

Ch. M. Schols  
Studien over  
Kaartprojectien

NATUUR- EN  
STERRENKUNDE  
RU UTRECHT

4G10

159





4600

The data collected from the surveys and interviews indicates a significant increase in the number of participants in the community programs over the past year. This suggests that the programs are effective in attracting and retaining members. The focus group discussions provided valuable insights into the challenges faced by participants and the factors that influence their decision to join and stay in the programs. These findings are crucial for developing targeted interventions to address the identified issues and enhance the overall effectiveness of the programs.

Based on the results of the study, several key recommendations are proposed for future research and implementation. First, it is recommended that the programs be expanded to reach a larger portion of the community. Second, ongoing evaluation and monitoring should be implemented to ensure the continued effectiveness and relevance of the programs. Third, efforts should be made to address the barriers identified by participants, such as lack of time and resources. Finally, collaboration with local organizations and stakeholders is essential for the successful implementation and sustainability of the programs.

22

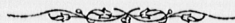
# STUDIËN

OVER

# KAARTPROJECTIËN

DOOR

**CH. M. SCHOLS.**



LEIDEN,

TER BOEKDRUKKERIJ VAN J. C. DRABBE.

1882.

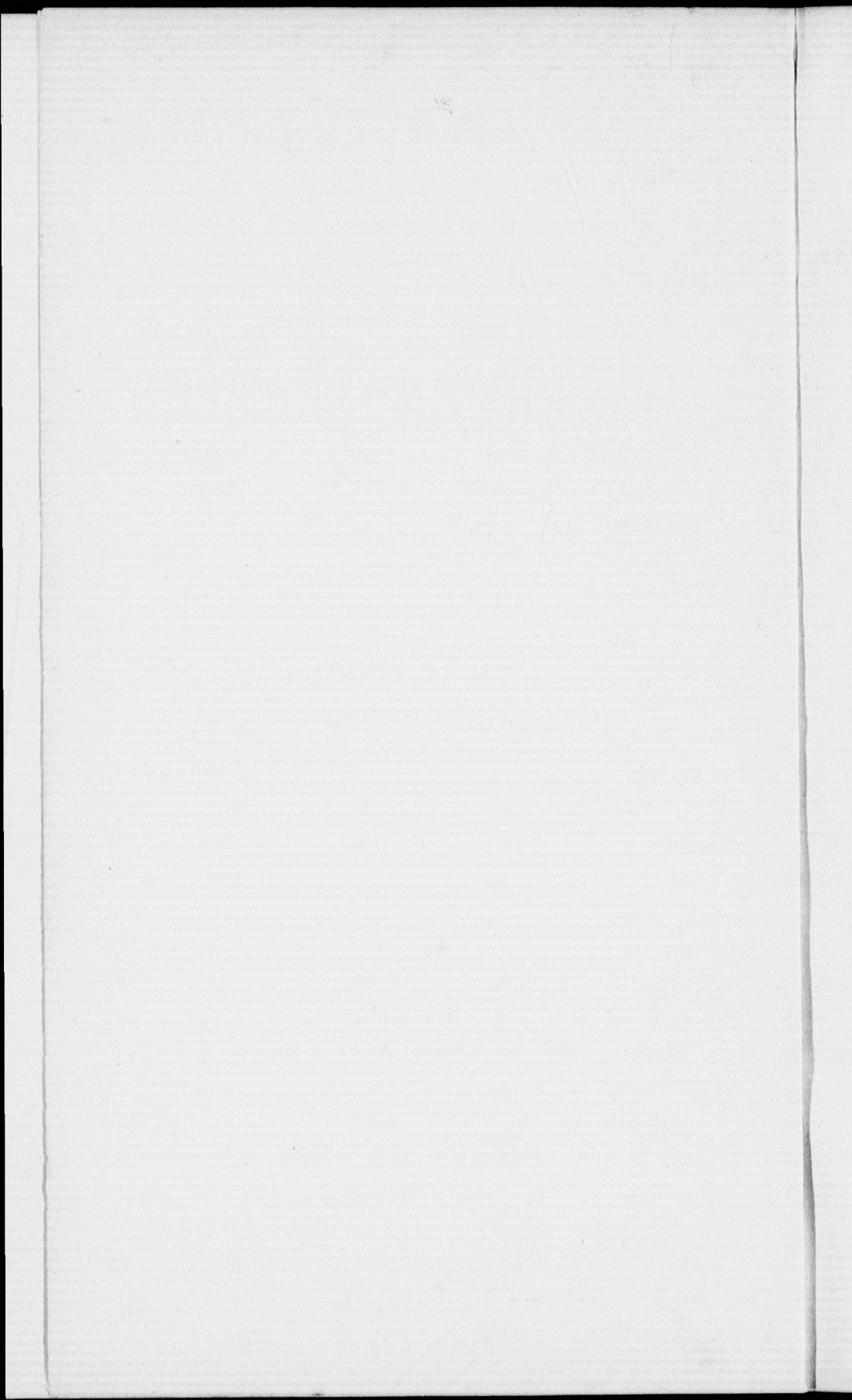


RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT



1971 8000

V1 G N°3 = II 2 16





# STUDIËN OVER KAARTPROJECTIËN,

DOOR

**CH. M. SCHOLS.**

---

*Antwoord op prijsvraag n°. 3 voor het jaar 1880.*

---

In de hiervolgende verhandeling worden, behalve de in de prijsvraag bedoelde projectie met parabolische meridianen en parallellen, nog vier andere conforme kaartprojectiën behandeld; namelijk de cirkelprojectie van LAGRANGE, eene projectie, waarbij de meridianen en parallellen door homofocale ellipsen en hyperbolen worden voorgesteld, eene kaartprojectie met eenvoudige formules voor de berekening van de coördinaten en eene niet symetrische kaartprojectie met minimumafwijking van de vergrooting, om die projectiën met de eerste te kunnen vergelijken. Al deze projectiën worden toegepast op de kaart van Nederland.

Vooraf gaan eenige algemeene beschouwingen omtrent conforme kaartprojectiën, hoofdzakelijk met het doel om na te gaan in hoeverre het, bij een terrein van geringe uitgestrektheid, mogelijk is, de verandering, die de vergrooting daarbij ondergaat, binnen zoo nauw mogelijke grenzen in te sluiten.

---

## HOOFDSTUK I.

## ALGEMEEN OVERZICHT.

§ 1. De ter beantwoording gestelde vraag luidt als volgt:

„Als verschillende parabels allen een zelfde brandpunt hebben, en ook hare assen allen langs eene zelfde rechte lijn vallen, zullen al de parabels, die hare opening naar dezelfde zijde keeren, rechthoekig gesneden worden door al de parabels, welker openingen naar den tegengestelden kant gekeerd zijn. Men vraagt deze eigenschap, zoo mogelijk, dienstbaar te maken aan eene geschikte samenstelling van landkaarten, waarin de meridianen en parallelcirkels door bogen van genoemde parabels worden afgebeeld; of anders aan te toonen, dat deze eigenschap tot het bedoelde einde onbruikbaar is.”

In korte woorden kan het antwoord daarop als volgt worden samengevat: de bovenbedoelde eigenschap kan dienen als grondslag van eene kaartprojectie; er zijn echter andere kaartprojectiën, die in het algemeen beter zijn, zoodat bedoelde projectie slechts in zeer enkele gevallen met vrucht kan worden toegepast.

Dat het in het algemeen mogelijk is eene kaartprojectie te ontwikkelen, waarbij de meridianen en de parallellen door bovenbedoelde parabolen worden voorgesteld, is gemakkelijk in te zien. Men heeft slechts van beide stelsels een zeker aantal te teekenen, waarbij de parameters volgens eene willekeurige wet veranderen, en in het net, door deze parabolen gevormd, het terrein verder in teekening te brengen.

Of eene dergelijke projectie geschikt is, om van het terrein eene behoorlijke voorstelling te geven, en op welke wijze men de parameters van beide stelsels van parabolen moet laten veranderen, om voor een bepaald terrein eene zoo gunstig mogelijke voorstelling te verkrijgen, vordert eene uitvoerige beschouwing. Men zal daartoe in de eerste plaats dienen na te gaan, aan welke eischen de projectie moet voldoen; en in de tweede plaats zal men die projectie met andere projectiën dienen te vergelijken.

§ 2. De voorwaarden, die wij hier aan eene kaartprojectie zullen stellen en waaraan wij de bovenbedoelde projectie dus zullen toetsen, zijn de volgende:

1°. De hoeken in de kaart moeten volkomen overeenkomen met de hoeken van het terrein, of wat op hetzelfde neerkomt, er moet gelijkvormigheid bestaan tusschen de kaart en het terrein, voor zoverre betreft de kleinste deelen daarvan. Eene kaartprojectie, die aan



deze voorwaarde voldoet, draagt den naam van conforme of orthomorphe projectie.

2°. Is aan bovenstaande voorwaarde voldaan, dan zal de vergrooting voor de verschillende punten der kaart niet overal dezelfde zijn; men moet er dan echter voor zorgen, dat de afwijking van de vergrooting zoo gering mogelijk is.

3°. De formules voor de berekening van de rechthoekige coördinaten van punten, gegeven door lengte en breedte, moeten zoo eenvoudig mogelijk zijn en eene scherpe berekening toelaten, hetzij met of zonder vooraf berekende tafels.

§ 3. De eerste van de bovengenoemde voorwaarden wordt niet altijd aan de kaartprojectiën gesteld. Bij eene groep van projectiën, bekend onder den naam van equivalente projectiën, (zie onder andere A. GERMAIN, *Traité des projections des cartes géographiques*. Paris, Bertrand, Première partie, Chapitre III, Dr. H. GRETSCHEL, *Lehrbuch der Karten-Projection*, Weimar 1873, Viertes Kapitel, en E. COLLIGNON, *Recherches sur la représentation plane de la surface du globe terrestre*, Journal de l'École Polytechnique, 41<sup>e</sup> Cahier, p. 73—161), en waartoe onder andere de projectie van BONNE of de zoogenaamde gewijzigde projectie van FLAMSTEED, die aan onze topographische kaart ten grondslag ligt, behoort, — wordt als voorwaarde gesteld, dat de inhouden onveranderd moeten blijven. Bij deze projectie ondergaan niet alleen de hoeken eene verandering, maar ook de vergrooting is in de verschillende richtingen rond een zelfde punt verschillend; zoodat de equivalentie alleen betrekking heeft op de inhouden, niet op de afstanden.

Bij alle overige projectiën, die noch tot de equivalente noch tot de conforme behooren, worden de hoeken gewijzigd, en ondergaat de vergrooting, zoowel in de verschillende richtingen om een zelfde punt, als van punt tot punt, eene verandering.

Niet alleen echter, omdat de conforme projectie de meest gunstige is, wordt die voorwaarde hier gesteld; maar in de vraag zelf ligt deze voorwaarde stilzwijgend opgesloten; de conforme projectie toch is de eenige, waarbij de meridianen en parallellen in de kaart elkaar rechthoekig moeten snijden <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Werd de voorwaarde van de equivalentie gesteld, dan zou het antwoord ontkennend moeten luiden. In de noot bij paragraaf 38 wordt aangetoond, dat eene projectie met genoemde parabolen als meridianen en parallellen alleen eene equivalente projectie kan zijn in het bijzondere geval, dat de parabolen in rechte lijnen overgaan (zie ook de noten bij § 26 en § 43).

In de eerste paragraaf van het tweede hoofdstuk wordt deze voorwaarde in vergelijking gebracht; en in hoofdstuk IV, waarin de projectie met de bedoelde parabolen als meridianen en parallellen nader behandeld wordt, wordt aangetoond, dat het mogelijk is de parameters zoodanig te bepalen, dat de projectie conform wordt. Aan de eerste voorwaarde wordt dus geheel voldaan.

§ 4. De voorwaarde, dat de vergrooting bij eene conforme projectie voor de verschillende punten van de kaart zoo min mogelijk moet veranderen, is moeielijk in het algemeen in formule brengen. Vooral voor eene kaart van eene zeer groote uitgestrektheid is dit aan groote moeilijkheden onderhevig. Voor een dergelijk geval moet men de vergrooting voor de verschillende punten van de kaart uitrekenen en ze daarnaar beoordeelen, vooral door vergelijking met andere kaartprojectiën. Voor een klein terrein is het wel mogelijk, die voorwaarde in het algemeen in formule te brengen, omdat daarbij de vergrooting, ten minste bij benadering, eene zeer eenvoudige wet volgt.

In deze verhandeling stellen wij ons hoofdzakelijk op het standpunt van de ontwikkeling van eene kaartprojectie voor een betrekkelijk klein terrein, en nemen daarbij voortdurend de kaart van Nederland als voorbeeld. Wij doen dit eensdeels, omdat men in de cirkelprojectie van LAGRANGE eene zeer geschikte projectie bezit voor zeer groote terreinen, terwijl de projectie, die wij hier hoofdzakelijk te onderzoeken hebben, voor dergelijke terreinen ten eenenmale ongeschikt is, zooals uit verschillende omstandigheden blijkt (zie onder andere § 42); anderdeels ook omdat de projectiën voor betrekkelijk kleine terreinen, hoewel zij van het grootste belang zijn, meestal onvoldoende behandeld zijn, zoodat men slechts uiterst zelden aanwijzingen aantreft, om eene projectie op de beste wijze aan een bepaald terrein aan te passen.

§ 5. Om bij een terrein van betrekkelijk geringe uitgestrektheid de verandering van de vergrooting zoo gering mogelijk te maken, moet men er in de eerste plaats voor zorgen, dat de afgeleide functiën van de vergrooting, in een bepaald punt van het terrein, zoowel ten opzichte van de lengte als van de breedte, nul zijn. Aan deze voorwaarde, in § 16 in vergelijking gebracht, blijkt de hier te onderzoeken projectie te kunnen voldoen (zie § 39).

De hier genoemde voorwaarde is echter niet voldoende. Uit het verder onderzoek, in hoofdstuk II ingesteld, blijkt namelijk, dat de punten, waarvoor de vergrooting dezelfde is, gelegen zijn op ellipsen

of op hyperbolen, die bovengenoemd punt, dat men den naam van het centrale punt geeft, tot middelpunt hebben; en dat die projectie, wat de verandering van de vergrooting betreft, de gunstigste is, waarbij de lijnen van gelijke vergrooting ellipsen zijn en waarbij de middellijn, die den hoek van de hoofdassen midden doordeelt, bij de kleinste van die ellipsen, die nog om het terrein beschreven is, een minimum is.

Om nu eene kaartprojectie zoodanig in te richten, dat de lijnen van gelijke vergrooting dien gunstigsten vorm verkrijgen, is het noodig, dat, nadat reeds aan al de bovengenoemde voorwaarden voldaan is, de formules voor de coördinaten  $X$  en  $Y$  van een willekeurig punt nog twee parameters bezitten, waarover men naar willekeur kan beschikken; in dien zin, dat men aan de derde afgeleide functiën van  $X$  en  $Y$  ten opzichte van de lengte  $\lambda$  in het centrale punt bepaalde waarden kan toekennen.

De projectie met parabolische meridianen en parallellen bezit deze parameters niet en kan dus ook niet naar behooren aan het terrein worden aangepast. Zelfs zijn de lijnen van gelijke vergrooting, zoolang het centrale punt op eene grootere breedte dan  $45^\circ$  ligt, hyperbolen, en daardoor verandert de vergrooting op eene zeer ondoelmatige manier. In fig. III zijn eenige van die hyperbolen van gelijke vergrooting voorgesteld, en daaruit blijkt, zooals in § 40 nader wordt uiteengezet, dat men met deze projectie de vergrooting alleen tusschen de grenzen

$$1 \pm 0,00023 = 1 \pm \frac{1}{3350},$$

kan laten blijven; terwijl het mogelijk is voor de kaart van Nederland eene projectie te ontwerpen, waarbij de vergrooting besloten blijft tusschen de grenzen

$$1 \pm 0,0000571 = 1 \pm \frac{1}{17500}.$$

Eene projectie waarbij dit werkelijk het geval is, wordt later in hoofdstuk VII ontwikkeld.

De cirkelprojectie van LAGRANGE bevat slechts één dergelijken parameter; zoodat deze projectie slechts gedeeltelijk aan het terrein kan worden aangepast; men kan het bij deze projectie echter nog zoo ver brengen, dat de vergrooting begrepen blijft tusschen de grenzen

$$1 \pm 0,0000887 = 1 \pm \frac{1}{11275};$$

zoodat deze projectie boven de projectie met parabolische meridianen en parallellen verre te verkiezen is.

Alle projectiën, die symetrie vertoonen ten opzichte van den meri-



diaan van het centrale punt, missen noodzakelijk den tweeden parameter en kunnen dus, wat de vergrooting betreft, geen betere verhouding opleveren dan de hier bedoelde cirkelprojectie van LAGRANGE. Tot deze projectiën behoort ook de in hoofdstuk V ontwikkelde projectie, waarbij de meridianen en parallellen door homofocale ellipsen en hyperbolen worden voorgesteld. Deze projectie bezit ook slechts één parameter en geeft dus, wat de vergrooting betreft, niets meer dan de projectie van LAGRANGE; zij is echter veel beter dan de projectie met parabolische meridianen en parallellen <sup>1)</sup>.

§ 6. Als derde voorwaarde hebben wij gesteld, dat de coördinaten van de punten, die door lengte en breedte gegeven zijn, gemakkelijk en nauwkeurig berekend moeten kunnen worden. Op deze voorwaarde wordt bij de kaartprojectiën zeer dikwijls weinig gelet. Zoo vindt men voor de cirkelprojectie van LAGRANGE voor de coördinaten meestal een stel formules opgegeven, die voor de berekening totaal ongeschikt zijn; hoewel die formules, door het invoeren van eene gemakkelijk te berekenen hulpgrootheid, een zeer eenvoudigen vorm aannemen, waardoor zij onmiddellijk voor logarithmische berekening geschikt zijn.

Daar de projectie van LAGRANGE de eenige bekende is, waarmede wij de te onderzoeken projectie naar behooren kunnen vergelijken, hebben wij die projectie in een afzonderlijk hoofdstuk behandeld. Daarin zijn de formules voor de berekening van de coördinaten tot eenvoudige en praktische vormen teruggebracht, en is de projectie tevens aan den vorm van het terrein aangepast.

Bij de berekening van de coördinaten, zoo van deze, als van alle andere hier behandelde projectiën, kunnen vooraf berekende tafels de uitvoering van de berekening zeer vergemakkelijken, mits die tafels

---

<sup>1)</sup> Aan de *Topographische en Militaire kaart van het koninkrijk der Nederlanden*, aan de *Groote kaart van de hoofdrivieren in Nederland* en aan alle andere kaarten van Nederland, die daarvan zijn afgeleid, ligt de projectie van BONNE of de zoogenaamde gewijzigde projectie van FLAMSTEED ten grondslag. Deze projectie behoort tot de equivalenten projectiën, en is als zoodanig niet rechtstreeks met de hierboven behandelde conforme projectiën te vergelijken.

De inhouden blijven bij deze projectie onveranderd; daarentegen ondergaan de hoeken en de afstanden zekere veranderingen. De veranderingen, die de hoeken ondergaan, klimmen op tot meer dan  $2'30''$ , en de afwijkingen in de lengten der lijnen tot meer dan  $\frac{1}{100000}$ . Deze groote afwijkingen vinden wel is waar voor een deel hun oorsprong in de ongunstige ligging van het centrale punt. Bij eene betere keuze daarvoor worden die afwijkingen wel kleiner, maar blijven toch nog opklimmen tot  $1'10''$ , resp.  $\frac{1}{50000}$ .

slechts een enkelen ingang bezitten en eene gemakkelijke interpolatie toelaten. Die tafels kan men zelfs niet geheel missen, omdat de geographische breedte in de formules voor de conforme projectiën altijd op zeer samengestelde wijze voorkomt, vooral ook tengevolge van de afgeplatte gedaante der aarde, die men nergens buiten rekening kan laten. Wij hebben daarom getracht, de formules zoodanig te vervormen, dat daarin enkele weinige functiën voorkomen, die uitsluitend van de breedte afhangen, en die dus vooraf berekend kunnen worden. De berekening daarvan is niet zeer omslagtig, omdat men daarbij voor de breedte steeds een rond aantal minuten neemt, terwijl men, zoo men die functiën bij de berekening van de coördinaten zelve wilde uitrekenen, steeds te doen zou hebben met seconden en onderdeelen van seconden, waardoor de berekening niet weinig bemoeielijkt wordt.

Voor al de projectiën, die wij hier behandelen en die voor eene kaart van Nederland bruikbaar zijn, hebben wij dergelijke tafels berekend en hier achter gevoegd. Bij al die tafels hebben wij de breedte met honderd seconden laten opklimmen. In die tafels is overal een decimaal meer opgegeven dan voor de berekening noodig is, om daardoor bij de interpolatie het vorige cijfer nauwkeurig te vinden. De interpolatie kan overal met evenredige deelen plaats hebben, omdat het verwaarloozen van de tweede verschillen alleen invloed heeft op bovengenoemde laatste decimaal.

§ 7. Toetsen wij de projectie met parabolische meridianen en parallellen aan deze voorwaarde, dan blijkt zij daaraan bijzonder goed te voldoen. Uit § 39 blijkt namelijk, dat de formules voor de berekening van de coördinaten tot de volgende eenvoudige vormen kunnen worden teruggebracht

$$\begin{aligned} X &= p \lambda, \\ Y &= S + q \lambda^2, \end{aligned}$$

waarin  $p$  en  $S$  functiën van de breedte zijn, waarvoor tafels kunnen opgemaakt worden, en  $q$  eene standvastige voorstelt.

Geen andere conforme projectie, waarbij de afwijking van de vergrooting voor een willekeurig <sup>1)</sup> punt van het aardoppervlak maar eenigszins gering is, bezit zulke eenvoudige formules. Er zijn echter

---

<sup>1)</sup> De projectie van MERCATOR heeft eenvoudigere formules, maar deze geeft alleen voor punten dicht bij den aequator eene geringe afwijking van de vergrooting. Deze projectie kan echter beschouwd worden als een bijzonder geval van de bovenstaande (zie § 42).



onder die projectiën sommige, die weinig meer samengestelde formules opleveren.

Zoo heeft men bij de cirkelprojectie van LAGRANGE, die wat de vergrooting betreft verre te verkiezen is, de volgende eenvoudige formules (zie § 27)

$$Tg \frac{1}{2} \alpha = q Tg \frac{1}{2} C \lambda,$$

$$X = p \sin \alpha,$$

$$Y = S + X Tg \frac{1}{2} \alpha.$$

Daarin zijn  $p$ ,  $q$  en  $S$  functiën van de breedte en dus in tafels te vereenigen (zie Tabel II). De grootheid  $\alpha$  is een hulphoek, die eene eenvoudige beteekenis heeft. Voor de berekening is het zelfs nog eenvoudiger de formule voor  $X$  aldus te schrijven

$$X = 2 p \cdot Tg \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

daar men alsdan slechts eene benaderde waarde van den hulphoek  $\alpha$  noodig heeft, om  $\log \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$  in de logarithmentafel te kunnen opzoeken. Bij de beoordeeling van deze formules moet men wel in het oog houden, dat van de grootheid  $Tg \frac{1}{2} \alpha$ , die in de formules voor  $X$  en  $Y$  voorkomt, de logarithme uit de eerste formule gevonden wordt, en men die dus niet behoeft op te zoeken.

§ 8. De betrekkelijk samengestelde vorm, dien de formules voor de projectie van LAGRANGE toch nog hebben, leidt tot de vraag, of het niet mogelijk is, eene projectie te ontwikkelen, die dezelfde voordeelen bezit wat de vergrooting betreft, maar eenvoudigere formules oplevert. Langs tweeeërlig wegen zijn wij tot dit doel gekomen. Vooreerst (hoofdstuk V) door uit te gaan van de eigenschap van de homofocale ellipsen en hyperbolen, die elkaar ook onder rechte hoeken snijden, en waarvan de hiervoren bedoelde parabolen slechts een bijzonder geval vormen. Aangezien daarin een parameter meer voorkomt, kan die projectie, even als de cirkelprojectie, aan het terrein worden aangepast.

Ten tweede (hoofdstuk VI) hebben wij aan de eenvoudige formules voor de parabolische projectie een enkelen term toegevoegd, en daardoor den noodigen parameter gevonden, die in de eerste ontbrak.

Door aan deze laatste nog enkele termen toe te voegen, waardoor eene onsymmetrische projectie verkregen werd, hebben wij eindelijk de afwijking der vergrooting tot een minimum gemaakt, zonder tot zeer moeilijke formules te geraken (hoofdstuk VII).

§ 9. Door de meridianen en parallellen door homofocale ellipsen

en hyperbolen voor te stellen zijn wij tot twee kaartprojectiën gekomen, die elkaar als het ware aanvullen.

Door de meridianen door hyperbolen, en de parallellen door ellipsen voor te stellen, vindt men (§ 44 en fig. 3)

$$X = p \sin C \lambda, \\ Y = S + q \sin^2 \frac{1}{2} C \lambda.$$

Door omgekeerd de hyperbolen als parallellen, en de ellipsen als meridianen aan te nemen, vindt men (§ 55 en fig. 4)

$$X = p_1 \operatorname{sh} C_1 \lambda, \\ Y = S_1 + q_1 \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} C_1 \lambda.$$

De in deze formules voorkomende grootheden  $p$ ,  $q$  en  $S$ , en  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $S_1$  zijn functiën van de breedte, en kunnen in tafels vereenigd worden. Voor de eerste dezer projectiën, die op de kaart van Nederland toepasselijk is, zijn deze tafels in Tabel III vervat.

De grootheden  $C$  en  $C_1$  stellen de parameters voor, waardoor de projectie aan den vorm van het terrein kan worden aangepast. Zij zijn zoodanig onderling verbonden, dat als de eene imaginair wordt, de andere bestaanbaar is.

§ 10. Bovenstaande formules blijken onmiddellijk veel eenvoudiger te zijn, dan die voor de cirkelprojectie; maar beiden zijn voor kleine waarden van  $\lambda$  eenigszins lastig, doordat men de goniometrische of hyperbolische functiën van kleine grootheden moet opzoeken.

Bij de projectie van LAGRANGE doet men in dat geval het best, de  $\log \operatorname{Tg} \frac{1}{2} C \lambda$  met behulp van het tangentengetal, dat in de logarithmentafels door de letter  $T$  wordt aangegeven, op te zoeken; voor de logarithme van  $\operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \alpha$  kan men echter eenvoudiger schrijven (§ 27)

$$\log \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \alpha = \log \frac{1}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \alpha} = -M \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \alpha = -\Delta,$$

welke formule geldig is, zoolang  $\log \operatorname{Tang} \frac{1}{2} \alpha < 8.34055 - 10$  is.

Voor de projectie met elliptische parallellen en hyperbolische meridianen kunnen wij voor dat geval eenvoudiger schrijven (§ 45)

$$\log X = p_2 + \log \lambda'' - \Delta, \\ \log (Y - S) = t + 2 \log \lambda'' + q_2 - \frac{1}{2} \Delta;$$

en voor de projectie met hyperbolische parallellen en elliptische meridianen (§ 55)

$$\log X = p_2 + \log \lambda'' + \Delta, \\ \log (Y - S) = t + 2 \log \lambda'' + q_2 + \frac{1}{2} \Delta,$$

waarin  $p_2$ ,  $q_2$  en  $S$  functiën van de breedte, en  $t$  eene standvastige voorstellen. De grootheid  $\Delta$  is eene kleine correctie, waarvan de logarithe, in beide gevallen, gelijk is aan  $t + 2 \log \lambda''$ ; welke grootheid bij de berekening van  $\log(Y-S)$  van zelf reeds voorkomt, zoodat men  $\Delta$  alleen in de logarithmentafel behoeft op te zoeken.

Om de bewerking voor beide projectiën beter te kunnen vergelijken, geven wij hier een voorbeeld van de berekening. Voor de breedte, die wij in het vervolg altijd door de letter  $\phi$  voorstellen, nemen wij  $\phi = 51^\circ 18' 20''$ , en voor de lengte  $\lambda = 1^\circ 4' 6'', 30$ .

*Cirkelprojectie van LAGRANGE. Tabel II.*

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} C\lambda &= \frac{1}{2} \lambda = 32' 3'', 15 & \log \frac{1}{2} \lambda'' &= 3,2840131.7^1) & \log 10^7 M &= 6,63778 \\
 T &= 4,6855874.5-10 & 2 \log Tg \frac{1}{2} \alpha &= 5,72950 \\
 \log q &= 9,8951488.5-10 & \log \Delta &= 2,36728 \\
 \log Tg \frac{1}{2} \alpha &= 7,8647494.7-10 \\
 -\Delta &= -233.0 \\
 \log 2p &= 7,0073945.8 \\
 \log X &= 4,8721207.5 & X &= 74493,91 \\
 \log Tg \frac{1}{2} \alpha &= 7,8647494.7-10 \\
 \log(Y-S) &= 2,7368702.2 & Y-S &= 545,595 \\
 & & S &= -101972,410 \\
 & & Y &= -101426,82.
 \end{aligned}$$

Bij deze berekening moet men behalve den hoek  $\frac{1}{2} C\lambda$ , zestien getallen opschrijven en vijf grootheden in de logarithmentafel opzoeken, namelijk  $\log \frac{1}{2} \lambda''$ ,  $T$ ,  $\Delta$ ,  $X$  en  $(Y-S)$ . De berekening van den hoek  $\frac{1}{2} C\lambda$  is hier gemakkelijk, omdat  $C$  juist gelijk is aan de eenheid. Bij een ander terrein, waarvoor  $C$  eene niet zoo eenvoudige waarde bezit, wordt de berekening iets moeilijker; voert men die berekening door middel van logaritmen uit, dan heeft men nog twee getallen meer op te schrijven; men heeft daarbij echter niets meer in de tafel op te zoeken, omdat  $\log \frac{1}{2} C$  standvastig is.

<sup>1)</sup> De bij deze en volgende berekeningen bijgevoegde achtste decimaal is gevonden met behulp van de tafel van SCHRÖN, en dient alleen om de nauwkeurigheid van de zevende decimaal te verhoogen. De in de tafels voorkomende achtste decimaal is overal gevonden door de berekening tot in tien of elf decimalen uit te voeren, en kan hoogstens eene eenheid van die decimaal foutief zijn.

*Projectie met elliptische parallellen en hyperbolische meridianen. Tabel III.*

$$\begin{array}{rcl}
 p_2 = 1,2870887.9 & t = 4,8708741.9-10 \\
 \log \lambda'' = 3,5850431.7 & 2 \log \lambda'' = 7,1700863.4 \\
 -\Delta = -109.9 & \log \Delta = 2,0409605.3 \\
 \log X = 4,8721209.7 & -\frac{1}{2} \Delta = -54.9 \\
 & q_2 = 0,6959827.7 \\
 & \log(Y-S) = 2,7369378.1 \\
 & Y-S = 545,680 \\
 & S = -101972,437 \\
 X = 74493,95 & Y = -101426,76
 \end{array}$$

Bij deze berekening heeft men slechts veertien getallen op te schrijven, dus twee minder dan bij de LAGRANGE-projectie; men moet vier grootheden in de logarithmentafel opzoeken (namelijk  $\log \lambda''$ ,  $\Delta$ ,  $X$  en  $Y-S$ ) dus één minder dan bij de vorige; en men heeft niets te maken met de standvastige  $C$ , die alleen voorkomt in de grootheden  $p_2$ ,  $q_2$ ,  $t$  en  $S$ .

Het blijkt dus hieruit, dat deze projectie, wat de eenvoudigheid van de berekening betreft, staat boven de cirkelprojectie van LAGRANGE.

§ 11. In hoofdstuk VI hebben wij nog eene andere projectie ontwikkeld en daarbij getracht, de formules zoo eenvoudig mogelijk te maken, door uit gaan van de formules voor de projectie met parabolische meridianen en parallellen, en daarbij een enkelen term te voegen, om de projectie aan den vorm van het terrein te kunnen aansluiten, voor zoo verre dit bij eene symetrische projectie mogelijk is.

De formules, waartoe wij gekomen zijn, zijn de volgende

$$\begin{aligned}
 X &= A_1 \lambda'' - A_3 \lambda''^3, \\
 Y &= A_0 + A_2 \lambda''^2.
 \end{aligned}$$

Zie hier de toepassing dier formules op het bovenstaande voorbeeld, met gebruikmaking van Tabel IV

$$\begin{array}{rcl}
 \log A_1 = 1,2870883.7 & \log A_2 = 5,5667945.2-10 & \log A_3 = 9,51135.4-20 \\
 \log \lambda'' = 3,5850431.7 & 2 \log \lambda'' = 7,1700863.4 & 3 \log \lambda'' = 10,75513.0 \\
 \hline
 4,8721315.4 & 2,7368808.6 & 0,26648.4 \\
 A_1 \lambda'' = 74495,755 & A_2 \lambda''^2 = 545,608 & \\
 -A_3 \lambda''^3 = -1,847 & A_0 = -101972,412 & \\
 \hline
 X = 74493,91 & Y = -101426,80. &
 \end{array}$$

Uit dit voorbeeld blijkt, dat men even als bij de vorige projectie vier grootheden in de logarithmentafel heeft op te zoeken, namelijk



$\log \lambda'', A_1 \lambda'', A_2 \lambda''^2$  en  $A_3 \lambda''^3$ , en dat men slechts één getal meer heeft op te schrijven, zoodat deze projectie wat de uitrekening betreft, bijna gelijk staat met de vorige. Er is echter eene andere reden, waarom zij boven die te verkiezen is.

§ 12. In de vorige paragraphen hebben wij alleen gelet op de eenvoudigheid van de formules en van de berekening. Van veel belang is het echter, dat de coördinaten door middel van die formules zoo nauwkeurig mogelijk kunnen bepaald worden. Wij hebben steeds getracht de formules zoodanig in te richten, dat eene scherpe berekening mogelijk is.

Voor de berekening van de ordinaat  $Y$  zijn wij bij alle projectiën volkomen daarin geslaagd. Het grootste gedeelte daarvan werd toch onmiddellijk gegeven door eene tafel, die vooraf zoo nauwkeurig mogelijk berekend kan worden. De daaraan aan te brengen correctie (in het behandelde voorbeeld 545,59 à 545,68) kan nauwkeurig genoeg berekend worden met behulp van logarithmen met zeven decimalen.

Niet alzoó wat de waarde van  $X$  betreft; bij de cirkelprojectie en bij de projectie met elliptische of hyperbolische meridianen, wordt de  $X$  in eens door haar logarithme gevonden, en bij de laatst behandelde projectie het grootste gedeelte daarvan, namelijk:  $A_1 \lambda''$ . Is nu de  $X$  eenigszins groot, en rekt men met eene tafel met zeven decimalen, dan zal men die waarde daarin niet meer met de noodige juistheid kunnen vinden. Bij eene waarde van 43000 meter komt eene eenheid van de zevende decimaal reeds overeen met één centimeter en bij de toepassing op de kaart van Nederland waarbij de abseis  $X$  tot 150000 meter kan klimmen, zal men dus de centimeters niet meer nauwkeurig kunnen berekenen.

Bij de cirkelprojectie en bij de projectie met elliptische of hyperbolische meridianen is het niet wel mogelijk, de formule voor  $X$  zoodanig te veranderen, dat aan dit bezwaar te gemoet gekomen wordt, zonder de formule al te samengesteld te maken en de berekening daardoor te bemoeielijken.

Bij de in de vorige paragraaf aangegeven projectie is dit wel mogelijk; voor den term  $A_1 \lambda''$ , waarop het hier aankomt, kan men namelijk schrijven (zie § 64)

$$A_1 \lambda'' = \Lambda - A_{,,} \beta' \lambda'',$$

waarin  $\Lambda$  eenvoudig evenredig is met  $\lambda$  en dus met behulp van eene tafel (zie Tabel IVa) zoo nauwkeurig kan berekend worden, als men verkiest. De coëfficiënt  $A_{,,}$  is eene functie van  $\phi$ , waarvan de logarithme door eene tafel gegeven wordt, waarmede de term  $A_{,,} \beta' \lambda''$ ,

die klein is in verhouding tot  $\Delta$ , nauwkeurig genoeg door middel van logarithmen kan gevonden worden.

De berekening, op deze wijze uitgevoerd, wordt iets, maar niet veel, omslagtiger; de nauwkeurigheid van de uitkomst wordt echter veel verhoogd. Ter vergelijking geven wij hier de berekening van het vorige voorbeeld, met behulp van de Tabellen IV en IVa.

$$\begin{array}{rcl}
 1^{\circ} & 68323,0120 & \log A_n = 6,0720445.6 \quad \log A_2 = 5,5667945.2 - 10 \\
 4' & 4554,8675 & \log \beta_n = 3,5185139.3_n \quad 2 \log \lambda'' = 7,1700863.4 \\
 6'' & 113,8717 & \log \lambda'' = 3,5850431.7 \quad 2,7368808.6 \\
 0''3 & 5,6936 & 3,1756016.6_n \\
 A = 72997,445 & \log A_3 = 9,51135.4 - 20 \\
 - A_n \beta'' \lambda'' = +1498,310 & 3 \log \lambda'' = 10,75513.0 & A_2 \lambda''^2 = 545,608 \\
 - A_3 \lambda''^3 = -1,847 & 0,26648.4 & A_0 = -101972,412 \\
 X = 74493,91 & & Y = -101426,80.
 \end{array}$$

Uit de vergelijking van deze berekening met de vorige blijkt, dat men, behalve de berekening van  $\Delta$ , die zeer eenvoudig afloopt, alleen  $\log \beta''$  meer heeft op te zoeken. De nauwkeurigheid wordt echter aanmerkelijk verhoogd, zoodat men bijvoorbeeld voor de toepassing op de kaart van Nederland alle coördinaten tot in centimeters nauwkeurig kan berekenen.

§ 13. Uit het bovenstaande blijkt duidelijk, dat er verschillende projectiën bestaan, die, wat de verandering van de vergrooting betreft, veel gunstiger zijn dan de projectie met parabolische meridianen en parallellen, zonder daarom al te ingewikkelde formules op te leveren voor de berekening van de coördinaten.

Al die projectiën geven echter, wat de verandering van de vergrooting betreft, niet het uiterste, dat bereikt kan worden. Wij hebben daarom gemeend eene enkele projectie, waarbij werkelijk dat uiterste bereikt wordt, te moeten behandelen (hoofdstuk VII). De formules voor die projectie

$$X = A_1 \lambda'' - A_3 \lambda''^3 + B_0 \beta''^3 - B_2 \beta'' \lambda''^2,$$

$$Y = A_0 + A_2 \lambda''^2 - B_1 \beta''^2 \lambda'' + B_3 \lambda''^3,$$

zijn natuurlijk samengestelder; de vier bijkomende termen kunnen echter met logarithmen met vijf decimalen met genoegzame nauwkeurigheid berekend worden. Zij levert dan het groote voordeel, dat de verandering van de vergrooting aanmerkelijk verminderd wordt. Toegestapt op de kaart van Nederland wordt die verandering van  $\frac{1}{17575}$  tot  $\frac{1}{17500}$  teruggebracht.

## HOOFDSTUK II.

ALGEMEENE BESCHOUWINGEN OVER CONFORME OF  
ORTHOMORPHE PROJECTIËN.

§ 14. Zooals bekend is, is het voor eene conforme of orthomorphe projectie, waarbij dus gelijkvormigheid bestaat tusschen de kleinste deelen van het terrein en de kaart, noodzakelijk en voldoende, dat voor ieder punt twee richtingen, die op het aardoppervlak loodrecht op elkaar staan, dit in de projectie ook zijn, en dat de vergrooting volgens die twee richtingen dezelfde is.

Nemen wij voor die twee richtingen den meridiaan en de parallel, en stellen wij door  $\phi$  en  $\lambda$  de geographische breedte en lengte en door  $x$  en  $y$  de rechthoekige coördinaten van het punt in de kaart voor, dan wordt de richtingscoëfficiënt van den meridiaan in de kaart voorgesteld door

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} : \frac{\partial x}{\partial \phi},$$

en die van den parallelcirkel door

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} : \frac{\partial x}{\partial \lambda}.$$

Staan beide richtingen loodrecht op elkaar, dan moet het produkt van beide richtingscoëfficiënten gelijk zijn aan minus de eenheid; zoo-dat dus de eerste van de bovengenoemde voorwaarden uitgedrukt wordt door

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial \phi}}{\frac{\partial x}{\partial \phi}} \cdot \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} = -1 \dots \dots \dots (1)$$

Stelt  $R$  den kromtestraal van den meridiaan ter breedte  $\phi$  voor, dan is  $Rd\phi$  de lengte van een elementje van den meridiaan; dit zelfde elementje heeft in de kaart tot lengte

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi\right)^2} = d\phi \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2};$$

hieruit volgt dus voor de vergrooting in de richting van den meridiaan, die wij door de letter  $m$  zullen voorstellen,

$$m = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2}}{R} \dots \dots \dots (2)$$

Op overeenkomstige wijze vinden wij voor de vergrooting in de richting van den parallelcirkel, als  $r$  den straal van dien cirkel voorstelt,

$$m = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{r} \dots \dots \dots (3)$$

Daar nu volgens de tweede van de bovengenoemde voorwaarden beide waarden van de vergrooting aan elkaar gelijk moeten zijn, zoo vinden wij als tweede vergelijking

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2}}{R} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{r}.$$

Deze vergelijking kan echter nog belangrijk vereenvoudigd worden; uit (1) volgt namelijk

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = - \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \phi}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}},$$

waardoor bovenstaande vergelijking overgaat in

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial \phi} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2}}{R \frac{\partial x}{\partial \lambda}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{r},$$

en waaruit door vermenigvuldiging met  $R \frac{\partial x}{\partial \lambda}$  en deeling door

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}$$

volgt

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{R \frac{\partial x}{\partial \lambda}}{r \frac{\partial x}{\partial \lambda}} \dots \dots \dots (4)$$

De vergelijkingen (1) en (4) zijn voldoende ter ontwikkeling van de conforme projectiën; in plaats van de eerste kan men echter nog eene andere stellen; door namelijk tusschen (1) en (4) de partieele differentiaalquotienten  $\frac{\partial y}{\partial \phi}$  en  $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$  te elimineeren, vindt men

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = - \frac{R \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{r \frac{\partial x}{\partial \lambda}} \dots \dots \dots (5)$$

Deze vergelijking in verband met (4) is ook voldoende ter bepaling



van de conforme projectiën, en in sommige gevallen te verkiezen boven het stel vergelijkingen (1) en (4).

Stellen wij nu nog in het algemeen <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Bij deze en alle verdere ontwikkelingen beschouwen wij het aardoppervlak als een omwentelingsoppervlak, zonder omtrent den vorm van de meridiaandoorsnede eenige onderstelling te doen. De formules worden daardoor niet alleen algemeener, maar tevens eenvoudiger.

Voor het geval van een ellipsvormigen meridiaan met de excentriciteit  $\epsilon$ , wordt bovenstaande functie  $U$

$$U = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{R}{r} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{(1 - \epsilon^2) d\varphi}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \\ = N\epsilon p \log \frac{Tg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{Tg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_0)} \cdot \left( \frac{1 - \epsilon \sin \varphi}{1 + \epsilon \sin \varphi} \cdot \frac{1 + \epsilon \sin \varphi_0}{1 - \epsilon \sin \varphi_0} \right)^{\frac{1}{2}\epsilon}.$$

Ontwikkelen wij deze uitdrukking in eene reeks volgens de machten van  $\epsilon$  en voeren voor zooveel noodig de afplatting  $p = 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}$  in, dan vinden wij na eenige herleiding

$$U = N\epsilon p \log \frac{Tg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{Tg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_0)} - \\ - 4p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{p}{\epsilon}\right)^{2n} \cos \frac{2n+1}{2}(\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{2n+1}{2}(\varphi - \varphi_0).$$

Door hierin voor de excentriciteit  $\epsilon$  en de afplatting  $p$  de waarden volgens BESSEL te substitueeren vindt men

$$U = \frac{1}{M} \log \frac{Tg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{Tg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_0)} - (8,1261668,918 - 10) \cos \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0) + \\ + (4,8728490,232 - 10) \cos \frac{3}{2}(\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{3}{2}(\varphi - \varphi_0) - \\ - (1,8748036,597 - 10) \cos \frac{5}{2}(\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{5}{2}(\varphi - \varphi_0) + \\ + (8,9524790,101 - 20) \cos \frac{7}{2}(\varphi + \varphi_0) \cdot \sin \frac{7}{2}(\varphi - \varphi_0) - \text{enz.}$$

In deze formules stellen de tusschen haakjes geplaatste getallen de gewone of briggiaansche logarithmen van de coëfficiënten voor. Door  $\log$  worden diezelfde logarithmen verstaan en door  $M$  haar modulus.

Voor het geval, dat men te doen heeft met kleine waarden van het breedteverschil  $\varphi - \varphi_0$ , is het doelmatig ook den eersten term van bovenstaande formule in eene reeks te ontwikkelen, en wel volgens de machten van  $\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$ . Ontwikkelen wij daarbij tevens bovenstaande Sinussen van de veelvouden van  $\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$  volgens de machten van  $\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$ , dan vinden wij met verwaarlozing van termen van de orde  $\epsilon^6 \sin^3 \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$ , die bij de hierachter volgende toepassing op de kaart van Nederland, alleen invloed hebben op de 13<sup>de</sup> decimaal

$$U = 2 \frac{1 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi_m} \frac{\sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \varphi_m} + \frac{2}{3} \left( \frac{\sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \varphi_m} \right)^3 + \frac{2}{5} \left( \frac{\sin \frac{1}{2}\beta}{\cos \varphi_m} \right)^5 + \text{enz.} - \\ - \frac{2}{3} \epsilon^4 \sin^3 \frac{1}{2}\beta \cdot \cos 3\varphi_m,$$

waarin  $\beta$  het breedteverschil  $(\varphi - \varphi_0)$ , en  $\varphi_m$  de gemiddelde breedte  $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$  voorstelt.

