

A 80 1453

Pheyl. 24 Juni 1893

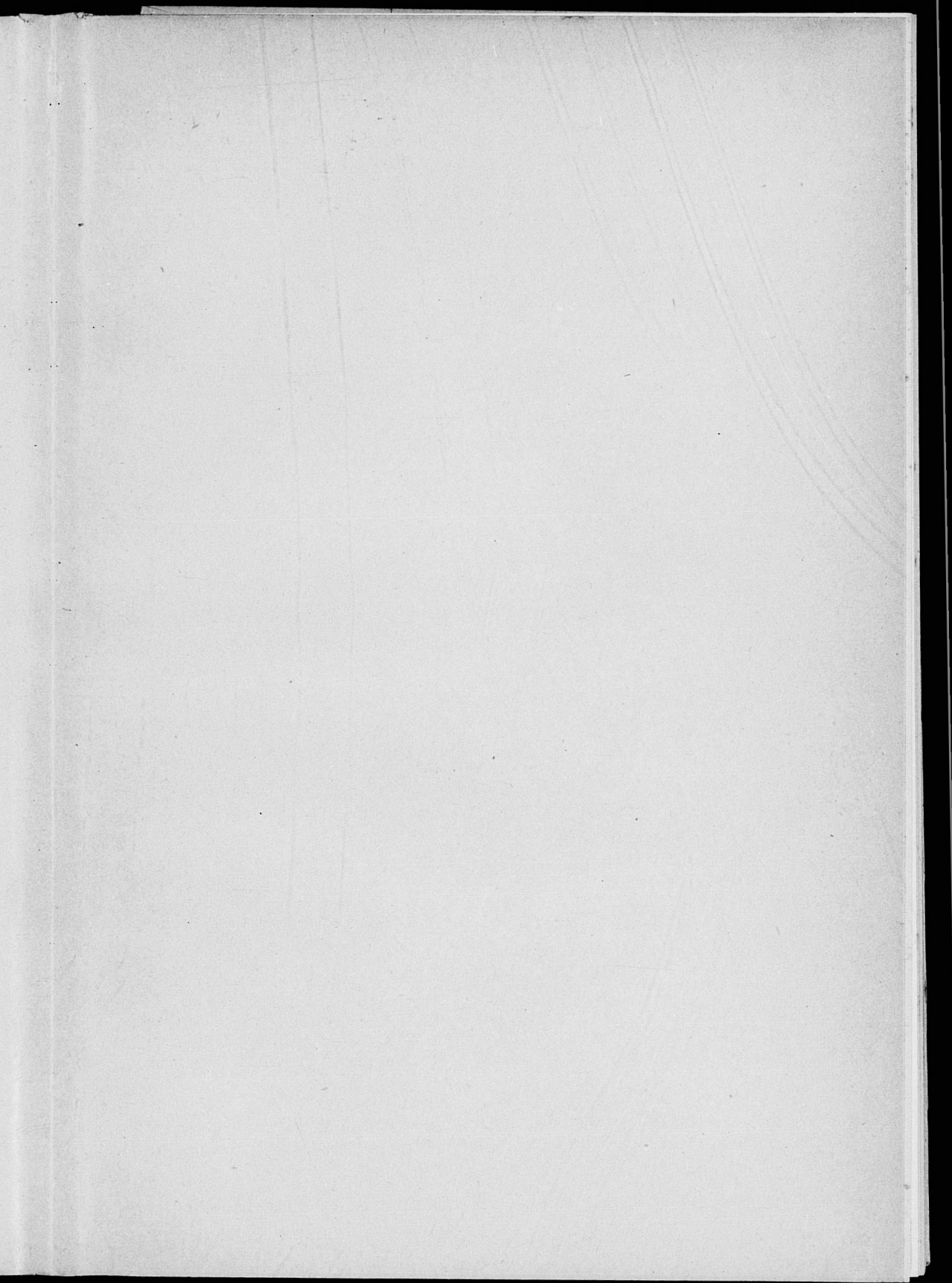
H. G. BREIJER.



**DE GRONDVORMEN
DER KROMMEN VAN DE DERDE KLASSE.**



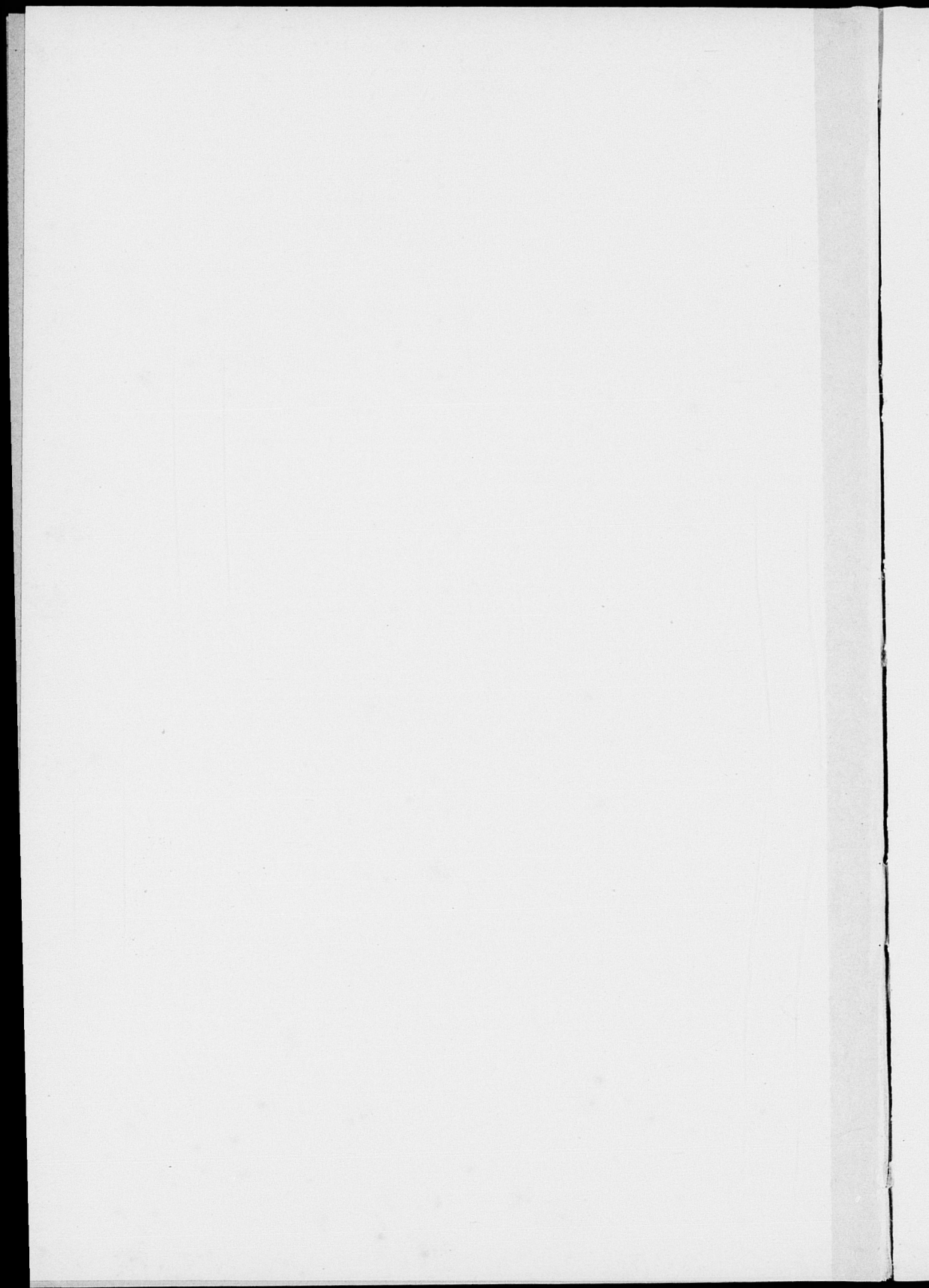
**A. oct.
1453**





27

DE GRONDVORMEN
DER KROMMEN VAN DE DERDE KLASSE.



DE GRONDVORMEN DER KROMMEN VAN DE DERDE KLASSE.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

D^R. C. M. KAN,

Hoogleeraar in de faculteit der Letteren en Wijsbegeerte.

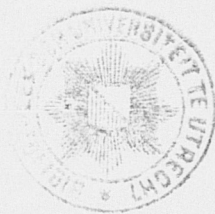
VOOR DE FACULTEIT TE VERDEDIGEN

op Zaterdag 24 Juni 1893, 's nam. te 4 uren.

DOOR

HERMANN GOTTFRIED BREIJER,

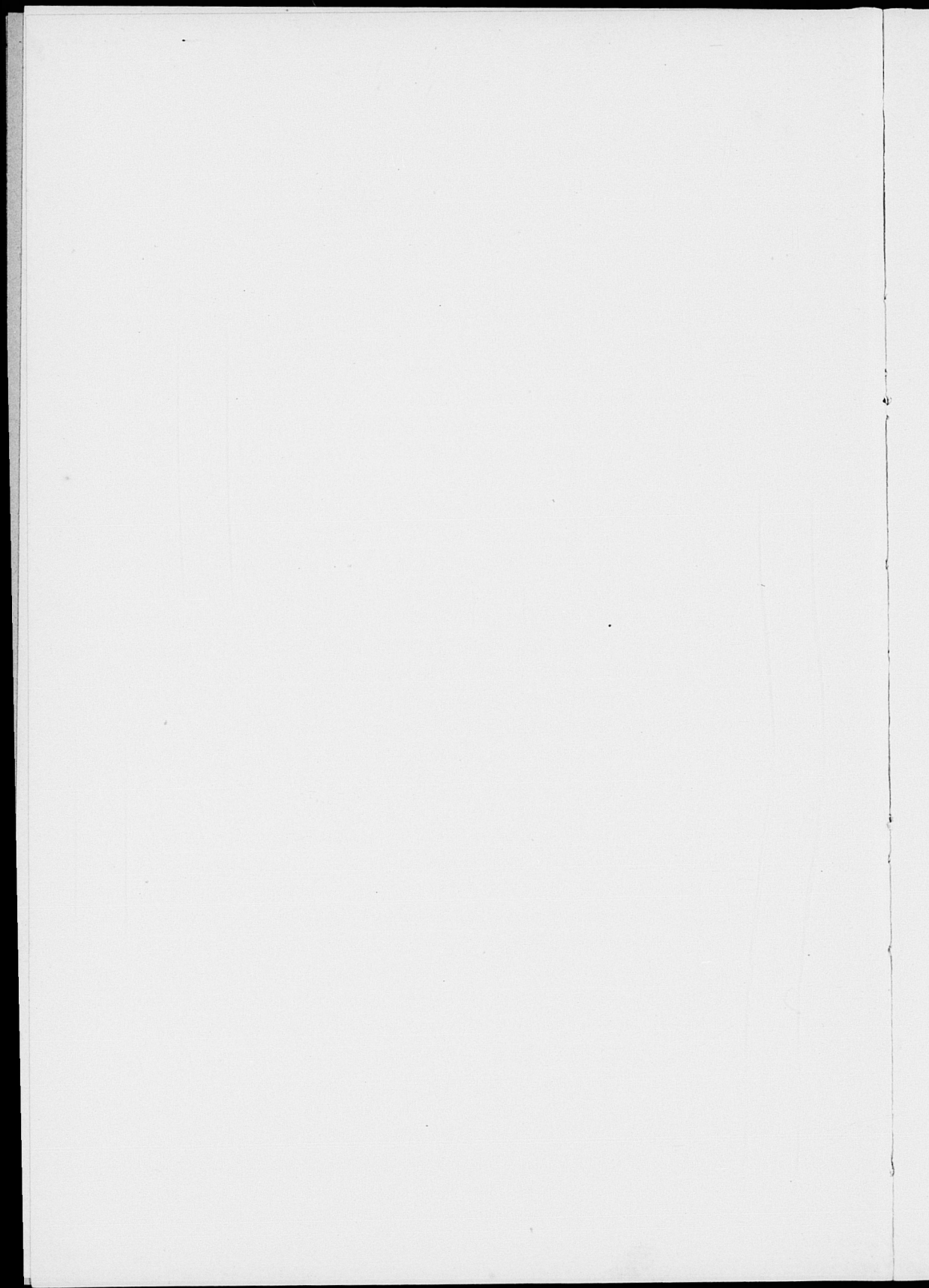
GEBOREN TE ARNHEM.



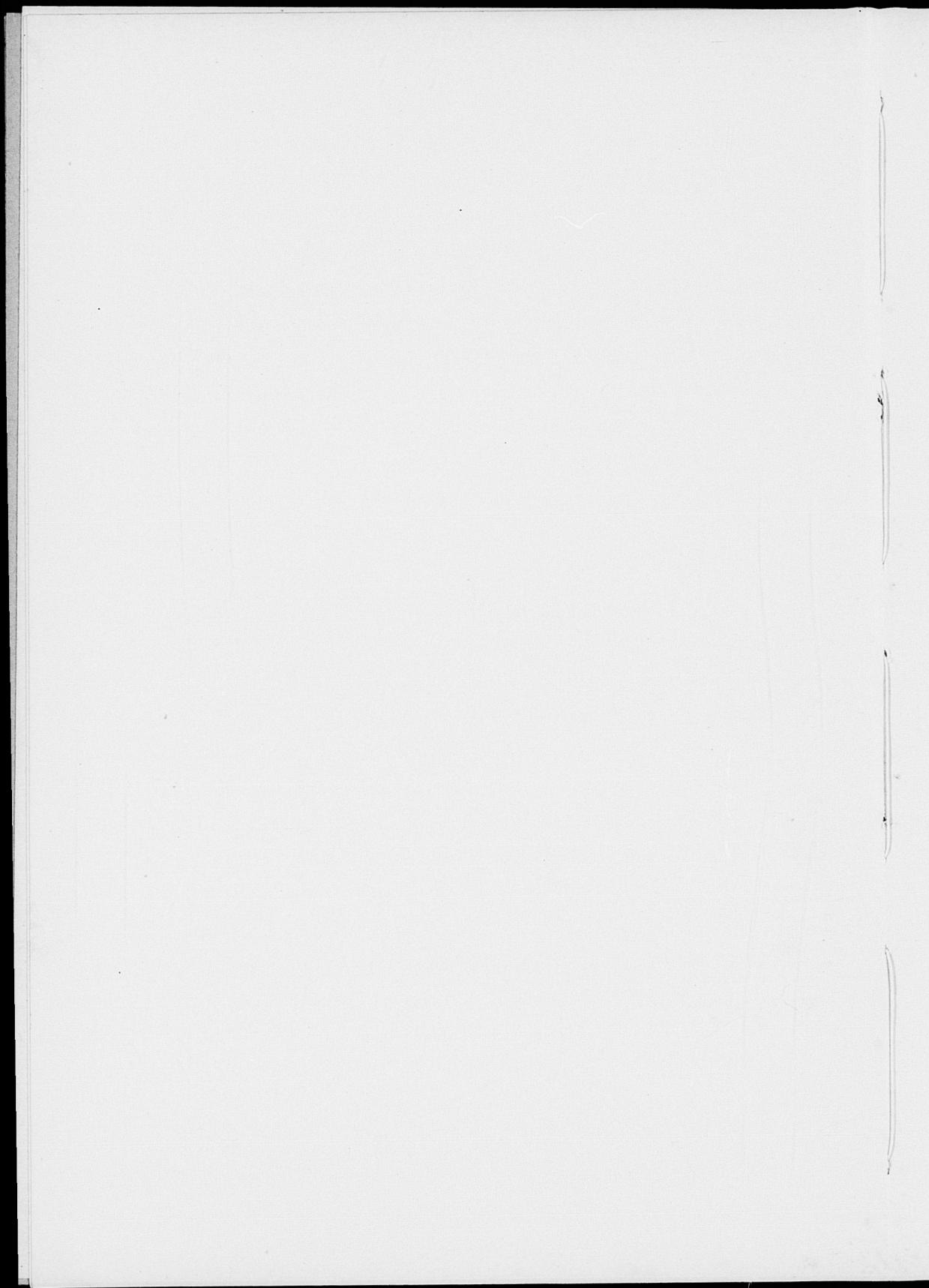
AMSTERDAM,

BOEK- KUNST- EN HANDELSDRUKKERIJ v/h GEER. BINGER,

1893.



Aan mijne Bruid.

