sommeerbare functie, dus $F(\varphi)$ is approximatief continu op volle φ-maat.

Uit stelling 2 van dit hoofdstuk volgt:
op volle φ-maat is $s_n(\varphi) = o(\log n)$.

HOOFDSTUK IV.

Een kenmerk voor „conformiteit op oneindig".

1. In het gebied $|z|<1$ zij gegeven een begrensde holomorfe functie $f(z)=u+v\,i$.

Daar v de geconjugeerde harmonische functie is van u, volgt uit stelling 6, hoofdstuk I:

$v(\rho, 0)$ nadert tot een eindige limiet voor $\rho \to 1$, indien de integraal

$$\int_{0}^{\pi-\varepsilon} \frac{u(\varphi)-u(-\varphi)}{tg\,\frac{1}{2}\varphi}\,d\varphi$$

nadert tot nul voor $\varepsilon \to 0$.

We onderwerpen het gebied $|z|\leq 1$ aan een lineaire transformatie $w=L(z)$ met dekpunten $(+i)$ en $(-i)$, zoodanig dat het punt (-1) in de oorsprong komt.

De lineaire transformatie is dan:

$$w=\frac{1+z}{1-z}.$$

Door deze lineaire transformatie wordt het gebied $|z|\leq 1$ afgebeeld op het rechter halfvlak $D(x\geq 0)$; de cirkelomtrek wordt afgebeeld op de Y-as, zoodanig dat de boog van (-1) over $(+i)$ naar $(+1)$ correspondeert met de Y-as van 0 tot $+\infty$.

Door de lineaire transformatie gaat de functie $f(z)=u+v\,i$ over in een functie $F(w)=U+V\,i$, die in het rechter halfvlak $(x>0)$ aan dezelfde voorwaarden voldoet als $f(z)$ in het gebied $|z|<1$.

Onderwerpen we een punt van de eenheidscirkel aan de lineaire transformatie:

$$w = \frac{1+z}{1-z},$$

dan is:

$$y\,i = \frac{1+\cos\varphi + i\sin\varphi}{1-\cos\varphi - i\sin\varphi} =$$

$$= \frac{(1+\cos\varphi + i\sin\varphi)\,(1-\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2-2\cos\varphi} =$$

$$= \frac{2\,i\sin\varphi}{4\sin^2 {}^1\!/_2\,\varphi} = \frac{i}{tg\ {}^1\!/_2\,\varphi}.$$

We vinden achtereenvolgens:

$$y = \frac{1}{tg\ {}^1\!/_2\,\varphi}$$

$$d\,y = -\frac{d\,(tg\ {}^1\!/_2\,\varphi)}{tg^2\ {}^1\!/_2\,\varphi} = -\frac{1}{2\sin^2 {}^1\!/_2\,\varphi}\,d\varphi$$

$$d\varphi = -2\sin^2 {}^1\!/_2\,\varphi\,d\,y$$

$$\operatorname{cosec}^2 {}^1\!/_2\,\varphi = 1+\cot^2 {}^1\!/_2\,\varphi = 1+y^2$$

$$\sin^2 {}^1\!/_2\,\varphi = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{d\varphi}{tg\ {}^1\!/_2\,\varphi} = y \times -2\,\frac{1}{1+y^2}\,d\,y = \frac{-2\,y}{1+y^2}\,d\,y.$$

Door de lineaire transformatie gaat dus de integraal

$$\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{|\,u(\varphi) - u(-\varphi)\,|\,d\,\varphi}{tg\ {}^1\!/_2\,\varphi}$$

over in de integraal

$$\int_0^{\infty} |\,U(y) - U(-y)\,|\,\frac{-2\,y}{1+y^2}\,d\,y.$$

Hieruit kunnen we besluiten:

V (x) nadert tot een eindige limiet voor $x \to \infty$, *indien de integraal*

$\int_0^{\infty} |\,U(y) - U(-y)\,|\,\frac{-2\,y}{1+y^2}\,d\,y$ *convergent is en omgekeerd;*

deze noodige en voldoende voorwaarde kunnen we nog vervangen door

$$\int_{\alpha > 0}^{\infty} | U(y) - U(-y) | \frac{dy}{y} \text{ convergent.}$$

2. In verband met een toepassing van het resultaat, in de vorige paragraaf verkregen, op het gebied van de conforme afbeelding, vermelden we eerst enkele stellingen uit de theorie van de conforme afbeelding.

