



Continue, multioscilleerende functies

<https://hdl.handle.net/1874/301716>

A⁴ 502
5027
4^e portef

CONTINUE,
MULTIOSCILLEERENDE
FUNCTIES

F. W. NIJHOFF

4.
183.
acht

CONTINUE, MULTIOSCILLEERENDE FUNCTIES

$\mathcal{A}^{4^{\circ}}$ 1922, 1927

4. portef

CONTINUE, MULTIOSCILLEERENDE FUNCTIES

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN
DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN
NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVER-
SITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN
RECTOR MAGNIFICUS DR. A. NOORDT ZIJ,
HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER
GODGELEERDHEID, VOLGENS BESLUIT
VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT
TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FA-
CULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE
TE VERDEDIGEN OP
MAANDAG 24 JANUARI 1927,
DES NAMIDDAGS 4 UUR, DOOR
FREDERIK WILLEM NIJHOFF,
GEBOREN TE MEPPEL.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

AMSTERDAM, H. A. VAN BOTTENBURG —
N.V. DAGBLAD EN DRUKKERIJ DE STANDAARD

De 7. 1846. In de laatste week van
de maand van de maand van de maand van
de 7. 1846. In de laatste week van
de maand van de maand van de maand van

De 7. 1846. In de laatste week van
de maand van de maand van de maand van
de 7. 1846. In de laatste week van
de maand van de maand van de maand van

Aan mijn Ouders

Bij het voltooien van mijn academische studie is het mij een aangename taak, U, Hoogleraren en Lectoren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, dank te zeggen voor hetgeen Gij tot mijn vorming hebt bijgedragen.

In 't bijzonder dank ik U, Hooggeleerde WOLFF, hooggeachte Promotor, voor de bemoedigende belangstelling en den voortdurenden steun, die ik van U bij de samenstelling van dit proefschrift mocht ondervinden.

INHOUD

Inleiding	Blz. 1
Hoofdstuk I, Voorbeelden van Continue, multi- oscilleerende functies	„ 5
Hoofdstuk II, Algemeene eigenschappen	„ 23
Hoofdstuk III, Overal differentieerbare, multioscil- leerende functies	„ 33

INLEIDING.

Alvorens over te gaan tot de behandeling van ons eigenlijke onderwerp, zullen wij eenige daarbij herhaaldelijk optredende begrippen uiteenzetten. Ook zullen in deze inleiding enkele hulpstellingen bewezen worden.

We beschouwen steeds eendimensionale puntverzamelingen en daarop reële functies. Het reële getal x zal in verband daarmee dikwijls ook het *punt* x genoemd worden.

De verzameling der punten x , die voldoen aan $a \leq x \leq b$ noemen we het *segment* ab of korter $\overline{ab}$.

En het *interval* ab of kortweg ab , is de verzameling der punten x , waarvoor geldt $a < x < b$.

De lengte van $\overline{ab}$ of ab is het getal $b-a$; a en b heeten eindpunten.

Al naar gelang $x_1 > x_2$ of $x_1 < x_2$ zeggen we, dat x_1 rechts of links van x_2 ligt.

Een *omgeving* van x_0 of een *interval* om x_0 is een interval, dat x_0 bevat.

Is $\varepsilon > 0$ en $\delta > 0$, dan heet het interval $x_0, x_0 + \varepsilon$ een *rechter-* en het interval $x_0 - \delta, x_0$ een *linkeromgeving* van x_0 . Met ε en δ zullen in 't vervolg niet anders dan positieve getallen worden aangeduid.

Zij $f(x)$ een functie, gedefinieerd in een zeker interval ab .

Het punt x_0 in ab zal een *eigenlijk maximum* of kortweg maximum van $f(x)$ heeten, indien er een getal δ bestaat, zoodat $f(x) < f(x_0)$, voor $|x - x_0| < \delta$, uitgezonderd $x = x_0$. Kan hieraan niet voldaan worden, maar is er wel een getal δ , zoodat $f(x) \leq f(x_0)$ voor $|x - x_0| < \delta$, terwijl $f(x) = f(x_0)$ noch in een geheele rechter-, noch in een geheele linkeromgeving van x_0 geldt, dan heet x_0 een *oneigenlijk maximum* van $f(x)$.

Hierna is zonder meer duidelijk, wat verstaan moet worden onder een *eigenlijk* of *oneigenlijk minimum* van $f(x)$.

x_0 heet een *verdichtingspunt* van een puntverzameling E , als in iedere omgeving van x_0 een van x_0 verschillend punt van E ligt.

Een *linkerlimietpunt* van E is een punt met de eigenschap, dat in iedere linkeromgeving ervan een punt van E ligt. Analoge definitie voor een *rechterlimietpunt* van E .

E heet *gesloten*, als ieder verdichtingspunt van E tot E behoort.

Een *perfecte* puntverzameling E is een gesloten puntverzameling met de eigenschap, dat ieder punt van E verdichtingspunt van E is.

De verzameling E' der punten, die niet tot een gegeven verzameling E behooren, noemen we het *complement* van E .

De vereeniging $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$ van eindig of aftelbaar veel puntverzamelingen $E_1, E_2, E_3, \dots$ is de verzameling der punten, die tot minstens één der verzamelingen E_n behooren.

De verzameling der punten, die tot alle verzamelingen $E_1, E_2, E_3, \dots$ behooren, heet de doorsnee $E_1 E_2 E_3 \dots$ van die verzamelingen. Deze kan leeg zijn.

De verder in de inleiding nog volgende definities en stellingen gelden, indien er sprake is van een interval $a b$, evenzeer voor het segment $a b$.

Het complement van een puntverzameling E in het interval $a b$ is de verzameling der punten van $a b$, die niet tot E behooren.

E heet overal dicht in $a b$, als ieder deelinterval $\alpha \beta$ van $a b$ een punt van E bevat.

Bevat daarentegen ieder van die deelintervallen een interval, dat geheel tot E' behoort, dan heet E nergens dicht in $a b$.

Een vereeniging van aftelbaar veel verzamelingen, die nergens dicht zijn in $a b$, noemen we een *ensemble gerbé* in $a b$.

Een *ensemble gerbé* is hetzelfde, als wat R. BAIRE⁽¹⁾ verstaat onder een verzameling van de eerste categorie.

Onder een *residuel*⁽²⁾ van $a b$ verstaan we een verzameling, wier complement een *ensemble gerbé* is in $a b$.

Omtrent deze verzamelingen zullen we de volgende stellingen noodig hebben:

I. Een *residuel* R van $a b$ is in $a b$ overal dicht en bevat zelfs in ieder deelinterval van $a b$ een perfect deel.

Bewijs: Zij $\alpha \beta$ een willekeurig gekozen deelinterval van $a b$ en R' het complement van R in $a b$. R' is de vereeniging van aftelbaar veel verzamelingen $E_1, E_2, E_3, \dots$, die nergens dicht zijn in $a b$.

$$R' = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

Omdat E_1 nergens dicht is in $a b$, zijn er in $\alpha \beta$ twee buiten elkaar liggende segmenten s_1 en s_2 te vinden, die geheel tot E_1' behooren. Op s_1 neemt men nu twee segmenten s_{11} en s_{12} , die geheel tot E_2' behooren; evenzoo op s_2 twee segmenten s_{21} en s_{22} , die ook tot E_2' behooren. Dit procédé tot in het oneindige voorzettend, vindt men een rij van puntverzamelingen

$$F_1, F_2, F_3, \dots,$$

waar

F_1 bestaat uit de segmenten s_1 en s_2 ,

F_2 " " " " " s_{11}, s_{12}, s_{21} en s_{22} , enz.

⁽¹⁾ Leçons sur les fonctions discontinues, bl. 78.

⁽²⁾ Vgl. A. DENJOY, Bulletin de la Société Mathématique de France, Deel, 43, 1915, bl. 163, noot.

Wij kunnen er tevens voor zorgen, dat het grootste segment van F_n een lengte heeft, die kleiner is dan $\frac{1}{n}$.

De verzamelingen $F_1, F_2, F_3, \dots$ vormen een rij van samentrekkende, gesloten en begrensde puntverzamelingen, die geen van alle leeg zijn. Volgens een bekende stelling uit de theorie der puntverzamelingen is dan ook de doorsnee

$$D = F_1 F_2 F_3 \dots$$

niet leeg en gesloten.

Om in te zien, dat D perfect is, moeten we nog aantoonen, dat ξ een willekeurig punt van D zijnde, ξ verdichtingspunt is van D .

Voor iedere n behoort ξ tot F_n en ligt dus in één der segmenten, waaruit F_n bestaat. In dit segment liggen twee andere, die tot F_{n+1} behooren. In het eene ligt ξ , in 't andere trekken segmenten van F_{n+2} , enz. zich samen. In dat tweede segment ligt dus volgens de zooeven gebruikte stelling een punt η van D . ξ en η zijn twee verschillende punten van D ; de lengte van $\xi\eta$ is kleiner dan $\frac{1}{n}$, omdat ξ en η in één segment van F_n liggen. Aangezien men zoo'n punt η bij iedere waarde van n kan vinden, volgt hieruit, dat ξ een verdichtingspunt is van D . R bevat dus in $a\beta$ een perfect deel n.l. D .

II. Is G een ensemble gerbé in $a\beta$, dan is iedere deelverzameling van G ook een ensemble gerbé in $a\beta$.

Bewijs: Zij F een deelverzameling van G . De punten van G , die niet tot F behooren, vormen een verzameling H . Dan is $F = GH'$. G is een ensemble gerbé in $a\beta$, dus

$$G = E_1 + E_2 + \dots,$$

waar $E_1, E_2, \dots$ nergens dicht in $a\beta$ zijn.

Voor F geldt

$$F = GH' = E_1H' + E_2H' + \dots$$

Uit het feit dat E_n nergens dicht is in $a\beta$, volgt, dat dit ook geldt voor de verzameling E_nH' , die een deel is van E_n . Dus F is de vereeniging van aftelbaar veel verzamelingen, die in $a\beta$ nergens dicht zijn, d.w.z. F is een ensemble gerbé in $a\beta$.

III. Is R een residuel van $a\beta$, dan is iedere verzameling R_1 , die R bevat, ook een residuel van $a\beta$.

Bewijs: R_1 is een deel van R en R is een ensemble gerbé in $a\beta$, dus volgens stelling II is R_1 ook een ensemble gerbé in $a\beta$; R_1 moet dus een residuel van $a\beta$ zijn.

IV. De vereeniging van eindig of aftelbaar veel ensembles gerbés in $a\beta$ is zelf een ensemble gerbé in $a\beta$.

Bewijs: Stel $G_1, G_2, \dots$ zijn aftelbaar veel ensembles gerbés in $a\beta$.

Dus

$$\begin{aligned} G_1 &= E_{11} \dot{+} E_{12} \dot{+} E_{13} \dot{+} \dots, \\ G_2 &= E_{21} \dot{+} E_{22} \dot{+} E_{23} \dot{+} \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

waar de verzamelingen E_{mn} in $a b$ nergens dicht zijn. De verzameling

$$G = G_1 \dot{+} G_2 \dot{+} G_3 \dot{+} \dots$$

is dus de vereeniging van aftelbaar veel verzamelingen, ieder bestaande uit aftelbaar veel in $a b$ nergens dichte verzamelingen. Volgens een bekende stelling is G dan ook de vereeniging van aftelbaar veel in $a b$ nergens dichte verzamelingen. Dus G is een ensemble gerbé in $a b$.

V. De doorsnee van eindig of aftelbaar veel residuels van $a b$ is zelf een residuel van $a b$.

Bewijs: Zij $R = R_1 R_2 R_3 \dots$ de doorsnee van aftelbaar veel residuels R_n van $a b$. Dan geldt voor de complementaire verzameling

$$R' = (R_1 R_2 R_3 \dots)' = R'_1 \dot{+} R'_2 \dot{+} R'_3 \dot{+} \dots$$

R'_n is een ensemble gerbé in $a b$, volgens stelling IV dus ook R' . En R is dus een residuel van $a b$.

Aan de in Hoofdstuk III gebruikte begrippen meetbaarheid van puntverzamelingen en van functies en maat van meetbare puntverzamelingen wordt de door H. LEBESGUE in zijn „Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives” gegeven beteekenis gehecht.

Besluiten wij de inleiding met de volgende definitie, waarvan wij bij onze onderzoekingen steeds zullen uitgaan:

Is de functie $f(x)$ gedefinieerd in $a b$ en voldoet ze aan de volgende voorwaarden

- 1) $f(x)$ is continu in $a b$,
- 2) in ieder deelinterval $\alpha\beta$ van $a b$ zijn twee punten $x_1 < x_2$ en twee punten $x_3 < x_4$ te vinden, zoodat $f(x_1) < f(x_2)$ en $f(x_3) > f(x_4)$, dan heet $f(x)$ een *continue, multioscilleerende functie* in $a b$.

HOOFDSTUK I.

VOORBEEDEN VAN CONTINUE, MULTIOSCILLEERENDE FUNCTIES.

EERSTE VOORBEELD.

§ 1. Op een segment AB (zie fig. 1) construeeren wij een gebroken lijn, door te trekken

1^e door A een lijn met richtingscoëfficiënt $+\frac{1}{2^n}$,

2^e door B een lijn met richtingscoëfficiënt $+\frac{1}{2^n}$,

3^e door het midden van AB een lijn met richtingscoëfficiënt $-\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

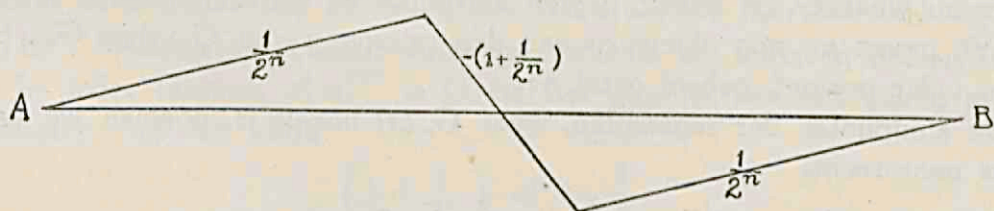


Fig. 1.

Met elke waarde van n correspondeert dan een gebroken lijn. De continue functie, die daardoor wordt voorgesteld, noemen we $(AB)_n$.

Deze functie $(AB)_n$ zal als hulpfunctie dienst doen bij de constructie van een oneindige rij van functies, die een continue, multioscilleerende functie tot limiet hebben.

Wij gaan daartoe uit van de functie $y = x$, voor $0 \leq x \leq 1$. Deze functie noemen we $G_0(x)$.

Het segment 01 wordt middendoor gedeeld; $G'_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. De betekenis van $(AB)_n$ in 't oog houdend construeeren we de functie

$$g_1(x) = 1 \times (01)_1.$$

De functie $g_1(x)$ bij $G_0(x)$ optellend, stellen we

$$G_1(x) = G_0(x) + g_1(x).$$

$G_1(x)$ is weer een continue functie en wordt door een gebroken lijn voorgesteld. Voor de afgeleide in $x = \frac{1}{2}$ geldt

$$G_1'\left(\frac{1}{2}\right) = G_0'\left(\frac{1}{2}\right) + g_1'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^1}$$

en wij zien verder, dat $G_1'(x)$ overal waar ze bestaat hetzelfde teeken heeft als $g_1'(x)$. Tusschen $x=0$ en $x=\frac{1}{2}$ bevindt zich dus een maximum van $G_1(x)$ en tusschen $x=\frac{1}{2}$ en $x=1$ een minimum.

Om van $G_1(x)$ over te gaan op een volgende functie $G_2(x)$ deelen we alle segmenten, waarop $G_1(x)$ lineair is, middendoor. Laten we die drie segmenten noemen

$$a_1^0 a_1^1, \quad a_1^1 a_1^2, \quad a_1^2 a_1^3.$$

We berekenen dan eerst $G_1'\left(\frac{a_1^0 + a_1^1}{2}\right) = A_1^0$ en construeeren daarna op $\overline{a_1^0 a_1^1}$ de functie $A_1^0(a_1^0 a_1^1)_2$. Doet men hetzelfde voor de beide andere segmenten, dan ontstaat een op het geheele segment 01 gedefinieerde functie. Deze moge $g_2(x)$ heeten, dan stellen we

$$G_2(x) = G_1(x) + g_2(x) = G_0(x) + g_1(x) + g_2(x).$$

$G_2(x)$ wordt weer door een gebroken lijn voorgesteld en heeft in elk interval, waar $G_1(x)$ lineair is, een maximum en een minimum.

Wij geven nu nog algemeen aan den overgang van $G_n(x)$ op $G_{n+1}(x)$ voor ieder positief, geheel getal n :

De eindpunten der segmenten, waar $G_n(x)$ lineair is, noemen we van links naar rechts

$$a_n^1, \quad a_n^2, \quad a_n^3, \dots, a_n^p, \dots$$

Zij $a_n^p a_n^{p+1}$ een segment, waarop $G_n(x)$ lineair is. Stel $\frac{a_n^p + a_n^{p+1}}{2} = m_n^p$ en $G_n'(m_n^p) = A_n^p$. Wij construeeren op het beschouwde segment de functie

$$A_n^p(a_n^p a_n^{p+1})_{n+1}.$$

Deze constructie wordt voor ieder der segmenten $a_n^p a_n^{p+1}$ uitgevoerd. De zoo op 01 gedefinieerde functie noemen we $g_{n+1}(x)$ en stellen

$$G_{n+1}(x) = G_n(x) + g_{n+1}(x).$$

Is A_n^p b.v. positief, dan is

$$G_{n+1}'(m_n^p) = G_n'(m_n^p) + g_{n+1}'(m_n^p) = A_n^p - \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) A_n^p = -\frac{1}{2^n} A_n^p < 0.$$

Is $A_n^p < 0$, dan is $G_{n+1}'(m_n^p)$ positief. Uit de constructievoorschriften volgt, dat A_n^p nooit nul is. Overal waar $G_{n+1}'(x)$ bestaat, heeft ze het teeken van $g_{n+1}'(x)$. $G_{n+1}(x)$ heeft dus in het interval $a_n^p a_n^{p+1}$, waar $G_n(x)$ lineair is, een maximum en een minimum.

Overigens is het duidelijk, dat ieder maximum (minimum) van $G_n(x)$ ook een maximum (resp. minimum) van $G_{n+1}(x)$, $G_{n+2}(x)$, ... is.

Zij b.v. a_n^p een minimum van $G_n(x)$ (zoo'n minimum is zeker een punt a_n^p), dan leiden wij uit de constructie af, dat in een zekere rechteromgeving van $x = a_n^p$ geldt

$$g_{n+1}(x) > 0. \text{ Want } A_n^p > 0.$$

En in een zekere linkeromgeving van $x = a_n^p$ is

$$g_{n+1}(x) > 0, \text{ omdat } A_n^{p-1} < 0.$$

Terwijl $g_{n+1}(a_n^p) = 0$.

$x = a_n^p$ is dus zeker een minimum van $G_{n+1}(x) = G_n(x) + g_{n+1}(x)$ en evenzoo van iedere functie met hooger rangnummer.

§ 2. Wij toonen nu aan:

- $G_n(x)$ nadert op $\overline{01}$ tot een eindige, continue limietfunctie $G(x)$.
- $G(x)$ is multioscillant.

Bewijs:

- Uit de constructie volgt, dat ieder segment $a_n^p a_n^{p+1}$ een lengte heeft, die kleiner is dan $\frac{1}{2^n}$, zoodra $n \geq 1$.

Want men gaat uit van het segment $\overline{01}$ en ieder segment $a_n^p a_n^{p+1}$ bevat drie segmenten $a_{n+1}^p a_{n+1}^{p+1}$, die ieder kleiner zijn dan de helft van $a_n^p a_n^{p+1}$. Hieruit volgt door volledige inductie het zooeven beweerde. (1)

In ieder interval $a_n^p a_n^{p+1}$ is $G_n'(x)$ het product van een eindig aantal factoren van den vorm

$$\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \text{ of } -\frac{1}{2^n}.$$

Daaruit leiden we af

$$|G_n'(x)| < P = \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots$$

voor elk punt x op $\overline{01}$, dat geen punt a_n^p is.

Voor ieder der getallen $A_n^p = G_n'(m_n^p)$ geldt dus $|A_n^p| < P$. Waaruit volgt, dat de grafische voorstelling van $g_{n+1}(x)$ in $a_n^p a_n^{p+1}$ tusschen de lijnen ligt, die door de eindpunten gaan en richtingscoëfficiënten $\pm \frac{P}{2^n}$ hebben. Wij weten reeds, dat de lengte van $a_n^p a_n^{p+1}$ kleiner is dan $\frac{1}{2^n}$.

(1) De letter p wordt hier gebruikt voor twee verschillende getallenrijen, maar dat kan in dit geval geen verwarring stichten.

Op $\overline{01}$ geldt dus

$$|g_{n+1}(x)| < \frac{P}{2^{2n}}.$$

Aangezien deze ongelijkheid voor elk rangnummer $n \geq 0$ geldt, convergeert de reeks

$$G_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \dots$$

op $\overline{01}$ gelijkmatig. Alle functies van de reeks zijn continu, dus ook de limietfunctie $G(x)$.

b. Stel gegeven een willekeurig deelinterval $\alpha\beta$ van $\overline{01}$, met lengte τ . Kies n zoo groot, dat $\frac{1}{2^n} < \frac{\tau}{2}$. Dan moet zeker één der intervallen $a_n^p a_n^{p+1}$, die alle een lengte kleiner dan $\frac{1}{2^n}$ hebben, binnen $\alpha\beta$ liggen. Wij weten, dat in dat interval $a_n^p a_n^{p+1}$ een maximum x_1 en een minimum x_2 van $G_{n+1}(x)$ liggen.

Stel b.v. $A_n^p > 0$, dan is $x_1 < x_2$.

$$a_n^p < x_1, \quad G_{n+1}(a_n^p) < G_{n+1}(x_1).$$

$$x_1 < x_2, \quad G_{n+1}(x_1) > G_{n+1}(x_2).$$

Dezelfde ongelijkheden gelden echter voor $G(x)$, daar volgens constructie

$$G_{n+1}(a_n^p) = G_{n+2}(a_n^p) = \dots = G(a_n^p).$$

$$G_{n+1}(x_1) = G_{n+2}(x_1) = \dots = G(x_1).$$

$$G_{n+1}(x_2) = G_{n+2}(x_2) = \dots = G(x_2).$$

Ingeval $A_n^p < 0$ handelt men analoog.

$G(x)$ voldoet dus aan de op bl. 4 gegeven definitie en is multi-oscillant.

§ 3. Wij zullen in 't vervolg de punten a_n^p , uitgezonderd 0 en 1, *hoekpunten* van $G_n(x)$ noemen. De functie $G(x)$ heeft dan nog de volgende eigenschap:

Ieder hoekpunt van een of andere functie $G_n(x)$ is een eigenlijk maximum of een eigenlijk minimum van $G(x)$.

Bewijs:

Zij x_0 zoo'n punt. Stel x_0 treedt voor 't eerst als hoekpunt op voor de functie $G_k(x)$ en laten we aannemen, dat x_0 een maximum is van $G_k(x)$. Voor een minimum verloopt het bewijs analoog.

We weten reeds, dat x_0 dan ook een maximum is van $G_{k+1}(x)$, $G_{k+2}(x)$, Om nu aan te toonen, dat er een interval $x_0 - \delta$, $x_0 + \varepsilon$ bestaat, waarin (behalve in x_0) geldt $G(x) < G(x_0)$, hebben wij de volgende opmerking noodig:

De waarden van $G_{n+1}(x)$ in ieder interval $a_n^p a_n^{p+1}$, waar $G_n(x)$ lineair is, zijn begrepen tusschen de waarden van $G_{n+1}(x)$ in de eindpunten.

Want laten wij eens het geval beschouwen, dat $G'_n(x)$ in $i = a_n^p a_n^{p+1}$ positief is. ($G'_n(x) < 0$ gaat analoog en $G'_n(x) = 0$ komt niet voor).

Als we stellen

$$G'_n(x) = p > 0$$

in i , dan neemt $G_n(x)$ in i lineair toe met een bedrag pl , waar l de lengte van i voorstelt. $g_{n+1}(x)$ is nul in a_n^p en a_n^{p+1} , positief op de eerste helft van i , negatief op de tweede. De grootste positieve waarde van $g_{n+1}(x)$ is kleiner dan

$$p \times \frac{l}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2} \leq p \times \frac{l}{4} \text{ voor } n \geq 0.$$

Op de tweede helft van i geldt

$$g_{n+1}(x) > -p \times \frac{l}{4}.$$

Dus $G_{n+1}(x) = G_n(x) + g_{n+1}(x)$ ligt binnen i inderdaad opgesloten tusschen de waarden $G_{n+1}(a_n^p)$ en $G_{n+1}(a_n^{p+1})$, dus ook tusschen $G_n(a_n^p)$ en $G_n(a_n^{p+1})$.

Nu bevat het interval $a_n^p a_n^{p+1}$ drie intervallen $a_{n+1}^p a_{n+1}^{p+1}$, op elk waarvan de vorige redeneering van toepassing is, d. w. z. voor elk dezer intervallen ligt $G_{n+2}(x)$ tusschen $G_{n+1}(a_{n+1}^p)$ en $G_{n+1}(a_{n+1}^{p+1})$.

Aangezien volgens het voorgaande deze laatste beide waarden begrepen zijn tusschen $G_n(a_n^p)$ en $G_n(a_n^{p+1})$ of daaraan gelijk zijn, geldt voor $G_{n+2}(x)$ op het heele interval $a_n^p a_n^{p+1}$:

de waarden van $G_{n+2}(x)$ zijn begrepen tusschen $G_n(a_n^p)$ en $G_n(a_n^{p+1})$.

Door volledige inductie kan men deze eigenschap op de aangegeven manier aantoonen voor $G_{n+m}(x)$, waar $m \geq 0$.

Men heeft dus, als b.v. $G_n(a_n^p) < G_n(a_n^{p+1})$:

$$G_n(a_n^p) < G_{n+m}(x) < G_n(a_n^{p+1})$$

voor

$$a_n^p < x < a_n^{p+1}.$$

Omdat x_0 een maximum is van $G_k(x)$, zijn er twee intervallen $a_k^p a_k^{p+1}$, die in x_0 aan elkaar grenzen. Samen vormen ze een interval $x_0 - \delta, x_0 + \varepsilon$, waarop geldt $G(x) < G(x_0)$. (Het punt x_0 zelf wordt stilzwijgend buiten beschouwing gelaten).

Want neem een willekeurig punt x van dit interval. Of x valt in $x_0 - \delta, x_0$, dan wel in $x_0, x_0 + \varepsilon$, is voor de verdere behandeling gelijkwaardig. Stel x in $x_0 - \delta, x_0$. Omdat $x_0 - \delta, x_0$ een interval $a_k^p a_k^{p+1}$ is, geldt volgens het boven behandelde

$$G_k(x_0 - \delta) < G_{k+m}(x) < G_k(x_0)$$

of, aangezien $G_k(x_0) = G(x_0)$,

$$G_{k+m}(x) < G(x_0).$$

Wij moeten dezelfde ongelijkheid aantoonen voor $\lim_{m \rightarrow \infty} G_{k+m}(x)$. Hiertoe onderscheiden wij twee gevallen:

1). x is een punt a_n^p . Dan is $G_{k+m}(x)$ constant vanaf zeker rangnummer $k+m$ en geldt dus ook voor de limiet $G(x)$

$$G(x) < G(x_0).$$

2). x is geen punt a_n^p , dus een gemeenschappelijk punt van een oneindige rij van intervallen $a_n^p a_n^{p+1}$, die tot nul naderen. Kies n_1 zoo hoog, dat het interval $a_{n_1}^p a_{n_1}^{p+1}$ van deze rij binnen $x_0 - \delta, x_0$ valt. Volgens het onder 1) gezegde weten we dan, dat zoowel $G_{n_1}(a_{n_1}^p)$ als $G_{n_1}(a_{n_1}^{p+1})$ kleiner is dan $G(x_0)$, terwijl $G_{n_1+m}(x)$ voor elke waarde van m tusschen die vaste getallen ligt (boven bewezen). Overgaande tot de limiet, is dus

$$\text{of } \lim_{m \rightarrow \infty} G_{n_1+m}(x) \leq G_{n_1}(a_{n_1}^p),$$

$$\text{of } \lim_{m \rightarrow \infty} G_{n_1+m}(x) \leq G_{n_1}(a_{n_1}^{p+1}).$$

Dus in elk geval

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_{n_1+m}(x) < G(x_0)$$

anders geschreven

$$G(x) < G(x_0).$$

x_0 is dus een eigenlijk maximum van $G(x)$. Waarmee de bedoelde eigenschap bewezen is.