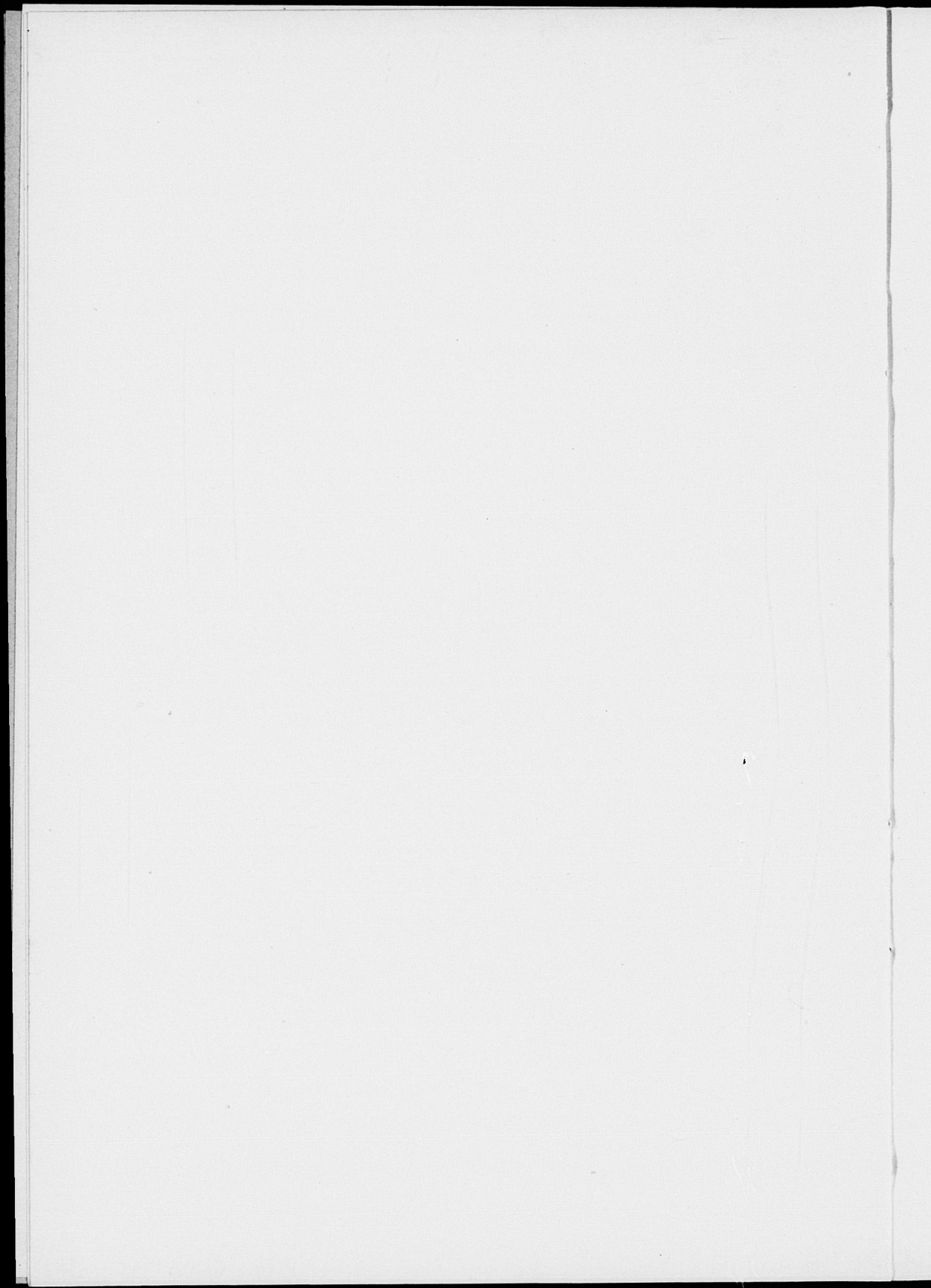


Aan het einde mijner academische loopbaan gekomen, is het mij een aangename plicht, allen dank te betuigen, die tot mijne vorming hebben bijgedragen.

U hooggeleerden VAN DER WAALS en VAN PESCH betuig ik mijne groote erkentelijkheid.

Het is mij eene behoefte, U hooggeleerde KORTEWEG hulde toe te brengen voor de wijze, waarop gij mij de zuivere en toegepaste wiskunde deedt kennen, maar tevens mijn bijzonderen dank te betuigen voor de hulp, die ik bij de vervaardiging van dit proefschrift in zoo ruime mate heb ondervonden.

Allen mijnen vrienden roep ik bij het verlaten der academie, en welhaast ook van ons vaderland, een hartelijk vaarwel toe.



INLEIDING.

Het doel der volgende onderzoekingen is, de gedaante van de kromme lijnen der derde klasse te leeren kennen.

Wij zullen ze hiertoe opvatten als poolfiguren van de krommen der derde orde. Daar nu het aantal soorten van krommen van den derden graad reeds zeer aanzienlijk is, doch het aantal grondvormen, waaruit deze door projectivische verwantschap kunnen worden afgeleid, slechts vijf bedraagt, zullen wij beginnen deze grondvormen te bestudeeren en hunne poolfiguren te doen kennen.

Evenals nu in de theorie van de tweedegraads krommen de parabool als overgang tusschen de algemeene kegelsneden, ellips en hyperbool, bestaat, hebben wij in de theorie der derdegraadskrommen drie soorten van krommen, die een dergelijke rol spelen. Het zijn de krommen met geïsoleerd punt, met reëel dubbelpunt en die waarbij de buigraaklijnen elkaar in één punt snijden.

De grondvormen dezer krommen zijn een ondertwerp van onderzoek, evenzeer het onderzoek naar hunne poolfiguren, die respectievelijk gekenmerkt zijn door het bezit van eene imaginaire dubbelraaklijn, eene reële

dubbelraakklijn en het bezit van drie keerpunten op eene rechte.

Onder deze bijzondere gevallen zijn de derdegraadskrommen met keerpunt weder de meest bijzondere. Hunne grondvorm, de semicubische parabool zal derhalve meer speciaal onze aandacht vereischen. Nog in meerdere mate doet zij dit door de merkwaardige eigenschap, dat hare poolfiguren wederom semicubische parabolen zijn, of hare perspectieven, en zij dus evenzeer onder de krommen van de derde klasse optreden.

Ten slotte een hoofdstuk over de degeneraties, dat, hoezeer het onze aandacht getrokken heeft, eensdeels door de grootere moeilijkheden, anderdeels door den beperkten tijd, die ons ter beschikking stond, minder dan de voorgaande op eenige volledigheid kan aanspraak maken.

Ten slotte mijn dank aan den Heer J. W. F. HARTKAMP, voor de bereidwilligheid, waarmede hij mij bij het afwerken der teekeningen ter zijde stond. Mochten deze niet aan alle eischen der kunst voldoen, dan is dit slechts te wijten aan den geringen tijd, die den zinograaf ter beschikking stond.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

	Pag.
INLEIDENDE BESCHOUWINGEN	I

HOOFDSTUK II.

GEDAANTEN DER KUBISCHE PARABOLEN ZONDER DUBBEL- PUNTEN	21
---	----

HOOFDSTUK III.

GEDAANTEN DER KROMMEN DERDE KLASSE ZONDER DUB- BELRAAKLIJN OF BUIGPUNT.	30
---	----

HOOFDSTUK IV.

GRAPHISCH OVERZICHT VAN DE ALGEMEENE KROMMEN DER DERDE ORDE EN DERDE KLASSE IN DRIE SOORTEN.	40
--	----

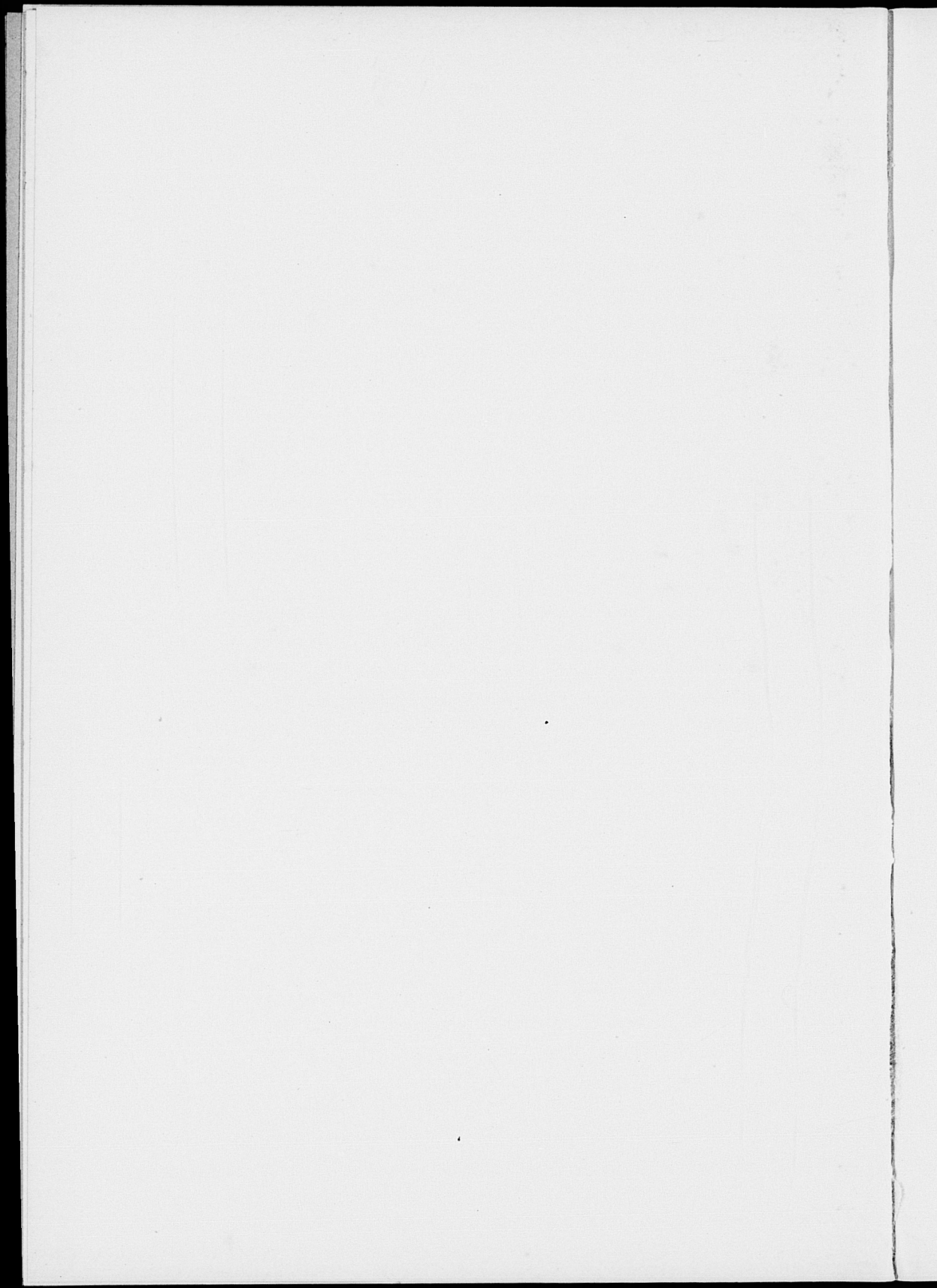
HOOFDSTUK V.

GEDAANTEN DER KUBISCHE PARABOLEN MET DUBBEL- PUNTEN EN HUNNER POOLKROMMEN	45
--	----

HOOFDSTUK IV.

DEGENERATIES DER KROMMEN VAN DEN 3 ^{DEN} GRAAD EN VAN HUNNE POOLFIGUREN.....	55
--	----

STELLINGEN	67
------------------	----



HOOFDSTUK I.

Inleidende Beschouwingen.

§ 1.

Eene algebraïsche-kromme wordt gezegd van de n^{de} klasse te zijn, wanneer uit elk punt n raaklijnen aan de kromme kunnen worden getrokken.

Voorts leert het dualiteits principe, dat evenals elke n^{de} graads betrekking tusschen puntcoördinaten eene kromme van de n^{de} orde voorstelt, evenzoo elke betrekking van den n^{den} graad in lijn coördinaten eene kromme van de n^{de} klasse zal zijn, en tevens, dat elke kromme der n^{de} klasse als poolfiguur eener kromme der n^{de} orde zal kunnen beschouwd worden.

§ 2.

Om nu volgens deze laatste opvatting tot het gestelde doel te geraken, zullen wij nog eene aanzienlijke bekorting kunnen invoeren, door het gebruik eener stelling, door NEWTON uitgesproken in zijne „Enumeratio linearum tertii ordinis” (1706).

Zij luidt: alle krommen der derde orde zijn te beschouwen als perspectieven der zoogenoemde kubische parabolen, begrepen in de vergelijking $y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Het bewijs wordt door NEWTON niet gegeven; wij vinden slechts de volgende korte vermelding in Hoofdstuk V der enumeratio, getiteld: „Genesis curvarum per umbras.”

„Indien door een lichtpunt schaduwen van figuren worden geworpen op een onbegrensd vlak, zullen de schaduwen van kegelsneden altijd kegelsneden zijn, die van krommen van het tweede geslacht zullen altijd van het tweede geslacht, die van het derde geslacht altijd weder van het derde geslacht zijn, en zoo vervolgens. (Zie Noot I.)

En evenals een cirkel door zijn schaduwen alle kegelsneden doet ontstaan, evenzoo doen de vijf kubische parabolen door hunne schaduwen alle andere krommen van het tweede geslacht ontstaan, en zoo kunnen bepaalde eenvoudiger krommen van een ander geslacht gevonden worden, die door hunne schaduwen, op een plat vlak door een lich-

Noot I. De benaming eerste geslacht, tweede geslacht, derde geslacht is afkomstig van DESCARTES. Hij kwam hiertoe door graphische oplossingen van hoogere machtsvergelijkingen. Zoo vond hij wortels der vierde machtsvergelijkingen uit de snijding van een cirkel met een parabool, die der 6de machtsverg. uit cirkel en 3de graadskromme. Eveneens voeren deze constructies tot de oplossing van 3de en 5de machtsvergelijkingen. Hij rekende het dus even moeielijk eene 2de machtsverg. op te lossen als eene $(2n-1)$ ste machts. Hij deelt daarom krommen van deze graden bij het zelfde geslacht in.

tend punt verwekt, alle andere krommen van hetzelfde geslacht doen ontstaan." (Noot II.)

Elke kromme der derde orde is dus volgens Newton te beschouwen als de doorsnede van een kegel om een der kubische parabolen beschreven, met een plat vlak.

§ 3.

Van deze voor ons onderzoek hoogst gewichtige stelling zullen wij eenige bewijzen doen volgen. Reeds in 1731 worden in de *„Mémoires de l'académie”* bewijzen gevonden. In een belangrijk opstel van CLAIRAUT, waarin hij de kromme lijnen opspoorde, die verkregen worden bij de snijding van gebogen oppervlakken door platte vlakken in alle mogelijke standen, geeft hij als toepassing der algemeene theorie het volgende bewijs der stelling.

Voor eerst merkt hij op, dat een kegel beschreven op eene grondlijn, een gelijk aantal buigribben vertoont, als de grondlijn buigpunten. De doorsnede van zulk een kegel met een plat vlak vertoont evenveel buigpunten, als het vlak buigribben ontmoet. Wil men bij eene doorsnede een buigpunt verliezen, dan zal men het vlak

Noot II. De krommen van het tweede geslacht zijn volgens DESCARTES van de derde en vierde orde. NEWTON zegt in zijne inleiding uitdrukkelijk, dat hij de krommen van de tweede orde tot het eerste geslacht brengt, die der 3^{de} orde tot het tweede geslacht, en de krommen van de n^{de} orde tot het $(n-1)^{\text{ste}}$ geslacht. Hij houdt zich dus niet aan de oorspronkelijke indeeling van DESCARTES.

evenwijdig aan eene buigribbe moeten aanbrengen, wil men er meer verliezen, dan zal het evenwijdig aan meer buigribben moeten worden aangebracht. Zie Noot III.

Een kegel der 3^{de} orde heeft hoogstens drie buigribben, en welke kegel der derde orde men ook moge hebben, er zal steeds een snijvlak aan te brengen zijn, waardoor eene dier lijnen van de 3^{de} orde ontstaat met slechts twee buigpunten, of met geen enkel. Zie Noot IV.

Alle krommen van de derde orde worden dus verkregen als schaduwen van diegene, welke slechts twee buigpunten bezitten, of geen enkel. Wij moeten dus bewijzen, dat deze als schaduwen der kubische parabolen kunnen worden verkregen.

Hiertoe neemt CLAIRAUT aan, dat de krommen 3^{de} orde met twee of 3 onder buigpunten begrepen zijn in de vergelijking $x y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d$ met uitzondering van de kubische parabolen. Nergens echter zegt hij, op welke wijze de juistheid dezer bewering kan worden gestaafd, zoodat wij ook hier tot de overtuiging komen, dat hij

Noot. III. CLAIRAUT vergeet, dat het onmogelijk is een vlak te brengen evenwijdig aan meer dan twee elkaar snijdende lijnen. Waar hij dit dus bij kegels van de derde orde doet, alleen daardoor te verklaren, dat hij uit de figuren der enumeratio zag, dat de krommen met nog twee buigpunten, deze altijd gelijktijdig verliezen.

Noot IV. Dit besluit schijnt genomen te zijn naar aanleiding van de figuren in Newton's Enumeratio, waar hoogstens drie buigpunten voorkomen.

het uit de teekeningen der enumeratio gezien heeft, in verband met Newton's formules. Nu zal de vergelijking: $x y^2 = a x^3 + b x^2 z + c x z^2 + d z^3$ alle kegels voorstellen, waarvan de top in den oorsprong ligt en die tot richtkromme hebben de lijn $x y^2 = a x^4 + b x^2 + c x + [d$ gelegen in het vlak $z = 1$.

Snijden wij dezen kegel door vlakken $x = C$, dan komen de kubische parabolen voor den dag.

Ten slotte voegt hij nog hieraan toe, dat de vijf kubische parabolen altijd gelegen zijn in de vlakken evenwijdig aan de raakvlakken in de buigribben. Al moge dit bewijs niet volkomen streng zijn, toch is de gevolgde methode fraai te noemen en zijn stuk is in alle gevallen belangrijk wegens het gebruik der ruimtecoördinaten, die in dien tijd nog bijna niet werden aangewend. In dezelfde mémoires, direct achter CLAIRAUT's onderzoekingen vinden wij een stuk van M. NICOLE „Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les lignes du troisième ordre.

NICOLE gaat uit van één der kubische parabolen, beschrijft nu op deze als richtlijn een kegel en zoekt de doorsnede met een plat vlak. Door de veranderingen der parameters laat hij dit vlak alle mogelijke standen innemen, en nu verkrijgt hij door de vergelijking met Newton's enumeratio 9 soorten van derdegraadskrommen. De studie der vier overige kegels laat hij rusten tot

later. In fraaiheid staat deze behandeling verre bij die van CLAIRAUT achter.

In 1746 verscheen te Londen een geschrift van Patrick Murdoch, getiteld „*Newtoni genesis curvarum per umbras*,” waarvan het mij niet mocht gelukken inzage te krijgen. Waar CAYLEY dit „highly interesting” noemt, moet ik dit ten zeerste betreuren.

Evenmin gelukte het mij inzage te krijgen van een werk van Pater JACQUIER „*Elementi di prospettiva*,” dat in 1753 te Rome verscheen.

§ 4.

