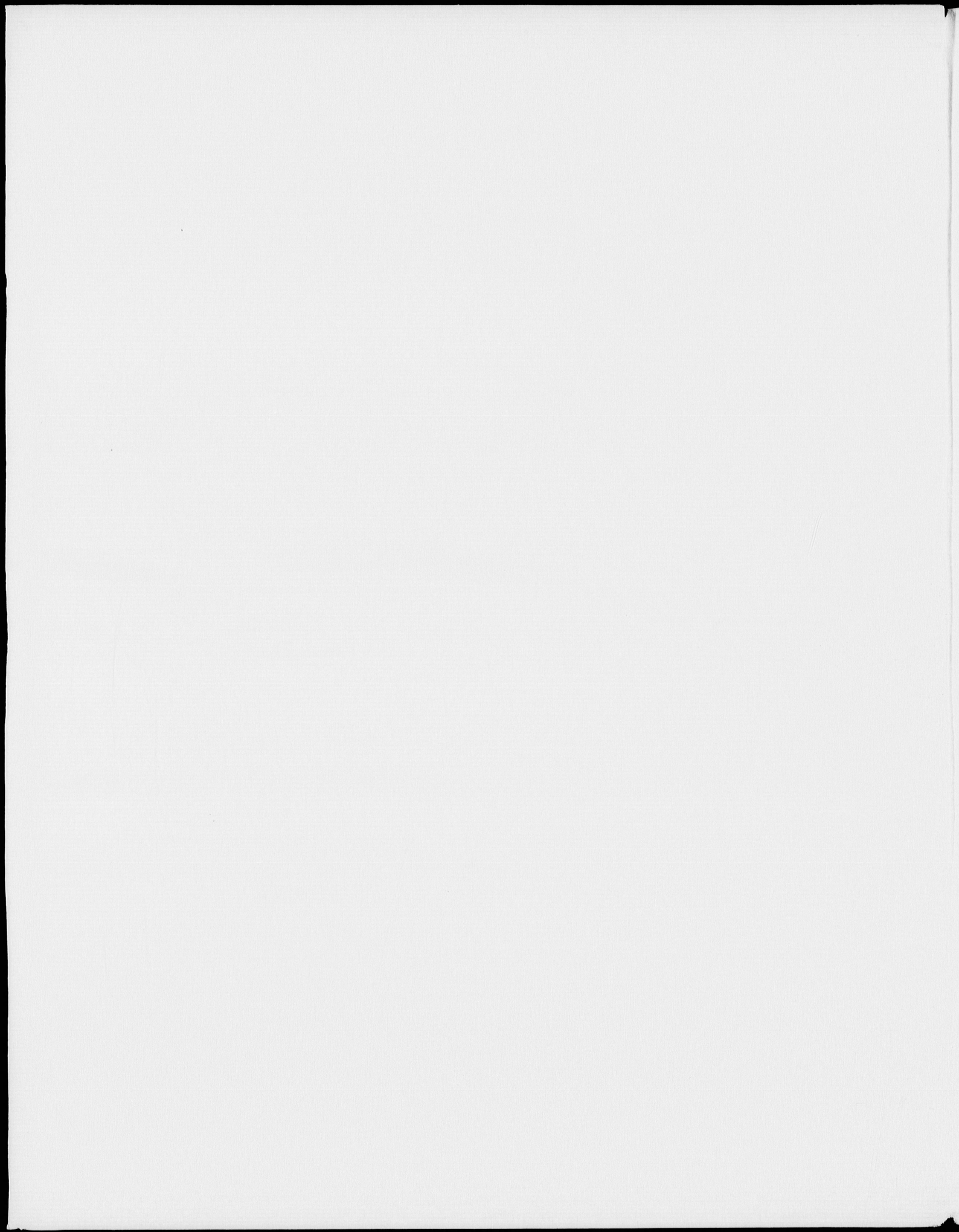


DE ANALYTISCHE KENMERKEN
DER
BIJZONDERE PUNTEN
VAN
KROMME LIJNEN EN OPPERVLAKKEN.

Eerste Gedeelte:
BIJZONDERE PUNTEN VAN VLAKE KROMME LIJNEN.

AKADEMISCH PROEFSCHRIFT,
TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE
AAN DE HOOGESCHOOL TE LÉIDEN,
op gezag van den Rector Magnificus
DR J. W. F. RAUWENHOFF,
Hoogleeraar in de faculteit der Godgeleerdheid,
Op Zaterdag den 7 October 1871, des namiddags te 3 uren,
IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN
DOOR
FLORIS DE BOER,
geboren te Assendelft.

DEVENTER, WED. P. DE LANGE.
1871.





40

Pga 1149

DE ANALYTISCHE KENMERKEN

DER

BIJZONDERE PUNTEN

VAN

KROMME LIJNEN EN OPPERVLAKKEN.

Eerste Gedeelte:

BIJZONDERE PUNTEN VAN VLAKKE KROMME LIJNEN.

AKADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

op gezag van den Rector Magnificus

DR J. W. F. RAUWENHOFF,

Hoogleeraar in de faculteit der Godgeleerdheid,

Op Zaterdag den 7 October 1871, des namiddags te 2 uren,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

DOOR

FLORIS DE BOER,

geboren te Assendelft.

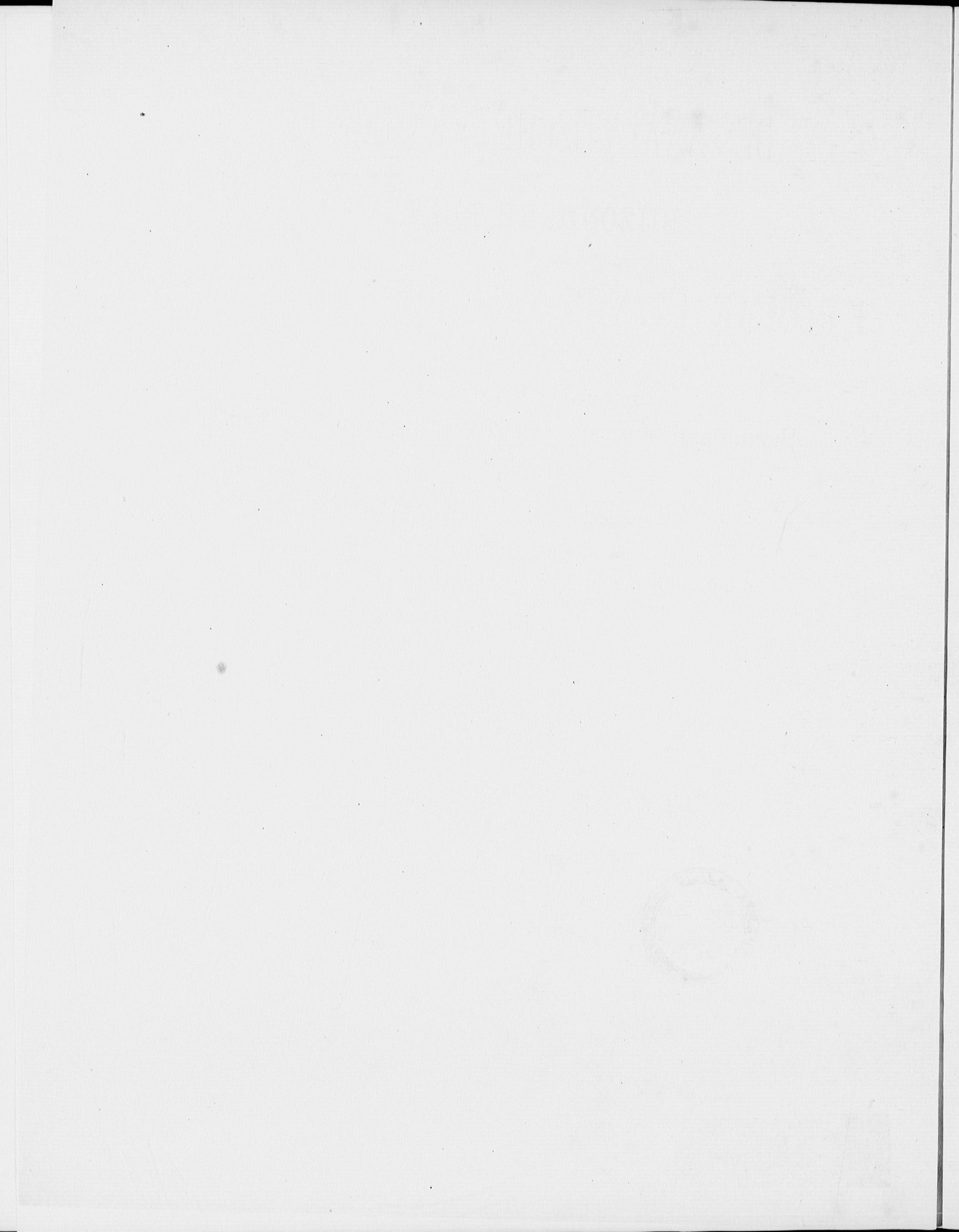


DEVENTER, WED. P. DE LANGE.
1871.

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT



0348 5863



BIJZONDERE PUNTEN

VAN

KROMME LIJNEN EN OPPERVLAKKEN.

I.

BIJZONDERE PUNTEN VAN VLAKKE KROMME LIJNEN.

V O O R R E D E.

Men zal zich waarschijnlijk verwonderen over den vorm, waarin mijn Academisch Proefschrift het licht ziet, namelijk dien van het eerste gedeelte eener verhandeling, niettegenstaande de inhoud van dit gedeelte een gesloten geheel vormt, en evengoed op zich zelf kon worden uitgegeven. De reden is deze. Oorspronkelijk had ik de geheele verhandeling, die behalve uit het in dit proefschrift voorkomende eerste hoofdstuk nog uit twee andere bestaat, voor dissertatie bestemd, en eerst toen reeds een gedeelte was afgedrukt, heb ik om verschillende redenen van dit plan afgezien, en besloten, alleen het gedeelte, dat thans het licht ziet, als dissertatie te bezigen. De vorm, waarin toen het eerste gedeelte gedrukt was, liet niet meer toe, het als afzonderlijke verhandeling uit te geven.

De beide andere hoofdstukken, die respectievelijk over Bijzondere punten van Oppervlakken en van Kromme lijnen in de ruimte handelen, zijn in manuscript nagenoeg gereed, en zullen vroeg of laat wel het licht zien.

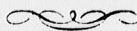
In een aanhangsel heb ik het bewijs geleverd voor eene stelling, die ik gedurig moest gebruiken, en die ik nergens bewezen vond. Misschien komt het bewijs hier of daar voor, en was het dus overbodig.

De eerste afdeling van dit hoofdstuk is hoofdzakelijk eene uitbreiding van hetgeen over dit

onderwerp voorkomt in *SERRET Calcul diff. et intégr.* 176—185, maar volgens eene geheel andere methode afgeleid. Met hetgeen *POISSON*, *ECKMAN* en anderen over dit onderwerp hebben geschreven, laat het zich niet goed vergelijken, daar zij de zaak uit een geheel ander oogpunt hebben beschouwd.

Ik maak van deze gelegenheid gebruik, om een openlijk woord van dank te brengen aan de Hoogleraren der Wis- en Natuurkundige faculteit en aan hunne adsistenten voor het van hen genoten onderwijs en de welwillendheid, die ik steeds van hen mogt ondervinden. Inzonderheid geldt dit mijn hooggeschatten Promotor Prof. *BIERENS DE HAAN*, wiens bereidwilligheid mij onder anderen bij de bewerking van mijn proefschrift gebleken is.

Ook hun breng ik mijnen dank, die door hunne vriendschap mij het leven aan de Akademie hebben veraangenaamd, en aan wier omgang ik in meer dan een opzicht veel verschuldigd ben.



Rame mijnee Ouders.

ERRATA.



pag.	5 regel	23	staat	$F(x, y, z)$	moet zijn	$F(x, y)$
»	8	»	22	»	»	»
»	9	»	15	»	»	»
»	10	»	18	»	»	»
»	10	»	20	»	»	»
»	10	»	23	»	»	»
»	11	»	13	»	»	»
»	11	»	18	»	»	»
»	13	»	21 en 25	»	»	»
»	13	»	22 en 25	»	»	»
»	14	»	17	»	»	»
»	14	»	24	»	»	»
»	14	»	38	»	»	»
»	15	»	9	»	»	»
»	18	»	30	»	»	»
»	20	»	1	»	»	»
»	20	»	4	»	»	»
»	25	»	35	»	»	»
»	35	»	6	»	»	»
»	35	»	31	»	»	»
»	36	»	13	»	»	»
»	37	»	13	»	»	»
»	37	»	27	»	»	»
»	37	»	33	»	»	»
»	37	»	34	»	»	»
»	37	»	37	»	»	»
»	37	»	37	»	»	»
»	38	»	12	»	»	»

pag. 38 regel	27	staat	y_3'	moet zijn	y_3''
» 38 »	29	»	$(y_2 - y_3)(y_3 - y_2)(y_1 - y_3)y_1'^2 y_2'^2$	» »	$(y_2' - y_1')(y_3' - y_2')(y_1' - y_3')y_1'^2 y_2'^2$
» 38 »	41	»	(LXXXII)	» »	(LXXXIII)

Verder vindt men op deze en de volgende pagina's komma's in plaats van accenten gedrukt.

pag. 39 regel	32	staat	$12ck^2m$	moet zijn	$18ck^2m$
» 39 »	33	»	$9ek^2l$	» »	$3ek^2l$
» 42 »	18	deze vergelijking is (137)			

NB. Vel 5 is ten gevolge van een misverstand te spoedig afgedrukt, vandaar het groot aantal drukfouten in dit vel.

pag. 43 regel	30	staat	$K(K\wp K$	moet zijn	$H(K\wp K$
» 51 »	15	»	met	» »	men
» 53 »	29	»	$n x^{n-4}y$	» »	$n x^{n-4}y^4$
» 61 »	15	»	waaraan	» »	waarin
» 64 »	21	»	vierde	» »	derde

De uitdrukkingen $\frac{S\sqrt{P+T}\sqrt{R}}{\sqrt{PR}}$ en $\frac{S(P-2R)\sqrt{P-T(R-2P)}\sqrt{R}}{PR}$, die in de vergelijking (XXIV) voorkomen, moeten veranderd worden in

$$\frac{S\sqrt{P\pm T}\sqrt{R}}{\sqrt{PR}} \text{ en } \frac{S(P-2R)\sqrt{P\mp T(R-2P)}\sqrt{R}}{PR},$$

waarin dan het bovenste teeken geldt als Q positief, het onderste als Q negatief is. Hetzelfde geldt van de overeenkomstige uitdrukkingen met kleine letters. Dezelfde verandering moet natuurlijk gemaakt worden overal, waar verder deze uitdrukkingen voorkomen.

INLEIDING.

§ 1. Het is niet gemakkelijk eene juiste definitie te geven van het begrip *Bijzondere punten*. In het algemeen kan men zeggen: *Bijzondere punten* van eene kromme lijn of oppervlak zijn zoodanige punten, waar de kromme lijn of het oppervlak in hunnen vorm eene meer of minder in het oogvallende bijzonderheid, eene afwijking van den gewonen vorm vertoont. Deze definitie is echter alles behalve mathematisch, daar de woorden *bijzonder* en *gewoon* veel te vaag van beteekenis zijn om in eene zoodanige definitie gebruikt te kunnen worden. Het kan dan ook geene verwondering baren, dat niet allen hetzelfde onder bijzondere punten verstaan, ofschoon allen van hetzelfde groundbegrip zijn uitgegaan. Wij zullen de zaak zoo algemeen mogelijk opvatten, en bijzondere punten van verschillende orden onderscheiden. Bijzondere punten *van de eerste orde* zullen wij noemen de zoodanige, waar reeds bij de beschouwing van twee naburige punten eener kromme lijn, of van twee naburige punten op iedere doorsnede van een oppervlak eene bijzonderheid wordt opgemerkt. *Van de tweede orde* zullen heeten zoodanige punten, waar men drie punten eener kromme lijn of op iedere doorsnede van een oppervlak in hunne onderlinge rangschikking moet bestudeeren om iets bijzonders te vinden. Bijzondere punten *van de derde, vierde orde* enz. zullen zijn die, waar eerst bij de beschouwing van vier, vijf, enz. punten eene bijzonderheid in hunne rangschikking blijkt. Overigens zal men zich uit den loop onzer beschouwingen kunnen vergewissen, welk begrip wij aan de uitdrukking *Bijzondere punten* gehecht hebben.

Wij stellen ons voor de Analytische kenmerken van de belangrijkste gevallen van Bijzondere punten af te leiden *in het geval van rechthoekige evenwijdige coördinaten*. Heeft men de kenmerken voor dit geval gevonden, dan kan men die voor andere coördinatenstelsels, daaruit afleiden door substitutie van transformatie-formulen

Wij zullen achtereenvolgens behandelen

- I. Bijzondere punten van vlakke kromme lijnen,
- II. Bijzondere punten van oppervlakken,
- III. Bijzondere punten van kromme lijnen in de ruimte.

Bij het opsporen van de analytische kenmerken van Bijzondere punten kan men tweeërlei weg inslaan. Men kan namelijk de Bijzondere punten, die men beschouwen wil, meetkundig definieeren en daarna nagaan, aan welke analytische betrekkingen de vergelijking of vergelijkingen van de kromme of het oppervlak moet voldoen opdat zij zoodanige punten vertoonen, of men kan bijzondere betrekkingen onderstellen tusschen de verschillende uit de vergelijking of vergelijkingen afgeleide grootheden (de partieele differentiaalquotienten van het eerste lid der tot nul herleide vergelijking of vergelijkingen ten opzichte van de coördinaten) en daarna nagaan welke meetkundige bijzonderheden aan de onderstelde analytische bijzonderheden beantwoorden.

Wij zullen in deze verhandeling den laatsten, voor zoover wij weten, nog niet gevolgden weg inslaan. Hierbij dient echter opgemerkt te worden, dat, terwijl iedere vergelijking van den vorm

$$f(x, y) = 0,$$

of

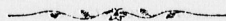
$$f(x, y, z) = 0,$$

of ieder stelsel vergelijkingen van den vorm

$$f(x, y, z) = 0, f'(x, y, z) = 0$$

slechts ééne enkele kromme lijn of één enkel oppervlak voorstelt, het omgekeerde niet het geval is, daar iedere kromme lijn of oppervlak door oneindig veel verschillende vergelijkingen of stelsels van vergelijkingen kan worden voorgesteld. Vooreerst toch hangt de vorm der vergelijking af van de ligging der kromme of van het oppervlak met betrekking tot het coördinatenstelsel, en bovendien stellen alle onderling identieke vergelijkingen of stelsels van vergelijkingen dezelfde kromme of hetzelfde oppervlak voor. Het spreekt echter van zelf, dat, zal eene analytische betrekking eene bijzonderheid in den vorm voorstellen, die betrekking onafhankelijk zal moeten zijn van het aangenomen stelsel van coördinaten, en moeten blijven bestaan bij eene identieke transformatie van de vergelijking of het stelsel vergelijkingen van de kromme of het oppervlak. Onze methode zal nu hierin bestaan, dat wij beginnen met zoodanige betrekkingen op te sporen en daarna de meetkundige beteekenis van die betrekkingen onderzoeken, door een bijzonderen stand van het coördinaten-stelsel aan te nemen, of door de vergelijking of de vergelijkingen in eenen bijzonderen vorm te brengen.

Een element, dat bij de beschouwing van bijzondere punten meer dan ergens anders op den voorgrond treedt, is de orde van aanraking tusschen lijnen en oppervlakken. Wij zullen daarom ieder der gedeelten, waaruit deze verhandeling bestaat bij wijze van inleiding aanvangen met eene definitie van dit begrip voor de soort van uitgebreidheden, die daarin behandeld worden.



I.

BIJZONDERE PUNTEN VAN VLAKKE KROMME LIJNEN.

§ 2. Wanneer men door een punt P eener kromme eene rechte lijn trekt, en uit een nabij gelegen punt A van dezelfde kromme eene loodlijn AB op de rechte lijn neerlaat, die deze in B snijdt; dan zal men altijd een getal ν kunnen vinden, zoodanig dat

$$\lim. \frac{AB}{(PB)^\nu} + 1 \dots \dots \dots (a)$$

eene eindige grootheid is, wanneer men het punt A tot het punt P laat naderen; met andere woorden, dat AP eene grootheid van dezelfde orde is als $(PB)^{\nu+1}$. Ingeval $\nu > 0$ is, zegt men, dat de rechte lijn de kromme aanraakt en daarmede eene aanraking heeft van de ν^{de} orde.

In ieder punt eener kromme, dat niet geheel van de andere punten afgezonderd ligt, zal men altijd minstens ééne zoodanige lijn kunnen vinden, die men de *raaklijn* aan de kromme in dat punt noemt. Wij zullen zien, dat deze in den regel eene aanraking van de eerste orde met de kromme heeft.

Twee krommen raken elkander aan, wanneer zij in een gemeenschappelijk punt eene gemeenschappelijke raaklijn hebben. Zij P het gemeenschappelijk punt, B een in de nabijheid daarvan gelegen punt van de gemeenschappelijke raaklijn, A en A' de punten waar eene loodlijn, op PB in het punt B opgericht, de beide krommen snijdt; dan zullen deze met elkander eene aanraking van de ν^{de} orde hebben, wanneer

$$\lim \frac{AA'}{(PB)^\nu} + 1 \dots \dots \dots (b)$$

eene eindige grootheid is, als PB tot nul nadert.

Wanneer de uitdrukkingen (a) en (b) beide eindige grootheden zijn, zal

$$\lim \frac{A'B}{(PB)^\nu} + 1 \dots \dots \dots (c)$$

insgelijks eene eindige grootheid, of gelijk aan 0 zijn. Hebben dus twee krommen met elkander eene aanraking van de ν^{de} orde, en heeft eene van deze eene aanraking van de μ^{de} orde met de gemeenschappelijke raaklijn, dan heeft ook de andere eene aanraking van dezelfde of van hoogere orde met die raaklijn. Op dezelfde wijze ziet men licht, dat wanneer de aanraking van de eerste kromme met de raaklijn van hoogere orde is dan de aanraking der krommen onderling, laatstgenoemde aanraking van dezelfde orde zal zijn als die van de tweede kromme met de raaklijn; en dat wanneer de aanraking der krommen onderling van

hoogere orde is dan die van eene der krommen met de raaklijn, beide krommen eene aanraking van dezelfde orde met de raaklijn zullen hebben.

Na deze voorafgaande beschouwingen maken wij een aanvang met het eigenlijk onderwerp van dit eerste hoofdstuk, het opsporen van de analytische kenmerken voor bijzondere punten van vlakke krommen, en houden ons in de eerste plaats bezig met de bijzondere punten van de eerste orde.

EERSTE AFDEELING.

Bijzondere punten van de eerste orde.

§ 3. Het is duidelijk, dat men voor het opsporen van bijzondere punten van de eerste orde alleen betrekkingen noodig heeft tusschen de partieele differentiaalquotienten van de eerste orde van het eerste lid der vergelijking

$$f(x, y) = 0, \dots \dots \dots (A)$$

de algemeene vergelijking van vlakke kromme lijnen, daar hier slechts sprake is van de onderlinge rangschikking van twee naburige punten. Bij het onderscheiden van verschillende soorten van punten kunnen ook differentiaalquotienten van hoogere orde te pas komen, omdat daarbij ook andere in de nabijheid gelegene punten in het spel kunnen komen.

Het eerste wat ons dus nu te doen staat is het opsporen van betrekkingen tusschen $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$, die onafhankelijk zijn van het aangenomen coördinatenstelsel, en niet veranderen bij eene indentieke transformatie van (A).

Zij daartoe

$$F(x', y') = 0 \quad (B)$$

de vorm, die de vergelijking der kromme aanneemt door de substitutie van andere coördinaten x', y' in plaats van de oorspronkelijke; dan heeft men

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x'} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx'} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx'}, \\ \frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dy'} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dy'}. \end{aligned} \quad (1)$$

Verder heeft men door de bekende transformatieformulen

$$\begin{aligned} x &= \xi + x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta, \\ y &= \eta + x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (2)$$

te differentieëren

(¹ F zal in het algemeen voorstellen iederen vorm, die het eerste lid der tot nul herleide vergelijking kan aannemen, hetzij door verandering der coördinaten, hetzij door identieke transformatie van de vergelijking. f daarentegen zal zijn de bepaalde vorm, dien men zich voorstelt voor zich te hebben, of dien men zich gegeven denkt. Verder zullen wij uitdrukkingen, uit F afgeleid, voorstellen door de groote letters (P, K, S , enz.), en de overeenkomstige uitdrukkingen, afgeleid uit f , door de overeenkomstige kleine letters (p, k, s , enz.).

$$\frac{dx}{dx'} = \cos \vartheta, \quad \frac{dx}{dy'} = -\sin \vartheta, \quad \frac{dy}{dx} = \sin \vartheta, \quad \frac{dy}{dy'} = \cos \vartheta; \quad \dots \quad (3)$$

dus door substitutie in (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x'} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \vartheta, \\ \frac{\partial F}{\partial y'} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad \dots \quad (4)$$

Stellen wij nu

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = Y; \quad \dots \quad (a)$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \bar{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \bar{y};$$

dan hebben wij door (4) te differentieeren ten opzichte van ϑ

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\vartheta} &= -\bar{x} \sin \vartheta + \bar{y} \cos \vartheta = Y, \\ \frac{dY}{d\vartheta} &= -\bar{x} \cos \vartheta - \bar{y} \sin \vartheta = -X. \end{aligned} \quad \dots \quad (5)$$

Zij nu

$$Y = F(X) \quad \dots \quad (a)$$

eene betrekking onafhankelijk van ϑ , dan moet

$$\frac{dY}{d\vartheta} = \frac{dF}{dX} \frac{dX}{d\vartheta}, \quad \dots \quad (6)$$

of na substitutie van (5) en (a)

$$-X = \frac{dY}{dX} Y \quad \dots \quad (A)$$

zijn. Hiervan is de integraal

$$X^2 + Y^2 = \text{const.}, \quad \dots \quad (I)$$

welke betrekking bij onderzoek werkelijk blijkt onafhankelijk van ϑ te zijn.

§ 4. Het is echter niet genoeg dat de gevonden betrekking onafhankelijk is van de richting der coördinaten: zij moet ook onafhankelijk zijn van den vorm, waarin de vergelijking geschreven is. Alle vergelijkingen nu, welke identiek zijn met (A), zijn begrepen in den vorm

$$F(x, y, z) = \phi \{ \psi(x, y, f(x, y), 0) - \psi(x, y, 0, f(x, y)) \} = 0; \quad \dots \quad (C)$$

waarin ϕ voorstelt eene willekeurige functie van het verschil dat men verkrijgt, wanneer men in eene eveneens willekeurige functie van vier veranderlijken, $\psi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, eerst α door x , β door y , γ door $f(x, y)$ en δ door 0, en daarna α door x , β door y , γ door 0 en δ door $f(x, y)$ vervangt, en de laatste van de eerste aftrekt; met dien verstande, dat $\phi(0) = 0$ is. Wij zullen stellen

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\alpha} &= \psi_1, \quad \frac{d\psi}{d\beta} = \psi_2, \quad \frac{d\psi}{d\gamma} = \psi_3, \quad \frac{d\psi}{d\delta} = \psi_4; \\ \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} &= \psi_{1.1}, \quad \frac{d^2\psi}{d\beta^2} = \psi_{2.2}, \text{ enz. } \dots \quad \frac{d^2\psi}{d\alpha d\beta} = \psi_{1.2}, \quad \frac{d^2\psi}{d\alpha d\gamma} = \psi_{1.3}, \text{ enz. } \dots \quad (B) \\ \frac{d^3\psi}{d\alpha^3} &= \psi_{1.1.1}, \text{ enz. } \dots \quad \frac{d^3\psi}{d\alpha^2 d\beta} = \psi_{1.1.2}, \text{ enz. } \dots \quad \frac{d^3\psi}{d\alpha d\beta d\gamma} = \psi_{1.2.3}, \text{ enz. } \dots; \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

en door een cijfer 1 of 2 boven de ψ geplaatst onderscheiden of α door x , β door y , γ door f en δ door 0, of wel α door x , β door y , γ door 0 en δ door f moet vervangen worden.

Differentieeren wij dan (C) ten opzichte van x en y , dan hebben wij

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} (\psi_3 - \psi_4) + \psi_1 - \psi_2 \right\} \phi', \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} (\psi_3 - \psi_4) + \psi_1 - \psi_2 \right\} \phi'.\end{aligned}\quad (7)$$

Stellen wij nu overal $f(x, y) = 0$, dan vervalt het onderscheid, dat door de boven de ψ geplaatste cijfers is aangeduid; en wanneer wij dan de notatiën (α) gebruiken, en tevens

$$(\psi_3 - \psi_4) \phi' = a \quad (7)$$

stellen, gaan de vergelijkingen (7) over in

$$X = a \bar{x}, \quad Y = a \bar{y} \quad (8)$$

Differentieert men (8) naar a dan heeft men

$$\frac{dX}{da} = \bar{x}, \quad \frac{dY}{da} = \bar{y} \quad (9)$$

Beschouwen wij nu (a) als eene betrekking onafhankelijk van a , dan heeft men door differentieeren

$$\frac{dY}{da} = \frac{dF}{dX} \frac{dX}{da},$$

of na substitutie van (α) en (9)

$$\bar{y} = \frac{dY}{dX} \bar{x}; \quad (10)$$

eindelijk heeft men door dit met a te vermenigvuldigen en (8) te substitueeren

$$Y = \frac{dY}{dX} X, \quad (B)$$

waarvan de integraal is

$$\frac{Y}{X} = \text{const.} \quad (II)$$

Deze vergelijking drukt uit, dat de gezochte betrekking homogeen moet zijn met betrekking tot X en Y . De vergelijking (I) kan echter niet homogeen zijn, tenzij haar tweede lid 0, ∞ of $\circ$ zij; zoodat wij moeten hebben

$$\begin{aligned}X &= 0 \text{ en } Y = 0, \\ X &= \infty \text{ of } Y = \infty, \\ X &= \circ \text{ of } Y = \circ;\end{aligned}$$

of, wat nu hetzelfde is,

$$\bar{x} = 0 \text{ en } \bar{y} = 0, \quad (1) \quad (III)$$

$$\bar{x} = \infty \text{ of } \bar{y} = \infty, \quad (1) \quad (2) \quad (IV)$$

$$\bar{x} = \circ \text{ of } \bar{y} = \circ, \quad (1) \quad (2) \quad (V)$$

§ 5. Beschouwen wij eerst het geval van verg. (III), en maken wij voorloopig de onderstelling, dat geen der differentiaalquotienten, die wij bij onze beschouwingen vermelden, oneindig of onbepaald wordt.

Wanneer Δx en Δy de zeer kleine coördinaten voorstellen van een punt, gelegen in de nabijheid van het beschouwde punt, wanneer dit als oorsprong wordt aangenomen; zal men de vergelijking der kromme in de nabijheid van het beschouwde punt aldus kunnen voorstellen.

(1) Van beide stelsels van vergelijkingen zullen in den regel beide vergelijkingen gelijktijdig plaats hebben; en is dit niet dadelijk het geval, dan zal zulks het geval worden, wanneer men het coördinatenstelsel laat draaien om eenen hoek, die geen veelvoud is van $\frac{1}{2} \pi$.

(2) Wanneer $a = 0$ of $= \infty$ of $= \circ$ is, kan het gebeuren, dat men bij eene transformatie van de vergelijking van een dezer gevallen in een ander overgaat.

$f(\Delta x, \Delta y) = f(0, 0) + \bar{x} \Delta x + \bar{y} \Delta y + \frac{p(\Delta x)^2 + 2q\Delta x \Delta y + r(\Delta y)^2}{1 \cdot 2} + R = 0, (D)$
 waarin R de som der termen voorstelt, die van hoogere orde zijn dan $(\Delta x)^2$ en $(\Delta y)^2$, en waarin gesteld is

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = p, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = r. \quad \dots \dots \dots (\delta)$$

Men heeft echter

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0, 0) = 0,$$

en in het hier beschouwde geval bovendien

$$\bar{x} = \bar{y} = 0;$$

waardoor bovenstaande vergelijking overgaat in

$$\frac{p(\Delta x)^2 + 2q\Delta x \Delta y + r(\Delta y)^2}{2} + R = 0. \quad \dots \dots \dots (D')$$

Voor iedere waarde van Δx zal men dus in het algemeen twee waarden van Δy kunnen vinden, die echter ook onbestaanbaar kunnen zijn; waaruit volgt, dat in het beschouwde punt twee takken der kromme elkander snijden, of dat in de nabijheid van het beschouwde punt geene andere punten der kromme voorkomen. In het eerste geval noemt men het punt een *dubbelpunt*, in het tweede een *afgezonderd* of *geïsoleerd punt*.

De waarden van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uit (D') verschillen slechts weinig van die uit de vergelijking

$$p(\Delta x)^2 + 2q\Delta x \Delta y + r(\Delta y)^2 = 0, \quad \dots \dots \dots (D'')$$

en worden voor $\Delta x = 0$ daaraan geheel gelijk.

De beide krommen, voorgesteld door (D') en (D''), zullen dus elkander aanraken. De laatste vergelijking stelt echter niets anders voor dan twee rechte lijnen of een enkel punt. In het eerste geval zal dus de vergelijking (D'') de beide raaklijnen voorstellen, die in het geval van een dubbelpunt in dat punt aan de kromme getrokken kunnen worden.

De waarden van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uit (D'') zijn blijkbaar onafhankelijk van Δx , en stellen voor de tangenten van de hoeken, die de raaklijnen maken met de x as. Hetzelfde zal dus gelden van de waarden van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uit (D), voor $\Delta x = 0$. Overigens is het duidelijk, dat deze waarden niets anders zijn dan de waarden van $\frac{dy}{dx}$.

§ 6. Ter onderscheiding van de verschillende gevallen, zal het noodig zijn de hulp in te roepen van de partieele differentiaalquotienten van de tweede orde. Trachten wij dus ook daartusschen betrekkingen te vinden, onafhankelijk van de richting der coördinaten en van den vorm der vergelijking.

Door de vergelijkingen (1) op nieuw te differentieeren vinden wij, als wij de notatiën (δ) en de volgende gebruiken

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = P, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = Q, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = R, \quad \dots \dots \dots (\epsilon)$$

deze vergelijkingen

$$\begin{aligned} P &= p \left(\frac{dx}{dx'} \right)^2 + 2q \frac{dx}{dx'} \frac{dy}{dx'} + r \left(\frac{dy}{dx'} \right)^2, \\ Q &= p \frac{dx}{dy'} \frac{dx}{dx'} + q \left(\frac{dx}{dx'} \frac{dy}{dy'} + \frac{dx}{dy'} \frac{dy}{dx'} \right) + r \frac{dy}{dx'} \frac{dy}{dy'}, \quad \dots \dots \dots (11) \\ R &= p \left(\frac{dx}{dy'} \right)^2 + 2q \frac{dx}{dy'} \frac{dy}{dy'} + r \left(\frac{dy}{dy'} \right)^2, \end{aligned}$$

of na substitutie van (3)

$$\begin{aligned} P &= p \cos^2 \vartheta + 2 q \sin \vartheta \cos \vartheta + r \sin^2 \vartheta, \\ Q &= -p \sin \vartheta \cos \vartheta + q (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + r \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \dots \quad (12) \\ R &= p \sin^2 \vartheta - 2 q \sin \vartheta \cos \vartheta + r \cos^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Differentieert men deze vergelijkingen naar ϑ , dan heeft men

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\vartheta} &= -2 p \cos \vartheta \sin \vartheta + 2 q (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + 2 r \sin \vartheta \cos \vartheta = 2 Q, \\ \frac{dQ}{d\vartheta} &= p (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) - 4 q \sin \vartheta \cos \vartheta + r (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) = R - P, \quad \dots \quad (13) \\ \frac{dR}{d\vartheta} &= 2 p \cos \vartheta \sin \vartheta - 2 q (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) - 2 r \sin \vartheta \cos \vartheta = -2 Q. \end{aligned}$$

Zij nu

$$Q = F(P, R) \quad \dots \quad (b)$$

eene betrekking onafhankelijk van ϑ , dan moet

$$\frac{dQ}{d\vartheta} = \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{d\vartheta} \quad \dots \quad (14)$$

zijn; waaruit men door substitutie van (13) en (b) de volgende partieele differentiaalvergelijking afleidt

$$R - P = 2 \frac{\partial Q}{\partial P} Q - 2 \frac{\partial Q}{\partial R} Q \quad \dots \quad (C)$$

De integraal van deze vergelijking is

$$f(P + R, Q^2 - PR) = 0. \quad (1. \quad \dots \quad (VI)$$

Nog rest ons te onderzoeken, welke vorm de functie f moet hebben om onafhankelijk te zijn van den vorm der vergelijking. Daartoe differentieeren wij de vergelijkingen (7) nog eenmaal, en vinden

$$\begin{aligned} P &= \left\{ p (\psi_3 - \psi_4) + (\bar{x})^2 (\psi_{3,3} - \psi_{4,4}) + 2 \bar{x} (\psi_{3,1} - \psi_{4,1}) + \psi_{1,1} - \psi_{1,1} \right\} \phi' + \\ &\quad + \left\{ \bar{x} (\psi_3 - \psi_4) + \psi_1 - \psi_1 \right\}^2 \phi'', + \\ Q &= \left\{ q (\psi_3 - \psi_4) + \bar{x} \bar{y} (\psi_{3,3} - \psi_{4,4}) + \bar{x} (\psi_{3,2} - \psi_{4,2}) + \bar{y} (\psi_{3,1} - \psi_{4,1}) + \psi_{1,2} - \psi_{1,2} \right\} \phi' + \\ &\quad + \left\{ \bar{x} (\psi_3 - \psi_4) + \psi_1 - \psi_1 \right\} \left\{ \bar{y} (\psi_3 - \psi_4) + \psi_2 - \psi_2 \right\} \phi'', \quad (15) \\ R &= \left\{ r (\psi_3 - \psi_4) + (\bar{y})^2 (\psi_{3,3} - \psi_{4,4}) + 2 \bar{y} (\psi_{3,1} - \psi_{4,1}) + \psi_{2,2} - \psi_{2,2} \right\} \phi' + \\ &\quad + \left\{ \bar{y} (\psi_3 - \psi_4) + \psi_2 - \psi_2 \right\}^2 \phi''. \end{aligned}$$

Stellen wij nu in (15) $f(x, y) = 0$ en $\bar{x} = \bar{y} = 0$, dan gaan deze vergelijkingen over in

$$P = a p, \quad Q = a q, \quad R = a r. \quad (2. \quad \dots \quad (16)$$

Differentieert men deze naar a , dan heeft men

$$\frac{dP}{da} = p, \quad \frac{dQ}{da} = q, \quad \frac{dR}{da} = r \quad \dots \quad (17)$$

Beschouwen wij (b) nu als eene betrekking onafhankelijk van a , en differentieeren wij, dan komt er

$$\frac{dQ}{da} = \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{da} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{da}; \quad \dots \quad (18)$$

waaruit door substitutie van (b) en (17) volgt

(¹ Zie het aanhangsel.

