

1896

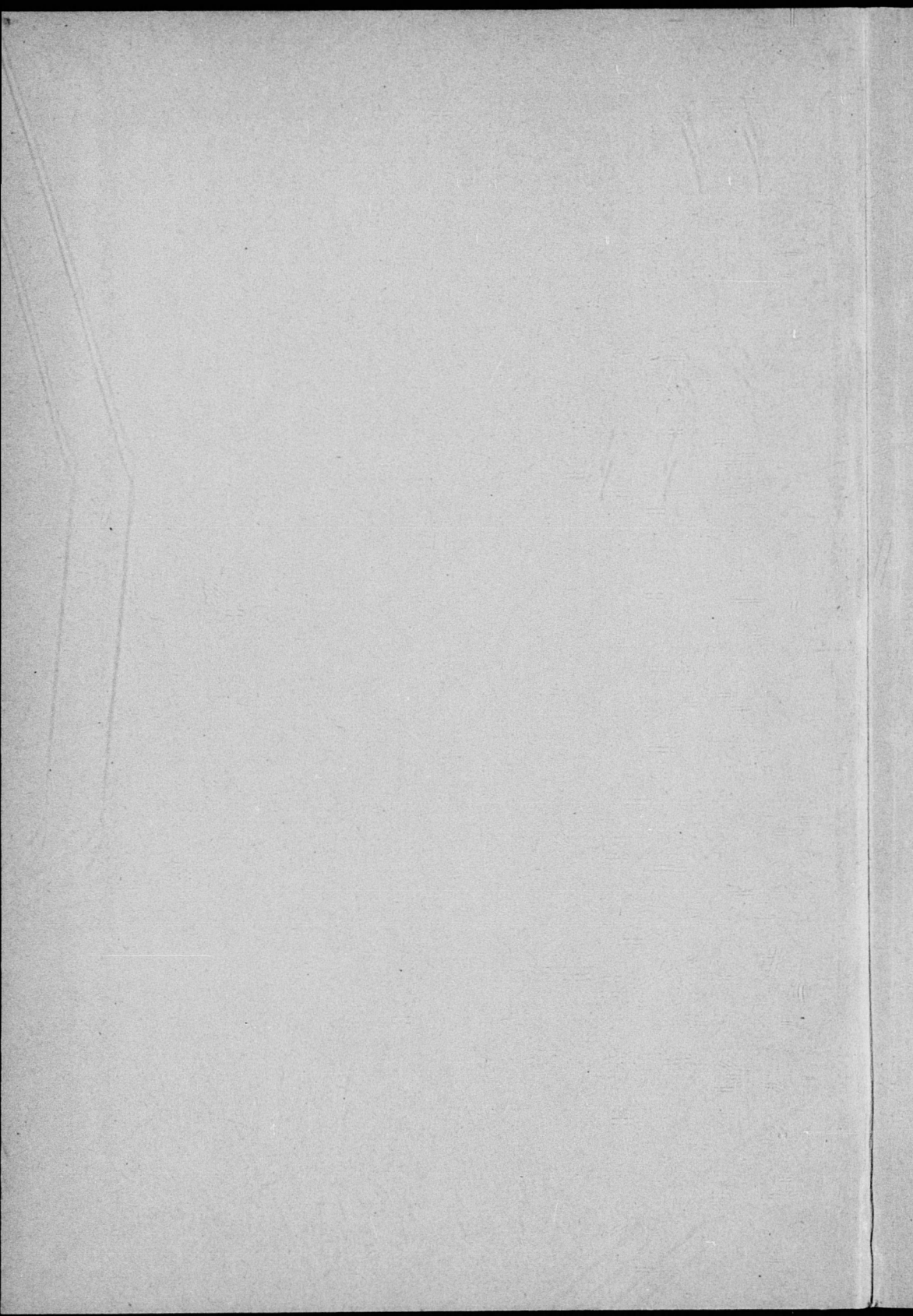
DE DOORSNIJDING EENER DRIEASSIGE ELLIPSOÏDE

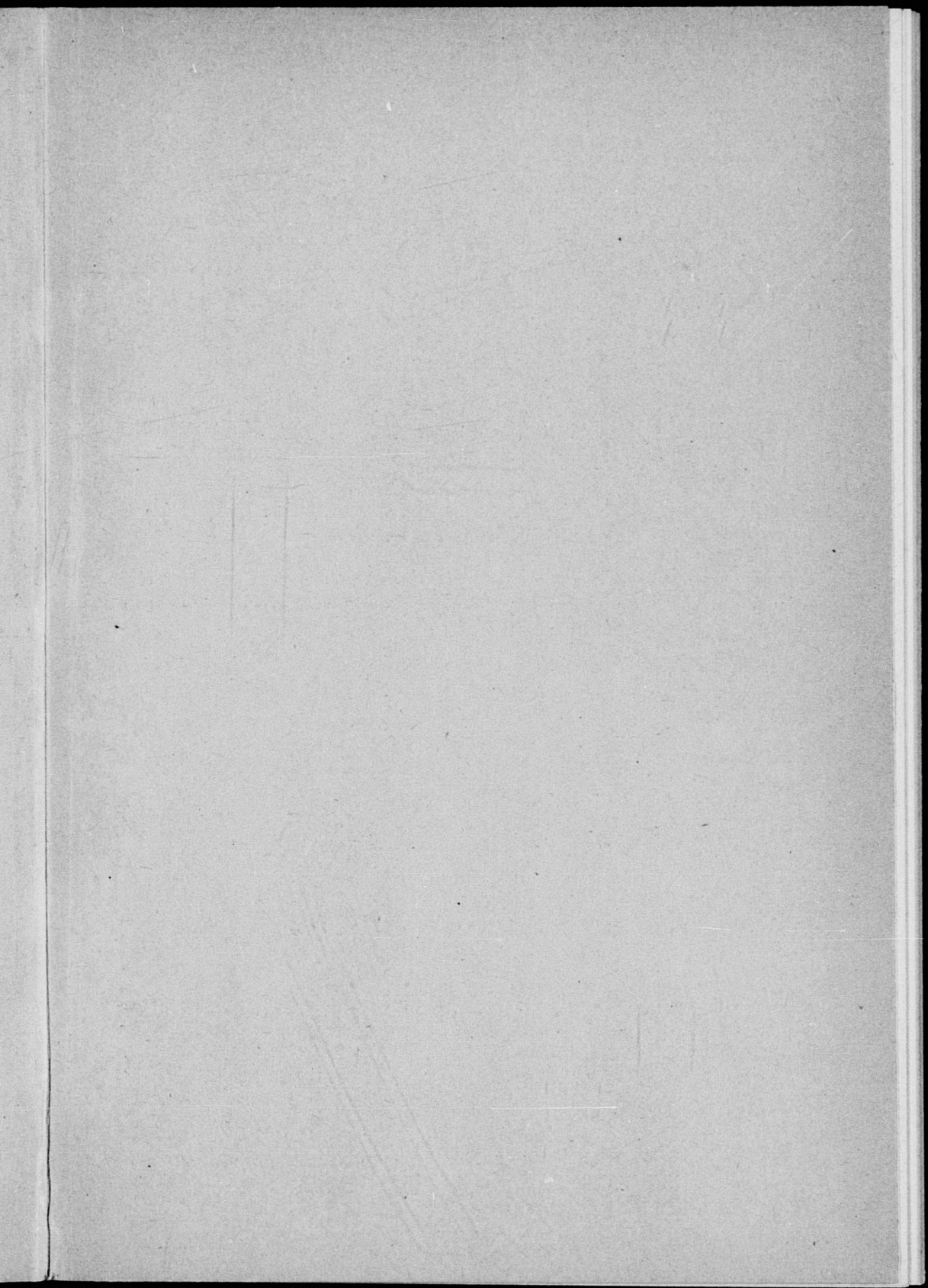
DOOR EEN

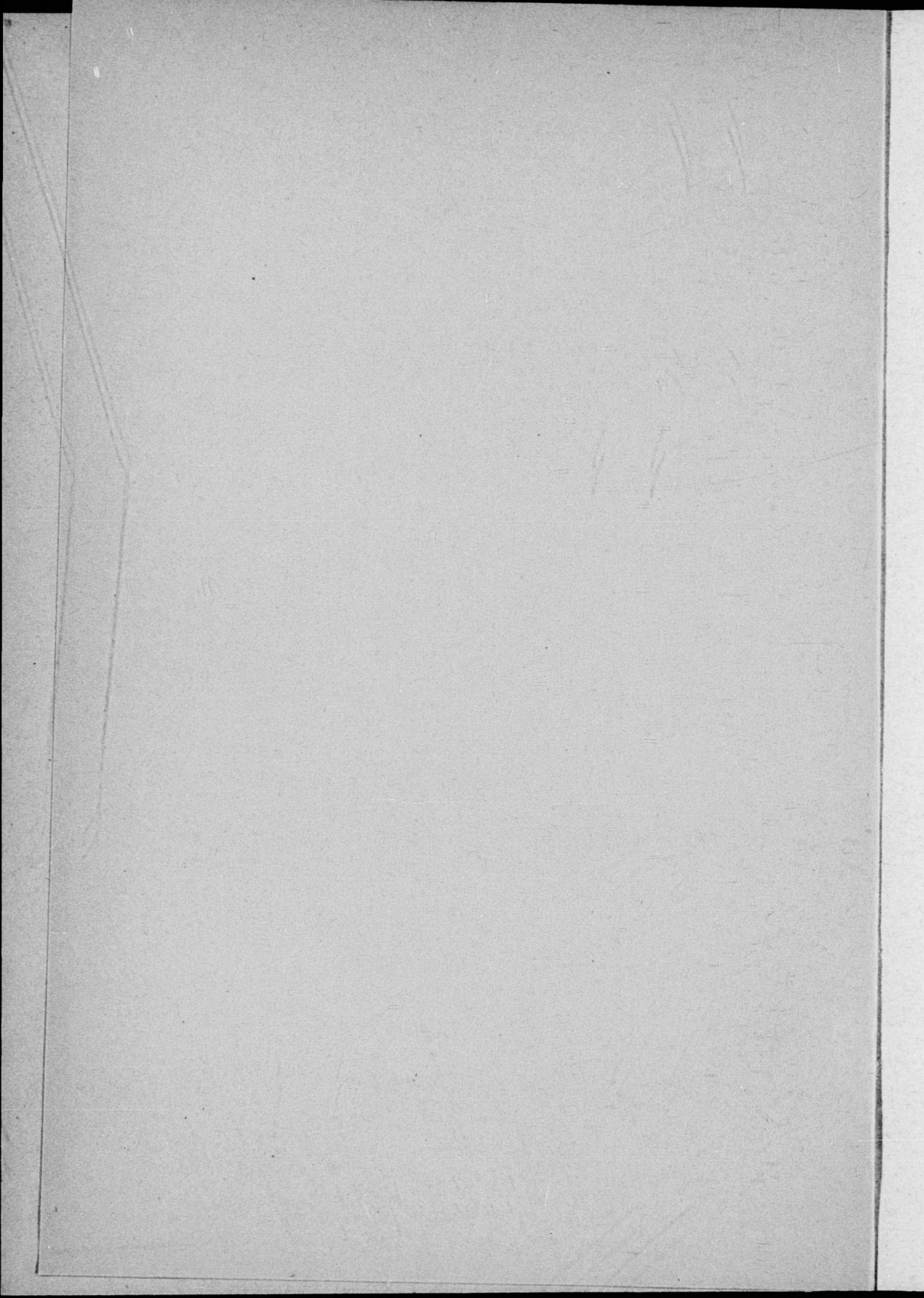
VLAKKENBUNDEL,

DOOR

H. F. HUISKEN.



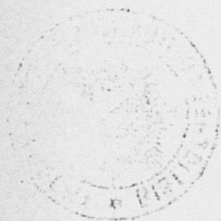




DE DOORSNIJDING EENER DRIEASSIGE ELLIPSOÏDE

DOOR EEN

VLAKKENBUNDEL.



DE DOORSNIJDING EENER DRIEASSIGE ELLIPSOÏDE
DOOR EEN
VLAKKENBUNDEL.

PROEFSCHRIFT
TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE
RIJKS-UNIVERSITEIT TE GRONINGEN,
OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

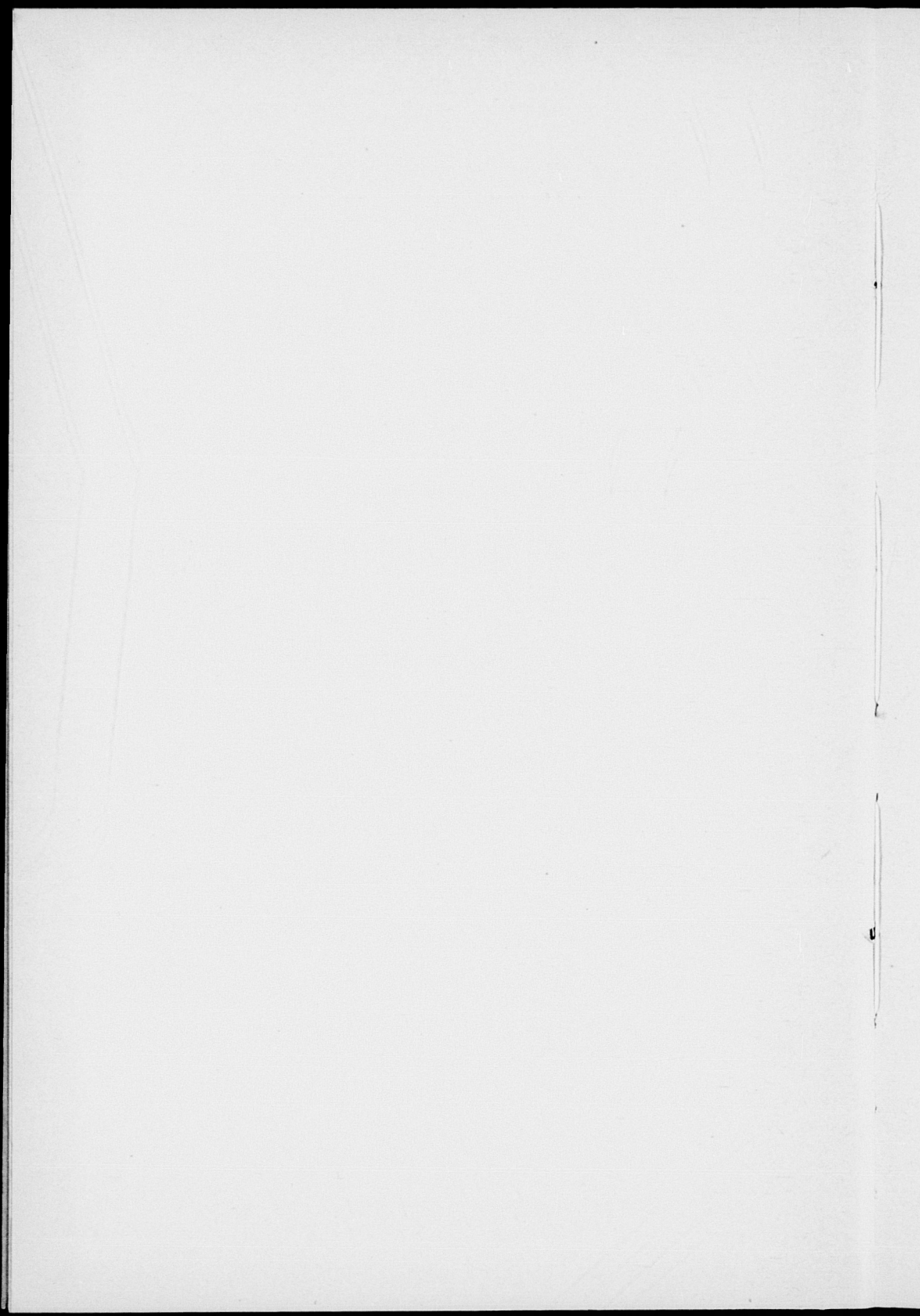
DR. F. DE BOER,
Hoogleraar in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde,
TEGEN DE BEDENKINGEN DER FACULTEIT IN HET OPENBAAR
TE VERDEDIGEN,

op *DINSDAG den 31^{sten} Maart 1896,*

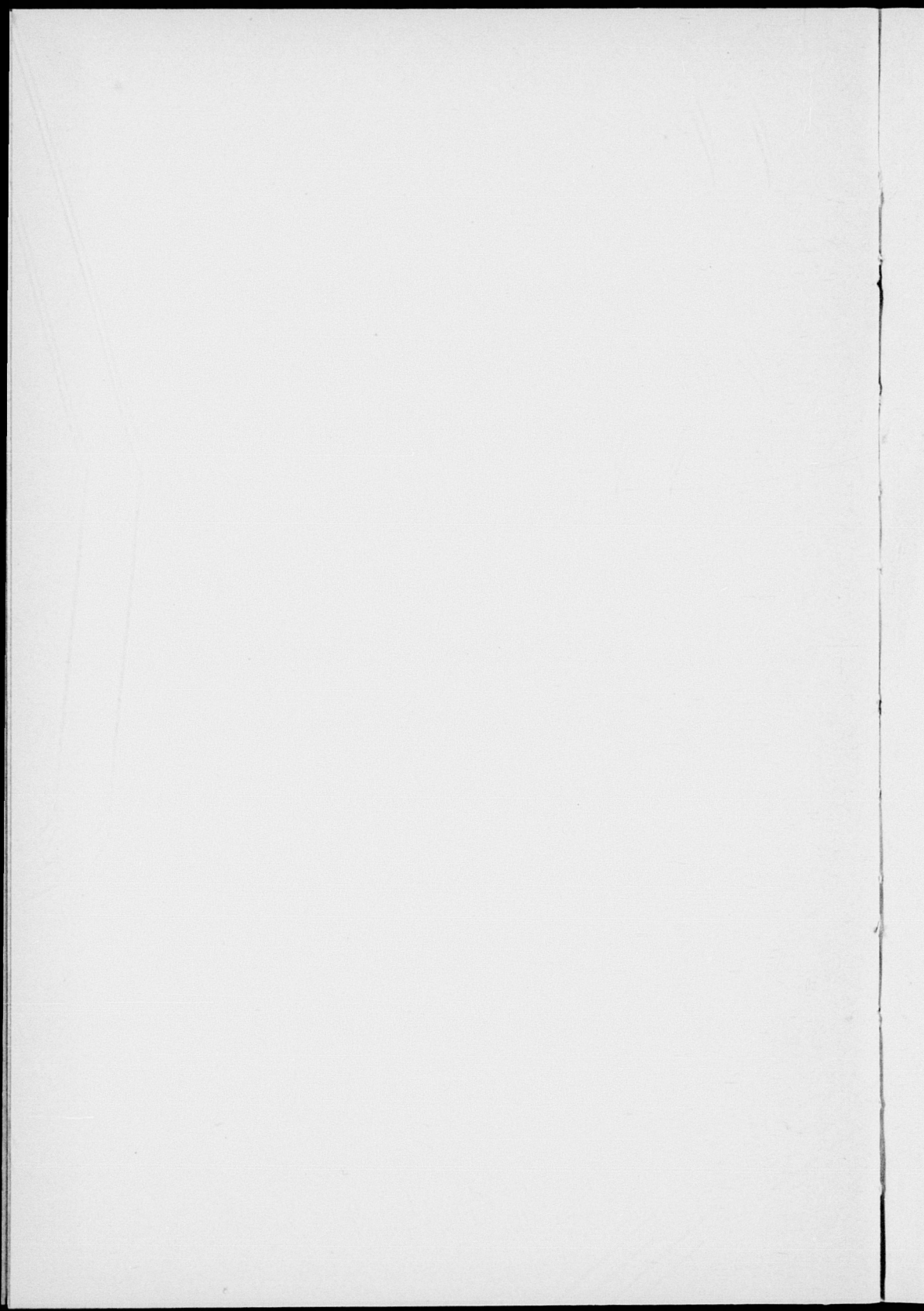
des namiddags te 2 uur,

DOOR
HEIKO FREDERIK HUISKEN,
geboren te ROTTERDAM.



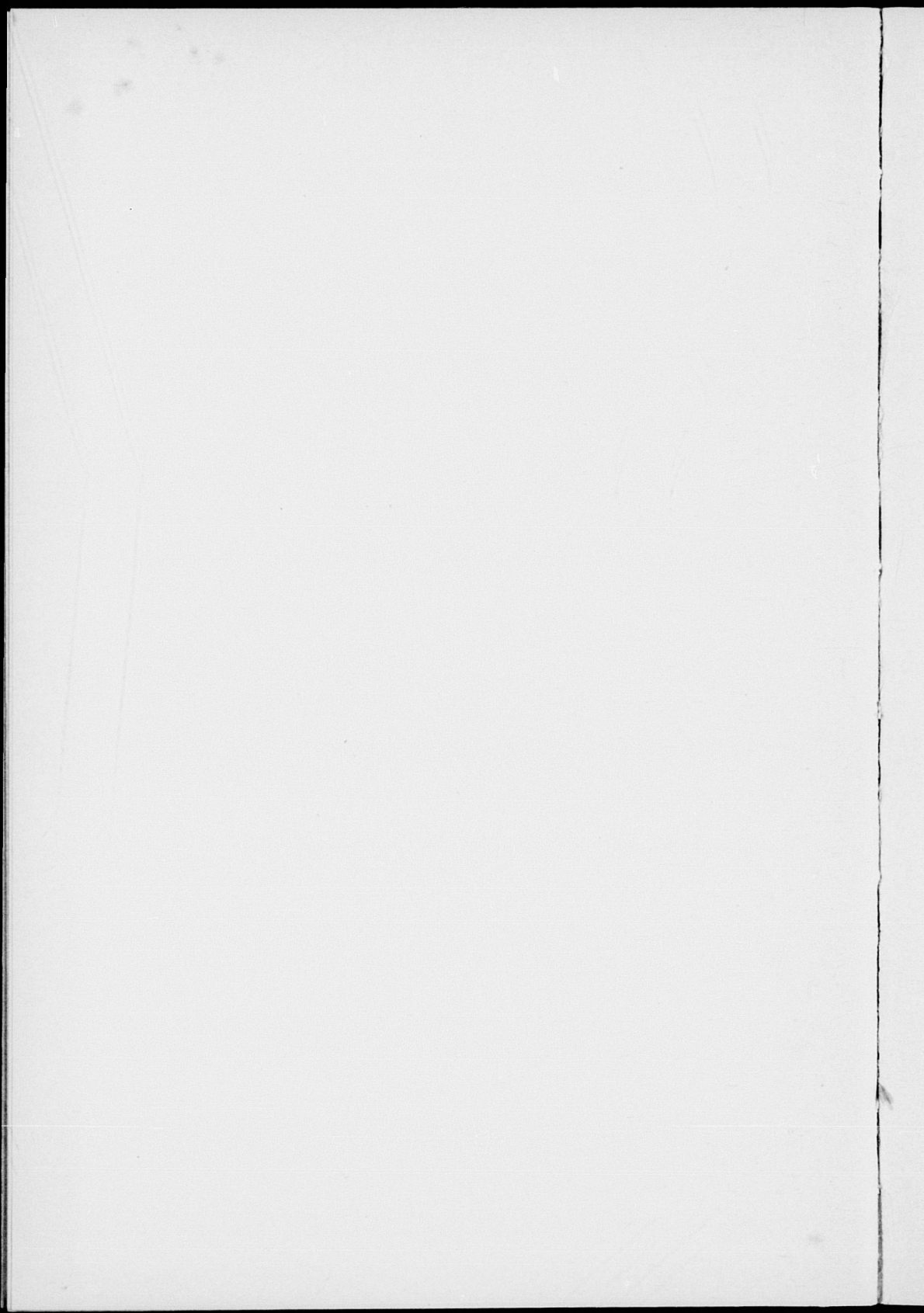


AAN MIJNE OUDERS.



Bij het verschijnen van dit proefschrift is het mij een aangename plicht U, Hooggeleerden in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, mijn dank te betuigen voor het genoten onderwijs.

In het bijzonder ben ik U dank verschuldigd, Hooggeleerde SCHOUTE, voor de nuttige wenken, die Gij mij bij het bewerken dezer dissertatie wel hebt willen geven, en de bereidwilligheid, waarmede Gij mij steeds hebt voorgelicht.



INLEIDING.

1. In deel 14 van het *American Journal of Mathematics* behandelt H. B. Newson de doorsnijding van eene drieassige ellipsoïde door een vlakkenbundel: hij stelt de as van den bundel evenwijdig aan de kleinste as der ellipsoïde en geeft de vergelijkingen van de meetkundige plaats van de brandpunten der doorsneden en van de doorsnede van den cylinder van richtlijnen met het symmetrievlak.

Terwijl genoemde schrijver alleen de brandpunten beschouwt, die in het symmetrievlak zijn gelegen, en de daarbij behorende richtlijnen, scheen het mij niet geheel van belang ontbloom na te gaan: in de eerste plaats welke vormen de bedoelde meetkundige plaatsen aanbieden, als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan eene willekeurige der drie assen van de ellipsoïde, in de tweede plaats wat de meetkundige plaats is van de brandpunten, die niet in het symmetrievlak liggen, en de bij deze behorende richtlijnen.

Ik heb daarbij den voorrang gegeven aan eene analytische behandeling, omdat deze gemakkelijker dan eene meetkundige de onderscheiding tusschen de verschillende gevallen mogelijk maakt en zekerheid geeft omtrent den aard van voorkomende bijzondere punten. Wat meetkundig van de zaak is te zeggen, is in de tweede afdeeling tezamen gevat.

Voor we overgaan tot het afleiden der verschillende vergelijkingen, laat zich een en ander opmerken over de al of niet be-

staanbaarheid van verschillende punten en lijnen. De vlakken uit den bundel snijden de ellipsoïde hetzij volgens eene bestaانبare, hetzij volgens eene onbestaانبare ellips. Zijn de halve assen van eene onbestaانبare ellips ai en bi en is a grooter dan b , dan noem ik bi de halve groote, ai de halve kleine as van deze ellips: deze namen richten zich dan naar de waarde van het vierkant der assen. Dan zijn tevens, zoowel bij eene bestaانبare als bij eene onbestaانبare ellips, de brandpunten op de groote as bestaambaar, die op de kleine as onbestaambaar.

Elk vlak uit den bundel bevat dus twee bestaانبare en twee onbestaانبare brandpunten en richtlijnen; zijn de brandpunten in het symmetrievlak bestaambaar, dan zijn die er buiten onbestaambaar en omgekeerd; de brandpunten in het symmetrievlak en de daarbij behoorende richtlijnen zijn voor eene doorsnede bestaambaar, wanneer deze haar groote as in het symmetrievlak heeft.

Wanneer nu de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de kleinste as der ellipsoïde, hebben alle bestaانبare doorsneden haar groote as in het symmetrievlak; dus deze geven bestaانبare brandpunten in dat vlak en de meetkundige plaats dezer brandpunten ligt geheel binnen de hoofddoorsnede der ellipsoïde. Is de as van den vlakkenbundel evenwijdig aan de grootste as der ellipsoïde, dan hebben de bestaانبare doorsneden alle haar kleine as in het symmetrievlak en liggen dus alle bestaانبare brandpunten in het symmetrievlak buiten de hoofddoorsnede. Is eindelijk de as van den vlakkenbundel evenwijdig aan de middelbare as der ellipsoïde, dan hangt het af van de ligging der cirkeldoorsneden, welk van beide voorgaande gevallen zich voordoet: wanneer er hier onder de bestaانبare doorsneden een cirkel voorkomt, zullen er zoowel binnen als buiten de hoofddoorsnede bestaانبare brandpunten in het symmetrievlak liggen.

Wat betreft de keuze van het assenstelsel, heb ik de as van den vlakkenbundel als Z-as aangenomen, het XY-vlak door het middelpunt der ellipsoïde, en de XZ- en YZ-vlakken evenwijdig aan twee der symmetrievlakken van de ellipsoïde. Wanneer we dan de poolvergelijkingen van de meetkundige plaatsen opmaken, krijgen we op denzelfden voerstraal de brandpunten en richtlijnen, die bij ééne doorsnede behooren, hetgeen niet het geval is, wanneer we met Newson het middelpunt der ellipsoïde als oorsprong van coördinaten nemen. Dit was vooral van belang voor de constructie van verschillende vormen der krommen: deze is voor verschillende gevallen uitgevoerd met aanneming van

bepaalde getalwaarden voor de constanten, die in de vergelijkingen voorkomen. Deze getalwaarden zijn bij de verschillende figuren vermeld.

We zullen ons nu in de eerste afdeeling met de analytische behandeling bezig houden, en wel vooreerst met de brandpunten in het symmetrievlak en de richtlijnen loodrecht daarop, daarna met de brandpunten buiten het symmetrievlak en de richtlijnen daaraan evenwijdig. Telkens zullen we de as van den bundel eerst evenwijdig onderstellen aan de kleinste as der ellipsoïde, daarna aan de grootste en ten slotte aan de middelbare.

EERSTE AFDEELING.

HOOFDSTUK I.

2. De in het symmetrievlak gelegen brandpunten vormen eene vlakke kromme, de daarbij behorende richtlijnen een rechten cylinder: van de eerste zullen we de vergelijking afleiden, van den tweeden zullen we bepalen de vergelijking van de richtlijn, in het XY-vlak gelegen. De halve assen der ellipsoïde zullen we noemen a, b, c waarbij $a > b > c$ is; de coördinaten van het middelpunt noemen we $p, q, 0$.

