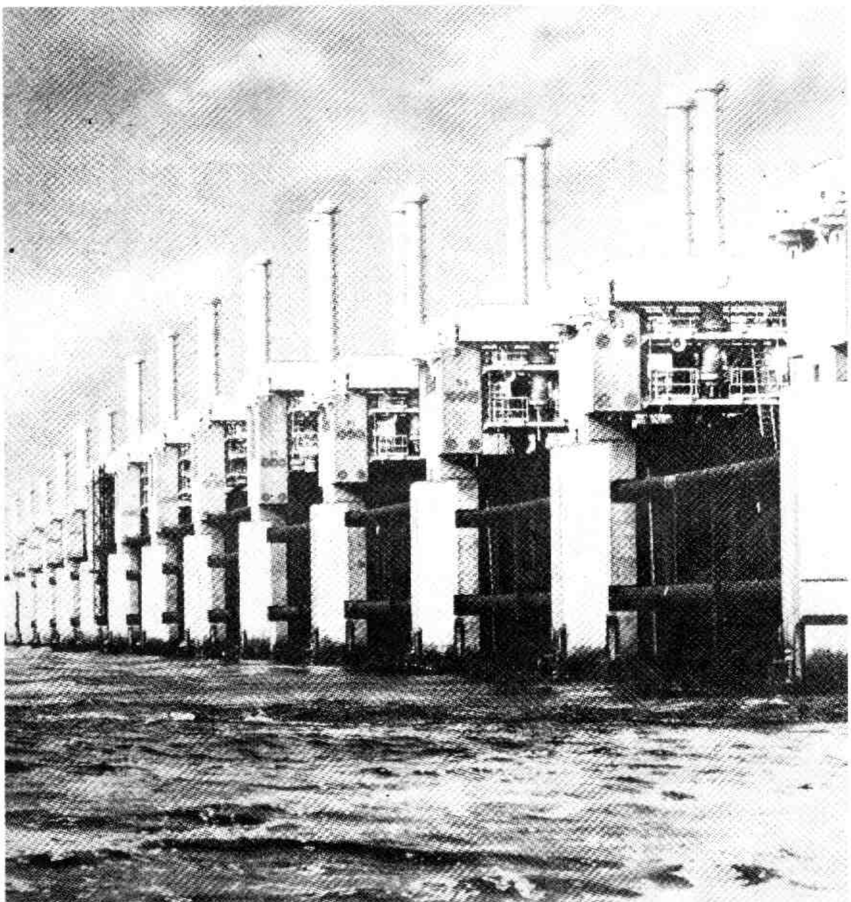
Codes en kansen

https://hdl.handle.net/1874/10140



CODES EN KANSEN

CODES EN KANSEN

WISKUNDE A

CODES EN KANSEN

Een produktie ten behoeve van het project Hawex.

Ontwerper:	Henk van der Kooij
Met medewerking van:	Jan de Jong Martin Kindt Anton Roodhardt Jan de Lange Martin van Reeuwijk
Vormgeving:	Ada Ritzer

Utrecht, november 1990

Inhoudsopgave

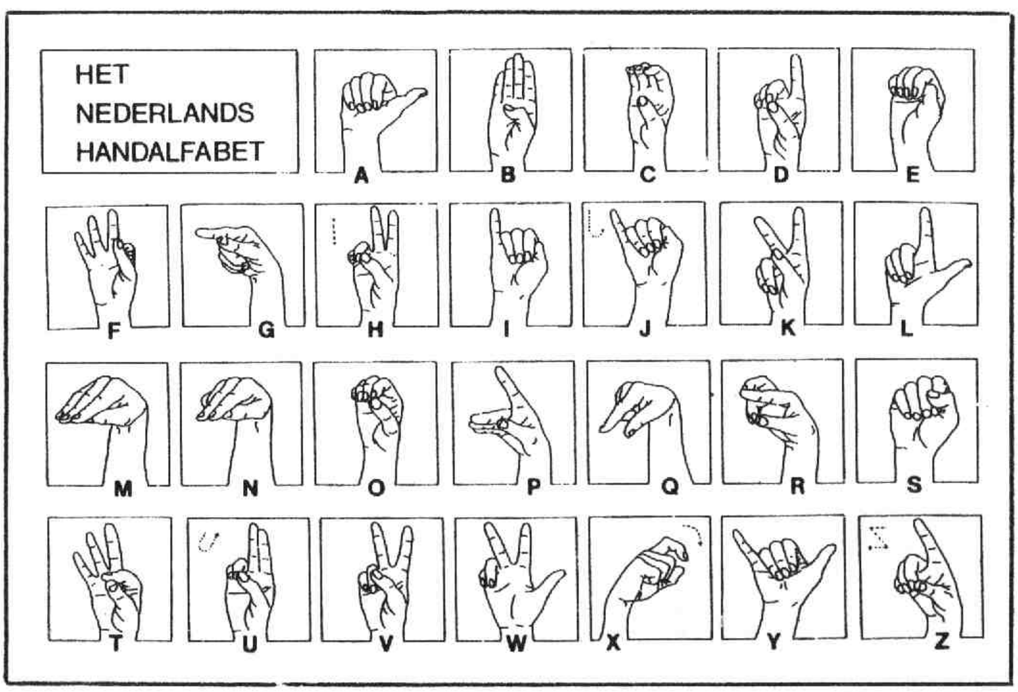
1 Binaire Codes

Taal is, in gesproken en geschreven vorm, een heel belangrijk communicatiemiddel. Wanneer je het woord 'hond' leest, weet je hoe je het moet uitspreken en wat de betekenis is. Tenminste als je de Nederlandse taal beheerst, zowel in lezen, schrijven als spreken.
De volgende tekst zegt je waarschijnlijk niets.

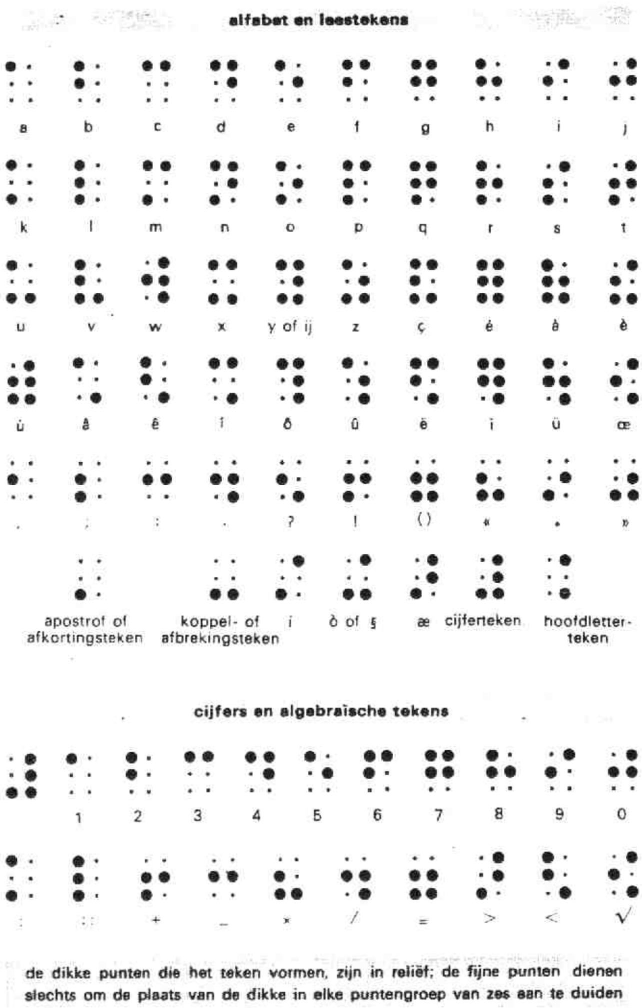
1.卡琳:“我的娃娃合起来还比佩特拉的少。”

Taal berust op een groot aantal afspraken,zoals:
- objecten, dingen krijgen een naam, in klankvorm
- de verschillende klankvormen worden weergegeven door symbolen die we letters noemen.

Op die manier kunnen mensen informatie uitwisselen of doorgeven. Voorwaarde is dat je 'verstaanbaar' bent. Soms zijn daarvoor aanpassingen nodig.
Een dove kun je wel geschreven taal voorleggen, maar gesproken taal werkt niet. De spreektaal kan vervangen worden door gebarentaal.



Voor blinden is het brailleschrift ontwikkeld. Het kan met de vingers 'gelezen' worden.



— ENCYCL. Het *brailleschrift* bestaat uit groepen van 6 punten waarmee 63 verschillende combinaties kunnen worden gevormd. Iedere groep van 6 punten stelt een teken (letter, cijfer, enz.) voor. De punten waaruit een teken is samengesteld worden in reliëf in speciaal, enigszins stijf papier, gedrukt zodat zij door de blinden kunnen worden afgetast. Braille werd op dit idee gebracht door de Franse kapitein Ch. Barbier, die ten behoeve van het leger een soortgelijk zgn. nachtschrift had ontworpen, waarin bijv. een punt oprukken betekende. Een blinde die in het lezen van brailleschrift een zekere vaardigheid heeft verkregen, kan de leessnelheid van een normaal ziende evenaren. Het brailleschrift dat vrij gemakkelijk kan worden aangeleerd, kan door de blinden ook zelf worden geschreven met behulp van een reglet. Het wordt ook gebruikt voor het uitgeven van muziekpartituren. Modernere uitvindingen als de magnetofoon betekenen een belangrijke aanvulling van het brailleschrift.

Ieder leesteken uit de gewone schrijftaal wordt vervangen door een code, op de manier zoals hierboven staat vermeld.
Op ieder van de 6 plaatsen wordt wel of niet een voelbare punt gezet.

1. >a Welk woord staat hier in braille gecodeerd?

>b Het kan ook een getal voorstellen. Welk getal?
Is dat niet verwarrend?

2. > Volgens de tekst uit de encyclopedie zijn er in totaal 63 codes mogelijk.
Controleer dat aantal.

Je kunt zeggen dat het Brailleschrift een codering is van de gewone schrijftaal.

3. Er zijn 15 verschillende codes mogelijk, waarbij op twee van de zes plaatsen wel een punt staat.

   >a Controleer dit door alle mogelijkheden (systematisch!) uit te schrijven.

   >b Hoeveel codes zijn er mogelijk met vier punten op de zes plaatsen?

   In totaal zijn er 63 codes mogelijk.

   >c Beredeneer dat er twintig codes overblijven met drie punten op de zes plaatsen.

Het brailleschrift is een voorbeeld van een *binaire code*. Dat is een manier van coderen, waarbij slechts twee verschillende symbolen worden gebruikt.
Bij Braille zijn dat: wel een punt (•) en geen punt (·)
Een ander voorbeeld van een binaire code is de Morse-code (zie 'Afstanden, grafen en matrices'), waarbij alleen gebruik gemaakt wordt van punten (•) en strepen (–).
Vaak worden bij binaire codes de twee symbolen weergegeven met een 0 (nul) en een 1 (één). Vandaar dat ook de benaming *0-1-code* wel wordt gebruikt.

Een Brailletekst kan opgeslagen worden in de computer. Daartoe wordt een Brailleteken in een afgesproken volgorde:

1• •4
2• •5
3• •6

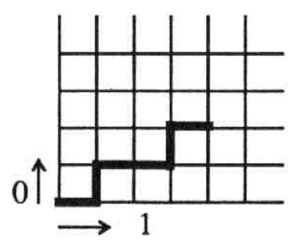
omgezet in een rijtje van enen (•) en nullen (·).
Voorbeeld:

● ●
de letter p: ● · wordt het rijtje: 1 1 1 1 0 0
● ·

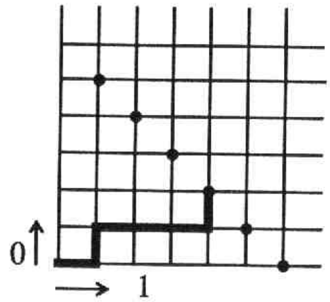
4. > Welk woord uit het Brailleschrift staat hier genoteerd als 0-1-code?
   1 0 0 1 1 0   1 0 0 0 0 0   1 1 0 1 1 0

Een 0-1-code kan ook worden weergegeven als route in een rooster (zie Telproblemen).

5. > Welke letter uit het Brailleschrift staat hier getekend als route?



Bij Braille hebben alle codes een vaste lengte 6.
Daardoor eindigen alle routes in een van de aangegeven punten van het rooster.
Voor de letter *n* worden in totaal 4 punten gebruikt (1 0 1 1 1 0).
Daarom ligt het eindpunt voor de *n* bij het punt (4,2).



6. >a Hoeveel verschillende routes eindigen in het punt (4,2)?
   >b Bepaal bij elk van de aangegeven eindpunten hoeveel routes er eindigen.
   >c Hoe kun je dit rooster gebruiken om je antwoorden van de opgaven 2 en 3 te controleren?

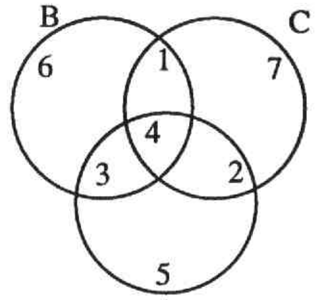
Coderingen worden ook wel eens gebruikt om informatie door te geven die niet voor derden bestemd is. Geheimtaal dus.

7. Ada en Ellen geven tijdens de les boodschappen aan elkaar door zonder dat medeleerlingen mogen weten waarover het gaat.
   Daarvoor gebruiken ze rijtjes met vaste lengte 4, bestaande uit alleen maar de letters O en X.
   Mogelijke rijtjes zijn dus onder andere: X X X X, X O X O, O X O O.
   Ieder rijtje van 4 stelt één boodschap voor.
   >a Beredeneer dat op deze manier 16 verschillende boodschappen gecodeerd kunnen worden.
   >b Schrijf alle mogelijke rijtjes van 4 op.

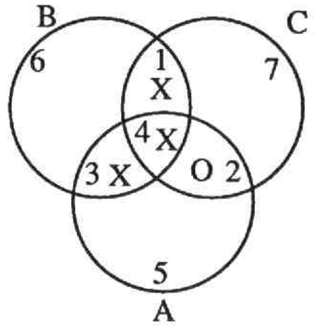
   Dit systeem werkt naar volle tevredenheid van de dames, totdat één van de medeleerlingen die de briefjes moet doorgeven de zaak gaat saboteren.
   Als hij een briefje doorgeeft, verandert hij stiekem één van de vier letters.
   Bijvoorbeeld:
   Het briefje $\boxed{\text{X O X O}}$ vervangt hij door het briefje $\boxed{\text{X O O O}}$
   Er ontstaat nu een probleem. De ontvanger van de boodschap weet wel dat er één letter is veranderd, maar onbekend is welke letter dat was.

   >c Ada krijgt de gewijzigde boodschap $\boxed{\text{O X O O}}$ in handen.
   Zij probeert uit te zoeken welke boodschap Ellen verstuurd kan hebben.
   Welke mogelijkheden zijn er?

De dames laten zich niet zo gemakkelijk uit het veld slaan. Ze passen heel slim hun geheimtaal aan met een controle.
De rijtjes van 4 letters vullen ze aan tot rijtjes van 7 letters.
Die aanvulling werkt als controle op de eerste 4 letters (de boodschap).
Met behulp van het onderstaande plaatje bepalen ze hoe die aanvulling eruit moet zien.
De drie cirkels A, B en C zijn verdeeld in 7 gebieden (nrs. 1 t/m 7).



In de gebieden 1 t/m 4 komen in volgorde de 4 letters van de code te staan.
Als voorbeeld bekijken we de boodschap X O X X



Iedere cirkel bestaat uit 4 gebieden, waarvan er nu drie een letter bevatten.
In het nog lege gebied van elke cirkel moet een X of een O gezet worden en wel op de volgende manier:
er wordt een X *gezet als er een oneven aantal* X*-en in die cirkel staat en anders wordt er een* O *gezet.*
Bij het voorbeeld dus:
- in gebied 5 een O, want in A stonden al twee X-en
- in gebied 6 een X, want in B stonden 3 X-en
- in gebied 7 een O, want in C stonden 2 X-en.

De oorspronkelijke boodschap X O X X wordt dus in de nieuwe versie:
X O X X O X O

8. > Bepaal op eenzelfde manier hoe de boodschappen O O O O en O X X O aangevuld moeten worden tot een code van lengte 7.