(² Altijd in de onderstelling, dat noch ϕ' noch eene der andere coëfficiënten van $\bar{x}$ en $\bar{y}$ oneindig zijn.

$$q = \frac{\partial Q}{\partial P} p + \frac{\partial Q}{\partial R} r \dots \dots \dots (19)$$

Vermenigvuldigt men dan deze vergelijking met a , en substitueert (17), dan vindt men

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial P} P + \frac{\partial Q}{\partial R} R, \dots \dots \dots (D)$$

eene partieele differentiaalvergelijking, die uitdrukt dat de gezochte betrekking homogeen moet zijn. In plaats van (VI) hebben wij dus

$$\frac{Q^2 - PR}{(P + R)^2} = \text{const.} = \frac{q^2 - pr}{(p + r)^2} \dots \dots \dots (VII)$$

§ 7. Neemt men nu het coördinatenstelsel zoodanig aan, dat $p = 0$ wordt, dan gaat (D') over in

$$2 q \Delta x \Delta y + r(\Delta y)^2 = 0. \dots \dots \dots (D'')$$

Men ziet, dat nu eene van de raaklijnen met de x as samenvalt, en dat de tangens van den hoek, dien de andere met de x as maakt, gelijk is aan $-\frac{2q}{r}$. Hieruit volgt, dat, wanneer ω den hoek voorstelt tusschen de beide raaklijnen, men zal hebben

$$tg \omega = -\frac{2q}{r} \dots \dots \dots (20)$$

De uitdrukking $\frac{2q}{r}$ is echter voor $p = 0$ hetzelfde als $\pm \frac{2\sqrt{(q^2 - pr)}}{p + r}$, en daar deze uitdrukking van het coördinatenstelsel onafhankelijk is, zal men in het algemeen hebben

$$tg^2 \omega = \frac{4(q^2 - pr)}{(p + r)^2}, \dots \dots \dots (VIII)$$

waarin ω den hoek tusschen de raaklijnen voorstelt.

De onderstelling $p = 0$ is echter alleen mogelijk, wanneer $q^2 - pr$ positief is. In het tegenovergestelde geval toch zou de met $p = 0$ overeenkomende waarde van q^2 negatief en dus q onbestaanbaar zijn.

Hieruit volgt, dat het punt een dubbelpunt zal zijn, wanneer $q^2 - pr$ positief is, en een afgezonderd punt, wanneer die uitdrukking negatief is. Is in het eerste geval

$$p \mp r = 0, \dots \dots \dots (IX)$$

dan staan de beide raaklijnen der kromme loodrecht op elkander.

In het geval

$$q^2 - pr = 0. \dots \dots \dots (X)$$

heeft men blijkens (VIII)

$$tg \omega = 0.$$

In dit geval vallen de beide raaklijnen samen, en raken dus de beide takken der kromme elkander aan. Wij zullen in het vervolg den vorm der kromme in dit geval nagaan, en zien, dat die vorm verschillende bijzonderheden vertoonen kan.

Hadden de vergelijkingen (IX) en (X) tegelijk plaats, dan zou men noodzakelijk moeten hebben

$$p = q = r = 0 \dots \dots \dots (XI)$$

In dit geval zou men, de redeneering van § 5 volgende, gemakkelijk vinden, dat de kromme in het beschouwde punt in het algemeen drie takken vertoont, waarvan er echter ook twee onbestaanbaar kunnen zijn. Het beschouwde punt is dus in dit geval een drievoudig punt of een afgezonderd punt, liggende op een bestaanbaren doorlopenden tak der kromme. Ook op dit geval komen wij terug.

Wanneer men de vergelijking (A) naar y oplost, dan zullen er onder de wortels, die functien van x zijn, twee moeten zijn, die voor x_1 (de waarde van x , die met het beschouwde punt overeenkomt) gelijk worden aan y_1 (de overeenkomstige waarde van y .) Onder de factoren van den vorm $y - f(x)$, waarin

(A) ontbonden kan worden, zijn er dus twee, die voor $x = x_1$ en $y = y_1$ gelijk aan 0 worden. Wanneer wij dus door de andere factoren deelen, kunnen wij (A) onder den vorm

$$(y - f_1(x))(y - f_2(x)) = 0 \quad \dots \quad (E)$$

brengen. Door differentieeren vinden wij hieruit

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -f_1'(x)(y - f_2(x)) - f_2'(x)(y - f_1(x)), & \bar{y} &= 2y - f_1(x) - f_2(x), \\ p &= -f_1''(x)(y - f_2(x)) - f_2''(x)(y - f_1(x)) + 2f_1'(x)f_2'(x), & q &= -f_1'(x) - f_2'(x), & r &= 2. \end{aligned} \quad (21)$$

$f_1'(x)$ en $f_2'(x)$ zijn voor $x = x_1$ blijkbaar niets anders dan de twee waarden, die y' in het beschouwde punt kan aannemen. Wanneer wij dus in (21) $x = x_1$, $y = y_1$ stellen, hebben wij

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0, \quad p = 2y_1'y_2', \quad q = -(y_1' + y_2'), \quad r = 2 \quad \dots \quad (22)$$

De substitutie hiervan in (VII) geeft

$$\frac{Q^2 - PR}{P + R} = \frac{q^2 - pr}{(p + r)^2} = \frac{(y_1' - y_2')^2}{4(1 + y_1'y_2')} = \frac{1}{4} tg^2 \omega,$$

waardoor de boven gevonden uitkomst bevestigd wordt.

§ 8. Ter verdere onderscheiding is het noodzakelijk betrekkingen op te sporen tusschen de partieele differentiaalquotienten van de derde orde, al of niet met die van de tweede orde verbonden. Daartoe differentieeren wij de vergelijkingen (11) op nieuw, waardoor wij bekomen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial x'^3} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \left(\frac{dx}{dx'} \right)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{dx}{dx'} \right)^2 \frac{dy}{dx'} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \frac{dx}{dx'} \left(\frac{dy}{dx'} \right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(\frac{dy}{dx'} \right)^3, \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x'^2 \partial y'} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \left(\frac{dx}{dx'} \right)^2 \frac{dx}{dy'} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \left\{ 2 \frac{dx}{dx'} \frac{dy}{dx'} \frac{dx}{dy'} + \left(\frac{dx}{dx'} \right)^2 \frac{dy}{dy'} \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \left\{ 2 \frac{dx}{dx'} \frac{dy}{dx'} \frac{dy}{dy'} + \left(\frac{dy}{dx'} \right)^2 \frac{dx}{dy'} \right\} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(\frac{dy}{dx'} \right)^2 \frac{dx}{dy'}, \quad \dots \quad (23) \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x' \partial y'^2} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{dx}{dx'} \left(\frac{dy}{dy'} \right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \left\{ 2 \frac{dx}{dy'} \frac{dy}{dy'} \frac{dx}{dx'} + \left(\frac{dx}{dy'} \right)^2 \frac{dy}{dx'} \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \left\{ 2 \frac{dx}{dy'} \frac{dy}{dy'} \frac{dy}{dx'} + \left(\frac{dy}{dy'} \right)^2 \frac{dx}{dx'} \right\} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(\frac{dy}{dy'} \right)^2 \frac{dy}{dx'}, \\ \frac{\partial^3 F}{\partial y'^3} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \left(\frac{dx}{dy'} \right)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{dx}{dy'} \right)^2 \frac{dy}{dy'} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \frac{dx}{dy'} \left(\frac{dy}{dy'} \right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(\frac{dy}{dy'} \right)^3; \end{aligned}$$

of, als wij de volgende notatiën invoeren,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} &= K, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = L, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = M, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = N; \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= k, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = l, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = m, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = n; \quad \dots \quad (\zeta) \end{aligned}$$

en de vergelijkingen (3) substitueeren,

$$\begin{aligned} K &= k \cos^3 \vartheta + 3l \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + 3m \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + n \sin^3 \vartheta, \\ L &= -k \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + l(\cos^3 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) - m(\sin^3 \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) + n \sin^2 \vartheta \cos \vartheta, \\ M &= k \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + l(\sin^3 \vartheta - 2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) + m(\cos^3 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) + n \cos^2 \vartheta \sin \vartheta, \\ N &= -k \sin^3 \vartheta + 3l \sin^2 \vartheta \cos \vartheta - 3m \sin \vartheta \cos^2 \vartheta + n \cos^3 \vartheta. \end{aligned} \quad (24)$$

Differentieert men deze vergelijkingen naar ϑ , dan heeft men

$$\begin{aligned} \frac{dK}{d\vartheta} &= -3k \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + 3l(\cos^3 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) - 3m(\sin^3 \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) + 3n \sin^2 \vartheta \cos \vartheta = 3L, \\ \frac{dL}{d\vartheta} &= k(2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta - \cos^3 \vartheta) - l(7 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - 2 \sin^3 \vartheta) - m(7 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta - 2 \cos^3 \vartheta) + n(2 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta - \sin^3 \vartheta) = 2M - K, \\ \frac{dM}{d\vartheta} &= k(2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta) + l(7 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta - 2 \cos^3 \vartheta) - m(7 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - 2 \sin^3 \vartheta) - n(2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta - \cos^3 \vartheta) = N - 2L, \\ \frac{dN}{d\vartheta} &= -3k \sin^2 \vartheta \cos \vartheta - 3l(\sin^3 \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) - 3m(\cos^3 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta) - 3n \cos^2 \vartheta \sin \vartheta = -3M, \end{aligned} \quad (25)$$

Is nu $N = F(P, Q, R, K, L, M) \dots \dots \dots (c)$
 eene betrekking onafhankelijk van $\mathfrak{S}$, dan moet

$$\frac{dN}{d\mathfrak{S}} = \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{d\mathfrak{S}} \dots \dots \dots (26)$$

zijn, waaruit door substitutie van (13), (25) en (c) volgt:

$$-3M = 2 \frac{\partial N}{\partial P} Q + \frac{\partial N}{\partial Q} (R-P) - 2 \frac{\partial N}{\partial R} Q + 3 \frac{\partial N}{\partial K} L + \frac{\partial N}{\partial L} (2M-K) + \frac{\partial N}{\partial M} (N-2L), \dots \dots (E)$$

eene partieele differentiaalvergelijking, welker integraal is

$$\mathfrak{f}[P+R, Q^2-PR, (K+M)^2+(L+N)^2, L^2-KM+M^2-LN, \\ 4(L^2-KM)(M^2-LN)-(KL-LM)^2, 2Q\{(M^2-LN)-(L^2-KM)\}-(P-R)(KN-LM)]=0 \dots (XII)$$

§ 9. Door de vergelijkingen (15) nogmaals te differentieeren vinden wij

$$K = \left\{ k(\psi_3 - \psi_4) + 3p\bar{x}(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 3p(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + (\bar{x})^3(\psi_{3.3.3} - \psi_{4.4.4}) + 3(\bar{x})^2(\psi_{3.3.1} - \psi_{4.4.1}) + \right. \\ \left. + 3\bar{x}(\psi_{3.1.1} - \psi_{4.1.1}) + \psi_{1.1.1} - \psi_{1.1.1} \right\} \phi' + 3 \left\{ p(\psi_3 - \psi_4) + (\bar{x})^2(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 2\bar{x}(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + \right. \\ \left. + \psi_{1.1} - \psi_{1.1} \right\} \left\{ \bar{x}(\psi_3 - \psi_4) + \psi_1 - \psi_1 \right\} \phi'' + \left\{ \bar{x}(\psi_3 - \psi_4) + \psi_1 - \psi_1 \right\}^3 \phi''', \\ L = \left\{ l(\psi_3 - \psi_4) + 2q\bar{x}(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 2p\bar{y}(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 2q(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + p(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + (\bar{x})^2\bar{y}(\psi_{3.3.3} - \psi_{4.4.4}) + \right. \\ \left. + 2x\bar{y}(\psi_{3.3.1} - \psi_{4.4.1}) + (\bar{x})^2(\psi_{3.3.2} - \psi_{4.4.2}) + 2\bar{x}(\psi_{3.2.1} - \psi_{4.2.1}) + \bar{y}(\psi_{3.1.1} - \psi_{4.1.1}) + \psi_{2.1.1} - \psi_{2.1.1} \right\} \phi' + \\ + 2 \left\{ q(\psi_3 - \psi_4) + \bar{x}\bar{y}(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + \bar{x}(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + \bar{y}(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + \psi_{2.1} - \psi_{2.1} \right\} \left\{ \bar{x}(\psi_3 - \psi_4) + \right. \\ \left. + \psi_1 - \psi_1 \right\} \phi'' + \left\{ p(\psi_3 - \psi_4) + (\bar{x})^2(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 2\bar{x}(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + \psi_{1.1} - \psi_{1.1} \right\} \left\{ \bar{y}(\psi_3 - \psi_4) + \right. \\ \left. + \psi_2 - \psi_2 \right\} \phi'' + \left\{ \bar{x}(\psi_3 - \psi_4) + \psi_1 - \psi_1 \right\}^2 \left\{ \bar{y}(\psi_3 - \psi_4) - \psi_2 - \psi_2 \right\} \phi''', \\ M = \left\{ m(\psi_3 - \psi_4) + 2q\bar{y}(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + r(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 2q(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + r(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + \bar{x}(\bar{y})^2(\psi_{3.3.3} - \psi_{4.4.4}) + \right. \\ \left. + 2\bar{x}\bar{y}(\psi_{3.3.2} - \psi_{4.4.2}) + (\bar{y})^2(\psi_{3.3.1} - \psi_{4.4.1}) + 2\bar{y}(\psi_{3.2.1} - \psi_{4.2.1}) + \bar{x}(\psi_{3.2.2} - \psi_{4.2.2}) + \psi_{2.2.1} - \psi_{2.2.1} \right\} \phi' + \\ + 2 \left\{ q(\psi_3 - \psi_4) + \bar{x}\bar{y}(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + \bar{y}(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + \bar{x}(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + \psi_{2.1} - \psi_{2.1} \right\} \left\{ \bar{y}(\psi_3 - \psi_4) + \right. \\ \left. + \psi_2 - \psi_2 \right\} \phi'' + \left\{ r(\psi_3 - \psi_4) + (\bar{y})^2(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 2\bar{y}(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + \psi_{2.2} - \psi_{2.2} \right\} \left\{ \bar{x}(\psi_3 - \psi_4) + \right. \\ \left. + \psi_1 - \psi_1 \right\} \phi'' + \left\{ \bar{y}(\psi_3 - \psi_4) + \psi_2 - \psi_2 \right\}^2 \left\{ \bar{x}(\psi_3 - \psi_4) + \psi_1 - \psi_1 \right\} \phi''', \\ N = \left\{ n(\psi_3 - \psi_4) + 3r\bar{y}(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 3r(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + (\bar{y})^3(\psi_{3.3.3} - \psi_{4.4.4}) + 3(\bar{y})^2(\psi_{3.3.2} - \psi_{4.4.2}) + \right. \\ \left. + 3\bar{y}(\psi_{3.2.2} - \psi_{4.2.2}) + \psi_{2.2.2} - \psi_{2.2.2} \right\} \phi' + 3 \left\{ r(\psi_3 - \psi_4) + (\bar{y})^2(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 2\bar{y}(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + \right. \\ \left. + \psi_{2.2} - \psi_{2.2} \right\} \left\{ \bar{y}(\psi_3 - \psi_4) + \psi_2 - \psi_2 \right\} \phi'' + \left\{ \bar{y}(\psi_3 - \psi_4) + \psi_2 - \psi_2 \right\}^3 \phi'''. \quad (27)$$

Wanneer wij in deze vergelijkingen $f(x, y) = 0$ en $\bar{x} = \bar{y} = 0$ stellen, het eerste door de indices boven de ψ weg te laten, en bovendien de volgende verkortingen invoeren:

$$(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) \phi' = \mathbf{c}, (\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) \phi' = \mathbf{d}; \dots \dots \dots (n)$$

dan gaan zij over in

$$\begin{aligned} K &= \mathbf{a}k + 3\mathbf{c}p, \\ L &= \mathbf{a}l + 2\mathbf{c}q + \mathbf{d}p, \\ M &= \mathbf{a}m + 2\mathbf{d}q + \mathbf{c}r, \\ N &= \mathbf{a}n + 3\mathbf{d}r. \end{aligned} \dots \dots \dots (28)$$

Differentiëren wij deze vergelijkingen, benevens (16) naar **a**, **c** en **d**, die alle drie volkomen onafhankelijk van elkander zijn ¹⁾, dan hebben wij

$$\begin{aligned}\frac{dP}{da} &= p, \quad \frac{dQ}{da} = q, \quad \frac{dR}{da} = r, \quad \frac{dK}{da} = k, \quad \frac{dL}{da} = l, \quad \frac{dM}{da} = m, \quad \frac{dN}{da} = n, \\ \frac{dP}{dc} &= 0, \quad \frac{dQ}{dc} = 0, \quad \frac{dR}{dc} = 0, \quad \frac{dK}{dc} = 3p, \quad \frac{dL}{dc} = 2q, \quad \frac{dM}{dc} = r, \quad \frac{dN}{dc} = 0, \quad \dots \dots (29) \\ \frac{dP}{dd} &= 0, \quad \frac{dQ}{dd} = 0, \quad \frac{dR}{dd} = 0, \quad \frac{dK}{dd} = 0, \quad \frac{dL}{dd} = p, \quad \frac{dM}{dd} = 2q, \quad \frac{dN}{dd} = 3r.\end{aligned}$$

Beschouwen wij nu (c) als eene betrekking onafhankelijk van den vorm der vergelijking, dan hebben wij door haar naar **a**, **c** en **d** te differentieëren

$$\begin{aligned}\frac{dN}{da} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{da} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{da} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{da} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{da} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{da} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{da}, \\ \frac{dN}{dc} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{dc} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{dc} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{dc} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{dc} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{dc} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{dc}, \dots \dots (30) \\ \frac{dN}{dd} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{dd} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{dd} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{dd} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{dd} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{dd} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{dd};\end{aligned}$$

welke vergelijkingen door substitutie van (c) en (29) overgaan in

$$n = \frac{\partial N}{\partial P} p + \frac{\partial N}{\partial Q} q + \frac{\partial N}{\partial R} r + \frac{\partial N}{\partial K} k + \frac{\partial N}{\partial L} l + \frac{\partial N}{\partial M} m, \dots \dots (31)$$

$$0 = 3 \frac{\partial N}{\partial K} p + 2 \frac{\partial N}{\partial L} q + \frac{\partial N}{\partial M} r, \dots \dots (32)$$

$$3r = \frac{\partial N}{\partial L} p + 2 \frac{\partial N}{\partial M} q. \dots \dots (33)$$

Vermenigvuldigt men deze drie vergelijkingen met **a**, dan heeft men, lettende op (28) en (16),

$$\begin{aligned}N &= \frac{\partial N}{\partial P} P + \frac{\partial N}{\partial Q} Q + \frac{\partial N}{\partial R} R + \frac{\partial N}{\partial K} K + \frac{\partial N}{\partial L} L + \frac{\partial N}{\partial M} M + \frac{c}{a} \left(-3 \frac{\partial N}{\partial K} P - 2 \frac{\partial N}{\partial L} Q - \frac{\partial N}{\partial M} R \right) + \\ &+ \frac{d}{a} \left(3R - \frac{\partial N}{\partial L} P - 2 \frac{\partial N}{\partial M} Q \right), \dots \dots (34)\end{aligned}$$

$$0 = 3 \frac{\partial N}{\partial K} P + 2 \frac{\partial N}{\partial L} Q + \frac{\partial N}{\partial M} R, \dots \dots (F)$$

$$3R = \frac{\partial N}{\partial R} P + 2 \frac{\partial N}{\partial M} Q.$$

Ten gevolge van (F) gaat (34) over in

$$N = \frac{\partial N}{\partial P} P + \frac{\partial N}{\partial Q} Q + \frac{\partial N}{\partial R} R + \frac{\partial N}{\partial K} K + \frac{\partial N}{\partial L} L + \frac{\partial N}{\partial M} M. \dots \dots (G)$$

§ 10. De vergelijking (G) drukt uit, dat de gezochte betrekking homogeen moet zijn. Van de vergelijkingen (F) zijn de respectieve integralen

$$\begin{aligned}f_1(P, Q, R, N, 2QK - 3PL, RL - 2QM) &= 0, \\ f_2(P, Q, R, K, 2QN - 3RM, PM - 2QL) &= 0, \dots \dots (XIII)\end{aligned}$$

(¹ Men kan namelijk altijd eene functie χ vinden van x en y zoodanig, dat voor $x = x_1$, $y = y_1$, die functie $\chi = a$, $\frac{\partial \chi}{\partial x} = c$, $\frac{\partial \chi}{\partial y} = d$ wordt. Hieraan voldoet b. v. $\chi = a + (x - x_1) c + (y - y_1) d$. De uitdrukkingen $\psi_{3.1} - \psi_{4.1}$ en $\psi_{3.2} - \psi_{4.2}$ zijn echter niets anders dan de partieele differentiaalquotienten ten opzichte van x en y van $\psi_3 - \psi_4$. De factor ϕ' verhindert natuurlijk de onafhankelijkheid niet.

Gelukt het ons nu vijf onderling onafhankelijke uitdrukkingen te vinden, die in het eerste lid van elke der beide vergelijkingen (XIII) begrepen zijn, dan zal eene willekeurige functie van deze vijf uitdrukkingen, gelijk aan 0 gesteld, de meest algemeene integraal van het stelsel differentiaalvergelijkingen (F) zijn. ⁽¹⁾ Hieraan voldoen natuurlijk in de eerste plaats P , Q en R , en vervolgens de beide uitdrukkingen

$$KR^2 + 2 PQN - 3 PRM = KR^2 + P(2 QN - 3 RM) = \frac{3 PR(LR - 2 QM) + R^2(2 QK - PK)}{2 Q} + 2 PQN,$$

$$NP^2 + 2 QRK - 3 PRL = NP^2 + R(2 QK - 3 PL) = \frac{3 PR(MP - 2 QL) + P^2(2 QN - 3 RM)}{2 Q} + 2 QRK.$$

De gezochte betrekking is dus, als wij deze uitdrukkingen door S en T voorstellen,

$$f(P, Q, R, S, T) = 0. \dots \dots \dots (XIV)$$

Deze betrekking is nu onafhankelijk van den vorm der vergelijking; de gezochte betrekking moet echter ook van de richting der coördinaten onafhankelijk zijn. Eene willekeurige functie van vier grootheden van den vorm van het eerste lid van (XIV) en tegelijk van dien van het eerste lid van (XII) zou de meest algemeene uitdrukking van dien aard zijn. Het zou echter niet gemakkelijk zijn, zoodanige uitdrukking op het oog te vinden. Wij slaan dus een anderen weg in, en schrijven daartoe (XIV) onder den vorm

$$Q = F(P, R, S, T), \dots \dots \dots (d)$$

welke betrekking wij onafhankelijk van de richting der coördinaten veronderstellen. Door naar S te differentieeren, hebben wij dan

$$\frac{dQ}{dS} = \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{dS} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{dS} + \frac{\partial F}{\partial S} \frac{dS}{dS} + \frac{\partial F}{\partial T} \frac{dT}{dS} \dots \dots \dots (35)$$

Hierin hebben wij nu te substitueeren de verg. (d) en (13) benevens de beide volgende:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dS} &= -2T + \frac{2QS - RT}{P} = -\frac{2PT + QT - 2QS}{P}, \\ \frac{dT}{dS} &= 2S - \frac{2QT - PS}{R} = \frac{2RP + QS - 2RT}{R}, \end{aligned} \dots \dots \dots (36)$$

die men vindt door de waarden van S en T naar S te differentieeren, de vergelijkingen (13) en (25) te substitueeren, en daarna weder S en T in te voeren. Zoodoende zal men bekomen

$$R - P = 2Q \frac{\partial Q}{\partial P} - 2Q \frac{\partial Q}{\partial R} - \frac{2PT + QT - 2QS}{P} \frac{\partial Q}{\partial S} + \frac{2RT + QS - 2RT}{R} \frac{\partial Q}{\partial T} \dots \dots (H)$$

Van deze partieele differentiaalvergelijking is de integraal

$$\begin{aligned} f \left[P + R, Q^2 - PR, \frac{PS^2 - 2QST + RT^2}{PR}, \frac{(P^4 + 3P^2R^2 + 4R^2Q^2)S^2 - 4Q(P^3 + R^3)ST + (R^4 + 3P^2R^2 + 4P^2Q^2)T^2}{P^2R^2} \right] &= 0 = \dots \dots \dots (XV) \\ = f \left[p + r, q^2 - pr, \frac{ps^2 - 2qst + rt^2}{pr}, \frac{(p^4 + 3p^2r^2 + 4r^2q^2)s^2 - 4q(p^3 + r^3)st + (r^4 + 3p^2r^2 + 4p^2q^2)t^2}{p^2r^2} \right] &.^{2)} \end{aligned}$$

§ 11. De beteekenis van de uitdrukking $\frac{q^2 - pr}{(p + r)^2}$ hebben wij boven reeds gevonden. Zoeken wij thans de beteekenis van de andere homogene betrekkingen tusschen de uitdrukkingen, die in (XV) voorkomen.

¹⁾ Zie het aanhangsel.

²⁾ Hierin zijn s en t op dezelfde wijze uit p , q , r , k , l , m en n gevormd als S en T uit P , Q , R , K , L , M en N .

Om daartoe te geraken, differentieeren wij de vier laatste vergelijkingen (21) nog eenmaal, waardoor wij bekomen

$$k = -f_1'''(x)[y - f_2(x)] - f_2'''(x)[y - f_1(x)] + 3f_1''(x)f_2'(x) + 3f_2''(x)f_1'(x), l = -f_1'''(x), m = 0, n = 0. \quad (37)$$

Stellen wij nu hierin

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad f'(x) = y', \quad f''(x) = y''$$

dan hebben wij

$$k = 3(y_1'y_2'' + y_2'y_1''), \quad l = -(y_1'' + y_2''), \quad m = 0, \quad n = 0 \quad \dots \quad (38)$$

Substitueeren wij nu (22) en (38) in de uitdrukkingen voor s en t , dan vinden wij

$$s = 12(y_1'y_2'' + y_2'y_1'') \quad t = -12(y_1'^2 y_2'' + y_2'^2 y_1'') \quad \dots \quad (39)$$

en, wanneer wij dit weder overbrengen in de beide laatste uitdrukkingen in (XV), die wij respectievelijk door S en T willen voorstellen,

$$S = -72(y_1' - y_2')^2 y_1'' y_2'', \quad T = 144 \{ (1 + y_1'^2)^3 y_2''^2 + 2(1 + y_1' y_2')^3 y_1'' y_2'' + (1 + y_2'^2)^3 y_1''^2 \} \quad (40)$$

Hierbij kunnen wij nog voegen

$$q^2 - pr = Q = (y_1' - y_2')^2, \quad p + r = P = 2(1 + y_1' y_2') \quad \dots \quad (41)$$

$$\text{Men heeft nu } P^2 + 4Q = 4(1 + y_1'^2)(1 + y_2'^2); \quad \dots \quad (42)$$

dus

$$-\frac{S}{Q(P^2 + 4Q)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y_1'' y_2''}{(1 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}} (1 + y_2'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}, \quad \dots \quad (XVI)$$

wanneer ρ_1 en ρ_2 de kromtestralen van de beide takken der kromme zijn. Eene tweede betrekking tusschen die kromtestralen vindt men door de volgende verbinding der grootheden P , Q , S en T .

$$2 \frac{2TQ + P^3 S}{9Q(P^2 + 4Q)^3} = \frac{(1 + y_1'^2)^3 y_2''^2 + (1 + y_2'^2)^3 y_1''^2}{(1 + y_1'^2)^3 (1 + y_2'^2)^3} = \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \quad \dots \quad (XVII)$$

De vergelijking (XV) heeft dus dezelfde beteekenis als deze

$$\chi(\omega, \rho_1, \rho_2) = 0.$$

Is

$$S = \frac{ps - 2qst + rt^2}{pq} = 0 \quad \dots \quad (XVIII)$$

dan moet, wanneer, zoo als wij hier veronderstellen $q^2 - pr \geq 0$ is, eene der grootheden ρ_1 en ρ_2 oneindig zijn. Van een van de takken der kromme gaat dus de kromtecirkel in eene rechte lijn over. De kromtecirkel heeft echter met dien tak der kromme, waarbij hij behoort, eene aanraking van de tweede orde; die tak heeft dus in dit geval eene aanraking van de tweede orde met eene rechte lijn. Een punt, waar een doorlopende tak eener kromme eene aanraking van eene andere dan de eerste orde met de raaklijn heeft, noemen wij een *buigpunt*, en wel een *buigpunt van de eerste soort*, wanneer de kromme in dat punt de raaklijn doorsnijdt, en een *buigpunt van de tweede soort*, wanneer dit niet het geval is. Wanneer de aanraking, zoo als hier in het algemeen het geval is, van de tweede orde is, en men de raaklijn als x -as en het beschouwde punt als oorsprong aanneemt, zal Δy van dezelfde orde zijn als $(\Delta x)^3$, en dus Δy tegelijk met Δx van teeken veranderen. Het buigpunt zal dus in het algemeen van de eerste soort zijn ¹⁾.

De waarde van den anderen kromtestraal vindt men blijkens (XVII) in dit geval uit

$$\frac{4T}{9(P^2 + 4Q)^3} = \frac{1}{\rho_2^2} \quad \dots \quad (XIX)$$

Indien dus ook T gelijk aan 0 is, zal ook de andere kromtestraal oneindig groot worden, en dus

(¹ Zie verder § 49.

ook de andere tak der kromme een buigpunt hebben, dat in het algemeen van de eerste soort zal zijn. Aan $S=0$, $T=0$, kan alleen voldaan worden door $y_1''=y_2''=0$. Daardoor wordt echter ook $s=0$, en $t=0$, en ook hieraan kan niet anders worden voldaan. Hierop zijn echter twee uitzonderingsgevallen, namelijk, wanneer van de grootheden y_1' en y_2' eene 0 of oneindig is. In het eerste geval worden s en t 0 al is maar ééne van de waarden van y'' , en wel die, welke overeenkomt met de verdwijnende waarde van y' , gelijk aan 0; en in het tweede geval behoeven s en t voor $y_1''=y_2''=0$ niet noodzakelijk te verdwijnen. De hier genoemde gevallen komen respectievelijk overeen met $p=0$ en $r=0$. Wanneer dus geen van deze vergelijkingen plaats heeft, kan men de voorwaarden

$$S=0 \text{ en } T=0 \quad \dots \dots \dots (XX)$$

vervangen door de meer eenvoudige

$$s=0 \text{ en } t=0. \quad \dots \dots \dots (XXI)$$

Is dit echter wel het geval, dan moet men de oorspronkelijke voorwaarden behouden. De vergelijkingen (XX), en onder zekere voorwaarden ook (XXI), bevatten dus de voorwaarden, dat beide takken der kromme in het beschouwde punt buigpunten vertoonen.

Trekt men het dubbel van (XVI) van (XVII) af, dan heeft men

$$2 \frac{2 \mathbf{TQ} + \mathbf{P}^3 \mathbf{S} + \mathbf{S}(\mathbf{P}^2 + 4 \mathbf{Q})^{\frac{3}{2}}}{9 \mathbf{Q}(\mathbf{P}^2 + 4 \mathbf{Q})^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^2 \quad \dots \dots \dots (XXII)$$

Zullen dus de twee kromtestralen gelijk zijn, en derhalve de beide takken gelijke kromming hebben, dan moet

$$2 \mathbf{TQ} + \mathbf{P}^3 \mathbf{S} + \mathbf{S}(\mathbf{P}^2 + 4 \mathbf{Q})^{\frac{3}{2}} = 0 \quad \dots \dots \dots (XXIII)$$

zijn.

Al deze betrekkingen en voorwaarden zijn afgeleid in de onderstelling, dat de vergelijking der kromme een bijzonderen vorm, dien van (E) heeft; maar, daar al de gebruikte uitdrukkingen van den vorm der vergelijking onafhankelijk zijn, zullen zij ook voor alle andere vormen der vergelijking gelden.

Het geval $p+r=0$ brengt in deze beschouwingen geene verandering; alleen nemen de meeste uitdrukkingen een eenvoudiger vorm aan.

Indien $q^2 - pr$ negatief is, verliezen deze beschouwingen hare waarde. Inderdaad valt van een afgezonderd punt, nadat men het als zoodanig herkend heeft, niets meer te zeggen.

§ 12. In het geval $q^2 - pr=0$ is de integraal van (II)

$$\mathbf{f} \left[P + R, \frac{S\sqrt{P+T}\sqrt{R}}{\sqrt{PR}}, \frac{S(P\sqrt{P-2R}\sqrt{P}) - T(R\sqrt{R-2P}\sqrt{R})}{PR} \right] = 0 =$$

$$\mathbf{f} = \left[p + r, \frac{s\sqrt{p+t}\sqrt{r}}{\sqrt{pr}}, \frac{s(p-2r)\sqrt{p-t(r-2p)\sqrt{r}}}{pr} \right] \quad \dots \dots \dots (XXIV)$$

In dit geval is uit de beschouwingen van § 11 niets anders op te maken, dan dat in den regel y_1'' en y_2'' beiden oneindig, en dus de kromtestralen beiden gelijk aan 0 zijn. Om de beteekenis van dit geval na te gaan, slaan wij een geheel anderen weg in. Wij hebben gezien, dat in dit geval de beide takken der kromme elkander aanraken, en dus eene gemeenschappelijke raaklijn hebben. Deze gemeenschappelijke raaklijn nemen wij tot x -as en de normaal tot y -as aan, waardoor p en q beiden verdwijnen. De vergelijking van de kromme in de nabijheid van het beschouwde punt zal nu kunnen worden voorgesteld door

$$\frac{r(\Delta y)^2}{2} + \frac{k(\Delta x)^3 + 3l(\Delta x)^2(\Delta y) + 3m(\Delta x)(\Delta y)^2 + n(\Delta y)^3}{1.2.3.} + R = 0 \quad \dots \dots (F)$$

Hieraan kan door geene andere onderstelling voldaan worden, dan dat $(\Delta y)^2$ van dezelfde orde is als $(\Delta x)^3$; met andere woorden, dat de verhouding $\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^3}$ tot eene eindige grens nadert, wanneer Δx

en Δy tegelijk tot 0 afnemen. In deze onderstelling worden al de op $(\Delta x)^3$ volgende termen van hoogere orde, en kunnen dus onder R begrepen worden. De vergelijking (F) gaat daardoor over in

$$\frac{r(\Delta y)^2}{2} + \frac{k(\Delta x)^3}{1.2.3} + R' = 0 \quad \dots \dots \dots (F')$$

Hieruit blijkt, dat, wanneer r en k ongelijke teekens hebben, met positieve waarden van Δx twee zoo goed als gelijke, maar in teeken verschillende waarden van Δy overeenkomen; terwijl Δy voor negatieve waarden van Δx onbestaanbaar wordt; en dat, wanneer r en k gelijke teekens hebben, het omgekeerde zal plaats hebben. In dit geval bezit de kromme dus twee takken, die elkander in het beschouwde punt aanraken en daar afbreken. Een punt, waar dit plaats heeft, noemt men een *keerpunt*, en wel een keerpunt *van de eerste soort*, wanneer, zoo als hier het geval is, beide takken aan verschillende zijden van de raaklijn liggen.

Uit (F') volgt ook nog, dat de beide takken der kromme met de raaklijn eene aanraking van de orde $\frac{1}{2}$ hebben.

Deze geheele redeneering gaat niet meer door in het geval, dat $k = 0$ is, welke voorwaarde wij, daar r niet gelijk aan 0 kan zijn, door

$$kr^{\frac{3}{2}} = 0 \quad \dots \dots \dots (43)$$

kunnen vervangen; $kr^{\frac{3}{2}}$ is echter niets anders dan $\frac{s\sqrt{p+t\sqrt{r}}}{\sqrt{pr}}$ bij den aangenomen stand der coördinaten, en daar deze uitdrukking blijkens (XXIV) van dien stand volkomen onafhankelijk is, zal de voorwaarde, dat $q^2 - pr$ niet noodzakelijk een keerpunt van de eerste soort aantoon, algemeen zijn

$$\sqrt{S} = \frac{s\sqrt{p+t\sqrt{r}}}{\sqrt{pr}} = 0 \quad \dots \dots \dots (XXV)$$

§ 13. Een voorbeeld van een keerpunt van de eerste soort biedt de semicubische parabool aan, waarvan de vergelijking is

$$x^3 = y^2 \mu \quad \dots \dots \dots (44)$$

Voor $x = 0, y = 0$ vindt men namelijk

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, p = 0, q = 0, r = -2\mu, k = 6, l = m = n = 0 \quad \dots \dots \dots (45)$$

De vergelijking (F) luidt dus voor deze kromme

$$-\mu (\Delta y)^2 + (\Delta x)^3 = 0 \quad \dots \dots \dots (46)$$

Zal deze kromme de nauwst mogelijke aanraking hebben met eene andere kromme, die insgelijks een zoodanig punt vertoont, dan moet men hebben

$$\frac{1}{\mu} = -\frac{k}{3r}, \quad \dots \dots \dots (47)$$

of, wat bij den aangenomen coördinaten-stand hetzelfde is,

$$\frac{1}{\mu} = -\frac{s\sqrt{p+t\sqrt{r}}}{3(p+r)^{\frac{3}{2}}\sqrt{pr}} \quad \dots \dots \dots (XXVI)$$

Het tweede lid van deze vergelijking is van den stand der coördinaten onafhankelijk; zij verschaft dus in ieder geval de parameter van de semicubische parabool, die met een kromme, welke een keerpunt van de eerste soort heeft, in dat punt de nauwste aanraking vertoont.

De aanraking tusschen de kromme en de semicubische parabool zal in het algemeen van de eerste orde zijn ¹⁾. Zij kan echter onder sommige omstandigheden van hoogere orde worden. Daartoe wordt

¹⁾ Als men namelijk door $\Delta y'$ voorstelt de waarde van Δy voor de semicubische parabool, heeft men

$$(\Delta y)^2 - (\Delta y')^2 = \frac{l}{r} (\Delta x)^2 \Delta y + R,$$

vereischt, dat de termen, die na $(\Delta y)^2$ en $(\Delta x)^3$ van de laagste orde zijn, na door de coefficient van $(\Delta y)^3$ gedeeld te zijn, gelijk worden. Die term is $l(\Delta x)^2 \Delta y$, en daar voor de semicubische parabool $l = 0$ is, zal dus ook voor de kromme $l = 0$,

of $lr^{\frac{3}{2}} = 0$ (48)
moeten zijn.

Bij den aangenomen coördinaten-stand is echter $lr^{\frac{3}{2}} = \frac{s(p-2r)\sqrt{p-t(r-2p)\sqrt{r}}}{pr}$. De voorwaarde, dat de aanraking van hoogere en wel van de orde $\frac{3}{2}$ wordt, luidt dus in het algemeen

$$\frac{s(p-2r)\sqrt{p-t(r-2p)\sqrt{r}}}{pr} = 0 \quad \text{. (XXVII)}$$

Om de voorwaarden te vinden daarvoor, dat de aanraking van nog hoogere orde wordt, zouden wij de hulp van de differentiaalquotienten van de vierde orde moeten inroepen.

§ 14. In het geval van vergelijking (XXV) gaat (F') over in

$$\frac{r(\Delta y)^2}{2} + \frac{3l\Delta y(\Delta x)^2 + 3m(\Delta y)^2\Delta x + n(\Delta y)^3}{1.2.3} + \frac{a(\Delta x)^4 + 4b(\Delta x)^3\Delta y + \text{enz.}}{1.2.3.4} + R = 0, \quad (G)$$

waarin $a = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$, $b = \frac{\partial^4 f}{(\partial x)^3 \partial y}$, enz.

Hieraan kan alleen worden voldaan door de onderstelling, dat Δy van dezelfde orde is als $(\Delta x)^2$, waardoor de vergelijking, als wij alle termen van hoogere orde onder R begripen, overgaat in

$$\frac{r}{2}(\Delta y)^2 + \frac{l}{2}(\Delta y)(\Delta x)^2 + \frac{a}{24}(\Delta x)^4 + R' = 0 \quad \text{. (G')}$$

Hieruit blijkt dat Δy dezelfde waarden heeft voor positieve en voor negatieve waarden van Δx ; de kromme heeft dus denzelfden vorm aan weerskanten van het beschouwde punt. Wanneer de wortels van (G') beiden onbestaanbaar zijn, is het beschouwde punt een afgezonderd punt. Zijn zij bestaanbaar, dan heeft de kromme twee doorlopende takken, die in het algemeen onderling en met de raaklijn eene aanraking van de eerste orde hebben. De kenmerken ter onderscheiding van deze gevallen bevatten echter differentiaalquotienten van de vierde orde, en kunnen dus hier niet vermeld worden.