Uit de constructievoorschriften volgt, dat de verzameling der hoekpunten op $\overline{01}$ overal dicht is. Dat beteekent voor de functie $G(x)$ dus: *De verzameling der eigenlijke maxima en minima is overal dicht op $\overline{01}$.*

TWEEDE VOORBEELD.

§ 4. Wij willen nu trachten, door eenige wijzigingen te brengen in de bovenstaande constructie, tot een continue, multioscilleerende functie te geraken, die de eigenschap heeft, dat ze in ieder deelinterval van $\overline{01}$ symmetriepunten bezit⁽¹⁾.

Onder een symmetriepunt van een continue functie $f(x)$ verstaan we hier een punt x_0 met de eigenschap:

er is een segment $x_0 - \delta, x_0 + \delta$ (het *symmetriegebied* van x_0), waarop de betrekking $f(x_0 - a) = f(x_0 + a)$ geldt voor $0 < a \leq \delta$.

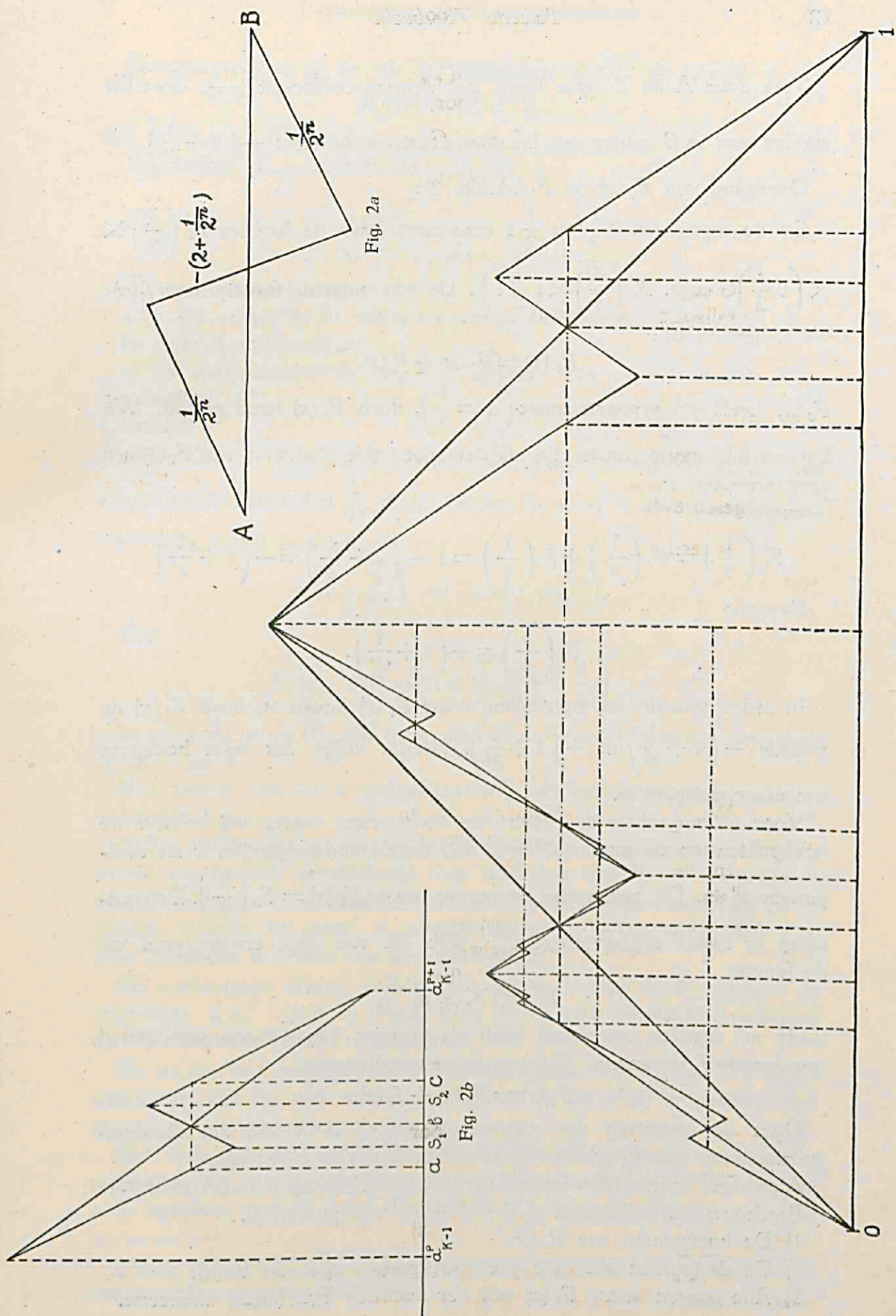
Indien bewezen wordt, dat de functie multioscillant is, is vanzelf de mogelijkheid uitgesloten, dat $f(x)$ constant zou zijn in eenig interval.

Ter verduidelijking van de constructie dienen de figuren op bl. 11.

$F_0(x)$ is de functie, gelijk aan x voor $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ en gelijk aan $1-x$ voor $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Een hulpfunctie $(AB)_n$ definieeren wij nu als volgt (fig. 2a):

⁽¹⁾ Een ingewikkeld voorbeeld geeft A. KÖPCKE, Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, deel 3, 1891—1900, bl. 258.



Trek door A en B weer lijnen met richtingscoëfficiënt $+\frac{1}{2^n}$, door het midden van AB echter een lijn met richtingscoëfficiënt $-\left(2+\frac{1}{2^n}\right)$.

Overgang van $F_0(x)$ op $F_1(x)$ (fig. 2):

Op de segmenten $0\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}1$ construeert men de functies $F'_0\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(0\frac{1}{2}\right)_1$, resp. $F'_0\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2}1\right)_1$. De zoo ontstane functie heet $f_1(x)$; we stellen op $\overline{01}$:

$$F_1(x) = F_0(x) + f_1(x).$$

$F_0(x)$ heeft één symmetriepunt $\left(x = \frac{1}{2}\right)$, doch $F_1(x)$ heeft er vijf. Wij kunnen n.l. uit de constructie afleiden, dat ieder hoekpunt van $F_1(x)$ een symmetriepunt is.

Immers

$$F'_1\left(\frac{1}{4}\right) = F'_0\left(\frac{1}{4}\right) + f'_1\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \left(2 + \frac{1}{2^1}\right) = -\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)$$

Evenzoo

$$F'_1\left(\frac{3}{4}\right) = +\left(1 + \frac{1}{2^1}\right).$$

In ieder van de zes intervallen, waar $F_1(x)$ lineair is, heeft $F'_1(x)$ de waarde $-\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)$ of $+\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)$. Hieruit volgt, dat ieder hoekpunt een symmetriepunt is.

Voor wij nu echter de constructie voortzetten, voeren wij behalve de hoekpunten en de punten 0 en 1 nog enkele andere punten x als deelpunten a_1^p in. Dit zullen zijn de punten waar $F_1(x) = F_0\left(\frac{1}{4}\right)$. Dan ontstaan er twaalf segmenten $a_1^p a_1^{p+1}$. Op elk van deze construeeren we de functie

$$F'_1(m_1^p) \times (a_1^p a_1^{p+1})_2,$$

waar m_1^p dezelfde beteekenis heeft als vroeger. Op $\overline{01}$ is zoo gedefinieerd een functie $f_2(x)$ en om $F_2(x)$ te krijgen stellen we

$$F_2(x) = F_1(x) + f_2(x).$$

Door de invoering der nieuwe deelpunten is bereikt, dat alle symmetriepunten van $F_1(x)$ ook symmetriepunten van $F_2(x)$ zijn.

Algemeen voorschrift voor de overgang van $F_n(x)$ op $F_{n+1}(x)$, als $n \geq 1$: Beschouw als deelpunten a_n^p drie soorten van punten n.l.

- 1) De hoekpunten van $F_n(x)$,
- 2) De deelpunten a_{n-1}^p , die geen hoekpunten zijn van $F_n(x)$,
- 3) Alle punten, waar $F_n(x)$ een der waarden $F_{n-1}(m_{n-1}^p)$ aanneemt.

Construeeren we nu op elk der segmenten $a_n^p a_n^{p+1}$ de functie

$$F'_n(m_n^p) \times (a_n^p a_n^{p+1})_{n+1},$$

dan ontstaat op $\overline{01}$ een functie $f_{n+1}(x)$.

Wij stellen: $F_{n+1}(x) = F_n(x) + f_{n+1}(x)$.

§ 5. Van de rij van functies

$$F_0(x), F_1(x), F_2(x), \dots$$

gaan we nu aantoonen:

- $F_n(x)$ nadert op $\overline{01}$ tot een continue limietfunctie $F(x)$,
- $F(x)$ is multioscillant,
- De symmetriepunten van $F(x)$ vormen een op $\overline{01}$ overal dichte verzameling.

Bewijs:

- Evenals in voorbeeld I bewijst men, dat ieder interval $a_n^p a_n^{p+1}$ een lengte heeft kleiner dan $\frac{1}{2^n}$. $F'_n(x)$ bestaat in $a_n^p a_n^{p+1}$ uit een product van een eindig aantal factoren

$$\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \text{ of } -\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

Dus

$$|F'_n(x)| < P = \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots$$

voor elk punt x op $\overline{01}$, dat geen punt a_n^p is. Verder gaat het bewijs als op bl. 7 en 8.

Het bewijs van b) is geheel analoog aan het corresponderende in voorbeeld I.

c) Een symmetriepunt van $F_n(x)$ is, aangezien $F_n(x)$ door een polygoon wordt voorgesteld, noodzakelijk een hoekpunt van $F_n(x)$. Omgekeerd: in een hoekpunt verschillen rechter- en linkerafgeleide van $F_n(x)$ en zij kunnen volgens het onder a) gezegde slechts in teeken verschillen. Dus ieder hoekpunt is tevens een symmetriepunt.

De hoekpunten liggen volgens constructie overal dicht; immers de intervallen $a_n^p a_n^{p+1}$ dringen overal door en in ieder ontstaan bij overgang op $F_{n+1}(x)$ twee nieuwe hoekpunten.

Zij nu x_0 een hoekpunt, dus symmetriepunt, van $F_n(x)$. Wij zullen aantoonen, dat x_0 ook een symmetriepunt is van $F(x)$ en daarmee het gevraagde bewijs hebben geleverd.

Stel $F_k(x)$ is de functie met het laagste rangnummer, waarvoor x_0 symmetriepunt is. x_0 is dus van $F_{k-1}(x)$ geen hoekpunt ⁽¹⁾. Wij kunnen zelfs beweren, dat x_0 geen der punten a_{k-1}^p kan zijn. Hiertoe gaan wij

⁽¹⁾ Indien $k=0$, dus $x_0 = \frac{1}{2}$, ziet men direct in, dat men te doen heeft met een symmetriepunt van $F(x)$, met symmetriegebied $\overline{01}$.

na, of x_0 tot één der drie op blz. 12 genoemde groepen van punten a_{k-1}^p kan behooren:

Daar x_0 geen hoekpunt is van $F_{k-1}(x)$, behoort x_0 niet tot groep 1. Veronderstelt men x_0 te behooren tot groep 2 of 3, dan zou men daaruit kunnen afleiden, dat x_0 geen hoekpunt is van $F_k(x)$. Dus ook dat is onmogelijk.

Zij nu $a_{k-1}^p a_{k-1}^{p+1}$ het interval van de k^e verdeeling van het segment 01 , waartoe x_0 behoort. In dat interval is $F_{k-1}(x)$ lineair. Stel b.v. $F_{k-1}(x)$ daalt er. x_0 is dan een der punten s_1 en s_2 uit fig. 2b. Want x_0 is hoekpunt van $F_k(x)$.

Stel $x_0 = s_1$.

De met s_1, s_2, a, b , en c aangeduide punten zijn zeker punten a_k^p . x_0 is dus voor iedere functie $F_{k+m}(x)$, $m \geq 0$ symmetriepunt met een symmetriegebied, minstens gelijk aan het segment ab .

Want, afgezien van het feit, dat de richtingscoëfficiënten voor de corresponderende deelen van $a s_1$ en $s_1 b$ steeds van teeken verschillen, zijn deze intervallen voor 't verdere verloop van de constructie als gelijkwaardig te beschouwen.

Wij weten dus

$$F_{k+m}(s_1 - a) = F_{k+m}(s_1 + a), \quad \text{als } 0 < a \leq s_1 - a \\ \text{en } m \geq 0.$$

Hetzelfde geldt dus ook voor de functie

$$F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_{k+m}(x).$$

Indien omgekeerd van een continue functie gegeven is, dat ze een op 01 overal dichte verzameling van symmetriepunten bezit en tevens, dat ze in geen enkel deelinterval constant is, zou men daaruit af kunnen leiden, dat ze op 01 multioscillant is.

Tenslotte zij nog opgemerkt, dat men hier, evenals onder voorbeeld I, kan aantoonen, dat alle hoekpunten der functies $F_n(x)$ eigenlijke maxima of minima van $F(x)$ zijn.

DERDE VOORBEELD.

§ 6. Door H. VON KOCH is in Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, deel 1, 1903—'04, bl. 681, een voorbeeld gegeven van een continue kromme, die in geen enkel punt een raaklijn bezit. Op blz. 697 geeft hij door een soortgelijke constructie een continue functie, die in geen enkel punt van het beschouwde segment een eindige afgeleide heeft.

Na het voorafgaande kunnen wij gemakkelijk bewijzen, dat deze functie multioscillant is.

Het constructievoorschrift luidt als volgt:

$F_0(x)$ is de functie $y = 0$ op 01 . $F_n(x)$ wordt grafisch voorgesteld door

een polygoon; voor $n \geq 0$ gaat men over van $F_n(x)$ op $F_{n+1}(x)$ door van de polygoon, die $F_n(x)$ voorstelt, iedere zijde AB (zie fig. 3) te vervangen door een gebroken lijn $ACDEB$.

Deze is volkomen bepaald door de volgende gegevens:

$$AC = CE = EB,$$

$$CM = ME,$$

$$DM \parallel OY,$$

$$DM = \frac{CE}{2} \sqrt{3}$$

(zwaartelijns van een gelijkzijdige driehoek, op CE beschreven).

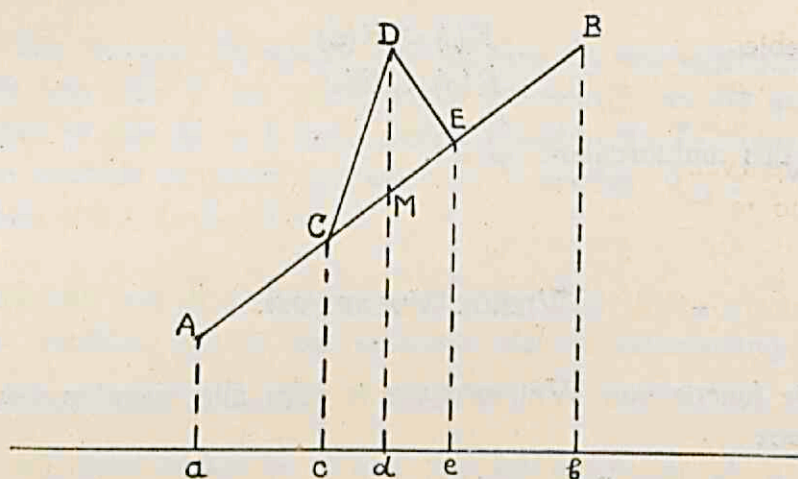


Fig. 3.

§ 7. De zoo ontstane rij van monotoon stijgende functies $F_n(x)$ convergeert gelijkmatig op 01. Want uit de constructie volgt, dat CD en ED beide kleiner zijn dan

$$CM + MD = \frac{1}{6} AB + \frac{1}{6} AB \sqrt{3}$$

Dus AC , CD , DE en EB zijn zeker alle kleiner dan $\frac{1}{2} AB$. Door volledige inductie vindt men dan: de zijden van de polygoon, die $F_n(x)$ voorstelt, zijn alle kleiner dan $\frac{1}{2^n}$.

Alle lijnen DM , noodig voor den overgang van $F_n(x)$ op $F_{n+1}(x)$, zijn dus kleiner dan $\frac{1}{2^{n+1}} \sqrt{3}$.

En hieruit volgt weer

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) < \frac{1}{2^{n+1}} \sqrt{3},$$

dus de rij convergeert gelijkmatig. Aangezien verder alle functies $F_n(x)$ continu zijn, is dit ook een eigenschap van de limietfunctie $F(x)$.

De lengte van ieder interval, waarin $F_n(x)$ lineair is, bedraagt hoogstens $\frac{1}{3^n}$. Zij nu $\alpha\beta$ weer een willekeurig deelinterval van $\overline{01}$, met lengte τ .

Kies n zoo groot, dat $\frac{1}{3^n} < \frac{\tau}{2}$. Dan valt er minstens één interval $a b$, waar $F_n(x)$ lineair is, binnen $\alpha\beta$. Stel b.v. $F_n(x)$ stijgt in dat interval. Wij weten dan (fig. 3)

$$F_n(c) < F_n(d), \text{ waar } c < d.$$

$$F_n(d) > F_n(e), \text{ waar } d < e.$$

Omdat $F_{n+k}(c) = F_n(c)$ voor $k \geq 0$, is ook $F(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n+k}(c) = F_n(c)$ en hetzelfde geldt voor de punten d en e . Dus

$$F(c) < F(d)$$

$$F(d) > F(e).$$

$F(x)$ is dus multioscilllant op $\overline{01}$.

VIERDE VOORBEELD.

§ 8. De functie van WEIERSTRASZ is voor alle waarden van x gedefinieerd door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x, \text{ waar } 0 < a < 1,$$

zoodat deze reeks in ieder interval gelijkmatig convergeert en $f(x)$ dus in ieder punt x continu is. Verder is

$$b \text{ geheel en oneven, } ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

Onder deze voorwaarden bewijst WEIERSTRASZ, dat $f(x)$ de volgende eigenschap bezit⁽¹⁾:

Voor elke waarde van x zijn twee rijen van punten $x_n'' > x$ en $x_n' < x$ te vinden, die x tot limiet hebben en zoo zijn, dat

of

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n'') - f(x)}{x_n'' - x} = +\infty$$

$$\text{en } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x_n')}{x - x_n'} = -\infty,$$

⁽¹⁾ K. WEIERSTRASZ, Abhandlungen aus der Functionenlehre, bl. 97.

Of: Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, deel 79, 1875, bl. 29.

of

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n'') - f(x)}{x_n'' - x} = -\infty$$

$$\text{en } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x_n')}{x - x_n'} = +\infty.$$

Hieruit volgt, dat $f(x)$ op een willekeurig segment $a b$ multioscillant is. Is n.l. $a \beta$ een of ander deelinterval van $\overline{a b}$, dan kiezen wij een punt x erbinnen. Volgens de bovenstaande eigenschap van $f(x)$ zijn er dan in $a \beta$, als we b.v. aannemen, dat x een punt is van het eerste type, zeker twee punten $x'' > x$ en $x' < x$ te vinden, zoodat $f(x'') > f(x)$ en $f(x') > f(x)$. Dus $f(x)$ is multioscillant op $\overline{a b}$.

§ 9. Wij kunnen dit echter ook afleiden uit een eigenschap, die we ontleenen aan CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN⁽¹⁾ en die gemakkelijker te bewijzen is dan de in § 8 gebruikte. Daarbij zijn de volgende onderstellingen omtrent de vaste getallen a en b noodig: $0 < a < 1$, b geheel en oneven, $a b > 1$, dus $b \geq 3$.

Beschouwen wij b.v. het segment 01 . Zijn p en q twee geheele, positieve getallen, dan is het duidelijk, dat de verzameling der punten $x = \frac{p}{b^q}$ overal dicht is op $\overline{01}$.

Ieder van deze punten is nu een eigenlijk maximum (als p even is) of een eigenlijk minimum (p oneven) van

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x.$$

Bewijs: Voor een bepaald punt $x_0 = \frac{p}{b^q}$ zijn p en q twee gegeven getallen, en stellen we

$$\sum_{n=q}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x = \varphi(x),$$

dan is

$$\varphi(x_0) = \sum_{n=q}^{\infty} a^n \cos b^n \pi \frac{p}{b^q} = \sum_{n=q}^{\infty} a^n \cos \pi b^{n-q} p.$$

b is oneven, dus

$$\varphi(x_0) = (-1)^p \sum_{n=q}^{\infty} a^n.$$

⁽¹⁾ Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, deel 27, 1902-'03, 1e ged., bl. 92.

Voor een punt $x_0 + h$ geldt

$$\varphi(x_0 + h) = (-1)^p \sum_q^n a^n \cos b^n \pi h.$$

Dus

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = (-1)^{p+1} \sum_q^n a^n (1 - \cos b^n \pi h).$$

Hieruit volgt

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{(-1)^{p+1}} > a^n (1 - \cos b^n \pi h),$$

voor iedere waarde van $n \geq q$, of

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{(-1)^{p+1}} > 2a^n \sin^2 \frac{b^n \pi h}{2}.$$

Stellen we nu b.v. $h > 0$. h kan dan in een voldoende klein interval om x_0 altijd geschreven worden in den vorm $h = \frac{\beta}{b^{n+1}}$, waar $1 \leq \beta < b$ en $n \geq q$ een geheel, positief getal is. Als h tot 0 nadert, nadert n tot ∞ en omgekeerd.

Vullen we voor h in de waarde $\frac{\beta}{b^{n+1}}$, dan is

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{(-1)^{p+1}} > 2a^n \sin^2 \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Hierin is $\frac{\beta}{b} < 1$, dus geldt

$$\frac{\sin \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{\beta}{b} \cdot \frac{\pi}{2}} > \frac{2}{\pi}, \quad \text{of} \quad \sin \frac{\beta}{b} \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{\beta}{b}.$$

Voor $h = \frac{\beta}{b^{n+1}}$ weten we dus

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{(-1)^{p+1}} &> 2a^n \left(\frac{\beta}{b}\right)^2, \\ \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{(-1)^{p+1} h} &> 2(ab)^n \frac{\beta}{b}. \end{aligned}$$

Hierin is $ab > 1$; is p oneven, dan volgt uit de laatste ongelijkheid dus

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = +\infty.$$

Is p even, dan

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = -\infty.$$

Voor $h < 0$ vindt men voor deze limieten resp. $-\infty$ en $+\infty$.

De functie $s_n(x) = \sum_{n=1}^{q-1} a^n \cos b^n \pi x$ heeft in x_0 een eindige afgeleide,

dus ook voor het differentiequotient $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ van de functie $f(x) = s_n(x) + \varphi(x)$ gelden de voor $\varphi(x)$ gevonden regels.

Ieder punt $x = \frac{p}{b^q}$ is dus een eigenlijk maximum of minimum van $f(x)$.

Uit het feit, dat deze op $\overline{01}$ overal dicht liggen, volgt, dat $f(x)$ daar multioscillant is.

Zij n.l. weer $\alpha\beta$ een willekeurig deelinterval van $\overline{01}$; kies een punt $x_0 = \frac{p}{b^q}$ in $\alpha\beta$. Stel b.v. x_0 is een minimum van $f(x)$. In een zeker interval $x_0 - \delta, x_0 + \varepsilon$ geldt de ongelijkheid $f(x) > f(x_0)$, voor $x \neq x_0$. Hieruit volgt, dat er in $\alpha\beta$ ongetwijfeld een punt $x_1 < x_0$ en een punt $x_2 > x_0$ te vinden is, zoodat $f(x_1) > f(x_0)$ en $f(x_2) > f(x_0)$. Waaruit dan blijkt, dat deze functie $f(x)$ aan de definitie van een multioscilleerende functie voldoet.

VIJFDE VOORBEELD.

§ 10. Van een z.g.n. continue kromme, die een geheel vierkant vult, is het eerst door G. PEANO een voorbeeld gegeven⁽¹⁾. Hij definieert op het segment 01 twee continue functies $x = \varphi(t)$ en $y = \psi(t)$ door het volgende rekenvoorschrift:

Beschouw een willekeurige waarde van t op $\overline{01}$ en schrijf deze in het drietallig stelsel

$$t = 0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

dus $a_n = 0, 1$ of 2 . Iedere t op $\overline{01}$ laat één of twee van deze ontwikkelingen toe. Wij spreken verder af, onder $k(a)$ te verstaan het getal $2 - a$.

Dus $k(2) = 0$, $k(1) = 1$, $k(0) = 2$.

Met $k^n(a)$ zullen we bedoelen het getal, dat men verkrijgt, door de operatie k op a n achtereenvolgende malen toe te passen. $k^n(a) = a$, als n even is en $k^n(a) = 2 - a$, als n oneven is.

De bij de ontwikkeling $t = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ behoorende waarden van $\varphi(t)$ en $\psi(t)$ worden geleverd door

$$\begin{aligned} x &= 0, b_1 b_2 b_3 \dots (3\text{-tallig}) \\ y &= 0, c_1 c_2 c_3 \dots (3 \text{ " }), \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Mathematische Annalen 36, 1890, bl. 157.

waarin

$$\begin{array}{ll} b_1 = a_1 & c_1 = k^{a_1} (a_2) \\ b_2 = k^{a_2} (a_3) & c_2 = k^{a_1+a_3} (a_4) \\ b_3 = k^{a_2+a_4} (a_5) & c_3 = k^{a_1+a_3+a_5} (a_6) \\ \dots & \dots \\ b_n = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}} (a_{2n-1}) & c_n = k^{a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}} (a_{2n}) \\ \dots & \dots \end{array}$$

Al naarmate $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2}$ even of oneven is, is $b_n = a_{2n-1}$ of $b_n = 2 - a_{2n-1}$. Voor c_n analoog.

§ 11. Wij moeten nu eerst aantoonen, dat bij iedere waarde van t één en niet meer dan één waarde $\varphi(t)$ behoort en evenzoo voor $\psi(t)$. Hiertoe verdeelen we de getallen t in twee klassen.

1) De getallen t , die slechts één ontwikkeling $t=0, a_1 a_2 a_3 \dots$ toelaten. Hiertoe behooren o.a. de punten 0 en 1.

2) De getallen t , die men door twee ontwikkelingen

$$t=0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n 222\dots=0, a_1 a_2 a_3 \dots \overline{a_n+1} 00\dots$$

kan aangeven.

Bij een getal van de eerste soort vindt men volgens constructie één waarde voor $\varphi(t)$ en één voor $\psi(t)$.

