Leerboek der vlakke meetkunde

LEERBOEK

DER

VLAKKE MEETKUNDE,

DOOR

J. VERSLUYS.

ACHTSTE DRUK.

TE GRONINGEN BIJ J. B. WOLTERS, 1890.

Stoomdrukkerij van J. B. Wolters.

VOORREDE.

Het aantal leerboeken over vlakke meetkunde is ongetwijfeld vrij groot, en ik wil het niet vermeerderen, zonder dit te rechtvaardigen.

In de eerste plaats zijn de axioma's, waarop de meetkunde berust, scherper aangewezen, dan men gewoon is dat te doen. Het moet inderdaad verwondering baren, dat men nog voortdurend, ook in Frankrijk en Duitschland, leerboeken ziet verschijnen, waarin niet de minste notitie genomen wordt van de beschouwingen over de grondslagen der meetkunde, zelfs wanneer die beschouwingen van beroemde mannen zijn. Nog al te vaak geeft men van de rechte lijn een bepaling, waarvan sinds lang aangetoond is, dat zij logisch geheel onjuist is.

Een opgave van eenige verhandelingen over de grondslagen der meetkunde kan niet onbelangrijk zijn.

Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von N. Lobatschewsky. Berlin 1840. *f* 0,90.

Dat werkje is in 1866 door J. Hoüel in 't Fransch vertaald met den titel:

Etudes géométriques sur la théorie des parallèles par Lobatschewsky, suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher, Paris, Gauthier-Villars. 1866. 2 *fr.* 50 *c.*

Die Gleichkeit und Aehnlichkeit der Figuren und die Aehnlichkeit derselben, von Dr. R. Baltzer. Dresden 1852. *f* 0,60.

Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, par J. Hoüel. Paris 1867. 2 *fr.* 50 *c.*

Des méthodes dans les sciences de raisonnement par J. M. C. Duhamel. Paris, Gauthier-Villars. Première partie, 1865, *et Deuxième partie*, 1866.

In de tweede plaats zijn de eigenschappen, die op onmeetbare grootheden betrekking hebben, met de vereischte juistheid behandeld. Daartoe was het noodig, een hoofdstuk op te nemen over grenzen en bewerkingen met onmeetbare getallen (§ 130—136).

In de derde plaats maak ik opmerkzaam op de methode der grenswaarden, die onder een elementairen vorm toegepast is bij de behandeling van den cirkel.

In de vierde plaats heb ik uitvoeriger dan men bij ons gewoon is de werkstukken behandeld, door de mogelijkheid der constructies aan te toonen en de verschillende gevallen na te gaan, die zich kunnen voordoen. Zie § 70 en verder.

Afgescheiden van den tekst zijn eenige historische aanteekeningen toegevoegd.

April 1869. J. VERSLUYS.

BIJ DEN TWEEDEN DRUK.

De tweede druk verschilt weinig van den eersten. Intusschen heb ik eenige kleine verbeteringen aangebracht.

In den eersten druk heb ik het een en ander gezegd over onmeetbare getallen, dat in de rekenkunde tehuis behoort, maar in geen van de toen bestaande leerboeken gevonden werd. Ofschoon die zaken uit dit boek *konden* weggelaten worden na het verschijnen van mijn leerboek der rekenkunde, heb ik ze laten staan. De reden hiervan is, dat dit boek ook in handen komt van leerlingen, die een ander leerboek der rekenkunde gebruiken dan het genoemde.

De definitie van *hoek* heb ik zoodanig veranderd, dat ze overeenstemt met de bepalingen, die ik in mijn stereometie heb gegeven van ruimte- of tweevlakshoek, drievlakshoek, enz.

October 1871. J. VERSLUYS.

BIJ DEN DERDEN DRUK.

In deze uitgave zijn op eenige plaatsen kleine wijzigingen of verbeteringen aangebracht.

Groningen, Mei 1875. J. VERSLUYS.

BIJ DEN VIERDEN DRUK.

Opnieuw zijn eenige kleine verbeteringen aangebracht.

Groningen, Nov. 1876. J. VERSLUYS.

BIJ DEN VIJFDEN DRUK.

Eenige onnauwkeurigheden zijn hersteld en het woord *inhoud* is vervangen door het bij vlakke figuren meer gepaste woord *oppervlak*.

April 1878. J. VERSLUYS.

BIJ DEN ZEVENDEN DRUK.

Op enkele kleine verbeteringen na is deze herdruk gelijk aan den voorgaanden.

Juni 1884. J. VERSLUYS.

BIJ DEN ACHTSTEN DRUK.

§ 70 werd uitgebreid. Verder zijn slechts eenige geringe veranderingen aangebracht.

September 1890.

INLEIDING.

§ 1. De ruimte strekt zich onafgebroken naar alle zijden uit, zonder ergens begrensd te zijn.

Een naar alle zijden begrensd deel der onbegrensde ruimte noemt men een meetkundig lichaam. Men krijgt daarvan een voorstelling als men een lichaam, zooals het in de natuur voorkomt, beschouwt ten aanzien der ruimte, die het inneemt, zonder te letten op de stof, waaruit het bestaat. In 't vervolg zullen wij een meetkundig lichaam kortweg een lichaam noemen.

Waar twee deelen der ruimte bij elkaar komen, hebben zij een grens. Deze grens noemt men een vlak.

De grenzen van vlakken noemt men lijnen.

De grenzen van lijnen noemt men punten.

Een punt bezit geen uitgebreidheid, geen afmeting. Door de beweging van een punt ontstaat een lijn. Als een lijn zich beweegt, ontstaat in 't algemeen een vlak. Als een vlak zich beweegt, ontstaat in 't algemeen een lichaam. Een lijn kan dus ontstaan door één beweging, een vlak door twee en een lichaam door drie. Daarom zegt men, dat een lijn één afmeting heeft, een vlak twee en een lichaam drie.

Van lichamen, lijnen en vlakken weten wij, dat zij onbepaald deelbaar zijn, dat hun deelen onafgebroken samenhangen en niet in aard verschillen.

Een samenstel van punten, lijnen of vlakken noemt men figuur. De teekeningen, die men er van vervaardigt, heeten ook figuren.

De wetenschap, die zich bezig houdt met de beschouwing van punten, lijnen, vlakken en lichamen, noemt men meetkunde.

§ 2. De eigenschappen van een meetkundig figuur noemt men in 't algemeen stellingen of theorema's. Vijf van die eigenschappen heeten grondwaarheden of axioma's; zij worden ons door aanschouwing geleerd. Behalve van deze vijf meetkundige grondwaarheden, die later genoemd worden, zullen wij dikwijls gebruik maken van de volgende eigenschappen, die voor alle grootheden gelden en die wij reeds in de rekenkunde toegepast hebben.

1. Als twee grootheden gelijk zijn aan een derde, zijn ze ook onderling gelijk.
2. Als men bij twee gelijke grootheden optelt gelijke grootheden, zijn de sommen gelijk.
3. Als men van gelijke grootheden aftrekt gelijke, zijn de verschillen gelijk.
4. Als men bij gelijke grootheden optelt ongelijke, zijn de sommen ongelijk.
5. Als men van gelijke grootheden aftrekt ongelijke, zijn de verschillen ongelijk.
6. Grootheden, die gelijknamige veelvouden zijn van dezelfde grootheid, zijn onderling gelijk.
7. Grootheden, die gelijknamige evenmatige deelen zijn van dezelfde grootheid, zijn onderling gelijk.

§ 3. Alle andere eigenschappen worden uit de axioma's en uit elkaar door redeneering afgeleid. De redeneering, waaruit blijkt, dat een stelling waar is, noemt men het bewijs der stelling. Somtijds bewijst men de waarheid eener stelling door te laten zien, dat het ontkennen dier waarheid tot iets ongerijmds leidt. Men noemt het bewijs dan indirect en ook wel bewijs uit het ongerijmde. Handelt men niet op die wijze, dan heeft men een rechtstreeksch of direct bewijs.

Bij elke stelling onderscheidt men het ondersteldeen het gestelde. Het bewijs laat zien, dat de waarheid van het gestelde een gevolg is van het ondersteldeen van andere eigenschappen.

Als men van een stelling het ondersteldeen het gestelde verwisselt, ontstaat een andere stelling, die men de omgekeerde van de eerste noemt. Al is een stelling waar, kan het toch gebeuren, dat de omgekeerde niet waar is.

LIJNEN.

§ 4. Als men van een meetkundig figuur een punt als onbeweeglijk beschouwt, dan kan de figuur om dat punt draaien en dus verschillende standen aannemen. Beschouwt men twee punten van eene figuur als onbewegelijk, dan kan deze in 't algemeen om die punten draaien, zoodat zij verschillende standen inneemt. Dat beweeglijk zijn van een figuur om een of twee van haar punten nemen wij als grondwaarheid aan. Dus is ons

EERSTE AXIOMA: *Een of twee punten zijn in 't algemeen onvoldoende om den stand van een meetkundig figuur vast te stellen.*

§ 5. Wij gebruiken in het eerste axioma de woorden: in 't algemeen. De aanschouwing leert namelijk, dat er voor elke twee punten éen lijn bestaat, die zich naar twee kanten onbepaald ver kan uitstrekken, en waarvan geen enkel punt van plaats verandert, als men de lijn om die twee punten laat wentelen. Van zulk een lijn is dus de stand volkomen bepaald door twee harer punten.

TWEEDE AXIOMA. *Door elke twee punten kan men altijd één en niet meer dan één lijn laten gaan, die zich naar twee kanten onbepaald ver kan uitstrekken, en waarvan geen enkel punt van plaats verandert, als men de lijn om die twee punten laat wentelen.*

BEPALING. Die lijn noemt men een r e c h t e l ij n.

Het tweede axioma luidt nu kortweg:

Door twee punten gaat altijd één rechte lijn, die zich naar twee kanten onbepaald ver kan uitstrekken.

Uit het tweede axioma vloeit onmiddellijk het volgende voort.

1°. *Twee rechte lijnen, die met twee punten samenvallen, moeten geheel samenvallen.*

Men drukt dit ook uit door te zeggen, dat twee rechte lijnen langs elkaar passen. In dien zin kan men ook zeggen, dat de deelen van een zelfde rechte lijn langs elkaar passen.

2°. *Een rechte lijn kan in elk harer uiteinden altijd op één wijze verlengd worden.*

§ 6. Bepaling. Een lijn, die niet recht is, maar uit deelen bestaat, die recht zijn, noemt men een gebroken lijn.

Bepaling. Een lijn, die niet recht is en ook niet uit deelen bestaat, die recht zijn, noemt men een kromme lijn.

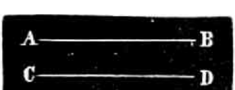
Laat men een gebroken of een kromme lijn wentelen om twee van hare punten, dan blijven slechts een bepaald aantal punten der lijn hun plaats behouden; alle andere punten veranderen van plaats gedurende de beweging. Door dezelfde twee punten kan men dus zooveel kromme lijnen denken als men wil, die in alles overeenkomen, behalve in de plaats, welke zij innemen.

§ 7. Men duidt een punt aan door een letter (hoofdletter), daarbij geplaatst. Een rechte lijn duidt men aan, door twee letters, bij twee van hare punten geplaatst, achter elkander op te noemen of naast elkaar te schrijven, bijv. AB. Ook een kromme lijn duidt men vaak aan door twee letters; als echter meer kromme lijnen door dezelfde twee punten gaan moet men meer punten aanwijzen, om de verschillende kromme lijnen te onderscheiden.

§ 8. Als twee rechte lijnen gegeven zijn, kan men de eerste zóó laten bewegen, dat twee van hare punten, A en B, met de tweede lijn samenvallen. Daartoe laat men de eerste lijn zóó bewegen, dat A samenvalt met een punt der tweede lijn. Terwijl nu A onbeweeglijk blijft kan de eerste lijn om dat punt wentelen (zie eerste axioma). En blijkbaar kan men nu die lijn zóó plaatsen, dat B ergens in de tweede lijn valt.

§ 9. Bepaling. Men zegt, dat twee rechte lijnen AB en CD even lang of gelijk zijn, als men ze zóó kan plaatsen, dat haar uiteinden samenvallen, bijv. C met A en D met B.

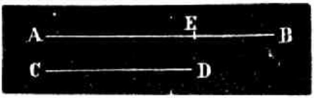
Fig. 1.



Men zegt in dit geval, dat A even ver van B verwijderd is als C van D.

Bepaling. Als twee rechte lijnen AB en CD gegeven zijn en men kan de tweede langs de eerste leggen, zóó, dat C in A en D tusschen A en B valt, dan zegt men, dat de lengte van AB grooter is dan de lengte van CD.

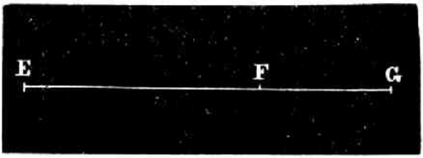
Fig. 2.



In dit geval zegt men, dat A verder van B verwijderd is, dan C van D.

Bepaling. Als twee rechte lijnen EF en FG zoodanig naast elkaar geplaatst zijn, dat zij één rechte lijn vormen of, zooals men het ook uitdrukt, in elkaars verlengde vallen, dan zegt men, dat de lengte van EG gelijk is aan de som der lengten van EF en FG.

Fig. 3.



Volgens de bepaling der aftrekking is nu de lengte van FG het verschil der lengten van EG en EF.

Waar wij in 't vervolg spreken van een lijn, bedoelen wij een rechte.

VLAKKEN.

§ 10. Derde axioma. *Er bestaat een vlak, hetwelk de eigenschap bezit, dat elke rechte lijn, die er twee punten mede gemeen heeft, er geheel in valt.*

Bepaling. Zulk een vlak noemt men een plat vlak.

Evenals de rechte lijn, kan ook het platte vlak zich onbepaald ver uitstrekken.

Bepaling. Een vlak, dat niet plat is en waarvan de deelen ook niet plat zijn, heet een gebogen vlak.

§ 11. Als één of meer lijnen een bepaald gedeelte van een plat vlak begrenzen, heeft men een gesloten figuur. De lijnen vormen den omtrek of de grenzen der figuur. Zulk een figuur bezit blijkbaar de volgende eigenschap.

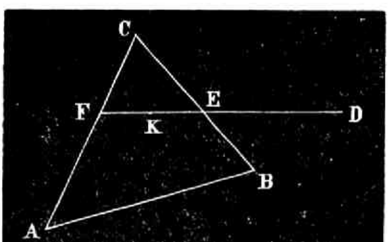
Een rechte lijn, die in het platte vlak getrokken is door een punt binnen de figuur, snijdt, als zij ver genoeg verlengd wordt, den omtrek minstens tweemaal. (VIERDE AXIOMA.)

§ 12. Een gegeven plat vlak kan door drie gegeven punten A, B en C gebracht worden. Daartoe beginnen wij het vlak te bewegen, totdat een zijner punten in A gekomen is. Daarna laat men het vlak om A bewegen, totdat een van zijn punten in B gekomen is. Terwijl nu twee punten van het vlak hun plaats behouden in A en B, kan men het vlak (volgens het eerste axioma) om die twee punten laten draaien. Door die draaiing zal het vlak, dat zich onbepaald ver kan uitstrekken, blijkbaar in zulk een stand kunnen gebracht worden, dat een zijner punten in C valt.

§ 13. *Als twee platte vlakken samenvallen met drie punten, die niet in één rechte lijn liggen, dan vallen zij geheel samen.*

BEWIJS. Laat A, B en C de drie punten zijn, die tot de twee vlakken behooren, dan moeten wij aantoonen, dat een willekeurig punt D van het eerste vlak tevens een punt is van het tweede. De rechte lijn, die getrokken is van A naar B, ligt in beide vlakken, omdat zij met elk twee punten gemeen heeft. Om dezelfde reden liggen BC en CA in de twee vlakken. De drie lijnen begrenzen een bepaald gedeelte van het eerste vlak. Neem een punt K binnen dat begrensde gedeelte en trek een lijn, die door K en D gaat. Als die lijn aan weerszijden ver genoeg verlengd is, zal zij, volgens het axioma van § 11, de grens van het bepaalde gedeelte ontmoeten in minstens twee punten, hier in E en F. Deze liggen in de twee platte vlakken, en daarom zal de rechte lijn KD, door E en F getrokken, geheel in de twee vlakken liggen. Het punt D behoort dus zoowel tot het tweede vlak als tot het eerste.

Fig. 4.



OPMERKING. Men drukt deze stelling ook uit, door te zeggen, dat twee platte vlakken langs elkaar passen. Evenzoo mag men zeggen, dat twee deelen van hetzelfde plat vlak op elkaar passen.

§ 14. BEPALINGEN. Een figuur, waarvan alle deelen in hetzelfde platte vlak liggen, noemt men een vlak figuur.

Een figuur, waarvan niet alle deelen in één plat vlak liggen, heet een figuur in de ruimte.

Dat gedeelte der meetkunde, waarin de vlakke figuren behandeld worden, noemt men vlakke meetkunde of planimetrie.

Dat gedeelte der meetkunde, waarin de figuren in de ruimte behandeld worden, noemt men meetkunde in de ruimte of stereometrie.

In het volgende zullen wij ons bezighouden met figuren, waarvan alle deelen in hetzelfde platte vlak liggen, zonder dat dit er telkens bij gezegd wordt. Waar van een vlak gesproken wordt, bedoelen wij een plat vlak.

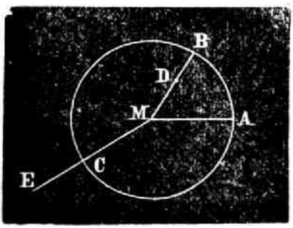
DE CIRKEL.

§ 15 BEPALING. Een cirkel is een gesloten kromme lijn, waarvan alle punten in een zelfde plat vlak liggen en even ver verwijderd zijn van een zelfde punt, eveneens in dat vlak gelegen.

BEPALING. Dit punt heet het middelpunt van den cirkel.

BEPALING. Een lijn, die van een punt der kromme getrokken wordt naar het middelpunt, noemt men een straal.

Fig. 5.



Volgens de eerste bepaling van deze § zijn *alle stralen* van een cirkel *even lang*. MA = MB = MC.

Als men een rechte lijn in een plat vlak laat draaien om een punt M van die lijn, dan zal een ander punt A van dezelfde lijn gedurende de beweging een cirkel doorloopen. De afstand van het middelpunt tot een punt D binnen den cirkel is kleiner dan de straal.

De afstand van het middelpunt tot een punt E buiten den cirkel is grooter dan de straal.

Omgekeerd zal een punt binnen den cirkel liggen, als zijn afstand tot het middelpunt kleiner is dan de straal, en een punt zal buiten den cirkel liggen, als zijn afstand tot het middelpunt grooter is dan de straal.

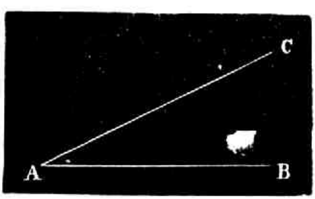
HOEKEN.

§ 16. Bepalingen. Als twee lijnen een punt gemeen hebben, zegt men, dat zij elkaar ontmoeten of snijden.

Het gemeenschappelijk punt noemt men het ontmoetings- of snijpunt.

Als men in een plat vlak uit een punt A twee lijnen AB en AC trekt, die aan den eenen kant begrensd zijn door het punt A, en die zich aan den anderen kant onbepaald ver uitstrekken, dan wordt het platte vlak door die lijnen in twee deelen verdeeld. Elk van die deelen noemt men een *hoek*. (Zie fig. 6.)

Fig. 6.



De lijnen, waardoor de hoek gevormd wordt, zijn de *beenen* van den hoek.

Het ontmoetingspunt der lijnen is het hoekpunt.

Men duidt een hoek aan door het opnoemen van de letter, die bij het hoekpunt staat, of door het opnoemen van drie letters, waarvan de middelste het hoekpunt aanwijst, de eerste een punt in het eene been en de derde een punt in het andere been. Men schrijft (fig. 6)

hoek BAC of $\angle$ BAC.

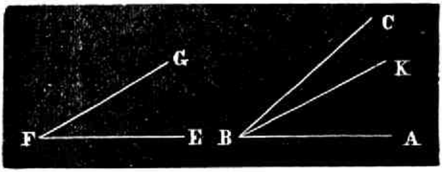
§ 17. Een hoek ontstaat, als men van twee samenvallende rechte lijnen de eene laat draaien om een gemeenschappelijk punt van de twee lijnen. Men stelle zich voor, dat de twee lijnen in dat gemeenschappelijk punt begrensd zijn.

§ 18. Bepaling. Men zegt, dat twee hoeken even groot of *gelijk* zijn, als men ze zóó kan plaatsen, dat de eene hoek den anderen juist bedekt.

Bepaling. Men zegt, dat een hoek *grooter* is dan een andere, als men dezen zóó kan plaatsen, dat hij met den eersten het hoekpunt en het eene been gemeen heeft, terwijl zijn ander been binnen den eersten hoek valt.

Kan men dus $\angle$ EFG zóó plaatsen (fig. 7), dat FE valt langs BA en FG langs BK, dan heet $\angle$ ABC grooter dan $\angle$ EFG.

Fig. 7.



Bepaling. *Zijn* twee hoeken naast elkaar geplaatst, zooals $\angle$ ABK en $\angle$ KBC (fig. 7), dan heet $\angle$ ABC de *som* van $\angle$ ABK en $\angle$ KBC.

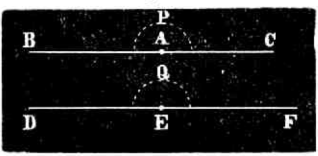
Opmerking. De grootte van een hoek hangt niet af van de lengte zijner beenen.

§ 19. Bepaling. Een hoek heet *gestrekt*, als zijn eene been het verlengde is van het andere been.

Stelling. *Alle gestrekte hoeken zijn even groot.*

Bewijs. Laat BAC en DEF de gestrekte hoeken zijn. Plaats AB langs ED met het punt A in E, dan zal AC langs EF vallen, omdat een rechte lijn aan één kant maar op één wijze kan verlengd worden. De beenen van den eenen hoek vallen nu langs die van den anderen, en daarom zijn de hoeken gelijk (zie § 18).

Fig. 8.



§ 20. Bepalingen. Een hoek, die kleiner is dan een gestrekte heet *uitspringend*.

Een hoek, die grooter is dan een gestrekte, noemt men *inspringend*.

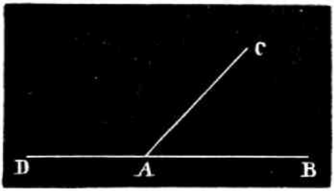
Twee hoeken heeten elkaars *supplement*, als zij samen een gestrekten hoek vormen.

Als wij in 't vervolg van een hoek spreken, zonder nadere bepaling, bedoelen wij een uitspringenden.

Uit de stelling der vorige § volgt, *dat twee hoeken gelijk zijn, als hunne supplementen even groot zijn.*

§ 21. BEPALING. Als twee hoeken een been gemeen hebben, terwijl de andere beenen elkaars verlengde zijn, dan noemt men ze nevenhoeken. In fig. 9 zijn dus BAC en CAD nevenhoeken.

Fig. 9.



Uit deze bepaling volgt onmiddelijk, dat twee nevenhoeken elkaars supplement zijn.

§ 22. BEPALING. De helft van een gestrekten hoek noemt men een rechten hoek.

STELLING. *Alle rechte hoeken zijn even groot.*

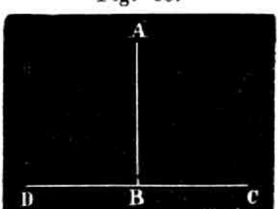
BEWIJS. Ze zijn de helften van gestrekte hoeken, en omdat alle gestrekte hoeken even groot zijn, moeten ook hunne helften, dus de rechte hoeken, even groot zijn (zie § 2, 7).

§ 23. BEPALINGEN. Een hoek, die kleiner is dan een rechte, heet scherp.

Een hoek, die grooter is dan een rechte en kleiner dan een gestrekte, heet stomp. Scherpe en stompe hoeken noemt men gezamenlijk scheeve hoeken.

Als twee lijnen een rechten hoek met elkaar vormen, zegt men, dat zij rechthoekig of loodrecht op elkaar staan. Men noemt dan de eene lijn een loodlijn op de andere.

Fig. 10.



Als dus in fig. 10 hoek CBA recht is, dan staan AB en BC of AB en DC rechthoekig op elkaar, en AB is een loodlijn op DC. Men noemt B het voetpunt van de loodlijn.

Hoek ABC is recht, dus de helft van een gestrekten hoek; daarom is ∠ ABD ook de helft van een gestrekten hoek, dus ook recht.

Twee hoeken heeten elkaars complement, als zij samen een rechten hoek vormen.

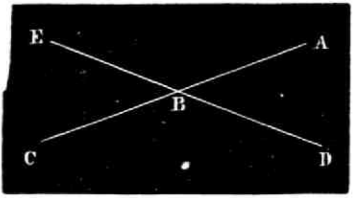
Uit de stelling der vorige § volgt, *dat twee hoeken gelijk zijn, als hun complementen even groot zijn.*

§ 24. BEPALING. Men noemt twee hoeken overstaande hoeken, als de beenen van den eenen de verlengden zijn van de beenen van den anderen.

Als dus AC en DE rechte lijnen zijn (fig. 11), dan zijn ADB en CBE overstaande hoeken. Ook zijn ABE en CBD overstaande hoeken.

STELLING. *Twee overstaande hoeken zijn gelijk.*

Fig. 11.

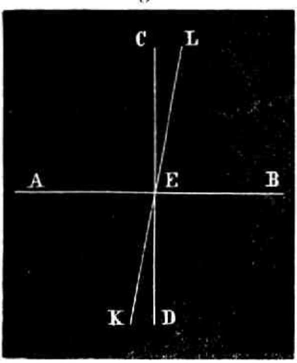


BEWIJS. Nemen wij de overstaande hoeken ABD en EBC. Zij hebben beide tot supplement ABE, en daarom zijn ze gelijk. (Zie § 20 Gevolg).

GEVOLG. *Als van de vier hoeken, die gevormd worden door de snijding van twee rechte lijnen, één recht is, dan zijn de drie anderen ook recht.*

§ 25. STELLING. *Door een punt in een lijn kan niet meer dan één lijn getrokken worden, die rechte hoeken maakt met de eerste.*

Fig. 12.



BEWIJS. Als AB de lijn is, E het punt en CD een lijn, die door E zoodanig getrokken is, dat ∠ CEB recht is, dan zijn vooreerst de drie andere hoeken, die er gevormd worden, recht. Verder zal elke andere lijn KL, die door E gaat, met AB scheeve hoeken vormen. Zoo zijn nl. ∠ LEB en ∠ AEK scherp, ∠ AEL en ∠ BEK stomp. CD is dus de eenige loodlijn.

§ 26. BEPALINGEN. Een graad is een hoek, die negentig maal in een rechten hoek begrepen is.

Een minuut is een hoek, die zestig maal in een graad begrepen is.

Een seconde is een hoek, die zestig maal in een minuut begrepen is.

STELLING. *Alle graden zijn even groot, alle minuten zijn even groot en evenzoo alle seconden.*

Bewijs. Het gestelde volgt, met behulp van de zevende eigenschap in § 2, onmiddellijk uit de eigenschap, dat alle rechte hoeken even groot zijn.

§ 27. Als men de grootte van een hoek wil uitdrukken, vergelijkt men hem met een graad als eenheid. Men ziet dan, hoeveel graden in dien hoek begrepen zijn. Blijft er een gedeelte over, kleiner dan een graad, dan bepaalt men, hoeveel minuten in dat deel begrepen zijn. Als hier iets overblijft, kleiner dan een minuut, dan ziet men, hoeveel seconden in dat overblijvende begrepen zijn. Zoo gaat men verder met tienden, honderdsten, enz. van seconden.

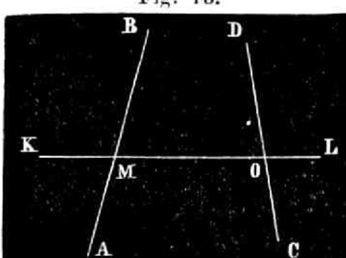
$$\angle A = 35^\circ 17' 23'', 1.$$

beteekent, dat $\angle$ A bevat: 35 graden, 17 minuten, 23 seconden en 1 tiende van een seconde.

EVENWIJDIGE LIJNEN.

§ 28. Bepalingen. Als twee rechte lijnen AB en CD door een derde KL gesneden worden, geeft men aan de hoeken, die daarbij ontstaan, de volgende namen:

Fig. 13.



Overeenkomstige hoeken zijn elk paar hoeken, die de opening naar denzelfden kant gekeerd hebben:

$\angle$ DOL en $\angle$ BMO,
$\angle$ BMK en $\angle$ DOK,
$\angle$ KMA en $\angle$ MOC,
$\angle$ AMO en $\angle$ COL.

Verwisselende binnenhoeken zijn twee hoeken, die de opening tusschen de twee lijnen hebben, aan verschillenden kant der snijlijn (KL) liggen, en geen gemeenschappelijk hoekpunt hebben.

$\angle$ BMO en $\angle$ COM,
$\angle$ DOM en $\angle$ AMO.

Verwisselende buitenhoeken zijn twee hoeken, die de opening niet tusschen de twee lijnen hebben, aan verschillenden kant der snijlijn liggen en geen gemeenschappelijk hoekpunt bezitten.

∠ BMK en ∠ COL,
∠ DOL en ∠ KMA.

Binnenhoeken aan denzelfden kant der snijlijn zijn hoeken, die de opening tusschen de twee lijnen hebben en aan denzelfden kant der snijlijn liggen.

∠ BMO en ∠ DOM,
∠ AMO en ∠ COM.

Buitenhoeken aan denzelfden kant der snijlijn zijn twee hoeken, die de opening niet tusschen de twee lijnen hebben en aan denzelfden kant der snijlijn liggen.

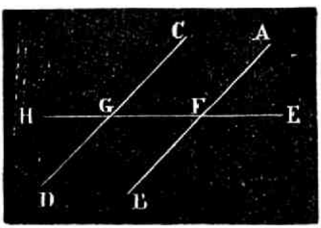
∠ BMK en ∠ DOL,
∠ COL en ∠ KMA.

§ 29. STELLING. *Als twee lijnen zóó door een derde gesneden worden, dat twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn, dan zullen die twee lijnen, hoe ver ook verlengd, elkaar niet ontmoeten.*

BEWIJS. Zij ∠ AFE = CGF.

De hoeken AFE en BFG zijn gelijk als overstaande hoeken. Evenzoo ∠ CGF = ∠ HGD. Men heeft dus ∠ AFE = ∠ CGF = ∠ BFG = ∠ HGD. Stellen wij ons nu voor, dat de figuur doorgesneden wordt volgens de lijn HE. Draaien wij vervolgens het bovenste gedeelte der figuur zóó, dat F in G en G in F valt, dan volgt uit de gelijkheid van ∠ AFE en ∠ HGD, dat FA langs GD valt. Uit de gelijkheid van ∠ CGF en ∠ GFB volgt, dat GC langs FB valt. Het bovenste gedeelte der figuur valt nu geheel samen met het onderste. Sneden de twee lijnen elkaar dus aan den eenen kant van HE, dan moesten zij elkaar ook aan den anderen kant snijden. Maar dan hadden de twee lijnen twee punten gemeen, en zij zouden samenvallen. Dit is echter onmogelijk, omdat wij veronderstelden, dat de twee lijnen

Fig. 14.



verschillend zijn, en dus is het ook onmogelijk, dat de twee lijnen elkaar ergens snijden.