Eéne bijzonderheid kunnen wij hier echter nog behandelen; het is het geval, dat de beide waarden van Δy , op verschillen van hoogere orde na, gelijk zijn, maar verschillende teekens hebben. De voorwaarde hiervoor is $l = 0$, dus ook

$$lr^{\frac{3}{2}} = 0, \quad \text{. (48)}$$

hetwelk bij dezen stand der coördinaten hetzelfde is als

$$\frac{s(p-2r)\sqrt{p-t(r-2p)\sqrt{r}}}{pr} = 0 \quad \text{. (XXVII)}$$

De beide takken der kromme liggen in dit geval aan weerszijden van de raaklijn, en zouden eene aanraking van de tweede orde met elkander hebben, wanneer één daarvan om de raaklijn werd omgeslagen.

§ 15. Thans zijn wij genaderd tot het geval, dat p , q en r allen tegelijk verdwijnen. De vergelijkingen (28) gaan in dit geval over in

of, als men door $\Delta y + \Delta y'$ deelt,

$$\Delta y - \Delta y' = \frac{l(\Delta x)^2 \Delta y}{r \Delta y + \Delta y'} + \frac{R}{\Delta y + \Delta y'}.$$

Het tweede lid van deze vergelijking is van de tweede orde, als Δx van de eerste orde ondersteld wordt. Hetzelfde zal dus het geval zijn met het eerste lid, waaruit het gezegde duidelijk is.

$$K = \mathbf{a} k, L = \mathbf{a} l, M = \mathbf{a} m, N = \mathbf{a} n. \quad (49)$$

Door te differentieëren naar $\mathbf{a}$ hebben wij hieruit

$$\frac{dK}{d\mathbf{a}} = k, \frac{dL}{d\mathbf{a}} = l, \frac{dM}{d\mathbf{a}} = m, \frac{dN}{d\mathbf{a}} = n. \quad (50)$$

Is nu weder

$$N = F(K, L, M) \quad (e)$$

eene betrekking onafhankelijk van $\mathbf{a}$, dan vinden wij door haar te differentieëren en vervolgens (50) en (e) te substitueeren,

$$n = \frac{\partial N}{\partial K} k + \frac{\partial N}{\partial L} l + \frac{\partial N}{\partial M} m, \quad (51)$$

waaruit men door vermenigvuldiging met $\mathbf{a}$ en substitutie van (49) afleidt.

$$N = \frac{\partial N}{\partial K} K + \frac{\partial N}{\partial L} L + \frac{\partial N}{\partial M} M, \quad (I)$$

eene vergelijking, die uitdrukt, dat iedere homogene betrekking tusschen de grootheden K, L, M, N van den vorm der vergelijking onafhankelijk is.

De vergelijking (XII) wordt in dit geval

$$\mathbf{f}[(K+M)^2 + (L+N)^2, L^2 - KM + M^2 - LN, 4(M^2 - LN)(L^2 - KM) - (KN - LM)^2] = 0 =$$

$= \mathbf{f}[(k+m)^2 + (l+n)^2, l^2 - km + m^2 - ln, 4(m^2 - ln)(l^2 - km) - (kn - lm)^2], \quad (XXVIII)$
mits de functie $\mathbf{f}$ aan het vereischte van homogeneiteit voldoe. Wij willen nu de drie in (XXVIII) voorkomende uitdrukkingen respectievelijk door $\mathbf{K}, \mathbf{L}$ en $\mathbf{M}$ voorstellen, terwijl wij de uitdrukking

$$\mathbf{K} - \mathbf{L} = k^2 + n^2 + 3km + 3ln = \mathbf{N} \quad (S)$$

zullen stellen.

§ 16. Geheel op dezelfde wijze als in § 5 redeneerende, zien wij, dat de kromme in dit geval kan worden voorgesteld door de vergelijking

$$\frac{k(\Delta x)^3 + 3l(\Delta x)^2 \Delta y + 3m \Delta x (\Delta y)^2 + n(\Delta y)^3}{3} + R = 0, \quad (H)$$

en dat de vergelijking

$$k(\Delta x)^3 + 3l(\Delta x)^2 \Delta y + 3m \Delta x (\Delta y)^2 + n(\Delta y)^3 = 0 \quad (H')$$

drie raaklijnen voorstelt, die in het beschouwde punt aan de kromme getrokken kunnen worden; drie takken der kromme doorsnijden elkander derhalve in dat punt, waarvan er echter twee onbestaanbaar kunnen zijn.

Nemen wij één van de raaklijnen als x -as aan, dan wordt één van de wortels van (H') nul; men zal dus moeten hebben $k = 0$. De beide andere wortels worden dan de tangenten van de hoeken, die de beide andere raaklijnen met deze maken. De overblijvende vergelijking

$$3l(\Delta x)^2 + 3m \Delta x \Delta y + n(\Delta y)^2 = 0 \quad (H'')$$

speelt bij de twee andere raaklijnen dezelfde rol als de vergelijking (D'') in het geval, dat er slechts twee raaklijnen aanwezig zijn. De tangens van den hoek, dien deze twee raaklijnen met elkander maken, vinden

wij dus door in de uitdrukking $\pm \frac{2\sqrt{(q^2 - pr)}}{(p+r)}$, p door $3l$, q door $\frac{3}{2}m$ en r door n te vervangen. Zij is

dus gelijk aan $\pm \frac{\sqrt{(9m^2 - 12ln)}}{(3l+n)}$, en dus, als wij dezen hoek door ω_1 en de beide andere hoeken tusschen

de raaklijnen door ω_2 en ω_3 voorstellen,

$$\tan^2 \omega_1 = \frac{9m^2 - 12ln}{(3l+n)^2}, \quad (52)$$

en blijkens (H'')

$$tg^2 \omega_1 \cdot tg^2 \omega_3 = \frac{9l^2}{n^2} \dots \dots \dots (53)$$

Het product van deze vergelijkingen geeft

$$tg^2 \omega_1 \cdot tg^2 \omega_2 \cdot tg^2 \omega_3 = \frac{27 l^2 (3m^2 - 4ln)}{(3ln + n^2)^2} \dots \dots \dots (54)$$

Van het tweede lid van (54) is de teller de waarde, die men bekomt door $k = 0$ te stellen in 27 M, terwijl de noemer dezelfde uitdrukking is als die, waarin N^2 in die onderstelling overgaat. Wij hebben dus in het algemeen

$$tg^2 \omega_1 \cdot tg^2 \omega_2 \cdot tg^2 \omega_3 = \frac{27 M}{N^2} \dots \dots \dots ; \dots (XXIX)$$

Volgens (H') is

$$tg^2 \omega_2 + tg^2 \omega_3 = \frac{9m^2 - 6ln}{n^2}; \dots \dots \dots (55)$$

vermenigvuldigt men dit met $tg^2 \omega_1$, en telt de waarde van $tg^2 \omega_2 \cdot tg^2 \omega_3$ er bij op, dan vindt men

$$\Sigma tg^2 \omega_1 \cdot tg^2 \omega_2 = \frac{(9m^2 - 6ln)(9m^2 - 12ln) + 9(3l + n)^2 l^2}{(3ln + n^2)^2} = \frac{81(m^2 - ln + l^2)^2 - 54l^2(3m^2 - 4ln)}{(3ln + n^2)^2} \dots (56)$$

De noemer van deze breuk is dezelfde als die in (54), de teller is de waarde van $81L^2 - 54M$ voor $k = 0$; wij hebben dus

$$\Sigma tg^2 \omega_1 \cdot tg^2 \omega_2 = \frac{81L^2 - 54M}{N^2} \dots \dots \dots (XXX)$$

Eindelijk hebben wij door bij de waarde van $tg^2 \omega_2 + tg^2 \omega_3$ die van $tg^2 \omega_1$ op te tellen,

$$\begin{aligned} \Sigma tg^2 \omega_1 &= \frac{(9m^2 - 6ln)(3l + n)^2 + (9m^2 - 12ln)n^2}{(n^2 + 3ln)^2} = \\ &= \frac{18(m^2 - ln + l^2)(n^2 + 3ln) + 27l^2(3m^2 - 4ln)}{(n^2 + 3ln)^2} \dots \dots \dots (57) \end{aligned}$$

De teller van deze laatste breuk is voor $k = 0$ gelijk aan $18LN + 27M$, de noemer is dezelfde als in (54) en (56); wij hebben dus in het algemeen

$$\Sigma tg^2 \omega_1 = \frac{18LN + 27M}{N^2} \dots \dots \dots (XXXI)$$

Uit (XXIX), (XXX) en (XXXI) volgt, dat $tg^2 \omega_1$, $tg^2 \omega_2$ en $tg^2 \omega_3$ de wortels zijn van de vergelijking

$$N^2 \xi^3 - (18LN + 27M)\xi^2 + (81L^2 - 54M)\xi - 27M = 0 \dots \dots \dots (XXXII)$$

§ 17. Uit de beschouwing van (XXXII) blijkt, dat voor $M = 0$ eene van de waarden van $tg^2 \omega$ nul wordt, terwijl de beide anderen onderling gelijk en gelijk aan $9 \frac{L}{N}$ worden. In dit geval vallen dus twee raaklijnen samen, en raken derhalve twee takken van de kromme elkander aan.

De voorwaarde, dat twee raaklijnen loodrecht op elkander staan, is $N = 0$. In dit geval snijden derhalve twee takken der kromme elkander onder eenen rechten hoek. Hebben beide omstandigheden gelijktijdig plaats, is dus zoowel

$$M = 4(l^2 - km)(m^2 - ln) - (kn - lm)^2 = 0, \dots \dots \dots (XXXIII)$$

als

$$N = k^2 + n^2 + 3ln + 3km = 0, \dots \dots \dots (XXXIV)$$

dan vallen twee raaklijnen samen, en de derde staat loodrecht op beide. Inderdaad heeft dan (XXXII) één wortel, die gelijk aan 0, en twee, die oneindig groot zijn.

Heeft behalve (XXXIII) ook nog de vergelijking

$$L = l^2 - km + m^2 - ln = 0 \dots \dots \dots (XXXV)$$

plaats, dan zijn al de drie wortels van (XXXII) gelijk aan 0 en al de drie raaklijnen vallen samen; al de drie takken der kromme raken dus elkander aan. Opdat echter (XXXV) tegelijk plaats hebbe met (XXXIII), moet men afzonderlijk hebben

$$l^2 - km = 0, \quad m^2 - ln = 0, \quad kn - lm = 0, \quad \dots \quad (\text{XXXVII})$$

waarvan ieder een gevolg is van de beide anderen.

Merkwaardig is nog het geval

$$\mathbf{K} = (k+m)^2 + (l+n)^2 = 0. \quad \dots \quad (\text{XXXVIII})$$

Om de beteekenis hiervan te onderzoeken, keeren wij tot de in § 16 aangenomen coördinaten terug, waardoor wij hebben

$$m^2 + (l+n)^2 = 0 \quad \dots \quad (58)$$

of

$$m = 0, \quad l = -n. \quad \dots \quad (59)$$

De vergelijking (H'') gaat hierdoor over in

$$\Delta y \{ 3(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 \} = 0, \quad \dots \quad (H'')$$

waarvan de wortels zijn

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm \sqrt{3} = \pm \operatorname{tg} 60^\circ. \quad \dots \quad (60)$$

De drie raaklijnen maken dus allen hoeken van 60° met elkander, en verdeelen de vier rechte hoeken om haar snijpunt in zes gelijke deelen. Ook uit (XXXII) blijkt dit, daar die vergelijking voor $k = -m$, $n = -l$ drie gelijke wortels heeft.

Wij hebben tot nog toe stilzwijgend verondersteld, dat al de drie wortels van (H') bestaanbaar, en dus het punt een eigenlijk gezegd drievoudig punt was. Dit behoeft echter niet altijd het geval te zijn. Wanneer $\mathbf{M}$ negatief is, komen er onder de wortels van (XXXII) negatieve voor, en dus onder de waarden van $\operatorname{tg} \omega$ onbestaanbare. In dit geval kunnen derhalve niet al de takken der kromme bestaanbaar zijn, en zijn er dus twee onbestaanbare onder. Het punt kan dan beschouwd worden als een afgezonderd punt, gelegen op een bestaanbaren tak der kromme. Zulk een punt zal zich echter op het oog door niets onderscheiden. Is $\mathbf{M}$ positief, dan moeten ook noodzakelijk alle wortels van (H') bestaanbaar zijn. ¹⁾

Hadden de vergelijkingen (XXXIII), (XXXIV) en (XXXV) gelijktijdig plaats, dan zou men noodzakelijk moeten hebben

$$k = l = m = n = 0 \quad \dots \quad (\text{XXXVIII})$$

De redeneering van § 5 herhalende, zal men gemakkelijk vinden, dat de kromme in dit geval in het algemeen een viervoudig punt zal hebben, dat is een punt, waar vier takken der kromme elkander snijden. Deze takken kunnen echter twee aan twee onbestaanbaar zijn.

In het in deze en de voorgaande § besproken geval laat de vergelijking der kromme zich in dezen vorm brengen

$$[y - f_1(x)][y - f_2(x)][y - f_3(x)] = 0, \quad \dots \quad (I)$$

waarin f_1, f_2 en f_3 functien zijn die allen voor $x = x_1$ gelijk worden aan y_1 . In dezen bijzonderen vorm verschaft de vergelijking ons

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -\Sigma f_1'(x)[y - f_2(x)][y - f_3(x)], \quad \bar{y} = \Sigma [y - f_1(x)][y - f_2(x)], \\ p &= -\Sigma f_1''(x)[y - f_2(x)][y - f_3(x)] + 2\Sigma f_1'(x)f_2'(x)[y - f_3(x)], \quad q = -\Sigma f_1'(x)[y - f_2(x)], \quad r = 2\Sigma [y - f_1(x)], \\ k &= -\Sigma f_1'''(x)[y - f_2(x)][y - f_3(x)] + 3\Sigma f_1''(x)f_2'(x)[y - f_3(x)] - 6f_1'(x)f_2'(x)f_3'(x), \\ l &= -\Sigma f_1''(x)[y - f_2(x)] + 2\Sigma f_1'(x)f_2'(x), \quad m = -2\Sigma f_1'(x), \quad n = 6; \end{aligned} \quad (61)$$

¹⁾ Dit kan men aldus bewijzen: waren $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, γ de wortels van (H'), dan zou $\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{2\beta i}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$, $\operatorname{tg} \omega_2 = \frac{\alpha + \gamma + \beta i}{1 + \alpha\gamma + \beta\gamma i}$, $\operatorname{tg} \omega_3 = \frac{\alpha + \gamma - \beta i}{1 + \alpha\gamma - \beta\gamma i}$ zijn; $\operatorname{tg} \omega_2, \operatorname{tg} \omega_3$ is dus bestaanbaar; derhalve $\operatorname{tg}^2 \omega_2, \operatorname{tg}^2 \omega_3$ positief; $\operatorname{tg}^2 \omega_1$ is echter negatief; $\mathbf{M}$ moet dus noodzakelijk negatief zijn.

of als wij $x = x_1$, $y = y_1$, $f'(x) = y'$ stellen,

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, p = 0, q = 0, r = 0, k = -6y_1'y_2'y_3', l = 2\sum y_1'y_2', m = -2\sum y_1', n = 6. \quad (62)$$

De substitutie van deze waarden in de uitdrukkingen **K**, **L** enz. zou ons tot dezelfde uitkomsten voeren, als wij in deze en de voorgaande § gevonden hebben.

§ 18. Om betrekkingen tusschen de partieele differentiaalquotiënten van de vierde orde onderling en tusschen deze en die van de tweede en derde orde te vinden, slaan wij weder denzelfden weg in als vroeger, en differentieëren de vergelijkingen (23) nog eenmaal ten opzichte van x' en y' , waardoor wij, na substitutie van de vergelijkingen (3) en van de notatiën

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x'^4} &= A, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x'^3 \partial y'} = B, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x'^2 \partial y'^2} = C, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x' \partial y'^3} = D, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y'^4} = E; \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} &= a, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = b, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = c, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = d, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = e, \end{aligned} \quad (t)$$

bekomen:

$$\begin{aligned} A &= a \cos^4 \vartheta + 4b \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta + 6c \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta + 4d \cos \vartheta \cdot \sin^3 \vartheta + e \sin^4 \vartheta, \\ B &= -a \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta + b(\cos^4 \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta) - c(3 \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta - 3 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta) - d(\sin^4 \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta) + \\ &\quad + e \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta, \\ C &= a \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta + b(2 \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta - 2 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta) + c(\sin^4 \vartheta + \cos^4 \vartheta - 4 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta) + \\ &\quad + d(2 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta - 2 \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta) + e \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta, \\ D &= -a \cos \vartheta \cdot \sin^3 \vartheta + b(3 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta - \sin^4 \vartheta) - c(3 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta - 3 \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta) + d(\cos^4 \vartheta - 3 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta) + \\ &\quad + e \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta, \\ E &= a \sin^4 \vartheta - 4b \cos \vartheta \cdot \sin^3 \vartheta + 6c \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta - 4d \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta + e \cos^4 \vartheta. \end{aligned} \quad (63)$$

Door deze vergelijkingen naar ϑ te differentieëren hebben wij

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\vartheta} &= -4a \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta + 4b(\cos^4 \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta) + 12c(\cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta) + 4d(3 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta - \sin^4 \vartheta) + \\ &\quad + 4e \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta, \\ \frac{dB}{d\vartheta} &= a(3 \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) + b(6 \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta - 10 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta) + c(3 \sin^4 \vartheta + 3 \cos^4 \vartheta - 18 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta) + \\ &\quad + d(6 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta - 10 \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta) + e(3 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta - \sin^4 \vartheta), \\ \frac{dC}{d\vartheta} &= a(2 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta - 2 \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta) + b(12 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta - 2 \sin^4 \vartheta - 2 \cos^4 \vartheta) + c(12 \cos \vartheta \cdot \sin^3 \vartheta - 12 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta) + \\ &\quad + d(2 \cos^4 \vartheta + 2 \sin^4 \vartheta - 12 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta) + e(2 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta - 2 \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta), \\ \frac{dD}{d\vartheta} &= a(\sin^4 \vartheta - 3 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta) + b(6 \sin \vartheta \cdot \cos^3 \vartheta - 10 \cos \vartheta \cdot \sin^3 \vartheta) + c(18 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta - 3 \cos^4 \vartheta - 3 \sin^4 \vartheta) + \\ &\quad + d(6 \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta - 10 \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta) + e(\cos^4 \vartheta - 3 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta), \\ \frac{dE}{d\vartheta} &= 4a \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta + 4b(\sin^4 \vartheta - 3 \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \vartheta) + 12c(\cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta) + 4d(3 \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) - \\ &\quad - 4e \cos^3 \vartheta \cdot \sin \vartheta; \end{aligned} \quad (64)$$

of, als wij de vergelijkingen (63) weder substitueeren,

$$\frac{dA}{d\vartheta} = 4B, \quad \frac{dB}{d\vartheta} = 3C - A, \quad \frac{dC}{d\vartheta} = 2D - 2B, \quad \frac{dD}{d\vartheta} = E - 3C, \quad \frac{dE}{d\vartheta} = -4D. \quad (65)$$

Is nu weder

$$C = F(P, Q, R, K, L, M, N, A, B, D, E). \quad (f)$$

eene betrekking onafhankelijk van ϑ , dan hebben wij

$$\frac{dC}{d\vartheta} = \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{d\vartheta} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{d\vartheta} \quad (66)$$

waaruit wij door substitutie van (13), (25), (65) en (f) de volgende partieele differentiaalvergelijking afleiden

$$2(D - B) = 2 \frac{\partial C}{\partial P} Q + \frac{\partial C}{\partial Q} (R - P) - 2 \frac{\partial C}{\partial R} Q + 3 \frac{\partial C}{\partial K} L + \frac{\partial C}{\partial L} (2M - K) + \frac{\partial C}{\partial M} (N - 2L) - \\ - 3 \frac{\partial C}{\partial N} M + 4 \frac{\partial C}{\partial A} B + \frac{\partial C}{\partial B} (3C - A) + \frac{\partial C}{\partial D} (E - 3C) - 4 \frac{\partial C}{\partial E} D. \quad \text{... (J)}$$

Van deze vergelijking is de integraal:

$$f[P + R, Q^2 - PR, (K + M)^2 + (L + N)^2, L^2 - KM + M^2 - LN, 4(L^2 - KM)(M^2 - LN) - (KN - LM)^2, \\ - 2Q\{(M^2 - LN) - (L^2 - KM)\} - (P - R)(KN - LM), A + 2C + E, (A + C)^2 + 2(B + D)^2 + (C + E)^2, \\ B^2 - AC + 2(C^2 - BD) + D^2 - CE, 4(B^2 - AC + C^2 - BD)(C^2 - BD + D^2 - CE)\{(AD - BC) + \\ + (BE - DC)\}^2, \{(B^2 - AC) - (D^2 - CE)\}(KN - LM) - \{(M^2 - LN) - (L^2 - KM)\}\{(AD - BC) + \\ + (BE - DC)\}] = 0. \quad \text{... (XXXIX)}$$

§ 19. Om betrekkingen te vinden onafhankelijk van den vorm der vergelijking, differentieeren wij de vergelijkingen (27) nog eenmaal naar x en y , daarbij de termen die voor $\bar{x} = \bar{y} = 0$ en $f(x, y) = 0$, wegvallen, even als de indices boven de ψ weglatende. Daardoor bekomen wij

$$A = \{a(\psi_3 - \psi_4) + 3p^2(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 4k(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + 6p(\psi_{3.1.1} - \psi_{4.1.1})\}\phi' + 3p^2(\psi_3 - \psi_4)^2\phi'', \\ B = \{b(\psi_3 - \psi_4) + 3pq(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 3l(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + k(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + 3p(\psi_{3.2.1} - \psi_{4.2.1}) + 3q(\psi_{3.1.1} - \psi_{4.1.1})\}\phi' \\ + 3pq(\psi_3 - \psi_4)^2\phi'', \\ C = \{c(\psi_3 - \psi_4) + (2q^2 + pr)(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 2l(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + 2m(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + 4q(\psi_{3.2.1} - \psi_{4.2.1}) + \\ + p(\psi_{3.2.2} - \psi_{4.2.2}) + r(\psi_{3.1.1} - \psi_{4.1.1})\}\phi' + (2q^2 + pr)(\psi_3 - \psi_4)^2\phi'', \\ D = \{d(\psi_3 - \psi_4) + 3qr(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 3m(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + n(\psi_{3.1} - \psi_{4.1}) + 3r(\psi_{3.2.1} - \psi_{4.2.1}) + 3q(\psi_{3.2.2} - \psi_{4.2.2})\}\phi' \\ + 3qr(\psi_3 - \psi_4)^2\phi'', \\ E = \{e(\psi_3 - \psi_4) + 3r^2(\psi_{3.3} - \psi_{4.4}) + 4n(\psi_{3.2} - \psi_{4.2}) + 6r(\psi_{3.2.2} - \psi_{4.2.2})\}\phi' + 3r^2(\psi_3 - \psi_4)^2\phi'', \quad (67)$$

welke vergelijkingen door de substitutie van de volgende bekortingen,

$$(\psi_{3.3} - \psi_{4.4})\phi' + (\psi_3 - \psi_4)^2\phi'' = \mathbf{b}, \quad (\psi_{3.1.1} - \psi_{4.1.1})\phi' = \mathbf{e}, \quad (\psi_{3.2.1} - \psi_{4.2.1})\phi' = \mathbf{f}, \quad (\psi_{3.2.2} - \psi_{4.2.2})\phi' = \mathbf{g}, \quad \text{... (x)}$$

en van de vergelijkingen (v) en (v) overgegaan in

$$A = \mathbf{a}\mathbf{a} + 3\mathbf{b}p^2 + 4\mathbf{e}k + 6\mathbf{e}p, \\ B = \mathbf{a}\mathbf{b} + 3\mathbf{b}pq + 3\mathbf{e}l + \mathbf{d}k + 3\mathbf{f}p + 3\mathbf{e}q, \\ C = \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}(2q^2 + pr) + 2\mathbf{d}l + 2\mathbf{c}m + 4\mathbf{f}q + \mathbf{g}p + \mathbf{e}r, \quad \text{... (68)} \\ D = \mathbf{a}\mathbf{d} + 3\mathbf{b}qr + 3\mathbf{d}m + \mathbf{c}n + 3\mathbf{f}r + 3\mathbf{g}q, \\ E = \mathbf{a}\mathbf{e} + 3\mathbf{b}r^2 + 4\mathbf{d}n + \mathbf{g}r.$$

Differentieeren wij nu de vergelijkingen (17), (28) en (68) naar al de grootheden $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, enz. tot

$\mathbf{g}$, dan bekomen wij de vergelijkingen

$$\frac{dP}{d\mathbf{a}} = p, \frac{dQ}{d\mathbf{a}} = q, \frac{dR}{d\mathbf{a}} = r, \frac{dK}{d\mathbf{a}} = k, \frac{dL}{d\mathbf{a}} = l, \frac{dM}{d\mathbf{a}} = m, \frac{dN}{d\mathbf{a}} = n, \frac{dA}{d\mathbf{a}} = a, \frac{dB}{d\mathbf{a}} = b, \frac{dC}{d\mathbf{a}} = c, \frac{dD}{d\mathbf{a}} = d, \frac{dE}{d\mathbf{a}} = e; \\ \frac{dP}{d\mathbf{b}} = \frac{dQ}{d\mathbf{b}} = \frac{dR}{d\mathbf{b}} = \frac{dK}{d\mathbf{b}} = \frac{dL}{d\mathbf{b}} = \frac{dM}{d\mathbf{b}} = \frac{dN}{d\mathbf{b}} = 0, \frac{dA}{d\mathbf{b}} = 3p^2, \frac{dB}{d\mathbf{b}} = 3pq, \frac{dC}{d\mathbf{b}} = 2q^2 + pr, \frac{dD}{d\mathbf{b}} = 3qr, \frac{dE}{d\mathbf{b}} = 3r^2; \\ \frac{dP}{d\mathbf{c}} = \frac{dQ}{d\mathbf{c}} = \frac{dR}{d\mathbf{c}} = 0, \frac{dK}{d\mathbf{c}} = 3p, \frac{dL}{d\mathbf{c}} = 2q, \frac{dM}{d\mathbf{c}} = r, \frac{dN}{d\mathbf{c}} = 0, \frac{dA}{d\mathbf{c}} = 4k, \frac{dB}{d\mathbf{c}} = 3l, \frac{dC}{d\mathbf{c}} = 2m, \frac{dD}{d\mathbf{c}} = n, \frac{dE}{d\mathbf{c}} = 0; \quad (69) \\ \frac{dP}{d\mathbf{d}} = \frac{dQ}{d\mathbf{d}} = \frac{dR}{d\mathbf{d}} = 0, \frac{dK}{d\mathbf{d}} = 0, \frac{dL}{d\mathbf{d}} = p, \frac{dM}{d\mathbf{d}} = 2q, \frac{dN}{d\mathbf{d}} = 3r, \frac{dA}{d\mathbf{d}} = 0, \frac{dB}{d\mathbf{d}} = k, \frac{dC}{d\mathbf{d}} = 2l, \frac{dD}{d\mathbf{d}} = 3m, \frac{dE}{d\mathbf{d}} = 4n; \\ \frac{dP}{d\mathbf{e}} = \frac{dQ}{d\mathbf{e}} = \frac{dR}{d\mathbf{e}} = \frac{dK}{d\mathbf{e}} = \frac{dL}{d\mathbf{e}} = \frac{dM}{d\mathbf{e}} = \frac{dN}{d\mathbf{e}} = 0, \frac{dA}{d\mathbf{e}} = 6p, \frac{dB}{d\mathbf{e}} = 3q, \frac{dC}{d\mathbf{e}} = r, \frac{dD}{d\mathbf{e}} = 0, \frac{dE}{d\mathbf{e}} = 0; \\ \frac{dP}{d\mathbf{f}} = \frac{dQ}{d\mathbf{f}} = \frac{dR}{d\mathbf{f}} = \frac{dK}{d\mathbf{f}} = \frac{dL}{d\mathbf{f}} = \frac{dM}{d\mathbf{f}} = \frac{dN}{d\mathbf{f}} = 0, \frac{dA}{d\mathbf{f}} = 0, \frac{dB}{d\mathbf{f}} = 3p, \frac{dC}{d\mathbf{f}} = 4q, \frac{dD}{d\mathbf{f}} = 3r, \frac{dE}{d\mathbf{f}} = 0;$$

$$\frac{dP}{dg} = \frac{dQ}{dg} = \frac{dR}{dg} = \frac{dK}{dg} = \frac{dL}{dg} = \frac{dM}{dg} = \frac{dN}{dg} = 0, \frac{dA}{dg} = 0, \frac{dB}{dg} = 0, \frac{dC}{dg} = p, \frac{dD}{dg} = 3q, \frac{dE}{dg} = 6r.$$

Beschouwen wij nu (*f*) als eene betrekking onafhankelijk van den vorm der vergelijking, dan hebben wij door haar ten opzichte van al de grootheden *a*, *b* enz. tot *g* te differentieeren

$$\begin{aligned} \frac{dC}{da} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{da} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{da} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{da} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{da} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{da} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{da} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{da} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{da} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{da} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{da} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{da}, \\ \frac{dC}{db} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{db} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{db} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{db} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{db} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{db} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{db} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{db} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{db} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{db} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{db} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{db}, \\ \frac{dC}{dc} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{dc} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{dc} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{dc} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{dc} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{dc} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{dc} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{dc} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{dc} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{dc} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{dc} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{dc}, \\ \frac{dC}{dd} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{dd} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{dd} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{dd} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{dd} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{dd} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{dd} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{dd} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{dd} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{dd} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{dd} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{dd}, \\ \frac{dC}{de} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{de} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{de} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{de} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{de} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{de} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{de} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{de} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{de} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{de} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{de} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{de}, \\ \frac{dC}{df} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{df} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{df} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{df} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{df} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{df} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{df} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{df} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{df} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{df} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{df} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{df}, \\ \frac{dC}{dg} &= \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{dg} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{dQ}{dg} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{dg} + \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{dg} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{dg} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{dg} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{dg} + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{dg} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{dg} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{dg} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{dg}. \end{aligned} \quad (70)$$

Substitueeren wij hierin (*f*) en (69), dan bekomen wij:

$$e = \frac{\partial C}{\partial P} p + \frac{\partial C}{\partial Q} q + \frac{\partial C}{\partial R} r + \frac{\partial C}{\partial K} k + \frac{\partial C}{\partial L} l + \frac{\partial C}{\partial M} m + \frac{\partial C}{\partial N} n + \frac{\partial C}{\partial A} a + \frac{\partial C}{\partial B} b + \frac{\partial C}{\partial D} d + \frac{\partial C}{\partial E} e, \quad (71)$$

$$2q^2 + pr = 3 \frac{\partial C}{\partial A} p^2 + 3 \frac{\partial C}{\partial B} pq + 3 \frac{\partial C}{\partial D} qr + 3 \frac{\partial C}{\partial E} r^2, \quad (72)$$

$$2m = 3 \frac{\partial C}{\partial K} p + 2 \frac{\partial C}{\partial L} q + \frac{\partial C}{\partial M} r + 4 \frac{\partial C}{\partial A} k + 3 \frac{\partial C}{\partial B} l + \frac{\partial C}{\partial D} n, \quad (73)$$

$$2l = \frac{\partial C}{\partial L} p + 2 \frac{\partial C}{\partial M} q + 3 \frac{\partial C}{\partial N} r + \frac{\partial C}{\partial B} l + 3 \frac{\partial C}{\partial D} m + 4 \frac{\partial C}{\partial E} n, \quad (74)$$

$$r = 6 \frac{\partial C}{\partial A} p + 3 \frac{\partial C}{\partial B} q, \quad (75)$$

$$4q = 3 \frac{\partial C}{\partial B} p + 3 \frac{\partial C}{\partial D} r, \quad (76)$$

$$p = 3 \frac{\partial C}{\partial D} q + 6 \frac{\partial C}{\partial E} r. \quad (77)$$

§ 20. Van deze vergelijkingen is (72) een gevolg van (75), (76) en (77). Vermenigvuldigen wij de drie laatsten met **a** en substitueeren de vergelijkingen (16) dan hebben wij

$$R = 6 P \frac{\partial C}{\partial A} + 3 Q \frac{\partial C}{\partial B},$$

$$4 Q = 3 P \frac{\partial C}{\partial B} + 3 R \frac{\partial C}{\partial D}, \dots \dots \dots \text{(K)}$$

$$P = 3 Q \frac{\partial C}{\partial D} + 6 R \frac{\partial C}{\partial E}$$

Vermenigvuldigen wij nu ook (73) en (74) met **a** dan geeft de substitutie van (16) en (28).

$$2 M = 3 P \frac{\partial C}{\partial K} + 2 Q \frac{\partial C}{\partial L} + R \frac{\partial C}{\partial M} + 4 K \frac{\partial C}{\partial A} + 3 L \frac{\partial C}{\partial B} + N \frac{\partial C}{\partial D} + \frac{c}{a} \left(2 R - 12 P \frac{\partial C}{\partial A} - 6 Q \frac{\partial C}{\partial B} \right) + \\ + \frac{d}{a} \left(4 Q - 3 P \frac{\partial C}{\partial B} - 3 Q \frac{\partial C}{\partial D} \right), \dots \dots \dots \text{(78)}$$

$$2 L = P \frac{\partial C}{\partial L} + 2 Q \frac{\partial C}{\partial M} + 3 R \frac{\partial C}{\partial N} + K \frac{\partial C}{\partial A} + 3 M \frac{\partial C}{\partial D} + 4 N \frac{\partial C}{\partial E} + \frac{d}{a} \left(2 P - 12 \frac{\partial C}{\partial E} R - 6 \frac{\partial C}{\partial D} Q \right) + \\ + \frac{c}{a} \left(4 Q - 3 P \frac{\partial C}{\partial B} - 3 R \frac{\partial C}{\partial D} \right) \dots \dots \dots \text{(79)}$$

Ten gevolge van (K) gaan deze vergelijkingen over in

$$2 M = 3 P \frac{\partial C}{\partial K} + 2 Q \frac{\partial C}{\partial L} + R \frac{\partial C}{\partial M} + 4 K \frac{\partial C}{\partial A} + 3 L \frac{\partial C}{\partial B} + N \frac{\partial C}{\partial D}, \\ 2 L = P \frac{\partial C}{\partial L} + 2 Q \frac{\partial C}{\partial M} + 3 R \frac{\partial C}{\partial N} + K \frac{\partial C}{\partial B} + 3 M \frac{\partial C}{\partial D} + 4 N \frac{\partial C}{\partial E} \dots \dots \dots \text{(L)}$$

Eindelijk vermenigvuldigen wij ook (71) met **a**, en de uitkomst gaat door substitutie van (16), (28) en (68) over in

$$C = \frac{\partial C}{\partial P} P + \frac{\partial C}{\partial Q} Q + \frac{\partial C}{\partial R} R + \frac{\partial C}{\partial K} K + \frac{\partial C}{\partial L} L + \frac{\partial C}{\partial M} M + \frac{\partial C}{\partial N} N + \frac{\partial C}{\partial A} A + \frac{\partial C}{\partial B} B + \frac{\partial C}{\partial D} D + \frac{\partial C}{\partial E} E + \\ + \frac{b}{a} (2 Q^2 + P R - 3 \frac{\partial C}{\partial A} P^2 - 3 \frac{\partial C}{\partial B} P Q - 3 \frac{\partial C}{\partial D} Q R - 3 \frac{\partial C}{\partial E} R^2) + \frac{c}{a} (2 M - 3 P \frac{\partial C}{\partial K} - 2 Q \frac{\partial C}{\partial L} - R \frac{\partial C}{\partial M} - \\ - 4 K \frac{\partial C}{\partial A} - 3 L \frac{\partial C}{\partial B} - N \frac{\partial C}{\partial D}) + \frac{d}{a} (2 L - P \frac{\partial C}{\partial L} - 2 Q \frac{\partial C}{\partial M} - 3 R \frac{\partial C}{\partial N} - K \frac{\partial C}{\partial B} - 3 M \frac{\partial C}{\partial D} - 4 N \frac{\partial C}{\partial E}) - \\ - \frac{2c-e}{a} \left(R - 6 P \frac{\partial C}{\partial A} - 3 Q \frac{\partial C}{\partial B} \right) - \frac{2d-g}{a} \left(P - 3 Q \frac{\partial C}{\partial D} - 6 R \frac{\partial C}{\partial E} \right) - \frac{c+d-f}{a} \left(4 Q - 3 P \frac{\partial C}{\partial B} - 3 R \frac{\partial C}{\partial D} \right). \text{(80)}$$

De vergelijking (80) wordt ten gevolge van (K) en (L) vereenvoudigd tot

$$C = \frac{\partial C}{\partial P} P + \frac{\partial C}{\partial Q} Q + \frac{\partial C}{\partial R} R + \frac{\partial C}{\partial K} K + \frac{\partial C}{\partial L} L + \frac{\partial C}{\partial M} M + \frac{\partial C}{\partial N} N + \frac{\partial C}{\partial A} A + \frac{\partial C}{\partial B} B + \frac{\partial C}{\partial D} D + \frac{\partial C}{\partial E} E. \text{(M)}$$

De vergelijking (M) bewijst, dat de gezochte betrekking ten opzichte van de daarin voorkomende grootheden homogeen moet zijn. Van de vergelijkingen (K) en (L) zijn de respectieve integralen

$$f_1 (P, Q, R, K, L, M, N, D, E, AR - 6 PC, 2 BP - AQ) = 0, \\ f_2 (P, Q, R, K, L, M, N, A, B, EP - 6 RC, 2 DR - EQ) = 0, \dots \dots \dots \text{(XLI)}$$

$$f_3 (P, Q, R, K, L, M, N, A, E, 3 RC - 4 QD, 3 PC - 4 QB) = 0,$$

$$f_4 (P, Q, R, N, E, 2 QK - 3 PL, RL - 2 QM, 2 K^2 - 3 AP, 3 L^2 - 4 BQ, M^2 - CR, MN - DR) = 0,$$

$$f_5 (P, Q, R, K, A, 2 QN - 3 RM, PM - 2 QL, 2 N^2 - 3 ER, 3 M^2 - 4 DQ, L^2 - CP, LK - BP) = 0. \text{(XLI)}$$

Wij hebben nu zeven uitdrukkingen te zoeken, die in de eerste leden van al de vergelijkingen (XLI) en (XLI) begrepen zijn, dan zullen wij de meest algemeene oplossing van het stelsel differentiaal-vergelijkingen (K) en (L) gevonden hebben, wanneer wij eene willekeurige functie van deze zeven uitdrukkingen gelijk aan 0 stellen.

In de eerste plaats voldoen hieraan P , Q en R , die in alle vijf vergelijkingen voorkomen. Vervolgens de reeds vroeger gebruikte uitdrukkingen S en T , daar in (XLI) dezelfde uitdrukkingen voorkomen als in (XIII), terwijl aan (XL) door elke willekeurige functie van K , L enz. wordt voldaan. Eindelijk hebben wij de uitdrukking

$$RA^3 - 6CR^2P + 8DPQR - E(4Q^2 - PR)P - \frac{4}{3(P+R)\{4Q^2 + (P-R)^2\}} \{ K^2(4Q^2R^3 - R^4P + R^3P^2) + \\ + 9L^2(P^2R^3 - P^3R^4) + 9M^2(4Q^2P^2R + P^2R^3 - PR^4) - N^2(16Q^4P - 8Q^2P^2R + 8Q^2PR^2 - P^2R^3 + \\ + P^3R^2) + 3KL(2QP^2R^2 + 2QR^4) - 3KM(4Q^2P^2R + 4Q^2PR^2 + P^3R^2 - P^2R^3 + PR^4 - R^5) + \\ + KN(8Q^3P^2 + 8Q^3PR - 2QR^4 - 2QP^2R^2) - 9LM(2QPR^3 + 4QP^2R^2 - 2QP^3R) - 3LN(4Q^2P^3 - \\ - 4Q^2P^2R - P^2R^3 + PR^4 - P^4R + P^3R^2) + 3MN(8Q^3PR - 8Q^3P^2 + 6QPR^3 - 4QP^2R^2 + \\ + 2QP^3R) \},$$

die, zoo als zich gemakkelijk laat verifieeren, aan de voorwaarden voldoet. Dit zelfde zal natuurlijk ook het geval zijn met de uitdrukking, die wij bekomen door in de bovenstaande, P met R , K met N , L met M , A met E en B met D te verwisselen.