Dit extra werk is niet voor niets geweest! De toevoeging van de drie letters zorgt ervoor dat een boodschap waaraan geknoeid is, verbeterd kan worden.
In alle gevallen waarbij één van de 7 letters stiekem is veranderd, kan ontdekt worden welke letter dat was.

9. Ellen krijgt de boodschap $\boxed{\text{X O O X O O X}}$ in handen.
   >a Laat met behulp van de cirkels zien, dat deze boodschap niet kan kloppen.
   >b Kun je achterhalen welke letter is veranderd?

10. > Maak zelf een rijtje van 7, waarin je één letter verandert. Laat een medeleerling uitzoeken met welke letter je hebt geknoeid.

Bij binaire codes kan als volgt een afstand worden gedefiniëerd (vergelijk met Afstanden, grafen en matrices):

> de afstand tussen twee codewoorden is gelijk aan het *aantal* plaatsen waar in de twee codewoorden verschillende letters zijn ingevuld.

Voorbeelden: de afstand tussen $\boxed{\text{O X O X}}$ en $\boxed{\text{O O X X}}$ is 2, omdat deze codewoorden op de plaatsen 2 en 3 verschillen.
de afstand tussen $\boxed{\text{X O X O}}$ en $\boxed{\text{O X O X}}$ is 4.

11. >a Hoeveel codewoorden zijn er met afstand 1 tot $\boxed{\text{O X O X}}$?
    >b En hoeveel met afstand 2, afstand 3 en afstand 4?

Wanneer nu één letter van een codewoord is veranderd, ontstaat een codewoord met afstand 1 tot het bedoelde codewoord. Omdat er verschillende codewoorden op afstand 1 zijn, is niet te achterhalen welk codewoord was bedoeld.
De uitbreiding met de 3 controleletters zorgt er voor dat één verandering wel herkend kan worden. Het systeem met de cirkels garandeert namelijk dat de afstand tussen twee codewoorden van 7 letters 3 of meer is. Bij één gewijzigde letter is er dus maar één codewoord op afstand 1 te vinden en dat moet het bedoelde codewoord zijn.

12. > Onderzoek hoe het cirkelsysteem er voor zorgt dat de codewoorden onderling afstand 3 of meer hebben.

Coderingen zijn noodzakelijk, wanneer machines 'aangesproken' worden door mensen of door andere machines. Een computer bijvoorbeeld kan alleen maar nullen en enen herkennen.
Wanneer op het toetsenbord de letter 'a' wordt aangeslagen krijgt de computer doorgeseind de code '01100001'. Alle standaardtekens op het toetsenbord hebben een eigen codering, zoals de lijst op bladzijde 7 laat zien.
(ASCII is de afkorting voor American Standard Code for Information Interchange).

32	00100000	SPATIE	65	01000001	A	97	01100001	a
33	00100001	!	66	01000010	B	98	01100010	b
34	00100010	"	67	01000011	C	99	01100011	c
35	00100011	#	68	01000100	D	100	01100100	d
36	00100100	$	69	01000101	E	101	01100101	e
37	00100101	%	70	01000110	F	102	01100110	f
38	00100110	&	71	01000111	G	103	01100111	g
39	00100111	'	72	01001000	H	104	01101000	h
40	00101000	(	73	01001001	I	105	01101001	i
41	00101001	)	74	01001010	J	106	01101010	j
42	00101010	*	75	01001011	K	107	01101011	k
43	00101011	+	76	01001100	L	108	01101100	l
44	00101100	,	77	01001101	M	109	01101101	m
45	00101101	-	78	01001110	N	110	01101110	n
46	00101110	.	79	01001111	O	111	01101111	o
47	00101111	/	80	01010000	P	112	01110000	p
48	00110000	0	81	01010001	Q	113	01110001	q
49	00110001	1	82	01010010	R	114	01110010	r
50	00110010	2	83	01010011	S	115	01110011	s
51	00110011	3	84	01010100	T	116	01110100	t
52	00110100	4	85	01010101	U	117	01110101	u
53	00110101	5	86	01010110	V	118	01110110	v
54	00110110	6	87	01010111	W	119	01110111	w
55	00110111	7	88	01011000	X	120	01111000	x
56	00111000	8	89	01011001	Y	121	01111001	y
57	00111001	9	90	01011010	Z	122	01111010	z
58	00111010	:	91	01011011	[	123	01111011	{
59	00111011	;	92	01011100	\	124	01111100	|
60	00111100	<	93	01011101	]	125	01111101	}
61	00111101	=	94	01011110	^	126	01111110	~
62	00111110	>	95	01011111	_	127	01111111	DELETE
63	00111111	?	96	01100000	`			
64	01000000	@						

Codes van schrifttekens volgens het ASCII-systeem. De volgnummers 0 t/m 31 (tweetallig 0000000 t/m 00011111) zijn gereserveerd voor signalen die niet-afdrukbaar zijn (bv. 7 = belsignaal).

De codes vanaf 128 (ofwel 10000000), dat zijn dus alle codes die tweetallig met een 1 beginnen, worden verschillend per computer en per toepassing voor van alles en nog wat gebruikt.

De letter 'a' heeft volgnummer 97 (decimaal) en de codering 01100001 (binair).
De binaire coderingen kunnen in het geheugen van de computer worden opgeslagen.

Het aardige van de volgnummers is dat je de computer een geheimschrift kunt laten maken, dat hij ook weer zelf kan ontcijferen.
Bijvoorbeeld als volgt:
Van een letter die wordt ingetikt (we beperken ons hier tot hoofdletters) moet het bijbehorende rangnummer vermenigvuldigd worden met 2 en daarna verminderd worden met 90.
Voorbeeld:

tekst	rangnummers	bewerking	geheimschrift
R	82	2x82 - 90 = 74	J
A	65	2x65 - 90 = 40	(
T	84	2x84 - 90 = 78	N

13. >a Vertaal het woord CODE in geheimschrift.

    >b Is er een letter, die bij dit geheimschrift zichzelf blijft?

14. >a Welk woord gaat schuil achter het codewoord T8>?

>b Het is natuurlijk handig als een boodschap in geheimschrift ook weer kan worden terug vertaald.
Welk rekenwerk is nodig voor de terugvertaling naar de echte boodschap?

De binaire coderingen lijken op het eerste gezicht nogal willekeurige afwisselingen van nullen en enen. Toch zijn ze heel systematisch opgezet. Op bladzijde 9 staat schematisch aangegeven in een binaire boom (bij elk punt vertakt hij steeds in twee richtingen) hoe de coderingen van de achtereenvolgende hoofdletters A t/m Z ontstaan.
Het beginstuk (0 1 0) is voor alle hoofdletters hetzelfde.

15. > Controleer in de binaire boom de codering van de hoofdletters P en X.

De binaire coderingen bij de computer hebben allemaal een vaste lengte 8. Zo'n rijtje van 8 nullen/enen wordt een 'byte' (verbastering van 'by eight') genoemd.

In de binaire boom zie je dat er in totaal 32 verschillende codewoorden mogelijk zijn met beginstuk 0 1 0.

16. In een byte passen 8 nullen en/of enen.

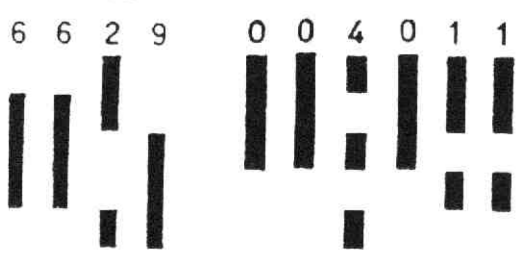
> Hoeveel verschillende codewoorden zijn er voor een computer in totaal beschikbaar?

Een bekend voorbeeld van cijfercodering vind je tegenwoordig op veel verpakte artikelen: de zogenaamde streepjescode

8 710482 221221

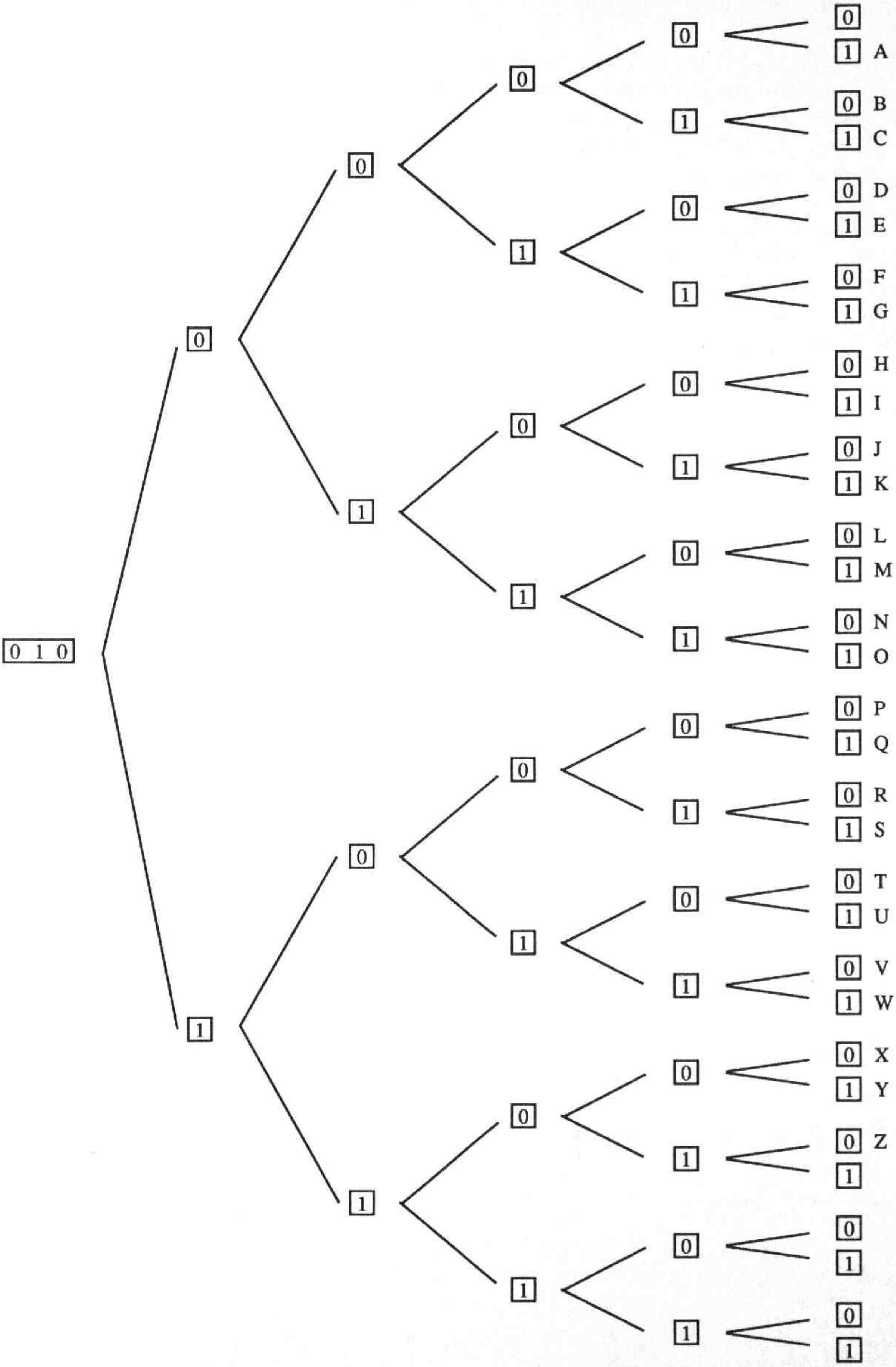
Ieder cijfer heeft zijn eigen codering van smalle en brede streepjes, afgewisseld met smalle of brede openingen. Het gebruikte systeem is nogal ingewikkeld.
Soms maken eigenwijze winkeliers hun eigen cijfercode.

17. Deze cijfercodering stond op een enveloppe van een fotozaak



>a Is dit een binaire code?

>b Hoe denk je dat de ontbrekende cijfers 3, 5, 7 en 8 zijn gecodeerd?


0 1 0
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
X
Y
Z

2 Rangschikkingen en combinaties

Bij elk onderdeel van de Olympische Spelen mogen per land maximaal drie deelnemers worden ingeschreven. Voor Nederland is dat niet zo problematisch, omdat wij niet zoveel topsporters hebben.
In de Verenigde Staten worden speciale selectiewedstrijden gehouden om uit te maken wie de gelukkigen zijn. Bij deze zogenaamde 'trials' spelen de vorm van de dag en andere geluksfactoren een niet onbelangrijke rol.
Voor de finale van de 100 m sprint heren plaatsten zich in 1988 de volgende acht atleten (in alfabetische volgorde).

Deloach
King
Lewis
Marsh
McNeil
Mitchell
Robinson
Smith

1. >a Er zijn in totaal 40.320 verschillende uitslagen (volgorde van aankomst) mogelijk bij deze finale. Controleer dat aantal.

Wanneer je alleen maar let op de drie atleten die als nummers 1, 2 en 3 aankomen, zijn er veel minder verschillende uitslagen.

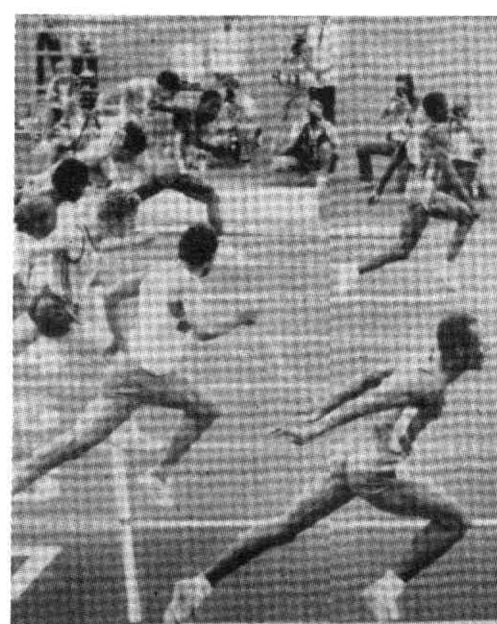
>b Hoeveel verschillende uitslagen zijn er dan mogelijk?

Uiteindelijk bleken de drie gelukkigen:

1. Lewis	9.78
2. Mitchell	9.86
3. Smith	9.87

Voor de uitzending naar de Olympische Spelen was de volgorde van aankomst van dit drietal niet belangrijk.

>c Bij welke andere uitslagen zou hetzelfde drietal zijn uitgezonden?



Rangschikkingen zijn in 'Telproblemen' al uitgebreid aan de orde gekomen. Een korte terugblik.
De vijf letters A, B, C, D en E zijn op $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ verschillende manieren te rangschikken (in verschillende volgordes op te schrijven).
Het produkt $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ wordt afgekort tot 5! (5 faculteit).
Zo betekent 10! het produkt van de getallen 1 t/m 10.
Er zijn 8! (= 40.320) verschillende uitslagen mogelijk bij de finale 100 m sprint, omdat de 8 namen op $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ manieren in verschillende volgordes geplaatst kunnen worden.

2. Stel dat alle 40.320 mogelijke rangschikkingen keurig worden geprint door een computer. Iedere nieuwe rangschikking op een nieuw blad.

Omdat alleen de nummers 1, 2 en 3 belangrijk zijn worden bij alle uitslagen de nummers 4 t/m 8 weggeknipt.
Je houdt dus 40.320 lijstjes over met drie namen.

>a Hoe vaak komt daarbij het volgende lijstje voor?

1. Lewis
2. Smith
3. Deloach

>b Beredeneer dat het aantal lijstjes met verschillende uitslagen voor de nummers 1, 2 en 3 gevonden kan worden door het totaal aantal lijstjes (=8!) te delen door 5!

Wanneer alle dubbele exemplaren worden weggegooid, blijven er dus nog 336 lijstjes over met drie namen.
Deze bevatten alle *rangschikkingen van 3* (namen) *uit 8* (namen).
Daarbij is de volgorde waarin de namen voorkomen nog van belang.

3. Voor de uitzending naar de Olympische Spelen is die volgorde niet meer belangrijk.

   >a Op hoeveel van deze 336 lijstjes kom je het drietal namen Lewis, Smith en Deloach tegen?