GEVOLGEN. 1. *Twee lijnen, die rechte hoeken maken met een derde, kunnen elkaar nooit ontmoeten.*

2. *Door een punt buiten een lijn kan niet meer dan één lijn getrokken worden, die rechthoekig staat op de* ~~**aarde**~~. eerste

§ 30. STELLINGEN. *Twee lijnen, door een derde gesneden, zullen elkaar nooit ontmoeten bij elk der volgende onderstellingen.*

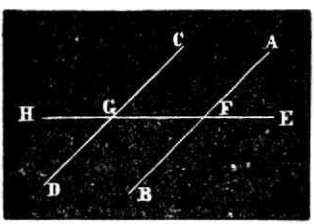
a. *Als twee verwisselende binnenhoeken gelijk zijn.*

b. *Als twee verwisselende buitenhoeken gelijk zijn.*

c. *Als twee binnenhoekvn aan denzelfden kant der snijlijn samen een gestrekten hoek bedragen.*

d. *Als twee buitenhoeken aan denzelfden kant der snijlijn samen een gestrekten hoek bedragen.*

Fig. 14.



BEWIJZEN. Wij zullen in elk der gevallen aantoonen, dat twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn, dan volgt hieruit, volgens de vorige §, dat de twee lijnen elkaar nooit ontmoeten (fig. 14).

a. Zij $\angle$ AFG $=$ $\angle$ DGF. Nu heeft men $\angle$ CGH $=$ $\angle$ DGF, als overstaande hoeken.

Verder is $\angle$ AFG $=$ $\angle$ CGH, omdat zij beide gelijk zijn aan $\angle$ DGF. Wij hebben dus bewezen, dat twee overeenkomstige hoeken AFG en CGH gelijk zijn.

b. Zij $\angle$ AFE $=$ $\angle$ DGH. Men heeft

$\angle$ CGE $=$ $\angle$ DGH, als overstaande hoeken,

$\angle$ AFE $=$ $\angle$ CGF, omdat zij beide gelijk zijn aan $\angle$ DGH.

c. Zij $\angle$ CGF $+$ $\angle$ AFG $=$ een gestrekten hoek. Nu is ook $\angle$ AFE $+$ $\angle$ AFG $=$ een gestrekten hoek, als nevenhoeken.

Verder is $\angle$ CGF $=$ $\angle$ AFE, omdat zij beide tot supplement hebben $\angle$ AFG.

d. Zij $\angle$ CGH $+$ $\angle$ AFE $= 180^\circ$

$\angle$ CGH $+$ $\angle$ CGF $= 180^\circ$

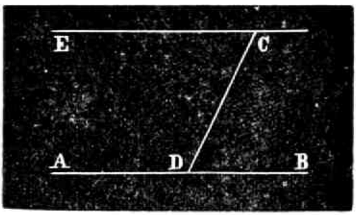
$\angle$ AFE $=$ $\angle$ CGF, omdat zij beide tot supplement hebben $\angle$ CGH.

§ 31. BEPALING. Twee lijnen, die in hetzelfde platte vlak liggen en, hoe ver ook verlengd, elkaar niet ontmoeten, heeten evenwijdig of parallel.

STELLING. *Als een lijn* AB *gegeven is en een punt* C *buiten die lijn, kan door* C *altijd een lijn gaan, die evenwijdig loopt met* AB.

BEWIJS. Zij D een willekeurig punt van AB, dan kan men zich altijd een lijn CE denken, die zóó getrokken is, dat ∠ DCE = ∠ CDB. En uit deze gelijkheid vloeit volgens de vorige stelling *a* voort, dat CE en AB evenwijdig zijn. Hiermee is het gestelde bewezen.

Fig. 15.



Verder leert ons de aanschouwing, dat elke andere lijn, die men door C trekt, niet evenwijdig is met AB, dus AB ergens snijdt. Deze eigenschap nemen wij zonder bewijs aan; dus hebben wij als

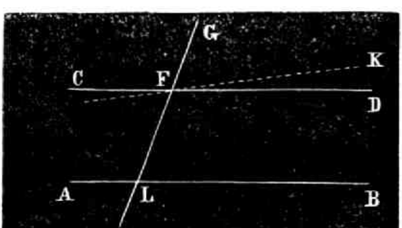
VIJFDE AXIOMA: *Door een punt buiten een lijn kan maar één lijn getrokken worden, die met de eerste evenwijdig is.*

GEVOLGEN. 1. *Twee lijnen, die evenwijdig zijn met een derde, zijn ook onderling evenwijdig.*

2. *Als een lijn één van twee evenwijdige lijnen snijdt, dan snijdt zij ook de andere.*

§ 32. STELLING. *Als twee evenwijdige lijnen door een derde gesneden worden, zijn de overeenkomstige hoeken gelijk.*

Fig. 16.



BEWIJS. Laat AB en CD de evenwijdige lijnen zijn, dan moeten wij bewijzen: ∠ GFD = ∠ GLB.

Daartoe onderstellen wij, dat die twee hoeken niet gelijk waren, dan zou men door F een lijn FK kunnen trekken, zoo dat ∠ GFK = ∠ GLB. Maar dan zou, volgens § 29, FK evenwijdig zijn met LB, terwijl volgens de onderstelling FD evenwijdig is met LB. Door hetzelfde punt F zouden dus twee lijnen getrokken zijn, beide evenwijdig met LB, en dit is onmogelijk volgens het vorige axioma. Het is dus onmogelijk, dat $\angle$ GFD en $\angle$ GLB ongelijk zouden zijn.

Opmerking. Deze stelling is de omgekeerde van die in § 29.

§ 33. Stellingen. *Als twee evenwijdige lijnen door een derde gesneden worden, heeft men de volgende eigenschappen.*

a. *Verwisselende binnenhoeken zijn gelijk.*

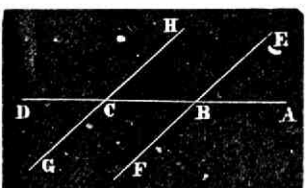
b. *Verwisselende buitenhoeken zijn gelijk.*

c. *De binnenhoeken aan denzelfden kant der snijlijn zijn elkaars supplement.*

d. *De buitenhoeken aan denzelfden kant der snijlijn zijn elkaars supplement.*

Bewijzen. Volgens de vorige stelling zijn de overeenkomstige hoeken gelijk, en wij kunnen dus van die eigenschap gebruik maken, om er de eigenschappen van deze § uit af te leiden.

Fig. 17.



a. Om aan te toonen, dat $\angle$ HCB $=$ $\angle$ CBF, merke men op, dat beide gelijk zijn aan $\angle$ EBA, de eerste als overeenkomstige hoek van EBA, de tweede als overstaande hoek.

b. De verwisselende buitenhoeken DCH en EBA zijn gelijk, omdat beide gelijk zijn aan $\angle$ CBE.

c. Om te bewijzen: $\angle$ HCB $+$ $\angle$ EBC $= 180^\circ$, heeft men

$\angle$ HCB $=$ $\angle$ HCD $= 180^\circ$, als nevenhoeken;

$\angle$ HCD $=$ $\angle$ EBC, als overeenkomstige hoeken.

$\angle$ HCB $+$ $\angle$ EBC $= 180^\circ$.

d. Om te bewijzen: $\angle$ DCH $+$ $\angle$ EBA $= 180^\circ$, heeft men

$\angle$ DCH $+$ $\angle$ HCB $= 180^\circ$, als nevenhoeken;

$\angle$ HCB $=$ $\angle$ EBA, als overeenkomstige hoeken.

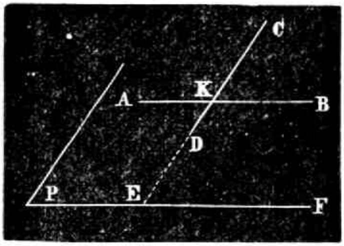
$\angle$ DCH $+$ $\angle$ EBA $= 180^\circ$.

Opmerking. Deze eigenschappen zijn de omgekeerde van die in § 30.

Gevolg van c. *Als twee lijnen door een derde gesneden worden zóó, dat de som van twee binnenhoeken aan een zelfden kant der* *snijlijn kleiner dan een gestrekte hoek is, zullen die twee lijnen elkaar ergens ontmoeten.*

§ 34. STELLING. *Zijn de beenen van een hoek evenwijdig met de beenen van een anderen, dan zijn die hoeken òf gelijk òf elkaars supplement.*

Fig. 18.



BEWIJS. Als door het punt K twee lijnen AB en CD gaan, die evenwijdig zijn met de beenen van $\angle$ P, dan is K het hoekpunt van vier hoeken, waarvan de beenen evenwijdig zijn met die van $\angle$ P.

Verlengt men nu de lijn CD, tot zij een der beenen van $\angle$ P snijdt in E, dan heeft men:

$\angle$ CKB $=$ $\angle$ CEF, als overeenkomstige hoeken;
$\angle$ P $=$ $\angle$ CEF, als overeenkomstige hoeken;
dus $\angle$ P $=$ $\angle$ CKB.

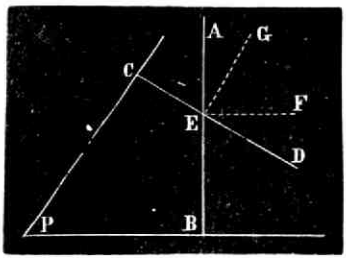
Verder is $\angle$ AKD $=$ $\angle$ CKB, als overstaande hoeken;
dus $\angle$ P $=$ $\angle$ AKD.

Elk der hoeken AKC en BKD maakt een gestrekten hoek met $\angle$ CKB, dus ook met $\angle$ P.

§ 35. STELLING. *Staan de beenen van een hoek loodrecht op de beenen van een anderen, dan zijn die hoeken òf gelijk òf elkaars supplement.*

BEWIJS. Als door E twee lijnen AB en CD gaan, die loodrecht op de beenen van $\angle$ P staan, dan is E het hoekpunt van vier hoeken, wier beenen loodrecht staan op die van $\angle$ P.

Fig. 19.



Stellen wij ons voor, dat door E een lijn EG getrokken zij, evenwijdig met PC, dan is $\angle$ CEG recht, als verwisselende binnenhoek van $\angle$ PCE. Stellen wij ons evenzoo voor, dat EF evenwijdig loopt met PB, dan is ook $\angle$ AEF recht.

Verder is, volgens de vorige stelling, $\angle$ GEF $= \angle$ P;
$\angle$ GEF $= \angle$ AEC, omdat
zij hetzelfde complement hebben. Dus is $\angle$ P $= \angle$ AEC en
$\angle$ P $= \angle$ BED.

De hoeken BEC en AED hebben ieder tot supplement $\angle$ AEC of $\angle$ P.

OPMERKING. De voorgaande eigenschappen komen meest alle, ofschoon in andere volgorde, voor in de Elementen van EUCLIDES. Deze beroemde schrijver leefde te Alexandrië, ten tijde van Ptolemeus Lagus, omstreeks het jaar 272 vóór onze tijdrekening.

Wat de vijf axioma's betreft: Het eerste vindt men bij DE MORGAN. Het tweede axioma komt vrij onduidelijk voor in Euclides. Bij denzelfden schrijver vindt men het derde axioma, ofschoon hij het evenmin als het tweede opgeeft als axioma. In plaats van het vijfde axioma neemt Euclides als axioma aan de eigenschap, die voorkomt § 33, Gevolg. De pogingen van een groot aantal schrijvers, om een theorie der evenwijdige lijnen te geven, zonder daarbij een axioma aan te nemen, kunnen als mislukt beschouwd worden. Intusschen zijn ten aanzien der evenwijdige lijnen belangrijke onderzoekingen gedaan door GAUSS (1831), BOLYAI (1832) en LOBATSCHEWSKY (1840).

EENVOUDIGSTE EIGENSCHAPPEN DER DRIEHOEKEN.

§ 36. Bepalingen. De figuur, die ontstaat als men drie punten, die niet in een rechte lijn liggen, twee aan twee vereenigt door rechte lijnen, noemt men een driehoek.

De drie lijnen noemt men de zijden van den driehoek.

De hoeken, die de lijnen met elkaar maken, noemt men de hoeken van den driehoek.

De punten noemt men de hoekpunten van den driehoek.

Een hoek, die gevormd wordt door een der zijden en het verlengde van een andere zijde, noemt men een buitenhoek van den driehoek.

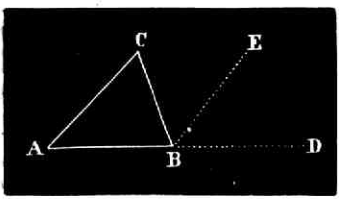
In plaats van het woord driehoek gebruikt men soms het teeken $\triangle$.

Opmerking. Men duidt een driehoek aan door het opnoemen van de letters, die bij de hoekpunten geplaatst zijn, bijv. driehoek ABC (fig. 20).

§ 37. Stelling. *De hoeken van een driehoek bedragen samen een gestrekten hoek.*

Bewijs. Als de zijde AB verlengd is, en als door B een lijn BE gaat, die evenwijdig loopt met AC, dan is $\angle$ EBD $=$ $\angle$ A, als overeenkomstige hoeken, en $\angle$ CBE $=$ C, als verwisselende binnenhoeken. De drie hoeken, die hun hoekpunt in B hebben, bedragen samen een gestrekten hoek ABD, en volgens het voorgaande zijn die hoeken gelijk aan die van den driehoek.

Fig. 20.



Gevolgen. 1. *Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende hoeken.*

$$\angle \text{CBD} = \angle \text{A} + \angle \text{C}.$$

2. *In een driehoek kan niet meer dan één hoek recht of stomp zijn.*

3. *In een driehoek, waarvan één hoek recht is, zijn de twee andere elkaars complement.*

4. *Als twee hoeken van een driehoek gelijk zijn aan twee hoeken van een anderen driehoek, dan is de derde hoek van den eersten driehoek gelijk aan den derden hoek van den tweeden driehoek.*

§ 38. Bepalingen. Een driehoek, waarvan één hoek stomp is, noemt men een stomphoekigen driehoek of een stompen driehoek.

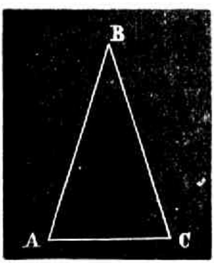
Een driehoek, waarvan één hoek recht is, noemt men een rechthoekigen driehoek of een rechten driehoek.

Een driehoek, waarvan alle hoeken scherp zijn, noemt men een scherphoekigen driehoek of een scherpen driehoek.

In een rechten driehoek heet de zijde, die tegenover den rechten hoek staat, hypotenusa of schuine zijde. De twee andere zijden heeten rechthoekszijden.

§ 39. Stelling. *Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de hoeken tegenover die zijden ook gelijk.*

Fig. 21.



Onderstelde. AB = BC.

Gestelde. ∠ C = ∠ A.

Bewijs. Stellen wij ons voor, dat de driehoek opgenomen en omgekeerd wordt en dat men hem zóó neêrlegt, dat BC valt, waar eerst BA lag. Omdat BA = BC, valt C, waar eerst A lag, en A, waar eerst C lag. De hoek BCA valt dus, waar eerst ∠ BAC lag, zoodat wij hebben

∠ BCA = ∠ BAC.

§ 40. Bepalingen. Een driehoek, waarvan twee zijden even ang zijn, noemt men een gelijkbeenigen driehoek.

De gelijke zijden noemt men de beenen van den driehoek.

De andere zijde heet de basis of grondlijn.

De hoek tegenover de basis wordt tophoek genoemd, en zijn hoekpunt het toppunt van den driehoek.

Een driehoek, waarvan alle zijden even lang zijn, noemt men een gelijkzijdigen driehoek.

Een driehoek, waarvan de drie zijden verschillen in lengte, noemt men **ongelijkzijdigen driehoek.**

De loodlijnen, die men uit de hoekpunten van een driehoek kan neêrlaten op de overstaande zijden, noemt men de **loodlijnen van den driehoek.**

De naam **basis** wordt ook dikwijls gegeven aan een der zijden van een willekeurigen driehoek, onverschillig welke zijde. De andere zijden noemt men dan **opstaande zijden.** De loodlijn, die men op de basis kan neerlaten uit het overstaande hoekpunt, noemt men de **hoogte van den driehoek.**

OPMERKING. Na de voorgaande bepalingen gegeven te hebben, kunnen wij de eigenschap der vorige § ook aldus uitdrukken:

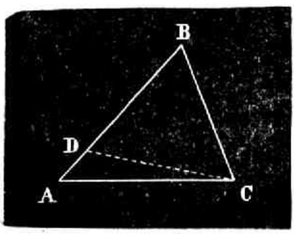
In een gelijkbeenigen driehoek zijn de hoeken aan de basis even groot.

GEVOLGEN. 1. *In een gelijkbeenigen driehoek zijn de hoeken aan de basis scherp.*

2. *In een gelijkzijdigen driehoek zijn alle hoeken even groot.*

§ 41. STELLING. *Als in een driehoek twee zijden ongelijk zijn, dan is de hoek tegenover de grootste der twee zijden grooter dan de hoek tegenover de kleinste der twee zijden.*

Fig. 22.



ONDERSTELDE. AB > BC.

GESTELDE. ∠ BCA > ~~BC~~. A.

BEWIJS. Neem BD = BC en trek CD, dan is driehoek BCD gelijkbeenig, waaruit volgt

$$\angle\, BCD = \angle\, BDC.$$

Omdat CD binnen den driehoek moet vallen, is altijd

$$\angle\, BCA > \angle\, BCD.$$

In driehoek ACD is verder ∠ BDC een buitenhoek en ∠ A een binnenhoek, zoodat volgens § 37, 1

$$\angle\, BDC > \angle\, A.$$

∠ A is dus kleiner en ∠ BCA grooter dan een hoek aan de basis in den gelijkbeenigen driehoek, waaruit volgt

$$\angle\, BCA > \angle\, A.$$

§ 42. STELLINGEN. *Als in een driehoek twee hoeken even groot* *zijn, dan zijn de zijden tegenover die hoeken even lang*, en de driehoek is dus gelijkbeenig.

Als in een driehoek twee hoeken ongelijk zijn, dan staat tegenover den grootsten der twee hoeken de grootste zijde.

Bewijs. Duiden wij twee hoeken van een driehoek aan door A en B, de zijden tegenover die hoeken door a en b, dan zijn ten aanzien van a en b drie onderstellingen mogelijk

$$a = b,\ a > b,\ a < b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Daaruit volgen, volgens de vorige eigenschappen, respectievelijk

$$A = B,\ A > B,\ A < B \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Weet men nu omgekeerd $A = B$, dan kan niet zijn $a > b$, omdat dit ten gevolge heeft $A > B$. Men kan ook niet hebben $a < b$, want dan was $A < B$. Men weet dus, dat uit

$$A = B \text{ volgt } a = b.$$

Weet men $A > B$, dan kan men niet hebben $a = b$, omdat hieruit zou volgen $A = B$. Men kan ook niet hebben $a < b$, omdat alsdan $A < B$ zou zijn.

Uit $A > B$ volgt dus $a > b$.

Weet men, dat $A < B$, dan kan niet zijn $a = b$, omdat hieruit zou volgen $A = B$. Men kan dan ook niet hebben $a > b$, omdat $A > B$ daarvan het gevolg zou zijn.

Uit $A < B$ volgt dus $a < b$.

Gevolgen. 1. *In een rechthoekigen driehoek is de hypotenusa de grootste zijde.*

2. *In een stomphoekigen driehoek is de zijde tegenover den stompen hoek de grootste.*

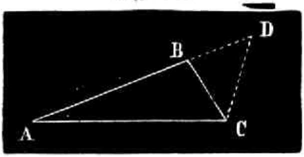
3. *Een driehoek, waarvan alle hoeken even groot zijn, is gelijkzijdig.*

§ 43. De stellingen der vorige § zijn de omgekeerden van die in § 39 en § 41. De bewijzen, die wij voor de omgekeerde stellingen gegeven hebben, zijn indirect. Bij de voorgaande manier van betoogen verdienen twee omstandigheden vooral onze aandacht. Vooreerst zijn in de rij (1) alle mogelijke onderstellingen gemaakt. Ten tweede zijn de gevolgen (2), welke respectievelijk met die onderstellingen overeenkomen, alle verschillend en van dien aard, dat geen twee te gelijk kunnen waar zijn. Zoo dikwijls die twee omstandigheden bestaan bij eenige eigenschappen, kan men de omgekeerde eigenschappen volkomen op dezelfde wijze aantoonen als in de vorige § is gedaan. Men kan dus in zulke gevallen, ook zonder nader bewijs, zeker zijn van de waarheid der omgekeerde stellingen. Als algemeene regel, dien wij dikwijls zullen toepassen, geldt nu:

Als men in een reeks van eigenschappen alle onderstellingen heeft genomen, die mogelijk zijn voor eene bepaalde zaak, en als die onderstellingen geleid hebben tot gevolgen, die alle verschillend zijn en van dien aard, dat geen twee te gelijk kunnen waar zijn, dan zijn noodzakelijk de omgekeerde stellingen ook waar.

§ 44. STELLING. *De som van twee zijden eens driehoeks is grooter dan de derde zijde.*

Fig. 23.



GESTELDE. $AB + BC > \cancel{AB}$. AC.

BEWIJS. Als AB verlengd is, zóó dat $BD = BC$, en als D met C vereenigd is, dan heeft men $AD = AB + BC$, en men moet slechts aantoonen $AD > AC$.

Uit $BC = BD$ volgt:

$$\begin{array}{l} \angle BDC = \angle BCD \\ \underline{\angle ACD > \angle BCD} \\ \angle ACD > \angle BDC. \end{array}$$

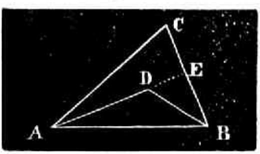
Dus volgens § 42 $AD > AC$.

§ 45. STELLING. *Het verschil van twee zijden eens driehoeks is kleiner dan de derde zijde.*

BEWIJS. Als a, b en c de drie zijden zijn, heeft men

$$\begin{array}{l} a < b + c, \\ \underline{b = b.} \\ a - b < c. \end{array}$$

Fig. 24.



§ 46. STELLING. *De som van twee zijden eens driehoeks is grooter dan de som van twee lijnen, die een punt binnen den driehoek verbinden met de uiteinden der derde zijde.*

GESTELDE. $AD + BD < AC + BC$.

BEWIJS. Als AD verlengd is tot in E, dan is

$$\begin{array}{r} BD < DE + BE, \\ AD + DE < AC + EC. \\ \hline AD + BD + DE < DE + BC + AC. \\ DE = DE. \\ \hline AD + BD < BC + AC. \end{array}$$

GELIJK- EN GELIJKVORMIGHEID DER DRIEHOEKEN.

§ 47. Bepaling. Twee driehoeken heeten gelijk en gelijkvormig, als de zijden en hoeken van den eenen driehoek gelijk zijn aan die van den anderen. Gelijk en gelijkvormig duidt men aan door $\cong$. In de volgende paragrafen zullen wij zien, dat het in vele gevallen mogelijk is, om uit de gelijkheid van enkele der zijden en hoeken tot die der andere te besluiten.

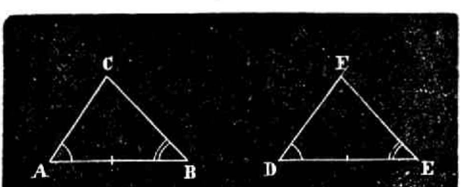
De gelijke zijden noemt men ook wel gelijkstandige zijden, en de hoekpunten der gelijke hoeken overeenkomstige hoekpunten. Bij het aanduiden van twee $\cong$ driehoeken ABC en DSP kiest men de volgorde der letters zóó, dat A overeenkomstig is met D, B met S en C met P.

§ 48. Stelling. *Twee driehoeken zijn gelijk en gelijkvormig, als twee zijden met den ingesloten hoek van den eenen driehoek gelijk zijn aan twee zijden met den ingesloten hoek van den anderen driehoek.*

Onderstelde AB = DE, BC = EF, $\angle$ ABC = $\angle$ DEF.

Gestelde. AC = DF, $\angle$ CAB = $\angle$ FDE, $\angle$ ACB = $\angle$ DFE.

Fig. 25.



Bewijs. Omdat $\angle$ B = $\angle$ E, kan men den driehoek DEF zoo plaatsen, dat E in B valt, EF langs BC, ED langs BA. Omdat BC = EF, valt F in C, en uit ED = BA volgt, dat D in A valt. De driehoeken kunnen dus elkaar volkomen bedekken, zoodat wij hebben

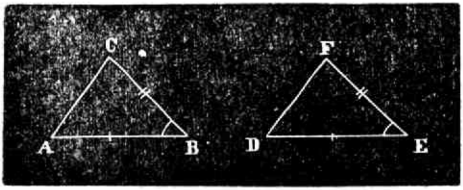
AC = DF, $\angle$ A = $\angle$ D, $\angle$ C = $\angle$ F.

§ 49. STELLING. *Twee driehoeken zijn gelijk en gelijkvormig, als zij een zijde en de twee aanliggende hoeken gelijk hebben.*

ONDERSTELDE. $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$.

BEWIJS. Plaats driehoek DEF zóó, dat DE op AB valt en dat F aan denzelfden kant van AB komt als C. Omdat $\angle D = \angle A$, zal DF langs AC vallen. Omdat $\angle E = \angle B$, zal EF langs BC vallen. De twee driehoeken kunnen elkaar dus volkomen bedekken, en daarom zijn zij $\cong$.

Fig. 26.



§ 50. STELLING. *Twee driehoeken zijn gelijk en gelijkvormig, als zij een zijde, den overstaanden hoek en een aanliggenden hoek gelijk hebben.*

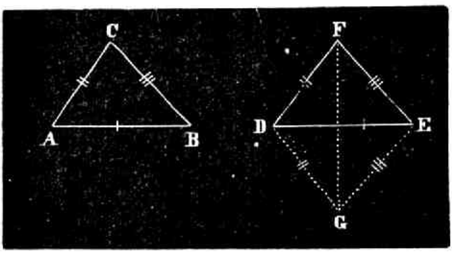
BEWIJS. Volgens § 37, 4 zullen de driehoeken, die twee hoeken gelijk hebben, ook den derden hoek gelijk hebben. Zij hebben dus hier een zijde en de twee aanliggende hoeken gelijk, en daarom zijn ze, volgens de vorige §, gelijk en gelijkvormig.

§ 51. STELLING. *Twee driehoeken zijn gelijk en gelijkvormig, als de zijden van den eenen gelijk zijn aan die van den anderen.*

ONDERSTELDE. $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$.

BEWIJS. Plaats ABC zóó, dat twee gelijke zijden AB en DE samenvallen en dat de hoekpunten C en F aan verschillenden kant van DE vallen. Stellen wij ons voor, dat door F en G de rechte lijn FG getrokken zij, dan volgt uit

Fig. 27.



$EF = EG$ $\qquad \angle EFG = \angle EGF.$

Uit $DF = DG$ volgt $\angle$ ~~DEG~~ DFG $= \angle DGF.$

$\angle DFE = \angle DGE = \angle C.$

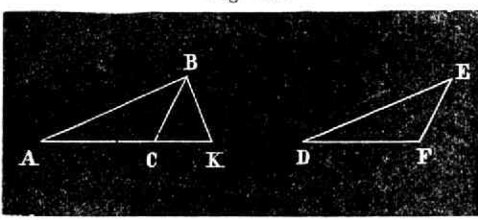
De driehoeken ABC en DEF hebben dus twee zijden en den ingesloten hoek gelijk, $\angle$ C $=$ $\angle$ ~~DEF~~, en zijn, volgens § 48, gelijk en gelijkvormig. DFE.

§ 52. STELLING. *Twee driehoeken zijn gelijk en gelijkvormig, als zij twee zijden en een hoek over een dier zijden gelijk hebben, en als bovendien de hoeken, die in de twee driehoeken tegenover de andere zijde staan, gelijksoortig zijn, d. i. beide scherp, beide recht of beide stomp.*

ONDERSTELDE. AB $=$ DE, BC $=$ EF, $\angle$ A $=$ $\angle$ D, $\angle$ BCA en $\angle$ F gelijksoortig.

BEWIJS. Dewijl AB $=$ DE, kan men driehoek DEF zóó plaatsen, dat D in A en E in B valt. Als nu F en C aan denzelfden kant van AB liggen, dan zal DF langs AC vallen. EF zal langs BC vallen of zij zal dit niet doen. In het eerste geval bedekken de driehoeken elkaar, en het gestelde is dan bewezen. Als daarentegen EF niet langs BC, maar bijv. in BK valt, heeft men EF $=$ BK $=$ BC, en daaruit volgt $\angle$ BCK $=$ BKC. Deze zijn dus beide scherp en $\angle$ ACB is dan stomp. Maar dan zijn

Fig. 28.



$\angle$ ACB en $\angle$ AKB of

$\angle$ DFE en $\angle$ AKB ongelijksoortig.

Dit is echter onmogelijk, omdat de twee voorgaande hoeken volgens de onderstelling gelijksoortig zijn. Het is dus ook onmogelijk, dat EF ergens anders valt dan langs BC.

GEVOLGEN. 1. *Als twee driehoeken, die twee zijden en een hoek over een dier zijden gelijk hebben, niet gelijk en gelijkvormig zijn, dan zijn de hoeken tegenover de andere van die zijden elkaars supplement.*

2. *Twee driehoeken zijn gelijk en gelijkvormig, als zij twee zijden en den hoek tegenover de grootste der twee zijden gelijk hebben.*

Men merke slechts op, dat de hoek tegenover de kleinste der twee zijden noodzakelijk scherp is in elk der driehoeken; zoodat de twee hoeken tegenover het kleinste paar zijden gelijksoortig zijn.

§ 53. Uit de vijf vorige stellingen blijkt, dat in 't algemeen drie gelijkheden noodig en voldoende zijn om te besluiten tot de gelijk- en gelijkvormigheid van twee driehoeken. Onder de drie is minstens één gelijkheid van zijden. Tevens is gebleken, dat gelijke zijden steeds tegenover gelijke hoeken staan. Men noemt de vijf voorgaande eigenschappen dikwijls de vijf gevallen van gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken. Uit die stellingen blijkt, dat een driehoek volkomen bepaald is (d. w. z. dat slechts één driehoek mogelijk is), zoodra bekend zijn:

1. Twee zijden en de ingesloten hoek.
2. Een zijde en de twee aanliggende hoeken.
3. Een zijde, die overstaande hoek en een aanliggende hoek.
4. De drie zijden.
5. Twee zijden en de hoek tegenover de grootste der twee zijden.

§ 54. Daar twee *rechthoekige driehoeken* altijd den rechten hoek gelijk hebben, zoo moeten nog twee gelijkheden daarenboven bekend zijn om tot de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken te kunnen besluiten. Wij hebben dus als bijzondere gevallen, dat twee rechthoekige driehoeken gelijk en gelijkvormig zijn, als zij gelijk hebben:

1. De twee rechthoekszijden, of
2. Een rechthoekszijde en de hypotenusa, of
3. Een rechthoekszijde en een der scherpe hoeken, of
4. De hypotenusa en een der scherpe hoeken.

§ 55. Past men de gevallen van gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken toe op *gelijkbeenige driehoeken*, dan ziet men, dat deze gelijk moeten hebben:

1. Een der beenen en den tophoek, of
2. De basis en een hoek aan de basis, of
3. De basis en de tophoek, of
4. Een been en een hoek aan de basis, of
5. De basis en een been.

Daar de hoeken van een *gelijkzijdigen* $\triangle$ ieder 60° bevatten, zoo hebben twee gelijkzijdige driehoeken in elk geval de hoeken gelijk. Opdat dus twee gelijkzijdige driehoeken gelijk en gelijkvormig zijn is noodig en voldoende, dat een zijde van den eenen driehoek gelijk is aan een zijde van den anderen.

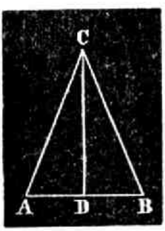
TOEPASSINGEN VAN DE EENVOUDIGSTE EIGENSCHAPPEN EN VAN DE GELIJK- EN GELIJKVORMIGHEID DER DRIEHOEKEN.