In het tweede geval zou men aanvankelijk kunnen denken, twee waarden voor $\varphi(t)$ te vinden. Stel echter, men verkrijgt, uitgaande van de voorstelling

$$t=0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n 22\dots: \quad \varphi(t)=0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

en uitgaande van

$$t=0, a_1 a_2 a_3 \dots \overline{a_n+1} 00\dots: \quad \varphi(t)=0, b'_1 b'_2 b'_3 \dots$$

Wij toonen dan aan, dat de waarden $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ en $0, b'_1 b'_2 b'_3 \dots$ even groot zijn. Is n even, $n=2m$, dan volgt uit de constructie

$$b_1 = b'_1, \quad b_2 = b'_2, \dots, b_m = b'_m.$$

en

$$\begin{array}{ll} b_{m+1} = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m}} (2), & b'_{m+1} = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m}+1} (0) \\ b_{m+2} = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m}+2} (2), & b'_{m+2} = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m}+1} (0) \\ \dots & \dots \end{array}$$

Dus ook:

$$b_{m+1} = b'_{m+1}, \quad b_{m+2} = b'_{m+2}, \text{ enz.}$$

Is n daarentegen oneven, $n=2m-1$, dan is

$$b_1 = b'_1, \quad b_2 = b'_2, \dots, b_{m-1} = b'_{m-1}$$

en

$$\begin{array}{ll} b_m = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m-2}} (a_{2m-1}), & b'_m = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m-2}} (a_{2m-1} + 1) \\ b_{m+1} = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m-2}+2} (2), & b'_{m+1} = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m-2}+0} (0) \\ b_{m+2} = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m-2}+2+2} (2), & b'_{m+2} = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2m-2}+0+0} (0) \\ \dots & \dots \end{array}$$

Als $n = 2m$ geldt dus $b_p = b'_p$ voor $p = 1, 2, 3, \dots$; is $n = 2m - 1$, dan geldt deze gelijkheid alleen voor $p = 1, 2, 3, \dots, m-1$, terwijl dan, als $a_2 + a_4 + a_{2m-2}$ even is, geldt

$$b_m = b'_m - 1, \quad b_p = 2, \quad b'_p = 0 \quad \text{voor } p > m$$

en als $a_2 + a_4 + \dots + a_{2m-2}$ oneven is

$$b_m = b'_m + 1, \quad b_p = 0, \quad b'_p = 2 \quad \text{voor } p > m.$$

Hieruit blijkt, dat ook bij ieder punt t van de tweede soort slechts één waarde voor $\varphi(t)$ gevonden wordt, al verschillen soms de gevonden ontwikkelingen. Door het gegeven voorschrift is dus op $\overline{01}$ werkelijk een functie $\varphi(t)$ gedefinieerd.

Hetzelfde bewijst men voor $y = \psi(t)$.

PEANO toont aan, dat omgekeerd elk waarden-tweetal x, y , dat voldoet aan $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, geleverd wordt door één, twee of vier waarden van t op $\overline{01}$. Voor ons doel is dit overbodig. Wij willen n.l. bewijzen, dat ieder van de functies $\varphi(t)$ en $\psi(t)$ op $\overline{01}$ continu en multioscillant is.

a) $\varphi(t)$ is continu in ieder punt t_0 op $\overline{01}$: kies n zoo hoog, dat $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, waar ε van te voren gegeven is. Leg daarna om t_0 een interval, zoodat voor elke waarde van t ($0 \leq t \leq 1$) in dat interval $2n$ cijfers van één der ontwikkelingen van t en t_0 samenvallen. Dan vallen in de bijbehorende ontwikkelingen van $\varphi(t)$ en $\varphi(t_0)$ n cijfers samen en is dus

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

b) $\varphi(t)$ is multioscillant op $\overline{01}$: $\alpha\beta$ weer een willekeurig deelinterval zijnde, kiezen we een even rangnummer n zoo hoog, dat alle punten t , wier ontwikkelingen de eerste n cijfers $a_1 a_2 \dots a_n$ gemeen hebben, in $\alpha\beta$ liggen.

Wij kunnen ons beperken tot het geval, dat $a_2 + a_4 + \dots + a_n$ oneven is. (Anders beschouwen we de punten t , wier ontwikkelingen als eerste $n + 2 = n'$ cijfers bevatten: $a_1 a_2 \dots a_n 01$).

Beschouw nu de punten

$$t_1 = 0, \quad a_1 a_2 \dots a_n 0000 \dots$$

$$t_2 = 0, \quad a_1 a_2 \dots a_n 2222 \dots$$

$$t_3 = 0, \quad a_1 a_2 \dots a_n 0100 \dots$$

$$t_4 = 0, \quad a_1 a_2 \dots a_n 0122 \dots$$

Dan is

$$x_1 = \varphi(t_1) = 0, \quad b_1 \dots b_{\frac{n}{2}} 222 \dots$$

$$x_2 = \varphi(t_2) = 0, \quad b_1 \dots b_{\frac{n}{2}} 000 \dots$$

$$x_3 = \varphi(t_3) = 0, \quad b_1 \dots b_{\frac{n}{2}} 200 \dots$$

$$x_4 = \varphi(t_4) = 0, \quad b_1 \dots b_{\frac{n}{2}} 222 \dots$$

En wij hebben dus in $a\beta$ gevonden twee punten $t_1 < t_2$, zoodat $\varphi(t_1) > \varphi(t_2)$ en twee punten $t_3 < t_4$, zoodat $\varphi(t_3) < \varphi(t_4)$. Het bedoelde bewijs voor $\varphi(t)$ is hiermee geleverd. Voor $\psi(t)$ gaat het analoog.

Er zijn meerdere voorbeelden gegeven van continue krommen, die een geheel vierkant vullen, o.a. door D. HILBERT⁽¹⁾ en E. H. MOORE⁽²⁾. Dikwijls kan men aantoonen, dat zoo'n kromme ons continue, multioscilleerende functies oplevert. Dit is echter niet algemeen geldig: door H. LEBESGUE⁽³⁾ is zelfs een voorbeeld gegeven van een zoodanige kromme, waarbij de functies $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ lineair zijn in ieder interval van een op 01 overal dichte intervalverzameling.

§ 12. Na te gaan, in hoever de door ons in de vijf gegeven voorbeelden behandelde functies al of niet differentieerbaar zijn, zou ons hier te ver voeren. Van de laatste drie is bekend, dat ze nergens een eindige afgeleide bezitten. En wat het eerste en tweede voorbeeld betreft, het is niet moeilijk aan te toonen, dat in geen der hoekpunten een eindig differentiaal-quotient bestaat.

Met het probleem, of er multioscilleerende functies bestaan, die in elk punt van een zeker interval een eindige afgeleide bezitten, hebben vele schrijvers zich bezig gehouden⁽⁴⁾. In Hoofdstuk III zullen we twee verschillende methoden behandelen, die tot dergelijke functies voeren.

(1) Math. Ann. 38, 1891, bl. 459.

(2) Transactions of the American Mathematical Society 1, 1900, bl. 72.

(3) Leçons sur l'intégration, enz. bl. 144.

(4) P. DU BOIS-REYMOND, Journal für die reine und ang. Math. 79, 1875, bl. 32.

H. HANKEL, Math. Ann. 20, 1882, bl. 83.

U. DINI, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, 1878, § 200, bl. 283. In 't Duitsch door J. Lüroth en A. Schepp, § 200, bl. 381.

A. KÖPCKE, Math. Ann. 29, 1887, bl. 123.

„ „ 34, 1889, „ 161.

„ „ 35, 1890, „ 104.

Festschrift der Math. Ges. in Hamburg, deel 2, 1890, bl. 128.

I. PERENO, Giornale di Matematiche di Battaglini 35, 1897, bl. 132.

T. BRODEN, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar 57, 1900, bl. 423 en 743.

A. SCHOENFLIES, Math. Ann. 54, 1901, bl. 553.

A. DENJOY, Bulletin de la Société Mathématique de France, deel 43, 1915, bl. 210.

HOOFDSTUK II.

ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN.

Zij $f(x)$ een continue, multioscilleerende functie op het segment $a b$.

§ 13. EIGENSCHAP I. $f(x)$ bezit in ieder deelinterval van $\overline{a b}$ eigenlijke of oneigenlijke maxima en minima.

Bewijs: Zij $a \beta$ een willekeurig deelinterval van $\overline{a b}$. Stel b.v. $f(a) < f(\beta)$. De verzameling der punten x op $a \beta$, waar $f(x) = f(a)$, is gesloten, omdat $f(x)$ continu is. Er is dus op $a \beta$ een grootste waarde α_1 van x , waarvoor $f(x)$ de waarde $f(a)$ aanneemt.

Is nu

$$\alpha_1 < x < \beta, \text{ dan is } f(x) > f(\alpha_1).$$

Anders zou $f(x)$ tusschen $x = \alpha_1$ en $x = \beta$ de waarde $f(\alpha_1)$ aannemen, in strijd met de bovengenoemde eigenschap van $x = \alpha_1$. Wij bepalen ook de kleinste waarde β_1 van x op $\alpha_1 \beta$, waar $f(x) = f(\beta)$.

Als dan

$$\alpha_1 < x < \beta_1, \text{ is } f(x) < f(\beta).$$

In het interval $\alpha_1 \beta_1$ is dus $f(\alpha_1) < f(x) < f(\beta_1)$. Daar $f(x)$ multioscillant is op $\overline{a b}$, zijn er in $\alpha_1 \beta_1$ twee punten x_1 en x_2 , zoodat $f(x_1) > f(x_2)$ en tevens $x_1 < x_2$. Zij M de grootste waarde van $f(x)$ op $\overline{\alpha_1 x_2}$. $f(x)$ neemt deze waarde tusschen α_1 en x_2 aan, omdat $f(x_1) > f(\alpha_1)$ en $f(x_1) > f(x_2)$. Stel in een punt p , dan is $\alpha_1 < p < x_2$. $x = p$ is dan een eigenlijk of oneigenlijk maximum van $f(x)$, want in het geheele interval $\alpha_1 x_2$ geldt: $f(x) \leq f(p)$.

Op analoge manier bewijst men, dat er in $x_1 \beta_1$ minstens één eigenlijk of oneigenlijk minimum ligt.

Is omgekeerd van een continue functie gegeven, dat ze Eig. I heeft, dan volgt daaruit, dat ze multioscillant is.

§ 14. EIGENSCHAP II. De verzameling der eigenlijke maxima en minima van $f(x)$ is eindig of aftelbaar oneindig ⁽¹⁾.

Bewijs: Zij $x = a$ een maximum van $f(x)$. Er is een interval $a - \delta$, $a + \delta$, waarin $f(x) < f(a)$, mits $x \neq a$. Kies δ zoo groot mogelijk. Dit kan, omdat de bovenste grens van alle getallen δ zelf weer zoo'n getal is.

Als $x = a'$ een tweede maximum is met bijbehorend interval $a' - \delta'$,

⁽¹⁾ Eigenschap, reeds door A. SCHOENFLIES bewezen in Sitzungsberichte der Physikalisch-Ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg 41, 1900, bl. 11.

segment $\xi_k - \delta, \xi_k + \delta$ geldt: $f(x) \equiv \eta$, waar $\delta \equiv \frac{1}{2^n}$, onafhankelijk van k .

Daar ξ_k zoo dicht bij g gekozen kan worden als men wil, heeft men ook

$$f(x) \equiv \eta \text{ op } \overline{g - \delta, g + \delta}, \text{ voor } \delta = \frac{1}{2^n}.$$

g is dus een punt ξ . Wij noemen die onderste grens verder ξ_0 en voegen op deze wijze aan elke waarde η één waarde ξ_0 van x toe.

Zijn $\eta_2 < \eta_1$ twee verschillende waarden η , dan behooren daarbij ook twee verschillende waarden van x : ξ_0^2 en ξ_0^1 .

Nu moet

$$|\xi_0^2 - \xi_0^1| > \frac{1}{2^n},$$

daar anders gelijktijdig zou gelden: $\eta_2 \leq \eta_1$ en $\eta_2 \geq \eta_1$, in strijd met de onderstelling $\eta_2 < \eta_1$. Hetzelfde geldt, als $\eta_2 > \eta_1$.

Hieruit volgt, dat het aantal punten ξ_0 eindig is, dus ook de door ons beschouwde verzameling van waarden η .

Wij veronderstelden $\delta \equiv \frac{1}{2^n}$. De verzameling van η -waarden, die we krijgen, door te eischen

$$\frac{1}{2^{n-1}} > \delta \equiv \frac{1}{2^n},$$

is een deel van de vorige en dus zeker eindig. Door een redeneering, die geheel overeenkomt met die, gehouden in het bewijs van Eig. II, leidt men hieruit af, dat de verzameling van de waarden, door $f(x)$ aangenomen in alle eigenlijke of oneigenlijke maxima en minima, aftelbaar is.

Rest ons nog in te zien, dat deze verzameling niet eindig kan zijn. Stel m en M zijn de kleinste, resp. grootste, waarde van $f(x)$ op $\overline{a b}$. Dan is de verzameling der waarden, die $f(x)$ op $\overline{a b}$ aanneemt, het segment $\overline{m M}$. We kunnen nu niet alleen aantoonen, dat de verzameling der waarden η oneindig is, doch zelfs, dat ze overal dicht is op dat segment.

Want zij p een willekeurig punt van $\overline{m M}$. $f(x)$ neemt de waarde p op $\overline{a b}$ aan, stel in x_0 . Wegens de continuïteit bestaat er een interval om x_0 , zoodat voor de waarden van $f(x)$ in dat interval geldt $|f(x) - p| < \varepsilon$. Uit Eig. I volgt verder, dat in bedoeld interval een eigenlijk of oneigenlijk maximum of minimum van $f(x)$ ligt. Dus in $p - \varepsilon, p + \varepsilon$ ligt een waarde η . Daar hierin ε willekeurig gekozen kan worden en p een willekeurig punt van $\overline{m M}$ is, volgt eruit, dat de verzameling der waarden η in ieder deelinterval van $\overline{m M}$ doordringt en dus op $\overline{m M}$ overal dicht is.

§ 16. EIGENSCHAP IV. In ieder deelinterval van $\overline{a b}$ liggen oneindig veel punten x , waar $f(x)$ eenzelfde waarde aanneemt. ⁽¹⁾

(1) Andere bewijzen van deze eigenschap, met meer elementaire hulpmiddelen, vindt men bij A. KÖPCKE, Mitteilungen der Math. Ges. in Hamburg, deel 3, 1891—1900, bl. 376.

J. KÖNIG, Monatshefte für Mathematik und Physik, deel 1, 1890, bl. 8.

Bewijs: Bij het bewijs van Eig. I is aangetoond, dat de intervallen $p q$ met de eigenschap

$$\begin{aligned} f(p) < f(x) < f(q) \\ p < x < q \end{aligned}$$

voor

op $\overline{a b}$ overal door dringen, d.w.z. ieder deelinterval van $\overline{a b}$ bevat zoo'n interval.

Een interval van deze soort noemen we voortaan een *stijginterval*.

Onder een *daalinterval* wordt dan natuurlijk verstaan een interval $r s$ met de eigenschap

$$f(r) > f(x) > f(s), \quad \text{voor } r > x > s.$$

Ook deze dringen overal door.

Wij denken ons nu als volgt een oneindige rij van puntverzamelingen geconstrueerd op $\overline{a b}$:

S_1 is een overal dichte verzameling van stijgintervallen.

D_1	"	"	"	"	"	"	daal	"	binnen S_1
S_2	"	"	"	"	"	"	stijg	"	" D_1
D_2	"	"	"	"	"	"	daal	"	" S_2

.

Dit is mogelijk, omdat zoowel de stijg- als de daalintervallen overal door dringen. Om dezelfde reden kan men ervoor zorgen, dat de bovenste grens van de lengten der intervallen van S_n en D_n tot nul nadert, als n onbepaald toeneemt.

Van deze aftelbaar veel verzamelingen beschouwen we de doorsnee

$$V = S_1 D_1 S_2 D_2 \dots$$

De intervalverzamelingen S_n en D_n zijn op $\overline{a b}$ overal dicht; hieruit volgt, dat hun complementen S'_n en D'_n nergens dicht zijn op $\overline{a b}$.

Het complement van V :

$$V' = \{ S_1 D_1 S_2 D_2 \dots \}' = S'_1 \dot{+} D'_1 \dot{+} S'_2 \dot{+} D'_2 \dot{+} \dots$$

is dus een ensemble gerbé, V zelf een residuel van $\overline{a b}$.

Zij nu ξ een willekeurig punt van V , dan volgt uit het voorgaande, omdat ξ tot alle verzamelingen S_n en D_n behoort, dat ξ zoowel in een oneindig groot aantal stijgintervallen $p_k q_k$ als in oneindig veel daalintervallen $r_k s_k$ ligt. Waarbij dus

$$f(p_k) < f(\xi) < f(q_k),$$

$$f(r_k) > f(\xi) > f(s_k),$$

terwijl we bovendien weten, dat de lengte van $p_k q_k$ en $r_k s_k$ tot nul nadert, als k onbepaald groeit.

ξ is dus zoowel linker- als rechterlimietpunt van punten x' waarvoor $f(x') > f(\xi)$ als van punten x'' waarvoor $f(x'') < f(\xi)$. Uit de continuïteit van $f(x)$ volgt dan, dat de vergelijking $f(x) = f(\xi)$ oneindig veel oplossingen heeft met ξ als verdichtingspunt.

Volgens een in de inleiding bewezen eigenschap der residuëls liggen echter deze punten ξ van V op $\overline{ab}$ overal dicht, waarmee Eig. IV is aangetoond.

Zij $\overline{mM}$ weer het segment, gevormd door alle waarden van $f(x)$ op $\overline{ab}$ (blz. 25). Uit Eig. IV en de continuïteit van $f(x)$ volgt, dat de verzameling der waarden β , die door $f(x)$ oneindig vaak worden aangenomen, op $\overline{mM}$ overal dicht is.

§ 17. Een punt x met de eigenschap, dat er een getal δ bestaat, zoodat $f(x') \geq f(x)$ voor $x < x' \leq x + \delta$, zullen we een *punt met rechterboven-monotonie* noemen. δ zullen we bij vaste x steeds zoo groot mogelijk kiezen.

De definitie voor een punt met *rechterbeneden-, linkerboven-, en linkerbeneden-monotonie* luidt analoog.

Punten γ , waar geen der vier monotoniën bestaat, hebben de eigenschap, dat $f(x') - f(x)$ zoowel in ieder interval $x, x + \varepsilon$, als in elk interval $x - \varepsilon, x$ oneindig vaak van teeken wisselt.

§ 18. EIGENSCHAP V. De punten, waar $f(x)$ één der vier monotoniën vertoont, vormen vier ensembles gerbés en de punten γ vormen een residuël T van $\overline{ab}$.

Bewijs: Wij hebben vroeger reeds aangetoond, dat er een residuël V van $\overline{ab}$ bestaat, zoodat ieder punt ξ van V zoowel linker- als rechterlimietpunt is van punten x' , waarvoor $f(x') > f(\xi)$, als van punten x'' , waarvoor $f(x'') < f(\xi)$. In zoo'n punt ξ bestaat dus geen der vier monotoniën, m. a. w. de verzameling T der punten γ omvat V . En V is een residuël van $\overline{ab}$, dus ook de verzameling punten γ . (Zie Inleiding).

In ieder punt van het complement T' van T op $\overline{ab}$ vertoont $f(x)$ minstens één der vier monotoniën. T' is een ensemble gerbé. De verzameling der punten, waar $f(x)$ b.v. de rechterboven-monotonie vertoont, is een deel van T' en dus eveneens een ensemble gerbé. Wij krijgen zoo vier van die verzamelingen en het bewijs van Eig. V is voltooid.

§ 19. We kunnen echter ook een bewijs leveren, zonder gebruik te maken van het op blz. 26 geconstrueerde residuël V .

Laten we hiertoe weer beschouwen de verzameling der punten x^- met rechterboven-monotonie.

De verzameling E_n van die punten x^- , waarvoor het interval $x, x + \delta$ voldoet aan

$$\delta \geq \frac{1}{2^n},$$

is nergens dicht op $\overline{ab}$. Want stel eens, dat dit niet het geval is; dan is er een deelinterval $\alpha\beta$ van $\overline{ab}$, dat geen enkel interval bevat, dat

geheel tot E'_n hoort. Dus ieder punt van $a\beta$ is verdichtingspunt van E_n . $a\beta$ kan zoo klein gekozen worden, dat de lengte ervan kleiner is dan $\frac{1}{2^n}$. Omdat $f(x)$ multioscillant is, zijn er in $a\beta$ twee punten $p < q$, zoodat $f(p) > f(q)$. p is verdichtingspunt van E_n , dus er is een punt $x^- < q$ van E_n te vinden in $a\beta$, zoo dicht bij p , dat $f(x^-) > f(q)$. En het daarbij behorende interval $x^-, x^- + \delta$ strekt zich uit tot voorbij β , dus bevat q . Dit levert ons een tegenstrijdigheid, want $f(q) < f(x^-)$, terwijl ook

$$f(x') \leq f(x^-) \quad \text{voor} \quad x^- < x' \leq x^- + \delta.$$

Onze onderstelling was dus onjuist en E_n is nergens dicht op $\overline{ab}$.

De verzameling van alle punten x^- is de vereeniging van de verzamelingen

$$E_1, E_2, E_3, \dots$$

Deze punten vormen dus een ensemble gerbé. In 't geheel vindt men er vier. De vereeniging ervan is opnieuw een ensemble gerbé. Het complement van deze vereeniging, de verzameling der punten γ , waar $f(x)$ geen der vier monotonieën bezit, is dus een résiduel T van $\overline{ab}$. Eig. V is hiermee opnieuw bewezen.

§ 20. Zij $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$.

EIGENSCHAP VI. *Er bestaat op $\overline{ab}$ een discontinue⁽¹⁾, perfecte verzameling P , zoodat $f(x)$ op P elke tusschen A en B gelegen waarde minstens één en hoogstens twee maal aanneemt, terwijl $f(x)$ op P monotoon verandert.*

Deze eigenschap is door A. DENJOY bewezen in Annales de l'école normale supérieure, 1916/17, bl. 143. Hij gaat daarbij uit van een door hem bewezen algemeen theorema over continue functies. Hier zal een op zichzelf staand bewijs worden geleverd. Stel $A < B$ (Ingeval $A > B$ gaat het bewijs analoog).

Bij elke waarde η , die voldoet aan $A \leq \eta \leq B$, beschouwen we de verzameling der waarden x , waarvoor $f(x) = \eta$. Zij x_0 de kleinste van deze waarden x , bij vaste waarde η . Wij zullen dan het punt x_0 in 't vervolg aanduiden als het eerste snijpunt van $y = \eta$ met $y = f(x)$.

Aan de verzameling dezer punten x_0 voegen we toe de er nog niet bij behorende verdichtingspunten $\overline{x_0}$. En we bewijzen

- 1) De zoo ontstane verzameling is perfect,
- 2) $f(x)$ neemt op P hoogstens twee maal dezelfde waarde aan,
- 3) $f(x)$ neemt op P monotoon toe,
- 4) P is discontinue,
- 5) Het aantal waarden, dat door $f(x)$ op P twee maal wordt aangenomen, is aftelbaar oneindig.

(1) d.w.z. ieder interval bevat punten, die niet tot P behooren.

Bewijs:

1) P is gesloten volgens constructie. Om te bewijzen, dat P perfect is, blijft dus nog aan te toonen, dat ieder punt ξ van P verdichtingspunt van P is. Zij $f(\xi) = \gamma$.

ξ is of een punt x_0 , of een punt $\overline{x_0}$. In het eerste geval is ξ het eerste snijpunt van $y = f(x)$ met $y = \gamma$. Aangezien $f(x)$ continue is, ligt het eerste snijpunt x_0 voor $y = \delta < \gamma$ tusschen a en x_0 . Laat δ naderen tot γ , dan moet x_0 naderen tot x_0 . Anders zou $y = \gamma$, gezien de continuïteit van $f(x)$, met $y = f(x)$ een snijpunt vertoonen links van x_0 . ξ is in dit geval dus verdichtingspunt van P .

Is ξ daarentegen een punt $\overline{x_0}$, dan is het een verdichtingspunt van punten x_0 en blijkt dus onmiddellijk, dat het een verdichtingspunt van P is.

2) Stel $f(x)$ neemt op P drie maal eenzelfde waarde a aan. De kleinste waarde p van x , waarvoor dit gebeurt, is een punt x_0 . De beide andere moeten dus punten $\overline{x_0}$ zijn. Wij toonen nu aan, dat dit onmogelijk is, d. w. z. er kunnen geen twee verdichtingspunten $q < r$ van eerste snijpunten x_0 bestaan, zoodat $f(q) = f(r) = a$.

Hiertoe merken wij op, dat de eerste snijpunten voor lijnen $y = \eta < a$ tusschen a en p liggen. Deze kunnen zich dus noch bij q , noch bij r verdichten. Bij q moeten zich dus de eerste snijpunten voor $y = \eta > a$ verdichten. Er is dus een getal δ , zoodat $y = a + \delta$ een eerste snijpunt s levert links van r . Dan liggen echter alle snijpunten voor lijnen $y = \eta < a + \delta$ links van s . Er is dus een interval om r te vinden, zoodat daarin geen enkel punt x_0 ligt, n.l. het interval, waarin geldt

$$|f(x) - f(r)| < \delta.$$

Hiermee is een contradictie bereikt, want r moet een verdichtingspunt van punten x_0 zijn. $f(x)$ neemt dus op P hoogstens tweemaal eenzelfde waarde aan.

3) Heeft men twee punten $x_1 < x_2$ van P , dan is $f(x_1) \equiv f(x_2)$. Stel n.l. $f(x_1) > f(x_2)$. Iedere lijn $y = \eta$ zal, indien

$$A < \eta < f(x_1),$$

een punt x_0 leveren tusschen a en x_1 . x_2 zou dus noch een punt x_0 , noch een punt $\overline{x_0}$ zijn. En dus niet tot P behooren.

4) Geen enkel deelinterval van $\overline{a b}$ kan geheel tot P behooren. Want in zoo'n interval zou $f(x)$ monotoon toenemen, in strijd met het gegeven, dat $f(x)$ multioscillat is.

5) Heeft men twee punten van P : $x_1 < x_2$, terwijl $f(x_1) = f(x_2)$, dan is volgens het voorgaande x_1 het eerste snijpunt van $y = f(x_1)$ met $y = f(x)$. x_2 is een verdichtingspunt van punten x_0 . In x_1 verdichten zich de punten x_0 , behorende bij lijnen $y = \eta < f(x_1)$; in x_2 die, welke

behooren bij lijnen $y = \eta > f(x_1)$. De eerste liggen links van x_1 en het is gemakkelijk in te zien, dat de laatste rechts van x_2 liggen. Immers, uit $f(p) > f(x_2)$ voor $p < x_2$ zou volgens een meer gebruikte redeneering volgen, dat alle eerste snijpunten voor lijnen $y = \eta < f(p)$ links van p lagen, dus x_2 zou dan geen verdichtingspunt ervan zijn.

In $x_1 x_2$ ligt dus geen enkel punt x_0 , maar dan ook geen punt $\bar{x}_0$ en dus geen enkel punt van P .

$x_1 x_2$ is dus een der aftelbaar vele intervallen, die men uit $\bar{a} \bar{b}$ moet nemen, om P over te houden ⁽¹⁾.

Omgekeerd, in de eindpunten van ieder contigu van P zal $f(x)$ dezelfde waarde aannemen. En omdat het aantal contigus hier aftelbaar oneindig is, is dat met het aantal waarden, die $f(x)$ op P twee maal aanneemt, eveneens het geval.

§ 21. EIGENSCHAP VII. *Ieder van de in Eig. V bedoelde ensembles gerbés bezit in elk deelinterval van $a b$ een perfect deel.*

Bewijs: Beperken we ons eerst tot de verzameling der punten met linkerbenenmonotonie. Is $a \beta$ een willekeurig deelinterval van $a b$, kies dan in $a \beta$ twee punten $a_1 < b_1$, zoodat

$$f(a_1) = A_1 < f(b_1) = B_1.$$

Dit is mogelijk, omdat $f(x)$ multioscillans is. Wij denken ons nu de in Eig. VI bedoelde perfecte verzameling geconstrueerd voor het segment $a_1 b_1$. En we zullen aantoonen, dat ieder punt van deze verzameling P_1 een punt is met linkerbenenmonotonie.

Hiertoe beschouwen we eerst een eerste snijpunt x_0 . Dan is $f(a_1) < f(x_0)$; op het interval $a_1 x_0$ kan $f(x)$ dus geen enkele waarde, grooter dan $f(x_0)$ aannemen, omdat anders x_0 geen eerste snijpunt was. In x_0 vertoont $f(x)$ dus de linkerbenenmonotonie.

Hoe staat het met een punt van het type $\bar{x}_0$? $\bar{x}_0$ is een verdichtingspunt van eerste snijpunten x_0 . Noemen we het bij $y = f(\bar{x}_0)$ behoorende eerste snijpunt x'_0 , dan zal op het interval $x'_0 \bar{x}_0$ geen punt te vinden zijn, waar $f(x) > f(\bar{x}_0)$. Dit is reeds in het bewijs van Eig. VI aangetoond. Alle punten van de verzameling P_1 bezitten dus inderdaad de genoemde monotonie.

