Over holomorfe functies, aan welker waardenvoorraad zekere beperkingen zijn opgelegd

OVER HOLOMORFE FUNCTIES

AAN WELKER WAARDENVOORRAAD ZEKERE BEPERKINGEN ZIJN OPGELEGD

OVER HOLOMORFE FUNCTIES, AAN WELKER WAARDENVOORRAAD ZEKERE BEPERKINGEN ZIJN OPGELEGD.

K 2597

Diss Utrecht 1941

OVER HOLOMORFE FUNCTIES

AAN WELKER WAARDENVOORRAAD ZEKERE BEPERKINGEN ZIJN OPGELEGD

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN WAARNEMEND RECTOR MAGNIFICUS, L. VAN VUUREN, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER LETTEREN EN WIJSBEGEERTE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 6 OCTOBER 1941 TE 15 UUR.

DOOR

BASTIAAN HEIJNA
GEBOREN TE ARNHEM

P. NOORDHOFF N.V. — 1941 — GRONINGEN

Promotor: Prof. Dr. J. A. BARRAU

INHOUD

		blz.
Inleiding		1
§ 1.	Functies, welker waardenvoorraad een gebied, dat tot de eenheidscirkel behoort, uitsluiten	6
§ 2.	Functies, die een gegeven waarde slechts éénmaal aannemen	12
§ 3.	Functies met gelijke randwaarden in verschillende punten	13
§ 4.	Functies met vertakkingspunten	16
§ 5.	Even en oneven functies	18
§ 6.	Uitbreiding van het Lemma van Schwarz	20
§ 7.	Nader onderzoek van $w'(z)$, als $w(z) \varepsilon F$	22
§ 8.	Gevolgtrekkingen uit § 6 en § 7	29
§ 9.	Over de lengte van beeldkrommen	30

/

INLEIDING.

Dit proefschrift heeft zijn ontstaan te danken aan de opmerking van Prof. Dr. J. WOLFF dat de meeste bewijzen in de dissertatie van H. UNKELBACH [1]) aanzienlijk verkort kunnen worden door gebruik te maken van de eigenschappen van holomorfe functies, die een positief reëel deel bezitten in het rechterhalfvlak, en dat er tevens een aantal nieuwe stellingen ontstaat, door de voorwaarde die UNKELBACH stelt, te varieren.

Wanneer nl. een holomorfe functie f(z) een pos. reëel deel heeft in het halfvlak H($Rz > 0$), dan gelden de volgende eigenschappen, afkomstig van Prof. WOLFF [2]):

(A) $|f'(z)| \leq \dfrac{Rf(z)}{Rz}$.

(B) $\dfrac{Rf(z)}{Rz}$ is een nietstijgende functie van Rz(als $Iz = c =$ constant is) met de limiet $\lambda \geq 0$ voor $Rz \to +\infty$, onafhankelijk van c.

(C) Het getal λ uit (B) is gelijk aan de hoekafgeleide van f(z) in ∞, $\lambda = \lim\limits_{z\to\infty} \text{ang}\, f'(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \text{ang}\, \dfrac{f(z)}{z}$.

(D) Voor iedere z in H is: $\dfrac{Rf(z)}{R(z)} \geq \lambda$.

(E) $\lim\limits_{z\to 0} \text{ang}\, \dfrac{Rf(z)}{Rz} = \lim\limits_{z\to 0} \text{ang}\, f'(z) \geq \dfrac{Rf(a)}{a} \geq \lambda$, als $a > 0$.

Opm. Het = teken geldt bij (A) slechts, als:

$$\frac{f(z)-\alpha}{f(z)+\bar{\alpha}} = \varepsilon \frac{z-\beta}{z+\bar{\beta}},\ |\varepsilon| = 1;\ \alpha,\ \beta \text{ en } \varepsilon \text{ constant.}$$

Bij (D) en (E) geldt het = teken slechts voor de functies $az + bi$, a en b zijn reële constanten, $a \geq 0$.

Hieronder nu zullen enige stellingen van UNKELBACH op de boven aangegeven manier bewezen worden:

---

[1]) H. UNKELBACH, *Ueber beschränkte Funktionen, deren Wertevorrat gewisse Lücken aufweist.* Mathem. Annalen 115, p. 205.

[2]) Comptes Rendus, tome 183, 1926.

1. „Satz I" van UNKELBACH luidt:

Geg. $w=f(z)$ is holomorf en $|f(z)|<1$ voor $|z|<1$, $f(0)=0$, $\alpha=re^{i\varphi}$ hoort niet tot de waardenvoorraad van $f(z)$ in de eenheidscirkel, $0<r<1$, $0\leq\varphi<2\pi$.

Te bew.
$$|f'(0)|\leq\frac{2r\log r^{-1}}{1-r^2}=\mathfrak{M}(r).$$

Het = teken geldt alleen voor: ${}^0f_r(z)\equiv\dfrac{r^{\frac{1+z}{1-z}}-r}{1-r^{\frac{2}{1+z}}}$ en voor de functies die hieruit door draaiing van het w- of z-vlak om de oorsprong verkregen worden.

Bewijs „door middel van het halfvlak". [1])

Zij $\zeta=\dfrac{1+z}{1-z}$, dan is door $\Phi(\zeta)=\log\dfrac{\bar{\alpha}f(z)-1}{f(z)-\alpha}$ een holomorfe functie met pos. reëel deel bepaald in het halfvlak $R(\zeta)>0$, want $\left|\dfrac{f(z)-\alpha}{1-\bar{\alpha}f(z)}\right|$ is <1 en nergens $=0$ in de eenheidscirkel, dus de log. kan langs iedere weg in de eenheidscirkel voortgezet worden.

$$|\Phi'(1)|=\frac{1-|\alpha|^2}{2|\alpha|}\cdot|f'(0)|;\ R\Phi(1)=\log\frac{1}{|\alpha|}$$

$$|\Phi'(1)|<\frac{R\Phi(1)}{1}\ \text{(A) geeft: } |f'(0)|\leq\frac{2r\log r^{-1}}{1-r^2}$$

Het = teken geldt alleen als $|\Phi'(1)|=R\Phi(1)$, dus volgens blz. 1, opm.: $\Phi(\zeta)=a\cdot\dfrac{1-\varepsilon z}{1+\varepsilon z}-ib$, $|\varepsilon|=1$.

Zien we af van draaiingen om O, dan mogen we εz door z en $-\bar{\alpha}f(z)$ door $r\,{}^0f_r(z)$ vervangen. Uit $\Phi(1)=\log\dfrac{1}{\alpha}$ volgt: $a=\log\dfrac{1}{r}$, $b=\varphi$. Er komt dan:

$$\log\frac{1+r\,{}^0f_r(z)}{{}^0f_r(z)+r}=\frac{1+z}{1-z}\log\frac{1}{r}$$

waarin ${}^0f_r(z)$ een functie is die $\neq -r$ en waarvoor het = teken geldt. Men ziet gemakkelijk dat ${}^0f_r(z)$ de gevraagde vorm heeft.

[1]) $|z|\leq 1$ correspondeert met het halfvlak $R(\zeta)\geq 0$. De keuze van $\Phi(\zeta)$ vindt zijn oorsprong in de stelling van LINDELÖF:

Ond. $g(\zeta)$ beeldt $R\zeta>0$ af op een deel van het Riem. opp. R, liggend over het rechterhalfvlak, met ∞-voudig vertakkingspunt γ.

$h(\zeta)$ beeldt $R(\zeta)>0$ af op het gehele opp. R; $g(1)=h(1)=1$.

Gest. $|g'(1)|\leq|h'(1)|$. = teken alleen als $g\equiv h$, op „rotaties" na.

2. *Geg.* $w=f(z)$ is holomorf en heeft pos. reëel deel voor $R(z)>0$. $f(1)=1$, $f(z)\neq\alpha$, $R\alpha=a$, $|1+\bar\alpha|=p|1-\alpha|$, $|\arg(1+\bar\alpha)-\arg(1-\alpha)|=$
$=\psi$, $0\leq\psi\leq\pi$. $\lambda=\lim\limits_{z\to\infty}\operatorname{ang} f'(z)$.

Te bew. $\lambda\leq\dfrac{2a\log p}{\log^2 p+\psi^2}$.

Bew. Stel $\Phi(z)=\left(\log\dfrac{w+\bar\alpha}{w-\alpha}\right)^{-1}$, dan is $\Phi(z)$ holomorf met pos. reëel deel in $Rz>0$; $\lim\limits_{z\to\infty}\operatorname{ang}\Phi'(z)=\dfrac{\lambda}{2a}$.

$$R\Phi(1)=R\frac{1}{\log p+i(2k\pi\pm\psi)}\leq\frac{\log p}{\log^2 p+\psi^2},\ k=\text{geheel getal.}$$

Volgens (D): $\dfrac{\lambda}{2a}\leq R\Phi(1)$, of: $\lambda\leq\dfrac{2a\log p}{\log^2 p+\psi^2}$.

Transformatie naar de eenheidscirkel levert Satz II van UNKELBACH:

$$\lambda=\frac{1}{D_{r\varphi}},\ \alpha=\frac{1+re^{\varphi i}}{1-re^{\varphi i}},\ 2a=\alpha+\bar\alpha=\frac{2(1-r^2)}{1+r^2-2r\cos\varphi},\ p=\left|\frac{1+\bar\alpha}{1-\alpha}\right|=r^{-1},$$

$$\pm\psi=\operatorname{im}\log\frac{1+\bar\alpha}{1-\alpha}=\operatorname{im}\log\frac{(1-re^{\varphi i})}{re^{\varphi i}(re^{-\varphi i}-1)}=\pi-2\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}-\varphi.$$

Wegens $|\psi|\leq\pi$ moet $-\dfrac{\pi}{2}\leq\operatorname{arctg}\dfrac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}\leq\dfrac{\pi}{2}$ gekozen worden.

Bovenstaande ingevuld geeft de verlangde transformatie:

$$D_{r\varphi}\geq\frac{1-2r\cos\varphi+r^2}{2(1-r^2).(-\log r)}\left\{\log^2 r+\left(2\operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}+\varphi-\pi\right)^2\right\}=M(r,\varphi).$$

Opm. In het halfvlak blijkt Satz II een eenvoudiger gedaante te hebben dan in de cirkel.

3. Ook in de eenheidscirkel kan men Satz I en II een eenvoudiger vorm geven door een lineaire transformatie, n.l.

Geg. $w=f(z)$ is holomorf en $|f(z)|<1$ in $|z|<1$. $f(z)$ is nergens nul in $|z|<1$, $f(0)=c.e^{i\gamma}$, $|\gamma|\leq\pi$, $c<1$, $\lim\limits_{z\to1}\operatorname{ang} f(z)=1$, $\lim\limits_{z\to1}\operatorname{ang} f'(z)\equiv f'(1)$.

Te bew. $|f'(0)|\leq 2c\log\dfrac{1}{c}$ en $f'(1)\geq\dfrac{\log^2 c+\gamma^2}{2\log c^{-1}}$

Bew. Zij $\zeta = \frac{1+z}{1-z}$ dan is $\Phi(\zeta) \equiv \log \frac{1}{w}$ holomorf en $R\Phi > 0$ in $R\zeta > 0$. Dus $|\Phi'(1)| \leq R\Phi(1)$ of $\frac{1}{2c}|f'(0)| \leq \log \frac{1}{c}$ q.e.d.

Verder is:

$$\psi(\zeta) \equiv (-\log w)^{-1} \text{ holomorf en } R\psi > 0 \text{ in } R\zeta > 0.$$

$$\lambda_\psi = \lim_{\zeta \to \infty} \operatorname{ang} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta} = \lim_{z \to 1} \operatorname{ang} \frac{z-1}{(1+z)\log w} = \tfrac{1}{2} \lim_{z \to 1} \operatorname{ang} \frac{z-1}{w-1} = \frac{1}{2f'(1)}$$

$$R\psi(1) = R\frac{-1}{\log ce^{i\gamma}} = \frac{-\log c}{\log^2 c + (\gamma + 2k\pi)^2} \leq \frac{\log c^{-1}}{\log^2 c + \gamma^2}.$$

Uit $\lambda_\psi \leq R\psi(1)$ volgt de tweede te bewijzen formule.

Opm. De grenzen voor $|f'(0)|$ en $f'(1)$ kunnen niet verbeterd worden:

$\Phi_1(z) = e^{\frac{(1-z)(\log^2 c + \gamma^2)}{z(\log c + i\gamma) + \log c - i\gamma}}$ voldoet aan de voorwaarden, terwijl voor deze functie het $=$ teken geldt.