§ 56. STELLING. *De lijn, die den tophoek van een gelijkbeenigen driehoek middendoor deelt, deelt de grondlijn rechthoekig middendoor.*

ONDERSTELDE. AC = BC, ∠ ACD = ∠ BCD.

GESTELDE. AD = BD, ∠ CDA = ∠ CDB.

Fig. 29.



BEWIJS. De driehoeken ACD en BCD zijn ≅, want men heeft

AC = BC,
CD = CD,
∠ ACD = ∠ BCD.

De andere zijden en hoeken van ACD en BCD zijn daarom ook gelijk; dus

AD = BD,
∠ ADC = ∠ BDC.

Daar deze twee hoeken samen een gestrekten hoek vormen en even groot zijn, moet ieder recht zijn.

Daar nu AD = BD, terwijl CD rechthoekig op AB staat, is het gestelde bewezen.

§ 57. STELLING. *De lijn, die het toppunt van een gelijkbeenigen driehoek verbindt met het midden der basis, deelt den tophoek middendoor en staat loodrecht op de basis.*

ONDERSTELDE. AC = BC, AD = BD.

GESTELDE. ∠ ACD = ∠ BCD, ∠ ADC = ∠ BDC.

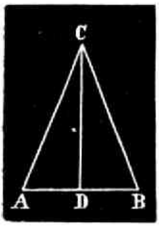
BEWIJS. De driehoeken ACD en BCD hebben de zijden gelijk, en zijn dus gelijk en gelijkvormig. Hieruit volgt onmiddellijk het gestelde.

§ 58. STELLING. *De lijn, die door het toppunt van een gelijkbeenigen driehoek gaat en rechthoekig op de basis staat, deelt den tophoek en de basis middendoor.*

ONDERSTELDE. AC = BC, ∠ ADC = ∠ BDC = 90°.

GESTELDE. ∠ ACD = ∠ BCD, AD = BD.

Fig. 30.



BEWIJS. De driehoeken ACD en BCD zijn rechthoekig, en hebben gelijke hypotenusa's AC = BC, alsmede een gemeenschappelijke rechthoekszijde CD. Die twee driehoeken zijn dus gelijk en gelijkvormig, en hieruit volgt AD = BD en ∠ ACD = ∠ BCD.

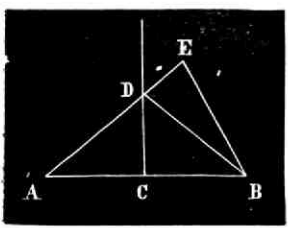
§ 59. STELLINGEN. 1. *Elk punt van de lijn, die* AB *rechthoekig middendoor deelt, ligt op gelijke afstanden van* A *en* B.

2. *Elk punt buiten de lijn, die* AB *rechthoekig middendoor deelt, ligt op ongelijke afstanden van* A *en* B. Zie fig. 31.

ONDERSTELDE. AC = BC, ∠ ACD = ∠ BCD = 90°.

GESTELDE. 1°. AD = BD, 2°. AE en BE zijn ongelijk.

Fig. 31.



BEWIJZEN. 1°. De driehoeken ACD en BCD zijn rechthoekig en hebben de rechthoekszijden gelijk, volgens het onderstelde. Zij zijn dus gelijk en gelijkvormig en hebben daarom de hypotenusa's gelijk, AD = BD.

2°. Verbind D met B, dan is volgens het vorige AD = BD. In driehoek BDE is

BE < BD + DE,

of BE < AD + DE,

of BE < AE.

§ 60. In de twee vorige stellingen hebben wij gesproken van een punt in de loodlijn, die AB middendoor deelt, en van een punt buiten de loodlijn. Dat zijn de eenige onderstellingen, die men kan maken omtrent de ligging van een punt. Wij zijn daarbij respectievelijk gekomen tot de gevolgen: gelijke afstanden van A en van B en ongelijke afstanden. Deze twee gevolgen kunnen niet te gelijk waar zijn, en volgens den algemeenen regel van § 43 zijn nu de omgekeerde van de twee stellingen noodzakelijk waar, dus:

1. *Als een punt op gelijke afstanden van* A *en van* B *ligt, moet het liggen in de lijn, die* AB *rechthoekig middendoor deelt.*

2. *Als een punt op ongelijke afstanden van* A *en van* B *ligt, moet het buiten de lijn liggen, die* AB *rechthoekig middendoor deelt.*

Ten overvloede zullen wij nog de bewijzen uit het ongerijmde, die ons tot den algemeenen regel in § 43 geleid hebben, toepassen op deze twee stellingen, als bijzondere gevallen. Later wordt de algemeene regel gebruikt en het toepassen van het bewijs op de bijzondere gevallen, ofschoon overbodig, als eene nuttige oefening aan den leerling overgelaten.

Bewijzen. 1. Als de afstanden van een punt tot A en B gelijk zijn, kan het niet buiten de loodlijn liggen, omdat alsdan de afstanden (volgens de vorige stelling 2°) ongelijk zouden zijn, terwijl zij volgens de onderstelling gelijk zijn. Het punt moet dus in de loodlijn liggen.

2. Als de afstanden van een punt tot A en B ongelijk zijn, kan het niet in de loodlijn liggen, omdat alsdan volgens de eerste stelling der vorige § de afstanden gelijk zouden zijn, terwijl zij volgens de onderstelling ongelijk zijn. Het punt moet dus buiten de loodlijn liggen.

§ 61. Het is gebleken, dat alle punten van de lijn, die AB rechthoekig middendoor deelt, evenver verwijderd zijn van A als van B en dat de punten der loodlijn de eenige zijn, die deze eigenschap bezitten. Men vat die twee stellingen samen door te zeggen: *De lijn, die* AB *rechthoekig middendoor deelt, is de* meetkundige plaats *der punten, die evenver van* A *als van* B *verwijderd zijn.*

Bepaling. Men noemt een figuur een meetkundige plaats, als al hare punten aan een zelfde voorwaarde voldoen, terwijl elk punt buiten de figuur die eigenschap niet bezit.

Om te laten zien, dat een kromme lijn of één of meer rechte lijnen een meetkundige plaats vormen, zijn dus altijd twee eigenschappen noodig.

Opmerking. Volgens de vorige bepaling is de **cirkel** de **meetkundige plaats** van alle punten die in een plat vlak liggen en op gegeven afstand verwijderd zijn van een punt in dat zelfde vlak.

§ 62. Door een punt buiten een lijn kan (volgens § 29, Gev. 2) niet meer dan ééne lijn getrokken worden, die loodrecht op de eerste staat, terwijl men verschiillende lijnen kan trekken, die scheeve hoeken maken met de eerste. Het punt, dat een schuine lijn met de eerste gemeen heeft, noemt men het **voetpunt** der schuine lijn. Als door een zelfde punt een loodlijn en verschillende schuine lijnen getrokken zijn, gelden de

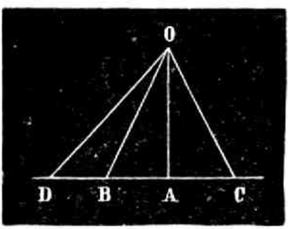
Stellingen. 1. *De loodlijn is korter dan een der schuine lijnen.*

2. *Twee schuine lijnen, wier voetpunten even ver verwijderd zijn van het voetpunt der loodlijn, zijn even lang.*

3. *Een schuine lijn is langer, naarmate haar voetpunt verder van het voetpunt der loodlijn verwijderd is.*

Bewijzen. 1. Als OA een loodlijn is en OB eene schuine lijn, is driehoek OAB rechthoekig en de hypotenusa OB is langer dan de rechthoekszijde OA.

Fig 32.



2. Als AB = AC, zijn de driehoeken OAB en OAC gelijk en gelijkvormig, omdat zij rechthoekig zijn en de rechthoekszijden gelijk hebben. De hypotenusa's OB en OC zijn dus gelijk.

3. Als AD > AB, is driehoek OBD stomp in B, omdat ∠ OBA scherp is. En in een stomphoekigen driehoek is de zijde tegenover den stompen hoek de grootste, dus OD > OB.

Liggen de voetpunten der schuine lijnen aan verschillenden kant van het voetpunt der loodlijn, zooals C en D, dan heeft men OD > OB, en omdat (volgens 2) OB = OC,
OD > OC.

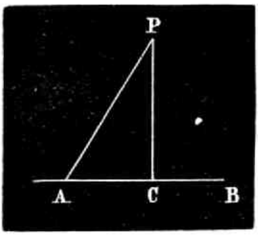
Gevolg. *Uit een punt buiten een lijn kunnen naar die lijn niet meer dan twee schuine lijnen getrokken worden die even lang zijn.* Alle andere lijnen zijn langer of korter.

Bepaling. De lengte der loodlijn noemt men den **afstand van het punt tot de lijn.**

§ 63. Stelling. *Door een punt buiten een lijn kan altijd één andere getrokken worden, die loodrecht op de eerste staat.*

Bewijs. Zij P het punt buiten de lijn AB. Dat er niet meer dan een loodlijn mogelijk is, hebben wij reeds in § 29, 2 gezien. Dat er altijd een is, blijkt uit het volgende. Stellen wij ons voor, dat door P een willekeurige lijn PA getrokken zij, dan is dit òf een loodlijn òf eene schuine lijn. In het eerste geval is het gestelde bewezen. In het tweede geval is één der twee hoeken, bijv. PAB, scherp. Men kan zich dan verder voorstellen, dat in het punt P, aan denzelfden kant van PA, als waar de scherpe hoek ligt, een hoek APC geplaatst zij, die het complement is van $\angle$ PAC; dan is $\angle$ PAC + $\angle$ P = 90°; er blijft dus in den driehoek PAC voor $\angle$ C nog 90° over; en hiermee is het gestelde bewezen.

Fig. 33.



Gevolgen. 1. *Als uit een punt buiten een lijn een schuine lijn getrokken is naar de eerste, dan kan men altijd een tweede schuine lijn trekken, die even lang is als de schuine lijn, welke reeds getrokken is.* Omdat men zich altijd een loodlijn kan [illegible] en een punt [illegible] vervalst [illegible] voetpunt [illegible]

2. *Als uit* P *naar* AB *een lijn getrokken is, die kleiner is dan elke andere lijn, die men uit* P *kan trekken, dan is de eerste de loodlijn.*

3. *Als uit* P *naar een lijn twee schuine lijnen getrokken zijn, die even lang zijn, dan liggen hare voetpunten even ver van het voetpunt der loodlijn, die men uit* P *kan trekken.*

4. *Als uit* P *naar een lijn twee schuine lijnen getrokken zijn, die verschillen in lengte, dan ligt het voetpunt der langste het verst van het voetpunt der loodlijn, die men uit* P *kan trekken.*

Opmerkingen. Men zegt van de loodlijn PC, dat zij **uit P neêrgelaten is op AB.**

Als men een loodlijn trekt, waarvan het voetpunt gegeven is, dan zegt men, dat de loodlijn **in** dat punt **opgericht** wordt op de gegeven lijn.

§ 64. Stellingen. 1. *Elk punt van de lijn, die een hoek* *middendoor deelt, ligt op gelijke afstanden van de beenen van den hoek.*

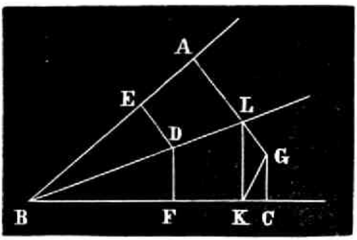
2. *Elk punt binnen den hoek, maar buiten de lijn, die den hoek middendoor deelt, ligt op ongelijke afstanden van de beenen van den hoek.*

ONDERSTELDE. $\angle$ ABL = $\angle$ CBL.

GESTELDE. 1°. DE = DF; 2°. GA en GC zijn ongelijk.

BEWIJZEN. 1. De rechthoekige driehoeken BDE en BDF hebben de hypotenusa BD gemeen en een scherpen hoek gelijk, $\angle$ DBE = $\angle$ DBF; zij zijn dus gelijk en gelijkvormig. Daaruit volgt DE = DF.

Fig. 34.



2. Zij LK de lijn, die door L gaat en rechthoekig op BC staat, en zij KG de lijn, welke het voetpunt van die loodlijn met G vereenigt. Nu is LA = LK en KG > CG.

Verder is LK + LG > CG, ~~en LK > KG~~,

of LA + LG > CG, LK + LG > KG

of AG > CG.

§ 65. Door toepassing van den algemeenen regel van § 43 verkrijgt men, ten aanzien van de punten binnen een hoek, de

STELLINGEN. 1. *Als een punt op gelijke afstanden van de beenen van een hoek ligt, dan is het een punt van de lijn, die den hoek middendoor deelt.*

2. *Als een punt zich op ongelijke afstanden van de beenen van een hoek bevindt, ligt het buiten de lijn, die den hoek middendoor deelt.*

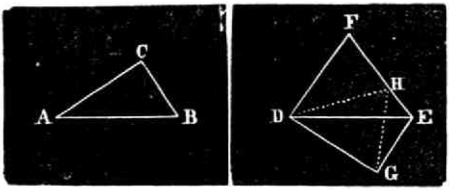
§ 66. STELLING. *Als twee driehoeken twee zijden gelijk hebben, en de ingesloten hoek bij den eersten driehoek grooter is dan die bij den tweeden, zoo is ook de derde zijde van den eersten driehoek grooter dan die van den tweeden.*

ONDERSTELDE. AC = DF, AB = DE, $\angle$ FDE > $\angle$ A.

GESTELDE. EF > BC.

BEWIJS. Plaats driehoek ABC tegen driehoek DEF, zoo dat AB in DE valt en AC in DG. De lijn, die $\angle$ FDG middendoor deelt, valt binnen $\angle$ FDE en ontmoet dus FE in een punt H. Als verder H vereenigd is met G, dan hebben de driehoeken FDH en GDH twee zijden en den ingesloten hoek gelijk; zij zijn dus $\cong$. Hieruit volgt FG $=$ GH.

Fig. 35.



Verder is

$$GH + HE > GE,$$
$$FH + HE > BC, \text{ of } GE.$$
$$FE > BC.$$

§ 67. Noemen wij nu in twee driehoeken, die twee zijden gelijk hebben, de ingesloten hoeken A en D en de overstaande zijden a en d, dan ziet men volgens deze stelling, dat

uit A $>$ D volgt $a > d$,
uit A $<$ D volgt $a < d$,
en uit A $=$ D volgt $a = d$, volgens § 48.

Hiermede zijn ten aanzien van A en D alle mogelijke onderstellingen gemaakt, en deze hebben tot gevolgen geleid, die alle verschillend zijn en van dien aard, dat geen twee te gelijk kunnen waar zijn. De omgekeerde stellingen zijn dus (zie § 43) ook waar. Van de derde eigenschap is de omgekeerde reeds in § 51 bewezen. De omgekeerde van de twee andere gevallen kunnen wij samenvatten in de

STELLING: *Als twee zijden van een driehoek gelijk zijn aan twee zijden van een anderen en de overige zijden zijn ongelijk, dan staat tegenover de grootere zijde een grootere hoek.*

WERKSTUKKEN.

§ 68. In dit hoofdstuk worden eenige der eigenschappen, die tot dusver behandeld zijn, toegepast tot de samenstelling van figuren.

BEPALING. De opgave, waarin gevraagd wordt een figuur samen te stellen, noemt men een **werkstuk**.

BEPALING. Het samenstellen der figuur noemt men **construeeren**.

Bij ieder werkstuk wordt in een **opmerking** besproken, of het altijd mogelijk is een figuur te construeeren, dat aan de vereischten voldoet, en of er verschillende figuren kunnen zijn, die ieder aan de gestelde voorwaarden voldoen.

Even als de stellingen der meetkunde berusten op vier grondwaarheden of axioma's, zoo moet men bij het samenstellen der figuren eenige verrichtingen beschouwen als onmiddellijk uitvoerbaar. Het aantal van die bewerkingen is voor de vlakke meetkunde drie.

BEPALING. Men geeft den naam postulaten aan de verrichtingen, die men bij het samenstellen van een figuur als onmiddellijk uitvoerbaar beschouwt.

§ 69. EERSTE POSTULAAT. *Een rechte lijn trekken, die twee gegeven punten tot uiteinden heeft.*

TWEEDE POSTULAAT. *Een gegeven lijn aan elk harer uiteinden verlengen.*

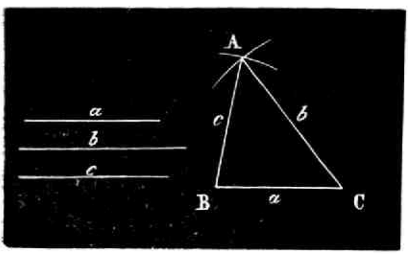
DERDE POSTULAAT. *In een gegeven vlak een cirkel beschrijven, waarvan het middelpunt en de lèngte der stralen gegeven zijn.*

§ 70. WERKSTUK. *Een driehoek te construeeren, die drie gegeven lijnen tot zijden heeft.*

CONSTRUCTIE. Laat a, b en c de drie gegeven lijnen zijn.

Trek een lijn BC gelijk aan a. Beschrijf uit B als middelpunt met c als straal een cirkelboog. Beschrijf uit C als middelpunt met b als straal een cirkelboog. Als die twee cirkelbogen elkaar snijden in A, behoeft men slechts A met B en met C te vereenigen door rechte lijnen om een driehoek ABC te verkrijgen, die a, b en c tot zijden heeft.

Fig. 36.

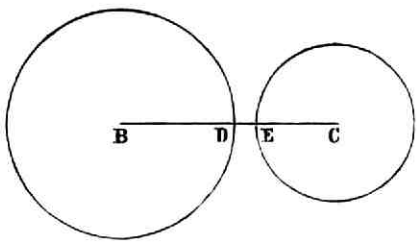


OPMERKING. Als twee driehoeken de drie zijden gelijk hebben, kunnen zij elkaar volkomen bedekken. Er zijn dus geen twee verschillende driehoeken mogelijk, die a, b en c tot zijden hebben. Uit de §§ 44 en 45 blijkt, dat geen enkele driehoek mogelijk is, die a, b en c tot zijden heeft, indien niet te gelijk

$$a < b + c \text{ en } a > c - b \text{ (waarin } c > \text{ of } = b).$$

In het volgende zullen wij laten zien, dat er een driehoek is, die aan 't gestelde voldoet, zoodra de twee bovenstaande voorwaarden vervuld zijn. Daartoe moeten wij slechts aantoonen, dat de twee cirkels, die in de constructie voorkomen, een punt gemeen hebben, dat buiten BC en haar verlengde ligt.

Fig. 37*a*.



Als de eene cirkel geheel buiten den anderen lag (zooals in fig. 37*a*) zou men hebben

$$BC > BD + CE$$

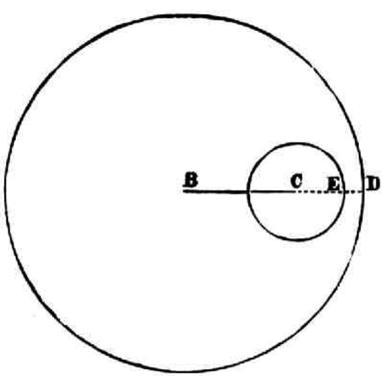
of $a > c + b$.

Indien dus gegeven is

$$a < c + b$$

kan niet de eene cirkel geheel buiten den anderen liggen.

Fig. 37*b*.



Als de eene cirkel geheel binnen den anderen lag (zooals in fig. 37*b*) zou men hebben

$$BC < BD - CE$$

of $a < c - b$.

Indien dus gegeven is

$$a > c - b$$

kan niet de eene cirkel geheel binnen den anderen liggen.

Maar als de eene cirkel niet geheel buiten en ook niet geheel binnen den anderen kan liggen, moeten ze minstens één punt gemeen hebben.

Als dat punt op BC zelf lag, zouden we hebben $a = b + c$, en dit strijdt tegen het onderstelde, dat $a < b + c$. Dat punt kan dus niet liggen op BC zelf.

Dat punt kan ook niet op het verlengde van BC liggen, want dan moest $a = c - b$ zijn, en dit strijdt tegen het onderstelde, dat $a > c - b$.

Aangezien nu de twee cirkels een punt moeten gemeen hebben, en aangezien dit punt niet op BC of het verlengde kan liggen, moeten de cirkels minstens één punt gemeen hebben, dat buiten BC en haar verlengde ligt.

Hiermede is het gestelde bewezen.

GEVOLGEN. 1. *Men kan altijd een gelijkzijdigen driehoek beschrijven, die een willekeurige lijn tot zijde heeft.*

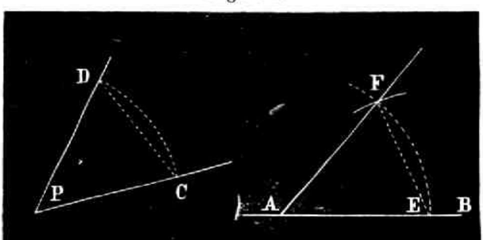
2. *Men kan altijd een driehoek beschrijven, die gelijk en gelijkvormig is met een gegeven driehoek.*

§ 71. WERKSTUK. *Door een punt in een lijn een andere lijn te trekken, die met de eerste een hoek maakt, gelijk aan een gegeven hoek.*

CONSTRUCTIE. Zij A het punt, dat in de lijn AB gegeven is, en P de gegeven hoek.

Neem op de beenen van $\angle$ P twee gelijke stukken PC en PD.

Fig. 38.



Neem op de lijn AB een stuk AE, gelijk aan PC, en beschrijf verder een driehoek AEF, die gelijk en gelijkvormig is met PCD, dan volgt uit de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken $\angle$ A $=$ $\angle$ P.

OPMERKING. Omdat de constructie van den driehoek AEF altijd mogelijk is (zie de vorige §, Gevolg 2) kan men door het punt A altijd eene lijn trekken zóó, dat $\angle$ BAF $=$ $\angle$ P. Door den driehoek aan den anderen kant van AB te laten vallen, verkrijgt men een tweede lijn, die aan het vereischte voldoet.

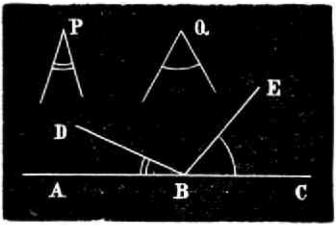
Door verder het stuk AE aan den anderen kant van A te plaatsen zou men twee lijnen vinden, die de verlengden der twee reeds gevonden lijnen zijn.

Die twee lijnen maken slechts een enkele uit, als $\angle$ P recht is.

§ 72. WERKSTUK. *Als twee hoeken van een driehoek gegeven zijn vraagt men den derden te construeeren.*

CONSTRUCTIE. Laat P en Q de gegeven hoeken zijn.

Fig. 39.



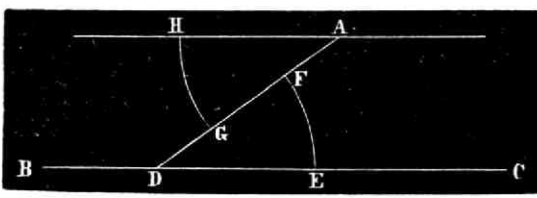
Neem een gestrekten hoek ABC. Maak ∠ ABD = ∠ P en ∠ CBE = ∠ Q dan is ∠ EBD de gevraagde, omdat hij met ∠ P en Q samen een gestrekten hoek maakt.

OPMERKING. De constructie is mogelijk, als ∠ P + ∠ Q < 180°.

§ 73. WERKSTUK. *Door een gegeven punt een lijn te trekken, evenwijdig met een gegeven lijn.*

CONSTRUCTIE. Zij A het punt en BC de lijn, die gegeven zijn. Trek door A een lijn, die BC ergens ontmoet, bijv. in D. Maak ∠ DAH = ∠ ADC, dan loopt AH evenwijdig met BC, omdat de verwisselende binnenhoeken DAH en ADC gelijk zijn.

Fig. 40.



OPMERKING. Dat er altijd een lijn is, die door A gaat en evenwijdig loopt met BC, blijkt uit de constructie, zooals wij reeds opmerkten in § 31. Dat er niet meer dan een lijn is, die aan 't vereischte voldoet, hebben wij als axioma aangenomen.

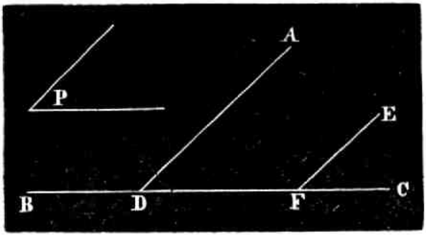
§ 74. WERKSTUK. *Door een punt buiten een lijn een andere te trekken, die met de eerste een hoek maakt, gelijk aan een gegeven hoek.*

CONSTRUCTIE. Zij A het punt, BC de lijn en P de hoek.

Wij moeten een lijn trekken, die aan twee voorwaarden voldoet: zij moet door A gaan en zij moet met BC een gegeven hoek maken. Laten wij voorloopig de eerste voorwaarde ter zijde, dan kunnen wij een willekeurig punt F in BC kiezen en volgens § 71 een lijn FE trekken, zoo dat ∠ CFE = ∠ P. Trekt men nu, met behulp van § 73, een lijn AD, die evenwijdig loopt met EF, dan is

∠ ADC = ∠ EFG. De lijn AD voldoet dus aan de twee gestelde voorwaarden.

Fig. 41.



OPMERKING. Door het punt F kan volgens § 71 nog een lijn getrokken worden, die met ~~ED~~ BC een hoek maakt, gelijk aan ∠ P. De lijn, die door A moet getrokken worden, moet met BC een hoek maken, gelijk aan den hoek, dien elk der twee lijnen, welke wij door F getrokken hebben, met BC maakt. De lijn, die door A moet getrokken worden, moet dus evenwijdig loopen met een der twee lijnen door F. Er zijn dus twee lijnen, die aan 't gevraagde voldoen.

Indien hoek P recht is, is er volgens § 29 maar één lijn mogelijk, die aan 't gevraagde voldoet.

§ 75. WERKSTUK. *Een driehoek te beschrijven als twee zijden en de ingesloten hoek gegeven zijn.*

CONSTRUCTIE. Maak een hoek A gelijk aan den gegeven hoek en neem op de beenen van A twee stukken, AB en AC, gelijk aan de twee gegeven zijden. Vereenigt men nu B met C, dan is ABC de gevraagde driehoek.

OPMERKING. De constructie kan altijd verricht worden en volgens § 53 zijn geen twee verschillende driehoeken mogelijk.

§ 76. WERKSTUK. *Een driehoek te beschrijven, als een zijde en twee aanliggende hoeken gegeven zijn.*

CONSTRUCTIE. Neem een lijn AB gelijk aan de gegeven zijde en trek volgens § 71 door A en door B ieder een lijn aan denzelfden kant van AB, zoo dat ∠ A en ∠ B respectievelijk gelijk zijn aan de gegeven hoeken. Als de twee lijnen, die door A en B getrokken zijn, elkaar snijden in C, is ABC de begeerde driehoek.

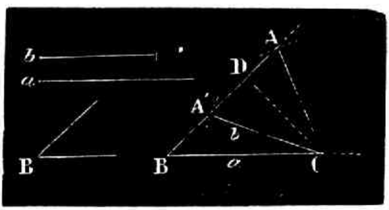
OPMERKING. Het construeeren van twee hoeken, gelijk aan de gegeven hoeken, is volgens § 71 altijd mogelijk. De twee lijnen, die door A en B getrokken zijn aan denzelfden kant van AB, zullen elkaar ontmoeten, als de som der twee gegeven hoeken kleiner is dan een gestrekte hoek (zie § 33, Gevolg). In dat geval is er dus een driehoek, die aan de gestelde voorwaarden voldoet. Dat er geen twee verschillende driehoeken mogelijk zijn, hebben wij in § 53 gezien.

§ 77. Werkstuk. *Een driehoek te beschrijven, als een zijde gegeven is, benevens de overstaande hoek en een aanliggende hoek.*

Constructie. Maak volgens § 72 een hoek, die gelijk is aan den derden hoek, dan heeft men een zijde van den driehoek en de twee aanliggende hoeken. De constructie is dus teruggebracht tot die van de vorige §.

§ 78. Werksruk. *Een driehoek te beschrijven, als twee zijden en een hoek over een dier zijden gegeven zijn.*

Fig. 42.



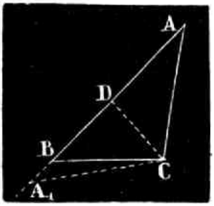
Constructie. Laat a en b de gegeven lijnen zijn en B de hoek, die tegenover b moet staan. Maak een hoek ABC gelijk aan $\angle$ B, neem BC $=$ a en beschrijf uit C als middelpunt met b als straal een cirkelboog. Als deze het been BA snijdt in A, voldoet driehoek ABC aan de gestelde voorwaarden.

Opmerking. Uit de constructie blijkt, dat het noodig en voldoende is voor het bestaan van den gevraagden driehoek, dat de cirkel de lijn BA of haar verlengde aan den kant van A snijdt. Het snijden heeft plaats, als b grooter is dan de loodlijn CD, die men uit C op AB kan neerlaten, omdat D een punt binnen den cirkel is en een rechte lijn, die door zulk een punt gaat, den cirkel noodzakelijk twee malen snijdt. Indien b kleiner is dan de loodlijn kan men uit C geen lijn trekken naar AB, die gelijk is aan b, omdat de loodlijn onder alle lijnen, die men trekken kan, de kortste is. Indien b gelijk is aan de loodlijn heeft men één lijn, die uit C naar AB kan getrokken worden en gelijk is aan B. Om verder na te gaan hoeveel driehoeken aan het vereischte voldoen kunnen, als b grooter is dan de loodlijn of even groot, onderscheiden wij drie gevallen.

1°. *De gegeven hoek is scherp.*

Als b gelijk is aan de loodlijn CD, voldoet BCD aan de gestelde voorwaarden, en die driehoek is de eenige.

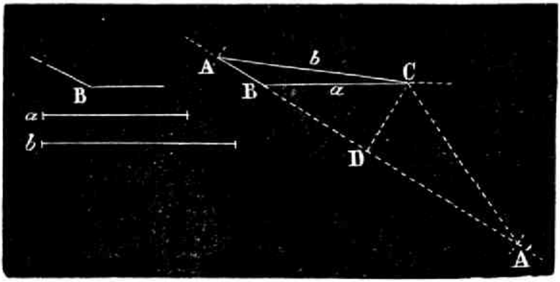
Fig. 43.



Als b grooter is dan de loodlijn en kleiner dan a, dan liggen de voetpunten A en A_1 der schuine lijnen, die men uit C kan trekken, volgens § 63, 4, dichter bij D dan B (zie fig. 42). De twee driehoeken BCA en BCA_1 voldoen dan aan 't vereischte.

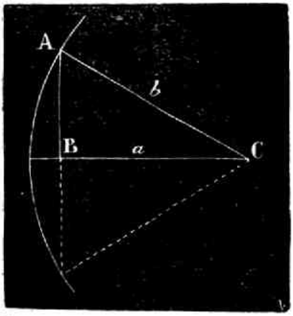
Als b grooter is dan de loodlijn en grooter dan a, liggen de voetpunten A en A_1 der schuine lijnen verder van D dan B (zie fig. 43). Alleen de driehoek ABC voldoet dan aan het vereischte.

Fig. 44.



2°. *De gegeven hoek is stomp.*

Fig. 45.



Indien b gelijk is aan de loodlijn, kan men uit C geen enkele lijn trekken, die gelijk is aan b en die BA of haar verlengde aan den kant van A snijdt; er is dan geen driehoek mogelijk.

Indien b grooter is dan de loodlijn en kleiner dan a, is het gevraagde eveneens onmogelijk.