Stellen wij nu deze twee uitdrukkingen respectievelijk door U en V voor, dan vinden wij voor de meest algemeene betrekking, onafhankelijk van den vorm der vergelijking,

$$f(P, Q, R, S, T, U, V) = 0 \dots \dots \dots (XLII)$$

§ 21. Differentieert men de waarde van U ten opzichte van $\mathfrak{S}$, en substitueert men in de uitkomst de vergelijkingen (13), (25) en (65), dan heeft men, de waarden van U en V invoerende,

$$\frac{dU}{d\mathfrak{S}} = \left(\frac{2Q}{P} - \frac{3}{2} \frac{P}{Q} - \frac{1}{2} \frac{R}{Q} \right) U + \left(\frac{3}{2} \frac{R}{Q} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{PQ} \right) V,$$

en evenzoo

$$\frac{dV}{d\mathfrak{S}} = - \left(\frac{2Q}{R} - \frac{3}{2} \frac{R}{Q} - \frac{1}{2} \frac{P}{Q} \right) V - \left(\frac{3}{2} \frac{P}{Q} + \frac{1}{2} \frac{P^2}{RQ} \right) U. \quad (81)$$

De uitdrukkingen U en V hebben het inconvenient van oneindig groot te worden voor $P + R = 0$. Wij willen daarom twee andere, U' en V' , invoeren, zoodanig dat

$$U' = U - \frac{1}{3P^2R^2(P+R)(Q^2 - PR)\{4Q^2 + (P-R)^2\}} \{ (16Q^4PR^2 + 4Q^2P^4R + 8Q^2P^3R^2 - 20Q^2P^2R^3 - \\ - P^5R^2 - 3P^4R^3 + 5P^3R^4 - P^2R^5) S^2 + (4Q^2P^3R^2 + 4Q^2PR^4 - P^4R^3 + 5P^3R^4 - 3P^2R^5 - PR^6) T^2 - \\ - 2(4Q^3P^3R + 4Q^3P^2R^2 + 8Q^3PR^3 - QP^4R^2 + QP^3R^3 - 7QP^2R^4 - QPR^5) ST \}, \\ V' = V - \frac{1}{3P^2R^2(P+R)(Q^2 - PR)\{4Q^2 + (P-R)^2\}} \{ (16Q^4RP^2 + 4Q^2R^4P + 8Q^2R^3P^2 - 20Q^2R^2P^3 - \\ - R^5P^2 - 3R^4P^3 + 5R^3P^4 - R^2P^5) T^2 + (4Q^2R^3P^2 + 4Q^2RP^4 - R^4P^3 + 5R^3P^4 - 3R^2P^5 - RP^6) S^2 - \\ - 2(4Q^3R^3P + 4Q^3R^2P^2 + 8Q^3RP^3 - QR^4P^2 + QR^3P^3 - 7QR^2P^4 - QRP^5) ST \}. \quad (\lambda)$$

Wanneer men hierin de waarden van U en V substitueert, verdwijnt de factor $P + R$ uit den noemer. Daarvoor is echter nu de factor $Q^2 - PR$ in de plaats gekomen, zoodat de uitdrukkingen U' en V' , in geval $Q^2 - PR = 0$ is, onbruikbaar worden. In dat geval kan echter $P + R$ niet 0 worden, tenzij P , Q en R ieder afzonderlijk 0 zijn, zoodat wij ons dan weder van U en V bedienen kunnen. Differentieert men (λ) ten opzichte van $\mathfrak{S}$ en substitueert men (13), (36) en (81), dan heeft men

$$\frac{dU'}{d\mathfrak{S}} = \left(\frac{2Q}{P} - \frac{3}{2} \frac{P}{Q} - \frac{1}{2} \frac{R}{Q} \right) U' + \left(\frac{3}{2} \frac{R}{Q} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{PQ} \right) V', \\ \frac{dV'}{d\mathfrak{S}} = - \left(\frac{Q}{R} - \frac{3}{2} \frac{R}{Q} - \frac{1}{2} \frac{P}{Q} \right) V' - \left(\frac{3}{2} \frac{P}{Q} + \frac{1}{2} \frac{P^2}{RP} \right) U, \quad \dots \dots \dots (82)$$

welke vergelijkingen volmaakt denzelfden vorm hebben als (81).

Zij nu $Q = F(P, R, S, T, U, V) \dots \dots \dots (g)$
eene betrekking, onafhankelijk van den stand der coördinaten, dan hebben wij door naar $\mathfrak{S}$ te differentieeren

$$\frac{dQ}{d\mathfrak{S}} = \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial S} \frac{dS}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial T} \frac{dT}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{dU}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{dV}{d\mathfrak{S}}, \dots (83)$$

of, na substitutie van (13), (36), (82) en (g)

$$R - P = 2 \frac{\partial Q}{\partial P} Q - 2 \frac{\partial Q}{\partial R} Q - \frac{\partial Q}{\partial S} \frac{2PT + RT - 2QS}{P} + \frac{\partial Q}{\partial T} \frac{2RS + PS - 2QT}{R} +$$

$$+ \frac{\partial Q}{\partial U} \left\{ \left(\frac{2Q}{P} - \frac{3}{2} \frac{P}{Q} - \frac{1}{2} \frac{R}{Q} \right) U' + \left(\frac{3}{2} \frac{R}{Q} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{PQ} \right) V' \right\} - \frac{\partial Q}{\partial V} \left\{ \left(\frac{2Q}{R} - \frac{3}{2} \frac{R}{Q} - \frac{1}{2} \frac{P}{Q} \right) V' + \left(\frac{3}{2} \frac{P}{Q} + \frac{1}{2} \frac{P^2}{QR} \right) U' \right\} = 0, (N)$$

waarin U' en V' naar willekeur door U en V vervangen kunnen worden. Van de partieele differentiaal-vergelijking (N) is de integraal

$$f \left[P + R, Q^2 - PR, \frac{PS^2 - 2QST + RT^2}{PR}, \frac{(P^4 + 3P^2R^2 + 4R^2Q^2)S^2 - 4Q(P^3 + R^3)ST + (R^4 + 3P^2R^2 + 4P^2Q^2)T^2}{P^2R^2}, \right.$$

$$\frac{U'^2P^2 + 2U'V'(2Q^2 - PR) + V'^2R^2}{Q^2PR}, \frac{U'S^2P^2(P - R) - V'T^2R^2(R - P) + V'S^2(PR^2 - P^2R - 4RQ^2) -}{QP^2R^2}$$

$$\left. - U'T^2(P^2R - PR^2 - 4PQ^2) - 4U'STP^2Q + 4V'STR^2Q \right] =$$

$$f \left[P + R, Q^2 - PR, \frac{ps^2 - 2qst + rt^2}{pr}, \frac{(p^4 + 3p^2r^2 + 4r^2q^2)s^2 - 4q(r^3 + p^3)st + (r^4 + 3p^2r^2 + 4p^2q^2)t^2}{p^2r^2}, \right.$$

$$\frac{u'^2p^2 + 2u'v'(2q^2 - pr) + v'^2r^2}{q^2pr}, \frac{u's^2p^2(p - r) - v't^2r^2(r - p) + v's^2(pr^2 - p^2r - 4pq^2) -}{qp^2r^2}$$

$$\left. - 4ustp^2q + 4v'str^2q \right] = 0, \dots \dots \dots (XLIII)$$

waarin de beteekenis van u' en v' geene opheldering behoeft.

De eerste vier der in (XLIII) voorkomende uitdrukkingen komen reeds in (XV) voor, en zijn reeds vroeger door **P**, **Q**, **S**, **T** voorgesteld, de beide laatsten willen wij respectievelijk door **U'** en **V'** uitdrukken, zoodat (XLIII) wordt

$$f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{U}', \mathbf{V}') = 0.$$

§ 22. Van de eerste vier dezer grootheden hebben wij reeds in § 11 de beteekenis nagegaan. Om ook tot die van de beide laatste te geraken, differentieeren wij de vergelijkingen (37) nog eenmaal, waardoor wij vinden

$$a = -f_1''(x)[y - f_2(x)] - f_2''(x)[y - f_1(x)] + 4f_1'''(x)f_2'(x) + 4f_2'''(x)f_1'(x) + 6f_1''(x)f_2''(x),$$

$$b = -f_1'''(x) - f_2'''(x), c = 0, d = 0, e = 0 \dots \dots \dots (84)$$

Stelt men nu in (84) $x = x_1$, $y = y_1$, $f'(x) = y'$, $f''(x) = y''$, $f'''(x) = y'''$, dan heeft men

$$a = 4(y_1'''y_2' + y_2'''y_1') + 6y_1''y_2'', b = -(y_1''' + y_2'''), c = 0, d = 0, e = 0. \dots \dots \dots (85)$$

Brengt men de vergelijkingen (22), (38) en (85) over in de uitdrukkingen u' en v' , dan vindt men

$$u' = 32(y_1'''y_2' + y_2'''y_1') - 96y_1''^2 \frac{y_1'y_2'}{1 + y_1'^2} - 96y_2''^2 \frac{y_1'y_2'}{1 + y_2'^2},$$

$$v' = -32(y_1'''y_2'^3 + y_2'''y_1'^3) + 96y_1''^2 \frac{y_1'y_2'^3}{1 + y_1'^2} + 96y_2''^2 \frac{y_1'y_2'^3}{1 + y_2'^2},$$

en dit weder substitueerende in **U'** en **V'**, hebben wij

$$\mathbf{U}' = -1024(y_1' - y_2')^2 \left\{ y_1''y_2''' - 3y_1''y_2''^2 \frac{y_2'}{1 + y_2'^2} - 3y_2''y_1''^2 \frac{y_1'}{1 + y_1'^2} + 9y_1''^2y_2''^2 \frac{y_1'y_2'}{(1 + y_1'^2)(1 + y_2'^2)} \right\},$$

$$\mathbf{V}' = 2304(y_1' - y_2')^2 \{ y_1''y_2''^2(1 + y_2'^2) + y_2''y_1''^2(1 + y_1'^2) - 3y_1''^2y_2''^2(y_1' + y_2') \} \dots \dots \dots (87)$$

In het vervolg zullen wij bewijzen, dat, wanneer eene parabool de nauwst mogelijke aanraking

(eene aanraking van de derde of hoogere orde) met eene kromme heeft, de hoek tusschen de middellijn van de parabool en de gemeenschappelijke raaklijn gevonden wordt uit

$$\cot \theta = \frac{y''(1+y'^2) - 3y''^2 y'}{3y''^2} \quad ^1) \dots \dots \dots (88)$$

Nu vindt men gemakkelijk uit (40) en (87)

$$-\frac{9U'Q(P^2+4Q)}{64S^2} = \frac{y_1'''(1+y_1'^2) - 3y_1''^2 y_1'}{3y_1''^2} \times \frac{y_2'''(1+y_2'^2) - 3y_2''^2 y_2'}{3y_2''^2} \dots \dots (89)$$

of, als wij de waarden van θ voor de twee takken der kromme door θ_1 en θ_2 voorstellen,

$$-\frac{9U'Q(P^2+4Q)}{64S^2} = \cot \theta_1 \cdot \cot \theta_2 \dots \dots \dots (XLIV)$$

Eene tweede betrekking tusschen θ_1 en θ_2 is de volgende

$$\frac{3V'Q}{4S^2} = \frac{y_1'''(1+y_1'^2) - 3y_1''^2 y_1'}{3y_1''^2} + \frac{y_2'''(1+y_2'^2) - 3y_2''^2 y_2'}{3y_2''^2} = \cot \theta_1 + \cot \theta_2 \dots \dots (XLV)$$

Door (XLIV) in (XLV) te deelen hebben wij nog

$$\frac{16V'}{3U'(P^2+4Q)} = \operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2 \dots \dots \dots (XLVI)$$

Uit (XLIV) blijkt, dat voor

$$U' = 0 \dots \dots \dots (XLVII)$$

~~eene van de waarden θ_1 of θ_2 gelijk aan 0 wordt.~~ De parabool, die de nauwste aanraking met één van de takken der kromme heeft, raakt dien tak aan in een punt, waar hare middellijn loodrecht op de raaklijn staat, en dus in den top. Zulk een punt heet een *toppunt*. Daar eene parabool in haren top eene aanraking van de derde orde met den kromtecirkel heeft, zal dit ook met eene kromme, die een toppunt heeft, in dat punt het geval zijn. Een toppunt heeft bovendien nog de eigenschap dat de kromtestraal er een maximum- of minimumwaarde bereikt ²⁾.

In dit geval wordt de andere waarde van θ blijkens (XLV) gevonden uit

$$\cot \theta_2 = \frac{3V'Q}{4S^2} \dots \dots \dots (XLVIII)$$

De voorwaarde, dat ook de tweede tak een toppunt moet hebben, is dus

$$V' = 0.$$

Ingeval y_1' en y_2' geen van beide 0 of ∞ zijn, en $y_1' + y_2'$ evenmin verdwijnt, en dus noch p , noch q , noch r gelijk aan 0 zijn, kunnen de beide vergelijkingen

$$U' = 0, V' = 0 \dots \dots \dots (XLIX)$$

vervangen worden door

$$u' = 0, v' = 0; \dots \dots \dots (L)$$

hetwelk blijkt, wanneer men $y_1''' - 3 \frac{y_1''^2 y_1'}{1+y_1'^2}$ en $y_2''' - 3 \frac{y_2''^2 y_2'}{1+y_2'^2}$ uit de tweede leden van (86), gelijk aan 0 gesteld, elimineert; men bekomt dan namelijk

$$\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'^3 & y_2'^3 \end{vmatrix} = y_1' y_2' (y_1'^2 - y_2'^2) = 0, \dots \dots \dots (90)$$

waaraan niet voldaan kan worden in de aangenomen onderstellingen. De vergelijkingen (L) kunnen dus niet plaats hebben, zonder dat $y_1''' - 3 \frac{y_1''^2 y_1'}{1+y_1'^2}$ en $y_2''' - 3 \frac{y_2''^2 y_2'}{1+y_2'^2}$ beiden 0 zijn, en dus zonder dat de vergelijkingen (XLIX) waarheid zijn.

¹⁾ Zie § 51.

²⁾ Zie over deze punten § 51.

§ 23. In het geval

$$S = 0 \quad \dots \dots \dots (XVIII)$$

worden de eerste leden van (XLIV) en (XLV) beide oneindig groot, waaruit volgt, dat ééne van de waarden van θ gelijk aan 0 moet zijn; in eene van de krommingsparabolen (dezen naam willen wij aan de reeds in de vorige § genoemde parabolen geven) valt dus de middellijn met de raaklijn samen, zoodat de parabool zelve overgaat in twee samenvallende rechte lijnen. Dit heeft natuurlijk plaats bij dien tak, die volgens § 11 in dit geval een buigpunt heeft. De andere waarde van θ vindt men blijkens (XLVI) uit

$$tg \theta_2 = - \frac{16 V'}{3 U(P^2 + 4Q)} \quad \dots \dots \dots (LI)$$

Opdat deze tak een toppunt hebbe, moet dus even als in het algemeene geval

$$U' = 0 \quad \dots \dots \dots (XLVII)$$

zijn; deze voorwaarde is echter niet voldoende. In dit geval wordt namelijk, volgens § 11, $y''_1 = 0$, zoodat de vergelijkingen (87) overgaan in

$$U' = -1024 (y'_1 - y'_2)^2 \left\{ y_2'' - 3 y_2'^2 \frac{y_2'}{1 + y_2'^2} \right\} y_1'', \quad \dots \dots \dots (91)$$

$$V' = 2304 (y'_1 - y'_2)^2 y_1''' y_2'' (1 + y_1''),$$

en de tweede vergelijking (40) in

$$T = 144 (1 + y_1'^2)^3 y_2''^2 \quad \dots \dots \dots (92)$$

Eene kromme, die in een van hare punten met de raaklijn eene aanraking van de tweede orde heeft, kan eene aanraking van de derde orde hebben met één van de takken eener lemniscaat in het middelpunt van die kromme. De as van die lemniscaat is, zoo als wij zien zullen, bepaald door de vergelijking

$$\sigma^2 = \pm \frac{(1 + y'^2)^2}{3 y''} \quad \dots \dots \dots (93)$$

waarin σ de bedoelde as voorstelt.

Door verschillende combinatiën van de vergelijkingen (91) en (92) vinden wij

$$\frac{256 TQ}{9 U'(P^2 + 4Q)} = \frac{(1 + y_1'^2)^2 y_2''^2}{\{y_2'''(1 + y_2'^2) - 3 y_2 y_2'\} y_1'''} = \pm \sigma_1^2 tg \theta_2 \quad \dots \dots \dots (LII)$$

$$\frac{16 TQ}{3 V'} = \frac{(1 + y_1'^2)^2}{3 y_1'''} = \pm \sigma_1^2 \quad \dots \dots \dots (LIII)$$

Uit (LII) blijkt, dat voor $U' = 0$ of σ_1 , of $tg \theta_2$ oneindig groot moet zijn. Uit (LIII) zien wij, dat het eerste het geval zal zijn, wanneer ook $V' = 0$ is; het tweede, wanneer V' niet $= 0$ is.

Is dus $U' = 0$ en $V' \geq 0$, dan heeft de tweede tak der kromme een toppunt. Is echter tegelijk $U' = 0$ en $V' = 0$, dan wordt de as van den reeds meermalen besproken lemniscaat oneindig groot; de lemniscaat zelf gaat daardoor over in een stelsel van twee elkander loodrecht snijdende rechte lijnen; de eerste tak der kromme heeft dus met eene rechte lijn, hare raaklijn, eene aanraking, die minstens van de derde orde is. In het algemeen zal deze tak dus een buigpunt van de tweede soort hebben.

Wanneer niet alleen $U' = 0$ en $V' = 0$, maar ook nog

$$\frac{V'}{U'} = 0 \quad \dots \dots \dots (LIV)$$

is, zal volgens (LI) ook $tg \theta_2 = \infty$ zijn, en zullen dus beide omstandigheden tegelijk plaats hebben.

§ 24. In het geval

$$S = 0, \quad T = 0, \quad \dots \dots \dots (XX)$$

¹⁾ Zie § 52.

waarvoor wij in de meeste gevallen ook $s = 0$, $t = 0$ kunnen stellen, verdwijnen drie van de zes in (XLIII) voorkomende uitdrukkingen, terwijl wij slechts twee betrekkingen tusschen de grootheden p , q , r , k enz. verondersteld hebben. Wij kunnen dus de integraal van (N) in dit geval niet rechtstreeks uit het algemeene geval afleiden. Wij vinden voor die integraal langs andere wegen

$$f\left(P+R, Q^2-PR, \frac{U^2P^2+2UPV(2Q^2-PR)+V^2R^2}{Q^2PR^2}, \frac{UP^3+2UP^2R+(UR+VP)(4Q^2-3PR)+2VPR^2+VR^3}{PR}\right) = \\ = f\left(p+r, q^2-pr, \frac{2u^2p^2+2uv(2q^2-pr)+v^2r^2}{q^2pr}, \frac{up^3+2up^2r+(ur+vp)(4q^2-3pr)+2vpr^2+vr^3}{pr}\right) = 0. \quad (\text{LV})$$

Het onderscheid tusschen U' en U , en V' en V vervalt in dit geval geheel, daar in al deze uitdrukkingen al de termen verdwijnen, die niet ééne der grootheden A , B , C , D of E tot factor hebben. Volgens § 11 hebben in dit geval beide takken der kromme buigpunten, die in het algemeen van de eerste soort zijn, en zijn zoowel y_1'' als y_2'' gelijk aan 0; en de substitutie van de vergelijkingen (22), (38) en (85) in de uitdrukkingen voor u en v geeft ons

$$u = 32(y_1'''y_2' + y_2'''y_1'), \quad v = -32(y_1'''y_2'^3 + y_2'''y_1'^3); \quad \dots \quad (94)$$

en, wanneer wij deze beide waarden substitueeren in de beide laatste uitdrukkingen in (LV), die wij door U en V zullen voorstellen,

$$U = -1024(y_1' - y_2')^2 y_1'''y_2'', \dots \quad (95)$$

$$V = 64(y_1' - y_2') \{ y_1'''(1 + y_2'^2)^2 + y_2'''(1 + y_1'^2)^2 \}.$$

Hieruit leidt men gemakkelijk de volgende betrekkingen af

$$\pm \sigma_1^2 \sigma_2^2 = \frac{64 Q (4 Q + P^2)^2}{9 U}, \dots \quad (\text{LVI})$$

$$\pm \sigma_1^2 \pm \sigma_2^2 = \frac{16 V \sqrt{Q}}{3 U}, \dots \quad (\text{LVII})$$

De teekens moeten steeds zoo genomen worden, dat σ_1 en σ_2 beide bestaanbaar zijn; terwijl in (LVII) de bovenste en onderste teekens al of niet bij elkander behooren, naarmate de hoeken, die de beide lemniscaatassen maken met de raaklijnen, waarbij zij behooren, in dezelfde richting gerekend, gelijk of elkaanders supplementen zijn. Het eerste geval heeft plaats, wanneer het tweede lid van (LVI) positief, het tweede wanneer dit negatief is. Dit alles geldt natuurlijk slechts wanneer $q^2 - pr = Q$ positief is; is deze uitdrukking negatief, dan zijn σ_1 en σ_2 onbestaanbaar, en dit bepaalt dan de keuze der teekens. De regel voor de teekens kan derhalve ook aldus worden uitgedrukt. Indien U positief is, heeft het eerste lid van (LVI) het positieve teeken, terwijl in (LVII) σ_1^2 en σ_2^2 verschillende teekens hebben. Is U negatief, dan komt voor het eerste lid van (LVI) het teeken — en in (LVII) hebben σ_1^2 en σ_2^2 gelijke teekens. De grootste van de beide grootheden σ_1^2 en σ_2^2 heeft het positieve of negatieve teeken, naarmate U en V gelijke of ongelijke teekens hebben.

Deelt men (LVII) door (LVI), dan heeft men

$$\pm \left(\frac{1}{\sigma_1^2} \pm \frac{1}{\sigma_2^2} \right) = \frac{3 V}{4 (4 Q + P^2) \sqrt{Q}} \dots \quad (\text{LVIII})$$

Uit (LVII) en (LVI) ziet men nu, dat, opdat eene van de waarden van σ , σ_1 b.v. oneindig groot worde, $U = 0$ moet zijn. Uit (LVIII) volgt dan, dat de andere bepaald wordt door de vergelijking

$$\pm \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{3 V}{4 (4 Q + P^2) + Q}, \dots \quad (\text{LIX})$$

en dat dus, opdat ook $\sigma_2 = \infty$ zij, vereischt wordt, dat $V = 0$ zij.

$$U = 0 \dots \quad (\text{LX})$$

is dus de voorwaarde, dat een van de takken der kromme eene aanraking van de derde orde met de

raaklijn, en dus in het algemeen een buigpunt van de tweede soort vertoont; terwijl

$$U = 0, V = 0 \dots \dots \dots (LXI)$$

de voorwaarden zijn, dat dit met beide takken het geval is.

De vergelijkingen (LXI) kunnen weder vervangen worden door

$$u = 0, v = 0, \dots \dots \dots (LXII)$$

mits geene van de drie grootheden p , q en r verdwijne. Dit wordt op dezelfde wijze bewezen als voor U' en V' in § 22.

De vergelijking

$$V = 0 \dots \dots \dots (LXIII)$$

drukt, wanneer U positief is, op zich zelf uit, dat de beide lemniscaten gelijk zijn, en met betrekking tot de raaklijn gelijke ligging hebben. Is in dit geval bovendien $p + r = 0$, zoodat de takken der kromme loodrecht op elkander staan, dan is dit ook met de beide lemniscataassen het geval, en de twee takken van de eene lemniscaat raken de twee takken van de andere aan. In dit geval kan echter aan (LXIII) niet anders worden voldaan dan door

$$ur + vp = 0 \dots \dots \dots (LXIV)$$

In geval U negatief is kan de vergelijking (LXIII) niet plaats hebben ¹⁾. Telt men dan echter het vierkant van (LVII) en het viervoud van (LVI) bij elkander, dan heeft men

$$(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2 = 256 \frac{Q \{ V^2 + (4Q + P^2) U \}}{9U} \dots \dots \dots (LXV)$$

De vergelijking

$$V^2 + (4Q + P^2) U = 0 \dots \dots \dots (LXVI)$$

bevat dus de voorwaarde dat beide lemniscaten gelijk zijn, en verschillende ligging hebben met betrekking tot de bijbehorende raaklijnen. Is hier $p + r = 0$, dan kan aan (LXVI) alleen worden voldaan door

$$ur - vp = 0 \dots \dots \dots (LXVII)$$

In dit geval vallen de beide lemniscaten geheel samen.

De vergelijking (LXVI) kan op hare beurt niet plaats hebben, wanneer U positief is.

§ 25. Thans ligt ter beschouwing aan de beurt het geval

$$q^2 - pr = 0, \dots \dots \dots (X)$$

waarvan wij de behandeling § 14 hebben afgebroken.

De integraal van (N) wordt in dit geval

$$f \left(P+R, \frac{S \sqrt{P+T} \sqrt{R}}{\sqrt{PR}}, \frac{S(P-2R) \sqrt{P-T} \sqrt{R-2P} \sqrt{R}}{PR}, \frac{UP+VR}{PR}, \frac{U(3R-P)P-V(3P-R)R}{PR \sqrt{PR}} \right) = \\ f \left(p+r, \frac{s \sqrt{p+t} \sqrt{r}}{\sqrt{pr}}, \frac{s(p-2r) \sqrt{p-t} \sqrt{r-2p} \sqrt{r}}{pr}, \frac{up+vr}{pr}, \frac{u(3r-p)p-v(3p-r)r}{pr \sqrt{pr}} \right) = 0. \dots \dots (LXVIII)$$

In dit geval heeft de kromme, zooals wij gezien hebben, in het algemeen een keerpunt van de eerste soort. In het algemeene geval zouden wij ter verdere onderscheiding de hulp van tamelijk ingewikkelde kromme lijnen moeten inroepen. In het geval

$$\frac{s(p-2r) \sqrt{p-t} \sqrt{r-2p} \sqrt{r}}{pr} = 0 \dots \dots \dots (XXVII)$$

echter, waarin de kromme eene nauwere aanraking (eene aanraking van de orde $\frac{3}{2}$) met eene semicubische parabool heeft, kunnen wij de voorwaarden zoeken voor eene aanraking van nog hoogere orde met die kromme.

¹⁾ Uit de eerste vergelijking (95) ziet men namelijk, dat y_1'' en y_2'' gelijke teekens moeten hebben, en uit de tweede, dat in die veronderstelling V niet 0 kan zijn.

Nemen wij weder hetzelfde coördinatenstelsel aan als in § 14, dan hebben wij

$$\frac{r(\Delta y)^2}{1.2} + \frac{k(\Delta x)^3 + 3l(\Delta x)^2 \Delta y + 3m(\Delta x)(\Delta y)^2 + n(\Delta y)^3}{1.2.3} + \\ + \frac{a(\Delta x)^4 + 4b(\Delta x)^3(\Delta y) + 6c(\Delta x)^2(\Delta y)^2 + 4d(\Delta x)(\Delta y)^3 + e(\Delta y)^4}{1.2.3.4} + R = 0; \quad (J)$$

waarin nu ten gevolge van (XXVII) $l = 0$ wordt.

Voor de semicubische parabool is

$$\mu(\Delta y)^2 - (\Delta x)^3 = 0 \quad \dots \dots \dots (96)$$

Voor deze zijn dus al de termen van hoogere orde dan $(\Delta x)^3$ en $(\Delta y)^2$ gelijk aan 0; in (J) zijn de termen, die na $\frac{l}{2}(\Delta x)^2 \Delta y$ van de laagste orde zijn, $\frac{m}{2} \frac{\Delta x (\Delta y)^2}{2}$ en $\frac{(a \Delta x)^4}{2 \cdot 4}$. Substitueeren wij nu in de eerste van deze termen de waarde van $(\Delta y)^2$ uit (I''), dan is de som van beide termen

$$\left(a - \frac{4km}{r}\right) \frac{(\Delta x)^4}{2^4}.$$

Deze uitdrukking gedeeld door den coëfficient van $(\Delta y)^2$, dat is door r , moet dus gelijk aan 0 zijn. Zij is bij den aangenomen stand der coördinaten gelijk aan

$$- \frac{1}{2} \frac{up + vr}{pr(p+r)^2};$$

en daar deze uitdrukking van den stand der coördinaten onafhankelijk is, zal onder alle omstandigheden de gezochte voorwaarde zijn

$$\frac{up + vr}{pr} = \vee U = 0. \quad \dots \dots \dots (LXIX)$$

De aanraking tusschen beide krommen klimt in dit geval tot de tweede orde op.

Ook de voorwaarde voor eene aanraking van nog hoogere orde, en wel van de orde $\frac{5}{2}$, laat zich nog met behulp van differentiaalquotienten van de tweede, derde en vierde orde uitdrukken. Daartoe wordt vereischt, dat de termen

$$\frac{n(\Delta y)^3}{6} \text{ en } \frac{b(\Delta x)^3 \Delta y}{6}$$

uit de vergelijking (J) verdwijnen.

Als wij in de eerste de waarde van $(\Delta y)^2$ uit (I'') substitueeren, wordt de som van beide termen

$$\left(\frac{b}{6} - \frac{nk}{18r}\right) (\Delta x)^3 \Delta y,$$

zoodat de gezegde voorwaarde luidt

$$b - \frac{nk}{3r} = 0;$$

of daar r niet 0 kan zijn

$$br^2 - \frac{nkr}{3} = 0, \quad \dots \dots \dots (97)$$

welke vergelijking identiek is met

$$\frac{up(3r-p) - vr(3p-r)}{pr \vee pr} = 0^1), \quad \dots \dots \dots (LXX)$$

en, daar deze vergelijking van den coördinatenstand onafhankelijk is, bevat zij de gezochte voorwaarde in het algemeen.

¹⁾ Altijd in aanmerking nemende de vergelijking (XXVII).

§ 26. In het geval

$$\frac{s\sqrt{p}+t\sqrt{r}}{\sqrt{pr}} = \sqrt{S} = 0 \quad \dots \quad (\text{XXV})$$

wordt in (J) $h = 0$; zoodat die vergelijking overgaat in

$$\frac{r(\Delta y)^2}{1.2} + \frac{3l(\Delta x)^2 \Delta y + 3m \Delta x (\Delta y)^2 + n(\Delta y)^3}{1.2.3} + \frac{a(\Delta x)^4 + 4b(\Delta x)^3 \Delta y + 6c(\Delta x)^2 (\Delta y)^2 + 4d \Delta x (\Delta y)^3 + e(\Delta y)^4}{1.2.3.4} + R = 0 \quad \dots \quad (G)$$

Hieraan kan slechts door ééne onderstelling voldaan worden namelijk dat Δy van dezelfde orde is als (Δx) . De vergelijking (G) gaat hierdoor over in

$$\frac{r}{2}(\Delta y)^2 + \frac{l}{2}(\Delta x)^2 \Delta y + \frac{a}{24}(\Delta x)^4 + R' = 0; \quad \dots \quad (G')$$

waaruit wij reeds in § 14 de conclusie getrokken hebben, dat de kromme in dit geval twee doorlopende takken vertoont, die met elkander en met de raaklijn eene aanraking hebben, welke minstens van de eerste orde is; of dat het punt een afgezonderd punt is. Ook de beteekenis van de vergelijking

$$\frac{s(p-2r)\sqrt{p}-t(r-2p)\sqrt{r}}{pr} = 0 \quad \dots \quad (\text{XXVII})$$

hebben wij daar reeds nagegaan.

Hier kunnen wij verder gaan en de wortels van (G') onderzoeken. Deze zijn

$$\Delta y = -\frac{l \pm \sqrt{\frac{1}{4}l^2 - \frac{1}{6}ar}}{r}(\Delta x)^2 + R' \quad \dots \quad (98)$$

De coëfficiënt van (Δx) in het tweede lid is gelijk aan de uitdrukking

$$-\frac{1}{2} \frac{s(p-2r)\sqrt{p}-t(r-2p)\sqrt{r}}{pr(p+r)^{\frac{1}{2}}} \pm \sqrt{\frac{1}{6} \frac{up+vr}{pr(p+r)^3} + \frac{\{s(p-2r)\sqrt{p}-t(r-2p)\sqrt{r}\}^2}{36p^2r^2(p+r)^5}}.$$

Het bestaanbaar of onbestaanbaar zijn van de waarden van Δy hangt dus af van het positief of negatief zijn van

$$\frac{1}{6} \frac{up+vr}{pr(p+r)^3} + \frac{\{s(p-2r)\sqrt{p}-t(r-2p)\sqrt{r}\}^2}{36p^2r^2(p+r)^5}.$$

In het eerste geval zal de kromme dus twee doorlopende takken, in het tweede een afgezonderd punt hebben.

De beide waarden van Δy in (98) hebben hetzelfde of verschillende teekens naarmate $\frac{a}{r}$ positief of negatief is; $\frac{a}{r}$ is echter hetzelfde als $-\frac{1}{2} \frac{up+vr}{pr(p+r)^3}$. De beide takken van de kromme keeren elkander

dus de bolle zijde toe, wanneer $\frac{up+vr}{pr(p+r)^3}$ positief is; zij liggen aan dezelfde zijde van de raaklijn, wanneer die uitdrukking negatief is. Is

$$\frac{up+vr}{pr} = 0, \quad \dots \quad (\text{LXXI})$$

dan is eene van de waarden van Δy van hoogere orde dan $(\Delta x)^2$, en wel van dezelfde orde als $(\Delta x)^3$. In die onderstelling wordt namelijk (G)

$$\frac{l(\Delta x)^2 \Delta y}{6} + \frac{\frac{d^3 f}{dx^3}(\Delta x)^5}{120} + R = 0, \quad \dots \quad (K)$$

of

$$\Delta y = -\frac{\frac{d^5 f}{dx^5}(\Delta x)^3}{20l} + R' \quad \dots \quad (K')$$

Deze waarde van Δy verandert met Δx van teeken. De tak, waarbij zij behoort, snijdt dus de raaklijn in het beschouwde punt, en heeft daarmede eene aanraking van de tweede orde. Deze tak vertoont dus een buigpunt van de eerste soort.

Dit alles geldt niet meer, wanneer $\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} = 0$ mogt zijn; dan wordt de aanraking van de derde orde, tenzij nog meer volgende partieele differentiaalquotienten verdwenen, waardoor de aanraking van nog hoogere orde zou worden. Het is niet moeielijk dit verder voort te zetten; alleen zouden wij, om de algemeene kenmerken voor de gevonden bijzonderheden te vinden, betrekkingen tusschen de partieele differentiaalquotienten van hoogere dan de vierde orde noodig hebben. Van den anderen tak der kromme blijft gelden, wat in het algemeene geval van beide gezegd is.

§ 27. Had niet vergelijking (LXXI), maar de volgende

$$\frac{up+vr}{pr} + \frac{\{s(p-2r)\sqrt{p}+t(r-2p)\sqrt{r}\}^2}{6p^2r^2(p+r)^2} = 0 \quad \dots \quad (LXXII)$$

plaats, dan zouden de waarden van Δy uit (98), op een verschil van hoogere orde na, gelijk zijn. De eerste drie termen van het eerste lid van (G') vormen in dit geval een volkomen vierkant, en het zal dus van het teeken van R' afhangen, of de beide waarden van Δy bestaanbaar of onbestaanbaar zullen zijn. De in R' begrepen termen van de laagste orde, die dus het teeken van R' bepalen, zijn

$$\frac{m \Delta x (\Delta y)^2}{2} + \frac{b (\Delta x)^3 (\Delta y)}{6} + \frac{\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} (\Delta x)^5}{120} =$$

$$\left(60 m (\Delta y)^2 + 20 l \Delta y (\Delta x)^2 + \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} (\Delta x)^4 \right) \frac{\Delta x}{120}$$

De tusschen haakjes staande vorm ondergaat door eene teekenverandering van Δx slechts veranderingen van hoogere orde, de geheele uitdrukking, en dus ook R' verandert derhalve van teeken met Δx . Zijn dus de waarden van Δy bestaanbaar voor positieve waarden van Δx , dan zijn zij voor negatieve onbestaanbaar en omgekeerd. De kromme bezit dus in het beschouwde punt twee afgebroken takken, die dezelfde raaklijn hebben en aan dezelfde zijde van de raaklijn gelegen zijn. Een punt, waar dit plaats heeft, noemt men een *keerpunt van de tweede soort*. Het verschil tusschen de waarden van Δy is hier van de orde $\frac{2}{3}$, derhalve de aanraking van de beide takken onderling van de orde $\frac{2}{3}$.

Dit alles zou niet meer waar zijn, wanneer bovenstaande uitdrukking gelijk aan 0 was. Het teeken van R' zou dan bepaald worden door

$$\frac{n(\Delta y)^3}{6} + \frac{c(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{4} + \frac{\frac{\partial^5 f}{\partial x^4 \partial y} (\Delta x)^4 \Delta y}{24} + \frac{\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} (\Delta x)^6}{720},$$

en dus van dat van Δx volkomen onafhankelijk zijn. De kromme zou dus in dit geval twee doorlopende takken bezitten, die met elkander eene aanraking van de tweede orde zouden hebben; of het punt zou een afgezonderd punt zijn. Het is duidelijk hoe men deze beschouwingen kan voortzetten. Hierbij geldt echter dezelfde opmerking, die aan het slot van § 26 gemaakt is.

Hebben de vergelijkingen (XXVII) en (LXXI), en dus ook (LXXII), tegelijk plaats, dan zijn in (G) beide l en a gelijk aan 0. De eenige veronderstelling waardoor dan aan die vergelijking voldaan kan worden is, dat $(\Delta y)^2$ van dezelfde orde is als $(\Delta x)^5$. Zij neemt daardoor den vorm aan

$$\frac{r(\Delta y)^2}{2} + \frac{\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} (\Delta x)^5}{120} + R = 0; \quad \dots \quad (L)$$

Δy gaat dus door eene teekenverandering van (Δx) van bestaanbaar in onbestaanbaar over, of omgekeerd; terwijl de twee waarden van Δy , als zij bestaanbaar zijn, verschillende teekens hebben. Wij hebben dus

hier weder een keerpunt van de eerste soort. De takken hebben hier echter eene aanraking van de orde $\frac{3}{2}$ met de raaklijn en met elkander.

§ 28. Het geval van § 26 laat zich nog op eene andere wijze behandelen.