4. Uit **3** kunnen nog enige grenzen voor $|f'(0)|$ en $f'(1)$ worden afgeleid, die onafhankelijk van c of van γ zijn:

1°. De functie $h_1(x) = x \log \frac{1}{x}$ heeft op het vak $(0,1)$ een absoluut maximum van de grootte e^{-1}, dus:

$$|f'(0)| \leq \frac{2}{e} = 0{,}7357\ldots.$$

2°. Wegens $\gamma^2 \geq 0$ is: $f'(1) \geq \frac{1}{2} \log \frac{1}{c}$.

3°. De functie $h_2(x) = \frac{x^2 + \gamma^2}{2x}$ heeft een absoluut minimum voor $x = \gamma$ op het vak $0 \leq x \leq \infty$, dus:

$$f'(1) \geq \frac{\gamma^2 + \gamma^2}{2\gamma} = \gamma$$

5. *Geg.* $w = f(z)$ is holomorf en $Rw > 0$ in $Rz > 0$. $f(1) = 1$, $\lim_{z \to \infty} \operatorname{ang} f(z) = \infty$. Boog B ($Rz = 0$, $Iz < p$) wordt door $f(z)$ glad afgebeeld op een boog B_1 ($Rw = 0$, $-\infty < Iw < p_1$).

$f(z) \neq \alpha, \frac{1+\bar{\alpha}}{1-\alpha} = e^{m+\psi i}$.

Te bew. $p \leq \frac{\pi}{2m} - \frac{m}{2\pi}$.

Bew. $g(w) \equiv \Phi(z) \equiv \left(\log \frac{w+\bar{\alpha}}{w-\alpha}\right)^{-1}$ is holomorf en $R\Phi(z) > 0$ in $Rz > 0$. $\Phi(1) = \left(\log \frac{1+\bar{\alpha}}{1-\alpha}\right)^{-1} = \frac{m-i\psi}{m^2+\psi^2}$.

$g(w)$ beeldt boog B_1 glad af op een boog B_2 van $-\infty i$ tot $p_2 i$ dus door $\Phi(z)$ wordt boog B glad afgebeeld op B_2. Wegens $\Phi(\infty) = \infty$ en $\Phi(1) = \frac{m-i\psi}{m^2+\psi^2}$ zal bij een gegeven boog B_2, dus bij geg. p_2, de grootste p behoren bij de functie $\Phi_m(z) = \frac{1}{m^2+\psi^2}(mz - i\psi)$. [1]) De grootst mogelijke p_2 behoort bij een boog B_2, die correspondeert met $B_1(-\infty i, \infty i)$, dus $p_2 \leq -\frac{1}{2\pi}$. p is dus kleiner dan p_m, behorende bij de afbeelding door $\Phi_m(z)$ en $p_2 = -\frac{1}{2\pi}$. p_m is bepaald door:

$$-\frac{i}{2\pi} = \frac{mp_m i - i\psi}{m^2+\psi^2}$$

of:

$$p_m = -\frac{m^2+\psi^2-2\psi\pi}{2\pi m} = -\frac{(\psi-\pi)^2}{2\pi m} + \frac{\pi^2-m^2}{2\pi m} \leq \frac{\pi^2-m^2}{2\pi m}.$$

Uit $p \leq p_m$ volgt hetgeen te bewijzen was.

Transformatie naar de eenheidscirkel, $\zeta = \frac{z-1}{z+1}$, $\omega = \frac{w-1}{w+1}$ geeft de ongelijkheid die Unkelbach in Satz VI vindt. $f(z)$ gaat dan over in een holom. functie $\omega(\zeta)$, die de waarde $\beta = re^{i\varphi}$ niet aanneemt in

---

[1]) Grondslag is de volgende stelling (Wölner):

Geg. G en g zijn gebieden, die door Jordankrommen begrensd worden, welke een boog AB gemeen hebben, de restboog van g ligt in G; c in g. G en g worden op een ⊙ afgebeeld, waarbij c in het middelpunt van de ⊙ overgaat (bij beide afbeeldingen).

Gestelde: Bij de afbeelding van G wordt boog AB op een grotere boog van de cirkel afgebeeld dan bij de afbeelding van g.

$|\zeta|<1$, terwijl $|\omega(\zeta)|<1$ in $|\zeta|<1$. $\beta=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ geeft $m=\log\frac{1}{r}$, de boog $B\left(-\infty i, \frac{\pi i}{2m}-\frac{mi}{2\pi}\right)$ correspondeert dan met een boog A, waarvan de lengte is:

$2\ \mathrm{arcctg}\left(\frac{\pi}{2m}-\frac{m}{2\pi}\right)=4\mathrm{arctg}\ \frac{\pi}{m}$ zodat de lengte α_r van een boog A van de $\bigcirc|\zeta|=1$, die door $\omega(\zeta)$ op een gladde boog van $|\omega|=1$ wordt afgebeeld, voldoet aan:

$$\alpha_r \leq 4\ \mathrm{arctg}\ \frac{\pi}{\log r^{-1}}$$

Satz VII, VIII en XII van UNKELBACH, waarin de voorwaarde $f(z)\neq\alpha$ vervangen is door: $f(z)=\alpha$ alleen in vertakkingspunten van de n^e orde, kunnen op overeenkomstige manier korter bewezen worden.

§ 1. *Functies welker waardenvoorraad een gebied, dat tot de eenheidscirkel behoort, uitsluiten.*

a. Stelling 1.

Geg. $w=f(z)$ is holomorf, $|w|<1$ en $\left|\frac{w-\alpha}{1-\bar{\alpha}w}\right|>e^{-m}$ voor $|z|<1$, $e^{-m}<|\alpha|=\rho$, $0<\rho<1$, $f(0)=0$.

Te bew. $|w'(0)|\leq\frac{2\rho}{1-\rho^2}\cdot\frac{m}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{m}\log\frac{1}{\rho}\right)$.

Bew. Kies φ zó, dat $\alpha=\rho e^{i\varphi}$. De functie $\Phi(\zeta)$, bepaald door: $\Phi(\zeta)=\log\frac{1-\bar{\alpha}w}{\alpha-w}$, $\zeta=\frac{1+z}{1-z}$, $\Phi(1)=\log\frac{1}{\rho}-i\varphi$, is holomorf en heeft pos. reëel deel in $R\zeta>0$, terwijl $0<R\Phi(\zeta)<m$. Dus $\psi(\zeta)=-ie^{\frac{\pi i}{m}\Phi(\zeta)}$ ligt in het rechterhalfvlak waaruit volgt:

$$|\psi'(1)|\leq R\psi(1)$$

$$|\psi'(1)|=\left|\frac{d\psi}{d\Phi}\right|\cdot\left|\frac{d\Phi}{dw}\right|\cdot\left|\frac{dw}{dz}\right|\cdot\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|=\frac{\pi}{m}e^{\frac{\pi\varphi}{m}}\frac{1-\rho^2}{\rho}|w'(0)|\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$R\psi(1)=Ie^{\frac{\pi i}{m}\left(\log\frac{1}{\rho}-\varphi i\right)}=e^{\frac{\pi\varphi}{m}}\sin\left(\frac{\pi}{m}\log\frac{1}{\rho}\right)$$

dus:
$$\frac{\pi}{m} e^{\frac{\pi\varphi}{m}} \frac{1-\rho^2}{2\rho} |w'(0)| \leq e^{\frac{\pi\varphi}{m}} \sin\left(\frac{\pi}{m} \log \frac{1}{\rho}\right)$$
waaruit volgt hetgeen te bewijzen was.

Opm. Voor $m \to \infty$ komt er Satz I van UNKELBACH.

b. *Functies waarvoor het = teken geldt*:

Neem $\varphi=0$, $\alpha=\rho$. Het = teken geldt als $\psi(\zeta)=A\zeta-Bi$, $A>0$, B reëel. Nu moet $\psi(1)=-ie^{\frac{\pi i}{m}\log\frac{1}{\rho}}$ zijn, of $Ai+B=e^{\frac{\pi i}{m}\log\frac{1}{\rho}}$ dus
$$A = \sin\left(\frac{\pi}{m} \log \frac{1}{\rho}\right), \quad B = \cos\left(\frac{\pi}{m} \log \frac{1}{\rho}\right).$$

Hierin is $A>0$ wegens $m > \log \rho^{-1} > 0$.

De extremale functie is nu bepaald door:
$$e^{\frac{\pi i}{m}\log\frac{1-\rho w}{\rho-w}} = Ai\zeta+B$$
of:
$$\log\frac{1-\rho w}{\rho-w} = \frac{m}{\pi i}\log\frac{C-\bar{C}z}{1-z}; \quad C=e^{\frac{\pi i}{m}\log\frac{1}{\rho}}$$

De log. zijn bepaald door de voorwaarde: beide leden reëel als $z=0$.

Doorloopt z de rand $|z|=1$, dan doorloopt $\frac{C-\bar{C}z}{1-z}$ de gehele reële as, waarbij de punten C^2 en 1 van $|z|=1$ corresponderen met de punten 0 resp. ∞ van de reële as. Als z de $\odot|z|=1$ in pos. zin van C^2 tot 1 doorloopt, dan doorloopt $h(z) \equiv \frac{m}{\pi i} \log \frac{C-\bar{C}z}{1-z}$ de imaginaire as van $-\infty i$ tot ∞i, dus w doorloopt de $\odot|w|=1$ oneindig vaak. Doorloopt z de andere boog van $\odot|z|=1$, dan is $\frac{C-\bar{C}z}{1-z}<0$, dus $h(z)$ doorloopt een lijn // de imaginaire as en op afstand m daarvan gelegen, dus w doorloopt oneindig vaak de $\odot$: $\left|\frac{w-\rho}{1-\rho w}\right|=e^{-m}$.

c. Stelling 2.

Geg. $w=f(z)$ is holomorf en $\mathfrak{R}w>0$ voor $\mathfrak{R}z>0$. $\lim\limits_{z\to\infty} \text{ang}\, f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to 0} \text{ang}\, f(z)=0$, $\lim\limits_{z\to\infty} \text{ang}\, f'(z)=\lambda$, $\lim\limits_{z\to 0} \text{ang}\, f'(z)=f'(0)$.
$$\left|\frac{w+\bar{\alpha}}{w-\alpha}\right| < e^m, \; m>0, \; \arg\alpha=\frac{\pi}{2}-\psi, \; 0<\psi\leq\frac{\pi}{2}, \; \mathfrak{R}(\alpha)=a.$$

Te bew. $f'(0) \geq \dfrac{m^2\lambda}{\pi^2 \sin^2 \psi} \operatorname{sh}^2 \dfrac{\pi\psi}{m}$.

Bew. $\Phi(z) = -i\left(1 - e^{\frac{\pi i}{m} \log \frac{w+\bar{\alpha}}{w-\alpha}}\right)^{-1}$ is holomorf en heeft pos. reëel deel in $Rz > 0$. λ_Φ is de hoekafgeleide van Φ in $z = \infty$.

$$\lambda_\Phi = \lim_{z \to \infty} \operatorname{ang} \frac{\Phi}{z} = \frac{m\lambda}{2\pi a}.$$

$$\lim_{z \to 0} \operatorname{ang} \Phi'(z) = -i\left(1 - e^{\frac{\pi i}{m} \cdot 2\psi i}\right)^{-2} e^{\frac{\pi i}{m} \cdot 2\psi i} \cdot \frac{\pi i}{m} \cdot \frac{2a}{|\alpha|^2} |f'(0)| =$$

$$= \frac{\pi}{2m} \operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi\psi}{m} \cdot \frac{a^2 \sin^2 \psi}{a} \cdot f'(0)$$

Wegens (E): $\lim\limits_{z \to 0} \operatorname{ang} \Phi'(z) \geq \lambda_\Phi$, waaruit volgt h.t.b.w.

d. *Opm.*

Als $m \to \infty$ komt er de stelling [1]):

Als $w = f(z)$ een holomorfe functie met pos. reëel deel is in D ($Rz > 0$), met de lim ang. $= 0$, resp. ∞ voor $z \to 0$, resp. $z \to \infty$, en de waardenvoorraad van $f(z)$ bevat niet de gehele halfrechte: $|w| > 0$, $\dfrac{\pi}{2} > \arg w = \dfrac{\pi}{2} - \psi \geq 0$, dan geldt voor de hoekafgeleide $f'(0)$ in nul, resp. λ in ∞, de volgende ongelijkheid:

$$f'(0) \geq \frac{\psi^2\lambda}{\sin^2 \psi}$$

e. *Extremaalfunctie bij* c:

We vinden op dezelfde manier als bij **b**, dat voor $\Phi_2(z)$, bepaald door:

$$\frac{\pi i}{m} \log \frac{\Phi_2(z) + \bar{\alpha}}{\Phi_2(z) - \alpha} = \log\left(1 + \frac{i}{Az + B}\right), \; A = \frac{m\lambda}{2\pi a}, \; B = -i\left(1 - e^{-\frac{2\pi\psi}{m}}\right)^{-1}$$

het $=$ teken geldt, en dat deze functie het halfvlak $Rz > 0$ afbeeldt op een oneindig-bladig Riem. oppervlak, liggend op de „ring" tussen de imag. as en de cirkel Γ: $\left|\dfrac{\Phi_2 + \bar{\alpha}}{\Phi_2 - \alpha}\right| = e^m$. De log. moet zo gekozen worden dat $\Phi_2(0) = 0$.