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{R}{r} d\phi = U, \dots\dots\dots (6)$$

waarin  $\phi_0$  de breedte van een punt voorstelt, dat zooveel mogelijk in het midden van het af te beelden terrein gelegen is, — welk punt wij met den naam van centraal punt zullen bestempelen, en waarvan de juiste plaats later naauwkeurig zal worden aangegeven, — dan gaan bovenstaande vergelijkingen (4) en (5) over in \*)

Nemen wij van deze uitdrukking de gewone logarithme en stellen daarbij

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{\cos \varphi_m} = x \quad \text{en} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_m}} = \omega,$$

dan vinden wij

$$\log U = a + \log x + \log \omega^2 + a_1 \frac{x^2}{\omega^2} + a_2 \frac{x^4}{\omega^2},$$

waarbij de waarde van de verwaarloosde termen, bij bovengenoemde toepassing, slechts opklimt tot eene eenheid van de elfde decimaal.

De in deze formule voorkomende coëfficiënten hebben de volgende beteekenis

$$a = \log 2 (1 - \varepsilon^2) = 0,29812163612,$$

$$a_1 = \frac{M}{3(1 - \varepsilon^2)} (1 - \varepsilon^4 \cos^3 \varphi_m \cdot \cos 3 \varphi_m),$$

$$a_2 = \frac{M}{5(1 - \varepsilon^2)} \left( 1 - \frac{5}{18} \frac{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_m}{1 - \varepsilon^2} \right).$$

De twee laatste coëfficiënten zijn niet geheel standvastig; zij zijn echter zoo weinig veranderlijk, dat men kan volstaan met voor  $\varphi_m$  eene gemiddelde waarde te nemen. De fout, die daardoor ontstaat, is bij de hier volgende toepassingen nauwelijks merkbaar in de tiende decimaal van  $\log U$ . Voor  $\varphi_m = 52^\circ 13' 20''$  vindt men

$$\log a_1 = 9,1635755 - 10, \quad \log a_2 = 8,79997 - 10.$$

Hiermede zijn de logarithmen van  $U$  berekend, die aan de hierachter gevoegde tabellen ten grondslag liggen.

1) Zoo hier, als bij de verdere ontwikkelingen, hebben wij meermalen te doen met grootheden, die functiën zijn van eene enkele veranderlijke; in alle die gevallen zullen wij, ter vereenvoudiging van de formules, de afgeleide functie door een accent aanduiden.

De gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen (6') hebben wij niet in het algemeen geïntegreerd, omdat in ieder van de hierna te behandelen gevallen daaruit andere differentiaalvergelijkingen kunnen afgeleid worden met eene enkele onafhankelijke veranderlijke, en die dus gemakkelijker te integreeren zijn. De algemeene integraal, die men bijna in iedere verhandeling over conforme projectiën en in ieder handboek over kaartprojectiën vindt, is

$$y = \frac{F(U + \lambda \sqrt{-1}) + F_1(U - \lambda \sqrt{-1})}{2}, \quad x = \frac{F(U + \lambda \sqrt{-1}) - F_1(U - \lambda \sqrt{-1})}{2\lambda \sqrt{-1}}.$$

Neemt men voor de daarin voorkomende functiën  $F$  en  $F_1$

$$F(U) = F_1(U) = A U + B U^2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = U' \frac{\partial x}{\partial \lambda} \quad \text{en} \quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -U' \frac{\partial y}{\partial \lambda}; \quad \dots\dots (6')$$

welke vergelijkingen voor de verdere ontwikkelingen boven de vergelijkingen (4) en (5) nog eenige voordeelen bezitten.

§ 15. Om bij de berekening van de coördinaten van de verschillende punten niet met al te groote getallen te doen te krijgen, is het wenschelijk, dat de oorsprong van het coördinatenstelsel zooveel mogelijk in het midden van het terrein gelegen zij. Wij zullen daarom het in de vorige paragraaf bedoelde centrale punt als oorsprong kiezen. De coördinaten ten opzichte van dit stelsel zullen wij steeds door groote letters uitdrukken; om ze zoodoende te onderscheiden van de coördinaten ten opzichte van andere stelsels, die bij de berekening mochten voorkomen.

Verder zullen wij alle grootheden, die op het centrale punt betrekking hebben, door den index nul onderscheiden, zoodat wij dus voor eerst hebben

$$X_0 = 0 \quad \text{en} \quad Y_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

---

dan verkrijgt men de hier te onderzoeken projectie met parabolische meridianen en parallellen.

Voor de cirkelprojectie van LAGRANGE moet men nemen

$$F(U) = F_1(U) = A Th(\theta + \frac{1}{2} CU),$$

of 
$$F(U) = F_1(U) = \frac{1}{A + Be^{CU}}.$$

Voor de projectie met elliptische parallellen en hyperbolische meridianen (Hoofdstuk V)

$$F(U) = F_1(U) = -A Ch(\theta - CU) \quad \text{of} \quad F(U) = F_1(U) = Ae^{CU} + Be^{-CU};$$

voor die met hyperbolische parallellen en elliptische meridianen (Hoofdstuk V)

$$F(U) = F_1(U) = A Cos(\theta - CU).$$

Voor de in hoofdstuk VI behandelde projectie is

$$F(U) = F_1(U) = AU + BU^2 + CU^3$$

en voor de in hoofdstuk VII behandelde projectie eindelijk

$$F(U) = AU + BU^2 + (C + D\sqrt{-1})U^3,$$

$$F_1(U) = AU + BU^2 + (C - D\sqrt{-1})U^3.$$

Alleen de laatste bevat vier parameters. Één dient voor de bepaling van de schaal, de tweede voor de plaats van het centrale punt, de twee overige om de projectie aan den vorm van het terrein aan te sluiten. De vier daaraan voorafgaande projectiën bevatten slechts drie parameters, en kunnen dus slechts gedeeltelijk aan den vorm van het terrein worden aangesloten. De eerste bevat er slechts twee, en kan dus in het geheel niet daaraan worden aangesloten.

Eindelijk zullen wij de  $F$ -as steeds rakend nemen aan den meridiaan in het centrale punt, en wel met het positieve gedeelte naar het noorden gekeerd. De daarop loodrecht staande  $X$ -as is dan rakend aan den parallelcirkel van het centrale punt. Het positieve gedeelte dier as zullen wij steeds naar het oosten richten.

Uit de aangegeven richting van de  $F$ -as volgt onmiddellijk voor het centrale punt

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0 = 0 \dots \dots \dots (8)$$

Uit de aangegeven richting van de  $X$ -as, of ook door bovenstaande uitdrukking in vergelijking (6) over te brengen, vinden wij voor dat zelfde punt

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \phi}\right)_0 = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Om te zorgen, dat in het centrale punt de overeenstemming tusschen het terrein en de kaart zoo volkomen mogelijk is, zullen wij de vergrooting voor dat punt gelijk aan de eenheid stellen; zoodat dus het terrein, in de onmiddellijke nabijheid van dat punt gelegen, in ware grootte en vorm wordt voorgesteld. Mocht het later om de een of andere reden wenschelijk blijken, de vergrooting in dat punt niet juist gelijk aan de eenheid te nemen, dan kan men zulks gemakkelijk verkrijgen door alle afmetingen met een zelfden factor te vermenigvuldigen. Stellen wij dus voor het centrale punt in (3) de vergrooting  $m = 1$ , dan volgt in verband met (8)

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)_0 = r_0 \dots \dots \dots (10)$$

Op dezelfde wijze vinden wij uit (2) in verband met (9), of ook door (10) in (4) over te brengen,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)_0 = R_0 \dots \dots \dots (11)$$

§ 16. De vergrooting  $m$  verschilt bij de conforme projectiën van het eene punt tot het andere; wil men er voor zorgen, dat die vergrooting voor de verschillende punten van het voor te stellen terrein zoo min mogelijk uit elkaar loopt, dan moet men voor een punt, in het midden van dat terrein gelegen, dus voor het centrale punt, de afgeleide van de vergrooting zoowel ten opzichte van  $\lambda$  als van  $\phi$  gelijk nul maken, dat is dus



$$\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right)_0 = 0, \text{ en } \left(\frac{\partial m}{\partial \phi}\right)_0 = 0,$$

of wat op hetzelfde neerkomt, maar voor de berekening eenvoudiger is,

$$\left(\frac{\partial m^2}{\partial \lambda}\right)_0 = 0, \text{ en } \left(\frac{\partial m^2}{\partial \phi}\right)_0 = 0 \dots \dots \dots (12)$$

Door vergelijking (3) in het vierkant te brengen en ten opzichte van  $\lambda$  te differentieëren, vinden wij

$$\frac{\partial m^2}{\partial \lambda} = \frac{2}{r^2} \left[ \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} \right], \dots \dots \dots (13)$$

waaruit voor het centrale punt in verband met (12), (8) en (10) volgt

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2}\right)_0 = 0 \dots \dots \dots (14)$$

Door dezelfde uitdrukking voor  $m^2$  ten opzichte van  $\phi$  te differentieëren komt er

$$\frac{\partial m^2}{\partial \phi} = \frac{2}{r^2} \left[ \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \phi \partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \lambda} \right] - 2 \frac{r'}{r} m^2.$$

Merken wij verder op, dat voor ieder omwentelingsoppervlak

$$r' = -R \sin \phi \dots \dots \dots (15)$$

is, en dat door differentiatie van (4) en (5) ten opzichte van  $\lambda$  volgt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \lambda} = \frac{R}{r} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}, \dots \dots \dots (16)$$

en

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \phi \partial \lambda} = -\frac{R}{r} \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2}; \dots \dots \dots (17)$$

dan gaat bovenstaande uitdrukking voor  $\frac{d m^2}{d \phi}$  over in

$$\frac{\partial m^2}{\partial \phi} = -2 \frac{R}{r^3} \left[ \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} - m^2 r^2 \sin \phi \right] \dots \dots (18)$$

Voeren wij nu voor het centrale punt de tweede voorwaarde (12) in, en letten wij tevens op (8), (10) en op  $m_0 = 1$ , dan vinden wij

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2}\right)_0 = r_0 \sin \phi_0 \dots \dots \dots (19)$$

Uit de vergelijkingen (16) en (17) volgt verder voor het centrale punt, als wij op (14), (15) en (19) letten,

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \phi \partial \lambda}\right)_0 = 0 \dots \dots \dots (20)$$

en 
$$\left( \frac{\partial^2 X}{\partial \phi \partial \lambda} \right)_0 = -R \sin \phi_0 = r'_0 \dots \dots (21)$$

Door de vergelijkingen (4) en (5) ten opzichte van  $\phi$  te differentieeren vinden wij

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = \frac{rR' - Rr'}{r^2} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{R}{r} \frac{\partial^2 x}{\partial \phi \partial \lambda},$$

en 
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} = -\frac{rR' - Rr'}{r^2} \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{R}{r} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \lambda};$$

waaruit voor het centrale punt volgt, als wij op (8), (10), (20) en (21) letten,

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right)_0 = \frac{r_0 R'_0 - R_0 r'_0}{r_0^2} r_0 + \frac{R_0}{r_0} r'_0 = R'_0 \dots (22)$$

en 
$$\left( \frac{\partial^2 X}{\partial \phi^2} \right)_0 = 0 \dots \dots \dots (23)$$

§ 17. Uit de in de beide vorige paragrafen ontwikkelde waarden voor de gedeeltelijke differentiaalquotienten van  $X$  en  $F$  in het centrale punt kunnen wij een paar betrekkingen afleiden, die bij onze verdere ontwikkelingen van eenig nut kunnen zijn.

De kromtestraal van den meridiaan in de kaart, wordt voor een willekeurig punt uitgedrukt door

$$\frac{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} - \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2}}.$$

Brengen wij hierin de waarden over, die gelden voor het centrale punt, dan wordt die kromtestraal oneindig groot.

De kromtestraal van de parallel in de kaart wordt uitgedrukt door

$$\frac{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}},$$

en deze uitdrukking gaat voor het centrale punt over in

$$\frac{r_0}{\sin \phi_0} = N_0 \operatorname{Ctg} \phi_0,$$

als  $N$  de lengte van de normaal tot aan de omwentelingsas voorstelt.

De eerste dezer uitkomsten leert, dat onder de in § 16 genoemde voorwaarde, het centrale punt in de kaart alleen kan overeenkomen

met een punt, waar de meridiaan een oneindig grooten kromtestraal bezit. De laatste uitkomst leert, dat in dat punt de kromtestraal van de parallel gelijk is aan de lengte van het stuk van de beschrijvende lijn van den omhullingskegel, die het aardoppervlak aanraakt volgens den parallelcirkel van het centrale punt, begrepen tusschen het raakpunt en den top.

§ 18. Voor de vergrooting  $m$  hebben wij hiervoor twee uitdrukkingen (2) en (3) ontwikkeld. Voor het geval echter van een klein terrein, dat zich in de verschillende richtingen slechts over enkele weinige graden uitstrekt, is het doelmatiger de waarde van  $m$  of van  $m^2$  in eene reeks te ontwikkelen volgens de opklimmende machten van  $\phi - \phi_0 = \beta$  en van  $\lambda$ ; waarbij wij, voor wat de lengte betreft, uitgaan van de onderstelling, dat de meridiaan van het centrale punt als eerste meridiaan wordt aangenomen.

Voor deze ontwikkeling hebben wij hiervoor reeds gevonden

$$m_0^2 = 1, \quad \left( \frac{\partial m^2}{\partial \lambda} \right)_0 = 0, \quad \text{en} \quad \left( \frac{\partial m^2}{\partial \phi} \right)_0 = 0;$$

willen wij de ontwikkeling dus voortzetten tot op de termen van de derde orde na, dan moeten wij nog de waarden van

$$\left( \frac{\partial^2 m^2}{\partial \lambda^2} \right)_0, \quad \left( \frac{\partial^2 m^2}{\partial \lambda \partial \phi} \right)_0 \quad \text{en} \quad \left( \frac{\partial^2 m^2}{\partial \phi^2} \right)_0,$$

ontwikkelen.

Differentieeren wij daartoe vooreerst de vergelijking (13) ten opzichte van  $\lambda$ , dan vinden wij

$$\frac{\partial^2 m^2}{\partial \lambda^2} = \frac{2}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} \right)^2 + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 x}{\partial \lambda^3} + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} \right)^2 + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 y}{\partial \lambda^3} \right],$$

waaruit voor het centrale punt volgt, als wij op (8), (10), (14) en (19) letten,

$$\left( \frac{\partial^2 m^2}{\partial \lambda^2} \right)_0 = 2 \left[ \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0 + \sin^2 \phi_0 \right], \dots \dots (24)$$

Door (18) ten opzichte van  $\lambda$  te differentieeren komt er

$$\frac{\partial^2 m^2}{\partial \lambda \partial \phi} = -2 \frac{R}{r^3} \left[ \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 y}{\partial \lambda^3} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 x}{\partial \lambda^3} - r^2 \sin \phi \frac{\partial m^2}{\partial \lambda} \right],$$

waaruit met het oog op (8), (10) en (12) voor het centrale punt volgt

$$\left( \frac{\partial^2 m^2}{\partial \lambda \partial \phi} \right)_0 = -2 \frac{R_0}{r_0^2} \left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3} \right)_0 \dots \dots \dots (25)$$

Differentieeren wij diezelfde vergelijking (18) ten opzichte van  $\phi$ , dan komt er

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m^2}{\partial \phi^2} = & -2 \frac{r R' - 3 R r'}{r^4} \left[ \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} - m^2 r^2 \sin \phi \right] - \\ & - 2 \frac{R}{r^3} \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial \phi \partial \lambda} \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 y}{\partial \lambda^2 \partial \phi} - \frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 x}{\partial \lambda^2 \partial \phi} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial m^2}{\partial \phi} r^2 \sin \phi - 2 m^2 r r' \sin \phi - m^2 r^2 \cos \phi \right]; \end{aligned}$$

of als wij de vergelijkingen (16) en (17) in aanmerking nemen, en tevens de twee vergelijkingen, die daaruit door differentiatie ten opzichte van  $\lambda$  volgen, namelijk

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi \partial \lambda^2} = \frac{R}{r} \frac{\partial^3 x}{\partial \lambda^3}, \quad \text{en} \quad \frac{\partial^3 x}{\partial \phi \partial \lambda^2} = -\frac{R}{r} \frac{\partial^3 y}{\partial \lambda^3},$$

dan vinden wij

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m^2}{\partial \phi^2} = & -2 \frac{r R' - 3 R r'}{r^4} \left[ \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} - m^2 r^2 \sin \phi \right] + \\ & + 2 \frac{R^2}{r^4} \left[ \left( \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} \right)^2 - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 x}{\partial \lambda^3} + \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} \right)^2 - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial^3 y}{\partial \lambda^3} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial m^2}{\partial \phi} \frac{r^3}{R} \sin \phi + 2 m^2 \frac{r^2 r'}{R} \sin \phi + m^2 \frac{r^3}{R} \cos \phi \right]. \end{aligned}$$

Met behulp van (8), (10), (12), (14), (15) en (19) vinden wij eindelijk voor het centrale punt

$$\left( \frac{\partial^2 m^2}{\partial \phi^2} \right)_0 = -2 \frac{R_0^2}{r_0^2} \sin^2 \phi_0 + 2 \frac{R_0}{r_0} \cos \phi_0 - 2 \frac{R_0^2}{r_0^3} \left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0. \quad (26)$$

Volgens de reeks van TAYLOR is nu, tot op termen van de derde orde na,

$$\begin{aligned} m^2 = & m_0^2 + \left( \frac{\partial m^2}{\partial \lambda} \right)_0 \lambda + \left( \frac{\partial m^2}{\partial \phi} \right)_0 \beta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 m^2}{\partial \lambda^2} \right)_0 \lambda^2 + \\ & + \left( \frac{\partial^2 m^2}{\partial \lambda \partial \phi} \right)_0 \lambda \beta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 m^2}{\partial \phi^2} \right)_0 \beta^2; \end{aligned}$$

waarin  $\beta$  het breedteverschil ( $\phi - \phi_0$ ) voorstelt.

Substitueeren wij hierin de boven gevonden partieele differentiaal-quotienten voor het centrale punt, dan vinden wij

$$\begin{aligned} m^2 = & 1 + \left[ \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0 + \sin^2 \phi_0 \right] \lambda^2 - 2 \frac{R_0}{r_0^2} \left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3} \right)_0 \lambda \beta + \\ & + \left[ \frac{R_0}{r_0} \cos \phi_0 - \frac{R_0^2}{r_0^3} \left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0 - \frac{R_0^2}{r_0^2} \sin^2 \phi_0 \right] \beta^2. \end{aligned}$$



Nemen wij nu nog in aanmerking, dat uit de formules (7) tot (11), tot op termen van de tweede orde na, volgt

$$X = r_0 \lambda \quad \text{en} \quad Y = R_0 \beta,$$

dan kunnen wij voor bovenstaande uitdrukking van  $m^2$  schrijven

$$m^2 = 1 + \left[ \frac{1}{r_0^3} \left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0 + \frac{\sin^2 \phi_0}{r_0^2} \right] X^2 - \frac{2}{r_0^3} \left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3} \right)_0 X Y + \\ + \left[ \frac{\cos \phi_0}{R_0 r_0} - \frac{1}{r_0^3} \left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0 - \frac{\sin^2 \phi_0}{r_0^2} \right] Y^2 \dots (27)$$

De hier gevonden uitdrukking voor de vergrooiting kan onder een nog eenvoudiger vorm gebracht worden. Tellen wij namelijk de coëfficiënten van  $X^2$  en  $Y^2$  samen, dan vinden wij daarvoor de eenvoudige uitdrukking

$$\frac{\cos \phi_0}{R_0 r_0} = \frac{1}{R_0 N_0} = \frac{1}{\rho_0^2},$$

als  $N$  de lengte van de normaal en  $\rho$  den zoogenaamden gemiddelden straal  $\sqrt{RN}$  voorstelt. Stellen wij nu het verschil van beide coëfficiënten door  $\frac{P}{\rho_0^2}$  en den coëfficiënt van  $XY$  door  $\frac{Q}{\rho_0^2}$  voor, dan gaat (27) over in

$$m^2 = 1 + \frac{(1+P)X^2 - 2QXY + (1-P)Y^2}{2\rho_0^2},$$

of als wij uit beide leden den wortel trekken

$$m = 1 + \frac{(1+P)X^2 - 2QXY + (1-P)Y^2}{4\rho_0^2} \dots (28)$$

De hierin voorkomende waarden van  $P$  en  $Q$  zijn bepaald door de volgende uitdrukkingen

$$P = 2 \frac{\rho_0^2}{r_0^3} \left[ r_0 \sin^2 \phi_0 + \left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0 \right] - 1 = 2 \frac{R_0}{N_0} T g^2 \phi_0 - 1 + \\ + \frac{2 R_0}{r_0^2 \cos \phi_0} \left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0 \dots (29)$$

$$Q = 2 \frac{\rho_0^2}{r_0^3} \left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3} \right)_0 = 2 \frac{R_0}{r_0^2 \cos \phi_0} \left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3} \right)_0 \dots (30)$$

§ 19. Uit (28) blijkt, dat alle punten van de kaart, waarvoor de vergrooiting dezelfde is, gelegen zijn op gelijkvormige ellipsen of gelijkvormige hyperbolen.

Het gunstigste zal het zijn, als die lijnen ellipsen voorstellen; want

is voor de kleinste van die ellipsen, die nog om het terrein beschreven is, de waarde van  $(1+P)X^2 - 2QXY + (1-P)Y^2$  gelijk aan  $c^2$ , dan neemt de vergrooting van het centrale punt af in alle richtingen toe van de eenheid tot  $1 + \frac{c^2}{4\rho_0^2}$ . Verkleint men nu alle afmetingen in reden van 1 tot  $1 - \frac{c^2}{8\rho_0^2}$ , dan wordt de vergrooting in het centrale punt  $1 - \frac{c^2}{8\rho_0^2}$  en in de uiterste punten  $1 + \frac{c^2}{8\rho_0^2}$ ; zoodat die vergrooting nergens meer dan

$$\frac{c^2}{8\rho_0^2} \dots \dots \dots (31)$$

van de eenheid afwijkt.

Heeft men daarentegen met hyperbolen als lijnen van gelijke vergrooting te doen, dan wordt de kaart door de gemeenschappelijke asymptoten in vier deelen gedeeld. In twee daarvan is de vergrooting grooter, in de twee andere is zij kleiner dan de eenheid. Is voor de uiterste hyperbool in het eene gedeelte de waarde van  $(1+P)X^2 - 2QXY + (1-P)Y^2$  gelijk aan  $c_1^2$ , en in het andere gedeelte gelijk aan  $-c_2^2$ , dan verandert de vergrooting tusschen de grenzen  $1 + \frac{c_1^2}{4\rho_0^2}$  en  $1 - \frac{c_2^2}{4\rho_0^2}$ . Door hier nu alle afmetingen te wijzigen in de verhouding van 1 tot  $1 - \frac{c_1^2}{8\rho_0^2} + \frac{c_2^2}{8\rho_0^2}$ , kan men slechts verkrijgen dat de vergrooting hoogstens

$$\frac{c_1^2 + c_2^2}{8\rho_0^2}$$

van de eenheid afwijkt.

Een getallen-voorbeeld moge dit nog nader toelichten. In fig. II is om de kaart van Nederland een cirkel, zooals die bij de stereographische projectie voorkomt, als lijn van gelijke vergrooting getrokken <sup>1)</sup>. Voor dien cirkel is  $c = 170000$  meter, en daaruit volgt voor  $\frac{c^2}{4\rho_0^2}$  de waarde 0,0001774; zoodat de vergrooting van het centrale punt af in iedere richting toeneemt van de eenheid tot 1,0001774. Door echter alle afmetingen in reden van 1 tot

<sup>1)</sup> Voor nadere bijzonderheden hieromtrent raadplege men § 23 als ook § 33 en § 53.

$1 - 0,0000887 = 0,9999113$  te verkleinen verkrijgt men, dat de vergrooting nergens meer van de eenheid afwijkt dan

$$0,0000887 = \frac{1}{11175}.$$

In fig. III zijn om dezelfde kaart eenige hyperbolen getrokken, die de lijnen van gelijke vergrooting voorstellen bij eene kaart met parabolische meridianen en parallellen <sup>1)</sup>. Daaruit blijkt, dat de vergrooting begrepen is tusschen de grenzen  $1 - 0,00017$  en  $1 + 0,00029$ ; en door dus alle afmetingen in reden van 1 tot  $1 - 0,00006 = 0,99994$  te verkleinen, kan men het alleen er toe brengen, dat de vergrooting niet meer van de eenheid afwijkt dan

$$0,00023 = \frac{1}{4350}.$$

Zoodat de afwijkingen in dit geval ongeveer twee en een halfmaal grooter zijn dan in het vorige.

§ 20. Blijkt het uit de vorige paragraaf, dat het voor de kaart-projectie voordeelig is, als de lijnen van gelijke vergrooting ellipsen zijn, als dus voldaan is aan de betrekking

$$P^2 + Q^2 < 1,$$

zoo zal men in nog gunstiger omstandigheden verkeeren, indien  $\left(\frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3}\right)_0$  en  $\left(\frac{\partial^3 F}{\partial \lambda^3}\right)_0$  een paar standvastigen bevatten, waarover men naar willekeur kan beschikken; want men kan alsdan aan  $P$  en  $Q$  zoodanige waarden geven, dat de grootheid  $c$ , en dus ook de afwijking van de vergrooting van de eenheid, dat is  $\frac{c^2}{8\rho_0^2}$ , zoo klein mogelijk wordt.

Zijn  $a$  en  $b$  de halve assen van de uiterste ellips van gelijke vergrooting, en is  $\alpha$  de hoek, dien de halve as  $a$  met de richting van den meridiaan maakt, gerekend van het noorden naar het oosten, dan is de vergelijking dier ellips in poolcoördinaten

$$\frac{\rho^2 \sin^2(\theta - \alpha)}{b^2} + \frac{\rho^2 \cos^2(\theta - \alpha)}{a^2} = 1,$$

waarin  $\rho$  den voerstraal en  $\theta$  den hoek voorstelt, dien de voerstraal met de  $F$ -as maakt, geteld in dezelfde richting als de hoek  $\alpha$ .

Aangezien nu  $X = \rho \sin \theta$  en  $F = \rho \cos \theta$  is, zoo volgt hieruit voor de vergelijking der ellips in rechthoekige coördinaten

<sup>1)</sup> Voor nadere bijzonderheden hieromtrent raadplege men § 40.

$$\left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{a^2}\right) X^2 - 2 \left(\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{b^2} - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{a^2}\right) XY + \\ + \left(\frac{\sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{a^2}\right) Y^2 = 1.$$

Zal deze ellips identiek zijn met de ellips

$$(1+P)X^2 - 2QXY + (1-P)Y^2 = c^2,$$

dan moet aan de volgende voorwaarden voldaan worden

$$\left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{a^2}\right) c^2 = 1+P,$$

$$\left(\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{b^2} - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{a^2}\right) c^2 = Q,$$

$$\left(\frac{\sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{a^2}\right) c^2 = 1-P;$$

waaruit door oplossing volgt

$$c^2 = 2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \dots \dots \dots (32)$$

$$P = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos 2\alpha, \dots \dots \dots (33)$$

$$Q = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \sin 2\alpha \dots \dots \dots (34)$$

Trekken wij in bovenstaande ellips de middellijn, die den hoek tusschen de assen midden door deelt, dan kunnen wij de lengte daarvan vinden door in bovenstaande polaire vergelijking ( $\theta - \alpha$ ) gelijk aan  $45^\circ$  te stellen; wij vinden dan

$$\rho^2 = 2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = c^2;$$

zoodat dus de halve lengte dier middellijn gelijk is aan de grootte  $c$ .

Wil men de projectie dus zoodanig inrichten, dat de vergrooing zoo min mogelijk van de eenheid afwijkt, dan moet men om het terrein eene ellips construeeren, waarvoor de middellijn, die den hoek tusschen de assen midden door deelt, zoo klein mogelijk is. Uit de halve assen  $a$  en  $b$  en den hoek  $\alpha$ , dien de halve as  $a$  met den meridaan maakt, vindt men dan met behulp van (33) en (34) de aan  $P$  en  $Q$  te geven waarden. Het middelpunt van de ellips geeft ons tevens het punt aan, dat wij voor het centrale punt van de kaart moeten kiezen.



§ 21. De boven bedoelde ellips kan men gemakkelijk door beproeven vinden, door op calqueerpapier eenige ellipsen te teekenen en deze om de kaart van het terrein te passen; heeft men eene ellips gevonden, die om het terrein past, dan teekene men eenige andere ellipsen, die dezelfde waarde voor  $c$  hebben, maar eene andere verhouding voor de assen, en gaat na, of er hierbij ook zijn, waarin het voor te stellen terrein met meer speelruimte past. Men zal dan met diezelfde verhouding voor de assen en met eene kleinere waarde van  $c$  eene nieuwe ellips kunnen teekenen, die om het terrein past, en dus eene kleinere waarde voor de afwijking van de vergrooting geeft.

In fig. I is deze handelwijze op de kaart van Nederland toegepast.

Vreest men door de kleine schaal van de teekening, waarop men dit onderzoek moet instellen, te onnauwkeurige uitkomsten te verkrijgen, dan kan men, nadat men op de boven beschreven wijze de ellips ten naaste bij gevonden heeft, de vijf punten van de grenzen van het terrein, die op de bedoelde ellips liggen, gemakkelijk vinden, de coördinaten daarvan op eene grootere kaart uitmeten, en met behulp hiervan door berekening de waarden van  $P$ ,  $Q$  en  $c$  en de plaats van het centrale punt zoeken.

Uit fig. I vinden wij voor deze vijf punten: 1°. de uiterste grens bij Bourtange, 2°. de aansluiting van de grens tusschen Westfalen en Hannover, 3°. het zuid oostelijkste punt van Limburg, 4°. het westelijkste punt van Walcheren en 5°. een punt van de noordwestelijke grens van Vlieland. Op de topographische kaart gemeten zijn de coördinaten van deze punten

|    |       |          |         |         |
|----|-------|----------|---------|---------|
| 1. | $x =$ | 156630,  | $y =$   | 170340, |
| 2. | $x =$ | 148860,  | $y =$   | 84730,  |
| 3. | $x =$ | 80290,   | $y = -$ | 82240,  |
| 4. | $x =$ | -100350, | $y =$   | 5550,   |
| 5. | $x =$ | -1230,   | $y =$   | 191260. |

Zijn nu  $p$  en  $q$  de coördinaten van het centrale punt in het coördinatenstelsel van de topographische kaart, dan is de vergelijking van de gevraagde ellips

$$(1 + P)(x - p)^2 - 2 Q(x - p)(y - q) + (1 - P)(y - q)^2 = c^2.$$

Substitueeren wij nu hierin beurtelings bovenstaande vijf waarden van  $x$  en  $y$ , dan vinden wij vijf vergelijkingen met de vijf onbekenden  $P$ ,  $Q$ ,  $p$ ,  $q$  en  $c$ , die daaruit gemakkelijk opgelost kunnen worden.

Door die oplossing vinden wij

$$\begin{aligned} P &= 0,45766, & Q &= 0,50493, \\ p &= 19810 \text{ meter}, & q &= 27770 \text{ meter}, \\ c &= 136430 \text{ meter}^1). \end{aligned}$$

Het punt, door bovenstaande waarden van  $p$  en  $q$  op de topographische kaart bepaald, ligt 80 meters ten zuiden van het punt, dat op  $51^\circ 45'$  NB. en  $17' 13''$  OL. van Amsterdam ligt. Uit de gevonden waarde van  $c$  en den gemiddelden straal voor  $51^\circ 45'$ , namelijk

$$\rho_0 = 6382350 \text{ meter, volgt } \frac{c^2}{8\rho_0^2} = 0,0000571 = \frac{1}{17500}.$$

Zien wij, om voor de breedte een rond getal minuten te verkrijgen van bovenstaande 80 meter, overeenkomende met ongeveer  $2\frac{2}{3}$  seconde, af, dan vinden wij dus voor de beste kaart van Nederland de volgende gegevens.

|              |                                                                                                    |                   |                |               |   |      |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|----------------|---------------|---|------|
|              | Centraalpunt                                                                                       | $51^\circ 45'$ NB | $17' 13''$ OL. | van Amsterdam | } | (35) |
|              | Constanten                                                                                         | $P = 0,45766$     | $Q = 0,50493$  |               |   |      |
| Herleidings- | $1 - \frac{c^2}{8\rho_0^2} = 1 - \frac{1}{17500} = \frac{17499}{17500} (\log = 9,9999751824 - 10)$ |                   |                |               |   |      |
| coëfficiënt  |                                                                                                    |                   |                |               |   |      |

$$\text{Grenzen voor de vergrooting } 1 \pm 0,0000571 = 1 \pm \frac{1}{17500}$$

§ 22. Stellen wij in (32), (33) en (34),  $\alpha = \infty$  dan vinden wij

$$\begin{aligned} c^2 &= 2b^2, \\ P &= \cos 2\alpha, \\ Q &= \sin 2\alpha, \\ \frac{c^2}{8\rho_0^2} &= \frac{b^2}{4\rho_0^2} = \frac{1}{16} \left( \frac{2b}{\rho_0} \right)^2. \end{aligned}$$

De lijnen van gelijke vergrooting gaan dan over in evenwijdige rechte lijnen, en de projectie is dan geschikt voor een lang maar smal terrein. Ter bepaling van  $b$  en  $\alpha$  heeft men dan slechts het terrein tusschen twee evenwijdige lijnen, met zoo klein mogelijken onderlingen afstand, in te sluiten. De afstand dezer lijnen is dan

<sup>1)</sup> Uit bovenstaande waarden van  $P$ ,  $Q$  en  $c$  vinden wij voor  $a$ ,  $b$  en  $\alpha$

$$\begin{aligned} \text{Ty } 2\alpha &= \frac{Q}{P}, & \alpha &= 23^\circ 54' 20'', \\ a^2 &= \frac{c^2}{1 - \sqrt{P^2 + Q^2}}, & a &= 241730 \text{ meter}, \\ b^2 &= \frac{c^2}{1 + \sqrt{P^2 + Q^2}}, & b &= 105212 \text{ meter}. \end{aligned}$$

2*b* en daaruit volgt voor de grenzen, waar tusschen de vergrooting begrepen kan blijven,

$$1 \pm \frac{1}{16} \left( \frac{2b}{\rho_0} \right)^2.$$

Dit geval is onder ander van toepassing op het eiland Java. Een eenvoudig onderzoek leert, dat het geheele eiland tusschen twee evenwijdige lijnen kan besloten worden, wier afstand 215000 meter bedraagt. Hieruit volgt dus, dat het mogelijk is voor Java eene conforme projectie te ontwerpen, waarbij de vergrooting nergens meer van de eenheid zal afwijken dan

$$\frac{1}{16} \left( \frac{215000}{\rho_0} \right)^2 = 0,0000715 = \frac{1}{14000}.$$

§ 23. Bij vele projectiën, en onder andere bij alle projectiën, die symmetrisch zijn ten opzichte van de *X*-as, is  $\left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3} \right)_0 = 0$ , en dus  $Q = 0$ . Bij deze projectiën zijn de assen van de ellipsen van gelijke vergrooting gericht volgens de coördinatenassen.

Het onderzoek naar de voordeeligste waarde van *P* heeft hier op dezelfde wijze plaats als in § 21 is aangewezen, met dit kleine verschil, dat men steeds aan de assen der ellipsen bovengenoemden stand moet geven. Uit de lengten van de halve assen der ellips vindt men dan de waarde van *P* door de volgende formule

$$P = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

terwijl *c* steeds door (32) bepaald blijft.

Voor een terrein, dat zich hoofdzakelijk uitbreidt in de richting van de parallellen, maar zeer weinig in de richting van den meridiaan, zal men *b* oneindig groot kunnen nemen, waaruit voor *P* volgt

$$P = -1.$$

Voor een terrein daarentegen, dat zich hoofdzakelijk in de richting van den meridiaan uitstrekt,  $a = \infty$  nemende, vinden wij de andere uiterste waarde voor *P*, namelijk

$$P = +1.$$

Hebben wij eindelijk te doen met een terrein, dat zich in alle richtingen ongeveer even ver uitbreidt, dan wordt  $a = b$ ; de ellipsen gaan in cirkels over, en wij vinden voor *P*

$$P = 0.$$

Voor een terrein, dat tot geen van de drie genoemde gevallen behoort, zal men op de beschreven wijze de gunstigste waarde van  $P$  moeten zoeken, die altijd gelegen zal zijn tusschen  $-1$  en  $+1$ .

Bovengenoemd onderzoek op de kaart van Nederland uitvoerende vindt men voor den gunstigsten vorm van de ellips, den in fig. II voorgestelden cirkel, waarvan het middelpunt gelegen is op  $52^{\circ}13'20''$  NB. en  $26^{\circ}30''$  OL. van Amsterdam.

Bij eene kaartprojectie voor Nederland, waarbij  $Q = 0$  is, zal men dus het centrale punt moeten nemen op

$52^{\circ}13'20''$  NB.  $26^{\circ}30''$  OL. van Amsterdam,

en voor  $P$  eene waarde gelijk aan nul of ongeveer gelijk aan nul.

De straal van bovengenoemden cirkel is ongeveer 170000 meter;

dit is tevens de waarde van  $c$ , en daaruit volgt  $\frac{c^2}{8\rho_0^2} = 0,0000887 =$   
 $= \frac{1}{11275}$ ; zoodat de toe te passen herleidingscoëfficiënt  $\frac{11274}{11275}$   
 ( $\log = 9,9999614799-10$ ) wordt, en de vergrooting nergens meer van de eenheid zal afwijken dan

$$0,0000887 = \frac{1}{11275}.$$

Hieruit blijkt, dat voor eene projectie voor eene kaart van Nederland, waarbij symetrie bestaat ten opzichte van den meridiaan van het centrale punt, de afwijking ongeveer anderhalfmaal zoo groot is, als voor eene projectie, waarbij die symetrie niet aanwezig is.

### HOOFDSTUK III.

#### DE CIRKELPROJECTIE VAN LAGRANGE.

§ 24. Uitgaande van de algemeene vergelijkingen voor de conforme projectiën, ontwikkelt LAGRANGE in een tweetal verhandelingen *Sur la construction des cartes géographiques*, voorkomende in de *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1779, pages 161—210 (zie ook: *Oeuvres de LAGRANGE par J. A. SERRET*, T. IV, pages 635—692), eene projectie, waarbij de meridianen en parallellen in de kaart door cirkels voorgesteld worden. Wij zullen hier langs een anderen weg, onmiddellijk uitgaande van



de onderstelling, dat genoemde lijnen door cirkels voorgesteld worden, die projectie ontwikkelen en in verband brengen met de in het vorige hoofdstuk ontwikkelde theorie omtrent de vergrooting.

angezien de twee cirkels, die een meridiaan en een parallel voorstellen, elkaar rechthoekig moeten snijden, zoo zal, als wij het gemeenschappelijk snijpunt met beide middelpunten vereenigen, en ook de verbindingslijn dier twee middelpunten trekken, een rechthoekige driehoek ontstaan; waaruit volgt, dat de som van de vierkanten van beide stralen gelijk is aan het vierkant van den afstand van beide middelpunten. Stellen wij dus door  $r_\phi$ ,  $x_\phi$  en  $y_\phi$  den straal en de coördinaten van het middelpunt van den parallelcirkel ter breedte  $\phi$  voor, en door  $r_\lambda$ ,  $x_\lambda$  en  $y_\lambda$  de overeenkomstige grootheden voor den meridiaan ter lengte  $\lambda$ , dan vinden wij

$$r_\phi^2 + r_\lambda^2 = (x_\phi - x_\lambda)^2 + (y_\phi - y_\lambda)^2 \dots\dots\dots (1)$$

Daar deze betrekking voor alle mogelijke waarden van  $\phi$  en  $\lambda$  moet doorgaan, zoo kunnen wij ten opzichte van  $\phi$  en  $\lambda$  differentieeren, waardoor wij vinden

$$x'_\phi x'_\lambda + y'_\phi y'_\lambda = 0,$$

$$\text{of} \quad \frac{y'_\phi}{x'_\phi} = -\frac{x'_\lambda}{y'_\lambda};$$

waaruit volgt, dat de middelpunten van de cirkels, die de parallellen voorstellen, en de middelpunten van de cirkels, die de meridianen voorstellen, gelegen zijn op twee rechte lijnen, die loodrecht op elkaar staan.

Nemen wij deze twee lijnen voorloopig als coördinatenassen aan, en wel de lijn van de middelpunten der parallellen als  $y$ -as, en die van de meridianen als  $x$ -as; dan is  $x_\phi = y_\lambda = 0$ . Stellen wij verder  $y_\phi = B$  en  $x_\lambda = -L$ , dan gaat (1) over in

$$r_\phi^2 + r_\lambda^2 = L^2 + B^2,$$

$$\text{of} \quad r_\lambda^2 - L^2 = B^2 - r_\phi^2.$$

Aangezien het eerste lid dezer vergelijking alleen afhangt van  $\lambda$ , en het tweede lid alleen van  $\phi$ , zoo kan aan deze vergelijking alleen voldaan worden, als beide leden gelijk zijn aan eene zelfde standvastige. Stellen wij deze standvastige door  $A^2$  voor, dan volgen uit die eene vergelijking de beide volgende betrekkingen

$$r_\lambda = \sqrt{L^2 + A^2}, \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{en} \quad r_\phi = \sqrt{B^2 - A^2}; \dots\dots\dots (3)$$

en het komt er dus alleen nog op aan de twee functiën  $L$  en  $B$  te bepalen, waarvan de eerste uitsluitend van de lengte, de tweede uitsluitend van de breedte afhangt.

§ 25. In figuur 1, waarin  $oA = A$ ,  $oB = B$  en  $oL = L$  is, stelt PS de uit B als middelpunt beschreven parallel ter breedte  $\phi$  en APQ den uit L als middelpunt beschreven meridiaan van de lengte  $\lambda$  voor. Uit die figuur kunnen wij gemakkelijk de coördinaten van het punt P opschrijven, indien wij als hulphoek invoeren, den hoek, dien de meridiaan in P met de  $y$ -as of de parallel in dat punt met de  $x$ -as maakt, dat is  $\alpha = \angle oBP = \angle oLP$ . Voor beide coördinaten vinden wij op die wijze twee waarden, en wel

$$x = r_{\phi} \sin \alpha, \quad \text{en} \quad x = r_{\lambda} \cos \alpha - L, \dots\dots\dots (4)$$

$$y = B - r_{\phi} \cos \alpha, \quad y = r_{\lambda} \sin \alpha \dots\dots\dots (5)$$

Stellen wij de twee waarden voor  $x$ , en de twee waarden voor  $y$  aan elkaar gelijk, dan vinden wij twee vergelijkingen, waaruit de hulphoek  $\alpha$  kan gevonden worden. De eenvoudigste formule vinden wij door beide vergelijkingen daartoe te bezigen, en daaruit afzonderlijk den Sinus en den Cosinus van  $\alpha$  op te lossen, waardoor wij vinden, als wij op (2) en (3) letten,

$$(r_{\phi}^2 + r_{\lambda}^2) \sin \alpha = B \sqrt{L^2 + A^2} - L \sqrt{B^2 - A^2},$$

$$(r_{\phi}^2 + r_{\lambda}^2) \cos \alpha = B \sqrt{B^2 - A^2} + L \sqrt{L^2 + A^2}.$$

Trekken wij de laatste dezer vergelijkingen van  $r_{\phi}^2 + r_{\lambda}^2 = B^2 + L^2$  af, dan komt er

$$(r_{\phi}^2 + r_{\lambda}^2)(1 - \cos \alpha) = B^2 + L^2 - B \sqrt{B^2 - A^2} - L \sqrt{L^2 + A^2}.$$

Deelen wij nu deze vergelijking door de eerste, dan vinden wij

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{B^2 + L^2 - B \sqrt{B^2 - A^2} - L \sqrt{L^2 + A^2}}{B \sqrt{L^2 + A^2} - L \sqrt{B^2 - A^2}}.$$

Merken wij nu op, dat het eerste lid dezer vergelijking gelijk is aan  $Tg \frac{1}{2} \alpha$ , en vermenigvuldigen wij teller en noemer van het tweede lid met

$$B \sqrt{L^2 + A^2} + L \sqrt{B^2 - A^2},$$

dan komt er na eenige herleidingen

$$Tg \frac{1}{2} \alpha = \frac{B - \sqrt{B^2 - A^2}}{A} \cdot \frac{\sqrt{L^2 + A^2} - L}{A}; \dots\dots\dots (6)$$

waaruit  $\alpha$  gemakkelijk berekend kan worden, indien men vooraf tafels ontwerpt van de waarden van  $\log \frac{B - \sqrt{B^2 - A^2}}{A}$  en  $\log \frac{\sqrt{L^2 + A^2} - L}{A}$ , waarvan de eerste alleen afhangt van  $\phi$ , de laatste alleen van  $\lambda$ .