Brengt men namelijk de vergelijking der kromme weder onder den vorm (E) en substitueert men de daaraan beantwoordende waarden van p , q enz. in u en v , in aanmerking nemende, dat hier $y_1' = y_2'$ is; dan vindt men

$$\begin{aligned} u &= 32(y_1''' + y_2''')y_2' - 96 \frac{(y_1'' + y_2'')^2}{1 + y_1'^2} + 48 y_1'' y_2'', \\ v &= -32(y_1''' + y_2''')y_1'^3 + 96 \frac{(y_1'' + y_2'')^2 y_1'^4}{1 + y_1'^2} - 144 y_1'' y_2'' y_1'^2; \end{aligned} \quad (99)$$

en de substitutie hiervan geeft

$$\frac{up + vr}{pr} = 48 y_1'' y_2'', \quad (100)$$

terwijl wij door substitutie van (39) hebben

$$\frac{s(p-2r)\sqrt{p-t(r-2p)}\sqrt{r}}{pr} = -6\sqrt{2}(y_1'' + y_2'')(1 + y_1'^2). \quad (101)$$

Door combinatie van deze vergelijkingen met

$$(p+r) = 2(1 + y_1'^2)$$

heeft men

$$-\frac{up + vr}{6pr(p+r)^3} = \frac{y_1'' y_2''}{(1 + y_1'^2)^3} = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (LXXIII)$$

en

$$-\frac{s(p-2r)\sqrt{p-t(r-2p)}\sqrt{r}}{6pr(p+r)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \frac{y_1'' + y_2''}{(1 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}; \quad (LXXIV)$$

waaruit zich gemakkelijk al de uitkomsten van § 26 laten afleiden. Bovendien verschaft ons de substitutie van (99)

$$\frac{u(3r-p)p - v(3p-r)r}{pr\sqrt{pr}} = 32(y_1''' + y_2''')(1 + y_1'^2) - 96 y_1'(y_1''^2 + y_2''^2); \quad (102)$$

dus

$$\frac{u(3r-p)p - v(3p-r)r}{12(p+r)^3 pr\sqrt{pr}} = \frac{(y_1''' + y_2''')(1 + y_1'^2) - 3 y_1'(y_1''^2 + y_2''^2)}{3(1 + y_1'^2)^3} = \frac{tg \theta_1}{\varepsilon_1} + \frac{tg \theta_2}{\varepsilon_2}. \quad (LXXV)$$

In het geval van vergelijking (XXVII) wordt $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$. Is dus in dit geval bovendien

$$\frac{u(3r-p)p - v(3p-r)r}{pr\sqrt{pr}} = 0, \quad (LXXVI)$$

dan is ook $tg \theta_1 = tg \theta_2$; en de takken zouden eene aanraking van de derde orde met elkander hebben, als een daarvan om de raaklijn werd omgeslagen.

§ 29. Wij zijn met onze beschouwingen genaderd tot het geval

$$p = q = r = 0. \quad (XI)$$

De vergelijking (XXXIX) wordt in deze onderstelling

$$\begin{aligned} f[(K+M)^2 + (L+N)^2, L^2 - KM + M^2 - LN, 4(L^2 - KM)(M^2 - LN) - (KM - LN)^2, A + 2C + E, (A+C)^2 + \\ + 2(B+D)^2 + (C+E)^2, (B^2 - AC) + 2(C^2 - BD) + (D^2 - CE), 4(B^2 - AC + C^2 - BD)(C^2 - BD + D^2 - CE) - \\ - \{(AD - BC) + (BE - DC)\}^2, \{(B^2 - AC) - (D^2 - CE)\}(KN - LM) - \{(M^2 - LN) - (K^2 - KM)\} \{(AD - BC) - \\ - (BE - DC)\}] = 0, \quad (LXXVII) \end{aligned}$$

en het stelsel vergelijkingen (68) en (28)

$$\begin{aligned}
A &= a\alpha + 4ck, & K &= ak, \\
B &= ab + 3cl + dk, & L &= al, \\
C &= ac + 2dl + 2cm, & M &= am, \\
D &= ad + 3dm + cn, & N &= an. \\
E &= ae + 4dn,
\end{aligned} \quad (103)$$

Laat nu

$$C = F(K, L, M, N, A, B, D, E) \quad (h)$$

eene betrekking zijn, die onafhankelijk is van den vorm der vergelijking, dan hebben wij door naar a, c en d te differentieeren,

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{da} &= \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{da} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{da} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{da} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{da} + \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{da} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{da} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{da} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{da}, \\
\frac{dC}{dc} &= \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{dc} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{dc} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{dc} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{dc} + \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{dc} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{dc} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{dc} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{dc}, \\
\frac{dC}{dd} &= \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{dd} + \frac{\partial F}{\partial L} \frac{dL}{dd} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{dM}{dd} + \frac{\partial F}{\partial N} \frac{dN}{dd} + \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{dd} + \frac{\partial F}{\partial B} \frac{dB}{dd} + \frac{\partial F}{\partial D} \frac{dD}{dd} + \frac{\partial F}{\partial E} \frac{dE}{dd};
\end{aligned} \quad (104)$$

hetwelk door substitutie van (h) en van de volgende vergelijkingen, die men bekomt door (103) te differentieeren,

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{da} &= a, \frac{dB}{da} = b, \frac{dC}{da} = c, \frac{dD}{da} = d, \frac{dE}{da} = e, \frac{dK}{da} = k, \frac{dL}{da} = l, \frac{dM}{da} = m, \frac{dN}{da} = n, \\
\frac{dA}{dc} &= 4k, \frac{dB}{dc} = 3l, \frac{dC}{dc} = 2m, \frac{dD}{dc} = n, \frac{dE}{dc} = 0, \frac{dK}{dc} = \frac{dL}{dc} = \frac{dM}{dc} = \frac{dN}{dc} = 0, \\
\frac{dA}{dd} &= 0, \frac{dB}{dd} = k, \frac{dC}{dd} = 2l, \frac{dD}{dd} = 3m, \frac{dE}{dd} = 4n, \frac{dK}{dd} = \frac{dL}{dd} = \frac{dM}{dd} = \frac{dN}{dd} = 0,
\end{aligned} \quad (105)$$

overgaat in

$$c = \frac{\partial C}{\partial K} k + \frac{\partial C}{\partial L} l + \frac{\partial C}{\partial M} m + \frac{\partial C}{\partial N} n + \frac{\partial C}{\partial A} a + \frac{\partial C}{\partial B} b + \frac{\partial C}{\partial D} d + \frac{\partial C}{\partial E} e, \quad (106)$$

$$2m = \frac{\partial C}{\partial A} 4k + \frac{\partial C}{\partial B} 3l + \frac{\partial C}{\partial D} n, \quad (107)$$

$$2l = \frac{\partial C}{\partial B} k + \frac{\partial C}{\partial D} 3m + \frac{\partial C}{\partial E} 4n, \quad (108)$$

Door deze vergelijkingen met a, c en d te vermenigvuldigen en (103) te substitueeren hebben wij

$$\begin{aligned}
C &= \frac{\partial C}{\partial K} K + \frac{\partial C}{\partial L} L + \frac{\partial C}{\partial M} M + \frac{\partial C}{\partial N} N + \frac{\partial C}{\partial A} A + \frac{\partial C}{\partial B} B + \frac{\partial C}{\partial D} D + \frac{\partial C}{\partial E} E + \frac{c}{a} \left(2M - 4 \frac{\partial C}{\partial A} K - 3 \frac{\partial C}{\partial B} L - \frac{\partial C}{\partial D} N \right) \\
&+ \frac{d}{a} \left(2L - \frac{\partial C}{\partial B} K - 3 \frac{\partial C}{\partial D} M - 4 \frac{\partial C}{\partial E} N \right), \quad (109)
\end{aligned}$$

$$2M = 4 \frac{\partial C}{\partial A} E + 3 \frac{\partial C}{\partial B} L + \frac{\partial C}{\partial D} N, \quad (O)$$

$$2L = \frac{\partial C}{\partial B} K + 3 \frac{\partial C}{\partial D} M + 4 \frac{\partial C}{\partial E} N.$$

De vergelijking (109) gaat ten gevolge van de beide anderen over in

$$C := \frac{\partial C}{\partial K} K + \frac{\partial C}{\partial L} L + \frac{\partial C}{\partial M} M + \frac{\partial C}{\partial N} N + \frac{\partial C}{\partial A} A + \frac{\partial C}{\partial B} B + \frac{\partial C}{\partial D} D + \frac{\partial C}{\partial E} E. \quad (P)$$

Deze vergelijking leert ons weder, dat even als altijd de gezochte betrekkingen homogeen moeten zijn. Van (O) zijn de respective integralen

$$\begin{aligned}
f_1(K, L, M, N, E, 3AL - 4BK, 2BM - 3CL, CN - 2DM) &= 0, \\
f_2(K, L, M, N, A, 3EM - 4DN, 2DL - 3CM, CK - 2BK) &= 0.
\end{aligned} \quad (LXXVIII)$$

Om dus de meest algemeene oplossing van de vraag te hebben, moeten wij zeven uitdrukkingen

vinden, die tegelijk in de eerste leden van de beide vergelijkingen (LXXVIII) begrepen zijn. Hieraan voldoen in de eerste plaats K , L , M en N , en in de tweede plaats de drie uitdrukkingen

$$\begin{aligned} N^2 A - 4 KND + 3 KME &= \frac{N^2}{3L}(3AL - 4BK) + \frac{2KN^2}{3LM}(2BM - 3CL) + \frac{2KN}{M}(CN - 2DM) + \\ &+ 3KME - N^2 A + K(3ME - 4DN), \\ 3MNA - 6KNC + 3LKE &= \frac{MN}{L}(3AL - 4BK) + \frac{2KN}{L}(2BM - 3CL) + 3KLE = \frac{LK}{M}(3EM - 4DN) + \\ &+ \frac{2KN}{M}(2DL - 3CM) + 3NMA, \\ K^2 E - 4KNB + 3LNA &= K^2 E + N(3LA - 4BK) = \frac{K^2}{3M}(3EM - 4DN) + \frac{2K^2 N}{3LM}(2DL - 3CM) + \\ &+ \frac{2KN}{L}(CK - 2BL) + 3LNA. \end{aligned}$$

Stellen wij deze drie uitdrukkingen respectievelijk voor door G , $2H$ en I , dan is de gezochte betrekking

$$f(K, L, M, N, G, H, I) = 0 \quad \dots \quad (LXXIX)$$

§ 30. Schrijven wij deze vergelijking onder den vorm

$$H = F(K, L, M, N, G, I), \quad \dots \quad (i)$$

en onderstellen wij deze betrekking onafhankelijk van den stand der coördinaten; differentieeren wij naar $\mathfrak{S}$, en substitueeren wij dan de vergelijkingen (25) en (i), benevens de volgende

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\mathfrak{S}} &= \frac{3L}{K}G - 4H - \frac{N}{K}I, \\ \frac{dH}{d\mathfrak{S}} &= \frac{1}{2} \frac{N+L}{N}G - \frac{1}{2} \frac{KM-LN}{KN}H - \frac{1}{2} \frac{K+M}{K}I, \quad \dots \quad (110) \\ \frac{dI}{d\mathfrak{S}} &= \frac{K}{N}G + 4H - \frac{3M}{N}I; \end{aligned}$$

dan bekomen wij

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{N+L}{N}G - \frac{1}{2} \frac{KM-LN}{KN}H - \frac{1}{2} \frac{K+M}{K}I &= 3 \frac{\partial H}{\partial K}L + \frac{\partial H}{\partial L}(2M - K) + \frac{\partial H}{\partial M}(N - 2L) \\ &- 3 \frac{\partial H}{\partial N}M + \frac{\partial H}{\partial G} \left(\frac{3L}{K}G - 4H - \frac{N}{K}I \right) + \frac{\partial G}{\partial I} \left(\frac{K}{N}G + 4H - \frac{3M}{N}I \right). \quad \dots \quad (Q) \end{aligned}$$

De vergelijkingen (110) zijn gevonden door de uitdrukkingen voor G , H en I te differentieeren naar $\mathfrak{S}$, in de uitkomsten de vergelijkingen (25) en (65) te substitueeren, en daarna weder G , H en I in te voeren.

De algemeen integraal van (Q) is wel te vinden, maar onhandelbaar wegens hare omslagtigheid. Wij zullen daarom trachten op eene andere wijze ons doel te bereiken.

In de eerste plaats merken wij daartoe op, dat, wanneer

$$G = H = I = 0 \quad \dots \quad (111)$$

is, blijkt (110) ook

$$\frac{dG}{d\mathfrak{S}} = \frac{dH}{d\mathfrak{S}} = \frac{dI}{d\mathfrak{S}} = 0 \quad \dots \quad (112)$$

moet zijn; wanneer namelijk K of N niet gelijk aan 0 zijn, een geval waarop wij later terug komen. De vergelijkingen (111) zijn dus onafhankelijk van de richting der coördinaten, en kunnen derhalve eene meet-kunstige beteekenis hebben.

Ten tweede vormen wij de uitdrukkingen

$$S' = G^2 K + 2 H I N - 3 G I M, \quad T' = I^2 N + 2 H G K - G I L. \quad (10)$$

Differentieeren wij deze vergelijkingen naar $\mathfrak{S}$, en substitueeren wij de vergelijkingen (25) en (110), dan hebben wij

$$\begin{aligned} \frac{dS'}{d\mathfrak{S}} &= \left(4 \frac{H}{I} + 3 \frac{L}{K} - 3 \frac{M}{N} \right) S' - \left(3 + 2 \frac{G}{I} \right) T', \\ \frac{dT'}{d\mathfrak{S}} &= - \left(4 \frac{H}{G} + 3 \frac{M}{N} - 3 \frac{L}{K} \right) T' + \left(3 + 2 \frac{I}{G} \right) S'. \end{aligned} \quad (113)$$

Uit (113) ziet men, dat de betrekkingen

$$S' = T' = 0 \quad (114)$$

onafhankelijk van het coördinaten-stelsel bestaan, mits geen van de grootheden K , N , G of I verdwijne. Is echter G of I gelijk aan 0, dan kunnen S' en T' niet 0 zijn, zonder dat ook K of N verdwijnt. Zijn G en I beide 0, dan verdwijnen S' en T' van zelf. Dit geval is een geval van uitzondering, waarop wij terugkomen.

In de derde plaats eindelijk beschouwen wij de uitdrukking

$$S' = \frac{S'^2 I - 2 S' T' H + T'^2 G}{GI}, \quad (115)$$

en differentieeren ook deze naar $\mathfrak{S}$; dan vinden wij na de noodige substitutiën

$$\frac{dS'}{d\mathfrak{S}} = 6 \left(\frac{L}{K} - \frac{M}{N} \right) S' \quad (116)$$

waaruit blijkt, dat ook de vergelijking

$$S' = 0 \quad (116)$$

onafhankelijk van het aangenomen stelsel van coördinaten bestaat.

§ 31. Trachten wij thans de meetkundige beteekenis der vergelijkingen (111), (114) en (116) op te sporen, waartoe wij de vergelijking der kromme in den vorm (I) brengen. Door dan de vergelijkingen (61) nog eenmaal te differentieeren hebben wij

$$\begin{aligned} a &= -\Sigma f_1''(x) [y - f_2(x)] [y - f_3(x)] + 4 \Sigma f_1'''(x) f_2'(x) [y - f_3(x)] + 6 \Sigma f_1''(x) f_2''(x) [y - f_3(x)] - \\ &\quad - 12 \Sigma f_1''(x) f_2'(x) f_3'(x), \quad b = -\Sigma f_1'''(x) [y - f_2(x)] + 3 \Sigma f_1''(x) f_2'(x), \quad c = -2 \Sigma f_1''(x) \\ d &= 0, \quad e = 0, \end{aligned} \quad (117)$$

of, als wij $x = x_1$, $y = y_1$, $f'(x) = y_1'$, $f''(x) = y_1''$ stellen,

$$a = -12 \Sigma y_1'' y_2' y_3', \quad b = 3 \Sigma y_1'' (y_2' + y_3'), \quad c = -2 \Sigma y_1'', \quad d = 0, \quad e = 0 \quad (118)$$

Substitueeren wij nu de vergelijkingen (162) en (118) in de uitdrukkingen g , h en i , die op dezelfde wijze uit k , l enz. gevormd zijn als G , H en I uit K , L , enz.; dan vinden wij

$$\begin{aligned} g &= -432 (y_1'' y_2' y_3' + y_2'' y_1' y_3' + y_3'' y_1' y_2'), \\ h &= 216 \{ y_1'' y_2' y_3' (y_2' + y_3') + y_2'' y_1' y_3' (y_1' + y_3') + y_3'' y_1' y_2' (y_1' + y_2') \}, \\ i &= -432 (y_1'' y_2'^2 y_3'^2 + y_2'' y_1'^2 y_3'^2 + y_3'' y_1'^2 y_2'^2). \end{aligned} \quad (119)$$

De substitutie hiervan in s' en t' , die overeenkomen met S' en T' , geeft

$$\begin{aligned} s' &= 1119744 \{ y_2'' y_3'' (y_2' - y_3')^2 y_1'^2 y_2' y_3' + y_3'' y_1'' (y_3' - y_1')^2 y_2'^2 y_3' y_1' + y_1'' y_2'' (y_1' - y_2')^2 y_3'^2 y_1' y_2' \}, \\ t' &= -1119744 \{ y_2'' y_3'' (y_2' - y_3')^2 y_2'^2 y_1' y_3' + y_3'' y_1'' (y_3' - y_1')^2 y_2'^2 y_3' y_1' + y_1'' y_2'' (y_1' - y_2')^2 y_3'^2 y_1' y_2' \}; \end{aligned} \quad (120)$$

en de substitutie van deze waarden eindelijk verschaft ons

$$\frac{s'^2 i - 2 s' t' h + t'^2 g}{g i} = 6718464 (y_1' - y_2')^2 (y_2' - y_3')^2 (y_3' - y_1')^2 y_1'^2 y_2'^2 y_3'^2 y_1'' y_2'' y_3'' \quad (121)$$

Wanneer wij hier in (121) nog onderstellen, dat geen der waarden van y_1' , y_2' en y_3' aan elkan-

¹⁾ Deze uitdrukkingen zijn in vorm volkomen gelijk aan S en T .

der gelijk zijn, en geen van deze drie grootheden gelijk aan 0 wordt, een geval waarop wij later terug komen; dan drukt de vergelijking

$$\frac{s'^2 i - 2 s' t' h + t'^2 g}{g i} = 0, \dots \dots \dots (\text{LXXX})$$

die blijkens (116) bij eene verandering van coördinaten niet ophoudt waarheid te zijn, uit, dat ééne van de drie grootheden y_1'', y_2'' en y_3'' gelijk aan 0 moet zijn. Daar de waarden der drie kromtestralen zijn

$$\epsilon_1 = \frac{(1 + y_1'^2)^{\frac{1}{2}}}{y_1''}, \epsilon_2 = \frac{(1 + y_2'^2)^{\frac{1}{2}}}{y_2''}, \epsilon_3 = \frac{(1 + y_3'^2)^{\frac{1}{2}}}{y_3''}, \dots \dots \dots (122)$$

sluit het 0 zijn van ééne van de waarden van y'' het oneindig zijn van één der kromtestralen in zich. De vergelijking (LXXX) beteekent dus, dat één van de drie takken der kromme in het beschouwde punt een buigpunt heeft.

Lost men uit de vergelijkingen

$$s' = 0, t' = 0, \dots \dots \dots (\text{LXXXI})$$

die men voor (114) in de plaats kan stellen, na voor s' en t' hare waarden uit (120) substitueerd te hebben, $\frac{y_1''}{y_3''}$ en $\frac{y_2''}{y_3''}$ op, dan verkrijgt men twee vergelijkingen, die men gemakkelijk tot

$$g = i = 0, \dots \dots \dots (123)$$

herleiden kan. Hieruit volgt, dat, wanneer niet $g = i = 0$ is, aan (LXXXI) niet kan worden voldaan dan daardoor, dat minstens twee van de grootheden y_1'', y_2'' en y_3'' gelijk aan 0 zijn. De vergelijkingen (LXXXI) drukken dus uit, dat twee van de takken der kromme in het beschouwde punt een buigpunt vertoonen.

Het geval, dat $g = i = 0$ is, zonder dat tevens $h = 0$ wordt, en ook zonder dat k of n gelijk aan 0 zijn, is een geval van uitzondering, dat zich kort laat afmaken; s' en t' verdwijnen dan beiden, maar (121) wordt dan

$$8 h^3 k n = 6718464 (y_1' - y_2')^2 (y_2' - y_3')^2 (y_1' - y_3')^2 y_1'^2 y_2'^2 y_3'^2 y_1'' y_2'' y_3''; \dots \dots (124)$$

waaruit blijkt, dat dan geen van de waarden van y'' verdwijnen kan.

Thans blijft ons nog te onderzoeken de beteekenis van de vergelijkingen

$$g = h = i = 0, \dots \dots \dots (\text{LXXXII})$$

waardoor wij (111) kunnen vervangen. Wanneer men uit deze vergelijkingen, na voor g , h en i hare waarde uit (119) gesubstitueerd te hebben, y_1'', y_2'' en y_3'' elimineert, bekomt men de vergelijking

$$\begin{vmatrix} y_1' y_2' & y_2' y_3' & y_3' y_1' \\ y_1' y_2' (y_1' + y_2') & y_2' y_3' (y_2' + y_3') & y_3' y_1' (y_3' + y_1') \\ y_1'^2 y_2'^2 & y_2'^2 y_3'^2 & y_3'^2 y_1'^2 \end{vmatrix} = (y_2' - y_3') (y_3' - y_1') (y_1' - y_2') y_1'^2 y_2'^2 = 0. (125)$$

Hieraan kan, behoudens onze aangenomen onderstellingen, niet worden voldaan. Het gelijktijdig bestaan van de vergelijkingen (LXXXII) vereischt dus, dat y_1'', y_2'' en y_3'' allen gelijk aan 0 zijn. Deze vergelijkingen drukken derhalve uit, dat de drie takken der kromme in het beschouwde punt buigpunten hebben.

§ 32. Wij hebben tot nog toe ondersteld, dat k en n van 0 verschilden. Nemen wij thans aan, dat $k = 0$ is, n echter niet. In dat geval wordt ééne van de drie waarden van y' , b.v. y_3' gelijk aan 0; de vergelijking (119) gaan dan over in

$$g = -432 y_3'' y_1' y_2', \quad h = 216 y_3'' y_1' y_2' (y_1' + y_2'), \quad i = -432 y_3'' y_1'^2 y_2'^2. \dots (126)$$

Bovendien is dan

$$g = n^2 a, \quad 2h = 3la, \quad i = 3ma \dots \dots \dots (127)$$

Uit de vergelijkingen (LXXXII), die in dit geval samengevat kunnen worden in deze ééne

$$a = 0, \dots \dots \dots (\text{LXXXII})$$

laat zich dus niets anders afleiden, dan dat $y_3'' = 0$ is; met andere woorden, dat één van de takken der kromme, en wel die, welke de x as aanraakt, een buigpunt heeft.

In dit geval beschouwen wij nog de uitdrukkingen

$$\begin{aligned} g_1 &= 27 eml^2 - 36 dnl^2 + 12 bn^2 l - 3 an^3 m, \\ \text{en } i_1 &= 27 cm^2 l - 36 dlmn + 18 cn^2 l - 9 el^2 n - an^3, \end{aligned} \quad (127)$$

die in de eerste leden van (LXXVIII) begrepen zijn, en dus onafhankelijk zijn van den vorm der vergelijking. Van onafhankelijkheid van de coördinaten kan hier geen sprake zijn, daar wij eene bijzonderen coördinaten-stand hebben aangenomen. Substitueeren wij nu in (127) de vergelijkingen (62) en (118), na daarin $y_3' = 0$ gesteld te hebben, dan vinden wij

$$\begin{aligned} g_1 &= 2592 y_1' y_2' (y_1'' y_2' + y_2'' y_1'), \\ i_1 &= 2592 y_1' y_2' (y_1'' + y_2''). \end{aligned} \quad (128)$$

Eindelijk vormen wij de uitdrukking

$$G_1 = \frac{g_1^2 n - 3 g_1 i_1 m + 3 i_1^2 l}{3 nl}, \quad (129)$$

die door substitutie van (62) en (128) overgaat in

$$G_1 = -13436928 (y_1' - y_2')^2 y_1' y_2' y_1'' y_2'', \quad (130)$$

Uit (129) blijkt dat de vergelijking

$$G_1 = 0 \quad (LXXXIV)$$

de voorwaarde bevat, dat één van de beide takken, die de x - as niet aanraken, een buigpunt vertoont.

Elimineert men uit

$$g_1 = i_1 = 0, \quad (LXXXV)$$

na voor g_1 en i_1 hare waarde uit (128) gesteld te hebben, de beide grootheden y_1'' en y_2'' , dan vindt men

$$\left| \begin{array}{cc} y_1' y_2'', & y_1' y_1'' \\ y_1' y_2', & y_2' y_2' \end{array} \right| = y_1'^2 y_2'^2 (y_1' - y_2') = 0, \quad (131)$$

waaraan bij de aangenomene onderstellingen niet kan worden voldaan. De vergelijkingen (LXXXV) vorderen dus, dat $y_1'' = 0$ en $y_2'' = 0$, en bevatten derhalve de voorwaarden, dat beide takken der kromme, die de x as niet aanraken, buigpunten hebben.

In het geval, dat $n = 0$, $k \geq 0$ is, bereiken wij gemakkelijk ons doel door de x - as met de y - as te verwisselen. Het blijkt op die wijze onmiddellijk, dat één der takken de y as aanraakt; dat deze tak een buigpunt heeft, ingeval

$$e = 0 \quad (LXXXVI)$$

is; dat de beide andere takken buigpunten hebben voor

$$\begin{aligned} g_1 &= 27 al^2 m - 36 bklm + 12 ck^2 m - 9 al^2 k - ek^3 = 0, \\ i_1 &= 27 alm^2 - 36 bkm^2 + 12 dk^2 m - 9 ek^2 l = 0; \end{aligned} \quad (LXXXVII)$$

en dat dit met één van beiden het geval zal zijn, wanneer

$$I_2 = \frac{i_1^2 k - 3 g_1 i_1 l + 3 g_1^2 m}{3 km} = 0 \quad (LXXXVIII)$$

is.

§ 33. Nog rest ons het geval $k = 0$ en $n = 0$.

Wilden wij ook hier de vergelijking in den vorm (I) brengen, dan zouden wij onbruikbare waarden voor l , m , enz. bekomen, daar ééne van de waarden van y' , y_2' b. v. oneindig groot zou worden.

Wij brengen daarom de vergelijking onder een anderen vorm, namelijk

$$[y - f_1(x)][x - \varphi_2(y)][y - f_2(x)] = 0 \quad (M)$$

De functie φ_2 bekomt men door x op te lossen uit

$$y - f_2(x) = 0.$$

Door de vergelijking (M) viermaal ten opzichte van x en y te differentieëren vindt men,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -[x - \phi_2(y)] \{f_1'(x)[y - f_3(x)] + f_3'(x)[y - f_1(x)]\} + [y - f_1(x)][y - f_3(x)], \\ \bar{y} &= -\phi_2'(y)[y - f_1(x)][y - f_3(x)] + [x - \phi_2(y)][y - f_1(x) + y - f_3(x)], \\ p &= -[x - \phi_2(y)] \{f_1''(x)[y - f_3(x)] + f_3''(x)[y - f_1(x)]\} + 2f_1'(x)f_3'(x)[x - \phi_2(y)] - 2\{f_1'(x)[y - f_3(x)] + f_3'(x)[y - f_1(x)]\}, \\ q &= \phi_2'(y) \{f_1'(x)[y - f_3(x)] + f_3'(x)[y - f_1(x)]\} - [x - \phi_2(y)][f_1'(x) + f_3'(x)] + [y - f_1(x)] + [y - f_3(x)], \\ r &= -\phi_2''(y)[y - f_1(x)][y - f_3(x)] - 2\phi_2'(y)[y - f_1(x) + y - f_3(x)] + 2[x - \phi_2(y)], \\ k &= -[x - \phi_2(y)] \{f_1'''(x)[y - f_3(x)] + f_3'''(x)[y - f_1(x)]\} + 3[x - \phi_2(y)][f_1'(x)f_3'(x) + f_3''(x)f_1'(x)] - \\ &\quad - 3\{f_1''(x)[y - f_3(x)] + f_3''(x)[y - f_1(x)]\} + 6f_1'(x)f_3'(x), \\ l &= -[x - \phi_2(y)][f_1''(x) + f_2''(x)] + \phi_2''(y) \{f_1''(x)[y - f_3(x)] + f_3''(x)[y - f_1(x)]\} - 2\phi_2'(y)f_1'(x)f_3'(x) - 2[f_1'(x) + f_3'(x)], \\ m &= \phi_2''(y) \{f_1'(x)[y - f_3(x)] + f_3'(x)[y - f_1(x)]\} + 2\phi_2'(y)[f_1'(x) + f_2'(x)] + 2, \\ n &= -\phi_2'''(y)[y - f_1(x)][y - f_3(x)] - 3\phi_2''(y)[y - f_1(x) + y - f_3(x)] - 6\phi_2'(y), \\ a &= -[x - \phi_2(y)] \{f_1'''(x)[y - f_3(x)] + f_3'''(x)[y - f_1(x)]\} + 4[x - \phi_2(y)][f_1'''(x)f_3'(x) + f_3'''(x)f_1'(x)] + \\ &\quad + 6[x - \phi_2(y)]f_1''(x)f_3''(x) - 3\{f_1'''(x)[y - f_3(x)] + f_3'''(x)[y - f_1(x)]\} + 12[f_1''(x)f_3'(x) + f_3''(x)f_1'(x)], \\ b &= -[x - \phi_2(y)][f_1'''(x) + f_3'''(x)] + \phi_2'''(y) \{f_1'''(x)[y - f_3(x)] + f_3'''(x)[y - f_1(x)]\} - 3\phi_2''(y) \{f_1''(x)f_3'(x) + f_3''(x)f_1'(x)\} - \\ &\quad - 3\{f_1''(x) + f_2''(x)\}, \\ c &= \phi_2'''(y) \{f_1''(x)[y - f_3(x)] + f_2''(x)[y - f_1(x)]\} - 2\phi_2''(y)f_1'(x)f_2'(x) + 2\phi_2'(y)[f_1'(x) + f_3'(x)], \\ d &= \phi_2'''(y) \{f_1'(x)[y - f_3(x)] + f_3'(x)[y - f_1(x)]\} + 3\phi_2''(y)[f_1'(x) + f_3'(x)], \\ e &= -\phi_2'''(y)[y - f_1(x)][y - f_3(x)] - 4\phi_2''(y)[y - f_1(x) + y - f_3(x)] - 12\phi_2'(y).\end{aligned}$$

Als wij hierin $x = x_1$, $y = y_1$, $f'(x) = y'$, $\phi'(y) = x'$, $f''(x) = y''$, $\phi''(y) = x''$ stellen, waarin even als vroeger

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

en bovendien

$$x' = \frac{dx}{dy}, x'' = \frac{d^2x}{dy^2},$$

dan hebben wij

$$\begin{aligned}p &= 0, q = 0, r = 0, k = 6y_1'y_3', l = -2y_1'y_3'x_2' - 2(y_1' + y_3'), m = 2x_2'(y_1' + y_3') + 2, n = -6x_2', \\ a &= 12(y_1''y_3' + y_3''y_1'), b = -3x_1'(y_1''y_3' + y_3''y_1') - 3(y_1'' + y_3''), c = 2x_2''y_1'y_3' + 2x_2'(y_1'' + y_3''), \\ d &= 3x_2''(y_1' + y_3'), e = -12x''.\end{aligned}\quad (132)$$

In dit geval raakt één van de takken der kromme de x -as en één de y -as aan; men zal dus hebben $x_2'' = 0$ en $y_1' = 0$, of $y_3' = 0$, b v. $y_3' = 0$, zoo als ook uit (132) blijkt. Die vergelijkingen gaan hierdoor over in

$$\begin{aligned}p &= q = r = k = 0, l = -2y_1', m = 2, n = 0, a = 12y_3''y_1', b = -3(y_1'' + y_3''), c = 0, d = 3x_1''y_1', \\ e &= -12x''.\end{aligned}\quad (133)$$

De drie volgende vergelijkingen

$$a = 0, \quad (LXXXIX)$$

$$e = 0, \quad (XC)$$

$$II_3 = am^4 - 4bm^3l + 6cm^2l^2 - 4dml^3 + el^4 = 0, \quad (XCI)$$

zijn in dit geval allen in (LXXVIII) begrepen, en dus van den vorm der vergelijking onafhankelijk. Door de substitutie van (133) gaan deze vergelijkingen over in

$$12y_3''y_1' = 0, \quad (134)$$

$$-12x_2'' = 0, \quad (135)$$

$$-756y_1'y_1'' = 0 \quad (136)$$

De vergelijkingen (133) bevatten dus ieder ééne van de drie grootheden y_1'' , y_3'' , en x_2'' . Het nul zijn van ééne van die grootheden heeft ten gevolge, dat de tak waarbij zij behoort een buigpunt heeft.

Zoo vele van de vergelijkingen (LXXXIX), (XC) en (XCI) als waarheid zijn, zoo veel van de takken der kromme hebben een buigpunt.

Wij hebben tot nog toe ondersteld, dat al de waarden van y' bestaanbaar zijn; dit is echter, zoo als wij gezien hebben, niet meer het geval, wanneer $\mathbf{M}$ negatief is. In dat geval blijven echter al de getrokken besluiten gelden; alleen is het niet uitgemaakt, wanneer niet al de drie waarden van y'' gelijk aan 0 zijn, of die, welke bij den eenigen bestaanbaren tak behoort, zich daaronder bevindt. Om deze onzekerheid op te heffen merken wij op, dat wanneer twee der waarden van y' onbestaanbaar zijn, deze onbestaanbare groot-heden geconjugeerd zijn. Hetzelfde zal dus ook het geval zijn met hare differentiaalquotienten ten opzichte van x , dat is, met de overeenkomstige waarden van y'' . Wanneer dus ééne van deze gelijk aan 0 is, moet de andere het ook zijn. En nu is alle onzekerheid opgeheven; want wanneer slechts ééne der waarden van y'' gelijk aan 0, is het die, welke bij den bestaanbaren tak behoort, en deze heeft dus een buigpunt. Zijn er twee onder de waarden van y'' , die verdwijnen, dan behooren zij bij de onbestaanbare takken en de bestaanbare heeft geen buigpunt. Verdwijnen zij eindelijk alle drie, dan is dit weder wel het geval.

In het geval $k = 0$, of $n = 0$, is de onderscheiding nog gemakkelijker, daar de respectieve kenmerken

$$a = 0, e = 0,$$

bij den eenigen bestaanbaren tak behooren. In het geval $k = n = 0$ eindelijk, moeten noodzakelijk alle takken bestaanbaar zijn.

§ 34. Wij komen thans aan het geval

$$\mathbf{M} = 4(l^2 - km)(m^2 - ln) - (kn - lm)^2 = 0, \quad \dots \dots \dots \text{(XXXIII)}$$

waarin twee takken der kromme ééne gemeenschappelijke raaklijn hebben. De integraal van (Q) is in dit geval

$$\begin{aligned} \mathbf{f} & \left[(K+M)^2 + (L+N)^2, L^2 - KM + M^2 - LN, \frac{(L^2 - KM)(KN - LM)G - 4(L^2 - KM)(M^2 - LN)H +}{KN} \right. \\ & + \frac{(M^2 - LN)(KN - LM)I}{KN} \frac{(L^2 KM)}{KN} \left\{ L^2 - KM - 3(M^2 - LN) \right\} G + 4(KN - LM) \left\{ L^2 - KM + M^2 - LN \right\} H - \\ & - \frac{(M^2 - LN) \left\{ M^2 - LN - 3(L^2 - KM) \right\}}{KN}, \quad \frac{\left\{ LN^3 (L^2 - KM)^3 + (K - 2M)(L^2 - KM)^2 (M^2 - LN)KN^2 + \right.}{GK^2 (L^2 - KM)(M^2 - LN)^3 - 2HKN(L^2 - KM)^2 (M^2 - LN)^2 +} \\ & \left. + (N - 2L)(L^2 - KM)(M^2 - LN)^2 K^2 N + MK^3 (M^2 - LN)^2 \right\} \sqrt{K^2 (M^2 - LN)^2 + N^2 (L^2 - KM)^2} \left. \right] = \\ & = \mathbf{f} \left[(k+m)^2 + (l+n)^2, l^2 - km + m^2 - ln, \frac{(l^2 - km)(kn - lm)g - 4(l^2 - km)(m^2 - ln)h +}{kn} \right. \\ & + \frac{(m^2 - ln)(kn - lm)i}{kn} \frac{(l^2 - km)}{kn} \left\{ l^2 - km - 3(m^2 - ln) \right\} g + 4(kn - lm) \left\{ l^2 - km + m^2 - ln \right\} h - \\ & - \frac{(m^2 - ln) \left\{ m^2 - ln - 3(l^2 - km) \right\}}{kn}, \quad \frac{\left\{ ln^3 (l^2 - km)^3 + (k - 2m)(l^2 - km)^2 (m^2 - ln)kn^2 + \right.}{gk^2 (l^2 - km)(m^2 - ln)^3 - 2hkn(l^2 - km)^2 (m^2 - ln)^2 +} \\ & \left. + (n - 2l)(l^2 - km)(m^2 - ln)^2 k^2 n + mk^3 (m^2 - ln)^2 \right\} \sqrt{k^2 (m^2 - ln)^2 + n^2 (l^2 - km)^2} \left. \right] = 0; \\ & + \frac{in^2 (l^2 - km)^2 (m^2 - ln)}{kn} \end{aligned}$$

of, als wij de drie laatste uitdrukkingen door $\mathbf{G}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{H}$ voorstellen,

$$\mathbf{f}(\mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{G}, \mathbf{I}, \mathbf{H}) = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(XCII)}$$

Substitueeren wij in $\mathbf{H}$ de vergelijkingen (62) en (118), na daarin eerst $y_4' = y_3'$ gesteld te hebben, dan bekomen wij

$$\mathbf{H} = \frac{(1 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{6 y_1''} = \frac{\xi_1}{6}, \quad \dots \dots \dots \text{(XCIII)}$$

zoodat de vergelijking

$$\mathbf{H} = 0 \text{ of } \mathbf{H} = \infty \quad \dots \dots \dots \text{(XCIV)}$$

de voorwaarde is, dat die tak der kromme, die geen der beide andere aanraakt, een buigpunt heeft.

§ 35. Om de beide andere takken te onderzoeken, nemen wij hunne gemeenschappelijke raaklijn tot x -as, waardoor k en tengevolge van (XXXIII) ook l gelijk aan 0 wordt. Voor de vergelijking der kromme vinden wij dan

$$\frac{3m \Delta x (\Delta y)^2 + n (\Delta y)^3}{1. 2. 3} + \frac{a (\Delta x)^3 + 4b (\Delta x)^2 \Delta y + 6c (\Delta x) (\Delta y)^2 + 4d \Delta x (\Delta y)^3 + e (\Delta y)^4}{1. 2. 3. 4} + R = 0 \dots \dots \dots (N)$$

Aan deze vergelijking kan door tweeerlei onderstelling worden voldaan; namelijk door die, dat Δy van dezelfde orde is als (Δx) ; en door die, dat $(\Delta y)^2$ en $(\Delta x)^3$ tot dezelfde orde behooren. De eerste onderstelling wijst ons op eenen tak der kromme, die de x as niet aanraakt; deze hebben wij reeds behandeld en behoeven er hier niet op terug te komen. In de tweede onderstelling gaat (N) over in

$$\frac{m (\Delta y)^2}{2} + \frac{a (\Delta x)^3}{24} + R' = 0 \dots \dots \dots (N')$$

Deze vergelijking is volkomen van denzelfden vorm als de vergelijking (F'), en er kunnen dezelfde gevolgtrekkingen uit gemaakt worden. Wij hebben dus ook hier een keerpunt van de eerste soort, waarbij de aanraking, die de beide takken met de raaklijn hebben, van de orde $\frac{1}{2}$ is.

Vergelijkt men de vergelijking (N') met (46), dan ziet men, dat de parameter van de semicubische parabool, die in het keerpunt de nauwste aanraking met onze kromme heeft, moet voldoen aan de vergelijking

$$\frac{1}{\mu} = -\frac{a}{12m}.$$

Het tweede lid van deze vergelijking is bij den aangenomen stand der coördinaten identiek met $\frac{G}{12L^{\frac{1}{2}}}$; daar deze uitdrukking echter van dien stand onafhankelijk is, zal men moeten hebben

$$\frac{1}{\mu} = \frac{G}{12L^{\frac{1}{2}}} \dots \dots \dots (XCV)$$

De aanraking tusschen de beschouwde kromme en de semicubische parabool, waarvan μ de parameter is, is van de eerste orde; zij kan echter onder sommige omstandigheden van hoogere orde worden. Indien namelijk de termen, die na $(\Delta x)^4$ en $(\Delta y)^2 (\Delta x)$ van de laagste orde zijn, namelijk

$$\frac{n (\Delta y)^3}{6} \text{ en } \frac{l (\Delta x)^3 (\Delta y)}{6},$$

uit de vergelijking (N) verdwijnen, wordt de aanraking tusschen beide krommen van de orde $\frac{3}{2}$.