[1]) Prof. J. Wolff, *Sur les fonctions holomorphes dont l'ensemble des valeurs est soumis à certaines restrictions.* Proceedings Vol. XLIII, No. 8, 1940.

We bekijken deze afbeelding wat nader en voeren ze daarom in étappen uit:

$$z_1 = 1 + \frac{i}{Az+B};\ z_2 = \frac{m}{\pi i}\log z_1;\ z_3 = e^{z_2};\ \frac{w+\bar{\alpha}}{w-\alpha} = z_3;\ w = \Phi_2(z).$$

De cirkels door de punten $-\frac{B}{A} \equiv D$ en $\frac{-i-B}{A} \equiv E$ (fig. 1) gaan achtereenvolgens over in de lijnen:

$\arg z_1 = \text{const.}$; $Rz_2 = \text{const.}$; $|z_3| = \text{const.}$; cirkels $\left|\frac{w+\bar{\alpha}}{w-\alpha}\right| = \text{const.}$

De cirkels van Apollonius t.o.v. de punten D en E gaan achtereenvolgens over in de krommen:

$|z_1| = \text{const.}$; $Iz_2 = \text{const.}$; $\arg z_3 = \text{const.}$; cirkels $\arg\frac{w+\bar{\alpha}}{w-\alpha} = \text{const.}$

Opgemerkt zij, dat men niet de gehele cirkels krijgt, doch slechts de bogen tussen imaginaire as en cirkel Γ (fig. 2).

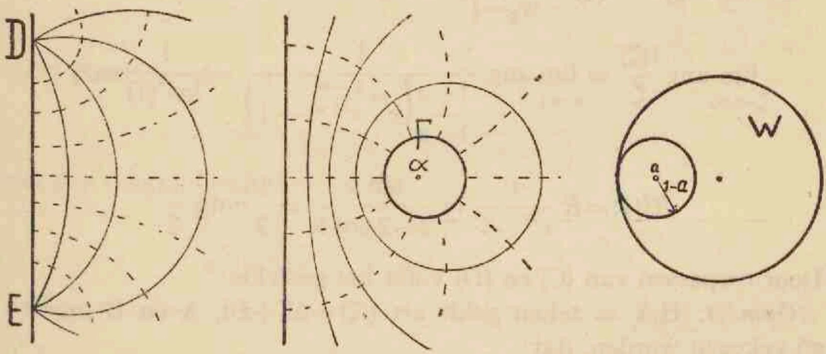

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Als z loopt van D naar E langs een cirkel door D en E, dan doorloopt w oneindig vaak een cirkel $|w+\bar{\alpha}| : |w-\alpha| = \text{const.}$ Met het stuk der imag. as in het z-vlak *buiten* D en E correspondeert de o.v. (oneindig vaak) doorlopen imag. w-as, met het stuk der imaginaire z-as *tussen* D en E correspondeert de o.v. doorlopen cirkel Γ. Als z van een punt van ED naar een punt van het verlengde van ED loopt langs een cirkel van Apollonius, Γ_1, dan loopt w van Γ tot $Rw=0$ langs een boog Γ_2 van een cirkel $\arg(w+\bar{\alpha}) - \arg(w-\alpha) = \text{const.}$ Als Γ_1 zich samentrekt tot E, dan draait Γ_2 o.v. om α.

f. Stelling 3. (fig. 3)

Geg. $w(z)$ holomorf, $|w(z)| < 1$ en $|w+a| > 1-a$ in $|z| < 1$, $w(0)=0$, $\frac{1}{2} < a < 1$, $k = \pi . \frac{1-a}{a}$, $\lim\limits_{z \to 1} \operatorname{ang} w(z) = 1$, $\lim\limits_{z \to 1} \operatorname{ang} w'(z) = w'(1)$.

Te bew. $|w'(0)| \leq \frac{\sin k}{k}$; $w'(1) \geq \frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2}$.

Bew. Stel $w_1 = k\frac{1-w}{1+w}$, $w_2 = e^{iw_1}$, $\zeta = \frac{1+z}{1-z}$, (1)

$g(\zeta) \equiv -iw_2$ is holomorf en $Rg(\zeta) > 0$ voor $R\zeta > 0$.

$$g'(\zeta) = ke^{ik\frac{1-w}{1+w}} . \left(\frac{1-z}{1+w}\right)^2 w'(z)$$

$$|g'(1)| = k|w'(0)|, \ Rg(1) = \sin k$$

Volgens (A): $k|w'(0)| \leq \sin k$ q.e.d.

Zij vervolgens $f(\zeta) = \frac{i}{w_2 - 1}$, dan is:

$$\lim_{\zeta \to \infty} \operatorname{ang} \frac{f(\zeta)}{\zeta} = \lim_{z \to 1} \operatorname{ang} \frac{i}{\frac{1+z}{1-z}\left(e^{ik\frac{1-w}{1+w}} - 1\right)} = \frac{1}{kw'(1)} = \lambda_f$$

$$Rf(1) = R\frac{i}{e^{ik}-1} = \frac{\sin k}{2-2\cos k} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{k}{2}$$

Door toepassen van (C) en (D) volgt het gestelde.

Opm. 1. Het = teken geldt als $f(\zeta) = A\zeta + Bi$, A en B moeten zó gekozen worden, dat:

$$f(1) = i(e^{ki} - 1)^{-1}, \ A > 0 \text{ en B reëel.}$$

Zij nu $\Phi_3(z)$ bepaald door (zie (1)):

$$k\frac{1-\Phi_3}{1+\Phi_3} = w_1, \ \frac{i}{w_2 - 1} = A\zeta + Bi \text{ of } \frac{1-\Phi_3}{1+\Phi_3} = \frac{1}{ki}\log\frac{z + e^{ik}}{e^{ik}z + 1}$$

dan zal voor $\Phi_3(z)$ in de hier bewezen formules het = teken gelden. De gevonden grenzen kunnen dus niet verbeterd worden.

Opm. 2. Als a loopt van $\frac{1}{2}$ tot 1, dan loopt k van π tot 0, dus $\frac{\sin k}{k}$ van 0 tot 1 en $\frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2}$ van ∞ tot 1.

Opm. 3. De waarde $b = 1 - 2a$ wordt door $w(z)$ niet aangenomen, volgens UNKELBACH is dus $|w'(0)| < \mathfrak{M}(b)$ (blz. 2) en $w'(1) \geq M(b,\pi)$. Men ziet gemakkelijk in, dat voor corresponderende k en b:

$$\mathfrak{M}(b) \geq \frac{\sin k}{k} \text{ en } M(b,\pi) \leq \frac{2}{k} \operatorname{tg} \frac{k}{2} \text{ is.}$$

g. Stelling 4.

Geg. Als bij f, i.p.v. $w(0)=0$, $\frac{1}{2}<a<1$ echter:

$$0<1<a, \lim_{z\to -1} \operatorname{ang} w'(z)=w'(-1), \lim_{z\to -1} \operatorname{ang} w(z)=1-2a.$$

Te bew. $w'(-1) \,.\, w'(1) \geq \frac{4a^2}{\pi^2}$.

Bew. Zij $f(\zeta)$ en k als bij **f**, dan is $w_1=\pi$ voor $z=-1$, dus $\lim_{\zeta\to 0} \operatorname{ang} f(\zeta) = -\frac{i}{2}$.

$$\lim_{\zeta\to 0} \operatorname{ang} f'(\zeta) = \frac{-ke^{\pi i}}{(e^{\pi i}-1)^2} \cdot \frac{4}{(2-2a)^2} \cdot w'(-1) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1-a}{a} \cdot \frac{w'(-1)}{(1-a)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{w'(-1)}{a(1-a)}.$$

Bij **f** is afgeleid:

$$\lambda_f = \frac{1}{kw'(1)} = \frac{a}{\pi(1-a)w'(1)}$$

met (E) volgt hieruit:

$$\frac{a}{\pi(1-a)w'(1)} \leq \frac{\pi w'(-1)}{4a(1-a)} \to \text{q.e.d.}$$

Het = teken geldt hier voor dezelfde functie $\Phi_3(z)$ als bij **f**, nl. k vervangen door $\pi\frac{1-a}{a}$ geeft:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_3'(-1) &\equiv \lim_{z\to -1} \operatorname{ang} \Phi_3'(z) = \frac{2a}{\pi}(1-a) \operatorname{cotg} \frac{k}{2} \\ \Phi_3'(1) &= \frac{2a}{1-a} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{tg} \frac{k}{2} \end{aligned}\right\} \to \Phi_3'(1).\Phi_3'(-1) = \frac{4a^2}{\pi^2}.$$

Ook hier kan de gevonden grens dus niet verbeterd worden.

Opm. Op het eerste gezicht zou men een dalende functie voor de grens verwachten. Immers, een grotere a geeft een kleinere cirkel van waarden die w niet aan mag nemen, wat een minder sterke beperking lijkt. Toch blijkt dit, tezamen met $w(-1)=1-2a$, een sterkere beperking voor w(z) te zijn, want er hoort een grotere grens bij.

Stelt men $a=1$, dan gaat het geg. over in:
$w(z)$ holomorf en $|w(z)|<1$ voor $|z|<1$, $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang } w(z)=1$,
$\lim\limits_{z\to -1} \text{ang } w(z)=-1$, $\lim\limits_{z\to -1} \text{ang } w'(z)=w'(-1)$, $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang } w'(z)=w'(1)$.
Zoals bekend is, geldt nu: $w'(1).w'(-1)\geq 1$.

De grens is dus discontinu bij $a=1$, want $\lim\limits_{a\to 1} \frac{4a^2}{\pi^2}=\frac{4}{\pi^2}<1$.

§ 2. *Functies die een geg. waarde slechts één maal aannemen.*

a. Stelling 5.

Geg. $w(z)$ is holomorf en $|w(z)|<1$ voor $|z|<1$, $w(0)=0$.
$w(z)=\alpha\neq 0$ als en alleen als $z=\beta$, $w'(\beta)\neq 0$.

Te bew. $$|w'(0)|\leq \frac{2|\alpha| \log\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|+\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|(1-|\beta|^2)}{1-|\alpha|^2}. \qquad (1)$$

Bew. Volgens een uitbreiding van het theorema van SCHWARZ is $f(z)\equiv\frac{w-\alpha}{\bar{\alpha}w-1}\cdot\frac{\bar{\beta}z-1}{z-\beta}$ holomorf en $|f(z)|<1$ voor $|z|<1$, terwijl $f(z)\neq 0$ in $|z|<1$ (volgt uit het geg.).

Zij $g(\zeta)=\log\frac{1}{f(z)}$, $\zeta=\frac{1+z}{1-z}$, dan is $g(\zeta)$ holomorf en heeft pos. reëel deel in $R\zeta>0$.

$$g'(1)=\left\{\left(\frac{1}{\alpha}-\bar{\alpha}\right)w'(0)-\frac{1}{\beta}+\bar{\beta}\right\}\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_1=\frac{1-|\alpha|^2}{2\alpha}\cdot w'(0)-\frac{1-|\beta|^2}{2\beta}$$

$|g'(1)|\leq Rg(1)=\log\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$ geeft: $\frac{1-|\alpha|^2}{2|\alpha|}|w'(0)|-\frac{1-|\beta|^2}{2|\beta|}\leq\log\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$

waaruit volgt h.t.b.w.

Het = teken geldt als $g(\zeta)=\zeta\log\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|+i\arg\frac{\beta}{\alpha}$ waaruit na enige herleiding volgt:

$$\frac{\Phi_4(z)-\alpha}{\bar{\alpha}\Phi_4(z)-1}=\frac{z-\beta}{\bar{\beta}z-1}e^{\frac{\bar{c}z+c}{1-z}},\ c=\log\frac{\alpha}{\beta}.$$

Voor $\Phi_4(z)$ wordt (1) dus een gelijkheid, terwijl $\Phi_4(z)$ aan de geg. voorwaarden voldoet. De gevonden grens kan dus niet verbeterd worden.

Opm. 1. Als bovendien gegeven is dat w „schlicht” is, dan volgt uit de bewijsvoering:

$$\left|\frac{1-|w|^2}{w}\,w'(0)-\frac{1-|z|^2}{z}\right|\leq 2\log\left|\frac{z}{w}\right| \text{ voor iedere z met } |z|<1.$$

Opm. 2. Neemt men $\alpha=\beta=0$, dan komt er:

$$\left|\frac{w''(0)}{w'(0)}\right|\leq 4\log\frac{1}{|w'(0)|} \text{ (zie stelling 11).}$$

b. Stelling 6.