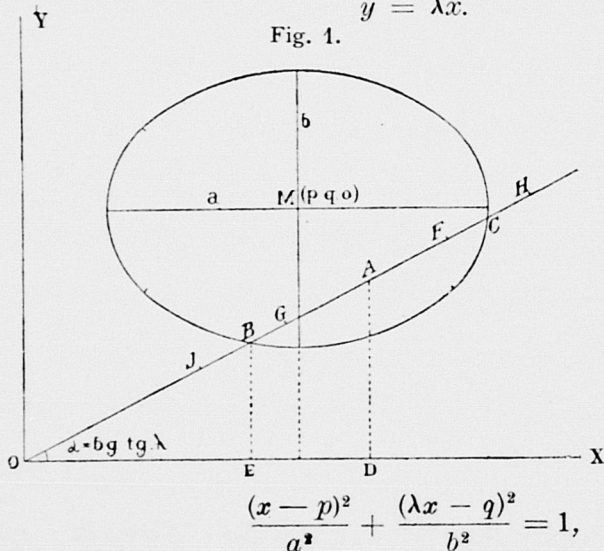
Is nu de as van den bundel evenwijdig aan de kleinste as der ellipsoïde, dan nemen we het XZ-vlak evenwijdig aan de grootste as, het YZ-vlak evenwijdig aan de middelbare as. De vergelijking van de ellipsoïde wordt dan

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

die van den vlakkenbundel

$$y = \lambda x.$$

Fig. 1.



Substitueeren we dit laatste in de vergelijking van de XY-doorsnede der ellipsoïde, dan vinden we ter bepaling van de abscissen der punten B en C (zie fig. 1) de vergelijking

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(\lambda x - q)^2}{b^2} = 1,$$

of na rangschikking naar x

$$\left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} \right\} x^2 - 2 \left\{ \frac{p}{a^2} + \frac{\lambda q}{b^2} \right\} x + \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - 1 = 0.$$

De halve som van de wortels dezer vergelijking is de abscis van het middelpunt A van de doorsnede; deze is dus

$$x_A = \frac{\frac{p}{a^2} + \frac{\lambda q}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2}} = \frac{pb^2 + \lambda qa^2}{b^2 + \lambda^2 a^2}.$$

Daarbij behoort

$$y_A = \lambda x_A = \lambda \frac{pb^2 + \lambda qa^2}{b^2 + \lambda^2 a^2}.$$

De vergelijking van de meetkundige plaats der middelpunten der doorsneden vinden we door de eliminatie van λ uit

$$y = \lambda x$$

en

$$x = \frac{pb^2 + \lambda qa^2}{b^2 + \lambda^2 a^2}.$$

Dit geeft

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = pb^2 x + qa^2 y,$$

dus de vergelijking van eene kegelsnede. Bij onderzoek blijkt dadelijk, dat het eene ellips is, gaande door den oorsprong en door het middelpunt der ellipsoïde: het middelpunt ligt op het midden der lijn OM en de assen zijn evenwijdig aan die der hoofddoorsnede: eindelijk is ze gelijkvormig met deze laatste. Deze uitkomst hadden we ook kunnen afleiden door op te merken, dat we de meetkundige plaats van A verkrijgen door deze vraag op te lossen: Door O worden lijnen getrokken, die de hoofddoorsnede der ellipsoïde snijden: wat is de meetkundige plaats van de middens der koorden? Beschouwen we dan de ellips als de projectie van een cirkel, dan is de gezochte meetkundige plaats evenzeer de projectie van een cirkel, dus eene ellips gaande door O en M en gelijkvormig en gelijkstandig met de hoofddoorsnede.

Het middelpunt dezer meetkundige plaats heeft dus tot coördinaten $\frac{1}{2}p$ en $\frac{1}{2}q$; reduceeren we de vergelijking op assen door dat punt en evenwijdig aan onze assen, dan krijgen we

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = \frac{1}{4}(b^2 p^2 + a^2 q^2).$$

De halve assen van deze meetkundige plaats zijn dus

$$\frac{\sqrt{b^2 p^2 + a^2 q^2}}{2b} \text{ en } \frac{\sqrt{b^2 p^2 + a^2 q^2}}{2a}.$$

Het halve verschil van de wortels der vergelijking op blz. 5 bovenaan geeft ons de projectie op de X-as van de halve grootte as van de ellips van doorsnede, dus de lengte van DE.

Deze wordt dus

$$DE = \sqrt{\left\{ \left(\frac{pb^2 + \lambda qa^2}{b^2 + \lambda^2 a^2} \right)^2 - \frac{p^2 b^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2}{b^2 + \lambda^2 a^2} \right\}},$$

of na eenige herleiding

$$DE = \frac{ab}{b^2 + \lambda^2 a^2} \sqrt{\{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2\}}.$$

Daar AB = DE sec. α is, wordt

$$AB = \frac{ab}{b^2 + \lambda^2 a^2} \sqrt{(1 + \lambda^2) \{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2\}}.$$

Dit is dus de halve grootte as van de ellips van doorsnede. Om de kleine te vinden, substitueeren we de coördinaten van A in de vergelijking van de ellipsoïde en lossen z op.

Na herleiding verkrijgen we

$$z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2}{b^2 + \lambda^2 a^2}}.$$

Dit is dus de halve kleine as van de doorsnede en de lineaire excentriciteit wordt

$$\sqrt{\left[\frac{a^2 b^2}{(b^2 + \lambda^2 a^2)^2} (1 + \lambda^2) \{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2\} - \frac{c^2}{b^2 + \lambda^2 a^2} \{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2\} \right]}$$

of na herleiding

$$\frac{\sqrt{\{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2\} \{a^2 b^2 (1 + \lambda^2) - c^2 (b^2 + \lambda^2 a^2)\}}}{b^2 + \lambda^2 a^2}.$$

3. De beide brandpunten vallen samen, als een der factoren van den teller nul wordt. De tweede factor laat zich in den vorm $(a^2 - c^2)b^2 + (b^2 - c^2)\lambda^2 a^2$ schrijven, waaruit blijkt dat deze altijd positief is. Stellen we den eersten factor nul, dan vinden we de betrekking

$$\lambda^2 a^2 + b^2 - (q - \lambda p)^2 = 0,$$

waaruit volgt

$$\lambda_{1,2} = \frac{-pq \pm \sqrt{p^2 b^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2}}{a^2 - p^2}.$$

Trekken we uit O raaklijnen aan de hoofddoorsnede, dan verkrijgen we ter bepaling van de richtingscoëfficiënten de voorwaarde, dat de beide snijpunten met de ellips samenvallen, dus dat AB nul is. Dit geeft de voorwaardevergelijking

$$\lambda^2 a^2 + b^2 - (q - \lambda p)^2 = 0,$$

dus dezelfde vergelijking, die we zo even vonden; dus $\lambda_{1,2}$ zijn de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen, uit O aan de hoofddoorsnede getrokken. Daarin vallen dus de brandpunten samen, waaruit volgt dat, zooals te voorzien was, de meetkundige plaats der brandpunten in de raakpunten dier lijnen de hoofddoorsnede aanraakt.

4. De vergelijking van de meetkundige plaats der brandpunten vinden we het gemakkelijkst door deze eerst op te maken in poolcoördinaten; dan heeft men

$$\varrho = OA \pm \text{de excentriciteit.}$$

We vonden boven

$$x_A = \frac{pb^2 + \lambda qa^2}{b^2 + \lambda^2 a^2},$$

of, als we den hoek α invoeren,

$$x_A = \frac{pb^2 + qa^2 \operatorname{tg} \alpha}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

waaruit volgt

$$OA = \frac{pb^2 + qa^2 \operatorname{tg} \alpha}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Voeren we in de bovengevonden waarde van de excentriciteit ook den hoek α in, dan krijgen we voor de vergelijking in poolcoördinaten

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{pb^2 + qa^2 \operatorname{tg} \alpha}{(b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos \alpha} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{\{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - (q - p \operatorname{tg} \alpha)^2\} \{a^2 b^2 - c^2 \cos^2 \alpha (b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)\}}}{(b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos \alpha}, \end{aligned}$$

of na verdrijving van het wortelteeken,

$$(b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) q^2 - 2(pb^2 \cos \alpha + qa^2 \sin \alpha)q + \\ + c^2(b^2 - q^2) \cos^2 \alpha + 2pqc^2 \sin \alpha \cos \alpha + c^2(a^2 - p^2) \sin^2 \alpha + \\ + p^2 b^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Brengen we de gevonden vergelijking over in rechthoekige coördinaten door te stellen $q^2 = x^2 + y^2$, $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en

$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, dan krijgen we na herleiding en rangschikking naar y de vergelijking

$$a^2 y^4 - 2qa^2 y^3 + \{ (a^2 + b^2)x^2 - 2pb^2 x + q^2 a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2) \} y^2 - \\ - \{ 2qa^2 x^2 - 2pqc^2 x \{ y + b^2 x^4 - 2pb^2 x^3 + \{ p^2 b^2 - \\ - (a^2 - c^2)(b^2 - q^2) \} x^2 = 0$$

als de vergelijking van de meetkundige plaats der brandpunten.

In deze vergelijking ontbreken de termen van den nulden en eersten graad; dus is de oorsprong dubbelpunt. De richtingscoëfficiënten van de dubbelpuntsraaklijnen worden gevonden uit de vergelijking

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2pqc^2}{q^2 a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2)} \frac{y}{x} + \frac{p^2 b^2 - (a^2 - c^2)(b^2 - q^2)}{q^2 a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2)} = 0,$$

waaruit volgt

$$\frac{y}{x} = \frac{-pqc^2 \pm \sqrt{-(p^2 b^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2) \{ p^2 b^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2 + c^2(a^2 + b^2 - c^2 - p^2 - q^2) \}}}{q^2 a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2)}.$$

De richtingscoëfficiënten van de lijnen, die de hoeken tusschen de dubbelpuntsraaklijnen middendoordeelen, zijn

$$\frac{-p^2 + q^2 + a^2 - b^2 \pm \sqrt{(p^2 + q^2 + a^2 - b^2)^2 - 4p^2(a^2 - b^2)}}{2pq}.$$

Bij onderzoek blijken dit ook te zijn de richtingscoëfficiënten der lijnen, die de hoeken middendoordeelen tusschen de raaklijnen uit O aan de hoofddoorsnede getrokken, en tevens die van normaal en raaklijn in O aan de ellips door O confocaal met de hoofddoorsnede. De normaal op deze confocale ellips door O deelt dus den hoek middendoor tusschen de dubbelpuntsraaklijnen en ook dien tusschen de raaklijnen uit O aan de hoofddoorsnede.

5. We zullen nu vooreerst nagaan, wanneer de dubbelpuntsraak-

lijnen bestaanbaar zijn, wanneer ze samenvallen, wanneer ze onbestaanbaar zijn.

Als de as van den vlakkenbundel de ellipsoïde niet snijdt, is

$$q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2 > 0.$$

De tweede factor onder het wortelteeken, dat voorkomt in de formule voor de richtingscoëfficiënten, is positief onder de voorwaarde

$$p^2 (b^2 - c^2) + q^2 (a^2 - c^2) > (a^2 - c^2) (b^2 - c^2),$$

of

$$\frac{p^2}{a^2 - c^2} + \frac{q^2}{b^2 - c^2} > 1.$$

Als O nu, zooals we onderstelden, buiten de ellipsoïde ligt, is $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} > 1$ en dus zeker $\frac{p^2}{a^2 - c^2} + \frac{q^2}{b^2 - c^2} > 1$; de tweede factor is dus ook positief, de wortelvorm is dus onbestaanbaar. Derhalve is O dan afgezonderd punt.

Ligt het punt O op de hoofddoorsnede der ellipsoïde, dan is

$$q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2 = 0.$$

De vergelijking van de meetkundige plaats der brandpunten vereenvoudigt zich dan tot

$$a^2 y^4 - 2qa^2 y^3 + \{ (a^2 + b^2) x^2 - 2pb^2 x + c^2 (a^2 - p^2) \} y^2 - \{ 2qa^2 x^2 - 2pqc^2 x \} y + b^2 x^4 - 2pb^2 x^3 + c^2 (b^2 - q^2) x^2 = 0.$$

De beide dubbelpuntsraaklijnen hebben tot richtingscoëfficiënt

$$\frac{-pq}{a^2 - p^2},$$

dus ze vallen samen. Uit de voorwaarde $q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2 = 0$ volgt $a^2 - p^2 = \frac{a^2 q^2}{b^2}$, zoodat de genoemde richtingscoëfficiënt wordt

$$-\frac{pb^2}{qa^2}.$$

Dit is tevens de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in O aan de hoofddoorsnede getrokken, dus de beide dubbelpuntsraaklijnen vallen daarmee samen, m. a. w. de meetkundige plaats der brandpunten raakt in O de hoofddoorsnede der ellipsoïde aan.

Als de as van den vlakkenbundel de ellipsoïde snijdt, zijn de dubbelpuntsraaklijnen bestaanbaar onder de voorwaarde

$$\frac{p^2}{a^2 - c^2} + \frac{q^2}{b^2 - c^2} > 1,$$

dus als O ligt buiten de ellips met de halve assen $\sqrt{a^2 - c^2}$ en $\sqrt{b^2 - c^2}$ om M beschreven, dus buiten de in het XY-vlak gelegen focaalkegelsnede. Ligt O op deze kegelsnede, dan wordt O keerpunt en de keerraaklijn heeft tot richtingscoëfficiënt

$$\frac{-pqc^2}{q^2a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2)}.$$

Met behulp van de voorwaardevergelijking

$$p^2(b^2 - c^2) + q^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$$

laat zich dit brengen in den vorm

$$\frac{-pq}{q^2 - b^2 + c^2}.$$

Dit blijkt tevens te zijn de richtingscoëfficiënt van de normaal in O op de focaalkegelsnede, dus de keerraaklijn staat loodrecht op de focaalkegelsnede. De focaalkegelsnede is hier de confocale ellips door O, zoodat de hier genoemde eigenschap in nauw verband staat met de vroeger afgeleide, dat de normaal op de confocale ellips door O den hoek tusschen de dubbelpuntsraaklijnen in O middendoordeelt.

Als O binnen de focaalkegelsnede ligt, is het weer een afgezonderd punt.

Deze focaalkegelsnede is de meetkundige plaats van de puntbollen (bollen met een straal nul), die de ellipsoïde dubbel aanraken, eene eigenschap, die in verschillende handboeken te vinden is. ¹⁾

Behalve in O heeft de kromme geen dubbelpunten. Dit blijkt in de eerste plaats uit de poolvergelijking van de kromme: de beide waarden van λ , waarvoor die vergelijking gelijke wortels heeft, zijn de richtingscoëfficiënten der raakvlakken aan de ellipsoïde, en blijkbaar geven deze geen dubbelpunten, maar eenvoudig raaklijnen. Het is ook daaruit te zien, dat er door O zes elders rakende raaklijnen te trekken zijn, nl. vooreerst de beide raaklijnen aan de hoofddoorsnede, in de tweede plaats de snijlijnen van het XY-vlak met de vlakken der cirkeldoorsneden door O en eindelijk de snijlijnen van het XY-vlak met de vlakken $y \pm ix = 0$. De laatstgenoemde zijn altijd onbestaanbaar; de voorlaatste zijn

¹⁾ Zie o.a. SALMON—FIEDLER, *Anal. Geometrie des Raumes I*, blz. 189 § 136 (2e dr.) en G. DE LONGCHAMPS, *Géométrie anal. à trois dimensions*, blz. 300.

alleen bestaanbaar, als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de middelbare as der ellipsoïde. Dat de vlakken der cirkeldoorsneden werkelijk raakpunten en geen dubbelpunten opleveren, volgt daaruit, dat aan weerskanten van een dergelijk vlak de bestaanbaarheidstoestand der brandpunten verschillend is. Dit is alleen mogelijk bij eenvoudige raking of bij een keerpunt, terwijl dit laatste vervalt, omdat er dan toch nog vier raaklijnen uit O te trekken zijn, en een dubbelpunt en twee keerpunten in dat geval niet kunnen voorkomen.

We zien dus, dat er door O behalve de dubbelpuntsraaklijnen zes elders rakende raaklijnen gaan; dit getal zou kleiner moeten zijn, als O niet het eenige dubbelpunt was.

Als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de kleinste as der ellipsoïde, is de oorsprong dus dubbelpunt van de meetkundige plaats der brandpunten en wel: *afgezonderd punt*, indien O ligt buiten de hoofddoorsnede of binnen de focaalkegelsnede, *keerpunt*, indien O op de laatstgenoemde kegelsnede ligt, *knooppunt* met bestaanbare raaklijnen, als O ligt tusschen de hoofddoorsnede en de focaalkegelsnede. Ligt O op de hoofddoorsnede, dan vallen de beide dubbelpuntsraaklijnen samen met de raaklijn in O aan de hoofddoorsnede. Verder raakt de meetkundige plaats de hoofddoorsnede aan in de raakpunten van de raakvlakken door de Z-as aan de ellipsoïde gebracht.

6. De verschillende vormen, die de meetkundige plaats der brandpunten in dit geval kan aannemen, laten zich uit den aard van het dubbelpunt gemakkelijk afleiden. Daar de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de kleinste as der ellipsoïde, krijgen we alleen bestaanbare brandpunten in die vlakken, die de ellipsoïde werkelijk snijden; dus alle bestaanbare punten liggen binnen de hoofddoorsnede. Ligt O buiten de hoofddoorsnede, dan krijgen we dus een ovaal daarbinnen, dat de hoofddoorsnede in twee punten aanraakt (Fig. I). De punten van het ovaal liggen op de voerstralen uit O paarsgewijs ter weerszijden even ver van de punten van de meetkundige plaats der middelpunten; m. a. w. de ellips der middelpunten is een *middelkromme* van de meetkundige plaats.

Als de excentriciteit der doorsneden klein genoeg is, zal de meetkundige plaats aan de naar O toegekeerde zijde naar binnen gekromd zijn: is de excentriciteit grooter, dan is de kromming overal naar buiten.

Komt O op de hoofddoorsnede, dan raken de beide takken van

of na verdrijving van het wortelteeken,

$$(b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) \varrho^2 - 2(pb^2 \cos \alpha + qa^2 \sin \alpha) \varrho + c^2(b^2 - q^2) \cos^2 \alpha + 2pqc^2 \sin \alpha \cos \alpha + c^2(a^2 - p^2) \sin^2 \alpha + p^2 b^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Brengen we de gevonden vergelijking over in rechthoekige coördinaten door te stellen $\varrho^2 = x^2 + y^2$, $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en

$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, dan krijgen we na herleiding en rangschikking naar y de vergelijking

$$a^2 y^4 - 2qa^2 y^3 + \{ (a^2 + b^2)x^2 - 2pb^2 x + q^2 a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2) \} y^2 - \{ 2qa^2 x^2 - 2pqc^2 x \} y + b^2 x^4 - 2pb^2 x^3 + \{ p^2 b^2 - (a^2 - c^2)(b^2 - q^2) \} x^2 = 0$$

als de vergelijking van de meetkundige plaats der brandpunten.

In deze vergelijking ontbreken de termen van den nulden en eersten graad; dus is de oorsprong dubbelpunt. De richtingscoëfficiënten van de dubbelpuntsraaklijnen worden gevonden uit de vergelijking

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2pqc^2}{q^2 a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2)} \frac{y}{x} + \frac{p^2 b^2 - (a^2 - c^2)(b^2 - q^2)}{q^2 a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2)} = 0,$$

waaruit volgt

$$\frac{y}{x} = \frac{-pqc^2 \pm \sqrt{-(p^2 b^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2) \{ p^2 b^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2 + c^2(a^2 + b^2 - c^2 - p^2 - q^2) \}}}{q^2 a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2)}.$$

De richtingscoëfficiënten van de lijnen, die de hoeken tusschen de dubbelpuntsraaklijnen middendoordeelen, zijn

$$\frac{-p^2 + q^2 + a^2 - b^2 \pm \sqrt{(p^2 + q^2 + a^2 - b^2)^2 - 4p^2(a^2 - b^2)}}{2pq}.$$

Bij onderzoek blijken dit ook te zijn de richtingscoëfficiënten der lijnen, die de hoeken middendoordeelen tusschen de raaklijnen uit O aan de hoofddoorsnede getrokken, en tevens die van normaal en raaklijn in O aan de ellips door O confocaal met de hoofddoorsnede. De normaal op deze confocale ellips door O deelt dus den hoek middendoor tusschen de dubbelpuntsraaklijnen en ook dien tusschen de raaklijnen uit O aan de hoofddoorsnede.

5. We zullen nu vooreerst nagaan, wanneer de dubbelpuntsraak-

lijnen bestaanbaar zijn, wanneer ze samenvallen, wanneer ze onbestaanbaar zijn.

Als de as van den vlakkenbundel de ellipsoïde niet snijdt, is

$$q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2 > 0.$$

De tweede factor onder het wortelteeken, dat voorkomt in de formule voor de richtingscoëfficiënten, is positief onder de voorwaarde

$$p^2 (b^2 - c^2) + q^2 (a^2 - c^2) > (a^2 - c^2) (b^2 - c^2),$$

of

$$\frac{p^2}{a^2 - c^2} + \frac{q^2}{b^2 - c^2} > 1.$$

Als O nu, zooals we onderstelden, buiten de ellipsoïde ligt, is $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} > 1$ en dus zeker $\frac{p^2}{a^2 - c^2} + \frac{q^2}{b^2 - c^2} > 1$; de tweede factor is dus ook positief, de wortelvorm is dus onbestaanbaar. Derhalve is O dan afgezonderd punt.

Ligt het punt O op de hoofddoorsnede der ellipsoïde, dan is

$$q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2 = 0.$$

De vergelijking van de meetkundige plaats der brandpunten vereenvoudigt zich dan tot

$$a^2 y^4 - 2q a^2 y^3 + \{ (a^2 + b^2) x^2 - 2p b^2 x + c^2 (a^2 - p^2) \} y^2 - \{ 2q a^2 x^2 - 2p q c^2 x \} y + b^2 x^4 - 2p b^2 x^3 + c^2 (b^2 - q^2) x^2 = 0.$$

De beide dubbelpuntsraaklijnen hebben tot richtingscoëfficiënt

$$\frac{-pq}{a^2 - p^2},$$

dus ze vallen samen. Uit de voorwaarde $q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2 = 0$ volgt $a^2 - p^2 = \frac{a^2 q^2}{b^2}$, zoodat de genoemde richtingscoëfficiënt wordt

$$-\frac{pb^2}{qa^2}.$$

Dit is tevens de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in O aan de hoofddoorsnede getrokken, dus de beide dubbelpuntsraaklijnen vallen daarmee samen, m. a. w. de meetkundige plaats der brandpunten raakt in O de hoofddoorsnede der ellipsoïde aan.

Als de as van den vlakkenbundel de ellipsoïde snijdt, zijn de dubbelpuntsraaklijnen bestaanbaar onder de voorwaarde

$$\frac{p^2}{a^2 - c^2} + \frac{q^2}{b^2 - c^2} > 1,$$

dus als O ligt buiten de ellips met de halve assen $\sqrt{a^2 - c^2}$ en $\sqrt{b^2 - c^2}$ om M beschreven, dus buiten de in het XY-vlak gelegen focaalkegelsnede. Ligt O op deze kegelsnede, dan wordt O keerpunt en de keerraaklijn heeft tot richtingscoëfficiënt

$$\frac{-pqc^2}{q^2a^2 - (b^2 - c^2)(a^2 - p^2)}.$$

Met behulp van de voorwaardevergelijking

$$p^2(b^2 - c^2) + q^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$$

laat zich dit brengen in den vorm

$$\frac{-pq}{q^2 - b^2 + c^2}.$$

Dit blijkt tevens te zijn de richtingscoëfficiënt van de normaal in O op de focaalkegelsnede, dus de keerraaklijn staat loodrecht op de focaalkegelsnede. De focaalkegelsnede is hier de confocale ellips door O, zoodat de hier genoemde eigenschap in nauw verband staat met de vroeger afgeleide, dat de normaal op de confocale ellips door O den hoek tusschen de dubbelpuntsraaklijnen in O middendoordeelt.

Als O binnen de focaalkegelsnede ligt, is het weer een afgezonderd punt.

Deze focaalkegelsnede is de meetkundige plaats van de puntbollen (bollen met een straal nul), die de ellipsoïde dubbel aanraken, eene eigenschap, die in verschillende handboeken te vinden is. ¹⁾

Behalve in O heeft de kromme geen dubbelpunten. Dit blijkt in de eerste plaats uit de poolvergelijking van de kromme: de beide waarden van λ , waarvoor die vergelijking gelijke wortels heeft, zijn de richtingscoëfficiënten der raakvlakken aan de ellipsoïde, en blijkbaar geven deze geen dubbelpunten, maar eenvoudig raaklijnen. Het is ook daaruit te zien, dat er door O zes elders rakende raaklijnen te trekken zijn, nl. vooreerst de beide raaklijnen aan de hoofddoorsnede, in de tweede plaats de snijlijnen van het XY-vlak met de vlakken der cirkeldoorsneden door O en eindelijk de snijlijnen van het XY-vlak met de vlakken $y \pm ix = 0$. De laatstgenoemde zijn altijd onbestaanbaar; de voorlaatste zijn

¹⁾ Zie o.a. SALMON—FIEDLER, *Anal. Geometrie des Raumes I*, blz. 189 § 136 (2e dr.) en G. DE LONGCHAMPS, *Géométrie anal. à trois dimensions*, blz. 300.

alleen bestaanbaar, als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de middelbare as der ellipsoïde. Dat de vlakken der cirkeldoorsneden werkelijk raakpunten en geen dubbelpunten opleveren, volgt daaruit, dat aan weerskanten van een dergelijk vlak de bestaanbaarheidstoestand der brandpunten verschillend is. Dit is alleen mogelijk bij eenvoudige raking of bij een keerpunt, terwijl dit laatste vervalt, omdat er dan toch nog vier raaklijnen uit O te trekken zijn, en een dubbelpunt en twee keerpunten in dat geval niet kunnen voorkomen.

We zien dus, dat er door O behalve de dubbelpuntsraaklijnen zes elders rakende raaklijnen gaan; dit getal zou kleiner moeten zijn, als O niet het eenige dubbelpunt was.

Als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de kleinste as der ellipsoïde, is de oorsprong dus dubbelpunt van de meetkundige plaats der brandpunten en wel: *afgezonderd punt*, indien O ligt buiten de hoofddoorsnede of binnen de focaalkegelsnede, *keerpunt*, indien O op de laatstgenoemde kegelsnede ligt, *knoop-punt* met bestaanbare raaklijnen, als O ligt tusschen de hoofddoorsnede en de focaalkegelsnede. Ligt O op de hoofddoorsnede, dan vallen de beide dubbelpuntsraaklijnen samen met de raaklijn in O aan de hoofddoorsnede. Verder raakt de meetkundige plaats de hoofddoorsnede aan in de raakpunten van de raakvlakken door de Z-as aan de ellipsoïde gebracht.

6. De verschillende vormen, die de meetkundige plaats der brandpunten in dit geval kan aannemen, laten zich uit den aard van het dubbelpunt gemakkelijk afleiden. Daar de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de kleinste as der ellipsoïde, krijgen we alleen bestaanbare brandpunten in die vlakken, die de ellipsoïde werkelijk snijden; dus alle bestaanbare punten liggen binnen de hoofddoorsnede. Ligt O buiten de hoofddoorsnede, dan krijgen we dus een ovaal daarbinnen, dat de hoofddoorsnede in twee punten aanraakt (Fig. I). De punten van het ovaal liggen op de voorstralen uit O paarsgewijs ter weerszijden even ver van de punten van de meetkundige plaats der middelpunten; m. a. w. de ellips der middelpunten is een *middelkromme* van de meetkundige plaats.

Als de excentriciteit der doorsneden klein genoeg is, zal de meetkundige plaats aan de naar O toegekeerde zijde naar binnen gekromd zijn: is de excentriciteit grooter, dan is de kromming overal naar buiten.

Komt O op de hoofddoorsnede, dan raken de beide takken van

de meetkundige plaats in O elkaar en de hoofddoorsnede aan.

Als O tusschen de hoofddoorsnede en de focaalkegelsnede ligt, vormt de meetkundige plaats eene naar binnen gerichte lus (Fig. II), die, als O op de focaalkegelsnede komt, in een keerpunt overgaat.

Ligt O binnen de focaalkegelsnede, dan wordt het een afgezonderd punt, en de kromme krijgt aan den naar O toegekeerden kant eene bocht naar binnen.