§ 26. Heeft men uit formule (6) den hulphoek  $\alpha$  berekend, dan geven (4) en (5) de coördinaten  $x$  en  $y$ . Deze formules willen wij echter nog eene kleine wijziging laten ondergaan, om ze beter voor de berekening geschikt te maken. Tevens zullen wij daarbij overgaan tot het in § 15 aangegeven coördinatenstelsel. In § 17 hebben wij gezien, dat de kromtestraal van den meridiaan in het centrale punt op de kaart oneindig groot moet zijn; daaruit volgt onmiddellijk, dat het centrale punt alleen kan gelegen zijn op de lijn  $oA$ . Stel dus dat genoemd punt in  $O$  komt, en dat wij den oorsprong der coördinaten daarheen verplaatsen; de abscis ondergaat dan geene verandering, maar van de ordinaat  $y$  moeten wij  $oO$ , dat is de ordinaat  $y_0$  van het centrale punt, aftrekken. Daar nu voor het centrale punt  $\alpha = 0$  is, zoo volgt uit (5) voor dat punt

$$y_0 = B_0 - r_{\varphi_0} = B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2},$$

en daardoor vinden wij voor  $X$  en  $Y$ , als wij zoowel van (4) als van (5) de eerste vergelijking nemen,

$$X = \sqrt{B^2 - A^2} \sin \alpha \dots \dots \dots (7)$$

$$Y = B - B_0 + \sqrt{B_0^2 - A^2} - \sqrt{B^2 - A^2} \cos \alpha.$$

Voor de werkelijke berekening is de laatste formule weinig geschikt, omdat  $Y$  daarin uitgedrukt is door het verschil van twee groote getallen. Vervangen wij echter  $\cos \alpha$  door  $(1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha)$ , en merken op, dat uit (7) volgt  $2 \sqrt{B^2 - A^2} \sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{X}{\cos \frac{1}{2} \alpha}$ , dan gaat de uitdrukking voor  $Y$  over in

$$Y = (B - \sqrt{B^2 - A^2}) - (B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2}) + X \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha \dots (8)$$

Vatten wij de in deze en in de vorige paragraaf ontwikkelde formules samen, dan vinden wij voor de berekening van de coördinaten het volgende stel formules

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha &= q \frac{\sqrt{L^2 + A^2} - L}{A} {}^1), \\ X &= p \sin \alpha, \\ Y &= S + X \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

<sup>1)</sup> De uitdrukking  $\frac{\sqrt{L^2 + A^2} - L}{A}$  heeft eene eenvoudige meetkundige beteekenis. Uit figuur 1 volgt namelijk, dat die uitdrukking gelijk is aan  $\frac{oO}{oA}$ , en dus gelijk is aan de tangens van de helft van den hoek, dien de meridiaan  $AP$  in het punt  $A$  met den eersten meridiaan  $AO$  maakt.

waarin  $p$ ,  $q$  en  $S$  drie functiën van  $\Phi$  zijn, wier waarden of wier logarithmen, voor verschillende waarden van  $\Phi$ , men vooraf in tafels kan brengen. Deze functiën zijn

$$\left. \begin{aligned} S &= (B - \sqrt{B^2 - A^2}) - (B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2}), \\ p &= \sqrt{B^2 - A^2}, \\ q &= \frac{B - \sqrt{B^2 - A^2}}{A}. \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

Voor  $X$  kunnen wij ook nog schrijven

$$X = 2p \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos^2 \frac{1}{2} \alpha, \dots \dots \dots (9')$$

welke formule voor het gebruik gemakkelijker is, omdat  $\log \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha$  reeds bekend is, en men om  $\log \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$  te vinden slechts eene benaderde waarde van  $\frac{1}{2} \alpha$  noodig heeft.

Voor kleine waarden van  $\frac{1}{2} \alpha$  is het nog doelmatiger hiervoor te schrijven

$$X = 2p \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha \frac{1}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}, \dots \dots \dots (9'')$$

aangezien men, zoolang  $\log \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha$  kleiner is dan 8,3405539—10, voor

$\log \frac{1}{1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \alpha}$  mag schrijven  $-M \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \alpha$ , of, uitgedrukt in deelen van de zevende decimaal als eenheid,

$$-10^7 M \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \alpha = -(6,63778) \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Tot hiertoe hebben wij de voorwaarde van de gelijkvormigheid nog niet ingevoerd; de formules (9) gelden dus voor alle mogelijke projectiën, waarbij de meridianen en de parallellen door elkaar recht-hoekig snijdende cirkels worden voorgesteld <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Het is in het algemeen niet mogelijk, eene equivalente projectie te maken, waarbij de meridianen en de parallellen door elkaar rechthoekig snijdende cirkels worden voorgesteld. Dit is alleen mogelijk voor het bijzondere geval, dat de meridianen rechte lijnen zijn, en de projectie dus in eene kegelvormige overgaat. Voor de equivalente projectie moet namelijk voldaan zijn aan de betrekking

$$Rr = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \varphi}.$$

Brengen wij hierin de waarden van  $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$  en  $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$ , zooals die in de volgende paragraaf onder (12)—(15) ontwikkeld zijn, over, dan vinden wij na eene eenvoudige herleiding

$$Rr = B' L' \sin^2 \alpha,$$

waarnit volgt, dat  $L' \sin^2 \alpha$  onafhankelijk moet zijn van  $\lambda$ . Differentieeren wij die uitdrukking dus ten opzichte van  $\lambda$ , dan vinden wij



§ 27. Aan de vergelijking (1) van hoofdstuk II wordt door de ontwikkelde uitdrukkingen voor  $x$  en  $y$  reeds voldaan, omdat wij begonnen zijn met de meridianen en de parallellen loodrecht op elkaar te nemen. Ter bepaling van de twee functiën  $B$  en  $L$  hebben wij dus alleen eene van de formules (6') van dat hoofdstuk noodig. Om eene van beide toe te passen moeten wij de differentiaalquotienten van  $x$  en  $y$  ten opzichte van  $\lambda$  en  $\phi$  opmaken. Differentieeren wij daartoe eerst de formule (6) van het tegenwoordige hoofdstuk, dan vinden wij

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\frac{L'}{\sqrt{L^2 + A^2}} \sin \alpha \quad \text{en} \quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -\frac{B'}{\sqrt{B^2 - A^2}} \sin \alpha \quad \dots (11)$$

Met behulp hiervan vinden wij nu uit (4) en (5)

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = r_{\phi} \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = -L' \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{\sqrt{L^2 + A^2}} \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad \dots (12)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r_{\lambda} \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = +B' \frac{\sqrt{L^2 + A^2}}{\sqrt{B^2 - A^2}} \sin^2 \alpha, \quad \dots (13)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = r_{\phi} \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = -L' \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{\sqrt{L^2 + A^2}} \sin^2 \alpha, \quad \dots (14)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = r_{\lambda} \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = -B' \frac{\sqrt{L^2 + A^2}}{\sqrt{B^2 - A^2}} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \dots (15)$$

Door deze uitdrukkingen nu in eene van de formules (6'), van het vorige hoofdstuk over te brengen, vinden wij

$$B' \frac{\sqrt{L^2 + A^2}}{\sqrt{B^2 - A^2}} = U' L' \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{\sqrt{L^2 + A^2}},$$

of

$$\frac{L'}{L^2 + A^2} = \frac{B'}{U'(B^2 - A^2)}.$$

Daar het eerste lid dezer vergelijking alleen afhangt van  $\lambda$ , het tweede alleen van  $\phi$ , zoo kan aan die vergelijking niet voldaan wor-

$$L'' \sin^2 \alpha + 2 L' \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = L'' \sin^2 \alpha - 2 \frac{L'^2}{\sqrt{L^2 + A^2}} \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0,$$

of

$$\frac{L'' \sqrt{L^2 + A^2}}{2 L'^2} = \cos \alpha.$$

Hieruit volgt, dat  $\cos \alpha$ , en dus ook  $\alpha$ , onafhankelijk moet zijn van  $\phi$ , hetgeen niet mogelijk is, tenzij de meridianen in rechte lijnen overgaan.

den, tenzij beide leden gelijk zijn aan eene zelfde standvastige. Stellen wij die standvastige door  $-\frac{C}{A}$  voor, dan vinden wij de twee volgende vergelijkingen ter berekening van de functiën  $L$  en  $B$

$$-\frac{AL'}{L^2 + A^2} = C \dots \dots \dots (16)$$

en 
$$-\frac{AB'}{B^2 - A^2} = CU' \dots \dots \dots (17)$$

De eerste dezer vergelijkingen geeft door integratie

$$Bg \operatorname{Ctg} \frac{L}{A} = C\lambda,$$

waarbij het niet noodig is eene standvastige te voegen, omdat wij den meridiaan van het centrale punt als eersten meridiaan aannemen en dus voor  $\lambda = 0$ ,  $L$  oneindig groot wordt. Uit deze vergelijking volgt nu

$$L = A \operatorname{Ctg} C\lambda, \dots \dots \dots (18)$$

$$r_\lambda = \sqrt{L^2 + A^2} = A \sqrt{1 + \operatorname{Ctg}^2 C\lambda} = \frac{A}{\sin C\lambda}, \dots \dots (19)$$

en 
$$\frac{\sqrt{L^2 + A^2} - L}{A} = \frac{1}{\sin C\lambda} - \operatorname{Ctg} C\lambda = \operatorname{Tg} \frac{1}{2} C\lambda \dots \dots (20)$$

Door deze waarde te substitueeren in (9) vinden wij

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha &= q \operatorname{Tg} \frac{1}{2} C\lambda, \\ X &= p \sin \alpha, \\ Y &= S + X \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20')$$

§ 28. De vergelijking (17) geeft door integratie

$$\log \frac{B+A}{B-A} \cdot \frac{B_0-A}{B_0+A} = 2CU,$$

en dus

$$\frac{B+A}{B-A} = \frac{B_0+A}{B_0-A} e^{2CU};$$

waaruit volgt

$$B = A \frac{(B_0 + A)e^{CU} + (B_0 - A)e^{-CU}}{(B_0 + A)e^{CU} - (B_0 - A)e^{-CU}}, \dots \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{B^2 - A^2} = \frac{2A\sqrt{B_0^2 - A^2}}{(B_0 + A)e^{CU} - (B_0 - A)e^{-CU}}, \\ q &= \frac{B - \sqrt{B^2 - A^2}}{A} = \frac{\sqrt{B_0 + A}e^{CU} - \sqrt{B_0 - A}}{\sqrt{B_0 + A}e^{CU} + \sqrt{B_0 - A}}, \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

$$S = (B - \sqrt{B^2 - A^2}) - (B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2}) = \left. \begin{aligned} &= \frac{2A\sqrt{B_0^2 - A^2}}{\sqrt{B_0 + A} + \sqrt{B_0 - A}} \cdot \frac{e^{CU} - 1}{\sqrt{B_0 + A}e^{CU} + \sqrt{B_0 - A}}, \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

§ 29. Ter bepaling van de standvastigen  $B_0$  en  $A$  hebben wij de vergelijkingen (8), (10), (14) en (19) van hoofdstuk II; om deze te kunnen toepassen moeten wij eerst de differentiaalquotienten  $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}$  en  $\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2}$  nader ontwikkelen.

Uit (11) in verband met (16) en (19) volgt daartoe vooreerst

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{C \cdot \sin \alpha}{\sin C\lambda},$$

en uit (12) en (14) volgt dan

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \lambda} &= \sqrt{B^2 - A^2} \frac{C \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin C\lambda}, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} &= \sqrt{B^2 - A^2} \frac{C \sin^2 \alpha}{\sin C\lambda}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

Deze twee vergelijkingen ten opzichte van  $\lambda$  differentieerende, vinden wij nog

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2} &= \sqrt{B^2 - A^2} \frac{C^2 \sin \alpha}{\sin^2 C\lambda} (\cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \cos C\lambda), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} &= \sqrt{B^2 - A^2} \frac{C^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 C\lambda} (2 \cos \alpha - \cos C\lambda), \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

Gaan wij over tot het centrale punt, dan verkrijgen alle vier differentiaalquotienten den onbepaalden vorm  $\frac{0}{0}$ , omdat alsdan  $\alpha$  en  $\lambda$  gelijktijdig nul worden. Uit (6) in verband met (20) volgt echter

$$Tg \frac{1}{2} \alpha = \frac{B - \sqrt{B^2 - A^2}}{A} Tg \frac{1}{2} C\lambda, \dots \dots \dots (25)$$

en dus voor het centrale punt

$$\lim \frac{\alpha}{C\lambda} = \frac{B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2}}{A}.$$

Met behulp hiervan vinden wij nu uit bovenstaande vergelijkingen

$$\left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)_0 = C \sqrt{B_0^2 - A^2} \frac{B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2}}{A}, \quad \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)_0 = 0, \\ \left( \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right)_0 = C^2 \sqrt{B_0^2 - A^2} \left( \frac{B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2}}{A} \right)^2.$$

Aan de vergelijkingen (8) en (14) van het vorige hoofdstuk blijkt dus reeds voldaan te zijn; de vergelijkingen (10) en (19) geven ons de volgende twee vergelijkingen ter berekening van  $A$  en  $B_0$

$$C \sqrt{B_0^2 - A^2} \frac{B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2}}{A} = r_0,$$

$$C \sqrt{B_0^2 - A^2} \left( \frac{B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2}}{A} \right)^2 = r_0 \sin \phi_0.$$

Uit deze twee vergelijkingen volgt

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{B_0^2 - A^2} &= \frac{r_0}{\sin \phi_0}, \\ \frac{B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2}}{A} &= \frac{\sin \phi_0}{C}, \\ A &= \frac{2 C r_0}{C^2 - \sin^2 \phi_0}, \\ B_0 &= \frac{r_0}{\sin \phi_0} \frac{C^2 + \sin^2 \phi_0}{C^2 - \sin^2 \phi_0}, \\ B_0 + A &= \frac{r_0}{\sin \phi_0} \frac{(C + \sin \phi_0)^2}{C^2 - \sin^2 \phi_0}, \\ B_0 - A &= \frac{r_0}{\sin \phi_0} \frac{(C - \sin \phi_0)^2}{C^2 - \sin^2 \phi_0}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Brengen wij deze waarden in (22) over, dan vinden wij eindelijk

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{4 C r_0}{(C + \sin \phi_0)^2 e^{CU} - (C - \sin \phi_0)^2 e^{-CU}}, \\ q &= \frac{(C + \sin \phi_0) e^{CU} - (C - \sin \phi_0)}{(C + \sin \phi_0) e^{CU} + (C - \sin \phi_0)}, \\ S &= 2 r_0 \frac{e^{CU} - 1}{(C + \sin \phi_0) e^{CU} + (C - \sin \phi_0)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (27)$$

§ 30. De hier ontwikkelde uitdrukkingen voor  $p$ ,  $q$  en  $S$  zijn voor de berekening weinig geschikt; zij kunnen echter gemakkelijk voor logarithmische berekening geschikt gemaakt worden, door het invoeren van de hyperbolische functiën

$$\operatorname{Sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{Ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

Die formules gaan daardoor over in

$$p = \frac{2 C r_0}{(C^2 + \sin^2 \phi_0) \operatorname{Sh} CU + 2 C \sin \phi_0 \cdot \operatorname{Ch} CU},$$



$$q = \frac{C \cdot Sh \frac{1}{2} CU + Sin \Phi_0 \cdot Ch \frac{1}{2} CU}{C \cdot Ch \frac{1}{2} CU + Sin \Phi_0 \cdot Sh \frac{1}{2} CU},$$

$$S = 2r_0 \frac{Sh \frac{1}{2} CU}{C \cdot Ch \frac{1}{2} CU + Sin \Phi_0 \cdot Sh \frac{1}{2} CU}.$$

Stellen wij nu nog

$$\frac{Sin \Phi_0}{C} = \frac{Sh \theta}{Ch \theta} = Th \theta, \dots \dots \dots (28)$$

dan gaan die uitdrukkingen over in

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{2r_0 C}{C^2 - Sin^2 \Phi_0} \frac{1}{Sh(2\theta + CU)}, \\ q &= Th(\theta + \frac{1}{2} CU), \\ S &= \frac{2r_0}{\sqrt{C^2 - Sin^2 \Phi_0}} \frac{Sh \frac{1}{2} CU}{Ch(\theta + \frac{1}{2} CU)}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

Nog op andere wijze kunnen de formules voor  $p$ ,  $q$  en  $S$  voor berekening geschikt gemaakt worden; stellen wij namelijk

$$\frac{Sin \Phi_0}{C} = Sin \psi_0 \dots \dots \dots (30)$$

en  $CU + Nelog Ty(45 + \frac{1}{2} \psi_0) = Nelog Ty(45 + \frac{1}{2} \psi), \dots (31)$

dan gaan die formules over in

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{r_0}{\sqrt{C^2 - Sin^2 \Phi_0}} \frac{Cos \psi}{Sin \frac{\psi + \psi_0}{2} \cdot Cos \frac{\psi - \psi_0}{2}}, \\ q &= \frac{Sin \frac{\psi + \psi_0}{2}}{Cos \frac{\psi - \psi_0}{2}}, \\ S &= \frac{2r_0}{\sqrt{C^2 - Sin^2 \Phi_0}} \cdot Ty \frac{\psi - \psi_0}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (32)$$

<sup>1)</sup> De cirkelprojectie van LAGRANGE kan men ook ontwikkelen door de punten eerst van het aardoppervlak op een bol over te brengen, en dan den bol stereographisch te projecteeren. Verandert men bij de overbrenging op den bol de geographische lengten in reden van 1 tot  $C$ , en stelt de breedten op den bol door  $\psi$  voor, dan krijgt men ter bepaling daarvan onmiddellijk de formule (31). Om den straal van den bol en de breedte  $\psi_0$  van het centrale punt te bepalen, heeft men de voorwaarden  $m_0 = 1$  en  $\left(\frac{\partial m}{\partial \psi}\right)_0 = 0$ , waaruit voor  $\psi_0$  de formule (30) en voor den straal de

uitdrukking  $\frac{r_0}{\sqrt{C^2 - Sin^2 \Phi_0}}$  volgt. Door dezen bol nu stereographisch te projecteeren vindt men onmiddellijk de formules (32).

§ 31. Om de vergrooting voor een willekeurig punt van een terrein, dat zich in iedere richting slechts over enkele graden uitstrekt, te vinden, moeten wij de waarden van  $P$  en  $Q$  (§ 18) opmaken. Daar de projectie symmetrisch is ten opzichte van den meridiaan van het centrale punt, zoo weten wij reeds dat  $Q = 0$  is; dit zou trouwens ook onmiddellijk uit  $\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3}\right)_0$  volgen. Ter berekening van  $P$  moeten

wij  $\left(\frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3}\right)_0$  opmaken. Differentieeren wij daartoe de eerste vergelijking (24), dan vinden wij

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} &= \sqrt{B^2 - A^2} \frac{C^2}{\sin^3 C \lambda} \left[ \sin C \lambda \cdot \cos \alpha \cdot (\cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \cos C \lambda) \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} - \right. \\ &\quad \left. - \sin C \lambda \cdot \sin \alpha \cdot (2 \sin 2\alpha - \sin \alpha \cdot \cos C \lambda) \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} + \right. \\ &\quad \left. + C \sin C \lambda \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin C \lambda - \right. \\ &\quad \left. - 2 C \sin \alpha \cdot (\cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \cos C \lambda) \cos C \lambda \right] = \\ &= \sqrt{B^2 - A^2} C^3 \frac{\sin \alpha}{\sin C \lambda} \left[ 3 \cos 2\alpha \cdot \frac{\cos \alpha - \cos C \lambda}{\sin^2 C \lambda} - \cos \alpha \right], \end{aligned}$$

waaruit voor het centrale punt volgt

$$\left(\frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3}\right)_0 = \sqrt{B^2_0 - A^2} C^3 \frac{B_0 - \sqrt{B^2_0 - A^2}}{A} \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{B_0 - \sqrt{B^2_0 - A^2}}{A} \right)^2 \right];$$

welke uitdrukking tengevolge van (26) overgaat in

$$\left(\frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3}\right)_0 = \frac{1}{2} r_0 C^2 - \frac{3}{2} r_0 \sin^2 \phi_0 \dots \dots \dots (33)$$

Substitueeren wij deze uitdrukking in vergelijking (29) van hoofdstuk II, dan vinden wij, na eene eenvoudige herleiding,

$$P = \frac{R_0}{N_0} \frac{C^2 - \sin^2 \phi_0}{\cos^2 \phi_0} - 1 \dots \dots \dots (34)$$

Uit deze uitdrukking blijkt, dat, indien wij  $C^2$  laten aangroeien van  $\sin^2 \phi_0$  tot  $\sin^2 \phi_0 + 2 \frac{N_0}{R_0} \cos^2 \phi_0$ ,  $P$  in dat geval alle mogelijke waarden van  $-1$  tot  $+1$  doorloopt; zoodat deze projectie aan den vorm van het terrein kan aangesloten worden, voor zooverre dit bij eene symmetrische projectie mogelijk is, en in § 23 is uiteengezet.

Is de waarde van  $P$  volgens die paragraaf bepaald, dan geeft formule (34) voor  $C$  de waarde <sup>1)</sup>

1) LAGRANGE bepaalt in de boven aangehaalde verhandeling de waarde van den parameter  $C$  uit de voorwaarde  $\left(\frac{\partial^2 m}{\partial \varphi^2}\right)_0 = 0$ , om daardoor de afwijkingen van de vergrooting zoo gering mogelijk te maken, en vindt dan  $C^2 = 1 + \cos^2 \varphi_0$ . Dit komt voor de bolvormige aarde blijkbaar overeen met  $P = 1$ , en geeft, zooals duidelijk is, eene geringe afwijking van de vergrooting in den eersten meridiaan. Men heeft daarbij echter over het hoofd gezien, dat, door het verminderen van die afwijking in den eersten meridiaan, zij in de richting loodrecht daarop toeneemt. Dit blijkt duidelijk uit formule (28) van het vorige hoofdstuk, die voor de hier behandelde projectie, waarvoor  $Q = 0$  is, overgaat in

$$m = 1 + \frac{(1+P)X^2 + (1-P)Y^2}{4\varphi_0^2}.$$

Laat men hierin de  $P$  tot  $+1$  aangroeien dan neemt de afwijking in de richting der  $Y$ -as af, maar wordt tevens in de richting der  $X$ -as grooter.

De meeste schrijvers, die zich na LAGRANGE met dit onderwerp hebben bezig gehouden, zooals O. BONNET (*Sur la théorie mathématique des cartes géographiques*. Journal de Liouville, T. XVII, 1852, p. 301) en A. GERMAIN (*Traité des projections des cartes géographiques*. Paris, p. 54), volgen denzelfden weg.

Dr. H. GRETSCHEL, in zijn *Lehrbuch der Karten-Projection*. Weimar 1873, S. 227, komt langs een zeer raadselachtigen weg tot hetzelfde eindresultaat. Hij stelt namelijk als voorwaarde  $\frac{\partial m_0}{\partial \varphi_0} = 0$ . Welk voordeel er aan verbonden is,

dat de waarde van  $m_0$  met  $\varphi_0$  slechts weinig verandert is niet duidelijk, en hoe hij daaruit kan afleiden, dat „der Maassstab im Wesentlichen ein und der selbe sein wird“, is geheel raadselachtig.

Nog raadselachtiger wordt het, als men nagaat, dat de waarde van  $m_0$  bij hem zich voordoet onder den vorm  $\frac{A(C^2 - \sin^2 \varphi_0)}{2Ca \cos \varphi_0}$  — wij schrijven hier zijne formule met onze notatie over; de formule van GRETSCHEL luidt, met verbetering van eene daarin voorkomende fout, die tot de zaak zelf echter niets afdoet, als volgt  $\alpha_0 = \frac{d(4c^2 - \cos^2 \chi)}{4ac \sin \chi}$ ; hij beschouwt evenals LAGRANGE bij bovenstaande ontwikkeling de aarde als een bol; anders zou  $a$  moeten vervangen worden door  $N_0$  — en dat hij deze uitdrukking ten opzichte van  $\varphi_0$  differentieert, zonder er op te letten, dat  $A$  eene geheel willekeurige grootheid is, die men zeker met  $\varphi_0$  zal laten veranderen, en liefst zoodanig, dat  $m_0 = 1$  wordt.

TCHÉBYCHEV bepaalt, in eene verhandeling „*Sur la construction des cartes géographiques*,” voorkomende in de „*Bulletin de la classe physico-mathématique de l'académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg*, T. XIV, N°. 17, St. Péttersbourg 1856, en door GERMAIN in zijn bovengenoemd werk op page 75—79 overgenomen, voor een terrein, dat begrensd is door eene ellips, waarvan de assen samenvallen met den meridiaan en eene loodlijn daarop, de waarde van  $C$  op eene wijze, die geheel overeenkomt met den door ons gevolgden weg. In eene uitvoerige verhandeling zou hij de bepaling van dien parameter voor een willekeurig terrein behandelen. Het is mij echter niet mogen gelukken, die verhandeling te vinden; ik heb ze ook nergens vermeld gevonden.

$$C = \sqrt{\sin^2 \phi_0 + (1 + P) \frac{N_0}{R_0} \cos^2 \phi_0} \dots \dots \dots (35)$$

§ 32. Wil men eene projectie hebben, waarbij de vergrooting in alle richtingen even sterk toeneemt, dus voor een terrein, dat zich in alle richtingen even ver uitbreidt, dan moet men  $P = 0$  stellen; waardoor men vindt

$$C = \sqrt{\sin^2 \phi_0 + \frac{N_0}{R_0} \cos^2 \phi_0} = \sqrt{1 + \frac{N_0 - R_0}{R_0} \cos^2 \phi_0}.$$

Deze uitdrukking verschilt slechts weinig van de eenheid; voor de eenvoudigheid van de berekening kan men voor  $C$  de eenheid zelve nemen. De geringe waarde, die  $P$  daardoor verkrijgt, namelijk  $-\frac{N_0 - R_0}{N_0}$ , zal aan de verdeling van de afwijking van de vergrooting weinig verandering brengen. De lijnen van gelijke vergrooting worden daardoor ellipsen in plaats van cirkels. De assen dier ellipsen verhouden zich in reden van 1 tot  $\sqrt{\frac{R_0}{2N_0 - R_0}}$  <sup>1)</sup> en de kleinste dier assen is naar het noorden gericht, indien, zooals bij de afgeplatte ellipsoïde,  $N_0 > R_0$  is.

Door deze bijzondere waarde voor  $C$  ondergaan de formules voor de projectie eenige vereenvoudiging; de formules (28) en (30) gaan daardoor over in

$$\left. \begin{aligned} \theta &= N \log \operatorname{Tg}(45^\circ + \tfrac{1}{2} \phi_0), \\ \psi_0 &= \phi_0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

terwijl de waarden van  $p$ ,  $q$  en  $s$  uit (29) en (32) overgaan in

$$p = \frac{2N_0}{\cos \phi_0} \frac{1}{\operatorname{Sh}(2\theta + U)}, \quad p = N_0 \frac{\cos \psi}{\sin \frac{\psi + \phi_0}{2} \cdot \cos \frac{\psi - \phi_0}{2}}, \quad \left. \right\} (37)$$

1) Voor een ellipsvormigen meridiaan wordt voor  $P=0$ ,  $C = \sqrt{1 + \frac{e^2 \cos^2 \phi_0}{1 - e^2}}$ ,

en dus hoogstens gelijk aan  $\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} = 1,00335$ . Neemt men  $C=1$ , dan wordt

$P = -\frac{e^2 \cos^2 \phi_0}{1 - e^2 \sin^2 \phi_0}$  en dus hoogstens gelijk aan  $-e^2 = -0,00667$ . De ver-

houding van de assen van de ellipsen van gelijke vergrooting wordt in dit geval gelijk  $\sqrt{\frac{1 - e^2}{1 + e^2 \cos 2\phi_0}}$  en dus minstens  $= \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 + e^2}} = 0,99335$ .



$$\begin{aligned}
 q &= Th(\theta + \frac{1}{2} U), & q &= \frac{\sin \frac{\psi + \phi_0}{2}}{\cos \frac{\psi - \phi_0}{2}}, \\
 S &= 2 N_0 \frac{Sh \frac{1}{2} U}{Ch(\theta + \frac{1}{2} U)}, & S &= 2 N_0 Tg \frac{\psi - \phi_0}{2}.
 \end{aligned} \quad (37)$$

Voor een bolvormig aardoppervlak is, voor het hier behandelde geval van  $C=1$ , de waarde van  $P$  juist nul; de projectie gaat alsdan over in de bekende stereographische projectie. De formules voor deze projectie worden alleen in zooverre eenvoudiger, dat hier  $\psi = \phi$  wordt, en de formule (31) dus vervalt.

§ 33. In § 23 hebben wij gezien, dat voor de kaart van Nederland  $\phi_0 = 52^\circ 13' 20''$  en  $P=0$  moet genomen worden; nemen wij echter naar aanleiding van de vorige paragraaf  $C=1$ , waardoor  $P = -0,00252$  wordt, en de assen van de ellipsen van gelijke vergrooting zich verhouden als 1 tot 0,99748; dan vinden wij voor die kaart het volgende stel formules

$$\left. \begin{aligned}
 Tg \frac{1}{2} \alpha &= q Tg \frac{1}{2} \lambda, \\
 X &= p \sin \alpha, \\
 Y &= S + X Tg \frac{1}{2} \alpha;
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

waarbij  $q$ ,  $p$  en  $S$  berekend worden uit de formules

$$\begin{aligned}
 q &= Th(\theta + \frac{1}{2} U), & q &= \frac{\sin \frac{\psi + \phi_0}{2}}{\cos \frac{\psi - \phi_0}{2}}, \\
 p &= \frac{(7,3193648741)}{Sh(2\theta + U)}, & p &= (6,8055122574) \frac{\cos \psi}{\sin \frac{\psi + \phi_0}{2} \cdot \cos \frac{\psi - \phi_0}{2}}, \\
 S &= (7,106542253) \frac{Sh \frac{1}{2} U}{Ch(\theta + \frac{1}{2} U)}, & S &= (7,1065422531) Tg \frac{\psi - \phi_0}{2}, \\
 M\theta &= 0,4657709121, & \phi_0 &= 52^\circ 13' 20'', \\
 \theta &= 1,072477159, & \log Tg(45^\circ + \frac{1}{2} \psi) &= 0,4657709121 + MU^1).
 \end{aligned} \quad (39)$$

<sup>1)</sup> De berekening volgens bovenstaande goniometrische formules kan niet met de noodige nauwkeurigheid geschieden, tenzij men eene formule opmaakt voor het kleine verschil tusschen  $\psi$  en  $\phi$ . Voor het hier behandelde geval, waar  $C=1$  is, kan dat verschil, uitgedrukt in seconden, berekend worden volgens onderstaande formule, die bij de toepassing op de kaart van Nederland in  $\psi$  hoogstens eene fout veroorzaakt gelijk  $0,0000076$ .

In deze formules stellen de tusschen haakjes geplaatste getallen de gewone of briggiaansche logarithmen van de coëfficiënten voor; daarbij is tevens rekening gehouden met den in § 23 bedoelden herleidingscoëfficiënt  $\left(1 - \frac{c^2}{8\rho_0^2}\right)$ ; zoodat bij deze projectie de vergrooting tusschen de grenzen

$$1 \pm \frac{c^2}{8\rho_0^2} = 1 \pm 0,0000887 = 1 \pm \frac{1}{11275}$$

blijft.

Door  $\log$  worden evenzoo gewone logarithmen bedoeld, en  $M$  is de modulus 0,434294419 der logarithmen.

De hier achter gevoegde tabel II geeft de waarden van  $S$ ,  $\log 2p$  en  $\log q$ .

§ 34. Voor een terrein, dat zich over eene groote uitgestrektheid uitbreidt, kan de formule (28) van het vorige hoofdstuk voor de vergrooting niet meer toegepast worden; men moet dan zijne toevlucht nemen tot formule (2) of (3) van dat hoofdstuk. Nemen wij de laatste en substitueeren daarin de waarden van  $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$  en  $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$  uit (23) dan vinden wij

$$m = \frac{\sqrt{B^2 - A^2} C \sin \alpha}{r \sin C \lambda} = \frac{C p \sin \alpha}{r \sin C \lambda}, \dots \dots (40)$$

welke uitdrukking ingevolge formule (9) den volgende eenvoudigen vorm aanneemt

$$m = \frac{CX}{r \sin C \lambda} \dots \dots \dots (41)$$

Voor punten op den eersten meridiaan gelegen zijn deze uitdrukkingen echter niet bruikbaar; omdat zij daarvoor den vorm  $\frac{0}{0}$  aannemen. Uit

$$Tg \frac{1}{2} \alpha = q Tg \frac{1}{2} C \lambda$$

volgt echter voor dat geval

$$\lim \frac{\alpha}{C \lambda} = q,$$

waardoor (40) voor den meridiaan van het centrale punt overgaat in

$$A'' = \psi - \varphi = \delta - q Tg \varphi \delta^2, \text{ waarin } \delta = -a \frac{\cos \varphi \cdot \cos \varphi_m \cdot \sin \frac{1}{2} \beta}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_m},$$

$$q = \frac{1}{2} \lg 1'', \quad \log q = 4,38454 - 10, \quad a = \frac{2\varepsilon^2}{\lg 1''}, \quad \log a = 3,4398655.$$

$$m = \frac{Cp q}{r}, \dots \dots \dots (42)$$

Substitueeren wij hierin voor  $p$  en  $q$  de waarden uit (29) en (32), dan vinden wij de twee volgende uitdrukkingen voor de vergroo-  
ting in den eersten meridiaan

$$m = \frac{r_0}{r} \frac{Ch^2 \delta}{Ch^2 (\delta + \frac{1}{2} CU)}, \dots \dots \dots (43)$$

en 
$$m = \frac{r_0}{r} \frac{\cos \psi}{\cos \psi_0} \frac{1}{\cos^2 \frac{\psi - \psi_0}{2}} \dots \dots \dots (44)$$

De formules (40) en (41) zijn weinig geschikt voor de berekening van punten in de nabijheid van den eersten meridiaan, en evenmin, indien men de vergroo-  
ting wil berekenen van eene reeks punten op dezelfde parallel. Als volgt kunnen wij de formule daartoe beter geschikt maken. Uit (40) volgt namelijk

$$m = \frac{Cp \sin \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha}{r \sin \frac{1}{2} C \lambda \cdot \cos \frac{1}{2} C \lambda} = \frac{Cp \operatorname{Tg} \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{r \operatorname{Tg} \frac{1}{2} C \lambda \cdot \cos^2 \frac{1}{2} C \lambda} = \frac{Cp q}{r} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} C \lambda}.$$

Drukken wij nu den cosinus van  $\frac{1}{2} \alpha$  door de tangens uit, dan vinden wij

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} C \lambda} &= \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} C \lambda \cdot (1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} \alpha)} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} C \lambda \cdot (1 + q^2 \operatorname{Tg}^2 \frac{1}{2} C \lambda)} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} C \lambda + q^2 \sin^2 \frac{1}{2} C \lambda} = \frac{1}{1 - (1 - q^2) \sin^2 \frac{1}{2} C \lambda}. \end{aligned}$$

Met de waarde van  $q$  uit (29) volgt hieruit

$$\frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} C \lambda} = \frac{1}{1 - (1 - Th^2 (\delta + \frac{1}{2} CU)) \sin^2 \frac{1}{2} C \lambda} = \frac{1}{1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C \lambda}{Ch^2 (\delta + \frac{1}{2} CU)}},$$

of met de waarde van  $q$  uit (32)

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} C \lambda} &= \frac{1}{1 - \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\psi + \psi_0}{2}}{\cos^2 \frac{\psi - \psi_0}{2}} \right) \sin^2 \frac{1}{2} C \lambda} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\cos \psi \cdot \cos \psi_0}{\cos^2 \frac{\psi - \psi_0}{2}} \sin^2 \frac{1}{2} C \lambda}, \end{aligned}$$

zoodat wij voor de vergrooting de twee volgende uitdrukkingen vinden

$$m = \frac{Cpq}{r} \frac{1}{1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} C\lambda}{Ch^2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} CU)}} \dots \dots \dots (45)$$

en

$$m = \frac{Cpq}{r} \frac{1}{1 - \frac{\cos \psi \cdot \cos \psi_0}{\cos^2 \frac{\psi - \psi_0}{2}} \sin^2 \frac{1}{2} C\lambda} \dots \dots (46)$$

Stellen wij voor  $C$ ,  $p$  en  $q$  ook nog hunne waarde, dan vinden wij

$$m = \frac{r_0}{r} \frac{Ch^2 \frac{1}{2}}{Ch^2 (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} CU) - \sin^2 \frac{1}{2} C\lambda} \dots \dots \dots (47)$$

en

$$m = \frac{r_0}{r} \frac{\cos \psi}{\cos \psi_0} \frac{1}{\cos^2 \frac{\psi - \psi_0}{2} - \cos \psi \cdot \cos \psi_0 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C\lambda} \dots (48)$$

§ 35. Enkele bijzondere gevallen van deze projectie mogen hier nog iets nader ontwikkeld worden. Stelt men in formule (35)  $P = -1$ , dan vindt men voor een terrein, dat zich hoofdzakelijk in de richting van de parallel uitstrekt, voor  $C$  de waarde  $\sin \phi_0$ . De formules (29) en (32) zijn alsdan niet toe te passen, omdat zij den vorm  $\frac{0}{0}$  aannemen. Uit (27) volgt echter vooreerst  $q = 1$ , waaruit volgt

$$z = C\lambda.$$

De formules voor de coördinaten worden hierdoor

$$\left. \begin{aligned} X &= p \sin C\lambda, \\ Y &= S + X \operatorname{tg} \frac{1}{2} C\lambda, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49)$$

terwijl voor  $p$  en  $S$  uit (27) volgt

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{r_0}{C} e^{-CU} = N_0 \operatorname{ctg} \phi_0 \cdot e^{-CU}, \\ S &= \frac{r_0}{C} (1 - e^{-CU}) = 2N_0 \operatorname{ctg} \phi_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}CU} \operatorname{sh} \frac{1}{2} CU. \end{aligned} \right\} (50)$$

Voor de vergrooting volgt uit (40), aangezien  $z = C\lambda$  is,

$$m = \frac{Cp}{r} = \frac{r_0}{r} e^{-CU} \dots \dots \dots (51)$$

dat is eene uitdrukking, die geheel onafhankelijk is van  $\lambda$ , zoodat de vergrooting voor alle punten van dezelfde parallel dezelfde is, en men de kaart dus in de richting van de parallel onbepaald kan uitbreiden, zonder dat de vergrooting daardoor verandert.



De hier ontwikkelde projectie is de bekende conforme kegelvormige projectie van LAMBERT, ook bekend onder den naam van de projectie van GAUSS.

§ 36. Neemt men het centrale punt op den aequator, dan is  $\phi_0 = 0$ , en daardoor worden alle formules aanmerkelijk vereenvoudigd. De hulpgrootheden  $\theta$  en  $\psi_0$  worden beide nul, en daardoor veranderen (29) en (32) in

$$\left. \begin{aligned} q &= Th^{\frac{1}{2}} CU, \\ p &= \frac{2r_0}{C} \frac{1}{Sh CU}, \\ S &= \frac{2r_0}{C} Th^{\frac{1}{2}} CU, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

en

$$\left. \begin{aligned} q &= Tg^{\frac{1}{2}} \psi, \\ p &= \frac{2r_0}{C} Ctg \psi, \\ S &= \frac{2r_0}{C} Tg^{\frac{1}{2}} \psi. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

Voor de vergrooting langs den eersten meridiaan geven (43) en (44)

$$m = \frac{r_0}{r} \frac{1}{Ch^{\frac{1}{2}} CU} = \frac{r_0}{r} (1 - Th^{\frac{1}{2}} CU), \dots\dots (54)$$

en 
$$m = \frac{r}{r_0} \frac{\cos \psi}{\cos^{\frac{1}{2}} \psi} = \frac{r_0}{r} (1 - Tg^{\frac{1}{2}} \psi); \dots\dots\dots (55)$$

terwijl voor de vergrooting langs den aequator uit (45), (46), (47) of (48) volgt

$$m = \frac{1}{\cos^{\frac{1}{2}} C\lambda} = 1 + Tg^{\frac{1}{2}} C\lambda; \dots\dots\dots (56)$$

de vergrooting voor een willekeurig punt eindelijk wordt voorgesteld door

$$m = \frac{r_0}{r} \frac{1}{Ch^{\frac{1}{2}} CU - \sin^2 \frac{1}{2} C\lambda}, \dots\dots\dots (57)$$

of door 
$$m = \frac{r_0}{r} \frac{\cos \psi}{\cos^{\frac{1}{2}} \psi - \cos \psi \cdot \sin^2 \frac{1}{2} C\lambda} \dots\dots\dots (58)$$

§ 37. Stelt men in de formules van de vorige paragraaf  $C = 0$ , of in die van de kegelvormige projectie in § 35  $\sin \phi_0 = C = 0$ , dan vindt men de projectie van MERCATOR. Het gemakkelijkst volgt uit (49), (50) en (51) daarvoor

$$\left. \begin{aligned} X &= p C \lambda = r_0 \lambda, \\ Y &= S = r_0 U, \\ m &= \frac{r_0}{r}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (59)$$

De in deze en in de vorige paragraaf voorkomende  $r_0$  is, omdat het centrale punt op den aequator ligt, gelijk aan den straal van den aequator.

## HOOFDSTUK IV.

### KAARTPROJECTIE MET PARABOLISCHE MERIDIANEN EN PARALLELEN.

§ 38. Stelt in fig. 2, o het gemeenschappelijk brandpunt voor van twee stelsels parabolen, wier assen allen samenvallen met de lijn oO, maar waarbij de parabolen van het eene stelsel hunne opening naar O en die van het andere stelsel naar  $y$  keeren; dan zullen de parabolen van het eene stelsel die van het andere rechthoekig snijden.

Nemen wij de parabool PQ van het eene stelsel als den meridiaan, waarvan de lengte  $\lambda$  is, aan, dan zal, als wij het gemeenschappelijk brandpunt o voorloopig als oorsprong en de gemeenschappelijke as als  $y$ -as van het coördinatenstelsel aannemen, die meridiaan voorgesteld worden door de vergelijking

$$x^2 = p_\lambda^2 - 2p_\lambda y,$$

waarin  $p_\lambda$ , de parameter van de parabool, eene functie van  $\lambda$  zal zijn.

De parabool PS van het tweede stelsel als parallel beschouwende, dan is de vergelijking van die parallel

$$x^2 = p_\phi^2 + 2p_\phi y,$$

waarin de parameter  $p_\phi$  eene functie van de breedte  $\phi$  is.

Door uit deze twee vergelijkingen  $x$  en  $y$  op te lossen vinden wij voor de coördinaten van het punt P

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{p_\phi p_\lambda}, \\ y &= \frac{p_\lambda - p_\phi}{2}. \end{aligned}$$

Stellen wij, om wortelgrootheden te vermijden,  $p_\phi = B^2$  en  $p_\lambda = L^2$  en brengen wij den oorsprong van het coördinatenstelsel naar het

centrale punt over, dat ingevolge § 17 alleen ergens in een punt  $O$  van de rechte lijn  $oO$  kan gelegen zijn, dan vinden wij voor de coördinaten  $X$  en  $Y$

$$X = BL, \dots\dots\dots (1)$$

$$Y = \frac{B_0^2 - B^2}{2} + \frac{1}{2} L^2; \dots\dots\dots (2)$$

waaruit blijkt, dat alle projectiën, conforme of niet, die bovengenoemde parabolen als meridianen en parallellen bezitten, zeer eenvoudige formules voor de berekening van de coördinaten opleveren <sup>1)</sup>, en daardoor dus een groot voordeel bezitten.

§ 39. Ter bepaling van de twee functiën  $B$  en  $L$  hebben wij eene van de vergelijkingen (6') van hoofdstuk II. Om deze toe te passen differentieeren wij eerst de vergelijkingen (1) en (2) ten opzichte van  $\phi$  en  $\lambda$ , waardoor wij vinden

$$\frac{\partial X}{\partial \phi} = B' L, \quad \frac{\partial X}{\partial \lambda} = B L', \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \phi} = -B B', \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = L L'. \dots\dots\dots (4)$$

Deze uitdrukkingen, in eene van de formules (6') gesubstitueerd, geven

<sup>1)</sup> Stelt men zich de vraag eene kaartprojectie te ontwikkelen, waarbij de meridianen en parallellen elkaar rechthoekig snijden, en die voor de berekening van de coördinaten de eenvoudige formules  $X = BL$  en  $Y = B_1 + L_1$ , waarbij  $B$  en  $B_1$  functiën van  $\phi$  en  $L$  en  $L_1$  functiën van  $\lambda$  zijn, oplevert, dan vindt men met behulp van formule (1) van hoofdstuk II, onmiddellijk bovenstaande vergelijkingen (1) en (2), en dus parabolische meridianen en parallellen.

Die projectie tot eene equivalente te maken is echter in het algemeen niet mogelijk. Dit kan alleen, indien de parabolen in rechte lijnen overgaan. Door namelijk bovenstaande uitdrukkingen voor  $X$  en  $Y$  in  $Rr = \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$  te substitueeren, vindt men  $Rr = -B' L' (B^2 + L^2)$ , waaruit volgt dat  $L' (B^2 + L^2)$  onafhankelijk van  $\lambda$  moet zijn. Deze uitdrukking ten opzichte van  $\lambda$  gedifferentieerd geeft  $L'' (B^2 + L^2) + 2 L L' ^2 = 0$  of  $B^2 = -\frac{L^2 L'' + 2 L L' ^2}{L''}$ . Hieraan kan niet voldaan worden, tenzij beide leden oneindig groot worden.  $B = \infty$  wil zeggen, dat het brandpunt zich in het oneindige verrijdt, en de parabolen dus in rechte lijnen overgaan. Het tweede lid wordt oneindig groot voor  $L'' = 0$ , en dus  $L = a\lambda$ . Zullen  $X$  en  $Y$  echter eindig blijven, dan moet  $a$  tot nul naderen, en  $B = \frac{A}{a} - ab$  zijn, waarin  $A$  eene standvastige en  $b$  eene functie van  $\phi$  is. Deze uitdrukkingen voor  $L$  en  $B$  in (1) en (2) overbrengende, vindt men voor  $a = 0$ ,  $X = A\lambda$  en  $Y = Ab$ .

$$-B B' = U' B L',$$

of

$$L' = -\frac{B'}{U'},$$

eene uitdrukking, waaraan alleen voldaan kan worden, indien beide leden gelijk zijn aan eene zelfde standvastige. Stellen wij deze standvastige gelijk  $A$ , dan vinden wij

$$L' = A \quad \text{en} \quad B' = -A U'; \dots\dots\dots (5)$$

waaruit door integratie volgt

$$L = A \lambda \quad \text{en} \quad B = B_0 - A U \dots\dots\dots (6)$$

Bij de eerste dezer vergelijkingen is het niet noodig eene standvastige te voegen, omdat wij den meridiaan van het centrale punt als eersten meridiaan nemen, en dus voor  $\lambda = 0$ ,  $L = 0$  wordt.