Stelling I.

Onderstelde: $f(z)$ is een holomorfe functie in het gebied: $|z| < 1$,

$$|f(z)| < 1,$$
$$f(0) = 0.$$

Bewering: $$|f(z)| \leq |z|$$

Bewijs: De functie $\frac{f(z)}{z}$ is holomorf voor $|z| < 1$.

Zij $0 < \theta < 1$ en $|z| < \theta$.

Daar $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ in het gebied $|z| \leq \theta$ de maximumwaarde krijgt op de rand, is:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \text{maximum van } \left\{ \left|\frac{f(z)}{z}\right| \text{ voor } |z| = \theta \right\} \leq \frac{1}{\theta}.$$

$\theta \to 1$ geeft: $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$ voor iedere z, waarvan $|z| < 1$ is.

Stelling II.

Onderstelde: De functie $w = u + v\,i = f(x + y\,i)$ is holomorf voor $x > 0$;
$u > 0$.

Bewering: $\frac{u}{x}$ heeft voor $y = 0$ een limiet λ als $x \to \infty$,
terwijl $0 \leq \lambda < \infty$ is;
steeds is $u \geq \lambda x$.

Bewijs: Zij $f(\alpha_1) = \beta_1$.

We stellen: $\zeta = \dfrac{z - \alpha_1}{z - \alpha_1'}$ en $\omega = \dfrac{w - \beta_1}{w - \beta_1'}$,

waarin α_1' en β_1' de spiegelbeelden zijn van α_1 en β_1 ten opzichte van de imaginaire as.

Dan voldoet ω als functie van ζ aan de onderstellingen van stelling I, n.l.:

$$\omega = 0 \text{ voor } \zeta = 0,$$

en $\omega = \dfrac{w - \beta_1}{w - \beta_1'}$ is in absolute waarde kleiner dan 1.

Hieruit volgt: $|\omega| \leq |\zeta|$,

dus: $$\left|\frac{w - \beta_1}{z - \alpha_1}\right| \leq \left|\frac{w - \beta_1'}{z - \alpha_1'}\right|.$$

$z \to \alpha_1$ geeft $w \to \beta_1$ en $|f'(\alpha_1)| \leq \dfrac{\text{reëele deel van } \beta_1}{\text{reëele deel van } \alpha_1}$,

dus overal is $$|f'(z)| \leq \frac{u}{x}.$$

Voor $y = 0$ krijgen we:

$$\frac{d\,\frac{u}{x}}{d\,x} = \frac{x\,\frac{\partial u}{\partial x} - u}{x^2} \leq \frac{x\,|f'(x)| - u}{x^2} \leq 0.$$

Hieruit volgt, dat $\dfrac{u}{x}$ monotoon daalt en een limiet λ heeft en steeds is $\dfrac{u}{x} \geq \lambda$.

Stelling III.

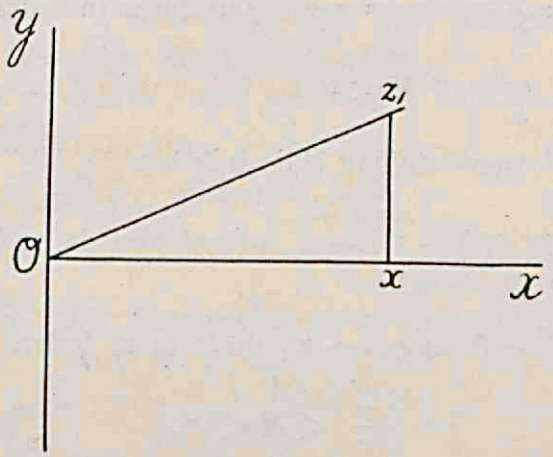
Onderstelde: De functie $w = u + v\,i = f(x + y\,i)$ is holomorf voor $x > 0$,
$u > 0$,
$\lambda = 0$.