   >b Verklaar dat er 56 (=336 : 6) lijstjes overblijven, met steeds andere drietallen namen.

We zeggen dat er 56 *combinaties van 3* (namen) *uit 8* (namen) zijn.
Hierbij gaat het alleen om het drietal namen en niet om de volgorde waarin ze staan.

Met de 5 letters *A, B, C, D* en *E* kunnen 60 (= 5 × 4 × 3) *rangschikkingen van 3 uit 5* worden gemaakt:

ABC	BAC	CAB	DAB	EAB
ABD	BAD	CAD	DAC	EAC
ABE	BAE	CAE	DAE	EAD
ACB	BCA	CBA	DBA	EBA
ACD	BCD	CBD	DBC	EBC
ACE	BCE	CBE	DBE	EBD
ADB	BDA	CDA	DCA	ECA
ADC	BDC	CDB	DCB	ECB
ADE	BDE	CDE	DCE	ECD
AEB	BEA	CEA	DEA	EDA
AEC	BEC	CEB	DEB	EDB
AED	BED	CED	DEC	EDC

Wanneer je alle verschillende drietallen letters uit de bovenstaande lijst verzamelt, dan krijg je de *combinaties van 3 uit 5*.
De rijtjes *ACD, ADC, CAD, CDA, DAC* en *DCA* leveren alle zes hetzelfde drietal op.
Er blijven slechts 10 combinaties over:

ABC	ABE	ACE	BCD	BDE
ABD	ACD	ADE	BCE	CDE

4. Met de zes letters *A, B, C, D, E* en *F* kunnen 6! (dus 720) verschillende rangschikkingen gemaakt worden.

   >a Hoeveel *rangschikkingen* van 4 letters uit die 6 zijn er mogelijk?

   >b Ieder viertal letters komt 24 keer voor in de rij van alle rangschikkingen van 4 uit 6. Verklaar dat.

   >c Beredeneer: het aantal *combinaties* van 4 uit 6 is te berekenen met
   $\dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4!}$

5. > Hoeveel combinaties van 3 uit 6 zijn er?

6. Er zijn 28 *combinaties* van 2 uit 8 mogelijk.
   > Hoeveel *rangschikkingen* van 2 uit 8 zijn er?

7. Uit negen kandidaten moet een bestuur gekozen worden van drie mensen.
   >a Stel dat de drie bestuursleden één voor één worden gekozen, eerst een voorzitter, dan een secretaris en tenslotte een penningmeester.
   Hoeveel verschillende besturen zijn dan mogelijk?
   >b Hoeveel verschillende besturen zijn mogelijk, als er *niet* in functie wordt gekozen?

Voor combinaties voeren we een korte notatie in.
Het aantal combinaties van 3 uit 8 schrijven we als $\binom{8}{3}$. Dit wordt uitgesproken als '8 boven 3'.
Zo betekent $\binom{6}{4}$ het aantal combinaties van 4 uit 6.

8. >a Wat betekent $\binom{5}{2}$?
   >b Bereken $\binom{5}{2}$.

9. > Verklaar: $\binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!}$.

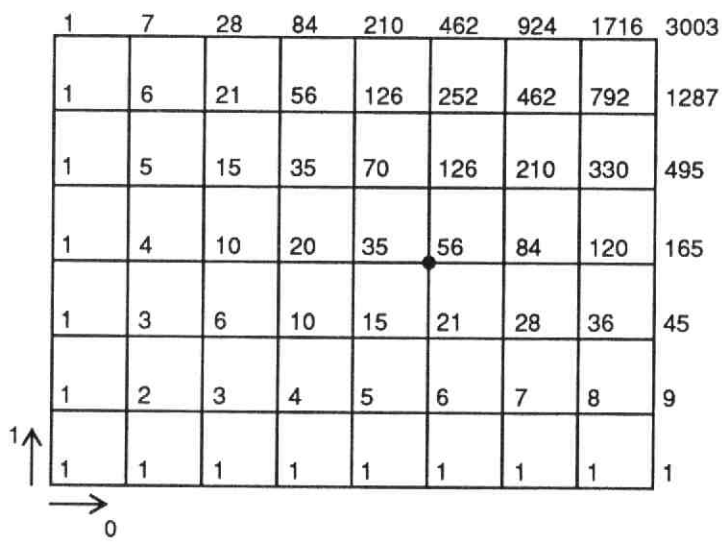
10. >a Welk verband bestaat er tussen het aantal 'combinaties van 5 uit 9' en het aantal 'rangschikkingen van 5 uit 9'.
    >b Bereken $\binom{9}{5}$.
    >c Als je goed gerekend hebt, blijken de antwoorden van de vragen 10>b en 9 hetzelfde te zijn.
    Kun je dat verklaren?

11. >a Bereken $\binom{10}{2}$ en $\binom{10}{8}$.
    >b Waarom geldt $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$?

Bekijk nog eens de deelnemerslijst voor de trials.

1. Deloach
2. King
3. Lewis
4. Marsh
5. McNeil
6. Mitchell
7. Robinson
8. Smith

Er zijn $\binom{8}{3}$ verschillende drietallen mogelijk voor uitzending naar de Olympische Spelen.
Een mogelijk drietal kan in de deelnemerslijst gecodeerd worden met het rijtje 0 1 0 0 1 1 0 0. Een 1 betekent: uitverkoren.
Dus dit rijtje betekent dat de nummers 2, 5 en 6 uit de deelnemerslijst zijn uitverkoren.
Alle verschillende drietallen corresponderen met alle rijtjes die te maken zijn met behulp van vijf nullen en drie enen.
Wanneer zo'n rijtje van 5 nullen en 3 enen geïnterpreteerd wordt als route in een rooster, dan krijg je net alle routes die hun eindpunt hebben in het punt (5,3).



Het aantal routes van (0,0) naar (5,3) is kennelijk te berekenen met het combinatiegetal $\binom{8}{3}$.

12. >a Bereken $\binom{7}{3}$.

>b Welk eindpunt in het rooster hoort bij $\binom{7}{3}$?

>c Controleer de uitkomst van $\binom{7}{3}$ met het rooster.

13. > Welke combinatiegetallen horen bij het aantal routes van (0,0) naar achtereenvolgens de punten:
(6,2), (2,6), (3,5), (0,5) en (6,0).

De combinatiegetallen zoals $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{6}$ hebben een wat vreemde betekenis. Wanneer we afspreken dat 0! = 1 en dat er op 1 manier een combinatie van 0 uit 6 te maken is, dan passen ook deze combinatiegetallen bij het rooster.

14. >a Geef in een rooster de punten aan die horen bij de combinatiegetallen:
$\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$ en $\binom{5}{5}$.

>b Bereken $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$.

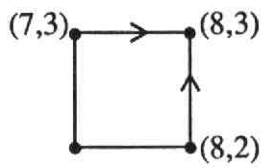
15. > Kun je, zonder berekening, zeggen wat de uitkomst is van
$\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\ldots+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}$?

16. >a Bereken het aantal routes van (0,0) naar (8,2).

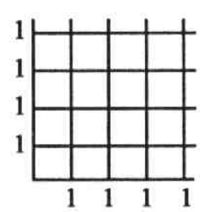
>b Hoeveel routes zijn er van (0,0) naar (7,3)?

>c Het aantal routes van (0,0) naar (8,3) kan gevonden worden door de antwoorden van >a en >b op te tellen.
Controleer dat.

In opgave 16 kwam het nog eens aan de orde:
het aantal routes naar een roosterpunt kan worden berekend door het aantal routes naar de twee naastgelegen 'lagere' roosterpunten bij elkaar op te tellen.



Op deze manier kan bij elk roosterpunt uitgerekend worden hoeveel routes er naar toe leiden, uitgaande van de roosterpunten op de rand van het rooster.



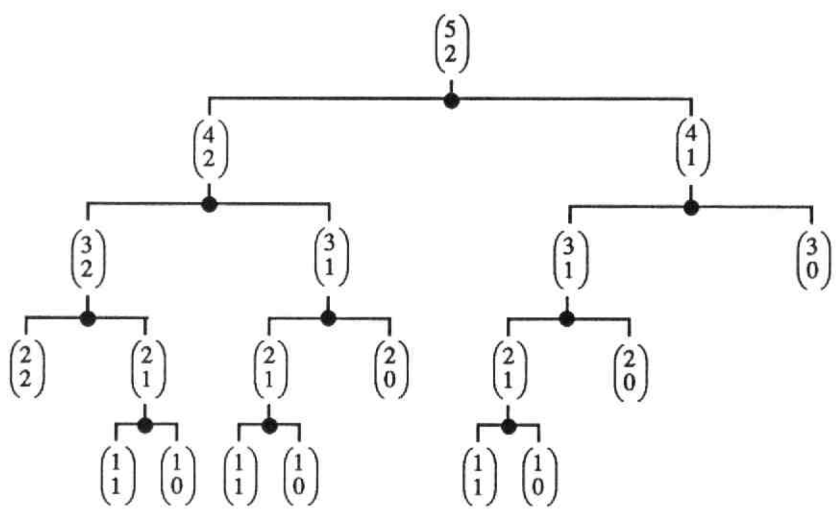
17. > Hoeveel berekeningen zijn er nodig om op die manier het aantal routes naar het punt (3,2) te berekenen?
En naar het punt (8,3)?

In combinatiegetallen geformuleerd, luidt het resultaat van opgave 17:
$\binom{11}{3} = \binom{10}{3} + \binom{10}{2}$

18. > Controleer: $\binom{7}{4} = \binom{6}{4} + \binom{6}{3}$

Bij het roosterpunt (3,2) hoort het combinatiegetal $\binom{5}{2}$.
Er geldt $\binom{5}{2} = \binom{4}{2} + \binom{4}{1}$. Op zijn beurt kan $\binom{4}{2}$ weer uitgerekend worden door zijn voorgangers op te tellen: $\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}$. Zo doorgaand kom je uiteindelijk terecht bij voorgangers die op de rand van het rooster liggen en dus gelijk zijn aan 1.

De complete voorgangersboom van $\binom{5}{2}$:



Bij alle uiteinden hoort het getal 1.
Door, beginnend bij deze uiteinden, steeds de getallen van twee bij elkaar komende takken op te tellen, vind je tenslotte de uitkomst van $\binom{5}{2}$.

19. >a Controleer of die uitkomst inderdaad 10 is.
>b Hoeveel berekeningen moest je hiervoor maken?

20. > Maak zelf een boom voor de berekening van $\binom{6}{2}$ en bereken daarmee de uitkomst van $\binom{6}{2}$.

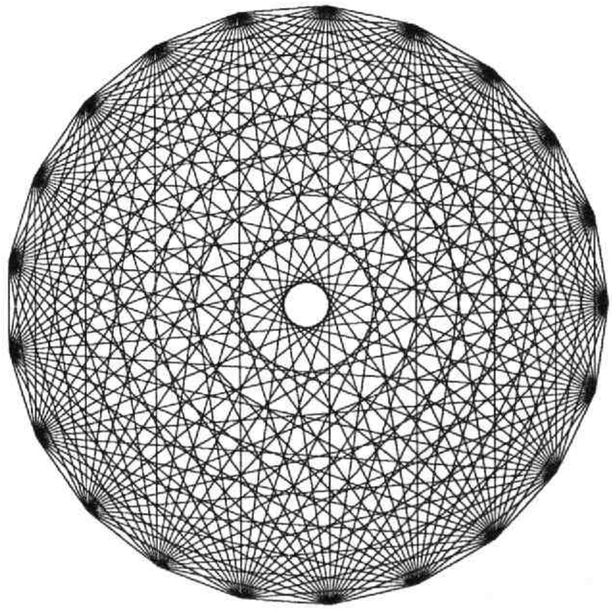
Op bladzijde 51 staat een tabel, waarin de combinatiegetallen $\binom{n}{k}$ kunnen worden afgelezen voor $n = 3$ t/m $n = 25$.

21. > In de tabel zul je vergeefs zoeken naar de uitkomst van $\binom{12}{8}$. Toch is met behulp van de tabel de waarde van $\binom{12}{8}$ wel te bepalen.
Hoe?

22. >a Zoek in de tabel op hoeveel combinaties van 5 uit 19 mogelijk zijn.
>b Hoeveel *rangschikkingen* van 5 uit 19 zijn er?

23. De coach van een zaalvoetbalteam heeft een selectie van 12 spelers: 2 keepers en 10 veldspelers.
Per wedstrijd neemt hij een team van 8 spelers mee: 1 keeper en 7 veldspelers.
>a Hoeveel verschillende teams kan hij zo maken?
Tijdens de wedstrijd staan 5 spelers in het veld: de keeper en 4 veldspelers. De veldspelers mogen gedurende de hele wedstrijd doorlopend gewisseld worden.
>b Hoeveel verschillende samenstellingen zijn er tijdens één wedstrijd in het veld mogelijk?

24.



>a De 21 punten op deze cirkel zijn twee aan twee verbonden.
Hoeveel verbindingen zijn in totaal getekend?
>b De verbindingen tussen drie punten vormen een driehoek.
Hoeveel driehoeken zijn met behulp van deze 21 punten te tekenen?

25 Als je meedoet aan de lotto mag je, tegen betaling, zes nummers kiezen uit de getallen 1 t/m 41.
Komen die zes nummers op zondagavond toevallig uit de lottomachine gerold, dan win je ongeveer vier ton.
Per lottoformulier kun je 12 keer je geluk beproeven.
Daarvoor betaal je f12,40.

>a Hoeveel complete formulieren moet je invullen om zeker te zijn van de hoofdprijs?

>b Hoe groot is de kans op 'alle zes goed', als je maar één formulier volledig invult?

26. Een zaalkorfbalteam bestaat uit 4 dames en 4 heren.
De coach wijst voor de wedstrijd uit de 12 beschikbare spelers (6 dames en 6 heren) een team aan.

>a Hoeveel keus heeft hij?

Het spel wordt gespeeld in twee vakken: een verdedigingsvak en een aanvalsvak. In ieder vak staan van één team 2 dames en 2 heren.

>b Op hoeveel manieren kan de coach uit het al aangewezen team van 4 dames en 4 heren een beginopstelling vormen?

3 De binomiale kansverdeling

Bij de Tweede Kamer verkiezingen van 1989 verloor de VVD zoveel stemmen, dat een derde kabinet CDA-VVD onmogelijk werd.
Het zetelverlies werd al geruime tijd voor de verkiezingen voorspeld op basis van steekproefsgewijze onderzoeken naar het stemgedrag.

CDA blijft grootste partij, positie coalitie onzeker

Van onze verslaggever

DEN HAAG – Het CDA blijft de grootste partij als er nu verkiezingen worden gehouden. Dat blijkt uit opiniepeilingen die dit weekeinde zijn gepubliceerd. Maar de peilers zijn het oneens over het aantal zetels dat het CDA krijgt en daarmee ook over de vraag of de huidige coalitie haar meerderheid in de Tweede Kamer behoudt.

Volgens de opiniepeiling door het bureau Inter/View, uitgevoerd in opdracht van de VARA, stijgt het CDA van 54 naar 58 zetels. De VVD zakt weliswaar van 27 naar 20 zetels, maar de coalitie behoudt haar meerderheid.

Volgens een peiling van het NIPO in opdracht van de AVRO verliest het CDA een zetel, en komt op 53. Ook in deze peiling komt de VVD op 20 zetels uit, zodat de coalitie haar meerderheid verliest. Voor beide enquêtes geldt dat de VVD zich niet of nauwelijks herstelt van de klap die de partij heeft opgelopen na de val van het kabinet begin mei.

De PvdA verliest in beide peilingen 3 van haar 52 zetels. Het verlies van de sociaaldemocraten komt vooral ten goede aan Groen Links. Dat staat volgens Inter/View nu op 8 zetels (een winst van vijf) en volgens het NIPO op 11 zetels, een winst van 8. D66 verliest volgens Inter/View een zetel (van 9 naar 8), maar wint er een in de NIPO-enquête.

Volgens de Inter/View-onderzoekers was er in mei van dit jaar een omslag te zien in de politieke voorkeur van de ondervraagden. Tot mei behaalde de VVD in de peilingen 15 tot 16 procent van de stemmen en het CDA 30 tot 32 procent. De PvdA was de grote winnaar met 36 procent of meer van de stemmen. Sinds begin juni is de aanhang van het CDA gestegen naar 36 procent en die van de VVD is gedaald tot 12 a 13 procent. Opmerkelijk noemen de onderzoekers het dat de PvdA is ingezakt naar 31 a 33 procent.