Om de voorwaarde daarvoor te vinden, substitueeren wij in de eerste van deze termen de waarde van $(\Delta y)^2$ uit (N'); dan vinden wij voor hare som

$$\frac{(\Delta x)^3 \Delta y}{6} \left(b - \frac{an}{12m} \right).$$

De bedoelde voorwaarde luidt dus

$$b - \frac{an}{12m} = 0,$$

of wat hetzelfde is, daar m hier niet gelijk aan 0 kan zijn,

$$12bm^5 - anm^4 = 0 \dots \dots \dots (138)$$

In het algemeen kan men hiervoor in de plaats stellen

$$3I \vee L + G \vee N = 0 \quad ^1) \dots \dots \dots (XCVI)$$

¹⁾ Wanneer de doorlopende tak der kromme loodrecht staat op de beide andere, dus in het geval van vergelijking (XXXIV), ondergaat deze vergelijking eene groote vereenvoudiging.

§ 36. De conclusie, dat wij met een keerpunt van de eerste soort te doen hebben, geldt niet meer, wanneer

$$\mathbf{G} = 0 \dots\dots\dots (\text{XCVII})$$

is. Bij den aangenomen coördinatenstand is deze vergelijking identiek met $a = 0$. In dit geval wordt aan (N) voldaan door de onderstelling dat Δy van de orde van $(\Delta x)^2$ is. Die vergelijking gaat daardoor over in

$$\frac{m(\Delta y)^2}{2} + \frac{b(\Delta x)^2}{6} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\partial^5 f(\Delta x)^4}{\partial x^5 120} + R' = 0 \dots\dots\dots (O)$$

Het al of niet bestaanbaar zijn van de wortels dezer vergelijking hangt in het algemeen niet af van het teeken van Δx evenmin als bij verg. (G'); het punt zal dus ook hier een afgezonderd punt zijn, of twee takken der kromme zullen in het punt elkander aanraken. Evenmin als in § 14 kunnen wij echter ook hier de kenmerken zoeken, waardoor zich deze gevallen onderscheiden zonder behulp van differentiaalquotienten van hoogere orde. Even als daar kunnen wij ook hier nog het kenmerk vinden voor de omstandigheid, dat de beide takken der kromme, die in het algemeen eene aanraking van de eerste orde met elkander hebben, in zooverre symmetrisch met betrekking tot de raaklijn gelegen zijn, dat de één eene aanraking van de tweede orde met het spiegelbeeld van den anderen heeft. Daartoe wordt namelijk vereischt, dat in (O)

$$b = 0 \dots\dots\dots (139)$$

zij, welke vergelijking identiek is met

$$\mathbf{I} = 0, \dots\dots\dots (\text{XCVIII})$$

daar beide vergelijkingen alleen verschillen door eenen factor van het eerste lid, die niet verdwijnen kan.

Het is duidelijk, dat het punt in het geval van vergelijking (XXXIII) al de verschillende bijzonderheden kan vertoonen, die wij in § 12—14 en § 25—28 voor het geval $q^2 - pr = 0$ hebben gevonden; alleen ligt het punt ditmaal op een doorlopenden tak der kromme, die eene andere raaklijn heeft dan de twee takken, die elkander aanraken.

§ 37. Heeft behalve de vergelijking (XXXIII) nog de vergelijking

$$\mathbf{L} = l^2 - km + m^2 - ln = 0 \dots\dots\dots (\text{XXXV})$$

plaats, dan raken al de drie takken der kromme, zoo als wij gezien hebben, elkander aan. De integraal van (Q) wordt dan

$$\begin{aligned} & \mathbf{f} \left[(K+M)^2 + (L+N)^2, \frac{GK\mathcal{V}N - 2H\mathcal{V}K^2N^2 + IN\mathcal{V}K}{KN}, \frac{G(3\mathcal{V}K^2N^2 - K\mathcal{V}K) - 4H(K\mathcal{V}N - N\mathcal{V}K) +}{KN} \right. \\ & \quad \left. + \frac{I(N\mathcal{V}N - 3\mathcal{V}N^2K^2)}{KN}, \frac{6G(N\mathcal{V}K - K\mathcal{V}N) + K(K\mathcal{V}K + N\mathcal{V}N - 4\mathcal{V}K^2N^2) + 6I(K\mathcal{V}N - N\mathcal{V}K)}{KN} \right] = \\ & = \mathbf{f} \left[(k+m)^2 + (l+n)^2, \frac{gk\mathcal{V}n - 2h\mathcal{V}k^2n^2 + in\mathcal{V}k}{kn}, \frac{g(3\mathcal{V}k^2n^2 - k\mathcal{V}k) - h(k\mathcal{V}n - n\mathcal{V}k) +}{kn} \right. \\ & \quad \left. + \frac{i(n\mathcal{V}n - 3\mathcal{V}k^2n^2)}{kn}, \frac{6g(n\mathcal{V}k - k\mathcal{V}n) + h(k\mathcal{V}k + n\mathcal{V}n - 4\mathcal{V}k^2n^2) + 6i(k\mathcal{V}n - n\mathcal{V}k)}{kn} \right] = 0. \end{aligned}$$

De laatste drie uitdrukkingen willen wij respectievelijk voorstellen door $\mathbf{G}'$, $\mathbf{I}'$ en $\mathbf{H}'$, waardoor onze vergelijking overgaat in

$$\mathbf{f}(\mathbf{K}, \mathbf{G}', \mathbf{I}', \mathbf{H}') = 0 \dots\dots\dots (\text{XCIX})$$

Nemen wij thans de gemeenschappelijke raaklijn tot x -as aan, dan wordt k , en ten gevolge van (XXXVI), waarvoor wij kunnen schrijven

$$\frac{k}{l} = \frac{l}{m} = \frac{m}{n},$$

ook l en m gelijk aan 0, en wij vinden, de reeds meermalen gebruikte methode volgende,

$$\frac{n}{6}(\Delta y)^3 + \frac{a(\Delta x)^4 + 4b(\Delta x)^3 \Delta y + 6c(\Delta x)^2(\Delta y)^2 + 4d\Delta x(\Delta y)^3 + e(\Delta y)^4}{24} + R = 0 \quad (P)$$

Hieraan kan slechts door ééne onderstelling voldaan worden, namelijk, dat $(\Delta y)^3$ en $(\Delta x)^4$ van dezelfde orde zijn. De vergelijking wordt daardoor

$$\frac{n(\Delta y)^3}{6} + \frac{a(\Delta x)^4}{24} + R' = 0. \quad (P')$$

Hieruit blijkt, dat Δy zoowel voor positieve als voor negatieve Δx ééne enkele bestaanbare waarde heeft, die in beide gevallen hetzelfde teeken behoudt. De kromme bezit dus één doorlopenden tak, die aan dezelfde zijde van de raaklijn blijft, en daarmede eene aanraking van de orde $\frac{1}{3}$ heeft; het punt kan derhalve beschouwd worden als een afgezonderd punt, samenvallende met een buigpunt van de tweede soort. ¹⁾

De eenvoudigste onder de algebraïsche krommen, die zoodanig punt kan vertoonen, wordt voorgesteld door de vergelijking

$$x^4 = y^3 \quad (140)$$

Voor deze kromme luidt de vergelijking (P')

$$y(\Delta y)^3 - (\Delta x)^4 = 0 \quad (141)$$

Door de vergelijking van (P') met (141) zien wij, dat, zal de kromme (140) de nauwst mogelijke aanraking hebben met eene andere kromme, die insgelijks zulk een punt vertoont,

$$\frac{1}{v} = -\frac{a}{4n} \quad (142)$$

zal moeten zijn, eene vergelijking, die bij den aangenomen coördinatenstand identiek is met

$$\frac{1}{v} = \frac{G'}{4K^{\frac{1}{6}}} \quad (C)$$

De aanraking tusschen beide krommen is in dit geval van de orde $\frac{2}{3}$, tenzij zij door bijzondere omstandigheden van hoogere orde mogt worden. Zij zal b.v. tot de eerste orde opklimmen, wanneer in (P) de term

$$\frac{b(\Delta x)^3 \Delta y}{4}$$

verdwijnt, derhalve, wanneer

$$b = 0 \quad (143)$$

is, zoodat de voorwaarde bij willekeurigen coördinatenstand wordt uitgedrukt door de vergelijking

$$I' = 0 \quad (CI)$$

Verdween in (P) ook de term, die na $\frac{b(\Delta x)^3 \Delta y}{6}$ van de laagste orde is, dat is $\frac{c(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{4}$; was dus

$$c = 0, \quad (144)$$

welke vergelijking alleen door eenen factor in het eerste lid van de volgende

¹⁾ Dit samenvallen is hier echter niet toevallig, maar behoort tot het wezen van zoodanig punt. Een buigpunt van de tweede soort waar de aanraking van de orde $\frac{1}{3}$ is, kan namelijk bij zoodanige krommen, waarvoor geen der partieele differentiaalquotienten oneindig is, niet anders dan op deze wijze voorkomen. Het was daarom misschien beter in dit geval het denkbeeld van drievoudigheid geheel te laten varen.

²⁾ Deze kromme heeft in vorm zeer veel van de gewone parabool.

$$\mathbf{H}' = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(CII)}$$

verschilt, dan werd de aanraking tusschen beide krommen nog inniger, en wel van de orde $\frac{1}{3}$.

§ 38. Dit alles gaat niet meer door, wanneer

$$\mathbf{G}' = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(CIII)}$$

is, daar in dit geval $a = 0$ wordt, en wij uit (P) de vergelijking (P') dus niet meer kunnen afleiden. Aan (P) kan nu op tweeerlei wijze voldaan worden, in de eerste plaats door Δy van dezelfde orde als $(\Delta x)^2$ en in de tweede plaats door $(\Delta y)^2$ van dezelfde orde als $(\Delta x)^3$ te onderstellen. Door de eerste onderstelling gaat (P) over in

$$\frac{b}{6} \Delta y + \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \frac{(\Delta x)^2}{120} + R' = 0, \quad \dots \dots \dots \text{(Q)}$$

door de tweede in

$$\frac{n}{6} (\Delta y)^2 + \frac{b}{6} (\Delta x)^3 + R'' = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(Q')}$$

De vergelijking (Q) wijst ons op een doorlopenden tak, die eene aanraking van de eerste orde heeft met de raaklijn. De verg. (Q') is volkomen van denzelfden vorm als (F') en (N') , en toont dus een keerpunt van de eerste soort aan, waar de takken een aanraking van de orde $\frac{1}{2}$ met de raaklijn hebben. In dit geval is het keerpunt dus gelegen op een doorlopenden tak, die dezelfde raaklijn heeft als de takken, die het keerpunt vormen. Daar de aanraking van den doorlopenden tak met de raaklijn van hoogere orde is dan die van de beide andere takken, zal de eerste tusschen de beide laatsten doorloopen. De parameter van de semicubische parabool, die met de takken, welke het keerpunt vormen, de nauwste aanraking heeft, wordt gevonden uit de vergelijking

$$\frac{1}{\mu} = -\frac{b}{n}, \quad \dots \dots \dots \text{(145)}$$

of

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\mathbf{I}'}{4\mathbf{K}^{\frac{1}{6}}}. \quad \dots \dots \dots \text{(CIV)}$$

De aanraking tusschen beide krommen, die in het algemeen van de eerste orde is, wordt van de orde $\frac{2}{3}$ in het geval van vergelijking (CII), daar in dat geval $c = 0$ wordt en dus de term $\frac{c(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{4}$ uit de vergelijking (P) verdwijnt.

Een geheel anderen vorm neemt de kromme in het beschouwde punt weder aan, wanneer behalve (CIII) ook (CI) plaats heeft. Aan (P) kan nu niet anders worden voldaan dan door de onderstelling, dat $(\Delta y)^3$ en $(\Delta x)^5$ van dezelfde orde zijn. Die vergelijking gaat daardoor over in

$$\frac{n}{6} (\Delta y)^3 + \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \frac{(\Delta x)^5}{120} + R' = 0. \quad \dots \dots \dots \text{(R)}$$

Blijkens deze vergelijking heeft Δy voor alle waarden van Δx ééne bestaanbare waarde, en verandert tegelijk met Δx van teken. De kromme bezit dus in het beschouwde punt één enkelen bestaanbaren doorlopenden tak, die eene aanraking van de orde $\frac{2}{3}$ met de raaklijn heeft, en een buigpunt van de eerste soort vertoont. Het punt kan dus beschouwd worden als een buigpunt van de eerste soort, samenvallende met een afgezonderd punt. ¹⁾

De kromme kan in een punt als het hier beschouwde vergeleken worden bij die, welke wordt voorgesteld door de vergelijking

¹⁾ Hier geldt dezelfde opmerking als in de noot op § 37 gemaakt is

$$x^5 = \pm \lambda^2 y^3 \quad (146)$$

Wij kunnen de waarde, die λ moet hebben, opdat de kromme (146) de nauwst mogelijke aanraking met eene gegeven kromme vertoont, alleen met behulp van differentiaalquotienten van de vijfde orde uitdrukken. Die aanraking zal in het algemeen van de orde $\frac{3}{2}$ zijn. De voorwaarde echter, dat eene aanraking van de tweede orde mogelijk is, vinden wij in de vergelijking.

$$H' = 0 \quad (CII)$$

Ook dit geval is natuurlijk weder aan uitzonderingen onderhevig. Wanneer namelijk $\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} = 0$ was, zou men gemakkelijk in zien, dat de kromme drie takken had, die in het algemeen eene aanraking van de eerste orde met elkander zouden hebben. Het is duidelijk, hoe men hiermede kan voortgaan. Om de algemeene kenmerken voor die verdere ondergevalen aan te geven ontbreken ons de vereischte betrekkingen, onafhankelijk van het coördinatenstelsel, waarin differentiaalquotienten van hogere dan de vierde orde voorkomen.

§ 39. Wij zijn gekomen aan het geval

$$k = l = m = n = 0 \quad (XXXVIII)$$

Ten gevolge van deze vergelijkingen gaat (LXXVII) over in

$$f[A + 2C + E, (A + C)^2 + 2(B + D)^2 + (C + E)^2, (B^2 - AC) + 2(C^2 - BD) + (D^2 - CE), \\ 4(B^2 - AC + C^2 - BD)(D^2 - CE + C^2 - BD) - (AD - BC + BE - DC)^2] = 0 \quad (CV)$$

en de vergelijkingen (103) in

$$A = aa, B = ab, C = ac, D = ad, E = ae \quad (147)$$

Neemt men nu

$$C = F(A, B, D, E) \quad (j)$$

aan als eene betrekking onafhankelijk van a , dan bekomt men door (147) en (j) te differentieëren ten opzichte van a en de eerste uitkomsten in de laatste te substitueeren

$$c = \frac{\partial C}{\partial A} a + \frac{\partial C}{\partial B} b + \frac{\partial C}{\partial D} d + \frac{\partial C}{\partial E} e \quad (148)$$

of, als men deze vergelijking met a vemenigvuldigt, en (147) substitueert,

$$C = \frac{\partial C}{\partial A} A + \frac{\partial C}{\partial B} B + \frac{\partial C}{\partial D} D + \frac{\partial C}{\partial E} E, \quad (R)$$

waaruit blijkt, dat iedere homogene vergelijking van den vorm (CV) van a onafhankelijk is, zoodat wij daarvoor kunnen schrijven

$$f[a + 2c + e, (a + c)^2 + 2(b + d)^2 + (c + e)^2, (b^2 - ac) + 2(c^2 - bd) + (d^2 - ce), 4(b^2 - ac + c^2 - bd)(d^2 - ce + \\ + c^2 - bd) - (ad - bc + be - de)^2] = 0$$

Als wij deze vier uitdrukkingen respectievelijk door A, B, C, D voorstellen, kunnen wij hiervoor schrijven

$$f(A, B, C, D) = 0 \quad (CVI)$$

Nog een paar uitdrukkingen van den vorm van het eerste lid van (CVI) willen wij om hare eenvoudigheid door afzonderlijke letters voorstellen, namelijk:

$$A^2 + 2C - B = 6(c^2 - bd) + 2(ac - bd) = E \\ \text{en } \frac{EC - 2D}{A} = 2c(c^2 - bd) + 2c(ac - bd) + 2a(d^2 - ce) + 2e(b^2 - ac) = F \quad (\pi)$$

¹⁾ Deze kromme bestaat uit één enkelen doorlopenden tak, die in twee tegenovergestelde kwadranten van die, waarin de coördinatenassen het platte vlak verdeelen, gelegen is, en in den oorsprong zoodanig punt vertoont als waarvan in den tekst sprake is.

§ 40. Nogmaals de redeneering van § 5 herhalende, ziet men, dat de kromme in dit geval kan worden voorgesteld door de vergelijking

$$\frac{a(\Delta x)^4 + 4b(\Delta x)^3 \Delta y + 6c(\Delta x)^2 (\Delta y)^2 + 4d\Delta x(\Delta y)^3 + e(\Delta y)^4}{24} + R = 0, \quad \dots (S)$$

en dat de richtingen harer vier raaklijnen bepaald worden door de wortels der vergelijking

$$a(\Delta x)^4 + 4b(\Delta x)^3 \Delta y + 6c(\Delta x)^2 (\Delta y)^2 + 4d\Delta x(\Delta y)^3 + e(\Delta y)^4 = 0 \quad \dots (S')$$

Nemen wij nu het coördinatenstelsel zoodanig aan, dat de x -as met eene van de raaklijnen samenvalt, met andere woorden, dat $a = 0$ wordt, dan zijn de wortels van de overblijvende vergelijking

$$4b(\Delta x)^3 + 6c(\Delta x)^2 \Delta y + 4d\Delta x(\Delta y)^2 + e(\Delta y)^3 = 0 \quad \dots (149)$$

de tangenten van de hoeken, die drie van de raaklijnen met de vierde maken. Vormen wij dus de vergelijking, wier wortels de vierkanten zijn van die van (149), namelijk

$$e^2 \xi^3 + (12ce - 16d^2) \xi^2 + (36c^2 - 32bd) \xi - 16b^2 = 0, \quad \dots (150)$$

dan zijn de waarden van ξ uit (150) de vierkanten van diezelfde tangenten. De vierkanten van de tangenten der hoeken, die de drie niet met de x -as samenvallende raaklijnen onderling maken, zijn de wortels der vergelijking, die men bekomt door in (XXXII) k door $4b$, l door $2c$, m door $\frac{4}{3}d$ en n door e te vervangen. Deze vergelijking is

$$\begin{aligned} & (16b^2 + e^2 + 16bd + 6ce)^2 \xi^3 + \{ 2(16d^2 - 18ce + 36c^2 - 48bd)(16b^2 + e^2 + 16bd + 6ce) - \\ & - 4(12c^2 - 16bd)(16d^2 - 18ce) + 3(12be - 8cd)^2 \} \xi^2 + \{ (16d^2 - 18ce + 36c^2 - 48bd)^2 - \\ & - 8(12c^2 - 16bd)(16d^2 - 18ce) + 6(12be - 8cd)^2 \} \xi - 4(12c^2 - 16bd)(16d^2 - 18ce) + \\ & + 3(12be - 8cd)^2 = 0 \quad \dots (151) \end{aligned}$$

Het product van (150) en (151) is eene zesde-machtsvergelijking, die tot wortels heeft de vierkanten van de tangenten der zes hoeken, die de vier raaklijnen twee aan twee met elkander maken. Het product van de wortels dezer vergelijking is

$$\begin{aligned} & \frac{16b^2 \{ 4(12c^2 - 16bd)(16d^2 - 18ce) + 3(12be - 8cd)^2 \}}{e^2(16b^2 + e^2 + 16bd + 6ce)} = \\ & \frac{16b^2(576c^2d^2 - 864c^3e - 1024bd^3 + 1728bcde - 432b^2e^2)}{e^2(16b^2 + e^2 + 16bd + 6ce)} \quad \dots (152) \end{aligned}$$

De teller van deze breuk is niets anders dan de waarde van de uitdrukking

$$32(E^3 - 54F^2),$$

en de noemer die van

$$\{ A(A^2 + 4C - 2B) - 8F \}^2$$

voor den aangenomen stand der coördinaten, en, daar deze uitdrukkingen van de coördinatenrichting onafhankelijk zijn, zal men steeds hebben

$$\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \xi_6 = \frac{32(E^3 - 54F^2)}{\{ A(A^2 + 4C - 2B) - 8F \}} \quad \dots (CVII)$$

De voorwaarde, dat twee der raaklijnen samenvallen, en dus de hoek tusschen beide gelijk aan 0 wordt, zal derhalve luiden

$$E^3 - 54F^2 = 0; \quad \dots (CVIII)$$

terwijl de voorwaarde, dat twee raaklijnen loodrecht op elkander staan, zal zijn

$$A(A^2 + 4C - 2B) - 8F = 0 \quad \dots (CIX)$$

§ 41. Het 0 zijn van den teller in (152) kan het gevolg zijn van het 0 zijn van b en ook van het 0 zijn van den anderen factor. Het eerste zal het geval zijn, wanneer wij den dubbelen raaklijn als x -as genomen hebben, het tweede, wanneer dit niet het geval is. Nemen wij aan dat de x -as werkelijk met de twee samenvallende raaklijnen overeenkomt, dan hebben wij $b = 0$ en de vergelijkingen (150) en

(151) gaan over in

$$e^2 \xi^2 + (12ce - 16d^2)\xi + 36c^2 = 0. \quad (153)$$

en

$$(e^2 + 6ce)^2 \xi^3 + \{2(16d^2 - 18ce + 36c^2)(e^2 + 6ce) - 4(12c^2)(16d^2 - 18ce + 3(8cd)^2)\} \xi^2 + \\ + \{ (16d^2 - 18ce + 36c^2)^2 - 8(12c^2)(16d^2 - 18ce) + 6(8cd)^2 \} \xi - 4(12c^2)(16d^2 - 18ce) + 3(8cd)^2 = 0 \quad (154)$$

Van deze vergelijkingen is de eerste in de tweede deelbaar, een gevolg daarvan, dat de hoeken tusschen de dubbele en ieder der beide enkele raaklijnen in beide voorkomen. De tangenskwadraten van deze beide hoeken zijn de wortels van (153), en die van den hoek tusschen de beide enkele raaklijnen wordt bepaald door de vergelijking

$$(e + 6c)^2 \xi - 16d^2 + 24ce = 0, \quad (155)$$

waarvan het eerste lid het quotient is van de eerste leden van (153) en (154).

De voorwaarde, dat met de twee reeds samenvallende raaklijnen nog een derde samenvalt, is blijkens (153)

$$c = 0, \quad (156)$$

en die, dat de twee enkele raaklijnen samenvallen blijkens (155)

$$2d^2 - 3ce = 0 \quad (157)$$

Stelt men in de uitdrukking

$$3A^2E - 3BE + 2E^2 - 27FA$$

$d = 0$ en $b = 0$, dan gaat zij over in

$$-18c^2(2d^2 - 3ce).$$

Heeft dus behalve (CVIII) nog de vergelijking

$$3A^2E - 3BE + 2E^2 - 27FA = 0. \quad (CX)$$

plaats, dan moet één van de beide bovengenoemde gevallen voorkomen. Om beide gevallen te onderscheiden beschouwen wij nog de uitdrukking E , die voor $d = b = 0$ overgaat in $6c^2$, zoodat

$$E = 0 \quad (CXI)$$

identiek is met (156). Hebben derhalve de vergelijkingen (CVIII) en (CXI) gelijktijdig plaats, of, wat hetzelfde is, is

$$E = 0 \text{ en } F = 0 \quad (CXII)$$

of ook

$$E = 0 \text{ en } D = 0$$

dan vallen drie raaklijnen te zamen.

Is echter

$$E > 0,$$

maar hebben (CVIII) en (CX) gelijktijdig plaats, dan raken de takken der kromme twee aan twee elkander aan.

Voor $c = 0$ gaat zoowel (153) als (155) over in

$$e^2 \xi - 16d^2 = 0. \quad (158)$$

waaruit de eenig overgebleven hoek tusschen de drie samenvallende en de vierde raaklijn bepaald kan worden. Zal ook deze hoek gelijk aan 0 worden, en dus al de vier raaklijnen samenvallen, dan moet ook $d = 0$ worden, welke vergelijking voor $a = b = c = 0$ identiek is met

$$C = 0 \quad (CXIII)$$

De gezamenlijke voorwaarden hiervoor zijn dus

$$E = 0, F = 0, C = 0 \quad (CXIV)$$

of ook

$$D = 0, C = 0, B - A^2 = 0,$$

waarvoor men nog kan schrijven

$$b^2 - ac = c^2 - bd = d^2 - ce = 0, \quad (CXV)$$

van welke vergelijkingen gevolgen zijn

$$ad - bc = be - cd = ac - bd = 0$$

§ 42. Wij vonden bij het aangenomen coördinatenstelsel voor de voorwaarde, dat twee raaklijnen loodrecht op elkander stonden

$$e(12b^2 + e^2 + 16bd + 6ce) = 0, \dots \dots \dots (159)$$

en hier zal de eerste of tweede factor verdwijnen, naarmate ééne der beide loodrecht op elkander staande raaklijnen als x -as (en dus de andere als y -as) is aangenomen of niet. Nemen wij aan, dat dit het geval zij, dan is $e = 0$ en de voorwaarde, dat er nog een tweede paar onderling loodrechte raaklijnen voorkomt is blijkens (153) en (154)

$$d = 0 \text{ of } b^2 + bd = 0, \dots \dots \dots (160)$$

waaraan op drieërlei wijze kan worden voldaan namelijk door

$$d = 0, b = 0 \text{ of } b + d = 0 \dots \dots \dots (161)$$

Heeft eene van de beide eerste vergelijkingen plaats, dan is of de x -as of de y -as eene dubbele raaklijn, en hiertoe wordt dus vereischt, dat de vergelijkingen (CVIII) en (CIX) gelijktijdig plaats hebben; dit is echter niet voldoende, daar het dan nog gebeuren kan, dat twee raaklijnen samenvallen, en de twee andere loodrecht op elkander staan. In het laatste geval zal niet b , maar de tweede factor in den teller van (152) gelijk aan 0 zijn, hetwelk, daar $e = 0$ is, plaats zal hebben voor

$$9c^2 - 10bd = 0, \dots \dots \dots (162)$$

en dit is voor $a = e = 0$ identiek met

$$8E - 3A^2 = 0 \dots \dots \dots (CXVI)$$

Hebben dus (CVIII), (CIX) en (CXVI) te gelijk plaats, dan verkeeren wij in het laatstgenoemde geval. Hebben wij gelijktijdig (CVIII), (CIX) en (CX), dan vallen de raaklijnen twee aan twee samen in loodrecht op elkander staande richtingen; is eindelijk noch (CX) noch (CXVI), maar alleen (CVIII) en (CIX) eene waarheid, dan vallen twee raaklijnen samen, en eene derde staat loodrecht op beiden. Dit alles geldt echter slechts in de veronderstelling, dat E niet gelijk aan 0 wordt.

Nog blijft over de voorwaarde $b + d = 0$. Deze vergelijking is identiek met

$$2B - A^2 = 0, \dots \dots \dots (CXVII)$$

en bevat de voorwaarde, dat de raaklijnen twee aan twee loodrecht op elkander staan, waarbij zij ook weder twee aan twee samen kunnen vallen.

In het geval $E = D = 0$ bevat (CIX), die dan door $A = 0$ vervangen kan worden, eenvoudig de voorwaarde, dat de drie elkander aanrakende takken der kromme loodrecht op de vierde staan.

Merkwaardig is nog de vergelijking

$$B = 0 \dots \dots \dots (CXVIII)$$

Deze vergelijking kan gesplitst worden in de drie volgende

$$a + c = 0, b + d = 0, c + e = 0, \dots \dots \dots (163)$$

die bij den aangenomen stand der coördinaten overgaan in

$$a = 0, c = 0, e = 0, b + d = 0, \dots \dots \dots (164)$$

waardoor de vergelijking (S') overgaat in

$$\Delta x \Delta y \{ (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 \} = 0, \dots \dots \dots (165)$$

zoodat eene van de waarden van $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gelijk wordt aan 0, ééne gelijk aan ∞ , ééne gelijk aan $+1$ en ééne gelijk aan -1 . Eéne raaklijn valt derhalve met de x -as en ééne met de y -as samen, terwijl de beide andere de assen onder hoeken van 45° snijden. De vier raaklijnen verdeelen dus de vier rechte hoeken om het beschouwde punt in acht gelijke deelen.

Waren
dan zou men moeten hebben

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}=\mathbf{C}=\mathbf{D}=0,$$

$$a=b=c=d=e=0, \dots \dots \dots \text{(CXIX)}$$

en men zou gemakkelijk inzien, dat het punt in het algemeen een vijfvoudig punt zou zijn.

§ 43. Wij hebben tot nog toe stilzwijgend verondersteld, dat al de wortels van (S') bestaanbaar zijn. Het behoeft echter niet gezegd te worden, dat dit niet altijd het geval zal zijn. Uit (CVII) is het duidelijk, dat, wanneer $\mathbf{E}^3 - 54\mathbf{F}^2$ negatief is, niet al de zes waarden van ξ positief kunnen zijn en er dus onder de wortels van (S') onbestaanbare moeten voorkomen. Zij kunnen echter ook niet allen onbestaanbaar zijn. ¹⁾ Er moeten dus in dit geval twee bestaanbare en twee onbestaanbare takken voorkomen, zoodat het punt beschouwd kan worden als een afgezonderd punt, samenvallende met een dubbelpunt.

In het geval $\mathbf{E}^3 - 54\mathbf{F}^2$ positief blijft het onbeslist, of al de wortels van (S') bestaanbaar of allen onbestaanbaar zijn. Dit is het gemakkelijkst uit te maken door de opmerking, dat het getal der bestaanbare wortels eener vergelijking niet meer dan één verschillen kan van dat harer afgeleide. De afgeleide nu van (S'),

$$b + 3c \frac{\Delta y}{\Delta x} + 3d \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 + e \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^3 = 0 \dots \dots \dots \text{(166)}$$

zal volgens § 17 drie of één bestaanbaren wortel hebben, naarmate de uitdrukking

$$4(d^2 - ce)(c^2 - bd) - (be - cd)^2$$

positief of negatief is. Is dus $\mathbf{E}^3 - 54\mathbf{F}^2 > 0$ dan zullen al de wortels van (S') bestaanbaar zijn, indien bovenstaande uitdrukking positief, onbestaanbaar wanneer zij negatief is.

Is $\mathbf{E}^3 - 54\mathbf{F}^2 = 0$, of met andere woorden, zijn twee der wortels gelijk, dan is eene der waarden van ξ gelijk aan 0, en het product van de vijf andere is gelijk aan

$$-96 \frac{\mathbf{E}(3\mathbf{A}^2\mathbf{E} - 3\mathbf{B}\mathbf{E} + 2\mathbf{E}^2 - 27\mathbf{F}\mathbf{A})}{\{\mathbf{A}(\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{C} - 2\mathbf{B}) - 8\mathbf{F}\}^2}$$

Het teeken van dit product hangt af van dat van

$$3\mathbf{A}^2\mathbf{E} - 3\mathbf{B}\mathbf{E} + 2\mathbf{E}^2 - 27\mathbf{F}\mathbf{A},$$

daar $\mathbf{E}$ in dit geval altijd positief moet zijn. Is dus deze uitdrukking negatief, dan zijn de beide andere takken bestaanbaar, in het tegenovergestelde geval onbestaanbaar.

§ 44. Wij hebben thans alle mogelijke gevallen nagegaan, die zich zonder behulp van differentiaalquotienten van hoogere dan de vierde orde lieten onderscheiden. Verder zullen wij niet gaan: de gang onzer redeneering is uit het voorgaande voldoende gebleken, en reeds hier zijn ons somwijlen formules voor-

¹⁾ Dit laat zich aldus bewijzen. Wanneer σ een bestaanbare en $\tau + \nu i$ een onbestaanbare wortel van (S') is, dan is de tangens van den hoek tusschen de takken waarbij deze waarden behooren gelijk aan $\frac{\sigma - \tau - \nu i}{1 + \sigma\tau + \sigma\nu i}$. Vervangt men nu den onbestaanbaren tak door zijnen geconjugeerde, en neemt men het product, dan verkrijgt men eene bestaanbare waarde, die dus een positief vierkant heeft. De hoek tusschen twee niet geconjugeerde onbestaanbare raaklijnen heeft tot tangens $\frac{\tau - \tau' + (\nu - \nu')i}{1 + (\tau\tau' - \nu\nu') - (\tau\nu' + \tau'\nu)i}$, en vervangt men nu beide wortels door hunne geconjugeerden, en vermenigvuldigt de verkregen uitdrukkingen met elkander, dan heeft men weder eene bestaanbare waarde. De tangens van den hoek tusschen twee geconjugeerde onbestaanbare raaklijnen is echter $\frac{2\nu i}{1 + \tau^2 + \nu^2}$, waarvan het vierkant negatief is. Waren nu alle wortels van (S') onbestaanbaar, dan kwamen er twee zulke combinaties voor, en het product der waarden van ξ zou positief zijn.

gekomen, die door hare omslachtigheid in vele gevallen voor practisch gebruik ongeschikt waren. Dit zou, indien wij nog eene schrede verder gingen, en ook differentiaalquotienten van de vijfde orde in onze beschouwingen opnamen, in veel grootere mate het geval zijn. Eén geval rest ons echter nog ter beschouwing, namelijk, dat er onder de gebruikte differentiaalquotienten voorkomen, die eene oneindige of onbepaalde waarde verkrijgen. In dat geval worden al de gevonden formules onbruikbaar, en moeten wij naar andere middelen ter onderscheiding omzien.

Wij kunnen daartoe echter de methode, die wij tot nog toe gebezigd hebben, niet volhouden, daar wij geene betrekkingen kunnen opsporen tusschen grootheden, die oneindig groot zijn, niet maar voor een bepaalden stand der coördinatenassen, maar in het algemeen, en die alleen in enkele bepaalde gevallen eens eene eindige waarde kunnen hebben. In zeer vele gevallen zal men zich kunnen helpen door de vergelijking (A) in een anderen vorm te brengen, b.v. door verdrijving van breuken, wortelteekens, of logarithmen. Dit zal echter niet altijd mogelijk zijn. Eene methode, die altijd tot het doel voert, is deze:

Men zoek eerst door middel van de vergelijkingen (III), (IV) of (V) de coördinaten van de bijzondere punten van de eerste orde, die de kromme bezitten kan. Zijn x_1 en y_1 de coördinaten van een dezer punten, dan make met dit punt tot pool van een polair coördinatenstelsel, dat is men stelde

$$x = r \cos \zeta - x_1, y = r \sin \zeta - y_1,$$

zoodat men bekomt

$$f(r \cos \zeta - x_1, r \sin \zeta - y_1) = 0 \dots \dots \dots (T)$$

Hierin stelde men nu $r = 0$, en bepale de wortels van de overblijvende vergelijking in ζ ¹⁾.

$$F(\zeta) = 0 \dots \dots \dots (167)$$

Ieder der waarden van ζ , die aan deze vergelijking voldoen, wijst de richting aan, waarin één of meer takken der kromme door het gevonden punt heenloopen. Heeft (167) geen enkelen bestaanbaren wortel, dan is het punt een afgezonderd punt.

Kent men op deze wijze de richting van de verschillende raaklijnen, dan neme men ieder daarvan achtereenvolgens tot x' -as van een rechthoekig coördinaten stelsel met het beschouwde punt tot oorsprong; dan is

$$x' = r \cos(\zeta - \zeta_1), y' = r \sin(\zeta - \zeta_1), \dots \dots \dots (168)$$

waarin ζ_1 de waarde van ζ is, die met de als x' -as aangenomen raaklijn overeenkomt. Bereken men nu de zeer kleine waarden van x' en y' overeenkomende met $\zeta = \zeta_1 + \Delta \zeta$ en uitgedrukt in $\Delta \zeta$, dan heeft men alles, wat men noodig heeft, om den vorm der kromme in de nabijheid van het beschouwde punt te onderzoeken; men heeft dan namelijk de volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned} \Delta x' &= f'(\Delta \zeta) \\ \Delta y' &= f'(\Delta \zeta) \end{aligned} \dots \dots \dots (169)$$

§ 45. Beschouwen wij nu voorloopig in de tweede leden van (169) alleen de termen van de laagste orde, dan kan

1° $\Delta x'$ tegelijk met $\Delta \zeta$ van teeken veranderen, terwijl $\Delta y'$ bij eene teekenverandering van $\Delta \zeta$ onveranderd blijft. In dit geval ligt de tak, die de aangenomen x' -as aanraakt, geheel aan dezelfde zijde van de raaklijn, en loopt aan weerszijden van de normaal door;

2° kan $\Delta x'$ bij eene teekenverandering van $\Delta \zeta$ onveranderd blijven, terwijl $\Delta y'$ van teeken verandert. De kromme bezit dan twee ter weerszijden van de raaklijn gelegen takken, die in het punt eindigen, en dus een keerpunt van de eerste soort.

¹⁾ Deze vergelijking zal altijd den vorm $0 = 0$ hebben. De gewone middelen, als daar zijn het uitnemen van factoren, het differentieeren naar r , enz. zullen echter toereikend zijn om den vorm van het eerste lid te bepalen.

3° kunnen $\Delta x'$ en $\Delta y'$ een van beiden of beiden van bestaanbaar in onbestaanbaar overgaan of omgekeerd, als $\Delta \zeta$ van teeken verandert. De tak, dien men onderzoekt, eindigt dan plotseling in het beschouwde punt, en met betrekking tot dezen tak is het punt, wat men een *eindpunt* noemt ¹⁾;

4° kunnen $\Delta x'$ of $\Delta y'$ of beiden meer dan ééne waarde hebben. In dit geval hebben meer dan één tak dezelfde raaklijn, en ieder van deze kan men afzonderlijk beschouwen. In dit geval verdient nog eene afzonderlijke vermelding de dikwijls voorkomende omstandigheid, dat de beide grootheden $\Delta x'$ en $\Delta y'$ voor positieve waarden van $\Delta \zeta$ twee gelijke maar in teeken verschillende bestaanswaardes hebben, en voor negatieve $\Delta \zeta$ onbestaanbaar zijn, of omgekeerd. Daar $\Delta x' = \Delta r \cos \Delta \zeta$ en $\Delta y' = \Delta r \sin \Delta \zeta$ is, zullen bij positieve $\Delta \zeta$, $\Delta x'$ en $\Delta y'$ gelijke, bij negatieve $\Delta \zeta$ ongelijke teekens hebben, zoodat men nimmer in onzekerheid kan zijn, welke teekens van $\Delta x'$ en $\Delta y'$ bij elkander behooren. Het is duidelijk, dat wij in dit geval te doen hebben met één enkelen doorlopenden tak van de kromme, die de raaklijn in het beschouwde punt doorsnijdt, en dus een buigpunt van de eerste soort heeft.

Om de vergelijkingen (169) te bekomen moet men uit (T) r in ζ , of althans Δr in $\Delta \zeta$ uitdrukken. Soms zal het gemakkelijker zijn ζ in r of ook ζ en r beiden in eene andere veranderlijke, t b. v. uit te drukken. In dat geval bekomt men de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= f(\Delta t), \\ \Delta y' &= f'(\Delta t),\end{aligned}\quad \dots \dots \dots (170)$$

waarin t ook r kan zijn.

Hier kunnen nu weder verschillende gevallen voorkomen, $\Delta x'$ en $\Delta y'$ kunnen namelijk ieder afzonderlijk al of niet te gelijk met Δt van teeken veranderen, waarbij de volgende vier combinaties mogelijk zijn:

1. $\Delta x'$ en $\Delta y'$ veranderen beiden van teeken. Een doorlopende tak die de raaklijn doorsnijdt, dus een buigpunt van de eerste soort.
2. $\Delta x'$ verandert $\Delta y'$ niet. Een doorlopende tak aan ééne zijde van de raaklijn; er kan dus een buigpunt van de tweede soort voorkomen.
3. $\Delta y'$ verandert $\Delta x'$ niet. Een keerpunt van de eerste soort.
4. Noch $\Delta x'$ noch $\Delta y'$ verandert van teeken. Een keerpunt van de tweede soort.