Bewering: $\dfrac{u}{x} \to 0$ voor $z \to \infty$, uniform in iedere hoek

$$\left|\frac{y}{x}\right| < M < \infty.$$

Bewijs: Zij x een reëel getal >0 en $z_1 = x + y\,i$.
Zij $f(x) = w$ en $f(z_1) = w_1$.
Dan is volgens stelling II:

$$\left|\frac{w_1 - w}{w_1 - w'}\right| \leq \left|\frac{z_1 - x}{z_1 + x}\right| = \theta,$$



waarin w' het spiegelbeeld is van w ten opzichte van de imaginaire as.

Hieruit volgt, dat w_1 ligt binnen of op een cirkel met maximum abscis:

$$\frac{1+\theta}{1-\theta}u.$$

Stellen we $\frac{y}{x} = m$, dan is:

$$\theta = \left|\frac{z_1 - x}{z_1 + x}\right| = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4x^2}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 4}},$$

en we krijgen:

$$\frac{u_1}{x} \leq \frac{u}{x} \times \frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{u}{x}\,\frac{\sqrt{m^2+4} + m}{\sqrt{m^2+4} - m} =$$

$$= \frac{u}{x}\,\frac{m + \sqrt{m^2+4}}{4} < (M+1)^2\,\frac{u}{x},$$

dus: $\frac{u_1}{x} \to 0$ voor $z \to \infty$, uniform als m begrensd is.

Stelling IV.

Onderstelde: $w = u + v\,i = f(x + y\,i)$ is holomorf voor

$$x > 0,$$
$$u > 0,$$
$$\lambda > 0.$$

Bewering: $\frac{u}{x} \to \lambda$ voor $z \to \infty$, uniform in iedere hoek

$$\left|\frac{y}{x}\right| < M < \infty.$$

Bewijs: Volgens stelling II is $u \geq \lambda x$.

Zij $\mu > 0$.

De functie $f(z) - \lambda z + \mu$ voldoet aan de onderstellingen van stelling III, dus:

$\frac{u - \lambda x - \mu}{x} \to 0$ voor $z \to \infty$, uniform in iedere hoek

$$\left|\frac{y}{x}\right| < M < \infty,$$

dus ook $\frac{u}{x} \to \lambda$.

Stelling V.

Onderstelde: $w = u + v\,i = f(x + y\,i)$ is holomorf voor

$$x > 0,$$
$$u > 0,$$
$$\lambda = 0.$$

Bewering: $f'(z) \to 0$ uniform in iedere hoek $\left|\frac{y}{x}\right| < M < \infty$

voor $z \to \infty$;

hetzelfde geldt voor $\frac{f(z)}{z}$.

Bewijs: De eerste bewering volgt uit $|f'(z)| \leq \frac{u}{x}$ en uit stelling III.

Het tweede gedeelte bewijzen we als volgt.

We nemen een willekeurige halfrechte $\frac{y}{x} = c$, zoodat

$x > 0$ en $c < M$ is.

Zijn z en z_1 twee veranderlijke punten van deze rechte,

$$|z_1| < |z|,$$

dan is:

$$f(z) = f(z_1) + \int_{z_1}^{z} f'(t)\, d\, t.$$

Daar $f'(t) \to 0$ voor $z \to \infty$, is z_1 zoodanig te kiezen, dat op de verbindingslijn van z_1 en z geldt:

$|f'(t)| < \varepsilon$, waarin ε een willekeurig positief getal is.