Een perfecte verzameling van punten met rechterboven monotonie vinden we op $\bar{a}_1 \bar{b}_1$ als volgt: voor elke waarde η , die voldoet aan $A_1 \leq \eta \leq B_1$, beschouwen we, in plaats van de kleinste, de grootste waarde van x , waarvoor $f(x) = \eta$. We voegen aan de verzameling van deze punten weer de er nog niet bij behoorende verdichtingspunten toe.

Volgens de boven ontwikkelde methoden kan men dan bewijzen, dat er een perfecte verzameling ontstaat, waarvan ieder punt de rechterboven-

⁽¹⁾ Bekend is, dat het complement van een niet leeg discontinue perfecte verzameling op $a b$ de vereeniging is van aftelbaar oneindig veel buiten elkaar liggende intervallen (contigus).

monotonie bezit. En perfecte verzamelingen van punten van de beide andere soorten vinden we in $a\beta$ door alles nog eens te herhalen voor een segment $c_1 d_1$ in $a\beta$, zoodanig dat

$$f(c_1) = C_1 > f(d_1) = D_1.$$

§ 22. EIGENSCHAP VIII. *Is $f(x)$ een continue, multioscilleerende functie op $\overline{ab}$ en $\varphi(y)$ een continue functie op het segment cd , gevormd door de waarden van $f(x)$ op $\overline{ab}$, terwijl $\varphi(y)$ in geen enkel deelinterval van cd constant is, dan is ook*

$$\psi(x) = \varphi[f(x)]$$

een continue, multioscilleerende functie op $\overline{ab}$.

Bewijs: $\psi(x)$ is continu volgens een bekende stelling.

Zij $a\beta$ een willekeurig deelsegment van $\overline{ab}$. Op $\overline{a\beta}$ zijn volgens Eig. IV oneindig veel punten, waar $f(x)$ eenzelfde waarde aanneemt. Stel $x_1 < x_2$ zijn twee van die punten, dus

$$f(x_1) = f(x_2) = \eta, \quad \psi(x_1) = \psi(x_2) = \varphi(\eta) = \beta.$$

$f(x)$ is niet constant op $\overline{x_1 x_2}$, dus de waarden van $f(x)$ op $\overline{x_1 x_2}$ vormen een deelsegment $\gamma\delta$ van $\overline{cd}$. Op $\overline{\gamma\delta}$ is $\varphi(y)$ niet constant en $\varphi(y)$ neemt er dus behalve de waarde $\beta = \varphi(\eta)$ nog andere waarden aan. Stel b. v. $\varphi(y)$ neemt een waarde $\beta' > \beta$ aan op $\overline{\gamma\delta}$. (Voor $\beta' < \beta$ gaat de verdere bewijsvoering analoog). Dat beteekent voor $\psi(x)$: $\psi(x)$ neemt in een punt x_3 van het interval $a\beta$ de waarde β' aan.

Zoo hebben we op het willekeurige deelsegment $a\beta$ van $\overline{ab}$ gevonden

$$x_1 < x_3 \text{ met } \psi(x_1) = \beta < \psi(x_3) = \beta'$$

en

$$x_3 < x_2 \text{ met } \psi(x_3) = \beta' > \psi(x_2) = \beta.$$

$\psi(x)$ is dus continu en multioscillant op $\overline{ab}$.

§ 23. EIGENSCHAP IX. *Als $f(x)$ een continue functie is op $\overline{ab}$, die in geen enkel deelinterval van $\overline{ab}$ constant is, terwijl $\varphi(y)$ een continue, multioscilleerende functie is op het segment cd , gevormd door de waarden van $f(x)$ op $\overline{ab}$, dan is ook*

$$\psi(x) = \varphi[f(x)]$$

een continue, multioscilleerende functie op $\overline{ab}$.

Bewijs: $\psi(x)$ is continu.

Zij $a\beta$ weer een willekeurig deelsegment van $a b$. Daar $f(x)$ in geen enkel interval binnen $a b$ constant is, is er een deelsegment $\alpha_1 \beta_1$ binnen $\overline{a\beta}$, zoodat $f(\alpha_1) \neq f(\beta_1)$. Zij b. v. $f(\alpha_1) < f(\beta_1)$.

De waarden van $f(x)$ op $\overline{\alpha_1 \beta_1}$ vormen een deelsegment $\gamma_1 \delta_1$ van $\overline{cd}$. Op dezelfde wijze, als dat in Eig. VI geschiedde, construeeren wij op $\overline{\alpha_1 \beta_1}$ een perfecte verzameling P . Dit is mogelijk, omdat de constructie van die verzameling alleen berustte op de continuïteit van de gegeven functie. Op geheel dezelfde manier kan men ook nu weer aantonen, dat $f(x)$

op P monotoon verandert en elke waarde tusschen $f(\alpha_1)$ en $f(\beta_1)$ op P minstens één, hoogstens twee maal aanneemt.

We kiezen nu vier waarden van y , zoodat

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) < y_1 < y_2 < f(\beta_1) & , \quad \varphi(y_1) > \varphi(y_2); \\ f(\alpha_1) < y_3 < y_4 < f(\beta_1) & , \quad \varphi(y_3) < \varphi(y_4). \end{aligned}$$

Dit is mogelijk, omdat $\varphi(y)$ multioscilllant is op $\overline{cd}$. Wij weten dan, dat $f(x)$ de waarden y_1, y_2, y_3, y_4 aanneemt in punten van P , resp. x_1, x_2, x_3, x_4 , die voldoen aan

$$x_1 < x_2 \quad , \quad x_3 < x_4.$$

Op het willekeurige deelsegment $\alpha\beta$ van $\overline{ab}$ zijn zoo gevonden

$$x_1 < x_2, \quad \text{met} \quad \varphi(y_1) = \psi(x_1) > \varphi(y_2) = \psi(x_2)$$

en

$$x_3 < x_4, \quad \text{met} \quad \varphi(y_3) = \psi(x_3) < \varphi(y_4) = \psi(x_4).$$

Hieruit volgt, dat de continue functie $\psi(x)$ op $\overline{ab}$ ook multioscilllant is.

HOOFDSTUK III.

OVERAL DIFFERENTIEERBARE, MULTIOSCILLEERENDE FUNCTIES.

§ 24. De vraag of er multioscilleerende functies zijn, die in elk punt van een zeker interval a b een eindige afgeleide bezitten, is door A. KÖPCKE bevestigend beantwoord. Hij definieert zoo'n functie in Mathematische Annalen 29, bl. 123. De fouten, die hij daarbij begaat, worden gedeeltelijk hersteld in Math. Ann. 34, bl. 161 en Math. Ann. 35, bl. 104.

I. PERENO heeft in Giornale di Matematiche di Battaglini 35, bl. 132, getracht, dit voorbeeld streng te behandelen. Waarbij hij echter op zijn beurt ernstige fouten maakt. Hier zal de methode nogmaals samengevat en de bewijsvoering verbeterd worden.

Constructie van de functie op het segment 01 .

De gezochte functie zal de limiet zijn van een oneindige rij van functies

$$F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x), \dots$$

§ 25. Definitie van een hulpfunctie (zie fig. 4): Neem een segment AB en daarop $AA' = B'B = \frac{1}{20} AB$. Trek door A' een lijn met richtingscoëfficiënt $+\frac{1}{2^n}$ en door M , het midden van AB , $2^n + 1$ rechten

$$r_1, r_2, \dots, r_{2^n+1},$$

met richtingscoëfficiënten, resp. gelijk aan

$$-\frac{1}{2^n}, -\frac{2}{2^n}, \dots, -\frac{2^n+1}{2^n}.$$

Door het snijpunt van r_0 en r_2 trekken we $r'_1 \parallel r_1$,

door dat van r'_1 en r_3 „ „ $r'_2 \parallel r_2$,

„ „ „ r'_2 en r_4 „ „ $r'_3 \parallel r_3$, enz.

De gebroken lijn $r_0 r'_1 r'_2 \dots r'_{2^n-1} r_{2^n+1}$ stelt dan een functie voor op $A'M$.

Deze lijn spiegelen we ten opzichte van M en krijgen zoo een functie, gedefinieerd op $\overline{AB}$, wanneer we aan de grafische voorstelling nog AA' en $B'B$ toevoegen.

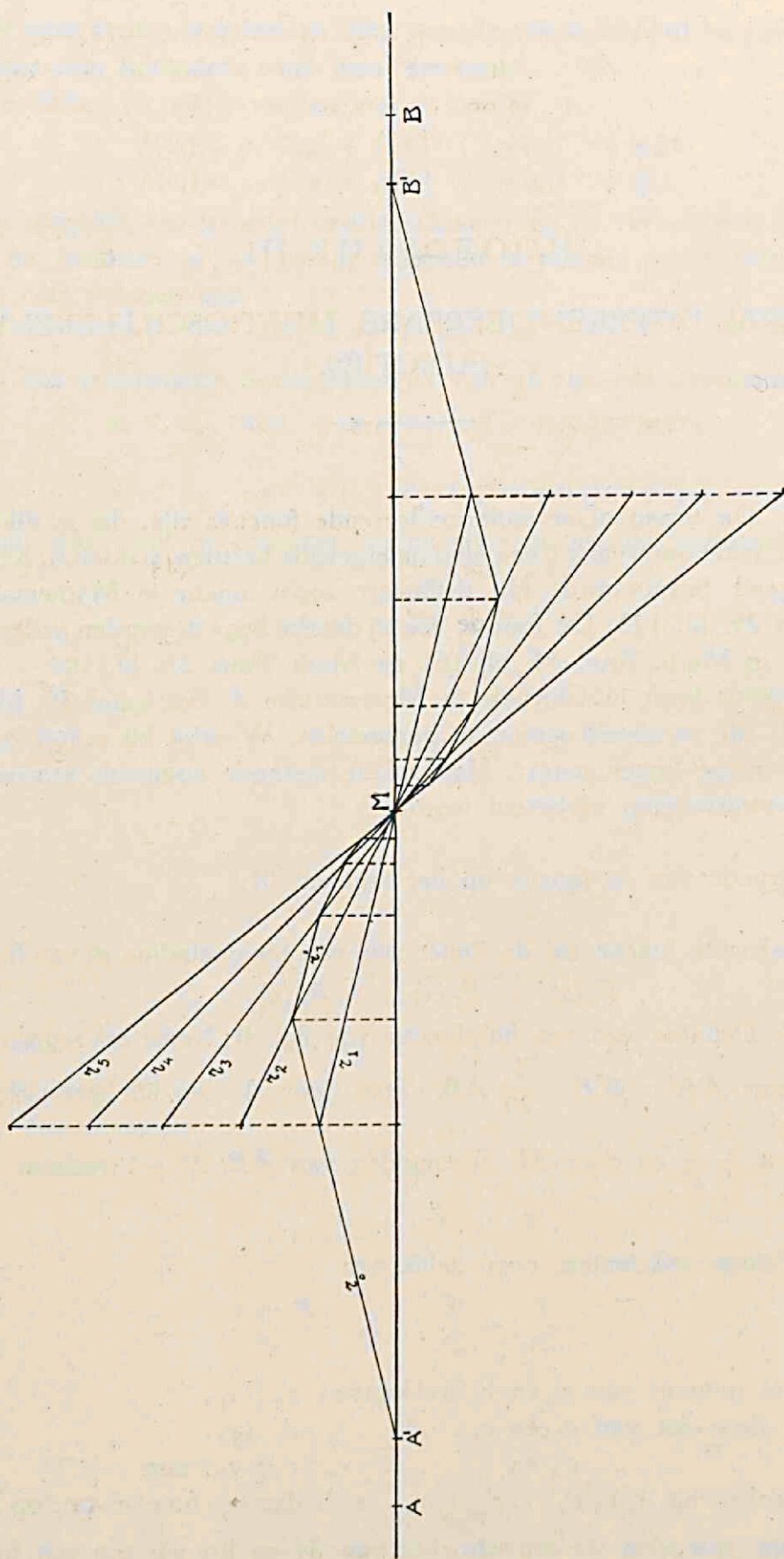


Fig. 4 ($n = 2$ gekozen)

Om er een functie uit af te leiden, die overal een (continue) afgeleide heeft, denkt men zich vanuit ieder hoekpunt P van de gebroken lijn stukken PP_1 en PP_2 afgezet op de aangrenzende rechte gedeelten PQ_1 en PQ_2 en men kiest voor de lengte van PP_1 en PP_2 het $\frac{1}{20}$ deel van de lengte van de kleinste der lijnen PQ_1 en PQ_2 . Hierna wordt de cirkelboog beschreven, die in P_1 en P_2 raakt aan PQ_1 resp. PQ_2 . De zoo op $\overline{AB}$ ontstane functie heeft een continue afgeleide. Bij elke waarde van n behoort zoo'n functie; we noemen ze $(AB)_n$.

De afgeleide ervan is nul in A en B en in M :

$$-\frac{2^n + 1}{2^n} = -1 - \frac{1}{2^n}.$$

§ 26. Door middel van $(AB)_n$ definiëren we nu als volgt de rij

$$F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x), \dots$$

Voor $F_0(x)$ nemen we de functie, grafisch voorgesteld door de kwartcirkel, die men op $\overline{01}$ als koorde kan beschrijven. $x = \frac{1}{2}$ is een maximum.

$$\text{Stel } F'_0\left(\frac{1}{4}\right) = A_0.$$

Lettend op de beteekenis van $(AB)_n$ construeeren wij de functie

$$\begin{aligned} & A_0 \times \left(0 \frac{1}{2}\right)_1 \text{ op het segment } 0 \frac{1}{2}, \\ & - A_0 \times \left(\frac{1}{2} 1\right)_1 \text{ " " " } \frac{1}{2} 1. \end{aligned}$$

De zoo op $\overline{01}$ gedefinieerde functie noemen we $f_1(x)$ en stellen $F_1(x) = F_0(x) + f_1(x)$.

Van deze functie $F_1(x)$ weten we:

$$F'_1(0) = F'_0(0) + f'_1(0) = +1 + 0 = +1,$$

$$F'_1\left(\frac{1}{4}\right) = F'_0\left(\frac{1}{4}\right) + f'_1\left(\frac{1}{4}\right) = +A_0 - A_0 \frac{2^1 + 1}{2^1} = -\frac{1}{2} A_0 < 0,$$

$$F'_1\left(\frac{1}{2}\right) = F'_0\left(\frac{1}{2}\right) + f'_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + 0 = 0,$$

$$F'_1\left(\frac{3}{4}\right) = F'_0\left(\frac{3}{4}\right) + f'_1\left(\frac{3}{4}\right) = -A_0 + A_0 \frac{2^1 + 1}{2^1} = +\frac{1}{2} A_0 > 0,$$

$$F'_1(1) = F'_0(1) + f'_1(1) = -1 + 0 = -1.$$

Hieruit leidt men gemakkelijk af, dat $F'_1(x)$ behalve in $x = \frac{1}{2}$, nog nul is in minstens vier punten tusschen $x = 0$ en $x = 1$.

De punten, waar $F'_1(x) = 0$, gebruikt men bij de constructie van een functie $f_2(x)$: Men verdeelt $\overline{01}$ door die punten en zoo noodig een eindig

aantal andere in segmenten, waarop $F'_1(x)$ minder schommelt dan $\frac{1}{2^1}$. Dit is mogelijk, omdat $F'_1(x)$ op $\overline{01}$ gelijkmatig continu is.

De zoo ontstane deelpunten noemen we, de punten 0 en 1 meetellend,

$$a_1^1, a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^s, a_1^{s+1}, \dots$$

Op ieder segment $a_1^s a_1^{s+1}$ construeeren we de functie

$$A_1^s \times (a_1^s a_1^{s+1})_2, \text{ waar } A_1^s = F'_1(m_1^s), \\ \text{als } m_1^s = \frac{a_1^s + a_1^{s+1}}{2}.$$

De zoo op $\overline{01}$ gedefinieerde functie is $f_2(x)$ en

$$F_2(x) = F_1(x) + f_2(x) = F_0(x) + f_1(x) + f_2(x).$$

$F'_2(x)$ heeft in ieder interval $a_1^s a_1^{s+1}$ minstens twee nulpunten en is bovendien nul in die punten a_1^s , waar $F'_1(x)$ nul is. We zetten dit procédé voort tot in het oneindige; daartoe geven wij algemeen aan den overgang van $F_n(x)$ op $F_{n+1}(x)$, voor $n \geq 1$.

Zoek de nulpunten van $F'_n(x)$ benevens alle vorige deelpunten. Verdeel daarna elk der verkregen segmenten (waarop $F_n(x)$ monotoon is), nog in een eindig aantal deelen, zóó, dat $F'_n(x)$ op ieder deel minder schommelt dan $\frac{1}{2^n}$.

Stel al deze deelpunten voor door

$$a_n^1, a_n^2, a_n^3, \dots, a_n^s, a_n^{s+1}, \dots,$$

dan definieeren we $f_{n+1}(x)$ op $a_n^s a_n^{s+1}$ door te stellen

$$f_{n+1}(x) = A_n^s (a_n^s a_n^{s+1})_{n+1}^{(1)},$$

waar $A_n^s = F'_n(m_n^s)$, als $m_n^s = \frac{a_n^s + a_n^{s+1}}{2}$.

En $F_{n+1}(x) = F_n(x) + f_{n+1}(x) = F_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + f_{n+1}(x)$.

§ 27. $f_{n+1}'(x)$ is nul in de punten a_n^s , m_n^s en a_n^{s+1} . In deze punten is dus $F_{n+1}'(x) = F'_n(x)$. Verder is

$$F'_{n+1}(m_n^s) = F'_n(m_n^s) + f'_{n+1}(m_n^s) = A_n^s - \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) A_n^s,$$

$$F'_{n+1}(m_n^s) = -\frac{1}{2^n} A_n^s.$$

Uit deze opmerkingen is af te leiden, dat $F'_{n+1}(x)$ in $a_n^s a_n^{s+1}$ minstens

(1) Mocht $F'_n(x)$ nul zijn op een geheel segment, dan beschouwen we alleen de eindpunten daarvan als punten a_n^s . We stellen dan

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} (a_n^s a_n^{s+1})_{n+1},$$

dus $A_n^s = +\frac{1}{2^n}$ in zoo'n geval. A_n^s is dus nooit nul.

twee nulpunten vertoont. Een beschouwing van die gedeelten van $a_n^s a_n^{s+1}$, waar $f_{n+1}'(x)$ hetzelfde teeken heeft als $F_n'(x)$ (d. i. dus het teeken van A_n^s), leert verder, dat deze nulpunten $a_n^s a_n^{s+1}$ in deelen verdeelen, die ieder kleiner zijn dan de helft van $a_n^s a_n^{s+1}$ ⁽¹⁾. Dit geldt voor ieder rangnummer $n \geq 1$. Door volledige inductie zou men hieruit kunnen afleiden, dat ieder segment $a_n^s a_n^{s+1}$ een lengte heeft, kleiner dan $\frac{1}{2^n}$. Hiervan zullen wij straks gebruik maken.

Van de rij $F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x), \dots$ gaan we aantoonen:

- I. *Er is een eindige, continue limietfunctie $F(x)$,*
- II. *$F(x)$ is multioscillans op 01 ,*
- III. *$F(x)$ is differentieerbaar voor $0 \leq x \leq 1$.*

§ 28. Bewijs van I:

We stellen $S_n(x) = F_n'(x) = F_0'(x) + \sum_{m=1}^n f_m'(x)$ en zullen door volledige inductie aantoonen:

$$|S_n(x)| < P_n = \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^m}\right).$$

Voor $n=0$ is $|F_0'(x)| \leq 1$ en voor $n=1$ volgt uit de constructie gemakkelijk

$$|F_1'(x)| < 1 + \frac{1}{2}.$$

De bedoelde ongelijkheid geldt dus reeds voor $n=0$ en $n=1$.

Rest ons, uitgaande van $|S_n(x)| < P_n$, af te leiden $|S_{n+1}(x)| < P_{n+1}$, voor $n \geq 1$. Bij willekeurige x op 01 is een rangnummer s_x te vinden, zoodat

$$a_n^{s_x} \leq x \leq a_n^{s_x+1}.$$

Volgens de constructievoorschriften is dan:

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + \frac{A_n^{s_x}}{2^{n+1}} \cdot a_n,$$

waar

$$1 \geq a_n \geq -(2^{n+1} + 1).$$

$|A_n^{s_x}| < P_n$, omdat gegeven is $|S_n(x)| < P_n$. $A_n^{s_x}$ is nooit nul; het teeken van $A_n^{s_x}$ is hetzelfde als dat van $S_n(x)$ ⁽²⁾, omdat op $a_n^{s_x} a_n^{s_x+1}$ $F_n(x)$ monotoon toeneemt of afneemt. $S_n(x)$ en $S_{n+1}(x)$ kunnen verschillend teeken hebben.

(1) Wij lieten hier het geval, waarin $F_n'(x)$ nul is op het geheele segment $a_n^s a_n^{s+1}$, buiten beschouwing. In dat geval zou n.l. $F_n(x)$ constant zijn op $a_n^s a_n^{s+1}$ en dan is de juistheid van de door ons gevonden regel nog gemakkelijker aan te toonen.

(2) Is $S_n(x)$ nul op het geheele segment $a_n^{s_x} a_n^{s_x+1}$, dan is $A_n^{s_x} = +\frac{1}{2^n}$ en $|S_{n+1}(x)| < \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) < P_{n+1}$.

Is $a_n \equiv 0$, dan moet $|S_{n+1}(x)| < P_n + \frac{P_n}{2^{n+1}} = P_{n+1}$, aangezien $a_n \equiv 1$.

Is $a_n < 0$, dan moet volgens het voorgaande

$$\text{of} \quad |S_{n+1}(x)| < |S_n(x)| < P_n < P_{n+1},$$

$$\text{of} \quad |S_{n+1}(x)| < \left| \frac{A_n^{s_x}}{2^{n+1}} \cdot a_n \right| < P_{n+1},$$

omdat $a_n \equiv -(2^{n+1} + 1)$.

In ieder geval is dus $|S_{n+1}(x)| < P_{n+1}$, waarmee de ongelijkheid

$$|S_n(x)| < P_n$$

algemeen bewezen is. Dus ook

$$|S_n(x)| < P = \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots$$

En $|A_n^s| < P$.

Beschouwen we nu de grafische voorstelling van $f_{n+1}(x)$ in een interval $a_n^s a_n^{s+1}$. Deze is begrepen tusschen de twee lijnen met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2^{n+1}} A_n^s$ door de eindpunten getrokken. Wij weten reeds, dat de lengte van het interval kleiner is dan $\frac{1}{2^n}$. Hieruit volgt: op het segment $\overline{01}$ is

$$|f_{n+1}(x)| < \frac{1}{2^n} \cdot \frac{A_n^s}{2^{n+1}} < \frac{P}{2^{2n+1}}.$$

De rij van continue functies $F_n(x)$ convergeert dus op $\overline{01}$ gelijkmatig; er is dus een continue limietfunctie $F(x)$.

§ 29. Bewijs van II: Zij $\alpha\beta$ een willekeurig deelinterval van $\overline{01}$ met lengte τ . Kies n zoo groot, dat $\frac{1}{2^n} < \frac{\tau}{2}$. Er ligt dan minstens één segment $a_n^s a_n^{s+1}$ geheel binnen $\alpha\beta$.

Laten we eerst eens beschouwen het geval: $A_n^s > 0$. $F_n(x)$ neemt dan op $a_n^s a_n^{s+1}$ monotoon toe. In de punten a_n^s , m_n^s en a_n^{s+1} is $F_{n+1}(x) = F_n(x)$. Dus

$$F_{n+1}(a_n^s) < F_{n+1}(m_n^s) < F_{n+1}(a_n^{s+1}).$$

Houdt men daarbij de betrekking

$$F'_{n+1}(m_n^s) = -\frac{1}{2^n} A_n^s < 0$$

in 't oog, dan blijkt, dat er in $a_n^s a_n^{s+1}$ twee punten $\xi_1 < m_n^s$ en $\xi_2 > m_n^s$ te vinden zijn, zoodat

$$F'_{n+1}(\xi_1) = F'_{n+1}(\xi_2) = 0 \text{ en tevens } F_{n+1}(a_n^s) < F_{n+1}(\xi_1), \\ F_{n+1}(\xi_1) > F_{n+1}(\xi_2).$$

Voor alle volgende functies $F_{n+m}(x)$ zijn a_n^s , ξ_1 en ξ_2 deelpunten, dus

$$F_{n+1}(a_n^s) = F_{n+2}(a_n^s) = \dots = F_{n+m}(a_n^s) = \dots = F(a_n^s), \\ F_{n+1}(\xi_1) = F(\xi_1), \quad F_{n+1}(\xi_2) = F(\xi_2).$$

We hebben zoo in $a\beta$ twee punten $a_n^s < \xi_1$ gevonden met $F(a_n^s) < F(\xi_1)$ en ook twee punten $\xi_1 < \xi_2$, zoodat $F(\xi_1) > F(\xi_2)$. De gevallen, waarin $F_n(x)$ op $\overline{a_n^s a_n^{s+1}}$ daalt of constant is, gaan analoog. $F(x)$ is dus multioscillatant op 01 .

§ 30. Wij zullen thans overgaan tot het bewijs van III. Hiertoe gaan we aantonen, dat de reeks

$$F'_0(x) + f'_1(x) + f'_2(x) + \dots$$

convergeert voor $0 \equiv x \equiv 1$ en dat er bij gegeven x en gegeven ε een positief getal h te vinden is, zoodat

$$\left| \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - [F'_0(x) + f'_1(x) + f'_2(x) + \dots] \right| < \varepsilon,$$

voor $|\Delta x| < h$, mits x en $x + \Delta x$ op $\overline{01}$ liggen.

Dan zal daarmee bewezen zijn, dat $F(x)$ in elk punt van 01 tot afgeleide heeft

$$F'_0(x) + f'_1(x) + f'_2(x) + \dots$$

Voeren we de volgende notatie in:

$$R_m(x) = f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots$$

$$\sum_0^m f_n(x) = F_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$$

$$\sum_0^\infty f_n(x) = F_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots \text{ enz.}$$

Dan is

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \sum_0^m \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} + \sum_{m+1}^\infty \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x}.$$

Veronderstellen we eens even, dat de convergentie van $\sum_0^\infty f'_n(x)$ bewezen is, dan kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} & \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - \sum_0^\infty f'_n(x) = \\ &= \sum_0^m \left[\frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} - f'_n(x) \right] + \frac{R_m(x + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{R_m(x)}{\Delta x} - \sum_{m+1}^\infty f'_n(x). \end{aligned}$$

En we kunnen dus volstaan met te bewijzen:

A) $\sum_0^\infty f'_n(x)$ convergeert. Bij ieder punt x op $\overline{01}$ is dan een getal m_1 te vinden, zoodat

$$|f'_{m+1}(x) + f'_{m+2}(x) + \dots| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ voor } m > m_1.$$

B) Er is een getal $h > 0$ en een index $m > m_1$, zoodat voor het onder

A) reeds in 't oog gevatte punt x

$$\left| \frac{R_m(x + \Delta x)}{\Delta x} \right| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ en } \left| \frac{R_m(x)}{\Delta x} \right| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ als } |\Delta x| < h.$$

C) Voor $|\Delta x| < h$ is ook

$$\left| \sum_0^m \left[\frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} - f'_n(x) \right] \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Het in de condities B) en C) optredende rangnummer m mag afhankelijk zijn van Δx , maar steeds moet $m > m_1$.

Deze voorwaarden A), B) en C) zijn opgesteld door U. DINI ⁽¹⁾.

§ 31. Bespreken we eerst conditie A).