Geg. $w(z)$ is holomorf en $Rw>0$ in $Rz>0$. $w(z)=\alpha$ als en alleen als $z=\beta$, $w'(\beta)\neq 0$, $R\alpha=a$, $R\beta=b$; $\lim\limits_{z\to 0}\text{ang } w(z)=0$, $\lim\limits_{z\to\infty}\text{ang } w'(z)=\lambda$ $\lim\limits_{z\to 0}\text{ang } w'(z)=w'(0)$.

Te bew. $w'(0)\geq\frac{b}{a}\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2+\frac{|\alpha|^2\lambda}{a(a-b\lambda)}\left(\arg\frac{\alpha}{\beta}\right)^2.$

Bew. $f(z)\equiv\left(\log\frac{z-\beta}{z+\bar{\beta}}\cdot\frac{w+\bar{\alpha}}{w-\alpha}\right)^{-1}$ heeft pos. reëel deel in $Rz>0$ (dezelfde redenering als bij a).

$$f'(0)\equiv\lim_{z\to 0}\text{ang } f'(z)=\left[\frac{-1}{\beta}-\frac{1}{\bar{\beta}}+\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\right)w'(0)\right]\left(2\arg\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-2}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{|\alpha|^2}w'(0)-\frac{b}{|\beta|^2}\right)\left(\arg\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-2}$$

$$\lambda_f=\lim_{z\to\infty}\text{ang}\frac{f(z)}{z}=\left[\lim_{z\to\infty}\left(z\log\frac{z-\beta}{z+\bar{\beta}}\right)+\lim_{z\to\infty}\text{ang } z\log\frac{w+\bar{\alpha}}{w-\alpha}\right]^{-1}=\frac{\lambda}{2(a-b\lambda)}$$

Uit $f'(0)\geq\lambda_f$ volgt het gestelde.

§ 3. *Functies met gelijke randwaarden in verschillende punten.*

a. Stelling 7.

Geg. $w(z)$ holomorf met pos. reëel deel in $Rz>0$, $w(z)\neq\alpha=a+bi$, $\lim\limits_{z\to\infty}\text{ang } w(z)=\lim\limits_{z\to 0}\text{ang } w(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\text{ang } w'(z)=\lambda$, $\lim\limits_{z\to 0}\text{ang } z.w(z)=\mu$. Het beeld van de pos. reële as loopt n maal om α.

Te bew. $\lambda\mu\leq\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2.$

Bew. $f(z)=\left(\log\frac{w+\bar{\alpha}}{w-\alpha}\right)^{-1}$ is holomorf en heeft pos. reëel deel in $Rz>0$. De log. is zó bepaald, dat $f(z)\to\infty$ als $z\to\infty$ langs de reële as.

$$\lim_{z\to\infty}\text{ang}\,\frac{f(z)}{z}=\lim_{z\to\infty}\text{ang}\left[z\log\left(1+\frac{2a}{w-\alpha}\right)\right]^{-1}=\frac{1}{2a}\lim_{z\to\infty}\text{ang}\,\frac{w-\alpha}{z}=\frac{\lambda}{2a}$$

Als z loopt van ∞ naar 0, dan neemt $\{\arg(w+\bar{\alpha})-\arg(w-\alpha)\}$ met $2n\pi$ toe of af, dus $f(0)=\frac{\varepsilon i}{2n\pi}$, $\varepsilon^2=1$.

$$f(z)=\left[\log\left(1+\frac{2a}{w-\alpha}\right)\right]^{-1}=\left[-2\pi ni\varepsilon+\frac{2a}{w-\alpha}+\ldots\right]^{-1}=$$

$$=\frac{i\varepsilon}{2n\pi}\left(1-\frac{i\varepsilon}{n\pi}\cdot\frac{a}{w-\alpha}+\ldots\right)$$

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\text{ang}\,\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\text{ang}\,\frac{-i^2\varepsilon^2}{2n^2\pi^2}\cdot\frac{a}{z(w-\alpha)}=\frac{a}{2n^2\pi^2\mu}$$

(E) geeft:

$$\frac{a}{2n^2\pi^2\mu}\geq\frac{\lambda}{2a}\text{ of }\lambda\mu\leq\frac{a^2}{n^2\pi^2}\text{ q.e.d.}$$

Ook hier kan de grens niet verbeterd worden. Het $=$ teken wordt bereikt door de functie:

$$\Phi_5(z)=\left(\alpha e^{\frac{2n\pi}{2az+i}}+\bar{\alpha}\right)\left(e^{\frac{2n\pi}{2az+i}}-1\right)^{-1},$$

die wordt gevonden door te stellen:

$$f(z)\equiv\left(\log\frac{\Phi_5+\bar{\alpha}}{\Phi_5-\alpha}\right)^{-1}=\frac{2az+i}{2n\pi},$$

welke functie aan de geg. voorwaarden voldoet.

b. Stelling 8.

Geg. $w(z)$ holomorf, $|w(z)|<1$ en $w\neq\alpha=re^{i\varphi}$ in $|z|<1$. $\lim\limits_{z\to\beta_1}\text{ang}\,w(z)=\lim\limits_{z\to\beta_2}\text{ang}\,w(z)=1$, $\lim\limits_{z\to\beta_1}\text{ang}\,w'(z)=w'(\beta_1)$, $\lim\limits_{z\to\beta_2}\text{ang}\,w'(z)=w'(\beta_2)$, $2\pi>\arg\beta_1>\arg\beta_2\geq 0$, $|\beta_1|=|\beta_2|=1$. De cirkelboog die $|z|=1$ loodrecht snijdt in β_1 en β_2 en binnen $|z|=1$ ligt, wordt afgebeeld op een kromme, die n maal om α loopt.

Te bew. $|w'(\beta_1)\cdot w'(\beta_2)|\geq\left(\frac{2n\pi}{|\beta_1-\beta_2|}\,\frac{|1-\alpha|^2}{1-|\alpha|^2}\right)^2.$

Bew. Stel $\omega=\frac{1+w}{1-w}$, $\zeta=\frac{z-\beta_1}{z-\beta_2}\cdot\sqrt{\frac{-\beta_2}{\beta_1}}$, waarin $\sqrt{\frac{-\beta_2}{\beta_1}}$ zó gekozen moet worden, dat: $\frac{\pi}{2}\leq \arg\sqrt{\frac{-\beta_2}{\beta_1}}<\frac{3\pi}{2}$, dan is $\omega(\zeta)$ holomorf met pos. reëel deel voor $R\zeta>0$, terwijl $\omega(0)=\omega(\infty)=\infty$.

$$\lim_{\zeta\to\infty}\text{ang}\,\frac{\omega}{\zeta}=\lim_{z\to\beta_2}\text{ang}\left|\frac{z-\beta_2}{z-\beta_1}\right|\cdot\left|\sqrt{\frac{\beta_1}{-\beta_2}}\right|\cdot\left|\frac{1+w}{1-w}\right|\,{}^{1)}=$$

$$=\lim_{z\to\beta_2}\text{ang}\left|\frac{z-\beta_2}{1-w}\right|\cdot\left|\frac{1+w}{z-\beta_1}\right|=\frac{2}{|w'(\beta_2)|\cdot|\beta_2-\beta_1|}$$

$$\lim_{\zeta\to 0}\text{ang}\,\omega\,.\,\zeta=\lim_{z\to\beta_1}\text{ang}\left|\frac{z-\beta_1}{z-\beta_2}\right|\cdot\left|\frac{1+w}{1-w}\right|=\frac{2}{|w'(\beta_1)|\cdot|\beta_2-\beta_1|}$$

$\omega\neq\frac{1+re^{i\varphi}}{1-re^{i\varphi}}=\frac{1-r^2+i(\ldots.)}{1+r^2-2r\cos\varphi}$, dus de a van stelling 7 is: $\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\alpha|^2}$

Met stelling 7 volgt hieruit:

$$\frac{4}{|w'(\beta_1)w'(\beta_2)|\cdot|\beta_1-\beta_2|^2}\leq\left(\frac{1-|\alpha|^2}{n\pi|1-\alpha|^2}\right)^2\to\text{ q.e.d.}$$

Daar stelling 8 een transformatie is van stelling 7, kan de hier gevonden grens evenmin verbeterd worden als bij stelling 7.

c. Stelling 9.

Geg. $|w(z)|<1$ en $w(z)$ holomorf voor $|z|<1$, $w(z)=0$ als en alleen als $z=0$, $w'(0)\neq 0$. $\lim\limits_{z\to 1}\text{ang}\,w(z)=1=\lim\limits_{z\to -1}\text{ang}\,w(z)$,
$\lim\limits_{z\to -1}\text{ang}\,w'(z)=w'(-1)$, $\lim\limits_{z\to 1}\text{ang}\,w'(z)=w'(1)$.

Te bew. $\{w'(1)-1\}\{-w'(-1)-1\}\geq\frac{\pi^2}{4}$.

Bew. $f(z)=z^{-1}.w\neq 0$, $f(z)$ holomorf en $|f(z)|<1$ als $|z|<1$, $f'(z)=\frac{w'}{z}-\frac{w}{z^2}$, $\lim\limits_{z\to 1}\text{ang}\,f'(z)=w'(1)-1$, $\lim\limits_{z\to -1}\text{ang}\,f'(z)=-w'(-1)-1$.
Volgens de stelling uit § 1, **d** is dus:

$$(w'(1)-1)\,(-w'(-1)-1)\geq\frac{\pi^2}{4}\left(\psi=\frac{\pi}{2}\right)$$

---

1) Omdat $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\text{ang}\,\frac{\omega}{\zeta}\geq 0$, mogen we hiervoor $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\text{ang}\left|\frac{\omega}{\zeta}\right|$ in de plaats zetten.

Opm. 1. Beide factoren van het linkerlid zijn positief, want $w'(1) > 1$ en $-w'(-1) > 1$ (bekende stellingen).

Opm. 2. Is nog gegeven: $-w'(-1) = w'(1)$, dan volgt uit stelling 9:

$$w'(1) \geq \tfrac{1}{2}\pi + 1 = 2{,}57079\ldots.$$

Opm. 3.

Het = teken geldt voor de functie $\Phi_6(z) = z.e^{\frac{\pi(z-1)}{(1+i)z+1-i}}$.

Men ziet: $\Phi_6(1) = \Phi_6(-1) = 1$, $\Phi_6(z) = 0$ alleen als $z = 0$ en $|\Phi_6(z)| < 1$ want $R\dfrac{\pi(z-1)}{(1+i)z+1-i}$ heeft het teken van:

$$R(z-1)\{(1-i)\bar{z}+1+i\} = R\{|z|^2 - 1 + (z-\bar{z}) + i(z+\bar{z})\} < 0 \quad \text{als} \quad |z| < 1$$

$\Phi_6(z)$ voldoet dus aan de gestelde voorwaarden, terwijl:

$$\Phi_6'(z) = \frac{\Phi_6(z)}{z} + \frac{2\pi\Phi_6(z)}{\{(1+i)z+1-i\}^2}, \quad \text{dus}$$

$$(\Phi_6'(1)-1)(-\Phi'_6(-1)-1) = \frac{2\pi}{4} \cdot \frac{-2\pi}{(2i)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

§ 4. *Functies met vertakkingspunten.*

a. Stelling 10.

Geg. $w(z)$ is holomorf en $|w| < 1$ voor $|z| < 1$, $w(0) = w'(0) = \ldots = w^{(n-1)}(0) = 0$, $\lim\limits_{z \to 1} \text{ang}\, w(z) = 1$, $\lim\limits_{z \to 1} \text{ang}\, w'(z) = w'(1)$.

Te bew. $w'(1) \geq n$.

Bew. $g(z) \equiv \dfrac{w(z)}{z^{n-1}}$ is holomorf en $|g(z)| < 1$ in $|z| < 1$ (herhaalde toepassing van Schwarz) $g(0) = 0$.

$$\lim_{z \to 1} \text{ang}\; g(z) = w'(1) - (n-1)w(1) \geq 1 \to w'(1) \geq n \text{ q.e.d.}$$

Het = teken geldt voor $w = z^n$.

b. Stelling 11.

Geg. $w(z) = az^n + bz^{n+1} + \ldots$, $|z| < 1$, $a \neq 0$, n is een natuurlijk getal, $|w(z)| < 1$ als $|z| < 1$, $w(z) \neq 0$ als $z \neq 0$.

Te bew. $\left|\dfrac{b}{a}\right| \leq 2 \log \dfrac{1}{|a|}$.

Bew. Stel $f(z)=a+bz+\ldots=z^{-n}.w(z)$, dan is:
$f(z)$ holomorf en $f(z)\neq 0$ in $|z|<1$, en $|f(z)|<1$ in $|z|<1$. Volgens **3** (inleiding) is dan:

$$|f'(0)|\leq 2\,|f(0)|\log\frac{1}{|f(0)|}\text{ of }|b|\leq 2|a|\log\frac{1}{|a|}\text{ q.e.d.}$$

Opm. 1. Voor $n=1$ komt hetzelfde resultaat als in stelling 5, opm. 2, want in dit geval is $a=w'(0)$ en $b=\frac{1}{2}w''(0)$.