Hieruit volgt:

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \left|\frac{f(z_1)}{z}\right| + \left|\frac{z - z_1}{z}\right| \varepsilon.$$

Daar $\left|\frac{f(z_1)}{z}\right| \to 0$ voor $z \to \infty$, is de stelling bewezen.

Stelling VI.

Onderstelde: $w = u + v\, i = f(x + y\, i)$ is holomorf voor

$$x > 0,$$
$$u > 0,$$
$$\lambda > 0.$$

Bewering: $f'(z) \to \lambda$ en $\frac{f(z)}{z} \to \lambda$ voor $z \to \infty$, uniform in

iedere hoek $\left|\frac{y}{x}\right| < M < \infty$.

Bewijs: Zij $\mu > 0$.

De functie $f(z) - \lambda z + \mu$ voldoet aan de onderstellingen van stelling V, dus:

$$f'(z) - \lambda \to 0 \text{ en } \frac{f(z)}{z} - \lambda + \frac{\mu}{z} \to 0 \text{ voor } z \to \infty.$$

Hieruit volgt:

$f'(z) \to \lambda$ en $\frac{f(z)}{z} \to \lambda$ voor $z \to \infty$ uniform in iedere hoek

$$\left|\frac{y}{x}\right| < M < \infty.$$

3. We veronderstellen, dat het rechter halfvlak $D\,(x>0)$ door een functie

$$w=f(z)=u+v\,i$$

conform (1, 1) wordt afgebeeld op een deelgebied Δ van D, bijvoorbeeld met grens Γ.

Uit de vorige paragraaf volgt:

$\frac{w}{z}\to\lambda$ voor $z\to\infty$, uniform in iedere hoek $\left|\frac{y}{x}\right|<M<\infty$.

Definitie: de afbeelding is „conform op oneindig", als $\lambda>0$ is (λ is daar de „schaal").

Stelling: Indien de functie $w=f(z)$ het rechter halfvlak $D\,(x>0)$ conform (1, 1) afbeeldt op een deelgebied Δ van D, dan is noodig en voldoende voor „conformiteit op oneindig", dat de integraal

$$\int_{x>0}^{\infty}\left|\pi-\arg w(y)+\arg w(-y)\right|\frac{d\,y}{y}$$

convergent is.

Bewijs: Noodig en voldoende voor conformiteit op oneindig is de eindigheid van $\log\lambda$,

of: $\log\left|\frac{w}{z}\right|\to$ eindige limiet op $O\,X$ voor $x\to\infty$.

Daar $\arg\frac{w}{z}$ een geconjugeerde harmonische functie is van $\log\left|\frac{w}{z}\right|$, volgt door toepassing van § 1 van dit hoofdstuk:

$\log\left|\frac{w}{z}\right|\to$ eindige limiet op $O\,X$ voor $x\to\infty$ dàn en dàn alleen, indien de integraal

$$\int_{x>0}^{\infty}\left\{\arg\frac{w(y)}{y}-\arg\frac{w(-y)}{-y}\right\}\frac{d\,y}{y}$$

convergent is.

Daar $\arg y = \frac{\pi}{2}$ en $\arg -y = -\frac{\pi}{2}$, als $y > 0$ is, kan de laatste integraal worden vervangen door de integraal

$$\int_{\alpha > 0}^{\infty} | \pi - \arg w(y) + \arg w(-y) | \frac{dy}{y}. \quad ^{1})$$

4. In het rechter halfvlak $D(x > 0)$ zij gegeven een kromme Γ met de volgende eigenschappen:

1°. het deel van Γ boven de X-as heeft een poolvergelijking $\rho = \rho(\theta)$ [θ zij de hoek van de voerstraal met de Y-as, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$];

2°. op het deel van Γ boven de X-as draait de raaklijn voor $\theta \to 0$ continu linksom en $\to$ vertikaal;

3°. Γ is symmetrisch ten opzichte van de X-as.