In een deelpunt a_n^s is $f'_{n+1}(x) = f'_{n+2}(x) = \dots = 0$. Hier convergeert $\sum_0^\infty f'_n(x)$ dus al zeker. Is x geen der oneindig vele deelpunten, dan gebruiken we de betrekking

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + \alpha_n A_n^{s_x},$$

waarin

$$1 \geq \alpha_n \geq -(2^{n+1} + 1),$$

$$S_n(x) = F'_n(x) = \sum_0^n f'_m(x).$$

Wat het teeken van $S_n(x)$ betreft, zijn er drie mogelijkheden:

1) $S_n(x) > 0$ vanaf zeker rangnummer $n = m$. Dus ook $A_n^{s_x} > 0$ voor $n \geq m$. Men heeft dan:

$$S_{m+1}(x) \geq S_m(x) + \frac{A_m^{s_x}}{2^{m+1}}$$

$$S_{m+2}(x) \geq S_{m+1}(x) + \frac{A_{m+1}^{s_x}}{2^{m+2}}$$

enz.

Hieruit volgt

$$S_{m+p}(x) \geq S_m(x) + \frac{A_m^{s_x}}{2^{m+1}} + \frac{A_{m+1}^{s_x}}{2^{m+2}} + \dots + \frac{A_{m+p-1}^{s_x}}{2^{m+p}}.$$

Aangezien steeds $|A_n^s| < P$ is dus

$$S_{m+p}(x) < S_m(x) + \frac{P}{2^m}, \text{ voor } p \geq 1.$$

Zij A de limes inferior van $S_n(x)$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = A$. Is n.l. σ een willekeurig gekozen positief getal, dan is er een rangnummer $n_1 > m$, zoodat

$$S_{n_1+p}(x) > A - \sigma \text{ voor } p \geq 1.$$

Verder kiezen we $n_2 > m$ zoo hoog, dat

$$S_{n_2}(x) < A + \frac{\sigma}{2} \text{ en } \frac{P}{2^{n_2}} < \frac{\sigma}{2}.$$

Dan is

$$S_{n_2+p}(x) < A + \frac{\sigma}{2} + \frac{P}{2^{n_2}} < A + \sigma \text{ voor } p \geq 1.$$

⁽¹⁾ In zijn reeds eerder aangehaalde „Fondamenti, enz.“, § 103.

Voor elke waarde van n , grooter dan n_1 en n_2 , geldt dan

$$A - \sigma < S_n(x) < A + \sigma.$$

Waaruit blijkt, dat $S_n(x)$ tot A convergeert, waar $A \equiv 0$.

2) $S_n(x) < 0$ vanaf zeker rangnummer. Het bewijs gaat op geheel dezelfde manier.

3) $S_n(x)$ heeft vanaf geen enkel rangnummer een vast teeken.

Wij merken vooreerst op, dat $S_n(x)$ niet voor twee opeenvolgende waarden van n nul kan zijn. Want x is volgens afspraak geen deelpunt, dus is $S_n(x) = 0$, dan is x een punt van een interval, waarin $F'_n(x) = 0$. $F'_{n+1}(x)$ is dan zeker niet nul, immers dan zou x een maximum of minimum van $F_{n+1}(x)$ zijn en dus een punt a_{n+1}^s .

Evenmin is $F'_{n-1}(x)$ nul.

De oneindige rij van indices, waarvoor $S_n(x)$ en $S_{n+1}(x)$ niet hetzelfde teeken hebben, stellen we voor door

$$n_1, n_2, n_3, \dots$$

Voor ieder van deze indices, b.v. n_1 , moeten we de volgende gevallen nagaan

a) $S_{n_1}(x) = 0$, dus $S_{n_1+1}(x) \geq 0$.

x is een punt van een interval, waar $F_{n_1}(x)$ constant is.

$$A_{n_1}^{s_x} = \frac{1}{2^{n_1}},$$

$$|S_{n_1+1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n_1}} \left(1 + \frac{1}{2^{n_1+1}}\right) < \frac{P}{2^{n_1}}.$$

b) $S_{n_1}(x) < 0$, dus $S_{n_1+1}(x) \geq 0$.

$$S_{n_1+1}(x) = S_{n_1}(x) + \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} \cdot a_{n_1} \text{ waar } 1 \geq a_{n_1} \geq -(2^{n_1+1} + 1).$$

$S_{n_1}(x)$ en $A_{n_1}^{s_x}$ zijn beide negatief, dus $a_{n_1} < 0$.

Daaruit volgt

$$S_{n_1+1}(x) \geq S_{n_1}(x) - \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} (2^{n_1+1} + 1)$$

$$S_{n_1+1}(x) \geq S_{n_1}(x) - A_{n_1}^{s_x} - \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}},$$

Daar in $a_{n_1}^{s_x} a_{n_1}^{s_x+1}$ de schommeling van $F'_{n_1}(x)$ minder bedraagt dan $\frac{1}{2^{n_1}}$ is dus

$$S_{n_1+1}(x) < \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{P}{2^{n_1+1}} < \frac{P}{2^{n_1}}.$$

c) $S_{n_1}(x) > 0$, dus $S_{n_1+1}(x) \geq 0$.

Volgens de onder b) gevolgde methode bewijst men nu

$$S_{n_1+1}(x) > -\frac{P}{2^{n_1}}.$$

Wij zien dus, dat, onverschillig of $S_{n_1}(x) \equiv 0$,

$$|S_{n_1+1}(x)| < \frac{P}{2^{n_1}}.$$

Dezelfde ongelijkheid geldt voor $n_2, n_3, \dots$. Zij nu in werkelijkheid b.v. $S_{n_1}(x) < 0$, dan is $S_{n_1+p}(x) > 0$, voor $p = 1, 2, 3, \dots, n_2 - n_1$. Voor de getallen $S_{n_1+1}(x), S_{n_1+2}(x), \dots, S_{n_2}(x)$, die alle positief zijn, geldt de vroeger afgeleide betrekking

$$S_{m+p}(x) < S_m(x) + \frac{P}{2^m}. \quad (\text{blz. 40}).$$

Dus

$$S_{n_1+p}(x) < S_{n_1+1}(x) + \frac{P}{2^{n_1+1}} < \frac{P}{2^{n_1}} + \frac{P}{2^{n_1+1}}, \quad \text{voor } p = 1, 2, \dots, n_2 - n_1.$$

Voor den index n_2 geldt: $S_{n_2}(x) > 0, |S_{n_2+1}(x)| < \frac{P}{2^{n_2}}$ en vinden we op analoge wijze

$$|S_{n_2+p}(x)| < |S_{n_2+1}(x)| + \frac{P}{2^{n_2+1}} < \frac{P}{2^{n_2}} + \frac{P}{2^{n_2+1}}, \quad \text{voor } p = 1, 2, \dots, n_3 - n_2.$$

Zoo voortgaande blijkt (aangezien n_k onbepaald toeneemt, als k dat doet), dat $S_n(x)$ in geval c) convergeert tot nul.

De reeks $F'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ convergeert dus voor alle x op $\overline{01}$.

Wij gaan nu bewijzen, dat aan de condities B) en C) van DINI kan worden voldaan.

§ 32. Evenals in § 31 beschouwen we weer eerst het geval, dat we te doen hebben met een deelpunt a_n^s . Dus

$$f'_{n+1}(x) = f'_{n+2}(x) = \dots = 0.$$

$$F'_n(x) = F'_{n+1}(x) = \dots = F'_{n+p}(x).$$

Hierin is $p \equiv 1$. Uit $|A_n^s| < P$ en de constructie van $f_{n+p}(x)$ volgt, dat de grafische voorstelling van deze functie tusschen de lijnen ligt, die men uit het punt $x = a_n^s, y = f_{n+p}(a_n^s) = 0$ kan trekken met richtingscoëfficiënten $+\frac{P}{2^{n+p}}$ en $-\frac{P}{2^{n+p}}$. Hieruit volgt

$$|f_{n+p}(a_n^s + \Delta x)| < \frac{P}{2^{n+p}} \cdot |\Delta x|. \quad (\Delta x \neq 0).$$

$$\left| \frac{f_{n+p}(a_n^s + \Delta x)}{\Delta x} \right| < \frac{P}{2^{n+p}}.$$

$$\left| \frac{R_{n+p_1}(a_n^s + \Delta x)}{\Delta x} \right| < \sum_{p_1+1}^{\infty} \frac{P}{2^{n+p}} = \frac{P}{2^{n+p_1}}.$$

Terwijl

$$\left| \frac{R_{n+p_1}(a_n^s)}{\Delta x} \right| = 0.$$

Voor 't getal m_1 kan men hier n kiezen, omdat

$$f'_{n+1}(a_n^s) = f'_{n+2}(a_n^s) = \dots = 0.$$

Kies $m > n = m_1$ zoo groot, dat $\frac{P}{2^m} < \frac{\varepsilon}{4}$. Dan blijkt, dat in dit geval m zelfs onafhankelijk van Δx gekozen kan worden, om aan conditie B) van DINI te voldoen.

Overgaande tot C) merken we op, dat $F_m(x)$ in $x = a_n^s$ een eindige afgeleide bezit. Er is dus een getal $h > 0$, zoodat

$$\left| \frac{F_m(a_n^s + \Delta x) - F_m(a_n^s)}{\Delta x} - F'_m(a_n^s) \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{voor } |\Delta x| < h.$$

Aan C) kan dus ook voldaan worden.

§ 33. Beschouwen we tenslotte de voorwaarden B) en C) voor 't geval, waarin x geen der deelpunten is. ε en m_1 hebben wij als van te voren gegeven op te vatten. In verband met de redeneering, die wij gaan houden, kiezen we, bij de beschouwde waarde van x , een rangnummer $n \equiv m_1$ zoodanig, dat $\frac{P}{2^{n-3}} < \frac{\varepsilon}{12}$ en $|S_{n'}(x) - S_{n''}(x)| < \frac{\varepsilon}{12}$, waar n' en n'' twee willekeurige rangnummers, grooter dan n , voorstellen. Dit is mogelijk, omdat de rij $S_n(x)$ convergeert.

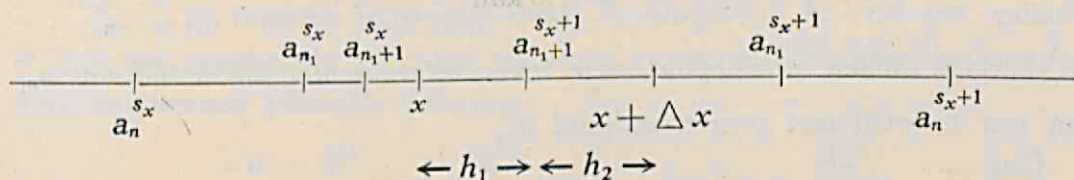
Laten we eerst stellen: $\Delta x > 0$. Zij $\tau = a_{n_1+1}^{s_{x+1}} - x$, dan nemen we voor het in B) en C) optredende getal h dit bedrag τ . Dus $\Delta x < \tau$.

Wij zullen dan aantoonen, dat aan B) en C) voldaan wordt door voor het getal m het op de volgende wijze van $\Delta x < \tau$ afhankelijke getal $n_1 + 1$ te kiezen:

n_1 is het rangnummer, waarvoor

$$x < a_{n_1+1}^{s_{x+1}} \equiv x + \Delta x \equiv a_{n_1+1}^{s_{x+1}} < a_n^{s_{x+1}}.$$

De afhankelijkheid van $m = n_1 + 1$ van Δx was geoorloofd, mits $m > m_1$. Nu is $n_1 \equiv n > m_1$, dus is zeker $m > m_1$.



Stellen wij $a_{n_1+1}^{s_{x+1}} - x = h_1$, $x + \Delta x - a_{n_1+1}^{s_{x+1}} = h_2$. Dan is $h_1 > 0$, $h_2 \equiv 0$. Gebruik makend van het op bl. 42 behandelde, hebben we

$$\left| f_{n_1+1+p}(a_{n_1+1}^{s_{x+1}} + a) \right| < \frac{P}{2^{n_1+1+p}} \cdot |a|,$$

voor $p \geq 1$. Dus

$$|f_{n_1+1+p}(x)| < \frac{P}{2^{n_1+1+p}} \cdot h_1.$$

Gesommeerd

$$|R_{n_1+1}(x)| < \frac{P}{2^{n_1+1}} \cdot h_1.$$

Nu is $h_1 < \Delta x$, dus is zeker

$$\left| \frac{R_{n_1+1}(x)}{\Delta x} \right| < \frac{P}{2^{n_1+1}} < \frac{P}{2^{n_1+1}} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Analoog valt af te leiden

$$\left| \frac{R_{n_1+1}(x + \Delta x)}{\Delta x} \right| < \frac{P}{2^{n_1+1}} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Blijft te beschouwen

$$\begin{aligned} \text{C)} \quad \sum_0^{n_1+1} \left[\frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} - f'_n(x) \right] = \\ = \left[\frac{\Delta F_{n_1}(x)}{\Delta x} - F'_{n_1}(x) \right] + \left[\frac{\Delta f_{n_1+1}(x)}{\Delta x} - f'_{n_1+1}(x) \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta F_{n_1}(x)}{\Delta x} = F'_{n_1}(x + \theta \Delta x), \quad \text{waar } 0 < \theta < 1.$$

$F'_{n_1}(x)$ schommelt in $a_{n_1}^{s_x} a_{n_1}^{s_x+1}$ minder dan $\frac{1}{2^{n_1}}$, dus

$$\left| \frac{\Delta F_{n_1}(x)}{\Delta x} - F'_{n_1}(x) \right| < \frac{1}{2^{n_1}}.$$

Moeilijker is het, iets van den tweeden vorm

$$\frac{\Delta f_{n_1+1}(x)}{\Delta x} - f'_{n_1+1}(x)$$

te zeggen. We behoeven $f_{n_1+1}(x)$ alleen te beschouwen op het segment $a_{n_1}^{s_x} a_{n_1}^{s_x+1}$ en daar is

$$f_{n_1+1}(x) = A_{n_1}^{s_x} \times (a_{n_1}^{s_x} a_{n_1}^{s_x+1})_{n_1+1}.$$

Stellen we b.v. $A_{n_1}^{s_x} > 0$, dus $F_{n_1}(x)$ is stijgend of constant op $a_{n_1}^{s_x} a_{n_1}^{s_x+1}$.

$f'_{n_1+1}(x)$ is alleen positief in een zeker interval met linkereindpunt $a_{n_1}^{s_x}$ en een interval met rechteindpunt $a_{n_1}^{s_x+1}$.

Dus

$$\frac{\Delta f_{n_1+1}(x)}{\Delta x} = f'_{n_1+1}(x + \theta \Delta x) \geq \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}.$$

Hiermee is van $\frac{\Delta f_{n_1+1}(x)}{\Delta x}$ een begrenzing naar boven gevonden. Wij zoeken nu een begrenzing naar beneden.

De grafische voorstelling van $A_{n_1}^{s_x} \times (a_{n_1}^{s_x} a_{n_1}^{s_x+1})_{n_1+1}$ kan geconstrueerd worden met behulp van een gebroken lijn, waarvan we de opeenvolgende deelen aldus aanduiden:

$\overline{r_0}, \overline{r'_1}, \overline{r'_2}, \dots, \overline{r'_{2n_1+1-1}}, \overline{r'_{2n_1+1+1}}, \overline{s'_{2n_1+1-1}}, \dots, \overline{s'_2}, \overline{s'_1}, \overline{s_0}$
 $\overline{r'_m} // \text{ en } = \overline{s'_m}$. Afgezien van het feit, dat alle richtingscoëfficiënten met $A_{n_1}^{s_x}$ vermenigvuldigd zijn, is het dezelfde gebroken lijn, die ons tot de functie $(a_{n_1}^{s_x} a_{n_1}^{s_x+1})_{n_1+1}$ voerde. De nu verkregen functie noemen we $g_{n_1+1}(x)$; ze onderscheidt zich van $f_{n_1+1}(x)$ alleen hierdoor, dat in de figuur de afrondingen der hoekpunten achterwege zijn gelaten. Wij zullen aantonen, dat, hoe ook x in $a_{n_1}^{s_x} a_{n_1}^{s_x+1}$ moge liggen, altijd geldt

$$\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x} > g'_{n_1+1}(x) - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}, \dots \dots \dots (1)$$

mits wij afspreken, in de punten $x_1, x_2, \dots$ (zie fig. 4a, bl. 46), waar $g_{n_1+1}(x)$ niet differentieerbaar is, onder $g'_{n_1+1}(x)$ de waarde van de rechterafgeleide te verstaan.

Hiertoe verlengen we $\overline{r'_2}$ (zie fig.) met een stuk, dat even groot is als $\overline{r'_2}$. Verbinden we het eindpunt met het snijpunt van $\overline{s'_2}$ en $\overline{s'_3}$, dan loopt de verbindingslijn evenwijdig aan $\overline{r'_3}$ en heeft tot richtingscoëfficiënt $-3 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}$. Het snijpunt P_1 van deze verbindingslijn met $\overline{r'_1}$ moge een abscis p_1 hebben, dan is

$$\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x} > -3 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}, \text{ voor } a_{n_1}^{s_x} \equiv x < p_1.$$

Immers, indien $x + \Delta x \equiv p_1$, is $\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x}$ minstens even groot als de richtingscoëfficiënt van $\overline{r'_1}$ en als $x + \Delta x > p_1$, is dat quotiënt minstens gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de zooeven besproken verbindingslijn.

En $g'_{n_1+1}(x) \equiv \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}$, dus voor $a_{n_1}^{s_x} \equiv x < p_1$ is

$$\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x} > g'_{n_1+1}(x) - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}.$$

Dezelfde constructie herhalen we voor $\overline{r'_3}$ en bepalen op $\overline{r'_2}$ het met P_1 overeenkomende punt P_2 . Dan is

$$\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x} > -4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} \text{ en } g'_{n_1+1}(x) \equiv -\frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}},$$

voor $p_1 \equiv x < p_2$ (men heeft nu in te vullen de richtingscoëfficiënten van $\overline{r'_4}$ resp. $\overline{r'_1}$). Voor $p_1 \equiv x < p_2$ geldt dus zeker

$$\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x} > g'_{n_1+1}(x) - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}.$$

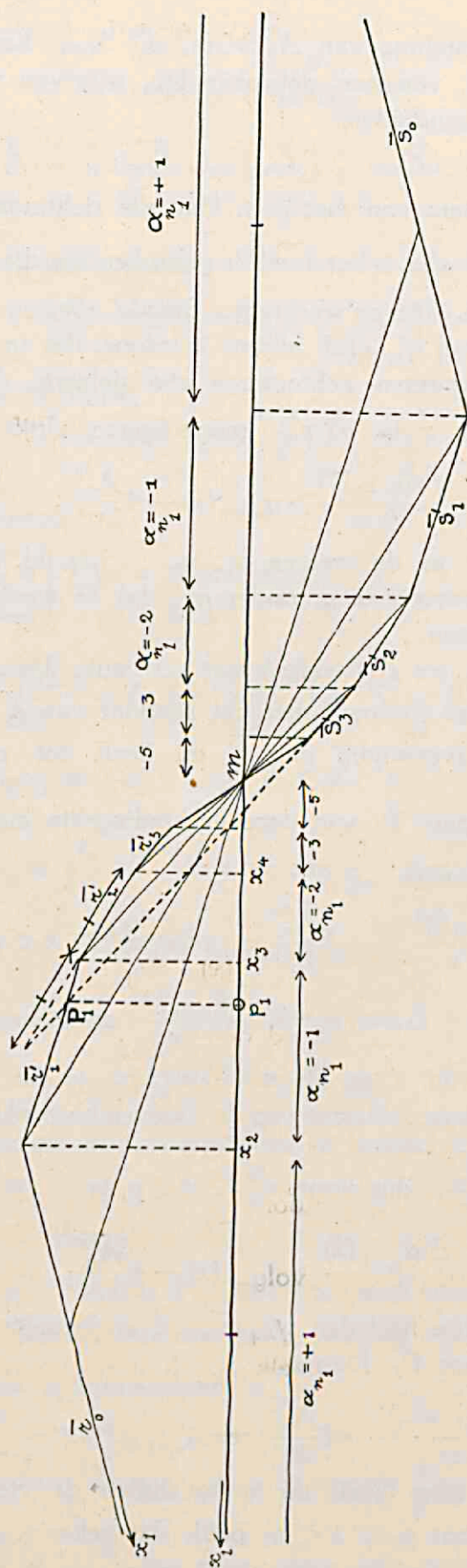


Fig. 4a (geconstrueerd voor $n_1 = 1$.)

Dit procédé voortzettend, zal nu telkens de kleinst mogelijke waarde van $\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x}$ voor $p_n \leq x < p_{n+1}$ dalen met $-\frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}$ en de grootst mogelijke van $g'_{n_1+1}(x)$ evenzoo, dus dezelfde ongelijkheid (1) blijft gelden voor alle x , die voldoen aan

$$a_{n_1}^{s_x} \leq x < p_{2^{n_1+1}-2}.$$

De laatste waarde is de abscis van een punt op $\bar{r}_{2^{n_1+1}-2}$. Wij hebben dus nu nog te beschouwen het geval $p_{2^{n_1+1}-2} \leq x < \frac{a_{n_1}^{s_x} + a_{n_1}^{s_x+1}}{2} = m$.

De vorige constructie kan niet meer worden voortgezet. Echter is voor deze waarden van x

$$\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x} \geq -\frac{2^{n_1+1}+1}{2^{n_1+1}} A_{n_1}^{s_x} \quad (\text{richt. coëff. } \bar{r}_{2^{n_1+1}+1}).$$

$$g'_{n_1+1}(x) \leq -\frac{2^{n_1+1}-2}{2^{n_1+1}} A_{n_1}^{s_x} \quad (\text{richt. coëff. } \bar{r}_{2^{n_1+1}-2}).$$

Dus weer geldt de ongelijkheid (1).

Tenslotte bewijzen we deze nog voor $m \leq x < a_{n_1}^{s_x+1}$. Voor deze waarden van x volgt uit de grafische voorstelling direct, dat

$$\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x} \geq g'_{n_1+1}(x).$$

Dus geldt zeker

$$\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x} > g'_{n_1+1}(x) - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}.$$

Geldt nu de analoge ongelijkheid ook voor $f_{n_1+1}(x)$, d. w. z. nadat de hoekpunten weggewerkt zijn? Uit de figuur volgt, dat voor de segmenten $x_2 x_3, x_3 x_4, \dots$ geldt

$$m - x_2 = 2(m - x_3) = 4(m - x_4) = \dots$$

Met behulp hiervan kan aangetoond worden, dat $x_3 - p_1 = \frac{1}{4}(x_3 - x_2)$,

$x_4 - p_2 = \frac{1}{4}(x_4 - x_3), \dots$ Daaruit volgt, dat de punten P_1, P_2 , enz. ook

in de grafische voorstelling van $f_{n_1+1}(x)$ tot rechte gedeelten behooren. Hiervan gebruik makend, is in elk der door ons beschouwde gevallen

na te gaan, dat de onderste grens van $\frac{\Delta g_{n_1+1}(x)}{\Delta x}$ niet kleiner, noch de bovenste grens van $g'_{n_1+1}(x)$ grooter wordt door het invoeren der afrondingen. Dus ook voor $f_{n_1+1}(x)$ geldt

$$\frac{\Delta f_{n_1+1}(x)}{\Delta x} > f'_{n_1+1}(x) - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}.$$

$\frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}$ was een bovenste grens, dus hebben we nu

$$f'_{n_1+1}(x) - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} < \frac{\Delta f_{n_1+1}(x)}{\Delta x} \leq \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}.$$

(Is $A_{n_1}^{s_x} < 0$, dan vinden we

$$f'_{n_1+1}(x) - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} > \frac{\Delta f_{n_1+1}(x)}{\Delta x} \geq \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}}$$

en kan de redeneering verder op soortgelijke wijze verlopen

We hadden reeds afgeleid:

$$\frac{\Delta F_{n_1}(x)}{\Delta x} = F'_{n_1}(x) + \theta \cdot \frac{1}{2^{n_1}}, \quad |\theta| < 1.$$

Optellend bij de vorige ongelijkheid

$$F'_{n_1+1}(x) + \theta \cdot \frac{1}{2^{n_1}} - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} < \frac{\Delta F_{n_1+1}(x)}{\Delta x} \leq F'_{n_1}(x) + \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} + \theta \cdot \frac{1}{2^{n_1}}$$

of

$$S_{n_1+1}(x) + \theta \cdot \frac{1}{2^{n_1}} - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} < \sum_0^{n_1+1} \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} \leq S_{n_1}(x) + \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} + \theta \cdot \frac{1}{2^{n_1}}.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \sum_0^{n_1+1} \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} &= S_{n_1+1}(x) + \left[\theta \cdot \frac{1}{2^{n_1}} - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} \right] + \\ &+ \theta_1 \left[S_{n_1}(x) - S_{n_1+1}(x) + 5 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} \right], \quad \text{waar } 0 < \theta_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Daar $n_1 > n$, is volgens de vroeger omtrent n gemaakte afspraken

$$\left| \theta \cdot \frac{1}{2^{n_1}} - 4 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{12}, \quad \left| S_{n_1}(x) - S_{n_1+1}(x) + 5 \frac{A_{n_1}^{s_x}}{2^{n_1+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Dus

$$\left| \sum_0^{n_1+1} \frac{\Delta f_n(x)}{\Delta x} - S_{n_1+1}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Waarmee ook aan voorwaarde C blijkt te zijn voldaan. $F(x)$ heeft dus tot rechterafgeleide $\sum_0^\infty f'_n(x)$. Voor $\Delta x < 0$ houdt men analoge beschouwingen en dan blijkt, dat de linkerafgeleide even groot is. *Er bestaan dus multioscillerende functies, die differentieerbaar zijn in elk punt van een zeker interval.*

PERENO'S bewijs (Giorn. di Mat. 35, bl. 143, noot) voor het bestaan van de afgeleide in de deelpunten berust op de onjuiste stelling:

Indien $F_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ een in een zekere om-

geving van x_0 gelijkmatig convergente reeks is van functies, die differentieerbaar zijn in die omgeving, terwijl $f'_n(x_0) = 0$ vanaf een zeker rangnummer n , dan is de limietfunctie differentieerbaar in x_0 .

Dezelfde fout komt voor in E. W. HOBSON'S Theory of functions of a real variable, deel II, bl. 417, waar de methode van PERENO behandeld wordt.

De voornaamste fout, die verder door beide schrijvers gemaakt wordt, schuilt in het bewijs, dat $F(x)$ maxima en minima vertoont in ieder deelinterval van $\overline{01}$. (PERENO, bl. 148, 149; HOBSON, bl. 420, 421).

§ 34. Gebruik makend van de maattheorie en integraalrekening van H. LEBESGUE heeft A. DENJOY op geheel andere wijze het bestaan van overal differentieerbare, multioscilleerende functies aangetoond ⁽¹⁾. Hij beschouwt niet de functie zelf, maar haar afgeleide.

Wij zullen de door hem aangegeven methode toepassen op de door de voorschriften van KÖPCKE (PERENO) gegeven functie

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x).$$

Daarbij zijn enkele door DENJOY ingevoerde begrippen noodig, die wij hier eerst zullen samenvatten.

a) Zij gegeven een meetbare puntverzameling E . Is I een willekeurig interval, dan verstaan wij in 't vervolg onder de maat van de verzameling E in het interval I de maat van de doorsnee EI van E en I .

Onder de dikte van E in het interval I verstaan we de maat van de verzameling EI , gedeeld door die van I .

Voor een segment worden analoge afspraken ondersteld. Uit de definitie volgt, dat de dikte van E in I , vermeerderd met die van de complementaire verzameling E' in I , de eenheid oplevert.

b) Is x_0 een willekeurig punt, dan zeggen we, dat een verzameling E in x_0 de dikte één heeft, als bij elk getal ε een positief getal η te vinden is, zoodat de dikte van E in elk interval, kleiner dan η om x_0 , grooter is dan $1 - \varepsilon$.

c) Is $f(x)$ een meetbare functie, gedefinieerd in een zeker interval $a b$, en x_0 een punt in dat interval met de volgende eigenschap: voor ieder getal ε heeft de verzameling $E(f, x_0, \varepsilon)$ der punten x , die voldoen aan $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ de dikte één in x_0 , dan noemen we $f(x)$ *approximatief continu in x_0* .

Deze definitie is gelijkwaardig met de volgende: $f(x)$ is *approximatief continu in x_0* , als men bij elk getal ε een positief getal η kan vinden, zoodat in ieder interval, kleiner dan η om x_0 , de dikte van de verzameling $E(f, x_0, \varepsilon)$ der punten x , waar $|f'(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, grooter is dan $1 - \varepsilon$.