Indien b grooter is dan a, vallen de voetpunten der twee schuine lijnen aan weerszijden van B in A en A_1. De driehoek ABC is dan de eenige, die aan 't gevraagde voldoet.

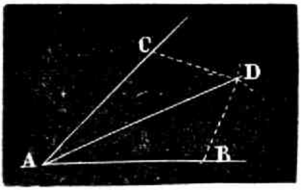
3°. *De gegeven hoek is recht.*

De loodlijn, die men uit C kan neerlaten, is CB. Zij is dus gelijk aan a. De zijde b moet grooter zijn dan a, en men heeft dan één driehoek, die aan het gevraagde voldoet.

§ 79. WERKSTUK. *Een gegeven hoek middendoor te deelen.*

CONSTRUCTIE. Neem op de beenen van den hoek twee gelijke stukken AB en AC. Beschrijf uit B en C als middelpunten, met dezelfde lijn als straal, twee cirkelbogen, die elkaar in D snijden. Vereenig D met A, dan is $\angle$ DAC $=$ $\angle$ DAB, omdat de driehoeken ABD en ACD de zijden twee aan twee gelijk hebben en dus gelijk en gelijkvormig zijn.

Fig. 46.



OPMERKING. De twee cirkelbogen snijden elkaar, als men tot straal neemt een lijn, die grooter is dan de helft van de lijn, welke B met C vereenigt (zie § 70). De constructie is dus altijd mogelijk.

Elke andere lijn dan AD verdeelt blijkbaar den hoek in twee ongelijke deelen.

§ 80. WERKSTUK. *In een gegeven punt van een lijn een loodlijn op die lijn op te richten.*

CONSTRUCTIE. Men beschouwe de gegeven lijn als de beenen van een gestrekten hoek, waarvan het gegeven punt hoekpunt is. Dit werkstuk is dan slechts een bijzonder geval van het vorige.

§ 81. WERKSTUK. *Een gegeven lijn middendoor te deelen.*

Fig. 47.

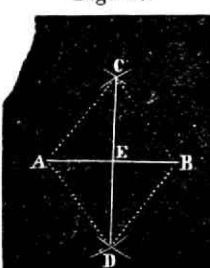
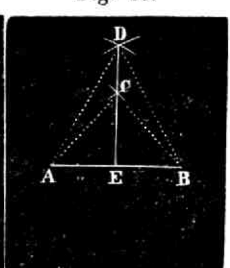


Fig. 48.



CONSTRUCTIE. Zij AB de gegeven lijn. Beschrijf uit A en B als middelpunten, met gelijke lijnen als stralen, cirkelbogen, die elkaar snijden aan den eenen kant van AB in C en aan den anderen kant in D, dan zijn C en D volgens § 60 punten van de lijn, die AB rechthoekig middendoor deelt. CD is dus de lijn en het punt E, waarin zij AB snijdt, deelt AB middendoor.

OPMERKING. De cirkelbogen snijden elkaar, als men den straal grooter neemt dan de helft van AB, waaruit volgt, dat de constructie altijd kan toegepast worden.

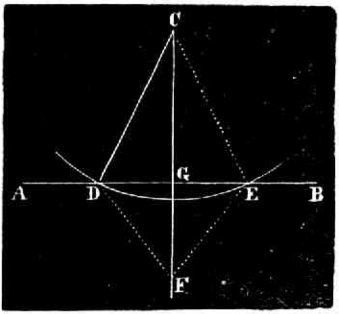
Elk ander punt dan E verdeelt AB in twee ongelijke deelen.

Men kan § 60 ook aanwenden om aan denzelfden kant van AB (zie fig. 48) twee punten te bepalen van de lijn, die AB rechthoekig middendoor deelt.

§ 82. WERKSTUK. *Uit een punt buiten een lijn een loodlijn op die lijn neer te laten.*

CONSTRUCTIE. Trek uit het punt C naar AB een willekeurige schuine lijn CD. Volgens § 63, 1 is er een tweede schuine lijn, die even lang is als CD. Beschrijft men dus uit C als middelpunt met CD als straal een cirkel, dan zal deze AB ontmoeten in D en in een ander punt E. Omdat CD en CE even lang zijn, liggen D en E even ver van het voetpunt der loodlijn, die uit C kan neergelaten worden. De loodlijn deelt dus DE rechthoekig middendoor, en van deze deellijn kan men een punt F bepalen, waarna CF de begeerde loodlijn zal zijn.

Fig. 49.



OPMERKING. De constructie is altijd mogelijk, en dat er slechts één loodlijn bestaat, is in § 29, 2 gebleken.

DE EENVOUDIGSTE EIGENSCHAPPEN DER VEELHOEKEN.

§ 83. BEPALINGEN. De figuur, die ontstaat, als men van eenige punten het eerste verbindt met het tweede, het tweede met het derde, enz., en het laatste weer met het eerste, noemt men een veelhoek.

Een lijn, die twee opeenvolgende punten verbindt, noemt men een zijde van den veelhoek.

Een lijn, die twee niet opeenvolgende punten verbindt, noemt men een **diagonaal**.

Een hoek, die gevormd wordt door twee opeenvolgende zijden, noemt men een **hoek** van den veelhoek.

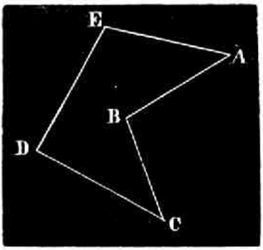
Een hoek, die gevormd wordt door een zijde en het verlengde van een naastliggende zijde, heet een **buitenhoek** van den veelhoek.

De punten noemt men ook **hoekpunten** van den veelhoek.

§ 84. Een veelhoek heeft in ieder geval evenveel zijden als hoeken en hoekpunten.

De veelhoeken worden, volgens het aantal zijden, verdeeld in driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, enz. Als het aantal zijden n is, heeft men een n-hoek.

Fig. 50.

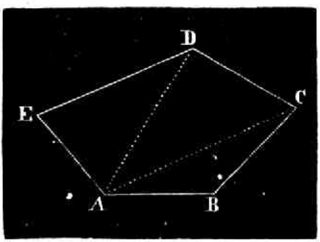


De veelhoeken worden aangeduid door de letters, die bij hun hoekpunten geplaatst zijn, op te noemen in de volgorde, waarin ze bij die punten staan, of door de letters in die volgorde naast elkaar te schrijven, bijv. (fig. 50) ABCDE of BCDEA of CDEAB, enz.

De hoeken van een veelhoek kunnen voor een gedeelte inspringende hoeken zijn, zooals $\angle$ B in fig. 50. Dit is blijkbaar nooit het geval bij een driehoek.

§ 85. *Uit een hoekpunt van een* n-*hoek kan men* n—3 *diagonalen trekken.*

Fig. 51.



Men kan namelijk uit een hoekpunt A diagonalen trekken naar alle hoekpunten, behalve naar het punt A zelve en naar de twee naastliggende hoekpunten, E en B. Het aantal hoekpunten, n, moet dus met 3 verminderd worden om het aantal der diagonalen te verkrijgen, die men uit één hoekpunt kan trekken.

Het aantal der diagonalen, die men in een n-*hoek uit alle hoekpunten kan trekken, is* $\frac{n\,(n-3)}{2}$.

Uit één hoekpunt kan men $n-3$ diagonalen trekken. Dat zou voor de n-hoekpunten $n\ (n-3)$ zijn; maar dan zou elke diagonaal tweemaal geteld zijn (daar zij twee hoekpunten verbindt). Het aantal is dus de helft van 't vorige produkt.

Als men in een n-*hoek uit één hoekpunt alle diagonalen trekt, ontstaan* n—2 *driehoeken.*

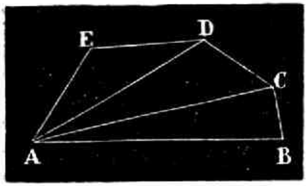
Om het aantal der driehoeken te bepalen merke men op, dat twee dier driehoeken ieder tot zijden hebben *twee zijden* van den veelhoek en een diagonaal. De andere driehoeken hebben tot zijden twee diagonalen en *één zijde* van den veelhoek. Verkeerden alle driehoeken in dit geval, dan zou hun aantal n zijn. Dit aantal moet met twee verminderd worden, omdat er twee driehoeken zijn, die ieder onder hunne zijden niet één, maar twee zijden van den veelhoek tellen.

OPMERKING. Als wij in 't vervolg van een veelhoek spreken, wordt stilzwijgend ondersteld, dat de veelhoek geen inspringende hoeken heeft.

§ 86. STELLING. *De som der hoeken van een* n-*hoek is* n—2 *gestrekte hoeken.*

Trekt men uit één hoekpunt alle diagonalen, dan ontstaan, volgens de vorige §, $n-2$ driehoeken. De hoeken van die driehoeken zijn gezamenlijk gelijk aan de som der hoeken van den n-hoek. De som der hoeken is in elken driehoek een gestrekte hoek en dus in alle driehoeken samen $n-2$ gestrekte hoeken.

Fig. 52.



§ 87. STELLING. *Een zijde van een veelhoek is kleiner dan de som der andere zijden.*

GESTELDE. $AB < BC + CD + DE + EA$.

BEWIJS. Trek de diagonalen AC en AD, dan is volgens § 44

$$AB < BC + AC,$$
$$AC < CD + AD,$$
$$AD < DE + EA,$$

samen $\overline{AB + AC + AD < BC + CD + DE + EA + AC + AD},$

of, als men uit elk der leden $AC + AD$ weglaat,

$$AB < BC + CD + DE + EA.$$

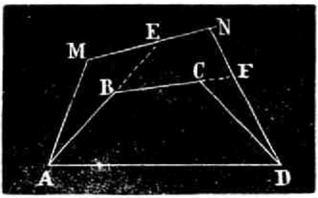
OPMERKING. Men kan deze stelling ook uitdrukken, door te zeggen: *De rechte lijn, die twee punten verbindt, is korter dan een gebroken lijn, die dezelfde twee punten vereenigt.*

Men verstaat dan door de lengte van een gebroken lijn de som der lengten van de rechte lijnen, waaruit zij bestaat.

§ 88. STELLING. *Als van twee gebroken lijnen die dezelfde uiteinden* A *en* D *hebben, de eerste geen inspringende hoeken heeft naar den kant van* AD *en geheel omsloten wordt door de tweede, dan is de eerste korter dan de tweede.*

GESTELDE. $AB + BC + CD < AM + MN + ND$.

Fig. 53.



BEWIJS. Verleng AB, tot zij de tweede gebroken lijn ontmoet in E, en BC, tot zij de tweede gebroken lijn ontmoet in F, dan heeft men

$$\begin{array}{l} AB + BE < AM + ME, \\ BC + CF < BE + EN + NF, \\ CD \quad < CF \quad + FD, \\ \hline \end{array}$$

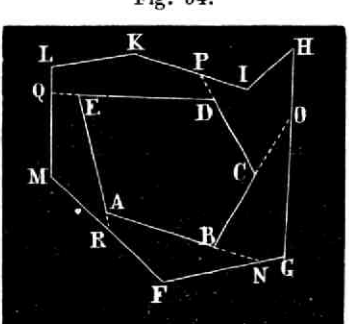
door samentelling $AB + BC + CD < AM + MN + ND$,

waarbij BE en CF uit elk der leden weggelaten zijn.

OPMERKING. De stelling van § 46 is een bijzonder geval van de bovengenoemde.

§ 89. STELLING. *Als een veelhoek zonder inspringende hoeken geheel omsloten wordt door een anderen, is de omtrek van den eersten kleiner dan die van den tweeden.*

Fig. 54.



BEWIJS. Verleng AB tot in N, BC tot in O, CD tot in P, DE tot in Q en EA tot in R, dan heeft men achtereenvolgens

$$\begin{array}{l} AB+BN<AR+RF+FN \\ BC+CO<BN+NG+GO \\ CD+DP<CO+OH+HI+IP \\ DE+EQ<DP+PK+KL+LQ \\ EA+AR<RM+MQ+QE \\ \hline \end{array}$$

samen $AB+BC+CD+DE+EA<FG+GH+HI+IK+KL+LM+MF$,

waarbij uit de twee leden weggelaten zijn BN, CO, DP EQ en AR.

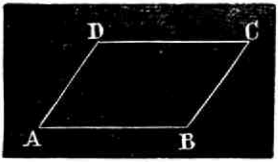
PARALLELOGRAMMEN EN TRAPEZIUMS.

§ 90. Uit het voorgaande blijkt, dat de som der hoeken van elken vierhoek twee gestrekte hoeken is en dat in elken vierhoek twee diagonalen kunnen getrokken worden.

Bepaling. Een vierhoek, wiens zijden twee aan twee evenwijdig loopen, heet een parallelogram.

§ 91. Stellingen. *In een parallelogram zijn de overstaande hoeken gelijk*, en omgekeerd: *Als in een vierhoek de overstaande hoeken gelijk zijn, is hij een parallelogram.*

Fig. 55.



Bewijs. Omdat AD en BC evenwijdig zijn, heeft men

$\angle A + \angle B = 180°$. Eveneens

$\angle C + \angle B = 180°$.

$\angle A = \angle C$, omdat zij beide tot supplement hebben $\angle B$.

De hoeken B en D zijn gelijk, omdat zij beide tot supplement hebben $\angle C$ of $\angle A$.

Bewijs van het omgekeerde.

$$\angle A = \angle C,$$
$$\angle B = \angle D.$$
$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$$

Deze vier hoeken bedragen samen twee gestrekte hoeken, dus $\angle A$ en $\angle B$ bedragen samen één gestrekten hoek. En hieruit volgt, dat AD en BC evenwijdig zijn.

Op dezelfde wijze toont men aan, dat AB en DC parallel zijn. De zijden zijn dus twee aan twee evenwijdig, en de vierhoek heet volgens de vorige § een parallelogram.

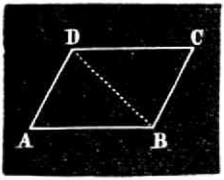
Gevolgen. 1. *Als een hoek van een parallelogram scherp is, is de overstaande ook scherp, en de twee andere zijn stomp.*

2. *Als één hoek van een parallelogram recht is, zijn alle hoeken recht.*

BEPALING. Een parallelogram, waarvan alle hoeken recht zijn, heet een rechthoek.

§ 92. STELLINGEN. *Van een parallelogram zijn de overstaande zijden even groot*, en omgekeerd: *Als de overstaande zijden van een vierhoek gelijk zijn, is hij een parallelogram.*

Fig. 56.



BEWIJS. Trek de diagonaal BD, dan ontstaan twee driehoeken, die een zijde gemeen hebben. Verder zijn ∠ CDB en ∠ ABD gelijk, als verwisselende binnenhoeken. Om dezelfde reden zijn ∠ DBC en ∠ ADB gelijk. De driehoeken BCD en DAB hebben dus eene zijde en twee hoeken gelijk en zijn daarom $\cong$. De zijden, welke in die driehoeken tegenover gelijke hoeken staan, zijn gelijk, zoodat wij hebben CD = AB en BC = AD.

BEWIJS VAN HET OMGEKEERDE. Indien BC = AD en CD = AB, hebben de driehoeken BCD en DAB de drie zijden gelijk en zijn dus $\cong$. De hoeken CDB en ABD zijn dus gelijk, en daaruit volgt, dat AB en CD evenwijdig loopen.

Uit de gelijkheid van DBC en ADB volgt, dat BC en AD parallel zijn.

GEVOLGEN. 1. *Als twee opeenvolgende zijden van een parallelogram even groot zijn, zijn alle zijden even groot.*

2. *Als twee evenwijdige lijnen gegeven zijn, en men laat uit verschillende punten der eene loodlijnen neer op de andere, dan zijn die loodlijnen even lang.* (Alle punten der eene lijn liggen dus op gelijke afstanden van de andere lijn.)

BEPALINGEN. Een parallelogram, waarvan alle zijden even lang zijn, noemt men een r u i t.

Een parallelogram, waarvan alle zijden even lang en alle hoeken recht zijn, noemt men een v i e r k a n t of k w a d r a a t.

Door den a f s t a n d v a n t w e e e v e n w ij d i g e l ij n e n verstaat men den afstand van een punt der eene lijn tot de andere.

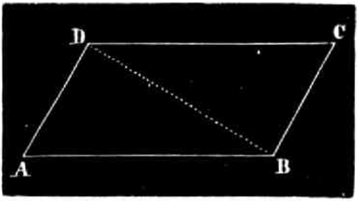
Een der zijden van een parallelogram noemt men soms b a s i s. Den afstand van die zijde tot de overstaande noemt men dan de hoogte van het parallelogram.

§ 93. STELLING. *Een vierhoek is een parallelogram, als twee overstaande zijden gelijk en evenwijdig zijn.*

Onderstelde. AB $=$ CD, AB evenwijdig met CD.

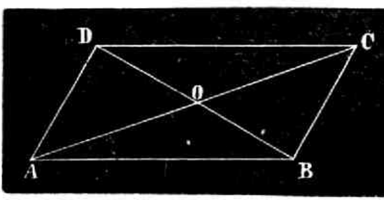
Bewijs. Daar reeds bekend is, dat AB evenwijdig is met CD, moeten wij nog slechts aantoonen, dat BC evenwijdig is met AD. Trekken wij daartoe de diagonaal BD, dan volgt uit de evenwijdigheid van AB en CD, dat de verwisselende binnenhoeken CBD en ADB gelijk zijn. De driehoeken BCD en DAB hebben nu twee zijden en den ingesloten hoek gelijk en zijn dus $\cong$. $\angle$ DBC is dan gelijk aan $\angle$ BDA, en hieruit volgt, dat BC en AD parallel zijn.

Fig. 57.



§ 94. Stellingen. *In elk parallelogram deelen de diagonalen elkaar middendoor*, en omgekeerd: *Een vierhoek, waarvan de diagonalen elkaar middendoor deelen, is een parallelogram.*

Fig. 58.



Gestelde. AO $=$ OC, BO $=$ OD.

Bewijs. Volgens § 92 heeft men AB $=$ CD; verder zijn de hoeken OAB en OCD gelijk, als verwisselende binnenhoeken; de hoeken OBA en ODC zijn ook gelijk als verwisselende binnenhoeken. De driehoeken OAB en OCD zijn dus $\cong$. Wij hebben dan BO $=$ OD, AO $=$ OC.

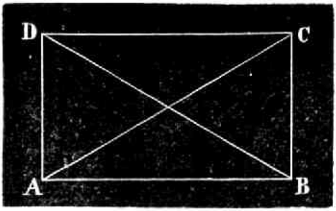
Bewijs van het omgekeerde. Men heeft volgens de onderstelling AO $=$ CO, BO $=$ DO. Bovendien zijn AOB en COD gelijk als overstaande hoeken. De driehoeken AOB en COD hebben dus twee zijden en den ingesloten hoek gelijk en zijn daarom $\cong$. Hieruit volgt $\angle$ OAB $=$ $\angle$ OCD, zoodat AB en CD evenwijdig zijn.

Op dezelfde wijze kan men, door middel van de driehoeken AOD en BOC, aantoonen, dat AD en BC evenwijdig zijn.

§ 95. Stellingen. *De diagonalen van een rechthoek zijn even lang*, en omgekeerd: *Als de diagonalen van een parallelogram even lang zijn, is het een rechthoek.*

Bewijs. De rechthoekige driehoeken DAB en CBA hebben de rechthoekszijden gelijk. Zij zijn dus $\cong$, zoodat men heeft AC = BD.

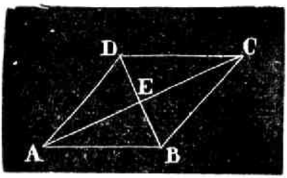
Fig. 59.



Bewijs van het omgekeerde. Indien AC = BD, zijn de driehoeken ABC en BAD $\cong$, omdat de zijden van den eenen gelijk zijn aan die van den anderen. Dus is ∠ CBA = ∠ DAB, en deze hoeken bedragen samen een gestrekten hoek, als binnenhoeken aan denzelfden kant der snijlijn. Elk dier hoeken is dus recht.

§ 96. Stellingen. *De diagonalen van een ruit staan rechthoekig op elkaar*, en omgekeerd: *als de diagonalen van een parallelogram rechthoekig op elkaar staan, is het een ruit.*

Fig. 60.



Bewijs. Men heeft CD = CB,
DE = EB,
EC = EC.

De driehoeken DEC en BEC zijn dus $\cong$. Daaruit volgt ∠ DEC = ∠ BEC. Deze zijn dus beide recht.

Bewijs van het omgekeerde. Men heeft DE = BE,
∠ DEC = ∠ BEC,
CE = CE.

De driehoeken DEC en BEC zijn weder $\cong$. Hieruit volgt CD = BC en dus ook CD = BC = AB = AD, zoodat ABCD een ruit is.

§ 97. Bepalingen. Een vierhoek, waarvan twee zijden evenwijdig zijn en de twee andere niet, heet een trapezium.

De niet evenwijdige zijden noemt men de beenen van het trapezium.

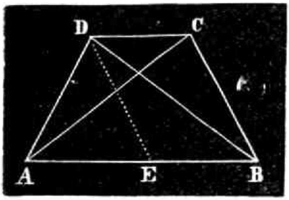
Een trapezium, waarvan de beenen even lang zijn, noemt men een gelijkbeenig trapezium.

Een trapezium heet rechthoekig, als een der beenen rechte hoeken maakt met de evenwijdige zijden.

Den afstand der evenwijdige zijden noemt men de hoogte van het trapezium.

§ 98. Stellingen. *Als een trapezium gelijkbeenig is, zijn de hoeken aan een der evenwijdige zijden even groot*, en omgekeerd: *Als in een trapezium de hoeken aan een der evenwijdige zijden gelijk zijn, dan is het trapezium gelijkbeenig.*

Fig. 61.



Bewijs. Trek DE evenwijdig met BC, dan is BCDE een parallelogram. Dus

$$BC = DE = AD.$$

Driehoek ADE is dus gelijkbeenig, en daarom

$$\angle DAE = \angle DEA.$$

$\angle CBA = \angle DEA$, omdat zij overeenkomstige hoeken zijn.

$$\angle DAE = \angle CBE.$$

Bewijs van het omgekeerde. Trek weer DE evenwijdig met CB, dan is $\angle DEA = \angle CBA$.

$\angle DAE = \angle CBA$, volgens de onderstelling.

$$\angle DEA = \angle DAE.$$

Hieruit volgt $DA = DE$, en in het parallelogram BCDE is

$$BC = DE,$$

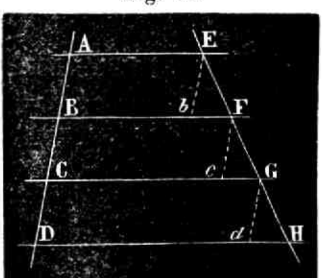
dus $DA = BC$.

§ 99. Stelling. *Als een trapezium gelijkbeenig is, zijn de diagonalen even lang.*

Bewijs. Zie fig. 61. Als $AD = BC$, heeft men volgens de vorige § $\angle DAB = \angle CBA$.

Ook is $AB = AB$.

Fig. 62.



De driehoeken DAB en CBA hebben dus twee zijden en den ingesloten hoek gelijk, en hieruit volgt $DB = AC$.

§ 100. Stelling. *Als eenige evenwijdige lijnen gelijke stukken afsnijden van één andere lijn, dan zijn de stukken, die zij van elke andere lijn afsnijden, ook onderling gelijk.*

Onderstelde. $AB = BC = CD$. AE, BF, CG en DH zijn evenwijdig.

Gestelde. $EF = FG = GH$.

BEWIJS. Trek Eb, Fc en Gd evenwijdig aan AD, dan is ABbE een parallelogram en dus

$$Eb = AB$$

evenzoo $$Fc = BC$$

$$Gd = CD.$$

Uit $AB = BC = CD$ volgt nu

$$Eb = Fc = Gd.$$

Verder zijn $\angle$ EFb, $\angle$ FGc en GHd gelijk, als overeenkomstige hoeken.

Om dezelfde reden heeft men $\angle\, bEF = cFG = dGH$.

De driehoeken EbF, FcG en GdH hebben nu een zijde en twee hoeken gelijk, zoodat zij $\cong$ zijn. Wij hebben dus:

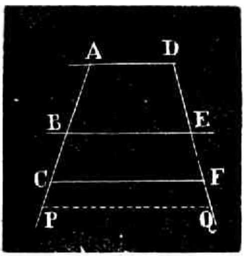
GEVOLG. *Als een zijde van een driehoek in gelijke stukken verdeeld is, en men trekt door de deelpunten lijnen evenwijdig aan een andere zijde van den driehoek, dan verdeelen de evenwijdige lijnen de derde zijde van den driehoek in onderling gelijke stukken.*

§ 101. STELLING. *Als drie evenwijdige lijnen van een andere ongelijke stukken afsnijden, dan snijden zij van elke andere lijn ongelijke stukken af, zóo dat de twee grootste stukken tusschen dezelfde twee evenwijdige lijnen liggen.*

ONDERSTELDE. AD, BE en CF zijn evenwijdig. AB > BC.

GESTELDE. DE > EF.

Fig. 63.



BEWIJS. Neem BP = AB, dan ligt C tusschen B en P. Trek door P de lijn PQ evenwijdig met CF. Omdat C tusschen BE en PQ ligt, zal de geheele lijn FC tusschen die beide liggen. Het punt F, waarin CF de lijn DG ontmoet, ligt dus tusschen E en Q, en hieruit volgt

$$EQ > EF, \text{ of}$$

$$DE > EF.$$

GELIJK- EN GELIJKVORMIGHEID DER VEELHOEKEN.

§ 102. Bepalingen. Twee veelhoeken heeten gelijk en gelijkvormig, als zij door diagonalen kunnen verdeeld worden in driehoeken, die gelijk en gelijkvormig zijn en op dezelfde wijze aan elkaar sluiten.

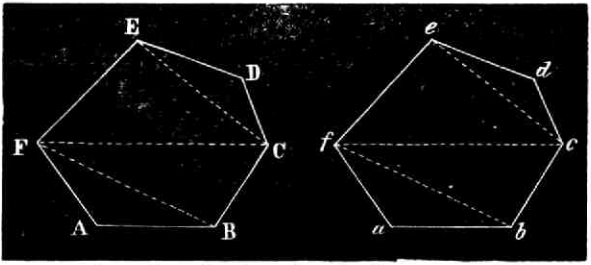
Zoo zijn ABCDEF en *abcdef* gelijk en gelijkvormig, indien, zie Fig. 64,

$$\triangle ABF \cong \triangle abf$$
$$\triangle BCF \cong \triangle bcf$$
$$\triangle CEF \cong \triangle cef$$
$$\triangle CDE \cong \triangle cde$$

Twee overeenkomstige hoekpunten van een paar gelijk en gelijkvormige driehoeken noemt men ook overeenkomstige hoekpunten van de gelijk en gelijkvormige veelhoeken.

De zijden of diagonalen, die twee overeenkomstige hoekpunten verbinden, noemt men gelijkstandige zijden of gelijkstandige diagonalen.

Fig. 64.



Bij overeenkomstige hoekpunten heeft men gelijkstandige hoeken.

Twee lijnen noemt men gelijkstandig, als zij twee paar gelijkstandige zijden in gelijke stukken verdeelen; terwijl de gelijke stukken van overeenkomstige hoekpunten af worden gerekend.

§ 103. Stelling. *De gelijkstandige zijden, diagonalen en hoeken van twee gelijk en gelijkvormige veelhoeken zijn gelijk.*

Bewijs. Zie Fig. 64. Omdat de driehoeken ABF en *abf* gelijk en gelijkvormig zijn, kan men ze zoo plaatsen, dat zij elkaar bedekken.

Maar dan zullen te gelijk samenvallen de driehoeken BCF en *bcf*; verder ook △ CEF en △ *cef*, △ CDE en △ *cde*. De twee veelhoeken kunnen elkaar dus volkomen bedekken, zoodat de zijden, hoeken en diagonalen van den eenen gelijk zijn aan de overeenkomstige van den anderen.

§ 104. Uit het samenvallen der twee veelhoeken blijken nog de STELLINGEN: 1. *Als twee veelhoeken gelijk en gelijkvormig zijn, dan zijn de driehoeken, waarin men den eenen kan verdeelen door diagonalen, gelijk en gelijkvormig met de driehoeken, waarin men den anderen door gelijkstandige diagonalen kan verdeelen.*

2. *Twee gelijkstandige lijnen* KL *en* kl *verdeelen twee gelijk en gelijkvormige veelhoeken in deelen, die twee aan twee gelijk en gelijkvormig zijn.*

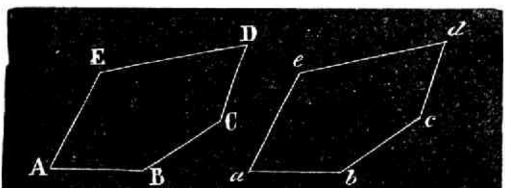
OPMERKING. Twee veelhoeken, die men zoo kan plaatsen, dat zij elkaar bedekken, zijn gelijk en gelijkvormig, omdat men ze door diagonalen in gelijk en gelijkvormige driehoeken kan verdeelen.

§ 105. STELLING. *Twee veelhoeken zijn gelijk en gelijkvormig, als de zijden op één na van den eenen gelijk zijn aan de zijden op één na van den anderen, terwijl die zijden in dezelfde orde op elkaar volgen in de twee veelhoeken, en de hoeken, die door de gelijke zijden gevormd worden, gelijk zijn.*

ONDERSTELDE. $AB = ab$, $BC = bc$, $CD = cd$, $DE = de$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$, $\angle D = \angle d$.

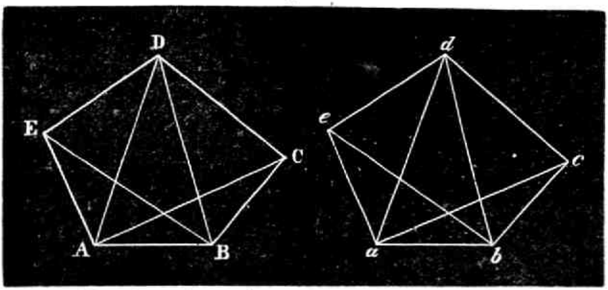
BEWIJS. Leg den veelhoek *abcde* zóo, dat $\angle b$ op $\angle B$ valt, dan volgt uit $AB = ab$, dat *a* in A valt, en uit $BC = bc$ volgt, dat *c* in C valt. Omdat $\angle C = \angle c$, valt *cd* langs CD, en daar deze twee lijnen even lang zijn, komt *d* in D te liggen. Uit de gelijkheid der hoeken D en *d* volgt, dat *de* langs DE valt, en uit $DE = de$ volgt verder, dat *e* in E valt. Al de hoekpunten van *abcde* vallen dus in die van ABCDE. Deze twee veelhoeken zijn dus gelijk en gelijkvormig.

Fig. 65.



§ 106. STELLING. *Twee veelhoeken* ABCDE *en* abcde *zijn gelijk en* *gelijkvormig, als de driehoeken* ABC, ABE, ABD *achtereenvolgens gelijk en gelijkvormig zijn met* abc, abd, abe.

Fig. 66.



Bewijs. Men kan deze eigenschap aantoonen, door even als in de vorige § te laten zien, dat de twee veelhoeken elkaar bedekken kunnen, of ook op de volgende wijze. Vooreerst laten wij zien, dat de lijn DE gelijk is aan *de*. Men heeft nl.

$$\triangle\,ABE \cong \triangle\,abe\text{, dus}$$
$$BE = be$$
$$\angle\,ABE = \angle\,abe.$$

Men heeft ook

$$\triangle\,ABD \cong \triangle\,abd\text{, dus}$$
$$BD = bd$$
$$\angle\,ABD = \angle\,abd$$
$$\text{af } \underline{\angle\,ABE = \angle\,abe}$$
$$\angle\,EBD = \angle\,ebd.$$

De driehoeken EBD en *ebd* hebben dus twee zijden en den ingesloten hoek gelijk, zoodat zij gelijk en gelijkvormig zijn. Hieruit volgt DE $=$ *de*. Op dezelfde wijze kan men aantoonen

CD $=$ *cd*,

EC $=$ *ec*.