Als O met M samenvalt, krijgen we eindelijk eene kromme, die symmetrisch is ten opzichte der assen, en die soms op de Y-as (Fig. III) naar binnen gerichte bochten vertoont. Het laat zich vrij gemakkelijk berekenen, wanneer dit laatste zal voorkomen. De vergelijking der meetkundige plaats wordt in dit geval

$$a^2 y^4 + \{ (a^2 + b^2) x^2 - a^2 (b^2 - c^2) \} y^2 + b^2 x^4 - b^2 (a^2 - c^2) x^2 = 0.$$

De raaklijn is evenwijdig aan de X-as als $\frac{df}{dx}$ nul is en $\frac{df}{dy}$ niet. De voorwaarde $\frac{df}{dx} = 0$ geeft

$$4b^2 x^3 + 2(a^2 + b^2)xy^2 - 2b^2(a^2 - c^2)x = 0,$$

dus of

$$x = 0,$$

of

$$4b^2 x^2 + 2(a^2 + b^2)y^2 - 2b^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Nu geeft $x = 0$ in de vergelijking van de kromme gesubstitueerd

$$y = 0, \text{ of } y^2 = b^2 - c^2.$$

Voor den oorsprong is ook $\frac{df}{dy} = 0$; dus dit geeft geen raaklijn evenwijdig aan de X-as (zooals we weten, is O hier afgezonderd punt). Doch $y^2 = b^2 - c^2$ maakt $\frac{df}{dy}$ niet nul; dus geeft dit twee punten op de Y-as, waar de raaklijn evenwijdig aan de X-as is. Eindelijk geeft $4b^2 x^2 + 2(a^2 + b^2)y^2 - 2b^2(a^2 - c^2) = 0$ ons

$$x^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2) - (a^2 + b^2)y^2}{2b^2}.$$

Substitueeren we dit in de vergelijking van de kromme, dan verkrijgen we

$$y^4 - 2b^2 \frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2} y^2 + b^4 \frac{(a^2 - c^2)^2}{(a^2 - b^2)^2} = 0,$$

waaruit we vinden

$$y^2 = b^2 \frac{(a + c)^2}{a^2 - b^2}$$

en

$$y^2 = b^2 \frac{(a-c)^2}{a^2 - b^2}$$

De eerste waarde is grooter dan b^2 en geeft dus geen bestaanbare punten van de kromme; de tweede kan bestaanbare waarden geven als $(a-c)^2 < a^2 - b^2$ is. Hierbij vinden we

$$x^2 = \frac{ac(a^2 + b^2) - a^2(b^2 + c^2)}{a^2 - b^2}.$$

Deze waarden van x^2 en y^2 maken $\frac{df}{dy}$ niet nul. Als $(a-c)^2 < a^2 - b^2$ of $b^2 < 2ac - c^2$ is, kunnen we in elk der kwadranten een punt vinden, waar de raaklijn evenwijdig aan de X-as is. Deze punten zullen bestaanbaar zijn, als de vorm, die we voor x^2 vonden, positief is, dus als

$$ac(a^2 + b^2) - a^2(b^2 + c^2) > 0,$$

of

$$b^2 < ac$$

is. Deze voorwaarde sluit de bovengenoemde voorwaarde $b^2 < 2ac - c^2$ in zich.

Daar

$$b^2 - c^2 < b^2 \frac{(a-c)^2}{a^2 - b^2}$$

is, ligt de raaklijn, behoorende bij $x = 0$, dichter bij de X-as dan de beide andere, zoodat de kromme eene naar binnen gerichte bocht vertoont.

Een dergelijk onderzoek naar raaklijnen evenwijdig aan de Y-as doet zien, dat we die alleen verkrijgen in de snijpunten met de X-as, zoodat dergelijke bochten daar niet voorkomen.

7. Ten slotte kunnen we enkele bijzondere gevallen nagaan:

a. Onderstellen we, dat de ellipsoïde eene afgeplatte omwentelingsellipsoïde is, dan is $b = a$ en de vergelijking laat zich schrijven in den vorm

$$(x^2 + y^2) \{a^2(x^2 + y^2) - 2qa^2y - 2pa^2x + p^2a^2 + q^2a^2 - a^4 + a^2c^2\} - c^2(py - qx)^2 = 0.$$

Draaien we de X- en Y-assen over een zoodanigen hoek, dat de nieuwe X-as door het middelpunt der ellipsoïde gaat, dan wordt de vergelijking op de nieuwe assen

$$(x^2 + y^2) \{a^2(x^2 + y^2) - 2a^2x\sqrt{p^2 + q^2} + a^2(p^2 + q^2 - a^2 + c^2)\} - c^2(p^2 + q^2)y^2 = 0,$$

waaruit blijkt dat de nieuwe X-as as van symmetrie is.

De vergelijking van deze kromme in poolcoördinaten wordt, als we den afstand van O tot M door l voorstellen,

$$\varrho^2 \{a^2 \varrho^2 - 2a^2 l \varrho \cos \alpha + a^2(l^2 - a^2 + c^2)\} - c^2 l^2 \varrho^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

of als we door ϱ^2 deelen en ϱ oplossen,

$$\varrho = l \cos \alpha \pm \frac{1}{a} \sqrt{(a^2 - c^2)(a^2 - l^2 \sin^2 \alpha)}.$$

b. Als de as van den vlakkenbundel de groote as der (drie-assige) ellipsoïde of haar verlengde snijdt, wordt $q = 0$. De X-as is dan as van symmetrie.

c. Snijdt de as van den vlakkenbundel de middelbare as der ellipsoïde of haar verlengde, dan is $p = 0$, en de Y-as is as van symmetrie.

d. Brengen we in het algemeene geval de coördinaatassen evenwijdig aan zichzelf naar het middelpunt der ellipsoïde over, dan wordt de vergelijking

$$\begin{aligned} & a^2 y^4 + 2q a^2 y^3 + \{ (a^2 + b^2) x^2 + 2p a^2 x + p^2 a^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2 + a^2 c^2 - \\ & - p^2 c^2 \} y^2 + \{ 2q b^2 x^2 + 2p q c^2 x - 2q a^2 b^2 + 2q a^2 c^2 \} y + b^2 x^4 + 2p b^2 x^3 + \\ & + \{ p^2 b^2 + q^2 b^2 - a^2 b^2 + b^2 c^2 - q^2 c^2 \} x^2 + \{ 2p b^2 c^2 - 2p a^2 b^2 \} x - \\ & - q^2 a^2 b^2 + q^2 a^2 c^2 - p^2 a^2 b^2 + p^2 b^2 c^2 = 0. \end{aligned}$$

Laten we nu de as van den vlakkenbundel naar het oneindige gaan, zoodat $\frac{q}{p} = \lambda$ wordt, en snijden we de ellipsoïde dus door eene reeks van evenwijdige vlakken met richtingscoëfficiënt λ , dan wordt de vergelijking na deeling door p^2

$$\begin{aligned} & \{ a^2 + a^2 \lambda^2 - c^2 \} y^2 + 2\lambda c^2 x y + \{ b^2 + b^2 \lambda^2 - c^2 \lambda^2 \} x^2 - \\ & - a^2 b^2 \lambda^2 + a^2 c^2 \lambda^2 - a^2 b^2 + b^2 c^2 = 0. \end{aligned}$$

De meetkundige plaats der brandpunten wordt dan eene kegelsnede: dit blijkt te zijn eene ellips met haar middelpunt in O, rakende aan de hoofddoorsnede in de raakpunten van de vlakken uit de reeks, die de ellipsoïde aanraken. Waarschijnlijk splitst de kromme C^4 zich dan in twee kegelsneden, waarvan eene in het vlak in het oneindige ligt. Voor het vlak in het oneindige toch worden de brandpunten der doorsnede onbepaald, elk punt van dat vlak is eigenlijk viermaal brandpunt, wijl elk der beide raaklijnen uit dat punt aan de doorsnede getrokken, den onbestaanbaren cirkel tweemaal snijdt.

8. De richtlijnen, behoorende bij de brandpunten in het symmetrievlak, vormen een cylinder, waarvan de beschrijvende lijnen loodrecht op dat symmetrievlak staan. Als H (zie fig. 1) het snijpunt is van zulk eene richtlijn met het symmetrievlak, dan is volgens de vroeger gevonden waarden van de groote as en van de excentriciteit van de doorsnede

$$AH = \frac{a^2 b^2 (1 + \lambda^2)}{b^2 + \lambda^2 a^2} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2}{a^2 b^2 (1 + \lambda^2) - c^2 (b^2 + \lambda^2 a^2)}}.$$

De poolvergelijking van de doorsnede van den richtlijnencylinder met het XY -vlak is

$$\varrho = OA \pm AH;$$

dit wordt, als we den hoek α als veranderlijke invoeren,

$$\varrho = \frac{pb^2 + qa^2 \operatorname{tg} \alpha}{(b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos \alpha} \pm \frac{a^2 b^2 \sec^2 \alpha}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{\frac{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - (q - p \operatorname{tg} \alpha)^2}{a^2 b^2 \sec^2 \alpha - c^2 (b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)}},$$

of na herleiding

$$\begin{aligned} & \varrho^2 (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) \{a^2 b^2 - c^2 (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha)\} - \\ & - 2\varrho (pb^2 \cos \alpha + qa^2 \sin \alpha) \{a^2 b^2 - c^2 (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha)\} - \\ & - (b^4 c^2 p^2 \cos^2 \alpha + 2a^2 b^2 c^2 pq \sin \alpha \cos \alpha + a^4 c^2 q^2 \sin^2 \alpha + a^4 b^4 - \\ & - a^4 b^2 q^2 - a^2 b^4 p^2) = 0. \end{aligned}$$

Gaan we op rechthoekige coördinaatassen over, dan verkrijgen we na rangschikking naar y

$$\begin{aligned} & a^4 (b^2 - c^2) y^4 - 2qa^4 (b^2 - c^2) y^3 + \{a^2 b^2 (a^2 + b^2 - 2c^2) x^2 - \\ & - 2pa^2 b^2 (b^2 - c^2) x - q^2 a^4 c^2 + a^2 b^2 (q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2)\} y^2 - \\ & - \{2qa^2 b^2 (a^2 - c^2) x^2 + 2pqa^2 b^2 c^2 x\} y + b^4 (a^2 - c^2) x^4 - \\ & - 2pb^4 (a^2 - c^2) x^3 - \{p^2 b^4 c^2 - a^2 b^2 (q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2)\} x^2 = 0 \end{aligned}$$

als de vergelijking van de doorsnede van den richtlijnencylinder met het XY -vlak.

9. De poolvergelijking heeft gelijke wortels onder de voorwaarde

$$b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - (q - p \operatorname{tg} \alpha)^2 = 0.$$

Zooals we reeds vroeger zagen, geeft deze ons de raakvlakken aan de ellipsoïde, waarvoor de richtlijnen samenvallen, m. a. w. de kromme lijn raakt de hoofddoorsnede in de raakpunten van de raaklijnen uit O en dus in die punten ook de meetkundige plaats der brandpunten aan.

In de vergelijking op loodrechte assen zijn de laagste termen

van den tweeden graad, dus de oorsprong is dubbelpunt. De richtingscoëfficiënten der dubbelpuntsraaklijnen worden gevonden uit

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2pqa^2b^2c^2}{a^2\{b^2(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2) - q^2a^2c^2\}} \frac{y}{x} + \frac{b^2\{a^2(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2) - p^2b^2c^2\}}{a^2\{b^2(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2) - q^2a^2c^2\}} = 0$$

en zijn dus

$$\frac{y}{x} = \frac{pqa^2b^2c^2 \pm \sqrt{p^2q^2a^4b^4c^4 - a^2b^2\{a^2(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2) - p^2b^2c^2\}\{b^2(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2) - q^2a^2c^2\}}}{a^2\{b^2(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2) - q^2a^2c^2\}}.$$

De dubbelpuntsraaklijnen zijn bestaanbaar, als de vorm onder het wortelteeken positief is, wat na eenige herleiding als voorwaarde geeft

$$(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2)\{a^4c^2q^2 + b^4c^2p^2 - a^2b^2(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2)\} > 0.$$

Als O buiten de hoofddoorsnede van de ellipsoïde ligt, is de eerste factor positief. Dus wordt de voorwaarde voor de bestaanbaarheid der dubbelpuntsraaklijnen

$$a^4b^4 - q^2a^4(b^2 - c^2) - p^2b^4(a^2 - c^2) > 0.$$

Het hangt dus af van de waarde van p en q , of we bestaanbare of onbestaanbare dubbelpuntsraaklijnen verkrijgen: de grens wordt gegeven door

$$p^2b^4(a^2 - c^2) + q^2a^4(b^2 - c^2) = a^4b^4.$$

of

$$\frac{\frac{p^2}{a^4}}{a^2 - c^2} + \frac{\frac{q^2}{b^4}}{b^2 - c^2} = 1.$$

Beschouwen we hierin p en q als veranderlijken, dan stelt dit eene ellips voor met haar middelpunt in O en de halve assen

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \text{ en } \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - c^2}}. \text{ Ligt M binnen deze ellips om O beschre-$$

ven of, wat op hetzelfde neerkomt, ligt O binnen eene ellips met die assen om M beschreven, dan is O dus dubbelpunt met bestaanbare raaklijnen. Ligt O buiten genoemde ellips, dan is het een afgezonderd punt. Ligt eindelijk O op genoemde ellips, dan is het een keerpunt: de richtingscoëfficiënt der keerraaklijn is

$$\frac{pqa^2b^2c^2}{a^2\{b^2(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2) - q^2a^2c^2\}}.$$

Met behulp van de voorwaarde

$$p^2 b^4 (a^2 - c^2) + q^2 a^4 (b^2 - c^2) = a^4 b^4$$

laat zich deze vereenvoudigen tot

$$\frac{a^2 q}{b^2 p}.$$

Denken we ons O met M verbonden, dan snijdt deze lijn de hoofddoorsnede; noemen we de coördinaten van het snijpunt p' , q' , dan is $p:p' = q:q'$. De raaklijn in het punt (p', q') aan de hoofddoorsnede heeft tot richtingscoëfficiënt $-\frac{b^2 p'}{a^2 q'}$, d. i. $-\frac{b^2 p}{a^2 q}$; dus deze raaklijn staat loodrecht op de keerraaklijn.

10. Er bestaat verband tusschen de kegelsnede met de halve assen $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}$ en $\frac{b^2}{\sqrt{b^2 - c^2}}$, die we hier vonden, en de focaalkegelsnede met de halve assen $\sqrt{a^2 - c^2}$ en $\sqrt{b^2 - c^2}$, die we bij de beschouwing van de meetkundige plaats der brandpunten bespraken. Denken we ons nl. eene ellips met de assen α en β langs die der hoofddoorsnede en op die ellips een punt (x_1, y_1) , dan heeft, als we de coördinaatassen leggen langs de assen der hoofddoorsnede, de raaklijn in dat punt (x_1, y_1) tot vergelijking

$$\frac{x x_1}{\alpha^2} + \frac{y y_1}{\beta^2} = 1.$$

Een punt (ξ, η) van het XY-vlak heeft met betrekking tot de hoofddoorsnede tot poollijn

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

Dit zal de bovengenoemde raaklijn zijn, als $\frac{\xi}{a^2} = \frac{x_1}{\alpha^2}$ en

$\frac{\eta}{b^2} = \frac{y_1}{\beta^2}$, dus

$$x_1 = \xi \frac{\alpha^2}{a^2}, \quad y_1 = \eta \frac{\beta^2}{b^2}$$

is. Beschrijft nu (x_1, y_1) de ellips met de assen α en β , dan beschrijft (ξ, η) eene kromme, waarvan de vergelijking is

$$\frac{\xi^2 \alpha^2}{a^4} + \frac{\eta^2 \beta^2}{b^4} = 1.$$

Nemen we nu $\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}$ en $\beta = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - c^2}}$, dan wordt de laatstgenoemde vergelijking

$$\frac{\xi^2}{a^2 - c^2} + \frac{\eta^2}{b^2 - c^2} = 1.$$

Dus de punten van de ellips met de halve assen $\sqrt{a^2 - c^2}$ en $\sqrt{b^2 - c^2}$ hebben met betrekking tot de hoofddoorsnede tot poollijnen de raaklijnen aan de ellips met de halve assen $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}$ en $\frac{b^2}{\sqrt{b^2 - c^2}}$. Anders gezegd: de beide genoemde ellipsen zijn wederkeerige poolkrommen ten opzichte van de hoofddoorsnede.

11. Als O op de hoofddoorsnede der ellipsoïde ligt, is

$$a^2 q^2 + b^2 p^2 - a^2 b^2 = 0$$

en de vergelijking van de rechte doorsnede des richtlijnencylinders vereenvoudigt zich tot

$$\begin{aligned} a^4(b^2 - c^2)y^4 - 2a^4(b^2 - c^2)qy^3 + \{ (a^2 + b^2 - 2c^2)a^2b^2x^2 - 2a^2b^2(b^2 - c^2)px - a^4c^2q^2 \} y^2 - \\ - \{ 2a^2b^2(a^2 - c^2)qx^2 + 2a^2b^2c^2pqx \} y + b^4(a^2 - c^2)x^4 - \\ - 2b^4(a^2 - c^2)px^3 - b^4c^2p^2x^2 = 0. \end{aligned}$$

De dubbelpuntsraaklijnen hebben beide tot richtingscoëfficiënt

$$-\frac{b^2 p}{a^2 q}$$

en vallen dus samen met de raaklijn in O aan de hoofddoorsnede.

Ligt O binnen de hoofddoorsnede, dan is

$$b^2 p^2 + a^2 q^2 - a^2 b^2 < 0$$

en de voorwaarde voor de bestaanbaarheid der dubbelpuntsraaklijnen in O wordt

$$a^4 c^2 q^2 + b^4 c^2 p^2 - a^2 b^2 (b^2 p^2 + a^2 q^2 - a^2 b^2) < 0.$$

Van dezen vorm zijn alle drie termen positief; dus zijn de dubbelpuntsraaklijnen altijd onbestaanbaar en is O afgezonderd punt.

12. De verschillende vormen, die deze kromme kan aannemen, laten zich uit den aard van het dubbelpunt gemakkelijk afleiden. De bestaanbare punten van deze kromme liggen alle buiten de hoofddoorsnede (uitgezonderd O als afgezonderd punt) en binnen

den hoek ingesloten door de raaklijnen uit O aan de hoofddoorsnede.

Als O buiten de ellips met de halve assen $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}}$ en $\frac{b^2}{\sqrt{b^2-c^2}}$ ligt, is het een afgezonderd punt, en de kromme bestaat eenvoudig uit een ovaal, dat de hoofddoorsnede in twee punten raakt. Komt O op genoemde ellips, dan wordt het een keerpunt (Fig. IV). Ligt O tusschen deze ellips en de hoofddoorsnede, dan is het een dubbelpunt met bestaanbare raaklijnen; de kromme vertoont dan eene naar buiten gekeerde lus. Als O op de hoofddoorsnede ligt, raken de beide takken in O elkaar en de hoofddoorsnede aan. Ligt O binnen de hoofddoorsnede, dan krijgen we weer een ovaal, dat nu echter niet meer de hoofddoorsnede aanraakt. Ligt O in M, dan krijgen we eindelijk eene kromme, die symmetrisch is ten opzichte der assen: deze heeft echter niet, zooals de meetkundige plaats der brandpunten, meerdere raaklijnen evenwijdig aan een der assen.

De ellips, die de meetkundige plaats is van de middelpunten der doorsneden, is met betrekking tot voerstralen door O ook middelkromme van de doorsnede des richtlijncyinders.

13. Evenals bij de meetkundige plaats der brandpunten, zullen we ook hier enkele bijzondere gevallen nagaan:

a. Als de ellipsoïde eene omwentelingsellipsoïde is om de kleine as, is $b = a$ en de vergelijking vereenvoudigt zich tot

$$(x^2 + y^2)\{(a^2 - c^2)(x^2 + y^2) - 2(a^2 - c^2)(px + qy) + a^2p^2 + a^2q^2 - a^4\} - c^2(px + qy)^2 = 0.$$

Draaien we onze coördinaatassen, zoodat de nieuwe X-as gaat door het middelpunt der ellipsoïde, dan wordt de vergelijking

$$(x^2 + y^2)\{(a^2 - c^2)(x^2 + y^2) - 2(a^2 - c^2)x\sqrt{p^2 + q^2} + a^2p^2 + a^2q^2 - a^4\} - c^2(p^2 + q^2)x^2 = 0.$$

Dus is de kromme dan symmetrisch ten opzichte van de nieuwe X-as. Stellen we OM door l voor, dan wordt de poolvergelijking

$$\varrho^2\{(a^2 - c^2)\varrho^2 - 2(a^2 - c^2)l\varrho \cos \alpha + a^2l^2 - a^4\} - c^2l^2\varrho^2 \cos^2 \alpha = 0$$

of, als we door ϱ^2 deelen en ϱ oplossen,

$$\varrho = l \cos \alpha \pm a \sqrt{\frac{a^2 - l^2 \sin^2 \alpha}{a^2 - c^2}}.$$

b. Als de groote as van de ellipsoïde of haar verlengde door O gaat, is $q = 0$ en de kromme symmetrisch ten opzichte van de X-as.

c. Gaat de middelbare as der ellipsoïde of haar verlengde door O, dan is $p = 0$ en de kromme symmetrisch met betrekking tot de Y-as.

d. Verplaatsen we in het algemeene geval de coördinaatassen evenwijdig aan zichzelf naar het middelpunt der ellipsoïde, dan wordt de vergelijking van de kromme

$$\begin{aligned} & a^4(b^2 - c^2)y^4 + 2qa^4(b^2 - c^2)y^3 + \{a^2b^2(a^2 + b^2 - 2c^2)x^2 + \\ & + 2pa^2b^2(a^2 - c^2)x + a^4(p^2b^2 + q^2b^2 - b^4 - q^2c^2)\}y^2 + \\ & + \{2qa^2b^2(b^2 - c^2)x^2 - 2pqa^2b^2c^2x - 2qa^4b^4\}y + b^4(a^2 - c^2)x^4 + \\ & + 2pb^4(a^2 - c^2)x^3 + b^4(p^2a^2 + q^2a^2 - a^4 - p^2c^2)x^2 - 2pa^4b^4x - \\ & - a^4b^4(p^2 + q^2) = 0. \end{aligned}$$

Laten we nu de as van den vlakkenbundel naar het oneindige gaan, dus p en q oneindig groot worden, maar zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ is,

m. a. w. snijden we de ellipsoïde door eene reeks van evenwijdige vlakken, dan krijgen we na deeling door p^2

$$\begin{aligned} & a^4(b^2 + b^2\lambda^2 - c^2\lambda^2)y^2 - 2a^2b^2c^2\lambda xy + b^4(a^2 + a^2\lambda^2 - c^2)x^2 - \\ & - a^4b^4(1 + \lambda^2) = 0. \end{aligned}$$

De kromme wordt dus eene kegelsnede: bij onderzoek blijkt, dat het eene ellips is met haar middelpunt in den oorsprong.

Bij de bespreking van de meetkundige plaats der brandpunten hebben we opgemerkt, dat de verlaging van den graad van die kromme is toe te schrijven aan eene splitsing in twee kegelsneden, waarvan ééne in het oneindige ligt. Deze splitsing moet noodzakelijk vergezeld gaan van eene dergelijke splitsing van de rechte doorsnede van den cylinder der richtlijnen, zoodat deze gelijktijdig met de eerste in eene kegelsnede overgaat. Er bestaat namelijk een verband tusschen de beide krommen, dat zich aldus laat uitdrukken. Trekken we voerstralen door het middelpunt der hoofddoorsnede, dan is het kwadraat van den voerstraal van een punt van de hoofddoorsnede gelijk aan het produkt van de voerstralen van de overeenkomstige punten der genoemde kromme lijnen. Voor het geval, dat de oorsprong in M ligt, laat zich deze eigenschap als volgt uitspreken. Denken we ons een vlak dat het XY-vlak snijdt, zoo dat een in dit vlak gelegen cirkel als

projectie op het XY-vlak de hoofddoorsnede oplevert. Nemen we in dit vlak eene transformatie door wederkeerige voorstralen aan, waarbij de cirkel punt voor punt met zichzelf overeenkomt, dan heeft deze tot projectie de bovenbedoelde verwantschap. Alleen als de ellipsoïde eene omwentelingsellipsoïde is, is de bovenbedoelde verwantschap zelve eene transformatie door wederkeerige voorstralen.

14. In de tweede plaats zullen we onderstellen, dat *de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de grootste as der ellipsoïde*: we zullen dan het XZ-vlak evenwijdig nemen aan de middelbare, het YZ-vlak aan de kleine as, terwijl de Z-as weer valt langs de as van den vlakkenbundel.

Bestaanbare brandpunten vinden we hier alleen in die vlakken, die de ellipsoïde niet snijden; dus liggen alle bestaanbare punten buiten de hoofddoorsnede.

De vergelijking van de meetkundige plaats der brandpunten vinden we door in de vergelijking, die we in het eerste geval afleidden, a , b en c achtereenvolgens te vervangen door b , c en a . We vinden dus hier voor de poolvergelijking

$$q = \frac{pc^2 \cos \alpha + qb^2 \sin \alpha}{c^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{\sqrt{\{c^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - (q \cos \alpha - p \sin \alpha)^2\} \{b^2 c^2 - a^2 (c^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)\}}}{c^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}$$

en voor de vergelijking op rechthoekige assen

$$b^2 y^4 - 2qb^2 y^3 + \{(b^2 + c^2)x^2 - 2pc^2 x + a^2(b^2 - p^2) + p^2 c^2 + q^2 b^2 - b^2 c^2\} y^2 - \{2qb^2 x^2 - 2pqa^2 x\} y + c^2 x^4 - 2pc^2 x^3 + \{a^2(c^2 - q^2) + p^2 c^2 + q^2 b^2 - b^2 c^2\} x^2 = 0.$$

Uit deze vergelijkingen blijkt, dat O dubbelpunt is, en dat de kromme de hoofddoorsnede der ellipsoïde raakt in de raakpunten van de raaklijnen uit O. Even als in het eerste geval, is O het eenige dubbelpunt; de richtingscoëfficiënten der dubbelpuntsraaklijnen worden gevonden uit

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2pqa^2}{a^2(b^2 - p^2) + p^2 c^2 + q^2 b^2 - b^2 c^2} \frac{y}{x} + \frac{a^2(c^2 - q^2) + p^2 c^2 + q^2 b^2 - b^2 c^2}{a^2(b^2 - p^2) + p^2 c^2 + q^2 b^2 - b^2 c^2} = 0$$

en zijn dus

$$\frac{y}{x} = - \frac{pq a^2}{a^2(b^2 - p^2) + p^2 c^2 + q^2 b^2 - b^2 c^2} \pm \frac{V(p^2 c^2 + q^2 b^2 - b^2 c^2) \{ p^2(a^2 - c^2) + q^2(a^2 - b^2) + (a^2 - c^2)(a^2 - b^2) \}}{a^2(b^2 - p^2) + p^2 c^2 + q^2 b^2 - b^2 c^2}.$$

Als O buiten de hoofddoorsnede der ellipsoïde ligt, zijn beide factoren onder het wortelteeken positief, dus de dubbelpunts-raaklijnen bestaanbaar. Verder merkten we reeds op, dat we alleen bestaanbare punten vinden in die vlakken, die de ellipsoïde niet snijden, en er dus alleen eene bestaanbare kromme mogelijk is, als O buiten de hoofddoorsnede ligt.

We verkrijgen dus hier slechts één vorm, nl. eene kromme die de hoofddoorsnede in twee punten raakt en in O een dubbelpunt heeft met bestaanbare raaklijnen (Fig. V).

15. De bijzondere gevallen, die we onderscheidde, toen de as van den vlakkenbundel evenwijdig was aan de kleine as der ellipsoïde, leveren ons hier het volgende op:

a. De ellipsoïde is omwentelingsellipsoïde om de groote as. Dan is $b = c$ en de vergelijking gaat over in

$$b^2 y^4 - 2q b^2 y^3 + \{ 2b^2 x^2 - 2p b^2 x + a^2(b^2 - p^2) + p^2 b^2 + b^2 q^2 - b^4 \} y^2 - \{ 2q b^2 x^2 - 2p q a^2 x \} y + b^2 x^4 - 2p b^2 x^3 + \{ a^2(b^2 - q^2) + b^2 p^2 + b^2 q^2 - b^4 \} x^2 = 0.$$

Draaien we de coördinaatassen zoo, dat de nieuwe X-as gaat door het middelpunt der ellipsoïde, dan laat ze zich in den vorm

$$(x^2 + y^2) \{ b^2(x^2 + y^2) - 2b^2 x \sqrt{p^2 + q^2} + a^2 b^2 + p^2 b^2 + q^2 b^2 - b^4 \} - a^2(p^2 + q^2)y^2 = 0,$$

schrijven, waaruit blijkt, dat de nieuwe X-as as van symmetrie is.