Bewijs: Is $f(x)$ een functie, die aan de eerste definitie voldoet, dan is

⁽¹⁾ In zijn beschouwing: Sur les fonctions dérivées sommables, Bulletin de la Soc. Math. de Fr., Deel 43, 1915, bl. 161.

de dikte van $E(f, x_0, \varepsilon)$ in x_0 één voor alle ε . Hieruit volgt, dat er bij gegeven ε een positief getal η te vinden is, zoodat in elk interval, kleiner dan η om x_0 , de dikte van $E(f, x_0, \varepsilon)$ grooter is dan $1 - \varepsilon$. $f(x)$ voldoet dus ook aan de tweede definitie.

Voldoet omgekeerd een functie $g(x)$ aan de tweede definitie, dan moeten wij daaruit kunnen afleiden, dat ze ook aan de eerste gehoorzaamt. Hiertoe moet dus worden aangetoond, dat, voor willekeurige ε , de dikte van de verzameling $E(g, x_0, \varepsilon)$ één is in x_0 .

Zij nu $\varepsilon' > 0$, doch $\varepsilon' < \varepsilon$. $E(g, x_0, \varepsilon)$ heeft in ieder interval I minstens een dikte, gelijk aan die van de verzameling $E(g, x_0, \varepsilon')$ der punten, waar $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon'$. Want $E(g, x_0, \varepsilon')$ is een deel van $E(g, x_0, \varepsilon)$. Daar nu $g(x)$ aan de tweede definitie voldoet, is er een getal $\eta > 0$ te vinden, zoodat in elk interval, kleiner dan η om x_0 , de dikte van $E(g, x_0, \varepsilon')$ grooter is dan $1 - \varepsilon'$. In zoo'n interval is de dikte van $E(g, x_0, \varepsilon)$ dus ook grooter dan $1 - \varepsilon'$. Omdat ε' willekeurig klein gekozen kan worden, volgt hieruit, dat $E(g, x_0, \varepsilon)$ in x_0 de dikte één heeft. Waarmee de gelijkwaardigheid der definities is aangetoond. Wij kunnen dus beide definities door elkaar gebruiken.

§ 35. We hebben omtrent deze approximatief continue functies de volgende stelling noodig:

Een meetbare, begrensde functie $\varphi(x)$ is in ieder punt x_0 , waar ze approximatief continu is, de afgeleide van haar onbepaalde LEBESGUE-integraal.

Bewijs: Zij
$$f(x) = \int_a^x \varphi(x) dx.$$

$\varphi(x)$ is begrensd; stel $|\varphi(x)| < M$. $\varphi(x)$ is approximatief continu in het beschouwde punt x_0 , dus bij willekeurig gekozen ε is de dikte van de verzameling E , waar $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$, één in x_0 .

Kies $\eta > 0$ zoo klein, dat in elk interval, kleiner dan η om x_0 , de dikte van E grooter is dan $1 - \frac{\varepsilon}{2M}$. Het rechte eindpunt van zoo'n interval vasthoudend, kan men het linker willekeurig dicht tot x_0 laten naderen. Hieruit volgt, dat de dikte van E in elk interval $x_0, x_0 + a$, kleiner dan η , minstens $1 - \frac{\varepsilon}{2M}$ is.

De maat van E in zoo'n interval $x_0, x_0 + a$ is minstens $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2M}\right) \times a$. En de maat van de complementaire verzameling, waar $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \geq \varepsilon$, is in $x_0, x_0 + a$ dus hoogstens $\frac{\varepsilon}{2M} \times a$. Wij schrijven

$$f(x_0 + a) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + a} \varphi(x) dx = a \times \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + a} [\varphi(x) - \varphi(x_0)] dx.$$

De laatste integraal splitsen we in de integraal van $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ op E (waarbij de integrand nul gesteld wordt op E') en de integraal van $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ op E' (integrand nul op E). Op E is $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$, terwijl de maat van E in $x_0, x_0 + a$ hoogstens gelijk a kan zijn. De integraal op E heeft dus een waarde $\theta_1 \varepsilon a$, $|\theta_1| < 1$. Voor de tweede integraal is zeker $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < 2M$, want $|\varphi(x)| < M$. En de maat van E' in $x_0, x_0 + a$ is kleiner dan $\frac{\varepsilon}{2M} \cdot a$, dus deze integraal heeft een waarde $\theta_2 \varepsilon a$, $|\theta_2| < 1$.

Dus

$$f(x_0 + a) - f(x) = a \times \varphi(x_0) + 2\theta \varepsilon a, \quad |\theta| < 1.$$

Waaruit, aangezien deze gelijkheid geldt voor alle waarden van $a < \eta$, volgt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a) - f(x_0)}{a} = \varphi(x_0).$$

De functie $f(x)$ heeft in x_0 dus $\varphi(x_0)$ tot rechterafgeleide. En voor de linkerafgeleide gaat het bewijs analoog, met $a < 0$. Het bewijs is hiermee geleverd.

§ 36. Na deze voorbereidingen gaan wij aantoonen:

I). De vroeger op 01 gedefinieerde functie $S_n(x)$ nadert tot een meetbare, begrensde limietfunctie $S(x)$, die approximatief continu is in elk punt van 01.

II) $S(x)$ neemt in ieder deelinterval van 01 beide teekens aan.

Wij zullen dan opnieuw het bestaan van overal differentieerbare, multioscillerende functies aangetoond hebben. Want zij $\psi(x)$ de onbepaalde LEBESGUE-integraal van $S(x)$, dan zal

$$\psi'(x) = S(x)$$

in elk punt van 01 volgens de in § 35 bewezen stelling, terwijl $\psi'(x)$ in ieder deelinterval beide teekens aanneemt. Daaruit volgt dan, dat $\psi(x)$ aan onze definitie voldoet en multioscillant is. Dank zij het voorgaande, weten wij, dat $\psi(x)$ van $F(x)$ slechts een constante kan verschillen.

§ 37. Bewijs van I: De convergentie van de rij $S_n(x)$ hebben wij voor $0 \leq x \leq 1$ reeds vroeger aangetoond. De functies $S_n(x)$ zijn continu, waaruit volgt, dat hun limietfunctie $S(x)$ meetbaar is. Verder hebben we vroeger afgeleid, dat $|S_n(x)| < P = \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots$, voor alle rangnummers n ; hieruit volgt $|S(x)| \leq P$, $S(x)$ is dus begrensd.

Wij gaan dus nu over tot het bewijs van de approximatieve continuïteit van $S(x)$ in een willekeurig punt van 01.

Op een segment $a_n^s a_n^{s+1}$ hadden we

$$f_{n+1}(x) = A_n^s \cdot (a_n^s a_{n+1}^s)_{n+1},$$

$$f'_{n+1}(x) = A_n^s \cdot \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

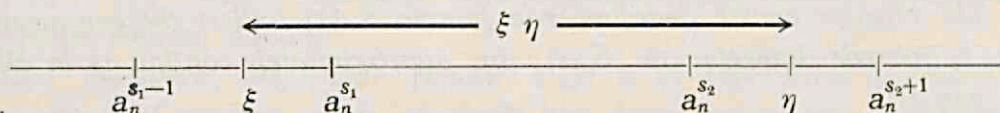
a_n is afhankelijk van de waarde van x op $\overline{a_n^s a_n^{s+1}}$. Hierbij geldt $1 \supseteq a_n \supseteq -(2^{n+1} + 1)$. Teneinde vergissingen te voorkomen, schrijven we voortaan a_n^x in plaats van a_n . In de grafische voorstelling van $f_{n+1}(x)$ beschouwen we het gedeelte van $a_n^s a_n^{s+1}$, waar geldt $a_n^x < -n$. Denken wij ons in fig. 4a, bl. 46, de afrondingen der hoekpunten aangebracht, dan levert zij ons de gedaante van de bedoelde grafische voorstelling. Voor welk rangnummer n men deze figuur ook construeert, steeds bestaat er tusschen de abscissen der hoekpunten een betrekking van den reeds op bl. 47 genoemden vorm

$$m - x_2 = 2(m - x_3) = 4(m - x_4) = \dots$$

Daaruit volgt door een eenvoudige berekening, dat de ongelijkheid $a_n^x < -n$ op minder dan $\frac{1}{2^n}$ deel van $a_n^s a_n^{s+1}$ geldt. Ook voor ieder segment $a_n^p a_n^q$, welks eindpunten deelpunten zijn bij de constructie van $f_{n+1}(x)$, geldt:

op minder dan $\frac{1}{2^n}$ deel van $a_n^p a_n^q$ is $a_n^x < -n$.

Beschouwen we nu nog een interval $\xi \eta$, waar minstens één deelpunt a_n^s in ligt.



Zijn $a_n^{s_1}$ en $a_n^{s_2}$ de uiterste deelpunten van de n^e verdeling in $\xi \eta$ (eventueel $a_n^{s_1} = a_n^{s_2}$), dan geldt voor $a_n^{s_1} a_n^{s_2}$ het boven voor $a_n^p a_n^q$ gezegde. Daarbij het verloop van $f_{n+1}(x)$ op $\overline{a_n^{s_1-1} a_n^{s_1}}$ en $\overline{a_n^{s_2} a_n^{s_2+1}}$ in acht nemend, vinden we, dat de verzameling der punten op $\xi a_n^{s_1}$ en $a_n^{s_2} \eta$, waar $a_n^x < -n$, minder dan $\frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ deel van deze intervallen omvat. Samenvattend kunnen we dus zeggen:

In ieder interval $\xi \eta$, dat een of meer punten a_n^s bevat, heeft de verzameling der punten x , waar $a_n^x < -n$, een dikte kleiner dan $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Overgaande tot $f_{n+2}(x)$ zeggen we: $\xi \eta$ bevat zeker een punt a_{n+1}^s , dus voor het nu optredende getal a_{n+1}^x geldt:

In elk interval $\xi \eta$, dat een of meer punten a_n^s bevat, heeft de verzameling der punten x , waar $a_{n+1}^x < -(n+1)$, een dikte kleiner dan $\frac{1}{2^n}$.

Dit tot in het oneindige voortzettend, vinden we:

In elk interval $\xi \eta$, dat minstens één punt a_n^s bevat, is de dikte van de verzameling der punten x , waar voor één of andere $k \supseteq n$ geldt $a_k^x < -k$, minder dan

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Voor ieder ander punt x in $\xi \eta$ is dus $a_k^x \geq -k$, zoodra $k \leq n$.

Dus in $\xi \eta$ geldt op een dikte, die grooter dan $1 - \frac{1}{2^{n-2}}$ is

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + A_n^{s_x} \frac{a_n^x}{2^{n+1}}, \quad \text{waar } 1 \geq a_n^x \geq -n,$$

$$S_{n+2}(x) = S_{n+1}(x) + A_{n+1}^{s_x} \frac{a_{n+1}^x}{2^{n+2}}, \quad \text{,, } 1 \geq a_{n+1}^x \geq -(n+1),$$

.....

$$S_{n+m}(x) = S_{n+m-1}(x) + A_{n+m}^{s_x} \frac{a_{n+m-1}^x}{2^{n+m}}, \quad \text{,, } 1 \geq a_{n+m-1}^x \geq -(n+m-1).$$

Door optellen vindt men

$$S_{n+m}(x) = S_n(x) + \left(A_n^{s_x} \frac{a_n^x}{2^{n+1}} + A_{n+1}^{s_x} \frac{a_{n+1}^x}{2^{n+2}} + \dots + A_{n+m}^{s_x} \frac{a_{n+m-1}^x}{2^{n+m}} \right).$$

$|A_n^{s_x}| < P$, dus

$$S_{n+m}(x) = S_n(x) + \theta P \left(\frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{n+m-1}{2^{n+m}} \right),$$

terwijl $|\theta| < 1$.

Dit geldt voor $m \geq 1$, dus, tot de limiet overgaand,

$$S(x) = S_n(x) + \theta_1 P \left(\frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + \dots \right),$$

$$|\theta_1| < 1.$$

Om de approximatieve continuïteit van $S(x)$ in een punt x_0 aan te toonen, kunnen we, volgens de tweede definitie (bl. 49), volstaan met aan te toonen:

Bij elk getal ε is een getal $\eta > 0$ te vinden, zoodat in elk interval, kleiner dan η om x_0 , de dikte van de verzameling der punten x , waarvoor

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon,$$

grooter is dan $1 - \varepsilon$.

Wij hebben dus ε verder als van te voren gegeven op te vatten.

Zij eerst x_0 een deelpunt, dat we $a_{n_0}^s$ noemen. In de bewijsvoering zou het noodig blijken een rangnummer $n > n_0$ te kiezen zoo hoog, dat volstaan is aan de volgende voorwaarden:

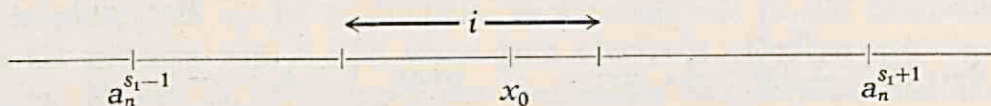
$$\frac{1}{2^{n-3}} < \varepsilon, \quad |S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad P \left(\frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + \dots \right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dit is mogelijk, aangezien zoowel de rij $S_n(x_0)$, als de reeks

$$\frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + \dots$$

convergeert. Denken we ons zoo'n waarde n van te voren gekozen.

x_0 is dan ook een deelpunt a_n^s , stel $x_0 = a_n^{s_1}$. Dan voldoet voor η het kleinste van de getallen $a_n^{s_1+1} - a_n^{s_1}$ en $a_n^{s_1} - a_n^{s_1-1}$.



Want zij i een willekeurig interval, kleiner dan η om x_0 . i ligt binnen $a_n^{s_1-1} a_n^{s_1+1}$. In i ligt een deelpunt a_n^s , n.l. $a_n^{s_1} = x_0$. Dus is volgens het op bl. 52 en 53 behandelde, voor een puntverzameling, die in i een dikte, grooter dan

$$1 - \frac{1}{2^{n-2}} > 1 - \varepsilon$$

heeft

$$S(x) = S_n(x) + \theta' P\left(\frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + \dots\right) = S_n(x) + \theta_1 \frac{\varepsilon}{3}.$$

(De hier en in 't vervolg gebruikte getallen θ voldoen alle aan de voorwaarde $|\theta| < 1$).

Volgens constructie schommelt $S_n(x)$ op elk interval $a_n^s a_n^{s+1}$ minder dan $\frac{1}{2^n}$, dus geldt op het geheele interval i

$$S_n(x) = S_n(x_0) + \theta'' \frac{2}{2^n} = S_n(x_0) + \theta_2 \frac{\varepsilon}{3}.$$

Verder is n zoo gekozen, dat

$$S_n(x_0) = S(x_0) + \theta_3 \frac{\varepsilon}{3}.$$

In i geldt dus op dikte, grooter dan $1 - \varepsilon$

$$S(x) = S(x_0) + \theta \varepsilon.$$

$S(x)$ is dus approximatief continu in alle deelpunten.

Zij nu x_0 geen deelpunt, dus een gemeenschappelijk punt van een oneindige rij van intervallen

$$a_n^{s_{x_0}} a_n^{s_{x_0}+1}, a_{n+1}^{s_{x_0}} a_{n+1}^{s_{x_0}+1}, \dots,$$

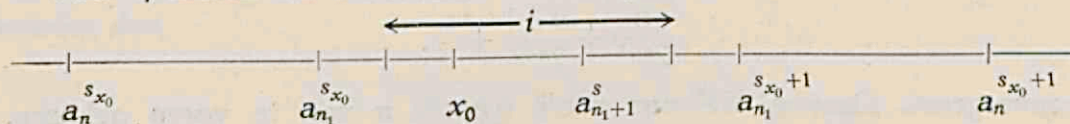
die tot nul naderen, wat hun lengte betreft.

Met het oog op 't geen volgt, kiezen we nu $n \geq 4$ zoo hoog, dat voldaan is aan

$$\frac{1}{2^{n-2}} < \frac{\varepsilon}{9}, \quad P\left(\frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + \dots\right) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{nP}{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{18}$$

en verder $|S_{m+p}(x_0) - S_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{18}$, voor alle waarden van het rangnummer $m \geq n$ en alle $p \geq 1$.

Voor η kiezen we het kleinste van de getallen $a_n^{s_{x_0}+1} - x_0$ en $x_0 - a_n^{s_{x_0}}$.



Zij i een willekeurig interval, kleiner dan η om x_0 , dan ligt i binnen $a_{n_1}^{s_{x_0}} a_{n_1}^{s_{x_0}+1}$.

Wij bepalen de hoogste index n_1 , waarvoor geen der deelpunten $a_{n_1}^s$ binnen i valt. Van de punten $a_{n_1+1}^s$ liggen er dus één of meer in i . Daarom is dan in i

$$S(x) = S_{n_1+1}(x) + \theta' P\left(\frac{n_1+1}{2^{n_1+2}} + \frac{n_1+2}{2^{n_1+3}} + \dots\right) = S_{n_1+1}(x) + \theta_1 \frac{\varepsilon}{3}, \dots (1)$$

op een puntverzameling, die in i een dikte heeft grooter dan

$$1 - \frac{1}{2^{(n_1+1)-2}} = 1 - \frac{1}{2^{n_1-1}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ daar } n_1 \geq n.$$

Eveneens geldt

$$S_{n_1+1}(x_0) = S(x_0) + \theta_2 \frac{\varepsilon}{3}. \dots \dots \dots (2)$$

Moeilijker is het nu, iets te zeggen omtrent het verschil $S_{n_1+1}(x) - S_{n_1+1}(x_0)$ in i . Wij zullen aantonen, dat in i de verzameling der punten, waar geldt

$$S_{n_1+1}(x) = S_{n_1+1}(x_0) + \theta_3 \frac{\varepsilon}{3}, \dots \dots \dots (3)$$

een dikte heeft, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Hiertoe merken we op, dat algemeen geldt

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + A_n^{s_x} \frac{a_n^x}{2^{n+1}}, \quad 1 \geq a_n^x \geq -(2^{n+1} + 1).$$

In $a_{n_1}^{s_{x_0}} a_{n_1}^{s_{x_0}+1}$ is $A_{n_1}^{s_x}$ constant en gelijk aan $A_{n_1}^{s_{x_0}}$.
We krijgen dus

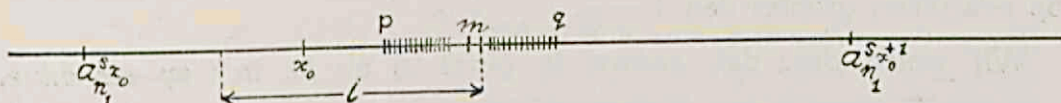
$$S_{n_1+1}(x) = S_{n_1}(x) + A_{n_1}^{s_{x_0}} \frac{a_{n_1}^{x_0}}{2^{n_1+1}}.$$

Daar $n_1 \geq n$, is $|S_{n_1+1}(x_0) - S_{n_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{18}$

of

$$\left| A_{n_1}^{s_{x_0}} \frac{a_{n_1}^{x_0}}{2^{n_1+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Beschouw op $a_{n_1}^{s_{x_0}} a_{n_1}^{s_{x_0}+1}$ de verzameling der punten x , waar $a_{n_1}^x \geq -n_1$. Deze bestaat uit twee segmenten $\overline{a_{n_1}^{s_{x_0}} p}$ en $\overline{q a_{n_1}^{s_{x_0}+1}}$.



Wat de ligging van x_0 betreft, onderscheiden we twee gevallen:

- a) $a_{n_1}^{x_0} \geq -n_1$; x_0 ligt op $\overline{a_{n_1}^{s_{x_0}} p}$ of $\overline{q a_{n_1}^{s_{x_0}+1}}$

Op deze segmenten geldt

$$\left| A_{n_1}^{s_{x_0}} \frac{a_{n_1}^{x_0}}{2^{n_1+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{18}, \text{ aangezien } \frac{n_1 P}{2^{n_1+1}} < \frac{\varepsilon}{18}.$$

Uit de grafische voorstelling van $f_{n_1+1}(x)$ volgt, dat op $\overline{pq}$ de ongelijkheid

$$a_{n_1}^x > -2n_1$$

geldt op een dikte, grooter dan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n_1-2}} = 1 - \frac{1}{2^{n_1-2}} > 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

En omdat i of geheel buiten pq valt, of p of q bevat, volgt hieruit, dat dezelfde betrekking $a_{n_1}^x > -2n_1$ in i geldt op een dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Uit $\frac{n_1 P}{2^{n_1+1}} < \frac{\varepsilon}{18}$ volgt, indien $a_{n_1}^x > -2n_1$,

$$\left| A_{n_1}^{s_{x_0}} \frac{a_{n_1}^x}{2^{n_1+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{9}.$$

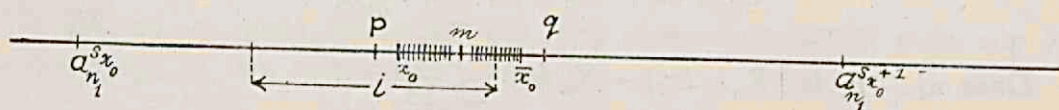
Deze ongelijkheid geldt in i dus op een dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

b) $a_{n_1}^{x_0} < -n_1$; x_0 ligt in pq .

Kies in de grafische voorstelling het punt $\overline{x_0}$, dat symmetrisch ligt ten opzichte van x_0 . Dan is op $\overline{x_0 x_0}$ op een dikte, grooter dan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n_1-3}} = 1 - \frac{1}{2^{n_1-3}} > 1 - \frac{\varepsilon}{4};$$

$$a_{n_1}^x > 2a_{n_1}^{x_0}$$



Omdat $\left| A_{n_1}^{s_{x_0}} \frac{a_{n_1}^{x_0}}{2^{n_1+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{18}$, is $\left| A_{n_1}^{s_{x_0}} \frac{a_{n_1}^x}{2^{n_1+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{9}$, indien $a_{n_1}^x > 2a_{n_1}^{x_0}$.

Daar i het punt x_0 bevat, geldt voor i de ongelijkheid

$$a_{n_1}^x > 2a_{n_1}^{x_0}.$$

op een dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Wij weten dus, dat, zoowel in geval a) als b), in i op een dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$, de ongelijkheid

$$\left| A_{n_1}^{s_{x_0}} \frac{a_{n_1}^x}{2^{n_1+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{9}$$

geldt. Of

$$|S_{n_1+1}(x) - S_{n_1}(x)| < \frac{\varepsilon}{9}.$$

$S_{n_1}(x)$ schommelt in $a_{n_1}^{s_{x_0}} a_{n_1}^{s_{x_0}+1}$ minder dan $\frac{1}{2^{n_1}}$, dus in het geheele interval i geldt

$$|S_{n_1}(x) - S_{n_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{9}.$$

En uit de aan n opgelegde voorwaarden volgt nog

$$|S_{n_1}(x_0) - S_{n_1+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{9}.$$

Uit de laatste drie ongelijkheden volgt: op een dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$, is in i

$$|S_{n_1+1}(x) - S_{n_1+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De drie vergelijkingen (1), (2) en (3) van bl. 55 gelden in i dus op een dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon$, gelijktijdig. Waaruit volgt:

Op dikte, grooter dan $1 - \varepsilon$, is in i

$$S(x) = S(x_0) + \theta \varepsilon.$$

$S(x)$ dus approximatief continu voor alle x in 01 .

§ 38. Bewijs van II. We moeten aantonen, dat in ieder deelinterval $\alpha\beta$ van 01 een punt x_1 ligt, zoodat $S(x_1) > 0$ en een punt x_2 met $S(x_2) < 0$. Hiertoe kunnen we volstaan met te bewijzen: In $\alpha\beta$ liggen twee deelpunten $a_{n_1}^s$ en $a_{n_2}^s$, zoodat

$$S_{n_1}(a_{n_1}^s) > 0 \quad \text{en} \quad S_{n_2}(a_{n_2}^s) < 0.$$

Want dan is ook

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a_{n_1}^s) = S_{n_1}(a_{n_1}^s) > 0 \quad \text{en} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a_{n_2}^s) = S_{n_2}(a_{n_2}^s) < 0.$$

Dus

$$S(a_{n_1}^s) > 0, \quad S(a_{n_2}^s) < 0.$$

Nu zorgen we eerst, dat n zoo groot is, dat er een interval $a_n^s a_n^{s+1}$ geheel binnen $\alpha\beta$ ligt. Het verloop van $F_{n+1}(x)$ in $a_n^s a_n^{s+1}$ nagaand, vinden we, dat er in elk geval twee intervallen $a_{n+1}^s a_{n+1}^{s+1}$ binnen $a_n^s a_n^{s+1}$ liggen, zoodat op het eene geldt $S_{n+1}(x) > 0$ en op het andere $S_{n+1}(x) < 0$ ⁽¹⁾.

Beschouwen wij het eerste. $F_{n+1}(x)$ neemt er monotoon toe, stel

$$F_{n+1}(a_{n+1}^{s+1}) - F_{n+1}(a_{n+1}^s) = h. \quad h > 0. \quad \dots \quad (1)$$

(1) Door een kleine wijziging in het constructie-voorschrift voor de punten a_n^s zou het volgende bewijs overbodig worden. Men kan n.l., zonder overigens iets te moeten wijzigen, voorschrijven, dat er tusschen twee punten a_n^s en a_n^{s+1} , waar $F_n'(a_n^s) = 0$, $F_n'(a_n^{s+1}) = 0$, minstens één punt a_n^s geïnterpoleerd moet worden. Echter blijkt uit hetgeen volgt, dat ook de voorschriften, die we vroeger gaven, voldoende zijn.

Onder alle deelpunten a_p^s ($p \geq n+1$) op het segment $a_{n+1}^s a_{n+1}^{s+1}$ moeten er noodzakelijk zijn, waar $S_p(a_p^s) > 0$.

Want was in elk dier punten $S_p(a_p^s) \leq 0$, dan zou men daaruit kunnen afleiden, dat op $\overline{a_{n+1}^s a_{n+1}^{s+1}}$ gold $S_p(x) < \frac{1}{2^p}$, omdat $S_p(x)$ in ieder interval $a_p^s a_p^{s+1}$ minder schommelt dan $\frac{1}{2^p}$. Dan zou dus $F_p(a_{n+1}^{s+1}) - F_p(a_{n+1}^s) < \tau \times \frac{1}{2^p}$, als τ de lengte van $a_{n+1}^s a_{n+1}^{s+1}$ voorstelt.

Echter is

$$F_p(a_{n+1}^{s+1}) = F_{n+1}(a_{n+1}^{s+1}) \text{ en } F_p(a_{n+1}^s) = F_{n+1}(a_{n+1}^s),$$

dus zou

$$F_{n+1}(a_{n+1}^{s+1}) - F_{n+1}(a_{n+1}^s) < \tau \times \frac{1}{2^p}$$

voor elke $p \geq n+1$, in strijd met (1). Er is dus onder de punten a_p^s een punt $a_{n_1}^s$, waar $S_{n_1}(x) > 0$.

Analoog bewijst men het bestaan van een punt $a_{n_2}^s$ in $\alpha\beta$, waar $S_{n_2}(x) < 0$.

§ 39. DENJOY past zijn methoden niet toe op de functie van KÖPCKE zelf, maar wijzigt eerst de constructievoorschriften (bl. 231 van het meer-genoemde Bulletin).

In de plaats van onze functie $S(x)$ stelt hij een oneindig product van functies $\varphi_n(x)$, waarbij $\varphi_n(x)$ op een deelsegment $\alpha\beta$ van het oorspronkelijke segment $a b$ gedefinieerd is door

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{A}{10^n} \text{Log} \left[\frac{|x-\gamma|}{\gamma-\alpha} + e^{-\frac{10^n+1}{A}} \left(1 - \frac{|x-\gamma|}{\gamma-\alpha} \right) \right].$$

Hierin is $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ en $A = \frac{2}{\text{Log } 2}$.