Opm. 2. Het $=$ teken geldt voor $\Phi_7(z)=z^n\Phi_1(z)$ (zie **3**, inleiding).

c. Stelling 12.

Geg. $w(z)=a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\ldots$, $|w(z)|<1$ voor $|z|<1$, $a_n=ce^{i\gamma}$, $w(z)\neq 0$ als $z\neq 0$, $\lim\limits_{z\to 1}\operatorname{ang} w(z)=1$, $\lim\limits_{z\to 1}\operatorname{ang} w'(z)=w'(1)$.

Te bew. $w'(1)\geq n+\dfrac{\log^2 c+\gamma^2}{2\log c^{-1}}$.

Bew. Stel $g(z)=z^{-n}.w(z)$, dan is $g(z)$ holomorf, $g(z)\neq 0$ en $|g(z)|<1$ voor $|z|<1$. $g(0)=ce^{i\gamma}$, dus volgens **3** (inl.)

$$\left.\begin{aligned} &g'(1)\equiv\lim_{z\to 1}\operatorname{ang} g'(z)\geq\frac{\log^2 c+\gamma^2}{2\log c^{-1}}\\ &g'(z)=-n\,z^{-n-1}.w(z)+z^{-n}.w'(z),\text{ dus } g'(1)=w'(1)-n\end{aligned}\right\}\to\text{q.e.d.}$$

d. Stelling 13.

Geg. $|f(z)|<1$, $f(z)$ holomorf en $\neq 0$ als $|z|<1$, $f'(\alpha)=0$, $f(\alpha)=ce^{i\gamma}$, $0<c<1$, $-\pi<\gamma\leq\pi$, $\lim\limits_{z\to 1}\operatorname{ang} f(z)=1$, $\lim\limits_{z\to 1}\operatorname{ang} f'(z)=f'(1)$.

Te bew. $f'(1)\geq\dfrac{\log^2 c+\gamma^2}{\log c^{-1}}\cdot\dfrac{1-|\alpha|^2}{|1-\alpha|^2}$.

Bew. $w\equiv-\log f(z)$ is holom. en heeft pos. reëel deel in $|z|<1$. $w(1)=0$ (zo is de log. gekozen), $w(\alpha)=-\log c-i(\gamma+2k\pi)\equiv\beta$, $w'(\alpha)=0$. Stel $g(\zeta)=\dfrac{\beta-w}{w+\bar\beta}\cdot\dfrac{\bar\beta}{\beta}$, $\zeta=\dfrac{z-\alpha}{\bar\alpha z-1}\cdot\dfrac{\bar\alpha-1}{1-\alpha}$, dan voldoet $g(\zeta)$ aan de voorwaarden van stelling 10, dus $\lim\limits_{z\to 1}\operatorname{ang} g'(z)\geq 2$

$$\text{dus }\lim_{z\to 1}\operatorname{ang}\frac{\beta+\bar\beta}{(w+\bar\beta)^2}\cdot\frac{\bar\beta}{\beta}\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot\frac{dz}{d\zeta}\geq 2,\text{ of:}$$

$$\frac{\beta+\bar\beta}{\beta\bar\beta}\cdot\frac{f'(1)|1-\alpha|^2}{1-|\alpha|^2}=\frac{-2\log c\,.\,f'(1)}{\log^2 c+(\gamma+2k\pi)^2}\cdot\frac{|1-\alpha|^2}{1-|\alpha|^2}\geq 2$$

waaruit het gestelde volgt wegens $(\gamma+2k\pi)^2\geq\gamma^2$.

Het = teken geldt als $g(z)=z^2$, dus voor de functie $\Phi_8(z)$ bepaald door:

$$\Phi_8(z)=e^{-w(z)}, \frac{\beta-w(z)}{w(z)+\bar\beta}\cdot\frac{\bar\beta}{\beta}=\zeta^2,\ \beta=-\log c-i\gamma.$$

$\Phi_8(z)$ voldoet aan het geg., dus kan de gevonden grens niet verbeterd worden.

§ 5. *Even en oneven functies.*

a. Stelling 14.

Geg. $w(z)$ is holom. en even, $|w|<1$ voor $|z|<1$; $w(0)=0$, $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang } w(z)=1$.

Te bew. $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang } w'(z) \geq 2$.

Bew. Aangezien $w'(0)=0$, volgt het gestelde uit stelling 10. De grens kan niet verbeterd worden: $w_0 \equiv z^2$ voldoet aan de voorwaarden, terwijl $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang } w_0'(z)=2$. Merkwaardig is dat de veel sterkere voorwaarde „w even" toch geen scherpere grens geeft dan de voorwaarde $w'(0)=0$.

b. *Toepassing van stelling 14 op niet-even functies.*

Stelling 15.

Geg. $f(z)$ is holomorf en $|f(z)|<1$ voor $|z|<1$, $f(0)=0$. $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang } f'(z)=f'(1)$, $\lim\limits_{z\to -1} \text{ang } f'(z)=f'(-1)$, $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang } f(z)=$

$$= \lim_{z\to -1} \text{ang } f(z)=1.$$

Te bew. $f'(1)-f'(-1)\geq 4$.

Bew. Stel $f(z)+f(-z)=2w(z)$, dan voldoet $w(z)$ aan de premissen van stelling 14, dus $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang } w'(z) \geq 2$.

Hieruit volgt: $\dfrac{f'(1)-f'(-1)}{2} \geq 2 \rightarrow$ q.e.d.

c. Stelling 16.

Geg. $w(z)$ is holom. en even, $|w|<1$ als $|z|<1$; $w(z)=0$ alléén als $z=0$, $w''(0)\neq 0$.

Te bew. $|w^{(IV)}(0)| \leq 24\ |w''(0)| \log \dfrac{2}{|w''(0)|}$.

Bew. Stel $\sigma=z^2$, $\Phi(\sigma)\equiv w(z)=\dfrac{w''(0)}{2!}\sigma+\dfrac{w^{(IV)}(0)}{4!}\sigma^2+\dots$

waaruit $\Phi^{(n)}(0)$ afgelezen kan worden.

Uit stelling 11 volgt: $|\Phi''(0)| \leq 4|\Phi'(0)| \log |\Phi'(0)|^{-1}$ waaruit:

$$\frac{|w^{(IV)}(0)|}{12} \leq 2\,|w''(0)|\,.\log \frac{2}{|w''(0)|}$$

Deze grens kan niet verbeterd worden. Zij nl. $\Phi_9(z) \equiv \Phi_7(z^2)$ (stelling 11, $n=1$). Zoals bekend geldt $|\Phi_7''(0)| = 4|\Phi_7'(0)| \log |\Phi_7'(0)|^{-1}$. Wegens $2\Phi_7'(0) = \Phi_9''(0)$ en $\Phi_9^{(IV)}(0) = 12\,\Phi_7''(0)$ volgt hieruit:

$$\frac{|\Phi_9^{(IV)}(0)|}{12} = 2\,|\Phi_9''(0)| \log \frac{2}{|\Phi_9''(0)|}$$

zodat voor $\Phi_9(z)$ het $=$ teken geldt.

d. Stelling 17.

Geg. $w(z)$ is holomorf en even, $|w|<1$ en $w \neq 0$ voor $|z|<1$; $w(0)=ce^{i\gamma}$, $|\gamma| \leq \pi$, $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang}\, w(z) = 1$, $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang}\; w'(z) = w'(1)$.

Te bew. $w'(1) \geq \dfrac{\log^2 c + \gamma^2}{\log c^{-1}}$, $|w''(0)| \leq 4c \log \dfrac{1}{c}$.

Bew. $\Phi(\sigma)$ als boven, dan is $w'(z) = 2z\Phi'(\sigma)$. Het gestelde volgt uit **3** (inleiding) door in te vullen: $2\Phi'(0) = w''(0)$, $2 \lim\limits_{z\to 1} \text{ang}\, \Phi'(\sigma) = w'(1)$. Daar de grenzen voor $w'(1)$ en $|w''(0)|$ gelijk zijn aan $2\Phi_1'(1)$ resp. $2|\Phi_1'(0)|$ (zie **3**, inl.), wordt de grens hier dus bereikt voor $\Phi_{10}(z) \equiv \Phi_1(z^2)$, want dan is $\Phi_{10}'(1) = 2\Phi_1'(1^2)$ en $|\Phi_{10}'(0)| = 2|\Phi_1'(0)|$.

Opm. Is geg. $w(0) < 0$ i.p.v. $w(0) = ce^{i\gamma}$, dan is:

$$w'(1) \geq 2\pi$$

want dan is

$$w'(1) \geq \frac{\log^2 c + \pi^2}{\log c^{-1}} \geq \frac{\pi^2 + \pi^2}{\pi} = 2\pi.$$

e. Stelling 18.

Geg. $w(z)$ holomorf en oneven, $|w|<1$ voor $|z|<1$, $w(z) \neq 0$ als $z \neq 0$, $w'(0) = ce^{i\gamma}$, $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang}\, w(z) = 1$, $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang}\, w'(z) = w'(1)$.

Te bew. $|w'''(0)| \leq 12c \log \dfrac{1}{c}$; $w'(1) \geq \dfrac{\log^2 c + \gamma^2 - \log c}{-\log c}$.

Bew. $w(0)=0$. Stel $w(z) = z\,.\,f(z)$, dan is $f(z)$ een even functie, die aan de premissen van stelling 17 voldoet, dus:

$$|f''(0)| \leq 4c \log \frac{1}{c} \;\text{ en }\; f'(1) \equiv \lim_{z\to 1} \text{ang}\; f'(z) \geq \frac{\log^2 c + \gamma^2}{-\log c}$$

Hieruit volgt het gestelde wegens $f''(0) = \frac{1}{3} w'''(0)$ en $f'(1) = w'(1) - 1$. Het $=$ teken geldt als $f(z) \equiv \Phi_{10}(z)$, dus als $w(z) \equiv z.\Phi_{10}(z)$.

f. Stelling 19.

Geg. $w(z)$ is holomorf, oneven en $\neq\alpha$ in $|z|<1$; $|w|<1$; $|\alpha|=r<1$.

Te bew. $|w'(0)|\leq 2r\sqrt{\dfrac{-\log r}{1-r^4}}$, $r\neq 0$.

Bew. Als $w(z)\neq\alpha$ en oneven is, dan is ook $w(z)\neq-\alpha$, dus $w^2\neq\alpha^2$. w^2 is een holomorfe functie van $z^2=\sigma$. Zij $w(z)=a_1z+ +a_3z^3+a_5z^5+\ldots$, dan is $w^2(z)\equiv f(\sigma)=a_1^2\sigma+2a_1a_3\sigma^2+\ldots\neq\alpha^2$. Volgens Unkelbach, Satz I:

$$|f'(0)|\leq\frac{2r^2\log r^{-2}}{1-r^4}$$

Uit $|f'(0)|=|a_1|^2=|w'(0)|^2$ volgt het gestelde.

Opm. De hier gevonden grens is kleiner dan die bij Unkelbach (er is ook een voorwaarde meer) nl.:

$$\text{te bew. } 2r\sqrt{\frac{\log r^{-1}}{1-r^4}}<\frac{2r\log r^{-1}}{1-r^2}\quad\text{of}\quad\frac{4r^2\log r^{-1}}{1-r^4}<\frac{4r^2\log^2 r^{-1}}{(1-r^2)^2}$$

dus moet $\log\dfrac{1}{r}>\dfrac{1-r^2}{1+r^2}$, wat door Unkelbach is bewezen.

§ 6. *Uitbreiding van het Lemma van Schwarz.*

Zij F de verzameling der functies, die aan de voorwaarden van het *Lemma van Schwarz* voldoen.

a. Stelling 20.

Geg. $w(z)\,\varepsilon\,F$, $w(\beta)=\alpha$, $|\alpha|\neq|\beta|\neq 0$.

Te bew. $\left|\dfrac{\beta w-\alpha z}{\bar\beta z-\bar\alpha w}\right|\leq\left|\dfrac{z-\beta}{1-\bar\beta z}\right|$. (1)

Bew. Uit het geg. volgt: $|w|<|z|$ dus ook $|\alpha|<|\beta|$. Verder dat $w_1(z)\equiv z^{-1}.w(z)$ holomorf en $|w_1|<1$ in $|z|<1$ is, dus:

$$\left|\frac{w_1-\gamma}{1-\bar\gamma w_1}\right|\leq\left|\frac{z-\beta}{1-\bar\beta z}\right|,\quad \gamma=\frac{\alpha}{\beta}\tag{2}$$

waaruit (1) volgt door in te vullen $w_1=z^{-1}.w$ en $\gamma=\alpha.\beta^{-1}$.