De poolvergelijking wordt, als we $OM = l$ stellen,

$$q^2 \{ b^2 q^2 - 2b^2 l q \cos \alpha + a^2 b^2 + b^2 l^2 - b^4 \} - a^2 l^2 q^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

of, na deeling door q^2 en oplossing naar q ,

$$q = l \cos \alpha \pm \frac{1}{b} V(a^2 - b^2)(l^2 \sin^2 \alpha - b^2).$$

b. Gaat het XZ-vlak door het middelpunt der ellipsoïde, dan is $q = 0$ en de X-as symmetrieas van de kromme.

c. Ligt het middelpunt der ellipsoïde in het YZ-vlak, dan is $p = 0$ en de Y-as as van symmetrie van de meetkundige plaats.

d. Brengen we het assenstelsel evenwijdig aan zichzelf naar het middelpunt der ellipsoïde over, dan wordt de nieuwe vergelijking

$$\begin{aligned} & b^2y^4 + 2qb^2y^3 + \{(b^2 + c^2)x^2 + 2pb^2x + p^2b^2 + q^2b^2 + a^2b^2 - \\ & - p^2a^2 - b^2c^2\}y^2 + \{2qc^2x^2 + 2pqa^2x + 2qa^2b^2 - 2qb^2c^2\}y + c^2x^4 + \\ & + 2pc^2x^3 + \{p^2c^2 + q^2c^2 + a^2c^2 - q^2a^2 - b^2c^2\}x^2 + \{2pa^2c^2 - 2pb^2c^2\}x + \\ & + q^2a^2b^2 - q^2b^2c^2 + p^2a^2c^2 - p^2b^2c^2 = 0. \end{aligned}$$

Laten we nu p en q oneindig groot worden, maar zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ is, dan krijgen we na deeling door p^2

$$\begin{aligned} & \{b^2 + b^2\lambda^2 - a^2\}y^2 + 2a^2\lambda xy + \{c^2 + c^2\lambda^2 - a^2\lambda^2\}x^2 + a^2b^2\lambda^2 - b^2c^2\lambda^2 + \\ & + a^2c^2 - b^2c^2 = 0. \end{aligned}$$

De meetkundige plaats wordt dus ook hier eene kegelsnede, die bij onderzoek eene hyperbool blijkt te zijn. Haar middelpunt ligt in M en ze raakt de hoofddoorsnede in de raakpunten van de raaklijnen met den richtingscoëfficiënt λ .

De verlaging van den graad van de meetkundige plaats is ook hier toe te schrijven aan eene splitsing in twee kegelsneden, waarvan ééne in het vlak in het oneindige ligt.

Ook hier is met betrekking tot voerstralen door O de meetkundige plaats der middelpunten middelkromme van de meetkundige plaats der brandpunten.

16. De poolvergelijking van de *XY-doorsnede van den cylinder van richtlijnen* wordt voor dit geval

$$\begin{aligned} q &= \frac{pc^2 \cos \alpha + qb^2 \sin \alpha}{c^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} \pm \\ &\pm \frac{b^2 c^2}{c^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\frac{c^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - (q \cos \alpha - p \sin \alpha)^2}{b^2 c^2 - a^2(b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha)}} \end{aligned}$$

en de vergelijking op rechthoekige assen

$$\begin{aligned} & b^4(a^2 - c^2)y^4 - 2qb^4(a^2 - c^2)y^3 + \{b^2c^2(2a^2 - b^2 - c^2)x^2 - \\ & - 2pb^2c^2(a^2 - c^2)x + q^2a^2b^4 - b^2c^2(p^2c^2 + q^2b^2 - b^2c^2)\}y^2 - \\ & - \{2qb^2c^2(a^2 - b^2)x^2 - 2pqa^2b^2c^2x\}y + c^4(a^2 - b^2)x^4 - 2pc^4(a^2 - b^2)x^3 + \\ & + \{p^2a^2c^4 - b^2c^2(p^2c^2 + q^2b^2 - b^2c^2)\}x^2 = 0. \end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen blijkt, dat de kromme de hoofddoorsnede aanraakt in de raakpunten van de raaklijnen uit O en O het eenige dubbelpunt is.

Bestaanbare punten krijgen we alleen in die vlakken, die de ellipsoïde niet snijden; dus er is alleen eene bestaanbare kromme, als O buiten de hoofddoorsnede ligt.

De richtingscoëfficiënten der dubbelpuntsraaklijnen vinden we uit de vergelijking

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2pqa^2b^2c^2}{q^2a^2b^4 - b^2c^2(p^2c^2 + q^2b^2 - b^2c^2)} \frac{y}{x} + \frac{p^2a^2c^4 - b^2c^2(p^2c^2 + q^2b^2 - b^2c^2)}{q^2a^2b^4 - b^2c^2(p^2c^2 + q^2b^2 - b^2c^2)} = 0.$$

Deze zijn dus

$$\frac{y}{x} = - \frac{pqa^2b^2c^2}{q^2a^2b^4 - b^2c^2(p^2c^2 + q^2b^2 - b^2c^2)} \pm \frac{bc \sqrt{(p^2c^2 + q^2b^2 - b^2c^2)\{q^2b^4(a^2 - c^2) + p^2c^4(a^2 - b^2) + b^4c^4\}}}{q^2a^2b^4 - b^2c^2(p^2c^2 + q^2b^2 - b^2c^2)}.$$

Als O buiten de hoofddoorsnede ligt, zijn de beide factoren onder het wortelteeken positief, dus de dubbelpuntsraaklijnen bestaanbaar: wanneer er dus eene bestaanbare kromme is, is O altijd dubbelpunt met bestaanbare raaklijnen. We vinden dus voor deze kromme een dergelijken vorm als voor de meetkundige plaats der brandpunten (Fig. VI).

17. Omtrent de bijzondere gevallen is het volgende op te merken:

a. Is de ellipsoïde eene omwentelingsellipsoïde, dan is $b = c$ en de vergelijking kan aldus geschreven worden

$$(x^2 + y^2)\{(a^2 - b^2)(x^2 + y^2) - 2(a^2 - b^2)(qy + px) - (p^2b^2 + q^2b^2 - b^4)\} + a^2(qy + px)^2 = 0.$$

Draaien we de coördinaatassen zoo, dat de nieuwe X-as door het middelpunt der ellipsoïde gaat, dan wordt de nieuwe vergelijking

$$(x^2 + y^2)\{(a^2 - b^2)(x^2 + y^2) - 2(a^2 + b^2)x\sqrt{p^2 + q^2} - p^2b^2 - q^2b^2 + b^4\} + a^2(p^2 + q^2)x^2 = 0,$$

waaruit blijkt, dat de nieuwe X-as as van symmetrie is.

De poolvergelijking wordt, als we $OM = l$ stellen,

$$o = l \cos \alpha \pm b \sqrt{\frac{l^2 \sin^2 \alpha - b^2}{a^2 - b^2}}.$$

b. Gaat het XZ-vlak door M, dan is $q = 0$ en de X-as as van symmetrie van de kromme.

c. Ligt M in het YZ-vlak, dan is $p = 0$ en de Y-as symmetrieas van de kromme.

d. Brengen we in het algemeene geval de coördinaatassen evenwijdig aan zichzelf naar M over, dan wordt de vergelijking

$$\begin{aligned} & b^4(a^2 - c^2)y^4 + 2qb^4(a^2 - c^2)y^3 + \{b^2c^2(2a^2 - b^2 - c^2)x^2 + \\ & + 2pb^2c^2(a^2 - b^2)x - p^2b^4c^2 + q^2a^2b^4 - q^2b^4c^2 + b^4c^4\}y^2 + \\ & + \{2qb^2c^2(a^2 - c^2)x^2 + 2pqa^2b^2c^2x + 2qb^4c^4\}y + c^4(a^2 - b^2)x^4 + \\ & + 2pc^4(a^2 - b^2)x^3 + \{p^2a^2c^4 - p^2b^2c^4 - q^2b^2c^4 + b^4c^4\}x^2 + \\ & 2pb^4c^4x + (p^2 + q^2)b^4c^4 = 0. \end{aligned}$$

Laten we nu p en q oneindig groot worden, zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ is, dan krijgen we na deeling door p^2 de vergelijking

$$\{a^2b^4\lambda^2 - b^4c^2(1 + \lambda^2)\}y^2 + 2a^2b^2c^2\lambda xy + \{a^2c^4 - b^2c^4(1 + \lambda^2)\}x^2 + b^4c^4(1 + \lambda^2) = 0.$$

Dus als we de ellipsoïde snijden door eene reeks van evenwijdige vlakken, wordt de XY-doorsnede van den cylinder van richtlijnen eene kegelsnede. Dit blijkt te zijn eene hyperbool, die haar middelpunt in M heeft en de hoofddoorsnede raakt in de raakpunten van de raaklijnen met de richtingscoëfficiënt λ .

Wat in het voorgaande geval is opgemerkt omtrent de splitsing en omtrent de middelkromme, is ook op deze kromme lijn van toepassing.

18. In de derde plaats zullen we onderstellen, dat *de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de middelbare as der ellipsoïde*: we kiezen weer de as van den vlakkenbundel als Z-as, de X-as evenwijdig aan de groote as der ellipsoïde, en de Y-as evenwijdig aan de kleine as. We vinden de vergelijkingen van de meetkundige plaats der brandpunten en van de XY-doorsnede van den cylinder van richtlijnen door in de vergelijkingen, die we voor het eerste geval afleidden, b en c te verwisselen. *De vergelijking van de meetkundige plaats der brandpunten in poolcoördinaten wordt*

$$q = \frac{pc^2 \cos \alpha + qa^2 \sin \alpha}{c^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{\sqrt{\{c^2(a^2 - b^2) \cos^2 \alpha - a^2(b^2 - c^2) \sin^2 \alpha\} \{c^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - (q \cos \alpha - p \sin \alpha)^2\}}}{c^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}$$

en die op rechthoekige assen

$$\begin{aligned} & a^2y^4 - 2qa^2y^3 + \{a^2 + c^2\}x^2 - 2pc^2x + b^2(a^2 - p^2) + q^2a^2 + \\ & + p^2c^2 - a^2c^2\{y^2 - \{2qa^2x^2 - 2pqb^2x\}y + c^2x^4 - 2pc^2x^3 + \\ & + \{b^2(c^2 - q^2) + q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2\}x^2 = 0. \end{aligned}$$

19. We kunnen, zonder gebruik te maken van deze vergelijkingen, een en ander opmerken omtrent het al of niet bestaanbaar zijn der brandpunten, en in verband daarmee omtrent den vorm der kromme. Sommige der doorsneden hebben haar groote as in het symmetrievlak, andere haar kleine as: de overgang hiertussen wordt gevormd door de cirkeldorsneden. We verkrijgen dus hier in het algemeen bestaanbare brandpunten in het symmetrievlak zoowel binnen als buiten de hoofddorsnede, zoodat dit geval merkwaardiger vormen van kromme lijnen moet geven dan een der beide voorgaanden. De richtingscoëfficiënten der cirkeldorsneden zijn $\pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$; die vlakken uit den bundel, waarvan de richtingscoëfficiënt naar absolute waarde kleiner is dan die der cirkeldorsneden, geven ellipsen met haar groote as in het symmetrievlak, de andere geven doorsneden met haar kleine as in dat vlak.

Onderstellen we nu vooreerst, dat O buiten de hoofddorsnede ligt; dan kunnen zich drie gevallen voordoen.

In de eerste plaats kunnen alle bestaanbare doorsneden richtingscoëfficiënten hebben, die naar absolute waarde kleiner zijn dan die der cirkeldorsneden; dan geven ze allen bestaanbare brandpunten in het symmetrievlak. We vinden dan binnen de hoofddorsnede een ovaal, dat de hoofddorsnede raakt in de raakpunten der raaklijnen uit O. Buiten de hoofddorsnede verkrijgen we bestaanbare brandpunten in het symmetrievlak uit de vlakken van den bundel, waarvan de richtingscoëfficiënt naar absolute waarde grooter is dan die der cirkeldorsneden. Daar vinden we dus ook eene kromme, die zal raken aan de snijlijnen van het XY-vlak met de vlakken der cirkeldorsneden, en wel in de punten, waar deze worden gesneden door de meetkundige plaats der middelpunten.

In de tweede plaats kunnen alle bestaanbare doorsneden richtingscoëfficiënten hebben naar absolute waarde grooter dan die der cirkeldorsneden; we verkrijgen dan binnen de hoofddorsnede geen bestaanbare punten der meetkundige plaats. Buiten de hoofddorsnede vinden we bestaanbare punten tusschen de hoofddorsnede en de cirkeldorsneden. De meetkundige plaats zal ook hier weer raken aan de hoofddorsnede in de raakpunten van de raaklijnen uit O en aan de snijlijnen van het XY -vlak met de vlakken der cirkeldorsneden in de punten, waar deze gesneden worden door de meetkundige plaats der middelpunten.

Eindelijk kan het gebeuren, dat onder de bestaanbare doorsneden één cirkel voorkomt. Door dat vlak wordt de hoofddorsnede in twee deelen verdeeld; in een daarvan ligt een deel van de meetkundige plaats, dat raakt aan de hoofddorsnede en aan de snijlijn van het vlak van die cirkeldorsnede met het XY -vlak. Buiten de hoofddorsnede ligt een deel van de meetkundige plaats, dat de hoofddorsnede en de XY -doorgang van het vlak van de andere cirkeldorsnede aanraakt (Fig. VII).

Komen onder de bestaanbare doorsneden twee cirkels voor, dan wordt door de vlakken daarvan de hoofddorsnede in drie deelen verdeeld. Het laat zich gemakkelijk inzien, in welke van die deelen bestaanbare brandpunten liggen, en of er ook bestaanbare brandpunten buiten de hoofddorsnede voorkomen.

Als O op de hoofddorsnede ligt, zijn er in het algemeen onder de bestaanbare doorsneden twee cirkels. De meetkundige plaats der brandpunten raakt dan de XY -doorgangen van de vlakken der beide cirkeldorsneden en in O de hoofddorsnede aan.

Ligt O binnen de hoofddorsnede, dan raakt de meetkundige plaats de doorgangen van de vlakken der beide cirkeldorsneden, maar niet meer de hoofddorsnede aan (Fig. VIII).

In de laatste twee gevallen snijden alle vlakken van den bundel de ellipsoïde volgens bestaanbare ellipsen en verkrijgen we dus alleen bestaanbare punten binnen de hoofddorsnede.

Als O buiten de hoofddorsnede ligt, laat zich gemakkelijk bepalen aan welke betrekkingen p en q moeten voldoen, opdat er onder de bestaanbare doorsneden geen cirkels voorkomen, door de voorwaarde te stellen, dat lijnen uit O evenwijdig aan de cirkeldorsneden getrokken, de hoofddorsnede snijden in onbestaanbare punten. De richtingscoëfficiënten der cirkeldorsneden zijn

$\pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$; noemen we deze voorloopig $\pm \gamma$, dan vinden

we de abscissen der genoemde snijpunten uit de vergelijking

$$c^2(x - p)^2 + a^2(\pm \gamma x - q)^2 = a^2c^2,$$

of na rangschikking naar x

$$(c^2 + \gamma^2 a^2)x^2 - 2(c^2 p \pm a^2 q \gamma)x + c^2 p^2 + a^2 q^2 - a^2 c^2 = 0.$$

Voor $+\gamma$ worden de wortels dezer vergelijking onbestaanbaar onder de voorwaarde

$$a^2 c^2 (a^2 - c^2) - \{a q \sqrt{b^2 - c^2} - c p \sqrt{a^2 - b^2}\}^2 < 0,$$

voor $-\gamma$ onder de voorwaarde

$$a^2 c^2 (a^2 - c^2) - \{a q \sqrt{b^2 - c^2} + c p \sqrt{a^2 - b^2}\}^2 < 0.$$

Als dus p en q aan deze beide voorwaarden voldoen, krijgen we geen bestaanbare cirkeldoorssneden; voldoen ze aan de eene wel, aan de andere niet, dan krijgen we ééne bestaanbare cirkeldoorssnede; voldoen ze aan geen van beide, dan zijn de beide cirkeldoorssneden bestaanbaar.

De beide boven gevonden voorwaarden laten zich schrijven

$$\begin{aligned} & \{a q \sqrt{b^2 - c^2} - c p \sqrt{a^2 - b^2} + a c \sqrt{a^2 - c^2}\} \{a q \sqrt{b^2 - c^2} - \\ & - c p \sqrt{a^2 - b^2} - a c \sqrt{a^2 - c^2}\} > 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} & \{a q \sqrt{b^2 - c^2} + c p \sqrt{a^2 - b^2} + a c \sqrt{a^2 - c^2}\} \{a q \sqrt{b^2 - c^2} + \\ & + c p \sqrt{a^2 - b^2} - a c \sqrt{a^2 - c^2}\} > 0. \end{aligned}$$

Beschouwen we in deze beide gelijk nul gestelde vormen p en q als veranderlijke coördinaten, dan stellen ze lijnenparen voor. De gevonden voorwaarden zeggen dus, dat O buiten deze lijnenparen moet liggen, om geen bestaanbare cirkeldoorssneden te krijgen. Blijkbaar zijn dit lijnenparen, evenwijdig aan de vlakken der cirkeldoorssneden en de hoofddoorssnede aanrakende.

20. Keeren we om den aard van de kromme na te gaan tot onze vergelijkingen terug, dan blijkt daaruit weer, dat de kromme alleen in O een dubbelpunt heeft. De richtingscoëfficiënten der dubbelpuntsraakklijnen worden gevonden uit de vergelijking

$$\begin{aligned} & \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2pq b^2}{b^2(a^2 - p^2) + q^2 a^2 + p^2 c^2 - a^2 c^2} \frac{y}{x} + \\ & + \frac{b^2(c^2 - q^2) + q^2 a^2 + p^2 c^2 - a^2 c^2}{b^2(a^2 - p^2) + q^2 a^2 + p^2 c^2 - a^2 c^2} = 0. \end{aligned}$$

Ze zijn bestaanbaar onder de voorwaarde

$$(q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2)\{b^4 - (a^2 + c^2 - p^2 - q^2)b^2 - (q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2)\} > 0.$$

Als O buiten de hoofddoorsnede ligt, is de eerste factor positief; opdat de dubbelpuntsraaklijnen bestaanbaar zijn, moeten p en q dus voldoen aan de voorwaarde

$$q^2(a^2 - b^2) - p^2(b^2 - c^2) + (a^2 - b^2)(b^2 - c^2) < 0,$$

of

$$\frac{p^2}{a^2 - b^2} - \frac{q^2}{b^2 - c^2} < 1,$$

d.w. z. het punt M moet liggen binnen eene hyperbool, met de halve assen $\sqrt{a^2 - b^2}$ en $\sqrt{b^2 - c^2}$ en O tot middelpunt. Ligt M op de genoemde hyperbool, dan is O keerpunt; ligt M er buiten, dan is O afgezonderd punt.

Deze hyperbool is hier de focaalkegelsnede, dus de meetkundige plaats der puntbollen, die de ellipsoïde dubbel aanraken.

Ligt O op de hoofddoorsnede, dan vallen de dubbelpuntsraaklijnen samen, en haar richtingscoëfficiënt is

$$-\frac{pq}{a^2 - p^2}.$$

In dit geval voldoen p en q aan de voorwaarde

$$q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2 = 0.$$

Met behulp hiervan laat zich de genoemde richtingscoëfficiënt herleiden tot

$$-\frac{pc^2}{qa^2}.$$

Dit is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in O aan de hoofddoorsnede, dus beide takken van de meetkundige plaats raken in O die ellips aan.

Als O binnen de hoofddoorsnede ligt, krijgen we bestaanbare dubbelpuntsraaklijnen onder de voorwaarde

$$\frac{p^2}{a^2 - b^2} - \frac{q^2}{b^2 - c^2} > 1;$$

dus O moet liggen buiten eene hyperbool met M tot middelpunt en $\sqrt{a^2 - b^2}$ en $\sqrt{b^2 - c^2}$ tot halve assen, dus buiten de focaalkegel-

snede. Licht O op deze kromme, dan is het keerpunt; licht O er binnen, dan is het afgezonderd punt.

21. Van de vroeger beschouwde bijzondere gevallen vervalt hier het eerste, waar we onderstelden, dat de gegeven ellipsoïde eene omwentelingsellipsoïde was. De volgende twee geven weer eenvoudig, dat, als O op een der assen van de hoofddoorsnede ligt, die as symmetrieas wordt van de meetkundige plaats.

Van meer belang is het laatste geval, waarin de as van den vlakkenbundel oneindig ver ligt, m. a. w. waar de drieassige ellipsoïde wordt gesneden door eene reeks van evenwijdige vlakken.

Verplaatsen we ons coördinatenstelsel evenwijdig aan zichzelf naar het middelpunt der ellipsoïde, dan wordt de vergelijking van de meetkundige plaats:

$$\begin{aligned} & a^2y^4 + 2qa^2y^3 + \{a^2 + c^2\}x^2 + 2pa^2x + p^2a^2 - p^2b^2 + a^2b^2 + \\ & + q^2a^2 - a^2c^2\{y^2 + \{2qc^2x^2 + 2pqb^2x - 2qa^2c^2 + 2qb^2c^2\}y + c^2x^4 + \\ & + 2pc^2x^3 + \{q^2c^2 + b^2c^2 - q^2b^2 + p^2c^2 - a^2c^2\}x^2 + \{2pb^2c^2 - \\ & - 2pa^2c^2\}x + q^2a^2b^2 - q^2a^2c^2 + p^2b^2c^2 - p^2a^2c^2 = 0. \end{aligned}$$

Laten we nu p en q oneindig groot worden, zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ is, dan krijgen we na deeling door p^2

$$\begin{aligned} & \{a^2(1 + \lambda^2) - b^2\}y^2 + 2b^2\lambda xy + \{c^2(1 + \lambda^2) - b^2\lambda^2\}x^2 + a^2b^2\lambda^2 - \\ & - a^2c^2\lambda^2 + b^2c^2 - a^2c^2 = 0. \end{aligned}$$

De meetkundige plaats wordt dus ook hier weer eene kegelsnede. Bij onderzoek blijkt, dat het eene ellips is onder de voorwaarde

$$\lambda^2 < \frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2(b^2 - c^2)},$$

dus wanneer λ naar absolute waarde kleiner is dan de richtingscoëfficiënten der cirkeldoorsneden. Het wordt eene parabool, als de snijdende vlakken evenwijdig zijn aan eene cirkeldoorsnede. De vergelijking der meetkundige plaats laat zich dan herleiden tot

$$(ay\sqrt{a^2 - b^2} \pm cx\sqrt{b^2 - c^2})^2 = 0$$

d. i. tweemaal de lijn, die de middelpunten der cirkeldoorsneden vereenigt. De parabool ontaardt dus in twee samengevallen rechte lijnen.

De meetkundige plaats der brandpunten wordt eindelijk eene

hyperbool, als de richtingscoëfficiënt van de snijvende vlakken grooter is dan die der cirkeldoorsneden.

Wat vroeger gezegd is van splitsing en middelkromme is ook hier toe te passen.

22. De vergelijking van de rechte doorsnede van den cylinder der richtlijnen in poolcoördinaten is

$$\rho = \frac{pc^2 \cos \alpha + qa^2 \sin \alpha}{c^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{a^2 c^2}{c^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{\frac{c^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - (q \cos \alpha - p \sin \alpha)^2}{a^2 c^2 - b^2 (c^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha)}}$$

en die op rechthoekige assen

$$\begin{aligned} & a^4(b^2 - c^2)y^4 - 2qa^4(b^2 - c^2)y^3 + \{a^2c^2(2b^2 - a^2 - c^2)x^2 - \\ & - 2pa^2c^2(b^2 - c^2)x + q^2a^4b^2 - a^2c^2(q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2)\}y^2 + \\ & + \{2qa^2c^2(a^2 - b^2)x^2 + 2pqa^2b^2c^2x\}y - c^4(a^2 - b^2)x^4 + \\ & + 2pc^4(a^2 - b^2)x^3 + \{p^2b^2c^4 - a^2c^2(q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2)\}x^2 = 0. \end{aligned}$$

Deze kromme heeft dus ook een dubbelpunt in O, en daar alleen; ze raakt, evenals de meetkundige plaats der brandpunten, de hoofddoorsnede in de raakpunten der raaklijnen uit O. De richtingscoëfficiënten der dubbelpuntsraaklijnen worden gevonden uit

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2pqa^2b^2c^2}{q^2a^4b^2 - a^2c^2(q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2)} \frac{y}{x} + \\ + \frac{p^2b^2c^4 - a^2c^2(q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2)}{q^2a^4b^2 - a^2c^2(q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2)} = 0. \end{aligned}$$

De dubbelpuntsraaklijnen zijn dus bestaanbaar, als p en q voldoen aan de voorwaarde

$$(q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2)\{q^2a^4b^2 + p^2b^2c^4 - a^2c^2(q^2a^2 + p^2c^2 - a^2c^2)\} > 0.$$

Als O buiten de hoofddoorsnede ligt, is de eerste factor positief; dus de voorwaarde wordt

$$q^2a^4(b^2 - c^2) - p^2c^4(a^2 - b^2) + a^4c^4 > 0,$$

of

$$\frac{p^2}{a^4} - \frac{q^2}{c^4} < 1.$$

Dus, opdat de dubbelpuntsraaklijnen bestaanbaar zijn, moet M liggen buiten eene hyperbool met O als middelpunt en $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ en $\frac{c^2}{\sqrt{b^2 - c^2}}$ als halve assen. Ligt M binnen deze hyperbool, dan is O afgezonderd punt; ligt M er op, dan is O keerpunt.

De richtingscoëfficiënt der keerraaklijn wordt

$$\frac{a^2 q}{c^2 p} :$$

de keerraaklijn staat dus loodrecht op de raaklijn aan de hoofddoorsnede in het snijpunt der hoofddoorsnede met de lijn OM.

Als O op de hoofddoorsnede ligt, vallen de dubbelpuntsraaklijnen samen en haar richtingscoëfficiënt wordt

$$-\frac{c^2 p}{a^2 q} ;$$

dus de beide takken van de kromme raken in O de hoofddoorsnede aan.

Ligt O binnen de hoofddoorsnede, dan is de eerste factor van bovengenoemden vorm negatief, de tweede positief. De dubbelpuntsraaklijnen zijn dan onbestaanbaar, O is afgezonderd punt.

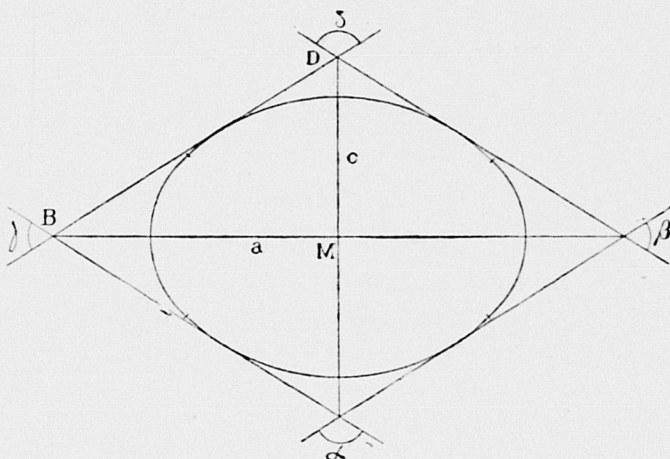
23. Omtrent de vormen, die de kromme aanneemt, kunnen we het volgende opmerken. De cirkeldoorsneden hebben eene excentriciteit nul, daarvoor liggen dus de richtlijnen oneindig ver. Deze cirkeldoorsneden vormen de grens tusschen de bestaanbare en de onbestaanbare richtlijnen, dus de cylinder der richtlijnen zal in het oneindige de vlakken der cirkeldoorsneden aanraken, m. a. w. de XY-doorgangen van de vlakken der cirkeldoorsneden zijn asymptoten van de hier beschouwde kromme. Van alle krommen, die we hebben leeren kennen, is deze (Fig. IX en X) de eenige, die oneindige takken heeft.

De rechte doorsnede van den cylinder der richtlijnen raakt dus de hoofddoorsnede in de raakpunten der raaklijnen uit O en heeft de bovengenoemde lijnen tot asymptoten; O is dubbelpunt met bestaanbare of onbestaanbare raaklijnen of keerpunt.

Als O in M ligt, verkrijgen we eene kromme, die symmetrisch is ten opzichte der assen. Ze heeft ongeveer den vorm van eene hyperbool, maar bij de toppen kunnen een of twee dubbelraaklijnen evenwijdig aan de Y-as voorkomen.

24. Omtrent de al of niet bestaanbaarheid der dubbelpuntsraaklijnen in O laat zich nog het volgende opmerken. Bij de bespreking van de meetkundige plaats der brandpunten vonden we, dat O, opdat er geen bestaanbare cirkeldoorsneden zijn, moet liggen buiten de raaklijnenparen, evenwijdig aan de cirkeldoorsneden aan de hoofddoorsnede getrokken. Analytisch werd dit uitgedrukt door twee ongelijkheden. Aan deze ongelijkheden kan op vier manieren worden voldaan nl.: 1^e. de beide factoren van beide ongelijkheden zijn positief, 2^e. die van de eerste ongelijkheid zijn positief, die van de tweede negatief, 3^e. die van de eerste zijn negatief, van de tweede positief, 4^e. alle factoren zijn negatief.

Fig. 2.



Dit komt overeen met de ligging van het punt O in een der hoeken α , β , γ of δ , als in fig. 2 de raaklijnen aan de hoofddoorsnede de bovengenoemde raaklijnen zijn. Hierin is

$$BM = a \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

Opdat O afgezonderd punt zij, moet het liggen binnen eene hyperbool met de halve assen $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ en $\frac{c^2}{\sqrt{b^2 - c^2}}$ om M beschreven.

De as, die langs BM valt, is grooter dan BM, dus liggen de toppen van de hyperbool binnen de hoeken β en γ . Bij onderzoek blijkt verder, dat BD genoemde hyperbool aanraakt en de geheele hyperbool dus binnen de genoemde hoeken ligt. Derhalve kan O binnen die hoeken dubbelpunt met bestaanbare raaklijnen, keer-

punt of afgezonderd punt zijn; daar buiten is het altijd dubbelpunt met bestaانبare raaklijnen.