Deze oudere bewijzen zijn voor zooverre juist, als wij de aanwezigheid van een of meer buigpunten als bewezen aannemen.

Het schijnt CHASLES toe, dat deze personen, hoewel zij de waarheid der stelling voldoende hebben toegelicht, toch niet ten volle in deze zaken waren doorgedrongen.

Wij zullen daarom niet tot een ander hoofdstuk overgaan, alvorens de streng mathematische behandeling der stelling te hebben weergegeven. Hiertoe nemen we vooreerst een zeer belangrijk opstel van MÖBIUS ter hand, dat we vinden in de *Abhandlung der Königl. Sächsischen Gesellschaft* 1852 getiteld: „*Über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung*.”

Hij maakt hier gebruik van de kegels der derde orde. Om zulk een kegel te klassificeeren, beschouwt

hij hare doorsnede met een bol, waarvan het middelpunt in den top ligt. Deze kromme wordt door hem spherische curve genoemd.

Om direct het nut hiervan te laten zien, wijzen wij er op, dat er slechts eene soort van spherische krommen der tweede orde bestaat, onverschillig of de ellips, de parabool of de hyperbool als grondlijn gekozen zij. Immers al deze krommen ontstaan door snijding van rechtecirkelvormige kegels met een plat vlak, en men had evengoed den cirkel als grondlijn kunnen kiezen.

De specifieke eigenschappen der krommen vervallen dus in de spherische krommen, de generieke, de wezenlijke blijven bestaan. Door geometrische beschouwingen, die te lang zijn om hier te herhalen geraakt hij tot de wetenschap, dat er vijf verschillende kegels van de derde orde zijn.

Langs analytischen weg gaat hij nu de vergelijkingen van zulke spherische krommen bepalen, en gebruikt hiervoor een bijzonder coördinaten stelsel, in zijne „analytische sphärik” nauwkeurig omschreven. Tot kort begrip het volgende:

Laat een bol gegeven zijn met O als centrum.

Nemen wij A , B en C als punten op dien bol voorzien van de getallen a , b en c respectievelijk, dan stellen in Möbius' stelsel aA , bB , cC krachten voor in de richtingen OA , OB en OC , waarvan de intensiteiten zich verhouden als a , b en c .

De vector vergelijking $\underline{aA} + \underline{bB} + \underline{cC} = \mathbf{0}$ stelt de evenwichts voorwaarde dezer krachten voor.

$\underline{aA} + \underline{bB} + \underline{cC} = \underline{pP}$ wijst aan dat de resultante der krachten in de richting OP ligt met eene intensiteit evenredig aan p.

Het punt P wordt daarbij weder geacht op den bol gelegen te zijn.

Verlengen wij de lijn OA naar de andere zijde van O, tot deze den bol snijdt, dan komen we in het tegenpunt van A. Wij zullen de tegenpunten met accenten aanduiden.

Derhalve geldt de vergelijking: $\mp a A = \pm a A'$.

Evenzeer volgt uit $\underline{aA} = \underline{pP}$, dat P gelegen is in A, terwijl $p = a$, of dat P gevonden wordt in A', terwijl $p = -a$.

De conditie $\underline{aA} + \underline{bB} = \underline{pP}$ wijst volgens het parallelogram van krachten erop, dat OA, OB en OP in een vlak liggen, en de zijden met den diagonaal zich verhouden als $a : b : p$. Bij een scheefhoekig coördinatenstelsel, waarvan de assen zijn OA en OB zijn de coördinaten van P en zijn afstand tot O evenredig met a b en p.

De punten A, B en P liggen op eenen grooten cirkel, en wel zoodanig, dat:

$$\sin PB : \sin PA : \sin AB = a : b : p.$$

Liggen de punten A, B en C niet op eenen grooten cirkel, dan zegt de vergelijking $\underline{aA} + \underline{bB} + \underline{cC} = \underline{pP}$, dan in een coördinatenstelsel met OA, OB en OC als assen, de coördinaten van P

zich verhouden als $a : b : c$. Door deze verhouding is de ligging van P op den bol volkomen bepaald, en op deze wijze wordt nu de ligging van elk punt ten opzichte der fundamentele punten A , B en C gegeven.

Het tegenpunt van P is door deze vergelijking evenzeer bekend.

Stellen wij nu de coördinaten van eenig punt P op den bol voor door x , y , z , dan zal de spherische kromme van den 3^{den} graad worden voorgesteld door de homogene vergelijking:

$$a x^3 + b y^3 + c z^3 + f y^2 z + g z^2 x + h x^2 y + i y z^2 + k z x^2 + l x y^2 + m x y z = 0. \quad (1).$$

De reductie dezer vergelijking volbrengt MÖBIUS door invoering van een coördinatenstelsel, dat op de buigpunten betrekking heeft. De aanwezigheid van buigpunten in spherische krommen van den derden graad of in 't algemeen van oneven graad bewijst hij langs eenen weg, waarbij de gedaante der spherische krommen op den voorgrond treedt.

Allereerst beschouwen wij hiertoe de spherische kromme van de rechte lijn. Laten weer P en P' een punt en het tegenpunt der spherische kromme voorstellen. Laat A en B de oneindig ver gelegen punten der rechte zijn, dan zal, terwijl een punt de rechte van A tot B afloopt, deze op den bol zich afteekenen als een halven cirkel beschreven door P en een halven cirkel beschreven door het tegenpunt, beide in eenzelfde vlak door 't middel-

punt gelegen. De geheele spherische kromme is dus een groote cirkel.

Waar bij de kegel van de tweede orde altijd een cirkel als richtlijn kan beschouwd worden, spreekt het bijna van zelf, dat hier de spherische kromme uit twee afzonderlijke gesloten krommen zal bestaan. Op dezelfde wijze bestaat nu ook elke spherische kromme van hooger orde uit een aantal gesloten krommen. Voor het bewijs hiervan gebruikt MÖBIUS de stelling, dat eene vlakke algebraïsche kromme l in geen enkel eindig punt plotseling afbreekt, Zoude dus hare spherische projectie λ ergens onderbroken zijn, dan zou het slechts daar kunnen zijn, waar (men veroorlove ons de uitdrukking) het de projectie was van een laatste punt A eener oneindige tak in l . Dat dit echter niet het geval kan zijn, bemerkt men dadelijk, door l of λ te projecteeren op een vlak, dat niet parallel is met de richting van den oneindigen tak van l . Zij nu l' de projectie van l of λ . Indien λ in A afgebroken was, dan zou l' in A' moeten eindigen, dat een eindig punt is. Dit nu weerspreekt het principe, waarvan hij uitging. Nog zou het mogelijk kunnen zijn, dat de spherische kromme bestond uit een spiraal met oneindig veel windingen; doch ook dit kan de waarheid niet zijn, daar dan een groote cirkel kon worden aangebracht, die de kromme in een oneindig aantal punten sneed, hetgeen tegen het

begrip „algebraïsche kromme” strijdt. Möbius noemt nu een tak eener spherische kromme enkelvoudig, wanneer deze behalve hare punten, ook de tegenpunten bevat.

Stellen wij nu, dat een punt A langs eene enkelvoudige spherische kromme voortgaat tot A' en daarbij in de punten B. C... M eenen grooten cirkel ontmoet, dan zal het aantal snijpunten op den weg A'A aangewezen worden door het zelfde getal. Nemen we nu om de ideeën te fixeeren den grooten cirkel μ horizontaal, dan zal, als AB boven μ ligt, BC er onder, CD er boven... liggen, terwijl de bogen A'B', B'C', C'D enz., afwisselend onder en boven μ liggen. Dit nu is niet mogelijk, tenzij het aantal snijpunten op den weg AA' nul of even is. Het geheele aantal snijpunten is dus op den weg AA' voor te stellen door 1 (voor het punt A) + 2 m voor de tusschen gelegen. Het aantal paren snijpunten der geheele enkelvoudige spherische kromme bedraagt dus een oneven aantal.

Zal eene spherische kromme dus de voorstelling zijn van eenen oneven trek in het platte vlak, dan zal zij eene enkelvoudig kromme moeten vormen. Alle krommen van den derden graad bestaan uit oneventrekken, of uit een even- en een oneven trek. Hunne spherische krommen zijn dus enkelvoudig, of bestaan uit eene enkelvoudige en eene tweelingskromme.

Stellen wij nu, dat eene enkelvoudige spherische kromme door eenen grooten cirkel geraakt wordt in A , dan zal zij ook geraakt worden in het tegenpunt A' . Indien A geen merkwaardig punt is, zullen de stukken CA en AB , die onmiddellijk ter weerzijden van A liggen hunne convexe kant naar den grooten cirkel keeren; evenzoo de stukken $C'A'$ en $A'B'$ om het tegenpunt. Nu liggen CAB en $C'A'B'$ aan tegengestelde zijde van den grooten cirkel. Daar nu de kromme wegens hare enkelvoudigheid in zich zelve terugkeert is het altijd mogelijk van A langs de kromme tot A' te gaan. Men ziet duidelijk dat aan deze voorwaarden niet kan worden voldaan, tenzij op den weg AA' een oneven aantal punten voorhanden zijn, waar de kromme van bol, hol wordt, d.w.z. tenzij op dat gedeelte een oneven aantal buigpunten voorhanden zijn.

Wij willen ons thans niet verder in deze beschouwingen verdiepen; genoeg zij het, dat MÖBIUS bewezen heeft, dat in elke enkelvoudige spherische kromme minstens *één* paar buigpunten moet aanwezig zijn, dus ook, dat in den oneven trek eener derde graadskromme altijd minstens *één* buigpunt moet aanwezig zijn.

Zorgen wij nu voor de keuze van ons coördinatenstelsel, en kiezen wij het zoo, dat B een der buigpunten is, dan verliest de vergelijking niet aan algemeenheid; evenmin, wanneer AB als buigraaklijn gekozen wordt.

De snijpunten met AB zijn gegeven door:
 $z = 0$, derhalve moeten zij worden berekend uit:

$$a x^3 + b y^3 + h x^2 y + l x y^2 = 0.$$

Deze vergelijking moet drie wortels $z = 0$ vertoonen; derhalve $b = 0$ $h = 0$. $l = 0$.

De algemeene vorm is dus gereduceerd tot:

$$a x^3 + c z^3 + f y^2 z + g z^2 x + i y z^2 + k z^2 x + m x y z = 0.$$

of tot

$$z[f y^2 + (m x + i z) y] + a x^3 + k z x^2 + g z^2 x + c z^3 = 0(2).$$

Zij nu gegeven P' een punt der spherische kromme door:

$$\underline{p'P'} = \underline{x'A} + \underline{y'B} + \underline{z'C} \quad (a)$$

en voldoen derhalve $x'y'z'$ aan (2), dan zullen wij na substitutie der waarden x' en z' een tweeden graadsvorm in y overhouden, zoodat dus behalve y' nog eene tweede waarde y'' bepaald wordt. Noemen wij dit punt P'' , dan zal het klaarblijkelijk gegeven zijn door:

$$\underline{p''P''} = \underline{x'A} + \underline{y''B} + \underline{z'C} \quad (b)$$

Trekken wij (b) van (a) af dan komt:

$$\underline{p'P'} - \underline{p''P''} = \underline{B(y' - y'')} \quad (c)$$

Stellen wij nog $\underline{p'P'} + \underline{p''P''} = \underline{qQ}$ (d) dan volgt hieruit

$$\underline{qQ} = \underline{2 x'A} + \underline{(y + y'') B} + \underline{2 z'C} \quad (e)$$

De som der wortels van (2) naar y opgelost is echter $-\frac{m x' + i z'}{f}$, dus (e) kan vervormd worden tot:

$$\underline{fqQ} = \underline{2 fx'A} + \underline{(m x' + i z') B} + \underline{2 z'fC}.$$

Tot verdere reductie stellen wij:

$$\underline{2 f A} - \underline{m B} = \underline{d D} \quad (f)$$

$$\underline{2 f C} - \underline{i B} = \underline{e E} \quad (g) \text{ dan is}$$

$$\underline{f q Q} = \underline{d x' D} + \underline{e z' E} \quad (h)$$

Volgens (c) en (d) liggen de punten $P'P''Q$ en B op eenzelfden grooten cirkel.

Verder verhouden zich:

$$\sin P'B : \sin P''B = p'' : p'$$

$$\sin P'B : \sin QP'' = p'' : p' \text{ en dus}$$

$$\sin P'B : \sin BP'' = - \sin P'Q : \sin QP''$$

De boog $P'P''$ wordt dus door B en Q harmonisch verdeeld.

Eindelijk is Q nog een punt van den grooten cirkel, welke AB en BC ontmoet in de punten D en E , (zie (h)), welke cirkel onafhankelijk is van het oorspronkelijk gekozen punt P' . Aldus geraken wij tot de stelling dat, indien men in elk van drie of meer zich in een buigpunt B snijvende spherische bogen $P'P''$ der kromme, een punt Q zoo bepaalt, dat de boog door Q en B harmonisch verdeeld wordt, dan zullen al deze punten Q op eenen grooten cirkel liggen.

Deze noemen wij poollijn van het buigpunt.

Nemen we thans nog eene andere zijde van ABC in bepaalden stand; en wel zoo, dat voor CA komt de poollijn van 't buigpunt DE , dan moet D met A en E met C samen vallen, daar dit de punten zijn, waarin AC door AB en BC gesneden wordt.

Hierdoor wordt: (f) $m = 0$ en volgens (g) $i = 0$.

De algemeene vergelijking wordt hierdoor gereduceerd tot:

$$f y^2 z + a x^3 + k z x^2 + g z^2 x + c z^3 = 0.$$

Nemen wij nu de projectie dezer spherische kromme op een vlak evenwijdig aan den grooten cirkel AB , dan hebben wij slechts de snijpunten

te zoeken met een vlak evenwijdig met AB, dat gegeven is door de vergelijking

$$z = z_1$$

De vergelijking wordt dan:

$$f y^2 z_1 + a x^3 + k z_1 x^2 + g z_1^2 x + c z_1^3 = 0$$

alwaar nu x en y de gewone beteekenis van Cartesiaansche coördinaten in dat vlak hebben.

Schrijven we nu voor de constanten:

$$a : f z_1 = -\alpha \quad k : f = -\beta \quad g z_1 : f = -\gamma \quad c z_1^2 : f = -\delta,$$

dan treedt de projectie op onder den vorm:

$$y^2 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

§ 5.

CHASLES geeft in zijn „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie” (pag. 349) een fraai en kort bewijs.

Hij steunt hierbij op de verhoudingen tusschen het buigpunt en zijn poollijn en deze citeert hij in de volgende stellingen:

a. Wanneer wij om een buigpunt eener kromme van de 3^{de} orde eene snijlijn laten draaien, en wij in de andere snijpunten met de kromme raaklijnen trekken, zal het snijpunt dezer raaklijnen eene rechte doorloopen.

b. Trekken wij door 't buigpunt twee transversalen en verbinden we de overige snijpunten twee aan twee door rechte lijnen, dan ontmoeten deze elkaar in genoemde lijn.

c. Deze ontmoet elke transversaal door 't buig-

punt in een punt, dat harmonisch toegevoegd is ten opzichte van 't buigpunt met de twee overige punten.

Maken wij nu de projectie van eene kromme lijn der 3^{de} orde in dier voege, dat een buigpunt in 't oneindige valt, dan zal wegens stelling *c* de poollijn diameter der kromme worden.

Projecteeren wij nu zoo, dat de geheele buigraaklijn in 't oneindige valt, dan zal de kromme een diameter hebben, maar geen asymptoot. Zij zal dus parabolisch karakter dragen, en dus een der vijf kubische parabolen zijn. (Zie Noot V.)

Projecteeren we daarentegen zoodanig, dat de poollijn van 't buigpunt in het oneindige valt, dan wordt het buigpunt centrum der kromme. Aldus kunnen alle krommen der derde orde ontstaan als schaduwen der vijf centrale krommen.

§ 6.

Bij al deze bewijzen, uitgezonderd bij MÖBIUS, worden òf de gedaanten der krommen van den derden graad, zooals zij in de „enumeratio” aangegeven worden, bekend verondersteld, òf de aanwezigheid althans van *één* bestaanbaar buigpunt als bekend aangenomen.

Noot V. Het is reeds voldoende eene gewone raaklijn in het oneindige te brengen, om eenen parabolischen tak te krijgen. Wij veronderstellen, dat CHASLES het slechts van de buigraaklijn zegt, omdat deze de kromme nergens buiten het raakpunt snijdt. Bij eene gewone raaklijn is er nog een enkelvoudig snijpunt, en dit zou aanleiding geven tot een hyperbolisch karakter tevens.

Daar het van belang schijnt, dat eene zoo gewichtige stelling, die aan het hoofd der geheele behandeling der kubische krommen zou kunnen worden gesteld, op de meest rechtstreeksche wijze en met behulp van zoo weinig mogelijk kennis van bizonderen aard, bewezen worde, geven wij hier nog een ander bewijs.

Vooreerst is het altijd mogelijk eene snijlijn zoo te trekken, dat deze de kromme slechts eens snijdt. Hiertoe denken wij ons slechts eene raaklijn, die in een derde punt snijdt, en verschuiven wij die evenwijdig aan zich zelve, dan komen bij verschuiving in den eenen zin standen, waarin deze lijn drie snijpunten heeft, en bij verschuiving in anderen zin zijn twee reële snijpunten verdwenen.

Brengen we nu zulk eene snijlijn naar het oneindige, dan verkrijgt men eene kromme, met twee oneindige takken, die een gemeenschappelijke asymptoot hebben. De takken der kromme liggen aan weerszijden van den asymptoot.

Bezien we de teekening fig. b., dan is het duidelijk, dat de kromme op oneindigen afstand hare bolle zijde naar den asymptoot moet keeren.

Was er geen buigpunt aanwezig, dan zou de kromme nooit aan de andere zijde kunnen komen van den asymptoot, tenzij eene lis of een keerpunt gevormd werd. Nu moet echter het gevolg dier lijn weder oneindig dicht tot de asymptoot

naderen en hiervoor is althans de aanwezigheid van één buigpunt noodzakelijk.