Vervolgens kan $\Delta x'$ of $\Delta y'$ of beiden van bestaanbaar in onbestaanbaar, of omgekeerd, overgaan. In dit geval heeft men een eindpunt, tenzij een andere tak zich met den beschouwden verbindt om daarmee een doorlopenden tak of een keerpunt te vormen.

Eindelijk kunnen de tweede leden van (170) dubbelzinnig zijn. In dit geval beschouwe men iedere waarde afzonderlijk, en ieder zal eenen tak van de kromme leveren, die al de reeds genoemde verscheidenheden kan aanbieden.

Wij hebben nog op te merken, dat men nog een afzonderlijken naam heeft gegeven aan punten, waar twee takken eener kromme eindigen, en onder eenen hoek tusschen 0° en 180° gelegen te zamen komen. Zulk een punt noemt men namelijk een *uitstekend punt*.

§ 46. Een paar voorbeelden mogen het gezegde in de beide vorige §§ ophelderen.

1. Zij te onderzoeken de kromme voorgesteld door de vergelijking

$$y - \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0. \quad \dots \dots \dots (171)$$

Men vindt

$$\bar{x} = -\frac{x + x e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}}{x \left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2}, \quad \bar{y} = 1$$

¹⁾. Deze punten zijn ons tot nog toe niet voorgekomen, en kunnen dus niet worden aangetroffen, tenzij er onder de partieele differentieaquotienten van het eerste lid van (A) voorkomen, die oneindig of onbepaald zijn.

waaruit blijkt dat wij voor $x = 0$, $y = 0$ in het geval van vergel. (V) verkeeren. De substitutie van $x = r \cos \zeta$, $y = r \sin \zeta$ doet (171) overgaan in

$$r \sin \zeta - \frac{r \cos \zeta}{1 + \frac{1}{e} \cos \zeta} = 0$$

of na deeling door r

$$\sin \zeta - \frac{\cos \zeta}{1 + \frac{1}{e} \cos \zeta} = 0. \quad (172)$$

hetwelk voor $r = 0$ overgaat in

$$\sin \zeta = 0, \quad (173)$$

of

$$\sin \zeta - \cos \zeta = 0, \quad (174)$$

naarmate men r van positief of van negatief tot 0 laat naderen.

Uit (173) hebben wij de waarde

$$\zeta_1 = 0,$$

en uit (174)

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} \pi.$$

De eerste waarde geeft voor Δr uit (172)

$$\Delta r = \frac{\cos \Delta \zeta}{\log (\cot \Delta \zeta - 1)},$$

dus

$$\Delta x' = \frac{\cos^2 \Delta \zeta}{\log (\cot \Delta \zeta - 1)}, \Delta y' = \frac{\cos \Delta \zeta \sin \Delta \zeta}{\log (\cot \Delta \zeta - 1)}; \quad (175)$$

$\Delta x'$ en $\Delta y'$ hebben derhalve beiden ééne enkele bestaanbare positieve waarde, wanneer $\Delta \zeta$ positief is, en zijn voor $\Delta \zeta$ negatief onbestaanbaar. De tak, die met $\zeta_1 = 0$ overeenkomt, en dus de x -as aanraakt, heeft in den oorsprong een eindpunt.

Voor $\zeta_2 = \frac{1}{2} \pi$ vindt men

$$\Delta r = \frac{\cos (\frac{1}{2} \pi + \Delta \zeta)}{\log \left\{ \cot \left(\frac{1}{2} \pi + \Delta \zeta \right) - 1 \right\}},$$

dus

$$\Delta x' = \frac{\cos \Delta \zeta \cos (\frac{1}{2} \pi + \Delta \zeta)}{\log \left\{ \cot \left(\frac{1}{2} \pi + \Delta \zeta \right) - 1 \right\}}, \Delta y' = \frac{\sin \Delta \zeta \cos (\frac{1}{2} \pi + \Delta \zeta)}{\log \left\{ \cot \left(\frac{1}{2} \pi + \Delta \zeta \right) - 1 \right\}}. \quad (176)$$

Hier hebben $\Delta x'$ en $\Delta y'$ voor negatieve $\Delta \zeta$ bestaanbare negatieve waarden, en zijn voor positieve $\Delta \zeta$ onbestaanbaar. Ook deze tak heeft derhalve in den oorsprong een eindpunt, en deelt den hoek middendoor tusschen de negatieve richtingen der coördinatenassen. Beide takken te zamen vormen een uitstekend punt.

2. Een tweede voorbeeld zij

$$(x^2 + y^2)^n - a^2 (x^n - n x^{n-2} y^2 + n x^{n-4} y^4 - \text{enz.}) = 0. \quad (177)$$

Men ziet gemakkelijk, dat voor $x = 0$, $y = 0$ aan de vergelijking (III) wordt voldaan, zoodat de oorsprong een bijzonder punt van de eerste orde is. De substitutie van $x = r \cos \zeta$, $y = r \sin \zeta$ geeft na deeling door r^n

$$r^n - a^n \cos n \zeta = 0. \quad (178)$$

Voor $r = 0$ gaat dit over in

$$\cos n \zeta = 0,$$

dus

$$\zeta_1 = \frac{2m+1}{2n} \pi. \quad (179)$$

waarin m alle geheele waarden van 0 tot $n - 1$ kan hebben. Wij vinden dus n verschillende waarden voor ζ .

Ieder van deze waarden geeft

$$\Delta r = \frac{a^n}{n r^{n-1}} \cos n \left(\frac{2m+1}{2n} \pi + \Delta \zeta \right) = \frac{a(\pm \sin^n n \Delta x)}{n},$$

waarin het teeken $+$ bij onevene het teeken $-$ bij evene waarden van m behoort.

Hieruit volgt nu

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{a \cos \Delta \zeta \sqrt[n]{n} \pm \sin n \Delta \zeta}{n}, \\ \Delta y' &= \frac{a \sin \Delta \zeta \sqrt[n]{n} \pm \sin n \Delta \zeta}{n}. \end{aligned} \quad (180)$$

Hierbij hebben wij te onderscheiden, of n oneven of even is. In het eerste geval verandert $\Delta x'$ tegelijk met $\Delta \zeta$ van teeken, en blijft $\Delta y'$ daarbij onveranderd; men heeft dus een doorlopenden tak aan ééne zijde van de raaklijn gelegen. In het tweede geval gaan $\Delta x'$ en $\Delta y'$ bij eene teekenverandering van $\Delta \zeta$ van bestaanbaar in onbestaanbaar over, maar hebben, als zij bestaanbaar zijn, twee alleen in teeken verschillende waarden; wij hebben dus een doorlopenden tak, die een buigpunt heeft van de eerste soort.

Had men ζ in r uitgedrukt, dan zou men bekomen hebben

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \cos \frac{1}{n} \text{ boog} \left(\cos \frac{(\Delta r)^n}{a^n} \right) \Delta r, \\ \Delta y' &= \sin \frac{1}{n} \text{ boog} \left(\cos \frac{(\Delta r)^n}{a^n} \right) \Delta r, \end{aligned} \quad (181)$$

waaruit zich dezelfde conclusie liet afleiden.

Was de vergelijking (178) rechtstreeks gegeven met de bepaling, dat n alle mogelijke bestaانبare positieve waarden kan hebben, dan zou men dezelfde vergelijkingen (180) en (181) gevonden hebben. In dat geval komen er echter vier verschillende gevallen voor, n kan namelijk zijn:

- 1° eene breuk met oneven teller en oneven noemer,
- 2° eene breuk met oneven teller en even noemer,
- 3° eene breuk met even teller en oneven noemer,
- 4° een onmeetbaar getal.

In de drie eerste gevallen is het aantal verschillende waarden van ζ , en dus het aantal verschillende raaklijnen gelijk aan den teller van n , in het vierde geval oneindig groot.

Bij iedere raaklijn vindt men in het eerste geval een doorlopenden tak, aan dezelfde zijde van de raaklijn blijvende, in het tweede een doorlopenden tak, die de raaklijn doorsnijdt, en dus een buigpunt van de eerste soort heeft, in het derde een keerpunt van de eerste soort, en in het vierde geval een eindpunt.

§ 47. Deze methode is ook in staat ons in te lichten omtrent de verdere bijzonderheden aangaande de kromming enz. der verschillende takken. Vooreerst laat zich de orde van de aanraking tusschen iederen tak en hare raaklijn uit de vergelijkingen (169) of (170) gemakkelijk bepalen. Zoo vindt men in het tweede voorbeeld van § 46, dat $\Delta x'$ van dezelfde orde is als $(\Delta \zeta)^{\frac{1}{n}}$ en $\Delta y'$ als $(\Delta \zeta)^{\frac{n+1}{n}}$; $\Delta y'$ is dus van dezelfde orde als $(\Delta x')^{n+1}$, zoodat iedere tak met zijne raaklijn eene aanraking van de n^{de} orde heeft. Hieruit volgt nog, dat in dit voorbeeld behalve in het geval $n=1$ altijd een buigpunt voorkomt, waar een doorlopende tak wordt aangetroffen. ¹⁾ Ook de aanraking met andere krommen laat zich op deze

¹⁾ In het eerste voorbeeld heb ik de orde van aanraking tusschen de takken der kromme en hunne raaklijnen niet kunnen bepalen, daar het mij niet gelukt is uit te maken, van welke orde de grootheid

$\frac{1}{\log \Delta \zeta}$ is.

wijze gemakkelijk onderzoeken. Men make daartoe ook voor die kromme, waarmede men een gegeven tak eener kromme vergelijken wil, de vergelijkingen op, die analoog zijn aan (169) of (170).

Stel, men vindt daardoor

$$\begin{aligned}\Delta x'' &= f_1(\Delta \zeta'), \\ \Delta y'' &= f_1'(\Delta \zeta').\end{aligned}\quad \dots \dots \dots (182)$$

Volgens § 2 hebben wij hier het verschil noodig tusschen de waarden van $\Delta y'$ en $\Delta y''$, die bij dezelfde waarde van $\Delta x'$ behooren. Wij moeten dus over $\Delta \zeta'$ zoodanig beschikken, dat $\Delta x'' = \Delta x'$ wordt, zoodat $\Delta \zeta'$ bepaald moet worden uit

$$f(\Delta \zeta) = f_1(\Delta \zeta'). \quad \dots \dots \dots (183)$$

Hierbij hebben wij alleen op de termen van de laagste orde te letten, daar een verschil van hoogere orde niets ter zake doet.

Had men b. v. voor een gegeven tak eener kromme gevonden,

$$\begin{aligned}\Delta x' &= a \Delta \zeta + h(\Delta \zeta)^2 + r(\Delta \zeta)^3 + \text{enz.}, \\ \Delta y' &= h'(\Delta \zeta)^2 + r'(\Delta \zeta)^3 + h''(\Delta \zeta)^4 + \text{enz.}\end{aligned}\quad \dots \dots \dots (184)$$

en wilde men dezen vergelijken bij eenen cirkel, dan moest men uit

$$r' \pm 2 \sin \zeta' = 0,$$

de vergelijking eens cirkels, als een der punten van zijnen omtrek tot pool en de raaklijn tot oorsprong der hoeken wordt aangenomen, afleiden

$$\Delta r' = \mp 2e(\Delta \zeta' - \frac{\Delta \zeta'^3}{1.2.3} + \text{enz.}),$$

en daaruit

$$\begin{aligned}\Delta x'' &= \mp 2e \left(\Delta \zeta' - \frac{(\Delta \zeta')^3}{1.2.3} + \text{enz.} \right) \left(1 - \frac{(\Delta \zeta')^2}{1.2} + \text{enz.} \right) = \mp 2e \left(\Delta \zeta' - \frac{4(\Delta \zeta')^3}{1.2.3} + \text{enz.} \right), \\ \Delta y'' &= \mp 2e \left(\Delta \zeta' - \frac{(\Delta \zeta')^3}{1.2.3} \right)^2 = \mp 2e \left((\Delta \zeta')^2 - 2 \frac{(\Delta \zeta')^4}{1.2.3} + \text{enz.} \right).\end{aligned}\quad (185)$$

(183) wordt nu

$$a \Delta \zeta = \mp 2e \Delta \zeta',$$

waaruit

$$\Delta \zeta' = \mp \frac{a}{2e} \Delta \zeta. \quad \dots \dots \dots (186)$$

Door de substitutie hiervan in de tweede vergelijking (185) hebben wij

$$\Delta y'' = \mp \left(\frac{a^2(\Delta \zeta)^2}{2e} - \frac{a^4(\Delta \zeta)^4}{24e^3} \right). \quad \dots \dots \dots (187)$$

In het algemeen hebben beide krommen dus eene aanraking van de eerste orde. Die aanraking zal echter van de tweede orde worden, wanneer

$$h' \pm \frac{a^2}{2e} = 0 \quad \dots \dots \dots (188)$$

is. Uit deze vergelijking laat zich dus de waarde van den kromtestraal berekenen, namelijk

$$e = \mp \frac{a^2}{2h'}; \quad \dots \dots \dots (CXX)$$

voor $h' = 0$ zou men een buigpunt hebben.

Ingeval $r' = 0$ was zou de aanraking met den kromtecirkel tot de derde orde opklimmen. en de onderzochte tak dus een toppunt vertoonen. Het is duidelijk, hoe men hiermede kan voortgaan, en alle bijzonderheden onderzoeken, die men verlangt te kennen. De eenige moeilijkheden, die men hierbij nog kan ontmoeten, zijn gelegen in de onoplosbaarheid van sommige vergelijkingen en andere omstandigheden, die niet aan de methode, maar aan de ontoereikendheid der analyse te wijten zijn.

T W E E D E A F D E E L I N G.

Bijzondere punten van de tweede en hoogere orde.

§ 48. Denzelfden weg als bij bijzondere punten van de eerste orde volgende, is het eerste, wat wij te doen hebben, betrekkingen op te sporen tusschen de partieele differentiaalquotienten van de eerste en tweede orde van het eerste lid der vergelijking (A), onafhankelijk van den vorm dier vergelijking en van de richting der coördinaten. Zij

$$Q = F(X, Y, P, R) \dots\dots\dots (k)$$

eene betrekking onafhankelijk van het coördinatenstelsel, dan heeft men door naar $\mathfrak{S}$ te differentieeren

$$\frac{dQ}{d\mathfrak{S}} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{d\mathfrak{S}}, \dots\dots\dots (189)$$

of na substitutie van de vergelijkingen (5), (13) en (k)

$$R - P = \frac{\partial Q}{\partial X} Y - \frac{\partial Q}{\partial Y} X + 2 \frac{\partial Q}{\partial P} Q - 2 \frac{\partial Q}{\partial R} Q, \dots\dots\dots (S)$$

waarvan de integraal is

$$f(X^2 + Y^2, P + R, Q^2 - PR, Y^2 P - 2XYQ + X^2 R) = 0. \dots\dots\dots (CXXI)$$

Substitueert men in de vergelijkingen (15) de vergelijkingen (A), (v), (z) en (x), dan heeft men

$$\begin{aligned} P &= a\mathfrak{p} + b\bar{x}^2 + 2c\bar{x}, \\ Q &= a\mathfrak{q} + b\bar{x}\bar{y} + c\bar{y} + d\bar{x}, \dots\dots\dots (190) \\ R &= a\mathfrak{r} + b\bar{y}^2 + 2d\bar{y}; \end{aligned}$$

terwijl de vergelijkingen (8) worden

$$X = a\bar{x}, \quad Y = a\bar{y} \dots\dots\dots (191)$$

Door deze vijf vergelijkingen naar **a**, **b**, **c** en **d** te differentieeren heeft men

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\mathfrak{a}} &= \bar{x}, \quad \frac{dY}{d\mathfrak{a}} = \bar{y}, \quad \frac{dP}{d\mathfrak{a}} = p, \quad \frac{dQ}{d\mathfrak{a}} = q, \quad \frac{dR}{d\mathfrak{a}} = r, \\ \frac{dX}{d\mathfrak{b}} &= 0, \quad \frac{dY}{d\mathfrak{b}} = 0, \quad \frac{dP}{d\mathfrak{b}} = \bar{x}^2, \quad \frac{dQ}{d\mathfrak{b}} = \bar{x}\bar{y}, \quad \frac{dR}{d\mathfrak{b}} = \bar{y}^2, \dots\dots\dots (192) \\ \frac{dX}{d\mathfrak{c}} &= 0, \quad \frac{dY}{d\mathfrak{c}} = 0, \quad \frac{dP}{d\mathfrak{c}} = 2\bar{x}, \quad \frac{dQ}{d\mathfrak{c}} = \bar{y}, \quad \frac{dR}{d\mathfrak{c}} = 0, \\ \frac{dX}{d\mathfrak{d}} &= 0, \quad \frac{dY}{d\mathfrak{d}} = 0, \quad \frac{dP}{d\mathfrak{d}} = 0, \quad \frac{dQ}{d\mathfrak{d}} = \bar{x}, \quad \frac{dR}{d\mathfrak{d}} = 2\bar{y}. \end{aligned}$$

Beschouwt men nu (k) als eene betrekking onafhankelijk van **a**, **b**, **c** en **d**, dan heeft men door die vergelijking ten opzichte van deze vier grootheden te differentieeren

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\mathfrak{a}} &= \frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{d\mathfrak{a}} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\mathfrak{a}} + \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{d\mathfrak{a}} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{d\mathfrak{a}}, \\ \frac{dQ}{d\mathfrak{b}} &= \frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{d\mathfrak{b}} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\mathfrak{b}} + \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{d\mathfrak{b}} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{d\mathfrak{b}}, \dots\dots\dots (193) \\ \frac{dQ}{d\mathfrak{c}} &= \frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{d\mathfrak{c}} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\mathfrak{c}} + \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{d\mathfrak{c}} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{d\mathfrak{c}}, \\ \frac{dQ}{d\mathfrak{d}} &= \frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{d\mathfrak{d}} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\mathfrak{d}} + \frac{\partial F}{\partial P} \frac{dP}{d\mathfrak{d}} + \frac{\partial F}{\partial R} \frac{dR}{d\mathfrak{d}}, \end{aligned}$$

welke vergelijkingen door substitutie van (192) overgaan in

$$q = \frac{\partial Q}{\partial X} \bar{x} + \frac{\partial Q}{\partial Y} \bar{y} + \frac{\partial Q}{\partial P} p + \frac{\partial Q}{\partial R} r, \dots\dots\dots (194)$$

$$\bar{x}\bar{y} = \frac{\partial Q}{\partial P}\bar{x}^2 + \frac{\partial Q}{\partial R}\bar{y}^2, \quad \dots \quad (195)$$

$$\bar{y} = 2 \frac{\partial Q}{\partial P} \bar{x}, \quad \dots \quad (196)$$

$$\bar{x} = 2 \frac{\partial Q}{\partial R} \bar{y}. \quad \dots \quad (197)$$

Deze vergelijkingen met **a** vermenigvuldigende en (8) en (190) substitueerende bekomen wij

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial X}X + \frac{\partial Q}{\partial Y}Y + \frac{\partial Q}{\partial P}P + \frac{\partial Q}{\partial R}R + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}^2} \left(XY - \frac{\partial Q}{\partial P}X^2 - \frac{\partial Q}{\partial R}Y^2 \right) + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} \left(Y - 2 \frac{\partial Q}{\partial P}X \right) + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}} \left(X - 2 \frac{\partial Q}{\partial R}Y \right), \quad (198)$$

$$XY = \frac{\partial Q}{\partial P}X^2 + \frac{\partial Q}{\partial R}Y^2, \quad \dots \quad (199)$$

$$Y = 2 \frac{\partial Q}{\partial P} X, \quad \dots \quad (\mathbf{T})$$

$$X = 2 \frac{\partial Q}{\partial R} Y.$$

De verg. (199) is een gevolg van **(T)**, terwijl (198) ten gevolge van de drie anderen overgaat in

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial X}X + \frac{\partial Q}{\partial Y}Y + \frac{\partial Q}{\partial P}P + \frac{\partial Q}{\partial R}R. \quad \dots \quad (\mathbf{U})$$

De vergelijking **(U)** bevat de voorwaarde, dat de gezochte betrekking homogeen moet zijn. De integralen van **(T)** zijn

$$\mathbf{f}_1(X, Y, R, P Y - 2 Q X) = 0 \quad \dots \quad (\text{CXXII})$$

$$\mathbf{f}_2(X, Y, P, R X - 2 Q Y) = 0$$

Behalve X en Y , is noch de volgende uitdrukking

$$Z = P Y^2 - 2 Q X Y + R X^2 \quad \dots \quad (\mathbf{z})$$

in de eerste leden van (CXXII) begrepen. Men heeft namelijk

$$Z = Y(P Y - 2 Q X) + R X^2 = X(R X - 2 Q Y) + P Y^2.$$

De meest algemeene betrekking, onafhankelijk van den vorm der vergelijking, is dus

$$\mathbf{f}(X, Y, Z) = 0 \quad \dots \quad (\text{CXXIII})$$

Schrijft men dit onder den vorm

$$Z = \mathbf{F}(X, Y), \quad \dots \quad (\mathbf{Z})$$

deze betrekking tevens onafhankelijk van het coördinatenstelsel veronderstellende, dan vindt men door ten opzichte van $\mathfrak{S}$ te differentieeren en de vergelijkingen (5) benevens de volgende

$$\frac{dZ}{d\mathfrak{S}} = 0 \quad \dots \quad (200)$$

te substitueeren

$$0 = \frac{\partial Z}{\partial X} Y - \frac{\partial Z}{\partial Y} X. \quad \dots \quad (\mathbf{V})$$

De verg. (200) vindt men met behulp van (5) en (13)

De integraal van **(V)**, is

$$\mathbf{f}(X^2 + Y^2, Z) = \mathbf{f}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2, \mathfrak{z}) = 0,$$

waarvoor men, daar de functie **f** volgens **(U)** homogeen moet zijn, ook schrijven kan

$$\frac{(X^2 + Y^2)^3}{Z^2} = \frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^3}{\mathfrak{z}^2} = \text{const.} \quad \dots \quad (\text{CXXIV})$$

§ 49. Om de beteekenis van (CXXIV) na te gaan, nemen wij de raaklijn als x -as en de normaal als y -as aan, waardoor $\bar{x} = 0$ wordt, en wij dus hebben

$$\bar{y} \Delta y + \frac{p(\Delta x)^2 + 2q \Delta x \Delta y + r(\Delta y)^2}{1.2} + R = 0 \quad \dots \quad (\mathbf{U})$$

Hieruit blijkt, dat eene kromme in het algemeen eene aanraking van de eerste orde met hare raaklijn heeft. Is echter

$$p = 0,$$

dan klimt die aanraking tot de tweede orde op, daar Δy dan van dezelfde orde wordt als $(\Delta x)^2$. In dat geval heeft de kromme een buigpunt. Voor $p = 0$ kunnen wij, daar $\bar{y}$ niet 0 kan zijn, schrijven

$$p \bar{y}^2 = 0, \dots \dots \dots (201)$$

of, wat wegens $\bar{x} = 0$ hetzelfde is,

$$z = 0. \dots \dots \dots (CXXV)$$

De vergelijking (CXXV) bevat dus de voorwaarde voor een buigpunt, dat in het algemeen van de eerste soort zal zijn.

Van eenen cirkel, die de raaklijn met de kromme gemeen heeft, is de vergelijking op het aangenomen coördinatenstelsel

$$x^2 + y^2 \pm 2\epsilon y = 0; \dots \dots \dots (202)$$

voor deze kromme heeft men dus in de nabijheid van het raakpunt

$$\pm 2\epsilon(\Delta y) + \frac{2(\Delta x)^2 + 2(\Delta y)^2}{12} = 0 \dots \dots \dots (203)$$

Zij heeft dus ook in het algemeen met de beschouwde kromme eene aanraking van de eerste orde; die aanraking wordt echter van de tweede orde, wanneer

$$\pm \frac{1}{2\epsilon} = \frac{p}{2\bar{y}},$$

of

$$\pm \epsilon = \frac{\bar{y}}{p} \dots \dots \dots (204)$$

wordt. ϵ stelt in dit geval den kromtestraal voor, die dus in het algemeen gelijk is aan $\frac{(\bar{y}^2 + \bar{x}^2)^{\frac{1}{2}}}{z}$, daar deze uitdrukking voor $\bar{x} = 0$ in $\frac{\bar{y}}{p}$ overgaat. Wij hebben derhalve

$$\pm \epsilon = \frac{(\bar{y}^2 + \bar{x}^2)^{\frac{1}{2}}}{z} \dots \dots \dots (CXXVI)$$

Schrijft men (A) onder den vorm

$$y - f(x) = 0, \dots \dots \dots (V)$$

hetwelk steeds mogelijk is door y optelossen, dan vindt men door (V) te differentieeren

$$\bar{x} = -y', \bar{y} = 1, p = -y'', q = 0, r = 0, \dots \dots \dots (205)$$

waarin

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

De substitutie van (205) in (CXXVI) geeft nu

$$\pm \epsilon = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''},$$

de bekende formule voor den kromtestraal.

§ 50. Zoeken wij thans betrekkingen tusschen de partieele differentiaalquotienten van de eerste tweede en derde orde. Zij

$$N = F(X, Y, P, Q, R, K, L, M) \dots \dots \dots (m)$$

zulk eene betrekking, onafhankelijk van het coördinatenstelsel, dan hebben wij door te differentieeren ten opzichte van $\mathfrak{S}$ en de vergelijkingen (5), (13), (25) en (m) te substitueeren

$$-3M = \frac{\partial N}{\partial X} Y - \frac{\partial N}{\partial Y} X + 2 \frac{\partial N}{\partial P} Q + \frac{\partial N}{\partial Q} (R - P) - 2 \frac{\partial N}{\partial R} Q + 3 \frac{\partial N}{\partial K} L + \frac{\partial N}{\partial L} (2M - K) + \frac{\partial N}{\partial M} (N - 2L) \dots (W)$$

waarvan de integraal is

$$\mathbf{f}[X^2 + Y^2, P + R, Q^2 - PR, Y^2 P - 2XYQ + X^2 R, (K + M)^2 + (L + N)^2, L^2 - KM + M^2 - LN, \\ 4(L^2 - KM)(M^2 - LN) - (KN - LM)^2, Y^2(L^2 - KM) - XY(KN - LM) + X^2(M^2 - LN)] = 0 \text{ (CXXVII)}$$

Deze vergelijking is onafhankelijk van de richting der coördinaten. Trachten wij thans eene betrekking te vinden onafhankelijk van den vorm der vergelijking. Daartoe substitueeren wij in de vergelijkingen (27) de vergelijkingen (A), (γ), (η), (κ) benevens de volgende

$$(\psi_{3.3.3} - \psi_{4.4.4})\phi' + 6(\psi_{3.3} - \psi_{4.4})(\psi_3 - \psi_4)\phi'' + (\psi_3 - \psi_4)^3\phi''' = \mathbf{h}, \\ (\psi_{3.3.1} - \psi_{4.4.1})\phi' + 2(\psi_{3.1} - \psi_{4.1})(\psi_3 - \psi_4)\phi'' = \mathbf{i}, (\psi_{3.3.2} - \psi_{4.4.2}) + 2(\psi_{3.2} - \psi_{4.2})(\psi_3 - \psi_4)\phi'' = \mathbf{k}. \quad (\sigma)$$

Hierdoor bekomen wij

$$K = \mathbf{a}k + 3\mathbf{b}p\bar{x} + 3\mathbf{c}p + \mathbf{h}\bar{x}^3 + 3\mathbf{i}\bar{x}^2 + 3\mathbf{e}\bar{x}, \\ L = \mathbf{a}l + \mathbf{b}(2q\bar{x} + p\bar{y}) + 2\mathbf{c}q + \mathbf{d}p + \mathbf{h}\bar{x}^2\bar{y} + 2\mathbf{i}\bar{x}\bar{y} + \mathbf{k}\bar{x}^2 + 2\mathbf{f}\bar{x} + \mathbf{e}\bar{y}, \\ M = \mathbf{a}m + \mathbf{b}(2q\bar{y} + r\bar{x}) + 2\mathbf{d}q + \mathbf{e}r + \mathbf{h}\bar{y}^2\bar{x} + 2\mathbf{k}\bar{x}\bar{y} + \mathbf{i}\bar{y}^2 + 2\mathbf{f}\bar{y} + \mathbf{g}\bar{x}, \\ N = \mathbf{a}n + 3\mathbf{b}r\bar{y} + 3\mathbf{d}r + \mathbf{h}\bar{y}^3 + 3\mathbf{k}\bar{y}^2 + 3\mathbf{g}\bar{y}, \quad (206)$$

Differentieert men deze vergelijkingen even als de vergelijkingen (8) en (190) ten opzichte van al de groottheden $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ enz. tot $\mathbf{k}$, dan heeft men

$$\frac{dX}{d\mathbf{a}} = \bar{x}, \frac{dY}{d\mathbf{a}} = \bar{y}, \frac{dP}{d\mathbf{a}} = p, \frac{dQ}{d\mathbf{a}} = q, \frac{dR}{d\mathbf{a}} = r, \frac{dK}{d\mathbf{a}} = k, \frac{dL}{d\mathbf{a}} = l, \frac{dM}{d\mathbf{a}} = m, \frac{dN}{d\mathbf{a}} = n, \\ \frac{dX}{d\mathbf{b}} = 0, \frac{dY}{d\mathbf{b}} = 0, \frac{dP}{d\mathbf{b}} = \bar{x}^2, \frac{dQ}{d\mathbf{b}} = \bar{x}\bar{y}, \frac{dR}{d\mathbf{b}} = \bar{y}^2, \frac{dK}{d\mathbf{b}} = 3p\bar{x}, \frac{dL}{d\mathbf{b}} = 2q\bar{x} + p\bar{y}, \frac{dM}{d\mathbf{b}} = 2q\bar{y} + r\bar{x}, \frac{dN}{d\mathbf{b}} = 3r\bar{y}, \\ \frac{dX}{d\mathbf{c}} = 0, \frac{dY}{d\mathbf{c}} = 0, \frac{dP}{d\mathbf{c}} = 2\bar{x}, \frac{dQ}{d\mathbf{c}} = \bar{y}, \frac{dR}{d\mathbf{c}} = 0, \frac{dK}{d\mathbf{c}} = 3p, \frac{dL}{d\mathbf{c}} = 2q, \frac{dM}{d\mathbf{c}} = r, \frac{dN}{d\mathbf{c}} = 0, \\ \frac{dX}{d\mathbf{d}} = 0, \frac{dY}{d\mathbf{d}} = 0, \frac{dP}{d\mathbf{d}} = 0, \frac{dQ}{d\mathbf{d}} = \bar{x}, \frac{dR}{d\mathbf{d}} = 2\bar{y}, \frac{dK}{d\mathbf{d}} = 0, \frac{dL}{d\mathbf{d}} = p, \frac{dM}{d\mathbf{d}} = 2q, \frac{dN}{d\mathbf{d}} = 3r, \\ \frac{dX}{d\mathbf{e}} = 0, \frac{dY}{d\mathbf{e}} = 0, \frac{dP}{d\mathbf{e}} = 0, \frac{dQ}{d\mathbf{e}} = 0, \frac{dR}{d\mathbf{e}} = 0, \frac{dK}{d\mathbf{e}} = 3\bar{x}, \frac{dL}{d\mathbf{e}} = \bar{y}, \frac{dM}{d\mathbf{e}} = 0, \frac{dN}{d\mathbf{e}} = 0, \\ \frac{dX}{d\mathbf{f}} = 0, \frac{dY}{d\mathbf{f}} = 0, \frac{dP}{d\mathbf{f}} = 0, \frac{dQ}{d\mathbf{f}} = 0, \frac{dR}{d\mathbf{f}} = 0, \frac{dK}{d\mathbf{f}} = 0, \frac{dL}{d\mathbf{f}} = 2\bar{x}, \frac{dM}{d\mathbf{f}} = 2\bar{y}, \frac{dN}{d\mathbf{f}} = 0, \\ \frac{dX}{d\mathbf{g}} = 0, \frac{dY}{d\mathbf{g}} = 0, \frac{dP}{d\mathbf{g}} = 0, \frac{dQ}{d\mathbf{g}} = 0, \frac{dR}{d\mathbf{g}} = 0, \frac{dK}{d\mathbf{g}} = 0, \frac{dL}{d\mathbf{g}} = 0, \frac{dM}{d\mathbf{g}} = \bar{x}, \frac{dN}{d\mathbf{g}} = 3\bar{y}, \\ \frac{dX}{d\mathbf{h}} = 0, \frac{dY}{d\mathbf{h}} = 0, \frac{dP}{d\mathbf{h}} = 0, \frac{dQ}{d\mathbf{h}} = 0, \frac{dR}{d\mathbf{h}} = 0, \frac{dK}{d\mathbf{h}} = \bar{x}^3, \frac{dL}{d\mathbf{h}} = \bar{x}^2\bar{y}, \frac{dM}{d\mathbf{h}} = \bar{x}\bar{y}^2, \frac{dN}{d\mathbf{h}} = \bar{y}^3, \\ \frac{dX}{d\mathbf{i}} = 0, \frac{dY}{d\mathbf{i}} = 0, \frac{dP}{d\mathbf{i}} = 0, \frac{dQ}{d\mathbf{i}} = 0, \frac{dR}{d\mathbf{i}} = 0, \frac{dK}{d\mathbf{i}} = 3\bar{x}^2, \frac{dL}{d\mathbf{i}} = 2\bar{x}\bar{y}, \frac{dM}{d\mathbf{i}} = \bar{y}^2, \frac{dN}{d\mathbf{i}} = 0, \\ \frac{dX}{d\mathbf{k}} = 0, \frac{dY}{d\mathbf{k}} = 0, \frac{dP}{d\mathbf{k}} = 0, \frac{dQ}{d\mathbf{k}} = 0, \frac{dR}{d\mathbf{k}} = 0, \frac{dK}{d\mathbf{k}} = 0, \frac{dL}{d\mathbf{k}} = \bar{x}^2, \frac{dM}{d\mathbf{k}} = 2\bar{x}\bar{y}, \frac{dN}{d\mathbf{k}} = 3\bar{y}^2. \quad (207)$$

Beschouwt men nu (m) als eene betrekking onafhankelijk van $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ enz. ... $\mathbf{k}$, dan vindt men na substitutie van de vergelijkingen (207) elf vergelijkingen, die zich gemakkelijk laten herleiden tot

$$N = \frac{\partial N}{\partial X} X + \frac{\partial N}{\partial Y} Y + \frac{\partial N}{\partial P} P + \frac{\partial N}{\partial Q} Q + \frac{\partial N}{\partial R} R + \frac{\partial N}{\partial K} K + \frac{\partial N}{\partial L} L + \frac{\partial N}{\partial M} M \quad (\mathbf{X})$$

$$3RY = \frac{\partial N}{\partial P} X^2 + \frac{\partial N}{\partial Q} XY + \frac{\partial N}{\partial R} Y^2 + 3\frac{\partial N}{\partial K} PX + \frac{\partial N}{\partial L} (2QX + PY) + \frac{\partial N}{\partial M} (2QY + RX). \quad (208)$$

$$0 = 2\frac{\partial N}{\partial P} X + \frac{\partial N}{\partial Q} Y + 3\frac{\partial N}{\partial K} P + 2\frac{\partial N}{\partial L} Q + \frac{\partial N}{\partial M} R \quad (\mathbf{Y})$$

$$3R = \frac{\partial N}{\partial Q} X + 2\frac{\partial N}{\partial R} Y + \frac{\partial N}{\partial L} P + 2\frac{\partial N}{\partial M} Q$$

$$0 = 3 \frac{\partial N}{\partial K} X + \frac{\partial N}{\partial L} Y,$$

$$0 = 2 \frac{\partial N}{\partial L} X + 2 \frac{\partial N}{\partial M} Y, \dots \dots \dots (Y)$$

$$3 Y = \frac{\partial N}{\partial M} X;$$

$$Y^3 = \frac{\partial N}{\partial K} X^3 + \frac{\partial N}{\partial L} X^2 Y + \frac{\partial N}{\partial M} X Y^2, \dots \dots \dots (209)$$

$$0 = 3 \frac{\partial N}{\partial K} X^2 + 2 \frac{\partial N}{\partial L} X Y + \frac{\partial N}{\partial M} Y^2, \dots \dots \dots (210)$$

$$3 Y^2 = \frac{\partial N}{\partial L} X^2 + 2 \frac{\partial N}{\partial M} X Y \dots \dots \dots (211)$$

De vergelijkingen (208), (209), (210) en (211) zijn gevolgen van (Y). (X) drukt uit, dat de gezochte betrekking homogeen moet zijn. De respectieve integralen van (Y) zijn

$$f_1(X, Y, R, PY - 2 QX, 3 P^2 - 4 KX, Q^2 - LY, QR - MY, N) = 0,$$

$$f_2(X, Y, P, RX - 2 QY, 3 R^2 - 4 NY, Q^2 - MX, QP - LX, K) = 0,$$

$$f_3(X, Y, P, Q, R, M, N, 3 LX - KY) = 0, \dots \dots \dots (CXXVIII)$$

$$f_4(X, Y, P, Q, R, K, N, MX - LY) = 0,$$

$$f_5(X, Y, P, Q, R, K, L, 3 MY - NX) = 0.$$

Wij moeten dus vier uitdrukkingen vinden, die in de eerste leden van deze vijf vergelijkingen begrepen zijn. Drie zoodanige uitdrukkingen kennen wij reeds, namelijk X, Y en Z, eene vierde vinden wij in de volgende

$$\begin{aligned} KY^3 - 3 LXY^2 + 3 MX^2Y - NX^3 - 3 \frac{PQY^4 + (P^2 - PR - 2 Q^2) Y^3 X + (P - R) QX^2 Y^2 - (R^2 - PR - \\ - 2 Q^2) X^3 Y - QRX^4}{X^2 + Y^2} &= -Y^2(3 LX - KY) + f(X, Y, P, Q, R, M, N) = X^2(3 MY - NX) + f'(X, Y, P, Q, R, M, L) \\ &= -3 XY(LY - MX) + f''(X, Y, P, Q, R, K, N) = -\frac{Y^3}{4X}(3 P^2 - 4 KX) + 3 XY(Q^2 - LY) - 3 X^2(QR - MY) + \\ &+ \frac{Y}{X}(PY - 2 QX)^2 + 3 \frac{XY}{X^2 + Y^2}(PY - 2 QX)^2 - 3 \frac{R(Y^2 X - X^3)}{X^2 + Y^2}(PY - 2 QX) + f'''(X, Y, R, N) = \\ &= \frac{X^3}{4Y}(3 R^2 - 4 NY) - 3 XY(Q^2 - MX) + 3 Y^2(QR - LX) - \frac{Y}{4X}(RX - 2 QY)^2 - 3 \frac{XY}{X^2 + Y^2}(RX - 2 QY)^2 + \\ &+ 3 \frac{P(YX^2 - Y^3)}{X^2 + Y^2}(RX - 2 QY) + f''(X, Y, P, K). \end{aligned}$$

Stellen wij deze uitdrukking door W voor, dan is de integraal van het stelsel vergelijkingen (Y)

$$f(X, Y, Z, W) = 0 \dots \dots \dots (CXXIX)$$

Door de waarde van W naar $\mathfrak{S}$ te differentieeren en de vergelijkingen (5), (13) en (25) te substitueeren vindt men

$$\frac{dW}{d\mathfrak{S}} = 0. \dots \dots \dots (212)$$

Zij nu $W = F(X, Y, Z) \dots \dots \dots (n)$
eene betrekking onafhankelijk van het coördinatenstelsel. Differentieert men dan naar $\mathfrak{S}$, en substitueert de vergelijkingen (5), (200), (212) en (n), dan vindt men

$$0 = \frac{\partial W}{\partial X} Y - \frac{\partial W}{\partial Y} X, \dots \dots \dots (Z)$$

waarvan de integraal is

$$f(X^2 + Y^2, Z, W) = f(\bar{x}^2 + \bar{y}^2, z, w) = 0. \quad \text{(CXXX)}$$

Hierin is w analoog aan W .