We noemen het gebied rechts van Γ: Δ en we beelden D op Δ af door een functie

$$w = u + v\,i = f(z),$$

zoodat $v = 0$ voor $y = 0$

en dat $w \to \infty$ voor $z \to \infty$.

De afbeelding is conform op oneindig indien de λ van $f(z)$ positief is.

Daar Γ symmetrisch is ten opzichte van de X-as, is de noodige en voldoende voorwaarde voor conformiteit op oneindig, dat de integraal

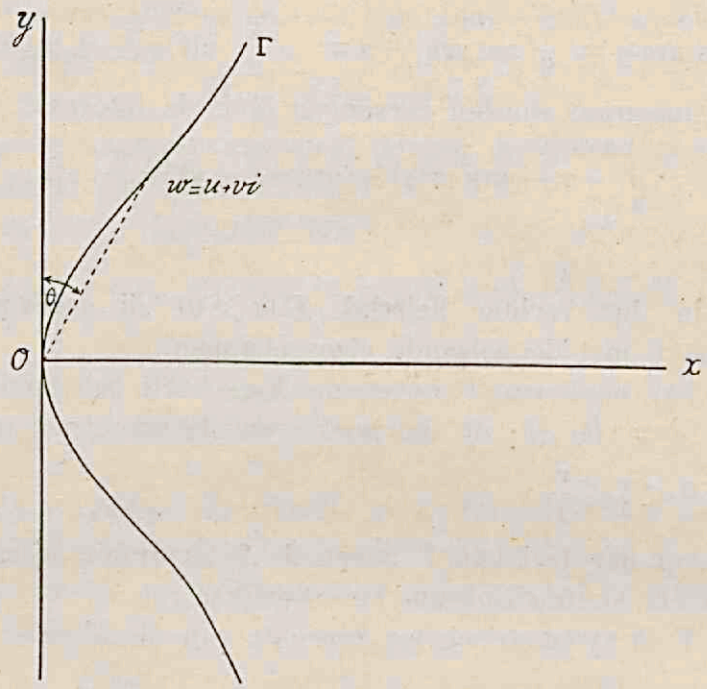
$$\int_{1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arg w(y)}{y} dy$$

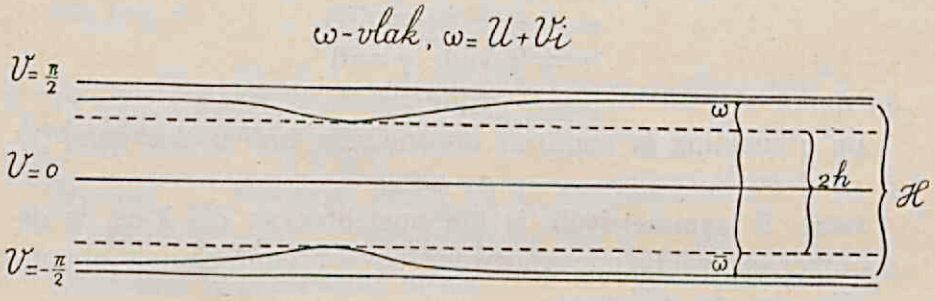
convergent is.

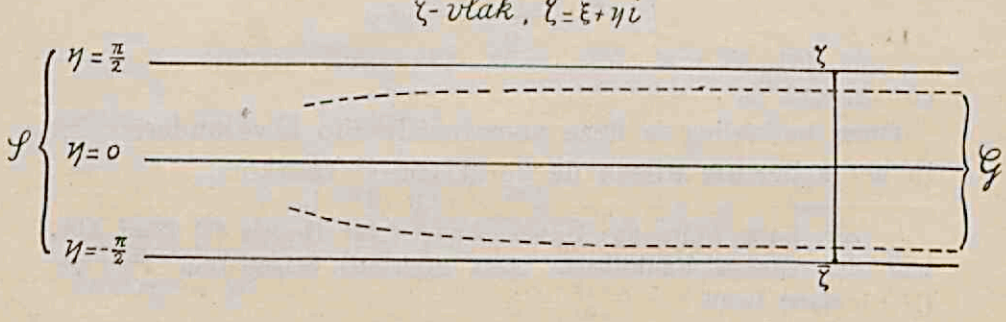
Onze bedoeling is deze voorwaarde zoo te veranderen, dat in het kriterium alleen de vorm van Γ voorkomt.