Het $=$teken geldt alleen als:

$$\frac{w_1-\gamma}{1-\bar\gamma w_1}=\varepsilon\,\frac{z-\beta}{1-\bar\beta z},\quad|\varepsilon|=1\tag{3}$$

waardoor een holom. functie $w(z)$ bepaald is, die aan het geg. voldoet.

b. Bij gefixeerde z is door (1) een cirkelomtrek Γ bepaald, waarbinnen of waarop w moet liggen. Uit (2) volgt nl., dat w_1 tot een cirkel Γ' met niet-euclidisch middelpt. γ t.o.v. E behoort. Uit Γ' wordt Γ verkregen, door de gehele figuur uit O met z te vermenigvuldigen. w ligt dan in het gearceerde gebied. Deze grens is dus scherper dan „Schwarz", want Γ ligt geheel binnen de $\odot\,|w| \leq |z|$. Opgemerkt dient echter te worden, dat hier gebruik is gemaakt van de functiewaarde in β, wat bij SCHWARZ niet het geval is.

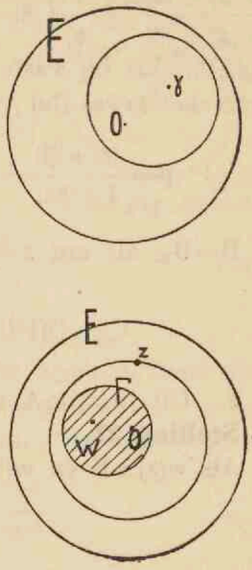

Fig. 4.

c. De punten van Γ met extreme afstand tot O liggen op de lijn door O en $z\gamma$. Voor de maximale afstand B geldt dus:

$$\frac{|\beta|B-|\alpha z|}{|\beta z|-|\alpha|B}=p, \text{ als } p=\left|\frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z}\right|$$

of

$$B=|z|\,.\,\frac{p|\beta|+|\alpha|}{p|\alpha|+|\beta|} \tag{4}$$

De kleinste afstand A nemen we >0 als O buiten Γ, en <0 als O binnen Γ ligt. Dan geldt:

$$\frac{|\alpha z|-A|\beta|}{|\beta z|-A|\alpha|}=p \text{ of } A=|z|\,.\,\frac{|\alpha|-p|\beta|}{|\beta|-p|\alpha|} \tag{5}$$

Uit (4) en (5) volgt:

$$|z|\,\frac{|\alpha|-p|\beta|}{|\beta|-p|\alpha|} \leq |w(z)| \leq |z|\,\frac{|\alpha|+p|\beta|}{|\beta|+p|\alpha|} \tag{6}$$

Hierdoor is $|w(z)|$ dus niet alleen naar boven, maar ook naar beneden begrensd. Intussen is het linkerlid neg. voor $|\alpha|<p|\beta|$, dus voor $\left|\frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z}\right| > \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$, en in dit geval is de eerste ongelijkheid triviaal.

d. *Grens voor $w(z)$ onafhankelijk van arg z.*

$\dfrac{p\,|\beta|+|\alpha|}{p\,|\alpha|+|\beta|}=\dfrac{1}{|\alpha|}\left(|\beta|-\dfrac{|\beta|^2-|\alpha|^2}{p|\alpha|+|\beta|}\right)$ is stijgend voor stijgende p ($p\geq 0$), dus bij vaste $|z|$ is B maximaal, als p max. is, en dit is weer het geval (bij vaste $|z|$) als arg $(z)=$arg $(-\beta)$, dus

$$p=\frac{|z|+|\beta|}{1+|\beta z|}\rightarrow B\leq B_m=|z|\,\frac{|\beta|(|z|+|\beta|)+|\alpha|+|\alpha\beta z|}{|\alpha|(|z|+|\beta|)+|\beta|+|\beta^2 z|}$$

$B=B_m$ als arg $z=$arg $(-\beta)$. Uit $|w(z)|\leq B_m$ volgt:

$$|w(z)|\leq|z|\,\frac{|z|(|\beta|+|\alpha\beta|)+|\alpha|+|\beta|^2}{|z|(|\alpha|+|\beta|^2)+|\beta|+|\alpha\beta|} \tag{7}$$

e. Uit $|w(z)|\geq A$ volgt:

Stelling 21.

Als $w(z)\,\varepsilon\,F$ en $w(\beta)=\alpha$, dan is $w(z)\neq 0$ voor:

$$\left|\frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z}\right|<\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$$

Bew. Voor $\left|\dfrac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z}\right|<\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$ is $A>0$, dus $|w(z)|>0$. (Zie **c.**)

§ 7. *Nader onderzoek van $w'(z)$, als $w(z)\,\varepsilon\,F$.*

a. Stelling 22.

Wanneer $w(z)\,\varepsilon\,F$ en $w(\beta)=\alpha$, dan is

$$\left|\frac{\beta\,w'(0)-\alpha}{\bar{\beta}-\bar{\alpha}\,w'(0)}\right|\leq|\beta|. \tag{8}$$

Bew. Dit volgt meteen uit (1), door in te vullen $z=0$.

Bekend is reeds: $|w'(0)|\leq 1$, dus $w'(0)$ ligt in de eenheidscirkel. Door (8) is een kleinere $\odot$, Γ, bepaald waarbinnen $w'(0)$ moet liggen. We kunnen (8) schrijven:

$$\left|\frac{w'(0)-\gamma}{1-\bar{\gamma}\,w'(0)}\right|\leq|\beta|,\ \gamma=\frac{\alpha}{\beta}$$

dus Γ is weer een cirkel met niet-euclidisch middelpt γ t.o.v. E.

b. Zij weer B de maximale en A de minimale afstand van Γ tot

O (fig. 5, $A>0$ of <0 als in § 6, c). Voor B resp. A geldt dan:

$$\frac{|\beta|B-|\alpha|}{|\beta|-|\alpha|B}=|\beta|\to B=\frac{|\alpha|+|\beta|^2}{|\beta|(1+|\alpha|)} \qquad (9)$$

$$\frac{|\alpha|-|\beta|A}{|\beta|-|\alpha|A}=|\beta|\to A=\frac{|\alpha|-|\beta|^2}{|\beta|(1-|\alpha|)} \qquad (10)$$

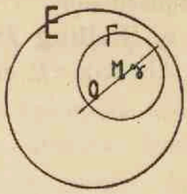

Fig. 5.

Uit (9) en (10) volgt:

$$\frac{|\alpha|-|\beta|^2}{|\beta|(1-|\alpha|)}\leq|w'(0)|\leq\frac{|\alpha|+|\beta|^2}{|\beta|(1+|\alpha|)} \qquad (11)$$

De eerste ongelijkheid van (11) is triviaal als $|\alpha|<|\beta|^2$.

Opm. (11) kan ook meteen uit (6) worden afgeleid, door alle leden door $|z|$ te delen en dan $z\to 0$ (dus $p\to|\beta|$).

Uit (9) en (10) zijn het middelpt M en de straal van Γ te vinden:

$$M:\ \frac{B+A}{2}\cdot\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$$

$$\text{straal:}\quad R=\frac{B-A}{2}=\frac{|\beta|^2-|\alpha|^2}{|\beta|(1-|\alpha|^2)}$$

Hieruit volgt:

$$\left|w'(0)-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}\right|\leq\frac{|\beta|^2-|\alpha|^2}{|\beta|(1-|\alpha|^2)} \qquad (12)$$

Laat men $|\alpha|\to|\beta|$ in (12), dan komt er $|w'(0)|=1$, een bekende stelling.

c. *Grens voor arg $w'(0)$.*

Als $|\alpha|>|\beta|^2$, dan ligt O buiten Γ, en dan is:

$$\left|\arg w'(0)-\arg\frac{\alpha}{\beta}\right|\leq\arcsin\frac{R}{OM}=\arcsin\frac{|\beta|^2-|\alpha|^2}{|\alpha|(1-|\beta|^2)} \qquad (13)$$

d. *=tekens.*

$z=0$ geeft in (3):

$$\frac{w'(0)-\gamma}{1-\bar{\gamma}w'(0)}=-\varepsilon\beta,\ |\varepsilon|=1,\ \gamma=\frac{\alpha}{\beta}$$

Hieruit zien we, dat in (8) het =teken bereikt kan worden. Zelfs kan $w'(0)$ in ieder randpunt van Γ liggen, wegens de vrije keuze van ε.

Uit dit laatste volgt dan weer, dat (11), (12) en (13) de scherpste grenzen zijn.

e. Stelling 23.

Als $w(z) \varepsilon F$ en $w(\beta)=\alpha$, dan is (voor iedere β met $|\beta|<1$):

$$|\beta w'(\beta)-\alpha| \leq \frac{|\beta|^2-|\alpha|^2}{1-|\beta|^2} \tag{14}$$

Bew. (1) (zie § 6, a) kan men schrijven:

$$\left|\frac{\beta w-\alpha z}{z-\beta}\right| \leq \left|\frac{\bar{\beta}z-\bar{\alpha}w}{1-\bar{\beta}z}\right|$$

Laat men hierin $z \to \beta$, dan komt er (14).

$w'(\beta)$ behoort dus tot een cirkel met middelpt. γ en straal $\frac{|\beta|^2-|\alpha|^2}{|\beta|(1-|\beta|^2)}$. (Zie (14).) Deze $\odot$ kan gedeeltelijk buiten de eenheidscirkel liggen. (Zie **f.**)

f. Als A en B weer dezelfde betekenis hebben als in § 6, **c**, dan is:

$$A=\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|-\frac{|\beta|^2-|\alpha|^2}{|\beta|-|\beta|^3} \quad \text{en} \quad B=\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\frac{|\beta|^2-|\alpha|^2}{|\beta|-|\beta|^3},$$

of:

$$A=\frac{|\alpha|^2+(1-|\beta|^2)|\alpha|-|\beta|^2}{|\beta|-|\beta|^3}=\frac{|\alpha|-|\beta|^2}{1-|\beta|^2}\cdot\frac{1+|\alpha|}{|\beta|} \tag{15}$$

$$B=\frac{-|\alpha|^2+(1-|\beta|^2)|\alpha|+|\beta|^2}{|\beta|-|\beta|^3}=\frac{|\alpha|+|\beta|^2}{1-|\beta|^2}\cdot\frac{1-|\alpha|}{|\beta|} \tag{16}$$

Hieruit volgen weer twee grenzen voor $|w'(\beta)|$:

$$\frac{|\alpha|-|\beta|^2}{1-|\beta|^2}\cdot\frac{1+|\alpha|}{|\beta|} \leq |w'(\beta)| \leq \frac{|\alpha|+|\beta|^2}{1-|\beta|^2}\cdot\frac{1-|\alpha|}{|\beta|}$$

Als $|\alpha|>|\beta|^2$, dan is weer $A>0$, dus O buiten Γ, dus

$$\left|\arg w'(\beta)-\arg\frac{\alpha}{\beta}\right| \leq \arcsin\frac{|\beta|^2-|\alpha|^2}{|\alpha|(1-|\beta|^2)}$$

g. We zijn nu in staat volgende vragen te beantwoorden ($w(z) \varepsilon F$):

1°. is $w'(z)$ begrensd?

2°. waar kan $w'(z)=1$ zijn?

3°. waar kan $w'(z)=0$ zijn?

4°. bestaat er verband tussen $w'(0)$ en $w'(1)$?

ad 1°.

Het antwoord op deze vraag luidt ontkennend, want als $w(z)=1-\sqrt{1-z}$, dan is $w'(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-z}}$ en dit is niet begrensd in $|z|<1$. Zoals men gemakkelijk ziet, is $w(z)$ holomorf voor $|z|<1$ en $w(0)=0$ (bij goede keuze van de wortel). Door $w_1=\sqrt{1-z}$ wordt de eenheidscirkel afgebeeld op een gebied, dat deel is van $|z+1|\leq 1$ en dus is $|w(z)|<1$, dus $w(z)\,\varepsilon\,F$.

Wel is $w'(z)$ begrensd in iedere $\odot\,|z|\leq\rho<1$, zelfs is er een grens die voor alle functies uit F geldt, bij geg. $\rho<1$.

Bew. $h(\alpha)=-|\alpha|^2+(1-|\beta|^2)|\alpha|+|\beta|^2$ is maximaal als $|\alpha|=\frac{1}{2}(1-|\beta|^2)$, dus:

$$h(\alpha)\leq-\tfrac{1}{4}(1-|\beta|^2)^2+\tfrac{1}{2}(1-|\beta|^2)^2+|\beta|^2=\tfrac{1}{4}(1+|\beta|^2)^2$$

Dit geeft, ingevuld in (16)

$$|w'(\beta)|\leq\frac{(1+|\beta|^2)^2}{4|\beta|(1-|\beta|^2)},\quad|\beta|<1 \tag{17}$$

Zij $b=\frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{|\beta|}-|\beta|\right)$, dan is b een dalende functie van $|\beta|$ en dus is

$$\frac{(1+|\beta|^2)^2}{4|\beta|(1-|\beta|^2)}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-|\beta|^2}{2|\beta|}+\frac{2|\beta|}{1-|\beta|^2}\right)=\tfrac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

een stijgende functie van $|\beta|$ als $0<b<1$, dus als $|\beta|<1$ en $2|\beta|>1-|\beta|^2$ of $|\beta|>\sqrt{2}-1$. Voor $\beta=\sqrt{2}-1$ is deze functie (het rechterlid van (17)) gelijk aan 1.