Immers een tweede dubbelpunt of keerpunt kan niet optreden, daar de vereenigingslijn dan geacht zoude moeten worden, de kromme viermaal te snijden. Trouwens een dubbelpunt of een keerpunt zoude niet eenmaal volstaan; een punt van hoogere orde, bijv. een snavelpunt ware noodzakelijk om het buigpunt te vermijden. (Zie fig. c)

In fig. a, waar wij geen reël dubbelpunt toelaten, zien wij met den eersten oogopslag de aanwezigheid van drie buigpunten of een even aantal meer. In 't algemeen zal dus elke oneven tak eener kromme zonder dubbelpunten minstens drie buigpunten moeten bezitten.

Nemen wij nu een fundamenteel driehoek $A_1 A_2 A_3$ dan wordt de algemeene homogene vergelijking van den derden graad:

$$\begin{aligned} a_{111} x^3 + a_{112} x^2 x + a_{113} x^2 x + a_{122} x x^2 + a_{133} x x^2 + a_{222} x^3 + \\ a_{223} x^2 x + a_{233} x x^2 + a_{333} x^3 + a_{123} x x x = 0 \end{aligned}$$

kiezen we nu de zijde $A_1 A_2$ als buigraakklijn, en nemen we het hoekpunt A_1 als buigpunt aan, dan vereenvoudigt de algemeene vergelijking zich als volgt:

De lijn $A_1 A_2$ moet dan 3 gelijke waarden $x_2 = 0$ voor de snijpunten met de kromme geven. Deze snijpunten liggen op $x_3 = 0$ derhalve wij vinden ze uit:

$$a_{111} x^3 + a_{112} x^2 x + a_{122} x^2 x + a_{222} x^3 = 0.$$

Evenals bij MÖBIUS vinden we achtereenvolgens:

$$a_{111} = 0 \quad a_{112} = 0 \quad a_{122} = 0.$$

Gaan we nu over op scheefhoekige Cartesiaansche coördinaten. Dit kan gemakkelijk geschieden door eerst eene der zijden van den fundamenteaal driehoek naar het oneindige te projecteeren, en wel A_1A_2 .

De betrekkingen tusschen de nieuwe en oude coördinaten worden dan:

$$x = x_2; y = x_1; \quad ; x_3 = 1.$$

Wij krijgen nu de vergelijking op scheefhoekige assen onder den vorm:

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta xy + \varepsilon y^2 + \theta y + \eta = 0.$$

De Y as is nu naar het buigpunt gericht.

Zoeken wij nu de meetkundige plaats van de middens der koorden, afgesneden door de lijnen // aan de Y as, dan vinden wij hiervoor onmiddellijk de rechte

$$y = \frac{\delta x + \theta}{2 \varepsilon}$$

Deze is diameter van de kromme.

Nemen wij haar als X as aan, dan zullen snijlijnen evenwijdig aan de Y as gelijke en tegengestelde wortels moeten geven, dus de eerste graadstermen in Y moeten ontbreken.

De vergelijking komt dan voor den dag als:

$$y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

zijnde die der kubische parabolen; doch nog altijd is zij op scheefhoekige assen, evenals bij alle com-

mentatoren van NEWTON, terwijl deze zelf in zijne „enumeratio” altijd rechthoekige assen teekent.

Dit kan echter zeer gemakkelijk door gewone loodrechte projectie verholpen worden.

Eene eenvoudige stereömetrische beschouwing leert ons toch, dat iedere hoek zich tot eenen rechten hoek laat projecteeren. Doen wij dit voor den assenhoek, dan blijft de buigraaklijn in 't oneindige, en de middelijn blijft middellijn, maar thans voor loodrechte koorden. Dan ontstaan dus NEWTON'S rechte kubische parabolen.

Daar nu volgens eene bekende stelling de centrale projectie van eene centrale projectie weder is eene centrale projectie der oorspronkelijke figuur (Zie Noot VII) is hiermede NEWTON'S stelling volledig bewezen.

Noot VII. Het bewijs dezer stelling, welke merkwaardig genoeg, door CLAIRAUT reeds is uitgesproken in bovengenoemde verhandeling, is zeer bekend. Letten we op de betrekkingen, waardoor projectieve verwantschap gevestigd wordt tusschen twee figuren, die respectievelijk door de coördinaten x, y, x', y' worden uitgedrukt, dan vinden we hiervoor den meest algemeenen vorm:

$$x' = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2} \quad y' = \frac{A_1' x + B_1' y + C_1'}{A_2' x + B_2' y + C_2'}$$

Duiden we een centrale projectie van de tweede figuur aan door de coördinaten x'' en y'' , dan hangen deze figuren samen volgens de betrekking:

$$x'' = \frac{p_1 x' + q_1 y' + r_1}{p_2 x' + q_2 y' + r_2} \quad y'' = \frac{p_1' x' + q_1' y' + r_1'}{p_2' x' + q_2' y' + r_2'}$$

Substitueeren we in deze betrekkingen de waarde van x_1 en y_1 uitgedrukt in x, y , dan komt voor den dag:

$$x'' = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2} \quad y'' = \frac{\alpha_1' x + \beta_1' y + \gamma_1'}{\alpha_2' x + \beta_2' y + \gamma_2'}$$

en deze betrekkingen wijzen op perspectivische verwantschap tusschen de betrokken figuren.

HOOFDSTUK II.

Gedaanten der kubische parabolen zonder Dubbelpunten.

§ 1.

Terwijl in de projectivische meetkunde het oneindige van het platte vlak wordt voorgesteld door eene rechte lijn, en de oneindige punten eener kromme worden opgevat als hare snijpunten met deze lijn, blijft toch voor het menschelijk voorstellingsvermogen aan het oneindige iets ingewikkelds, iets moeilijks aankleven, en van twee figuren zal diegene ons het meest eenvoudig toeschijnen, welke de minste oneindige takken heeft.

Waar het nu op de gedaanten der krommen aankomt, zullen wij zooveel mogelijk aan ons voorstellingsvermogen te hulp komen, als wij krommen, die zoo weinig mogelijk oneindige takken vertoonen als vertegenwoordigers kiezen van alle andere, die er door perspectief uit af te leiden zijn. Daar het nu hier de poolfiguren der krommen van de derde klasse geldt, rijst de vraag of

het mogelijk is, de poolfiguur eener gegeven kromme in eindige gedaante te verkrijgen. De beantwoording dier vraag hangt daarvan af, of er een punt gevonden kan worden, waaruit geene bestaanbare raaklijnen aan de gegeven krommen kunnen worden getrokken.

Dit is het gemakkelijkst in te zien door even de constructie van zulk eene poolkromme iets nader te beschouwen. In een punt A der gegeven kromme trekken wij de raaklijn P. In de snijpunten B en C met de richtkegelsnede trekken wij de raaklijnen aan deze, en het snijpunt der raaklijn zal de pool van eerstgenoemde raaklijn P zijn. (Wij beperken ons hier alleen tot het geval waarbij de snijpunten B en C bestaanbaar zijn.)

Zoeken wij nu oneindige takken der poolkromme, dan moet het snijpunt der raaklijnen in B en C oneindig ver komen, en dit is het geval wanneer deze raaklijnen evenwijdig loopen, d. w. z. het treedt dan in, wanneer genoemde raaklijn P door 't centrum der richtkegelsnede gaat.

Vinden we dus punten, vanwaar geene bestaanbare raaklijnen aan de gegeven krommen kunnen worden getrokken, en kiezen we een van deze als middelpunt der richtkegelsnede, dan zal onze poolfiguur slechts eindig van gedaante zijn.

Met het oog op het aantal raaklijnen, dat van uit een gegeven punt aan eene gegeven kubische parabool kan worden getrokken zullen wij de

gedaanten dezer krommen en wel eerst van die zonder dubbelpunten beschouwen.

§ 2. Tot het bereiken van dit doel langs methodischen weg is het meest aanbevelenswaardig, het platte vlak, waarin de kubische parabool of meer in 't algemeen eene willekeurige kromme gelegen is, in vakjes te verdeelen, op zoodanige wijze, dat in elk vakje slechts punten voorkomen, waaruit ééNZelfde aantal raaklijnen aan de kromme kan worden getrokken.

Bij eene kromme van de n^{de} orde zullen in het algemeen vakjes kunnen optreden, waaruit o. 2, 4. 6... $n(n-1)$ bestaanbare raaklijnen aan de kromme kunnen worden getrokken. Immers uit een punt buiten eene gegeven kromme kunnen hoogstens $n(n-1)$ bestaanbare raaklijnen aan de kromme getrokken worden. en telkens wanneer wij van het eene vakje tot het andere overgaan verandert het aantal bestaanbare raaklijnen met twee.

De grenzen dezer vakjes worden gevormd door de kromme zelve en door de buigraaklijnen.

In het algemeen zal hierbij de lijn in het oneindige niet als scheidslijn der vakjes optreden, en dus ééNZelfde vakje soms uit twee deelen kunnen bestaan, die alleen in het oneindige samen hangen. Slechts wanneer de lijn in het oneindige buigraaklijn is, treedt zij tevens op als scheidslijn. Dit is zooals wij in hoofdstuk I betoogd hebben bij de kubische parabolen het geval.

§ 3.

Nemen wij als voorbeeld de kubische parabool met een even trek.

Vooreerst komen er twee bestaanbare buigraaklijnen, die de kromme niet snijden. Immers de buigraaklijn heeft reeds drie punten met de parabool gemeen en meer snijpunten kan eene kromme derde orde met eene rechte niet hebben. (Zie Noot VIII).

Wij vinden nu de volgende vakjes. Zie fig. I.

- 1°. Vakje $A B C$ begrensd door de kromme tusschen de buigpunten en de buigraaklijnen. Aantal bestaanbare raaklijnen 6.
- 2°. Vakje $F B . L C G$ begrensd door de kromme tusschen B en C en de buigraaklijnen voorbij de buigpunten. Aantal raaklijnen 4.
- 3°. Twee vakjes $G C E$ en $D B F$ tusschen de kromme en de buigraaklijnen voorbij de buigpunten gelegen. Aantal raaklijnen 6.
- 4°. Twee vakjes $K A C E$ en $H A B D$ begrensd door de kromme voorbij de buigpunten en de verlengde der buigraaklijnen. Aantal raaklijnen 4.
- 5°. Een vakje $K A H$ tusschen de verlengden der buigraaklijnen en den even trek. Aantal raaklijnen 2.

Noot VIII. Wij merken terloops op, dat de teekeningen in NEWTON'S „enumeratio" en in de stukken van NICOLE en CLAIRAUT foutief zijn, voor zooverre het kubische parabolen met even trek betreft. De buigraaklijnen snijden overal bij hen den even trek.

6°. Een vakje binnen den even trek. Aantal raaklijnen 0.

Rangschikken wij meer systematisch, dan krijgen we, door de buigraaklijn in 't oneindige mede te rekenen, van den even trek uitgaande.

1°. Een vakje begrensd door den even trek. Getal 0.

2°. Een vakje begrensd door drie buigraaklijnen. Getal 2.

3°. Drie vakjes begrensd door de kromme en twee buigraaklijnen. Getal 4.

4°. Drie vakjes begrensd door de kromme en twee buigraaklijnen. Getal 6.

§ 4.

Door geleidelijken overgang kunnen we nu den vorm der kromme wijzigen, en wij hebben ons de vraag te stellen, op welke oogenblikken er verandering kan komen in het aantal en de onderlinge ligging der vakjes. Wij zullen dit doen aan de hand van een stuk van Prof. KORTEWEG. *Mathematische Annalen* Bd 41. „Über die Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung.”

Beginnen wij met eene kromme der n^{de} orde.

Wij behoeven, terwijl wij ons voorstellen, dat eene kromme zich vervormt, slechts acht te slaan op zulke bizonderheden, die slechts ééne betrekking tusschen de coëfficiënten vereischen; immers de overige kunnen vermeden

worden. Trachten wij nu deze bijzonderheden te ontdekken, dan zullen wij er vijf vinden, die zich voordoen:

- 1°. Wanneer de kromme een dubbelpunt bevat.
- 2°. Wanneer zij een dubbelbuigpunt bevat.
- 3°. Wanneer eene buigraaklijn ten tweeden male raakt.
- 4°. Wanneer het snijpunt van twee buigraaklijnen de kromme bereikt.
- 5°. Wanneer drie buigraaklijnen een gemeenschappelijk punt hebben.

Bij de krommen van de derde orde vallen echter de gevallen sub 2 tot en met 4 weg Immers hierbij worden minstens vier snijpunten der kromme met eene rechte vereischt.

Wij houden dus slechts over de beide volgende bijzonderheden:

- 1°. De kromme bevat een dubbelpunt.
- 2°. De buigraaklijnen snijden elkaar in één punt.

Bij de kubische parabolen zal dit laatste geval zich voordoen, als twee buigraaklijnen evenwijdig loopen. Immers dan ligt hun snijpunt op de oneindige rechte, die ook buigraaklijn is.

§ 5.

Passen wij nu de bovengenoemde theorie toe op de kubische parabolen zonder dubbelpunten, dan krijgen we drie gevallen.

- 1°. De kromme bevat een even trek. Fig. I.
Het aantal vakjes is boven reeds genoemd.

Wij beschouwen deze krommen en hunne perspectieven als de eerste soort.

Door continue verandering laten wij den even trek inkrimpen tot een geïsoleerd punt. Wij krijgen dan na het passeeren van dat punt, waardoor het aantal vakjes met één vermindert, en het getal in elk vakje met twee afneemt, de kromme van de 2^{de} soort.

Aantal vakjes 7. Aantal raaklijnen 0. 2 of 4.
Fig. 2.

Gaan wij met de deformatie verder, dan komen wij geleidelijk aan het geval, waarbij de buigraaklijnen elkaar in een punt snijden. fig. III, en dit is de overgang tot de krommen der 3^{de} soort fig. IV.

Bij fig. III vinden we, door vergelijking met fig. II, dat vooreerst het vakje met 0 gemerkt, verdwenen is, waardoor het vakje met 4 raaklijnen, begrensd door de kromme en twee buigraaklijnen, zich tot het oneindige gaat uitstrekken.

Bij fig. IV vinden we, daar de buigraaklijnen elkaar nu aan de andere zijde der kromme snijden, altijd eene insnoering in de kromme. Hierdoor ontstaat het rechts geteekende vakje met 6 raaklijnen.

Het aantal vakjes bedraagt 7, de aantallen raaklijnen 2, 4 of 6. Van de derde soort kan men weder in de eerste overgaan door het passeeren van een eigenlijk dubbelpunt. Een en

ander zal nog meer verduidelijkt worden in Hoofdstuk V.

§ 6.

Wij zullen dit hoofdstuk niet eindigen, alvorens een kort overzicht te hebben gegeven van de wijze, waarop de teekeningen verkregen zijn. Alleen voor de eerste figuur maakten wij gebruik van de algemeene vergelijking der kubische parabolen in den gewonen vorm

$$y^2 = A x^3 + B x^2 + C x + D.$$

Zijn de wortels van de vergelijking $A x^3 + B x^2 + C x + D = 0$ alle bestaanbaar, dan treedt de even trek te voorschijn.

Noemen wij de wortels a , b en c , waarbij $a < b < c$, dan kunnen we de vergelijking schrijven:

$$y^2 = A (x-a) (x-b) (x-c).$$

Willen wij nu den even trek laten inkrimpen, dan behoeven wij slechts a tot b te laten naderen, terwijl voor $a = b$ het geïsoleerde punt te voorschijn komt.

Gaan wij met de deformatie verder om tot de krommen der derde soort te geraken dan zijn het de buigraaklijnen, die een groote rol spelen. Vandaar, dat wij hiervoor de vergelijking anders schrijven, en wel zoo, dat de richtingscoëfficiënten der buigraaklijnen, en de coördinaten der buigpunten als parameters optreden

Dit geschiedt langs den volgende weg. Men heeft :

$$y^2 = A x^3 + B x^2 + C x + D$$

$$2 y \frac{dy}{dx} = 3 A x^2 + 2 B x + C.$$

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 3 A x + B$$

$$\text{In het buigpunt is } \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Stellen wij dus de coördinaten van het buigpunt (o. β), d w. z. trekken wij van de Y as door de buigpunten, en noemen wij de richtingscoëfficient der buigraaklijn daar ter plaatse α , dan krijgen wij de volgende condities

$$\beta^2 = D$$

$$2 \alpha \beta = C$$

$$\alpha^2 = B$$

De vergelijking luidt dan

$$y^2 = A x^3 + \alpha^2 x^2 + 2 \beta \alpha x + \beta^2.$$

Door eenvoudige redeneering konden wij vooraf inzien, dat zij dezen vorm moest aannemen. Schrijven wij haar tot dit doel onder de gedaante

$$(y - \alpha x - \beta)(y + \alpha x + \beta) = A x^3$$

dan zegt zij, dat de snijpunten der kromme met de lijnen $y - \alpha x - \beta = 0$ en $y + \alpha x + \beta = 0$ drie gelijke wortels $x = 0$ vertoonen.

Met deze vergelijking kunnen we gemakkelijk de buigpunten naar willekeur plaatsen, en buigraaklijnen eenen willekeurigen hoek laten insluiten.

HOOFDSTUK III.

Gedaanten der krommen derde klasse zonder dubbelraaklijn of buigpunt.

§ 1.

In hoofdstuk I merkten wij op, dat de klassificatie van kromme lijnen dient beheerscht te worden door projectieve verwantschap. Die krommen zullen tot één groep gebracht moeten worden, die door projectieve verwantschap uit elkaar kunnen worden verkregen.

Hier is het de plaats, te wijzen op eenige stellingen der projectivische meetkunde, die voor ons doel van belang zijn.

§ 2.

Allereerst de stelling: de perspectief van de perspectief is weder een perspectief der oorspronkelijke figuur. (Zie hoofdstuk I laatste alinea).