De zijden en diagonalen van den eenen veelhoek zijn dus respectievelijk gelijk aan die van den anderen. Verdeelt men dus den eenen veelhoek door diagonalen in driehoeken, dan zullen deze $\cong$ zijn met de driehoeken, die in den anderen ontstaan door het trekken der overeenkomstige diagonalen; omdat de driehoeken twee aan twee de zijden gelijk hebben.

§ 107. Om het aantal gelijkheden te bepalen, die gegeven moeten zijn, zal men tot de gelijk- en gelijkvormigheid van twee veelhoeken kunnen besluiten, merke men op, dat hiertoe de gelijk- en gelijkvormigheid van $n-2$ driehoeken wordt vereischt. Om te besluiten, dat het eerste paar driehoeken $\cong$ is, zijn drie gelijkheden noodig. Voor elk der andere paren 2, dus

$$\begin{array}{r} (n-3) \times 2 = 2n - 6 \\ 3 \\ \hline 2n - 3. \end{array}$$

2

Ook in de vorige § was de gelijk- en gelijkvormigheid van $n-\cancel{3}$ driehoeken gegeven, en wij hadden daar op dezelfde wijze $2n-3$ gelijkheden van lijnen of hoeken.

In § 105 waren gelijk in de beide veelhoeken.

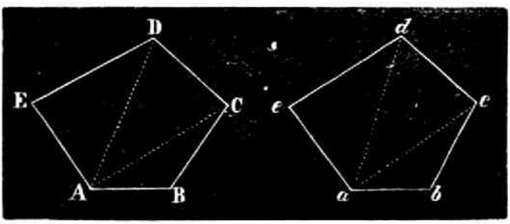
$$\begin{array}{rl} n-1 & \text{zijden,} \\ n-2 & \text{hoeken.} \\ \hline 2n-3. & \end{array}$$

Opmerking. Telt men evenals hierboven in ieder bijzonder geval het aantal gelijkheden op, waaruit tot de gelijk- en gelijkvormigheid van 2 n-hoeken besloten is, dan bedraagt dit aantal telkens $2n-3$, mits men bij dat optellen alleen gelijkheden neemt, die onderling onafhankelijk zijn. Zoo moet men het gelijk zijn van de n-hoeken des eenen veelhoeks aan die des anderen slechts als $n-1$ gegevens aanmerken, daar uit de gelijkheid van $n-1$ paren dier hoeken de gelijkheid van het n^e paar volgt.

§ 108. Werkstuk. *Een veelhoek te beschrijven, die gelijk en gelijkvormig is met een gegeven veelhoek* ABCDE.

1e. Constructie. Verdeel den gegeven veelhoek door diagonalen

Fig. 67.



in driehoeken ABC, ACD, ADE. Beschrijf volgens § § 70 een driehoek abc, die gelijk en gelijkvormig is met ABC. Construeer verder

△ *acd* zoo, dat hij $\cong$ is met ACD, en △ *ade* zoo, dat hij $\cong$ is met △ ADE, dan is volgens § 102 de veelhoek

$$abcde \cong ABCDE.$$

2e. CONSTRUCTIE. Neem eene lijn *ab* gelijk aan AB. Maak

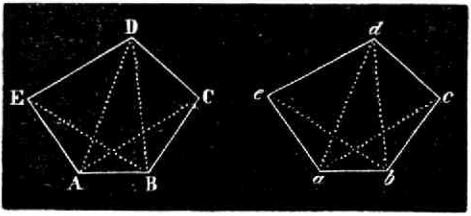
$$\angle b = \angle B$$
$$bc = BC$$
$$\angle c = C$$
$$cd = CD$$
$$\angle d = \angle D$$
$$de = DE$$

en vereenig *e* met *a*, dan is volgens § 105 de veelhoek

$$abcde \cong ABCDE.$$

3e. CONSTRUCTIE. Trek uit A en B alle diagonalen en construeer

Fig. 68.



achtereenvolgens △ *abc* zoo, dat hij gelijk en gelijkvormig is met △ ABC, △ *abd* $\cong$ ABD,

△ *abe* $\cong$ ABE.

Vereenig daarna *c* met *d* en *d* met *e*, dan is volgens § 106

$$abcde \cong ABCDE.$$

VERHOUDING.

§ 109. Bepalingen. Men zegt, dat twee grootheden **onderling meetbaar** zijn, als er een derde bestaat, die in elk der eerste een geheel aantal malen begrepen is. Men noemt de derde grootheid een gemeene maat der eerste twee.

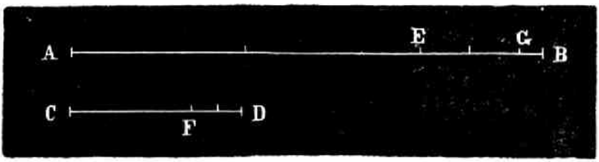
De helft of eenig ander evenmatig deel van een gemeene maat is op elk der twee grootheden een geheel aantal malen begrepen. Zulk een evenmatig deel is daarom weder een gemeene maat, en als twee grootheden dus een gemeene maat bezitten, dan hebben zij een onbepaald aantal andere.

Onder al de gemeene maten is één de belangrijkste: **de grootste gemeene maat**.

§ 110. **De grootste gemeene maat van twee onderling meetbare lijnen te vinden.**

Als AB en CD de twee lijnen zijn, zet men de kleinste, CD,

Fig. 69.



van A te beginnen, zoo dikwijls op de grootste uit, als mogelijk is, hier tweemaal. Het deel BE, dat overblijft en kleiner is dan CD, zet men zoo dikwijls als mogelijk is, hier eenmaal, op CD uit. Het overblijvende deel DF zet men, zoo dikwijls mogelijk, op BE uit, hier tweemaal. Het overschietende deel BG zet men op DF uit, en dit gaat juist tweemaal.

Nu is achtereenvolgens

$$DF = 2BG$$
$$EB = 2DF + BG = 5BG$$
$$CD = BE + DF = 7BG$$
$$AB = 2CD + EB = 19BG.$$

BG is zevenmaal in CD en negentienmaal in AB begrepen. BG is dus een gemeene maat van AB en CD; 19 : 7 is de verhouding van deze twee lijnen.

De getallen, die aanwijzen, hoe dikwijls de verschillende lijnen achtereenvolgens uitgezet zijn, noemt men *wijzergetallen*.

De wijzergetallen, in de volgorde, waarin ze gevonden zijn, tusschen accoladen geplaatst, vormen den *betrekkingswijzer* van AB en CD.

$$\{\,2, 1, 2, 2\,\}$$

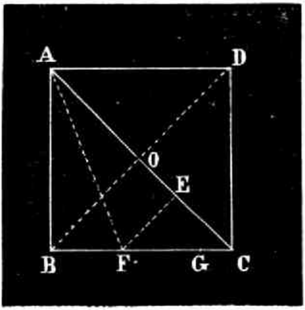
§ 111. De bewerking, die wij verricht hebben met AB en CD, komt geheel overeen met de bewerking, die toegepast wordt, als men den grootsten gemeenen deeler van twee getallen zoekt. En daar de lijnen 7 en 19 malen BF zijn, hebben wij achtereenvolgens dezelfde quotienten verkregen, als wanneer wij de bewerking voor het zoeken van den grootsten gemeenen deeler hadden toegepast op 7 en 19, aldus:

7	19	2			
	14				
	5	7	1		
		5			
		2	5	2	
			4		
			1	2	2
				2	
				0	

Deze overeenkomst bestaat telkens, als de twee lijnen onderling meetbaar zijn, en daar men bij de bewerking met de twee getallen eindelijk eene rest 0 verkrijgt, zoo zal men ook bij het afpassen der onderling meetbare lijnen, ten laatste niets overhouden. *Bestaat er* dus *een gemeene maat van twee lijnen, dan vindt men, door het achtereenvolgens afpassen der lijnen, een gemeene maat;* en even als de gemeene maat, die men bij de getallen vindt, de grootste is, zoo vindt men ook de *grootste* gemeene maat der lijnen.

§ 112. Bepalingen. Twee grootheden, die geen gemeene maat bezitten, noemt men *onderling onmeetbaar*. Past men op twee zulke grootheden de bewerking toe, die wij op twee onderling meetbare lijnen hebben toegepast, dan zou de bewerking nooit ten

Fig. 70.



einde loopen, als men daarbij volkomen nauwkeurig kon te werk gaan. Dat er werkelijk onderling onmeetbare lijnen zijn, blijkt uit de

STELLING. *De zijden en de diagonaal van een vierkant zijn onderling onmeetbaar.*

BEWIJS. De zijde AB is kleiner dan de diagonaal AC en grooter dan de helft van AC. Men kan dus op AC een stuk AE nemen, gelijk aan AB, en er blijft een rest EC over, die kleiner is dan AB.

Deze rest moet nu vergeleken worden met AB of met BC. Trekt men EF evenwijdig aan OB, dan is △ CEF rechthoekig gelijkbeenig, omdat hij gelijkhoekig is met △ COB. Neemt men dus in △ CEF, even als in △ ABD gedaan is, FG gelijk aan EC, dan zal de rest CG kleiner zijn dan EC. Uit de gelijk en gelijkvormigheid van △ ABF en △ AEG volgt verder BF = EF = EC = FG. Dus *is* BC *gelijk aan tweemaal* EC, *plus een rest* GC *kleiner dan* EC.

Het laatste kunnen wij geheel algemeen aldus uitdrukken: in elken rechthoekigen gelijkbeenigen △ is de rechthoekszijde gelijk aan twee maal het verschil tusschen haar en de hypotenusa, plus een rest, die kleiner is dan dat verschil. De zijde EC *bevat dus tweemaal* GC *plus een rest*, *die kleiner is dan* GC; en zoo vervolgens.

Elke rest bevat dus tweemaal de vorige plus een nieuwe rest, zoodat de bewerking nooit ten einde loopt. En hiermee is, volgens de eigenschap aan het eind der vorige §, bewezen, dat AB en AC onderling onmeetbaar zijn.

§ 113. BEPALING. Men noemt de betrekking of verhouding van twee onderling onmeetbare lijnen een onmeetbare verhouding of onmeetbaar getal.

Om later onmeetbare verhoudingen met elkaar te kunnen vergelijken, moeten wij eerst vaststellen, wat men verstaat door de gelijkheid van twee onmeetbare verhoudingen. Stellen wij ons voor, dat van een paar onderling onmeetbare lijnen de eerste uitgezet wordt op de tweede, zoo dikwijls, als dit mogelijk is, zoodat er een rest overblijft, kleiner dan de eerste lijn. Nemen wij een tiende der eerste lijn en zetten dit, zoo dikwijls als het kan, op genoemde rest af. Er blijft weder een rest over, en hierop zetten wij het honderdste der eerste lijn af. Op deze wijze kan men voortgaan met te zien, hoeveel duizendsten, tienduizendsten, enz. der eerste lijn begrepen zijn in de resten, die men achtereenvolgens verkrijgt. Deze bewerking kan voortgezet worden, zoo ver men wil; er blijft telkens een rest over.

Neemt men een ander paar onderling onmeetbare lijnen, en vindt men door toepassing van dezelfde bewerking hetzelfde aantal geheelen, tienden, honderdsten, enz., hoe ver ook voortgezet, dan zegt men, dat de onmeetbare verhoudingen van de twee paren lijnen gelijk zijn (bepaling).

Bepaling. Men zegt, dat de meetbare of onmeetbare verhouding van A en B grooter is dan de (meetbare of onmeetbare) verhouding van C en B, als A grooter is dan C.

Bepaling. Door de som van de onmeetbare verhouding van A tot B en de (meetbare of onmeetbare) verhouding van C tot B verstaat men de verhouding van A + C tot B.

Opmerkingen. 1. Wat in deze § gezegd is van lijnen, geldt ook voor andere grootheden.

2. De bepalingen, die betrekking hebben op onmeetbare grootheden, zijn zoo gekozen, dat ze ook doorgaan voor meetbare grootheden.

EVENREDIGHEID VAN LIJNEN.

§ 114. Uit de gelijkheid van twee meetbare of twee onmeetbare verhoudingen ontstaat de evenredigheid.

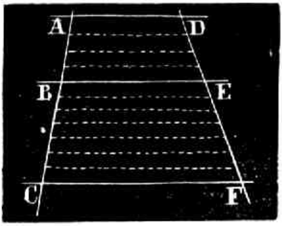
Stelling. *Drie evenwijdige lijnen snijden van twee andere lijnen evenredige stukken af.*

Onderstelde. AD, BE en CF zijn evenwijdig.

Gestelde. $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$.

Bewijs. Hierbij onderscheiden wij twee getallen: BC en AB zijn *onderling meetbaar of onderling onmeetbaar.*

Fig. 71.



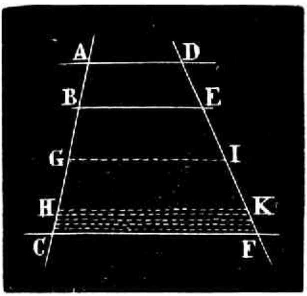
1e. In het eerste geval bestaat er een lijn, die op AB en BC ieder een geheel aantal malen begrepen is. Zetten wij die lijn uit op AB en BC, dan worden deze in onderling gelijke stukken verdeeld, b.v. AB in 4 en BC in 7, zoodat wij hebben

$$\frac{BC}{AB} = \frac{7}{4}.$$

Trekt men nu door de uiteinden der stukken, waarin AB en BC verdeeld zijn, lijnen evenwijdig met AD, dan worden door die evenwijdige lijnen DE in 4 en EF in 7 stukken verdeeld. Volgens § 100 zijn deze stukken gelijk, en dus

$$\frac{EF}{DE} = \frac{7}{4} = \frac{BC}{AB}.$$

Fig. 72.



2e. Als AB en BC onderling onmeetbaar zijn, zet men AB op BC uit, zoo dikwijls als dat kan; hier tweemaal. Het deel HC, dat overblijft, is kleiner dan AB. Trekt men nu door G en H lijnen, evenwijdig met AD, dan is $EI = IK = DE$, volgens § 100. En volgens § 101 is $KF > DE$. Men kan dus AB even veel maal afpassen op BC, als DE op EF. Neem nu een tiende van AB en zet dit zoo dikwijls mogelijk op HC af, b.v. hier 4 maal. Trekt men nu door de deelpunten van HC lijnen evenwijdig met HK, dan wordt KF in 5 stukken verdeeld, waarvan vier even groot zijn, terwijl één kleiner is dan de andere. Omdat de gelijke deelen, die op HC afgepast zijn, ieder een tiende van AB zijn, zullen ook de gelijke deelen, die men op KF heeft, ieder tienmaal in DE begrepen zijn. Zooveel tienden van AB, als er dus in HC begrepen zijn, evenveel tienden van DE kan men op KF afpassen. Zoo kan men verder gaan met honderdsten van AB en van DE, met duizendsten, enz. En daar men achtereenvolgens van AB en van DE hetzelfde aantal geheelen, tienden, honderdsten, enz. verkrijgt, zijn de onmeetbare verhoudingen

$$\frac{BC}{AB} \text{ en } \frac{EF}{DE}$$

gelijk, volgens de bepaling die in § 113 gegeven is van de gelijkheid van twee onmeetbare verhoudingen.

§ 115. Uit de evenredigheid

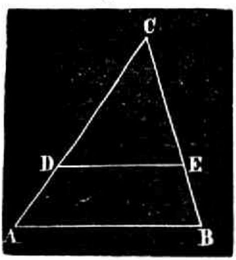
$$BC : AB = EF : DE \text{ (zie fig. 72)}$$

volgt volgens een eigenschap der evenredigheden

$$(BC + AB) : (EF + DE) = AB : DE, \text{ of}$$
$$AC : DF = AB : DE, \text{ of}$$
$$AC : AB = DF : DE.$$

Als in een driehoek ABC een lijn DE getrokken is evenwijdig met AB, toont men op dezelfde wijze aan, dat

Fig. 73.



$$\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC} \text{ en}$$

$$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC};$$

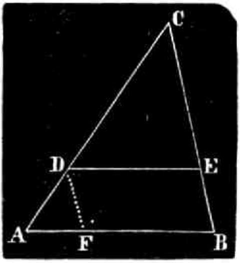
of in woorden: *Als men in een driehoek een lijn trekt, evenwijdig aan een zijde, dan verdeelt die lijn de twee andere zijden in stukken, die evenredig zijn met elkaar en met de geheele zijden.*

§ 116. Stelling. *Als men in een driehoek* ABC *de lijn* DE *trekt evenwijdig aan* AB, *dan heeft men*

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{EC}{BC}.$$

Bewijs. Dat de tweede en derde verhouding gelijk zijn, blijkt uit de vorige §. Om aan te toonen, dat de eerste en tweede verhouding gelijk zijn, trekke men (zie fig. 74) DF evenwijdig met EB, dan is BEDF een parallelogram en daarom DE = FB. Omdat DF evenwijdig is met BC, heeft men, volgens de vorige §,

Fig. 74.



$$\frac{FB}{AB} = \frac{DC}{AC}, \text{ of, daar } DE = FB,$$

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AC}.$$

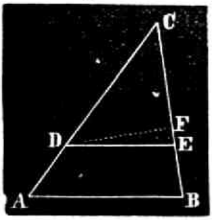
§ 117. Stelling. *Een lijn, die van twee zijden eens driehoeks stukken afsnijdt, evenredig met die zijden, loopt evenwijdig aan de derde zijde.*

Onderstelde. $\frac{DC}{AC} = \frac{EC}{BC}$.

Gestelde. DE is evenwijdig met AB.

Bewijs. Onderstel, dat DE niet evenwijdig is met AB, dan zal men door D eene lijn DF kunnen trekken, die wel evenwijdig is met AB. Maar dan is volgens § 115

Fig. 75.

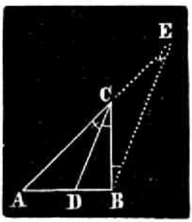


$$\frac{DC}{AC} = \frac{FC}{BC}.$$

En dit strijdt tegen de onderstelling, daar de verhoudingen $\frac{EC}{BC}$ en $\frac{FC}{BC}$ niet gelijk kunnen zijn.

§ 118. Stelling. *De lijn, die een hoek van een driehoek middendoor deelt, verdeelt de overstaande zijde in twee stukken, die evenredig zijn met de aangrenzende zijden.*

Fig. 76.



Onderstelde. $\angle$ ACD $= \angle$ DCB.

Gestelde. AD : BD $=$ AC : BC.

Bewijs. Trek door B, evenwijdig met DC, een lijn, die het verlengde van AC snijdt in E. Nu heeft men

$\angle$ ACD $= \angle$ E, als overeenkomstige hoeken.

$\angle$ DCB $= \angle$ CBE, als verwisselende binnenhoeken.

$\angle$ E $= \angle$ CBE, omdat de eerste leden volgens de onderstelling gelijk zijn. Uit de gelijkheid der hoeken E en CBE volgt BC $=$ CE.

Omdat DC evenwijdig is met BE, heeft men volgens § 115

AD : DB $=$ AC : CE, of

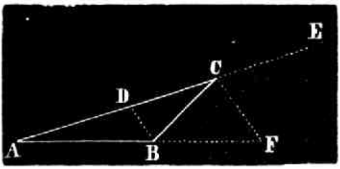
AD : DB $=$ AC : BC.

§ 119. Stelling. *De lijn, die het supplement van den tophoek eens driehoeks middendoor deelt, snijdt de basis in een punt, welks afstanden tot de uiteinden der basis evenredig zijn met de aangrenzende opstaande zijden.*

Onderstelde. $\angle BCF = \angle FCE$.

Gestelde. $AF : BF = AC : BC$.

Fig. 77.



Bewijs. Trek BD evenwijdig met FC, dan heeft men, even als in de vorige §,

$$\begin{array}{l} \angle ECF = \angle CDB \\ \underline{\angle BCF = \angle CBD} \\ \angle CDB = \angle CBD. \end{array}$$

Hieruit volgt $BC = DC$.

Verder heeft men $AF : BF = AC : DC$, of

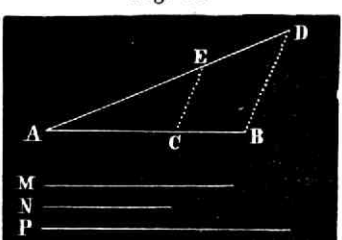
$$AF : BF = AC : BC.$$

WERKSTUKKEN.

§ 120. Werkstuk. *Tot drie gegeven lijnen een vierde evenredige te vinden*, of, als drie lijnen M, P, N gegeven zijn, een vierde x te vinden, zoo dat

$$M : P = N : x.$$

Fig. 78.



Constructie. Neem een willekeurigen hoek A, neem op de beenen van dien hoek de stukken

$$AE = M,$$
$$AC = N,$$
$$AD = P.$$

Vereenig E met C en trek uit D de lijn DB evenwijdig met EC, dan is volgens § 115

$$AE : AD = AC : AB,$$
$$M : P = N : AB,$$

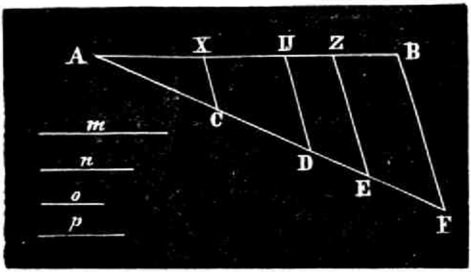
zoodat AB de gevraagde lijn is.

Bijzonder geval. Als de lijnen P en N gelijk zijn, moet men een lijn x zoeken, zóó dat

$$M : P = P : x.$$

Men noemt x dan de derde evenredige tot M en P, en de vorige constructie gaat onveranderd door.

Fig. 79.



§ 121. **Werkstuk.** *Een gegeven lijn in stukken te verdeelen, die tot elkaar staan als eenige gegeven lijnen.*

Eerste constructie. Als men AB moet verdeelen in vier stukken, die tot elkaar staan als m, n, o, p, trekt men een lijn AF, die met AB een willekeurigen hoek vormt, en neemt

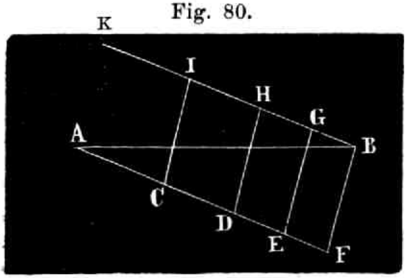
$$AC = m$$
$$CD = n$$
$$DE = o$$
$$EF = p.$$

Vereenig nu F met B, en trek EZ, DIJ en CX alle evenwijdig met FB, dan heeft men volgens § 114 Verzamelevenredigheid

$$AX : XIJ : IJZ : ZB = AC : DC : DE : EF,$$
$$AX : XIJ : IJZ : ZB = m \; : n \; : o \; : p,$$

zoodat X, IJ en Z de verlangde deelpunten zijn.

Fig. 80.



Tweede constructie. Nadat, even als bij de eerste constructie, door A een willekeurige lijn AF getrokken is, en daarop de lijnen m, n, o, p afgezet zijn; trekt men door B eene lijn BK evenwijdig met AF. Op BK zet men dezelfde lijnen in omgekeerde volgorde af:

$$BG = p,$$
$$GH = o,$$
$$HI = n.$$

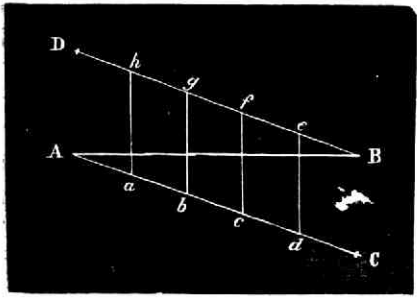
Vereenigt men nu F met B, E met G, D met H en C met I, dan volgt uit de gelijkheid en evenwijdigheid van BG en FE volgens § 93, dat EFBG een parallelogram is, en dus dat BF en GE evenwijdig zijn.

Evenzoo zijn DH en CI evenwijdig met FB, en uit de evenwijdigheid van al die lijnen volgt

$$AX : XIJ : IJZ : ZB = AC : CD : DE : EF.$$

§ 122. Bij de tweede constructie der vorige § moet men het werkstuk van § 71 slechts éenmaal toepassen, hoe groot ook het aantal deelen zij, waarin AB moet verdeeld worden. Bij de eerste constructie der vorige § moet men hetzelfde werkstuk twee of meermalen toepassen, zoodra het aantal deelen, waarin AB moet verdeeld worden, drie of meer is. De tweede constructie is dus te verkiezen boven de eerste, als AB in meer dan twee deelen moet verdeeld worden.

Fig. 81.

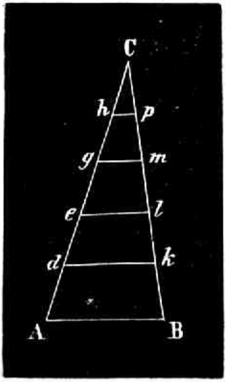


De beide constructies kunnen ook toegepast worden, om *een lijn in gelijke deelen te verdeelen*. In figuur 81 is de lijn AB volgens de tweede constructie in vijf gelijke deelen verdeeld.

Indien een zeer kleine lijn AB gegeven is, en men vraagt andere lijnen te bepalen, die respectievelijk gelijk zijn aan $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$ van AB, dan kan men een der twee constructies toepassen, om AB in vijf gelijke deelen te verdeelen. De deelpunten vallen dan natuurlijk zeer dicht bij elkaar, en de constructie is in de practijk niet met eenige nauwkeurigheid uit te voeren. Daarom verkiest men de volgende

Constuctie. Trek door A een willekeurige lijn, en neem daarop vijf gelijke stukken $Ad = de = eg = gh = hC$. Vereenig C met B en trek dk, el, gm, hp evenwijdig aan AB, dan is volgens § 116

Fig. 82.



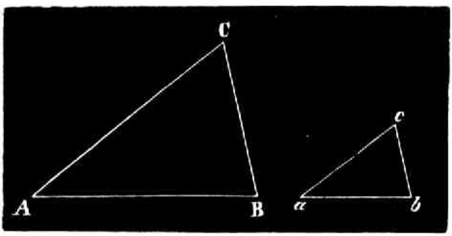
$$Ch : Cg : Ce : Cd : CA = hp : gm : el : dk : AB,$$
$$\text{of } 1 : 2 : 3 : 4 : 5 = hp : gm : el : dk : AB;$$
$$\text{dus } dk = {}^4/_5\ AB,$$
$$el = {}^3/_5\ AB,$$
$$gm = {}^2/_5\ AB,$$
$$hp = {}^1/_5\ AB.$$

GELIJKVORMIGHEID DER DRIEHOEKEN.

§ 123. Twee driehoeken, wier zijden twee aan twee evenredig zijn, noemt men **gelijkvormig**. (Dat er zulke driehoeken zijn, blijkt uit de stelling van § 116).

Men duidt *gelijkvormig* aan door het teeken $\sim$.

Fig. 83.



Bepaling. De zijden, waartusschen de gelijke verhoudingen bestaan, noemt men **gelijkstandig**.

Zoo noemt men de driehoeken ABC en abc gelijkvormig, indien tusschen de zijden de volgende evenredigheid bestaat

$$AB : ab = BC : bc = CA : ca.$$

AB is dan gelijkstandig met ab, BC met bc en CA met ca.

Bepaling. De hoekpunten, waarin gelijkstandige zijden samenkomen, noemt men **overeenkomstige hoekpunten**.

§ 124. Uit de bepaling, die wij gegeven hebben van de gelijkvormigheid van twee driehoeken, volgt onmiddellijk:

1. *Een paar gelijke en gelijkvormige driehoeken is tevens gelijkvormig.*

2. *Elk paar gelijkzijdige driehoeken is gelijkvormig.*

3. *Als een driehoek* p *gelijkvormig is met* q, *zal een driehoek, die gelijk en gelijkvormig is met* p, *ook gelijkvormig zijn met* q.

4. *Twee driehoeken, die met een derden gelijkvormig zijn, zijn ook onderling gelijkvormig.*

Zijn nl. $\triangle\ abc$ en $\triangle\ a'b'c'$ gelijkvormig met $\triangle$ ABC, dan is

$$AB : ab = BC : bc = CA : ca \text{ en}$$
$$AB : a'b' = BC : b'c' = CA : c'a'$$

Deze evenredigheden hebben de voorgaande termen gelijk, en daaruit volgt, dat de volgende termen weer een evenredigheid vormen:

dus $$ab : a'b' = bc : b'c' = ca : c'a',$$

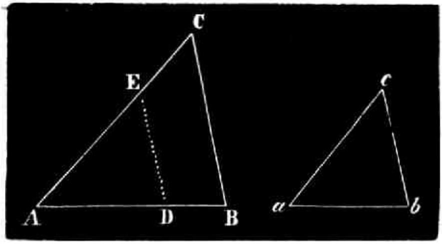
zoodat $\triangle\ abc$ en $\triangle\ a'b'c'$ gelijkvormig zijn.

Opmerking. Bij het opnoemen van twee gelijkvormige driehoeken ABC en PDS, kiest men de volgorde der letters zóo, dat A overeenkomstig is met P, B met D en C met S.

§ 125. Stelling. *Twee driehoeken zijn gelijkvormig, als de hoeken van den eenen gelijk zijn aan die van den anderen.*

Onderstelde. $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$.

Fig. 84.



Gestelde. $AB : ab = BC : bc = CA : ca$.

Bewijs. Men kan driehoek *abc* zóo plaatsen, dat *ab* langs AB valt in AD, en dat *ac* langs AC valt in AE. Nu heeft men $\angle ADE = \angle b = \angle B$. De lijn DE is dus evenwijdig met BC, en hieruit volgt volgens § 115 en § 116

$$AB : AD = BC : DE = CA : EA,$$

of $$AB : ab = BC : bc = CA : ca.$$

Gevolgen. I. Daar uit de gelijkheid van twee paar hoeken van twee driehoeken de gelijkheid van het derde paar volgt, zoo kan men ook zeggen, *dat twee driehoeken gelijkvormig zijn, als twee* *hoeken van den eenen gelijk zijn aan twee hoeken van den anderen.*

2. *Twee rechthoekige driehoeken zijn gelijkvormig, als zij een scherpen hoek gelijk hebben.*

3. *Twee gelijkbeenige driehoeken zijn gelijkvormig, als hun tophoeken gelijk zijn, of als zij een hoek aan de basis gelijk hebben.*

STELLING. *Twee driehoeken zijn gelijkvormig, als hun zijden twee aan twee evenwijdig zijn, of als hun zijden twee aan twee rechthoekig op elkaar staan.*

BEWIJS. Laat A, B, C de hoeken zijn van den eenen driehoek en a, b, c die van den anderen. Volgens § 34 en § 35 zijn deze hoeken twee aan twee òf gelijk òf elkaars supplementen. Nu kan men de drie volgende onderstellingen maken:

1e. $A + a = 180°$, $B + b = 180°$, $C + c = 180°$.

2e. $A = a$, $B + b = 180°$, $C + c = 180°$.

3e. $A = a$, $B = b$ en bijgevolg $C = c$.

De eerste onderstelling is onmogelijk, omdat volgens haar de som der hoeken van de twee driehoeken drie gestrekte hoeken zou bedragen.

De tweede onderstelling is onmogelijk, omdat volgens haar de som der hoeken van beide driehoeken meer dan twee gestrekte hoeken zou bedragen.

De derde onderstelling is dus de eenig mogelijke, zoodat de hoeken van den eenen driehoek gelijk zijn aan die van den anderen, en daaruit volgt volgens de vorige stelling, dat de driehoeken gelijkvormig zijn.