Met behulp van (5) en (6) vindt men uit (3) en (4)

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = A B, \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = A^2 \lambda; \dots\dots\dots (7)$$

en deze, ten opzichte van  $\lambda$  gedifferentieerd, geven

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} = A^2 \dots\dots\dots (8)$$

Voor het centrale punt vinden wij dus

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)_0 = A B_0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2}\right)_0 = A^2,$$

waaruit blijkt, dat reeds aan de voorwaarden (8) en (14) van hoofdstuk II voldaan is. De voorwaarden (10) en (19) geven de twee vergelijkingen

$$A B_0 = r_0 \quad \text{en} \quad A^2 = r_0 \sin \phi_0,$$

waaruit volgt

$$A = \sqrt{r_0 \sin \phi_0}, \quad B_0 = \frac{r_0}{A} = \sqrt{\frac{r_0}{\sin \phi_0}} \dots\dots\dots (9)$$

Met behulp hiervan gaan de vergelijkingen (6) over in

$$\begin{aligned} L &= \lambda \sqrt{r_0 \sin \phi_0}, \quad B = \sqrt{\frac{r_0}{\sin \phi_0}} - \sqrt{r_0 \sin \phi_0} U = \\ &= \sqrt{\frac{r_0}{\sin \phi_0}} (1 - U \sin \phi_0) \dots\dots (10) \end{aligned}$$

Brengen wij deze uitdrukkingen eindelijk in (1) en (2) over, dan vinden wij voor de berekening van de coördinaten de twee volgende uitdrukkingen



$$X = r_0 (1 - U \sin \phi_0) \lambda, \dots \dots \dots (11)$$

en 
$$Y = r_0 (U - \frac{1}{2} U^2 \sin \phi_0) + \frac{1}{2} r_0 \sin \phi_0 \cdot \lambda^2; \dots \dots (12)$$

of 
$$X = p \lambda, Y = S + q \lambda^2, \dots \dots \dots (13)$$

waarin  $p$  en  $S$  functiën zijn van  $\phi$ , en  $q$  eene standvastige is.

§ 40. Ter bepaling van de vergrooting heeft men, aangezien hier  $\frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3}$  en  $\frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3}$  gelijk nul zijn, uit form (29) en (30) van hoofdstuk II

$$P = 2 \frac{R_0}{N_0} Tg^2 \phi_0 - 1, \text{ en } Q = 0 \dots \dots \dots (14)$$

Daar de grootheid  $P$  geene standvastige bevat, waarover naar willekeur beschikt kan worden, zoo is het niet mogelijk, deze projectie aan den vorm van het terrein aan te passen; waardoor zij verre ten achter staat bij de hiervoor behandelde cirkelprojectie.

Laat men  $\phi_0$  aangroeien van 0 tot  $90^\circ$ , dan groeit  $P$  aan van  $-1$  tot  $\infty$ ; zoolang  $Tg^2 \phi_0 < \frac{N_0}{R_0}$ , d. i., omdat  $N_0$  en  $R_0$  steeds weinig van elkaar verschillen, zoolang  $\phi_0$  blijft beneden omstreeks  $45^\circ$ <sup>1)</sup>, is  $P$  gelegen tusschen  $-1$  en  $+1$ , zoodat men dan elliptische lijnen van gelijke vergrooting vindt. Voor grootere waarden van  $\phi_0$  verkrijgt men hyperbolische lijnen van gelijke vergrooting, en komt men dus in zeer ongunstige verhoudingen.

Brengt men de waarden van  $P$  en  $Q$  over in formule (28) van hoofdstuk II, dan vindt men voor de vergrooting

$$m = 1 + \frac{X^2 Tg^2 \phi_0 - Y^2 \left( Tg^2 \phi_0 - \frac{N_0}{R_0} \right)}{2 N_0^2} \dots \dots (15)$$

In fig. III zijn met behulp van de waarde  $\phi_0 = 52^\circ 10'$  de hyperbolen geteekend, waarvoor de vergrooting is  $1 \pm 0,00017$  en  $1 \pm 0,00029$ ; en daaruit blijkt, dat men de kaart van Nederland kan insluiten binnen de hyperbolen, waarvoor de vergrooting is  $1 - 0,00017$  en  $1 + 0,00029$ ; zoodat, als men alle afmetingen herleidt in reden van 1 tot  $1 - 0,00006 = 0,99994$ , de vergrooting blijft tusschen de grenzen  $1 \pm 0,00023$ . De afwijking van de vergrooting bij deze projectie is dus ruim  $2\frac{1}{2}$  maal zoo groot als bij de cirkelprojectie, en in het algemeen als bij elke symetrische projectie, die eene stand-

<sup>1)</sup> Bij de ellipsoidvormige aarde gaan de ellipsen in hyperbolen over bij

$Tg \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$ , dat is bij  $\phi_0 =$  omstreeks  $45^\circ 2' 50''$ .

vastige bevat, met behulp waarvan men de projectie aan den vorm van het terrein kan aanpassen. Die afwijking is ruim viermaal zoo groot als bij eene niet symetrische projectie, die twee standvastigen tot dat doel bevat.

§ 41. Voor een terrein, dat zich over een groot gedeelte van het aardoppervlak uitstrekt, moeten wij, om de vergrooting te bepalen, onze toevlucht nemen tot formule (3) van hoofdstuk II.

Uit (11) en (12) vinden wij door differentiatie

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = r_0 (1 - U \sin \phi_0),$$

en 
$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = r_0 \sin \phi_0 \cdot \lambda.$$

Deze uitdrukkingen in genoemde formule overbrengende, vinden wij

$$m = \frac{r_0}{r} \sqrt{(1 - U \sin \phi_0)^2 + \lambda^2 \sin^2 \phi_0}, \dots \dots (16)$$

Hieruit volgt voor de vergrooting langs den eersten meridiaan

$$\frac{r_0}{r} (1 - U \sin \phi_0), \dots \dots \dots (17)$$

en voor die langs de parallel van het centrale punt

$$\sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \phi_0} \dots \dots \dots (18)$$

§ 42. Bij de toepassing van deze projectie op een terrein van groote uitgestrektheid, dient nog opgemerkt te worden, dat voor  $\lambda = 0$ , de waarde van  $Y$  (d. i.  $S$ ), slechts zoolang toeneemt met toenemende waarden van  $\phi$ , als  $(1 - U \sin \phi_0)$  positief is. Voor

$$U = \frac{1}{\sin \phi_0} \dots \dots \dots (19)$$

wordt

$$Y = \frac{r_0}{2 \sin \phi_0} = \frac{1}{2} B_0^2.$$

Deze waarde is gelijk aan de lengte  $Oo$  figuur 2; het punt, overeenkomende met de uit (19) volgende waarde van  $U$  en de lengte  $\lambda = 0$ , valt dus in het gemeenschappelijk brandpunt. Voor dat punt is volgens (17) de vergrooting gelijk nul. De parallel, overeenkomende met die breedte, projecteert zich volgens de lijn  $oQ$ . Voor grootere waarden van de breedte wordt voor  $\lambda = 0$  de waarde van  $Y$  kleiner, zoodat die punten zich zullen projecteeren op de plaats, waar reeds andere punten geprojecteerd zijn.

Bij bovenstaande waarde (19) van  $U$  heeft er dus eene soort van

discontinuïteit plaats, en men zal de projectie dus niet verder kunnen voortzetten dan tot de daarmede overeenkomende waarde van de breedte. Zelfs zal men van die grens nog eenigszins verwijderd blijven, omdat in de buurt daarvan de vergrooiting eene zoo kleine waarde heeft.

Wat er plaats heeft voor grootere waarden van de breedte, kan uit een theoretisch oogpunt belangrijk zijn: voor de kaartprojectie is het geheel van belang ontbloot. Wij zullen ons dus hier niet met dat onderzoek ophouden, en alleen de grens iets nader opgeven, tot waar de projectie kan uitgestrekt worden.

Stellen wij de geographische breedte van het punt, dat overeenkomt met de waarde van  $U$  uit (19), door de letter  $\psi$  voor, dan vinden wij voor de berekening daarvan bij een bolvormig aardoppervlak, de volgende formule

$$\log Tg(45 + \frac{1}{2}\psi) = \log Tg(45 + \frac{1}{2}\phi_0) + \frac{M}{\sin \phi_0}; \dots (20)$$

met behulp waarvan het volgende tabelletje berekend is.

| $\phi_0$     | $\psi$           |
|--------------|------------------|
| $0^\circ$ ,  | $90^\circ$ ,     |
| $15^\circ$ , | $88^\circ 9'$ ,  |
| $30^\circ$ , | $81^\circ 4'$ ,  |
| $45^\circ$ , | $78^\circ 30'$ , |
| $60^\circ$ , | $80^\circ 21'$ , |
| $75^\circ$ , | $84^\circ 39'$ , |
| $90^\circ$ , | $90^\circ$ .     |

Uit dit tabelletje blijkt, dat de poolstreken met behulp van deze projectie nooit naar behooren kunnen voorgesteld worden.

Slechts voor ééne bepaalde waarde van  $\phi_0$  kan men de breedte tot  $90^\circ$  laten toenemen; dat is voor  $\phi_0 = 0$ , als wanneer het centrale punt op den aequator ligt.

In dit geval gaat echter, zooals uit (11), (12) en (16), die hier overgaan in

$$\left. \begin{aligned} X &= r_0 \lambda, \\ Y &= r_0 U, \\ m &= \frac{r_0}{r}, \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

blijkt, de projectie over in de bekende projectie van MERCATOR, waarbij de pool op een oneindig grooten afstand verwijderd is.

## HOOFDSTUK V.

KAARTPROJECTIE MET HOMOFOCALE ELLIPSEN EN HYPERBOLEN ALS  
MERIDIANEN EN PARALLELEN.

§ 43. Zooals bekend is, worden al de ellipsen, die dezelfde brandpunten hebben, rechthoekig gesneden door al de hyperbolen, die diezelfde brandpunten bezitten. Deze eigenschap, waarvan de eigenschap, in het vorige hoofdstuk aan de projectie ten grondslag gelegd, slechts een bijzonder geval uitmaakt, kan ook dienstbaar gemaakt worden voor eene kaartprojectie.

Nemen wij voorloopig het gemeenschappelijk middelpunt van alle ellipsen en hyperbolen, figuur 3, als oorsprong van het coördinatenstelsel, de verbindingslijn van de brandpunten F en F' als  $y$ -as en de loodlijn daarop als  $x$ -as aan, en stellen wij den afstand van beide brandpunten door  $2A$  voor; dan zullen, als wij de ellipsen als parallellen aannemen, deze voorgesteld worden door

$$\frac{x^2}{B^2 - A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1; \dots \dots \dots (1)$$

als  $B$  de halve groote as oS van dergelijke ellips voorstelt, en dus eene functie van de breedte  $\phi$  is.

De meridiaan, die door de hyperbool QP voorgesteld wordt, heeft tot vergelijking

$$-\frac{x^2}{L^2} + \frac{y^2}{A^2 - L^2} = 1, \dots \dots \dots (2)$$

waarin  $L$ , de halve onbestaanbare as, eene functie van de lengte  $\lambda$  is.

Lossen wij uit deze vergelijkingen de  $x$  en  $y$  op, dan vinden wij voor de coördinaten van het punt P, waarvan de lengte en breedte door  $\lambda$  en  $\phi$  worden voorgesteld,

$$x = \sqrt{B^2 - A^2} \frac{L}{A}, \dots \dots \dots (3)$$

$$y = -B \frac{\sqrt{A^2 - L^2}}{A} {}^1) \dots \dots \dots (4)$$

---

<sup>1)</sup> Stelt men zich de vraag, eene projectie te vinden, waarbij de meridianen en parallellen elkaar rechthoekig snijden, en waarbij de coördinaten door de eenvoudige formules  $x = B_1 L$ ,  $y = B L_1$ , waarin  $B$  en  $B_1$  functiën van  $\phi$ ,  $L$  en  $L_1$  functiën van  $\lambda$  zijn, bepaald worden; dan geeft formule (1) van hoofdstuk II onmiddellijk de bovenstaande vergelijkingen (3) en (4).



Voor de uitvoering van de berekening is het goed de laatste vergelijking eene kleine wijziging te laten ondergaan; nemen wij dan tevens het centrale punt, dat ingevolge § 17 ergens in  $O$  op de lijn  $F'F$  moet liggen, als oorsprong aan, dan vinden wij

$$X = \sqrt{B^2 - A^2} \frac{L}{A}, \dots \dots \dots (5)$$

$$Y = (B_0 - B) + B \frac{A - \sqrt{A^2 - L^2}}{A} \dots \dots \dots (6)$$

In deze vergelijkingen heeft men nu slechts voor  $B$  en  $L$  willekeurige functiën van  $\phi$  en  $\lambda$  te nemen, om verschillende projectiën <sup>1)</sup> te krijgen met homofocale ellipsen en hyperbolen als parallellen en meridianen, die echter niet allen conforme projectiën zullen voorstellen. Welke functiën voor  $B$  en  $L$  in dit laatste geval moeten genomen worden, zal in de volgende paragraaf onderzocht worden.

§ 44. Differentieeren wij de formules (5) en (6) ten opzichte van  $\phi$  en  $\lambda$ , dan vinden wij

<sup>1)</sup> Het is in het algemeen niet mogelijk, eene equivalente projectie te maken, waarbij de meridianen en parallellen door homofocale ellipsen en hyperbolen worden voorgesteld, tenzij men de twee brandpunten late samenvallen, waardoor de ellipsen in cirkels, de hyperbolen in rechte lijnen, en de projectie dus in eene kegelvormige overgaat. Substitueeren wij de waarden van  $x$  en  $y$  namelijk in de voorwaarden-vergelijking van de equivalente projectie, namelijk in

$$Rr = \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \phi},$$

dan vinden wij, na eenige herleiding,  $Rr = \frac{B' L' (A^2 - B^2 - L^2)}{\sqrt{A^2 - L^2} \sqrt{B^2 - A^2}}$ ; waaruit volgt

dat  $\frac{L' (A^2 - B^2 - L^2)}{\sqrt{A^2 - L^2}}$  onafhankelijk moet zijn van  $\lambda$ . Stellen wij dus de daar-

van ten opzichte van  $\lambda$  afgeleide functie gelijk nul, dan vinden wij na herleiding

$$B^2 = \frac{L'' (A^2 - L^2) - L L'^2}{L'' (A^2 - L^2) + L L'^2} (A^2 - L^2). \text{ Aangezien } B \text{ functie van } \phi \text{ is, zoo moet}$$

het tweede lid den vorm  $\frac{0}{0}$  aannemen, waaraan alleen voldaan kan worden door

eene standvastige waarde voor  $L$  te nemen. Uit (5) volgt echter, dat  $\frac{L}{A}$  functie

van  $\lambda$  moet zijn; deze uitdrukking moet dus overgaan in  $\frac{0}{0}$ ; en dus zijn  $L$  en  $A$

beiden nul; waardoor de projectie in de equivalente kegelvormige projectie overgaat.

$$\frac{\partial X}{\partial \Phi} = \frac{B L B'}{A \sqrt{B^2 - A^2}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \Phi} = -B' \frac{\sqrt{A^2 - L^2}}{A}, \dots (7)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A} L', \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{B L L'}{A \sqrt{A^2 - L^2}} \dots (8)$$

Door deze uitdrukkingen in eene van de formules (6') van hoofdstuk II over te brengen, vinden wij

$$-B' \frac{\sqrt{A^2 - L^2}}{A} = U' \frac{\sqrt{B^2 - A^2}}{A} L',$$

$$\text{of} \quad \frac{L'}{\sqrt{A^2 - L^2}} = \frac{-B'}{U' \sqrt{B^2 - A^2}} \dots (9)$$

Daar het eerste lid dezer vergelijking alleen functie kan zijn van  $\lambda$ , het tweede lid alleen van  $\Phi$ , zoo kan aan die vergelijking alleen voldaan worden, indien beide leden gelijk zijn aan dezelfde standvastige, die wij door  $C$  zullen voorstellen; en waardoor wij dus vinden

$$\frac{L'}{\sqrt{A^2 - L^2}} = C, \dots (10)$$

$$\text{en} \quad \frac{B'}{\sqrt{B^2 - A^2}} = -C U' \dots (11)$$

De eerste dezer vergelijkingen geeft door integratie

$$Bg \sin \frac{L}{A} = C \lambda,$$

waarbij geene standvastige behoeft bijgevoegd te worden, omdat wij den meridiaan van het centrale punt als eersten meridiaan aannemen. Uit deze vergelijking volgt nu

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{A} &= \sin C \lambda, \\ \frac{\sqrt{A^2 - L^2}}{A} &= \cos C \lambda, \\ \frac{A - \sqrt{A^2 - L^2}}{A} &= 1 - \cos C \lambda = 2 \sin^2 \frac{1}{2} C \lambda; \end{aligned} \right\} (12)$$

zoodat wij voor de formules (5) en (6) kunnen schrijven

$$\left. \begin{aligned} X &= p \sin C \lambda, \\ Y &= S + q \sin^2 \frac{1}{2} C \lambda; \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

waarin  $p$ ,  $q$  en  $S$  functiën van  $\Phi$  zijn, waarvan eens vooral tafels kunnen ontworpen worden. Deze functiën worden bepaald door de formules

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{B^2 - A^2}, \\ q &= 2B, \\ s &= B_0 - B. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

§ 45. Voor kleine waarden van  $\lambda$  zijn de formules (13) eenigszins lastig in het gebruik, doordat men de  $\log \sin$  van kleine hoeken moet zoeken. Voor dat geval kan men echter aan die formules een meer practischen vorm geven.

Neemt men namelijk in aanmerking dat

$$\log \sin z = \log z - M \left( \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{4.9.5} + \frac{z^6}{9.5.7.9} + \dots \right)$$

is, dan kan men, zoolang  $\frac{Mz^4}{180}$  minder bedraagt dan de helft van de zevende decimaal, d. i. zoolang  $z < 3^\circ 51'$  is, voor  $\log \sin z$  schrijven

$$\log \sin z = \log z - \frac{M}{6} z^2 = \log Bg 1'' + \log z'' - \left( \frac{M}{6} Bg^2 1'' \right) z''^2,$$

als  $z''$  den hoek  $z$ , in seconden uitgedrukt, voorstelt.

Met behulp hiervan vinden wij

$$\begin{aligned} \log X &= \log p + \log \sin C\lambda = \log p + \log Bg 1'' + \log C\lambda'' - \left( \frac{M}{6} Bg^2 1'' \right) C^2 \lambda''^2 = \\ &= \log (p C Bg 1'') + \log \lambda'' - \left( \frac{M}{6} C^2 Bg^2 1'' \right) \lambda''^2, \\ \log (Y - S) &= \log q + 2 \log \sin \frac{1}{2} C\lambda = \\ &= \log q + 2 \log Bg 1'' + 2 \log \frac{1}{2} C\lambda'' - 2 \left( \frac{M}{6} Bg^2 1'' \right) \frac{C^2 \lambda''^2}{4} = \\ &= \log \left( \frac{3q}{2M10^7} \right) + \log \left( 10^7 \frac{MC^2}{6} Bg^2 1'' \right) + 2 \log \lambda'' - \frac{1}{2} \left( \frac{M}{6} C^2 Bg^2 1'' \right) \lambda''^2. \end{aligned}$$

Stelt men nu

$$\left. \begin{aligned} \log (p C Bg 1'') &= p_2, \\ \log \left( \frac{3q}{2M10^7} \right) &= q_2, \\ \log \left( \frac{10^7 M C^2}{6} Bg^2 1'' \right) &= t, \\ \left( \frac{M}{6} C^2 Bg^2 1'' \right) \lambda''^2 &= \Delta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14')$$

dan gaan bovenstaande formules over in

$$\left. \begin{aligned} \log X &= p_2 + \log \lambda'' - \Delta, \\ \log (Y - S) &= q_2 + t + 2 \log \lambda'' - \frac{1}{2} \Delta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14'')$$

De grootheden  $p_2$  en  $q_2$  zijn hier functiën van  $\Phi$ , die gevonden worden door bij  $\log p$  en  $\log q$  op te tellen respectievelijk  $\log(CBg1'')$  en  $\log \frac{3}{2M10^7} = 3,5383069478 - 10$ ; de grootheid  $t$  is eene standvastige; en de correctie  $\Delta$  wordt, uitgedrukt in eenheden van de zevende decimaal, gevonden uit

$$\log \Delta = t + 2 \log \lambda''.$$

Voor de berekening (zie § 10) schrijft men eerst de grootheid  $p_2$  uit de tafel op, daaronder  $\log \lambda''$ ; naast  $p_2$  schrijft men de standvastige  $t$ , en daaronder het dubbel van  $\log \lambda''$ . Door de beide laatste samen te tellen vindt men de logarithme van  $\Delta$ , die men dus kan opzoeken; de waarde van  $\Delta$  afgetrokken van de som van  $p_2$  en  $\log \lambda''$  geeft dan  $\log X$ ; en de helft van  $\Delta$  afgetrokken van de som van  $t$  en  $2 \log \lambda''$ , en daarbij opgeteld de grootheid  $q_2$  uit de tafel, geeft  $\log(Y-S)$ , waaruit  $X$  en  $Y$  gemakkelijk gevonden worden.

De hier ontwikkelde formules zijn geldig, zoolang  $C\lambda < 3^0 51'$  en dus  $\lambda < \frac{3^0 51'}{C}$  is.

§ 46. Ter bepaling van de in (14) voorkomende functie  $B$  volgt uit (11) door integratie

$$\log \frac{B + \sqrt{B^2 - A^2}}{B_0 + \sqrt{B_0^2 - A^2}} = -CU,$$

$$\text{en dus} \quad B + \sqrt{B^2 - A^2} = (B_0 + \sqrt{B_0^2 - A^2})e^{-CU},$$

waaruit door deeling op de grootheid  $A^2$  volgt

$$B - \sqrt{B^2 - A^2} = (B_0 - \sqrt{B_0^2 - A^2})e^{CU}.$$

Uit deze twee vergelijkingen volgt nu onmiddellijk

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{B^2 - A^2} = -B_0 \frac{e^{CU} - e^{-CU}}{2} + \sqrt{B_0^2 - A^2} \frac{e^{CU} + e^{-CU}}{2}, \\ q &= 2B = B_0(e^{CU} + e^{-CU}) - \sqrt{B_0^2 - A^2}(e^{CU} - e^{-CU}), \\ s &= B_0 - B = B_0 \left(1 - \frac{e^{CU} + e^{-CU}}{2}\right) + \sqrt{B_0^2 - A^2} \frac{e^{CU} - e^{-CU}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

§ 47. Ter bepaling van de standvastigen  $A$  en  $B_0$ , ingevolge de voorwaarden in het tweede hoofdstuk ontwikkeld, vinden wij uit (8) met behulp van (10)

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{C}{A} \sqrt{B^2 - A^2} \sqrt{A^2 - L^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{C}{A} BL, \dots \quad (16)$$



hieruit volgt verder, door differentiatie ten opzichte van  $\lambda$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2} &= -\frac{C}{A} \sqrt{B^2 - A^2} \frac{LL'}{\sqrt{A^2 - L^2}} = -\frac{C^2}{A} \sqrt{B^2 - A^2} L, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} &= \frac{C}{A} B L' = \frac{C^2}{A} B \sqrt{A^2 - L^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Voor het centrale punt volgt hieruit

$$\left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)_0 = C \sqrt{B_0^2 - A^2}, \quad \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)_0 = 0,$$

$$\text{en} \quad \left( \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right)_0 = C^2 B_0;$$

waaruit blijkt, dat aan (8) en (14) van hoofdstuk II reeds voldaan is; terwijl uit (10) en (19) volgt

$$C \sqrt{B_0^2 - A^2} = r_0,$$

$$\text{en} \quad C^2 B_0 = r_0 \sin \Phi_0,$$

$$\text{zoodat} \quad \sqrt{B_0^2 - A^2} = \frac{r_0}{C}, \dots \dots \dots (18)$$

$$\text{en} \quad B_0 = \frac{r_0 \sin \Phi_0}{C^2} \dots \dots \dots (19)$$

is. Deze uitdrukkingen in (15) overbrengende, vinden wij

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{r_0}{C} \left[ \frac{e^{CU} + e^{-CU}}{2} - \frac{\sin \Phi_0}{C} \frac{e^{CU} - e^{-CU}}{2} \right], \\ q &= 2 \frac{r_0}{C} \left[ \frac{\sin \Phi_0}{C} \frac{e^{CU} + e^{-CU}}{2} - \frac{e^{CU} - e^{-CU}}{2} \right], \\ s &= \frac{r_0}{C} \left[ \frac{e^{CU} - e^{-CU}}{2} - \frac{\sin \Phi_0}{C} \left( \frac{e^{CU} + e^{-CU}}{2} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Uit (18) en (19) volgt nog voor de waarde van  $A$

$$A = \sqrt{B_0^2 - \frac{r_0^2}{C^2}} = \sqrt{\frac{r_0^2 \sin^2 \Phi_0}{C^4} - \frac{r_0^2}{C^2}} = \frac{r_0}{C^2} \sqrt{\sin^2 \Phi_0 - C^2}, \quad (21)$$

waaruit blijkt dat  $C$  altijd kleiner moet zijn dan  $\sin \Phi_0$ .

§ 43. De formules (20) zijn niet voor logarithmische berekening geschikt; zij kunnen daartoe echter geschikt gemaakt worden door het invoeren van de hyperbolische functiën; voeren wij dan tevens de hulpgrootheid  $\theta$  in, bepaald door de vergelijking

$$\frac{\sin \Phi_0}{C} = \text{Coth } \theta = \frac{C \hbar \theta}{S \hbar \theta}, \dots \dots \dots (22)$$

dan vinden wij na eenige herleiding

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{r_0 \sqrt{\sin^2 \Phi_0 - C^2}}{C^2} Sh(\delta - CU) &= A Sh(\delta - CU), \\ q &= 2 \frac{r_0 \sqrt{\sin^2 \Phi_0 - C^2}}{C^2} Ch(\delta - CU) &= 2 A Ch(\delta - CU), \\ S &= 2 \frac{r_0 \sqrt{\sin^2 \Phi_0 - C^2}}{C^2} Sh(\delta - \frac{1}{2} CU) . Sh \frac{1}{2} CU = 2 A Sh(\delta - \frac{1}{2} CU) . Sh \frac{1}{2} CU. \end{aligned} \right\} (23)$$

Nog langs anderen weg kunnen de formules (20) voor logarithmische berekening geschikt gemaakt worden; stelt men namelijk

$$\frac{\sin \Phi_0}{C} = \frac{1}{\sin \psi_0}, \dots\dots\dots (24)$$

$$\text{en} \quad Nep \log Tg(45 + \frac{1}{2} \psi) = Nep \log Tg(45 + \frac{1}{2} \psi_0) - CU, \dots (25)$$

dan gaan de formules (20) na eenige herleiding over in <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{r_0 \sqrt{\sin^2 \Phi_0 - C^2}}{C^2} Tg \psi = A Tg \psi, \\ q &= 2 \frac{r_0 \sqrt{\sin^2 \Phi_0 - C^2}}{C^2} \frac{1}{\cos \psi} = 2 A \sec \psi, \\ S &= 2 \frac{r_0 \sin \Phi_0}{C^2} \frac{\sin \frac{\psi + \psi_0}{2} \cdot \sin \frac{\psi_0 - \psi}{2}}{\cos \psi} = 2 A \frac{\sin \frac{\psi + \psi_0}{2} \cdot \sin \frac{\psi_0 - \psi}{2}}{\cos \psi \cdot \cos \psi_0}. \end{aligned} \right\} (26)$$

§ 49. Ter beoordeeling van de vergrooting voor een terrein van geringe uitgestrektheid merken wij op, dat de grootheid  $Q$  van hoofdstuk II hier nul is, omdat de projectie symmetrisch is ten opzichte van den meridiaan door het centrale punt. Ter berekening van  $P$  vinden wij uit (17) door differentiatie

$$\frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} = -\frac{C^2}{A} \sqrt{B^2 - A^2} L' = -\frac{C^3}{A} \sqrt{B^2 - A^2} \sqrt{A^2 - L^2};$$

voor het centrale punt volgt hieruit

$$\left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0 = -C^3 \sqrt{B_0^2 - A^2} = -C^2 r_0.$$

<sup>1)</sup> Brengt men de formules (23) en (26) in verband met (13), en neemt men als oorsprong het gemeenschappelijk middelpunt van alle ellipsen en hyperbolen, dan vindt men voor de coördinaten de volgende eenvoudige uitdrukkingen

$$x = A Sh(\delta - CU) \cdot \sin C\lambda, \quad y = -A Ch(\delta - CU) \cdot \cos C\lambda,$$

$$\text{en} \quad x = A Tg \psi \cdot \sin C\lambda, \quad y = -A \sec \psi \cdot \cos C\lambda;$$

voor de practische berekening zijn echter de formules (13) in verband met (23) of (26) veel doelmatiger.

Deze uitdrukking, overgebracht in formule (29) van hoofdstuk II, geeft

$$P = 2 \frac{R_0}{N_0} Tg^2 \phi_0 - 1 - 2 \frac{R_0}{N_0} \frac{C^2}{\cos^2 \phi_0} = 2 \frac{R_0}{N_0} \frac{\sin^2 \phi_0 - C^2}{\cos^2 \phi_0} - 1, \quad (27)$$

waaruit omgekeerd volgt

$$C^2 = \sin^2 \phi_0 - \frac{1+P}{2} \frac{N_0}{R_0} \cos^2 \phi_0 \dots \dots \dots (28)$$

Aangezien  $P$  de grootheid  $C$  bevat, waarover naar willekeur beschikt kan worden, zoo kan deze projectie aan den vorm van het terrein aangepast worden, zoo goed als dat bij een symetrische projectie mogelijk is. (Zie § 23).

Daar  $\frac{1+P}{2}$  altijd positief is, zoo is  $C^2$  werkelijk kleiner dan  $\sin^2 \phi_0$ , en de grens, door formule (21) aangegeven, dat  $C^2$  niet grooter mag zijn dan  $\sin^2 \phi_0$ , belet dus niet de waarde van  $C^2$  volgens (28) te bepalen.

Uit (28) volgt echter, dat voor  $\sin^2 \phi_0 < \frac{1+P}{2} \frac{N_0}{R_0} \cos^2 \phi_0$ , dat is voor  $\frac{R_0}{N_0} Tg^2 \phi_0 < \frac{1+P}{2}$ , de waarde van  $C^2$  negatief, en  $C$  dus imaginair wordt. In dit geval, — dat zich, omdat  $\frac{1+P}{2}$  hoogstens gelijk aan de eenheid kan zijn, alleen kan voordoen, indien de breedte van het centrale punt minder dan  $45^\circ$  bedraagt, — verkrijgen de formules voor de projectie een imaginair vorm; zij kunnen echter tot bestaansbaren vorm worden teruggebracht. Welken vorm die vergelijkingen dan aannemen, en wat daar verder bij valt op te merken, zullen wij later onderzoeken. (Zie § 54) <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> In de Chorographie van LITTELOW (zie de vertaling daarvan door LOBATTO, 's Gravenhage en Amsterdam 1842, blz. 149—150 en 195—197) komt eene projectie voor met de formules

$$x = Tg \varphi \cdot \cos \lambda, \quad y = -\frac{\sin \lambda}{\cos \varphi};$$

later komt nog eens dezelfde projectie voor, met de gewijzigde formules

$$x = \frac{\cos \lambda}{\sin \psi}, \quad y = -\frac{\sin \lambda}{Tg \psi},$$

waarin  $\psi = 90 - \varphi$  is, de meridiaan van het centrale punt overeenkomt met  $\lambda = 90^\circ$ , en de assen  $90^\circ$  verdraait zijn.

Eindelijk vindt men daarin de meer algemeene formules

§ 50. Ter bepaling van de vergrooting bij een uitgestrekt terrein moeten wij terugkeeren tot formule (3) van hoofdstuk II. Substitueeren wij daarin de uitdrukkingen voor de differentiaalquotienten volgens (16), dan vinden wij

$$m = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{C^2}{A^2} (B^2 - A^2)(A^2 - L^2) + \frac{C^2}{A^2} B^2 L^2} = \frac{C}{r} \sqrt{B^2 - A^2 + L^2}.$$

Brengen wij hierin de voor  $B$  en  $L$  gevonden uitdrukkingen over, dan vinden wij voor de vergrooting de volgende formules

$$\begin{aligned} m &= \frac{C}{r} \sqrt{p^2 + A^2 \sin^2 C\lambda}, \\ m &= \frac{AC}{r} \sqrt{Sh^2(\theta - CU) + \sin^2 C\lambda} = \frac{r_0}{r Sh \theta} \sqrt{Sh^2(\theta - CU) + \sin^2 C\lambda}, \\ m &= \frac{r_0}{r \sqrt{2} Sh \theta} \sqrt{Ch(2\theta - 2CU) - \cos 2C\lambda}, \\ \text{en} \\ m &= \frac{AC}{r} \sqrt{Tg^2 \psi + \sin^2 C\lambda} = \frac{r_0}{r Tg \psi_0} \sqrt{Tg^2 \psi + \sin^2 C\lambda}. \end{aligned} \quad (29)$$

Voor de punten langs den middelsten meridiaan volgt hieruit

$$\begin{aligned} m &= \frac{Cp}{r}, \quad m = \frac{r_0 Sh(\theta - CU)}{r Sh \theta}, \\ \text{en} \quad m &= \frac{r_0 Tg \psi}{r Tg \psi_0}, \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

en voor de punten langs de parallel van het centrale punt

$$\begin{aligned} X &= \frac{k}{2} \cos(m + n\lambda) \cdot (Tg^{\frac{n}{2}} \psi + Ctg^{\frac{n}{2}} \psi), \\ Y &= \frac{k}{2} \sin(m + n\lambda) \cdot (Tg^{\frac{n}{2}} \psi - Ctg^{\frac{n}{2}} \psi); \end{aligned}$$

De hierin voorkomende grootheid  $m$  geeft geen grootere algemeenheid; zij bepaalt alleen den eersten meridiaan; de grootheid  $n$  komt overeen met den in dit hoofdstuk ingevoerden parameter  $C$ .

Al deze projectiën hebben elliptische parallellen en hyperbolische meridianen met gemeenschappelijke brandpunten; zij behooren dus tot de hier ontwikkelde projectiën. Van de laatste wordt wel gezegd „Doch ook bij deze meerdere algemeenheid bemerkt men evenmin, welke bijzondere voordeelen daarin voor de „praktijk mogten kunnen opgesloten liggen,” maar zij worden niet nader onderzocht.

GERMAIN neemt in zijn „*Traité des projections des cartes géographiques*” p. 74, de eerste van bovenstaande formules over, zonder ze nader te onderzoeken.

Bij nader onderzoek blijkt het, dat hier de brandpunten op den equator liggen, een bijzonder geval dat wij niet behandeld hebben; omdat het geen bruikbare kaartprojectie oplevert.

Dit zijn de eenige projectiën, die wij beschreven vonden, waarbij de parallellen en meridianen door homofocale ellipsen en hyperbolen worden voorgesteld.



$$m = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \Phi_0 - C^2}{C} - \sin^2 C\lambda} \dots \dots \dots (31)$$

§ 51. Enkele bijzondere gevallen, die zich bij deze projectie voordoen, dienen nog iets nader ontwikkeld te worden. Nemen wij in de eerste plaats  $P = -1$ , dus geldende voor de kaart van eene landstreek, die zich vooral in de richting van den paralleleirkel uitstrekt.

Uit (28) volgt voor dit geval

$$C = \sin \Phi_0,$$

waaruit blijkt, dat voor dit geval, wat ook de waarde van  $\Phi_0$  zij altijd de hier ontwikkelde projectie kan toegepast worden.

Substitueeren wij deze waarde voor  $C$  in (21), dan vinden wij

$$A = 0;$$

de twee brandpunten vallen in dit geval dus samen, de elliptische parallellen gaan dus in cirkels, de hyperbolische meridianen in rechte lijnen, en de projectie in de conformkegelvormige over.

In dit bijzondere geval komt deze projectie dus volkomen overeen met de cirkelprojectie van LAGRANGE, die, zooals wij in § 35 gezien hebben, voor  $P = -1$  ook in de kegelvormige projectie overgaat. De formules (13) en (20) moeten dan ook onmiddellijk in de daar gevondene overgaan.

De formules (20) geven vooreerst

$$p = \frac{r_0}{C} e^{-CU} = N_0 \operatorname{Ctg} \Phi_0 \cdot e^{-CU},$$

$$S = \frac{r_0}{C} (1 - e^{-CU}) = 2 N_0 \operatorname{Ctg} \Phi_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}CU} \operatorname{Sh} \frac{1}{2}CU;$$

voor  $q$  vinden wij eene uitdrukking, die juist overeenkomt met  $2p$ ; en zoo wij dit in (13) substitueeren, komt er

$$X = p \sin C\lambda,$$

$$Y = S + 2p \sin^2 \frac{1}{2}C\lambda = S + X \operatorname{Tg} \frac{1}{2}C\lambda,$$

welke formules juist overeenkomen met de formules (49) en (50) van genoemde paragraaf.

De eerste van de formules (29) geeft eindelijk voor de vergrooting

$$m = \frac{Cp}{r} = \frac{r_0}{r} e^{-CU},$$

overeenkomende met formule (51) van genoemde paragraaf.

§ 52. Een ander bijzonder geval, dat opmerking verdient, is hetgeen wij krijgen, als wij  $C = 0$  stellen; dus de overgang tusschen de boven ontwikkelde formules en de straks te ontwikkelen formules, waarbij  $C$  eene imaginaire waarde verkrijgt.

Stellen wij in (21)  $C = 0$ , dan wordt  $\mathcal{A}$  oneindig groot; het eene brandpunt ( $F'$ ) verdwijnt dus in het oneindige, en de ellipsen en hyperbolen gaan dus over in parabolen; zoodat wij de projectie terug vinden, die in het vorige hoofdstuk behandeld is. De formules (13) en (20) moeten dan ook in de daar ontwikkelde formules overgaan.

Uit (13) volgt vooreerst voor zeer kleine waarden van  $C$

$$X = p C \lambda,$$

en

$$Y = S + \frac{1}{4} q C^2 \lambda^2;$$

uit (20) volgt dan verder, voor  $p C$ ,  $q C^2$  en  $S$ , als wij  $C$  tot nul laten naderen,

$$p C = r_0 \left( \frac{1+1}{2} - \sin \phi_0 \frac{(1+CU)-(1-CU)}{2C} \right) = r_0 (1 - \sin \phi_0 \cdot U),$$

$$q C^2 = 2 r_0 \left( \sin \phi_0 \frac{1+1}{2} - C \frac{(1+CU)-(1-CU)}{2} \right) = 2 r_0 \sin \phi_0,$$

$$S = r_0 \left[ \frac{(1+CU)-(1-CU)}{2C} - \sin \phi_0 \frac{(1+CU + \frac{1}{2} C^2 U^2) + (1-CU + \frac{1}{2} C^2 U^2) - 2}{2 C^2} \right] = \\ = r_0 (U - \frac{1}{2} \sin \phi_0 \cdot U^2).$$

Deze uitdrukkingen in vorenstaande formules voor  $X$  en  $Y$  overbrengende, vinden wij

$$X = r_0 (1 - U \sin \phi_0) \lambda,$$

$$Y = r_0 (U - \frac{1}{2} U^2 \sin \phi_0) + \frac{1}{2} r_0 \sin \phi_0 \cdot \lambda^2,$$

volkomen overeenstemmende met de formules (11) en (12) van het vorige hoofdstuk.

§ 53. Passen wij de projectie met elliptische parallellen toe op de kaart van Nederland, dan moeten wij ingevolge § 23 nemen  $\phi_0 = 52^\circ 13' 20''$  en  $P = 0$ . Uit formule (28) volgt dan

$$C = 0,6607629743 \dots \dots \dots (32)$$

Met deze waarden voor  $C$  en  $\phi_0$  vinden wij

$$\left. \begin{aligned} X &= p \sin 0,6607629743 \lambda, \\ Y &= S + q \sin^2 0,3303814871 \lambda. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

De hierin voorkomende grootheden  $p$ ,  $q$  en  $S$  zijn functiën van  $\phi$ , waarvan vooraf de waarden voor verschillende waarden van  $\phi$  in eene tafel vereenigd kunnen worden. Zij worden berekend met behulp van een van de twee onderstaande groepen van formules.

$$\begin{aligned}
 p &= (6,5898074847) Sh(\theta - CU), \quad q = (6,8908374804) Ch(\theta - CU), \\
 S &= (6,8908374804) Sh(\theta - \frac{1}{2} CU) \cdot Sh \frac{1}{2} CU, \\
 M\theta &= 0,5245047482, \quad \theta = 1,2077168144.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p &= (6,5898074847) Tg \psi, \quad q = (6,8908374804) Sec \psi, \\
 S &= (7,1514711369) \frac{\sin \frac{\psi + \psi_0}{2} \cdot \sin \frac{\psi_0 - \psi}{2}}{\cos \psi}, \\
 \log Tg (45^\circ + \frac{1}{2} \psi) &= 0,5245047482 - CMU, \\
 \psi_0 &= 56^\circ 43' 9'', 8734.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Bij deze formules is rekening gehouden met den herleidingscoëfficient  $1 - \frac{c^2}{8\rho_0^2} = \frac{11274}{11275}$  van § 23, zoodat bij deze projectie de vergrooting binnen de grenzen

$$1 \pm \frac{c^2}{8\rho_0^2} = 1 \pm \frac{1}{11275}$$

blijft.

De tusschen haakjes geplaatste getallen stellen de gewone of Brigiaansche logaritmen van de coëfficiënten voor. Door  $\log$  worden die zelfde logaritmen bedoeld, en door  $M$  hun modulus 0,43429448. Verder is bij de berekening gebruik gemaakt van de Besselsche afmetingen van de ellipsoïde.

Voor kleine waarden van  $\lambda$  vindt men uit (14') en (14'')

$$\left. \begin{aligned} \log X &= p_2 + \log \lambda'' - \Delta, \\ \log(Y-S) &= t + 2 \log \lambda'' + q_2 - \frac{1}{2} \Delta, \end{aligned} \right\} \dots \dots (34')$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= 4,5056205662 - 10 + \log p, \\ q_2 &= 3,5383069477 - 10 + \log q, \\ t &= 4,8708741933 - 10. \end{aligned} \right\} \dots \dots (34'')$$

Deze formules zijn bruikbaar, zoolang  $\lambda$  kleiner dan  $\frac{3^\circ 51'}{0,66}$ , dat is kleiner dan  $5^\circ 50'$  is, en dus voor geheel Nederland toe te passen.

§ 54. Uit formule (28) van § 49 hebben wij gezien, dat voor waarden van  $\phi_0$  kleiner dan  $45^\circ$  de voordeeligste waarde van  $C^2$  negatief en  $C$  dus imaginair kan worden. De formules voor de berekening van  $X$  en  $Y$  verkrijgen daardoor een imaginair vorm, maar  $X$  en  $Y$  blijven toch reële waarden behouden. Om die formules tot bestaansbare vormen terug te brengen, zullen wij  $C = C_1 \sqrt{-1}$  stellen, waardoor formule (28) overgaat in

$$C_1^2 = \frac{1+P}{2} \frac{N_0}{R_0} \cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0 \dots \dots \dots (35)$$

De formules (13) gaan nu over in

$$X = p \sin C_1 \lambda \cdot \sqrt{-1} = p \frac{e^{C_1 \lambda} - e^{-C_1 \lambda}}{2} \sqrt{-1} = p \sqrt{-1} \operatorname{sh} C_1 \lambda = p_1 \operatorname{sh} C_1 \lambda.$$

$$\begin{aligned} Y = S + q \sin^2 \frac{1}{2} C_1 \lambda \cdot \sqrt{-1} &= S + q \left( \frac{e^{\frac{1}{2} C_1 \lambda} - e^{-\frac{1}{2} C_1 \lambda}}{2} \sqrt{-1} \right)^2 = \\ &= S - q \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} C_1 \lambda = S_1 + q_1 \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} C_1 \lambda. \end{aligned}$$

Voor  $p_1 = p \sqrt{-1}$ ,  $q_1 = -q$  en  $S_1 = S$  vinden wij dan uit (20)

$$\begin{aligned} p_1 &= p \sqrt{-1} = \\ &= \frac{r_0}{C_1 \sqrt{-1}} \left[ \frac{e^{C_1 U \sqrt{-1}} + e^{-C_1 U \sqrt{-1}}}{2} - \frac{\sin \phi_0}{C_1 \sqrt{-1}} \frac{e^{C_1 U \sqrt{-1}} - e^{-C_1 U \sqrt{-1}}}{2} \right] \sqrt{-1} = \\ &= \frac{r_0}{C_1} \left[ \cos C_1 U - \frac{\sin \phi_0}{C_1} \sin C_1 U \right], \end{aligned}$$

$$q_1 = -q =$$

$$\begin{aligned} &= -2 \frac{r_0}{C_1 \sqrt{-1}} \left[ \frac{\sin \phi_0}{C_1 \sqrt{-1}} \frac{e^{C_1 U \sqrt{-1}} + e^{-C_1 U \sqrt{-1}}}{2} - \frac{e^{C_1 U \sqrt{-1}} - e^{-C_1 U \sqrt{-1}}}{2} \right] = \\ &= 2 \frac{r_0}{C_1} \left[ \frac{\sin \phi_0}{C_1} \cos C_1 U + \sin C_1 U \right], \end{aligned}$$

$$S_1 = S =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{r_0}{C_1 \sqrt{-1}} \left[ \frac{e^{C_1 U \sqrt{-1}} - e^{-C_1 U \sqrt{-1}}}{2} - \frac{\sin \phi_0}{C_1 \sqrt{-1}} \left( \frac{e^{C_1 U \sqrt{-1}} + e^{-C_1 U \sqrt{-1}}}{2} - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{r_0}{C_1} \left[ \sin C_1 U + \frac{\sin \phi_0}{C_1} (\cos C_1 U - 1) \right]. \end{aligned}$$

Voeren wij nu nog een hulphoek  $\theta_1$  in, bepaald door de betrekking

$$\frac{\sin \phi_0}{C_1} = \operatorname{ctg} \theta_1, \dots \dots \dots (36)$$

en letten er op dat (21) overgaat in

$$A = \frac{r_0}{C_1^2} \sqrt{\sin^2 \phi_0 + C_1^2} = \frac{r_0}{C_1 \sin \theta_1} {}^1), \dots \dots (37)$$

<sup>1)</sup> Door de verandering van  $C$  in  $C_1 \sqrt{-1}$  geeft formule (20) eene negatieve waarde voor  $A$ , daarmede overeenkomende, dat  $A$  hier in tegengestelden zin voorkomt; het brandpunt  $F'$  (fig. 4) ligt hier namelijk op het negatieve gedeelte der  $Y$ -as, en niet zooals in fig. 3 op het positieve deel. Daar wij echter alleen met de absolute waarde van  $A$  te maken hebben, zoo laten wij in form. (37) het negatieve teeken weg.



dan vinden wij na eene eenvoudige herleiding het volgende stel formules ter berekening van  $X$  en  $Y$  <sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} X &= p_1 Sh C_1 \lambda, \\ Y &= S_1 + q_1 Sh^2 \frac{1}{2} C_1 \lambda, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (38)$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= A Sin(\theta_1 - C_1 U), \\ q_1 &= 2 A Cos(\theta_1 - C_1 U), \\ S_1 &= 2 A Sin(\theta_1 - \frac{1}{2} C_1 U). Sin \frac{1}{2} C_1 U. \end{aligned} \right\} \dots \dots (39)$$

Onderzoekt men met behulp van de formules (38) den vorm van de meridianen en parallellen, dan vindt men, dat hier de meridianen door ellipsen en de parallellen door hyperbolen worden voorgesteld. Wij zullen dat onderzoek hier niet instellen, maar, uitgaande van den vorm voor de meridianen en parallellen, rechtstreeks de formules voor de projectie afleiden, waardoor wij dan de formules (38) en (39) zullen moeten terug vinden. Wij zullen dan tevens de overige grootheden, zooals de vergrooting, die op deze projectie betrekking hebben, rechtstreeks kunnen afleiden.