Het product $P_n(x) = \prod_1^n \varphi_k(x)$ gaat door vermenigvuldiging met $\varphi_{n+1}(x)$ over in $P_{n+1}(x)$ en deze overgang stemt in veel opzichten overeen met die van $S_n(x)$ in $S_{n+1}(x)$. $\varphi_n(x)$ is continu, terwijl

$$1 \geq \varphi_n(x) > -\frac{1}{10^n}.$$

Voor elke x op $\overline{a b}$ heeft $\prod_1^n \varphi_k(x)$ een limiet; de nulpunten van de limietfunctie $P(x)$ vormen een verzameling van de maat nul. $P(x)$ is continu in ieder nulpunt. Verder toont DENJOY aan, dat in ieder punt, waar $P(x)$ niet nul is, $P(x)$ approximatief continu is. Het bewijs, dat $P(x)$ in ieder deelinterval van $a b$ beide teekens aanneemt, laat hij achterwege. Indien men geschikte voorschriften kiest omtrent de segmenten $\alpha\beta$, waarin $\overline{a b}$ verdeeld wordt bij overgang van $P_n(x)$ op $P_{n+1}(x)$, is dit vrij gemakkelijk te geven.

Op bl. 211—228 vindt men tal van voorbeelden van een ander type, die alle berusten op dezelfde grondgedachte. Wij zullen daarom hier daarvan slechts één voorbeeld weergeven.

Hieronder volgen een drietal daarbij benodigde hulpstellingen.

§ 40. Wij beschouwen een reeks van continue functies $u_n(x)$, die alle positief zijn in een interval $a b$. In een punt x in $a b$, waar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ convergeert, stellen we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) = s(x).$$

Divergeert de reeks in het beschouwde punt, dan stellen we ter bekorting van onze redeneering

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) = s(x) = +\infty.$$

We spreken daarbij af, dat het symbool $+\infty$ geacht zal worden ieder getal in grootte te overtreffen. Dan geldt de volgende stelling:

I. In een punt x_1 , waar de reeks convergeert, is $s(x)$ halfcontinu neerwaarts, d. w. z. bij elk getal ε is een getal $\eta > 0$ te vinden, zoodat in $x_1 - \eta$, $x_1 + \eta$ geldt

$$s(x) > s(x_1) - \varepsilon.$$

Bewijs: Wij behoeven alleen punten x te beschouwen, waarin de reeks convergeert. In andere punten geldt n.l. volgens afspraak zeker de ongelijkheid $s(x) > s(x_1) - \varepsilon$. Wij kiezen een rangnummer n zoo hoog, dat

$$r_n(x_1) = u_{n+1}(x_1) + u_{n+2}(x_1) + \dots < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daar alle termen positief zijn, is steeds

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots > 0,$$

dus

$$r_n(x) - r_n(x_1) > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Verder is de functie

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

continu in x_1 . Er is dus een interval $x_1 - \eta$, $x_1 + \eta$, waarin

$$s_n(x) - s_n(x_1) > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Daar $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$, vindt men door optelling der betrokken ongelijkheden

$$s(x) - s(x_1) > -\varepsilon$$

in $x_1 - \eta$, $x_1 + \eta$ en de stelling is bewezen.

Men kan haar als volgt uitbreiden:

Ia. Is x_0 een punt, waar $\sum_1^\infty u_n(x)$ divergeert, dan is er bij ieder van

te voren gekozen getal P een interval om x_0 te vinden, waarin $s(x) > P$.

Immers, er is vanwege de divergentie in x_0 een rangnummer n , zoodat $s_n(x_0) > 2P$. Nu is $s_n(x)$ continu in x_0 , dus is er bij gegeven waarde P een interval $x_0 - \eta$, $x_0 + \eta$ te vinden, waarin

$$s_n(x) - s_n(x_0) > -P.$$

In datzelfde interval geldt dan $s_n(x) > P$ en, daar steeds $s(x) > s_n(x)$, is dus in $x_0 - \eta$, $x_0 + \eta$ ook

$$s(x) > P.$$

Ib. Tenslotte beschouwen wij nog het geval, dat in een punt $x=a$ een of meer der functies $u_n(x)$ z.g.n. oneindig worden, d. w. z. er is een interval om $x=a$ te vinden, waarin $u_n(x) > P$, uitgezonderd $x=a$. (P willekeurig gekozen zijnde). Wij stellen dan

$$u_n(a) = +\infty \quad \text{en} \quad s(a) = +\infty.$$

In het bedoelde interval gold $u_n(x) > P$.

Indien $\sum_1^\infty u_n(x)$ convergeert, is $s_n(x) > u_n(x)$. Bij divergentie is $s(x) = +\infty$. Eveneens als een of meer der termen $+\infty$ zijn in het punt x . Dus in hetzelfde interval geldt overal

$$s(x) > P.$$

Wij zullen straks een reeks van functies onderzoeken, waarbij al deze mogelijkheden zich voordoen. (bl. 61).

§ 41. Hulpstelling II: Is $f(x)$ *approximatief continu* in x_0 , terwijl $\varphi(y)$ een functie is, gedefinieerd in een interval om $y_0 = f(x_0)$ en continu in y_0 , dan is ook

$$\psi(x) = \varphi[f(x)]$$

approximatief continu in x_0 .

Bewijs: Omdat $\varphi(y)$ een continue functie is van y in y_0 , is bij elk getal ε een δ te vinden, zoodat

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon, \quad \text{voor} \quad |y - y_0| < \delta.$$

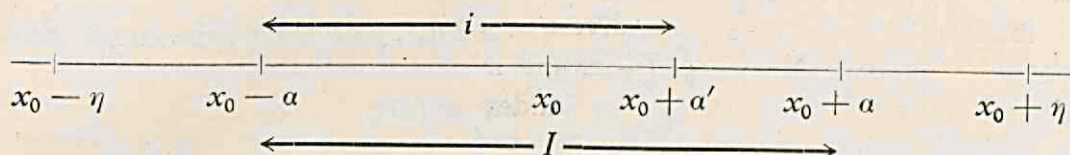
$f(x)$ is *approximatief continu* in x_0 , dus de verzameling der punten x , waar $|y - y_0| < \delta$, heeft in x_0 de dikte één. In ieder punt van deze verzameling geldt echter

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon, \quad \text{of} \quad |\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon.$$

De verzameling der punten x , waar de laatste ongelijkheid geldt, heeft in x_0 dus ook de dikte één. Aangezien ε willekeurig gekozen was, volgt hieruit de *approximatieve continuïteit* van $\psi(x)$ in x_0 .

§ 42. Hulpstelling III: Indien de dikte van een puntverzameling E in de intervallen $x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$ tot één nadert, als δ tot nul nadert, dan volgt daaruit, dat E in x_0 de dikte één heeft.

Bewijs: Volgens onderstelling kunnen we, ε willekeurig gekozen zijnde, een getal $\eta > 0$ kiezen, zoo klein, dat in ieder interval $x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$ de dikte van E grooter is dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$, mits $\delta < \eta$.



Zij nu $i = x_0 - a$, $x_0 + a'$ een interval, kleiner dan η om x_0 , overigens willekeurig.

Is $a = a'$, dan is de dikte van E in i grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$, daar $a < \eta$.

Is $a > a'$, dan is de dikte van E in $I = x_0 - a$, $x_0 + a$ grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$, want ook nu is $a < \eta$.

Hoe staat het nu met de dikte van E in i ?

Hiertoe beschouwen we even de complementaire verzameling E' . Omdat de dikte van E in I grooter is dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$, is de maat van E' in I minder dan $\frac{\varepsilon}{2} \cdot 2a = \varepsilon a$. i is een deel van I , dus in i bedraagt de maat van E' ook minder dan εa . En de maat van i is grooter dan a . Dus E' heeft in i een dikte kleiner dan ε ; E een dikte grooter dan $1 - \varepsilon$.

't Geval $a < a'$ is voor de behandeling gelijkwaardig met $a > a'$. Wij zien dus, dat in ieder interval, kleiner dan η om x_0 , de dikte van E grooter is dan $1 - \varepsilon$.

Dus E heeft in x_0 de dikte één.

§ 43. Zij nu gegeven een interval $a b$ en daarin een aftelbare, overall dichte verzameling van punten $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

Is verder $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ een convergente reeks van positieve termen, dan beschouwen we in $a b$ de functie

$$g(x) = \sum_1^\infty g_n(x) = \sum_1^\infty \frac{u_n}{\sqrt[n]{|x - a_n|}},$$

die $+\infty$ gesteld wordt in een punt x , waar de reeks $\sum_1^\infty \frac{u_n}{\sqrt[n]{|x - a_n|}}$ divergeert of een term ervan oneindig wordt.

We zullen eerst aantoonen, dat $\sum_1^\infty g_n(x)$ convergeert op een volle

dikte van $a b$, d. w. z. de punten x in $a b$, waar convergentie plaats heeft, vormen een verzameling, waarvan de dikte in $a b$ één is.

Hiertoe beschouwen we de verzameling der punten x , waar de ongelijkheid

$$g_n(x) > 2u_n$$

geldt. Deze punten moeten voldoen aan

$$\frac{u_n}{\sqrt[n]{|x - a_n|}} > 2u_n,$$

of

$$|x - a_n| < \frac{1}{2^n}.$$

Bedoelde verzameling is dus een interval i_n om a_n met lengte $\frac{1}{2^{n-1}}$. Dit geldt voor iedere waarde van n . Daaruit volgt:

De verzameling E_p der punten x , waar de betrekking $g_n(x) > 2u_n$ geldt voor één of meer waarden van n , grooter dan het willekeurig gekozen rangnummer p , bestaat uit de intervallen $i_{p+1}, i_{p+2}, \dots$; de maat van deze verzameling E_p in $a b$ bedraagt dus hoogstens

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} + \dots = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

In ieder punt van het complement E_p' geldt

$$g_n(x) \leq 2u_n, \quad \text{voor } n > p.$$

$\sum_1^\infty g_n(x)$ convergeert dan, mits de eerste p termen eindig zijn, d. w. z.

x geen der punten $a_1, a_2, \dots$ is. Deze laatste vormen een verzameling van de maat nul. We hebben dus aangetoond, dat $\sum_1^\infty g_n(x)$ in $a b$ convergeert, behalve misschien op een verzameling, die hoogstens de dikte $\frac{1}{2^{p-1}}$ heeft. Omdat hierin p willekeurig kan worden gekozen, volgt eruit,

dat $\sum_1^\infty g_n(x)$ convergeert op een volle dikte van $a b$.

De verzameling van alle punten, waar convergentie plaats heeft, noemen

we in 't vervolg E . De punten, waar $\sum_1^\infty g_n(x)$ divergeert, vormen een verzameling van de maat nul, die niet leeg, zelfs een résiduel van $a b$ is. Het laatste zal in § 51, bl. 76 bewezen worden. Wij voegen er aan toe de punten $a_1, a_2, \dots$, waar één der termen $g_n(x)$ oneindig wordt.

Op de zoo ontstane verzameling E' , het complement van E in $a b$, is $g(x) = +\infty$.

§ 44. $g_k(x) = \frac{u_k}{\sqrt[k]{|x - a_k|}}$ is een meetbare functie, want de verzameling der punten, waarin $g(x) > a$ (een willekeurig getal), is een interval en dus meetbaar.

Uit de meetbaarheid van $g_k(x)$ volgt die van $\sum_{k=1}^n g_k(x)$ en daaruit weer de meetbaarheid van

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g_k(x).$$

$g(x)$ is *approximatief continu* in elk punt ξ , waar de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ convergeert.

Bewijs:

Aangezien we hier te doen hebben met een reeks van positieve, continue functies, die ieder in één punt oneindig worden, weten we volgens hulpstelling I, dat $g(x)$ halfcontinu neerwaarts is in alle punten, waar $g(x)$ eindig is. Dus bij een bepaald punt ξ behoort een zekere omgeving, waarin, ε willekeurig gekozen zijnde, $g(x) > g(\xi) - \varepsilon$.

Toonen we dus aan, dat de verzameling der punten x , die voldoen aan $g(x) < g(\xi) + \varepsilon$, in ξ de dikte één heeft, dan zal daaruit volgen, dat hetzelfde geldt voor de verzameling, waar $|g(x) - g(\xi)| < \varepsilon$, m. a. w. $g(x)$ is *approximatief continu* in ξ .

Hiertoe trachten we $g_n(x)$ te vergelijken met $g_n(\xi)$, term van de convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\xi)$.

De verzameling der punten, waar

$$g_n(x) > 2 g_n(\xi),$$

of

$$\frac{u_n}{\sqrt[n]{|x - a_n|}} > \frac{2 u_n}{\sqrt[n]{|\xi - a_n|}},$$

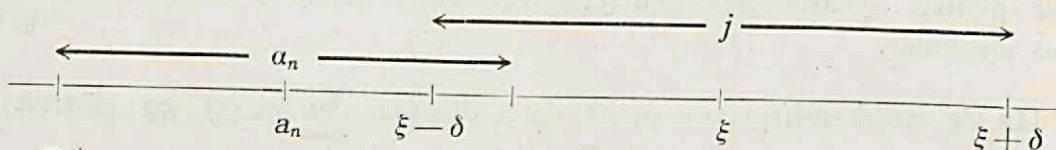
dus

$$|x - a_n| < \frac{|\xi - a_n|}{2^n},$$

is een interval a_n , met midden a_n en lengte $\frac{|\xi - a_n|}{2^{n-1}}$. a_n zal met een interval $j = \xi - \delta, \xi + \delta$ om ξ dan en alleen dan punten gemeen hebben, als

$$|\xi - a_n| < \delta + \frac{|\xi - a_n|}{2^n}.$$

Hieruit volgt $|\xi - a_n| < 2\delta$ en de lengte van een interval a_n , dat met j punten gemeen heeft, is dus kleiner dan $\frac{2}{2^{n-1}} \times \delta$.



De verzameling der punten, waar $g_n(x) > 2g_n(\xi)$, heeft in j dus een dikte, kleiner dan $\frac{1}{2^{n-1}}$.

En de dikte in j van de verzameling der punten x , waar voor één of meer waarden van n , grooter dan zeker rangnummer p , de ongelijkheid $g_n(x) > 2g_n(\xi)$ geldt, is kleiner dan

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} + \dots = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Op een dikte, grooter dan $1 - \frac{1}{2^{p-1}}$, geldt in j dus $g_n(x) \leq 2g_n(\xi)$ voor iedere $n > p$.

Kiezen wij nu een getal $\varepsilon' > 0$, overigens willekeurig. Er is een rangnummer N zoo hoog, dat

$$\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon', \quad g_{N+1}(\xi) + g_{N+1}(\xi) + \dots = r_N(\xi) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

ξ is geen der punten $a_1, a_2, \dots$, dus is

$$s_N(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_N(x)$$

continu in ξ . Waaruit volgt, dat er een getal $\eta > 0$ bestaat, zoodat

$$s_N(x) - s_N(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{voor } x \text{ in } \xi - \eta, \xi + \eta.$$

Het door ons in 't voorgaande gebruikte getal δ was willekeurig; laten we nu zorgen, dat $\delta < \eta$. Dan geldt op het geheele interval $j = \xi - \delta, \xi + \delta$

$$s_N(x) - s_N(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En in $\xi - \delta, \xi + \delta$ geldt op een dikte, grooter dan $1 - \frac{1}{2^{N-1}} > 1 - \varepsilon'$

$$g_n(x) \leq 2g_n(\xi), \quad \text{voor } n > N,$$

dus

$$r_N(x) < 2r_N(\xi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uit deze ongelijkheden volgt

$$s_N(x) + r_N(x) - s_N(\xi) < \varepsilon$$

$$g(x) < s_N(\xi) + \varepsilon$$

of, omdat $s_N(\xi) < g(\xi)$,

$$g(x) < g(\xi) + \varepsilon.$$

Dit geldt in ieder interval $\xi - \delta, \xi + \delta$ op een dikte, grooter dan $1 - \varepsilon'$,

mits $\delta < \eta$. Daar ε' willekeurig is gekozen, volgt hieruit, dat de dikte van de verzameling der punten, waar $g(x) < g(\xi) + \varepsilon$, in de intervallen $\xi - \delta$, $\xi + \delta$ tot één nadert, als δ tot nul nadert. Volgens hulpstelling III is de dikte van die verzameling in ξ dan één.

$g(x)$ is dus approximatief continu in alle punten van de verzameling E , waar $g(x)$ eindig is.

In een punt van de complementaire verzameling E' voldoet $g(x)$ aan één der hulpstellingen Ia of Ib.

E heeft in $a b$ de dikte één; E en E' zijn in $a b$ overal dicht.

§ 45. Uit $g(x)$ leiden we een begrensde, meetbare functie af, die approximatief continu is in elk punt van $a b$. Hiertoe stellen we

$$G(x) = e^{-g(x)},$$

waarbij we aan $G(x)$ op E' de waarde nul toekennen. $G(x)$ is begrensd in $a b$, omdat $g(x)$ er geen negatieve waarden aanneemt.

In elk punt van E is $g(x)$ approximatief continu, e^{-g} is een continue functie van y . Dus volgens hulpstelling II is $G(x)$ ook approximatief continu in elk punt van E .

In een punt van E' is $G(x) = 0$; is P een willekeurig gekozen getal, dan bestaat er een omgeving van het beschouwde punt, waarin

$$g(x) > P, \text{ dus } G(x) < e^{-P}.$$

Want in zoo'n punt geldt voor $g(x)$ hulpstelling Ia of Ib. $G(x)$ is in elk punt van E' dus niet alleen approximatief continu, doch zelfs continu.

De in $a b$ begrensde en meetbare functie $G(x)$ is dus in elk punt van $a b$ approximatief continu. Volgens § 35 is $G(x)$ dan overal in $a b$ de afgeleide functie van haar onbepaalde LEBESGUE-integraal.

Dit alles geldt evenzeer voor de functie

$$H(x) = e^{-g(x)} \cos g(x).$$

Doch de toevoeging van $\cos g(x)$ heeft het voordeel, dat $H(x)$ in ieder deelinterval $\alpha\beta$ van $a b$ van teeken wisselt. Immers, omdat E en E' overal dicht zijn in $a b$, neemt $G(x)$ in $\alpha\beta$ zoowel de waarde nul aan, als ook zekere positieve waarden. Stel b.v. $G(x)$ neemt de waarde $a > 0$ aan in $\alpha\beta$. Volgens een bekende eigenschap van een afgeleide functie, neemt $G(x)$ dan in $\alpha\beta$ elke tusschen 0 en a gelegen waarde aan.

$g(x)$, de reële logarithme van $G(x)$, neemt in $\alpha\beta$ dus iedere waarde aan, die kleiner is dan $\log a$. Hieruit volgt, dat $\cos g(x)$ en dus ook $H(x)$ in $\alpha\beta$ van teeken wisselt.

Evenals $G(x)$ is $H(x)$ begrensd, meetbaar in $a b$ en approximatief continu in elk punt van dit interval. De Lebesgue-integraal van $H(x)$ levert ons dus een in $a b$ overal differentieerbare, multioscilleerende functie.

§ 46. Een eenvoudige en meer aanschouwelijke constructie van een functie, die alle hierboven genoemde eigenschappen met $G(x)$ gemeen heeft, laten wij hier volgen.

$F_1(x)$ is de functie $y = x$ op $\overline{01}$. Wij construeeren een oneindige rij van functies $F_n(x)$, die alle grafisch door polygonen voorgesteld worden, door als volgt over te gaan van $F_n(x)$ op $F_{n+1}(x)$, voor $n \geq 1$: we verdeelen $\overline{01}$ door de hoekpunten van $F_n(x)$ in segmenten, waarop $F_n(x)$ lineair is. In fig. 5 moge ab één van deze segmenten voorstellen; laten we aannemen, dat $F_n(x)$ op dit segment voorgesteld wordt door een lijn AB met richtingscoëfficiënt m .

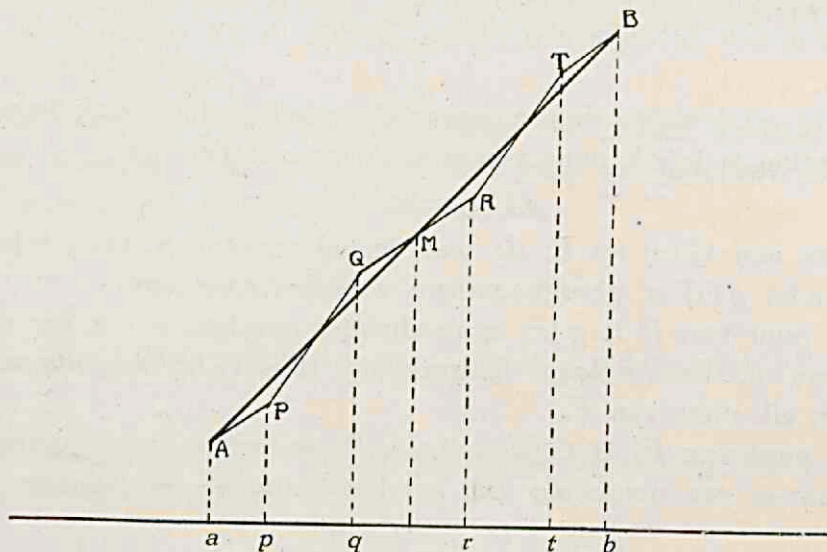


Fig. 5.

Om de grafische voorstelling van $F_{n+1}(x)$ op $\overline{ab}$ te verkrijgen, trekken we door A , B en M (midden van AB) drie lijnen met richtingscoëfficiënt $m \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ en maken $QM = MR$, $AP = \frac{1}{2} QR = TB$. Aan deze lijnen geven we verder een zoodanige lengte, dat

a) de segmenten ap , qr en tb samen een lengte hebben, kleiner dan $\frac{1}{2^n}$ maal de lengte van het kleinste der segmenten, waarop $F_n(x)$ lineair is.

b) de richtingscoëfficiënt van PQ en RT gelijk $m \left(1 + \frac{\theta_n}{2^{n+1}}\right)$ is, waar $0 < \theta_n < 1$.

Voor $n \geq 2$ volgt trouwens b) uit a). De gebroken lijn $APQR TB$ stelt F_{n+1} op $\overline{ab}$ voor. Wij duiden nu verder de hoekpunten van $F_n(x)$ en de punten 0 en 1 aan door $a_n^1, a_n^2, \dots$ en voeren de aangegeven constructie uit voor elk der segmenten $a_n^s a_n^{s+1}$. Dan is $F_{n+1}(x)$ gedefinieerd voor $0 \leq x \leq 1$. De optredende richtingscoëfficiënten zijn alle positief. Uit de constructie volgt nog, dat alle punten a_n^s ook deelpunten a_{n+p}^s zijn, voor $p \geq 1$.

$F_n(x)$ is niet overal differentieerbaar. In een hoekpunt a_n^s bestaat alleen een rechter- en linker afgeleide. Voor elke waarde x , die geen punt a_n^s

aangeeft, bestaat $F'_n(x)$ wel. En $F'_n(x)$ is dan een product van n factoren, de eerste is één en daarop volgen $n - 1$ factoren van den vorm

$$1 - \frac{1}{k+1} \text{ of } 1 + \frac{\theta_k}{2^{k+1}}, \quad k=1, 2, \dots, n-1.$$

Dus $\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x)$ bestaat en is positief of nul.

Stel
$$\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x) = \psi(x).$$

In een deelpunt a_n^s definiëren we $\psi(x) = 0$.

§ 47. Van de functie $\psi(x)$, die zoo voor alle waarden van x in 01 gedefinieerd is, zullen we aantoonen:

- I). $\psi(x)$ is begrensd en meetbaar.
- II). $\psi(x)$ heeft in elk deelinterval $\alpha\beta$ van 01 nulpunten en neemt in ieder van die intervallen positieve waarden aan.
- III). $\psi(x)$ is continu in ieder van haar nulpunten en approximatief continu in elk ander punt in 01 .

I). Volgens constructie is $F'_n(x)$ in alle punten, waar ze bestaat, kleiner dan

$$\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots$$

Daaruit volgt, dat voor $0 < x < 1$

$$\psi(x) \leq \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots$$

$\psi(x)$ is dus begrensd. Verder is $F_n(x)$ continu; beschouw nu in ieder punt de rechteraafgeleide

$$R_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_n\left(x + \frac{1}{k}\right) - F_n(x)}{\frac{1}{k}}.$$

Deze rechter afgeleide $R_n(x)$ is de limiet van een rij van continue functies en zelf dus een meetbare functie. Uit de gegeven voorschriften volgt, dat steeds in 01

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x).$$

Dus $\psi(x)$ is ook meetbaar.

II). Uit de constructie leiden we af, dat de deelpunten a_n^s overal in 01 dicht liggen, dus hetzelfde geldt voor de nulpunten van $\psi(x)$. In de

andere punten is $F'_n(x)$ het product van factoren $1 + \frac{\theta_k}{2^{k+1}}$ of $1 - \frac{1}{k+1}$ en steeds positief.

In $a_n^s a_n^{s+1}$ is de dikte van de verzameling der punten, waar de factor $1 - \frac{1}{n+1}$ optreedt in $F'_{n+1}(x)$, kleiner dan $\frac{1}{2^n}$. Eveneens in 0 1. En de verzameling der punten, waar voor een of andere $k \geq n$ de factor $1 - \frac{1}{k+1}$ optreedt, heeft in 0 1 dus een dikte, kleiner dan

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Daaraan voegen we toe de aftelbare verzameling der deelpunten, die in ieder interval de dikte nul heeft. In ieder punt, dat niet tot de zoo ontstane verzameling behoort, weten we zeker, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x) = \psi(x) > 0$.

De verzameling dezer punten heeft in 0 1 dus een dikte, grooter dan $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Daarin is n willekeurig gekozen. Alle punten x , waar $\psi(x) > 0$, vormen in 0 1 dus een verzameling van de dikte één. Deze punten liggen dus zeker overal dicht in 0 1.

III. Is $\psi(x_0) = 0$, dan is x_0 of een punt a_n^s , of een punt, waar $\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x) = 0$.

In beide gevallen is er een rangnummer n_0 te vinden, zoodat in een zeker interval $x_0 - \delta_1$, $x_0 - \delta_2$ geldt $F'_n(x) < \varepsilon$, voor $n \geq n_0$. (afgezien van de punten, waar $F'_n(x)$ niet bestaat en $\psi(x) = 0$ is).

Want is x_0 een deelpunt $a_{n_1}^s$, dan bevatten de richtingscoëfficiënten van de in x_0 aaneensluitende deelen van de polygoon, die $F_{n_1+p}(x)$ voorstelt, vanaf de $(n_1+1)^e$ factor uitsluitend factoren van den vorm $1 - \frac{1}{k+1}$ ($p \geq 1$). Neemt p onbepaald toe, dan naderen dus deze beide richtingscoëfficiënten tot nul. Daaruit volgt, dat het mogelijk is n_0 zoo te kiezen, dat $F_{n_0}(x)$ in x_0 een rechter- en een linkerafgeleide heeft, beide kleiner dan $\frac{\varepsilon}{P}$, waar

$$P = \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots$$

Voor de twee in x_0 aan elkaar grenzende intervallen $a_{n_0}^s a_{n_0}^{s+1}$ geldt dan, voor $n \geq n_0$,

$$F'_n(x) < F'_{n_0}(x) \left(1 + \frac{1}{2^{n_0+1}}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{n_0+2}}\right) \dots < \varepsilon.$$

Voor de limietfunctie geldt in die intervallen

$$\psi(x) \leq \varepsilon.$$

Daar ε willekeurig was gekozen, is dus $\psi(x)$ continu in ieder deelpunt.

Is x_0 geen deelpunt, terwijl toch $\psi(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x_0) = 0$, dan kiezen we n_0 zóó, dat

$$F'_{n_0}(x_0) < \frac{\varepsilon}{P}.$$

Omdat $F_{n_0}(x)$ in een zeker interval om x_0 lineair is, geldt in dat interval om x_0 ook $F'_{n_0}(x) < \frac{\varepsilon}{P}$. In datzelfde interval is dan

$$F'_n(x) < \varepsilon, \text{ voor alle } n \geq n_0.$$

En $\psi(x) \leq \varepsilon$. Ook nu is $\psi(x)$ dus continu in x_0 .