25. Wanneer het punt O op een der assen van de hoofddoorsnede ligt, wordt deze symmetrieas van de kromme.

Verplaatsen we het coördinatenstelsel evenwijdig aan zichzelf naar het middelpunt der ellipsoïde, dan wordt de vergelijking van de rechte doorsnede van den cylinder van richtlijnen:

$$\begin{aligned} & a^4(b^2 - c^2)y^4 + 2qa^4(b^2 - c^2)y^3 + \{a^2c^2(2b^2 - a^2 - c^2)x^2 - \\ & - 2pa^2c^2(a^2 - b^2)x - p^2a^4c^2 + q^2a^4b^2 - q^2a^4c^2 + a^4c^4\}y^2 + \\ & + \{2qa^2c^2(b^2 - c^2)x^2 + 2pqa^2b^2c^2x + 2qa^4c^4\}y - c^4(a^2 - b^2)x^4 - \\ & - 2pc^4(a^2 - b^2)x^3 + \{p^2b^2c^4 - q^2a^2c^4 - p^2a^2c^4 + a^4c^4\}x^2 + \\ & + 2pa^4c^4x + a^4c^4(p^2 + q^2) = 0. \end{aligned}$$

Laten we nu p en q oneindig groot worden, zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ is, dan gaat de vergelijking over in

$$\{a^4b^2\lambda^2 - a^4c^2(1 + \lambda^2)\}y^2 + 2a^2b^2c^2\lambda xy + \{b^2c^4 - a^2c^4(1 + \lambda^2)\}x^2 + a^4c^4(1 + \lambda^2) = 0.$$

De kromme is eene kegelsnede; dus ook hier treedt splitsing op evenals in de voorgaande gevallen. Het blijkt eene ellips te zijn, als $\lambda^2 < \frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2(b^2 - c^2)}$ is, dus als de vlakken een richtingscoëfficiënt hebben, die naar de absolute waarde kleiner is dan die der cirkeldoorsneden. Hebben de vlakken een richtingscoëfficiënt, naar absolute waarde grooter dan die der cirkeldoorsneden, dan is de kromme eene hyperbool. Is hun richtingscoëfficiënt gelijk aan die der cirkeldoorsneden, dan is het eene parabool, die ontaardt in de beide raaklijnen aan de hoofddoorsnede, evenwijdig aan de cirkeldoorsneden.

Ook hier is de ellips der middelpunten middelkromme.

26. Bij de behandeling van de meetkundige plaats der brandpunten vonden we, dat het deel van het symmetrievlak, waar O dubbelpunt met bestaانبare raaklijnen is, wordt afgescheiden van het gedeelte, waar O afgezonderd punt is, door eene hyperbool met de halve assen $\sqrt{a^2 - b^2}$ en $\sqrt{b^2 - c^2}$. Bij den cylinder van richtlijnen wordt deze afscheiding gegeven door eene hyperbool, waarvan de halve assen zijn $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ en $\frac{c^2}{\sqrt{b^2 - c^2}}$. Deze beide

hyperbolen zijn wederkeerige poolkrommen met betrekking tot de hoofddoorsnede, zooals blijkt uit eene dergelijke berekening als we op blz. 17 en 18 maakten.

Hieruit volgt tevens, dat de asymptoten dezer hyperbolen toegevoegde middellijnen van de hoofddoorsnede zijn.

27. Ten slotte zullen we nagaan, welke de *Plücker'sche getallen* zijn van de boven besproken kromme lijnen.

Bij de krommen van den vierden graad kan het aantal dubbelpunten, wanneer de kromme niet ontaard is, hoogstens drie zijn en bij de in twee kegelsneden ontaarde kromme vier. Laten we deze laatste buiten beschouwing en stellen we den graad voor door n , het aantal dubbelpunten door d , de klasse door m , het aantal keerpunten door k , het aantal dubbelraaklijnen door t , het aantal buigpunten door b , en het geslacht door g , dan kunnen zich de volgende gevallen voordoen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
n	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
d	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
m	6	8	5	10	7	4	12	9	6	3
k	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
t	4	8	2	16	4	1	28	10	1	1
b	6	12	4	18	10	2	24	16	8	0
g	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0

De krommen, die wij beschouwden, hebben alle in den oorsprong een dubbelpunt en alleen daar; dit dubbelpunt kan echter soms keerpunt worden, en soms komt het voor, dat de beide takken van de kromme elkaar in O aanraken.

Het laatste kunnen we ons ontstaan denken door het samenvallen van twee dubbelpunten, dus daarvoor is het dubbelpunt tweemaal te tellen.

Als O dubbelpunt met bestaانبare raaklijnen of afgezonderd punt is, behoort de kromme dus tot groep IV; als O keerpunt is, behoort ze tot groep VIII en als de beide takken elkaar aanraken tot groep II.

HOOFDSTUK II

28. De buiten het symmetrievlak gelegen brandpunten vormen eene ruimtekromme; de richtlijnen, die bij deze brandpunten behooren, zijn alle evenwijdig aan het symmetrievlak en vormen dus een regelvlak, dat het symmetrievlak tot richt- en symmetrievlak heeft.

We zullen weer achtereenvolgens de as van den vlakkenbundel evenwijdig onderstellen aan de kleinste, de grootste en de middelbare as der ellipsoïde, en onze coördinaatassen evenzoo aannemen als bij de behandeling der overeenkomstige gevallen in het eerste hoofdstuk.

Als de *as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de kleinste as der ellipsoïde*, zijn de brandpunten buiten het symmetrievlak bestaanbaar voor die vlakken uit den bundel, die de ellipsoïde snijden volgens onbestaanbare ellipsen: we zullen dus alleen eene bestaanbare kromme verkrijgen, als O buiten de ellipsoïde ligt.

We vonden vroeger (blz. 6) voor de as in het symmetrievlak

$$\frac{abV(1 + \lambda^2)\{b^2 + \lambda^2a^2 - (q - \lambda p)^2\}}{b^2 + \lambda^2a^2}$$

en voor de as loodrecht daarop

$$c \sqrt{\frac{b^2 + \lambda^2a^2 - (q - \lambda p)^2}{b^2 + \lambda^2a^2}}.$$

Hieruit vinden we voor de excentriciteit der hier behandelde brandpunten

$$\frac{V\{b^2 + \lambda^2a^2 - (q - \lambda p)^2\}\{b^2c^2 + a^2c^2\lambda^2 - a^2b^2 - a^2b^2\lambda^2\}}{b^2 + \lambda^2a^2}.$$

De x en y zijn voor deze brandpunten dezelfde als die van het middelpunt, de z is de genoemde excentriciteit; dus de coördinaten zijn

$$x = \frac{pb^2 + \lambda qa^2}{b^2 + \lambda^2a^2}, \quad y = \lambda \frac{pb^2 + \lambda qa^2}{b^2 + \lambda^2a^2},$$

$$z = \pm \frac{V\{b^2 + \lambda^2a^2 - (q - \lambda p)^2\}\{b^2(c^2 - a^2) + a^2\lambda^2(c^2 - b^2)\}}{b^2 + \lambda^2a^2}.$$

Ook uit den gevonden vorm voor z blijkt, dat deze brandpunten alleen bestaanbaar zijn in de vlakken, die de ellipsoïde niet snijden.

Want opdat z bestaanbaar zij, moet voldaan worden aan de betrekking

$$(a^2 - p^2)\lambda^2 + 2pq\lambda + (b^2 - q^2) < 0$$

en dit is het geval voor de vlakken, die de ellipsoïde niet snijden.

Voor de vlakken uit den bundel, die de ellipsoïde raken, is de genoemde vorm nul; daarin vallen dus de brandpunten op de hoofddoorsnede samen. De meetkundige plaats van deze brandpunten gaat dus ook door de raakpunten van de raaklijnen, uit O aan de hoofddoorsnede getrokken.

29. De brandpunten op de Z -as vinden we voor die waarde van λ , waarvoor x en y nul worden, dus voor

$$\lambda = -\frac{pb^2}{qa^2}.$$

Daarvoor is

$$z = \pm \frac{\sqrt{(a^2q^2 + b^2p^2 - a^2b^2)\{a^2q^2(a^2 - c^2) + b^2p^2(b^2 - c^2)\}}}{ab\sqrt{a^2q^2 + b^2p^2}}.$$

Als O buiten de hoofddoorsnede ligt, en dit is noodig om eene bestaanbare kromme te verkrijgen, zijn beide factoren van den teller positief en z is dus verschillend van nul.

Deze kromme gaat dus niet door den oorsprong van ons coördinatenstelsel.

Op de Z -as liggen dus twee punten van de meetkundige plaats. Een willekeurig vlak door de Z -as, waarvan de richtingscoëfficiënt verschilt van $-\frac{pb^2}{qa^2}$, bevat bovendien nog twee brandpunten; dus elk vlak door de Z -as bevat vier punten van de meetkundige plaats. Dat ditzelfde met elk willekeurig plat vlak het geval is, laat zich gemakkelijk aantonen. Als de vergelijking van het vlak

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

is en we substitueeren hierin de bovengenoemde waarden van x , y en z , dan verkrijgen we eene vierdemachtsvergelijking in λ . Elke waarde van λ geeft ons een snijpunt; dus de kromme heeft met het platte vlak vier snijpunten. De ruimtekromme der brandpunten is dus van den vierden graad.

30. Elimineeren we nu λ uit de waarden van x en y , dan vinden we

$$b^2x^2 + a^2y^2 - pb^2x - qa^2y = 0$$

als de vergelijking van een oppervlak, waarop de meetkundige plaats ligt. Dit is een elliptische cylinder, die de meetkundige plaats der middelpunten tot XY-doorsnede heeft en waarvan de beschrijvende lijnen loodrecht op het XY-vlak staan. Een tweede oppervlak verkrijgen we door λ te elimineeren uit

$$z = \pm \frac{\sqrt{\{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2\} \{b^2(c^2 - a^2) + a^2 \lambda^2(c^2 - b^2)\}}}{b^2 + \lambda^2 a^2}$$

en

$$\lambda = \frac{y}{x}.$$

Dit geeft na eenige herleiding

$$\begin{aligned} & (pb^2x + qa^2y)^2 z^2 = \\ & = \{b^2x^2 + a^2y^2 - (qx - py)^2\} \{b^2(c^2 - a^2)x^2 + a^2(c^2 - b^2)y^2\}. \end{aligned}$$

Dit is de vergelijking van een regelvlak, dat de Z-as tot richtlijn en het XY-vlak tot richt- en symmetrievlak heeft, zooals het duidelijkst blijkt uit de beide vergelijkingen, waaruit die van het oppervlak is afgeleid. Het oppervlak is van den vierden graad.

31. We willen nog een paar andere oppervlakken afleiden, waarop de meetkundige plaats van deze brandpunten ligt, en wel in de eerste plaats een bol. De oneindig ver gelegen punten van de meetkundige plaats vinden we voor

$$\lambda = \pm i \frac{b}{a};$$

want in den boven voor z gevonden vorm komt $b^2 + \lambda^2 a^2$ in den noemer voor.

Verder is

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{(1 + \lambda^2)(pb^2 + \lambda qa^2)^2}{\{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2\} \{b^2(c^2 - a^2) + a^2 \lambda^2(c^2 - b^2)\}}.$$

Het tweede lid van deze vergelijking wordt -1 voor $\lambda = \pm i \frac{b}{a}$; dus de oneindig ver gelegen punten van de meetkundige plaats voldoen aan

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} + 1 = 0,$$

of

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

en liggen dus op den onbestaanbaren cirkel in het vlak in het oneindige. De meetkundige plaats blijkt dus eene kromme van den vierden graad te zijn en wel de doorsnede van twee oppervlakken van den tweeden graad. Als een van deze beide oppervlakken kunnen we dus een bol nemen.

De coördinaten van het middelpunt van dezen bol en den straal vinden we het gemakkelijkst door een bol te brengen door de beide op de Z-as gelegen punten van de meetkundige plaats en de punten, die deze met de hoofddoorsnede gemeen heeft. We vinden dan voor de coördinaten van het middelpunt

$$x = p \frac{(q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2)(a^2 - b^2) + c^2(q^2 a^2 + p^2 b^2)}{2a^2(q^2 a^2 + p^2 b^2)},$$

$$y = q \frac{(q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2)(b^2 - a^2) + c^2(q^2 a^2 + p^2 b^2)}{2b^2(q^2 a^2 + p^2 b^2)},$$

$$z = 0$$

en voor den straal

$$R = \frac{\sqrt{(q^2 a^4 + p^2 b^4) \{ (q^2 a^2 + p^2 b^2)^2 (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 2a^2 b^2 (q^2 a^2 + p^2 b^2) (a^4 + b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2) + a^4 b^4 (a^2 - b^2)^2 \}}}{2a^2 b^2 (q^2 a^2 + p^2 b^2)}.$$

32. In de tweede plaats kunnen we ook een kegel van den tweeden graad vinden, waarop de meetkundige plaats dezer brandpunten ligt, en die zijn top in het symmetrievlak heeft. De meetkundige plaats is nl. de doorsnede van een elliptischen cylinder en een bol, waarvan de vergelijkingen zijn

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - pb^2 x - qa^2 y = 0$$

en

$$\begin{aligned} & a^2 b^2 (q^2 a^2 + p^2 b^2) (x^2 + y^2 + z^2) - pb^2 \{ (q^2 a^2 + p^2 b^2) (a^2 - b^2 + c^2) - \\ & - a^2 b^2 (a^2 - b^2) \} x + qa^2 \{ (q^2 a^2 + p^2 b^2) (a^2 - b^2 - c^2) - a^2 b^2 (a^2 - b^2) \} y - \\ & - (q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2) (q^2 a^4 - q^2 a^2 c^2 + p^2 b^4 - p^2 b^2 c^2) = 0. \end{aligned}$$

Elk oppervlak, gaande door de meetkundige plaats, laat zich dus voorstellen door de vergelijking

$$\begin{aligned}
& a^2b^2(q^2a^2 + p^2b^2)z^2 + \{a^2b^2(q^2a^2 + p^2b^2) + Ab^2\}x^2 + \{a^2b^2(q^2a^2 + p^2b^2) + \\
& + Aa^2\}y^2 - pb^2\{A + (q^2a^2 + p^2b^2)(a^2 - b^2 + c^2) - a^2b^2(a^2 - b^2)\}x + \\
& + qa^2\{ - A + (q^2a^2 + p^2b^2)(a^2 - b^2 - c^2) - a^2b^2(a^2 - b^2)\}y - \\
& - (q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2)(q^2a^4 - q^2a^2c^2 + p^2b^4 - p^2b^2c^2) = 0,
\end{aligned}$$

waarin A een nader te bepalen coëfficiënt voorstelt.

Opdat dit een kegel zij met zijn top in een punt $(P, Q, 0)$, moeten de bekende term en de termen van den eersten graad verdwijnen uit de vergelijking, wanneer we den oorsprong van het coördinatenstelsel naar dat punt overbrengen. Dit geeft de voorwaardevergelijkingen

$$2P\{a^2b^2(q^2a^2 + p^2b^2) + Ab^2\} - pb^2\{A + (q^2a^2 + p^2b^2)(a^2 - b^2 + c^2) - a^2b^2(a^2 - b^2)\} = 0 \dots (1),$$

$$2Q\{a^2b^2(q^2a^2 + p^2b^2) + Aa^2\} + qa^2\{-A + (q^2a^2 + p^2b^2)(a^2 - b^2 - c^2) - a^2b^2(a^2 - b^2)\} = 0 \dots (2),$$

$$\begin{aligned}
& P^2\{a^2b^2(q^2a^2 + p^2b^2) + Ab^2\} + Q^2\{a^2b^2(q^2a^2 + p^2b^2) + Aa^2\} - \\
& - pb^2P\{A + (q^2a^2 + p^2b^2)(a^2 - b^2 + c^2) - a^2b^2(a^2 - b^2)\} + \\
& + qa^2Q\{-A + (q^2a^2 + p^2b^2)(a^2 - b^2 - c^2) - a^2b^2(a^2 - b^2)\} - \\
& - (q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2)(q^2a^4 - q^2a^2c^2 + p^2b^4 - p^2b^2c^2) = 0 \dots (3),
\end{aligned}$$

welke laatste zich met behulp van de beide andere vereenvoudigt tot

$$\begin{aligned}
& pb^2P\{A + (q^2a^2 + p^2b^2)(a^2 - b^2 + c^2) - a^2b^2(a^2 - b^2)\} + \\
& + qa^2Q\{-A + (q^2a^2 + p^2b^2)(a^2 - b^2 - c^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)\} + \\
& + 2(q^2a^2 + p^2b^2 - a^2b^2)(q^2a^4 - q^2a^2c^2 + p^2b^4 - p^2b^2c^2) = 0 \dots (4).
\end{aligned}$$

Lossen we nu P en Q uit de vergelijkingen (1) en (2) op en substitueeren we de gevonden waarden in (4), dan verkrijgen we eene derdemachtsvergelijking in A , die echter groote coëfficiënten heeft en dus zeer bewerkelijk is. We verkrijgen echter eene oplossing, indien we onderstellen, dat $(P, Q, 0)$ ligt op de raakkoorde van O ten opzichte der hoofddoorsnede, dus dat P en Q voldoen aan de betrekking

$$pb^2P + qa^2Q = a^2q^2 + b^2p^2 - a^2b^2 \dots (5).$$

Elimineeren we nu P en Q uit (1), (4) en (5), dan vinden we eene vierkantsvergelijking in A , die tot wortels heeft

$$-(q^2a^4 + p^2b^4) \text{ en } -(q^2a^2 + p^2b^2)(a^2 + b^2 - c^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)\}.$$

Bij den laatsten wortel vinden we voor P en Q de waarden p en

$\frac{q^2 - b^2}{q}$, die niet aan (1), (2) en (4) voldoen: bij den eersten wortel vinden we

$$P = - \frac{q^2 a^2 (b^2 - c^2) + p^2 b^2 (2b^2 - a^2 - c^2) + a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{2pb^2(a^2 - b^2)},$$

$$Q = \frac{q^2 a^2 (2a^2 - b^2 - c^2) + p^2 b^2 (a^2 - c^2) - a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{2qa^2(a^2 - b^2)},$$

welk stel wel voldoet. Dit zijn dus de coördinaten van den top van den gezochten kegel. De vergelijking van den kegel op de oude assen wordt

$$\begin{aligned} & a^2 b^2 (q^2 a^2 + p^2 b^2) z^2 + (a^2 - b^2) p^2 b^4 x^2 - (a^2 - b^2) q^2 a^4 y^2 + \\ & + p b^2 \{ q^2 a^2 (b^2 - c^2) + p^2 b^2 (2b^2 - a^2 - c^2) + a^2 b^2 (a^2 - b^2) \} x + \\ & + q a^2 \{ q^2 a^2 (2a^2 - b^2 - c^2) + p^2 b^2 (a^2 - c^2) - a^2 b^2 (a^2 - b^2) \} y - \\ & - (q^2 a^2 + p^2 b^2 - a^2 b^2) (q^2 a^4 - q^2 a^2 c^2 + p^2 b^4 - p^2 b^2 c^2) = 0. \end{aligned}$$

Brengen we de coördinaatassen evenwijdig aan zichzelf over naar den top van den kegel, dus naar het punt $(P, Q, 0)$, dan gaat de vergelijking over in

$$a^2 b^2 (q^2 a^2 + p^2 b^2) z^2 + p^2 b^4 (a^2 - b^2) x^2 - q^2 a^4 (a^2 - b^2) y^2 = 0.$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat onze nieuwe coördinaatvlakken symmetrievlakken van den kegel zijn. De as van den kegel staat loodrecht op het XZ-vlak, want de doorsneden met vlakken evenwijdig aan het XZ-vlak zijn ellipsen, die met vlakken evenwijdig aan een der beide andere coördinaatvlakken hyperbolen.

33. Ten slotte zullen we nagaan, welken vorm de meetkundige plaats aanneemt, als de vlakkenbundel vervangen wordt door eene reeks van evenwijdige vlakken.

Verplaatsen we den oorsprong van coördinaten naar het middelpunt der ellipsoïde, dan wordt de vergelijking van den elliptischen cylinder, waarvan boven sprake was

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 + p b^2 x + q a^2 y = 0.$$

Laten we hierin p en q oneindig groot worden, zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ is, dan wordt deze vergelijking

$$b^2 x + a^2 \lambda y = 0,$$

d.i. de vergelijking van een plat vlak, loodrecht op het XY-vlak staande, en gaande door de middens van de koorden der hoofddoorsnede met richtingscoëfficiënt λ .

De vergelijking van het bovengenoemde regelvlak wordt, als we de coördinaatassen naar M verplaatsen,

$$\{pb^2(x+p) + qa^2(y+q)\}^2 z^2 = [b^2(x+p)^2 + a^2(y+q)^2 - \{q(x+p) - p(y+q)\}^2] \{b^2(c^2 - a^2)(x+p)^2 + a^2(c^2 - b^2)(y+q)^2\}.$$

Laten we ook hier p en q oneindig groot worden, zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ blijft, dan gaat deze vergelijking over in

$$(b^2 + a^2 \lambda^2)^2 z^2 = (b^2 + a^2 \lambda^2 - \lambda^2 x^2 - y^2 + 2\lambda xy) \{b^2(c^2 - a^2) + a^2 \lambda^2(c^2 - b^2)\}.$$

Dit is de vergelijking van een hyperbolischen cylinder, die zijne as heeft in het symmetrievlak: de vergelijking van deze as is

$$y = \lambda x.$$

De XY-doorsnede heeft tot vergelijking

$$y = \lambda x \pm \sqrt{b^2 + \lambda^2 a^2},$$

d. z. de beide raaklijnen met richtingscoëfficiënt λ aan de hoofddoorsnede getrokken. De meetkundige plaats der brandpunten wordt dus eene hyperbool, gelegen in het bovengenoemde platte vlak; de toppen van deze hyperbool zijn de raakpunten van raaklijnen met eene richtingcoëfficiënt λ aan de hoofddoorsnede.

34. *De bij deze brandpunten behorende richtlijnen* zijn alle evenwijdig aan het XY-vlak, en snijden de Z-as; ze vormen dus een regelvlak, dat de Z-as tot richtlijn en het XY-vlak tot richt- en symmetrievlak heeft. De afstand van eene richtlijn tot het XY-vlak is

$$\pm c^2 \sqrt{\frac{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2}{c^2(b^2 + \lambda^2 a^2) - a^2 b^2(1 + \lambda^2)}};$$

dus verkrijgen we de vergelijking van het regelvlak door λ te elimineeren uit

$$y = \lambda x$$

en

$$z = \pm c^2 \sqrt{\frac{b^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2}{c^2(b^2 + \lambda^2 a^2) - a^2 b^2(1 + \lambda^2)}}.$$

De laatste vergelijking geeft voor elke waarde van z twee waar-

den van λ ; dus door elk punt van de Z-as gaan twee beschrijvende lijnen en de Z-as is dubbellijn van het regelvlak.

De eliminatie van λ geeft als vergelijking van het regelvlak

$$\{c^2(b^2x^2 + a^2y^2) - a^2b^2(x^2 + y^2)\}z^2 = c^4\{b^2x^2 + a^2y^2 - (qx - py)^2\},$$

waaruit blijkt, dat het een oppervlak van den vierden graad is.

We verkrijgen bestaanbare richtlijnen in die vlakken, die de ellipsoïde snijden volgens onbestaanbare ellipsen; dus alleen als O buiten de hoofddoorsnede ligt, krijgen we een bestaanbaar oppervlak.

35. Verplaatsen we den oorsprong van ons coördinatenstelsel naar het middelpunt der ellipsoïde, dan gaat de vergelijking van het oppervlak over in

$$\begin{aligned} & \{b^2(c^2 - a^2)(x + p)^2 + a^2(c^2 - b^2)(y + q)^2\}z^2 = \\ & = c^4\{b^2(x + p)^2 + a^2(y + q)^2 - (qx - py)^2\}. \end{aligned}$$

Laten we hierin p en q oneindig groot worden, maar zoo dat

$\frac{q}{p} = \lambda$ blijft, dan wordt de vergelijking

$$\{b^2(a^2 - c^2) + a^2(b^2 - c^2)\lambda^2\}z^2 + c^4\{b^2 + a^2\lambda^2 - \lambda^2x^2 - y^2 + 2\lambda xy\} = 0$$

en deze stelt een hyperbolischen cylinder voor.

De as van dezen cylinder ligt in het XY-vlak en heeft tot vergelijking

$$y = \lambda x;$$

de XY-doorsnede bestaat uit de beide raaklijnen met eene richtingscoëfficiënt λ aan de hoofddoorsnede getrokken.

Als we derhalve de ellipsoïde snijden door eene reeks van evenwijdige vlakken, wordt het oppervlak der richtlijnen een hyperbolische cylinder, die de ellipsoïde aanraakt in de raakpunten der raakvlakken uit de reeks.

36. Als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de grootste as der ellipsoïde, vinden we bestaanbare brandpunten buiten het symmetrievlak in die vlakken van den bundel, die de ellipsoïde volgens bestaanbare ellipsen snijden. We verkrijgen dus hier altijd eene bestaanbare kromme.

De coördinaten van de brandpunten zijn

$$x = \frac{pc^2 + \lambda qb^2}{c^2 + \lambda^2 b^2}, \quad y = \lambda \frac{pc^2 + \lambda qb^2}{c^2 + \lambda^2 b^2},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{\{c^2 + \lambda^2 b^2 - (q - \lambda p)^2\} \{a^2(c^2 + \lambda^2 b^2) - b^2 c^2 (1 + \lambda^2)\}}{c^2 + \lambda^2 b^2}}.$$

Eliminatie van λ geeft twee oppervlakken, welker doorsnede de gezochte meetkundige plaats is. Een daarvan is de cylinder, waarvan de vergelijking is

$$c^2 x^2 + b^2 y^2 - pc^2 x - qb^2 y = 0.$$

Deze heeft tot XY-doorsnede de ellips der middelpunten en zijne beschrijvende lijnen staan loodrecht op het XY-vlak.

Een ander oppervlak is het regelvlak van den vierden graad, dat de Z-as tot richtlijn, het XY-vlak tot richt- en symmetrievlak heeft, en waarvan de vergelijking is

$$(pc^2 x + qb^2 y)^2 z^2 = \{c^2 x^2 + b^2 y^2 - (qx - py)^2\} \{a^2(c^2 x^2 + b^2 y^2) - b^2 c^2 (x^2 + y^2)\}.$$

De meetkundige plaats der brandpunten is weer eene ruimtekromme van den vierden graad, de doorsnee van twee oppervlakken van den tweeden graad.

Ook in dit geval zijn een bol en een kegel te vinden, waarop de meetkundige plaats ligt. De coördinaten van het middelpunt en de straal van den bol, evenals de coördinaten van den top van den kegel, vinden we door in de vroeger afgeleide formules a , b en c respectievelijk door b , c en a te vervangen. De kegel staat ook hier met zijn as loodrecht op het XY-vlak.

37. Verplaatsen we den oorsprong van het coördinatenstelsel naar het middelpunt der ellipsoïde, dan wordt de vergelijking van den bovengenoemden elliptischen cylinder

$$c^2 x^2 + b^2 y^2 + pc^2 x + qb^2 y = 0$$

en die van het regelvlak

$$\begin{aligned} & \{pc^2(x+p) + qb^2(y+q)\}^2 z^2 = \\ & = \{c^2(x+p)^2 + b^2(y+q)^2 - (qx-py)^2\} \{(a^2 - b^2)c^2(x+p)^2 + (a^2 - c^2)b^2(y+q)^2\}. \end{aligned}$$

Laten we p en q oneindig groot worden, zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ is, dan gaat de eerste over in

$$c^2 x + b^2 \lambda y = 0$$

d.i. de vergelijking van een plat vlak, dat loodrecht op het XY-vlak staat volgens de lijn, die de middens verbindt van koorden der hoofddoorsnede met een richtingscoëfficiënt λ .

De vergelijking van het regelvlak wordt

$$(c^2 + b^2\lambda^2)z^2 = \{c^2 + b^2\lambda^2 - (y - \lambda x)^2\}\{(a^2 - b^2)c^2 + (a^2 - c^2)b^2\lambda^2\}.$$

Dit regelvlak gaat dus over in een elliptischen cylinder, waarvan de in het symmetrievlak gelegen as tot vergelijking heeft

$$y = \lambda x$$

en de XY-doorsnede bestaat uit de beide raaklijnen aan de hoofd-doorsnede met eene richtingscoëfficiënt λ .

De meetkundige plaats der brandpunten is dus in dit geval eene ellips, gelegen in bovengenoemd vlak. Ze heeft met de hoofd-doorsnede de raakpunten der raakvlakken uit de reeks gemeen.

38. De afstand der *richtlijnen* tot het XY-vlak is in dit geval

$$\pm a^2 \sqrt{\frac{c^2 + \lambda^2 b^2 - (q - \lambda p)^2}{a^2(c^2 + \lambda^2 b^2) - b^2 c^2(1 + \lambda^2)}}.$$

Ze vormen weer een regelvlak van den vierden graad, dat de Z-as tot richt- en dubbellijn, het XY-vlak tot richt- en symmetrievlak heeft.