---

[1]) Zie: LARS ALHFORS: Untersuchungen zur Theorie der Konf. Abb. und der ganzen Funktionen. Acta Societatis Scientiarum, Fenniçae (Helsingfors) 1930.


y
Γ
w=u+vi
θ
O
x


ω-vlak, ω=U+Vi
V=π/2
V=0
V=-π/2
ω
ω
2h
H


ζ-vlak, ζ=ξ+ηi
η=π/2
η=0
η=-π/2
S
ζ
ζ
G

Bewering: Er bestaat een positief getal C, zoodat voor $y > C$ *geldt, dat* $\frac{\log |w(y)|}{\log y}$ *ligt tusschen twee positieve constanten A en B.*

Bewijs: We stellen $\zeta = \xi + \eta i = \log z$

en $\omega = U + V i = \log w$

Uit het onderstelde volgt, dat met ∞ van het z-vlak correspondeert het oneindig ver naar rechts liggend punt van de strook $|V| < \frac{\pi}{2}$. We noemen deze strook H.

Voor ζ op de rechte $\eta = \frac{\pi}{2}$ geldt:

$$\arg \frac{d\omega}{d\zeta} = \arg d\omega = B\,tg \frac{dV}{dU} = B\,tg \frac{d \arg w}{d \log |w|} =$$

$$= - B\,tg \frac{\rho\, d\theta}{d\rho}.$$

Uit de eigenschappen van Γ volgt:

$\frac{\rho\, d\theta}{d\rho} \to 0$ voor $\theta \to 0$, dus de binnen de strook $S\left(\eta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ begrensde harmonische functie $\arg \frac{d\omega}{d\zeta}$ van ζ nadert op beide randen van S voor $\xi \to \infty$ tot nul.

Derhalve geldt tweedimensionaal (stelling 1, hoofdstuk II):

$$\arg \frac{d\omega}{d\zeta} \to 0 \text{ voor } \xi \to \infty.$$

Hieruit kunnen we besluiten:

de beelden van genoegzaam ver naar rechts gelegen verticale lijnen $\zeta\bar{\zeta}$ van S worden krommen, waarop de schommeling van U zoo klein is als men wil. . . . . (1)

Op OX geldt:

$$\frac{|w|}{|z|} \text{ is afnemend en } \frac{|w|}{|z|} \to \lambda.$$

Dus op de diameter van S geldt:

$U - \xi$ is afnemend als ξ toeneemt.

Als dus op die diameter ξ met 1 toeneemt, neemt U op den duur met hoogstens 1 toe.

Hieruit kunnen we onmiddellijk besluiten:

$$\frac{U}{\xi} < A',\ A' \text{ vast voor } \xi > c > 0,\ \eta = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

Nu bevat H een strook $|V| < h,\ h > 0$.

Deze strook beeldt zich af als een gebied G, gedefinieerd door

$$|\eta| < f(\xi) \text{ met } 0 < f(\xi) < h_1,\ -\infty < \xi < \infty,$$

$$f'(\xi) \to 0 \text{ en } f(\xi) \to h_1 \text{ voor } \xi \to \infty.$$

Onderwerpen we het gebied $|V| \leq h$ aan de gelijkvormigheidstransformatie

$$|V'| = |V| \times \frac{\pi}{2h}$$

dan is het gedrag van het gebied G ten opzichte van de strook $|V'| \leq \frac{\pi}{2}$ analoog met het gedrag van het gebied H ten opzichte van de strook $|\eta| \leq \frac{\pi}{2}$.