§ 55. Nemen wij de hyperbool PS (figuur 4) als parallel aan, en stellen wij  $oS = B$ , dan is de vergelijking daarvan

$$-\frac{x^2}{A^2 - B^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \dots \dots \dots (40)$$

De vergelijking van de ellips QPT, die den meridiaan ter lengte  $\lambda$  voorstelt, wordt, als wij  $oT = L$  stellen,

$$\frac{x^2}{L^2} + \frac{y^2}{A^2 + L^2} = 1 \dots \dots \dots (41)$$

<sup>1)</sup> De berekening met  $Sh C_1 \lambda$  is voor kleine waarden van  $\lambda$  niet omslagtiger dan de berekening met  $Sin C_1 \lambda$ , ook al bezit men geen tafel van hyperbolische functiën. Men heeft namelijk  $Sh z = z + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots = z \left( 1 + \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \frac{z^6}{5040} + \dots \right)$ , waaruit volgt  $\log Sh z = \log z + \frac{M}{6} z^2 - \frac{M}{180} z^4 + \frac{M}{2835} z^6 + \dots$ . De term  $\frac{M}{180} z^4$  wordt echter eerst voor  $z = 3^\circ 50' = 0,06690$  gelijk aan 0,00000004834 en bereikt dus nog niet de helft van de 7<sup>de</sup> decimaal. Zoolang dus  $\lambda$  blijft beneden  $3^\circ 50'$  ( $C_1$  is altijd kleiner dan de eenheid), kan men zich bepalen tot de uitdrukking

$$\log Sh z = \log z + \frac{M}{6} z^2 = \log z + (8,8596331 - 10) z^2,$$

of, indien  $z$  in seconden gegeven is, en men den correctie-term  $\frac{M}{6} z^2$  uitdrukt in eenheden van de 7<sup>de</sup> decimaal

$$\log Sh . z = 4,6855748.668 + \log z'' + (5,2307828 - 10) z''^2.$$

Uit deze twee vergelijkingen  $x$  en  $y$  oplossende, vinden wij

$$x = \sqrt{A^2 - B^2} \frac{L}{A},$$

$$y = B \frac{\sqrt{A^2 + L^2}}{A}.$$

Nemen wij verder ingevolge § 17 het centrale punt in  $O$ , dan vinden wij voor de coördinaten  $X$  en  $Y$

$$\left. \begin{aligned} X &= \sqrt{A^2 - B^2} \frac{L}{A}, \\ Y &= B \frac{\sqrt{A^2 + L^2}}{A} - B_0 = B - B_0 + B \frac{\sqrt{A^2 + L^2} - A}{A}. \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

Door deze uitdrukkingen ten opzichte van  $\phi$  en  $\lambda$  te differentieeren komt er

$$\frac{\partial X}{\partial \phi} = \frac{-BLB'}{A\sqrt{A^2 - B^2}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \phi} = \frac{B'\sqrt{A^2 + L^2}}{A}, \dots (43)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \sqrt{A^2 - B^2} \frac{L'}{A}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{BL L'}{A\sqrt{A^2 + L^2}}; \dots (44)$$

waaruit, door substitutie in eene van de formules (6') van hoofdstuk II, volgt

$$\frac{B'\sqrt{A^2 + L^2}}{A} = U' \sqrt{A^2 - B^2} \frac{L'}{A},$$

of

$$\frac{L'}{\sqrt{A^2 + L^2}} = \frac{B'}{U' \sqrt{A^2 - B^2}}.$$

Daar het eerste lid dezer vergelijking uitsluitend  $\lambda$  kan bevatten, en het tweede lid alleen functie kan zijn van  $\phi$ , zoo kan aan die vergelijking niet voldaan worden, tenzij beide leden gelijk zijn aan eene zelfde standvastige.

Stellen wij deze standvastige door  $C_1$  voor, dan vinden wij onmiddellijk de volgende twee vergelijkingen ter bepaling van  $L$  en  $B$

$$\frac{L'}{\sqrt{A^2 + L^2}} = C_1, \dots (45)$$

en

$$\frac{B'}{\sqrt{A^2 - B^2}} = C_1 U' \dots (46)$$

De eerste hiervan geeft door integratie

$$\log \frac{L + \sqrt{A^2 + L^2}}{A} = C_1 \lambda,$$

waarbij het niet noodig is eene standvastige te voegen, omdat wij den meridiaan van het centrale punt als eersten meridiaan aannemen, waardoor voor  $\lambda = 0$ ,  $L = 0$  wordt. Hieruit volgt

$$\frac{L + \sqrt{A^2 + L^2}}{A} = e^{C_1 \lambda},$$

en door deeling op de eenheid

$$\frac{-L + \sqrt{A^2 + L^2}}{A} = e^{-C_1 \lambda},$$

en hieruit vinden wij nu onmiddellijk

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{A} &= \frac{e^{C_1 \lambda} - e^{-C_1 \lambda}}{2} = Sh C_1 \lambda, \\ \frac{\sqrt{A^2 + L^2}}{A} &= \frac{e^{C_1 \lambda} + e^{-C_1 \lambda}}{2} = Ch C_1 \lambda, \\ \frac{\sqrt{A^2 + L^2} - A}{A} &= Ch C_1 \lambda - 1 = 2 Sh^2 \frac{1}{2} C_1 \lambda; \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

waardoor de formules (42) overgaan in

$$\left. \begin{aligned} X &= p_1 Sh C_1 \lambda, \\ Y &= S_1 + q_1 Sh^2 \frac{1}{2} C_1 \lambda, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

als wij

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \sqrt{A^2 - B^2}, \\ q_1 &= 2B, \\ S_1 &= B - B_0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49)$$

stellen.

Op gelijke wijze als in § 45 vinden wij, zoolang  $\lambda$  kleiner is dan  $\frac{3^0 51}{C'}$ , de volgende formules

$$\left. \begin{aligned} \log X &= p_2 + \log \lambda'' + \Delta, \\ \log(Y - S) &= q_2 + t + 2 \log \lambda'' + \frac{1}{2} \Delta, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49')$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \log(p_1 C_1 B g 1''), \\ q_2 &= \log \frac{3 q_1}{2 M 10^7}, \\ t &= \log \frac{M C_1^2}{6} 10^7 B g^2 1''. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49'')$$

Deze formules komen op het teeken van  $\Delta$  na volkomen overeen met de formules (14') en (14'').

§ 56. Ter bepaling van de functie  $B$ , en dus van  $p_1$ ,  $q_1$  en  $S_1$ , geeft (46) door integratie

$$Bg \sin \frac{B}{A} - Bg \sin \frac{B_0}{A} = C_1 U,$$

$$B = A \sin \left( C_1 U + Bg \sin \frac{B_0}{A} \right) = \sqrt{A^2 - B_0^2} \sin C_1 U + B_0 \cos C_1 U,$$

$$\sqrt{A^2 - B^2} = A \cos \left( C_1 U + Bg \sin \frac{B_0}{A} \right) = \sqrt{A^2 - B_0^2} \cos C_1 U - B_0 \sin C_1 U.$$

Voeren wij nu nog den hulphoek  $\theta_1$  in, bepaald door de formule <sup>1)</sup>

$$\theta_1 = 90^\circ - Bg \sin \frac{B_0}{A}, \text{ of } \operatorname{Ctg} \theta_1 = \frac{B_0}{\sqrt{A^2 - B_0^2}}, \dots (49)$$

dan vinden wij

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \sqrt{A^2 - B^2} = A \sin(\theta_1 - C_1 U), \\ q_1 &= 2B = 2A \cos(\theta_1 - C_1 U), \\ S_1 &= B - B_0 = A[\cos(\theta_1 - C_1 U) - \cos \theta_1] = \\ &= 2A \sin(\theta_1 - \tfrac{1}{2} C_1 U) \cdot \sin \tfrac{1}{2} C_1 U; \end{aligned} \right\} \dots (50)$$

zoals men ziet, stemmen de formules (48) en (50) volkomen overeen met de formules (38) en (39), die langs anderen weg gevonden zijn <sup>2)</sup>.

§ 57. Ter bepaling van de twee standvastigen  $A$  en  $\theta_1$ , of  $A$  en  $B_0$ , vereenvoudigen wij eerst de differentiaal-quotienten (44) met behulp van formule (45), waardoor wij vinden

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{C_1}{A} \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A^2 + L^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{C_1}{A} BL \dots (51)$$

<sup>1)</sup> Men had nog eenvoudiger kunnen stellen  $Bg \sin \frac{B_0}{A} = \theta_2$  (waaruit volgt

$\operatorname{Tg} \theta_2 = \frac{B_0}{\sqrt{A^2 - B_0^2}} = \frac{\sin \alpha_0}{C_1}$ , vergelijk form. (56)), waardoor wij onmiddellijk vinden

$p_1 = A \cos(\theta_2 + C_1 U)$ ,  $q_1 = 2A \sin(\theta_2 + C_1 U)$  en  $S_1 = 2A \cos(\theta_2 + \tfrac{1}{2} C_1 U) \cdot \sin \tfrac{1}{2} C_1 U$ . Wij kozen echter bovenstaande formules (49) en (50), omdat die, wat den vorm betreft, beter overeenstemmen met de formules (23) van dit hoofdstuk.

<sup>2)</sup> Door de formules (48) en (50) samen te verbinden en den oorsprong in het gemeenschappelijk middelpunt van de ellipsen en hyperbolen te nemen, vindt men de formules voor de coördinaten onder den allereenvoudigsten vorm  $x = A \sin(\theta_1 - C_1 U) \cdot \operatorname{Sh} C_1 \lambda$  en  $y = A \cos(\theta_1 - C_1 U) \cdot \operatorname{Ch} C_1 \lambda$ , die echter wat de praktische bruikbaarheid betreft, vooral bij een betrekkelijk klein terrein, achterstaan bij de formules (48).



Deze uitdrukkingen nogmaals ten opzichte van  $\lambda$  differentieerende, komt er

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2} &= \frac{C_1}{A} \sqrt{A^2 - B^2} \frac{L L'}{\sqrt{A^2 + L^2}} = \frac{C_1^2}{A} \sqrt{A^2 - B^2} L, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} &= \frac{C_1}{A} B L' = \frac{C_1^2}{A} B \sqrt{A^2 + L^2}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Uit (51) en (52) volgt dan verder voor het centrale punt

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)_0 &= C_1 \sqrt{A^2 - B_0^2}, & \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)_0 &= 0, \\ \left( \frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2} \right)_0 &= 0, & \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} \right)_0 &= C_1^2 B_0; \end{aligned}$$

er blijkt dus reeds voldaan te zijn aan de formules (8) en (14) van hoofdstuk II; terwijl uit (10) en (19) volgt

$$C_1 \sqrt{A^2 - B_0^2} = r_0 \quad \text{en} \quad C_1^2 B_0 = r_0 \sin \phi_0,$$

waaruit wij achtereenvolgens vinden

$$\sqrt{A^2 - B_0^2} = \frac{r_0}{C_1}, \dots \dots \dots (53)$$

$$B_0 = \frac{r_0 \sin \phi_0}{C_1^2}, \dots \dots \dots (54)$$

$$A = \sqrt{\frac{r_0^2}{C_1^2} + B_0^2} = \frac{r_0}{C_1^2} \sqrt{C_1^2 + \sin^2 \phi_0} \dots \dots (55)$$

$$\text{Ctg } \theta_1 = \frac{B_0}{\sqrt{A^2 - B_0^2}} = \frac{\sin \phi_0}{C_1} \dots \dots \dots (56)$$

§ 58. Ter beoordeeling van de vergrooting bij een terrein van geringe uitgestrektheid merken wij op, dat hier wederom de grootheid  $Q$  van hoofdstuk II, ten gevolge van de symetrie, gelijk nul is. Ter bepaling van  $P$  vinden wij uit (52) door differentiatie

$$\frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} = \frac{C_1^2}{A} \sqrt{A^2 - B^2} L' = \frac{C_1^3}{A} \sqrt{A^2 - B^2} \sqrt{A^2 + L^2},$$

en dus voor het centrale punt

$$\left( \frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3} \right)_0 = C_1^3 \sqrt{A^2 - B_0^2} = r_0 C_1^2 \dots \dots \dots (57)$$

Deze uitdrukking in formule (29) van hoofdstuk II substitueerende, vinden wij

$$P = 2 \frac{R_0}{N_0} T y^2 \Phi_0 - 1 + 2 \frac{R_0}{r_0 \cos \Phi_0} C_1^2 = 2 \frac{R_0}{N_0} \frac{\sin^2 \Phi_0 + C_1^2}{\cos^2 \Phi_0} - 1, \quad (58)$$

en hieruit volgt voor  $C_1$ , als  $P$  bekend is,

$$C_1^2 = \frac{1+P}{2} \frac{N_0}{R_0} \cos^2 \Phi_0 - \sin^2 \Phi_0, \quad \dots \dots \dots (59)$$

overeenkomende met formule (35).

§ 59. Ter beoordeeling van de vergrooting bij een terrein van grootere uitgestrektheid moeten wij wederom onze toevlucht nemen tot formule (3) van hoofdstuk II. Substitueeren wij daarin de waarden van  $\frac{\partial X}{\partial \lambda}$  en  $\frac{\partial Y}{\partial \lambda}$  uit (51), dan vinden wij

$$m = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{C_1^2}{A^2} (A^2 - B^2)(A^2 + L^2) + \frac{C_1^2}{A^2} B^2 L^2} = \frac{C_1}{r} \sqrt{A^2 - B^2 + L^2},$$

en door hierin de waarden van  $B$  en  $L$  over te brengen, vinden wij voor  $m$  de volgende uitdrukkingen

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{C_1}{r} \sqrt{p_1^2 + A^2 Sh^2 C_1 \lambda}, \\ m &= \frac{AC_1}{r} \sqrt{\sin^2(\theta_1 - C_1 U) + Sh^2 C_1 \lambda} = \\ &= \frac{r_0}{r \sin \theta_1} \sqrt{\sin^2(\theta_1 - C_1 U) + Sh^2 C_1 \lambda}, \\ m &= \frac{AC_1}{r \sqrt{2}} \sqrt{Ch \, 2 C_1 \lambda - \cos(2\theta_1 - 2 C_1 U)}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Voor de punten langs den middelsten meridiaan volgt hieruit

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{C_1 p_1}{r}, \\ m &= \frac{r_0 \sin(\theta_1 - C_1 U)}{r \sin \theta_1}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (61)$$

en voor de punten langs de middelste parallel

$$m = \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} Sh^2 C_1 \lambda} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \Phi_0 + C_1^2}{C_1^2} Sh^2 C_1 \lambda}. \quad (62)$$

§ 60. Bij de toepassing van de beide in dit hoofdstuk ontwikkelde projectiën doet zich het zelfde bezwaar voor, als wij bij de projectiën met parabolische meridianen en parallellen in het vorige hoofdstuk gezien hebben; dat er namelijk eene grens aan te wijzen is, waarbij het niet meer mogelijk is het daarbuiten gelegen terrein naar behooren voor te stellen, omdat de punten van dat gedeelte

zouden vallen ter plaatse, waar reeds andere gedeelten van het terrein geprojecteerd zijn. Zelfs zal men bij de voorstelling nog eenigszins van die grens verwijderd moeten blijven, omdat zich daarbij zeer abnormale verhoudingen voor de vergrooing voordoen.

Beschouwen wij eerst de laatst behandelde projectie, waarbij de meridianen door ellipsen en de parallellen door hyperbolen worden voorgesteld, en die hare toepassing vindt in het geval, dat

$$\operatorname{Tg}^2 \phi_0 < \frac{1+P}{2} \frac{N_0}{R_0}$$

is, en waarvoor  $C_1$  gegeven wordt door de formule (35), namelijk

$$C_1^2 = \frac{1+P}{2} \frac{N_0}{R_0} \cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0.$$

Schrijven wij daartoe de formules voor die projectie onder den meest eenvoudigen vorm, namelijk

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin(\theta_1 - C_1 U) \cdot \operatorname{Sh} C_1 \lambda, \\ y &= A \cos(\theta_1 - C_1 U) \cdot \operatorname{Ch} C_1 \lambda, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (63)$$

waarbij de oorsprong niet in het centrale punt, maar in het gemeenschappelijk middelpunt van alle ellipsen en hyperbolen is aangenomen.

Uit die formules blijkt, dat er, wat de lengte betreft, geen grens voor de projectie is aan te wijzen; op een zelfde parallel kunnen wij de lengte dus onbepaald laten toenemen, zonder dat daardoor eenige abnormaliteit ontstaat.

Met de breedte is dit geheel anders; laten wij de breedte toenemen, dan neemt  $(\theta_1 - C_1 U)$  af, en dus  $\cos(\theta_1 - C_1 U)$  toe, totdat  $(\theta_1 - C_1 U)$  gelijk nul wordt. Voor deze waarde projecteeren zich de punten op het gedeelte  $Fy$  (figuur 4) van de  $y$ -as, en voor grootere waarden neemt  $y$  weer af, en projecteeren de punten zich dus op plaatsen, waar reeds andere punten geprojecteerd zijn. De bovenste grens wordt dus aangegeven door de breedte, behoorende bij de waarde van  $U$ , bepaald uit de volgende betrekking

$$U = \frac{\theta_1}{C_1} \dots \dots \dots (64)$$

Wat er voor grootere waarden van de breedte verder plaats heeft, is voor de kaartprojectie van geen belang, en zal dus hier niet nader onderzocht worden.

Laten wij de breedte van  $\phi_0$  afnemen, dan wordt  $(\theta_1 - C_1 U)$  grooter en  $\cos(\theta_1 - C_1 U)$  kleiner, wordt negatief, en die negatieve waarde neemt verder toe, tot  $\theta_1 - C_1 U = \pi$  wordt; voor nog klei-

nere waarden van de breedte zal de negatieve waarde van den cosinus weer afnemen, en zullen de punten zich weer projecteeren op de plaats, waar reeds andere punten geprojecteerd zijn. De benedenste grens voor de breedte wordt dus aangegeven door

$$U = \frac{\theta_1 - \pi}{C_1} \dots \dots \dots (65)$$

De grootheid  $\theta_1$ , die in deze beide formules voorkomt, wordt gevonden uit de formule (36), namelijk

$$\text{ctg } \theta_1 = \frac{\sin \phi_0}{C_1};$$

hieruit volgt, dat in het grensgeval  $C_1 = 0$ , waarbij de bovenbedoelde projectie ophoudt toepasselijk te zijn,  $\theta_1 = 0$  wordt, waardoor de formules (64) en (65) overgaan in

$$U = \frac{0}{0} = \frac{1}{\sin \phi_0},$$

en

$$U = \frac{0 - \pi}{0} = -\infty.$$

Voor de bovenste grens blijven wij dus eene bepaalde waarde vinden, die natuurlijk overeen moet komen met de grens in het vorige hoofdstuk gevonden (zie formule (19) van dat hoofdstuk), terwijl de onderste grens eerst bereikt wordt bij  $\phi = -90^\circ$ .

§ 61. Voor het onderzoek van de projectie met hyperbolische meridianen en elliptische parallellen, — eene projectie, die alleen geldt voor het geval, dat

$$Tg^2 \phi_0 > \frac{1+P}{2} \frac{N_0}{R_0}$$

is, en waarbij de coëfficiënt  $C$  bepaald wordt door de betrekking (28), namelijk

$$C^2 = \sin^2 \phi_0 - \frac{1+P}{2} \frac{N_0}{R_0} \cos^2 \phi_0, —$$

schrijven wij de formules weer onder den eenvoudigsten vorm; namelijk

$$\left. \begin{aligned} x &= A \text{Sh}(\theta - CU) \cdot \sin C\lambda, \\ y &= -A \text{Ch}(\theta - CU) \cdot \cos C\lambda. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (66)$$

Hieruit blijkt, dat voor toenemende waarden van  $\lambda$  de  $x$  toeneemt, tot  $C\lambda$  gelijk aan  $90^\circ$  wordt; bij nog grootere waarden van  $\lambda$  neemt  $x$  weer af, de punten projecteeren zich dan op het gedeelte boven



de  $x$ -as, en er komt dus alleen eene grens voor  $\lambda$ , zoodra die punten in de  $y$ -as komen, en  $x$  dus weer nul wordt. In dit geval wordt  $C\lambda = 180^\circ$ , en daaruit volgt voor de grenswaarde van  $\lambda$  de uitdrukking  $\frac{180^\circ}{C}$ . Aangezien echter  $C$  steeds kleiner dan de eenheid is, zoo ligt die grens steeds boven de  $180^\circ$  en is dus practisch van geen bezwaar.

Laten wij de breedte van  $\phi_0$  af aangroeien, dan wordt  $(\theta - CU)$  kleiner, en dus ook de waarde van  $Ch(\theta - CU)$ , totdat  $\theta - CU = 0$  wordt, en alle punten van de daarmede overeenstemmende parallel zich op  $FF'$  projecteeren. Voor grootere waarden van  $\phi$  neemt  $Ch(\theta - CU)$  weer toe, en komen de punten dus weer te vallen ter plaatse, waar reeds andere punten geprojecteerd zijn. Er is dus eene bovenste grens voor de breedte aanwezig, en deze wordt bepaald door de vergelijking

$$U = \frac{\theta}{C} \dots \dots \dots (67)$$

Daar de hierin voorkomende waarde van  $\theta$  bepaald wordt door de betrekking (22), namelijk

$$\text{Coth } \theta = \frac{\sin \phi_0}{C} = \frac{1}{\sin \psi_0},$$

waaruit volgt  $\theta = \text{Nep log } \text{Tg}(45 + \frac{1}{2}\psi_0)$ ,

zoo kan die formule ook als volgt geschreven worden

$$U = \frac{1}{C} \text{Nep log } \text{Tg}(45 + \frac{1}{2}\psi_0) \dots \dots \dots (68)$$

Eene benedenste grens is voor de breedte in dit geval niet aanwezig, aangezien, bij waarden van  $\phi$  kleiner dan  $\phi_0$ ,  $U$  negatief wordt, en bij afnemende waarden van  $\phi$  die negatieve waarde steeds toeneemt, tot zij voor  $\phi = -90^\circ$  oneindig groot wordt; gelijktijdig daarmede neemt dus  $\theta - CU$  tot in het oneindige toe, en daarmede ook de waarde van  $Ch(\theta - CU)$ .

In het bijzondere geval, dat men aan  $P$  de uiterste waarde  $P = -1$  geeft, wordt  $C = \sin \phi_0$ ; de hulphoek  $\psi_0$  gaat daardoor over in  $90^\circ$ , en  $\theta$  wordt dus oneindig groot; dit is dus ook met de grenswaarde van  $U$  het geval, en hiermede komt overeen de grenswaarde  $\phi = 90^\circ$ . In dit bijzondere geval, waarin de projectie, zooals wij in § 51 gezien hebben, in de kegelvormige projectie overgaat, kan zij dus tot aan de pool worden voortgezet; in ieder ander geval is dit niet mogelijk.

§ 62. Ten einde de bovenbehandelde grenzen eenigszins nader aan te wijzen, volgt hieronder eene opgave van die grenzen voor verschillende waarden van  $\phi_0$  en van  $P$ , in de onderstelling van een bolvormig aardoppervlak.

Voor dit bijzonder geval is  $N_0 = R_0$ ,

en  $U = Nep \log Tg(45 + \frac{1}{2}\phi) - Nep \log Tg(45 + \frac{1}{2}\phi_0)$ ,

waardoor de boven behandelde formules in de volgende eenvoudigere overgaan.

$$1. \text{ Voor } Tg^2 \phi_0 < \frac{1+P}{2} \text{ of } \cos 2\phi_0 > \frac{1-P}{3+P},$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{1+P}{2} \cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0} = \sqrt{\frac{3+P}{4} \cos 2\phi_0 - \frac{1-P}{4}},$$

$$Tg \theta_1 = \frac{C_1}{\sin \phi_0},$$

$$\log Tg(45 + \frac{1}{2}\phi_1) = \log Tg(45 + \frac{1}{2}\phi_0) + \frac{M\theta_1}{C_1},$$

$$\log Tg(45 + \frac{1}{2}\phi_2) = \log Tg(45 + \frac{1}{2}\phi_0) + \frac{M\theta_1}{C_1} - \frac{M\pi}{C_1}.$$

$$2. \text{ Voor } Tg^2 \phi_0 > \frac{1+P}{2} \text{ of } \cos 2\phi_0 < \frac{1-P}{3+P},$$

$$C = \sqrt{\sin^2 \phi_0 - \frac{1+P}{2} \cos^2 \phi_0} = \sqrt{\frac{1-P}{4} - \frac{3+P}{4} \cos 2\phi_0},$$

$$\sin \psi_0 = \frac{C}{\sin \phi_0},$$

$$\log Tg(45 + \frac{1}{2}\phi_1) = \log Tg(45 + \frac{1}{2}\phi_0) + \frac{1}{C} \log Tg(45 + \frac{1}{2}\psi_0).$$

In deze formules stelt  $\log$  de gewone logarithme en  $M$  hare modulus voor; verder beteekent  $\phi_1$  de bovenste en  $\phi_2$  de benedenste grens van de breedte.

Tevens zijn in die opgaven de hulpgrootheden  $C_1$  en  $\theta_1$ , respectievelijk  $C$  en  $\psi_0$ , vermeld.

De bij die opgave gebezigde waarden van  $P$  zijn  $-1$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$ ,  $+\frac{1}{2}$  en  $+1$ . De waarden van  $\phi_0$ , waarbij voor die waarden van  $P$  de overgang van het eene stelsel van bovenstaande formules tot het andere plaats heeft, zijn, berekend uit de formule  $Tg^2 \phi_0 = \frac{1+P}{2}$ , respectievelijk de volgende

$$0^\circ 0' 0'', \quad 26^\circ 33' 54'', \quad 35^\circ 15' 52'', \quad 40^\circ 53' 36'' \quad \text{en} \quad 45^\circ 0' 0''.$$

| $P$             | $\phi_0$ | Coefficient<br>$C_1$ of $C$ | Hulphoek<br>$\theta_1$ of $\psi_0$ | Bovenste<br>grens $\phi_1$ | Onderste<br>grens $\phi_2$ |
|-----------------|----------|-----------------------------|------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| - 1             | 0°       | $C = 0,00000$               | $\psi_0 = 90^\circ$                | $\phi_1 = 90^\circ$        | $\phi_2 = -90^\circ$       |
|                 | 15°      | 0,25882                     | 90°                                | 90°                        | -90°                       |
|                 | 30°      | 0,50000                     | 90°                                | 90°                        | -90°                       |
|                 | 45°      | 0,70711                     | 90°                                | 90°                        | -90°                       |
|                 | 60°      | 0,86603                     | 90°                                | 90°                        | -90°                       |
|                 | 75°      | 0,96593                     | 90°                                | 90°                        | -90°                       |
|                 | 90°      | 1,00000                     | 90°                                | 90°                        | -90°                       |
| - $\frac{1}{2}$ | 0°       | $C_1 = 0,50000$             | $\theta_1 = 90^\circ 0'$           | $\phi_1 = 85^\circ 3'$     | $\phi_2 = -85^\circ 3'$    |
|                 | 15°      | 0,40776                     | 57° 36'                            | 82° 32'                    | -89° 12'                   |
|                 | 30°      | $C = 0,25000$               | $\psi_0 = 30^\circ 0'$             | 82° 40'                    | -90° 0'                    |
|                 | 45°      | 0,61237                     | 60° 0'                             | 84° 29'                    | -90° 0'                    |
|                 | 60°      | 0,82916                     | 73° 13'                            | 86° 54'                    | -90° 0'                    |
|                 | 75°      | 0,95722                     | 82° 18'                            | 89° 6'                     | -90° 0'                    |
|                 | 90°      | 1,00000                     | 90° 0'                             | 90° 0'                     | -90° 0'                    |
| 0               | 0°       | $C_1 = 0,70711$             | $\theta_1 = 90^\circ 0'$           | $\phi_1 = 77^\circ 37'$    | $\phi_2 = -77^\circ 37'$   |
|                 | 15°      | 0,63208                     | 67° 44'                            | 76° 31'                    | -83° 17'                   |
|                 | 30°      | 0,35355                     | 35° 16'                            | 78° 26'                    | -89° 51'                   |
|                 | 45°      | $C = 0,50000$               | $\psi_0 = 45^\circ 0'$             | 81° 52'                    | -90° 0'                    |
|                 | 60°      | 0,79057                     | 65° 54'                            | 85° 39'                    | -90° 0'                    |
|                 | 75°      | 0,94843                     | 79° 5'                             | 88° 45'                    | -90° 0'                    |
|                 | 90°      | 1,00000                     | 90° 0'                             | 90° 0'                     | -90° 0'                    |
| + $\frac{1}{2}$ | 0°       | $C_1 = 0,86603$             | $\theta_1 = 90^\circ 0'$           | $\phi_1 = 71^\circ 29'$    | $\phi_2 = -71^\circ 29'$   |
|                 | 15°      | 0,79547                     | 71° 59'                            | 72° 1'                     | -76° 6'                    |
|                 | 30°      | 0,55902                     | 48° 11'                            | 75° 23'                    | -86° 46'                   |
|                 | 45°      | $C = 0,35355$               | $\psi_0 = 30^\circ 0'$             | 79° 59'                    | -90° 0'                    |
|                 | 60°      | 0,75000                     | 60° 0'                             | 84° 42'                    | -90° 0'                    |
|                 | 75°      | 0,93956                     | 76° 35'                            | 88° 27'                    | -90° 0'                    |
|                 | 90°      | 1,00000                     | 90° 0'                             | 90° 0'                     | -90° 0'                    |
| + 1             | 0°       | $C_1 = 1,00000$             | $\theta_1 = 90^\circ 0'$           | $\phi_1 = 66^\circ 31'$    | $\phi_2 = -66^\circ 31'$   |
|                 | 15°      | 0,93060                     | 74° 27'                            | 68° 30'                    | -69° 35'                   |
|                 | 30°      | 0,70711                     | 54° 44'                            | 72° 59'                    | -81° 0'                    |
|                 | 45°      | $C_1 = C = 0,00000$         | $\theta_1 = \psi_0 = 0^\circ 0'$   | 78° 30'                    | -90° 0'                    |
|                 | 60°      | $C = 0,70711$               | $\psi_0 = 54^\circ 44'$            | 83° 56'                    | -90° 0'                    |
|                 | 75°      | 0,93060                     | 74° 27'                            | 88° 14'                    | -90° 0'                    |
|                 | 90°      | 1,00000                     | 90° 0'                             | 90° 0'                     | -90° 0'                    |

## HOOFDSTUK VI.

AARTPROJECTIE MET EENVOUDIGE FORMULES VOOR DE BEREKENING  
VAN DE COÖRDINATEN.

§ 63. In de vorige hoofdstukken zijn wij, uitgaande van eenvoudige lijnen voor de meridianen en parallellen, gekomen tot zeer eenvoudige formules voor de berekening van de coördinaten van de verschillende punten, waarvan lengte en breedte gegeven is.

De allereenvoudigste formules leverde de projectie met parabolische meridianen en parallellen, namelijk

$$\begin{aligned} X &= p \lambda, \\ Y &= S + q \lambda^2, \end{aligned}$$

waarin  $p$  en  $S$  uitsluitend functiën van  $\phi$  zijn, en waarvan de waarden dus in eene tafel vereenigd kunnen worden; de grootte  $q$  is eene standvastige.

Deze projectie heeft echter het nadeel, dat er geene parameter in voorkomt, waarover men naar willekeur kan beschikken om de projectie aan den vorm van het terrein aan te passen.

De andere ontwikkelde projectiën bezitten dit nadeel niet; zij kunnen, voor zooverre dit bij eene symetrische projectie mogelijk is, goed met den omtrek van het terrein in verband gebracht worden; daarentegen moet men telkens de tangens of sinus van een kleinen hoek opzoeken, en dit moet vooral bij de toepassing op een klein terrein en op eene groote schaal met groote nauwkeurigheid geschieden. Hierdoor zijn de formules voor deze projectiën eenigszins lastig in het gebruik; en vooral veel lastiger dan de bovenstaande formules.

De vraag doet zich dus voor, is het niet mogelijk aan die formules eene zoodanige wijziging aan te brengen, dat zij met behoud van den eenvoudigen vorm toch naar behooren aan het terrein kunnen worden aangepast.

Hiertoe moeten die formules, behalve aan de voorwaarden

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= 0, & Y_0 &= 0, \\ \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)_0 &= r_0, & \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)_0 &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial \lambda^2}\right)_0 &= 0, & \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2}\right)_0 &= r_0 \sin \phi_0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

ook nog voldoen aan de voorwaarde, die uit formule (29) van hoofdstuk II voortvloeit, namelijk



$$\left(\frac{d^3 X}{d\lambda^3}\right)_0 = \frac{1+P}{2} \frac{N_0}{R_0} r_0 \cos^2 \Phi_0 - r_0 \sin^2 \Phi_0 \dots \dots (2)$$

Uit deze laatste voorwaarde blijkt, dat in de formule voor de abscis  $X$  een term in  $\lambda^3$  moet voorkomen. Wij kunnen dus stellen

$$\left. \begin{aligned} X &= p_1 \lambda + p_3 \lambda^3, \\ Y &= q_0 + q_2 \lambda^2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

en onderzoeken, of het mogelijk is de grootheden  $p_1$ ,  $p_3$ ,  $q_0$  en  $q_2$ , zoodanig als functiën van  $\Phi$  te bepalen, dat de projectie eene gelijkvormige is. Is dit mogelijk, dan hebben wij de in die uitdrukkingen voorkomende standvastigen maar te bepalen volgens de voorwaarden (1) en (2), waaruit voor het centrale punt volgt

$$\left. \begin{aligned} (p_1)_0 &= \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)_0 = r_0, & (q_0)_0 &= Y_0 = 0, \\ (p_3)_0 &= \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 X}{\partial \lambda^3}\right)_0 = \frac{1+P}{12} \frac{N_0}{R_0} r_0 \cos^2 \Phi_0 - \frac{1}{6} r_0 \sin^2 \Phi_0, \\ (q_2)_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2}\right)_0 = \frac{1}{2} r_0 \sin \Phi_0. \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

§ 64. Opdat de projectie eene gelijkvormige zij, moet voldaan zijn aan de twee vergelijkingen (6') van hoofdstuk II; om dat te onderzoeken differentieeren wij de formules (3) ten opzichte van  $\lambda$  en  $\Phi$ , waardoor wij vinden

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \lambda} &= p_1 + 3p_3 \lambda^2, & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} &= 2q_2 \lambda, \\ \frac{\partial X}{\partial \Phi} &= p_1' \lambda + p_3' \lambda^3, & \frac{\partial Y}{\partial \Phi} &= q_0' + q_2' \lambda^2; \end{aligned}$$

en deze uitdrukkingen in de genoemde formules overbrengende, komt er

$$\begin{aligned} q_0' + q_2' \lambda^2 &= p_1 U' + 3p_3 U' \lambda^2, \\ p_1' \lambda + p_3' \lambda^3 &= -2q_2 U' \lambda. \end{aligned}$$

Daar aan deze vergelijkingen voldaan moet zijn voor alle mogelijke waarden van  $\lambda$ , zoo moeten de coëfficiënten van dezelfde machten van  $\lambda$  in beide leden aan elkaar gelijk zijn; waaruit dus volgt

$$\left. \begin{aligned} p_3' &= 0, \\ q_2' &= 3p_3 U', \\ p_1' &= -2q_2 U', \\ q_0' &= p_1 U'. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Integreeren wij deze vier vergelijkingen, en nemen wij daarbij de onder (4) opgegeven waarden ter bepaling van de standvastigen in acht, dan vinden wij

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= \text{standvastige} = \frac{1+P}{12} \frac{N_0}{R_0} r_0 \cos^2 \phi_0 - \frac{1}{6} r_0 \sin^2 \phi_0, \\ q_2 &= \frac{1}{2} r_0 \sin \phi_0 + 3p_3 U, \\ p_1 &= r_0 - r_0 \sin \phi_0 \cdot U - 3p_3 U^2, \\ q_0 &= r_0 U - \frac{1}{2} r_0 \sin \phi_0 \cdot U^2 - p_3 U^3. \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Deze formules stemmen voor  $p_3 = 0$  volkomen overeen met de in hoofdstuk IV gevonden formules voor de projectie met parabolische meridianen en parallellen.

Voor de practische toepassing zal het doelmatig zijn, deze formules zoodanig om te werken, dat men  $\lambda$  in seconden kan uitdrukken.

Stellen wij daartoe

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -p_3 Bg^3 1'', \\ A_2 &= q_2 Bg^2 1'', \\ A_1 &= p_1 Bg 1'', \\ A_0 &= q_0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

dan gaan de formules (3) over in

$$\left. \begin{aligned} X &= A_1 \lambda'' - A_3 \lambda''^3, \\ Y &= A_0 + A_2 \lambda''^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Voor eenigszins groote waarden van  $\lambda$  is het niet mogelijk door middel van deze formules, en van eene logarithmentafel met zeven decimalen, de waarde van  $X$  scherp genoeg te bepalen; omdat men daarin de waarde van  $A_1 \lambda''$  niet nauwkeurig genoeg kan vinden. Stelt men voor dat geval

$$A_1 \lambda'' = \Lambda - A_{,,} \beta'' \lambda'', \dots \dots \dots (9)$$

dan is  $\Lambda = r_0 \lambda = r_0 Bg 1'' \lambda''$ , evenredig met het lengteverschil  $\lambda$ , en daarvan kan men eene nauwkeurige tabel opmaken. De tweede term in die uitdrukking kan met behulp van logarithmen berekend worden. De daarin voorkomende coëfficiënt  $A_{,,}$ , waarvan de logarithmen voor verschillende waarden van  $\phi$  in eene tafel vereenigd kunnen worden, wordt gevonden uit de formule

$$A_{,,} = r_0 \sin \phi_0 \cdot Bg 1'' \frac{U}{\beta''} \left( 1 + \frac{3p_3}{r_0 \sin \phi_0} U \right), \dots (10)$$

§ 65. Stellen wij ter toepassing van deze projectie op de kaart van Nederland  $\phi_0 = 52^\circ 13' 20''$  en  $P = 0$ , en brengen wij daarbij den coëfficiënt  $\left( 1 - \frac{e^2}{8\rho_0^2} \right) = \frac{11274}{11275}$ ,  $\log = (9,9999614799 - 10)$  van § 23 in rekening, dan vinden wij

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= (6,5926896364)U - (6,1895025443)U^2 + (5,4546297848)U^3, \\ \log A_1 &= 1,2782645032 + \log \{1 - (9,8978429036 - 10)U + (9,3390614031 - 10)U^2\}, \\ \log A_2 &= 5,5606522779 - 10 + \log \{1 - (9,7422484952 - 10)U\}, \\ \log A_3 &= 9,5113543852 - 20; \end{aligned} \right\} (11)$$

en voor eenigszins groote waarden van  $\lambda$

$$\Lambda = 18,97861445 \lambda'',$$

$$\log A_{''} = 1,1761074068 + \log \frac{U}{\beta''} + \log \{1 - (9,4412184995 - 10)U\}, (12)$$

waarbij de tusschen ( ) geplaatste getallen de gewone logarithmen van de coëfficiënten aangeven.

De tafels IV en IV a bevatten de waarden van  $A_0$ ,  $\log A_1$ ,  $\log A_2$ , en  $\log A_{''}$ , voor verschillende waarden van  $\Phi$ , en de waarden van  $\Lambda$ , voor verschillende waarden van  $\lambda''$ .

## HOOFDSTUK VII.

### NIET SYMETRISCHE KAARTPROJECTIËN MET MINIMUMAFWIJKING VAN DE VERGROOTING.

§ 66. In § 20 van hoofdstuk II hebben wij gezien, dat, om voor een terrein van betrekkelijk geringe uitgestrektheid eene kaartprojectie te ontwerpen, waarbij de vergrooting zoo min mogelijk verandert, ook de grootheid  $\left(\frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3}\right)_0$  een parameter moet bevatten, waarover men naar willekeur moet kunnen beschikken. Bij iedere symmetrische projectie is die grootheid juist gelijk nul; waaruit volgt dat symmetrische projectiën in het algemeen niet de meest gunstige zijn voor hetgeen de vergrooting betreft.

De vraag doet zich dus voor, eene niet symmetrische projectie te ontwikkelen en die naar behooren aan den vorm van het terrein aan te sluiten. De in de hoofdstukken III, IV en V ontwikkelde projectiën kunnen daartoe niet dienen; want om deze tot onsymmetrische projectiën te maken zou men het centrale punt ergens buiten de door ons aangenomen  $Y$ -as moeten kiezen. Dit is echter onmogelijk, omdat buiten die lijn geen enkel punt voorkomt, waarin de kromtestraal van den meridiaan oneindig groot is, eene voorwaarde waaraan voor het centrale punt volgens § 17 moet voldaan zijn.

De in hoofdstuk VI ontwikkelde projectie geeft gemakkelijk aanleiding tot het ontwikkelen van eene niet symetrische projectie, door in de formule voor  $X$  ook termen op te nemen met evene machten van  $\lambda$ , en in die voor  $Y$  termen met onevene machten van  $\lambda$ .

Wij zullen ons, om deze verhandeling niet al te uitgebreid te maken, bepalen tot deze eene projectie en tot enkele gevolgtrekkingen, die daaruit voortvloeien; het onderzoek naar andere projectiën met eenvoudigere lijnen voor meridianen en parallellen of met eenvoudigere formules voor de berekening van de coördinaten aan anderen overlatende.

§ 67. Stellen wij dus

$$\left. \begin{aligned} X &= p_0 + p_1 \lambda + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda^3, \\ Y &= q_0 + q_1 \lambda + q_2 \lambda^2 + q_3 \lambda^3, \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

dan volgt daaruit door differentiatie

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \lambda} &= p_1 + 2p_2 \lambda + 3p_3 \lambda^2, & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} &= q_1 + 2q_2 \lambda + 3q_3 \lambda^2, \\ \text{en} \\ \frac{\partial X}{\partial \phi} &= p_0' + p_1' \lambda + p_2' \lambda^2 + p_3' \lambda^3, & \frac{\partial Y}{\partial \phi} &= q_0' + q_1' \lambda + q_2' \lambda^2 + q_3' \lambda^3. \end{aligned}$$

Brengen wij deze uitdrukkingen over in de twee vergelijkingen (6') van hoofdstuk II, dan vinden wij

$$\begin{aligned} q_0' + q_1' \lambda + q_2' \lambda^2 + q_3' \lambda^3 &= p_1 U' + 2p_2 U' \lambda + 3p_3 U' \lambda^2, \\ p_0' + p_1' \lambda + p_2' \lambda^2 + p_3' \lambda^3 &= -q_1 U' - 2q_2 U' \lambda - 3q_3 U' \lambda^2; \end{aligned}$$

waaruit door gelijkstelling van de coëfficiënten der gelijknamige machten van  $\lambda$  volgt

$$\left. \begin{aligned} p_3' &= 0, & \text{en } q_3' &= 0, \\ q_2' &= 3p_3 U', & p_2' &= -3q_3 U', \\ p_1' &= -2q_2 U', & q_1' &= 2p_2 U', \\ q_0' &= p_1 U', & p_0' &= -q_1 U'. \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Bij het integreeren van deze vergelijkingen moeten wij niet alleen letten op de voorwaarden (1) en (2) van het vorige hoofdstuk, maar ook op de uit formule (30) van hoofdstuk II volgende voorwaarde

$$\left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \lambda^3} \right)_0 = \frac{Q}{2} \frac{N_0}{R_0} r_0 \cos^2 \phi_0.$$

Met behulp daarvan vinden wij voor het centrale punt, dus voor  $\lambda = 0$ ,  $\phi = \phi_0$ ,



$$\left. \begin{aligned} p_3 &= \frac{1+P}{12} \frac{N_0}{R_0} r_0 \cos^2 \phi_0 - \frac{1}{6} r_0 \sin^2 \phi_0, & q_3 &= \frac{Q}{12} \frac{N_0}{R_0} r_0 \cos^2 \phi_0, \\ (q_2)_0 &= \frac{1}{2} r_0 \sin \phi_0, & (p_2)_0 &= 0, \\ (p_1)_0 &= r_0, & (q_1)_0 &= 0, \\ (q_0)_0 &= 0, & (p_0)_0 &= 0. \end{aligned} \right\} (3)$$

Integreeren wij nu de vergelijkingen (2), en bepalen de daarbij voorkomende standvastigen met behulp van de formules (3), dan vinden wij, als wij gemakshalve de standvastige waarden van  $p_3$  en  $q_3$  door  $p_3$  en  $q_3$  blijven voorstellen,

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= \text{standvastige} = \frac{1+P}{12} \frac{N_0}{R_0} r_0 \cos^2 \phi_0 - \frac{1}{6} r_0 \sin^2 \phi_0, \\ q_2 &= \frac{1}{2} r_0 \sin \phi_0 + 3 p_3 U, \\ p_1 &= r_0 - r_0 \sin \phi_0 \cdot U - 3 p_3 U^2, \\ q_0 &= r_0 U - \frac{1}{2} r_0 \sin \phi_0 \cdot U^2 - p_3 U^3. \end{aligned} \right\} . (4)$$

$$\left. \begin{aligned} q_3 &= \text{standvastige} = \frac{Q}{12} \frac{N_0}{R_0} r_0 \cos^2 \phi_0, \\ p_2 &= -3 q_3 U, \\ q_1 &= -3 q_3 U^2, \\ p_0 &= + q_3 U^3. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

Daar wij over de in deze formules voorkomende grootheden  $P$  en  $Q$  naar willekeur kunnen beschikken, blijkt het dus mogelijk te zijn, deze projectie volledig aan den vorm van den omtrek van het terrein, volgens § 20 aan te passen; en tevens dat het mogelijk is, eene projectie te ontwerpen, waarbij werkelijk de daar ontwikkelde minimumafwijking voor de vergrooting niet overschreden wordt.