De vergelijking van dit oppervlak op onze assen is

$$\{c^2(a^2 - b^2)x^2 + b^2(a^2 - c^2)y^2\}z^2 = a^4\{c^2x^2 + b^2y^2 - (qx - py)^2\}.$$

Verplaatsen we den oorsprong naar het middelpunt der ellipsoïde, dan wordt de vergelijking op de nieuwe assen

$$\begin{aligned} &\{c^2(a^2 - b^2)(x + p)^2 + b^2(a^2 - c^2)(y + q)^2\}z^2 = \\ &= a^4\{c^2(x + p)^2 + b^2(y + q)^2 - (qx - py)^2\}. \end{aligned}$$

Laten we nu hierin p en q oneindig groot worden, zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ is, dan gaat de vergelijking over in

$$\{c^2(a^2 - b^2) + b^2(a^2 - c^2)\lambda^2\}z^2 = a^4\{c^2 + b^2\lambda^2 - (y - \lambda x)^2\}.$$

d.i. de vergelijking van een elliptischen cylinder, waarvan de as een richtingscoëfficiënt λ heeft en welks XY-doorsnede de hoofd-doorsnede der ellipsoïde aanraakt.

39. Als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de middelbare as der ellipsoïde, verkrijgen we bestaanbare brandpunten buiten het XY-vlak in die vlakken uit den bundel, die onbestaanbare brand-

punten in het XY-vlak geven: dus in de bestaanbare doorsneden, voorzoover haar richtingscoëfficiënt grooter en in de onbestaanbare, voorzoover haar richtingscoëfficiënt kleiner is dan die der cirkel-doorsneden. De coördinaten van deze *brandpunten* zijn

$$x = \frac{pc^2 + \lambda qa^2}{c^2 + \lambda^2 a^2}, \quad y = \lambda \frac{pc^2 + \lambda qa^2}{c^2 + \lambda^2 a^2},$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{\{c^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2\} \{b^2(c^2 + \lambda^2 a^2) - a^2 c^2(1 + \lambda^2)\}}}{c^2 + \lambda^2 a^2}.$$

Deze vergelijkingen bepalen weer eene ruimtekromme van den vierden graad; ze ligt op een elliptischen cylinder met de vergelijking

$$c^2 x^2 + a^2 y^2 - pc^2 x - qa^2 y = 0,$$

en een regelvlak van den vierden graad, dat tot vergelijking heeft

$$(pc^2 x + qa^2 y)^2 z^2 =$$

$$= \{c^2 x^2 + a^2 y^2 - (q - \lambda p)^2\} \{c^2(b^2 - a^2)x^2 + a^2(b^2 - c^2)y^2\}.$$

Evenals in de voorgaande gevallen kunnen we ook een bol en een kegel aanwijzen, waarop de meetkundige plaats ligt. De vergelijkingen van deze oppervlakken verkrijgen we, als we in die, welke voor het eerste geval afgeleid zijn, b en c verwisselen.

40. Terwijl in de beide voorgaande gevallen de meetkundige plaats der brandpunten niet door O ging, heeft dit hier in een bijzonder geval wel plaats. Voor deze brandpunten worden x en y nul voor $\lambda = -\frac{pc^2}{qa^2}$ en z voor $\lambda^2 = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2(b^2 - c^2)}$ (cirkeldoorsneden). Ze zullen dus gelijktijdig nul worden en de kromme zal door O gaan onder de voorwaarde

$$-\frac{pc^2}{qa^2} = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}},$$

of

$$\frac{q}{p} = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}},$$

d.w.z. als de lijn OM toegevoegd is aan de richting der cirkel-doorsneden met betrekking tot de hoofddoorsnede.

41. Als we de assen evenwijdig aan zichzelf verplaatsen naar het middelpunt der ellipsoïde, wordt de vergelijking van den elliptischen cylinder

$$c^2 x^2 + a^2 y^2 + pc^2 x + qa^2 y = 0,$$

terwijl die van het regelvlak overgaat in

$$\{pc^2(x+p) + qa^2(y+q)\}^2 z^2 = \\ = \{c^2(x+p)^2 + a^2(y+q)^2 - (qx-py)^2\} \{c^2(b^2-a^2)(x+p)^2 + a^2(b^2-c^2)(y+q)^2\}.$$

Laten we hierin p en q oneindig groot worden, zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ is, dan wordt de eerste vergelijking

$$c^2x + a^2\lambda y = 0,$$

d.i. de vergelijking van een plat vlak, dat loodrecht op het XY-vlak staat en door de middens van de koorden der hoofddoorsnede met een richtingscoëfficiënt λ gaat.

De vergelijking van het regelvlak vereenvoudigt zich tot

$$(c^2 + \lambda^2 a^2) z^2 = \{c^2 + \lambda^2 a^2 - (y - \lambda x)^2\} \{c^2(b^2 - a^2) + a^2(b^2 - c^2)\lambda^2\}.$$

Dit is de vergelijking van een cylinder van den tweeden graad, waarvan de in het XY-vlak gelegen as tot vergelijking heeft

$$y = \lambda x,$$

terwijl de XY-doorsnede bestaat uit de raaklijnen aan de hoofddoorsnede.

Als $\lambda^2 > \frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2(b^2 - c^2)}$ is, dus wanneer λ naar absolute waarde

groter is dan de richtingscoëfficiënt der cirkeldoorsneden, is de cylinder elliptisch; dan is de meetkundige plaats der brandpunten dus eene ellips, gelegen in het bovengenoemde platte vlak. Is λ naar absolute waarde kleiner dan de richtingscoëfficiënt der cirkeldoorsneden, dan is de meetkundige plaats eene hyperbool.

Is eindelijk λ gelijk aan den richtingscoëfficiënt van de cirkeldoorsneden, dan is z nul en valt de meetkundige plaats der brandpunten dus samen met die der middelpunten: de rechte lijn, die de middens der koorden met een richtingscoëfficiënt λ verbindt, dubbel geteld.

42. De afstand van de *richtlijnen* tot het XY-vlak is hier

$$\pm b^2 \sqrt{\frac{c^2 + \lambda^2 a^2 - (q - \lambda p)^2}{b^2(c^2 + \lambda^2 a^2) - a^2 c^2 (1 + \lambda^2)}}.$$

Ze vormen weer een regelvlak van den vierden graad, dat de

Z-as tot richt- en dubbellijn, het XY-vlak tot richt- en symmetrievlak heeft. De vergelijking van dit regelvlak op onze assen is

$$\{b^2(c^2x^2 + a^2y^2) - a^2c^2(x^2 + y^2)\}z^2 = b^4\{c^2x^2 + a^2y^2 - (qx - py)^2\}.$$

Brengen we den oorsprong van het coördinatenstelsel naar M over, dan wordt de vergelijking

$$\begin{aligned} & \{c^2(b^2 - a^2)(x + p)^2 + a^2(b^2 - c^2)(y + q)^2\}z^2 = \\ & = b^4\{c^2(x + p)^2 + a^2(y + q)^2 - (qx - py)^2\}. \end{aligned}$$

Laten we hierin p en q oneindig groot worden, zoo dat $\frac{q}{p} = \lambda$ blijft, dan gaat ze over in

$$\{c^2(b^2 - a^2) + a^2(b^2 - c^2)\lambda^2\}z^2 = b^4\{c^2 + \lambda^2a^2 - (y - \lambda x)^2\}.$$

Dit is de vergelijking van een cylinder met de as in het symmetrievlak; de vergelijking van deze as is

$$y = \lambda x.$$

Het is een elliptische cylinder, als λ naar absolute waarde groter is dan de richtingscoëfficiënt der cirkeldoorsneden en een hyperbolische cylinder, wanneer λ naar absolute waarde kleiner is. Zijn de vlakken uit de reeks evenwijdig aan de cirkeldoorsneden, dan gaat de vergelijking over in

$$c^2 + a^2\lambda^2 - (y - \lambda x)^2 = 0.$$

Dit stelt de beide vlakken uit de reeks voor, die de ellipsoïde aanraken.

TWEEDE AFDEELING.

43. We zullen door meetkundige beschouwingen hierin een en ander over de boven besproken krommen afleiden.

Elk vlak uit den bundel snijdt de ellipsoïde volgens eene hetzij bestaanbare, hetzij onbestaanbare ellips. Elk dezer ellipsen heeft twee paar brandpunten, een paar in het symmetrievlak, een paar daarbuiten, en twee paar richtlijnen, een paar loodrecht op het symmetrievlak, een paar evenwijdig aan dit vlak. Van elk is een paar bestaanbaar, een paar onbestaanbaar: de brandpunten in het symmetrievlak en de richtlijnen loodrecht op dat vlak zijn voor eene doorsnede bestaanbaar, als deze haar groote as in het symmetrievlak heeft.

Daaruit volgt, dat, als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de kleinste as der ellipsoïde, alleen bestaanbare brandpunten in het symmetrievlak gevonden worden uit bestaanbare doorsneden, brandpunten buiten het symmetrievlak uit onbestaanbare doorsneden. In het eerste geval zijn tevens bestaanbaar de richtlijnen loodrecht op het symmetrievlak, in het tweede geval die evenwijdig aan dat vlak.

Als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de grootste as der ellipsoïde, is het juist omgekeerd.

Terwijl dus in het eerste geval de meetkundige plaats der brandpunten in het symmetrievlak geheel binnen de hoofddoorsnede ligt, ligt ze er hier geheel buiten. De doorsnede van den cylinder der richtlijnen met het symmetrievlak ligt in beide gevallen buiten de hoofddoorsnede der ellipsoïde.

Als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de middelbare as der ellipsoïde, vormen de cirkeldoorsneden eene grens, zoodat we zoowel binnen als buiten de hoofddoorsnede bestaan-

bare brandpunten in het symmetrievlak verkrijgen. Voor de cirkeldoorsneden vallen de vier brandpunten samen in het middelpunt; dus de meetkundige plaats der brandpunten in het symmetrievlak raakt aan de snijlijnen van het symmetrievlak met de vlakken der cirkelddoorsneden en de meetkundige plaats der andere brandpunten gaat ook door die punten. De richtlijnen liggen in die vlakken oneindig ver; dus de meetkundige plaats der richtlijnen nadert asymptotisch tot de vlakken uit den bundel, die cirkelddoorsneden geven.

De meetkundige plaats der brandpunten in het symmetrievlak zal eene vlakke kromme zijn, die der brandpunten buiten het symmetrievlak eene ruimtekromme. De richtlijnen loodrecht op het symmetrievlak vormen een cylinder, die evenwijdig aan dat vlak een regelvlak, dat de as van den vlakkenbundel tot richtlijn, het vlak, door het middelpunt der ellipsoïde loodrecht op die as gebracht, tot richt- en symmetrievlak heeft.

Voor de vlakken uit den bundel, die de ellipsoïde aanraken, reduceert zich de ellips van doorsnede tot een enkel punt; in dat punt vallen de vier brandpunten samen, en de richtlijnen vallen twee aan twee samen tot lijnen door dat punt. Daaruit volgt, dat de meetkundige plaats der brandpunten in het symmetrievlak en de rechte doorsnede van den cylinder van richtlijnen loodrecht op het symmetrievlak de hoofddoorsnede aanraken in de raakpunten van de genoemde raakvlakken, dat de meetkundige plaats der brandpunten buiten het symmetrievlak ook door die punten gaat, en dat van de richtlijnen evenwijdig aan het symmetrievlak er twee in die punten de hoofddoorsnede aanraken.

44. We zullen nu vooreerst den graad afleiden van de vlakke kromme, die de meetkundige plaats is van de brandpunten in het symmetrievlak. Als we uit een brandpunt van eene kegelsnede eene lijn trekken naar een der onbestaanbare cirkelpunten in het oneindige, dan raakt deze lijn de kegelsnede aan, zooals zich door eene zeer eenvoudige berekening laat verifieeren. Hierdoor komt PLÜCKER tot deze definitie van brandpunten: Een punt heet brandpunt van eene kromme, als de lijnen, uit dat punt naar de onbestaanbare cirkelpunten in het oneindige getrokken, die kromme aanraken. De oorsprong van ons vroeger aangenomen coördinatenstelsel behoort dus voor een zeker vlak tot de meetkundige plaats, als de lijnen, uit O naar de onbestaanbare cirkelpunten van dit vlak getrokken, de ellipsoïde aanraken. Deze lijnen moeten dus liggen

op een kegel, die O tot top heeft en de ellipsoïde omhult, en tegelijk op een tweeden kegel, die O tot top heeft en den onbestaanbaren cirkel in het oneindige, die aan alle bollen gemeen is, tot richtlijn. Dit zijn twee kegels van den tweeden graad; ze hebben dus vier beschrijvende lijnen gemeen, die twee aan twee zullen liggen in een vlak van den bundel. Voor deze beide vlakken behoort O dus tot de meetkundige plaats der brandpunten; derhalve is O dubbelpunt daarvan. Het is duidelijk, dat O het eenige dubbelpunt is. Elk vlak van den bundel, dat bestaanbare brandpunten in het symmetrievlak geeft, heeft deze in zijn snijlijn met het symmetrievlak; op die snijlijn liggen behalve O dus nog twee brandpunten. Dus is de kromme van den vierden graad.

Al naarmate de bovengenoemde beschrijvende lijnen, die aan beide kegels gemeen zijn, bestaanbaar zijn, samenvallen of onbestaanbaar zijn, is O dubbelpunt met bestaanbare raaklijnen, keerpunt of afgezonderd punt. Als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de grootste as der ellipsoïde, verkrijgen we alleen bestaanbare brandpunten uit onbestaanbare doorsneden, dus als O buiten de hoofddoorsnede der ellipsoïde ligt; daar is O dubbelpunt met bestaanbare raaklijnen. In de beide andere gevallen is de focaalkegelsnede de grens tuschen de punten, waar de raaklijnen bestaanbaar, en die, waar ze onbestaanbaar zijn. Deze focaalkegelsnede is de meetkundige plaats van de puntbollen O' , die de ellipsoïde dubbel aanraken en dit dus ook den kegel met O' tot top doen, die de ellipsoïde omhult. Terwijl dus in het algemeen de beide bovengenoemde kegels vier beschrijvende lijnen gemeen hebben, vallen deze hier twee aan twee samen tot twee lijnen, die liggen in één vlak loodrecht op het symmetrievlak. De beide dubbelpuntsraaklijnen vallen dan samen. Op de focaalkegelsnede wordt O dus keerpunt; aan de eene zijde zal O dan dubbelpunt met bestaanbare dubbelpuntsraaklijnen zijn, aan de andere zijde afgezonderd punt.

45. De dubbelpuntsraaklijnen in O maken ter weerszijden gelijke hoeken met de normaal op de ellips door O, die confocaal is met de hoofddoorsnede. Dit laat zich in de onderstelling, dat O buiten de ellipsoïde ligt, op de volgende wijze aantonen. We spraken boven van den kegel, die O tot top heeft en de ellipsoïde omhult; deze heeft tot assen de as van den vlakkenbundel en de lijnen, die de hoeken middendoordeelen, die gevormd worden door de raaklijnen, uit O aan de hoofddoorsnede getrokken. Deze zelfde

lijnen zijn ook assen van den tweeden daar genoemden kegel, dus ook van elk oppervlak van den tweeden graad, dat gaat door de vier lijnen, die beide kegels gemeen hebben. Een dergelijk oppervlak wordt gevormd door het vlakkenpaar, loodrecht op het symmetrievlak, dat die vier lijnen bevat; dus wordt de hoek tusschen de snijlijnen van die vlakken met het symmetrievlak middendoorgedeeld door de deellijnen van den hoek tusschen de raaklijnen uit O aan de hoofddoorsnede getrokken. Genoemd vlakkenpaar bepaalt de dubbelpuntsraaklijnen in O , dus deze maken gelijke hoeken met de genoemde deellijnen. Tot het stelsel van kegels, die confocale oppervlakken omhullen, waarmee we hier te doen hebben, behoort ook de kegel, die de confocale ellipsoïde door O omhult; deze kegel ontgaat in een plat vlak en een der assen is de loodlijn op de confocale ellips door O . De bovengenoemde deellijnen zijn derhalve de raaklijn en de normaal op de confocale ellips, dus de hoeken tusschen de dubbelpuntsraaklijnen in O worden door die raaklijn en normaal middendoorgedeeld.

Wanneer O binnen de hoofddoorsnede ligt, gaat het bewijs in den bovengegeven vorm niet door; toch zal ook dan de eigenschap waar zijn, omdat de daarbij gebruikte hulpstellingen door het onbestaanbare heen continu zijn.

Ligt O op de focaalkegelsnede, dan is deze focaalkegelsnede zelve de confocale ellips; waaruit volgt, dat de keerraaklijn moet samenvallen of met de normaal of met de raaklijn.

Door de volgende redeneering kunnen we bewijzen, dat ze moet samenvallen met de normaal. Als ze in een punt van de focaalkegelsnede met de normaal samenvalt, zal dit zoo blijven, wanneer we O de focaalkegelsnede laten doorloopen: het is dus voldoende wanneer we het voor één punt van die kegelsnede kunnen uitmaken. Nemen we daarvoor een der toppen van de focaalkegelsnede. Daar wordt de langs de raaklijn vallende koorde der ellipsoïde in dat punt middendoorgedeeld, en de doorsnede van de ellipsoïde met een vlak loodrecht op het symmetrievlak volgens die raaklijn is in het algemeen geen cirkel; dus dat punt van de focaalkegelsnede is zeker geen brandpunt van die doorsnede en de keerraaklijn kan niet langs de raaklijn vallen. Eene doorsnede van de ellipsoïde met een vlak loodrecht op het symmetrievlak volgens de normaal op de focaalkegelsnede geeft daarentegen eene ellips waarvan deze top wel brandpunt is.

46. Wat de brandpunten buiten het symmetrievlak aangaat,

deze liggen loodrecht boven en beneden de middelpunten der doorsneden, waarin ze behooren. Deze middelpunten vormen eene ellips, gelijkvormig en gelijkstandig met de hoofddoorsnede der ellipsoïde, en gaande door het middelpunt der ellipsoïde en O. De oorsprong is het middelpunt van de doorsnede der ellipsoïde met een vlak, dat evenwijdig is aan het middelvlak, behoorende bij de richting OM. Dus de brandpunten van deze doorsnede, en deze alleen, liggen op de as van den vlakkenbundel: ze vallen niet samen met het middelpunt. Dus gaat de meetkundige plaats van deze brandpunten niet door den oorsprong, tenzij het middelvlak, dat behoort bij de richting OM, als doorsnede een cirkel geeft, d.w.z. tenzij OM toegevoegd is aan een der vlakken van cirkeldoorsneden. Dit geval kan zich derhalve alleen voordoen, als de as van den vlakkenbundel evenwijdig is aan de middelbare as der ellipsoïde.

In het algemeen liggen dus op de as van den vlakkenbundel twee brandpunten, afkomstig van het vlak van den bundel, dat evenwijdig is aan het middelvlak behoorende bij OM: elk vlak van den bundel, dat bestaانبare brandpunten buiten het symmetrievlak geeft, bevat er nog twee buiten die as, dus in het geheel vier. Dus is de meetkundige plaats dezer brandpunten eene ruimtekromme van den vierden graad.

47. Deze ruimtekromme ligt op een bol. We hebben nl. vroeger reeds opgemerkt, dat de brandpunten der doorsneden die punten zijn, waaruit de raaklijnen aan de doorsnede door de onbestaانبare cirkelpunten in het oneindige gaan. De brandpunten van eene doorsnede zijn dus de snijpunten van de raaklijnenparen, uit de onbestaانبare cirkelpunten van het vlak dier doorsnede aan de doorsnede getrokken. Raakt nu de doorsnede aan de verbindingslijn der onbestaانبare cirkelpunten (de lijn in het oneindige), wat gebeurt als de doorsnede eene onbestaانبare parabool is, dan vallen de beide brandpunten buiten het symmetrievlak met de onbestaانبare cirkelpunten samen. Dit bewijst dat de meetkundige plaats dier brandpunten door de onbestaانبare cirkelpunten in het oneindige van die twee bepaalde onbestaانبare vlakken gaat. Dit zijn de vlakken uit den bundel, die door de oneindig ver gelegen punten der hoofddoorsnede gaan; elk dezer beide vlakken geeft twee punten. Dus liggen de vier snijpunten van de meetkundige plaats met het vlak in het oneindige op den onbestaانبaren cirkel.

De meetkundige plaats nu is eene kromme van den vierden graad en, wijl ze elk der beschrijvende lijnen van den gevonden elliptischen cylinder in twee punten snijdt, noodzakelijk de doorsnede van twee oppervlakken van den tweeden graad: door de meetkundige plaats en een vijfde punt van den onbestaanbaren cirkel gaat dus ook een kwadratisch oppervlak, dat den geheelen cirkel bevatten en dus een bol zijn moet. De coördinaten van het middelpunt en de straal van dezen bol zijn bij de analytische behandeling afgeleid.

48. De richtlijnen loodrecht op het symmetrievlak vormen een cylinder; van dezen cylinder is de as van den vlakkenbundel dubbellijn. Opdat nl. voor eenig vlak van den bundel deze as richtlijn van de doorsnede zij, moet het overeenkomstige brandpunt liggen op de wederkeerige poollijn van die as ten opzichte van de ellipsoïde. Deze wederkeerige poollijn is in het symmetrievlak de poollijn van O ten opzichte der hoofddoorsnede d. i. de verbindingslijn van de raakpunten der uit O aan de hoofddoorsnede getrokken raaklijnen. Deze lijn snijdt de meetkundige plaats der brandpunten behalve in die raakpunten nog in twee andere punten en voor elk der beide vlakken uit den bundel, die door een dezer laatstgenoemde punten gaan, is de as van den vlakkenbundel richtlijn der doorsnede. Deze as is dus dubbellijn: in elk vlak van den bundel liggen nog twee richtlijnen, die niet met de as samenvallen, dus is de cylinder der richtlijnen van den vierden graad.

49. De richtlijnen evenwijdig aan het symmetrievlak vormen een regelvlak, dat de as van den vlakkenbundel tot richtlijn, het symmetrievlak der ellipsoïde loodrecht op die as tot richt- en symmetrievlak heeft. Ook dit oppervlak heeft de as van den vlakkenbundel tot dubbellijn; we kunnen nl. aantoonen, dat door elk punt van die as twee richtlijnen gaan. Opdat de richtlijn eener doorsnede door een willekeurig punt P van die as ga, moet het overeenkomstige brandpunt liggen in het poolvlak van P ten opzichte der ellipsoïde. Omdat P op de as van den bundel ligt, gaat het poolvlak van P door de wederkeerige poollijn van die as, d. i. door de poollijn van O ten opzichte der hoofddoorsnede. Dit poolvlak snijdt derhalve de meetkundige plaats der brandpunten buiten het symmetrievlak behalve in de raakpunten der raaklijnen uit O nog in twee andere punten. Elk der beide vlakken van den bundel, die door deze laatste punten gaan, leveren een

doorsnede, waarvan de richtlijn door P gaat; dus door elk punt van de as gaan twee beschrijvende lijnen van het oppervlak en die as is dubbellijn.

Brengen we nu door die as een vlak, dan bevat dit twee beschrijvende lijnen van het regelvlak. Eene willekeurige lijn, in dat vlak getrokken, snijdt elke dezer beschrijvende lijnen in één punt, en de as in een punt dat dubbel telt; dus snijdt ze het regelvlak in vier punten, m.a.w. dit regelvlak is van den vierden graad.

50. Als de as van den vlakkenbundel oneindig ver ligt, en we de ellipsoïde dus snijden door eene reeks van evenwijdige vlakken, splitsen zich de gevonden meetkundige plaatsen. Voor de brandpunten houden we dan in het eindige over eene kegelsnede in het symmetrievlak, en eene in een vlak loodrecht daarop: voor de richtlijnen een cylinder van den tweeden graad met zijn as loodrecht op het symmetrievlak, en een met zijn as in dat vlak. Het is duidelijk, dat het vlak loodrecht op het symmetrievlak, waarin brandpunten liggen, het middelvlak der ellipsoïde is, behoorende bij de richting der snijdende vlakken, en dat de as van den laatstgenoemden cylinder evenwijdig is aan de snijdende vlakken.

Fig. I.

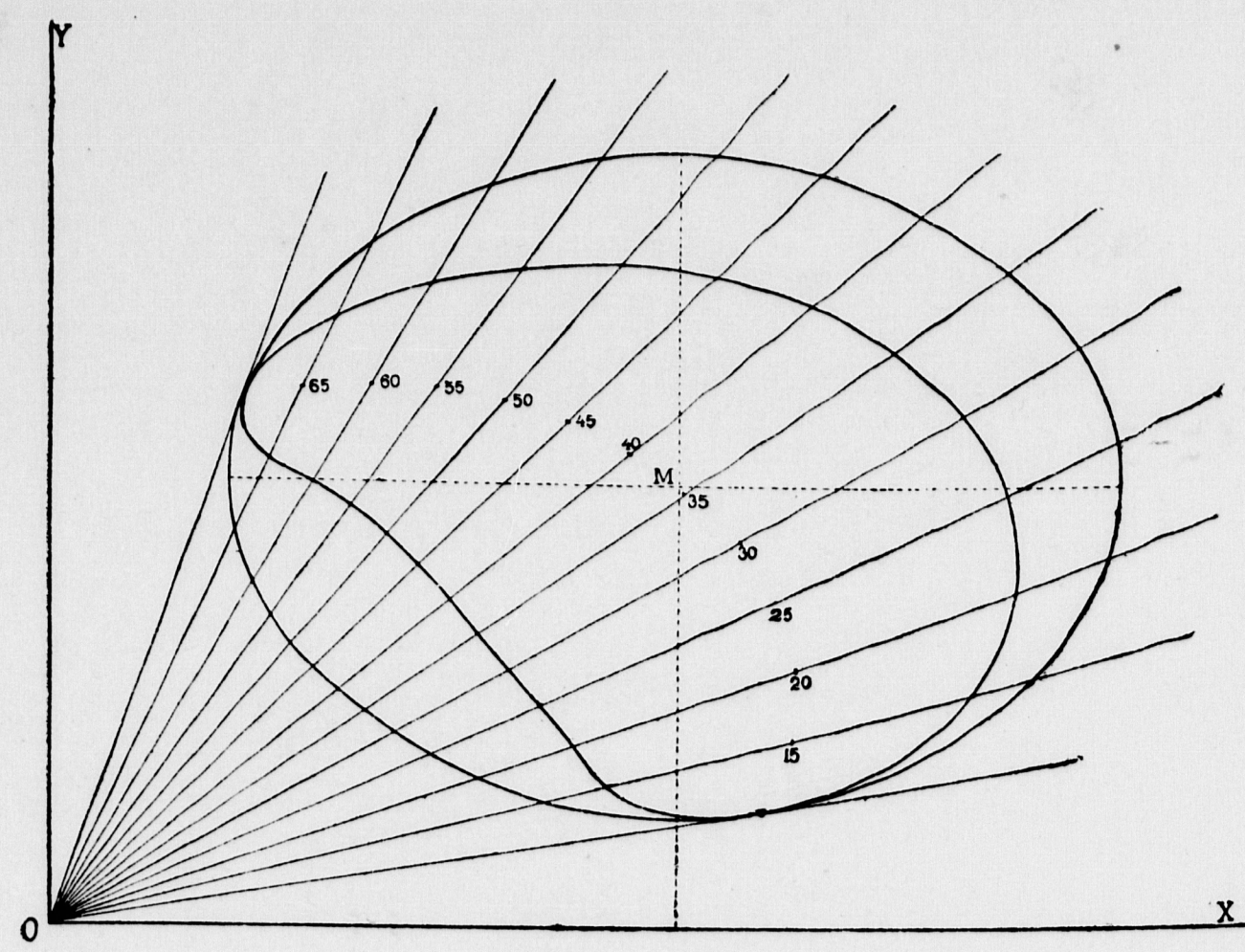


Fig. II.