Hieruit volgt:

$$\frac{\xi}{U'} < B'',\ B'' \text{ vast voor } \xi > c_2 > 0,\ \eta = 0.$$

Dus ook: $\frac{\xi}{U} < B',\ B'$ vast voor $\xi > c_1 > 0,\ \eta = 0$ . . (3)

Door combinatie van (1), (2) en (3) vinden we:

$$0 < B''' < \frac{U}{\xi} < A''',\ B''' \text{ en } A''' \text{ vast voor } \xi > c_3 > 0$$

en voor alle η,

dus:

$$0 < B''' < \frac{\log |w(y)|}{\log y} < A''' \text{ voor } y > c_3 > 0.$$

Hetgeen te bewijzen was.

Maar in verband met de vorm van Γ kunnen we hieruit besluiten:

$$0 < B'''' < \frac{\log v(y)}{\log y} < A'''' \text{ voor } y > c > 0.$$

Ten slotte is dus het resultaat:

Er bestaan positieve getallen C, A en B, zoodat voor $y > C$ geldt:

$$B \log v(y) < \log y < A \log v(y).$$

Met behulp van dit resultaat gaan we de voorwaarde voor conformiteit op oneindig wijzigen.

We stellen: $\frac{\pi}{2} - \arg w(y) = \theta(y)$.

Er bestaat een positief getal C, zoodat voor $y > C$ geldt:

$$B \log v < \log y < A \log v.$$

Er bestaat een positief getal D, zoodat voor $y > D$ geldt:

$$\frac{d\theta(y)}{dy} \text{ is negatief.}$$

Dus bestaat er een positief getal E, zoodat voor $E > C$ en $E > D$ aan beide voorwaarden wordt voldaan.

Noodig en voldoende voor conformiteit op oneindig is, dat

$$\int_E^\infty \frac{\theta(y)\,dy}{y} \text{ convergent is.}$$

Zij $N > E$, dan is:

$$\int_E^N \frac{\theta(y)\,dy}{y} = \theta(N)\log N - \theta(E)\log E - \int_E^N \log y \frac{d\theta(y)}{dy}\,dy$$

$$< A\,\theta(N)\log v(N) - A\,\theta(E)\log v(E) - A\int_E^N \log v\, d\theta(y) +$$

$$+ \{A\,\theta(E)\log v(E) - \theta(E)\log E\}$$

$$= A\int_{v(E)}^{v(N)} \frac{\theta(v)\,dv}{v} + (\text{constante, die onafhankelijk is van } N) \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\int_E^N \frac{\theta(y)\,dy}{y} > B\,\theta(N)\log v(N) - B\,\theta(E)\log v(E) - B\int_E^N \log v\, d\theta(y) +$$

$$+ \{B\,\theta(E)\log v(E) - \theta(E)\log E\} =$$

$$= B\int_{v(E)}^{v(N)} \frac{\theta(v)\,dv}{v} + (\text{constante, die onafhankelijk is van } N). \quad . \quad . \quad (2)$$

Conclusie: Als de afbeelding conform op oneindig is ($\lambda > 0$), dan is $\int_E^N \frac{\vartheta(y)\,dy}{y}$ begrensd voor alle N, dus ook wegens (2):

$$\int_{v(E)}^{\infty} \frac{\vartheta(v)\,dv}{v} \text{ convergent.}$$

Als $\int_{v(E)}^{\infty} \frac{\vartheta(v)\,dv}{v}$ convergeert, dan is volgens (1) ook $\int_E^{\infty} \frac{\vartheta(y)\,dy}{y}$ convergent, dus de afbeelding conform op oneindig ($\lambda > 0$).

Noodig en voldoende voor conformiteit op oneindig is dus, dat

$$\int_1^{\infty} \frac{\vartheta(v)\,dv}{v} \text{ convergent is.}$$

Maar $\vartheta(v) = B\,tg\frac{u}{v} \sim \frac{u}{v}$.