Volkskrant 7 augustus 1989

Een enquêtebureau wil bij de volgende verkiezingen voorspellingen doen over eventuele verschuivingen in het stemgedrag.
Daartoe leggen ze een lijst aan waarop van 1500 personen genoteerd wordt of ze in 1989 hebben gestemd en zo ja, op welke partij.
De personen worden aselect aangewezen uit alle inwoners van Nederland die stemrecht hebben.
Bekend is dat in 1989 tachtig procent van de stemgerechtigden inderdaad heeft gestemd.

1. > Hoeveel niet-stemmers kun je zo ongeveer verwachten op de uiteindelijke lijst van 1500?

Als je een aselect aangewezen persoon belt, is de kans 0,2 dat hij (of zij) niet heeft gestemd.

2. >a Een enquêteur belt achtereenvolgens drie mensen op.
Hoe groot is de kans dat hij in alle drie gevallen te horen krijgt dat de ondervraagde niet heeft gestemd?

   >b Bereken ook de kansen op 0, op 1 en op 2 niet-stemmers.

   >c De som van de vier kansen moet 1 zijn. Waarom?
Controleer hiermee of je de kansen goed hebt berekend.

De enquêteur voert nu zeven gesprekken achter elkaar.
Een stemmer noteert hij als *S*, een niet-stemmer als *N*.

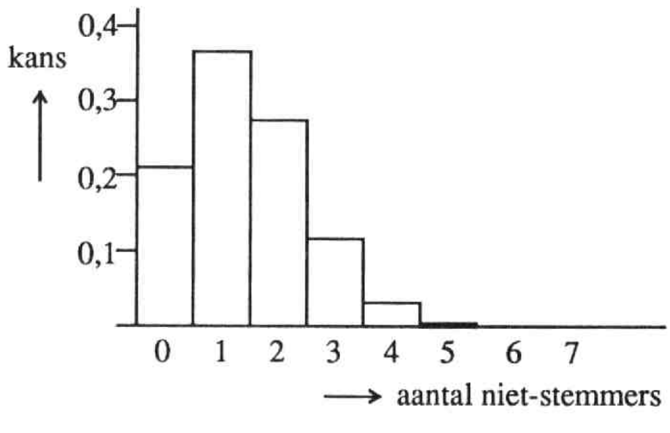
3. >a Een mogelijk resultaat bij deze zeven gesprekken is: *SSNNSSN*.
   De kans op dit resultaat is $(0{,}2)^3 \cdot (0{,}8)^4$.
   Verklaar dat.

   >b Met welke kans is het resultaat: *NNSSSNS*?

   >c Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er waarbij drie van de zeven ondervraagden niet-stemmers zijn?

4. > Bereken de kans dat twee van de zeven ondervraagden niet hebben gestemd.

In het onderstaande *kanshistogram* staan de kansen weergegeven op 0, 1, ..., 7 niet-stemmers.
Horizontaal staan de aantallen niet stemmers van de zeven ondervraagden uitgezet.
Verticaal is de bijbehorende kans af te lezen als de lengte van de staaf.



5. >a Controleer in het kanshistogram het antwoord van opgave 4.

   >b Een aantal van 1 of 2 niet-stemmers in een groep van 7 is het meest kansrijk volgens het kanshistogram.
   Was dat te verwachten?

De kansen op 6 en op 7 niet-stemmers lijken in het kanshistogram nul te zijn.
In werkelijkheid is dat niet zo. De kansen zijn echter zo klein, dat ze met deze schaalverdeling op de verticale as niet meer zijn te tekenen.

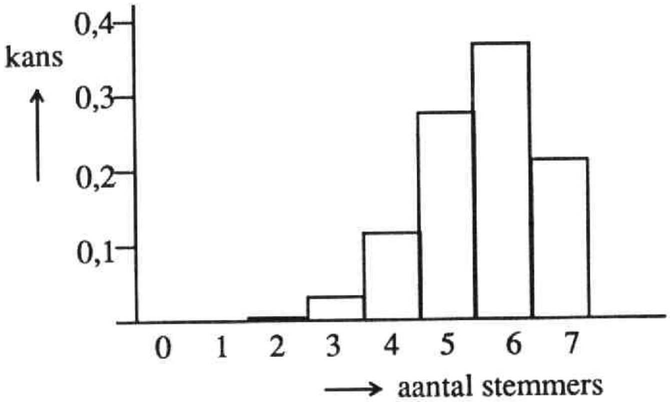
6. > Hoe groot is de kans op 6 niet-stemmers?

In de voorgaande vragen is steeds gelet op het aantal *niet-stemmers*.

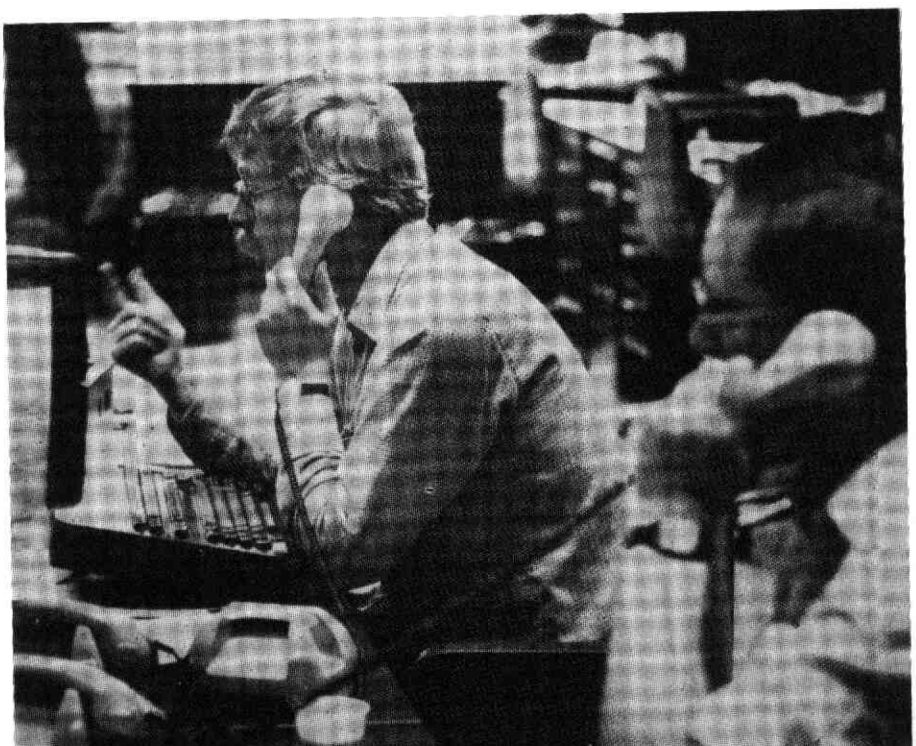
7. >a Hoe groot is de kans dat van de zeven ondervraagden drie personen *wel* hebben gestemd?

   >b Is het antwoord van >a te controleren met het kanshistogram op de vorige bladzijde?

Het kanshistogram behorend bij het aantal *stemmers* ziet er zo uit:



8. > Welk verband bestaat er tussen dit histogram en het kanshistogram op bladzijde 20?



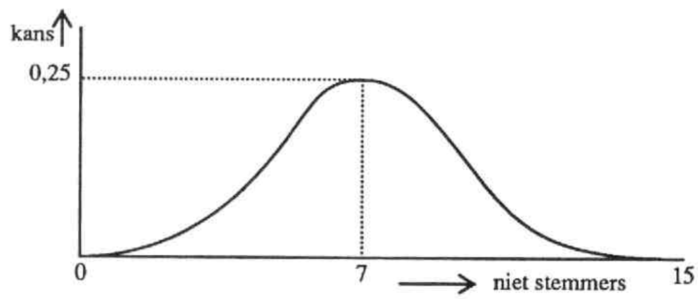
9. Stel dat er 15 mensen gevraagd wordt naar hun stemgedrag.

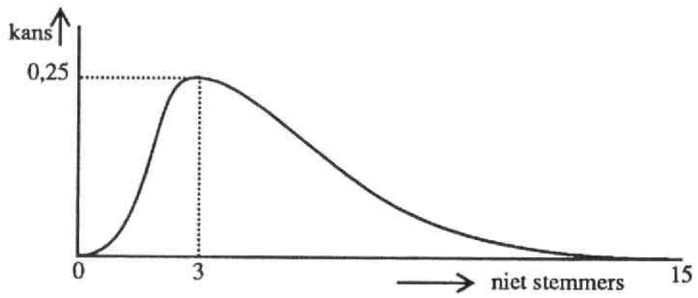
   >a De kans dat daaronder 4 niet-stemmers gevonden worden, is uit te rekenen met $\binom{15}{4} \cdot (0{,}2)^4 \cdot (0{,}8)^{11}$
   Verklaar deze 'formule'.

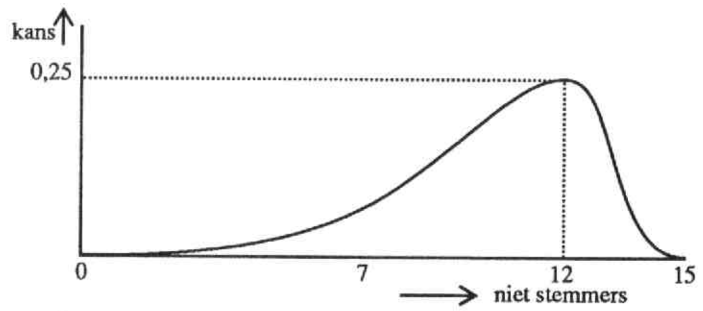
   >b Met welke 'formule' kun je uitrekenen hoe groot de kans is op 7 niet-stemmers in een groep van 15 ondervraagden?

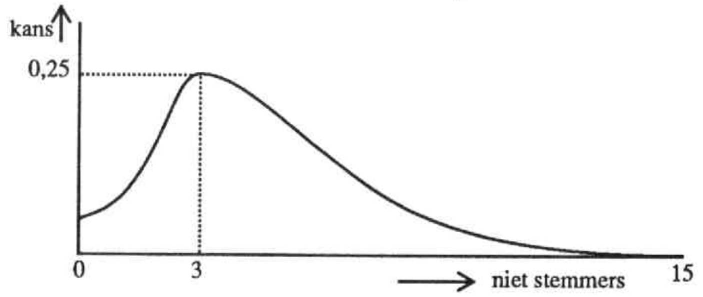
   >c Wat is het meest kansrijke aantal niet-stemmers bij een groep van 15?

   >d Hieronder staan globale schetsen van kanshistogrammen.
   Horizontaal staat het aantal niet-stemmers vermeld.
   Welke geeft volgens jou de kansverdeling het beste weer?









De telefonische enquête die in de voorgaande vraagstukken aan de orde kwam is een voorbeeld van een speciaal soort kansexperiment:

1. Ieder telefoongesprek kent slechts twee uitkomsten: S of N.
2. De kans op S is bij ieder gesprek dezelfde: 0,8.
   De kans op N blijft ook ongewijzigd: 0,2.
3. Het 'experiment' wordt een aantal keren herhaald.

In de praktijk komt het vaak voor dat bij kansexperimenten slechts naar twee uitkomsten gekeken wordt, waarbij de kansen op die uitkomsten niet veranderen bij herhaling van het experiment.
Voorbeelden:

experiment:	uitkomsten:
tossen	'kop' of 'munt'
examen	'slagen' of 'zakken'
geboorte	'jongen' of 'meisje'
multiple choice	'goed' of 'fout'
enquête	'voor' of 'tegen'

10. Er wordt zes keer met een dobbelsteen gegooid.
   >a Hoe groot is de kans dat daarbij in twee van de zes gevallen de '1' boven komt?
   >b Wat is de kans op vijf keer een even aantal ogen?
   >c Krijg je bij >a en >b andere antwoorden als er zes dobbelstenen tegelijk gegooid worden in plaats van zes maal achter elkaar één dobbelsteen?

Een kansexperiment, waarbij slechts twee uitkomsten tellen en de kansen op die twee uitkomsten bij herhaling van het experiment niet veranderen, heet een *binomiaal kansexperiment* (binomiaal = tweetermig).

Een algemenere formulering van zo'n experiment luidt:

1. Er zijn twee uitkomsten, die we aangeven met 'succes' (S) en 'mislukking' (M).
2. Het experiment wordt een aantal keren herhaald, waarbij het aantal 'successen' wordt geteld.
3. De kansen op S en M veranderen niet bij herhaling van het experiment.

Voorbeeld:
Een multiple-choice test (tien vragen, elk met vier antwoordmogelijkheden) wordt door een leerling volledig op de gok gemaakt.

Het kansexperiment:	het op de gok kiezen van één van de vier mogelijke antwoorden.
Succes (S):	het goede antwoord, met kans $\frac{1}{4}$
Mislukking(M):	een fout antwoord, met kans $\frac{3}{4}$
Aantal herhalingen:	10, want er moeten 10 vragen op deze manier beantwoord worden.

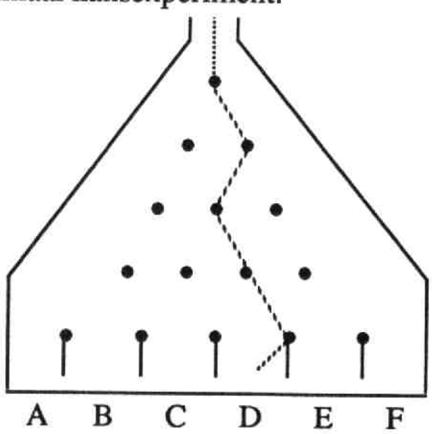
De kansen op S en M veranderen niet bij de tien herhalingen van het experiment.

11. >a Hoe groot is de kans op drie 'successen' bij vijf opgaven?
    >b En hoe groot is die kans bij acht opgaven?

12. Er worden in een ziekenhuis op één dag negen kinderen geboren.
    De geboorte van een meisje noemen we een 'succes'. De kans daarop is gelijk aan $\frac{1}{2}$.
    >a Bereken de kans op zes 'successen'.
    >b Hoe groot is de kans op drie 'mislukkingen'?

Uit de vorige opgave blijkt wel dat de benamingen 'succes' en 'mislukking' niet al te letterlijk opgevat moeten worden.

Het bord van Galton met zijn vallende kogeltjes is ook een voorbeeld van een binomiaal kansexperiment.



Bij elke pin die geraakt wordt staat het kogeltje voor de keus: naar links of naar rechts vallen (= kansexperiment).

13. Neem het geval dat de kansen op links of rechts vallen even groot zijn. We bekijken de kansen op het terecht komen in elk van de zes bakjes.
    >a Hoeveel keer wordt het kansexperiment herhaald?
    >b Bereken de kans dat een kogeltje in bakje C terecht komt.

14. Door de onderlinge posities van de pinnen te wijzigen wordt de kans om naar links te vallen 0,7.

>a Hoe groot is nu de kans dat een kogeltje naar rechts valt?

>b Bereken de kans dat een kogeltje in bakje *E* terecht komt.

>c In welk van de zes bakjes verwacht je dat de meeste kogeltjes terechtkomen?

15. Een binomiaal kansexperiment wordt vijf keer uitgevoerd.
De kans op een 'succes' is 0,3.

>a In de kanstabel staan twee resultaten al vermeld (afgerond op vier cijfers achter de komma).
Controleer die uitkomsten met een berekening.

aantal successen	0	1	2	3	4	5
kans		0,3602		0,1323		

>b Bereken de ontbrekende kansen.

>c Maak een kanshistogram, waarbij horizontaal het aantal successen staat vermeld.

We voeren een notatie in, om het schrijfwerk wat te bekorten. In plaats van 'de kans op twee successen' schrijven we:

$$P(S=2)\ )^{*}.$$

Zo luidt de 'formule' die bij opgave 15>b gebruikt kan worden om de kans op twee successen uit te rekenen:

$$P(S=2) = \binom{5}{2} \cdot (0{,}3)^2 \cdot (0{,}7)^3.$$

16. > Welke 'formules' horen in opgave 12 bij $P(S=1)$ en $P(S=3)$?