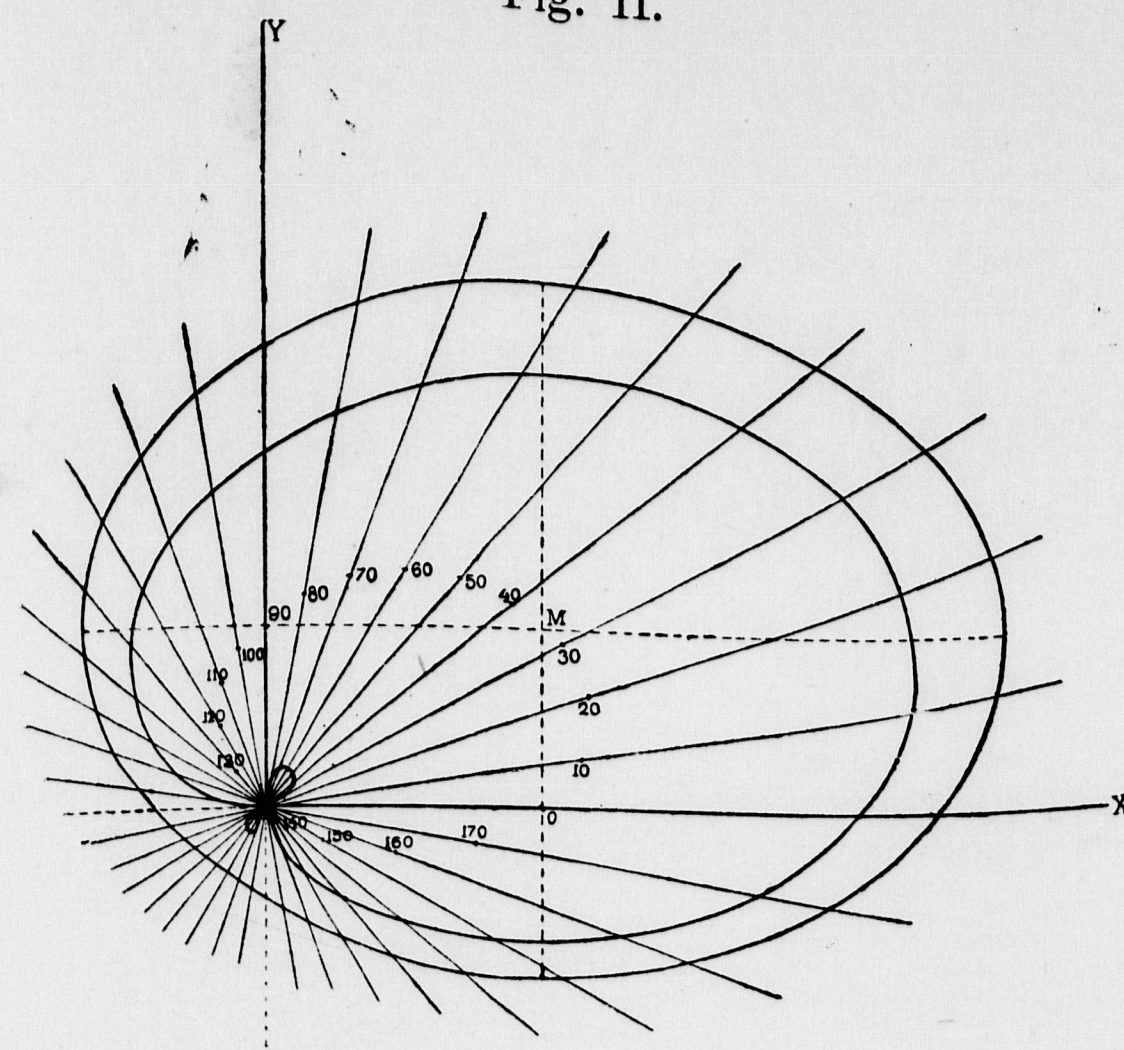


Fig. III.

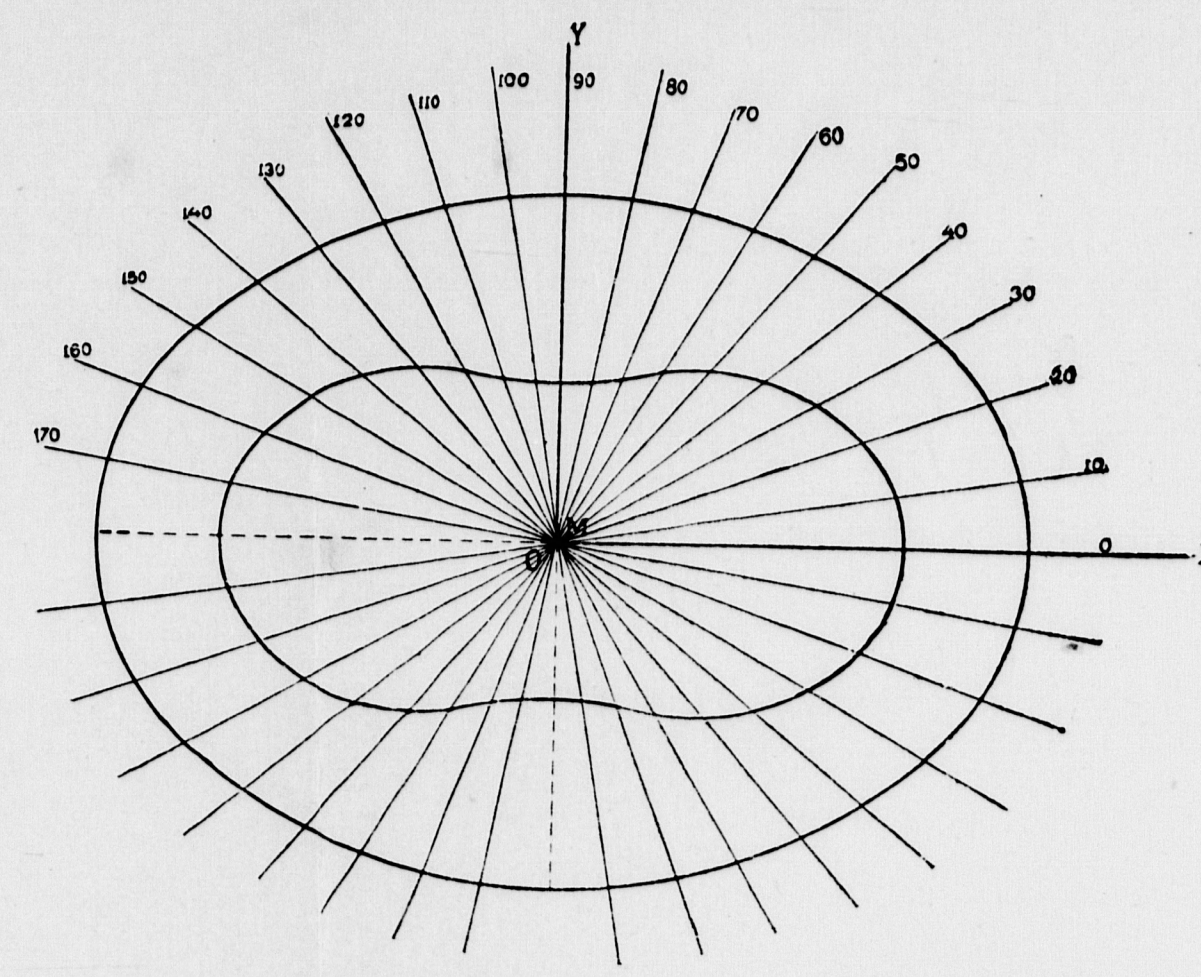


Fig. IV.

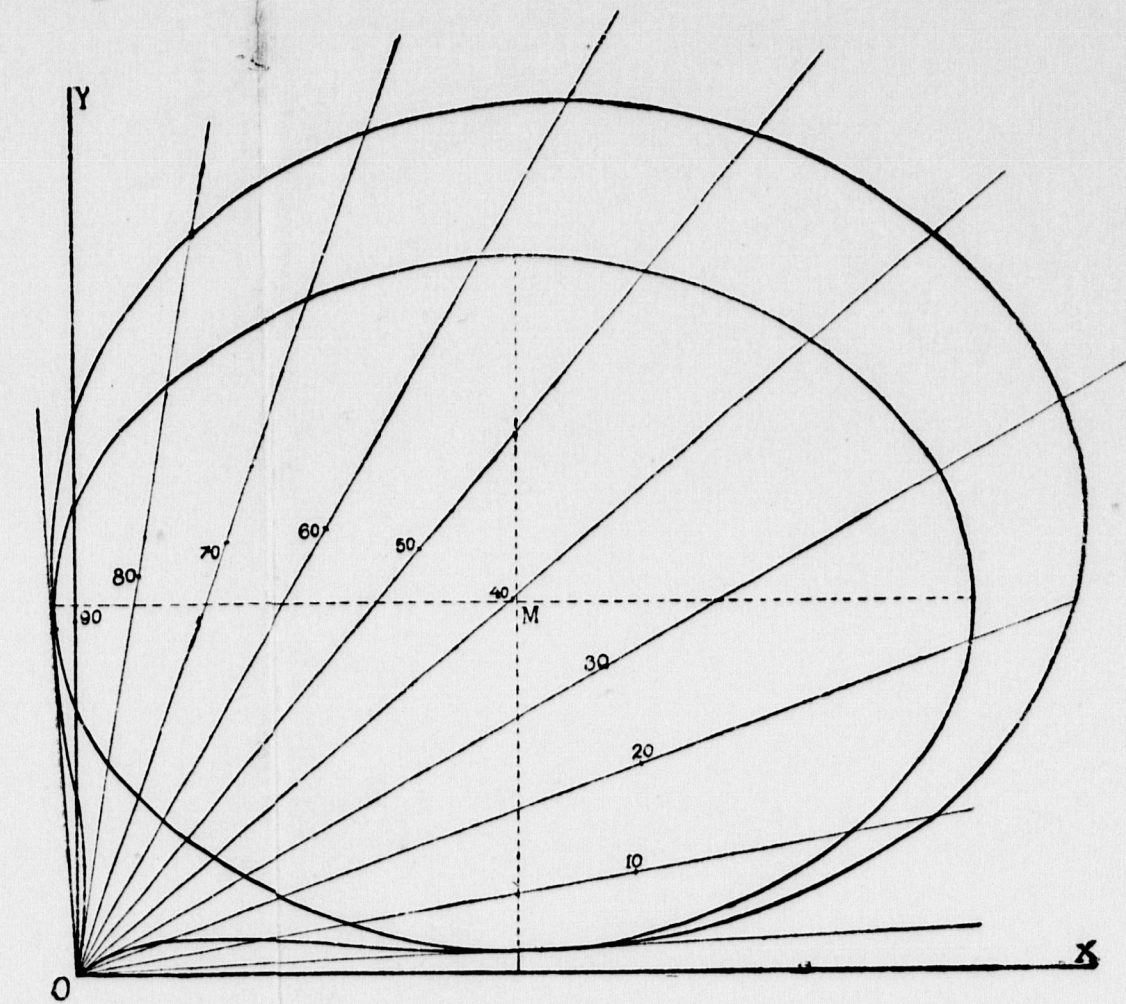


Fig. V.

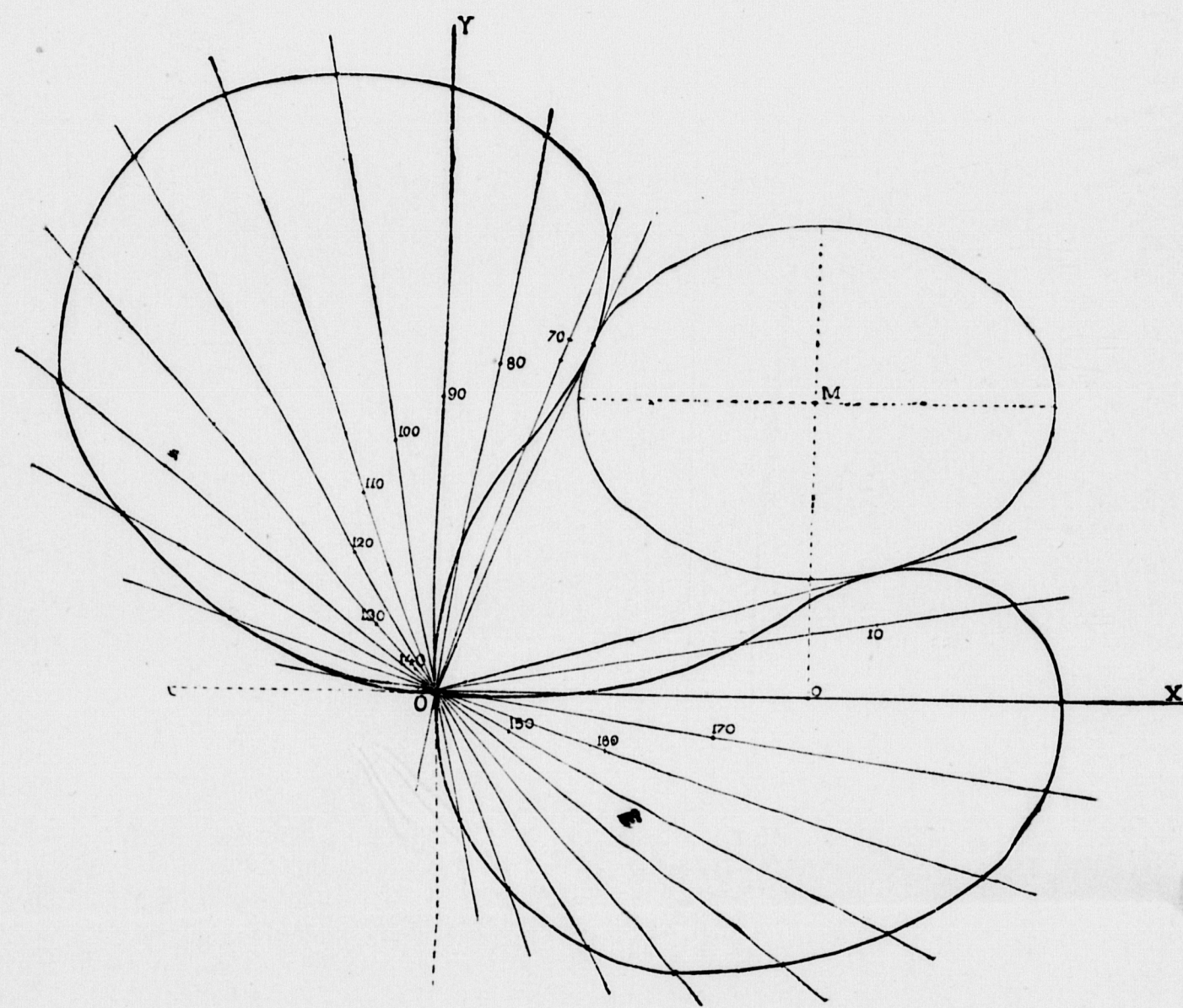


Fig. VI.

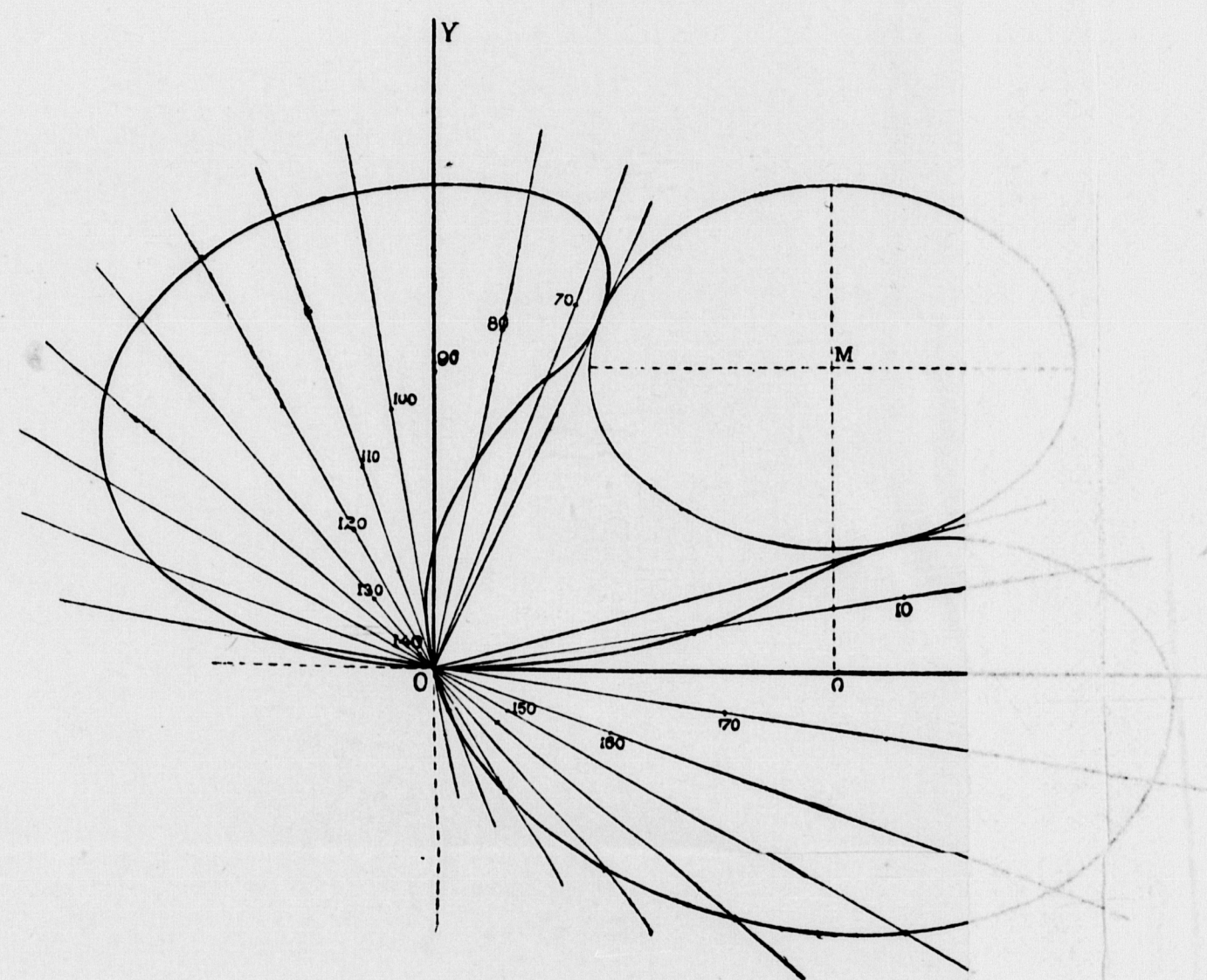


Fig. VII.

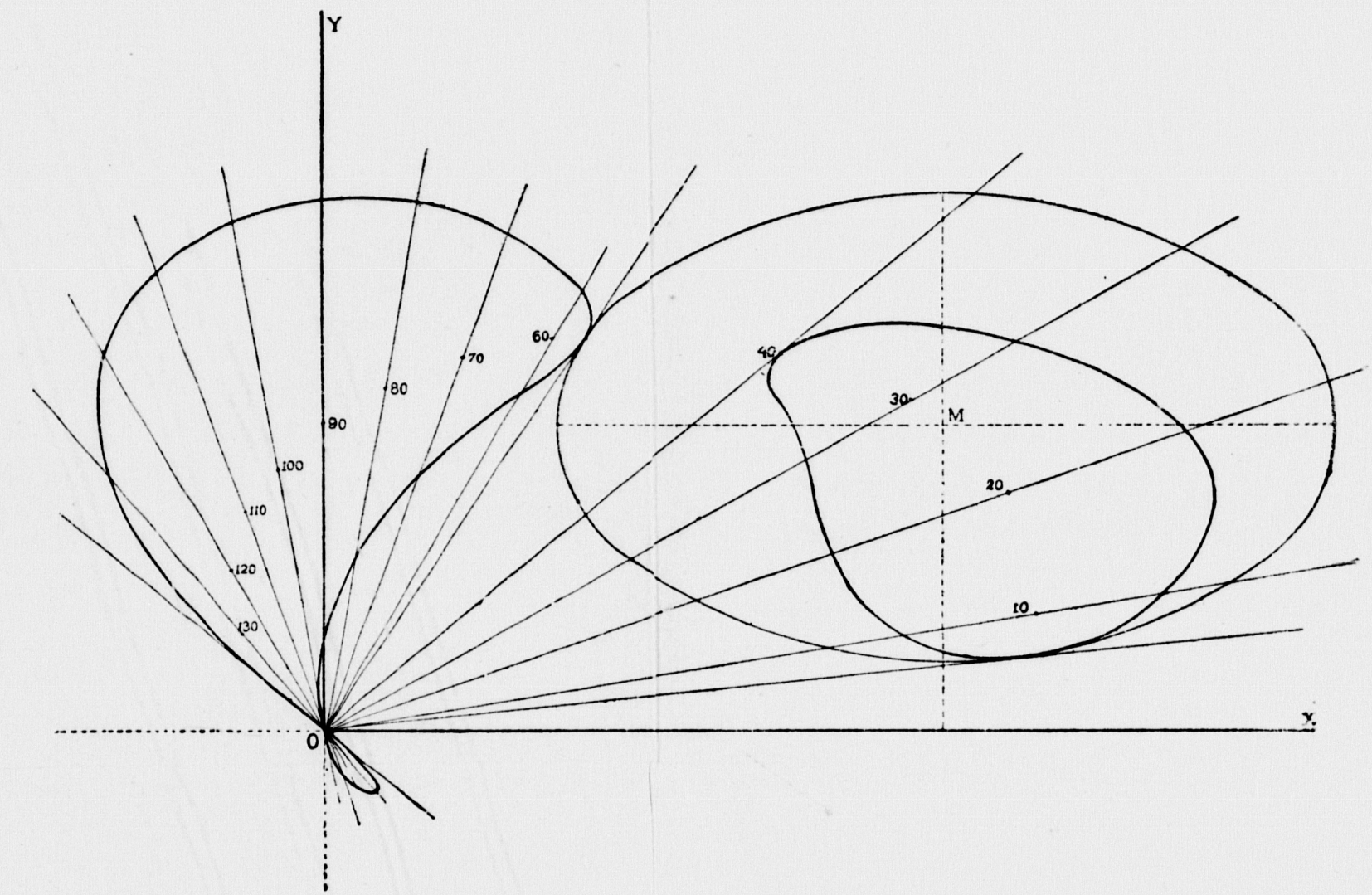


Fig. VIII.

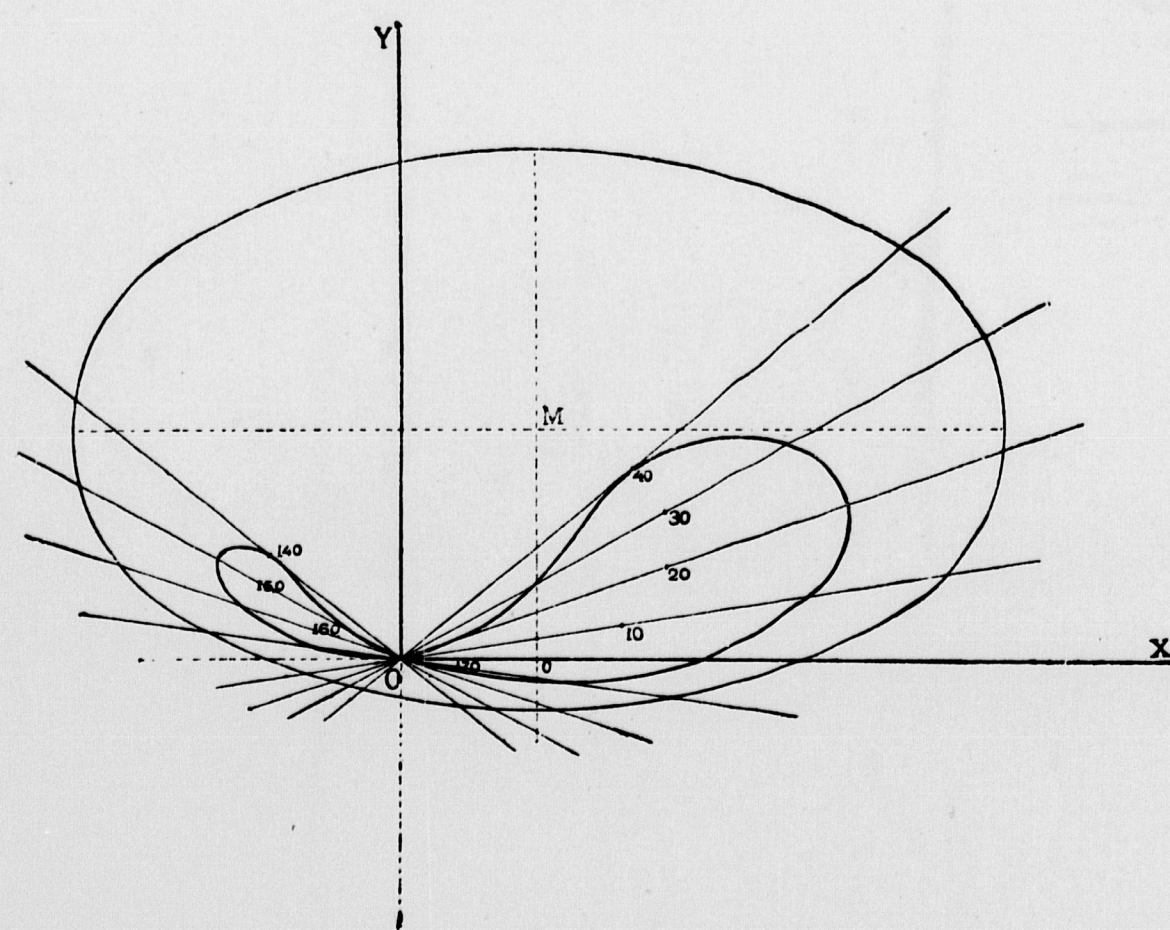
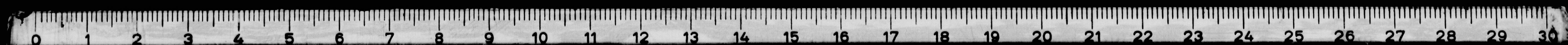
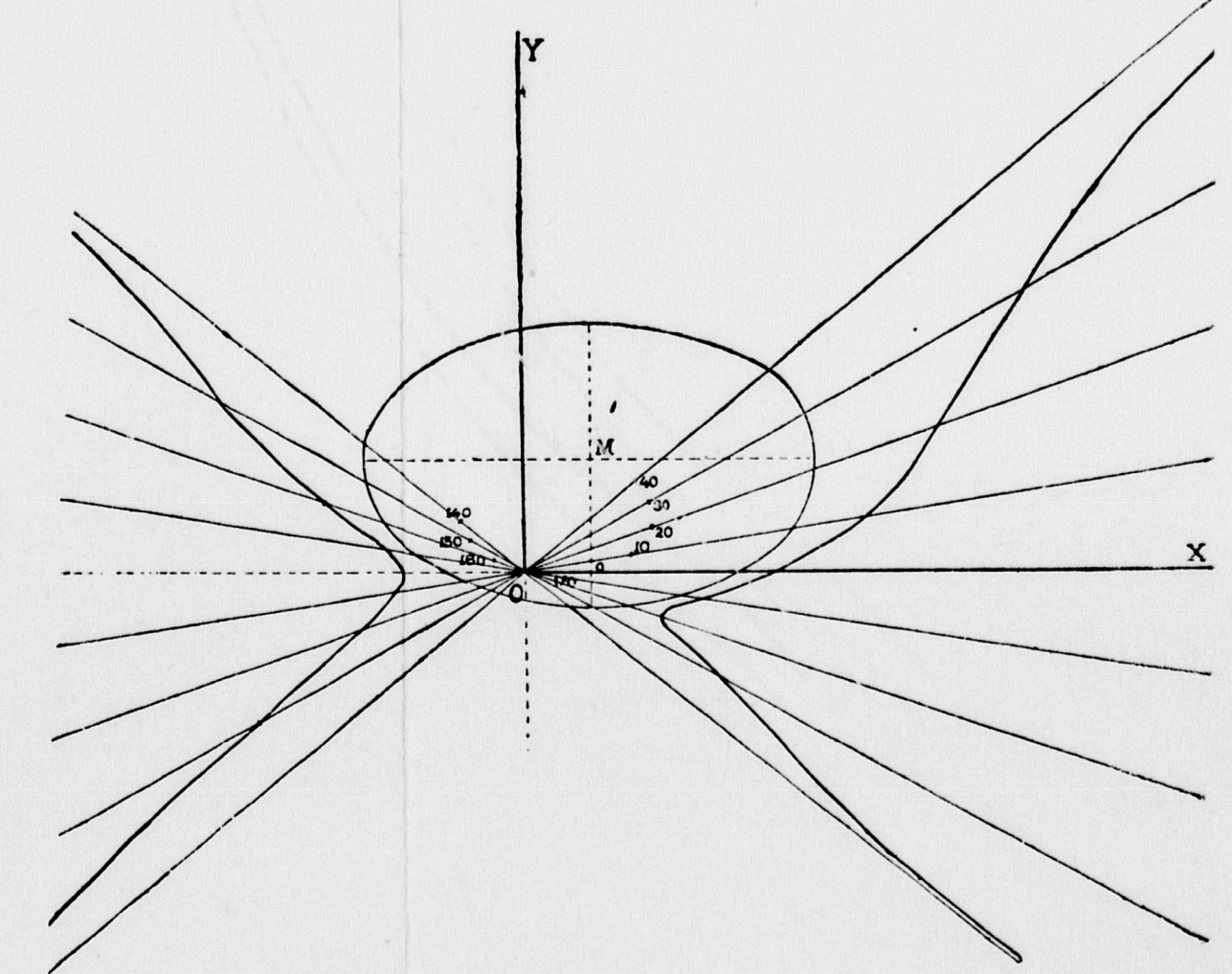
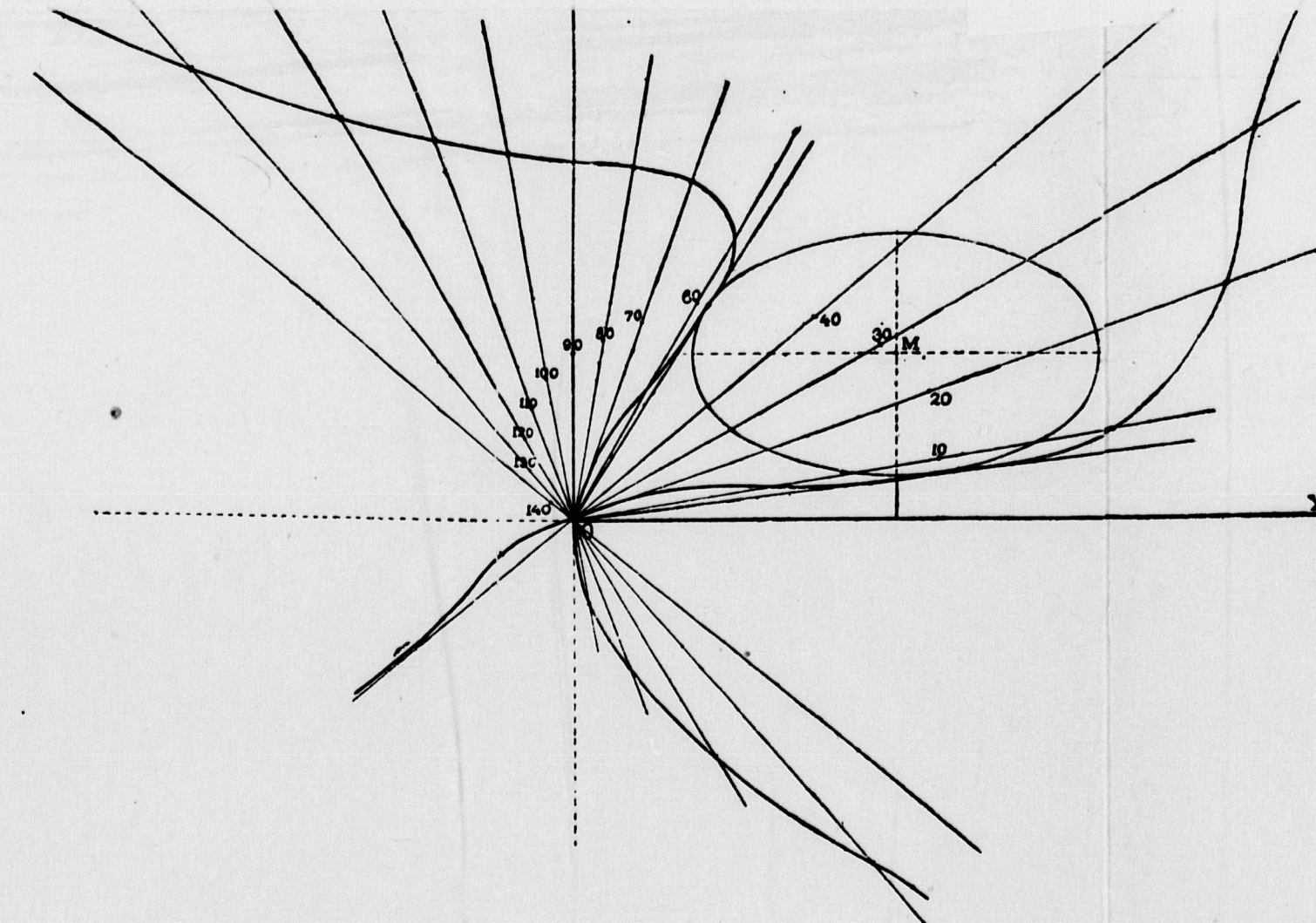


Fig. IX.