Met behulp van deze stelling zal het mogelijk zijn vrij aanzienlijke bekortingen aan te brengen in onze beschouwing, en vooral, wanneer wij deze in verband brengen met de volgende:

De poolfiguren van eene willekeurige kromme ten opzichte van verschillende kegelsneden zijn elkaars perspectieven.

Het bewijs van deze merkwaardige eigenschap vereischt de kennis van een paar stellingen der projectivische meetkunde:

Allereerst de fundamenteele metrische betrekking, dat bij projectie de anharmonische verhouding dezelfde blijft.

Evenzeer van fundamenteelen aard is de stelling, dat de anharmonische verhouding van een puntenrij dezelfde is, als van den overeenkomstigen stralenbundel in de poolfiguur. (Zie FERRERS vertaald door MATTHES Nieuwere meetkunde pag. 103).

De volgende stelling, die wij noodig hebben is, dat men door perspectief altijd vier willekeurige punten eener figuur kan doen samenvallen met vier willekeurige punten eener andere figuur.

Laat $A B C$ en D vier punten der eene figuur zijn $A' B' C' D'$ die der andere, dan kan men de perspectief van beide vervaardigen zoodat desverwante punten beider perspectieven in $A'' B'' C'' D''$ vallen.

Beschouwen we nu eene willekeurige kromme en trekken we daaraan vier raaklijnen $a b c$ en d en eene willekeurige lijn p .

Teekenen we vervolgens de poolfiguren dezer kromme ten opzichte van twee willekeurige kegelsneden. De raaklijnen vertoonen zich in de pool-

figuren als punten, die wij voor de eene figuur door $A B C$ en D in de andere door $A' B' C'$ en D' voorstellen. De lijn p komt als polen P en p voor den dag.

De vier raaklijnen p , b , c , en d , snijden de lijn a in vier punten en de anharmonische verhouding dezer puntenrij is dezelfde als die van de stralenbundels $A (P B C D)$ en $A' (P' B' C' D')$.

Nemen we nu de perspectief zoodanig, dat $A B C$ en D samen vallen met $A' B' C' D'$, dan zal de perspectief der lijn $A P$ de lijn $A' P'$ bedekken, omdat in beide bundels de anharmonische verhouding dezelfde is.

De lijn P was geheel willekeurig; hetzelfde zal dus met elke lijn 't geval zijn. Met andere woorden de poolfiguren eener kromme ten opzichte van willekeurige kegelsneden zijn elkaars perspectieven.

§ 3.

Met behulp dezer stelling is het mogelijk, de richtkegelsnede zoo voordeelig mogelijk te kiezen. Duidelijk is het, dat voor de constructie de cirkel de meest gewenschte kromme zal zijn. In het vervolg is dan ook geen sprake meer van richtkegelsnede, daar wij in alle gevallen ons van eenen cirkel hebben bediend.

Resumeeren we nu in 't kort alle hulpstellingen, waarvan wij ter bekorting gebruik maken.

De krommen derde orde zijn alle perspectivisch verwant met de kubische parabolen.

De poolfiguren van eene zelfde kromme ten opzichte van verschillende kegelsneden zijn elkaars perspectieven.

De perspectief van de perspectief is weder een perspectief der oorspronkelijke figuur.

Maken wij dus van iedere soort der kubische parabolen ééne poolfiguur, dan kunnen deze dienst doen om de grondvormen van de krommen der derde klasse voor te stellen, d. w. z. door hunne perspectieven kunnen zij alle mogelijke krommen der derde klasse opleveren.

Wij kunnen dus nu er toe overgaan, de gedaanten der poolkrommen van de kubische parabolen zonder dubbelpunten te beschrijven.

§ 4.

De kubische parabool bevat een even trek.

Kiezen wij het middelpunt van den richtcirkel binnen den even trek en nemen wij den straal van den cirkel zoodanig, dat deze den even trek omsluit, dan zal de poolfiguur uit twee krommen bestaan, fig. I.

1°. een even trek, die den cirkel geheel omgeeft.

2°. eene gesloten figuur met drie keerpunten geheel binnen dezen even trek.

De buigpunten der kubische parabool worden keerpunten, wier raaklijnen door één punt gaan en de oneindige takken der parabool loopen in de poolfiguur van de keerpunten naar het middelpunt van den cirkel, omdat de lijn in 't oneindige

buigraaklijn der kromme is, en de pool hiervan in 't middelpunt valt.

Laten we het ovaal samentrekken. dan zal de even trek der poolfiguur zich vergrooten, de afbeelding van den oneven trek blijft vrij wel dezelfde.

Een inzicht in de perspectieven dezer krommen 1^o soort van de derde klasse krijgen wij, door het middelpunt des richtcirkels in een ander vakje te plaatsen.

Het aantal oneindige takken der poolfiguur wordt aangewezen door het aantal raaklijnen van het vakje, waarin zich het middelpunt bevindt. Dit getal kan dus nul, twee, vier, of zes bedragen en komt overeen met het aantal snijpunten, waarin de grondvorm door verschillende rechten gesneden worden kan.

§ 5.

Laten wij den even trek der kubische parabool inkrimpen tot een geïsoleerd punt, en laten we dit door verdere wijziging verdwijnen, dan bereiken wij het hoofdgeval II.

Aantal vakjes zeven. Aantallen raaklijnen 1, 2, 4.

Wederom kunnen wij den richtcirkel zoo kiezen, dat er slechts eindige takken in de poolfiguur komen. Plaatsen wij daarom den richtcirkel op de X as in het vakje met 0 raaklijnen, dan is de figuur volgens de afbeelding II'.

De buigpunten vertoonen zich als keerpunten.

De oneindige takken der kubische parabool

komen voor den dag als de krommen van de keerpunten tot het middelpunt van den richtcirkel. Immers nog altijd is de lijn in het oneindige buigraaklijn der kromme. In het middelpunt is dus eveneens een keerpunt.

In verband met het volgende, waar altijd oneindige takken in de poolfiguren zullen optreden, achten wij het wenschelijk, ook van deze krommen eene afbeelding te vervaardigen met oneindige takken. Zie fig. II.

Plaatsen wij hierom het middelpunt van den richtcirkel weder op de X as in het eenige vakje met 2 raaklijnen, dat in het overgangsgeval en de gevallen der derde soort blijft optreden.

Het stuk tusschen de buigpunten der kub. parabool vertoont zich als de eindige boog tusschen de keerpunten, vanwaar de oneindige takken zich uitstrekken. Van uit het middelpunt van den richtcirkel gaan eveneens oneindige takken, die de afbeelding zijn van de oneindige takken der kubische parabool tot aan de punten waar deze door de raaklijnen uit het middelpunt geraakt wordt. Natuurlijk hebben de oneindige takken twee aan twee dezelfde asymptoten.

Het is duidelijk, dat de verbindingslijn der keerpunten de kromme niet mag snijden. Ware dit toch het geval, dan zou men geene enkele rechte lijn kunnen krijgen, die de kromme niet sneed. Nooit zou men dus eenige lijn naar het oneindige

kunnen brengen, zonder op oneindige takken te stuiten en dan ware dus eene eindige afbeelding onmogelijk.

§ 6.

Was bij figuur II de hoek tusschen de buigraaklijnen scherp, onze vergelijking

$$y^2 = A x^3 + \alpha^2 x^2 + 2\beta x + \beta^2$$

stelt ons in staat door $\alpha=0$ te nemen het overgangsgeval te construeeren, en door α negatief te nemen over te gaan in het gebied van de krommen der 3^{de} soort. Zie fig. III.

Aantal vakjes 7. Aantallen raaklijnen 2, 4 of 6.

De vergelijking met fig. II leert, dat het vakje 0 verdwenen is, doch dat het vakje 2, dat in figuur II, door de lijn in het oneindige begrensd werd, in fig. III tot een eindig stukje is ingekrompen.

In dit vakje plaatsen wij den richtcirkel, ten einde in de poolfiguur slechts twee oneindige takken te bekomen.

Het gedeelte tusschen de buigpunten beeldt zich weder als een eindig stuk tusschen de keerpunten af, van waar takken zich naar het oneindige uitstrekken.

Hier zal de rechte verbindingslijn der keerpunten de andere takken van de kromme wel snijden, want nu is er geene enkele lijn mogelijk, die de kromme niet snijdt, en dus eindige afbeelding is evenmin mogelijk.

§ 7.

Het overgangsgeval, waarbij de buigraaklijnen elkaar in een punt snijden, zal nu van zelf duidelijk zijn geworden. Zie fig. IV.

In de poolfiguur moeten nu de drie keerpunten in eene rechte liggen. Zie fig. IV'.

Gingen wij van dit geval uit, en hechtten wij eene kleine waarde aan de richtings-coëfficiënten der buigraaklijnen in den eenen of den anderen zin, dan zouden wij in 't eerste geval het gebied betreden van de krommen der tweede soort of in 't tweede geval het gebied van de krommen der derde soort.

Als resultaat van ons onderzoek hebben we dus gekregen:

Drie algemeene krommen van de derde klasse met één overgangsgeval.

Eene daarmee overeenkomstige indeeling van de krommen der 3^{de} orde werd trouwens door CAYLEY reeds ondekt.

In de Transactions of the Cambridge Philosoph: Soc. 1864 vinden we drie belangrijke opstellen over de krommen der derden graad van CAYLEY. Het eerste deel is voor ons niet van belang; het tweede handelt over de indeelingen der derde graadskrommen volgens NEWTON en PLÜCKER; het laatste stuk is eene verhandeling over „Cubic cones.”

In dit stuk vinden wij ons criterium betreffende

de classificatie terug, zij het ook op eenigszins andere wijze. CAYLEY brengt die krommen der derde orde tot *één* groep, die uit één zelfde soort kegel kunnen gesneden worden, en die dus projectivisch verwant zijn. Hij komt dus tot vijf kegels van de derde orde, te weten: de complex acnodal, simplex, crunodal en cuspidal cone. De complex en de simplex kegels stellen de algemeene gevallen voor, de andere zijn respectievelijk op krommen met geïsoleerd punt, met eigenlijk dubbelpunt en keerpunt beschreven.

Verder komt hij ook tot de verdeeling der simplex kegels in drie soorten: „the trilateral, neutral en quadrilateral cones.”

Deze onderverdeeling was reeds door MURDOCH gegeven, doch onder andere benamingen. Hij grondvest deze indeeling op het gebied waarin de kegel gelegen is.

Hiertoe neemt hij het vlak waarin de drie buigribben gelegen zijn als equator vlak aan en ziet nu in welke deelen de ruimte door dit equator vlak en de buigraakvlakken wordt verdeeld. Hij komt zoo tot 8 trilaterale deelen en 6 quadrilaterale gedeelten.

Het enkelvoudige blad van den complex kegel ligt in 6 trilaterale deelen, het dubbele blad bevindt zich geheel in de twee andere drie vlakke hoeken. Bij doorgang door het geïsoleerde punt bevindt zich het geheele blad der complex kegel nog in

de trilaterale regio. Bij het overgangsgeval, waarbij de raakvlakken in de buigribben elkaar volgens eene rechte snijden, verdwijnen 2 drievlakkig begrensde deelen. Er blijven 12 drievlakkige deelen over, die twee aan twee bij elkaar behooren. De deformatie verder voortzettende komen we aan het quadrilaterale geval, waarbij het geheele blad in het viervoudig begrensde regioen ligt. Verder gaat hij langs analytischen weg de vergelijkingen der kegels afleiden, en geeft hij eenige eigenschappen er van aan.



HOOFDSTUK IV.

Graphisch overzicht van de algemeene krommen der derde orde en derde klasse in drie soorten.

§ 1.

In hoofdstuk I zagen wij, dat de vergelijking der kubische parabolen kan gebracht worden tot den vorm:

$$y^2 = Ax^3 + (\alpha x + \beta)^2$$

Evenredige verandering van y levert figuren, die elkanders perspectieven zijn. Daar wij nu projectivisch verwante figuren tot één groep brengen, kunnen wij zonder bezwaar onder deze de eenvoudigste kiezen.

Derhalve nemen wij $A = 1$ en beschouwen het stel krommen:

$$y^2 = x^3 + (\alpha x + \beta)^2$$

Mocht A negatief zijn, dan hadden wij de richting der X as kunnen omkeeren om ook aan dit bezwaar tegemoet te komen.

Wij kunnen ons ook tot positieve waarden van β beperken, mits we voor α zoowel positieve als negatieve waarden beschouwen.

Nemen we nu een coördinatenstelsel met α en β als assen.

Elke waarde van α en β moet hier mogelijk worden geacht, doch vooreerst beperken wij ons nu tot het 1^o. quadrant.

Elk punt van het vlak zal nu eene bepaalde kubische parabool vertegenwoordigen, gekenschetst door de bepaalde waarden van α en β met al hare perspectieven. Eveneens dus vertoont elk punt van het vlak eene bepaalde poolfiguur dus eene bepaalde kromme van de derde klasse, en evenzeer al hare perspectieven.

Door verplaatsing van het punt P verandert de kubische parabool met hare perspectieven en hare poolfiguren van gedaante, slechts dan zal zij van soort veranderen, wanneer P een der kromme lijnen passeert, die bepaald worden door de betrekkingen tusschen α en β , welke overgangsgevallen beheerschen.

Zulke overgangsgevallen zijn er *drie*.

- 1^o. Twee buigraaklijnen loopen in de kubische parabool evenwijdig, de drie buigraaklijnen der perspectieven snijden elkaar in een punt. Dit eischt $\alpha = 0$.
- 2^o. Er bestaat een dubbelpunt met bestaanbare raaklijnen. Dewijl daarin de buigpunten samenvallen eischt dit $\beta = 0$, zooals ook uit de vergelijking blijkt.
- 3^o. Er is een geïsoleerd punt aanwezig.

De betrekking tusschen α en β voor dit geval vinden wij uit de conditie, dat tegelijk aan:

$$x^3 + (\alpha x + \beta)^2 = 0 \quad (1) \text{ en}$$

$$3x^2 + 2\alpha(\alpha x + \beta) = 0 \quad (2) \text{ moet worden voldaan.}$$

Om hieruit x te elimineeren leiden wij af uit (2)

$$\alpha x + \beta = -\frac{3x^2}{2\alpha}$$

Brengen we dit in verband met (1) dan komt

$$x = -\frac{4}{9}\alpha^2$$

of substitueerende in (2) en oplossende

$$\beta = \frac{4}{27}\alpha^3$$

Wij brengen nu de gevonden overgangsgevallen in teekening. Zie fig. (1)

$\alpha = 0$ stelt natuurlijk de Y-as voor

$\beta = 0$ vormt de X-as.

$\beta = \frac{4}{27}\alpha^3$ Deze lijn is van den vorm zooals in de „enumeratio” fig. 77 geteekend is. Het is eene centraal kromme van de derde orde, zoodat het beloop der grenslijn wordt als de figuur aangeeft.

Het geheele gebied waarin β positief is wordt nu door deze grenslijnen in drie vakken verdeeld, die wij met I, II en III hebben aangeduid. Nemen we nu een punt in een willekeurig vakje. De kromme lijn der 3^{de} orde, die daarbij behoort, representeert de geheele soort krommen aangegeven door de punten van hetzelfde vakje, want daarbinnen wordt nooit eene grenslijn gepasseerd.

Eveneens is door alle punten van een vakje slechts ééne soort poolfiguren dus slechts ééne soort kromme der derde klasse bepaald. Wenschelijk is het ook het gedeelte van het vlak, behorende bij negatieve waarden van β in onze beschouwing op te nemen.

Denken wij daartoe aan de vergelijking:

$$y^2 = x^3 + (\alpha x + \beta)^2$$

Hieruit lezen wij, dat als α en β tegelijk veranderd worden in $-\alpha$ en $-\beta$ de krommen identiek worden met die voor α en β positief. Nemen wij α en β positief, dan krijgen we identiek dezelfde krommen als, wanneer α positief en β negatief genomen wordt.

Hieruit volgt dan, dat in het vakje aangeduid door I' geheel dezelfde soort krommen worden voorgesteld als in I.

Eveneens in II' dezelfde als in II en in

„ „ III' dezelfde als in III.

Gemakkelijk is het in te zien, dat het vakje III krommen van de derde soort zal voorstellen. Immers daar is de α negatief, zoodat de buigraaklijnen stompe hoeken met de positieve X as maken. Evenzoo in III'. Passeeren we nu de grenslijn, de lijn der krommen met drie convergeerende buigraaklijnen, dan komen we in de vakjes II of II' al naar mate we β positief of negatief nemen.

Wij geraken aldus in het gebied van de krommen der 2^{de} soort. Overschrijden we nu nog de

lijn der krommen met geïsoleerde punten, dan bereiken wij de regio der kromme lijnen der eerste soort.

Zetten we onze beweging nog voort, dan komen wij aan de lijn der krommen met bestaanbare dubbelpunten, en als deze gepasseerd is, hebben we den overgang bewerkt van eene kromme der 1^o. soort in die van de derde soort.

Wij kunnen nu de volgende continue-overgangen bewerkstelligen:

- a. Van krommen der 1^o soort tot die der tweede.
- b. Van krommen der 1^o soort tot die der derde.
- c. Van krommen der 2^o soort tot die der derde.

Eveneens kunnen deze overgangen in omgekeerden zin plaats vinden. De oorsprong biedt eene groote merkwaardigheid aan:

Hierbij is $\alpha = 0$ en $\beta = 0$; wij zijn dus in het geval der semicubische parabolen, welke wij afzonderlijk zullen bespreken.



HOOFDSTUK V.

Gedaanten der kubische parabolen met dubbelpunten en hunner poolkrommen.

§ 1.

Zooals uit de vorige hoofdstukken ten duide-lijkst te zien is, zijn de kubische parabolen met dubbelpunten overgangsgevallen der algemeene.

Evenzeer zullen dus de krommen der derde klasse met dubbele raaklijnen, hetzij deze reëel, hetzij deze imaginair zijn, beschouwd moeten worden als overgangsgevallen.