§ 126. STELLING. *Twee driehoeken zijn gelijkvormig, als zij een hoek gelijk hebben, en als bovendien de zijden om dien hoek evenredig zijn.*

ONDERSTELDE. $\angle A = \angle a$, $AB : ab = AC : ac$.

GESTELDE. $BC : bc = AB : ab = AC : ac$.

BEWIJS. Plaats driehoek abc weer zóo, dat de gelijke hoeken a en A elkaar bedekken, en dat ab in AD en ac in AE valt. Volgens het onderstelde is nu

$$AB : AD = AC : AE,$$

en uit deze evenredigheid volgt volgens § 117, dat DE evenwijdig loopt met BC, en dus volgens § 116

$$BC : DE = AB : AD = AC : AE,$$

$$BC : bc = AB : ab = AC : ac.$$

Gevolg. *Twee rechthoekige driehoeken zijn gelijkvormig, als hun rechthoekszijden evenredig zijn.*

§ 127. **Stelling.** *Twee driehoeken zijn gelijkvormig, als twee zijden van den eenen evenredig zijn met twee zijden van den anderen, als de hoeken, die tegenover het eene paar zijden staan, gelijk zijn en als bovendien de hoeken, tegenover het andere paar zijden, van dezelfde soort zijn.*

Onderstelde. $AB : ab = BC : bc$, $\angle A = \angle a$, $\angle C$ en $\angle c$ zijn gelijksoortig.

Bewijs. Neem $AD = ab$ en trek DE evenwijdig met BC, dan is driehoek ADE gelijkvormig met ABC, en het gestelde zal bewezen zijn, als wij aangetoond hebben, dat $\triangle ADE$ gelijk en gelijkvormig is met $\triangle abc$.

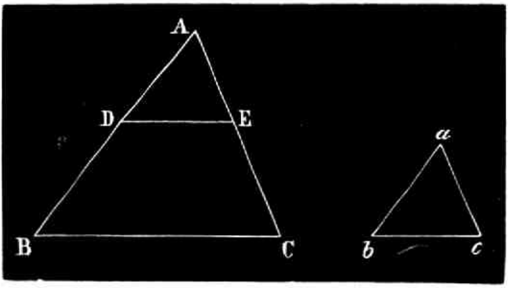
Omdat DE evenwijdig is met BC, hebben wij

$AB : AD = BC : DE$; volgens het onderstelde is

$AB : ab = BC : bc$.

Van deze twee evenredigheden zijn de eerste drie termen gelijk,

Fig. 85.



dus ook $DE = bc$.

Bovendien $AD = ab$,

$\angle A = \angle a$

$\angle AED$ en $\angle c$ gelijksoortig.

De driehoeken abc en ADE zijn dus $\cong$ volgens § 52.

Gevolg. *Twee rechthoekige driehoeken zijn gelijkvormig, als de hypotenusa's evenredig zijn met een paar rechthoekszijden.*

Opmerking. Terwijl drie gelijkheden noodig zijn, om tot de gelijk- en gelijkvormigheid van twee driehoeken te besluiten, blijkt uit het vorige, dat twee gelijkheden voldoende zijn, om tot de gelijkvormigheid te besluiten. Deze gelijkheden zijn òf evenredigheden òf gelijkheden van hoeken.

§ 128. Stelling. *Van twee gelijkvormige driehoeken zijn de hoeken twee aan twee gelijk.*

Onderstelde. $AB : ab = BC : bc = CA : ca$ (Fig. 85).

Bewijs. Neem $AD = ab$ en trek DE evenwijdig aan BC, dan is driehoek ADE gelijkvormig met ABC, en wij moeten slechts aantoonen, dat ADE gelijk en gelijkvormig is met *abc*.

Omdat DE evenwijdig loopt met BC, heeft men

$AB : AD = BC : DE = CA : EA$, en volgens de onderstelling

$AB : ab = BC : bc = CA : ca$.

Daar $AD = ab$, zijn de eerste drie termen van deze evenredigheden gelijk, en dus ook de vierde.

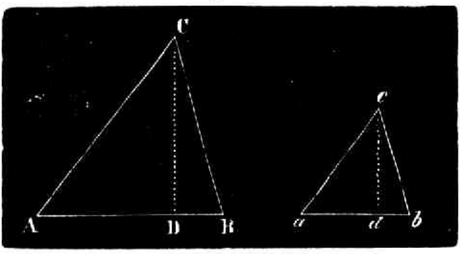
$$DE = bc$$

Evenzoo $$EA = ca.$$

De driehoeken ADE en *abc* hebben de drie zijden gelijk, zoodat zij $\cong$ zijn.

§ 129. Stelling. *In twee gelijkvormige driehoeken staan de loodlijnen, die men op twee gelijkstandige zijden kan neêrlaten uit de overstaande hoekpunten, tot elkaar als een paar gelijkstandige zijden.*

Fig. 86.



Gestelde. $CD : cd = AC : ac$.

Bewijs. Ui de gelijkvormigheid der driehoeken volgt $\angle A = \angle a$. De rechthoekige driehoeken ACD en *acd* zijn dus gelijkvormig, zoodat

$CD : cd = AC : ac$.

DE LIMIETEN EN DE BEWERKINGEN MET ONMEETBARE GETALLEN.

§ 130. Bepaling. Als een grootheid zoodanig verandert, dat het verschil tusschen haar en een standvastige grootheid zoo klein kan gemaakt worden als men wil, zonder ooit nul te worden, noemt men de standvastige grootheid de **limiet** of de **grens** der veranderlijke.

Zal dus een standvastige grootheid de limiet zijn van een veranderlijke, dan is het noodig en voldoende, dat het verschil tusschen die beide, voortdurend kleiner wordt en kleiner dan eenige te denken grootheid. Het verschil zal echter nooit nul worden.

VOORBEELD. Als van de decimale breuk 0,33 . . . . het aantal cijfers toeneemt, heeft zij tot limiet $^1/_3$. Men heeft nl. achtereenvolgens

$$\frac{1}{3} - 0{,}3 = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{10}{30} - \frac{9}{30} = \frac{1}{30},$$

$$\frac{1}{3} - 0{,}33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{100}{300} - \frac{99}{300} = \frac{1}{300},$$

$$\frac{1}{3} - 0{,}333 = \frac{1}{3} - \frac{333}{1000} = \frac{1000}{3000} - \frac{999}{3000} = \frac{1}{3000},$$

enz. enz.

OPMERKING. Een veranderlijke grootheid zal tot een limiet naderen, als zij voortdurend grooter wordt, maar toch kleiner blijft dan een bepaalde grootheid. Evenzoo zal een veranderlijke grootheid tot een limiet naderen, als zij steeds kleiner wordt, maar toch grooter blijft dan een bepaalde grootheid.

§ 131. In § 113 is de verhouding van twee onderling onmeetbare grootheden een onmeetbaar getal genoemd. Het afpassen, waarvan in dezelfde § gesproken wordt, levert achtereenvolgens geheelen, tienden, honderdsten, enz. Hoever de bewerking ook voortgezet worde, er blijft steeds een rest. Verkrijgt men

3,245671 . . . . ,

dan zal volgens de bepaling, die van de ongelijkheid van meetbare en onmeetbare getallen gegeven is, dat onmeetbaar getal grooter zijn dan 3,24 en kleiner dan 3,25,

grooter dan 3,245 en kleiner dan 3,246,

grooter dan 3,2456 en kleiner dan 3,2457, enz.

Hetzelfde gebeurt in de rekenkunde, als men den vierkantswortel zoekt uit een getal, dat geen volkomen vierkant is. De uitkomst der bewerking heet weder een **onmeetbaar getal**. Moet b.v. de vierkantswortel bepaald worden uit 3, dan vindt men

1,732051 . . . . . .

Dit onmeetbaar getal is weer

grooter dan 1,73 en kleiner dan 1,74,
grooter dan 1,732 en kleiner dan 1,733,
grooter dan 1,7320 en kleiner dan 1,7321,
enz.

Er zijn nog andere bewerkingen, waarvan de uitkomsten onmeetbare getallen genoemd worden. Daarbij verkrijgt men in ieder geval twee rijen van getallen, zoo dat elk getal der eene rij grooter is dan het onmeetbare getal, en elk getal der andere rij kleiner. Van al die onmeetbare getallen geldt de opmerkelijke eigenschap, dat *elk onmeetbaar getal kan beschouwd worden als de uitkomst der vergelijking van twee onderling onmeetbare lijnen* (zie § 113).

Om ons hiervan te overtuigen voor eenig onmeetbaar getal, nemen wij willekeurig een lijn A van bepaalde lengte en een onbepaalde rechte lijn. Op deze neemt men een stuk, dat A zoo dikwijls bevat, als de geheelen van het onmeetbare getal aanwijzen. Bij dat stuk voegt men zooveel tiende deelen van A, als het onmeetbare getal bevat. Evenzoo doet men met de honderdste deelen van het getal, enz. Wij hebben nu op de onbepaalde lijn een stuk van veranderlijke lengte: het eene uiteinde van dat stuk verandert niet van plaats, het andere uiteinde verwijdert zich steeds verder van het eerste. Na elke verplaatsing van het veranderlijke uiteinde kan men een punt aanwijzen, dat het veranderlijke uiteinde nooit bereiken zal. Bevat het onmeetbare getal 4 duizendste deelen, dan zal het bewegende uiteinde nooit het punt bereiken, dat met 5 duizendste deelen zou overeenkomen. Maar het bewegende uiteinde, steeds voortgaande in denzelfden zin, zonder dat het bepaald aangewezen punten bereiken kan, nadert noodzakelijk hoe langer hoe meer tot een bepaalden stand. Dezen stand kan het nooit bereiken, omdat het voortdurend moet bewegen; maar zijn afstand tot dien stand wordt ten laatste kleiner dan eenige grootheid. De afstand van het onbeweeglijke uiteinde tot het punt, waartoe het bewegende uiteinde nadert, is dus een bepaalde lijn, en de afpassing van A op die bepaalde lijn zou achtereenvolgens evenveel geheelen, tiende deelen, honderdste deelen, enz. opleveren, als door het onmeetbare getal wordt aangewezen.

§ 132. *Elk onmeetbaar getal kan beschouwd worden als de limiet van een veranderlijk getal.*

Nemen wij het onmeetbare getal

$$e = 1,732051 \ldots\ldots$$

Het onmeetbare getal 1,73 is kleiner dan e, terwijl 1,74 grooter dan e is. Het verschil tusschen 1,73 en e is dus minder dan *een honderdste*. Vermeerdert men 1,73 met 2 duizendsten, dan verkrijgt men 1,732. Dit is weder kleiner dan e en verschilt van e minder dan *een duizendste*.

Op dezelfde wijze heeft men $1,7320 < e$, terwijl het verschil kleiner is dan *één tienduizendste*. Het getal 1,73205 is kleiner dan e, en het verschil is kleiner dan *één honderdduizendste*. Zoo voortgaande zal het meetbare getal, dat wij laten aangroeien, ten laatste minder van e verschillen dan eenige aan te wijzen grootheid.

§ 133. De gewone bewerkingen der rekenkunde worden eerst slechts op meetbare getallen toegepast, en alleen voor meetbare getallen wordt hare beteekenis uiteengezet. Voor men nu die zelfde bewerkingen kan toepassen op onmeetbare getallen, moet eerst gezegd worden, welken zin men hecht aan die bewerkingen. Als voorbeeld zullen wij zeggen, wat men het product noemt van twee onmeetbare getallen.

Volgens de vorige § kan elk der getallen beschouwd worden als de grens van een meetbaar getal, dat voortdurend aangroeit. Nemen wij nu het product van twee meetbare getallen, die weinig van de onmeetbare verschillen. Laten wij de meetbare getallen aangroeien, dan zal ook hun product toenemen. En als de twee meetbare factoren naderen tot twee onmeetbare getallen, dan zal ook hun product voortdurend naderen tot een zekere grens. Deze grens noemt men het meetbare of onmeetbare produkt van de twee onmeetbare getallen.

Opmerking. Dat het produkt van de twee aangroeiende meetbare getallen werkelijk tot de bepaalde grens nadert, kan men nader aantoonen, door het product voor te stellen door een rechte lijn, die steeds aangroeit, even als wij in § 131 gedaan hebben.

§ 134. Op dezelfde wijze verklaart men de andere bewerkingen met onmeetbare getallen. Moet men dus één of achtereenvolgens meer bewerkingen toepassen op getallen, waaronder onmeetbare voorkomen, dan vervangt men alle onmeetbare getallen door meetbare, die er zoo weinig van verschillen, als men wil, en met de meetbare getallen worden nu de bewerkingen uitgevoerd.

Vervolgens laat men de meetbare getallen, die voor de onmeetbare in de plaats gesteld zijn, veranderen, zoo dat zij tot hun limieten (de onmeetbare getallen) naderen. De uitkomst der bewerkingen op de meetbare getallen nadert dan eveneens tot een zekere limiet. En deze limiet noemt men de meetbare of onmeetbare uitkomst van de bewerkingen met de gegeven getallen.

§ 135. Uit de verklaring, die wij gegeven hebben van de bewerkingen met onmeetbare getallen, volgt, *dat alle eigenschappen, die waar zijn voor meetbare getallen, ook voor onmeetbare getallen gelden.*

VOORBEELDEN. 1. *Men mag de onmeetbare factoren van een produkt verwisselen.*

Deze eigenschap is waar voor de meetbare factoren, waardoor men de onmeetbare vervangt. Men verkrijgt dus twee gelijke produkten, hoe dicht deze ook komen bij de limieten, waartoe zij respectievelijk naderen. Deze limieten moeten derhalve gelijk zijn.

2. *Het quotient van twee meetbare of onmeetbare getallen verandert niet, als beide door hetzelfde onmeetbare getal gedeeld worden.*

De eigenschap is waar voor de meetbare getallen, waardoor men de onmeetbare vervangt. Men verkrijgt dus twee gelijke quotienten, hoe dicht de twee gelijke quotienten ook bij hun grenzen komen. De grenzen zijn dus gelijk.

Uit de laatste eigenschap volgt, dat de meetbare of onmeetbare verhouding van twee grootheden gelijk is aan het quotient der twee getallen, die de verhouding uitdrukken van de beide grootheden tot een willekeurige eenheid.

Hieruit volgt dat de evenredigheid in § 126

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$$

niet alleen waar is, als men ab als maat van AB en bc als maat van BC beschouwt, maar ook, als men de vier lijnen vervangt door getallen, die hare verhouding uitdrukken tot een willekeurige eenheid.

3. *Als in een evenredigheid twee der termen of alle vier onmeetbare getallen zijn, is het produkt der uiterste termen gelijk aan dat der middelste.*

Laat p, q, r en s de vier getallen zijn, zoodat

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}.\ \text{Hieruit volgt}$$

$$s \times q \times \frac{p}{q} = s \times q \times \frac{r}{s}$$

$$s \times q \times \frac{p}{q} = s \times p;$$

$$s \times q \times \frac{r}{s} = q \times s \times \frac{r}{s} = q \times r.$$

Dus $$s \times p = q \times r.$$

Als men in de evenredigheid van § 123 de lijnen AB, ab, BC en bc vervangt door getallen, die hare verhouding uitdrukken tot een willekeurige eenheid, heeft men dus

$$\text{AB} \times bc = \text{BC} \times ab.$$

Opmerking. Onderling onmeetbare meetkundige grootheden zijn uitvoerig behandeld door Euclides in het tiende boek zijner Elementen der meetkunde. De ouden hebben echter het begrip van getal niet uitgebreid tot onderling onmeetbare grootheden. Euclides zegt zelfs uitdrukkelijk: „Onderling onmeetbare grootheden staan niet tot elkaar als getallen." De uitbreiding van het begrip van getal tot de verhouding van onderling onmeetbare grootheden geschiedde in de 16e eeuw. Van toen af werden al spoedig met groote lichtvaardigheid alle eigenschappen der meetbare getallen op onmeetbare toegepast, zonder dat men hiervan rekenschap gaf. Uitvoerig worden de onmeetbare verhoudingen behandeld in de Grondbeginsels der meetkunde door van Swinden.

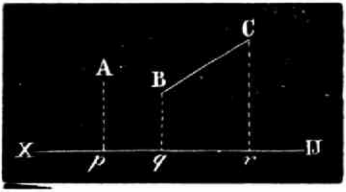
De vorige §§ zijn ontleend aan het uitmuntende werk van Duhamel: Des Méthodes dans les sciences de raisonnement, Paris. Zie verder omtrent de onmeetbare getallen mijn leerboek der rekenkunde, waarin ze uitvoerig behandeld worden.

BETREKKINGEN TUSSCHEN LIJNEN IN EEN DRIEHOEK.

§ 136. Bepalingen. Door de projectie van een punt op een lijn verstaat men het voetpunt der loodlijn, die men uit dat punt kan neerlaten op de lijn. Als het punt in de lijn ligt, valt het samen met zijn projectie.

Door de projectie van een lijn op een andere verstaat men het gedeelte van de laatste, dat begrepen is tusschen de projecties van de uiteinden der eerste.

Fig. 87.



In fig. 87 is p de projectie van A op de lijn XIJ en qr is de projectie van BC op XIJ.

In fig. 89 en in fig. 90 is CD de projectie van CA op CB.

§ 137. In een rechthoekigen driehoek heeft men de

Stellingen. 1. *Elke rechthoekszijde is middelevenredig tusschen haar projectie op de hypotenusa en de hypotenusa.*

2. *De loodlijn, die men uit het hoekpunt van den rechten hoek op de schuine zijde kan neerlaten, is middelevenredig tusschen de twee stukken, waarin zij de schuine zijde verdeelt.*

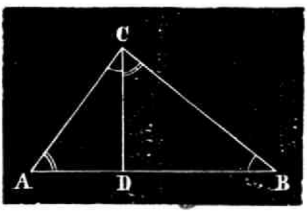
Bewijzen. 1. De rechthoekige driehoeken ACD en ABC hebben den scherpen hoek A gemeen, zoodat zij gelijkvormig zijn. Hieruit volgt

$$AD : AC = AC : AB,$$

of als de lijnen in getallen uitgedrukt zijn

$$AC^2 = AD \times AB.$$

Fig. 88.



2. De hoeken DCB en A zijn gelijk, omdat zij beide tot complement hebben $\angle$ ACD. De rechthoekige driehoeken ADC en CBD zijn dus gelijkvormig en wij hebben

$$AD : DC = DC : DB, \text{ waaruit volgt}$$

$$CD^2 = AD \times DB.$$

Opmerking. Het zal bij het volgende dikwijls gebeuren, dat wij moeten spreken van het produkt der getallen, die de verhouding uitdrukken van twee lijnen tot een zelfde eenheid. In plaats van die uitdrukking te gebruiken, zullen wij kortweg spreken van het produkt der lijnen.

§ 138. STELLING. *De tweedemacht der hypotenusa van een rechthoekigen driehoek is gelijk aan de som der tweedemachten van de rechthoekszijden.*

BEWIJS. Zie fig. 88. Men heeft volgens de vorige stelling

$$AC^2 = AD \times AB,$$
$$CB^2 = DB \times AB.$$

Samen
$$AC^2 + BC^2 = (AD + DB) \times AB.$$
$$AC^2 + BC^2 = AB \times AB = AB^2.$$

OPMERKING. Deze eigenschap stelt ons in staat, een der zijden van een rechthoekigen driehoek te berekenen, als de twee andere zijden gegeven zijn.

OPMERKING. Gewoonlijk noemt men deze stelling het theorema van Pythagoras naar haren ontdekker, een Grieksch wijsgeer, die omstreeks 580 voor onze tijdrekening leefde. Een aantal bewijzen van genoemde stelling zijn door J. J. J. Hofman vereenigd in een afzonderlijk werkje, dat in het Nederlandsch vertaald is met den titel: *De zevenenveertigste propositie van Euclides met 35 bewijzen.*

§ 139. STELLING. *In een scheefhoekigen driehoek is het vierkant van een zijde, die tegenover een scherpen hoek ligt, gelijk aan de som der vierkanten van de twee andere zijden, min tweemaal het produkt van de projectie van een dier zijden op de andere met die andere zijde.*

Fig. 89*a*.

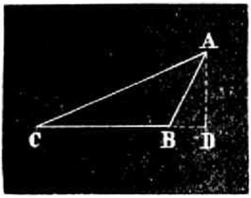
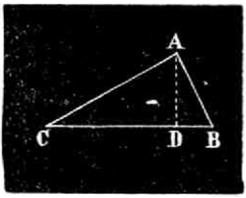


Fig. 89*b*.



GESTELDE. $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times CD.$

BEWIJS. Hierbij kunnen zich twee gevallen voordoen: de lijn

BC is grooter dan de projectie van AC op BC, zoo als in fig. 89*a*, of BC is kleiner dan de projectie van AC op BC, zoo als in fig. 89*b*.

In het eerste geval (fig. 89*a*) is in den rechthoekigen driehoek ABD

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Verder is BD = BC — CD, of in het vierkant gebracht

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \,.\, CD.$$

In den rechthoekigen driehoek ACD heeft men

$$AD^2 = AC^2 - CD^2.$$

Als men deze waarden van BD^2 en AD^2 overbrengt in het tweede lid van vergelijking (1), dan komt er

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \,.\, CD.$$

In het tweede geval (fig. 89*b*) kan men op dezelfde wijze handelen; alleen in plaats van

$$BD = BC - CD \text{ heeft men } BD = CD - BC;$$

maar dit heeft geen invloed op de tweedemacht van BD.

§ 140. Stelling. *In een stomphoekigen driehoek is het vierkant van de zijde tegenover den stompen hoek gelijk aan de som der vierkanten van de twee andere zijden, plus tweemaal het produkt van de projectie van een dier zijden op de andere met die andere.*

Gestelde. $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \,.\, CD.$

Bewijs. Omdat ∠ ACB stomp is valt de loodlijn AD op het verlengde van BC. In den rechthoekigen driehoek ABD is

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Fig. 90.

Verder is BD = BC + CD, of in het vierkant gebracht

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC \,.\, CD.$$

In den rechthoekigen driehoek ACD is

$$AD^2 = AC^2 - CD^2.$$

Als men deze waarden van BD^2 en AD^2 overbrengt in het tweede lid van vergelijking (1), komt er

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \,.\, CD.$$

§ 141. In de drie voorgaande stellingen is gebleken, dat het vierkant van een zijde eens driehoeks gelijk is aan de som der vierkanten van de twee andere zijden, als de hoek tegenover de zijde *recht* is; het vierkant van die eene zijde is **kleiner** dan genoemde som, als de overstaande hoek *scherp* is, en het vierkant van de eene zijde is **grooter** dan die som, als de overstaande hoek *stomp* is. Door den regel van § 43 toe te passen zien wij, *dat in een driehoek een hoek recht, scherp of stomp is, al naar het vierkant van de overstaande zijde gelijk is aan, kleiner dan of grooter dan de som der vierkanten van de twee andere zijden.*

Wil men nu zien of een driehoek rechthoekig, scherphoekig of stomphoekig is, dan merke men op, dat hij zulks zijn zal al naar de grootste zijner hoeken recht, scherp of stomp is en dat de grootste hoek van een driehoek tegenover de grootste zijde staat. Men moet dus het vierkant van de grootste zijde van een driehoek vergelijken met de som der vierkanten van de twee andere zijden om te zien of de de driehoek recht-, scherp- of stomphoekig is.

§ 142. *Berekening der loodlijnen van een driehoek* ABC *uit zijne zijden.*

Zij in fig. 89a AD $= h$ de lengte der lijn, die men berekenen wil, en laat a, b en c de lengten zijn der zijden, die tegenover de hoeken A, B en C staan.

In den rechthoekigen driehoek ADC is

$$h^2 = b^2 - \mathrm{CD}^2.$$

In den driehoek ABC is volgens § 129

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \,.\, \mathrm{CD}.$$

Hieruit leidt men af $2a.\mathrm{CD} = a^2 + b^2 - c^2$

$$\mathrm{CD} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

waardoor de eerste vergelijking wordt

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.$$

Door ontbinding in factoren verkrijgt men hieruit

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)\,(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{[(a + b)^2 - c^2]\;[c^2 - (a - b)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(a + b + c)\,(a + b - c)\,(c + a - b)\,(c - a + b)}{4a^2}.$$

Om den teller verder te herleiden, stellen wij den halven omtrek van den driehoek voor door s; dus

$$a + b + c = 2s, \text{ dan is}$$
$$b + c - a = 2s - 2a = 2(s - a),$$
$$a + c - b = 2s - 2b = 2(s - b),$$
$$a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c).$$

Deze waarden overgebracht in de uitdrukking, die wij voor h^2 hebben gevonden, komt er, als men teller en noemer door 4 deelt,

$$h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$
$$h = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Voor de loodlijn, die men op b kan neerlaten, vindt men evenzoo

$$h_1 = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Voor de loodlijn op c vindt men

$$h_2 = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Opmerking. Dezelfde berekening, die hier gemaakt is voor het geval, dat de loodlijn op het verlengde der basis valt, kan ook gemaakt worden in het geval, dat de loodlijn op de basis valt, zooals in fig. 89*b*. De formulen, die men voor de loodlijnen vindt, zijn dan dezelfde als hierboven.

GELIJKVORMIGHEID DER VEELHOEKEN.

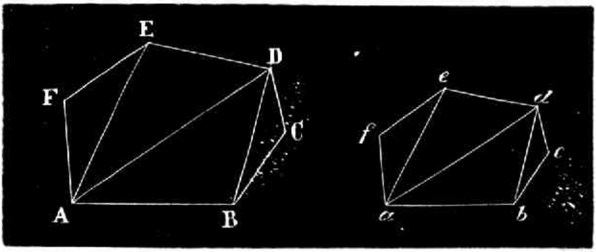
§ 143. Bepaling. Twee veelhoeken noemt men gelijkvormig, als zij door diagonalen in een zelfde aantal gelijkvormige driehoeken kunnen verdeeld worden, die op dezelfde wijze aan elkaar sluiten.

Voorbeeld. De zeshoeken ABCDEF en *abcdef* noemt men gelijkvormig, indien $\triangle BCD \sim \triangle bcd$,
$\triangle ABD \sim \triangle abd$,
$\triangle ADE \sim \triangle ade$ en
$\triangle AEF \sim \triangle aef$.

Bepalingen. De overeenkomstige hoekpunten van twee gelijkvormige driehoeken noemt men ook overeenkomstige hoekpunten der veelhoeken.

De zijden of diagonalen, die twee paar overeenkomstige hoekpunten verbinden, noemt men **gelijkstandige zijden** of **gelijkstandige diagonalen**.

Fig. 91.



Bij overeenkomstige hoekpunten heeft men **gelijkstandige hoeken**.

Twee **lijnen** noemt men **gelijkstandig**, als zij twee paar gelijkstandige zijden in evenredige stukken verdeelen en als tevens de overeenkomstige stukken bij de twee veelhoeken van overeenkomstige hoekpunten af gerekend worden.

§ 144. STELLING. *De gelijkstandige hoeken van twee gelijkvormige veelhoeken zijn gelijk.* (Zie fig. 91 of 92.)

BEWIJS. De hoeken F en f zijn gelijk, omdat, volgens de onderstelling, de driehoeken AFE en afe gelijkvormig zijn.

Om aan te toonen, dat de hoeken CDE en cde gelijk zijn, heeft men

$$\begin{array}{ll} & \angle CDB = \angle cdb, \\ & \angle BDA = \angle bda, \\ & \underline{\angle ADE = \angle ade;} \\ \text{samen} & \angle CDE = \angle cde. \end{array}$$

Op dezelfde wijze blijkt, dat de andere hoeken der veelhoeken twee aan twee gelijk zijn.

§ 145. STELLING. *De gelijkstandige zijden van twee gelijkvormige veelhoeken vormen een aaneengeschakelde evenredigheid.*

BEWIJS. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken, waaruit de twee veelhoeken bestaan, heeft men (zie fig. 92)

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DB}{db}, \quad \frac{DB}{db} = \frac{AB}{ab} = \frac{AD}{ad}, \quad \frac{AD}{ad} = \frac{DE}{de} = \frac{AE}{ae},$$

$$\frac{AE}{ae} = \frac{EF}{ef} = \frac{AF}{af}.$$

Uit deze vergelijkingen volgt

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{AB}{ab} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{AF}{af}.$$

§ 146. STELLING. *Twee driehoeken zijn gelijkvormig, als zij tot zijden hebben gelijkstandige zijden en diagonalen van twee gelijkvormige veelhoeken.*

GESTELDE. $\triangle$ CDE $\sim$ $\triangle$ *cde*, $\triangle$ CEF $\sim$ $\triangle$ *cef*.

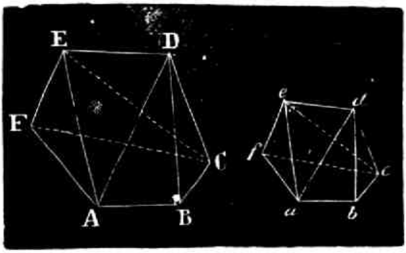


Fig. 92.

BEWIJS. De driehoeken CDE en *cde* zijn gelijkvormig, omdat men volgens de vorige stelling heeft

$$\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} \text{ en}$$

$$\angle CDE = cde.$$

Daar CDE en *cde* gelijkvormig zijn heeft men

$$\frac{CE}{ce} = \frac{DE}{de}.$$

Volgens de vorige § heeft men

$$\frac{EF}{ef} = \frac{DE}{de}.$$

$$\frac{CE}{ce} = \frac{EF}{ef} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Uit de gelijkvormigheid van CDE en *cde* volgt ook

$\angle$ DEC $=$ $\angle$ *dec*. Volgens § 144 heeft men

$$\angle DEF = \angle def.$$

$$\angle CEF = \angle cef.$$

De driehoeken CEF en *cef* hebben dus een hoek gelijk en de zijden om dien hoek evenredig. (Zie vergelijking (1)). Die twee driehoeken zijn dus gelijkvormig.

GEVOLGEN. 1. *Als twee veelhoeken gelijkvormig zijn, dan zijn de driehoeken, waarin men den eenen kan verdeelen door diagonalen, gelijkvormig met de driehoeken, waarin de andere door de gelijkstandige diagonalen verdeeld wordt.*

2. *De gelijkstandige diagonalen van twee gelijkvormige veelhoeken zijn evenredig.*

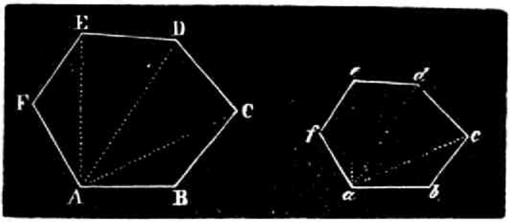
§ 147. STELLING. *Twee veelhoeken zijn gelijkvormig, als de zijden op één na van den eenen evenredig zijn met de zijden op één na van den anderen, als die zijden in dezelfde orde op elkaar volgen in de twee veelhoeken en als de hoeken, die door de evenredige zijden gevormd worden, gelijk zijn.*

ONDERSTELDE. $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{DC}{dc} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef}$,

$\angle B = \angle b$, $\angle BCD = \angle bcd$, $\angle CDE = \angle cde$, $\angle DEF = \angle def$.

GESTELDE. $\triangle ABC \sim \triangle abc$, $\triangle ACD \sim \triangle acd$, $\triangle ADE \sim \triangle ade$, $\triangle AEF \sim \triangle aef$.

Fig. 93.



BEWIJS. Daar $\angle B = \angle b$ en $AB : ab = BC : bc$, zijn de driehoeken ABC en *abc* gelijkvormig.

Uit die gelijkvormigheid volgt

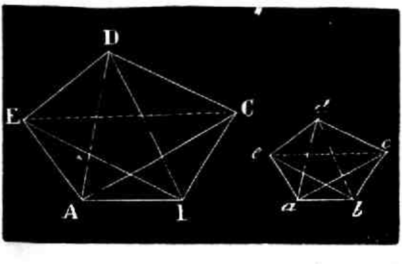
$$\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} \text{ en}$$

$$\angle BCA = \angle bca. \text{ Afgetrokken van}$$

$$\angle BCD = \angle bcd.$$

$$\angle ACD = \angle acd.$$

Fig. 94.