Aan de notatie $P(S=3)$ is niet zonder meer af te lezen hoe de bijbehorende formule er uit ziet.
Daarvoor moet je nog twee dingen weten:
- de kans op succes;
- het aantal keren dat het experiment wordt uitgevoerd.

)*. De letter *P* voor kans komt van het Latijnse woord 'probabilitas'

17. Geef in elk van de volgende gevallen een 'formule' voor het berekenen van $P(S=3)$.

>a Tien keer gooien met een dobbelsteen.
Succes: het gooien van een 'zes'.

>b Vijf pogingen om een bal door de korf te gooien bij een korfbaltraining.
De persoon die daarmee bezig is, schiet gemiddeld in 45% van de gevallen raak.
Succes: een treffer (natuurlijk).

>c Opgave >b: maar nu met twaalf pogingen.

>d Opgave >a, maar nu met n keer gooien (n is een of ander positief geheel getal).

18.

Het gezin van Thomas V. Brennan in de Amerikaanse stad Oak Park, Illlinois, is een opvallend groepje: vijf dochters achter elkaar en toen zes zoons. De kans op deze combinatie van elf kinderen is 1 op 2049.

>a Is de kans die bij het onderschrift van de foto wordt genoemd correct?

>b Hoe groot is de kans op vijf meisjes bij een gezin met elf kinderen?

Het vaasmodel (zie 'Kans en Verwachting') is te gebruiken om kansexperimenten te simuleren.
Naast de samenstelling van de vaas (het aantal rode en het aantal witte ballen) is de manier van trekken (met of zonder teruglegging) van belang.

19. In een vaas zitten 5 rode en 10 witte ballen.
Er worden drie ballen getrokken. Het trekken van een witte bal noemen we een succes.

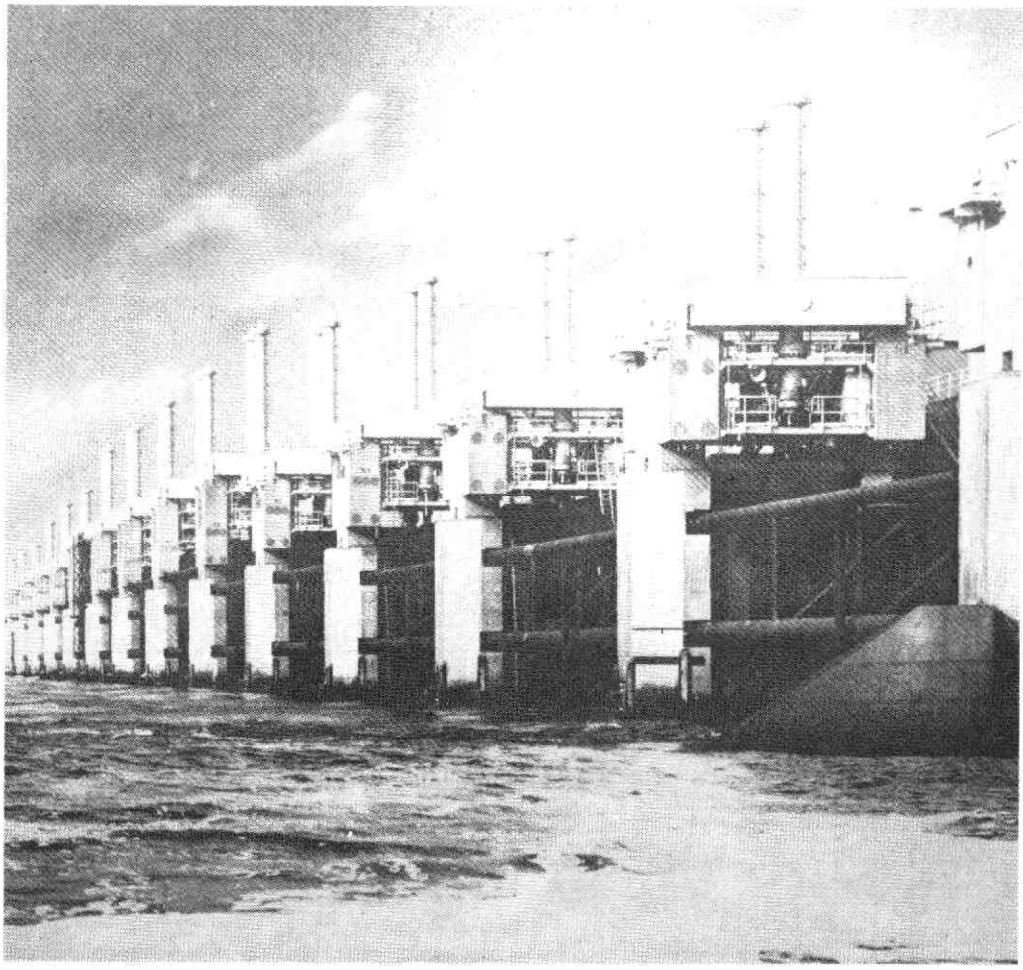
>a Bereken de kans op twee successen als er *met* teruglegging wordt getrokken.

>b Dezelfde vraag *zonder* teruglegging.

>c In welk van de twee gevallen is sprake van een *binomiaal* kansexperiment?

>d Mag bij het binomiale vaasexperiment de samenstelling van de vaas ook zijn: 1 rood en 2 wit?

20. De Deltawerken zijn uitgevoerd om een herhaling van de watersnoodramp van 1953 te voorkomen.
De 'bekroning' van dat werk is de Oosterschelde dam.
De pijlerdam bestaat uit een serie van 62 gigantische schuiven (opgehangen tussen de 65 pijlers) die bij zwaar weer neergelaten kunnen worden. Op die manier dienen ze als 'stormvloedkering'.

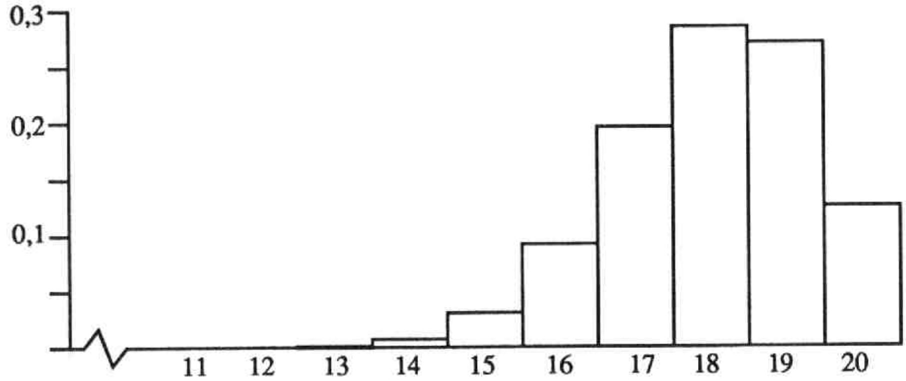


Elk van de schuiven wordt, onafhankelijk van de andere, bestuurd door een computer.
De stormvloed wordt alleen maar gekeerd als alle 62 schuiven neergelaten zijn. Wanneer één schuif niet gesloten wordt, gaat het mis. De kracht van het water kan dan het hele bouwwerk ruïneren.
Gelukkig is de kans dat een individuele schuif niet werkt erg klein.

>a Hoe groot is de kans dat het fout gaat, als er een kans van 1% is dat een individuele schuif niet werkt?

>b Volgens de bouwers van de dam is de kans dat een individuele schuif niet werkt 1 op 1000.
Is dat voor een Zeeuw een geruststellende mededeling?

21. Een kanshistogram, behorend bij een binomiaal kansexperiment dat 20 keer is uitgevoerd. Horizontaal staat het aantal successen uitgezet.

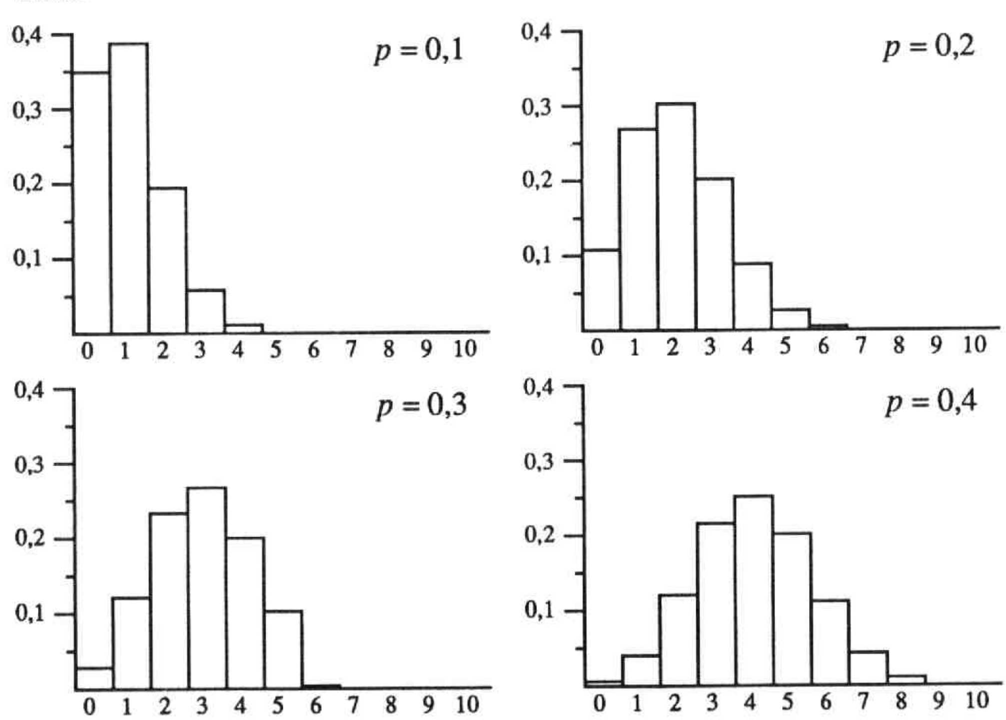


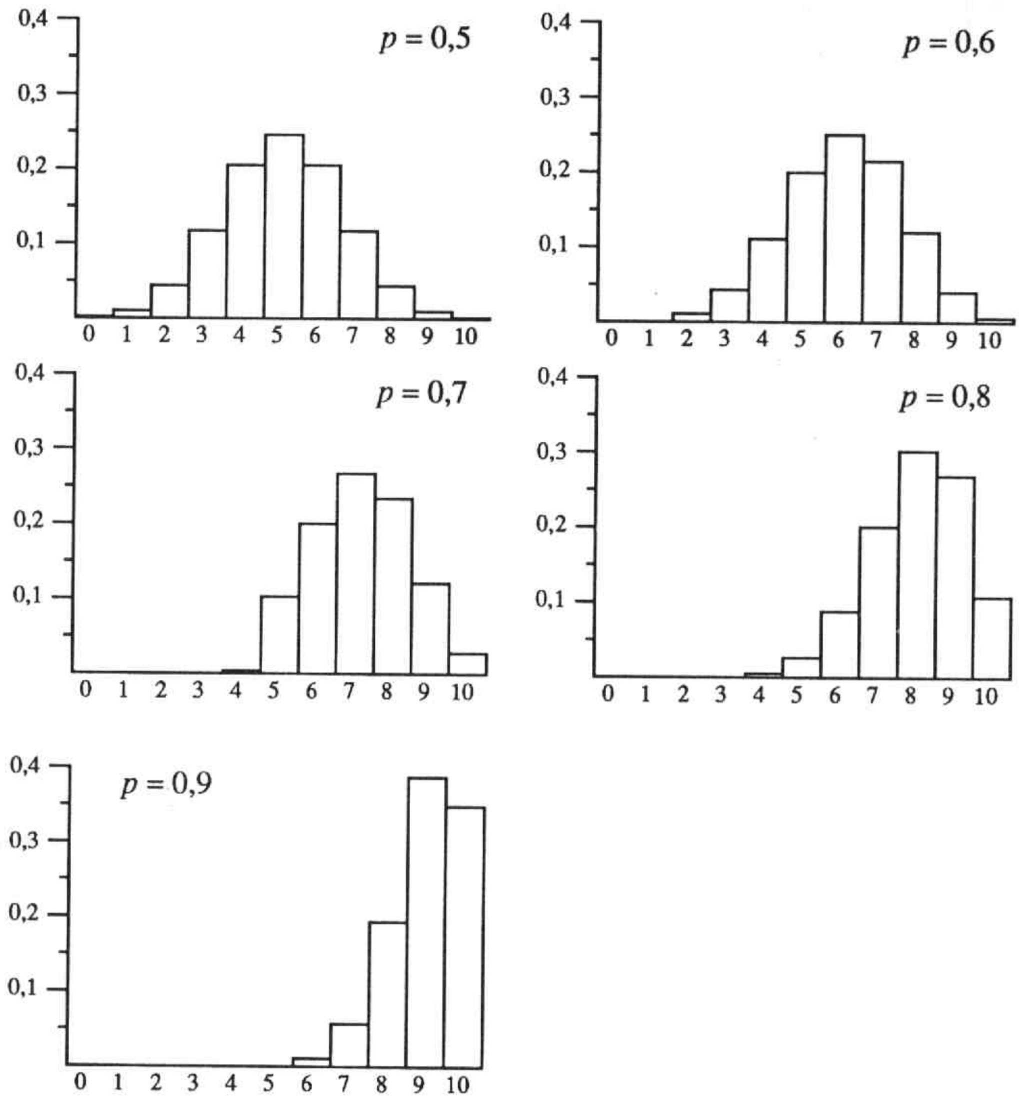
>a Heb je een vermoeden hoe groot de kans op succes is?

>b Controleer of je vermoeden juist is als gegeven wordt (afgerond op 4 decimalen): $P(S = 17) = 0{,}1901$.

>c Schat met behulp van het kanshistogram de kans op tenminste 18 successen.
Kort genoteerd: $P(S \geq 18)$.

22. Hieronder staan kanshistogrammen van negen binomiale kansverdelingen, getekend door een computer.
Steeds geldt: $n = 10$. De kansen op succes (p) staan bij de histogrammen vermeld.





>a Zoek bij elk histogram het aantal successen met de grootste kans.
Is het resultaat logisch?

>b Welke histogrammen zijn elkaar spiegelbeeld?
Kun je dat verklaren?

>c Het histogram bij $p = 0,5$ is het enige dat symmetrisch is
(dus $P(X = 4) = P(X = 6)$, $P(X = 3) = P(X = 7)$,enz.).
Waarom?

De kans op succes (p) en het aantal herhalingen van het experiment (n) bepalen samen welke aantallen successen het meest kansrijk zijn.
Zo mag je bij $n = 10$ en $p = 0,7$ redelijkerwijs verwachten dat je in de buurt van 7 successen uitkomt.

23. Bij $n = 10$ zullen we 'in de buurt van 7 successen' opvatten als '6, 7 of 8 successsen'.

   >a Schat met het kanshistogram van opgave 22 de kans op 6, 7 of 8 successen bij $p = 0{,}7$.

   >b Hoe groot is de kans om in de buurt van 7 successen te komen bij de succeskans $p = 0{,}5$?

Wanneer n en p bekend zijn, kunnen kansen worden berekend of afgelezen uit tabellen of histogrammen.
In de praktijk zijn de kansen op succes vaak onbekend en wordt een steekproef gebruikt om de succeskans p te schatten. Als bij een steekproef van 10 (10 herhalingen van een kansexperiment) er 7 successen geteld worden dan lijkt het voor de hand liggend om aan te nemen dat de succeskans 0,7 is.
Uit opgave 23>b blijkt dat je daar vooorzichtig mee moet zijn.
Ook wanneer de succeskans 0,5 zou zijn bestaat er een niet geringe kans dat je bij een steekproef van 10 een aantal successen in de buurt van 7 zult vinden.

24. Bij de produktie van ping-pong-balletjes komen exemplaren voor met scheurtjes. Die zijn natuurlijk niet bruikbaar. Om een indruk te krijgen van het percentage niet bruikbare balletjes worden er 10 gecontroleerd.
   Bij één exemplaar worden scheurtjes geconstateerd. Op grond daarvan wordt verondersteld dat 90% van de produktie *wel* goed is. De succeskans wordt dus op 0,9 geschat.

   >a Stel dat de werkelijke succeskans $p = 0{,}8$ is.
   Hoe groot is de kans dat je dan toch 8, 9 of 10 goede exemplaren aantreft bij een steekproef van 10?