Ten slotte vinden we dus:

Noodig en voldoende voor conformiteit op oneindig ($\lambda > 0$) is, dat de integraal

$$\int_1^{\infty} \frac{u}{v^2}\,dv \text{ convergent is.}$$

We geven ten slotte nog enkele voorbeelden van krommen, waarbij de afbeelding conform op oneindig is.

Zij de vergelijking van het deel van Γ boven de X-as

$$y = x^p$$

en zij Γ symmetrisch ten opzichte van de X-as, dan is de integraal

$$\int_2^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{p}}\,dy}{y^2} \text{ convergent voor } p > 1,$$

dus $\lambda > 0$ voor $p > 1$.

Zoo vinden we:

$\lambda = 0$ bij $x = \frac{y}{\log y}, \frac{y}{\log y \log_2 y}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lambda > 0$ bij $x = \frac{y}{(\log y)^{1+\delta}}, \frac{y}{\log y (\log_2 y)^{1+\delta}}, \ldots\ldots\ldots$

waarin $\delta > 0$ is. [1])

---

[1]) Zie VALIRON: Bulletin des Sciences mathématiques, 53, 1929 (*Sur un théorème de* M. JULIA, *étendant le lemme de Schwarz*, § 4.

STELLINGEN

STELLINGEN.

1.

De vraag, door P. FATOU gesteld, of er een holomorfe functie $f(z)$ binnen de eenheidscirkel bestaat, die bij radiale nadering tot de cirkelomtrek in alle punten van de cirkelomtrek de waarde nul krijgt, terwijl $f(z)$ niet identiek nul is, moet ontkennend worden beantwoord.

P. FATOU: Acta mathematica, Band 30, blz. 393.

2.

De moderne theorie van de integraal van POISSON is van veel belang voor de conforme afbeelding.

3.

De theorie van de begrensde machtreeksen vertoont groote overeenkomst met de theorie van de mod. 2π periodieke meetbare begrensde functies bij de reeksen van FOURIER.

4.

De stelling van P. FATOU over de randwaarde van de geconjugeerde harmonische functie van de integraal van POISSON blijft gelden, indien wordt verondersteld, dat de op de eenheidscirkel gegeven begrensde sommeerbare functie $F(\varphi)$ in een interval $(\varphi + \delta,\ \varphi - \delta)$ de eigenschap heeft, dat $\lim_{\delta \to 0} F(\varphi \pm \delta) = 0$.

P. FATOU, Acta Mathematica, Band 30.

5.

Het is gewenscht de metingen van BENGT BECKMAN over de groote weerstandstoename van kwik in een magnetisch veld boven het sprongpunt bij temperatuursdaling van $T = 20°,3\ K$ tot $T = 14°,5\ K$ te herhalen en uit te breiden voor andere suprageleiders.

Comm. van Leiden, 132a, § 17.

6.

De chemische binding, opgevat als electrostatisch verschijnsel, verklaart op bevredigende wijze de verschillen in vluchtigheid der halogeenverbindingen van vele elementen.

7.

Tegen de opvatting, dat een WOLF-RAYET ster als eindproduct van een nova moet worden beschouwd, zijn bezwaren aan te voeren.

8.

De zoogenaamde logische bewijzen voor de eindigheid van ruimte en tijd zijn onjuist.

TH. MOREUX: Les confins de la science et de la foi.
P. APEL: Die Überwinding des Materialismus.

9.

De schijnbare paradoxole moeilijkheden, die zich in de projectieve analytische meetkunde voordoen bij het bepalen van het aantal figuren die aan gestelde eischen voldoen, worden verklaard doordat men een stelsel vergelijkingen, tezamen met een stelsel ongelijkheden moet oplossen.

10.

Het gebruik van de affiniteitsas $s_{1,2}$ geeft bij verschillende constructies in de Beschrijvende Meetkunde geen voordeel.

WIJDENES: Euclides, 7e jaargang 1930—1931, n°. 3.