§ 68. Bij de toepassing van deze formules is het wenschelijk ze zoodanig om te werken, dat de lengte  $\lambda$  niet in deelen van den straal moet worden uitgedrukt maar in secunden, omdat  $\lambda$  altijd in die maat gegeven wordt. Nog eene andere wijziging is in de formules noodig; het blijkt namelijk, dat de uitdrukkingen voor  $p_2$ ,  $q_1$  en  $p_0$ , nagenoeg evenredig zijn, respectievelijk met de eerste, tweede en derde macht van het breedteverschil  $\beta = \phi - \phi_0$ . Die waarden zijn daardoor zeer veranderlijk met  $\phi$ , en dus moeilijk in tafels te brengen. Het zal daarom doelmatig zijn, niet die waarden zelve of hunne logaritmen, maar de waarden van  $\frac{p_2}{\beta}$ ,  $\frac{q_1}{\beta^2}$  en  $\frac{p_0}{\beta^3}$ , of van hunne logaritmen, in tafels te vereenigen.

Nemen wij dit in aanmerking en stellen wij dus

$A_0$   
log  
log  
log

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -p_3 Bg^3 1', \\ A_2 &= q_2 Bg^2 1'', \\ A_1 &= p_1 Bg 1'', \\ A_0 &= q_0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

en

$$\left. \begin{aligned} B_3 &= q_3 Bg^3 1'', \\ B_2 &= +3q_3 \frac{U}{\beta''} Bg^2 1'', \\ B_1 &= +3q_3 \left( \frac{U}{\beta''} \right)^2 Bg 1'', \\ B_0 &= q_3 \left( \frac{U}{\beta''} \right)^3, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

dan gaan de formules (1) over in

$$\left. \begin{aligned} X &= A_1 \lambda'' - A_3 \lambda''^3 + B_0 \beta''^3 - B_2 \beta'' \lambda''^2, \\ Y &= A_0 + A_2 \lambda''^2 - B_1 \beta''^2 \lambda'' + B_3 \lambda''^3. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Voor eenigszins groote waarden van  $\lambda$  zal men hier, evenals in het vorige hoofdstuk, stellen

$$A, \lambda'' = \Lambda - A_{\lambda} \beta'' \lambda'' \dots \dots \dots (8')$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= r_0 \lambda, \\ A_{\lambda} &= r_0 \sin \Phi_0 \cdot Bg 1'' \frac{U}{\beta''} \left( 1 + \frac{3p_3}{r_0 \sin \Phi_0} U \right). \end{aligned} \right\} \dots \dots (8'')$$

§ 69. Passen wij deze projectie toe op de kaart van Nederland, en nemen wij dus ingevolge § 21

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= 51^{\circ} 45', \\ P &= 0,45766, \\ Q &= 0,50493; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

brengen wij daarbij tevens den herleidingscoëfficiënt

$$\left( 1 - \frac{c^2}{8f_0^2} \right) = \frac{17499}{17500} (\log = 9,9999751824 - 10) \dots (10)$$

in rekening, waardoor dus de vergrooting binnen de grenzen

$$1 \pm \frac{1}{17500}$$

besloten blijft; dan vinden wij voor de berekening van de grootheden  $A$  en  $B$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= (6,5972708796) U - (6,1912858445) U^2 + (5,3463102102) U^3, \\ \log A_1 &= 1,2828457464 + \log \{ 1 - (9,89504449606 - 10) U + (9,2261605853 - 10) U^2 \}, \\ \log A_2 &= 5,5624355781 - 10 + \log \{ 1 - (9,6321456204 - 10) U \}, \\ \log A_3 &= 9,4030348106 - 20. \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= (4,80595094) \left( \frac{U}{\beta'} \right)^3, \\ B_1 &= (9,96864706 - 10) \left( \frac{U}{\beta'} \right)^2, \\ B_2 &= (4,65422193 - 10) \left( \frac{U}{\beta'} \right), \\ B_3 &= (8,86267554 - 20); \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

en voor eenigszins groote waarden van  $\lambda$

$$\Lambda = 19,17987385 \lambda'',$$

$$\log A'' = 1,1778907070 + \log \frac{U}{\beta'} + \log \{ 1 - (9,3311156247 - 10)U \}, \quad \left. \vphantom{\log A''} \right\} (12')$$

waarin de tusschen haakjes geplaatste getallen de gewone logarithmen van de coëfficiënten voorstellen.

De tafels V en Va geven de waarden van  $A_0$ ,  $\log A_1$ ,  $\log A_2$ ,  $\log B_0$ ,  $\log B_1$ ,  $\log B_2$ ,  $\Lambda$  en  $\log A''$ .

§ 70. Beschouwen wij de formules (4) en (5) in verband met (1), dan zien wij, dat  $X$  en  $Y$  uit twee deelen bestaan, namelijk

$$\begin{array}{ll} p_1 \lambda + p_3 \lambda^3 & \text{en} \quad p_0 + p_2 \lambda^2, \\ q_0 + q_2 \lambda^2 & \text{en} \quad q_1 \lambda + q_3 \lambda^3, \end{array}$$

waarvan de laatsten  $Q$  als factor bezitten, terwijl de eersten daarvan onafhankelijk zijn; stellen wij dus  $Q = 0$ , dan houden wij alleen de eerste gedeelten over, en de projectie verandert in eene symmetrische. Hierdoor ontstaat het vermoeden, dat men elke symmetrische projectie in eene niet-symmetrische kan veranderen, door toevoeging van de termen  $p_0 + p_2 \lambda^2$  en  $q_1 \lambda + q_3 \lambda^3$ ; en dit blijkt ook werkelijk het geval te zijn.

Stellen wij namelijk de coördinaten van eene symmetrische projectie, die voldoet aan de voorwaarden (1) en (2) van het vorige hoofdstuk, — en hieraan voldoen de in de hoofdstukken III en V ontwikkelde projectiën, — door  $X_1$  en  $Y_1$  voor, dan kunnen wij stellen

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + p_0 + p_2 \lambda^2, \\ Y &= Y_1 + q_1 \lambda + q_3 \lambda^3, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

waaruit door differentiatie volgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \lambda} &= \frac{\partial X_1}{\partial \lambda} + 2p_2 \lambda, & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} &= \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda} + q_1 + 3q_3 \lambda^2, \\ \frac{\partial X}{\partial \phi} &= \frac{\partial X_1}{\partial \phi} + p_0' + p_2' \lambda^2, & \frac{\partial Y}{\partial \phi} &= \frac{\partial Y_1}{\partial \phi} + q_1' \lambda + q_3' \lambda^3. \end{aligned}$$

Deze uitdrukkingen in de formules (6') van hoofdstuk II overbren-  
gende, vinden wij

$$\begin{aligned} q_1' \lambda + q_3' \lambda^3 &= 2p_2 U' \lambda, \\ p_0' + p_2' \lambda^2 &= -q_1 U' - 3q_3 U' \lambda^2, \end{aligned}$$

waaruit door gelijkstelling van de coëfficiënten der gelijknamige mach-  
ten van  $\lambda$  volgt

$$\begin{aligned} q_3' &= 0, \\ p_2' &= -3q_3 U', \\ q_1' &= +2p_2 U', \\ p_0' &= -q_1 U', \end{aligned}$$

waaruit wij door integratie de uitdrukkingen (5) terugvinden. Hier-  
uit blijkt dus, dat werkelijk de vergelijkingen (13) eene niet-symetri-  
sche projectie geven, die voldoet aan al de onder (3) genoemde voor-  
waarden.

Voor  $X$ , en  $Y$ , kan men nemen de coördinaten van alle mogelijke  
symmetrische projectiën, die voldoen aan de voorwaarden (1) en (2) van  
het vorige hoofdstuk. De daarin voorkomende standvastigen  $\phi_0$  en  $P$   
moeten echter bepaald worden volgens § 20, en niet volgens § 23.

§ 71. In een opstel voorkomende in de „*Comptes rendus des séances  
de l'Académie des Sciences*, 17 décembre 1860. Tome 51, p. 964—969,  
en overgenomen op blz. 230—234 van de „*Traité des projections  
des cartes Géographiques*, par A. GERMAIN”, behandelt de heer  
A. Tissot hetzelfde vraagstuk „*Trouver le meilleur mode de projec-  
tion pour chaque contrée particulière*.” Hij stelt daarin, even als wij,  
de voorwaarde, dat de verandering van de vergrooting zoo gering  
mogelijk moet zijn, en dat de formules voor de berekening der coör-  
dinaten eenvoudig moeten zijn. Omtrent de gelijkheid van de hoe-  
ken en dus omtrent de gelijkvormigheid van de projectie is hij niet  
zoo streng.

Zijne formules, zooveel mogelijk in onze notatie overgebracht, zijn  
de volgende <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} X &= r\lambda + \frac{1}{3} B\beta^3 + A\beta^2\mu - B\beta\mu^2 + \frac{1}{3} C\mu^3, \\ Y &= s + \frac{1}{2} N_0 \operatorname{Tg} \phi_0 \mu^2 + \frac{1}{3} A\beta^3 - B\beta^2\mu + C\beta\mu^2 + \frac{1}{3} B\mu^3, \end{aligned}$$

waarin 
$$\mu = \lambda \operatorname{Cos} \phi_0,$$

<sup>1)</sup> In de vier laatste termen zoowel van  $X$  als van  $Y$  ontbreekt de factor, die  
de lineaire afmetingen aangeeft. Bij eene bolvormige aarde is deze de straal.  
Wat men bij eene ellipsoidvormige aarde moet nemen,  $a$ ,  $R_0$ ,  $N_0$ , of  $\ell_0 = \sqrt{R_0 N_0}$ ,  
blijkt niet.



$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} R d\phi,$$

$$C = \frac{1 - Tg^2 \phi_0}{2} - A,$$

$$A = \frac{1 - P}{4},$$

$$B = \frac{1}{4} Q.$$

Wat bovengenoemde afwijkingen in de hoeken betreft, deze zijn alleen toe te laten, indien zij gering zijn en de formules daardoor merkbaar eenvoudiger worden. Dat de bovenstaande formules merkbaar eenvoudiger zijn dan de in de vorige paragraphen ontwikkelde, kunnen wij niet toegeven. Wel berusten al de in deze verhandeling ontwikkelde projectiën op het gebruik van vooraf berekende tafels, van enkele functiën van de breedte, zooals die hier achter van 100" tot 100" zijn opgenomen. Deze tafels echter vormen geen bezwaar. Trouwens bij bovenstaande formules zijn ook tafels noodig, zoowel voor  $s$  als voor  $r$ .

Tissot neemt als grens voor de toe te laten afwijkingen in de hoeken, de fouten die bij topographische metingen in het meten van de hoeken voorkomen. In de toepassing op de kaart van Frankrijk geven zijne formules afwijkingen tot 25". Of deze afwijkingen niet te groot zijn, en men ze niet moest beperken tot de fouten, die bij secundaire triangulaties voorkomen, willen wij hier niet beslissen.

---

T A B E L I.

$$U = \int_{\phi_0}^r \frac{R}{r} d\phi = N_{ep} \log \frac{Tg(45 + \frac{1}{2}\phi)}{Tg(45 + \frac{1}{2}\phi_0)} \left( \frac{1 - \varepsilon \sin \phi}{1 + \varepsilon \sin \phi} \cdot \frac{1 + \varepsilon \sin \phi_0}{1 - \varepsilon \sin \phi_0} \right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

| $U[\phi_0 = 52^\circ 13' 20'']$ | $\beta''$ | $\phi$     | $\beta''$ | $U[\phi_0 = 51^\circ 45']$ |
|---------------------------------|-----------|------------|-----------|----------------------------|
| -0,04116 12577                  | -5300     | 50°45' 0'' | -3600     | -0,02781 23107             |
| -0,04039 68301                  | -5200     | 46 40      | -3500     | -0,02704 78832             |
| -0,03963 19458                  | -5100     | 48 20      | -3400     | -0,02628 29989             |
| -0,03886 66043                  | -5000     | 50 50 0    | -3300     | -0,02551 76573             |
| -0,03810 08046                  | -4900     | 51 40      | -3200     | -0,02475 18577             |
| -0,03733 45462                  | -4800     | 53 20      | -3100     | -0,02398 55993             |
| -0,03656 78283                  | -4700     | 50 55 0    | -3000     | -0,02321 88814             |
| -0,03580 06501                  | -4600     | 56 40      | -2900     | -0,02245 17032             |
| -0,03503 30110                  | -4500     | 58 20      | -2800     | -0,02168 40641             |
| -0,03426 49101                  | -4400     | 51 0 0     | -2700     | -0,02091 59632             |
| -0,03349 63468                  | -4300     | 1 40       | -2600     | -0,02014 73999             |
| -0,03272 73204                  | -4200     | 3 20       | -2500     | -0,01937 83735             |
| -0,03195 78300                  | -4100     | 51 5 0     | -2400     | -0,01860 88831             |
| -0,03118 78750                  | -4000     | 6 40       | -2300     | -0,01783 89281             |
| -0,03041 74546                  | -3900     | 8 20       | -2200     | -0,01706 85076             |
| -0,02964 65680                  | -3800     | 51 10 0    | -2100     | -0,01629 76211             |
| -0,02887 52146                  | -3700     | 11 40      | -2000     | -0,01552 62677             |
| -0,02810 33936                  | -3600     | 13 20      | -1900     | -0,01475 44467             |
| -0,02733 11042                  | -3500     | 51 15 0    | -1800     | -0,01398 21573             |
| -0,02655 83457                  | -3400     | 16 40      | -1700     | -0,01320 93988             |
| -0,02578 51174                  | -3300     | 18 20      | -1600     | -0,01243 61705             |
| -0,02501 14185                  | -3200     | 51 20 0    | -1500     | -0,01166 24716             |
| -0,02423 72482                  | -3100     | 21 40      | -1400     | -0,01088 83013             |
| -0,02346 26058                  | -3000     | 23 20      | -1300     | -0,01011 36589             |
| -0,02268 74905                  | -2900     | 51 25 0    | -1200     | -0,00933 85436             |
| -0,02191 19016                  | -2800     | 26 40      | -1100     | -0,00856 29547             |
| -0,02113 58384                  | -2700     | 28 20      | -1000     | -0,00778 68914             |
| -0,02035 93000                  | -2600     | 51 30 0    | -900      | -0,00701 03530             |
| -0,01958 22857                  | -2500     | 31 40      | -800      | -0,00623 33387             |
| -0,01880 47947                  | -2400     | 33 20      | -700      | -0,00545 58478             |
| -0,01802 68263                  | -2300     | 51 35 0    | -600      | -0,00467 78794             |
| -0,01724 83797                  | -2200     | 36 40      | -500      | -0,00389 94328             |
| -0,01646 94542                  | -2100     | 38 20      | -400      | -0,00312 05072             |

TABEL I. Vervolg.

| $U [\phi_0 = 52^\circ 13' 20'']$ | $\beta''$ | $\phi$    | $\beta''$ | $U [\phi_0 = 51^\circ 45']$ |
|----------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------------------------|
| -0,01569 00489                   | -2000     | 51°40' 0" | -300      | -0,00234 11020              |
| -0,01491 01631                   | -1900     | 41 40     | -200      | -0,00156 12162              |
| -0,01412 97960                   | -1800     | 43 20     | -100      | -0,00078 08491              |
| -0,01334 89469                   | -1700     | 51 45 0   | $\pm$ 0   | $\pm$ 0,00000 00000         |
| -0,01256 76150                   | -1600     | 46 40     | +100      | +0,00078 13319              |
| -0,01178 57994                   | -1500     | 48 20     | +200      | +0,00156 31475              |
| -0,01100 34995                   | -1400     | 51 50 0   | +300      | +0,00234 54474              |
| -0,01022 07144                   | -1300     | 51 40     | +400      | +0,00312 82325              |
| -0,00943 74434                   | -1200     | 53 20     | +500      | +0,00391 15035              |
| -0,00865 36856                   | -1100     | 51 55 0   | +600      | +0,00469 52613              |
| -0,00786 94404                   | -1000     | 56 40     | +700      | +0,00547 95065              |
| -0,00708 47068                   | -900      | 58 20     | +800      | +0,00626 42401              |
| -0,00629 94841                   | -800      | 52 0 0    | +900      | +0,00704 94628              |
| -0,00551 37715                   | -700      | 1 40      | +1000     | +0,00783 51754              |
| -0,00472 75683                   | -600      | 3 20      | +1100     | +0,00862 13786              |
| -0,00394 08736                   | -500      | 52 5 0    | +1200     | +0,00940 80733              |
| -0,00315 36866                   | -400      | 6 40      | +1300     | +0,01019 52603              |
| -0,00236 60066                   | -300      | 8 20      | +1400     | +0,01098 29404              |
| -0,00157 78326                   | -200      | 52 10 0   | +1500     | +0,01177 11143              |
| -0,00078 91641                   | -100      | 11 40     | +1600     | +0,01255 97829              |
| $\pm$ 0,00000 00000              | $\pm$ 0   | 13 20     | +1700     | +0,01334 89469              |
| +0,00078 96603                   | +100      | 52 15 0   | +1800     | +0,01413 86072              |
| +0,00157 98177                   | +200      | 16 40     | +1900     | +0,01492 87647              |
| +0,00237 04730                   | +300      | 18 20     | +2000     | +0,01571 94200              |
| +0,00316 16271                   | +400      | 52 20 0   | +2100     | +0,01651 05740              |
| +0,00395 32806                   | +500      | 21 40     | +2200     | +0,01730 22275              |
| +0,00474 54344                   | +600      | 23 20     | +2300     | +0,01809 43813              |
| +0,00553 80894                   | +700      | 52 25 0   | +2400     | +0,01888 70363              |
| +0,00633 12464                   | +800      | 26 40     | +2500     | +0,01968 01933              |
| +0,00712 49061                   | +900      | 28 20     | +2600     | +0,02047 38530              |
| +0,00791 90694                   | +1000     | 52 30 0   | +2700     | +0,02126 80163              |
| +0,00871 37372                   | +1100     | 31 40     | +2800     | +0,02206 26841              |
| +0,00950 89102                   | +1200     | 33 20     | +2900     | +0,02285 78571              |
| +0,01030 45893                   | +1300     | 52 35 0   | +3000     | +0,02365 35362              |
| +0,01110 07752                   | +1400     | 36 40     | +3100     | +0,02444 97221              |
| +0,01189 74689                   | +1500     | 38 20     | +3200     | +0,02524 64158              |

TABEL I. Vervolg.

| $U [\phi_0 = 52^\circ 13' 20'']$ | $\beta''$ | $\phi$      | $\beta''$ | $U [\phi_0 = 51^\circ 45']$ |
|----------------------------------|-----------|-------------|-----------|-----------------------------|
| + 0,01269 46712                  | + 1600    | 52° 40' 0'' | + 3300    | + 0,02604 36181             |
| + 0,01349 23829                  | + 1700    | 41 40       | + 3400    | + 0,02684 13298             |
| + 0,01429 06047                  | + 1800    | 43 20       | + 3500    | + 0,02763 95517             |
| + 0,01508 93377                  | + 1900    | 52 45 0     | + 3600    | + 0,02843 82846             |
| + 0,01588 85826                  | + 2000    | 46 40       | + 3700    | + 0,02923 75295             |
| + 0,01668 83402                  | + 2100    | 48 20       | + 3800    | + 0,03003 72871             |
| + 0,01748 86114                  | + 2200    | 52 50 0     | + 3900    | + 0,03083 75583             |
| + 0,01828 93970                  | + 2300    | 51 40       | + 4000    | + 0,03163 83439             |
| + 0,01909 06980                  | + 2400    | 53 20       | + 4100    | + 0,03243 96449             |
| + 0,01989 25150                  | + 2500    | 52 55 0     | + 4200    | + 0,03324 14619             |
| + 0,02069 48490                  | + 2600    | 56 40       | + 4300    | + 0,03404 37959             |
| + 0,02149 77009                  | + 2700    | 58 20       | + 4400    | + 0,03484 66478             |
| + 0,02230 10715                  | + 2800    | 53 0 0      | + 4500    | + 0,03565 00184             |
| + 0,02310 49615                  | + 2900    | 1 40        | + 4600    | + 0,03645 39084             |
| + 0,02390 93720                  | + 3000    | 3 20        | + 4700    | + 0,03725 83189             |
| + 0,02471 43038                  | + 3100    | 53 5 0      | + 4800    | + 0,03806 32507             |
| + 0,02551 97577                  | + 3200    | 6 40        | + 4900    | + 0,03886 87046             |
| + 0,02632 57345                  | + 3300    | 8 20        | + 5000    | + 0,03967 46814             |
| + 0,02713 22352                  | + 3400    | 53 10 0     | + 5100    | + 0,04048 11821             |
| + 0,02793 92606                  | + 3500    | 11 40       | + 5200    | + 0,04128 82075             |
| + 0,02874 68116                  | + 3600    | 13 20       | + 5300    | + 0,04209 57585             |
| + 0,02955 48891                  | + 3700    | 53 15 0     | + 5400    | + 0,04290 38360             |
| + 0,03036 34939                  | + 3800    | 16 40       | + 5500    | + 0,04371 24408             |
| + 0,03117 26269                  | + 3900    | 18 20       | + 5600    | + 0,04452 15738             |
| + 0,03198 22890                  | + 4000    | 53 20 0     | + 5700    | + 0,04533 12359             |
| + 0,03279 24810                  | + 4100    | 21 40       | + 5800    | + 0,04614 14279             |
| + 0,03360 32039                  | + 4200    | 23 20       | + 5900    | + 0,04695 21508             |
| + 0,03441 44585                  | + 4300    | 53 25 0     | + 6000    | + 0,04776 34054             |
| + 0,03522 62457                  | + 4400    | 26 40       | + 6100    | + 0,04857 51926             |
| + 0,03603 85664                  | + 4500    | 28 20       | + 6200    | + 0,04938 75133             |
| + 0,03685 14215                  | + 4600    | 53 30 0     | + 6300    | + 0,05020 03684             |
| + 0,03766 48119                  | + 4700    | 31 40       | + 6400    | + 0,05101 37588             |
| + 0,03847 87384                  | + 4800    | 33 20       | + 6500    | + 0,05182 76853             |
| + 0,03929 32020                  | + 4900    | 53 35 0     | + 6600    | + 0,05264 21489             |



## TABEL II.

Cirkelprojectie van LAGRANGE.

$$Tg \frac{1}{2} \alpha = q Tg \frac{1}{2} \lambda, \quad X = 2p Tg \frac{1}{2} \alpha \cos^2 \frac{1}{2} \alpha, \quad Y = S + X Tg \frac{1}{2} \alpha, \quad \log \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = (6,63778.4) Tg^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

| $\phi$     | $\beta''$ | $S$          | Vers.    | $\log 2 p.$ | Vers.  | $\log q.$   | Vers. |
|------------|-----------|--------------|----------|-------------|--------|-------------|-------|
| 50°45' 0'' | — 5300    | — 163771,607 | 3089,979 | 7,0142710 0 | 3420.1 | 9,8935079.9 | 821.9 |
| 46 40      | — 5200    | — 160681,628 | 3089,974 | 7,0139289.9 | 3421.9 | 9,8935901.8 | 821.7 |
| 48 20      | — 5100    | — 157591,654 | 3089,971 | 7,0135868.0 | 3423.9 | 9,8936723.5 | 821.6 |
| 50 50 0    | — 5000    | — 154501,683 | 3089,967 | 7,0132444.1 | 3425.8 | 9,8937545.1 | 821.5 |
| 51 40      | — 4900    | — 151411,716 | 3089,964 | 7,0129018.3 | 3427.6 | 9,8938366.6 | 821.3 |
| 53 20      | — 4800    | — 148321,752 | 3089,962 | 7,0125590.7 | 3429.6 | 9,8939187.9 | 821.1 |
| 50 55 0    | — 4700    | — 145231,790 | 3089,959 | 7,0122161.1 | 3431.5 | 9,8940009.0 | 821.0 |
| 56 40      | — 4600    | — 142141,831 | 3089,957 | 7,0118729 6 | 3433.4 | 9,8940830.0 | 820.8 |
| 58 20      | — 4500    | — 139051,874 | 3089,956 | 7,0115296.2 | 3435.2 | 9,8941650.8 | 820.7 |
| 51 0 0     | — 4400    | — 135961,918 | 3089,954 | 7,0111861.0 | 3437.2 | 9,8942471.5 | 820.5 |
| 1 40       | — 4300    | — 132871,964 | 3089,953 | 7,0108423.8 | 3439.2 | 9,8943292 0 | 820.3 |
| 3 20       | — 4200    | — 129782,011 | 3089,953 | 7,0104984 6 | 3441.0 | 9,8944112.3 | 820.2 |
| 51 5 0     | — 4100    | — 126692,058 | 3089,953 | 7,0101543.6 | 3442.9 | 9,8944932.5 | 820.1 |
| 6 40       | — 4000    | — 123602,105 | 3089,953 | 7,0098100.7 | 3444.9 | 9,8945752.6 | 819.9 |
| 8 20       | — 3900    | — 120512,152 | 3089,953 | 7,0094655.8 | 3446.8 | 9,8946572.5 | 819.7 |
| 51 10 0    | — 3800    | — 117422,199 | 3089,955 | 7,0091209.0 | 3448.8 | 9,8947392.2 | 819.6 |
| 11 40      | — 3700    | — 114332,244 | 3089,956 | 7,0087760.2 | 3450.7 | 9,8948211.8 | 819.4 |
| 13 20      | — 3600    | — 111242,288 | 3089,957 | 7,0084309.5 | 3452.6 | 9,8949031.2 | 819.3 |
| 51 15 0    | — 3500    | — 108152,331 | 3089,959 | 7,0080856.9 | 3454.6 | 9,8949850.5 | 819.1 |
| 16 40      | — 3400    | — 105062,372 | 3089,962 | 7,0077402.3 | 3456.5 | 9,8950669.6 | 818.9 |
| 18 20      | — 3300    | — 101972,410 | 3089,964 | 7,0073945.8 | 3458.4 | 9,8951488.5 | 818.9 |
| 51 20 0    | — 3200    | — 98882,446  | 3089,968 | 7,0070487.4 | 3460.4 | 9,8952307.4 | 818.6 |
| 21 40      | — 3100    | — 95792,478  | 3089,971 | 7,0067027.0 | 3462.4 | 9,8953126.0 | 818.5 |
| 23 20      | — 3000    | — 92702,507  | 3089,974 | 7,0063564.6 | 3464.3 | 9,8953944.5 | 818.4 |
| 51 25 0    | — 2900    | — 89612,533  | 3089,979 | 7,0060100.3 | 3466.3 | 9,8954762.9 | 818.2 |
| 26 40      | — 2800    | — 86522,554  | 3089,983 | 7,0056634.0 | 3468.3 | 9,8955581.1 | 818.0 |
| 28 20      | — 2700    | — 83432,571  | 3089,989 | 7,0053165 7 | 3470.2 | 9,8956399.1 | 817.9 |
| 51 30 0    | — 2600    | — 80342,582  | 3089,993 | 7,0049695.5 | 3472.2 | 9,8957217 0 | 817.7 |
| 31 40      | — 2500    | — 77252,589  | 3089,999 | 7,0046223.3 | 3474.2 | 9,8958034.7 | 817.6 |
| 33 20      | — 2400    | — 74162,590  | 3090,005 | 7,0042749.1 | 3476.1 | 9,8958852.3 | 817.5 |
| 51 35 0    | — 2300    | — 71072,585  | 3090,011 | 7,0039273 0 | 3478.2 | 9,8959669.8 | 817.2 |
| 36 40      | — 2200    | — 67982,574  | 3090,018 | 7,0035794.8 | 3480.1 | 9,8960487.0 | 817.2 |
| 38 20      | — 2100    | — 64892,556  | 3090,025 | 7,0032314.7 | 3482.1 | 9,8961304.2 | 816.9 |

TABEL II. Vervolg.

| $\phi$    | $\beta''$ | $s$         | Vers.    | $\log 2 p.$ | Vers.  | $\log q.$   | Vers. |
|-----------|-----------|-------------|----------|-------------|--------|-------------|-------|
| 51°40' 0" | -2000     | -61802,531  | 3090,033 | 7,0028832.6 | 3484.1 | 9,8962121.1 | 816.9 |
| 41 40     | -1900     | -58712,498  | 3090,040 | 7,0025348.5 | 3486.1 | 9,8962938.0 | 816.6 |
| 43 20     | -1800     | -55622,458  | 3090,048 | 7,0021862.4 | 3488.1 | 9,8963754.6 | 816.6 |
| 51 45 0   | -1700     | -52532,410  | 3090,057 | 7,0018374.3 | 3490.1 | 9,8964571.2 | 816.3 |
| 46 40     | -1600     | -49442,353  | 3090,065 | 7,0014884.2 | 3492.1 | 9,8965387.5 | 816.3 |
| 48 20     | -1500     | -46352,288  | 3090,075 | 7,0011392.1 | 3494.1 | 9,8966203.8 | 816.0 |
| 51 50 0   | -1400     | -43262,213  | 3090,084 | 7,0007898.0 | 3496.2 | 9,8967019.8 | 815.9 |
| 51 40     | -1300     | -40172,129  | 3090,095 | 7,0004401.8 | 3498.1 | 9,8967835.7 | 815.8 |
| 53 20     | -1200     | -37082,034  | 3090,104 | 7,0000903.7 | 3500.2 | 9,8968651.5 | 815.6 |
| 51 55 0   | -1100     | -33991,930  | 3090,115 | 6,9997403.5 | 3502.2 | 9,8969467.1 | 815.5 |
| 56 40     | -1000     | -30901,815  | 3090,126 | 6,9993901.3 | 3504.2 | 9,8970282.6 | 815.3 |
| 58 20     | -900      | -27811,689  | 3090,138 | 6,9990397.1 | 3506.2 | 9,8971097.9 | 815.2 |
| 52 0 0    | -800      | -24721,551  | 3090,149 | 6,9986890.9 | 3508.3 | 9,8971913.1 | 815.0 |
| 1 40      | -700      | -21631,402  | 3090,161 | 6,9983382.6 | 3510.4 | 9,8972728.1 | 814.9 |
| 3 20      | -600      | -18541,241  | 3090,174 | 6,9979872.2 | 3512.3 | 9,8973543.0 | 814.7 |
| 52 5 0    | -500      | -15451,067  | 3090,186 | 6,9976359.9 | 3514.4 | 9,8974357.7 | 814.6 |
| 6 40      | -400      | -12360,881  | 3090,200 | 6,9972845.5 | 3516.5 | 9,8975172.3 | 814.4 |
| 8 20      | -300      | -9270,681   | 3090,213 | 6,9969329.0 | 3518.5 | 9,8975986.7 | 814.2 |
| 52 10 0   | -200      | -6180,468   | 3090,227 | 6,9965810.5 | 3520.6 | 9,8976800.9 | 814.2 |
| 11 40     | -100      | -3090,241   | 3090,241 | 6,9962289.9 | 3522.6 | 9,8977615.1 | 813.9 |
| 13 20     | $\pm$ 0   | $\pm$ 0,000 | 3090,256 | 6,9958767.3 | 3524.7 | 9,8978429.0 | 813.9 |
| 52 15 0   | +100      | +3090,256   | 3090,271 | 6,9955242.6 | 3526.8 | 9,8979242.9 | 813.6 |
| 16 40     | +200      | +6180,527   | 3090,286 | 6,9951715.8 | 3528.8 | 9,8980056.5 | 813.6 |
| 18 20     | +300      | +9270,813   | 3090,301 | 6,9948187.0 | 3530.9 | 9,8980870.1 | 813.3 |
| 52 20 0   | +400      | +12361,114  | 3090,318 | 6,9944656.1 | 3533.0 | 9,8981683.4 | 813.3 |
| 21 40     | +500      | +15451,432  | 3090,334 | 6,9941123.1 | 3535.0 | 9,8982496.7 | 813.1 |
| 23 20     | +600      | +18541,766  | 3090,351 | 6,9937588.1 | 3537.2 | 9,8983309.8 | 812.9 |
| 52 25 0   | +700      | +21632,117  | 3090,368 | 6,9934050.9 | 3539.2 | 9,8984122.7 | 812.8 |
| 26 40     | +800      | +24722,485  | 3090,385 | 6,9930511.7 | 3541.3 | 9,8984935.5 | 812.6 |
| 28 20     | +900      | +27812,870  | 3090,403 | 6,9926970.4 | 3543.4 | 9,8985748.1 | 812.5 |
| 52 30 0   | +1000     | +30903,273  | 3090,422 | 6,9923427.0 | 3545.6 | 9,8986560.6 | 812.4 |
| 31 40     | +1100     | +33993,695  | 3090,440 | 6,9919881.4 | 3547.6 | 9,8987373.0 | 812.2 |
| 33 20     | +1200     | +37084,135  | 3090,459 | 6,9916333.8 | 3549.7 | 9,8988185.2 | 812.0 |
| 52 35 0   | +1300     | +40174,594  | 3090,478 | 6,9912784.1 | 3551.8 | 9,8988997.2 | 811.9 |
| 36 40     | +1400     | +43265,072  | 3090,497 | 6,9909232.3 | 3554.0 | 9,8989809.1 | 811.8 |
| 38 20     | +1500     | +46355,569  | 3090,518 | 6,9905678.3 | 3556.0 | 9,8990620.9 | 811.6 |

TABEL II. Vervolg.

| $\phi$     | $\beta''$ | $S$          | Vers.    | $\log 2 p.$ | Vers.  | $\log q.$   | Vers. |
|------------|-----------|--------------|----------|-------------|--------|-------------|-------|
| 52° 40' 0" | + 1600    | + 40446,087  | 3090,538 | 6,9902122.3 | 3558.2 | 9,8991432.5 | 811.4 |
| 41 40      | + 1700    | + 52536,625  | 3090,559 | 6,9898564.1 | 3560.3 | 9,8992243.9 | 811.4 |
| 43 20      | + 1800    | + 55627,184  | 3090,580 | 6,9895003.8 | 3562.5 | 9,8993055.3 | 811.1 |
| 52 45 0    | + 1900    | + 58717,764  | 3090,601 | 6,9891441.3 | 3564.5 | 9,8993866.4 | 811.1 |
| 46 40      | + 2000    | + 61808,365  | 3090,623 | 6,9887876.8 | 3566.7 | 9,8994677.5 | 810.8 |
| 48 20      | + 2100    | + 64898,988  | 3090,645 | 6,9884310.1 | 3568.9 | 9,8995488.3 | 810.8 |
| 52 50 0    | + 2200    | + 67989,633  | 3090,668 | 6,9880741.2 | 3570.9 | 9,8996299.1 | 810.6 |
| 51 40      | + 2300    | + 71080,301  | 3090,690 | 6,9877170.3 | 3573.2 | 9,8997109.7 | 810.4 |
| 53 20      | + 2400    | + 74170,991  | 3090,714 | 6,9873597.1 | 3575.3 | 9,8997920.1 | 810.3 |
| 52 55 0    | + 2500    | + 77261,705  | 3090,737 | 6,9870021.8 | 3577.4 | 9,8998730.4 | 810.2 |
| 56 40      | + 2600    | + 80352,442  | 3090,762 | 6,9866444.4 | 3579.6 | 9,8999540.6 | 810.0 |
| 58 20      | + 2700    | + 83443,204  | 3090,785 | 6,9862864.8 | 3581.7 | 9,9000350.6 | 809.8 |
| 53 0 0     | + 2800    | + 86533,989  | 3090,810 | 6,9859283.1 | 3584.0 | 9,9001160.4 | 809.8 |
| 1 40       | + 2900    | + 89624,799  | 3090,835 | 6,9855699.1 | 3586.0 | 9,9001970.2 | 809.5 |
| 3 20       | + 3000    | + 92715,634  | 3090,861 | 6,9852113.1 | 3588.3 | 9,9002779.7 | 809.5 |
| 53 5 0     | + 3100    | + 95806,495  | 3090,886 | 6,9848524.8 | 3590.4 | 9,9003589.2 | 809.3 |
| 6 40       | + 3200    | + 98897,381  | 3090,913 | 6,9844934.4 | 3592.7 | 9,9004398.5 | 809.1 |
| 8 20       | + 3300    | + 101988,294 | 3090,938 | 6,9841341.7 | 3594.8 | 9,9005207.6 | 809.0 |
| 53 10 0    | + 3400    | + 105079,232 | 3090,966 | 6,9837746.9 | 3597.0 | 9,9006016.6 | 808.9 |
| 11 40      | + 3500    | + 108170,198 | 3090,993 | 6,9834149.9 | 3599.1 | 9,9006825.5 | 808.7 |
| 13 20      | + 3600    | + 111261,191 | 3091,020 | 6,9830550.8 | 3601.4 | 9,9007634.2 | 808.5 |
| 53 15 0    | + 3700    | + 114352,211 | 3091,048 | 6,9826949.4 | 3603.6 | 9,9008442.7 | 808.5 |
| 16 40      | + 3800    | + 117443,259 | 3091,077 | 6,9823345.8 | 3605.8 | 9,9009251.2 | 808.3 |
| 18 20      | + 3900    | + 120534,336 | 3091,105 | 6,9819740.0 | 3608.0 | 9,9010059.5 | 808.1 |
| 53 20 0    | + 4000    | + 123625,441 | 3091,134 | 6,9816132.0 | 3610.2 | 9,9010867.6 | 808.0 |
| 21 40      | + 4100    | + 126716,575 | 3091,164 | 6,9812521.8 | 3612.4 | 9,9011675.6 | 807.8 |
| 23 20      | + 4200    | + 129807,739 | 3091,193 | 6,9808909.4 | 3614.6 | 9,9012483.4 | 807.8 |
| 53 25 0    | + 4300    | + 132898,932 | 3091,223 | 6,9805294.8 | 3616.9 | 9,9013291.2 | 807.5 |
| 26 40      | + 4400    | + 135990,155 | 3091,253 | 6,9801677.9 | 3619.1 | 9,9014098.7 | 807.5 |
| 28 20      | + 4500    | + 139081,408 | 3091,284 | 6,9798058.8 | 3621.3 | 9,9014906.2 | 807.2 |
| 53 30 0    | + 4600    | + 142172,692 | 3091,316 | 6,9794437.5 | 3623.5 | 9,9015713.4 | 807.2 |
| 31 40      | + 4700    | + 145264,008 | 3091,347 | 6,9790814.0 | 3625.8 | 9,9016520.6 | 807.0 |
| 33 20      | + 4800    | + 148355,355 | 3091,379 | 6,9787188.2 | 3628.0 | 9,9017327.6 | 806.8 |
| 53 35 0    | + 4900    | + 151446,734 |          | 6,9783560.2 |        | 9,9018134.4 |       |

NB. Achter  $\log q$  moet  $-10$  gevoegd worden.