Volgens het zooeven gegeven graphisch overzicht vinden zij hunne plaats op de lijnen $\beta = 0$, de lijn der krommen met eigenlijke dubbelpunten en $\beta = \frac{4}{27} x^3$ de lijn der krommen met geïsoleerde punten, terwijl bovendien op den oorsprong gewezen werd, als zeer merkwaardig punt, dat de voorstelling was der semikubische parabolen, die een keerpunt vertoonen.

Nu is het bij de krommen van den 3^{den} graad vrij gemakkelijk in te zien, wat er zal gebeuren

in de buurt van de grenzen. Voor de poolfiguren is dit niet zoo eenvoudig.

Om deze reden geven wij nog eenige figuren, waardoor de overgang aanschouwelijk gemaakt wordt.

Bij den overgang van de krommen der 1^o soort tot die der tweede is het niet wenschelijk voor de teekening, het centrum van den richtcirkel binnen den even trek te houden. Immers deze trek krimpt voortdurend in en de poolfiguur er van zou eene gesloten kromme blijven, maar zeer groote afmetingen verkrijgen.

Wij zullen aan het centrum buiten den even-trek op de X as kiezen, en wel op eenigen afstand van den even trek.

De poollijnen der raakpunten worden asymptoten aan de poolkromme van den even trek. Deze vertoont zich in eenen vorm, dien wij hyperbolisch zouden kunnen noemen. Zie fig. V'.

Laten we nu den even trek meer en meer in grootte afnemen, dan worden beide oneindige takken meer en meer recht en naderen elkaar.

Op het grensgeval vertoont zich de geïsoleerde dubbele raaklijn. Zie fig. VII'. Voorbij het grensgeval is deze verdwenen.

Wat den overgang van geval twee tot geval III betreft, hierover is reeds gesproken, omdat bij deze grens geene dubbelpunten ter sprake kwamen.

De overgang van III tot I hebben wij nog niet afgebeeld. Hiervoor dient figuur VI. De buigraaklijnen maken stompe hoeken met de X as, en wel hoeken van iets meer dan 90° .

Het spreekt dus van zelf, dat de insnoering, die bij al de krommen dezer soort voorkomt, in deze teekening sterk optreedt.

De raaklijnen van uit het centrum des richtcirkels, dat in het vakje met twee raaklijnen gelegen is, maken kleine hoeken met elkaar zoodat de asymptoten der poolfiguur hoeken met de X as maken, die weinig van 90° verschillen. Zie fig. VI'.

De twee keerpunten, die van de eindige buigpunten afkomstig zijn, naderen tot dicht bij de lijnen, die van het middelpunt naar het oneindige loopen.

Bij den grens, als het dubbelpunt bereikt wordt vallen de asymptoten samen tot de reële dubbelraaklijn en de keerpunten bereiken de andere takken. Zie fig. VIII'.

Is de grens overschreden, (zie fig. I') dan is deze raaklijn verdwenen, wat zijne oneindige stukken betreft. Het deel tusschen de keerpunten heeft zich gesplitst in een deel, dat tot de poolfiguur van den even trek gaat behooren, en een ander deel, dat zich aan het hypocycloidale gedeelte der poolfiguur sluit.

§ 2.

Thans nog een oogenblik terugkeerende tot de

overgangsgevallen zelve, kunnen wij opmerken dat bij de kubische parabolen met geïsoleerd punt de gedaante geheel dezelfde is als die der algemeene kubische parabolen der tweede soort. Slechts het geïsoleerde punt treedt hier op.

De poolfiguren zijn dus ook van dezelfde gedaante als die der algemeene kubische parabolen van de tweede soort. In plaats van het dubbelpunt komt in de poolkrommen eene geïsoleerde dubbel raaklijn (zie fig. VII ¹).

Bij de kubische parabolen met reëel dubbelpunt is de gedaante vrij wat meer gewijzigd. Door het vervallen der buigraaklijnen is het aantal vakjes afgenomen. Nu zijn slechts de kromme en de lijn in het oneindige als grenzen der vakjes te beschouwen. (Zie fig. VIII).

In de poolfiguur uit zich dit door het verdwijnen van de keerpunten. Het dubbelpunt beeldt zich hier af als reële dubbelraaklijn. (Zie fig. VIII ¹).

§ 3.

De semicubische parabolen zijn onder de overgangsgevallen der kubische parabolen de meest bijzondere. Zij bezitten een keerpunt en een buigpunt in het oneindige.

Uit alle gevallen der kubische parabolen kan men ze ontstaan denken. Immers van den oorsprong uit kan men volgens fig. 1 in elk willekeurig gebied der kromme geraken.

De vergelijking: $y^2 = A(x-a)(x-b)(x-c)$ leert

wel het gemakkelijkst zien, op welke wijze de overgang kan geschieden uit de krommen met dubbelpunt.

Immers wij kunnen eerst a en b gelijk maken en daarna het geïsoleerde punt laten opschuiven tot den top van den oneven trek, of wij kunnen b en c gelijk maken en de lis laten toetrekken. Uit alle soorten der poolfiguren, die wij geconstrueerd hebben, moeten dus de poolkrommen der semicubische parabolen af te leiden zijn.

Nu heeft de semicubische parabool de eigenaardigheid, zooals wij later zullen aantonen, dat hare poolfiguren overeenstemmen met hare perspectieven. Het zal er dus op aan komen, aan te toonen, dat de vormen der verschillende soorten der derde klasse krommen geleidelijk in de semicubische parabool of hare perspectieven kunnen overgaan. Eigenlijk zou het wenschelijk zijn daartoe niet de semicubische parabool zelve, maar een harer perspectieven met het buigpunt in 't eindige te kiezen. Immers juist in de nabijheid van dit buigpunt geschieden de gewichtigste vervormingen. Toch zullen wij er ons, ten deele uit gebrek aan tijd, toe bepalen, hoe eenige van de verschillende soorten der derde klasse krommen geleidelijk in de semicubische parabool kunnen overgaan.

Letten wij op de aantallen raaklijnen in de twee vakjes, die bij deze krommen optreden, dan is het duidelijk, dat deze 1 en 3 bedragen.

Er komen dus in elke poolfiguur oneindige takken.

Denken we nu aan de vergelijking:

$$y^2 = A(x-a)(x-c)^2$$

die de kubische parabolen met reëel dubbelpunt voorstelt, en kiezen wij om de ideeën te fixeeren het middelpunt binnen den even trek en den straal zoodanig, dat de omtrek door het dubbelpunt gaat. De poolfiguur is zooals in fig. VIII' is voorgesteld.

Laat nu de richtcirkel onveranderd blijven in grootte en stand, doch laat de wortel a der vergelijking aangroeien. Wanneer de lis door het middelpunt van den richtcirkel gaat, wordt eindige afbeelding onmogelijk. De dubbele raaklijn blijft bestaan doch van uit de raakpunten gaan nu een paar parabolische takken, die in 't oneindige evenwijdig met de as van symmetrie loopen. Laten we verder den wortel aangroeien, dan ontstaan hyperbolische takken met twee asymptoten die aanvankelijk scherpe hoeken maken, doch bij vergrooting van a meer en meer uit elkaar wijken. Wanneer a gelijk is aan c , vallen de asymptoten weder samen en zij staan loodrecht op de X as , terwijl zij samenvallen met den dubbelraaklijn. Brengen wij deze daarna door eene projectieve vervorming naar het oneindige, dan ontstaat de Semicubische parabool.

Om het grensgeval tusschen de algemeene ku-

bische parabolen van de 2de soort tot de semicubische parabolen te verkrijgen, gaan wij in de vergelijking:

$$y^2 = A x^3 + (\alpha x + \beta)^2$$

α zeer klein positief en β zeer klein positief nemen. Nemen we nu als grondslag voor de vervaardiging der poolfiguur fig. II, en brengen wij verkleining van α en β aan, terwijl wij den richtcirkel dezelfde grootte en stand laten bewaren, en het middelpunt plaatsen in het vakje met twee raaklijnen, begrensd door de buigraaklijnen voorbij het buigpunt en de kromme tusschen de buigpunten.

Laten we nu β vooreerst afnemen, dan zal de afstand tusschen de keerpunten der poolfiguur grooter worden. Naarmate α kleiner wordt zal de hoek tusschen de asymptoten in de poolkromme grooter worden. Is eindelijk $\beta = 0$ dan liggen de keerpunten op oneindigen afstand en wanneer ook nog $\alpha = 0$ dan zijn de asymptoten samengevallen tot de lijn in 't oneindige. Het geheele eindige deel dus van de derde graads kromme tusschen de buigpunten is bij de poolfiguur naar het oneindige gegaan, en we houden slechts over de enkele kromme, uitgaande van het middelpunt en asymptotisch tot de poollijn van 't keerpunt der oorspronkelijke kromme naderende.

Eveneens kunnen wij nog den overgang van

de algemeene kubische parabolen der derde soort tot semicubische beschrijven en uit hunne poolfiguren den overgang tot de semicubische parabool aanschouwelijk maken. Zie fig. VI en VI'

We nemen weder even als zooeven den richtcirkel onveranderlijk, doch laten het eindige deel der kromme tusschen de buigpunten inkrimpen door gelijktijdige verkleining van α en β .

Het zal duidelijk zijn, dat in de poolfiguur de voorstelling van het eindige gedeelte tusschen de buigpunten der kubische parabool reeds groote afmetingen gaat verkrijgen. Bedenken we nu dat al deze parabolen eene insnoering bevatten, en dat de minimaalpuncten kleinere y moeten vertoonen dan β , dan is het duidelijk dat de asymptoten der poolfiguur langzamerhand tot samenvalling komen, en bij de grens zijn wederom de keerpunten naar het oneindige gegaan en houden wij den semicubischen parabool over met het keerpunt in het middelpunt van den richtcirkel.

§ 4.

Wij zullen thans langs analytischen weg bewijzen, dat de semicubische parabolen en dus ook hunne perspectieven zelfwederkeerige krommen zijn. Dit beteekent niets anders, dan dat hunne poolfiguren wederom cubische parabolen zijn van denzelfden aard. Zie VAN DEN BERG, Nieuw Archief voor Wiskunde 1892.

Noodzakelijk moeten dergelijke krommen even-

veel buig- als keerpunten, evenveel dubbelpunten als dubbelraaklijnen bevatten.

De Plückersche getallen moeten dus voor beide krommen dezelfde zijn. Onder de derde-graads-krommen kan dus alleen de semicubische parabool zelfwederkeurig zijn. Dat zij het is, ook zelfs in den engeren zin van het woord, waarbij de eisch gesteld wordt, dat kromme en poolkromme geheel samenvallen, zullen wij op het voetspoor van VAN DEN BERG als volgt aantonen.

Ook hier maken wij wegens den projectievischen aard der betrekking weder gebruik van eenen richtcirkel.

Zij $x^2 + y^2 = a^2$ de vergelijking van dien cirkel.

Zij $f(x, y) = 0$ de vergelijking der kromme terwijl de coördinaten der poolkromme door x' en y' worden aangeduid.

Twee reciproke punten moeten dan voldoen aan:

$$xx' + yy' = a^2 \quad xdx' + ydy' = 0 \quad x'dx + y'dy = 0.$$

Uit deze betrekkingen volgt:

$$x' = \frac{a^2 \frac{df}{dx}}{x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy}} \quad y' = \frac{a^2 \frac{df}{dy}}{x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy}} \quad (1)$$

Voor zelfwederkeurige krommen is het nu noodig, dat $x'y'$ voldoet aan $f(x, y) = 0$ dus de substitutie dezer waarden (1) in $f(x, y)$ moet de oorspronkelijke kromme terug leveren.

Wij kiezen met VAN DEN BERG de algemeene parabolische kromme :

$$y^m = Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Kx + L.$$

Passen wij op deze vergelijking de methode toe, dan blijkt, dat slechts dan zelf wederkeerige krommen er door worden voorgesteld, wanneer alle coëfficiënten behalve A nul zijn. Willen wij verder de voorwaarde nagaan, dan blijkt bij de substitutie, dat

$$A = \frac{(-m)^m (n-m)^{n-m}}{n^n a^2 (n,m)}$$

moet zijn.

Kiezen we $m = 3$ $n = 2$ dan wordt de vergelijking der zelfwederkeerige kromme $y^3 = \frac{3}{2} a x^2 \sqrt{-3}$ verkregen, welke niets anders is dan de semicubische parabool.



HOOFDSTUK VI.

Degeneraties der krommen van den 3^{den} graad en van hunne poolfiguren.

§ 1.

De degeneraties nemen in het stelsel der krommen van den derden graad of van de derde klasse eene geheel bijzondere plaats in.

Zij zijn namelijk asymptotisch projectief met de krommen met dubbelpunten of hunne poolkrommen.

De bedoeling hiervan en de beteekenis van de uitdrukking „asymptotisch projectief” zal het gemakkelijkst uit een voorbeeld blijken.

Nemen wij eene kubische parabool met even trek (K). Het staat ons in de macht door wijziging der coëfficiënten den even trek te doen inkrimpen. Hiervoor toch was slechts noodig in de vergelijking $y^2 = A (x-a) (x-b) (x-c)$ de wortels a en b tot elkaar te doen naderen, zonder c te veranderen.

Gaan wij nu van uit een centrum, binnen den even trek gelegen, gelijkvormig vergrooten, dan

kunnen wij eene kromme (K') krijgen, die gelijkvormig en dus ook projectief is met (K).

Wij laten nu den even trek kleiner en kleiner worden, maar nemen te gelijker tijd de gelijkvormigheids-verhouding grooter en grooter, dan zal het ons kunnen gelukken, den even trek in (K') eindige afmetingen te doen behouden.

Gaan wij nu tot de limiet over, dan wordt (K) de kromme met geïsoleerd punt, terwijl (K') eene ellips wordt, waaraan de lijn in 't oneindige is toegevoegd.

Meer algemeen kan men de punten A, B, D en het punt in het oneindige loodrecht op AB der figuur (K) respectievelijk projectief doen overeenkomen met de punten $A' B' D'$ en het punt in het oneindige loodrecht $A' B'$ van K' . (Zie fig. 2.)

Laat verder DD_i loodrecht staan op AB , en stellen wij, dat deze lijn door D_i verdeeld wordt zoodanig, dat $AD_i : BD_i = -k$.

Men kan nu den even trek der figuur K doen inkrimpen terwijl wij den even trek van de figuur K' onveranderd laten, wat de punten $A' B'$ en D' en het punt in 't oneindige loodrecht op $A' B'$ betreft.

Bij de limiet zullen $A B$ en D samenvallen, terwijl de figuur K' een ellips zal vertoonen, waarin de even trek is overgegaan. De oneven trek is veranderd in eene rechte loodrecht op $A' B'$.

Dat dit laatste het geval moet zijn, bewijzen wij als volgt: Zie fig. (2.)

Trek in de figuur zonder accenten de lijn PQ . Deze vertoont zich in de geaccentueerde figuur als eene lijn $P'Q'$ loodrecht op $A'B'$. Deze figuren zijn projectivisch verwant, dus de anharmonische verhouding der punten A en B ten opzichte van D en Q zal, zie fig. (2), onveranderd zijn gebleven. Derhalve:

$$\frac{A'Q'}{B'Q'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AQ}{BQ} : \frac{AD}{BD}$$

Na de transformatie vallen A en B samen, derhalve bij de limiet is:

$$\frac{AQ}{BQ} = 1. \text{ Hieruit volgt } \frac{A'Q'}{B'Q'} : \frac{A'D'}{B'D'} = 1 : \frac{AD}{BD} = -\frac{1}{k}$$

Wij hebben echter gezorgd, dat A, B, D , en het punt in het oneindige samenvielen met $A'B'D'$ en het punt in 't oneindige loodrecht op $A'B'$.

De verhouding $\frac{A'D'}{B'D'}$ is constant, daar deze punten op hunne plaats blijven; dus de verhouding $\frac{A'Q'}{B'Q'}$ constant, en dus onafhankelijk van de ligging van P . Dit eischt, dat alle punten P' op eene rechte liggen, die loodrecht op AB staat. En dewijl $\frac{A'Q'}{B'Q'}$ pos. is valt die lijn buiten $A'B'$.

Het is vrij gemakkelijk in te zien, dat, indien PQ eindig blijft, in de asymptotisch verwante figuur dit punt op oneindigen afstand zou komen, immers $\frac{PQ}{DD_1} = \frac{P'Q'}{D'D_1}$ en DD_1 wordt bij de limiet nul.

Nemen wij echter P zoo, dat de verhouding

$\frac{PQ}{DD_1}$ eindig blijft, dan zal het punt P' niet naar het oneindige gaan. Hieruit blijkt dus, dat de eindige punten der rechte $P'C'$ afkomstig zijn van punten, die in de oorspronkelijke figuur vlak bij C gelegen waren.

Het is duidelijk, dat bij deze bewerking kegelsneden voor den dag komen, die niet door de bijbehorende rechte gesneden worden.

Het punt D , toch moet gekozen worden tusschen A en B , want zonder dit is D , onbestaanbaar.

Bij onze figuur werd eveneens D' , gekozen tusschen A' en B' . Hierdoor werd het elliptisch karakter van den eventrek bepaald. Immers hadden wij D' , buiten de lijn $A'B'$ gekozen, dan zoude een hyperbool zijn opgetreden. Maar tegelijkertijd zou het punt C niet meer buiten $A'B'$ vallen en dus weer zou de rechte $P'C'$ de kegelsnede niet ontmoeten.

Het wezen van het asymptotisch projectief zijn bestaat dus daarin, dat sommige deelen der oorspronkelijke figuur onbepaald inkrimpen, maar tegelijkertijd in de projectieve figuur onbepaald vergroot worden, zoodat zij aldaar eindig blijven.

De nieuwe figuur behoort thuis als limiet geval in de rij der met de oude projectieve vormen; men kan echter van haar uit niet projectief tot de oude terugkeeren; immers gedegenerateerde figuren leveren door projectie slechts andere gedegenerateerde figuren.