De driehoeken ACD en *acd* hebben dus een hoek gelijk en de zijden om dien hoek evenredig, zoodat zij gelijkvormig zijn.

Op dezelfde wijze kan men voortgaan om de gelijkvormigheid van de andere driehoeken aan te toonen.

§ 148. STELLING. *Twee veelhoeken* ABCDE *en* abcde *zijn gelijkvormig, als de driehoeken* ABC, ABD, ABE *respectievelijk gelijkvormig zijn met* abc, abd, abe.

BEWIJS. Uit de gelijkvormigheid der driehoeken volgt

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = \frac{BD}{bd} = \frac{AD}{ad} = \frac{BE}{be} = \frac{AE}{ae}.$$

Verder ook $\angle ABC = \angle abc$

en $\angle ABD = \angle abd$. Door aftrekking

$\angle CBD = \angle cbd$.

De driehoeken CBD en *cbd* hebben dus een hoek gelijk en de zijden om dien hoek evenredig, zoodat zij gelijkvormig zijn. Hieruit volgt

$$\frac{CD}{cd} = \frac{BC}{bc} = \frac{AB}{ab}.$$

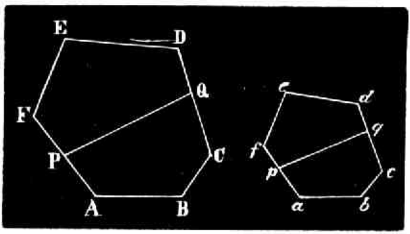
Op dezelfde wijze toont men aan

$$\frac{CE}{ce} = \frac{AB}{ab}.$$

Dus is $\frac{AB}{ab} = \frac{CE}{ce} = \frac{CD}{cd}$, en algemeen: de zijden en diagonalen van den eenen veelhoek zijn evenredig met die van den anderen. Hieruit volgt weder, dat men de twee veelhoeken door diagonalen kan verdeelen in driehoeken, die gelijkvormig zijn en op dezelfde wijze aan elkaar sluiten.

§ 149. STELLING. *Twee gelijkstandige lijnen verdeelen twee gelijkstandige veelhoeken in deelen, die twee aan twee gelijkvormig zijn.*

Fig 95.



BEWIJS. Als PQ gelijkstandig is met *pq*, heeft men $AP : PF = ap : pf$ en $CQ : QD = cq : qd$.

Uit de eerste evenredigheid volgt

$$(AP + PF) : (ap + pf) = AP : ap.$$
$$AF : af = AP : ap, \text{ of ook}$$
$$AB : ab = AP : ap.$$

Uit de tweede evenredigheid volgt

$$(CQ + QD) : (cq + qd) = CQ : cq,$$
$$CD : cd = CQ : cq, \text{ of ook}$$
$$AB : ab = CQ : cq.$$

Wij hebben nu $BC : bc = AB : ab = CQ : cq = AP : ap$ en volgens de onderstelling $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$, zoodat de veelhoeken ABCQP en *abcqp* volgens § 147 gelijkvormig zijn.

Op dezelfde wijze blijkt, dat DEFPQ en *defpq* gelijkvormig zijn.

§ 150. STELLING. *De omtrekken van twee gelijkvormige veelhoeken staan tot elkaar als een paar gelijkstandige zijden.*

BEWIJS. Als ABCDE en *abcde* de veelhoeken zijn, heeft men

$$AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea.$$

Hieruit volgt, volgens een eigenschap der aaneengeschakelde evenredigheden,

$$(AB + BC + CD + DE + EA) : (ab + bc + cd + de + ea) = AB : ab.$$

§ 151. Volgens de bepaling in § 143 bestaat de gelijkvormigheid van twee n-hoeken in de gelijkvormigheid van $(n - 2)$ driehoeken. Voor de gelijkvormigheid van elk paar driehoeken zijn twee vergelijkingen noodig; dus voor de gelijkvormigheid van twee n-hoeken $(n - 2) \times 2 = 2n - 4$ vergelijkingen. Die vergelijkingen zijn evenredigheden of zij drukken de gelijkheid uit van hoeken.

In § 147 is de gelijkheid gegeven van $n - 1$ verhoudingen, en die wordt uitgedrukt door

$n - 2$ onafhankelijke vergelijkingen. Bovendien heeft men daar $n - 2$ vergelijkingen tusschen hoeken.

Samen $2n - 4$.

In § 148 wordt de gelijkvormigheid van $n - 2$ driehoeken ondersteld, en die staat weder gelijk met

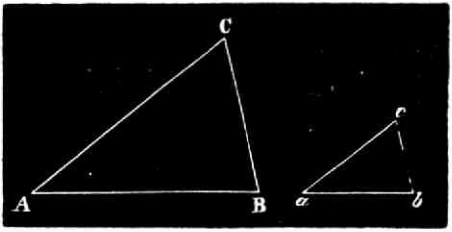
$$(n - 2) \times 2 = 2n - 4 \text{ vergelijkingen.}$$

Op deze wijze blijkt in ieder bijzonder geval, dat het aantal gegevens, waaruit men tot de gelijkvormigheid van twee n-hoeken besluit, telkens $2n - 4$ is.

WERKSTUKKEN.

§ 152. Werkstuk. *Op een gegeven lijn als zijde een driehoek te beschrijven, gelijkvormig met een gegeven driehoek, als bovendien bepaald is, met welke zijde van den gegeven driehoek de gegeven lijn gelijkstandig moet zijn.*

Fig. 96.

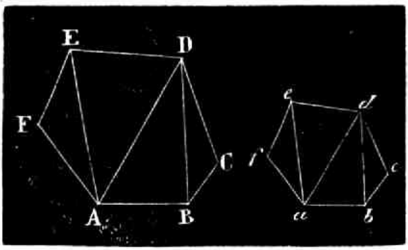


Constructie. Laat ABC de gegeven driehoek en ab de gegeven lijn zijn, die gelijkstandig moet zijn met AB. Trek de lijnen ac en bc zóó, dat $\angle a = \angle A$ en $\angle b = \angle B$, dan zijn ABC en abc gelijkvormig en ab is gelijkstandig met AB.

§ 153. Werkstuk. *Op een gegeven lijn als zijde een veelhoek te beschrijven, gelijkvormig met een gegeven veelhoek, als bovendien bepaald is, met welke zijde van den gegeven veelhoek de gegeven lijn gelijkstandig moet zijn.*

Eerste constructie. Zie fig. 91. Laat ABCDEF de gegeven veelhoek zijn en ab de lijn, die gelijkstandig moet zijn met AB.

Fig. 91.



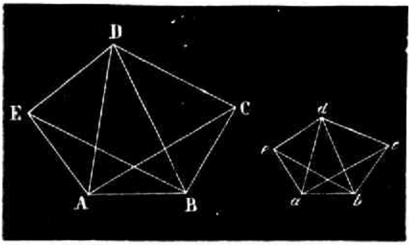
Verdeel den gegeven veelhoek door diagonalen in driehoeken en construeer met behulp van het vorige werkstuk achtereenvolgens

$\triangle abd \sim \triangle ABD$,
$\triangle bcd \sim \triangle BCD$,
$\triangle ade \sim \triangle ADE$ en
$\triangle aef \sim \triangle AEF$.

Volgens de bepaling van de gelijkvormigheid der veelhoeken zijn $abcdef$ en ABCDEF dan gelijkvormig, terwijl ab gelijkstandig is met AB.

Tweede constructie. Zie fig. 94. Trek uit A en B de diagonalen naar de andere hoekpunten C, D en E. Construeer achtereenvolgens

Fig. 94.



$\triangle\, abc \backsim \triangle\, ABC$,
$\triangle\, abd \backsim \triangle\, ABD$ en
$\triangle\, abe \backsim \triangle\, ABE$.

Vereenig daarna *c* met *d* en *d* met *e*, dan zijn, volgens § 148, de veelhoeken *abcde* en ABCDE gelijkvormig, terwijl *ab* gelijkstandig is met AB.

VERGELIJKEN DER OPPERVLAKKEN VAN PARALLELOGRAMMEN EN DRIEHOEKEN.

§ 154. Bepalingen. 1. Het gedeelte van een plat vlak, dat door een gesloten figuur begrensd wordt, noemt men het oppervlak der figuur.

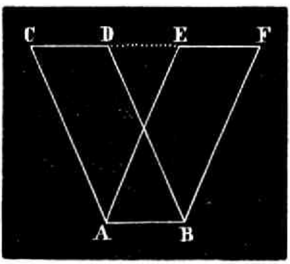
2. Men zegt, dat twee figuren gelijke oppervlakken hebben of gelijk zijn, als men ze zóo kan plaatsen, dat ze elkaar bedekken. Verder zullen wij de eigenschappen toepassen, die in § 2 genoemd zijn.

3. Het oppervlak van een figuur heet kleiner dan het oppervlak van een andere, als de eerste een gedeelte der tweede bedekken kan.

Volgens de tweede bepaling *hebben zulke driehoeken en in 't algemeen zulke veelhoeken, die gelijk en gelijkvormig zijn, gelijke oppervlakken.*

§ 155. Stelling. *Twee parallelogrammen, die gelijke basis en gelijke hoogte hebben, zijn gelijk.*

Fig. 97.



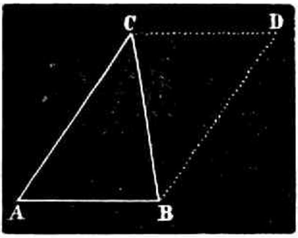
Bewijs. Volgens de onderstelling kan men de parallelogrammen zóo plaatsen, dat zij de basis AB gemeen hebben en dat de zijden CD en EF, die in de twee parallelogrammen tegenover de basis staan, op dezelfde rechte lijn CF liggen. Nu zijn de driehoeken CAE en DBF $\cong$, omdat $\angle$ CAE $=$ $\angle$ DBF, CA $=$ DB en AE $=$ BF.

$$\begin{array}{lrcl} & CABF & = & CABF. \\ \text{Trek af} & CAE & = & DBF, \\ \hline \text{dan blijft} & ABFE & = & ABDC. \end{array}$$

§ 156. STELLING. *Elke driehoek is de helft van een parallelogram, dat met den driehoek gelijke basis en gelijke hoogte heeft.*

BEWIJS. Als ABC de driehoek is, trekke men door twee zijner hoekpunten, bijv. B en C, lijnen, die evenwijdig loopen met de overstaande zijden en die elkaar snijden in een punt D. Nu is ABDC een parallelogram, dat met den driehoek de basis AB gemeen heeft en dat ook gelijke hoogte heeft met den driehoek. Daar verder ABC en DCB gelijk en gelijkvormig zijn, hebben zij gelijke oppervlakken, zoodat het oppervlak van ABC de helft is van het oppervlak van ABDC.

Fig. 98.



GEVOLGEN. 1. *Alle driehoeken, die gelijke basis en gelijke hoogte hebben, zijn gelijk.*

2. *Elke driehoek is de helft van een rechthoek, die met hem gelijke basis en gelijke hoogte heeft.*

§ 157. Twee rechthoeken hebben volgens het voorgaande gelijke oppervlakken, als zij gelijke basis en gelijke hoogten hebben. Als de basis gelijk en de hoogten ongelijk zijn, hebben de twee rechthoeken ongelijke oppervlakken, en die rechthoek, waarvan de hoogte het grootst is, heeft ook het grootste oppervlak.

STELLING. *Twee rechthoeken met gelijke basis staan tot elkaar als hunne hoogten.*

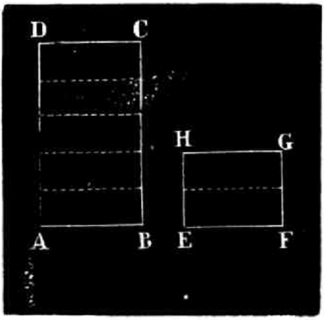
BEWIJS. Laat AB en EF de gelijke bases zijn. Ten aanzien der hoogten AD en EH moeten wij twee gevallen onderscheiden, nl. of zij *onderling meetbaar* zijn dan wel *onderling onmeetbaar.*

In het eerste geval passen wij een gemeene maat van AD en EH op die twee lijnen af. Dit gaat bijv. op AD vijf maal en op EH twee maal, zoodat wij hebben

$$\frac{AD}{EH} = \frac{5}{2}.$$

Uit de deelpunten van AD trekken wij lijnen evenwijdig aan AB en uit de deelpunten van EH lijnen evenwijdig aan EF. Daardoor wordt de rechthoek ABCD verdeeld in vijf deelen en de rechthoek EFGH in twee deelen. Al die deelen zijn rechthoeken met gelijke bases en gelijke hoogten: dus gelijke deelen. Men heeft alzoo

Fig. 99.



$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{5}{2}.$$

En als men deze vergelijking beschouwt in verband met de voorgaande

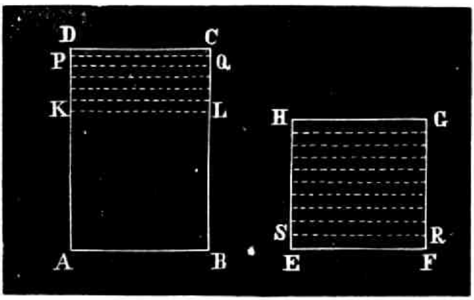
$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AD}{EH}.$$

In het tweede geval passen wij EH zoo dikwijls op AD af als mogelijk is, hier eenmaal, terwijl er een stuk KD overblijft, dat kleiner is dan EH. Trekken wij KL evenwijdig met AB, dan is

ABLK = EFGH en
KLCD < EFGH.

De rechthoek EFGH kan dus eenmaal op ABCD afgepast worden, waarna een deel KLCD overblijft, dat kleiner is dan EFGH.

Fig. 100.



EH kan dus zoo vaak op AD afgepast worden als EFGH op ABCD. Neem nu een tiende van EH en zet dit op DK uit, zoo dikwijls als mogelijk is, hier vijf maal, terwijl een stuk PD overblijft, dat kleiner is dan een tiende van EH. Trek vervolgens uit de deelpunten van KD lijnen evenwijdig met AB, dan wordt KLCD in zes deelen verdeeld. Vijf daarvan zijn even groot en gelijk aan een tiende van EFGH. Het andere deel PQCD is kleiner dan EFRS of een tiende van EFGH, omdat PD < ES, terwijl PQ = EF. Het tiende van EFGH kan dus op KLCD evenveel malen uitgezet worden, als het tiende van EH op KD kan afgepast worden.

Evenzoo kan men verder gaan met honderdsten van EH en van EFGH, met duizendsten, enz. En daar men achtereenvolgens van EH en van EFGH hetzelfde aantal geheelen, tienden, honderdsten, enz. verkrijgt, zijn de onmeetbare verhoudingen

$$\frac{AD}{EH} \text{ en } \frac{ABCD}{EFGH}$$

gelijk, volgens de bepaling, die in § 113 gegeven is van de gelijkheid van twee onmeetbare verhoudingen. Dus

$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AD}{EH} \text{ of}$$

$$ABCD = \frac{AD}{EH} \times EFGH.$$

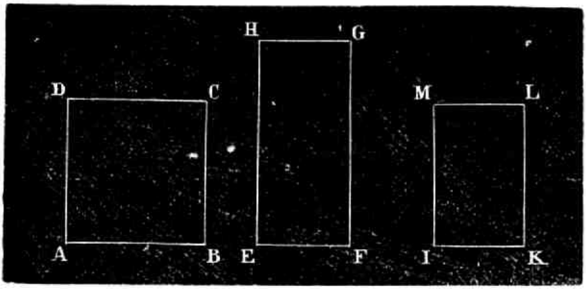
Gevolgen. 1. *Twee rechthoeken, die gelijke hoogten hebben, zijn evenredig met de bases.*

2. *Twee parallelogrammen of twee driehoeken, die gelijke bases hebben, zijn evenredig met hunne hoogten.*

3. *Twee parallelogrammen of twee driehoeken, die gelijke hoogten hebben, zijn evenredig met hunne bases.*

§ 158. Stelling. *Twee rechthoeken zijn samengesteld evenredig met hunne bases en hoogten.*

Fig. 101.



Gestelde. $\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AB}{EF} \times \frac{AD}{EH}$.

BEWIJS. Neem een rechthoek IKLM, die met EFGH gelijke basis en met ABCD gelijke hoogte heeft. Volgens de vorige § is dan

$$ABCD = \frac{AB}{IK} \times IKLM$$

of $$ABCD = \frac{AB}{EF} \times IKLM \text{ en } IKLM = \frac{AD}{EH} \times EFGH.$$

Hieruit volgt

$$ABCD = \frac{AB}{EF} \times IKLM = \frac{AB}{EF} \times \frac{AD}{EH} \times EFGH \text{ of}$$

$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AB}{EF} \times \frac{AD}{EH}.$$

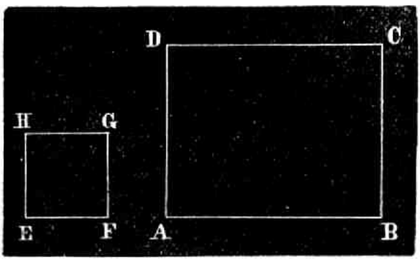
GEVOLG. *Twee driehoeken of twee parallelogrammen zijn samengesteld evenredig met hunne bases en hoogten.*

HET BEREKENEN DER OPPERVLAKKEN.

§ 159. Om de oppervlakken van vlakke figuren in getallen te kunnen uitdrukken, vergelijkt men die oppervlakken of de oppervlakken van figuren, gelijk aan de eerste, met het oppervlak van een vlak figuur, dat men als eenheid beschouwt. Tot eenheid van die oppervlakken neemt men aan *een vierkant, welks zijde een lengteëenheid is.*

Men zegt tot verkorting oppervlak van een rechthoek of rechthoek, in plaats van verhouding van den rechthoek tot de vlakteëenheid. Deze verkorte wijze van uitdrukken gebruikt men bij alle figuren. Evenzoo zegt men hoogte, in plaats van verhouding der hoogte tot de eenheid, die men als lengtemaat heeft aangenomen; enz.

Fig. 102.



§ 160. Als EFGH de vlakteëenheid voorstelt, zoodat EF = EH gelijk aan de eenheid der lengte is, terwijl ABCD een willekeurigen rechthoek voorstelt, dan is volgens § 158 $\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AD}{EH} \times \frac{AB}{EF}$, of in woorden: *de verhouding van een rechthoek tot de eenheid der vlaktemaat wordt verkregen, door de verhouding van de basis tot de lengteëenheid te vermenigvuldigen met de verhouding van de hoogte tot de lengteëenheid.* Gebruikt men nu de verkorte uitdrukkingen van de vorige §, dan heeft men, in plaats van het voorgaande, de

STELLING: *Het oppervlak van een rechthoek is gelijk aan het produkt van zijn basis en zijn hoogte.*

STELLING. *Het oppervlak van een vierkant is gelijk aan de tweedemacht van een zijner zijden.*

Daar verder elk parallelogram gelijk is aan een rechthoek, die gelijke basis en gelijke hoogte heeft met het parallelogram, zoo heeft men de

STELLING. *Het oppervlak van een parallelogram is gelijk aan het produkt van zijn basis en zijn hoogte.*

Daar elke driehoek de helft is van een parallelogram, dat met hem gelijke basis en gelijke hoogte heeft, zoo volgt uit het voorgaande de

STELLING: *Het oppervlak van een driehoek is gelijk aan het halve produkt van zijn basis en zijn hoogte.*

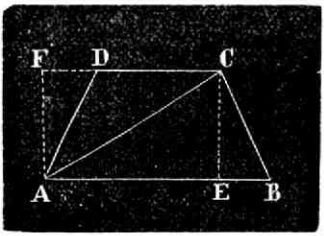
§ 161. *Berekening van het oppervlak eens driehoeks, als zijne zijden gegevrn zijn*, a, b *en* c.

In § 142 is voor de loodlijn op de zijde a gevonden

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dit is de hoogte, als a de basis is, zoodat wij voor het oppervlak vinden: $O = a \times \frac{1}{2} h = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Fig. 103.



§ 162. STELLING. *Het oppervlak van een trapezium is gelijk aan de halve som der evenwijdige zijden, vermenigvuldigd met de hoogte.*

BEWIJS. Noemen wij de hoogte van het trapezium h, dan is

$$AF = CE = h.$$

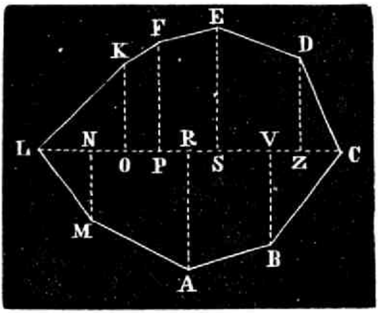
$$\text{ABC} = \text{CE} \times \tfrac{1}{2}\,\text{AB} = h \times \tfrac{1}{2}\,\text{AB},$$
$$\text{ACD} = \text{AF} \times \tfrac{1}{2}\,\text{CD} = h \times \tfrac{1}{2}\,\text{CD}.$$

Samen $\text{ABCD} = h \times \tfrac{1}{2}\,(\text{AB} + \text{CD}).$

§ 163. Om het oppervlak van een willekeurigen veelhoek te berekenen, kan men hem, evenals wij bij het trapezium gedaan hebben, door diagonalen in driehoeken verdeelen en de oppervlakken van die driehoeken berekenen. De som der oppervlakken van de driehoeken levert het oppervlak van den veelhoek op.

Men kan ook den veelhoek in andere deelen verdeelen, die men afzonderlijk kan berekenen. Zoo is een verdeeling, die dikwijls toegepast wordt, de volgende:

Fig. 104.



Vereenig twee hoekpunten L en C door de diagonaal LC, en laat uit de andere hoekpunten loodlijnen neer op LC.

Daardoor wordt de veelhoek verdeeld in rechthoekige driehoeken en rechthoekige trapeziums. De oppervlakken van deze deelen kan men berekenen, als de lengten der loodlijnen en der deelen, waarin CL door hare voetpunten verdeeld wordt, bekend zijn.

VERGELIJKEN VAN OPPERVLAKKEN.

+ of als een hoek ~~waarvan~~ van den eenen het supplement is van een hoek van den anderen

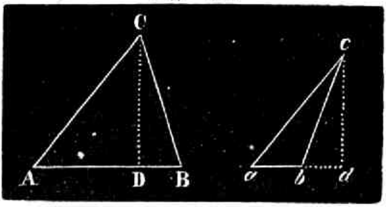
§ 164. STELLING. *De oppervlakken van twee driehoeken, die een hoek gelijk hebben, staan tot elkaar als de produkten der zijden om dien hoek.*

ONDERSTELDE. $\angle \text{A} = \angle a.$

GESTELDE. $\text{ABC} : abc = \text{AB} \times \text{AC} : ab \times ac.$

BEWIJS. Nemen wij AB en ab als bases aan, dan zijn CD en cd de hoogten. Volgens het gevolg der stelling van § 158 heeft men

Fig. 105.



$$\frac{ABC}{abc} = \frac{AB}{ab} \times \frac{DC}{dc}.$$

Daar $\angle A = \angle a$, zijn de rechthoekige driehoeken ACD en *acd* gelijkvormig, zoodat

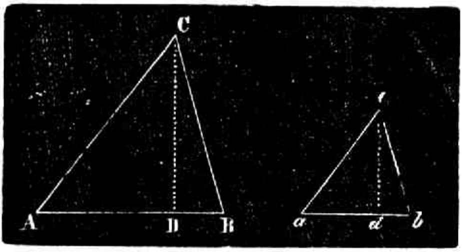
$$\frac{DC}{dc} = \frac{AC}{ac}.$$

Men heeft nu $\dfrac{ABC}{abc} = \dfrac{AB}{ab} \times \dfrac{AC}{ac} = \dfrac{AB \times AC}{ab \times ac}$, of

$$ABC : abc = AB \times AC : ab \times ac.$$

§ 165. Stelling. *De oppervlakken van twee gelijkvormige driehoeken staan tot elkaar als de tweedemachten van een paar gelijkstandige zijden.*

Fig. 106.



Bewijs. Neem een paar gelijkstandige zijden AB en *ab* als bases aan.

Vooreerst is

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{AB}{ab} \times \frac{CD}{cd}.$$

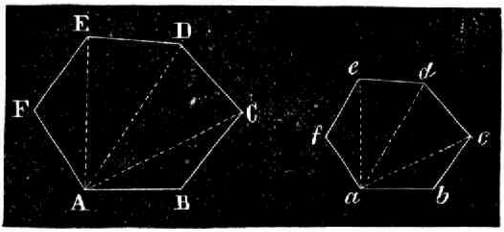
En daar ACD en *acd* $\sim$ zijn,

$\dfrac{CD}{cd} = \dfrac{AC}{ac} = \dfrac{AB}{ab}$. Door substitutie in de vorige vergelijking $\dfrac{ABC}{abc} = \dfrac{AB}{ab} \times \dfrac{AB}{ab} = \dfrac{AB^2}{ab^2}$.

§ 166. Stelling. *Twee gelijkvormige veelhoeken staan tot elkaar als de vierkanten van twee gelijkstandige zijden.*

Bewijs. Verdeel de twee veelhoeken door gelijkstandige diagonalen

Fig. 107.



in gelijkvormige driehoeken, dan heeft men volgens de vorige stelling

$$\mathrm{ABC} : abc = \mathrm{AB}^2 : ab^2,$$
$$\mathrm{ACD} : acd = \mathrm{CD}^2 : cd^2,$$
$$\mathrm{ADE} : ade = \mathrm{DE}^2 : de^2,$$
$$\mathrm{AEF} : aef = \mathrm{EF}^2 : ef^2.$$

Uit de gelijkvormigheid der veelhoeken volgt

$$\mathrm{AB} : ab = \mathrm{CD} : cd = \mathrm{DE} : de = \mathrm{EF} : ef;$$

dus ook $\mathrm{AB}^2 : ab^2 = \mathrm{CD}^2 : cd^2 = \mathrm{DE}^2 : de^2 = \mathrm{EF}^2 : ef^2.$

De vier evenredigheden, die wij hierboven opgeschreven hebben, hebben dus de tweede redens gelijk, waaruit volgt

$$\mathrm{ABC} : abc = \mathrm{ACD} : acd = \mathrm{ADE} : ade = \mathrm{AEF} : aef = \mathrm{AB}^2 : ab^2.$$
$$(\mathrm{ABC} + \mathrm{ACD} + \mathrm{ADE} + \mathrm{AEF}) : (abc + acd + ade + aef) = \mathrm{AB}^2 : ab^2.$$
$$\mathrm{ABCDEF} : abcdef = \mathrm{AB}^2 : ab^2.$$

§ 167. In § 138 is bewezen, dat de som der tweedemachten van de rechthoekszijden van een rechthoekigen driehoek gelijk is aan de tweedemacht der hypotenusa. Daar nu die tweedemachten de oppervlakken voorstellen van vierkanten, die ieder een der zijden van den driehoek tot zijden hebben, zoo kan men het theorema van Pythagoras ook aldus uitdrukken:

Het vierkant, beschreven op de hypotenusa van een rechthoekigen driehoek, is gelijk aan de som der vierkanten, beschreven op de rechthoekszijden.

§ 168. Stelling. *Als men drie gelijkvormige veelhoeken beschrijft, die de zijden van een rechthoekigen driehoek tot gelijkstandige zijden hebben, dan is de veelhoek, op de schuine zijde beschreven, gelijk aan de som der twee andere veelhoeken.*

Bewijs. Laat a en b de lengten der rechthoekszijden voorstellen en c die van de schuine zijde, terwijl P, Q en R de oppervlakken zijn van de gelijkvormige veelhoeken, die a, b en c tot gelijkstandige zijden hebben. Volgens § 166 is nu

$$\mathrm{P} : \mathrm{Q} : \mathrm{R} = a^2 : b^2 : c^2.$$

Volgens een eigenschap der evenredigheden

$$(\mathrm{P} + \mathrm{Q}) : \mathrm{R} = (a^2 + b^2) : c^2.$$

In § 138 is bewezen $a^2 + b^2 = c^2$, zoodat de derde en vierde term van de voorgaande evenredigheid gelijk zijn. Hieruit volgt, dat ook de eerste en tweede term gelijk zijn, dus

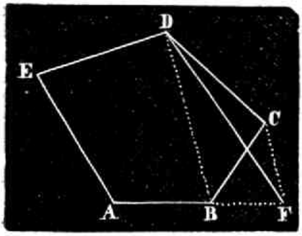
$$\mathrm{P} + \mathrm{Q} = \mathrm{R}.$$

WERKSTUKKEN.

§ 169. Werkstuk. *Als een veelhoek gegeven is, een anderen te beschrijven, die een zijde minder heeft en die gelijk is aan een gegeven veelhoek.*

Constructie. Zij ABCDE de gegeven veelhoek. Trek een diagonaal BD, die van den veelhoek een driehoek BCD afsnijdt. Trek door het toppunt C van dien driehoek een lijn CF evenwijdig aan DB, dan zullen alle driehoeken, die DB tot basis hebben en die hun toppunt in CF hebben, gelijk zijn. De veelhoek verandert dus niet van oppervlak, als men er den driehoek BCD afneemt en een anderen driehoek bijvoegt, die BD tot basis en een punt van CF tot toppunt heeft. En om na dat bijvoegen een veelhoek te verkrijgen, die één zijde minder heeft dan de gegevene, moet men slechts tot toppunt van den bij te voegen driehoek kiezen: het snijpunt F van het verlengde van AB met de lijn CF.

Fig. 108.



Gevolg. *Door deze constructie meermalen toe te passen, kan men elken veelhoek veranderen in een driehoek.*

§ 170. Werkstuk. *Een vierkant te beschrijven, gelijk aan de som van twee gegeven vierkanten.*

Constructie. Beschrijf een rechthoekigen driehoek, die eene zijde van elk der gegeven vierkanten tot rechthoekszijden heeft. Volgens § 167 zal dan een vierkant, dat de hypotenusa tot zijde heeft, gelijk zijn aan de som der twee gegeven vierkanten.

Opmerkingen. 1. Om een vierkant te beschrijven, gelijk aan het verschil van twee gegeven vierkanten, behoeft men slechts de zijde van het grootste vierkant tot hypotenusa aan te nemen en de zijde van het andere vierkant tot eene rechthoekszijde. De andere rechthoekszijde is dan de zijde van 't gevraagde vierkant.

2. Dezelfde constructie kan men volgens de eigenschap van § 168 toepassen om een veelhoek te construeeren, die gelijkvormig is

met twee onderling gelijkvormige veelhoeken en gelijk aan hun som of hun verschil.

§ 171. WERKSTUK. *Indien een lijn als eenheid gegeven is, lijnen te construeeren gelijk aan* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, enz.

CONSTRUCTIE. Beschrijf een rechthoekigen $\triangle$, wiens rechthoekszijden ieder gelijk zijn aan de eenheid, dan is de tweedemacht der hypotenusa

$$1^2 + 1^2 = 2,$$

en de hypotenusa zelf $\sqrt{2}$.

Beschrijf vervolgens een rechthoekigen $\triangle$, die $\sqrt{2}$ en 1 tot rechthoekszijden heeft, dan is het vierkant der hypotenusa van dien $\triangle$

$$(\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3,$$

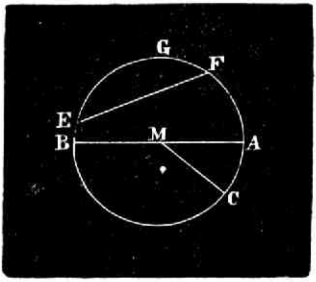
en de hypotenusa dus $\sqrt{3}$.