## TABEL III.

Elliptische parallelen en hyperbolische meridianen  $\log X = p_2 + \log \lambda'' - A$ ,  
 $\log (Y-S) = t + 2 \log \lambda'' + q_2 - \frac{1}{2} A$ ,  $\log A = t + 2 \log \lambda''$ ,  $t = 4,8702741.9 - 10$ .

| $\phi$    | $\beta''$ | $S$          | Vers.    | $p_2$       | Vers.  | $q_2$       | Vers.  |
|-----------|-----------|--------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 50°45' 0" | - 5300    | - 163771,797 | 3089,993 | 1,2923259.1 | 2599.3 | 0,6997003.8 | 1851.3 |
| 48 40     | - 5200    | - 160681,804 | 3089,988 | 1,2920659.8 | 2601.3 | 0,6995152.5 | 1852.1 |
| 48 20     | - 5100    | - 157591,816 | 3089,983 | 1,2918058.5 | 2603.4 | 0,6993300.4 | 1852.8 |
| 50 50 0   | - 5000    | - 154501,833 | 3089,979 | 1,2915455.1 | 2605.3 | 0,6991447.6 | 1853.7 |
| 51 40     | - 4900    | - 151411,854 | 3089,975 | 1,2912849.8 | 2607.4 | 0,6989593.9 | 1854.4 |
| 53 20     | - 4800    | - 148321,879 | 3089,972 | 1,2910242.4 | 2609.4 | 0,6987739.5 | 1855.2 |
| 50 55 0   | - 4700    | - 145231,907 | 3089,969 | 1,2907633.0 | 2611.3 | 0,6985884.3 | 1856.0 |
| 56 40     | - 4600    | - 142141,938 | 3089,966 | 1,2905021.7 | 2613.5 | 0,6984028.3 | 1856.8 |
| 58 20     | - 4500    | - 139051,972 | 3089,965 | 1,2902408.2 | 2615.4 | 0,6982171.5 | 1857.6 |
| 51 0 0    | - 4400    | - 135962,007 | 3089,962 | 1,2899792.8 | 2617.5 | 0,6980313.9 | 1858.4 |
| 1 40      | - 4300    | - 132872,045 | 3089,961 | 1,2897175.3 | 2619.5 | 0,6978455.5 | 1859.2 |
| 3 20      | - 4200    | - 129782,084 | 3089,960 | 1,2894555.8 | 2621.6 | 0,6976596.3 | 1860.0 |
| 51 5 0    | - 4100    | - 126692,124 | 3089,959 | 1,2891934.2 | 2623.6 | 0,6974736.3 | 1860.8 |
| 6 40      | - 4000    | - 123602,165 | 3089,959 | 1,2889310.6 | 2625.6 | 0,6972875.5 | 1861.5 |
| 8 20      | - 3900    | - 120512,206 | 3089,959 | 1,2886685.0 | 2627.7 | 0,6971014.0 | 1862.4 |
| 51 10 0   | - 3800    | - 117422,247 | 3089,959 | 1,2884057.3 | 2629.8 | 0,6969151.6 | 1863.2 |
| 11 40     | - 3700    | - 114332,288 | 3089,961 | 1,2881427.5 | 2631.8 | 0,6967288.4 | 1863.9 |
| 13 20     | - 3600    | - 111242,327 | 3089,961 | 1,2878795.7 | 2633.8 | 0,6965424.5 | 1864.8 |
| 51 15 0   | - 3500    | - 108152,366 | 3089,963 | 1,2876161.9 | 2636.0 | 0,6963559.7 | 1865.6 |
| 16 40     | - 3400    | - 105062,403 | 3089,966 | 1,2873525.9 | 2638.0 | 0,6961694.1 | 1866.4 |
| 18 20     | - 3300    | - 101972,437 | 3089,967 | 1,2870887.9 | 2640.1 | 0,6959827.7 | 1867.1 |
| 51 20 0   | - 3200    | - 98882,470  | 3089,971 | 1,2868247.8 | 2642.1 | 0,6957960.6 | 1868.0 |
| 21 40     | - 3100    | - 95792,499  | 3089,973 | 1,2865605.7 | 2644.3 | 0,6956092.6 | 1868.8 |
| 23 20     | - 3000    | - 92702,526  | 3089,977 | 1,2862961.4 | 2646.3 | 0,6954223.8 | 1869.6 |
| 51 25 0   | - 2900    | - 89612,549  | 3089,981 | 1,2860315.1 | 2648.5 | 0,6952354.2 | 1870.4 |
| 26 40     | - 2800    | - 86522,568  | 3089,986 | 1,2857666.6 | 2650.5 | 0,6950483.8 | 1871.2 |
| 28 20     | - 2700    | - 83432,582  | 3089,990 | 1,2855016.1 | 2652.6 | 0,6948612.6 | 1872.1 |
| 51 30 0   | - 2600    | - 80342,592  | 3089,995 | 1,2852363.5 | 2654.7 | 0,6946740.5 | 1872.8 |
| 31 40     | - 2500    | - 77252,597  | 3090,000 | 1,2849708.8 | 2656.9 | 0,6944867.7 | 1873.6 |
| 33 20     | - 2400    | - 74162,597  | 3090,006 | 1,2847051.9 | 2658.9 | 0,6942994.1 | 1874.5 |
| 51 35 0   | - 2300    | - 71072,591  | 3090,012 | 1,2844393.0 | 2661.1 | 0,6941119.6 | 1875.2 |
| 36 40     | - 2200    | - 67982,579  | 3090,019 | 1,2841731.9 | 2663.1 | 0,6939244.4 | 1876.1 |
| 38 20     | - 2100    | - 64892,560  | 3090,026 | 1,2839068.8 | 2665.3 | 0,6937368.3 | 1876.9 |



TABEL III. Vervolg.

| $\phi$     | $\beta''$ | $s$         | Vers.    | $p_1$       | Vers.  | $q_1$       | Vers.  |
|------------|-----------|-------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 51°40' 0'' | - 2000    | - 61802,534 | 3090,033 | 1,2836403.5 | 2667.5 | 0,6935491.4 | 1877.7 |
| 41 40      | - 1900    | - 58712,501 | 3090,041 | 1,2833736.0 | 2669.5 | 0,6933613.7 | 1878.6 |
| 43 20      | - 1800    | - 55622,460 | 3090,049 | 1,2831066.5 | 2671.7 | 0,6931735.1 | 1879.3 |
| 51 45 0    | - 1700    | - 52532,411 | 3090,057 | 1,2828394.8 | 2673.9 | 0,6929855.8 | 1880.2 |
| 46 40      | - 1600    | - 49442,354 | 3090,065 | 1,2825720.9 | 2675.9 | 0,6927975.6 | 1881.0 |
| 48 20      | - 1500    | - 46352,289 | 3090,075 | 1,2823045.0 | 2678.2 | 0,6926094.6 | 1881.8 |
| 51 50 0    | - 1400    | - 43262,214 | 3090,085 | 1,2820366.8 | 2680.3 | 0,6924212.8 | 1882.6 |
| 51 40      | - 1300    | - 40172,129 | 3090,094 | 1,2817686.5 | 2682.4 | 0,6922330.2 | 1883.5 |
| 53 20      | - 1200    | - 37082,035 | 3090,105 | 1,2815004.1 | 2684.6 | 0,6920446.7 | 1884.2 |
| 51 55 0    | - 1100    | - 33991,930 | 3090,115 | 1,2812319.5 | 2686.8 | 0,6918562.5 | 1885.1 |
| 56 40      | - 1000    | - 30901,815 | 3090,126 | 1,2809632.7 | 2688.9 | 0,6916677.4 | 1885.9 |
| 58 20      | - 900     | - 27811,689 | 3090,138 | 1,2806943.8 | 2691.1 | 0,6914791.5 | 1886.8 |
| 52 0 0     | - 800     | - 24721,551 | 3090,149 | 1,2804252.7 | 2693.3 | 0,6912904.7 | 1887.6 |
| 1 40       | - 700     | - 21631,402 | 3090,161 | 1,2801559.4 | 2595.5 | 0,6911017.1 | 1888.4 |
| 3 20       | - 600     | - 18541,241 | 3090,174 | 1,2798863.9 | 2697.6 | 0,6909128.7 | 1889.2 |
| 52 5 0     | - 500     | - 15451,067 | 3090,186 | 1,2796166.3 | 2699.9 | 0,6907239.5 | 1890.1 |
| 6 40       | - 400     | - 12360,881 | 3090,200 | 1,2793466.4 | 2702.0 | 0,6905349.4 | 1890.9 |
| 8 20       | - 300     | - 9270,681  | 3090,213 | 1,2790764.4 | 2704.3 | 0,6903458.5 | 1891.7 |
| 52 10 0    | - 200     | - 6180,468  | 3090,227 | 1,2788060.1 | 2706.4 | 0,6901566.8 | 1892.6 |
| 11 40      | - 100     | - 3090,241  | 3090,241 | 1,2785353.7 | 2708.7 | 0,6899674.2 | 1893.4 |
| 13 20      | 0         | 0,000       | 3090,256 | 1,2782645.0 | 2710.8 | 0,6897780.8 | 1894.2 |
| 52 15 0    | + 100     | + 3090,256  | 3090,271 | 1,2779934.2 | 2713.1 | 0,6895886.6 | 1895.0 |
| 16 40      | + 200     | + 6180,527  | 3090,286 | 1,2777221.1 | 2715.3 | 0,6893991.6 | 1895.9 |
| 18 20      | + 300     | + 9270,813  | 3090,301 | 1,2774505.8 | 2717.6 | 0,6892095.7 | 1896.8 |
| 52 20 0    | + 400     | + 12361,114 | 3090,318 | 1,2771788.2 | 2719.7 | 0,6890198.9 | 1897.6 |
| 21 40      | + 500     | + 15451,432 | 3090,334 | 1,2769068.5 | 2722.0 | 0,6888301.3 | 1898.4 |
| 23 20      | + 600     | + 18541,766 | 3090,351 | 1,2766346.5 | 2724.3 | 0,6886402.9 | 1899.2 |
| 52 25 0    | + 700     | + 21632,117 | 3090,368 | 1,2763622.2 | 2726.4 | 0,6884503.7 | 1900.1 |
| 26 40      | + 800     | + 24722,485 | 3090,385 | 1,2760895.8 | 2728.8 | 0,6882603.6 | 1901.0 |
| 28 20      | + 900     | + 27812,870 | 3090,403 | 1,2758167.0 | 2730.9 | 0,6880702.6 | 1901.8 |
| 52 30 0    | + 1000    | + 30903,273 | 3090,421 | 1,2755436.1 | 2733.3 | 0,6878800.8 | 1902.6 |
| 31 40      | + 1100    | + 33993,694 | 3090,440 | 1,2752702.8 | 2735.5 | 0,6876898.2 | 1903.5 |
| 33 20      | + 1200    | + 37084,134 | 3090,459 | 1,2749967.3 | 2737.7 | 0,6874994.7 | 1904.3 |
| 52 35 0    | + 1300    | + 40174,593 | 3090,477 | 1,2747229.6 | 2740.1 | 0,6873090.4 | 1905.1 |
| 36 40      | + 1400    | + 43265,070 | 3090,497 | 1,2744489.5 | 2742.3 | 0,6871185.3 | 1906.1 |
| 38 20      | + 1500    | + 46355,567 | 3090,518 | 1,2741747.2 | 2744.6 | 0,6869279.2 | 1906.8 |

TABEL III. Vervolg.

| $\phi$    | $\beta''$ | $S$          | Vers.    | $p_2$       | Vers.  | $q_2$       | Vers.  |
|-----------|-----------|--------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 52°40' 0" | + 1600    | + 49446,085  | 3090,537 | 1,2739002.6 | 2746.8 | 0,6867372.4 | 1907.7 |
| 41 40     | + 1700    | + 52536,622  | 3090,558 | 1,2736255.8 | 2749.2 | 0,6865464.7 | 1908.6 |
| 43 20     | + 1800    | + 55627,180  | 3090,579 | 1,2733506.6 | 2751.5 | 0,6863556.1 | 1909.4 |
| 52 45 0   | + 1900    | + 58717,759  | 3090,600 | 1,2730755.1 | 2753.7 | 0,6861646.7 | 1910.3 |
| 46 40     | + 2000    | + 61808,359  | 3090,622 | 1,2728001.4 | 2756.1 | 0,6859736.4 | 1911.1 |
| 48 20     | + 2100    | + 64898,981  | 3090,644 | 1,2725245.3 | 2758.3 | 0,6857825.3 | 1912.0 |
| 52 50 0   | + 2200    | + 67989,625  | 3090,666 | 1,2722487.0 | 2760.7 | 0,6855913.3 | 1912.8 |
| 51 40     | + 2300    | + 71080,291  | 3090,689 | 1,2719726.3 | 2763.0 | 0,6854000.5 | 1913.7 |
| 53 20     | + 2400    | + 74170,980  | 3090,711 | 1,2716963.3 | 2765.3 | 0,6852086.8 | 1914.6 |
| 52 55 0   | + 2500    | + 77261,691  | 3090,735 | 1,2714198.0 | 2767.6 | 0,6850172.2 | 1915.4 |
| 56 40     | + 2600    | + 80352,426  | 3090,759 | 1,2711430.4 | 2770.0 | 0,6848256.8 | 1916.3 |
| 58 20     | + 2700    | + 83443,185  | 3090,783 | 1,2708660.4 | 2772.3 | 0,6846340.5 | 1917.1 |
| 53 0 0    | + 2800    | + 86533,968  | 3090,807 | 1,2705888.1 | 2774.6 | 0,6844423.4 | 1918.0 |
| 1 40      | + 2900    | + 89624,775  | 3090,832 | 1,2703113.5 | 2777.0 | 0,6842505.4 | 1918.8 |
| 3 20      | + 3000    | + 92715,607  | 3090,856 | 1,2700336.5 | 2779.4 | 0,6840586.6 | 1919.7 |
| 53 5 0    | + 3100    | + 95806,463  | 3090,883 | 1,2697557.1 | 2781.6 | 0,6838666.9 | 1920.6 |
| 6 40      | + 3200    | + 98897,346  | 3090,908 | 1,2694775.5 | 2784.1 | 0,6836746.3 | 1921.5 |
| 8 20      | + 3300    | + 101988,254 | 3090,934 | 1,2691991.4 | 2786.4 | 0,6834824.8 | 1922.3 |
| 53 10 0   | + 3400    | + 105079,188 | 3090,960 | 1,2689205.0 | 2788.8 | 0,6832902.5 | 1923.2 |
| 11 40     | + 3500    | + 108170,148 | 3090,987 | 1,2686416.2 | 2791.1 | 0,6830979.3 | 1924.0 |
| 13 20     | + 3600    | + 111261,135 | 3091,014 | 1,2683625.1 | 2793.6 | 0,6829055.3 | 1924.9 |
| 53 15 0   | + 3700    | + 114352,149 | 3091,041 | 1,2680831.5 | 2795.9 | 0,6827130.4 | 1925.8 |
| 16 40     | + 3800    | + 117443,190 | 3091,069 | 1,2678035.6 | 2798.3 | 0,6825204.6 | 1926.7 |
| 18 20     | + 3900    | + 120534,259 | 3091,097 | 1,2675237.3 | 2800.7 | 0,6823277.9 | 1927.5 |
| 53 20 0   | + 4000    | + 123625,356 | 3091,126 | 1,2672436.6 | 2803.0 | 0,6821350.4 | 1928.4 |
| 21 40     | + 4100    | + 126716,482 | 3091,154 | 1,2669633.6 | 2805.5 | 0,6819422.0 | 1929.3 |
| 23 20     | + 4200    | + 129807,636 | 3091,183 | 1,2666828.1 | 2807.9 | 0,6817492.7 | 1930.2 |
| 53 25 0   | + 4300    | + 132898,819 | 3091,212 | 1,2664020.2 | 2810.3 | 0,6815562.5 | 1931.0 |
| 26 40     | + 4400    | + 135990,031 | 3091,242 | 1,2661209.9 | 2812.8 | 0,6813631.5 | 1931.9 |
| 28 20     | + 4500    | + 139081,273 | 3091,272 | 1,2658397.1 | 2815.1 | 0,6811699.6 | 1932.8 |
| 53 30 0   | + 4600    | + 142172,545 | 3091,303 | 1,2655582.0 | 2817.6 | 0,6809766.8 | 1933.7 |
| 31 40     | + 4700    | + 145263,848 | 3091,333 | 1,2652764.4 | 2820.0 | 0,6807833.1 | 1934.5 |
| 33 20     | + 4800    | + 148355,181 | 3091,364 | 1,2649944.4 | 2822.4 | 0,6805898.6 | 1935.4 |
| 53 35 0   | + 4900    | + 151446,545 |          | 1,2647122.0 |        | 0,6803963.2 |        |

TABEL IV.

Projectie volgens de formules  $X = A_1 \lambda'' - A_3 \lambda''^3$ ,  $Y = A_0 + A_2 \lambda''^2$ ;  
 $\log A_3 = 9,51135.4 - 20$ .

| $\phi$     | $\beta''$ | $A_0$        | Vers.    | $\log A_1$  | Vers.  | $\log A_2$  | Vers.  |
|------------|-----------|--------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 50°45' 0'' | — 5300    | — 163771,635 | 3089,981 | 1,2923242.2 | 2598.4 | 5,5704163.3 | 1793.4 |
| 46 40      | — 5200    | — 160681,654 | 3089,977 | 1,2920643.8 | 2600.5 | 5,5702369.9 | 1795.3 |
| 48 20      | — 5100    | — 157591,677 | 3089,973 | 1,2918043.3 | 2602.5 | 5,5700574.6 | 1797.1 |
| 50 50 0    | — 5000    | — 154501,704 | 3089,969 | 1,2915440.8 | 2604.5 | 5,5698777.5 | 1798.9 |
| 51 40      | — 4900    | — 151411,735 | 3089,966 | 1,2912836.3 | 2606.6 | 5,5696978.6 | 1800.8 |
| 53 20      | — 4800    | — 148321,769 | 3089,963 | 1,2910229.7 | 2608.6 | 5,5695177.8 | 1802.6 |
| 50 55 0    | — 4700    | — 145231,806 | 3089,961 | 1,2907621.1 | 2610.6 | 5,5693375.2 | 1804.4 |
| 56 40      | — 4600    | — 142141,845 | 3089,959 | 1,2905010.5 | 2612.8 | 5,5691570.8 | 1806.2 |
| 58 20      | — 4500    | — 139051,886 | 3089,957 | 1,2902397.7 | 2614.7 | 5,5689764.6 | 1808.1 |
| 51 0 0     | — 4400    | — 135961,929 | 3089,955 | 1,2899783.0 | 2616.9 | 5,5687956.5 | 1809.9 |
| 1 40       | — 4300    | — 132871,974 | 3089,954 | 1,2897166.1 | 2618.9 | 5,5686146.6 | 1811.8 |
| 3 20       | — 4200    | — 129782,020 | 3089,954 | 1,2894547.2 | 2621.0 | 5,5684334.8 | 1813.6 |
| 51 5 0     | — 4100    | — 126692,066 | 3089,954 | 1,2891926.2 | 2623.0 | 5,5682521.2 | 1815.5 |
| 6 40       | — 4000    | — 123602,112 | 3089,954 | 1,2889303.2 | 2625.1 | 5,5680705.7 | 1817.3 |
| 8 20       | — 3900    | — 120512,158 | 3089,954 | 1,2886678.1 | 2627.2 | 5,5678888.4 | 1819.2 |
| 51 10 0    | — 3800    | — 117422,204 | 3089,955 | 1,2884050.9 | 2629.3 | 5,5677069.2 | 1821.0 |
| 11 40      | — 3700    | — 114332,249 | 3089,957 | 1,2881421.6 | 2631.3 | 5,5675248.2 | 1822.9 |
| 13 20      | — 3600    | — 111242,292 | 3089,958 | 1,2878790.3 | 2633.5 | 5,5673425.3 | 1824.8 |
| 51 15 0    | — 3500    | — 108152,334 | 3089,960 | 1,2876156.8 | 2635.5 | 5,5671600.5 | 1826.7 |
| 16 40      | — 3400    | — 105062,374 | 3089,962 | 1,2873521.3 | 2637.6 | 5,5669773.8 | 1828.6 |
| 18 20      | — 3300    | — 101972,412 | 3089,964 | 1,2870883.7 | 2639.7 | 5,5667945.2 | 1830.4 |
| 51 20 0    | — 3200    | — 98882,448  | 3089,968 | 1,2868244.0 | 2641.8 | 5,5666114.8 | 1832.3 |
| 21 40      | — 3100    | — 95792,480  | 3089,971 | 1,2865602.2 | 2644.0 | 5,5664282.5 | 1834.2 |
| 23 20      | — 3000    | — 92702,509  | 3089,975 | 1,2862958.2 | 2646.0 | 5,5662448.3 | 1836.1 |
| 51 25 0    | — 2900    | — 89612,534  | 3089,979 | 1,2860312.2 | 2648.1 | 5,5660612.2 | 1838.0 |
| 26 40      | — 2800    | — 86522,555  | 3089,984 | 1,2857664.1 | 2650.3 | 5,5658774.2 | 1840.0 |
| 28 20      | — 2700    | — 83432,571  | 3089,988 | 1,2855013.8 | 2652.4 | 5,5656934.2 | 1841.8 |
| 51 30 0    | — 2600    | — 80342,583  | 3089,994 | 1,2852361.4 | 2654.5 | 5,5655092.4 | 1843.7 |
| 31 40      | — 2500    | — 77252,589  | 3089,999 | 1,2849706.9 | 2656.6 | 5,5653248.7 | 1845.7 |
| 33 20      | — 2400    | — 74162,590  | 3090,005 | 1,2847050.3 | 2658.7 | 5,5651403.0 | 1847.5 |
| 51 35 0    | — 2300    | — 71072,585  | 3090,011 | 1,2844391.6 | 2660.9 | 5,5649555.5 | 1849.5 |
| 36 40      | — 2200    | — 67982,574  | 3090,018 | 1,2841730.7 | 2663.0 | 5,5647706.0 | 1851.4 |
| 38 20      | — 2100    | — 64892,556  | 3090,026 | 1,2839067.7 | 2665.2 | 5,5645854.6 | 1853.4 |



TABEL IV. Vervolg.

| $\phi$    | $\beta''$ | $A_0$       | Vers.    | $\log A_1$  | Vers.  | $\log A_2$  | Vers.  |
|-----------|-----------|-------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 51°40' 0" | - 2000    | - 61802,530 | 3090,032 | 1,2836402.5 | 2667.3 | 5,5644001.2 | 1855.2 |
| 41 40     | - 1900    | - 58712,498 | 3090,040 | 1,2833735.2 | 2669.4 | 5,5642146.0 | 1857.2 |
| 43 20     | - 1800    | - 55622,458 | 3090,048 | 1,2831065.8 | 2671.6 | 5,5640288.8 | 1859.2 |
| 51 45 0   | - 1700    | - 52532,410 | 3090,057 | 1,2828394.2 | 2673.8 | 5,5638429.6 | 1861.1 |
| 46 40     | - 1600    | - 49442,353 | 3090,066 | 1,2825720.4 | 2675.8 | 5,5636568.5 | 1863.1 |
| 48 20     | - 1500    | - 46352,287 | 3090,074 | 1,2823044.6 | 2678.1 | 5,5634705.4 | 1865.0 |
| 51 50 0   | - 1400    | - 43262,213 | 3090,085 | 1,2820366.5 | 2680.2 | 5,5632840.4 | 1866.9 |
| 51 40     | - 1300    | - 40172,128 | 3090,094 | 1,2817686.3 | 2682.4 | 5,5630973.5 | 1869.0 |
| 53 20     | - 1200    | - 37082,034 | 3090,104 | 1,2815003.9 | 2684.6 | 5,5629104.5 | 1870.9 |
| 51 55 0   | - 1100    | - 33991,930 | 3090,115 | 1,2812319.3 | 2686.7 | 5,5627233.6 | 1872.8 |
| 56 40     | - 1000    | - 30901,815 | 3090,126 | 1,2809632.6 | 2688.9 | 5,5625360.8 | 1874.9 |
| 58 20     | - 900     | - 27811,689 | 3090,138 | 1,2806943.7 | 2691.1 | 5,5623485.9 | 1876.8 |
| 52 0 0    | - 800     | - 24721,551 | 3090,149 | 1,2804252.6 | 2693.2 | 5,5621609.1 | 1878.8 |
| 1 40      | - 700     | - 21631,402 | 3090,161 | 1,2801559.4 | 2695.5 | 5,5619730.3 | 1880.8 |
| 3 20      | - 600     | - 18541,241 | 3090,174 | 1,2798863.9 | 2697.6 | 5,5617849.5 | 1882.8 |
| 52 5 0    | - 500     | - 15451,067 | 3090,186 | 1,2796166.3 | 2699.9 | 5,5615966.7 | 1884.8 |
| 6 40      | - 400     | - 12360,881 | 3090,200 | 1,2793466.4 | 2702.0 | 5,5614081.9 | 1886.7 |
| 8 20      | - 300     | - 9270,681  | 3090,213 | 1,2790764.4 | 2704.3 | 5,5612195.2 | 1888.8 |
| 52 10 0   | - 200     | - 6180,468  | 3090,227 | 1,2788060.1 | 2706.4 | 5,5610306.4 | 1890.8 |
| 11 40     | - 100     | - 3090,241  | 3090,241 | 1,2785353.7 | 2708.7 | 5,5608415.6 | 1892.8 |
| 13 20     | $\pm$ 0   | $\pm$ 0,000 | 3090,256 | 1,2782645.0 | 2710.8 | 5,5606522.8 | 1894.8 |
| 52 15 0   | + 100     | + 3090,256  | 3090,271 | 1,2779934.2 | 2713.1 | 5,5604628.0 | 1896.9 |
| 16 40     | + 200     | + 6180,527  | 3090,286 | 1,2777221.1 | 2715.3 | 5,5602731.1 | 1898.8 |
| 18 20     | + 300     | + 9270,813  | 3090,301 | 1,2774505.8 | 2717.5 | 5,5600832.3 | 1900.9 |
| 52 20 0   | + 400     | + 12361,114 | 3090,318 | 1,2771788.3 | 2719.8 | 5,5598931.4 | 1903.0 |
| 21 40     | + 500     | + 15451,432 | 3090,334 | 1,2769068.5 | 2722.0 | 5,5597028.4 | 1904.9 |
| 23 20     | + 600     | + 18541,766 | 3090,351 | 1,2766346.5 | 2724.2 | 5,5595123.5 | 1907.0 |
| 52 25 0   | + 700     | + 21632,117 | 3090,368 | 1,2763622.3 | 2726.5 | 5,5593216.5 | 1909.1 |
| 26 40     | + 800     | + 24722,485 | 3090,385 | 1,2760895.8 | 2728.7 | 5,5591307.4 | 1911.1 |
| 28 20     | + 900     | + 27812,870 | 3090,403 | 1,2758167.1 | 2730.9 | 5,5589396.3 | 1913.2 |
| 52 30 0   | + 1000    | + 30903,273 | 3090,422 | 1,2755436.2 | 2733.2 | 5,5587483.1 | 1915.2 |
| 31 40     | + 1100    | + 33993,695 | 3090,439 | 1,2752703.0 | 2735.5 | 5,5585567.9 | 1917.3 |
| 33 20     | + 1200    | + 37084,134 | 3090,459 | 1,2749967.5 | 2737.7 | 5,5583650.6 | 1919.3 |
| 52 35 0   | + 1300    | + 40174,593 | 3090,478 | 1,2747229.8 | 2739.9 | 5,5581731.3 | 1921.4 |
| 36 40     | + 1400    | + 43265,071 | 3090,498 | 1,2744489.9 | 2742.3 | 5,5579809.9 | 1923.5 |
| 38 20     | + 1500    | + 46355,569 | 3090,517 | 1,2741747.6 | 2744.5 | 5,5577886.4 | 1925.6 |



TABEL IV. Vervolg.

| $\phi$    | $\beta''$ | $A_0$        | Vers.    | $\log A_1$  | Vers.  | $\log A_2$  | Vers.  |
|-----------|-----------|--------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 52°40' 0" | +1600     | + 49446,086  | 3090,538 | 1,2739003.1 | 2746.7 | 5,5575960.8 | 1927.7 |
| 41 40     | +1700     | + 52536,624  | 3090,558 | 1,2736256.4 | 2749.1 | 5,5574033.1 | 1929.7 |
| 43 20     | +1800     | + 55627,182  | 3090,580 | 1,2733507.3 | 2751.3 | 5,5572103.4 | 1931.9 |
| 52 45 0   | +1900     | + 58717,762  | 3090,601 | 1,2730756.0 | 2753.6 | 5,5570171.5 | 1933.9 |
| 46 40     | +2000     | + 61808,363  | 3090,622 | 1,2728002.4 | 2755.9 | 5,5568237.6 | 1936.1 |
| 48 20     | +2100     | + 64898,985  | 3090,645 | 1,2725246.5 | 2758.2 | 5,5566301.5 | 1938.1 |
| 52 50 0   | +2200     | + 67989,630  | 3090,667 | 1,2722488.3 | 2760.5 | 5,5564363.4 | 1940.3 |
| 51 40     | +2300     | + 71080,297  | 3090,690 | 1,2719727.8 | 2762.7 | 5,5562423.1 | 1942.4 |
| 53 20     | +2400     | + 74170,987  | 3090,713 | 1,2716965.1 | 2765.1 | 5,5560480.7 | 1944.5 |
| 52 55 0   | +2500     | + 77261,700  | 3090,737 | 1,2714200.0 | 2767.4 | 5,5558536.2 | 1946.6 |
| 56 40     | +2600     | + 80352,437  | 3090,760 | 1,2711432.6 | 2769.7 | 5,5556589.6 | 1948.8 |
| 58 20     | +2700     | + 83443,197  | 3090,785 | 1,2708662.9 | 2772.0 | 5,5554640.8 | 1950.9 |
| 53 0 0    | +2800     | + 86533,982  | 3090,809 | 1,2705890.9 | 2774.3 | 5,5552689.9 | 1953.0 |
| 1 40      | +2900     | + 89624,791  | 3090,834 | 1,2703116.6 | 2776.7 | 5,5550736.9 | 1955.2 |
| 3 20      | +3000     | + 92715,625  | 3090,859 | 1,2700339.9 | 2778.9 | 5,5548781.7 | 1957.3 |
| 53 5 0    | +3100     | + 95806,484  | 3090,885 | 1,2697561.0 | 2781.3 | 5,5546824.4 | 1959.5 |
| 6 40      | +3200     | + 98897,369  | 3090,912 | 1,2694779.7 | 2783.6 | 5,5544864.9 | 1961.6 |
| 8 20      | +3300     | + 101988,281 | 3090,937 | 1,2691996.1 | 2786.0 | 5,5542903.3 | 1963.8 |
| 53 10 0   | +3400     | + 105079,218 | 3090,964 | 1,2689210.1 | 2788.3 | 5,5540939.5 | 1966.0 |
| 11 40     | +3500     | + 108170,182 | 3090,991 | 1,2686421.8 | 2790.7 | 5,5538973.5 | 1968.2 |
| 13 20     | +3600     | + 111261,173 | 3091,018 | 1,2683631.1 | 2793.0 | 5,5537005.3 | 1970.3 |
| 53 15 0   | +3700     | + 114352,191 | 3091,047 | 1,2680838.1 | 2795.3 | 5,5535035.0 | 1972.5 |
| 16 40     | +3800     | + 117443,238 | 3091,074 | 1,2678042.8 | 2797.7 | 5,5533062.5 | 1974.7 |
| 18 20     | +3900     | + 120534,312 | 3091,103 | 1,2675245.1 | 2800.1 | 5,5531087.8 | 1976.8 |
| 53 20 0   | +4000     | + 123625,415 | 3091,131 | 1,2672445.0 | 2802.4 | 5,5529111.0 | 1979.1 |
| 21 40     | +4100     | + 126716,546 | 3091,161 | 1,2669642.6 | 2804.8 | 5,5527131.9 | 1981.3 |
| 23 20     | +4200     | + 129807,707 | 3091,190 | 1,2666837.8 | 2807.2 | 5,5525150.6 | 1983.4 |
| 53 25 0   | +4300     | + 132898,897 | 3091,221 | 1,2664030.6 | 2809.6 | 5,5523167.2 | 1985.7 |
| 26 40     | +4400     | + 135990,118 | 3091,250 | 1,2661221.0 | 2811.9 | 5,5521181.5 | 1987.9 |
| 28 20     | +4500     | + 139081,368 | 3091,281 | 1,2658409.1 | 2814.3 | 5,5519193.6 | 1990.1 |
| 53 30 0   | +4600     | + 142172,649 | 3091,312 | 1,2655594.8 | 2816.7 | 5,5517203.5 | 1992.4 |
| 31 40     | +4700     | + 145263,961 | 3091,343 | 1,2652778.1 | 2819.1 | 5,5515211.1 | 1994.5 |
| 33 20     | +4800     | + 148355,304 | 3091,374 | 1,2649959.0 | 2821.5 | 5,5513216.6 | 1996.8 |
| 53 35 0   | +4900     | + 151446,678 |          | 1,2647137.5 |        | 5,5511219.8 |        |

Achter  $\log A_2$  moet  $-10$  gevoegd worden.

TABEL IV<sub>a</sub>.

$$A, \lambda'' = \Lambda - A, \beta'' \lambda''.$$

| $\lambda$ | $\Lambda$   | $\phi$     | $\beta''$ | $\log A, \lambda''$ | Vers. |
|-----------|-------------|------------|-----------|---------------------|-------|
| 1''       | 18,97861445 | 50°45' 0'' | — 5300    | 6,0712296.4         | 405.1 |
|           |             | 46 40      | — 5200    | 6,0712701.5         | 405.3 |
|           |             | 48 20      | — 5100    | 6,0713106.8         | 405.5 |
| 1''       | 18,9786     | 50 50 0    | — 5000    | 6,0713512.3         | 405.8 |
| 2''       | 37,9572     | 51 40      | — 4900    | 6,0713918.1         | 406.1 |
| 3''       | 56,9358     | 53 20      | — 4800    | 6,0714324.2         | 406.3 |
| 4''       | 75,9145     | 50 55 0    | — 4700    | 6,0714730.5         | 406.6 |
| 5''       | 94,8931     | 56 40      | — 4600    | 6,0715137.1         | 406.8 |
| 6''       | 113,8717    | 58 20      | — 4500    | 6,0715543.9         | 407.1 |
| 7''       | 132,8503    | 51 0 0     | — 4400    | 6,0715951.0         | 407.3 |
| 8''       | 151,8289    | 1 40       | — 4300    | 6,0716358.3         | 407.6 |
| 9''       | 170,8075    | 3 20       | — 4200    | 6,0716765.9         | 407.9 |
| 10''      | 189,7861    | 51 5 0     | — 4100    | 6,0717173.8         | 408.1 |
|           |             | 6 40       | — 4000    | 6,0717581.9         | 408.3 |
|           |             | 8 20       | — 3900    | 6,0717990.2         | 408.6 |
| 1'        | 1138,7169   | 51 10 0    | — 3800    | 6,0718398.8         | 408.9 |
| 2'        | 2277,4337   | 11 40      | — 3700    | 6,0718807.7         | 409.1 |
| 3'        | 3416,1506   | 13 20      | — 3600    | 6,0719216.8         | 409.3 |
| 4'        | 4554,8675   | 51 15 0    | — 3500    | 6,0719626.1         | 409.6 |
| 5'        | 5693,5843   | 16 40      | — 3400    | 6,0720035.7         | 409.9 |
| 6'        | 6832,3012   | 18 20      | — 3300    | 6,0720445.6         | 410.1 |
| 7'        | 7971,0181   | 51 20 0    | — 3200    | 6,0720855.7         | 410.4 |
| 8'        | 9109,7349   | 21 40      | — 3100    | 6,0721266.1         | 410.6 |
| 9'        | 10248,4518  | 23 20      | — 3000    | 6,0721676.7         | 410.9 |
| 10'       | 11387,1687  | 51 25 0    | — 2900    | 6,0722087.6         | 411.1 |
|           |             | 26 40      | — 2800    | 6,0722498.7         | 411.4 |
|           |             | 28 20      | — 2700    | 6,0722910.1         | 411.6 |
| 1°        | 68323,0120  | 51 30 0    | — 2600    | 6,0723321.7         | 411.9 |
| 2°        | 136646,0240 | 31 40      | — 2500    | 6,0723733.6         | 412.1 |
| 3°        | 204969,0361 | 33 20      | — 2400    | 6,0724145.7         | 412.4 |
|           |             | 51 35 0    | — 2300    | 6,0724558.1         | 412.6 |
|           |             | 36 40      | — 2200    | 6,0724970.7         | 412.9 |
|           |             | 38 20      | — 2100    | 6,0725383.6         | 413.1 |

TABEL IVa. Vervolg.

| $\phi$    | $\beta''$ | $\log A_{..}$ | Vers. | $\phi$    | $\beta''$ | $\log A_{..}$ | Vers. |
|-----------|-----------|---------------|-------|-----------|-----------|---------------|-------|
| 51°40' 0" | - 2000    | 6,0725796.7   | 413.4 | 52°40' 0" | + 1600    | 6,0740834.7   | 422.3 |
| 41 40     | - 1900    | 6,0726210.1   | 413.6 | 41 40     | + 1700    | 6,0741257.0   | 422.5 |
| 43 20     | - 1800    | 6,0726623.7   | 413.9 | 43 20     | + 1800    | 6,0741679.5   | 422.8 |
| 51 45 0   | - 1700    | 6,0727037.6   | 414.1 | 52 45 0   | + 1900    | 6,0742102.3   | 423.0 |
| 46 40     | - 1600    | 6,0727451.7   | 414.4 | 46 40     | + 2000    | 6,0742525.3   | 423.2 |
| 48 20     | - 1500    | 6,0727866.1   | 414.6 | 48 20     | + 2100    | 6,0742948.5   | 423.5 |
| 51 50 0   | - 1400    | 6,0728280.7   | 414.9 | 52 50 0   | + 2200    | 6,0743372.0   | 423.7 |
| 51 40     | - 1300    | 6,0728695.6   | 415.1 | 51 40     | + 2300    | 6,0743795.7   | 424.0 |
| 53 20     | - 1200    | 6,0729110.7   | 415.4 | 53 20     | + 2400    | 6,0744219.7   | 424.2 |
| 51 55 0   | - 1100    | 6,0729526.1   | 415.6 | 52 55 0   | + 2500    | 6,0744643.9   | 424.5 |
| 56 40     | - 1000    | 6,0729941.7   | 415.9 | 56 40     | + 2600    | 6,0745068.4   | 424.7 |
| 58 20     | - 900     | 6,0730357.6   | 416.1 | 58 20     | + 2700    | 6,0745493.1   | 424.9 |
| 52 0 0    | - 800     | 6,0730773.7   | 416.4 | 53 0 0    | + 2800    | 6,0745918.0   | 425.2 |
| 1 40      | - 700     | 6,0731190.1   | 416.6 | 1 40      | + 2900    | 6,0746343.2   | 425.4 |
| 3 20      | - 600     | 6,0731606.7   | 416.9 | 3 20      | + 3000    | 6,0746768.6   | 425.7 |
| 52 5 0    | - 500     | 6,0732023.6   | 417.1 | 53 5 0    | + 3100    | 6,0747194.3   | 425.9 |
| 6 40      | - 400     | 6,0732440.7   | 417.4 | 6 40      | + 3200    | 6,0747620.2   | 426.2 |
| 8 20      | - 300     | 6,0732858.1   | 417.6 | 8 20      | + 3300    | 6,0748046.4   | 426.4 |
| 52 10 0   | - 200     | 6,0733275.7   | 417.8 | 53 10 0   | + 3400    | 6,0748472.8   | 426.6 |
| 11 40     | - 100     | 6,0733693.5   | 418.1 | 11 40     | + 3500    | 6,0748899.4   | 426.9 |
| 13 20     | ± 0       | 6,0734111.6   | 418.4 | 13 20     | + 3600    | 6,0749326.3   | 427.1 |
| 52 15 0   | + 100     | 6,0734530.0   | 418.6 | 53 15 0   | + 3700    | 6,0749753.4   | 427.3 |
| 16 40     | + 200     | 6,0734948.6   | 418.8 | 16 40     | + 3800    | 6,0750180.7   | 427.6 |
| 18 20     | + 300     | 6,0735367.4   | 419.1 | 18 20     | + 3900    | 6,0750608.3   | 427.9 |
| 52 20 0   | + 400     | 6,0735786.5   | 419.3 | 53 20 0   | + 4000    | 6,0751036.2   | 428.0 |
| 21 40     | + 500     | 6,0736205.8   | 419.6 | 21 40     | + 4100    | 6,0751464.2   | 428.3 |
| 23 20     | + 600     | 6,0736625.4   | 419.8 | 23 20     | + 4200    | 6,0751892.5   | 428.6 |
| 52 25 0   | + 700     | 6,0737045.2   | 420.1 | 53 25 0   | + 4300    | 6,0752321.1   | 428.8 |
| 26 40     | + 800     | 6,0737465.3   | 420.3 | 26 40     | + 4400    | 6,0752749.9   | 429.0 |
| 28 20     | + 900     | 6,0737885.6   | 420.6 | 28 20     | + 4500    | 6,0753178.9   | 429.3 |
| 52 30 0   | + 1000    | 6,0738306.2   | 420.8 | 53 30 0   | + 4600    | 6,0753608.2   | 429.5 |
| 31 40     | + 1100    | 6,0738727.0   | 421.0 | 31 40     | + 4700    | 6,0754037.7   | 429.7 |
| 33 20     | + 1200    | 6,0739148.0   | 421.3 | 33 20     | + 4800    | 6,0754467.4   | 430.0 |
| 52 35 0   | + 1300    | 6,0739569.3   | 421.6 | 53 35 0   | + 4900    | 6,0754897.4   |       |
| 36 40     | + 1400    | 6,0739990.9   | 421.8 |           |           |               |       |
| 38 20     | + 1500    | 6,0740412.7   | 422.0 |           |           |               |       |

NB. Achter  $\log A_{..}$  moet -10 gevoegd worden.



TABEL V. Eerste gedeelte.

$$X = A_1 \lambda'' - A_3 \lambda''^3 + B_0 \beta''^3 - B_2 \beta'' \lambda''^2; \log A_3 = 9,40303.5 - 20.$$

$$Y = A_0 + A_2 \lambda''^2 - B_1 \beta''^2 \lambda'' + B_3 \lambda''^3; \log B_3 = 8,86267.6 - 20.$$

| $\phi$    | $\beta''$ | $A_0$       | Vers.    | $\log A_1$  | Vers.  | $\log A_2$  | Vers.  |
|-----------|-----------|-------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 50°45' 0" | -3600     | -111235,576 | 3089,706 | 1,2922846.1 | 2581.9 | 5,5675830.1 | 1406.6 |
| 46 40     | -3500     | -108145,870 | 3089,712 | 1,2920264.2 | 2584.1 | 5,5674423.5 | 1408.0 |
| 48 20     | -3400     | -105056,158 | 3089,720 | 1,2917680.1 | 2586.3 | 5,5673015.5 | 1409.3 |
| 50 50 0   | -3300     | -101966,438 | 3089,728 | 1,2915093.8 | 2588.6 | 5,5671606.2 | 1410.5 |
| 51 40     | -3200     | -98876,710  | 3089,736 | 1,2912505.2 | 2590.9 | 5,5670195.7 | 1411.9 |
| 53 20     | -3100     | -95786,974  | 3089,745 | 1,2909914.3 | 2593.1 | 5,5668783.8 | 1413.1 |
| 50 55 0   | -3000     | -92697,229  | 3089,753 | 1,2907321.2 | 2595.3 | 5,5667370.7 | 1414.5 |
| 56 40     | -2900     | -89607,476  | 3089,761 | 1,2904725.9 | 2597.7 | 5,5665956.2 | 1415.8 |
| 58 20     | -2800     | -86517,715  | 3089,771 | 1,2902128.2 | 2599.9 | 5,5664540.4 | 1417.1 |
| 51 0 0    | -2700     | -83427,944  | 3089,779 | 1,2899528.3 | 2602.2 | 5,5663123.3 | 1418.4 |
| 1 40      | -2600     | -80338,165  | 3089,789 | 1,2896926.1 | 2604.4 | 5,5661704.9 | 1419.8 |
| 3 20      | -2500     | -77248,376  | 3089,799 | 1,2894321.7 | 2606.8 | 5,5660285.1 | 1421.0 |
| 51 5 0    | -2400     | -74158,577  | 3089,808 | 1,2891714.9 | 2609.0 | 5,5658864.1 | 1422.4 |
| 6 40      | -2300     | -71068,769  | 3089,818 | 1,2889105.9 | 2611.3 | 5,5657441.7 | 1423.7 |
| 8 20      | -2200     | -67978,951  | 3089,829 | 1,2886494.6 | 2613.6 | 5,5656018.0 | 1425.0 |
| 51 10 0   | -2100     | -64889,122  | 3089,839 | 1,2883881.0 | 2616.0 | 5,5654593.0 | 1426.4 |
| 11 40     | -2000     | -61799,283  | 3089,850 | 1,2881265.0 | 2618.2 | 5,5653166.6 | 1427.7 |
| 13 20     | -1900     | -58709,433  | 3089,860 | 1,2878646.8 | 2620.5 | 5,5651738.9 | 1429.0 |
| 51 15 0   | -1800     | -55619,573  | 3089,872 | 1,2876026.3 | 2622.8 | 5,5650309.9 | 1430.4 |
| 16 40     | -1700     | -52529,701  | 3089,882 | 1,2873403.5 | 2625.2 | 5,5648879.5 | 1431.7 |
| 18 20     | -1600     | -49439,819  | 3089,894 | 1,2870778.3 | 2627.5 | 5,5647447.8 | 1433.1 |
| 51 20 0   | -1500     | -46349,925  | 3089,906 | 1,2868150.8 | 2629.8 | 5,5646014.7 | 1434.4 |
| 21 40     | -1400     | -43260,019  | 3089,918 | 1,2865521.0 | 2632.1 | 5,5644580.3 | 1435.7 |
| 23 20     | -1300     | -40170,101  | 3089,930 | 1,2862888.9 | 2634.4 | 5,5643144.6 | 1437.2 |
| 51 25 0   | -1200     | -37080,171  | 3089,942 | 1,2860254.5 | 2636.8 | 5,5641707.4 | 1438.4 |
| 26 40     | -1100     | -33990,229  | 3089,954 | 1,2857617.7 | 2639.2 | 5,5640269.0 | 1439.8 |
| 28 20     | -1000     | -30900,275  | 3089,967 | 1,2854978.5 | 2641.5 | 5,5638829.2 | 1441.2 |
| 51 30 0   | -900      | -27810,308  | 3089,980 | 1,2852337.0 | 2643.8 | 5,5637388.0 | 1442.5 |
| 31 40     | -800      | -24720,328  | 3089,993 | 1,2849693.2 | 2646.2 | 5,5635945.5 | 1444.0 |
| 33 20     | -700      | -21630,335  | 3090,007 | 1,2847047.0 | 2648.5 | 5,5634501.5 | 1445.2 |
| 51 35 0   | -600      | -18540,328  | 3090,020 | 1,2844398.5 | 2650.9 | 5,5633056.3 | 1446.7 |
| 36 40     | -500      | -15450,308  | 3090,033 | 1,2841747.6 | 2653.3 | 5,5631609.6 | 1448.0 |
| 38 20     | -400      | -12360,275  | 3090,048 | 1,2839094.3 | 2655.6 | 5,5630161.6 | 1449.4 |



TABEL V. Eerste gedeelte. Vervolg.

| $\phi$     | $\beta''$ | $A_0$       | Vers.    | $\log A_1$  | Vers.  | $\log A_2$  | Vers.  |
|------------|-----------|-------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 51°40' 0'' | - 300     | - 9270,227  | 3090,061 | 1,2836438.7 | 2658.1 | 5,5628712.2 | 1450.7 |
| 41 40      | - 200     | - 6180,166  | 3090,076 | 1,2833780.6 | 2660.4 | 5,5627261.5 | 1452.2 |
| 43 20      | - 100     | - 3090,090  | 3090,090 | 1,2831120.2 | 2662.7 | 5,5625809.3 | 1453.5 |
| 51 45 0    | $\pm$ 0   | $\pm$ 0,000 | 3090,105 | 1,2828457.5 | 2665.2 | 5,5624355.8 | 1454.9 |
| 46 40      | + 100     | + 3090,105  | 3090,119 | 1,2825792.3 | 2667.6 | 5,5622900.9 | 1456.3 |
| 48 20      | + 200     | + 6180,224  | 3090,135 | 1,2823124.7 | 2669.9 | 5,5621444.6 | 1457.7 |
| 51 50 0    | + 300     | + 9270,359  | 3090,150 | 1,2820454.8 | 2672.4 | 5,5619986.9 | 1459.1 |
| 51 40      | + 400     | + 12360,509 | 3090,165 | 1,2817782.4 | 2674.8 | 5,5618527.8 | 1460.5 |
| 53 20      | + 500     | + 15450,674 | 3090,181 | 1,2815107.6 | 2677.2 | 5,5617067.3 | 1461.9 |
| 51 55 0    | + 600     | + 18540,855 | 3090,197 | 1,2812430.4 | 2679.6 | 5,5615605.4 | 1463.3 |
| 56 40      | + 700     | + 21631,052 | 3090,213 | 1,2809750.8 | 2682.0 | 5,5614142.1 | 1464.7 |
| 58 20      | + 800     | + 24721,265 | 3090,228 | 1,2807068.8 | 2684.4 | 5,5612677.4 | 1466.1 |
| 52 0 0     | + 900     | + 27811,493 | 3090,246 | 1,2804384.4 | 2686.9 | 5,5611211.3 | 1467.5 |
| 1 40       | + 1000    | + 30901,739 | 3090,261 | 1,2801697.5 | 2689.3 | 5,5609743.8 | 1468.9 |
| 3 20       | + 1100    | + 33992,000 | 3090,279 | 1,2799008.2 | 2691.7 | 5,5608274.9 | 1470.4 |
| 52 5 0     | + 1200    | + 37082,279 | 3090,295 | 1,2796316.5 | 2694.2 | 5,5606804.5 | 1471.7 |
| 6 40       | + 1300    | + 40172,574 | 3090,313 | 1,2793622.3 | 2696.6 | 5,5605332.8 | 1473.2 |
| 8 20       | + 1400    | + 43262,887 | 3090,329 | 1,2790925.7 | 2699.1 | 5,5603859.6 | 1474.6 |
| 52 10 0    | + 1500    | + 46353,216 | 3090,347 | 1,2788226.6 | 2701.6 | 5,5602385.0 | 1476.0 |
| 11 40      | + 1600    | + 49443,563 | 3090,365 | 1,2785525.0 | 2704.0 | 5,5600909.0 | 1477.5 |
| 13 20      | + 1700    | + 52533,928 | 3090,383 | 1,2782821.0 | 2706.4 | 5,5599431.5 | 1478.9 |
| 52 15 0    | + 1800    | + 55624,311 | 3090,400 | 1,2780114.6 | 2709.0 | 5,5597952.6 | 1480.3 |
| 16 40      | + 1900    | + 58714,711 | 3090,419 | 1,2777405.6 | 2711.4 | 5,5596472.3 | 1481.8 |
| 18 20      | + 2000    | + 61805,130 | 3090,437 | 1,2774694.2 | 2713.9 | 5,5594990.5 | 1483.2 |
| 52 20 0    | + 2100    | + 64895,567 | 3090,456 | 1,2771980.3 | 2716.3 | 5,5593507.3 | 1484.6 |
| 21 40      | + 2200    | + 67986,023 | 3090,474 | 1,2769264.0 | 2718.9 | 5,5592022.7 | 1486.1 |
| 23 20      | + 2300    | + 71076,497 | 3090,493 | 1,2766545.1 | 2721.3 | 5,5590536.6 | 1487.6 |
| 52 25 0    | + 2400    | + 74166,990 | 3090,512 | 1,2763823.8 | 2723.9 | 5,5589049.0 | 1489.0 |
| 26 40      | + 2500    | + 77257,502 | 3090,532 | 1,2761099.9 | 2726.3 | 5,5587560.0 | 1490.4 |
| 28 20      | + 2600    | + 80348,034 | 3090,551 | 1,2758373.6 | 2728.9 | 5,5586069.6 | 1491.9 |
| 52 30 0    | + 2700    | + 83438,585 | 3090,570 | 1,2755644.7 | 2731.4 | 5,5584577.7 | 1493.4 |
| 31 40      | + 2800    | + 86529,155 | 3090,590 | 1,2752913.3 | 2733.8 | 5,5583084.3 | 1494.9 |
| 33 20      | + 2900    | + 89619,745 | 3090,610 | 1,2750179.5 | 2736.4 | 5,5581589.4 | 1496.3 |
| 52 35 0    | + 3000    | + 92710,355 | 3090,630 | 1,2747443.1 | 2739.0 | 5,5580093.1 | 1497.7 |
| 36 40      | + 3100    | + 95800,985 | 3090,651 | 1,2744704.1 | 2741.4 | 5,5578595.4 | 1499.3 |
| 38 20      | + 3200    | + 98891,636 | 3090,670 | 1,2741962.7 | 2744.0 | 5,5577096.1 | 1500.7 |

TABEL V. Eerste gedeelte. Vervolg.

| $\phi$     | $\beta''$ | $A_0$        | Vers.    | $\log A_1$  | Vers.  | $\log A_2$  | Vers.  |
|------------|-----------|--------------|----------|-------------|--------|-------------|--------|
| 52°40' 0'' | + 3300    | + 101982,306 | 3090,692 | 1,2739218.7 | 2746.6 | 5,5575595.4 | 1502.2 |
| 41 40      | + 3400    | + 105072,998 | 3090,712 | 1,2736472.1 | 2749.1 | 5,5574093.2 | 1503.7 |
| 43 20      | + 3500    | + 108163,710 | 3090,733 | 1,2733723.0 | 2751.6 | 5,5572589.5 | 1505.1 |
| 52 45 0    | + 3600    | + 111254,443 | 3090,754 | 1,2730971.4 | 2754.2 | 5,5571084.4 | 1506.7 |
| 46 40      | + 3700    | + 114345,197 | 3090,775 | 1,2728217.2 | 2756.7 | 5,5569577.7 | 1508.1 |
| 48 20      | + 3800    | + 117435,972 | 3090,796 | 1,2725460.5 | 2759.3 | 5,5568069.6 | 1509.6 |
| 52 50 0    | + 3900    | + 120526,768 | 3090,818 | 1,2722701.2 | 2761.9 | 5,5566560.0 | 1511.2 |
| 51 40      | + 4000    | + 123617,586 | 3090,840 | 1,2719939.3 | 2764.4 | 5,5565048.8 | 1512.6 |
| 53 20      | + 4100    | + 126708,426 | 3090,862 | 1,2717174.9 | 2767.1 | 5,5563536.2 | 1514.1 |
| 52 55 0    | + 4200    | + 129799,288 | 3090,884 | 1,2714407.8 | 2769.6 | 5,5562022.1 | 1515.7 |
| 56 40      | + 4300    | + 132890,172 | 3090,906 | 1,2711638.2 | 2772.2 | 5,5560506.4 | 1517.1 |
| 58 20      | + 4400    | + 135981,078 | 3090,928 | 1,2708866.0 | 2774.8 | 5,5558989.3 | 1518.7 |
| 53 0 0     | + 4500    | + 139072,006 | 3090,950 | 1,2706091.2 | 2777.4 | 5,5557470.6 | 1520.1 |
| 1 40       | + 4600    | + 142162,956 | 3090,974 | 1,2703313.8 | 2780.0 | 5,5555950.5 | 1521.7 |
| 3 20       | + 4700    | + 145253,930 | 3090,996 | 1,2700533.8 | 2782.6 | 5,5554428.8 | 1523.2 |
| 53 5 0     | + 4800    | + 148344,926 | 3091,019 | 1,2697751.2 | 2785.2 | 5,5552905.6 | 1524.7 |
| 6 40       | + 4900    | + 151435,945 | 3091,042 | 1,2694966.0 | 2787.8 | 5,5551380.9 | 1526.3 |
| 8 20       | + 5000    | + 154526,987 | 3091,065 | 1,2692178.2 | 2790.5 | 5,5549854.6 | 1527.8 |
| 53 10 0    | + 5100    | + 157618,052 | 3091,089 | 1,2689387.7 | 2793.0 | 5,5548326.8 | 1529.3 |
| 11 40      | + 5200    | + 160709,141 | 3091,113 | 1,2686594.7 | 2795.8 | 5,5546797.5 | 1530.8 |
| 13 20      | + 5300    | + 163800,254 | 3091,136 | 1,2683798.9 | 2798.3 | 5,5545266.7 | 1532.4 |
| 53 15 0    | + 5400    | + 166891,390 | 3091,160 | 1,2681000.6 | 2801.0 | 5,5543734.3 | 1534.0 |
| 16 40      | + 5500    | + 169982,550 | 3091,184 | 1,2678199.6 | 2803.6 | 5,5542200.3 | 1535.4 |
| 18 20      | + 5600    | + 173073,734 | 3091,208 | 1,2675396.0 | 2806.3 | 5,5540664.9 | 1537.0 |
| 53 20 0    | + 5700    | + 176164,942 | 3091,232 | 1,2672589.7 | 2809.0 | 5,5539127.9 | 1538.6 |
| 21 40      | + 5800    | + 179256,174 | 3091,256 | 1,2669780.7 | 2811.6 | 5,5537589.3 | 1540.1 |
| 23 20      | + 5900    | + 182347,430 | 3091,281 | 1,2666969.1 | 2814.3 | 5,5536049.2 | 1541.7 |
| 53 25 0    | + 6000    | + 185433,711 | 3091,306 | 1,2664154.8 | 2817.0 | 5,5534507.5 | 1543.3 |
| 26 40      | + 6100    | + 188530,017 | 3091,331 | 1,2661337.8 | 2819.6 | 5,5532964.2 | 1544.8 |
| 28 20      | + 6200    | + 191621,348 | 3091,356 | 1,2658518.2 | 2822.3 | 5,5531419.4 | 1546.3 |
| 53 30 0    | + 6300    | + 194712,704 | 3091,381 | 1,2655695.9 | 2825.0 | 5,5529873.1 | 1548.0 |
| 31 40      | + 6400    | + 197804,085 | 3091,406 | 1,2652870.9 | 2827.7 | 5,5528325.1 | 1549.5 |
| 33 20      | + 6500    | + 200895,491 | 3091,431 | 1,2650043.2 | 2830.4 | 5,5526775.6 | 1551.1 |
| 53 35 0    | + 6600    | + 203986,922 |          | 1,2647212.8 |        | 5,5525224.5 |        |

NB. Achter  $\log A_2$  moet - 10 gevoegd worden.