Om de approximatieve continuïteit aan te toonen in een punt, waar $\psi(x) > 0$, hebben we de volgende, reeds vroeger gemaakte, opmerking noodig:

De verzameling der punten, waar in $F'_{n+1}(x)$ de factor $1 - \frac{1}{n+1}$ optreedt, heeft in $a_n^s a_n^{s+1}$ een dikte, kleiner dan $\frac{1}{2^n}$. Hoe is de regel voor een interval i , dat één of meer intervallen $a_n^s a_n^{s+1}$ bevat? Uit de constructievoorschriften volgt, dat de maat van de verzameling der punten, waar de factor $1 - \frac{1}{n+1}$ optreedt, in ieder interval $a_n^s a_n^{s+1}$ kleiner is dan $\frac{1}{2^n}$ maal de maat van het kleinste der intervallen $a_n^s a_n^{s+1}$. Daar i minstens één interval $a_n^s a_n^{s+1}$ bevat, gebeurt hetzelfde in i op een verzameling, wier dikte in i kleiner is dan $\frac{3}{2^n}$. Echter bevat i zeker intervallen $a_{n+p}^s a_{n+p}^{s+1}$, als $p \geq 1$. Dus ook voor hogere waarden van n geldt dezelfde regel. Hieruit volgt:

De verzameling der punten, waar, voor een of andere $k \geq n$, de factor $1 - \frac{1}{k+1}$ optreedt, heeft in i een dikte, kleiner dan

$$\frac{3}{2^n} + \frac{3}{2^{n+1}} + \dots = \frac{3}{2^{n-1}}.$$

Zij nu x_0 het beschouwde punt, dus $\psi(x_0) > 0$. Wij kiezen een rangnummer n zoo hoog, dat

$$\frac{3}{2^{n-1}} < \varepsilon, \quad \frac{P}{n} < \frac{\varepsilon}{12} \left(\text{dan is ook } \frac{P}{2^n} < \frac{\varepsilon}{12} \right),$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \dots < 1 + \frac{\varepsilon}{3P}$$

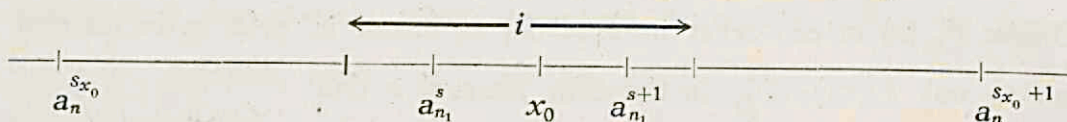
en

$$|F'_m(x_0) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ voor } m \geq n.$$

Hierin is ε weer een of ander van te voren gegeven getal. Voor het in de tweede definitie der approximatieve continuïteit voorkomende getal η kiezen we nu het kleinste van de getallen

$$a_n^{s_{x_0}+1} - x_0 \quad \text{en} \quad x_0 - a_n^{s_{x_0}}.$$

Zij i een interval, kleiner dan η om x_0 . i ligt binnen $a_n^{s_{x_0}} a_n^{s_{x_0}+1}$



Stel n_1 is het eerste rangnummer, waarvoor één of meer, volgens constructie hoogstens vier, punten $a_{n_1}^s$ binnen i vallen. Voor het verdere verloop van 't bewijs onderscheiden we twee gevallen.

A). Er vallen twee of meer punten $a_{n_1}^s$ in i .

Het interval $a_{n_1-1}^{s_{x_0}} a_{n_1-1}^{s_{x_0}+1}$ bevat i . Dus $F'_{n_1-1}(x)$ is constant in i . Hieruit volgt, dat de waarden ⁽¹⁾ van $F'_{n_1}(x)$ in i voorgesteld worden door producten van n_1 factoren, waarvan alleen de laatste verschillende waarden kan aannemen n.l.

$$1 - \frac{1}{n_1} \quad \text{en} \quad 1 + \frac{\theta_{n_1}}{2^{n_1}}.$$

De waarden van $F'_{n_1}(x)$ in i verschillen dus minder dan het bedrag $\frac{P}{2^{n_1}} + \frac{P}{n_1}$. $n_1 > n$, dus volgt uit de aan n opgelegde voorwaarden

$$|F'_{n_1}(x) - F'_{n_1}(x_0)| < \frac{P}{2^{n_1}} + \frac{P}{n_1} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{in } i.$$

Verder is, omdat i een interval $a_{n_1}^s a_{n_1}^{s+1}$ bevat, in i op een dikte grooter dan

$$1 - \frac{3}{2^{n_1-1}} > 1 - \varepsilon,$$

de betrekking

$$|\psi(x) - F'_{n_1}(x)| = \psi(x) - F'_{n_1}(x) = F'_{n_1}(x) \times \left(1 + \frac{\theta_{n_1}}{2^{n_1+1}}\right) \left(1 + \frac{\theta_{n_1+1}}{2^{n_1+2}}\right) \dots - F'_{n_1}(x)$$

geldig. Dus, weer omdat $n_1 > n$,

$$|\psi(x) - F'_{n_1}(x)| < F'_{n_1}(x) \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{3P} - 1\right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En tenslotte

$$|F'_{n_1}(x_0) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(1) Enkele deelpunten, waar $F'_{n_1}(x)$ niet bestaat, laten we buiten beschouwing. Dit is bij het bewijzen van de approximatieve continuïteit van $\psi(x)$ geoorloofd; immers de verzameling der deelpunten heeft in elk interval de dikte nul.

Uit deze ongelijkheden volgt door combinatie $|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon$ in i op een dikte grooter dan $1 - \varepsilon$.

B). Er valt slechts één punt $a_{n_1}^s$ in i . Evenals in geval A) wordt $F'_{n_1}(x)$ in i voorgesteld door een product, waarvan alleen de n_1^e factor verschillende waarden

$$1 - \frac{1}{n_1} \quad \text{en} \quad 1 + \frac{\theta_{n_1}}{2^{n_1}}$$

kan aannemen. Zij $n_2 > n_1$ het eerste rangnummer, waarvoor minstens twee punten $a_{n_2}^s$ binnen i vallen. Uit de constructievoorschriften volgt,

dat $\frac{F'_{n_2-1}(x)}{F'_{n_1}(x)}$ in i constant is: de factoren met rangnummer $n_1 + 1, n_1 + 2,$

$n_1 + 3, \dots, n_2 - 1$ zijn alle van den vorm $1 - \frac{1}{k+1}$.

$F'_{n_2}(x)$ is in i dus een product van n_2 factoren, waarvan er $n_2 - 2$ gelijk zijn, terwijl de n_1^e factor

$$\text{of } 1 - \frac{1}{n_1}, \quad \text{of } 1 + \frac{\theta_{n_1}}{2^{n_1}}$$

en de n_2^e factor

$$\text{of } 1 - \frac{1}{n_2}, \quad \text{of } 1 + \frac{\theta_{n_2}}{2^{n_2}} \text{ is.}$$

Waaruit, aangezien $n_2 > n_1 > n$, volgt

$$|F'_{n_2}(x) - F'_{n_2}(x_0)| < P \left\{ \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_1}} \right\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

i bevat een interval $a_{n_2}^s a_{n_2}^{s+1}$, dus geldt in i op dikte, grooter dan $1 - \frac{3}{2^{n_2-1}} > 1 - \varepsilon$

$$|\psi(x) - F'_{n_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Deze ongelijkheden samenvattend met

$$|\psi(x_0) - F'_{n_2}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

vindt men

$|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon$ in i op dikte, grooter dan $1 - \varepsilon$. $\psi(x)$ is dus approximatief continu voor elke waarde x in 01 .

§ 48. De functie

$$\varphi(x) = \psi(x) \sin \frac{1}{\psi(x)}, \quad \text{voor } \psi(x) > 0$$

$$\varphi(x) = 0, \quad \text{, voor } \psi(x) = 0.$$

is begrensd en meetbaar in 01 , approximatief continu in elk punt van 01 en wisselt in elk deelinterval van 01 van teeken (vgl. § 45). Zij is

dus de afgeleide functie van een in 01 overal differentieerbare, multi-oscilleerende functie.

§ 49. De vraag rijst, of het niet mogelijk is, een polygoonconstructie te vinden, waardoor men direct tot een functie geraakt, die de drie op bl. 67 genoemde eigenschappen bezit en bovendien in elk deelinterval van 01 van teeken wisselt.

Het antwoord moet bevestigend luiden. Om dit in te zien, kunnen we een constructie gebruiken, die veel gemeen heeft met die, welke KÖPCKE gebruikte in zijn eerste beschouwing over overal differentieerbare, multi-oscilleerende functies en die hem niet tot zijn doel voerde⁽¹⁾.

Als eerste van een oneindige rij van functies, die grafisch alle door polygonen voorgesteld worden, kiezen we weer de functie $y = x$ voor $0 \leq x \leq 1$. Deze functie noemen we $F_1(x)$. De rij is verder gedefinieerd door het volgende voorschrift voor den overgang van $F_n(x)$ op $F_{n+1}(x)$ voor $n \geq 1$:

Op elk segment AB (vgl. fig. 4, bl. 34), waar $F_n(x)$ lineair is, kiezen we twee punten A' en B' , zóó dat $AA' = B'B$, terwijl $AA' + B'B$ minder bedraagt dan $\frac{1}{2^n}$ maal de lengte van het kleinste der segmenten, waarop $F_n(x)$ lineair is. Op $A'B'$ construeeren we een polygoon volgens de in § 25 gegeven voorschriften. Hieraan voegen we nu echter niet AA' en $B'B$ toe, maar we trekken door A een lijn met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{n}$ en verlengen de lijn met richtingscoëfficiënt $+\frac{1}{2^n}$ door A' , tot ze de lijn door A snijdt. Analoge constructie voeren we uit op $B'B$. Zoo ontstaat op AB een polygoon; de richtingscoëfficiënten der opeenvolgende zijden zijn

$$-\frac{1}{n}, +\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^n}, -\frac{2}{2^n}, \dots, -\frac{2^n-1}{2^n}, -\frac{2^n+1}{2^n}, -\frac{2^n-1}{2^n}, \dots, \\ -\frac{2}{2^n}, -\frac{1}{2^n}, +\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{n}.$$

Deze polygoon stelt op AB een functie $(AB)_n$ voor. Duiden we nu verder de deelsegmenten van 01 , waarop $F_n(x)$ lineair is, weer aan door $a_n^s a_n^{s+1}$ en construeeren we op ieder van die segmenten de functie

$$D_n^s \times (a_n^s a_n^{s+1})_{n+1},$$

waar D_n^s de afgeleide van $F_n(x)$ in $a_n^s a_n^{s+1}$ voorstelt, dan ontstaat een op 01 gedefinieerde functie $f_{n+1}(x)$ en het verband tusschen $F_n(x)$ en $F_{n+1}(x)$ zal zijn

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) + f_{n+1}(x).$$

$F_{n+1}(x)$ wordt weer door een polygoon voorgesteld en $F'_{n+1}(x)$ wordt,

⁽¹⁾ Math. Annalen 29, 1887, bl. 123.

overal waar ze bestaat, uit $F'_n(x)$ verkregen door vermenigvuldiging met één der factoren

$$1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{2}{2^{n+1}}, \dots, + \frac{2}{2^{n+1}}, + \frac{1}{2^{n+1}}, - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$F'_n(x)$ is dus voor elke x , die geen punt a_n^s aangeeft, het product van n factoren $1 + \beta_k^x$: de eerste is één en voor de $(n-1)$ overige heeft β_k^x één der vormen

$$-\frac{1}{k+1}, +\frac{1}{2^{k+1}}, -\frac{1}{2^{k+1}}, -\frac{2}{2^{k+1}}, \dots, -\frac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}}, -\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, -\frac{2^{k+1}+1}{2^{k+1}},$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

In elk punt x , dat voor geen enkele waarde van n deelpunt is, bestaat dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(x) = \psi(x).$$

Een deelpunt a_n^s is steeds ook een deelpunt a_{n+p}^s ($p \geq 1$). In een deelpunt definiëren we

$$\psi(x) = 0.$$

Zoo is $\psi(x)$ voor elke x op 01 gedefinieerd.

§ 50. $\psi(x)$ is begrensd in 01 , want uit het bovenstaande volgt

$$|\psi(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots = P.$$

$\psi(x)$ is meetbaar: het bewijs hiervan gaat als op bl. 67.

$\psi(x)$ is continu in ieder van haar nulpunten: ook dit bewijst men op dezelfde manier als in de vorige constructie. Deze nulpunten liggen weer overal dicht in 01 .

Wij gaan nu bewijzen, dat $\psi(x)$ in ieder deelinterval van 01 van teeken wisselt. Uit de grafische voorstelling van $(AB)_n$ valt af te leiden, dat de verzameling der punten, waar in $F'_{n+1}(x)$ als $(n+1)^e$ factor een getal

$$1 + \beta_n^x < 1 - \frac{n}{2^{n+1}}$$

optreedt, in ieder interval $a_n^s a_n^{s+1}$ een dikte heeft, kleiner dan $\frac{1}{2^{n-1}}$. 't Zelfde geldt voor ieder interval $a_n^p a_n^q$. Daar een interval $a_n^s a_n^{s+1}$ steeds ook een interval $a_{n+k}^p a_{n+k}^q$ is, geldt de volgende regel:

De punten, waar voor een of andere $k \geq n$

$$\beta_k^x < -\frac{k}{2^{k+1}}$$

vormen een verzameling, wier dikte in $a_n^s a_n^{s+1}$ kleiner is dan

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Op een dikte, grooter dan $1 - \frac{1}{2^{n-2}}$ is in $a_n^s a_n^{s+1}$ dus

$$\psi(x) = F'_n(x) \times \prod_k (1 + \beta_k^x) \text{ met } \beta_k^x \equiv -\frac{k}{2^{k+1}}.$$

Op diezelfde dikte in $a_n^s a_n^{s+1}$ is dus $\psi(x) \neq 0$ en het teken van $\psi(x)$ hetzelfde als dat van $F'_n(x)$.

Nu volgt uit de constructie, dat er, $\alpha\beta$ een willekeurig deelinterval van 01 zijnde, een waarde van n is, zoodat $\alpha\beta$ zoowel een interval $a_n^s a_n^{s+1}$ bevat, waarin $F'_n(x) > 0$ als een interval $a_n^p a_n^{p+1}$, waarin $F'_n(x) < 0$. Uit het voorgaande volgt dan, dat $\psi(x)$ in het eerste interval op positieve dikte positief en in het tweede op positieve dikte negatief is. $\psi(x)$ wisselt dus zeker in elk deelinterval van 01 van teken.

Is i een interval, dat één of meer intervallen $a_n^s a_n^{s+1}$ bevat, dan geldt van i hetgeen boven bewezen werd omtrent een interval $a_n^p a_n^q$, mits wij $\frac{1}{2^{n-1}}$ vervangen door $\frac{1}{2^{n-2}}$, dus in i is de dikte van de verzameling der punten x , waar $\beta_n^x < -\frac{n}{2^{n+1}}$, kleiner dan $\frac{1}{2^{n-2}}$. En op een dikte, grooter dan $1 - \frac{1}{2^{n-3}}$, is in i

$$\psi(x) = F'_n(x) \prod_k (1 + \beta_k^x) \text{ met } \beta_k^x \equiv -\frac{k}{2^{k+1}}.$$

Zij nu x_0 een punt, zoodat $\psi(x_0) \neq 0$. Zal $\psi(x)$ aan alle gestelde eischen voldoen, dan moeten we nog bewijzen, dat $\psi(x)$ in x_0 *approximatief continu* is. Kiezen wij daartoe een getal ε , kleiner dan 1, overigens willekeurig. Bepalen we daarna een rangnummer $n \geq 4$ zóó dat

$$\frac{n}{2^{n+1}} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{18P}, \quad \frac{3}{2^{n-2}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$1 + \frac{\varepsilon}{3P} > \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \dots > \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}}\right) \left(1 - \frac{n+1}{2^{n+2}}\right) \dots > 1 - \frac{\varepsilon}{3P},$$

terwijl verder

$$|\beta_m^{x_0}| < \frac{\varepsilon}{18P} \text{ en } |F'_m(x_0) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6} \text{ als } m \geq n.$$

Dit laatste is mogelijk, omdat $\lim_{m \rightarrow \infty} F'_m(x_0) = \psi(x_0) \neq 0$. x_0 ligt in een bepaald interval $a_n^{s_{x_0}} a_n^{s_{x_0}+1}$ van de n^e verdeling. Zij η het kleinste der getallen $a_n^{s_{x_0}+1} - x_0$ en $x_0 - a_n^{s_{x_0}}$. Geldt nu de ongelijkheid

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon$$

in ieder interval, kleiner dan η om x_0 , op dikte grooter dan $1 - \varepsilon$, dan zal daarmee aangetoond zijn, dat $\psi(x)$ approximatief continu is in x_0 .

Is i zoo'n interval, kleiner dan η om x_0 , dan ligt i binnen $a_n^{s_{x_0}} a_n^{s_{x_0}+1}$.

Zij n_1 het eerste rangnummer, waarvoor één of meer punten $a_{n_1}^s$ in i vallen.

A) Twee of meer punten $a_{n_1}^s$ in i ,

$F'_{n_1}(x)$ wordt in i voorgesteld door een product van n_1 factoren, waarvan alleen de laatste d. i. $1 + \beta_{n_1-1}^x$ verschillende waarden kan aannemen, waarbij

$$1 + \frac{1}{2^{n_1}} \equiv \beta_{n_1-1}^x \equiv -\frac{1}{2^{n_1}}.$$

Volgens een soortgelijke methode, als die, welke we volgden in § 37 onder a en b , bewijst men in verband met de aan n opgelegde condities, dat in i op een dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{4}$, geldt

$$|\beta_{n_1-1}^x| < \frac{\varepsilon}{9P}.$$

Deze ongelijkheid is het analogon van de in § 37 beschouwde ongelijkheid

$$\left| A_n^{s_{x_0}} \frac{a_{n_1}^{x_0}}{2^{n_1+1}} \right| < \frac{\varepsilon}{9}.$$

Op een dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{4}$, geldt in i dus ook

$$|F'_{n_1}(x) - F'_{n_1}(x_0)| = |F'_{n_1-1}(x_0)| \times |(1 + \beta_{n_1-1}^x) - (1 + \beta_{n_1-1}^{x_0})| < P \times \frac{\varepsilon}{3P}$$

$$|F'_{n_1}(x) - F'_{n_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Omdat i één of meer intervallen $a_{n_1}^s a_{n_1}^{s+1}$ bevat, is verder in i op een dikte, grooter dan $1 - \frac{3}{2^{n_1-3}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\beta_k^x \equiv -\frac{k}{2^{k+1}} \text{ voor } k \equiv n_1,$$

dus

$$|F'_{n_1}(x) - \psi(x)| = |F'_{n_1}(x)| \times |1 - (1 + \beta_{n_1}^x)(1 + \beta_{n_1+1}^x) \dots| < P \times \frac{\varepsilon}{3P}$$

$$|F'_{n_1}(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tenslotte volgt uit de aan n opgelegde voorwaarden nog

$$|F'_{n_1}(x_0) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Combineerend vindt men

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon \text{ in } i \text{ op een dikte, grooter dan } 1 - \varepsilon.$$

B) Slechts één punt $a_{n_1}^s$ in i .

Is n_2 het laagste rangnummer, waarvoor minstens twee punten $a_{n_2}^s$ in

i liggen, dan is $\frac{F'_{n_2-1}(x)}{F'_{n_1}(x)}$ in i constant, om dezelfde reden als op bl. 71.

$F'_{n_2}(x)$ kan in i dus met $F'_{n_2}(x_0)$ alleen verschillen in de factoren met rangnummers n_1 en n_2 . Op dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{4}$, geldt echter weer

$$|\beta_{n_1-1}^x| < \frac{\varepsilon}{9P}. \text{ Evenzoo is op dikte, grooter dan } 1 - \frac{\varepsilon}{4} \text{ in } i \text{ } |\beta_{n_2-1}^x| < \frac{\varepsilon}{9P}.$$

Op dikte, grooter dan $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ geldt in i dus

$$\begin{aligned} |F'_{n_2}(x) - F'_{n_2}(x_0)| &< P \times |(1 + \beta_{n_1-1}^x)(1 + \beta_{n_2-1}^x) - (1 + \beta_{n_1-1}^{x_0})(1 + \beta_{n_2-1}^{x_0})| \\ |F'_{n_2}(x) - F'_{n_2}(x_0)| &< P \left(4 \frac{\varepsilon}{9P} + \frac{2\varepsilon^2}{81P^2} \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Omdat i een interval $a_{n_2}^s a_{n_2}^{s+1}$ bevat, geldt in i op dikte, grooter dan $1 - \frac{3}{2^{n_2-3}} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$:

$$|F'_{n_2}(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Verder in aanmerking nemend, dat

$$|F'_{n_2}(x_0) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

vindt men, dat in i op dikte, grooter dan $1 - \varepsilon$, geldt,

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| < \varepsilon.$$

$\psi(x)$ is dus approximatief continu voor elke x in 01 .

SLOTOPMERKINGEN.

§ 51. In § 43 is reeds aangekondigd het bewijs, dat er punten bestaan waar alle termen van $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ eindig zijn, terwijl toch deze reeks er divergeert. Wij leveren nu dit bewijs:

Beschouwen we de verzameling der punten x , waar $g_n(x)$ grooter is dan één.

Dan moet

$$\frac{u_n}{\sqrt[n]{|x - a_n|}} > 1,$$

of

$$|x - a_n| < u_n^n.$$

Deze verzameling bestaat dus uit één interval met lengte $2u_n^n$.

De verzameling E_p der punten x , waar, voor een of ander rangnummer $n > p$, de bovenstaande ongelijkheid geldt, is dus, aangezien de punten $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots$ overal dicht liggen in a, b , een in a, b overal dichte inter-

valverzameling. Zoo zijn er aftelbaar veel verzamelingen $E_1, E_2, \dots$. Zij R de doorsnee.

$$R = E_1 E_2 \dots$$

Omdat E_p een in $a b$ overal dichte intervalverzameling is, is het complement E'_p nergens dicht in $a b$. Dus de complementaire verzameling van R

$$R' = (E_1 E_2 \dots)' = E'_1 \dot{+} E'_2 \dot{+} \dots$$

is de vereeniging van aftelbaar veel verzamelingen $E'_1, E'_2, \dots$, die nergens dicht zijn in $a b$. R is dus een residuel van $a b$.

De punten $a_1, a_2, \dots$ vormen een ensemble gerbé G van $a b$. G' is een residuel, ook $R_1 = R G'$, volgens stelling V uit de inleiding.

In een punt r van R_1 zijn alle termen $g_n(r)$ eindig. Omdat r tot R en dus tot ieder der verzamelingen $E_1, E_2, \dots$ behoort, geldt de ongelijkheid

$$\frac{u_n}{\sqrt[n]{|r - a_n|}} > 1$$

voor waarden van n , die iedere grens overschrijden. In elk punt van R_1

divergeert dus $\sum_1^\infty g_n(x)$. Alle punten, waar $\sum_1^\infty g_n(x)$ uitsluitend ein-

dige termen heeft en divergeert, vormen dus ook een residuel van $a b$. (Inleiding, stelling III).

Wij hadden dit ook kunnen afleiden met behulp van een theorema, door R. BAIRE gegeven op bl. 83 van zijn *Leçons sur les fonctions discontinues*: Onze functie $G(x)$ is in $a b$ een afgeleide functie, stel van $L(x)$. Dan is

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L\left(x + \frac{1}{n}\right) - L(x)}{\frac{1}{n}}$$

de limiet van een rij van continue functies. Volgens bedoeld theorema is de limietfunctie van een rij van continue functies punctueel discontinu in het beschouwde interval, d.w.z. de continuïteitspunten van de limietfunctie vormen een in dat interval overal dichte verzameling. En uit hetgeen BAIRE op bl. 78 behandelt volgt, dat de continuïteitspunten van een in $a b$ punctueel discontinue functie een residuel van $a b$ vormen.

Dit geldt dus ook voor de functie $G(x)$. Nu liggen de punten $a_1, a_2, \dots$ in $a b$ overal dicht, dus de nulpunten van $G(x)$ eveneens. Alle continuïteitspunten van $G(x)$ zijn dus punten, waar $G(x) = 0$, d.w.z. $g(x) = +\infty$. Deze punten, waar $g(x) = +\infty$, vormen dus een residuel van $a b$. Hieruit volgt dan verder, evenals boven, dat de punten x , waar alle termen $g_n(x)$ eindig zijn, doch $g(x) = +\infty$, een residuel van $a b$ vormen.

De verzameling der nulpunten van de vroeger ingevoerde functie

$H(x) = e^{-g(x)} \cos g(x)$ bevat dit residuel en is zelf dus ook een residuel van a b .

Dit is een eigenschap van de afgeleide van elke in a b multioscillerende en overal differentieerbare functie $f(x)$. Immers, volgens Eigenschap V, bl. 27, vormen de punten γ , waar $f(x)$ geen der vier monotonieën bezit, een residuel van a b . En in zoo'n punt is de afgeleide, indien zij bestaat, nul.

STELLINGEN.

I.

Op bl. 36 is aangenomen, dat men bij den overgang van $F_n(x)$ op $F_{n+1}(x)$ met een eindig aantal punten a_n^s te doen heeft. De juistheid van deze onderstelling is uit de gegeven constructievoorschriften af te leiden.

II.

Met behulp van Eigenschap V, bl. 27, kan bewezen worden, dat voor de functie van WEIERSTRASZ het volgende geldt:

De punten x in ab met de eigenschap, dat er een rij van monotoon tot nul naderende getallen h_n bestaat, zóó, dat

$$\lim_{\substack{h_n \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = A,$$

A een willekeurig van te voren gegeven getal zijnde, vormen een residuel van ab .

III.

Aanvaarden wij de definitie van ZORETTI voor de limiet L van een oneindig aantal puntverzamelingen $E(\alpha)$, wanneer α tot β nadert, dan geldt de volgende stelling:

Zijn alle verzamelingen $E(\alpha)$ meetbaar en maken ze alle deel uit van één begrensde puntverzameling G , terwijl de maat van L nul is, dan is ook

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \mu E(\alpha) = 0.$$

L. ZORETTI, Leçons sur le prolongement analytique, bl. 25.

IV.

De beide voorgaande stellingen zijn voor uitbreiding vatbaar.

V.

Laat men in stelling III de aanname, dat G begrensd is, weg, dan is ze onjuist.

VI.

De verschillende definities van het abstracte begrip „groep” volgens WEBER, DE SÉGUIER en BAUMGARTNER zijn met elkaar in overeenstemming.

H. WEBER, Lehrbuch der Algebra, Band 2, bl. 3 en 4.

J. A. DE SÉGUIER, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, bl. 6.

L. BAUMGARTNER, *Gruppentheorie*, bl. 21.

VII.

NETTO's definitie is voor 't geval van oneindig veel elementen met elk van de bovengenoemde definities in strijd.

E. NETTO, *Gruppen- und Substitutionentheorie*, bl. 1.

VIII.

De invoering van de uitdrukking „meetkundige plaats” is voor de meetkunde van weinig beteekenis en geeft soms aanleiding tot onjuistheden.

Zie o.a. P. MOLENBROEK, *Leerboek der Stereometrie*, 6e dr., Hoofdst. VI.

IX.

Bij de afleiding in § 183, bl. 161, van J. H. JEANS „*The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*” (4e druk) wordt stilzwijgend aangenomen, dat alle ladingen zich binnen een begrensd oppervlak bevinden.

X.

De uitspraak van J. BERTRAND aan het slot van § 142, bl. 175 van zijn „*Calcul des probabilités*” is te veroordeelen.

XI.

De waarnemingen van E. W. HUBBLE doen het vertrouwen in de juistheid van SHAPLEY's afstandsbepalingen voor de bolvormige sterrehoopen toenemen.

Contributions from the Mount Wilson Observatory, N^o. 304, 1925 en N^o. 310, 1926.

XII.

De vraag, of de spiraalnevels al of niet als afzonderlijke melkwegstelsels moeten worden beschouwd, is met behulp van de thans ter beschikking staande gegevens niet te beantwoorden.

U
19