Voor $\beta<\sqrt{2}-1$ echter, kan $h(\alpha)$ zijn max. niet bereiken wegens $|\alpha|\leq|\beta|$, want de waarde van $|\alpha|$, waarvoor het max. bereikt zou worden, $\frac{1}{2}(1-|\beta|^2)$, is $>|\beta|$ voor $|\beta|<\sqrt{2}-1$. In dit geval is $h(\alpha)$ stijgend voor $0\leq|\alpha|\leq|\beta|$, dus

$$h(\alpha)\leq-|\beta|^2+(1-|\beta|^2)\,|\beta|+|\beta|^2=|\beta|(1-|\beta|^2).$$

Hieruit volgt:

$$B\leq\frac{|\beta|(1-|\beta|^2)}{|\beta|(1-|\beta|^2)}=1\ \text{voor}\ |\beta|\leq\sqrt{2}-1.$$

De grens voor $|w'(\beta)|$ heeft dus een horizontale grafiek voor

$0 \leq |z| \leq \sqrt{2}-1$ en een monotoon stijgende voor $\sqrt{2}-1 < |z| < 1$ (fig. 6).

Men rekent gemakkelijk na, dat de grafiek van (17) een horizontale raaklijn heeft in $|\beta| = \sqrt{2}-1$.

We hebben nu de volgende stelling.

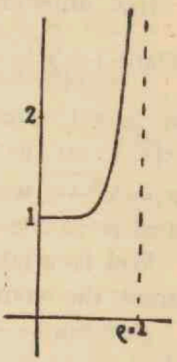

Fig. 6.

Stelling 24.

Als $w(z) \varepsilon F$, *dan is*:

$$|w'(z)| \leq 1 \text{ voor } |z| \leq \sqrt{2}-1$$

en:

$$|w'(z)| \leq \frac{(1+\rho^2)^2}{4\rho(1-\rho^2)} \text{ als } |z| \leq \rho < 1. \qquad (18)$$

Als voor $w = \Phi(z)$ in één punt z_0 met $|z_0| = \rho > \sqrt{2}-1$, (18) een gelijkheid wordt, dan is (behoudens draaiing van w- en z-vlak):

$$\Phi(z) = \frac{(\rho+\rho^3)z^2 + (1-3\rho^2)z}{(1-3\rho^2)z + (\rho+\rho^3)}$$

en geldt in alle andere punten van $|z| < 1$: $|w'(z)| < \dfrac{(1+\rho^2)^2}{4\rho(1-\rho^2)}$

Vullen we in (14) in $|w'(\beta)| = 1$, dan komt er, als $|\alpha| \neq |\beta|$,

$$|\beta w'(\beta)| - |\alpha| \leq \frac{|\beta|^2 - |\alpha|^2}{1-|\beta|^2} \text{ of } |\beta| - |\alpha| \leq \frac{|\beta|^2 - |\alpha|^2}{1-|\beta|^2}, \text{ dus}$$

$$1 \leq \frac{|\beta| + |\alpha|}{1-|\beta|^2} < \frac{2|\beta|}{1-|\beta|^2} \text{ of}$$

$$-|\beta|^2 + 1 < 2|\beta|,\ |\beta|^2 + 2|\beta| - 1 > 0,\ |\beta| > \sqrt{2}-1.$$

Gecombineerd met stelling 24:

Stelling 25.

Als $w(z) \varepsilon F$, *dan is* $|w'(z)| \leq 1$ *voor* $|z| \leq \sqrt{2}-1$. *Als* $|w'(z_0)| = 1$ *in één punt* z_0 *met* $|z_0| \leq \sqrt{2}-1$, *dan is* $w(z) \equiv \varepsilon z$, $|\varepsilon| = 1$.

Hiermee is dan tegelijk de 2e vraag (blz. 24) beantwoord.

ad 3°.

Substitueert men $w'(\beta) = 0$ in (14), dan komt er:

$$|\alpha| \leq \frac{|\beta|^2 - |\alpha|^2}{1-|\beta|^2} \text{ of } |\alpha|^2 + |\alpha|(1-|\beta|^2) - |\beta|^2 \leq 0, \text{ dus } |\alpha| \leq |\beta|^2.$$

We zien dus: als $w'(z_0) = 0$, dan is $|w(z_0)| \leq |z_0|^2$.

z_0 kan willekeurig zijn (mits $|z_0| < 1$), bij iedere z_0 zijn er functies, waarvoor $w'(z_0)=0$, b.v. $w=z\left(\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right)^2$. Aan de functiewaarde $w(z_0)$ is echter een beperking opgelegd.

Vult men in (8) in $w'(0)=0$, dan komt er $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \leq |\beta|$, dus weer $|\alpha| \leq |\beta|^2$, echter nu met een andere betekenis dan boven, want nu geldt het voor iedere β met $|\beta| < 1$, dus: Als $w(z) \varepsilon F$ en $w'(0)=0$, dan is $|w(z)| \leq |z|^2$ voor iedere z met $|z| < 1$. Intussen kan dit resultaat ook gevonden worden door toepassing van „Schwarz" op $z^{-1}.w(z)$.

ad 4°.

Volgende overweging doet een verband tussen $w'(0)$ en $w'(1) \equiv \equiv \lim\limits_{z\to 1} \text{ang } w'(z)$ vermoeden. Als $w(z) \varepsilon F$ en $w(1) = \lim\limits_{z\to 1} \text{ang } w(z) = 1$, dan is $|w'(0)| = 1$ als $w'(1) = 1$ en $|w'(0)| < 1$ als $w'(1) > 1$. Het lijkt er dus op, of $|w'(0)|.w'(1) = 1$. Inderdaad blijkt er een verband te bestaan, zij het dan niet zo eenvoudig als bovengenoemd.

Stelling 26.

Als $w(z) \varepsilon F$ en $\lim\limits_{z\to 1} \text{ang } w(z) = 1$, dan is

$$\left| w'(0) - \frac{1}{w'(1)} \right| \leq 1 - \frac{1}{w'(1)} \tag{19}$$

Bew. Uit (12) (blz. 23) volgt voor iedere z met $|z| < 1$:

$$\left| w'(0) - \frac{w(z)}{z} \cdot \frac{1-|z|^2}{1-|w(z)|^2} \right| \leq \frac{|z|^2-|w(z)|^2}{|z|.(1-|w(z)|^2)}$$

Laat men hierin $z \to 1$ (ang.) dan komt er (19), want:

$$\frac{w(z)}{z} \to 1, \quad \frac{1-|z|^2}{1-|w(z)|^2} = \frac{1+|z|}{1+|w(z)|} \cdot \frac{1-|z|}{1-|w(z)|} \to \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{w'(1)},$$

$$\frac{|z|^2-|w(z)|^2}{|z|-|zw^2(z)|} = \frac{|z|+|w(z)|}{|z|+|zw(z)|} \cdot \left(1 - \frac{1-|z|}{1-|w|}\right) \to 1 - \frac{1}{w'(1)}.$$

$w'(0)$ ligt dus in een cirkel Γ, met middelpunt $\frac{1}{w'(1)}$ en straal $1 - \frac{1}{w'(1)}$, welke cirkel E dus raakt in het punt 1.

Uit (19) volgt:

$$\left|\frac{1}{w'(1)}+1\right|-|w'(0)+1|\leq 1-\frac{1}{w'(1)}$$

dus:

$$|w'(0)+1|\geq\left(\frac{1}{w'(1)}+1\right)-\left(1-\frac{1}{w'(1)}\right)=\frac{2}{w'(1)}, \text{ of:}$$

Stelling 27.
Als $w(z)\,\varepsilon\,F$ en $w(1)=1$, dan is

$$\mathbf{w'(1)\geq\frac{2}{|1+w'(0)|}} \tag{20}$$

(20) is minder scherp dan (19) als $w'(0)$ niet reëel is, maar heeft d.e.t. een prettiger vorm. We zien hieruit:
als $w'(0)=0$, dan is $w'(1)\geq 2$ (stelling 10 voor $n=2$),
als $w'(1)=1$, dan is $|1+w'(0)|\geq 2$, dus $|w'(0)|=1$ (ook al bekend),
als $w'(0)$ dicht bij -1 ligt, dan is $w'(1)$ erg groot.
Uit (20) volgt een grens voor $w'(1)$, onafhankelijk van $\arg w'(0)$, en tevens een grens voor $|w'(0)|$:

$$w'(1)\geq\frac{2}{1+|w'(0)|}\quad\text{resp.}\quad |w'(0)|>\frac{2}{w'(1)}-1 \tag{21}$$

De bij (19) gevonden grens kan niet verbeterd worden. Bij geg. $w'(1)>1$ kan men nl. een functie construeren, zodat $w'(0)$ in een willekeurig randpunt van Γ ligt. (Het punt 1 maakt een uitzondering, want als $w'(0)=1$ was, dan zou $w'(1)=1$, in strijd met $w'(1)>1$.) Uit (3) volgt nl. voor $w(z)=z\,.\,w_1(z)$:

$$w(z)=\frac{\delta_1 z^2+\delta_2 z}{\bar\delta_2 z+\bar\delta_1},\ \delta_1 \text{ en } \delta_2 \text{ const.}$$

$w(z)\,\varepsilon\,F$ als $|\delta_2|\leq|\delta_1|$. Wegens $w(1)=1$ moet $\delta_1+\delta_2=\bar\delta_2+\bar\delta_1$, dus $\delta_1-\bar\delta_1=\bar\delta_2-\delta_2$. Stel $\delta_1=a+ic$ en $\delta_2=b-ic$, dan is:

$$w(z)-1=\frac{\delta_1 z^2-\bar\delta_1+(\delta_2-\bar\delta_2)z}{\bar\delta_2 z+\bar\delta_1}=\frac{a(z^2-1)+ic(z^2-2z+1)}{(b+ic)z+a-ic}$$

$$w'(1)=\lim_{z\to 1}\text{ang}\,\frac{w(z)-1}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{a(z+1)+ic(z-1)}{(a+b)+ic(z-1)}=\frac{2a}{a+b}$$

Stel $w'(1)=\frac{1}{p}$, dan is $a+b=2ap$ en $b-pa=a(p-1)$

$$w'(0)-\frac{1}{w'(1)}=\frac{b-ic}{a-ic}-p=\frac{b-ap-ic(1-p)}{a-ic}=(p-1)\frac{a+ic}{a-ic}$$

We zien: $\left|w'(0)-\frac{1}{w'(1)}\right|=|p-1|=1-\frac{1}{w'(1)}$ terwijl $\arg\left(w'(0)-\frac{1}{w'(1)}\right)=-2\operatorname{arctg}\frac{a}{c}$ iedere waarde $\neq 0$ kan aannemen wegens de willekeur van a en c $(a\neq 0)$. De enige voorwaarden waaraan a, b en c moeten voldoen zijn nl.: $b=a(2p-1)$ en $|a+ic|\geq|b+ic|$ of $|a|\geq|b|$. a en c mogen willekeurig gekozen worden, kiest men b dan zò, dat $b=a(2p-1)$, dan is aan beide bovengenoemde voorwaarden voldaan wegens $-1\leq 2p-1<1$.

Voor $a=0$ echter komt er $b=0$, dus $w(z)\equiv z$, in strijd met $w'(1)>1$.

§ 8. *Gevolgtrekkingen uit* § *6 en* § *7*.

a. Als geg. is dat $w(\beta)=0$, dan geven (14) resp. (8): $|w'(\beta)|\leq\frac{|\beta|}{1-|\beta|^2}$ resp. $|w'(0)|\leq|\beta|$. Uit het laatste volgt:

Stelling 28.

Als $w(z)\,\varepsilon\,F$, dan is $w(z)\neq 0$ voor $0<|z|<|w'(0)|$ (verg. stelling 21).

b. Stelling 29.

De vergelijking $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0=0$ heeft geen wortels met modulus $<\frac{|a_0|}{\Sigma\,|a_k|}$ [1]).

Bew. Stel $w(z)=\frac{z(a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n)}{\Sigma\,|a_k|}$, dan $w(z)\,\varepsilon\,F$ en dus $w(z)\neq 0$ voor $0<|z|<|w'(0)|=\frac{|a_0|}{\Sigma\,|a_k|}$ (stelling 28).