   Een succeskans p noemen we acceptabel als bij die p er meer dan 10% kans is op het aantreffen van 8, 9 of 10 successen bij een steekproef van 10.

   >b Bepaal met behulp van de kanshistogrammmen van opgave 22 welke waarden van p nog acceptabel zijn.

4 De binomiale kanstabel

1. Een multiple choice-test, bestaande uit acht vragen, wordt volledig op de gok ingevuld.
Hieronder staat de tabel met de kansen op 0, 1, 2, ..., 8 goede antwoorden.

aantal successen (=k)	$P(S=k)$
0	0,1001
1	0,2670
2	0,3114
3	0,2077
4	0,0865
5	0,0231
6	0,0038
7	0,0004
8	0,0000

>a Hoe kun je aan de tabel zien dat de kans op 'succes' $\frac{1}{4}$ is?

>b Hoe groot is, voor een gokker, de kans op minder dan drie goede antwoorden?

>c Een voldoende voor deze test krijg je, als minstens vijf van de acht antwoorden goed zijn.
Hoe groot is, voor een gokker, de kans op een voldoende?

Bij een binomiaal kansexperiment met $p = \frac{1}{4}$ en $n = 8$ is het verwachte aantal successen gelijk aan 2.
Dit betekent niet dat je bij herhaalde uitvoering van het experiment zo ontzettend vaak twee successen zult vinden.
Wel kun je zeggen dat de kans groot is dat het aantal successen *in de buurt* van $S = 2$ zal liggen.
In het bovenstaande voorbeeld is de kans op 1, 2 of 3 successen gelijk aan 0,7861 ofwel:

$$\begin{aligned} P(1 \leq S \leq 3) &= P(S=1) + P(S=2) + P(S=3) \\ &= 0{,}2670 + 0{,}3114 + 0{,}2077 \\ &= 0{,}7861 \end{aligned}$$

In de praktijk wordt meestal gebruik gemaakt van een *cumulatieve* kanstabel (cumulatief = opeenhopend, stapelend). Daarin staan niet de kansen $P(S=k)$ vermeld, maar de kansen $P(S \leq k)$.

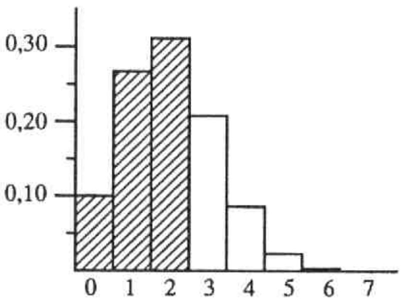
2. Het begin van de cumulatieve tabel, behorend bij de kanstabel van opgave 1:

aantal (k)	$P\ (S \leq k)$
0	0,1001
1	0,3671
2	0,6785 ←
3	...
...	...
...	...

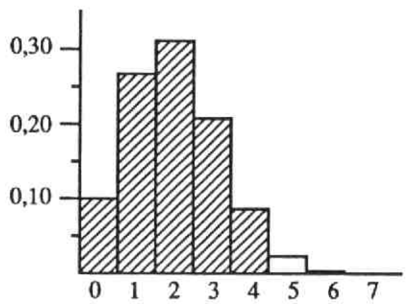
$P(S \leq 2) =$
$P(S{=}0) + P(S{=}1) + P(S{=}2) =$
$0{,}1001 + 0{,}2670 + 0{,}3114$

\> Maak de tabel verder af.

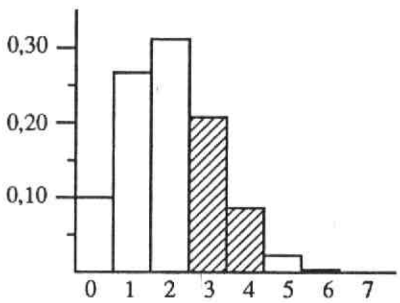
De cumulatieve kansen worden weergegeven als de *som* van een aantal staven, beginnend met de staaf bij 0 successen ($k = 0$).



$P(S \leq 2)$



$P(S \leq 4)$



$P(3 \leq S \leq 4) = P(S = 3) + P(S = 4)$

3. Het laatste plaatje is te beschouwen als een combinatie van de eerste twee.
   - \>a Welke combinatie is dat?
   - \>b Hoe groot is $P(3 \leq S \leq 4)$?
   - \>c $P(S = 4)$ kan ook door combinatie van twee cumulatieve kansen gevonden worden. Welke?

4. Neem het kanshistogram bij $n = 8, p = \frac{1}{4}$ over in je schrift.
   - \>a Geef met twee verschillende kleuren aan welke gedeelten van het kanshistogram horen bij $P(S \leq 3)$ en $P(S > 3)$.
   - \>b $P(S \leq 3)$ is af te lezen uit de tabel van opgave 2.
     Is die tabel ook te gebruiken om $P(S > 3)$ te bepalen?

5. De cumulatieve tabel behorend bij een binomiaal kansexperiment, dat zes keer uitgevoerd wordt.

aantal successen (=k)	$P(S \leq k)$
0	0,0467
1	0,2333
2	0,5443
3	0,3208
4	0,9590
5	0,9959
6	1,0000

>a Bepaal uit de tabel $P(S = 4)$.

>b Bereken $P(S > 3)$.

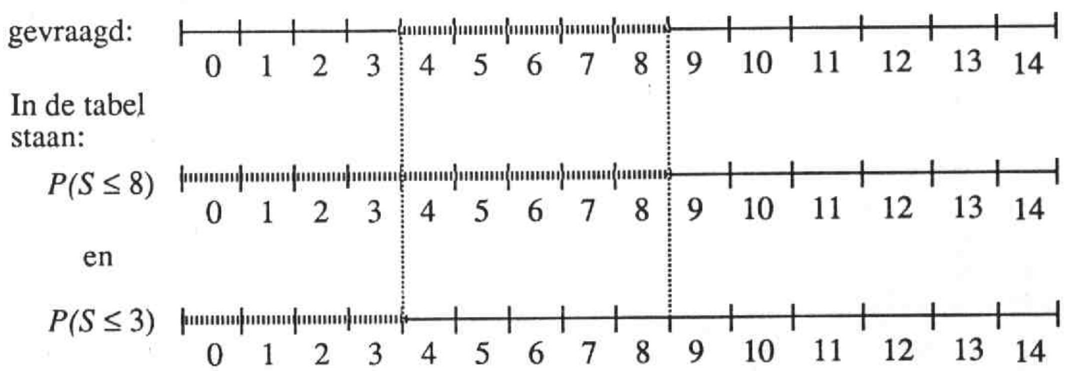
>c Uit de tabel is af te leiden: $P(S \leq 4) - P(S \leq 2) = 0{,}4147$.
Wat is daarmee nu precies uitgerekend?

>d Bereken $P(2 \leq S \leq 5)$.

Er bestaan tabellenboekjes waarin voor een groot aantal waarden van n (meestal n = 2 t/m n = 25, n = 50, n = 100) cumulatieve kanstabellen zijn opgenomen voor een serie p-waarden.
Als voorbeeld bekijken we een deel van de kanstabellen bij n = 14 (blz. 34).
In het omkaderde gedeelte staan de cumulatieve kansen behorend bij p = 0,30.
Kansen zoals $P(S \leq 6)$ zijn direct afleesbaar: $P(S \leq 6) = 0{,}9067$.
Voor andere kansen zijn extra stappen nodig.

Bijvoorbeeld: gevraagd is $P(4 \leq S \leq 8)$.

In een beeldverhaal:



dus $P(4 \leq S \leq 8) = P(S \leq 8) - P(S \leq 3) = 0{,}9917 - 0{,}3552 = 0{,}6365$

Pas op! Omdat het om *aantallen* successen gaan, zijn de volgende kansen allemaal hetzelfde:
$P(4 \leq S \leq 8) = P(3 < S \leq 8) = P(4 \leq S < 9) = P(3 < S < 9)$

						p						
n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	1/6	1/3
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001	0,0779	0,0034
	1	0,8470	0,5846	0,3567	0,1979	0,1010	0,0475	0,0205	0,0081	0,0029	0,0009	0,2960	0,0274
	2	0,9699	0,8416	0,6479	0,4481	0,2811	0,1608	0,0839	0,0398	0,0170	0,0065	0,5795	0,1053
	3	0,9958	0,9559	0,8535	0,6982	0,5213	0,3552	0,2205	0,1243	0,0632	0,0287	0,8063	0,2612
	4	0,9969	0,9908	0,9533	0,8702	0,7415	0,5842	0,4227	0,2793	0,1672	0,0898	0,9310	0,4755
	5	1,0000	0,9985	0,9885	0,9561	0,8883	0,7805	0,6405	0,4859	0,3373	0,2120	0,9809	0,6898
	6		0,9998	0,9978	0,9884	0,9617	0,9067	0,8164	0,6925	0,5461	0,3953	0,9959	0,8505
	7		1,0000	0,9997	0,9976	0,9897	0,9685	0,9247	0,8499	0,7414	0,6047	0,9993	0,9424
	8			1,0000	0,9996	0,9978	0,9917	0,9757	0,9417	0,8811	0,7880	0,9999	0,9826
	9				1,0000	0,9997	0,9983	0,9940	0,9825	0,9574	0,9102	1,0000	0,9960
	10					1,0000	0,9998	0,9989	0,9961	0,9886	0,9713		0,9993
	11						1,0000	0,9999	0,9994	0,9978	0,9935		0,9999
	12							1,0000	0,9999	0,9997	0,9991		1,0000
	13								1,0000	1,0000	0,9999		
	14										1,0000		

6. Bepaal de volgende kansen met de tabel (dus $n = 14$).
   >a $P(S \leq 7)$ voor $p = 0,15$ >c $P(S < 8)$ voor $p = 0,15$
   >b $P(1 \leq S \leq 4)$ voor $p = 0,25$ >d $P(3 < S < 5)$ voor $p = 0,30$

Ook kansen zoals $P(S \geq 4)$ kunnen, via extra stappen, uit de tabellen bepaald worden.
Gevraagd: $P(S \geq 4)$ met $n = 14$ en $p = 0,3$.

In een beeldverhaal:

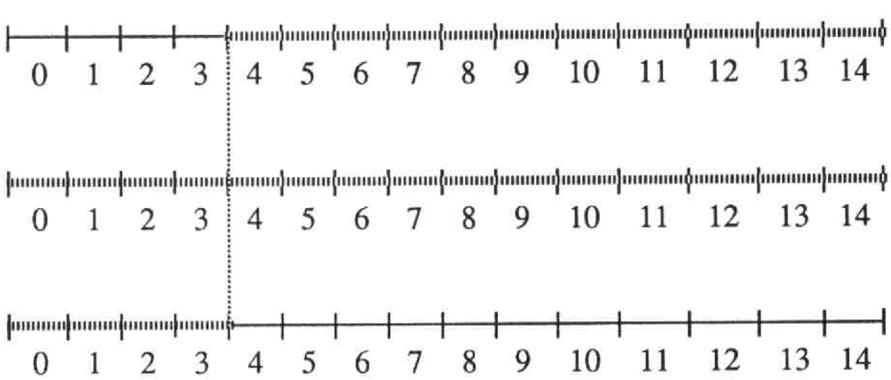
gevraagd:

In de tabel staan:

$P(S \leq 14)$

en

$P(S \leq 3)$



dus $P(S \geq 4) = P(S \leq 14) - P(S \leq 3)$
$= 1 - 0,3552$
$= 0,6448$

Merk op dat $P(S \geq 4)$ hetzelfde is als $P(S > 3)$ en ook hetzelfde als $P(4 \leq S \leq 14)$.

7. Bepaal de volgende kansen met de tabel ($n = 14$).
   >a $P(S \geq 2)$ voor $p = 0,3$ >c $P(S > 9)$ voor $p = 0,25$
   >b $P(S > 4)$ voor $p = 0,20$ >d $P(S \geq 10)$ voor $p = 0,10$

8. Bepaal de volgende kansen met behulp van de juiste tabel.

>a	$P(S \leq 12)$	voor $n = 20$;	$p = 0{,}4$.
>b	$P(S < 8)$	voor $n = 10$;	$p = 0{,}6$.
>c	$P(S = 19)$	voor $n = 20$;	$p = 0{,}2$.
>d	$P(S \geq 4)$	voor $n = 12$;	$p = 0{,}5$.
>e	$P(S > 7)$	voor $n = 100$;	$p = 0{,}1$.
>f	$P(11 < S < 14)$	voor $n = 17$;	$p = 0{,}8$.

Vraag: Hoe groot is de kans dat er bij tien worpen met een dobbelsteen minstens drie keer 'zes' wordt gegooid?

Dit is een binomiaal kansexperiment met:

- Succes: het gooien van een 'zes', met succeskans $p = \frac{1}{6}$.
- Tienmaal gooien betekent $n = 10$.
- Er wordt gevraagd naar $P(S \geq 3)$

9. > Bepaal deze kans met behulp van de tabellen.

10. Zo'n 10% van de auto's die over de Nederlandse wegen razen, vertoont technische gebreken.
Regelmatig worden door de politie uitgebreide technische keuringen uitgevoerd langs de kant van de autoweg.

>a Er worden 100 auto's gecontroleerd.
Hoe groot is de kans dat er bij meer dan dertien auto's gebreken worden geconstateerd?

Gemiddeld 1 op de 100 auto's is zo gammel dat hij van de weg wordt gehaald en naar de sloper gaat.

>b Hoe groot is de kans dat bij 100 controles er minstens 1 auto rijp is voor de sloop?

11. Uit een vaas met 30 witte en 20 rode ballen wordt een aantal keren met terugleging een bal getrokken.

>a Hoe groot is de kans dat bij 15 trekkingen de meerderheid van de getrokken ballen rood is?

>b Bereken bij 12 trekkingen de kans op 6 witte ballen.

12. Bij een eerlijke munt zijn de kansen op 'kop' en 'munt' gelijk.
De verwachtingswaarde van het aantal keren 'kop' is dus gelijk aan 50% van het aantal worpen.
Bereken bij elk van de volgende waarden van n (= aantal worpen) de kans dat het aantal keren 'kop' tussen de 40% en 60% van het totaal aantal worpen ligt.

>a $n = 10$.

>b $n = 20$.

>c $n = 50$.

>d $n = 100$

>e De vragen bij >a t/m >d zijn steeds dezelfde. De berekende kans wordt echter steeds groter.
Kun je dat verklaren?

13. Bij een landelijk onderzoek is gebleken dat 15% van alle middelbare scholieren regelmatig spijbelt.

>a Hoe groot is de kans dat in een klas van 20 5Havo-leerlingen er meer dan 4 zijn die regelmatig spijbelen?

>b Welke bezwaren kun je aanvoeren tegen het gebruik van de binomiale kansverdeling in dit geval?

14. In een bedrijf worden schroeven gefabriceerd.
Volgens de bedrijfsleider is 5% van de produktie niet bruikbaar. De slechte exemplaren worden niet verwijderd, omdat de controle daarop te kostbaar is. De schroeven worden in doosjes van 50 stuks verkocht aan de winkeliers.

>a Hoe groot is de kans dat een doosje meer dan vier onbruikbare schroeven bevat?

>b Een winkelier heeft een partij van 500 doosjes schroeven besteld bij de fabriek.
Hoeveel doosjes met 50 bruikbare schroeven kan hij daarbij verwachten?

15. Een docent geeft een multiple-choice-test bestaande uit 20 opgaven.

>a Stel dat hij voor iedere goed beantwoorde vraag een halve punt toekent.
Hoe groot is de kans dat iemand, die alle antwoorden gokt, als cijfer een 4 of hoger krijgt?

>b De docent vindt dat een gokker ten hoogste 1% kans mag hebben om een cijfer 4 of meer te halen.
Bij welk aantal goede antwoorden moet hij dan het cijfer 4 toekennen?

16. Om de kooplust te stimuleren heeft de winkeliersvereniging 'Ons Eigen Belang' besloten om een grote decemberactie op poten te zetten.
Er wordt een groot aantal envelopjes in omloop gebracht via de deelnemende winkels.
In 5% van de envelopjes zit een waardebon, goed voor een uitgebreid kerstpakket ter waarde van f 50,-.
Nog eens 10% bevat een waardebon, ter waarde van f 10,-, vrij te besteden in één van de winkels. De rest van de envelopjes is leeg.
Voor iedere f 25,- aan boodschappen krijgt een klant één envelopje.