Als asymptotisch projectief met de kubische parabolen met geïsoleerd punt zijn te beschouwen alle degeneraties, waarbij de rechte de kegelsnede niet snijdt.

§ 2.

De degeneraties, waarbij de kromme wel door de rechte gesneden wordt, zijn asymptotisch projectief met de kubische parabolen met reëel dubbelpunt. Zie fig. (3).

Om nu deze verwantschap te doen uitkomen laten wij het stuk AB tusschen den even en den oneven trek oneindig inkrampen, en vergrooten uit een gelijkvormigheids centrum tusschen A en B gelegen zoodanig, dat het stuk A'B' eene eindige grootte blijft behouden. De gedegenerende figuur zal dan bestaan uit een hyperbool en de rechte in het oneindige, die elkaar altijd snijden.

Laten wij weder meer algemeen de punten A B D en het punt in het oneindige loodrecht op AB samenvallen in de verwante figuur met A' B' D' en het punt in 't oneindige loodrecht op A'B'.

Zij weer gegeven $\left(\frac{AD_1}{BD_1} = k\right)$ k is nu positief,

daar D₁ niet tusschen A en B gelegen is. Laten wij nu het punt D'₁, aan dezelfde zijde van A'B' liggen als D₁, ten opzichte van AB, dan zal voor eenigpunt Q even als te voren gevonden worden :

$$\frac{AQ}{BQ} : \frac{AD_1}{BD_1} = \frac{A'Q'}{B'Q'} : \frac{A'D'_1}{B'D'_1} \quad \text{Nu is bij de limiet } \frac{AD_1}{BD_1} = 1,$$

dus $\frac{A'Q'}{B'Q'} : \frac{A'D'}{B'D'}$ is positief Q' , zal dus nooit binnen $A' B'$ vallen. Er is altijd snijding. Mocht D' , tusschen A' en B' gelegen zijn geweest, dan zou deze verhouding negatief geworden zijn, maar tegelijk zou er een ellips verschenen zijn, die weder door de rechte, die dan tusschen A' en B' kwam, werd gesneden.

Het verschil met de vorige figuren is hierbij, dat niet de rechte afkomstig is van den oneven trek, doch van het gedeelte van den even trek in de nabijheid van het punt C gelegen.

§ 3.

Ook langs algebraïschen weg kunnen de degeneraties voortgebracht worden.

Wij zullen dit doen, uitgaande van de vergelijking $y^2 = \alpha^3 + (\alpha x + \beta)^2$

Vooreerst zullen wij dan die degeneraties voortbrengen, waarbij de rechte de kegelsnede snijdt.

Beginnen wij hiertoe den oorsprong te verplaatsen naar het snijpunt der buigraaklijnen. Dit doen we, omdat dit punt altijd gelegen is tusschen den even en den oneven trek, en wij van uit zulke punten als centrum vergrooten.

De vergelijking wordt, daar wij slechts behoeven te substitueeren $x' = x - \frac{\beta}{\alpha}$

$$y^2 = \left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + \alpha^2 x^2$$

Wij stellen ons voor, de verwante figuur te verkrijgen door de substitutie.

$$x = k_1 x' \quad y = k_2 y'$$

De nieuwe vergelijking wordt dan:

$$y'^2 = \frac{k_1^3}{k_2^2} x'^3 + \left(\alpha^2 \frac{k_1^2}{k_2^2} - \frac{3\beta k_1^2}{\alpha k_2^2} \right) x'^2 + \frac{3\beta^2 k_1}{\alpha^2 k_2^2} x' - \frac{\beta^3}{\alpha^3 k_2^2}$$

Stellen we nu hierin $k_1 = a k_2$ en $\beta = b k_2^{\frac{2}{3}}$ en laten wij, terwijl a , b en α eindig gehouden worden, k_2 en dus ook k_1 en β tot nul naderen, dan zal de vergelijking bij de limiet naderen tot:

$$y'^2 = a^2 \alpha^2 x'^2 - \frac{b^3}{\alpha^3}$$

Zij stelt klaarblijkelijk degeneratie voor in een hyperbool en de lijn in het oneindige.

Het kan ons echter ook gelukken, de snijpunten op eindigen afstand te brengen.

In dit geval behoeven wij slechts te subsitueeren:

$$x = \frac{K_1 x_1}{x_1 - p} \quad y = \frac{K_2 y_1}{x_1 - p}$$

De nieuwe vergelijking wordt nu:

$$y_1^2 (x_1 - p) = \frac{K_1^3}{K_2^2} x_1^3 + \left(\alpha^2 \frac{K_1^2}{K_2^2} - \frac{3\beta K_1^2}{\alpha K_2^2} \right) x_1^2 (x_1 - p) + \frac{3\beta^2 K_1}{\alpha^2 K_2^2} \alpha (x_1 - p)^2 - \frac{\beta^3}{\alpha^3 K_2^2} (x_1 - p)^2$$

Nemen we dezelfde condities bij de limiet, als in het vorige geval, dan wordt na deeling door $x_1 - p = 0$ de vergelijking gereduceerd tot:

$$y_1^2 = a^2 \alpha^2 x_1^2 - \frac{b^3}{\alpha^3} (x_1 - p)^2$$

Zij stelt derhalve altijd voor eene kegelsnede ellips of hyperbool, die gesneden wordt in reële punten door de lijn $x_1 - p = 0$.

§ 4.

Gaan wij thans algebraïsch het limiet geval beschouwen, het geïsoleerde punt optreedt, en nemen wij weder de vergelijking:

$$y^2 = x^3 + (\alpha x + \beta)^2$$

Zooals wij reeds bij gelegenheid der beschouwing van het graphisch overzicht opmerkten, is de voorwaarde voor een geïsoleerd punt:

$$\beta = \frac{4}{27} \alpha^3$$

Beschouwen wij nu eene kubische parabool, die zeer weinig afwijkt van eene met een geïsoleerd punt, dan zal deze verkregen worden door

$$\text{te stellen: } \beta = \frac{4}{27} \alpha^3 + \xi$$

en voor $\xi = 0$ zullen wij het geval der geïsoleerde punten hebben. Beginnen we dan den oorsprong te verplaatsen naar het geïsoleerde punt. Dit is noodig omdat de oorsprong als gelijkvormigheidscentrum wegens eenvoudigheid zal worden aangenomen, en dit centrum binnen den even trek moet blijven. De coördinaten van het geïsoleerde

$$\begin{array}{l} y = 0 \\ \text{punt zijn: } x = -\frac{4}{9} \alpha^2. \end{array}$$

De nieuwe vergelijking is dan:

$$y^2 = \left(x - \frac{4}{9} \alpha^2\right)^3 + \left(\alpha x - \frac{8}{27} \alpha^3 + \xi\right)^2$$

of uitgewerkt:

$$y^2 = x^3 - \frac{1}{3} \alpha^2 x^2 + 2\alpha \xi x - \frac{16}{27} \alpha^3 \xi + \xi^2$$

Gaan wij nu weder projectief vervormen volgens de betrekkingen:

$$x = k_1 x' \quad y = k_2 y'$$

dan is de vergelijking der projectief verwante kromme:

$$y_1^2 = \frac{k^3}{k_2^2} x_1^3 - \frac{1}{3} \alpha^2 \frac{k_1^2}{k_2^2} x_1^2 + 2 \alpha \xi \frac{k_1}{k_2^2} x_1 - \frac{16}{27} \frac{\alpha^3 \xi}{k_2^2} + \frac{\xi^2}{k_2^2}$$

Verder stellende: $k_1 = a k_2$ en $\xi = b k_2^2$, dan krijgen wij bij de limiet:

$$y_1^2 = -\frac{1}{3} a^2 \alpha^2 x_1^2 - \frac{16}{27} b \alpha^3.$$

Dit is weder de vergelijking van eene bestaansbare of onbestaansbare ellips met de rechte in het oneindige daaraan toegevoegd. Er is klaarblijkelijk geen snijding.

§ 5.

Het blijkt nu uit bovengenoemde redeneering, dat alle degeneraties, waarbij eene kegelsnede en eene rechte, die de kegelsnede snijdt te voorschijn komen, asymptotisch projectief zijn met de kubische parabolen, gegeven door $\beta = 0$, en die, waarbij de rechte niet snijdt, asymptotisch projectief zijn met de kubische parabolen gegeven door $\beta = \frac{4}{27} \alpha^3$.

Wij dienen hier ter plaatse te wijzen op de degeneraties van de krommen der derde klasse, die de poolfiguren zijn der zooeven beschouwde degeneraties.

Degeneraties, waarbij de kegelsneden gesneden

worden, komen in de poolfiguur voor den dag als eene kegelsnede met een enkel punt er binnen.

Aansluitende bij onze opmerking, dat de eindige gedeelten van de rechte lijn, afkomstig van den oneven trek, gevonden worden uit punten onmiddelijk bij C gelegen (fig. 2) kunnen wij de vorming van dit binnen gelegen punt aldus verklaren. Bij de poolfiguur van de kubische parabolen met even trek is wederom een even trek en een hypocycloidaal gedeelte. De keerpunten van dit deel zijn afkomstig van de buigpunten der kubische parabool. Nu wordt door de asymptotisch projectieve verwantschap het punt C op oneindigen afstand gebracht, eveneens gaan de buigpunten verder uiteen, naarmate de gelijkvormigheidsverhouding grooter wordt. De keerpunten der poolfiguur naderen dan meer en meer tot elkaar en indien deze verhouding oneindig groot wordt vallen zij samen in het middelpunt van den richtcirkel. Voor de degeneraties met snijding is dit veel minder gemakkelijk in te zien; gebrek aan tijd noopt ons, hierover het stilzwijgen te bewaren.

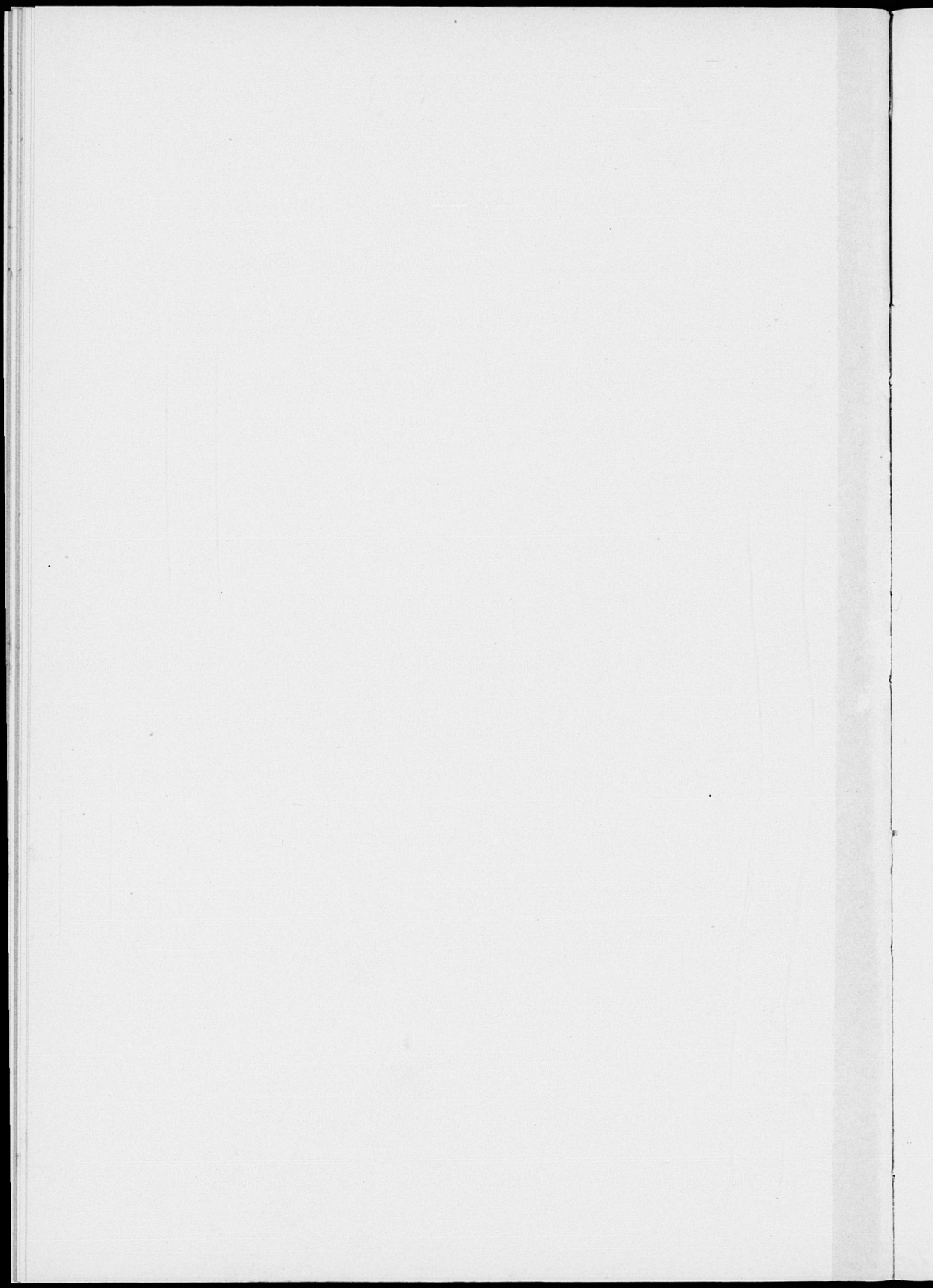
§ 6.

Bijzonder merkwaardig is de denegeratie, waarbij de kegelsnede wordt geraakt door de rechte lijn. Deze moet overeenstemmen met het punt o o der figuur ⁽¹⁾ en zal dus asymptotisch projectief zijn met de semicubische parabolen.

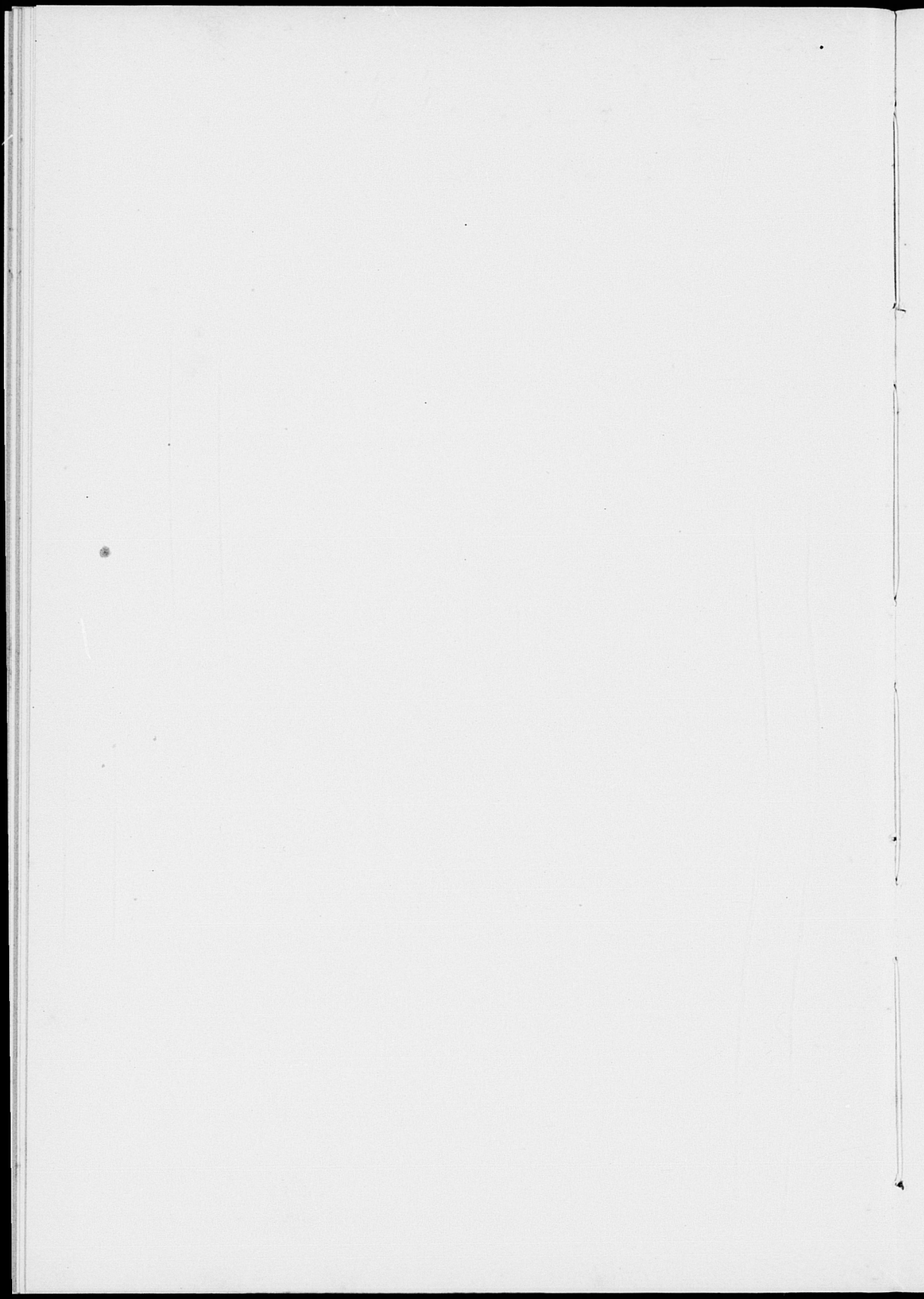
Uit de figuur blijkt dit, als wij in het oog houden, dat van uit de semicubische parabool door geringe wijziging alle algemeene en bijzondere gevallen der kubische parabolen worden verkregen. Ook hier is dit het geval, wij kunnen de raaklijn laten verschuiven en dan ontstaan de zooeven genoemde degeneraties; derhalve moet het geval overeenkomen met het punt waar de rechte $\beta = 0$ en de kromme $\beta = \frac{4}{27} x^3$ samenkomen.

De poolfiguur degeneert in dit geval tot eene kegelsnede met het punt, dat de pool is der rechte op haren omtrek gelegen.