Hieruit volgt het gestelde.

c. Als $|z|<|w'(0)|$, dan kunnen we nog meer zeggen dan $w(z)\neq 0$, nl.:

$$|w(z)|\geq\frac{|z||w'(0)|-|z|^2}{1-|z||w'(0)|}\tag{22}$$

---

[1]) Vergelijk SCHUH. Lessen over de Hogere Algebra, deel I, § 226.

Uit (9) volgt nl. wegens $|w'(0)| \leq B$,

$$|w(z)| + |z|^2 \geq |z| (1 + |w(z)|) \, |w'(0)|$$

waaruit (22) meteen volgt.

Uit $|w'(0)| \geq A$ (zie (10), blz. 23) volgt:

$$|z| (1 - |w(z)|) \, . \, |w'(0)| \geq |w(z)| - |z^2| \text{ of:}$$

$$|w(z)| \leq \frac{|z|^2 + |w'(0)| |z|}{1 + |w'(0)| |z|} \tag{23}$$

Als $|w'(0)| \neq 1$ en $0 < |z| < 1$, dan is (23) sterker dan $|w| \leq |z|$, want:

$$\frac{|z|^2 + |w'(0)| \, . \, |z|}{1 + |w'(0)| \, . \, |z|} = |z| - \frac{(|z| - |z|^2)(1 - |w'(0)|)}{1 + |z| \, . \, |w'(0)|} < |z|$$

Door (22) en (23) is $|w(z)|$ tussen twee grenzen „gekneld". Vergelijk ook (6), blz. 21.

§ 9. *Over de lengte van beeldkrommen.*

a. Stelling 30.

Geg. f(z) is holomorf en heeft pos. reëel deel in $\mathcal{R}z > 0$. $f(\alpha) = \alpha$. Γ is het rechte lijnstuk tussen $\alpha + p$ en $\alpha + q$, $q > p \geq 0$. Γ' is het beeld van Γ. $\mathcal{R}\alpha = a > 0$.

Te bew. lengte $\Gamma' <$ lengte Γ.

Bew. De lengte van Γ is $q - p$. Wegens (B) is $\mathcal{R}w = u \leq x$ op de horizontale rechte door $\alpha (x \geq a)$.

$$\text{lengte } \Gamma' = \int_{\alpha+p}^{\alpha+q} |f'(z)| \, . \, |dz| \leq \int_{\alpha+p}^{\alpha+q} \frac{u}{x} \, dx \leq \int_{\alpha+p}^{\alpha+q} dx = q - p.$$

Het $=$teken geldt voor $f(z) \equiv z$.

b. Stelling 31.

Geg. $w = f(z)$ is holomorf met pos. reëel deel in $\mathcal{R}z > 0$. $z_1 = g(t)$ is de parametervoorstelling van een kromme Γ, waarvan het stuk Γ_a tussen de punten $t = 0$ en $t = a$ de lengte $l(a)$ heeft. Verder is voor $t > t_0$: $|\arg g(t)| \leq \frac{\pi}{2} - \mu$, $\mu > 0$ en vast. $\mathcal{R}g(t) > 0$ voor $t \geq 0$, $g(t) \to \infty$ voor $t \to \infty$. Γ_a wordt door $w = f(z)$ op een kromme Γ'_a met lengte $l'(a)$ afgebeeld.

Te bew. $\lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{l'(a)}{l(a)} = \lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{ang} f'(z) \equiv \lambda.$

Bew. Uit het geg. volgt $z_1 \to \infty$ (ang.) voor $a \to \infty$. Wegens $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{ang} |f'(z)| = \lambda$ (gelijkmatig) is:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{l'(a)}{l(a)} = \lim_{a\to\infty} \int_{z_1(0)}^{z_1(a)} |f'(z_1)| \,.\, |dz_1| : \int_{z_1(0)}^{z_1(a)} |dz_1| = \lambda \text{ q.e.d.}$$

c. Stelling 32.

Geg. Als bij stelling 31, bovendien $f(z) \neq 1$.

Te bew. lengte $\Gamma' \leq \dfrac{2}{\left|\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|^{\frac{a}{q+a}} - 1} - \dfrac{2}{\left|\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|^{\frac{a}{p+a}} - 1}.$

Bew. Stel $f(z) = \dfrac{e^{g(z)}+1}{e^{g(z)}-1}$, $g(z)$ is hol. met pos. reëel deel in $R(z) > 0$.

$$\text{lengte } \Gamma' = \int_{\alpha+p}^{\alpha+q} |f'(z)| \,.\, |dz| = \int_{\alpha+p}^{\alpha+q} \frac{2|e^{g(z)}| \,.\, |g'(z)| \,.\, |dz|}{|e^{g(z)}-1|^2} \leq$$

$$\leq 2 \int_{\alpha+p}^{\alpha+q} \frac{Rg(z)dx}{x|e^{\frac{1}{2}g(z)} - e^{-\frac{1}{2}g(z)}|^2}$$

Zij $\varphi_2 = \arg(g(z) - g(\alpha))$ en $\varphi_1 = \arg(\overline{g(\alpha)} + g(z))$, dan is $|\cos \varphi_2| \leq |\cos \varphi_1|$ als $Rg(z) > 0$ en $Rg(\alpha) > 0$, dus:

$$\left| \frac{Rg(z) - Rg(\alpha)}{R\overline{g(\alpha)} + Rg(z)} \right| = \frac{|g(z) - g(\alpha)| \,.\, |\cos \varphi_2|}{|\overline{g(\alpha)} + g(z)| \,.\, |\cos \varphi_1|} \leq \left| \frac{g(z) - g(\alpha)}{g(z) + \overline{g(\alpha)}} \right|$$

Wegens $\left| \dfrac{g(z) - g(\alpha)}{g(z) + \overline{g(\alpha)}} \right| \leq \left| \dfrac{z - \alpha}{z + \bar{\alpha}} \right|$ geldt dus, rechts van α op een horiz. lijn:

$$\frac{Rg(\alpha) - Rg(z)}{Rg(\alpha) + Rg(z)} \leq \frac{x-a}{x+a} \quad \text{of} \quad Rg(z) \geq \frac{a}{x} Rg(\alpha) \equiv \frac{k}{x}$$

Stelt men nu $g(z) = 2(g_1 + ig_2)$, g_1 en g_2 reëel, dan is:

$$|e^{\frac{1}{2}g(z)} - e^{-\frac{1}{2}g(z)}|^2 = e^{2g_1} + e^{-2g_1} - 2\cos^2 g_2 + 2\sin^2 g_2 \geq (e^{g_1} - e^{-g_1})^2.$$

$\dfrac{g_1}{(e^{g_1} - e^{-g_1})^2} = \frac{1}{2} \left\{ 2g_1 + \dfrac{2}{4!}(2g_1)^3 + \dfrac{2}{6!}(2g_1)^5 + \dots \right\}^{-1}$ is een monotoon dalende functie van g_1 voor $g_1 > 0$. We krijgen dus:

$$\text{lengte } \Gamma' \leq 2\int\limits_{\alpha+p}^{\alpha+q} \frac{2g_1 \, . \, dx}{x|e^{g_1+ig_2} - e^{-g_1-ig_2}|^2} \leq 2\int\limits_{\alpha+p}^{\alpha+q} \frac{2g_1 \, dx}{x(e^{g_1} - e^{-g_1})^2} \leq$$

$$\leq 2\int\limits_{\alpha+p}^{\alpha+q} \frac{\frac{k}{x}dz}{x\left(e^{\frac{k}{2x}} - e^{-\frac{k}{2x}}\right)^2} = 2\int\limits_{\alpha+p}^{\alpha+q} \frac{-ke^{\frac{k}{x}} d\frac{1}{x}}{\left(e^{\frac{k}{x}} - 1\right)^2} = \frac{2}{e^{\frac{k}{x}} - 1}\Bigg/_{\alpha+p}^{\alpha+q} =$$

$$= \frac{2}{e^{\frac{a}{a+q}\log\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|} - 1} - \frac{2}{e^{\frac{a}{a+p}\log\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|} - 1} \qquad \text{q.e.d.}$$

Als $\alpha > 1$ is, dan wordt het $=$teken bereikt door:

$$\Phi_{11}(z) = \frac{e^{\frac{k}{z}} + 1}{e^{\frac{k}{z}} - 1}, \quad k = a \log\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|$$

Want voor $\alpha > 1$ valt Γ langs de reële z-as, en Γ' langs de reële w-as, dus lengte $\Gamma' = \Phi_{11}(\alpha+q) - \Phi_{11}(\alpha+p) = \dfrac{2}{e^{\frac{k}{q+\alpha}} - 1} - \dfrac{2}{e^{\frac{k}{p+\alpha}} - 1}$.

Voor iedere α is (bij vaste p):

$$\lim_{q \to \infty} \frac{\Phi_{11}(\alpha+q) - \Phi_{11}(\alpha+p)}{q-p} = \frac{2}{\lim\limits_{q\to\infty} q \, . \, \frac{k}{q}} = \frac{2}{k} = \frac{2}{a \log\left|\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right|}.$$

De lim. hiervan voor $a \to \infty$ is:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{2}{aR \log \frac{\alpha+1}{\alpha-1}} = \lim_{a\to\infty} \frac{2}{a \, . \, R\left(\frac{2}{\alpha} + \ldots\right)} = \lim_{a\to\infty} \frac{|\alpha|^2}{a^2} > 1$$

als a irreëel is. Voor $\alpha > 1$ kan de grens dus niet verbeterd worden, maar voor irreële α soms wel. Daar kan nl. voor grote a en q de grens > 1 worden en in stelling 30 is reeds een grens $= 1$ gevonden.

STELLINGEN

I

Wanneer tussen de stralen van 2 lineaire congruenties, waarvan elk kruisende dragers bezit, een algebraïsche (1,1) verwantschap zonder singulariteiten bestaat, dan is er minstens één projectiviteit tussen de twee R_3, die elk één van de congruenties bevatten, zodanig dat toegevoegde stralen der congruenties toegevoegd zijn in de projectiviteit.

II

Wanneer tussen de stralen van 2 lineaire congruenties — liggend in dezelfde R_3 — een algemene (1,1) verwantschap zonder singulariteiten bestaat, dan is de m. pl. der punten waardoor twee toegevoegde stralen gaan, een biquadratische ruimtekromme, die elk der dragers $2 \times$ snijdt.

III

Een birationale quadratische verwantschap tussen de punten van een vlak heeft i.h.a. 4 dekpunten.

IV

Het tangentenoppervlak O^8 van een algemene biquadratische ruimtekromme heeft een viervoudig punt in de top van elk der 4 kegels, die door de kromme gaan. Dit O^8 is invariant voor de groep der 4 centraal involutorische collineaties waarvan het centrum in één der toppen ligt en het dekvlak door de drie overige gaat, en snijdt een vlak door drie der kegeltoppen in een dubbeltellende 4e graadskromme met dubbelpunten in de drie in dat vlak gelegen toppen.

V

Als $w = f(z)$ een holomorfe functie is, met $f(0) = 0$ en $|w| < 1$ voor $|z| < 1$, terwijl $|f'(0)| > \frac{2r \log r^{-1}}{1 - r^2}$ dan neemt $f(z)$ alle waarden uit $|w| < r$ minstens éénmaal aan.

VI

De differentiaalvergelijking van RICCATI

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{i}{2\tau}(1 - 2c\theta - \theta^2)$$

waarin i en c constanten zijn, en θ en τ functies van s, kan ineens opgelost worden door de variabelen te scheiden.

Dit is korter dan de manier, die in verschillende leerboeken wordt aangegeven (Zie b.v. EISENHART, *Differential Geometry*, pag. 25, 26 en 29).

VII

Als $w = f(z)$ holomorf is en $\mathcal{R}w > 0$ als $\mathcal{R}z > 0$, terwijl de waardenvoorraad van w de opening φ $(0 < \varphi < \pi)$ in het oneindige heeft, dan is:

$$\lim_{z \to \infty} \operatorname{ang} \frac{w}{z^p} = 0 \text{ voor } p > \frac{\varphi}{\pi}.$$

VIII

Tardi's afleiding der correctie, die op de lengte van een invardraad voor basismeting moet aangebracht worden als deze bij een andere zwaartekrachtswaarde wordt gebruikt dan bij de etalonage gegolden heeft, is aanvechtbaar. (P. TARDI, *Traité de Géodésie* § 58, 4°.)

IX

De slingertijden van een volkomen buigzaam koord met de lengte L, dat aan zijn boveneinde vast bevestigd is en dat onder de invloed van de zwaartekracht kan slingeren in een verticaal vlak, zijn bij benadering gelijk aan de nulwaarden der functie van T:

$$J_0\left(\frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{L}{g}}\right) \equiv \sum_0^\infty \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{-4\pi^2 L}{T^2 g}\right)^n.$$

K 2597