TABEL V. Tweede gedeelte.

$$X = A_1 \lambda'' - A_3 \lambda''^3 + B_0 \beta''^3 - B_2 \beta'' \lambda''^2; \quad \log A_3 = 9,40303.5 - 20.$$

$$Y = A_0 + A_2 \lambda''^2 - B_1 \beta''^2 \lambda'' + B_3 \lambda''^3; \quad \log B_3 = 8,86267.6 - 20.$$

| $\phi$     | $\beta''$ | $\log B_0$ | Vers. | $\log B_1$ | Vers. | $\log B_2$ | Vers. |
|------------|-----------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|
| 50°45' 0'' | - 3600    | 9,46975.5  | 39.2  | 9,74451.6  | 26.2  | 9,54215.7  | 13.0  |
| 46 40      | - 3500    | 9,47014.7  | 39.2  | 9,74477.8  | 26.1  | 9,54228.7  | 13.1  |
| 48 20      | - 3400    | 9,47053.9  | 39.3  | 9,74503.9  | 26.2  | 9,54241.8  | 13.1  |
| 50 50 0    | - 3300    | 9,47093.2  | 39.2  | 9,74530.1  | 26.2  | 9,54254.9  | 13.1  |
| 51 40      | - 3200    | 9,47132.4  | 39.4  | 9,74556.3  | 26.2  | 9,54268.0  | 13.1  |
| 53 20      | - 3100    | 9,47171.8  | 39.3  | 9,74582.5  | 26.2  | 9,54281.1  | 13.1  |
| 50 55 0    | - 3000    | 9,47211.1  | 39.4  | 9,74608.7  | 26.3  | 9,54294.2  | 13.1  |
| 56 40      | - 2900    | 9,47250.5  | 39.4  | 9,74635.0  | 26.2  | 9,54307.3  | 13.2  |
| 58 20      | - 2800    | 9,47289.9  | 39.4  | 9,74661.2  | 26.3  | 9,54320.5  | 13.1  |
| 51 0 0     | - 2700    | 9,47329.3  | 39.5  | 9,74687.5  | 26.3  | 9,54333.6  | 13.2  |
| 1 40       | - 2600    | 9,47368.8  | 39.5  | 9,74713.8  | 26.4  | 9,54346.8  | 13.1  |
| 3 20       | - 2500    | 9,47408.3  | 39.5  | 9,74740.2  | 26.3  | 9,54359.9  | 13.2  |
| 51 5 0     | - 2400    | 9,47447.8  | 39.6  | 9,74766.5  | 26.4  | 9,54373.1  | 13.2  |
| 6 40       | - 2300    | 9,47487.4  | 39.6  | 9,74792.9  | 26.4  | 9,54386.3  | 13.2  |
| 8 20       | - 2200    | 9,47527.0  | 39.6  | 9,74819.3  | 26.4  | 9,54399.5  | 13.2  |
| 51 10 0    | - 2100    | 9,47566.6  | 39.6  | 9,74845.7  | 26.4  | 9,54412.7  | 13.2  |
| 11 40      | - 2000    | 9,47606.2  | 39.7  | 9,74872.1  | 26.5  | 9,54425.9  | 13.2  |
| 13 20      | - 1900    | 9,47645.9  | 39.7  | 9,74898.6  | 26.4  | 9,54439.1  | 13.3  |
| 51 15 0    | - 1800    | 9,47685.6  | 39.7  | 9,74925.0  | 26.5  | 9,54452.4  | 13.2  |
| 16 40      | - 1700    | 9,47725.3  | 39.8  | 9,74951.5  | 26.5  | 9,54465.6  | 13.3  |
| 18 20      | - 1600    | 9,47765.1  | 39.8  | 9,74978.0  | 26.6  | 9,54478.9  | 13.2  |
| 51 20 0    | - 1500    | 9,47804.9  | 39.8  | 9,75004.6  | 26.5  | 9,54492.1  | 13.3  |
| 21 40      | - 1400    | 9,47844.7  | 39.9  | 9,75031.1  | 26.6  | 9,54505.4  | 13.3  |
| 23 20      | - 1300    | 9,47884.6  | 39.9  | 9,75057.7  | 26.6  | 9,54518.7  | 13.3  |
| 51 25 0    | - 1200    | 9,47924.5  | 39.9  | 9,75084.3  | 26.6  | 9,54532.0  | 13.3  |
| 26 40      | - 1100    | 9,47964.4  | 39.9  | 9,75110.9  | 26.6  | 9,54545.3  | 13.3  |
| 28 20      | - 1000    | 9,48004.3  | 40.0  | 9,75137.5  | 26.7  | 9,54558.6  | 13.3  |
| 51 30 0    | - 900     | 9,48044.3  | 40.0  | 9,75164.2  | 26.7  | 9,54571.9  | 13.4  |
| 31 40      | - 800     | 9,48084.3  | 40.1  | 9,75190.9  | 26.6  | 9,54585.3  | 13.3  |
| 33 20      | - 700     | 9,48124.4  | 40.0  | 9,75217.5  | 26.8  | 9,54598.6  | 13.4  |
| 51 35 0    | - 600     | 9,48164.4  | 40.1  | 9,75244.3  | 26.7  | 9,54612.0  | 13.3  |
| 36 40      | - 500     | 9,48204.5  | 40.2  | 9,75271.0  | 26.7  | 9,54625.3  | 13.4  |
| 38 20      | - 400     | 9,48244.7  | 40.1  | 9,75297.7  | 26.8  | 9,54638.7  | 13.4  |



TABEL V. Tweede gedeelte. Vervolg.

| $\phi$     | $\beta''$ | $\log B_0$ | Vers. | $\log B_1$ | Vers. | $\log B_2$ | Vers. |
|------------|-----------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|
| 51°40' 0'' | — 300     | 9,48284.8  | 40.2  | 9,75324.5  | 26.8  | 9,54652.1  | 13.4  |
| 41 40      | — 200     | 9,48325.0  | 40.2  | 9,75351.3  | 26.8  | 9,54665.5  | 13.4  |
| 43 20      | — 100     | 9,48365.2  | 40.3  | 9,75378.1  | 26.9  | 9,54678.9  | 13.4  |
| 51 45 0    | ± 0       | 9,48405.5  | 40.3  | 9,75405.0  | 26.8  | 9,54692.3  | 13.5  |
| 46 40      | + 100     | 9,48445.8  | 40.3  | 9,75431.8  | 26.9  | 9,54705.8  | 13.4  |
| 48 20      | + 200     | 9,48486.1  | 40.3  | 9,75458.7  | 26.9  | 9,54719.2  | 13.4  |
| 51 50 0    | + 300     | 9,48526.4  | 40.4  | 9,75485.6  | 26.9  | 9,54732.6  | 13.5  |
| 51 40      | + 400     | 9,48566.8  | 40.4  | 9,75512.5  | 27.0  | 9,54746.1  | 13.5  |
| 53 20      | + 500     | 9,48607.2  | 40.4  | 9,75539.5  | 26.9  | 9,54759.6  | 13.4  |
| 51 55 0    | + 600     | 9,48647.6  | 40.5  | 9,75566.4  | 27.0  | 9,54773.0  | 13.5  |
| 56 40      | + 700     | 9,48688.1  | 40.5  | 9,75593.4  | 27.0  | 9,54786.5  | 13.5  |
| 58 20      | + 800     | 9,48728.6  | 40.5  | 9,75620.4  | 27.0  | 9,54800.0  | 13.5  |
| 52 0 0     | + 900     | 9,48769.1  | 40.6  | 9,75647.4  | 27.1  | 9,54813.5  | 13.6  |
| 1 40       | + 1000    | 9,48809.7  | 40.6  | 9,75674.5  | 27.0  | 9,54827.1  | 13.5  |
| 3 20       | + 1100    | 9,48850.3  | 40.6  | 9,75701.5  | 27.1  | 9,54840.6  | 13.5  |
| 52 5 0     | + 1200    | 9,48890.9  | 40.7  | 9,75728.6  | 27.1  | 9,54854.1  | 13.6  |
| 6 40       | + 1300    | 9,48931.6  | 40.7  | 9,75755.7  | 27.1  | 9,54867.7  | 13.6  |
| 8 20       | + 1400    | 9,48972.3  | 40.7  | 9,75782.8  | 27.2  | 9,54881.3  | 13.5  |
| 52 10 0    | + 1500    | 9,49013.0  | 40.7  | 9,75810.0  | 27.1  | 9,54894.8  | 13.6  |
| 11 40      | + 1600    | 9,49053.7  | 40.8  | 9,75837.1  | 27.2  | 9,54908.4  | 13.6  |
| 13 20      | + 1700    | 9,49094.5  | 40.8  | 9,75864.3  | 27.2  | 9,54922.0  | 13.6  |
| 52 15 0    | + 1800    | 9,49135.3  | 40.9  | 9,75891.5  | 27.3  | 9,54935.6  | 13.6  |
| 16 40      | + 1900    | 9,49176.2  | 40.9  | 9,75918.8  | 27.2  | 9,54949.2  | 13.6  |
| 18 20      | + 2000    | 9,49217.1  | 40.9  | 9,75946.0  | 27.3  | 9,54962.8  | 13.7  |
| 52 20 0    | + 2100    | 9,49258.0  | 40.9  | 9,75973.3  | 27.3  | 9,54976.5  | 13.6  |
| 21 40      | + 2200    | 9,49298.9  | 41.0  | 9,76000.6  | 27.3  | 9,54990.1  | 13.7  |
| 23 20      | + 2300    | 9,49339.9  | 41.0  | 9,76027.9  | 27.3  | 9,55003.8  | 13.7  |
| 52 25 0    | + 2400    | 9,49380.9  | 41.0  | 9,76055.2  | 27.4  | 9,55017.5  | 13.6  |
| 26 40      | + 2500    | 9,49421.9  | 41.1  | 9,76082.6  | 27.4  | 9,55031.1  | 13.7  |
| 28 20      | + 2600    | 9,49463.0  | 41.1  | 9,76110.0  | 27.4  | 9,55044.8  | 13.7  |
| 52 30 0    | + 2700    | 9,49504.1  | 41.1  | 9,76137.4  | 27.4  | 9,55058.5  | 13.7  |
| 31 40      | + 2800    | 9,49545.2  | 41.1  | 9,76164.8  | 27.4  | 9,55072.2  | 13.7  |
| 33 20      | + 2900    | 9,49586.3  | 41.2  | 9,76192.2  | 27.5  | 9,55085.9  | 13.8  |
| 52 35 0    | + 3000    | 9,49627.5  | 41.3  | 9,76219.7  | 27.5  | 9,55099.7  | 13.7  |
| 36 40      | + 3100    | 9,49668.8  | 41.2  | 9,76247.2  | 27.5  | 9,55113.4  | 13.8  |
| 38 20      | + 3200    | 9,49710.0  | 41.3  | 9,76274.7  | 27.5  | 9,55127.2  | 13.7  |



TABEL V. Tweede gedeelte. Vervolg.

| $\phi$    | $\beta'$ | $\log B_0$ | Vers. | $\log B_1$ | Vers. | $\log B_2$ | Vers. |
|-----------|----------|------------|-------|------------|-------|------------|-------|
| 52°40' 0" | + 3300   | 9,49751.3  | 41.3  | 9,76302.2  | 27.5  | 9,55140.9  | 13.8  |
| 41 40     | + 3400   | 9,49792.6  | 41.4  | 9,76329.7  | 27.6  | 9,55154.7  | 13.8  |
| 43 20     | + 3500   | 9,49834.0  | 41.4  | 9,76357.3  | 27.6  | 9,55168.5  | 13.8  |
| 52 45 0   | + 3600   | 9,49875.4  | 41.4  | 9,76384.9  | 27.6  | 9,55182.3  | 13.8  |
| 46 40     | + 3700   | 9,49916.8  | 41.4  | 9,76412.5  | 27.6  | 9,55196.1  | 13.8  |
| 48 20     | + 3800   | 9,49958.2  | 41.5  | 9,76440.1  | 27.7  | 9,55209.9  | 13.8  |
| 52 50 0   | + 3900   | 9,49999.7  | 41.5  | 9,76467.8  | 27.7  | 9,55223.7  | 13.9  |
| 51 40     | + 4000   | 9,50041.2  | 41.6  | 9,76495.5  | 27.7  | 9,55237.6  | 13.8  |
| 53 20     | + 4100   | 9,50082.8  | 41.5  | 9,76523.2  | 27.7  | 9,55251.4  | 13.9  |
| 52 55 0   | + 4200   | 9,50124.3  | 41.7  | 9,76550.9  | 27.7  | 9,55265.3  | 13.8  |
| 56 40     | + 4300   | 9,50166.0  | 41.6  | 9,76578.6  | 27.8  | 9,55279.1  | 13.9  |
| 58 20     | + 4400   | 9,50207.6  | 41.7  | 9,76606.4  | 27.8  | 9,55293.0  | 13.9  |
| 53 0 0    | + 4500   | 9,50249.3  | 41.7  | 9,76634.2  | 27.8  | 9,55306.9  | 13.9  |
| 1 40      | + 4600   | 9,50291.0  | 41.7  | 9,76662.0  | 27.8  | 9,55320.8  | 13.9  |
| 3 20      | + 4700   | 9,50332.7  | 41.8  | 9,76689.8  | 27.8  | 9,55334.7  | 14.0  |
| 53 5 0    | + 4800   | 9,50374.5  | 41.8  | 9,76717.6  | 27.9  | 9,55348.7  | 13.9  |
| 6 40      | + 4900   | 9,50416.3  | 41.8  | 9,76745.5  | 27.9  | 9,55362.6  | 13.9  |
| 8 20      | + 5000   | 9,50458.1  | 41.9  | 9,76773.4  | 27.9  | 9,55376.5  | 14.0  |
| 53 10 0   | + 5100   | 9,50500.0  | 41.9  | 9,76801.3  | 27.9  | 9,55390.5  | 14.0  |
| 11 40     | + 5200   | 9,50541.9  | 41.9  | 9,76829.2  | 28.0  | 9,55404.5  | 13.9  |
| 13 20     | + 5300   | 9,50583.8  | 42.0  | 9,76857.2  | 28.0  | 9,55418.4  | 14.0  |
| 53 15 0   | + 5400   | 9,50625.8  | 42.0  | 9,76885.2  | 28.0  | 9,55432.4  | 14.0  |
| 16 40     | + 5500   | 9,50667.8  | 42.0  | 9,76913.2  | 28.0  | 9,55446.4  | 14.0  |
| 18 20     | + 5600   | 9,50709.8  | 42.1  | 9,76941.2  | 28.0  | 9,55460.4  | 14.1  |
| 53 20 0   | + 5700   | 9,50751.9  | 42.1  | 9,76969.2  | 28.1  | 9,55474.5  | 14.0  |
| 21 40     | + 5800   | 9,50794.0  | 42.1  | 9,76997.3  | 28.1  | 9,55488.5  | 14.0  |
| 23 20     | + 5900   | 9,50836.1  | 42.2  | 9,77025.4  | 28.1  | 9,55502.5  | 14.1  |
| 53 25 0   | + 6000   | 9,50878.3  | 42.2  | 9,77053.5  | 28.1  | 9,55516.6  | 14.1  |
| 26 40     | + 6100   | 9,50920.5  | 42.2  | 9,77081.6  | 28.2  | 9,55530.7  | 14.0  |
| 28 20     | + 6200   | 9,50962.7  | 42.3  | 9,77109.8  | 28.2  | 9,55544.7  | 14.1  |
| 53 30 0   | + 6300   | 9,51005.0  | 42.3  | 9,77138.0  | 28.2  | 9,55558.8  | 14.1  |
| 31 40     | + 6400   | 9,51047.3  | 42.3  | 9,77166.2  | 28.2  | 9,55572.9  | 14.1  |
| 33 20     | + 6500   | 9,51089.6  | 42.4  | 9,77194.4  | 28.2  | 9,55587.0  | 14.2  |
| 53 35 0   | + 6600   | 9,51132.0  |       | 9,77222.6  |       | 9,55601.2  |       |

NB. Achter  $\log B_0$ ,  $\log B_1$  en  $\log B_2$  moet  $-20$  gevoegd worden.

TABLE V<sub>a</sub>.

$$A, \lambda'' = \Lambda - A, \beta'' \lambda''.$$

| $\lambda$ | $\Lambda$   | $\phi$     | $\beta''$ | $\log A, \lambda''$ | Vers. |
|-----------|-------------|------------|-----------|---------------------|-------|
| 1''       | 19,17987385 | 50°45' 0'' | — 3600    | 6,0684066.2         | 599.2 |
|           |             | 46 40      | — 3500    | 6,0684665.4         | 599.7 |
|           |             | 48 20      | — 3400    | 6,0685265.1         | 600.1 |
| 1'        | 19,1799     | 50 50 0    | — 3300    | 6,0685865.2         | 600.5 |
| 2''       | 38,3597     | 51 40      | — 3200    | 6,0686465.7         | 601.0 |
| 3''       | 57,5396     | 53 20      | — 3100    | 6,0687066 7         | 601.4 |
| 4''       | 76,7195     | 50 55 0    | — 3000    | 6,0687663.1         | 601.9 |
| 5''       | 95,8994     | 56 40      | — 2900    | 6,0688270.0         | 602.4 |
| 6''       | 115,0792    | 58 20      | — 2800    | 6,0688872 4         | 602.7 |
| 7''       | 134,2591    | 51 0 0     | — 2700    | 6,0689475.1         | 603.3 |
| 8''       | 153,4390    | 1 40       | — 2600    | 6,0690073.4         | 603.6 |
| 9''       | 172,6189    | 3 20       | — 2500    | 6,0690632.0         | 604.2 |
| 10''      | 191,7987    | 51 5 0     | — 2400    | 6,0691286.2         | 604.5 |
|           |             | 6 40       | — 2300    | 6,0691890.7         | 605.0 |
|           |             | 8 20       | — 2200    | 6,0692495.7         | 605.5 |
| 1'        | 1150,7924   | 51 10 0    | — 2100    | 6,0693101.2         | 605.9 |
| 2'        | 2301,5849   | 11 40      | — 2000    | 6,0693707.1         | 606.4 |
| 3'        | 3452,3773   | 13 20      | — 1900    | 6,0694313.5         | 606.8 |
| 4'        | 4603,1697   | 51 15 0    | — 1800    | 6,0694920.3         | 607.3 |
| 5'        | 5753,9622   | 16 40      | — 1700    | 6,0695527.6         | 607.7 |
| 6'        | 6904,7546   | 18 20      | — 1600    | 6,0696135.3         | 608.1 |
| 7'        | 8055,5470   | 51 20 0    | — 1500    | 6,0696743.4         | 608.6 |
| 8'        | 9206,3394   | 21 40      | — 1400    | 6,0697352.0         | 609.1 |
| 9'        | 10357,1319  | 23 20      | — 1300    | 6,0697961.1         | 609.5 |
| 10'       | 11507,9243  | 51 25 0    | — 1200    | 6,0698570.6         | 610.0 |
|           |             | 26 40      | — 1100    | 6,0699180.6         | 610.4 |
|           |             | 28 20      | — 1000    | 6,0699791.0         | 610.9 |
| 1°        | 69047,5459  | 51 30 0    | — 900     | 6,0700401.9         | 611.3 |
| 2°        | 138095,0917 | 31 40      | — 800     | 6,0701013.2         | 611.8 |
| 3°        | 207142,6376 | 33 20      | — 700     | 6,0701625.0         | 612.2 |
|           |             | 51 35 0    | — 600     | 6,0702237.2         | 612.7 |
|           |             | 36 40      | — 500     | 6,0702849.9         | 613.1 |
|           |             | 38 20      | — 400     | 6,0703463.0         | 613.6 |

TABEL Va. Vervolg.

| $\phi$     | $\beta''$ | $\log A_{,,}$ | Vers. | $\phi$     | $\beta'$ | $\log A_{,,}$ | Vers. |
|------------|-----------|---------------|-------|------------|----------|---------------|-------|
| 51°40' 0'' | — 300     | 6,0704076.6   | 614.0 | 52°40' 0'' | + 3300   | 6,0726469.1   | 630.5 |
| 41 40      | — 200     | 6,0704690.6   | 614.5 | 41 40      | + 3400   | 6,0727099.6   | 631.0 |
| 43 20      | — 100     | 6,0705305.1   | 614.9 | 43 20      | + 3500   | 6,0728730.6   | 631.4 |
| 51 45 0    | ± 0       | 6,0705920.0   | 615.4 | 52 45 0    | + 3600   | 6,0728362.0   | 631.9 |
| 46 40      | + 100     | 6,0706535.4   | 615.9 | 46 40      | + 3700   | 6,0728993.9   | 632.3 |
| 48 20      | + 200     | 6,0707151.3   | 616.3 | 48 20      | + 3800   | 6,0729626.2   | 632.9 |
| 51 50 0    | + 300     | 6,0707767.6   | 616.7 | 52 50 0    | + 3900   | 6,0730259.1   | 633.2 |
| 51 40      | + 400     | 6,0708384.3   | 617.2 | 51 40      | + 4000   | 6,0730892.3   | 633.8 |
| 53 20      | + 500     | 6,0709001.5   | 617.7 | 53 20      | + 4100   | 6,0731526.1   | 634.2 |
| 51 55 0    | + 600     | 6,0709619.2   | 618.1 | 52 55 0    | + 4200   | 6,0732160.3   | 634.7 |
| 56 40      | + 700     | 6,0710237.3   | 618.6 | 56 40      | + 4300   | 6,0732795.0   | 635.1 |
| 58 20      | + 800     | 6,0710855.9   | 619.0 | 58 20      | + 4400   | 6,0733430.1   | 635.6 |
| 52 0 0     | + 900     | 6,0711474.9   | 619.5 | 53 0 0     | + 4500   | 6,0734065.7   | 636.1 |
| 1 40       | + 1000    | 6,0712094.4   | 620.0 | 1 40       | + 4600   | 6,0734701.8   | 636.5 |
| 3 20       | + 1100    | 6,0712714.4   | 620.4 | 3 20       | + 4700   | 6,0735338.3   | 637.0 |
| 52 5 0     | + 1200    | 6,0713334.8   | 620.8 | 53 5 0     | + 4800   | 6,0735975.3   | 637.4 |
| 6 40       | + 1300    | 6,0713955.6   | 621.4 | 6 40       | + 4900   | 6,0736612.7   | 638.0 |
| 8 20       | + 1400    | 6,0714577.0   | 621.7 | 8 20       | + 5000   | 6,0737250.7   | 638.4 |
| 52 10 0    | + 1500    | 6,0715198.7   | 622.3 | 53 10 0    | + 5100   | 6,0737889.1   | 638.8 |
| 11 40      | + 1600    | 6,0715821.0   | 622.7 | 11 40      | + 5200   | 6,0738527.9   | 639.3 |
| 13 20      | + 1700    | 6,0716443.7   | 623.1 | 13 20      | + 5300   | 6,0739167.2   | 639.8 |
| 52 15 0    | + 1800    | 6,0717066.8   | 623.6 | 53 15 0    | + 5400   | 6,0739807.0   | 640.3 |
| 16 40      | + 1900    | 6,0717690.4   | 624.1 | 16 40      | + 5500   | 6,0740447.3   | 640.7 |
| 18 20      | + 2000    | 6,0718314.5   | 624.5 | 18 20      | + 5600   | 6,0741088.0   | 641.2 |
| 52 20 0    | + 2100    | 6,0718939.0   | 625.0 | 53 20 0    | + 5700   | 6,0741729.2   | 641.7 |
| 21 40      | + 2200    | 6,0719564.0   | 625.4 | 21 40      | + 5800   | 6,0742370.9   | 642.1 |
| 23 20      | + 2300    | 6,0720189.4   | 625.9 | 23 20      | + 5900   | 6,0743013.0   | 642.6 |
| 52 25 0    | + 2400    | 6,0720815.3   | 626.4 | 53 25 0    | + 6000   | 6,0743655.6   | 643.1 |
| 26 40      | + 2500    | 6,0721441.7   | 626.8 | 26 40      | + 6100   | 6,0744293.7   | 643.5 |
| 28 20      | + 2600    | 6,0722068.5   | 627.3 | 28 20      | + 6200   | 6,0744942.2   | 644.0 |
| 52 30 0    | + 2700    | 6,0722695.8   | 627.7 | 53 30 0    | + 6300   | 6,0745586.2   | 644.5 |
| 31 40      | + 2800    | 6,0723323.5   | 628.2 | 31 40      | + 6400   | 6,0746230.7   | 644.9 |
| 33 20      | + 2900    | 6,0723951.7   | 628.7 | 33 20      | + 6500   | 6,0746875.6   | 645.4 |
| 52 35 0    | + 3000    | 6,0724580.4   | 629.1 | 53 35 0    | + 6600   | 6,0747521.0   |       |
| 36 40      | + 3100    | 6,0725209.5   | 629.6 |            |          |               |       |
| 38 20      | + 3200    | 6,0725839.1   | 630.0 |            |          |               |       |

NB. Achter  $\log A_{,,}$  moet  $-10$  gevoegd worden.

# INHOUD.

|                                                                                                                                                                                                                                                                  | Bladz. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Hoofdstuk I. Algemeen overzicht . . . . .                                                                                                                                                                                                                        | 2.     |
| " II. Algemeene beschouwingen over conforme of<br>orthomorpe projectiën . . . . .                                                                                                                                                                                | 14.    |
| " III. De cirkelprojectie van LAGRANGE . . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 31.    |
| " IV. Kaartprojectie met parabolische meridianen en<br>parallelle . . . . .                                                                                                                                                                                      | 49.    |
| " V. Kaartprojectie met homofocale ellipsen en hyper-<br>bolen als meridianen en parallelle . . . . .                                                                                                                                                            | 55.    |
| " VI. Kaartprojectie met eenvoudige formules voor de<br>berekening van de coördinaten . . . . .                                                                                                                                                                  | 79.    |
| " VII. Niet symetrische kaartprojectiën met minimum-<br>afwijking van de vergrooting . . . . .                                                                                                                                                                   | 82.    |
| Tabel I. $U$ voor $\phi_0 = 52^\circ 13' 20''$ en voor $\phi_0 = 51^\circ 45'$                                                                                                                                                                                   | 89.    |
| " II. Cirkelprojectie van LAGRANGE . . . . .                                                                                                                                                                                                                     | 92.    |
| " III. Projectie met elliptische parallelle en hyperbo-<br>lische meridianen . . . . .                                                                                                                                                                           | 95.    |
| " IV. Projectie volgens de formules $X = A_1 \lambda'' - A_3 \lambda''^3$<br>en $Y = A_0 + A_2 \lambda''^2$ . . . . .                                                                                                                                            | 98.    |
| " IV <sub>a</sub> . Idem. Hulptafel voor groote lengteverschillen .                                                                                                                                                                                              | 101.   |
| " V. Projectie volgens de formules<br>$X = A_1 \lambda'' - A_3 \lambda''^3 + B_0 \beta''^3 - B_2 \beta'' \lambda''^2$ ; $\log A_3 = 9,40303.5 - 20$ .<br>$Y = A_0 + A_2 \lambda''^2 - B_1 \beta''^2 \lambda'' + B_3 \lambda''^3$ ; $\log B_3 = 8,86267.6 - 20$ . | 103.   |
| Tabel V <sub>a</sub> . Idem. Hulptafel voor groote lengteverschillen .                                                                                                                                                                                           | 109.   |
| Plaat II.                                                                                                                                                                                                                                                        |        |



### VERBETERINGEN.

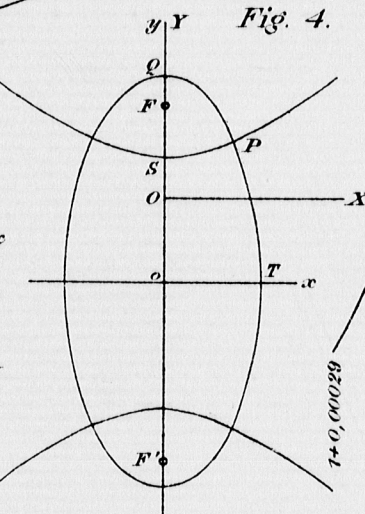
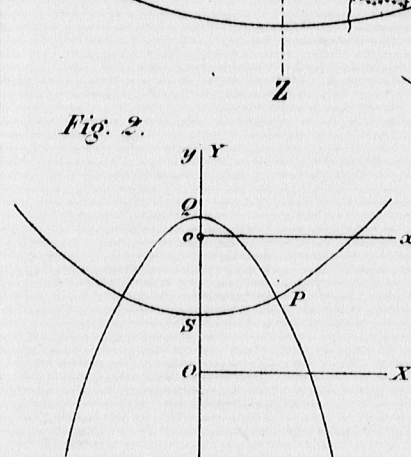
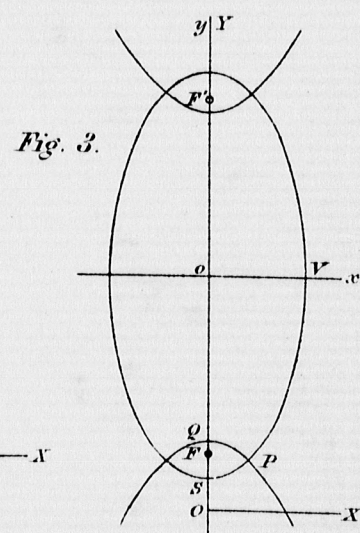
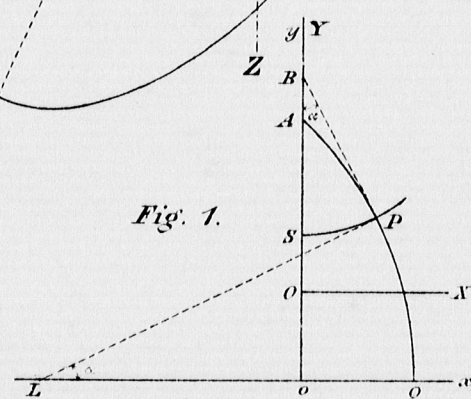
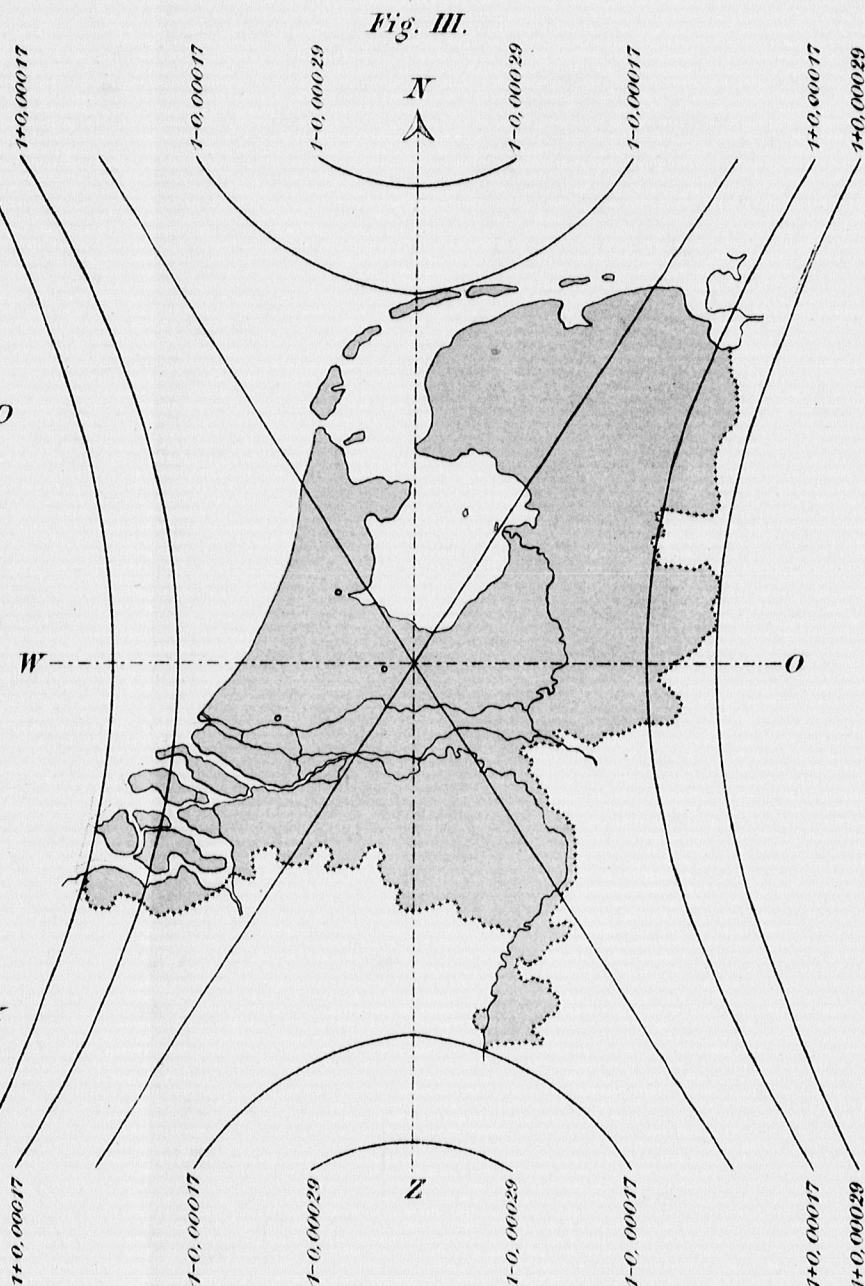
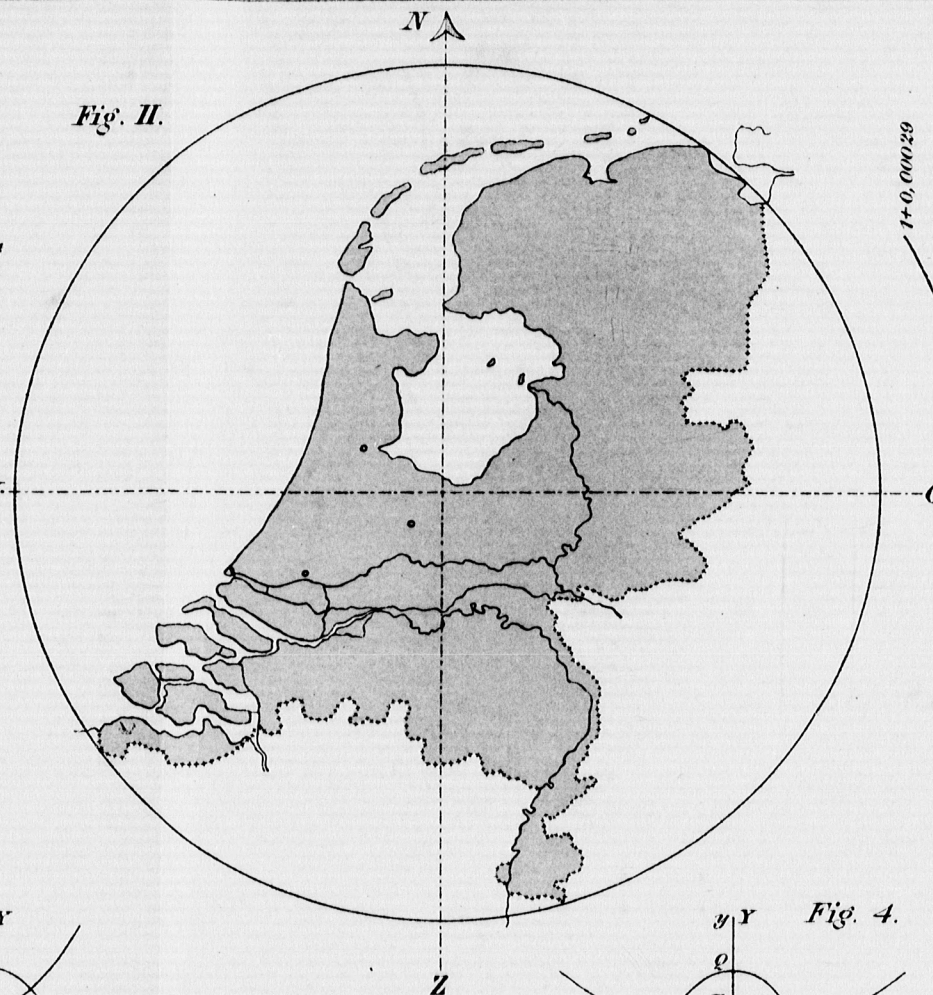
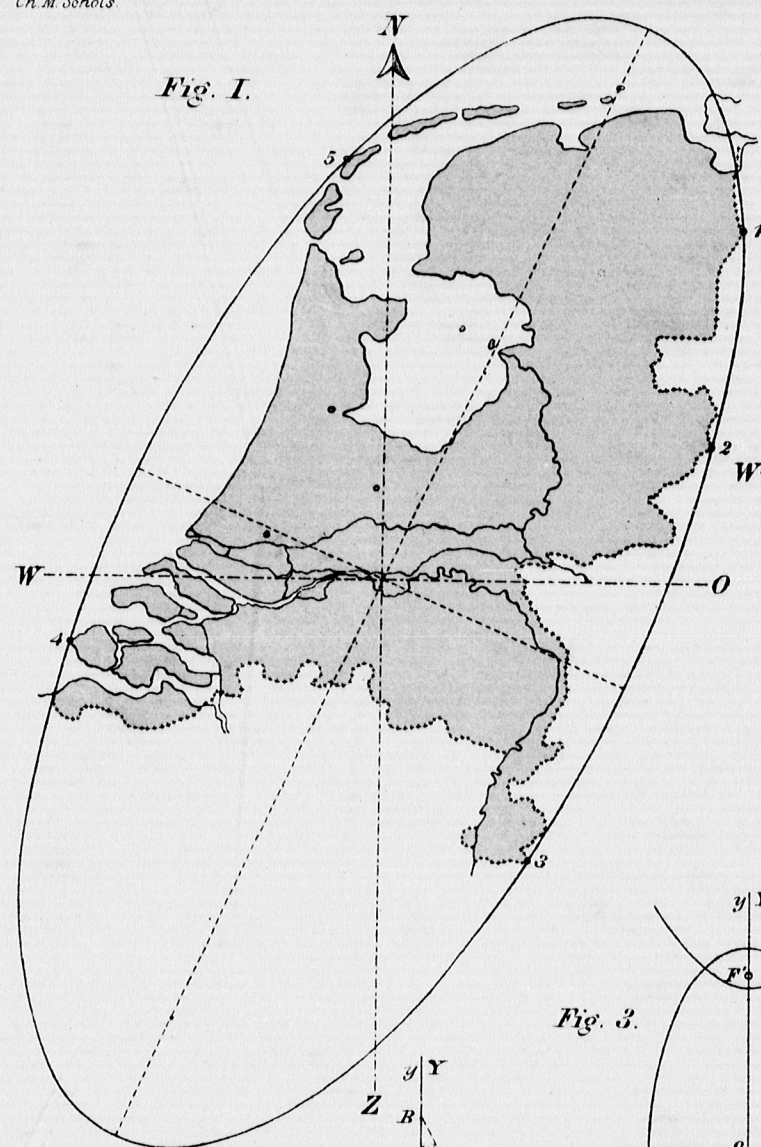
|      |    |       |    |       |              |                |             |                 |
|------|----|-------|----|-------|--------------|----------------|-------------|-----------------|
| Blz. | 9  | regel | 16 | v. o. | <i>staat</i> | § 27,          | <i>lees</i> | § 26.           |
| "    | 32 | "     | 4  | v. b. | "            | angezien,      | "           | Aangezien.      |
| "    | 79 | "     | 2  | v. b. | "            | aartprojectie, | "           | Kaartprojectie. |

---





Ch. M. Schöls.



1188631