VERKLARING DER FIGUREN.

De as van den vlakkenbundel is evenwijdig aan de kleinste as der ellipsoïde.

Fig. I. *Meetkundige plaats der brandpunten* (blz. 11).

$$p = 7; q = 5; a = 5; b = 3,8; c = 3,5.$$

„ II. *Meetkundige plaats der brandpunten* (blz. 12).

$$p = 3; q = 2; a = 5; b = 3,8; c = 3.$$

„ III. *Meetkundige plaats der brandpunten* (blz. 12).

$$p = 0; q = 0; a = 5; b = 3,8; c = 3,4.$$

„ IV. *Doorsnede van den richtlijencylinder* (blz. 19).

$$p = 4,72; q = 4; a = 5; b = 3,8; c = 3.$$

De as van den vlakkenbundel is evenwijdig aan de groote as der ellipsoïde.

Fig. V. *Meetkundige plaats der brandpunten* (blz. 22).

$$p = 6,1; q = 4,75; a = 5; b = 3,8; c = 3.$$

„ VI. *Doorsnede van den richtlijencylinder* (blz. 24).

$$p = 6,1; q = 4,75; a = 5; b = 3,8; c = 3.$$

De as van den vlakkenbundel is evenwijdig aan de middelbare as der ellipsoïde.

Fig. VII. *Meetkundige plaats der brandpunten* (blz. 27).

$$p = 8; q = 4; a = 5; b = 3,8; c = 3.$$

„ VIII. *Meetkundige plaats der brandpunten* (blz. 27).

$$p = 1,5; q = 2,5; a = 5; b = 3,8; c = 3.$$

„ IX. *Doorsnede van den richtlijencylinder* (blz. 32).

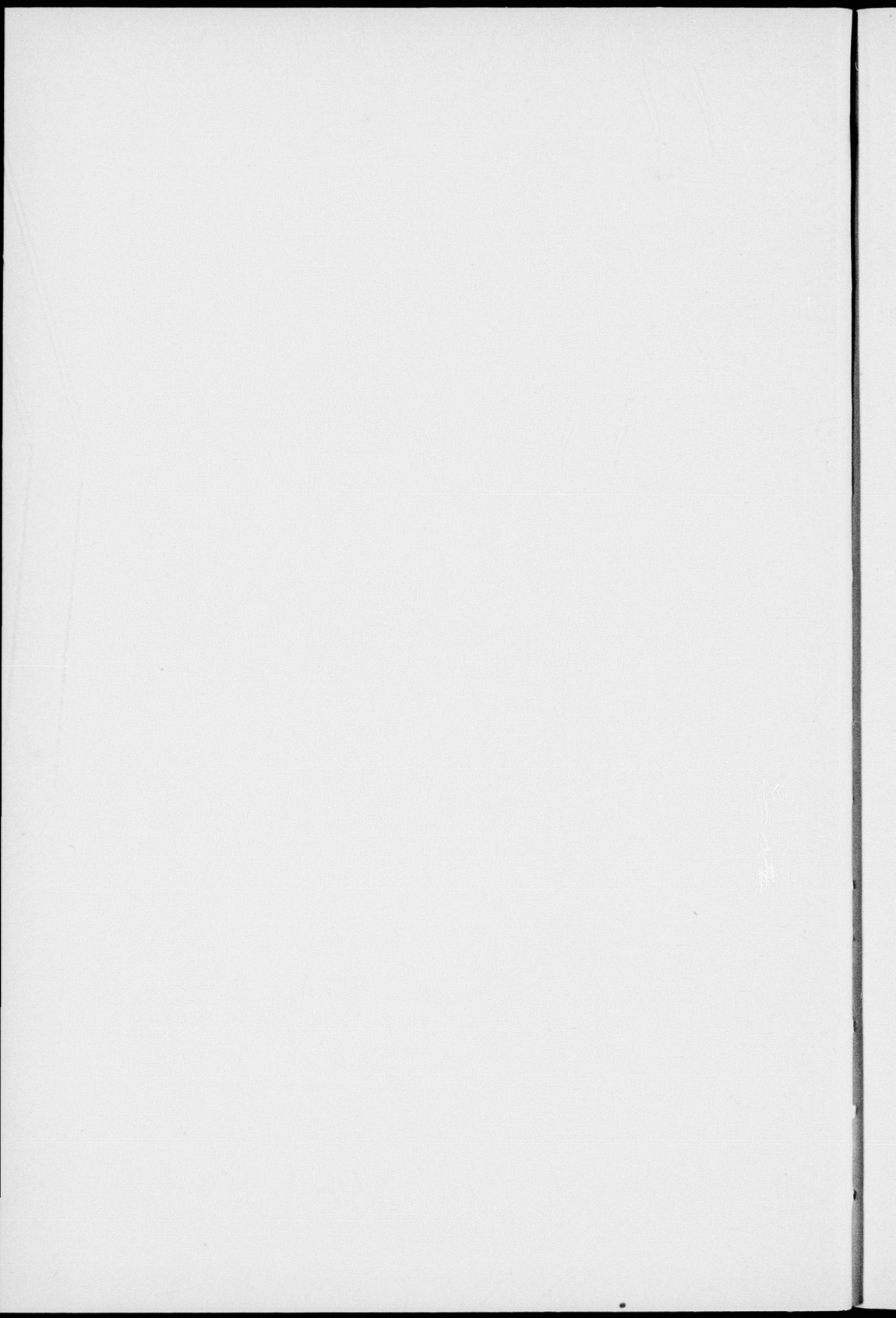
$$p = 8; q = 4; a = 5; b = 3,8; c = 3.$$

„ X. *Doorsnede van den richtlijencylinder* (blz. 32).

$$p = 1,5; q = 2,5; a = 5; b = 3,8; c = 3.$$

N.B. De aangegeven maten, die centimeters voorstelden, zijn als verhoudingsgetallen op te vatten, wijl de oorspronkelijke figuren op verschillende schaal overgebracht zijn.

STELLINGEN.



STELLINGEN.

I.

De analytische behandeling van vraagstukken als het voorgaande verdient de voorkeur boven eene meetkundige.

II.

Het is wenschelijk, dat de programma's voor de examens in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde verandering ondergaan, vooral wat de Wiskunde betreft.

III.

Voor het zoeken van den resultant van twee vergelijkingen is de methode BEZOUT-CAYLEY het meest aan te bevelen.

IV.

De studie van ruimten met vier en meer afmetingen biedt te groote bezwaren aan, dan dat daarvan, althans voorloopig, groot voordeel is te verwachten voor de meetkunde in de ruimte met drie afmetingen.

V.

Men definieert massa het best als het standvastige quotient van kracht en versnelling.

VI.

De afleiding van het parallelogram van krachten uit dat der versnellingen is te verkiezen boven die, welke DESPEYROUS geeft in zijn *Cours de Mécanique*.

VII.

Bij het onderwijs in de Mineralogie dient eene ruime plaats te worden gegeven aan de Silicaten.

VIII.

Het uitstralingsvermogen van eene stof hangt niet af van

de meerdere of mindere gladheid van het oppervlak. De uitstraling heeft niet alleen plaats door de oppervlakte, maar ook door de deelen, op korten afstand daaronder gelegen.

IX.

Het door THOMSON ontdekte verschijnsel, dat een electriche stroom warmte meevoert, is nog niet verklaard.

X.

De hypothese van MAXWELL geeft eene bevredigende verklaring omtrent het wezen der electriciteit.

XI.

Voor het onderzoek van brekings-spectra is de spectrometer van ABBE verre te verkiezen boven de gewone spectrometers.

XII.

Hoewel we niet weten, hoe deze invloed werkt, moeten we toch de periodieke veranderingen van de declinatie en de intensiteit van het aardmagnetisme toeschrijven aan den invloed van zon en maan.

XIII.

De onderzoekingen van LOCKYER maken het waarschijnlijk, dat op de zon een aantal van onze elementen gedissocieerd voorkomen.

XIV.

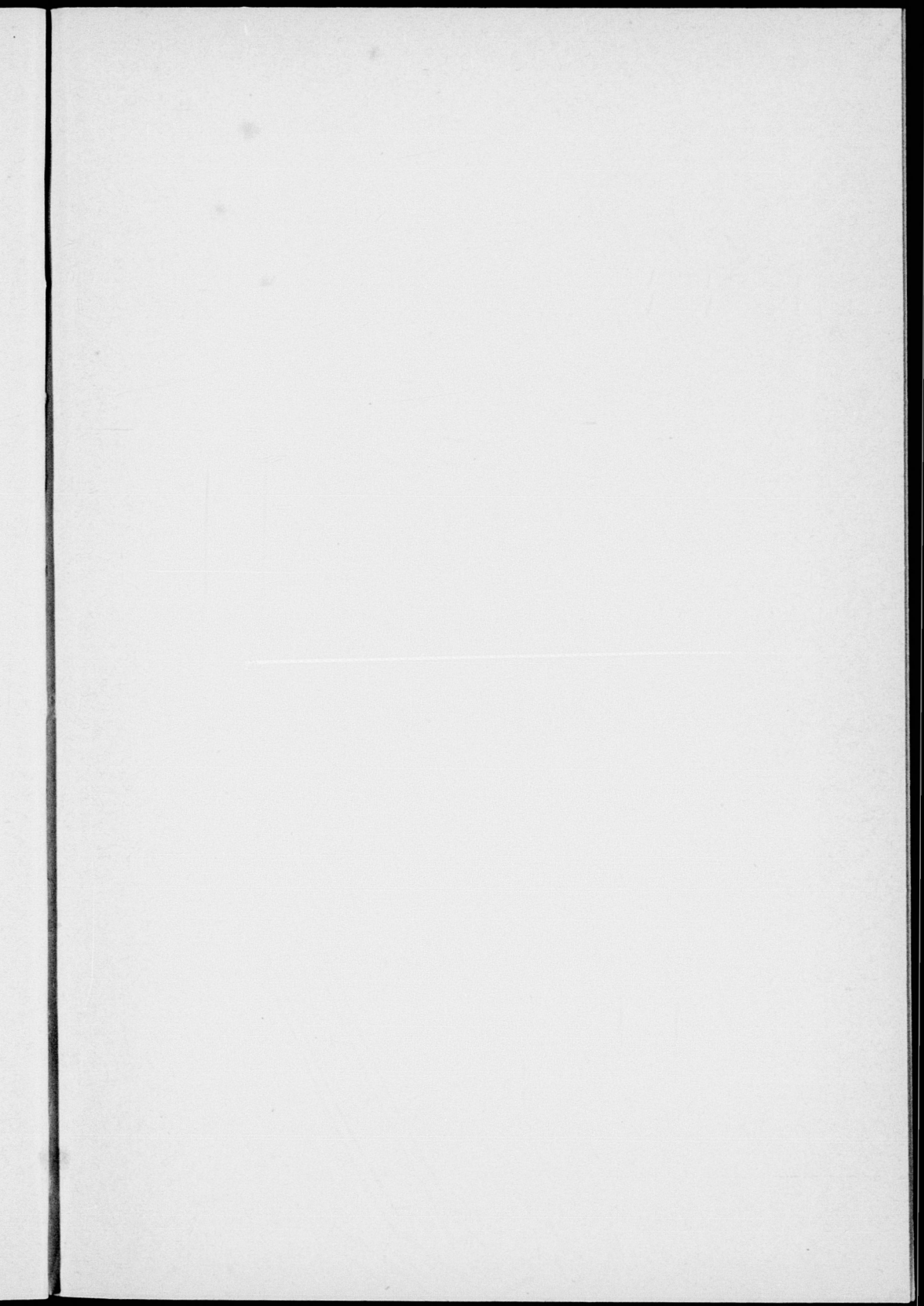
Het verdient de voorkeur in CO de zuurstof vierwaardig aan te nemen, eerder dan de koolstof tweewaardig voor te stellen.

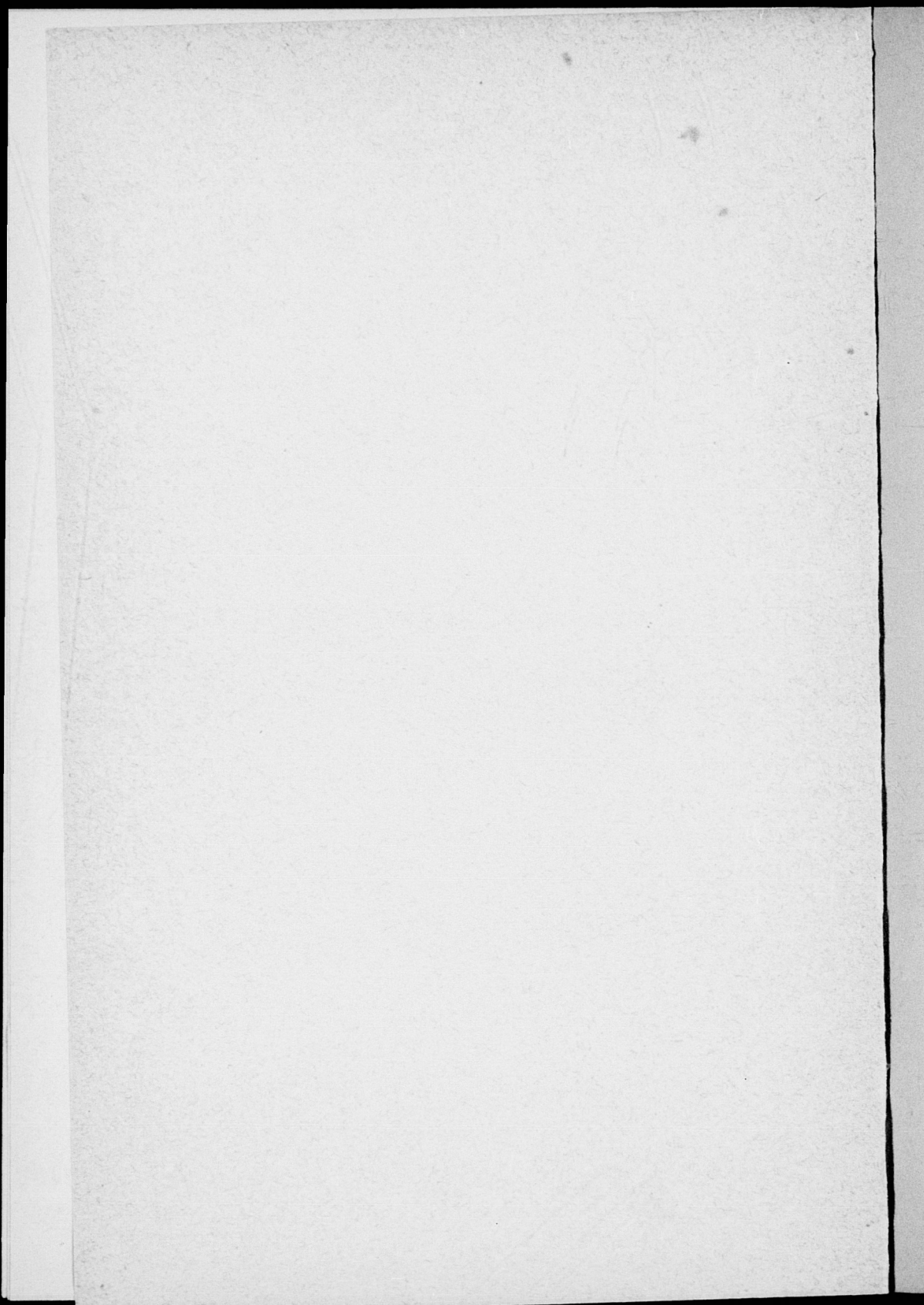
XV.

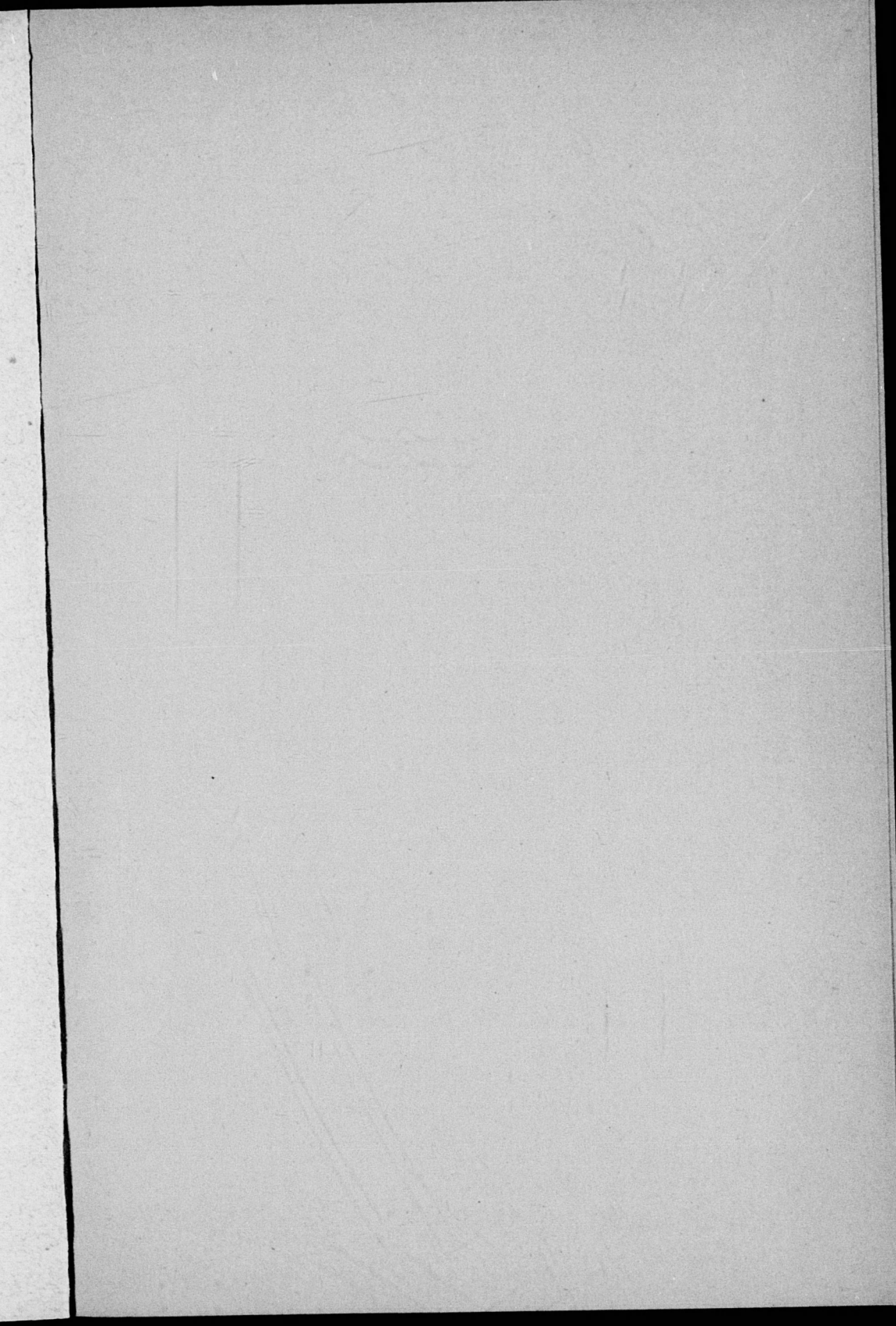
De ringen van Saturnus bestaan uit meteorieten.

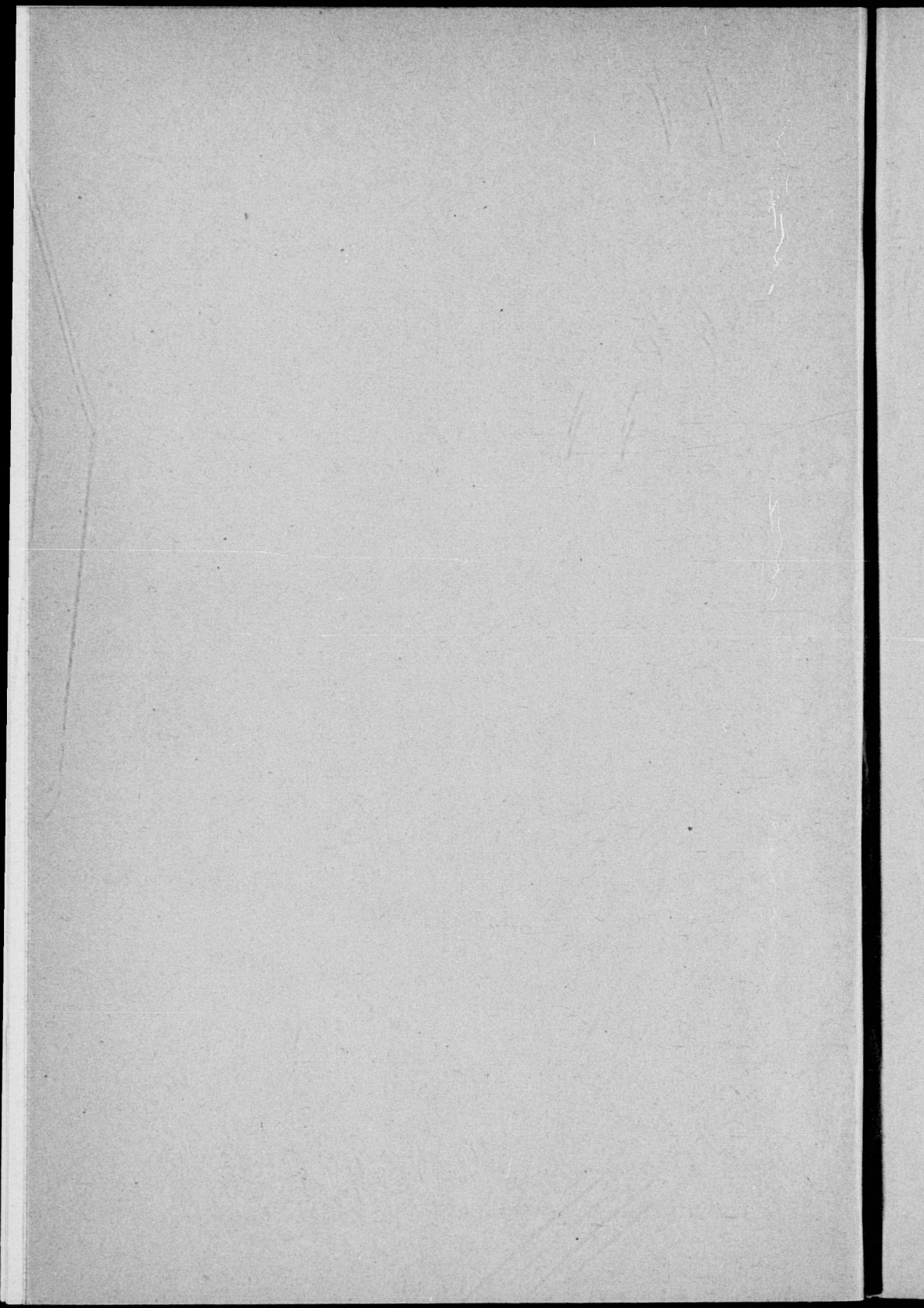
XVI.

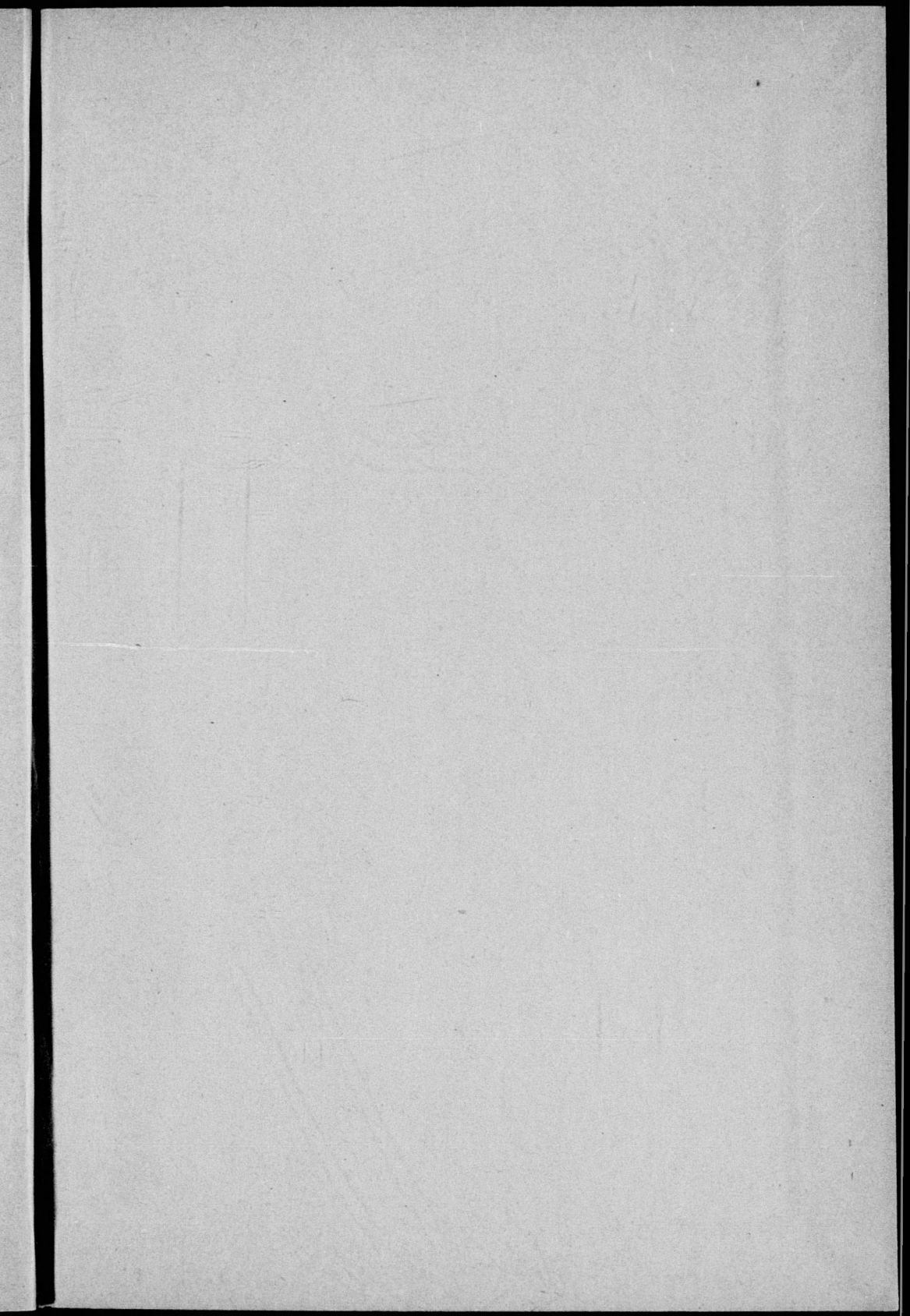
De hypothese van HELMHOLTZ geeft de beste verklaring van het onderhouden der zonnewarmte.











Gr

18