>a Iemand heeft voor 312 gulden boodschappen gedaan.
Hoe groot is de kans dat vier van de gekregen envelopjes een waardebon bevatten?

>b Hoeveel zullen de winkeliers door deze actie naar schatting kwijt zijn aan prijzengeld per 1000 gulden omzet?

17. Hernia-operaties worden alleen uitgevoerd, als alle andere methoden om de pijnen te bestrijden hebben gefaald.
Reden: een operatie heeft maar 70% kans van slagen.
Mislukt de operatie, dan kan de kwaal daardoor nog verergeren.

> In een ziekenhuis worden per maand 18 hernia-operaties uitgevoerd.
Bereken de kans dat tenminste 80% van de operaties zal slagen.

18. Een bollenkweker uit Hillegom biedt de mogelijkheid om schriftelijk pakketten bloembollen te bestellen.
De bestelling wordt, na betaling, via het eigen postorderbedrijf naar de klant gestuurd. Omdat er ongezien gekocht wordt, garandeert de kweker dat minstens 90% van de bestelde bollen tot bloei komt. Als dat niet gebeurt, heeft de klant recht op een gratis pakket van dezelfde samenstelling.

Veronderstel dat de kweker met de kwaliteitsgarantie bedoelt dat iedere afzonderlijke bol een bloeikans van 90% heeft.

>a Je koopt een pakket van 20 bollen.
Hoe waarschijnlijk is het dat tenminste 90% van de bollen in bloei komt?

>b Hoe groot is de kans op een gratis nieuw pakket, als je een pakket van 50 bollen koopt?

19. Na het vorige vraagstuk mag duidelijk zijn dat een bloeigarantie van tenminste 90% niet slim is, als de bloeikans van een individuele bol ook 90% is.
Stel dat de bloeikans per bol 95% is.

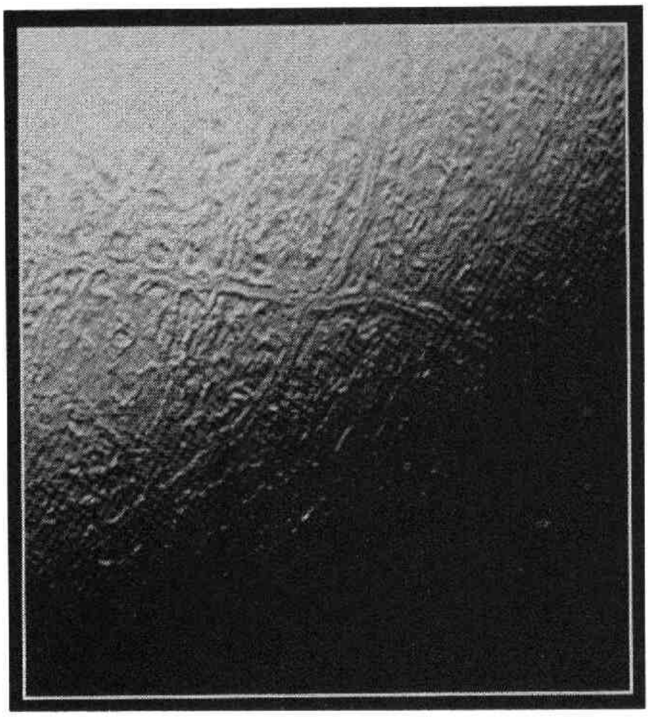
>a Bereken de kans dat een pakket van 20 stuks niet aan de 90%-garantie voldoet.

Per jaar worden door de kweker ongeveer 1000 pakketten van 20 stuks, 1500 pakketten van 50 stuks en 1200 pakketten van 100 stuks verkocht. Van de klanten die recht hebben op een gratis nieuw pakket, maakt zo'n 60% gebruik van de garantiebepalingen.

>b Hoeveel pakketten van iedere soort zal de kweker achter de hand moeten houden om aan zijn garantieverplichtingen te kunnen voldoen?

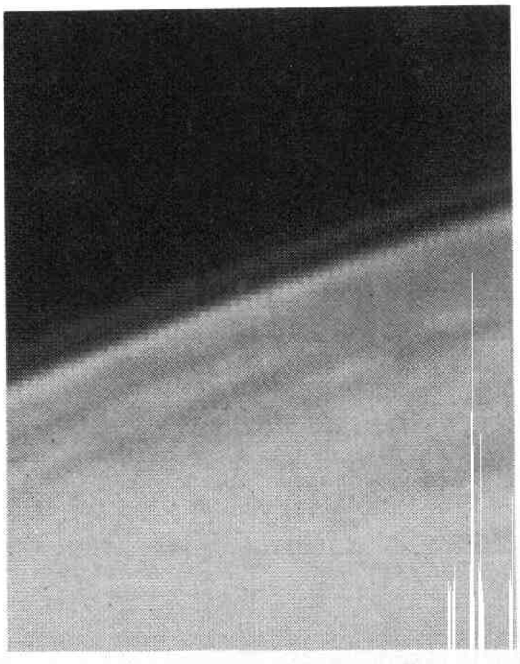
In 1977 werd de Voyager 2 gelanceerd voor een reis langs de planeten. Ruim twaalf jaar later (augustus 1989) passeerde hij Triton, één van de manen van Neptunus, en stuurde een serie foto's van deze maan naar de aarde.

De meest gedetailleerde opname van het oppervlak van Triton. De foto werd door de Voyager 2 gemaakt van een afstand van 40.000 kilometer.



Een foto wordt naar de aarde overgeseind door middel van binaire codes. Daartoe wordt zo'n opname eerst met verticale en horizontale lijnen verdeeld in een groot aantal vierkantjes.
Van elk afzonderlijk vierkantje wordt de zwartingsgraad gemeten en uitgedrukt op een schaal van 0 (= volledig wit) tot 15 (= volledig zwart). Zo kunnen 16 verschillende grijstinten worden onderscheiden.

Een uitvergroting van de rand van Triton. Bij de overgang van het lichte naar het donkere gedeelte is de structuur van vierkantjes duidelijk zichtbaar.



De grijstint van elk vierkantje wordt, als binaire code met lengte 4, overgeseind naar de aarde.

De 16 gebruikte codes zijn:

0 0 0 0	= wit	
0 0 0 1		
0 0 1 0		
0 0 1 1		
0 1 0 0		
0 1 0 1		grijstinten, toenemend van
0 1 1 0		heel-licht-grijs tot heel-donker-grijs
0 1 1 1		
1 0 0 0		
1 0 0 1		
1 0 1 0		
1 0 1 1		
1 1 0 0		
1 1 0 1		
1 1 1 0		
1 1 1 1	= zwart	

Bij het overseinen kunnen onderweg storingen optreden, waardoor op aarde een andere code wordt ontvangen dan door de Voyager 2 is verstuurd.
Veronderstel dat de kans op een storing (d.w.z. een 0 wordt ontvangen als 1 of een 1 wordt ontvangen als een 0) 5% is.

20. De Voyager verzendt de kleurcode 1111 (= zwart).
    - >a Hoe groot is de kans dat deze code op aarde ontvangen wordt als 0101 (= tamelijk lichtgrijs).
    - >b Bereken de kans dat één van de vier signalen verkeerd ontvangen wordt.
    - >c Laat zien dat de kans op een goede ontvangst van een kleurcode 0,8145 is.

Uit opgave 20 >c volgt dat van een complete foto (opgebouwd uit ongeveer 10.000 vierkantjes) ongeveer 19% foutief ontvangen wordt. De wetenschappelijke waarde van zo'n foto is niet erg groot.
Er bestaan verschillende methoden om het percentage fouten te verkleinen.

De eerste methode is: verzend ieder signaal meerdere malen achtereen, bijvoorbeeld als blok van 3.
De kleurcode 0 1 0 1
wordt dan verstuurd als $\boxed{000}\,\boxed{111}\,\boxed{000}\,\boxed{111}$.

Deze reeks kan op aarde ontvangen worden als: $\boxed{100}\,\boxed{101}\,\boxed{000}\,\boxed{110}$
en bevat dus drie fouten.
Van elk groepje van 3 bepaalt het signaal dat het meest voorkomt welk signaal is bedoeld.
Zo wordt het blokje $\boxed{100}$ geïnterpreteerd als $\boxed{0}$.

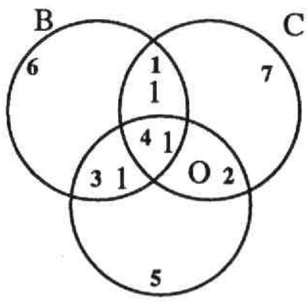
21. > Controleer dat de kleurcode uit het voorbeeld goed geïnterpreteerd wordt, ondanks de drie fouten.

22. >a Laat zien: de kans dat een signaal goed overkomt op aarde is 0,9928.
>b Hoe groot is de kans dat de hele kleurcode (4 signalen, overgeseind als 4 blokjes van 3 signalen) goed overkomt op aarde?

23. > Waarom is deze methode niet geschikt om de signalen in blokjes van twee of vier te versturen?

24. De kans op een goede ontvangst kan nog verder vergroot worden door ieder signaal in blokjes van 5 te versturen.
>a Hoe moet je dan het blokje $\boxed{01001}$ interpreteren?
>b Bereken voor dit geval (4 signalen, overgeseind als 4 blokjes van 5 signalen) de kans op een goede ontvangst.

Een tweede methode, die in de praktijk vaak gebruikt wordt, is in hoofdstuk 1 als spelletje geïntroduceerd (zie hoofdstuk 1 opgaven 7 t/m 10). Daarbij worden aan de kleurcode 3 controlesignalen toegevoegd.



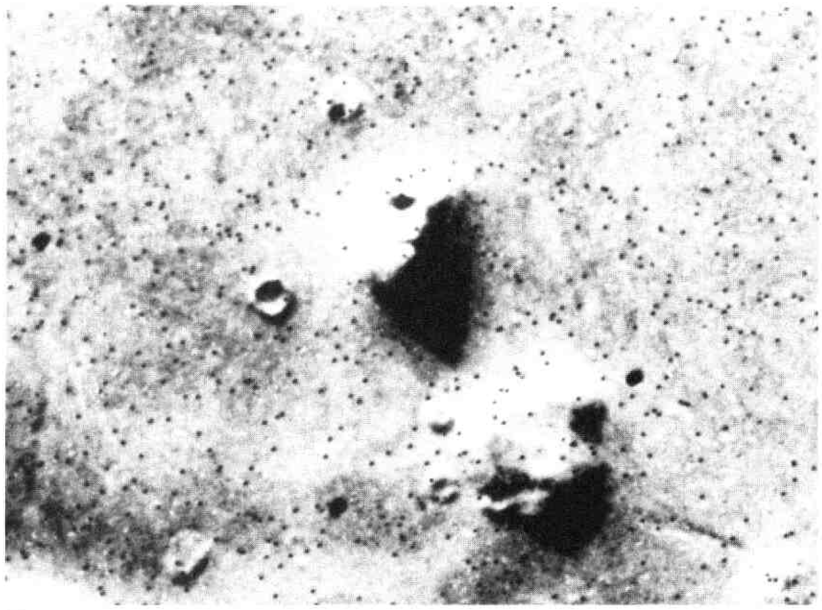
De code 1011 wordt ingevuld in de gebiedjes 1 t/m 4. In de gebieden 5, 6 en 7 worden nullen of enen gezet volgens de afspraak: als er al een even aantal enen binnen een cirkel staat wordt een 0 ingevuld en anders een 1.

25. > Ga na dat de code 1011 dan wordt: 1011010.

Het slimme van deze aanvulling is dat een rijtje van 7, waarin één fout voorkomt toch goed geïnterpreteerd kan worden.

26. > De code 1101110 bevat één fout signaal.
Welke is dat?

27. > Hoe groot is de kans dat een kleurcode, overgeseind als rijtje van 7 signalen, goed wordt geïnterpreteerd?



Een klein stukje, uitvergroot, van een foto die de Mariner op Mars heeft genomen. Deze foto is overgezonden met de zogeheten Reed-Muller code. Dat de code heel erge fouten niet verbeteren kon is duidelijk te zien: de afwijkend getinte puntjes zijn fouten. De grote rots boven in het midden is ongeveer 1,5 km breed.

Er zijn vier mogelijkheden van verzending bekeken:

methode van verzenden:	*aantal verstuurde signalen:*	*kans op goede interpretatie:*
A: alleen kleurcode	4	0,8145
B: 4 blokjes van 3 gelijke signalen	12	0,9715
C: 4 blokjes van 5 gelijke signalen	20	0,9952
D: kleurcode, aangevuld met 3 controlesignalen	7	0,9556

Voor wetenschappelijke doeleinden moet tenminste 95% van de informatie op een foto correct zijn.

28. >a Welke methoden van verzenden voldoen daar aan?

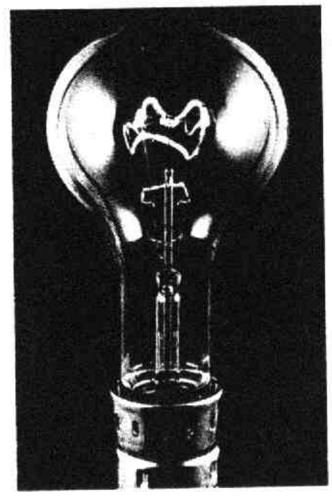
>b Wat is, uit wetenschappelijk standpunt bezien, de beste methode?

Nog langere series herhalingen geven natuurlijk nog betere resultaten. De kosten spelen echter ook een rol.
Veronderstel dat het versturen van één signaal *f* 1,- kost.
Iedere foutief ontvangen kleurcode verlaagt de waarde van de foto met *f* 75,-.

29. > Bij methode A zijn de verwachte kosten per kleurcode *f*17,91.
Laat dit zien met een berekening.

30. > Onderzoek welk van de vier genoemde methoden naar verwachting de laagste kosten met zich meebrengt.

5 Met en zonder terugleggen

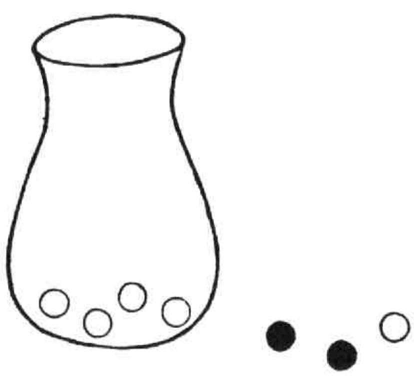

gloeilamp

1. Van een doos met tien lampen werken er twee niet.
   Een monteur controleert er drie van de tien. Het pakken van een defect exemplaar noemen we een succes.
   >a Bereken de kansverdeling van het aantal successen als je er vanuit gaat dat een gecontroleerd exemplaar opzij gelegd wordt.
   >b Bereken de kansverdeling ook voor het geval de monteur zo dom is om gecontroleerde exemplaren weer terug te doen in de doos.

2. > Beantwoord de vragen van opgave 1 ook voor een voorraad van 1000 lampen, waarvan er 200 defect zijn.

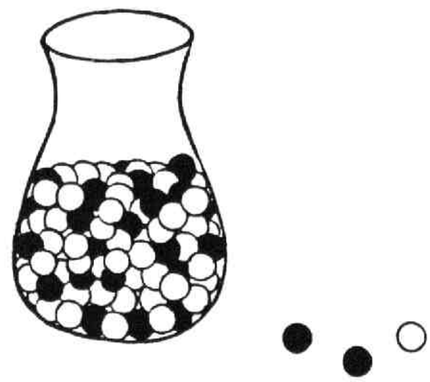
Bij een trekking *zonder* terugleggen veranderen de kansen elke keer als er één trekking is uitgevoerd.
De kansverdeling van het aantal successen is daarom anders dan bij een trekking *met* terugleggen.
Dat is bij opgave 1 duidelijk te zien.

3. Bij opgave 2 zijn de verschillen tussen 'met terugleggen' en 'zonder terugleggen' veel kleiner.
   > Kun je dat verklaren?



Nog een voorbeeld:
Een vaas is gevuld met 50 rode en 150 witte ballen.
Er worden 5 ballen uitgehaald, waarbij het aantal rode ballen geteld wordt.
De bijbehorende kansverdeling is in de tabel af te tezen
In de tweede kolom staat de trekking *met* terugleggen en in de derde kolom de trekking *zonder* terugleggen:

Aantal rode (=k)	$P(S=k)$	$P(S=k)$
0	0,2373	0,2333
1	0,3955	0,3995
2	0,2637	0,2663
3	0,0879	0,0864
4	0,0146	0,0136
5	0,0001	0,0001



4. > Controleer de kansen behorend bij $k = 2$.