§ 51. Om de beteekenis van deze vergelijking na te gaan, keeren wij tot het in § 49 aangenomen coördinatenstelsel terug, en ontwikkelen in het eerste lid van (U) ook de termen, die k, l, m en n tot factor hebben, zoodat die vergelijking wordt

$$\bar{y} \Delta y + \frac{p(\Delta x)^2 + 2q \Delta x \Delta y + r(\Delta y)^2}{1.2} + \frac{k(\Delta x)^3 + 3l(\Delta x)^2 \Delta y + 3m \Delta x (\Delta y)^2 + n(\Delta y)^3}{1.2.3} + R = 0 (W)$$

Hierin willen wij alleen de termen van de laagste en die van op één na de laagste orde behouden, en de overige in de rest begripen; daardoor gaat (W) over in

$$\bar{y} \Delta y + \frac{p(\Delta x)^2}{2} + q \Delta x \Delta y + \frac{k(\Delta x)^3}{6} + R' = 0 \quad \text{(W')}$$

De overeenkomstige uitdrukking voor den kromtecirkel luidt

$$\pm 2\epsilon(\Delta y) + (\Delta x)^2 + R'' = 0, \quad \text{(213)}$$

of, als wij de waarde van den kromtestraal substitueeren

$$\bar{y}(\Delta y) + \frac{p}{2}(\Delta x)^2 + R'' = 0, \quad \text{(214)}$$

waaraan R'' van hoogere orde is dan $(\Delta x)^3$. Beide krommen zullen dus eene aanraking van de derde orde met elkander hebben, wanneer uit (W') de termen $q \Delta x \Delta y$ en $\frac{k(\Delta x)^3}{6}$ verdwijnen. De waarde van

Δy heeft slechts een verschil van hoogere orde met $-\frac{p(\Delta x)^2}{2\bar{y}}$, en deze waarde moet men in de eerste van de bedoelde termen substitueeren om voor hare som te vinden

$$\left(\frac{k}{6} - \frac{pq}{2\bar{y}}\right)(\Delta x)^3.$$

De gezochte voorwaarde luidt dus, daar $\bar{y}$ niet verdwijnen kan,

$$k\bar{y}^3 - 3pq\bar{y}^2 = 0. \quad \text{(215)}$$

Het eerste lid is niets anders dan de waarde van w , en, daar de vergelijking

$$w = 0 \quad \text{(CXXXI)}$$

onafhankelijk is van het aangenomen coördinatenstelsel, zal zij onder alle omstandigheden de voorwaarde zijn, dat eene kromme eene aanraking van de derde orde heeft met haren kromtecirkel.

De vergelijking eener parabool, die met de kromme de raaklijn gemeen heeft, op het aangenomen coördinaten stelsel is

$$x^2 \sin^2 \theta \pm 2xy \sin \theta \cos \theta + y^2 \cos^2 \theta \pm 2\pi y = 0, \quad \text{(216)}$$

waarin π de parameter en θ den hoek tusschen de middellijn en de raaklijn in het raakpunt voorstelt.

De vergelijking analoog aan (W') is dus voor deze kromme

$$\pm 2\pi \Delta y + \sin^2 \theta (\Delta x)^2 \pm 2 \sin \theta \cos \theta \Delta x \Delta y + R' = 0 \quad \text{(217)}$$

Deze parabool zal derhalve in het algemeen eene aanraking van de eerste orde met de kromme hebben. Deze aanraking zal echter van de tweede orde worden, wanneer

$$\pm \frac{\sin^2 \theta}{\pi} = \frac{p}{\bar{y}} \quad \text{(218)}$$

wordt. Daar echter $\frac{p}{\bar{y}}$ niets anders is dan de uitdrukking

$$\frac{z}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

luit de voorwaarde, dat eene parabool eene aanraking van de tweede orde met eene kromme heeft,

$$\pm \frac{\sin^2 \theta}{\pi} = \frac{z}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{1}{\varepsilon} \dots \dots \dots (\text{CXXXII})$$

Van nog hoogere, en wel van de derde orde zal de aanraking worden, wanneer ook de termen, die na Δy van de laagste orde zijn, gedeeld door den coëfficient van Δy , voor beide krommen gelijk worden.

Voor de som dier termen in (W') vonden wij reeds

$$\left(\frac{k}{6} - \frac{p q}{2 \bar{y}^2} \right) (\Delta x)^3,$$

hetwelk gedeeld door den coëfficient van Δy wordt

$$\left(\frac{k}{6 \bar{y}} - \frac{p q}{2 \bar{y}^3} \right) (\Delta x)^3.$$

De overeenkomstige uitdrukking voor de parabool luidt

$$\pm \frac{\sin^3 \theta \cdot \cos \theta}{2 \pi^2} (\Delta x)^3,$$

of na substitutie van de waarde π uit (218)

$$\pm \frac{\cot \theta (\Delta x)^3 p^2}{2 \bar{y}^2}.$$

De gezochte voorwaarde luidt dus

$$\pm \frac{p^2 \cot \theta}{\bar{y}^2} = \frac{k}{3 \bar{y}} - \frac{p q}{\bar{y}^2}, \dots \dots \dots (219)$$

waaruit

$$\cot \theta = \pm \frac{k \bar{y} - 3 p q}{3 p^2}, \dots \dots \dots (220)$$

hetwelk bij den aangenomen stand der coördinaten identiek is met

$$\cot \theta = \pm \frac{w (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{3 z^2} \dots \dots \dots (\text{CXXXIII})$$

Deze vergelijking leert ons den hoek vinden, dien de middellijn van de parabool, welke de nauwst mogelijke aanraking met eene kromme heeft, maakt met de gemeenschappelijke raaklijn. Kent men dien hoek en tevens de kromtestraal, dan vindt men uit (CXXXII) de parameter van genoemde parabool.

Is het raakpunt van beide krommen tevens de top der parabool, dan is $\cot \theta = 0$. In dat geval zal dus $w = 0$ zijn, wij hebben reeds gezien, dat in dat geval de kromme eene aanraking van de derde orde met haren kromtecirkel heeft. Een punt, waar deze omstandigheden voorkomen, hebben wij een toppunt genoemd, zoodat (CXXXI) de voorwaarde voor een toppunt bevat. De toppunten zijn bijzondere punten van de derde orde.

Differentieert men de drie laatste vergelijkingen (205) nog eenmaal, dan heeft men

$$k = -f'''(x) = -y'', \quad l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0 \dots \dots \dots (221)$$

De substitutie hiervan en van (205) geeft ons

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1 + y'^2, \quad z = -y'', \quad w = -y'' + \frac{3 y''^2 y'}{1 + y'^2} \dots \dots \dots (222)$$

Dit substitueerende hebben wij

$$\cot \theta = \pm \frac{y''' (1 + y'^2) - 3 y''^2 y'}{3 y''^2}, \dots \dots \dots (88)$$

eene formule, waarvan wij reeds vroeger gebruik hebben gemaakt.

Differentieert men de formule voor den kromtestraal ten opzichte van x dan vindt men

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \pm \frac{y''' (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} - 3 y''^2 y' (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''^2} = 3 (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta, \dots \dots \dots (223)$$

waaruit blijkt, dat de kromtestraal in den regel in een toppunt eene maximum- of minimumwaarde bereikt.

§ 52. In het geval

$$z = 0, \dots \dots \dots (CXXV)$$

hetwelk voor $\bar{x} = 0$ hetzelfde beteekent als $p = 0$, gaat (CXXX) over in

$$f(\bar{x}^2 + \bar{y}^2, w) = 0,$$

of

$$\frac{w}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} = \text{const.}, \dots \dots \dots (CXXXIV)$$

en aan (W) kan niet anders voldaan worden, dan door te onderstellen, dat Δy van dezelfde orde is als $(\Delta x)^3$, zoodat wij voor die vergelijking kunnen schrijven

$$\bar{y} \Delta y + \frac{k(\Delta x)^3}{6} + R' = 0 \dots \dots \dots (X)$$

Wij hebben gezien, dat de kromme in dit geval een buigpunt vertoont, dat in het algemeen van de eerste soort zal zijn. Dit laatste zou niet meer het geval zijn, wanneer in (X) $k = 0$ was. De aanraking tusschen de kromme en hare raaklijn zou dan minstens van de derde orde worden, en het buigpunt zou in het algemeen tot de tweede soort behooren. De voorwaarde

$$k = 0 \dots \dots \dots (224)$$

is echter in dit geval indientiek met

$$w = 0, \dots \dots \dots (CXXXI)$$

welke betrekking van het coördinaten stelsel onafhankelijk is, en dus in allen gevallen het kenmerk blijft van de hier beschouwde bijzonderheid.

Past men op de vergelijking van de lemniscaat van Bernoulli,

$$(x^2 + y^2)^2 \pm 2\sigma^2 xy = 0, \dots \dots \dots (225)$$

de kenmerken van § 11 toe, dan ziet men, dat deze kromme in den oorsprong een dubbelpunt heeft, waar twee takken elkander loodrecht snijden, en beiden een buigpunt hebben. Voor deze kromme vinden wij

$$\pm 2\sigma^2 \Delta x \Delta y + (\Delta x)^4 + 2(\Delta x)^2 (\Delta y)^2 + (\Delta y)^4 = 0, \dots \dots \dots (226)$$

waaraan alleen voldaan kan worden door de onderstelling, dat Δy van dezelfde orde is als $(\Delta x)^3$, zoodat wij de vergelijking ook aldus kunnen schrijven:

$$\pm 2\sigma^2 \Delta y + (\Delta x)^3 + R'' = 0 \dots \dots \dots (227)$$

Uit de vergelijking hiervan met (X) ziet men, dat de lemniscaat in het algemeen met eene kromme, die eene aanraking van de tweede orde met hare raaklijn heeft, insgelijks eene aanraking van de tweede orde hebben zal. Die aanraking zal echter tot de derde orde opklimmen, wanneer

$$\pm \sigma^2 = \frac{3\bar{y}}{k} \dots \dots \dots (228)$$

is. Ingeval k niet gelijk aan 0 is, zal er dus altijd zoodanige lemniscaat gevonden kunnen worden, en hare as laat zich bepalen uit bovenstaande vergelijking, die identiek is met

$$\pm \sigma^2 = \frac{3(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{w} \dots \dots \dots (CXXXV)$$

Uit de tweede der vergelijkingen (222) blijkt, dat in dit geval $y'' = 0$ moet zijn, waardoor de derde overgaat in

$$w = -y'' \dots \dots \dots (229)$$

Substitueert men nu in (CXXXV) de eerste vergelijking (222) en (229), dan vindt men

$$\pm \sigma^2 = \frac{3(1 + y'^2)^2}{y''} \dots \dots \dots (93)$$

eene formule waarvan wij reeds in § 23 en § 24 gebruik hebben gemaakt.

§ 53. Niets zou gemakkelijker zijn, dan op deze wijze voortgaande voor de bijzondere punten van de tweede en derde orde de ondergevallen te onderzoeken, met name voor de buigpunten, in welke gevallen de aanraking met de raaklijn van hoogere dan de tweede, voor de toppunten, in welke die met den kromtecirkel van hoogere dan de derde orde wordt. Om daartoe echter langs den tot nog toe gevolgden weg te geraken, zouden wij in zeer omslachtige berekeningen vervallen. Wij kunnen dit ook te eerder nalaten, omdat wij toch de bijzondere punten van de vierde en hoogere orde niet behandelen zullen. Wanneer wij toch den vorm van de kromme in de door ons beschouwde punten nagaan, dan zien wij, dat die bij bijzondere punten van de eerste orde het meest van den gewonen vorm afwijkt. Deze punten zijn dus het meest in het oog vallend, en men kan zich omtrent hunne ware ligging op het oog niet vergissen. Minder in het oog vallend zijn reeds die van de tweede orde, de buigpunten, en het is lang niet zeker, dat men op het oog hunne juiste plaats zou kunen aanwijzen. Nog moeilijker wordt dit voor de toppunten; men kan, ja, op het oog zien of eene kromme zoodanig punt bezit, maar de juiste ligging er van laat zich niet op het oog bepalen. Het laat zich derhalve verwachten, dat bijzondere punten van hoogere dan de derde orde nog minder karakteristiek zullen zijn: en inderdaad kan men zich moeilijk andere bijzonderheden in den loop eener kromme denken of voorstellen, dan die, welke wij behandeld hebben. Bovendien rijst de vraag: Wat zou men eigenlijk onder bijzondere punten van de vierde orde moeten verstaan? Van de tweede orde waren punten, waar de kromme met een rechte lijn eene aanraking van hoogere dan de eerste, van de derde orde de zoodanigen, waar zij met eenen cirkel eene aanraking van hoogere dan de tweede orde heeft. Als eene kromme, die in den regel voor eene aanraking van de derde orde met eene andere kromme vatbaar is, hebben wij de parabool ontmoet. Men zou dus kunnen meenen, dat men als bijzondere punten van de vierde orde moest aanmerken, die, waar de kromme eene aanraking van hoogere dan de vierde orde met eene parabool hebben kan. Maar de parabool is niet de eenige kromme van dien aard; integendeel zijn er oneindig vele, b.v. de gelijkzijdige hyperbool, de lemniscaat, de cardioïde, zoodat voor ieder punt wel eene zoodanige kromme te vinden zou zijn. Op deze wijze zou elk punt eener kromme een bijzonder punt van de vierde orde kunnen zijn; hierdoor vervalt echter het denkbeeld van bijzonder geheel en al.

Wij hebben gezien, dat voor bijzondere punten van de tweede orde de kromtestraal oneindig groot is, en voor die van de derde orde eene maximum- of minimumwaarde bereikt. Wij zouden dus als bijzondere punten van de vierde orde kunnen aanmerken, die, waar de aangroeiing van den kromtestraal een maximum of minimum is. Dit is werkelijk iets bijzonders, maar het is eene zoo weinig belangrijke bijzonderheid, dat wij de behandeling er van gevoegelijk kunnen nalaten, te meer, daar zij zich op het oog door niets onderscheidt.

Ons rest nog met een enkel woord het geval te bespreken, dat er onder de partieele differentiaal-quotienten van hoogere dan de eerste orde voorkomen, die oneindig groot zijn, of eene dubbelzinnige waarde hebben, zonder dat ééne van de vergelijkingen (III), (IV) of (V) plaats heeft. Wij hebben dan eenvoudig denzelfden weg te volgen als in § 47 is aangewezen voor het onderzoeken van de nadere bijzonderheden bij bijzondere punten van de eerste orde; alleen kunnen wij zeker zijn, dat wij slechts met één enkelen doorloopenden tak te doen hebben.

A A N H A N G S E L.

Bij Serret, (Calcul différentiel et intégral, 774—778) vindt men het bewijs voor de volgende stelling:

Wanneer $x, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, n+1$ veranderlijken voorstellen, waarvan de eerste eene functie van de overigen is, en wanneer men stelt

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = p_1, \frac{\partial x}{\partial x_2} = p_2, \frac{\partial x}{\partial x_3} = p_3, \dots, \frac{\partial x}{\partial x_n} = p_n, \dots \quad (1)$$

dan zal men, om de integraal van eene vergelijking van den vorm

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots + P_n p_n = P, \dots \quad (I)$$

waarin $P_1, P_2, \dots, P_n, P$ functiën zijn van $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x$, te bekomen, niets anders te doen hebben, dan het volgende stelsel van gelijktijdige differentiaalvergelijkingen te integreeren

$$\frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} \dots \quad (2)$$

Wanneer namelijk

$$u_1 = \text{const}, u_2 = \text{const}, \dots, u_n = \text{const}.$$

de n integralen van dit stelsel vergelijkingen zijn, dan zal men de algemeene integraal van bovenstaande partieele differentiaalvergelijking vinden in

$$\Phi(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) = 0, \dots \quad (II)$$

waarin Φ eene willekeurige functie voorstelt.

Vergelijkingen van den vorm (I) komen er verscheidene in deze verhandeling voor, waarvan wij de integralen eenvoudig vermeld hebben. De afleiding daarvan lieten we aan den lezer over, die zich bovendien gemakkelijk à posteriori van de juistheid dier oplossingen kan overtuigen.

Behalve enkele vergelijkingen van den vorm (I) komen er echter stelsels van vergelijkingen van dien vorm voor, waarbij in iedere vergelijking dezelfde afhankelijk en onafhankelijk veranderlijken worden aangetroffen. Met de beschouwing van die stelsels willen wij ons hier eenige oogenblikken bezig houden. In de eerste plaats zullen wij de voorwaarde onderzoeken, waarop eenige vergelijkingen van den vorm (I) gelijktijdig kunnen bestaan.

Wij kiezen als voorbeeld de beide vergelijkingen

$$\begin{aligned} P_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} &= P, \\ Q_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + Q_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} &= Q. \end{aligned} \dots \quad (III)$$

Differentieert men deze vergelijkingen ten opzichte van x_1 en x_2 , dan vindt men

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x}{\partial x_2} + P_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} + P_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1}, \\
& \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_2} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x}{\partial x_2} + P_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} + P_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2} = \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2}, \\
& \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x}{\partial x_2} + Q_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} + Q_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1}, \\
& \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x}{\partial x_2} + Q_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} + Q_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2}.
\end{aligned} \quad (3)$$

Door nu uit (III) en (3) de grootheden $\frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}$ en $\frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2}$ te elimineeren zal men eene betrekking bekomen tusschen de functien P, P_1, P_2, Q, Q_1, Q_2 en hare partieele differentiaalquotienten ten opzichte van x, x_1 en x_2 , die de voorwaarde zal bevatten voor de mogelijkheid van het gelijktijdig bestaan van de vergelijkingen (III). Deze eliminatie laat zich aldus uitvoeren. Uit (III) vindt men

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \frac{PQ_2 - Q_1P_2}{P_1Q_2 - Q_1P_2}, \quad \frac{\partial x}{\partial x_2} = \frac{QP_1 - PQ_1}{P_1Q_2 - Q_1P_2}; \quad \dots \quad (4)$$

en de substitutie hiervan in (3) geeft

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{PQ_2 - Q_1P_2}{P_1Q_2 - Q_1P_2} + \frac{\partial P_2}{\partial x_1} \frac{QP_1 - PQ_1}{P_1Q_2 - Q_1P_2} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \left(\frac{PQ_2 - Q_1P_2}{P_1Q_2 - Q_1P_2} \right)^2 + \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{(PQ_2 - Q_1P_2)(QP_1 - PQ_1)}{(P_1Q_2 - Q_1P_2)^2} - \\
& \quad - \frac{\partial P}{\partial x_1} = -P_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} - P_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
& \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_2} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{QP_1 - PQ_1}{P_1Q_2 - Q_1P_2} + \frac{\partial P_1}{\partial x_2} \frac{PQ_2 - Q_1P_2}{P_1Q_2 - Q_1P_2} + \frac{\partial P_2}{\partial x} \left(\frac{QP_1 - PQ_1}{P_1Q_2 - Q_1P_2} \right)^2 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{(PQ_2 - Q_1P_2)(QP_1 - PQ_1)}{(P_1Q_2 - Q_1P_2)^2} - \\
& \quad - \frac{\partial P}{\partial x_2} = -P_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2} - P_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
& \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \frac{PQ_2 - Q_1P_2}{P_1Q_2 - Q_1P_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} \frac{QP_1 - PQ_1}{P_1Q_2 - Q_1P_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} \left(\frac{PQ_2 - Q_1P_2}{P_1Q_2 - Q_1P_2} \right)^2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x} \frac{(PQ_2 - Q_1P_2)(QP_1 - PQ_1)}{(P_1Q_2 - Q_1P_2)^2} - \\
& \quad - \frac{\partial Q}{\partial x_1} = -Q_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} - Q_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
& \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \frac{QP_1 - PQ_1}{P_1Q_2 - Q_1P_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} \frac{PQ_2 - Q_1P_2}{P_1Q_2 - Q_1P_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} \left(\frac{QP_1 - PQ_1}{P_1Q_2 - Q_1P_2} \right)^2 + \frac{\partial Q_1}{\partial x} \frac{(PQ_2 - Q_1P_2)(QP_1 - PQ_1)}{(P_1Q_2 - Q_1P_2)^2} - \\
& \quad - \frac{\partial Q}{\partial x_2} = -Q_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2} - Q_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}.
\end{aligned} \quad (5)$$

Stelt men nu ter bekorting de eerste leden dezer vergelijkingen door R_1, R_2, R_3 en R_4 voor, dan vindt men als de uitkomst der eliminatie van $\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}$ en $\frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2}$

$$\begin{vmatrix} P_1, P_2, 0, R_1 \\ 0, P_1, P_2, R_2 \\ Q_1, Q_2, 0, R_3 \\ 0, Q_1, Q_2, R_4 \end{vmatrix} = (Q_2P_1 - Q_1P_2)(R_1Q_1 - R_2Q_2 + R_3P_1 - R_4P_2) = 0, \quad \dots \quad (6)$$

of door substitutie van de waarden van R_1, R_2, R_3 en R_4

$$\begin{aligned}
& (P_1Q_2 - Q_1P_2) \left(Q_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} - P_2 \frac{\partial Q}{\partial x_2} + P \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} - Q \frac{\partial P_2}{\partial x_2} - P_1 \frac{\partial Q}{\partial x_1} + Q_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} - Q \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + P \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \right) + \\
& + (P_2Q - Q_2P) \left(Q \frac{\partial P_1}{\partial x} - P \frac{\partial Q_1}{\partial x} + P_1 \frac{\partial Q}{\partial x} - Q_1 \frac{\partial P}{\partial x} - P_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} + Q_2 \frac{\partial P_1}{\partial x_2} - Q_1 \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + P_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} \right) + \\
& + (PQ_1 - QP_1) \left(Q_1 \frac{\partial P_2}{\partial x_1} - P \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} - Q_2 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} - P \frac{\partial Q_2}{\partial x} + Q \frac{\partial P_2}{\partial x} - Q_2 \frac{\partial P}{\partial x} + P_2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0 \quad (IV)
\end{aligned}$$

De vergelijking (IV) laat zich ook afleiden, door de eerste der vergelijkingen (4) ten opzichte van x_1 en de tweede ten opzichte van x_1 te differentieëren, en de twee waarden van $\frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}$, die men daardoor bekomt, aan elkander gelijk te stellen. In het bijzondere geval, dat $P_1 = Q_1 = 0$ en $P_2 = Q_2 = 1$ is, terwijl in P en Q de x niet voorkomt, gaat de vergelijking (IV) over in

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad \dots \quad (7)$$

de bekende voorwaarde, dat twee functien, P en Q , de partieele differentiaalquotienten van eene zelfde functie kunnen zijn.

Had men het volgende stelsel van vergelijkingen

$$\begin{aligned} P_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + P_3 \frac{\partial x}{\partial x_3} &= P, \\ Q_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + Q_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + Q_3 \frac{\partial x}{\partial x_3} &= Q, \quad \dots \quad (V) \\ R_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + R_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + R_3 \frac{\partial x}{\partial x_3} &= R; \end{aligned}$$

dan zou men, deze drie vergelijkingen ten opzichte van x_1 , x_2 en x_3 differentieerende, negen vergelijkingen bekomen; en door nu uit deze en de drie vergelijkingen (V) de negen partieele differentiaalquotienten van de eerste en tweede orde van x ten opzichte van de drie veranderlijken x_1 , x_2 en x_3 te elimineeren, bekamt men drie voorwaardens-vergelijkingen, waaraan voldaan moet worden, opdat de drie vergelijkingen (V) gelijktijdig kunnen bestaan. Het zou blijkbaar zeer ingewikkelde herleidingen vorderen om deze voorwaarden algemeen te vinden, en het zal geschikter zijn in ieder bijzonder geval die voorwaarden langs den hier aangegeven weg af te leiden.

Heeft men in het algemeen n onafhankelijk veranderlijken en tevens n vergelijkingen, dan zal men door differentieeren n^2 nieuwe vergelijkingen bekomen. Om dan de voorwaarden te vinden voor het gelijktijdig bestaan der n oorspronkelijke vergelijkingen, moet men de n partieele differentiaalquotienten van de eerste en de $\frac{n(n+1)}{2}$ van de tweede orde uit $n(n+1)$ vergelijkingen elimineeren, zoodat men $\frac{n(n-1)}{2}$ voorwaarden overhoudt.

Beschouwen wij thans het geval, dat het getal vergelijkingen kleiner is dan dat der onafhankelijk veranderlijken, en beginnen wij weder met eenvoudigste geval, namelijk,

$$\begin{aligned} P_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + P_3 \frac{\partial x}{\partial x_3} &= P, \\ Q_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + Q_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + Q_3 \frac{\partial x}{\partial x_3} &= Q. \end{aligned} \quad \dots \quad (VI)$$

Deze vergelijkingen differentieerende, heeft men

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1}\right) \frac{\partial x}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1}\right) \frac{\partial x}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_1} + \frac{\partial P_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1}\right) \frac{\partial x}{\partial x_3} + P_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} + P_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ &+ P_3 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1}, \\ &\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_2} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2}\right) \frac{\partial x}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2}\right) \frac{\partial x}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial P_3}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2}\right) \frac{\partial x}{\partial x_3} + P_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2} + P_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2^2} + \\ &+ P_3 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2}, \quad \dots \quad (8) \\ \text{enz.} \quad &\dots \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_3} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_3}\right) \frac{\partial x}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_3} + \frac{\partial Q_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_3}\right) \frac{\partial x}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial Q_3}{\partial x_3} + \frac{\partial Q_3}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_3}\right) \frac{\partial x}{\partial x_3} + Q_1 \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_3} + Q_2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2 \partial x_3} + Q_3 \frac{\partial^2 x}{\partial x_3^2} = \frac{\partial Q}{\partial x_3} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_3}.$$

Deze vergelijkingen zijn nog onvoldoende om de negen daarin voorkomende partieele differentiaalquotienten te elimineeren.

Differentieeren wij (8) nog eens ten opzichte van x_1 , x_2 en x_3 , dan bekomen wij twaalf nieuwe vergelijkingen, waarin nu echter behalve de drie partieele differentiaalquotienten van de eerste en de zes van de tweede orde, noch tien partieele differentiaalquotienten van de derde orde voorkomen. Nu kan de eliminatie geschieden, daar wij negentien grootheden te elimineeren hebben uit de twee vergelijkingen (VI), de zes vergelijkingen (8), en de twaalf vergelijkingen, die men door differentieeren van (8) bekomt. Het resultaat dezer eliminatie zal de voorwaarde zijn voor het gelijktijdig bestaan van de vergelijkingen (VI). Deze voorwaarde zal nu ook de partieele differentiaalquotienten van de tweede orde van de functien $P_1, P_2, P_3, P, Q_1, Q_2, Q_3, Q$ bevatten.

Stellen wij thans, dat het getal der onafhankelijk veranderlijken n , en dat der vergelijkingen m bedraagt. Het aantal vergelijkingen, dat men bekomt door de gegevene te differentieeren, zal nu bedragen

$$mn.$$

Door deze weder te differentieeren bekomt men er nog

$$m \frac{n(n+1)}{2},$$

hetwelk met die, welke wij reeds hadden, een aantal van

$$m \left\{ 1 + n + \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

vergelijkingen vormt. Het is duidelijk, dat men, na k maal gedifferentieerd te hebben, zal gevonden hebben

$$m \left\{ 1 + n + \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + \dots + \frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{1.2.3 \dots k} \right\}$$

vergelijkingen. In deze vergelijkingen komen voor de partieele differentiaalquotienten van de afhankelijk veranderlijke ten opzichte van de onafhankelijk veranderlijken van de eerste tot en met de $k+1^{\text{ste}}$ orde, wier aantal bedraagt

$$n + \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + \dots + \frac{n(n+1) \dots (n+k)}{1.2.3 \dots k+1}.$$

Wij zullen nu het differentieeren zoo lang moeten voortzetten, tot het getal der te elimineeren grootheden kleiner is dan dat der vergelijkingen, en dus

$$n + \frac{n(n+1)}{1.2} + \text{enz.} \dots + \frac{n(n+1) \dots (n+k)}{1.2.3 \dots k+1} < m \left\{ 1 + n + \frac{n(n+1)}{1.2} + \dots + \frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{1.2.3 \dots k} \right\},$$

of wat hetzelfde is

$$\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+k+1)}{1.2.3 \dots k+1} - 1 < m \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+k)}{1.2.3 \dots k}.$$

Daar beide leden dezer vergelijking geheele getallen zijn, kan men hiervoor schrijven

$$\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+k+1)}{1.2 \dots k+1} < \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+k)}{1.2 \dots k} m,$$

waaruit

$$n+k+1 < m(k+1),$$

of

$$k+1 > \frac{n}{m-1}.$$

Wij hebben nu voor k de kleinste waarde te nemen, die hieraan voldoet. k zal dan de hoogste orde aanduiden van de differentiaalquotienten van de coëfficiënten der gegeven vergelijkingen, die in de voorwaarden zullen voorkomen. Het getal der voorwaarden, die vervuld moeten worden, is

$$m \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{1 \cdot 2 \dots k} - \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)}{1 \cdot 2 \dots k+1} + 1.$$

In het geval, dat wij afzonderlijk beschouwd hebben, $m=2$, $n=3$, heeft men $k=2$, terwijl men voor het aantal der voorwaarden één vindt, juist zooals wij bij die afzonderlijke beschouwing vonden.

In het geval $m=n$, heeft men altijd $k=1$, even als wij reeds boven gevonden hebben.

Ingeval $m=2$ is, vindt men altijd slechts eene voorwaardenvergelijking.

De boven aangehaalde stelling leert, dat de integraal van iedere vergelijking van den vorm (I) een integraal heeft van den vorm (II). Laten nu

$$\begin{aligned} \Phi(u_1, u_2, u_3 \dots u_n) &= 0, \\ \Phi'(u'_1, u'_2, u'_3 \dots u'_n) &= 0, \\ \Phi''(u''_1, u''_2, u''_3 \dots u''_n) &= 0, \quad \dots \dots \dots \text{(VII)} \\ &\dots \dots \dots \\ \Phi^{(m)}(u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, u_3^{(m)} \dots u_n^{(m)}) &= 0, \end{aligned}$$

de respectieve integralen zijn van de vergelijkingen

$$\begin{aligned} P_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial x}{\partial x_n} &= 0, \\ P'_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + P'_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \dots + P'_n \frac{\partial x}{\partial x_n} &= 0, \\ P''_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + P''_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \dots + P''_n \frac{\partial x}{\partial x_n} &= 0, \quad \dots \dots \dots \text{(VIII)} \\ &\dots \dots \dots \\ P_1^{(m)} \frac{\partial x}{\partial x_1} + P_2^{(m)} \frac{\partial x}{\partial x_2} + \dots + P_n^{(m)} \frac{\partial x}{\partial x_n} &= 0; \end{aligned}$$

en bij het stelsel (VIII) voldaan zijn aan de voorwaarden, waarop zij gelijktijdig kunnen bestaan; kan men dan eenige uitdrukkingen vinden v_1, v_2, v_3 enz., die allen den vorm hebben van de eerste leden van ieder der vergelijkingen (VII) afzonderlijk, dan zal ieder van die uitdrukkingen, en eveneens iedere functie van eenige of van al die uitdrukkingen, gelijk aan nul gesteld, eene integraal zijn van het stelsel vergelijkingen (VIII). Aan den anderen kant is het duidelijk, dat geene oplossing van dit stelsel een anderen vorm kan hebben dan de hier bedoelde. Wij zullen bewijzen, dat, *wanneer men $n-m+1$ onderling onafhankelijke uitdrukkingen $v_1, v_2, v_3 \dots v_{n-m+1}$ heeft, de meest algemeene oplossing van het stelsel vergelijkingen (VIII) zal zijn*

$$\varphi(v_1, v_2, v_3 \dots v_{n-m+1}) = 0, \quad \dots \dots \dots \text{(IX)}$$

waarin φ eene willekeurige functie voorstelt.

Hiertoe merken wij in de eerste plaats op, dat tengevolge van de aangenomen onderstelling

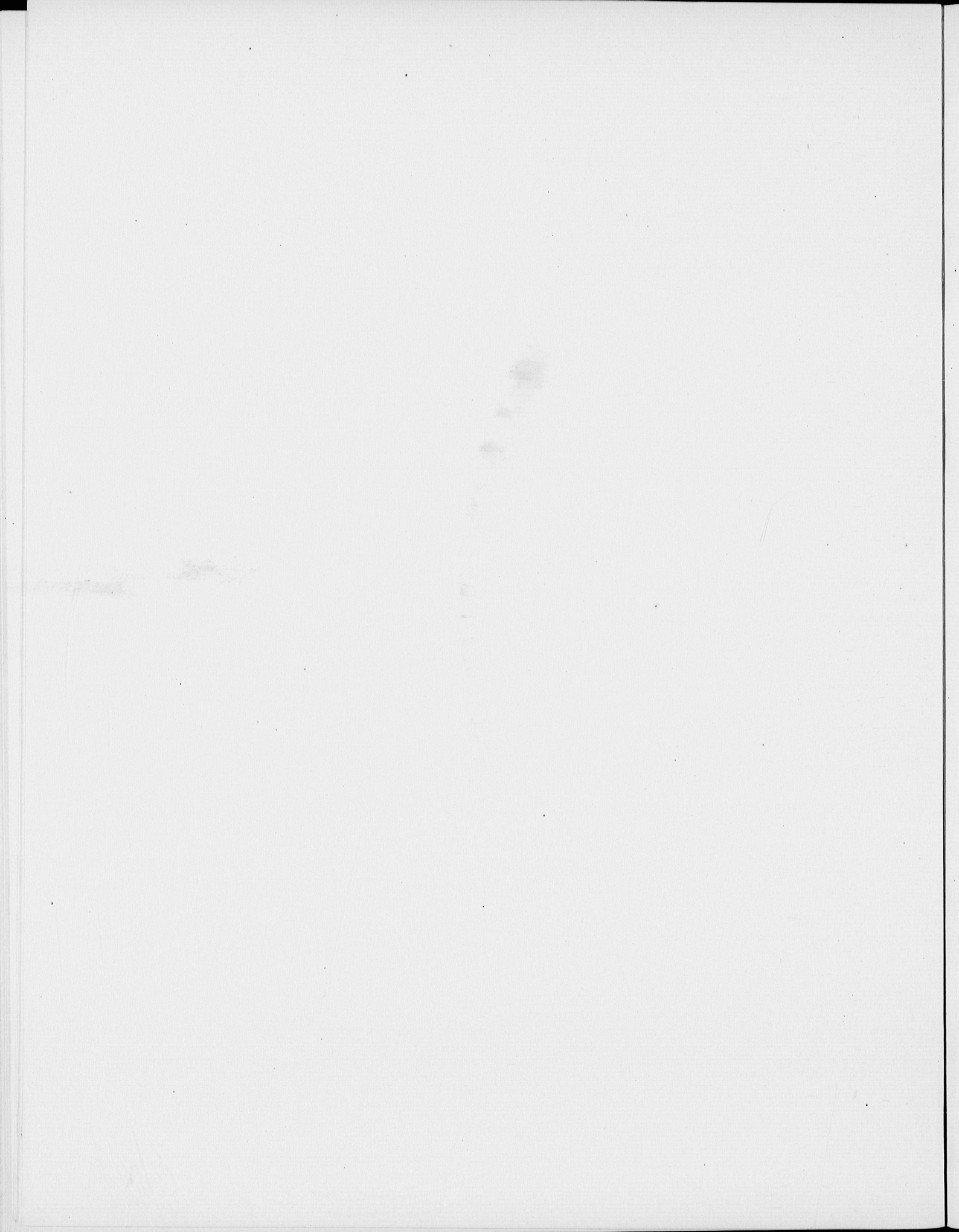
$$v_1 = \text{standvastige} \quad \dots \dots \dots \text{(9)}$$

eene integraal zal zijn van het stelsel gelijktijdige differentiaalvergelijkingen

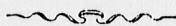
$$\frac{dx}{P} = \frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n},$$

en tevens van ieder der stelsels

$$\frac{dx}{P'} = \frac{dx_1}{P'_1} = \dots = \frac{dx_n}{P'_n},$$



STELLINGEN.



I.

Het is beter de kenmerken voor bijzondere punten van kromme lijnen of oppervlakken te zoeken in betrekkingen tusschen de partieele differentiaalquotienten van het eerste lid der tot nul herleide vergelijking of vergelijkingen ten opzichte der coördinaten, dan in betrekkingen tusschen de differentiaalquotienten der coördinaten ten opzichte van elkander.

II.

Ten onrechte meent Serret, dat de afzonderlijke oplossing eener differentiaalvergelijking door de substitutie eener nieuwe veranderlijke verloren kan gaan.

III.

De stelling van Euler geldt voor alle veelvlakkige lichamen, die aan de volgende voorwaarden voldoen.

- 1°. Een beweegbaar punt moet al de ribben kunnen beschrijven, zonder een enkel oogenblik de ribben te verlaten.
- 2°. Zoodanig punt moet op al de zijvlakken kunnen komen, zonder het oppervlak te verlaten of met een der hoekpunten samen te vallen.
- 3°. In iedere ribbe mogen niet meer dan twee zijvlakken samenkomen.

IV.

Zoowel in Beschrijvende als in Analytische meetkunde is het rationeel, de bepaling van de rechte lijn in de ruimte af te leiden uit die van het platte vlak.

V.

De elfde propositie van Euclides is eene uit de ervaring geputte waarheid.

VI.

Behalve de in de vorige stelling genoemde propositie ontleent de mathesis niets aan de ervaring. Zij blijft echter in zooverre eene ervaringswetenschap, als uitwendige waarneming vereischt ~~wordt om ons~~ tot bewustheid te brengen van de axiomata, op welke zij berust.

VII.

Terecht zegt Euler: Temporis (divisio) non (est) (mera) mentis (operatio), ut ii, qui tempori non nisi in mente nostra locum concedunt, ideam temporis ab ipso tempore non secernentes, statuere solent.

VIII.

De hoeveelheid arbeidsvermogen, die in het heelal voorhanden is, kan geene eindige bepaalde grootheid zijn.

IX.

Men kan niet beweren, dat het ontdekken van nieuwe kleine planeten, nu men er reeds meer dan honderd kent, voor de wetenschap van geen belang kan zijn.

X.

De definitie van massa als de hoeveelheid stof of het aantal atomen, dat een lichaam bevat, is af te keuren.

XI.

De verklaring van het rechtzien daaruit, dat wij geen punt van vergelijking hebben, is niet de ware verklaring.

XII.

De voorstelling door Beer ontwikkeld omtrent de onderlinge rangschikking der stofmoleculen in kristallen is waarschijnlijk in hoofdzaak juist, die omtrent de aethermoleculen niet.

XIII.

Het is onjuist, als men zegt, dat de zwaartekracht op alle stof met dezelfde intensiteit werkt.

XIV.

Terecht zegt St. Claire Deville: l'Hypothèse de l'affinité ne nous sert à rien, si ce n'est à nous faire oublier notre profonde ignorance sur la cause des combinaisons chimiques.

XV.

De typentheorie is verouderd.

XVI.

De grenzen der soort zijn, even als die van alle andere afdeelingen in het planten- en dierenrijk, subjectief.

XVII.

De systematiek is thans nog iets meer dan een index op het boek der levende organismen.

XVIII.

De coelenterata en echinodermata verschillen te veel in lichaamsbouw om tot dezelfde type gebracht te worden.

XIX.

Cellen, waarin geen protoplasma meer voorkomt, moeten als dood beschouwd worden, ook al spelen zij nog eene rol in het leven der plant.

XX.

Het feit, dat bestuiving met vreemd stuifmeel bij de planten in de meeste gevallen een beter

1) 64577-2
gevolg heeft dan zelfbestuiving, is de oorzaak en niet het gevolg daarvan, dat zelfbestuiving door de inrichting der bloem vermeden wordt.

XXI.

Waar het onderwijs in de wiskunde gegeven wordt, hoofdzakelijk met het doel om het verstand der leerlingen te ontwikkelen, moet de stereometrie daarin zoo mogelijk eene belangrijke plaats innemen.

XXII.

Het ware wenschelijk, dat men, om tot de academische examens te worden toegelaten, eenen cursus moest doorloopen hebben, ongeveer gelijkstaande met die onzer Gymnasiën en Hoogere Burger-scholen te zamen.