STELLINGEN.



STELLINGEN.

I.

Het bewijs van CLAIRAUT „Mémoires de l'académie 1731 pag. 488 enz.” dat de perspectief van eene perspectief, wederom eene perspectief is der oorspronkelijke figuur, is onjuist.

II.

De teekeningen van NEWTONS „enumeratio linearum tertii ordinis” zijn, voor zooverre het krommen met een even trek bevat, onjuist.

III.

Het nut van correcte teekeningen wordt in de analytische meetkunde, en in 't algemeen in de wiskunde, veel te laag geschat.

IV.

MÖBIUS moet als een der grondleggers van de Analysis situs beschouwd worden.

V.

De meening van MEHMKE (*Zeitschrift für mathematik und physik*, bd. 29) dat de methode van MÖBIUS—GRASSMANN voor het vinden van traagheidsmomenten geschikter is, dan het gebruik van Cartesiaansche coördinaten, is onjuist.

VI.

De afleiding der continuïteitsvergelijking volgens MAXWELL (*Philosoph. Transactions* 1867 p. 71) past veel beter in het systeem van EULER dan de meeste gebruikelijke afleidingen.

VII.

De meest rechtstreeksche afleiding van de attractie eener homogeeene ellipsoïde op een punt daarbuiten is die van DIRICHLET.

VIII.

De afleiding van de formule voor de circulatie volgens LAMB (*Treatise on the motion of fluids*) is op zijn minst genomen kunstmatig.

IX.

Van de methoden ter oplossing van differentiaal vergelijkingen is die van den integreerenden factor de meest volkomene.

X.

Het is wenschelijk, dat met het oog op de mathematische physica, in de leerboeken meer werk worde gemaakt van de studie der lineaire partieele differentiaal vergelijkingen van de tweede orde.

XI.

De regel van DÜHRING omtrent de spankracht van verzadigde dampen moet als onjuist worden aangemerkt.

XII.

Het is wenschelijk, de formules voor de breking en terugkaatsing bij bolvormige oppervlakten, zoo af te leiden, dat de leerling zich een denkbeeld kan vormen van hare nauwkeurigheid.

XIII.

De gedaante der aarde kan evengoed uit slingerwaarnemingen als uit graadmetingen worden bepaald.

XIV.

Het bewijs in ROUTH „Elementary rigid dynamics” Part I pag. 88 voor de correctie van den slingertijd, veroorzaakt door de kromming der messen, is foutief.

XV.

De afwezigheid van twee isomeere orthodichloorbenzolen dient in aanmerking te worden genomen bij de bepaling der constitutie van benzol.

XVI.

Het verschijnsel „mimicry” dient stelselmatig onderzocht te worden.

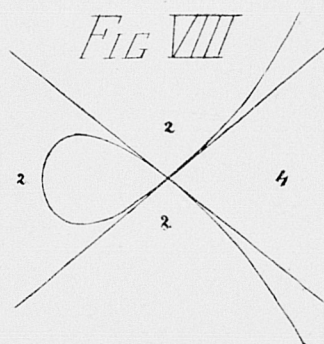
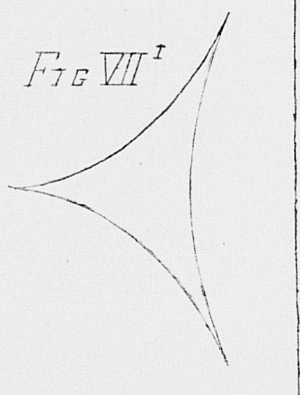
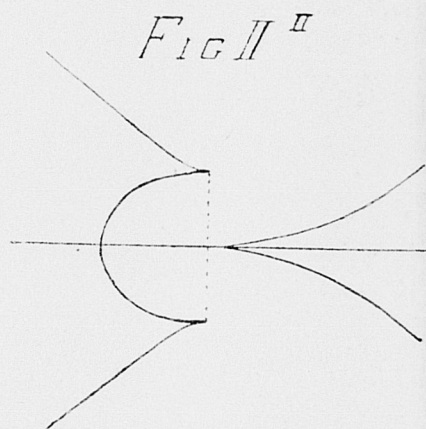
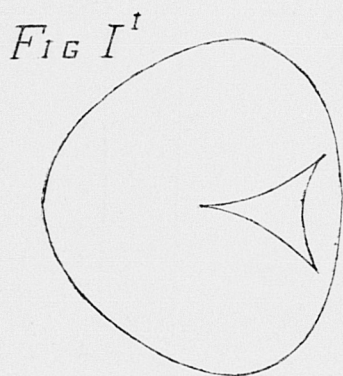
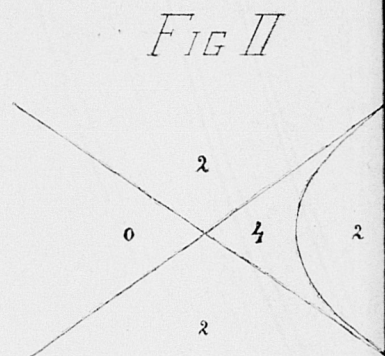
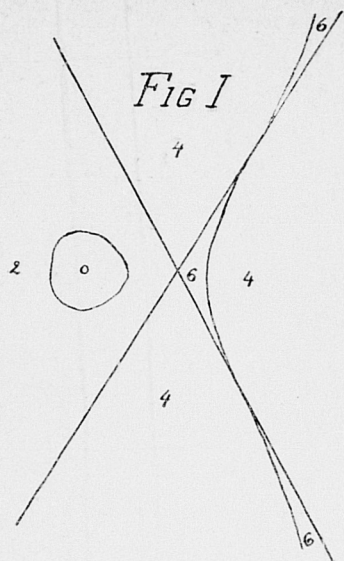
XVII.

Het is eene ernstige fout in de opleiding der filosofen, dat zij gedwongen zijn, eenige jaren gelijktijdig met medici colleges te volgen.

XVIII.

Het stelsel „centralisatie” bij de Hoogescholen, daarbij gerekend de Polytechnische school, moet in Nederland toegepast worden.





XV.

De afwezigheid van twee isomeere orthodichloorbenzolen dient in aanmerking te worden genomen bij de bepaling der constitutie van benzol.

XVI.

Het verschijnsel „mimicry” dient stelselmatig onderzocht te worden.

XVII.

Het is eene ernstige fout in de opleiding der filosofen, dat zij gedwongen zijn, eenige jaren gelijktijdig met medici colleges te volgen.

XVIII.

Het stelsel „centralisatie” bij de Hoogescholen, daarbij gerekend de Polytechnische school, moet in Nederland toegepast worden.



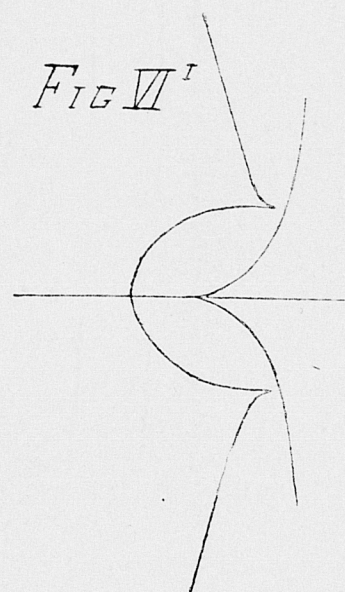
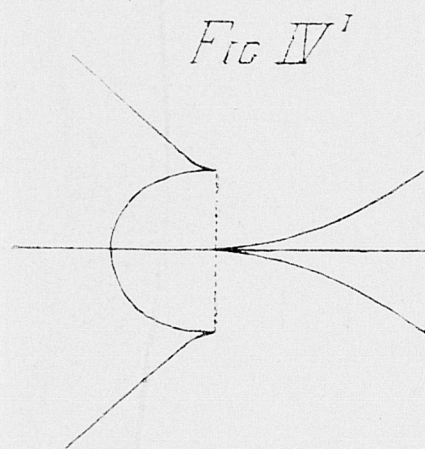
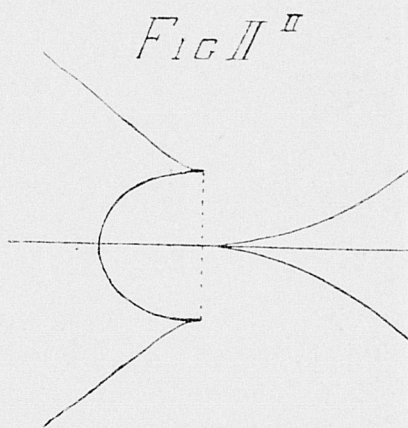
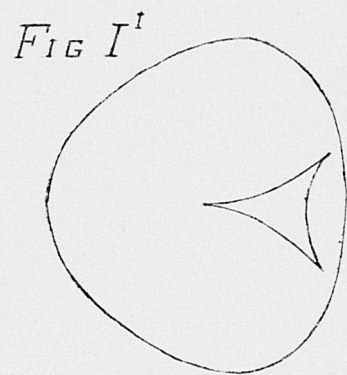
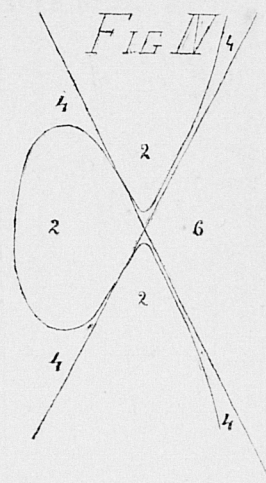
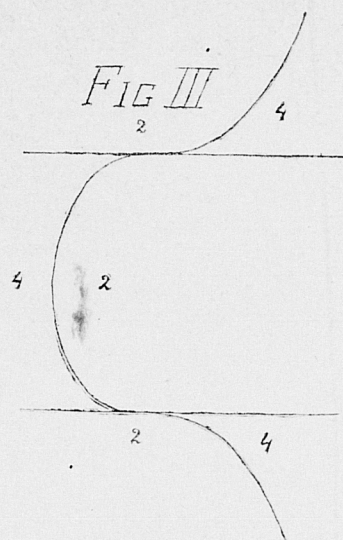
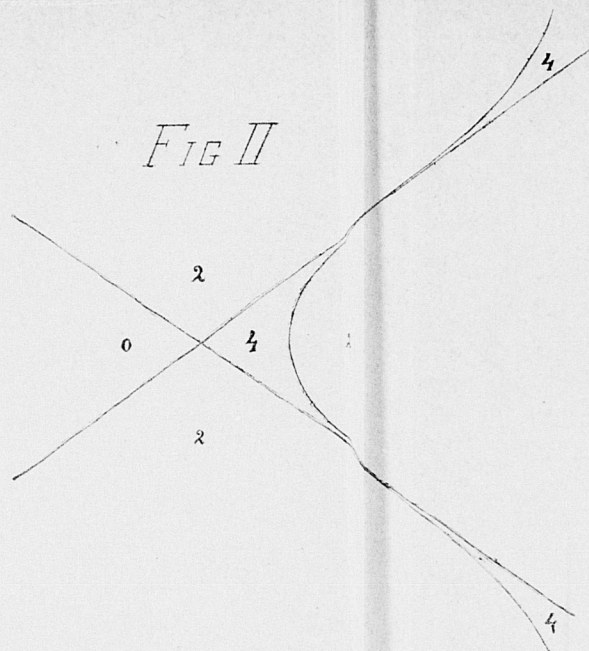
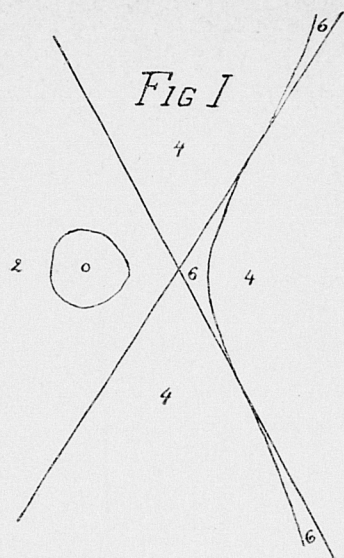
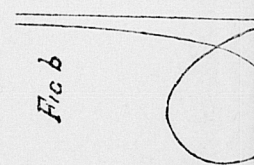
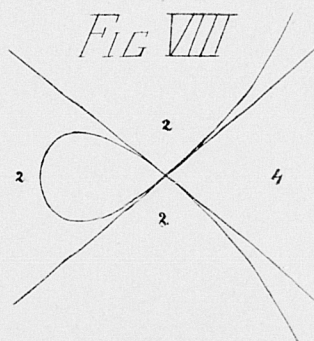
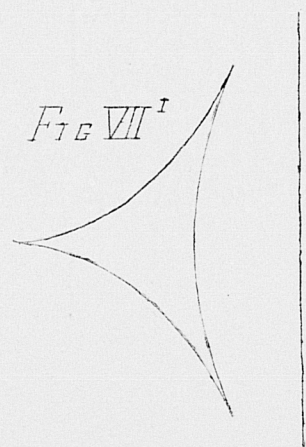
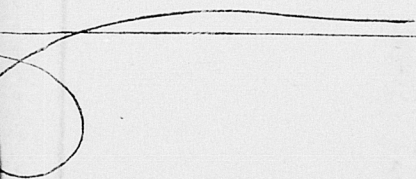
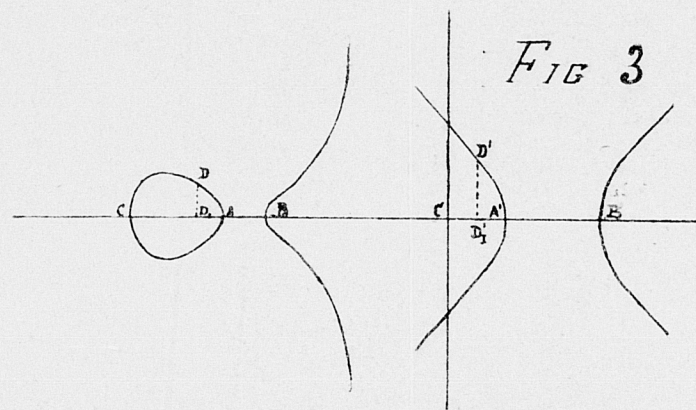
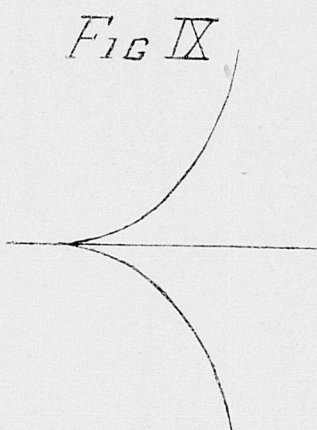
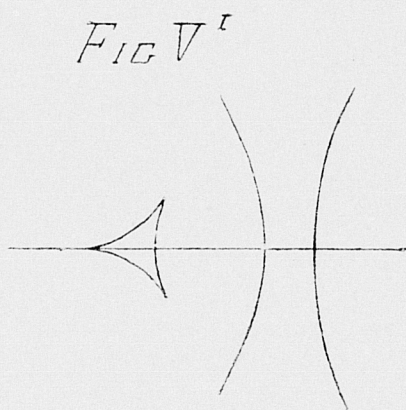
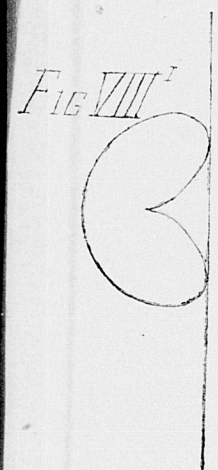
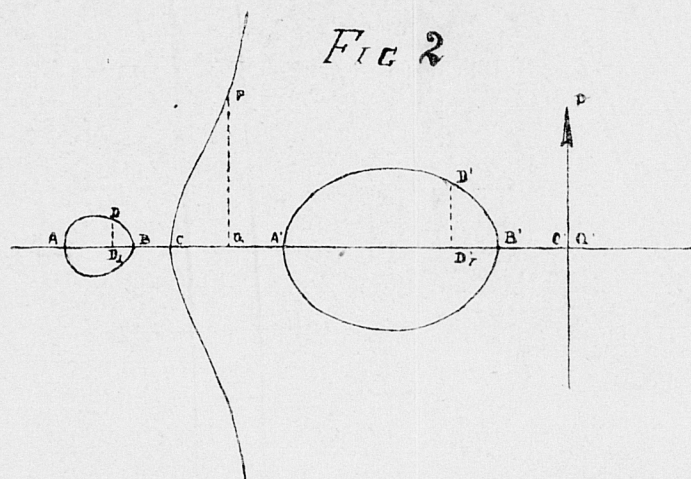
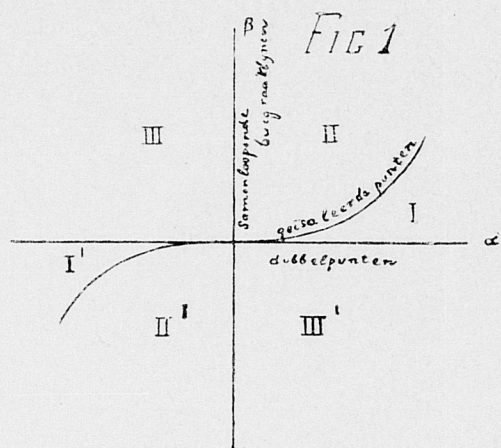
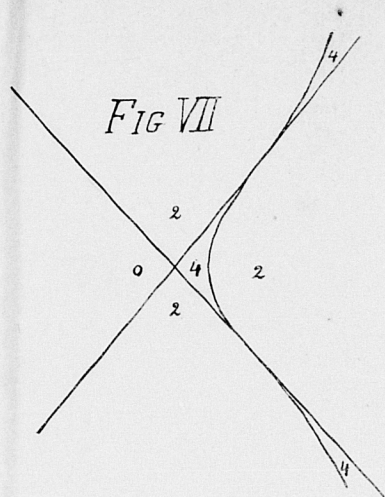


FIG VI¹





Figuur II' is dezelfde als fig. VII', behalve de imaginaire raaklijn. fig. VI = fig. IV.