Uit de tabel blijkt dat er niet zo veel verschil is tussen de kansen behorend bij trekkingen *met* en *zonder* terugleggen. Wanneer de kansen in procenten nauwkeurig worden gegeven, verdwijnt het verschil zelfs bijna helemaal.
In de praktijk wordt dan ook vaak de volgende regel gehanteerd:

> Als de steekproefgrootte (= aantal trekkingen) klein is ten opzichte van de totale populatie (= aantal ballen in de vaas), dan mag een trekking *zonder* terugleggen benaderd worden door een trekking *met* teruglegging (= binomiaal kansexperiment).

In feite heb je, onbewust misschien, deze regel in het vorige hoofdstuk al een aantal keren gebruikt.
Een onderzoek onder 100 Nederlanders is eigenlijk een 'trekking zonder terugleggen'. Maar 100 mensen op een totaal aantal van enkele miljoenen verandert zo weinig aan de 'samenstelling', dat daardoor de kansen (bijna) niet veranderen.

5. Goedkope LP's zijn vaak tamelijk slordig geperst. Gemiddeld 1 op de 20 exemplaren vertoont persfouten.
Een platenzaak bestelt 50 goedkope persingen van 'the Wall' (Pink Floyd).

>a Hoe groot is de kans dat er daarbij hoogstens 3 slechte exemplaren voorkomen?

De partij van 50 LP's blijkt 3 slechte exemplaren te bevatten. Deze worden toch gewoon tussen de andere exemplaren in de rekken gezet.

>b Hoe groot is de kans dat van de eerste vijf exemplaren die verkocht worden, er twee slecht zijn?

>c Maak het veel verschil of je opgave >b *met* of *zonder* terugleggen oplost?

6. Een leerling leent de sleutelbos van een docent om zijn boekentas uit het lokaal te halen.
Eén van de vijf sleutels past; de leerling weet niet welke dat is.

> Hoe groot is de kans dat de derde sleutel die geprobeerd wordt, past?

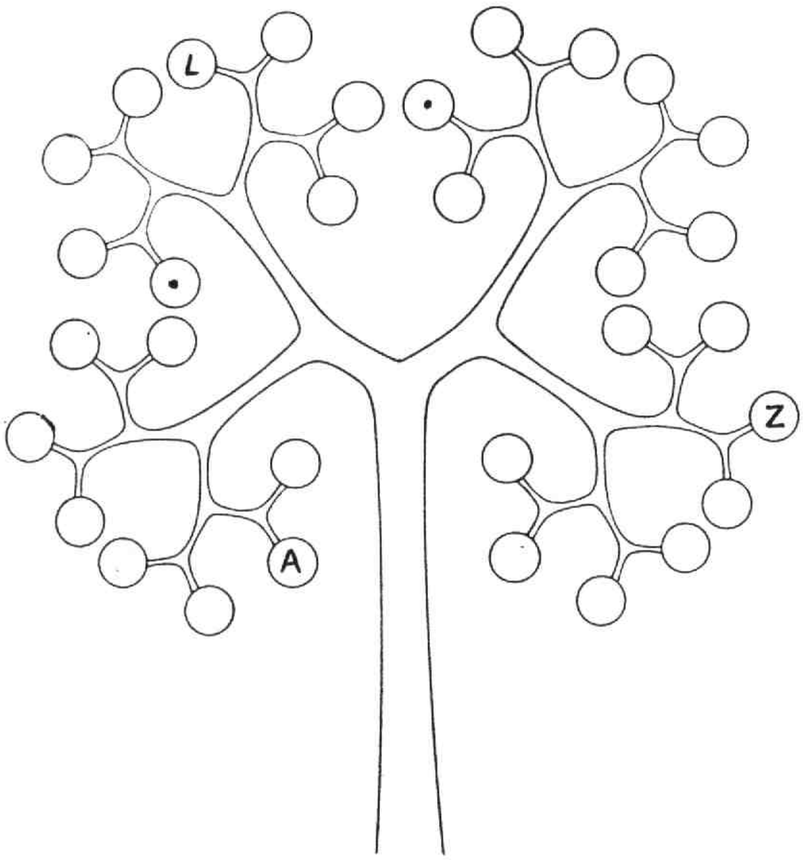
7. Van een kist met 100 sinaasappelen zijn er 20 zuur. Dat is aan de buitenkant niet te zien.
Je koopt er 6.

> Hoe groot is de kans dat daar 2 zure exemplaren bij zijn?

de grote fruitmarkt op het Rialtoplein te Venetië

6 Gemengde opgaven

1. Een binaire boom: vanuit de stam vertakt hij een aantal keren, telkens in twee richtingen.



>a Er zijn 32 eindvertakkingen.
Verklaar dat aantal.

De ASCII-codes voor de hoofdletters verschillen op de laatste vijf plaatsen (zie hoofdstuk 1 blz. 8).
Voor de hoofdletter A is dat 00001.

Door een $\boxed{0}$ op te vatten als een vertakking naar links en een $\boxed{1}$ als vertakking naar rechts, komt de A in deze binaire boom terecht op de plaats waar hij weergegeven staat.

>b Controleer in de boom dat de L (01100) en de Z (11010) op de goede plaats staan.

>c Waar hoort in deze boom de letter E?

>d Welke letters horen op de plaats van de stippen?

2. Bereken de volgende binomiale kansen:

   >a $P(2 \leq S < 7)$ als $p = 0{,}65$ en $n = 10$

   >b $P(S > 10)$ als $p = 0{,}3$ en $n = 20$

3. In een stad staan twee ziekenhuizen.
   Per week worden in het grootste van de twee 50 baby's geboren, in het kleinste is dat aantal 20 per week.
   In 1988 is in beide ziekenhuizen het aantal weken geteld, waarin tenminste 60% van de borelingen een jongen was.

   >a Bij welk van de twee ziekenhuizen zal dat aantal het grootst zijn? Waarom?

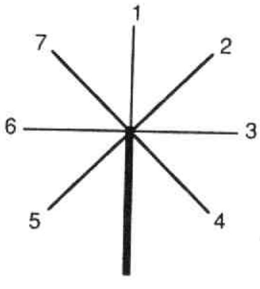
   >b Bereken met behulp van de tabel voor beide ziekenhuizen de verwachtingswaarde van dat aantal weken.

   >c Verklaar het resultaat van >b.

4. Bij de marine wordt nog regelmatig een systeem van seinen gehanteerd, waarbij de armen worden gebruikt.

T — correctie teken — einde bericht

De mogelijke standen van de arm worden hieronder schematisch weergegeven.



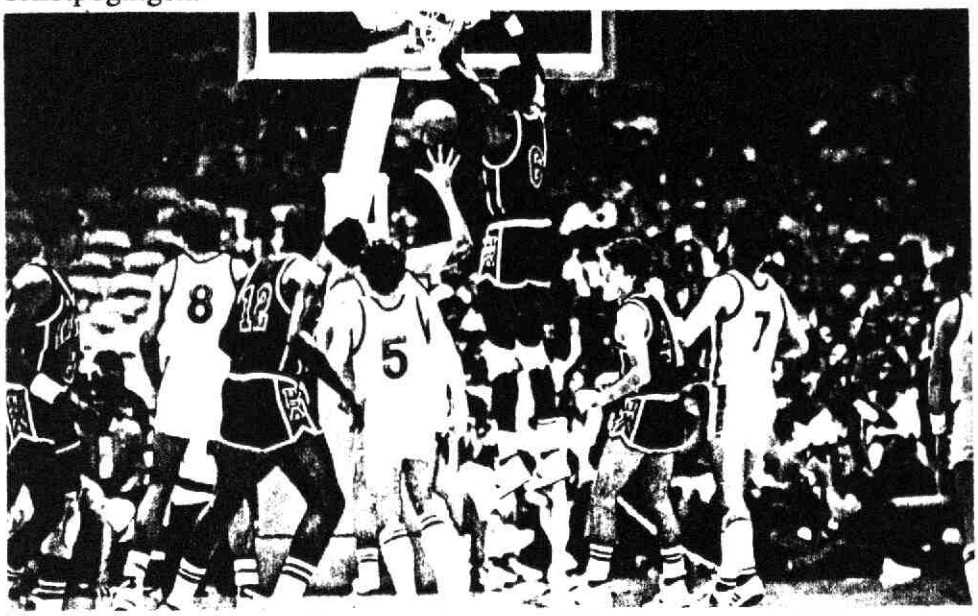
Op deze manier kunnen, gebruik makend van één of twee armen, 28 verschillende tekens worden gegeven.

>a Controleer dat aantal van 28.

>b Dit systeem kan gebruikt worden om de 26 letters, de 10 cijfers en een correctie-teken uit te beelden. Hoe?

5. > Verzin een vraag bij het antwoord: $\binom{13}{4} \cdot (0{,}2)^4 \cdot (0{,}8)^9$.

6. De waarde van een basketballspeler in de VS wordt onder andere bepaald door zijn schotpercentage. Dat is het aantal rake schoten als percentage van het aantal schotpogingen.



Een speler heeft een schotpercentage van 70%. In een wedstrijd waagt hij 20 schoten.

>a Hoe groot is de kans dat zijn score precies 70% is?

>b Bereken de kans dat zijn score ligt tussen 60% en 80%.

7. Uit een groep van 12 personen (4 mannen, 8 vrouwen) worden er drie aselect aangewezen.

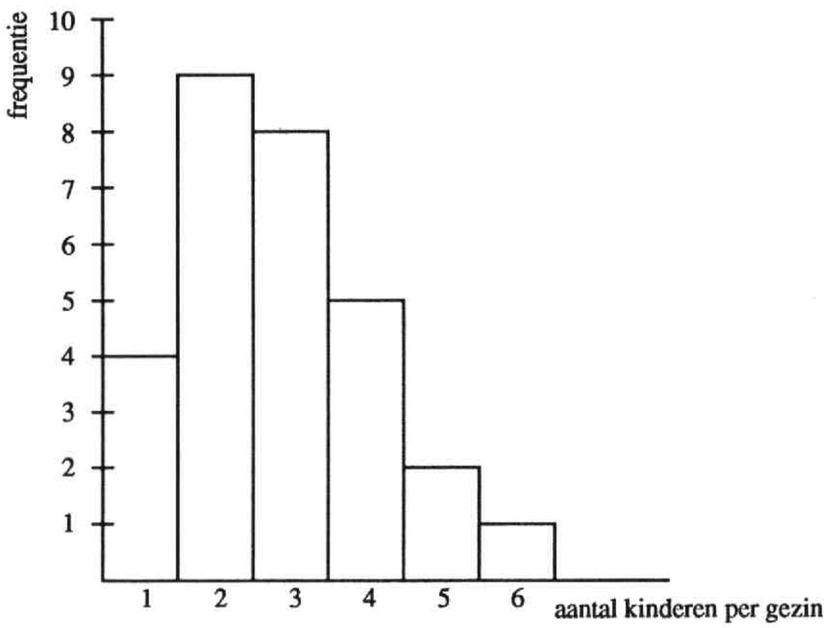
>a Hoeveel verschillende drietallen zijn er mogelijk?

>b Bereken: $\binom{4}{0} \cdot \binom{8}{3} + \binom{4}{1} \cdot \binom{8}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{1} + \binom{4}{3} \cdot \binom{8}{0}$

>c De uitkomsten van >a en >b zijn hetzelfde. Kun je dat verklaren?

>d Hoe groot is de kans dat twee van de drie aangewezen personen vrouwen zijn?

8. Uit de leerlinggegevens blijkt voor een klas van 30 leerlingen de gezinssamenstelling als volgt te zijn:



Uit dit histogram valt onder andere af te lezen dat 5 leerlingen van de 30 afkomstig zijn uit een gezin met 4 kinderen .

>a Hoe groot is de kans dat twee leerlingen die worden aangewezen beide komen uit een gezin met meer dan 2 kinderen?

Neem aan dat deze steekproef representatief is voor alle Nederlandse gezinnen met kinderen.

>b Bereken de kans dat in de vijfde klas van een school (100 leerlingen) meer dan de helft van de leerlingen uit een gezin met hoogstens 3 kinderen komt.

9. Tijdens het weekend zijn de wachtkamers van de EHBO-afdelingen in elk ziekenhuis meestal goed gevuld. Ongeveer 10% van de bezoekers komt om sportblessures te laten behandelen.
In een ziekenhuis melden in één weekend 50 mensen zich bij de EHBO.

\> Hoe groot is de kans dat het aantal personen met sportblessures daarbij onder de verwachting is?

10. De semafoon, beter bekend onder de naam 'pieper', werkt vrij vertaald als volgt: Door een centrale worden tegelijkertijd drie verschillende tonen uitgezonden. De pieper die gevoelig is voor precies deze drie tonen, reageert hier op. Bij elke pieper hoort een ander drietal tonen. Voor het hele semafoonnet zijn 30 verschillende tonen beschikbaar.

semafoon (v. Gr. *sèma* = teken, sein, *phoonè* = geluid), type *omroepinstallatie voor grote afstand, dat in Nederland door de PTT en in België door de RTT beheerd wordt. Het ontvangtoestel heeft de vorm van een draagbare radio; het kan door de huurder door het gehele land meegenomen worden. De code wordt overgebracht door drie lampjes, die achtereenvolgens de waarden 1, 2 en 4 hebben; door het doen branden van één of twee lampjes kunnen zes codetekens worden overgebracht, die een betekenis hebben welke van tevoren is afgesproken. Om contact te bewerkstelligen draait de oproeper op zijn telefoontoestel eerst het nummer van de semafoondienst, vervolgens het aan de gebruiker toegekende oproepnummer en ten slotte het gewenste codegetal. Op de semafooncentrale wordt de voorbewerkte oproep geregistreerd op een herhaalregister, waaruit de draaggolf (ca 87 MHz) via een oscillator gemoduleerd wordt met drie uit dertig laagfrequente signalen ('tonen'). De ontvangtoestellen bezitten detectors die alleen bij de gezochte abonnee alle resoneren met de tonen van de zender en zo de weg vrijmaken voor het eveneens als toonfrequentie doorgegeven codegetal. De aankomst van een signaal wordt door heet ontvangtoestel kenbaar gemaakt door middel van een fluittoon.

>a Hoeveel 'piepers' kunnen daarmee in totaal worden opgeroepen?

Een groot bedrijf heeft zijn eigen centrale. 53 werknemers van dat bedrijf moeten via de centrale opgeroepen kunnen worden.

>b Hoeveel verschillende tonen (van de 30 die er zijn) heeft dit bedrijf nodig om alle 53 werknemers te kunnen oproepen?

11. Deze opgave meegerekend gaan in dit hoofdstuk vijf van de elf opgaven over combinatie-getallen. Ze zijn in een bepaalde volgorde gezet.
Hoeveel verschillende volgordes waren in principe mogelijk:

>a als je elk van de 11 vraagstukken afzonderlijk beschouwt?

>b als je alleen let op de afwisseling van 'vraagstukken over combinaties' en 'andere vraagstukken'?

Combinatiegetallen $\binom{n}{k}$.

$k \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2		6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
3				20	35	56	84	120	165	220	286
4						70	126	210	330	495	715
5								252	462	792	1287
6										924	1716

$k \backslash n$	14	15	16	17	18	19	20
1	14	15	16	17	18	19	20
2	91	105	120	136	153	171	190
3	364	455	560	680	816	969	1140
4	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845
5	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504
6	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760
7	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520
8			12870	24310	43758	75582	125970
9					48620	92378	167960
10							184756

$k \backslash n$	21	22	23	24	25
1	21	22	23	24	25
2	210	231	253	276	300
3	1330	1540	1771	2024	2300
4	5985	7315	8855	10626	12650
5	20349	26334	33649	42504	53130
6	54264	74613	100947	134596	177100
7	116280	170544	245157	346104	408700
8	203490	319770	490314	735471	1081575
9	293930	497420	817190	1307504	2042975
10	352716	646646	1144066	1961256	3268760
11		705432	1352078	2496144	4457400
12				2704156	5200300