Door als rechthoekszijden te nemen 2 en 1 vindt men tot schuine zijde $\sqrt{5}$. Met behulp van $\sqrt{5}$ en 1 vindt men $\sqrt{6}$, en zoo kan men voortgaan.

DE EENVOUDIGSTE EIGENSCHAPPEN VAN DEN CIRKEL.

§ 172. Wij hebben in § 15 gezegd wat een cirkel is en daar ook de eigenschap vermeld, dat alle stralen van een cirkel even lang zijn.

Fig. 109.



BEPALINGEN. Een gedeelte van een cirkel noemt men een cirkelboog, bijv. EGF (fig. 109).

Elke lijn, die twee punten van een cirkel verbindt, noemt men een koorde, bijv. EF.

Een koorde, die door het middelpunt van den cirkel gaat, heet een middellijn, bijv. AB.

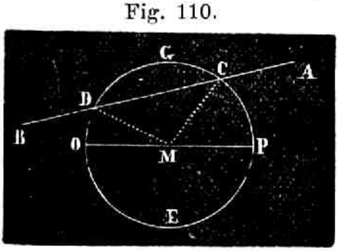
STELLING. *Alle middellijnen van een cirkel zijn even lang.*

BEWIJS. Uit de vorige bepaling blijkt, dat elke middellijn de som is van twee stralen, en daar alle stralen even lang zijn, zoo zijn ook alle middellijnen even lang.

§ 173. STELLING. *Elke middellijn verdeelt den cirkel in twee deelen, die elkaar bedekken kunnen.*

BEWIJS. Als men de figuur omvouwt volgens een middellijn, zal een straal, die aan den eenen kant dier middellijn ligt, vallen langs een straal, die aan den anderen kant der middellijn ligt en een gelijken hoek met haar maakt. Omdat de twee stralen even lang zijn, vallen hun uiteinden samen; dus een punt van het eene gedeelte der kromme lijn valt samen met een punt van het andere gedeelte. Dit zelfde geldt voor alle punten, zoodat na het omvouwen der figuur de twee deelen van den cirkel elkaar bedekken.

Fig. 110.



§ 174. STELLING. *De middellijn is grooter dan eenige andere koorde, die niet door 't middelpunt gaat.*

Bewijs. Zij CD een koorde, die niet door 't middelpunt M gaat, dan vormt die koorde met de stralen MC en MD een driehoek. Hierin is

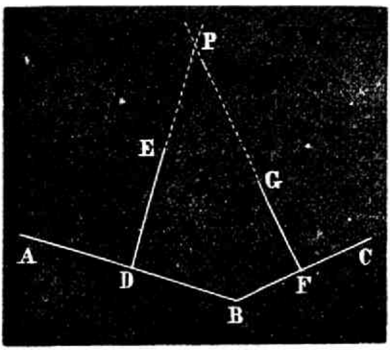
$$MC + MD > CD,$$

en daar elke middellijn gelijk is aan tweemaal een straal, zoo is ook de middellijn OP > CD.

§ 175. Stelling. *Door drie punten, die niet in een rechte lijn liggen, kan altijd een cirkel gaan.*

Bewijs. Om de waarheid van deze stelling aan te toonen, moeten wij laten zien, dat er altijd een punt P kan gevonden worden, even ver van de drie punten gelegen. Neemt men toch zulk een punt tot middelpunt aan van een cirkel, die tot straal heeft den afstand van P tot een der drie gegeven punten, dan gaat die cirkel door de drie punten.

Fig. 111.



Laat nu A, B en C de drie gegeven punten zijn. Daar het middelpunt van den cirkel even ver van A als van B moet verwijderd zijn, ligt het volgens § 60 in de lijn DE, die AB rechthoekig middendoor deelt. Daar het middelpunt even ver van B als van C moet liggen, moet het een punt zijn van de lijn FG, die BC rechthoekig middendoor deelt. Zal er dus een punt zijn, dat aan het vereischte voldoet, dan moet zulks het snijpunt zijn van DE en van FG. Daar men heeft

$$\begin{array}{l} EDF < EDB \text{ en} \\ GFD < GFB \\ \hline EDF + GFD < 180^\circ, \end{array}$$

zoo zullen DE en EG (volgens § 33 Gevolg) elkaar ontmoeten. Dat ontmoetingspunt ligt even ver van A als van B en even ver van B als van C, dus op gelijke afstanden van A, B en C.

Opmerkingen. 1. Als de drie punten A, B en C in eene rechte lijn liggen, kunnen de lijnen, die AB en BC rechthoekig middendoor deelen, elkaar nooit ontmoeten; er is dus geen cirkel mogelijk, die door drie punten gaat, welke in één rechte lijn liggen;

of met andere woorden: *Een cirkel kan geen drie punten met een rechte lijn gemeen hebben.*

2. Daar slechts één cirkel mogelijk is, die door drie gegeven punten gaat, zoo kan men zeggen: *Een cirkel is door drie van zijn punten bepaald.*

3. Door twee punten A en B kan men zooveel cirkels laten gaan als men wil. Daartoe moet men slechts tot middelpunt nemen een willekeurig punt van de lijn, die AB rechthoekig middendoor deelt, en tot straal den afstand van E tot A.

GEVOLG. *Als twee cirkels drie punten gemeen hebben, bedekken zij elkaar volkomen.*

§ 176. STELLING. *Als twee cirkels met gelijke stralen beschreven zijn, kunnen zij zóo geplaatst worden, dat zij elkaar bedekken.*

BEWIJS. Plaats den eenen cirkel zóo, dat zijn middelpunt samenvalt met het middelpunt van den anderen cirkel. Uit de eigenschap, dat alle stralen van den eenen cirkel gelijk zijn aan die van den anderen, volgt nu onmiddelijk, dat elk punt van den eenen cirkel samenvalt met een punt van den anderen.

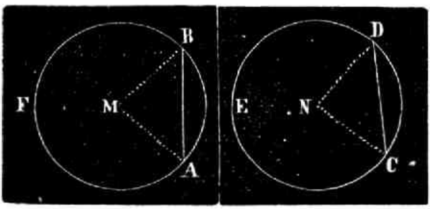
BEPALING. Cirkels, die met gelijke stralen beschreven zijn, noemt men gelijke cirkels.

OPMERKING. Even als men cirkels op elkaar kan plaatsen, die met gelijke stralen beschreven zijn, zoo kan men ook deelen van denzelfden cirkel op elkaar plaatsen.

§ 177. STELLING. *Als twee gelijke cirkels zóo geplaatst worden, dat zij twee punten gemeen hebben en dat de middelpunten vallen aan denzelfden kant der lijn, die de gemeenschappelijke punten verbindt, dan zullen de kromme lijnen geheel langs elkaar vallen.*

BEWIJS. Plaats den cirkel CDE zóo, dat C in A en D in B valt en dat het middelpunt N aan denzelfden kant van AB valt, als waar het middelpunt M ligt. Daar men nu heeft AB = CD, BM = DN en AM = CN, zoo zijn de driehoeken ABM en CDN gelijk en

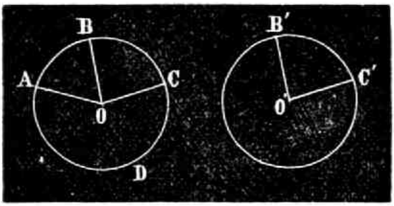
Fig. 112.



gelijkvormig. Het punt N valt dus in M, zoodat de cirkels volgens de vorige stelling geheel samenvallen.

§ 178. Bepalingen. In denzelfden cirkel of in cirkels, die met gelijke stralen beschreven zijn, noemt men **twee bogen gelijk**, als ze zóo geplaatst kunnen worden, dat zij elkaar volkomen bedekken. BC = B′C′.

Fig. 113.



Men zegt, dat een boog **kleiner** is dan een andere, als de eerste een gedeelte van den tweeden kan bedekken.

Om twee bogen, AB en B′C′, van gelijke cirkels samen te **tellen**, plaatst men den eenen, B′C′, naast den anderen, in BC, zoodat zij een uiteinde B gemeen hebben. Men noemt dan AC de som van AB en B′C′.

$$AC = AB + BC,$$
$$AC = AB + B'C'.$$

Een hoek, wiens hoekpunt in het middelpunt van een cirkel ligt, heet een **middelpuntshoek**.

Men zegt, dat een middelpuntshoek **staat op den boog**, die tusschen zijn beenen begrepen is.

Bij elken *cirkelboog* heeft men een *middelpuntshoek* en een *koorde*.

Bij elken *middelpuntshoek* heeft men een *cirkelboog*, die binnen den hoek ligt, en een *koorde*, welke dien boog onderspant.

Bij elke *koorde* heeft men een uitspringenden en een inspringenden *middelpuntshoek*, wiens beenen door de uiteinden van die koorde gaan, en twee *cirkelbogen*, welke beide door die koorde worden onderspannen.

Tusschen een cirkelboog, de overeenkomstige koorde en den overeenkomstigen middelpuntshoek bestaan betrekkingen, die wij in de zes volgende paragrafen zullen behandelen.

§ 179. Stelling. *Als bij denzelfden cirkel of bij gelijke cirkels twee hoeken aan 't middelpunt gelijk zijn, dan volgt daaruit, dat de koorden gelijk zijn*, en omgekeerd.

Bewijs. Zij volgens de onderstelling $\angle AMB = \angle CND$.

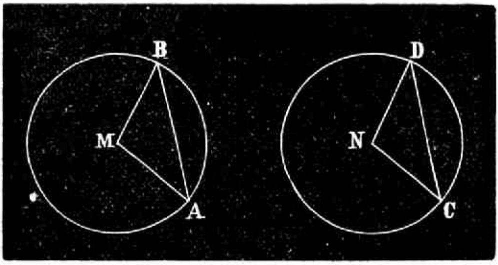
Verder is $AM = CN$,

$BM = DN$.

De driehoeken ABM en CDN zijn $\cong$, zoodat

$$AB = CD.$$

Fig. 114.



Bewijs van het omgekeerde. Indien bekend is $AB = CD$, dan weet men, dat de drie zijden van $\triangle ABM$ gelijk zijn aan die van $\triangle CDN$. Deze zijn dus $\cong$, zoodat

$$\angle AMB = \angle CND.$$

§ 180. Stelling. *Als bij gelijke cirkels of bij denzelfden cirkel twee hoeken aan 't middelpunt gelijk zijn, dan volgt daaruit, dat de bogen gelijk zijn*, en omgekeerd.

Bewijs. Plaatst men den eenen hoek zóo, dat hij den anderen bedekt, dan volgt uit de gelijkheid der stralen, dat ook de bogen samenvallen.

Bewijs van het omgekeerde. Als de bogen gelijk zijn, kan men ze zóo plaatsen, dat zij samenvallen. Volgens § 177 vallen dan de middelpunten samen en bijgevolg ook de middelpuntshoeken.

Gevolg. *De lijn, die een middelpuntshoek middendoor deelt, zal ook den boog middendoor deelen, waarop die hoek staat.*

§ 181. Stelling. *Als bij denzelfden cirkel of bij gelijke cirkels twee koorden gelijk zijn, dan volgt daaruit, dat de bogen, waarin elke koorde een cirkel verdeelt, gelijk zijn*, en omgekeerd.

Bewijs. Als twee koorden gelijk zijn, zijn volgens § 170 de middelpuntshoeken gelijk, en hieruit volgt, volgens de vorige §, dat de bogen gelijk zijn.

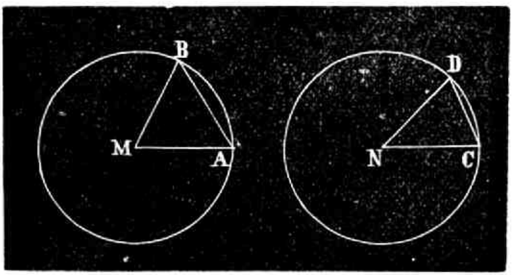
Bewijs van het omgekeerde. Als twee bogen gelijk zijn, dan kan men ze zóo plaatsen, dat zij samenvallen; maar dan vallen ook de koorden samen.

Opmerking. Daar elke koorde de twee bogen onderspant, waarin zij den cirkel verdeelt, zoo mag men uit de gelijkheid van twee koorden alleen besluiten tot de gelijkheid van twee bogen, wanneer deze beide grooter of beide kleiner zijn dan de helft van den cirkel, of wanneer zij juist de helft zijn van den cirkel.

§ 182. Stelling. *Als bij denzelfden cirkel of bij gelijke cirkels twee uitspringende middelpuntshoeken ongelijk zijn, behoort bij den grootsten hoek de grootste koorde*, en omgekeerd.

Bewijs. Als $\angle AMB > \angle CND$, dan hebben de driehoeken AMB

Fig. 115.



en CND twee zijden gelijk ($AM = CN$, $BM = DN$), terwijl de ingesloten hoek bij den eersten grooter is dan bij den tweeden. Hieruit volgt, volgens § 66, $AB > CD$.

Bewijs van het omgekeerde. Als $AB > CD$, zijn twee zijden van $\triangle AMB$ gelijk aan twee zijden van $\triangle CND$, terwijl de derde zij van den eersten driehoek grooter is dan de derde zij van den tweeden driehoek. Hieruit volgt, volgens § 67,

$$\angle AMB > \angle CND.$$

§ 183. Stelling. *Als bij denzelfden cirkel of bij gelijke cirkels twee uitspringende middelpuntshoeken ongelijk zijn, behoort bij den grootsten hoek de grootste boog*, en omgekeerd.

Bewijs. Men kan den kleinsten hoek zóo plaatsen, dat hij een gedeelte van den anderen bedekt, en dan zal tevens de boog, die bij den kleinsten hoek behoort, een gedeelte van den anderen boog bedekken.

Bewijs van het omgekeerde. Plaats den kleinsten boog zóo, dat hij een gedeelte van den anderen bedekt, dan zal te gelijk de hoek, die bij den kleinsten boog behoort, een gedeelte van den anderen hoek bedekken.

§ 184. **Stelling.** *Als bij denzelfden cirkel of bij gelijke cirkels twee bogen, beide kleiner dan een halve cirkel, ongelijk zijn, dan behoort bij den grootsten boog de grootste koorde*, en omgekeerd.

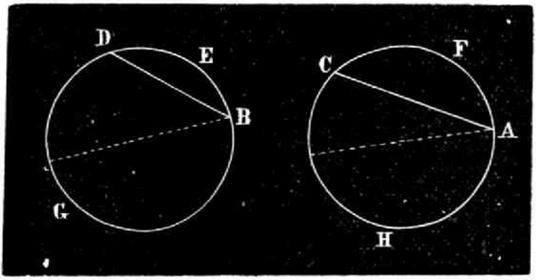
Bewijs. Bij den grootsten der twee bogen behoort volgens de vorige § de grootste der twee middelpuntshoeken en bij den grootsten der twee hoeken behoort volgens § 182 de grootste der twee koorden. Dus behoort ook bij den grootsten der twee bogen de grootste der twee koorden.

Bewijs van het omgekeerde. Bij de grootste der twee koorden behoort volgens § 182 de grootste der twee middelpuntshoeken en bij den grootsten der twee middelpuntshoeken behoort volgens de vorige § de grootste der twee bogen. Dus moet ook bij de grootste der twee koorden de grootste der twee bogen behooren.

Opmerking. Uit AC > BD volgt, volgens het voorgaande,

boog AFC > *boog* BED.

Fig. 116.



Als men *boog* AFC van den geheelen cirkel afneemt blijft er minder over, dan wanneer men *boog* BED van den geheelen cirkel afneemt. Uit AC > BD volgt dus

boog AHC < *boog* BGD.

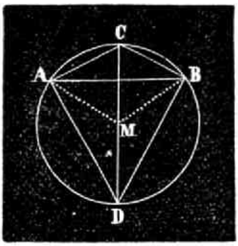
Eveneens volgt uit *boog* AHC < *boog* BGD.

AC > BD.

Men heeft dus in woorden: *Als bij denzelfden cirkel of bij gelijke cirkels twee bogen, beide grooter dan een halve cirkel, ongelijk zijn, dan behoort bij den grootsten der twee bogen de kleinste der twee koorden*, en omgekeerd.

§ 185. STELLING. *De middellijn, die rechthoekig op een koorde staat, deelt de koorde middendoor en de twee bogen, die de koorde onderspant.*

Fig. 117.



BEWIJS. Zij AB de koorde en CD de middellijn, die rechthoekig op AB staat. Vereenig het middelpunt met A en met B, dan is △ AMB gelijkbeenig en de lijn, die door het toppunt M van dien driehoek rechthoekig op de basis getrokken wordt, deelt volgens § 58 de basis middendoor.

Daar nu C een punt is van de lijn, die AB rechthoekig middendoor deelt, zoo is

koorde CA = *koorde* CB,

en dus *boog* CA = *boog* CB.

Evenzoo heeft men *koorde* DA = *koorde* DB,

waaruit volgt *boog* DA = *boog* DB.

§ 186. De lijn CD voldoet volgens het bovenstaande aan vijf voorwaarden.

1°. Zij gaat door het middelpunt van den cirkel.

2°. Zij staat rechthoekig op AB.

3°. Zij gaat door het midden van AB.

4°. Zij deelt *boog* ACB middendoor.

5°. Zij deelt *boog* AD~~C~~B middendoor.

Twee van deze voorwaarden zijn voldoende om CD te bepalen, en *elke lijn, die aan twee der genoemde voorwaarden voldoet, zal ook aan de drie andere voldoen.*

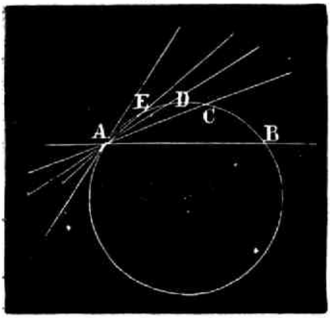
GEVOLG. *De meetkundige plaats der middelpunten van alle koorden, die evenwijdig loopen met een gegeven lijn, is de middellijn, welke rechthoekig op de gegeven lijn staat.*

ONDERLINGE LIGGING VAN EEN CIRKEL EN EEN RECHTE LIJN.

§ 187. Volgens het axioma van § 11 zal een rechte lijn, die door een punt binnen een cirkel getrokken wordt, de kromme minstens tweemaal snijden. Dat er niet meer dan twee snijpunten kunnen zijn, is in de eerste opmerking van § 175 gebleken.

Bepaling. Een rechte lijn, die met den cirkel twee punten gemeen heeft, noemt men een s n ij l ij n.

Fig. 118.

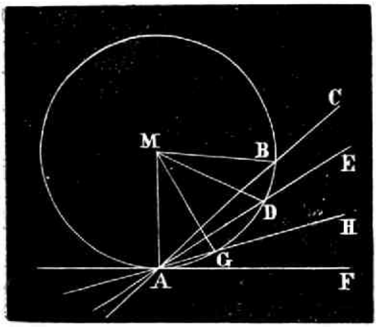


Stellen wij ons voor, dat zulk een snijlijn AB om een van haar snijpunten A draait, zóo, dat het andere snijpunt tot A nadert. Dit andere snijpunt komt dan achtereenvolgens in B, C, D, E. De bewegende lijn kan daardoor in zulk een stand gebracht worden, dat de twee snijpunten samenvallen in A.

Bepalingen. Een r a a k l ij n ontstaat, als een snijlijn zoodanig om een van haar snijpunten bewogen wordt, dat haar beide snijpunten samenvallen in één punt. Dit punt noemt men het r a a k p u n t.

Opmerking. Men drukt dit samenvallen van twee snijpunten ook uit door te zeggen, dat een raaklijn *twee opeenvolgende punten* met den cirkel gemeen heeft.

Fig. 119.



§ 188. Stelling. *Een raaklijn staat rechthoekig op den straal van het raakpunt.*

Bewijs. Zij AC een snijlijn, die door draaiing om A overgaat in de raaklijn AF. De driehoek AMB is gelijkbeenig, en zijn buitenhoek

$$\angle MBC = 180^\circ - \angle MBA,$$
$$\angle MBC = 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle AMB),$$
$$\angle MBC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\angle AMB.$$

Op dezelfde wijze is

$$\angle MDE = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\angle AMD,$$
$$\angle MGH = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\angle AMG.$$

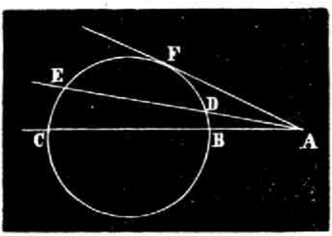
Of in woorden: *Een snijlijn maakt met den straal van een harer snijpunten een hoek, die gelijk is aan 90° plus de helft van den hoek, dien de stralen van de twee snijpunten met elkaar maken.* Deze eigenschap gaat door, hoe dicht de twee snijpunten ook bij elkaar komen. Vallen de twee snijpunten samen, dan vallen ook de twee stralen samen: deze maken dus een hoek van 0° met elkaar, zoodat wij hebben

$$\angle MAF = 90^\circ + 0^\circ = 90^\circ.$$

GEVOLGEN. 1. *Door elk punt van een cirkel kan één en niet meer dan één raaklijn gaan.*

2. *Een lijn, die rechthoekig staat op het uiteinde van een straal, is een raaklijn.*

Fig. 120.



OPMERKING. Men kan ook zeggen, dat een raaklijn ontstaat, als een snijlijn AC draait om een van haar punten A buiten den cirkel, tot haar twee snijpunten samenvallen in F. Men kan daarbij, even als vroeger, aantoonen, dat de lijn AF rechthoekig staat op den straal van het raakpunt.

OPMERKING. De voorgaande beschouwing der raaklijnen is in de 17e eeuw langzamerhand ontwikkeld door FERMAT, HUYGENS, NEWTON en LEIBNITZ.

§ 189. STELLINGEN. 1. *De afstand van het middelpunt van een cirkel tot een snijlijn is kleiner dan de straal.*

2. *De afstand van het middelpunt van een cirkel tot een raaklijn is gelijk aan den straal.*

3. *De afstand van het middelpunt tot een rechte lijn, die geen enkel punt met den cirkel gemeen heeft, is grooter dan de straal.*

Bewijzen. 1. De stralen van de twee snijpunten zijn even lang en maken dus scheeve hoeken met de snijlijn. En daar de loodlijn, uit het middelpunt op de snijlijn neergelaten, kleiner is dan een der schuine lijnen, zoo is die loodlijn kleiner dan de straal.

2. De raaklijn staat volgens de vorige § rechthoekig op den straal van het raakpunt, zoodat die straal de afstand van het middelpunt tot de raaklijn is.

3. Als een rechte lijn geen enkel punt met den cirkel gemeen heeft, liggen al haar punten buiten de kromme. Zooals wij reeds in § 15 gezien hebben, is de afstand van alle punten der rechte tot het middelpunt grooter dan de straal. Dus is ook de loodlijn, die een punt der rechte lijn met het middelpunt vereenigt, grooter dan de straal.

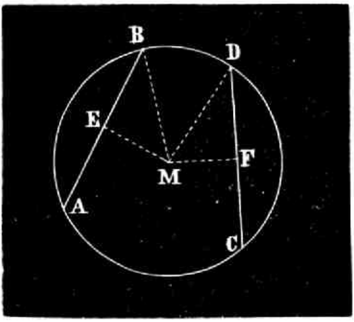
§ 190. In de vorige § hebben wij alle standen genomen, die een rechte lijn ten aanzien van een cirkel kan innemen, en daarbij zijn wij gekomen tot gevolgtrekkingen, die verschillend zijn en van dien aard, dat geen twee te gelijk kunnen waar zijn. Wij hebben dus met toepassing van den algemeenen regel van § 43 de volgende

Stellingen. 1. *Als de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte lijn kleiner is dan de straal, dan is de rechte lijn een snijlijn.*

2. *Als de afstand van het middelpunt tot een rechte lijn gelijk is aan den straal, dan is die rechte lijn een raaklijn.*

3. *Als de afstand van het middelpunt tot een rechte lijn grooter is dan de straal, dan heeft de rechte geen enkel punt met den cirkel gemeen.*

Fig. 121.



§ 191. Stelling. *In denzelfden cirkel of in gelijke cirkels liggen gelijke koorden even ver van het middelpunt*, en omgekeerd: *twee koorden, die op gelijke afstanden van het middelpunt liggen, zijn gelijk.*

Bewijs. De loodlijnen, die men uit het middelpunt op de koorden neerlaat, deelen de koorden middendoor. Uit de gelijkheid der koorden volgt dus ook BE $=$ DF. Nu hebben wij in de rechthoekige driehoeken MBE en MDF, als wij MB $=$ MD door r voorstellen,

$$ME^2 = r^2 - BE^2,$$
$$MF^2 = r^2 - DF^2.$$

Daar nu BE en DF gelijk zijn, zijn de tweede leden der vorige vergelijkingen gelijk; dus ook de eerste

$$ME^2 = MF^2 \text{ en}$$
$$ME = MF.$$

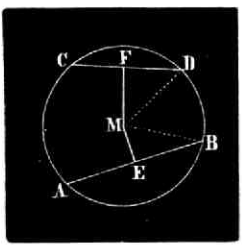
Omgekeerd volgt uit ME $=$ MF of $ME^2 = MF^2$, dat de tweede leden gelijk zijn; dus $BE^2 = DF^2$ en

$$BE = DF.$$

§ 192. STELLING. *In denzelfden cirkel of in gelijke cirkels ligt van twee ongelijke koorden de kleinste het verst van 't middelpunt*, en omgekeerd.

BEWIJS. Wij hebben, even als in de vorige §,

Fig. 122.



$$MF^2 = r^2 - DF^2 \text{ en}$$
$$ME^2 = r^2 - BE^2.$$

Indien nu CD $<$ AB, dan is ook

$$DF < BE.$$

Het tweede lid der eerste vergelijking is grooter dan het tweede lid der tweede vergelijking; dus ook

$$MF^2 > ME^2 \text{ en}$$
$$MF < ME.$$

Omgekeerd volgt uit MF $>$ ME of $MF^2 > ME^2$

$$r^2 - MF^2 < r^2 - ME^2 \text{ en dus}$$
$$DF^2 < BE^2 \text{ of}$$
$$DF < BE.$$

ONDERLINGE LIGGING VAN TWEE CIRKELS.

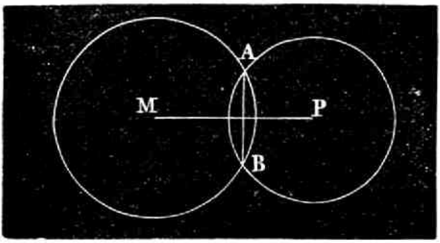
§ 193. Volgens § 175 kunnen twee cirkels geen drie punten gemeen hebben, zonder geheel samen te vallen, terwijl uit de derde opmerking van die § blijkt, dat twee cirkels twee punten kunnen gemeen hebben. Men zegt dan, dat de twee cirkels elkaar **snijden** in die twee gemeenschappelijke punten. Men noemt deze **snijpunten**.

Cirkels, die een zelfde middelpunt hebben, heeten **concentrisch**.

Als de stralen van twee concentrische cirkels even lang zijn, vallen de kromme lijnen geheel samen, zoo als in § 176 gebleken is. Als de stralen verschillend zijn, kunnen de kromme lijnen geen enkel punt gemeen hebben.

§ 194. STELLING. *Als twee cirkels elkaar snijden, staat de lijn, die de twee middelpunten verbindt, rechthoekig op de lijn, die de twee snijpunten vereenigt.*

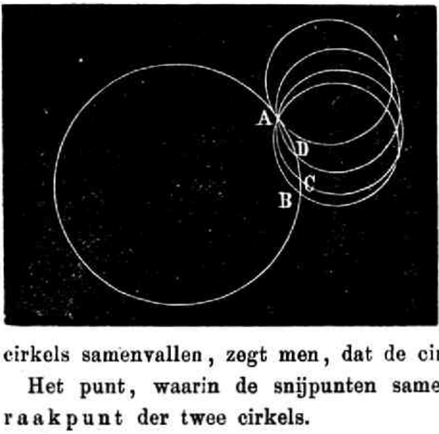
Fig. 123.



BEWIJS. Het middelpunt M ligt op gelijke afstanden van A en B. Hetzelfde geldt voor P. De lijn door M en P is dus de lijn, die AB rechthoekig middendoor deelt.

§ 195. Als twee cirkels twee punten A en B gemeen hebben, dan kan men den eenen zoodanig om een dier snijpunten laten bewegen, dat het andere snijpunt tot A nadert.

Fig. 124.

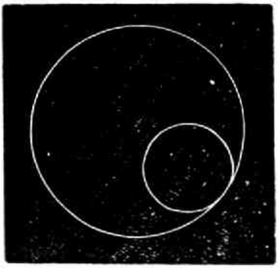


Dit andere snijpunt komt dan achtereenvolgens in C en D en zal eindelijk met A samenvallen.

BEPALINGEN. Als de snijpunten van twee cirkels samenvallen, zegt men, dat de cirkels elkaar **raken**.

Het punt, waarin de snijpunten samenvallen, noemt men het **raakpunt** der twee cirkels.

Fig. 125.



Indien de cirkels buiten elkaar vallen, zooals in fig. 124, zegt men, dat zij elkaar uitwendig raken.

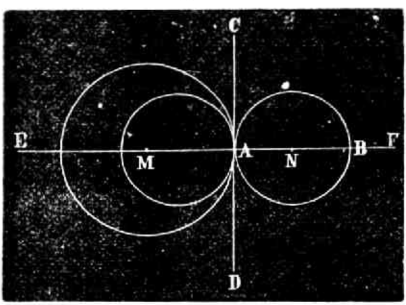
Indien bij het samenvallen der snijpunten de eene cirkel binnen den anderen ligt, zegt men, dat de cirkels elkaar inwendig raken.

§ 196. Stellen wij ons voor, dat in fig. 124 een lijn getrokken wordt door de snijpunten der twee cirkels. Die lijn is een snijlijn der beide cirkels; zij ligt eerst in den stand AB, daarna in AC en AD. Wanneer de snijpunten der twee cirkels samenvallen, dan vallen tevens samen de twee snijpunten van de rechte lijn met den eenen cirkel en de twee snijpunten van dezelfde rechte lijn met den anderen cirkel. De snijlijn van de twee cirkels wordt dan een raaklijn van de beide cirkels. Wij hebben dus de

STELLING: *Als twee cirkels elkaar raken, hebben zij in hun raakpunt een gemeenschappelijke raaklijn.*

§ 197. STELLING. *Als twee cirkels elkaar raken, liggen hun middelpunten en het raakpunt in één rechte lijn.*

Fig. 126.



BEWIJS. Als de cirkels, die M en N tot middelpunt hebben, elkaar raken, hebben zij volgens de vorige stelling in hun raakpunt A een gemeenschappelijke raaklijn CD. Op deze lijn staan AM en AN beide rechthoekig, zoodat de hoek MAN gestrekt is en M, A en N in één rechte lijn liggen. Op dezelfde wijze toont men het gestelde aan voor twee cirkels, die elkaar inwendig raken.

§ 198. STELLINGEN. 1. *Als van twee cirkels de eene geheel buiten den anderen ligt, is de afstand van hun middelpunten grooter dan de som van hun stralen.*

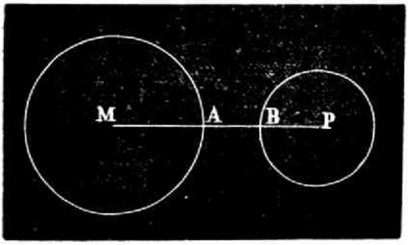
2. *Als twee cirkels elkaar uitwendig raken, is de afstand der middelpunten gelijk aan de som der stralen.*

3. *Als twee cirkels elkaar snijden, is de afstand der middelpunten kleiner dan de som en grooter dan 't verschil der stralen.*

4. *Als twee cirkels elkaar inwendig raken, is de afstand der middelpunten gelijk aan 't verschil der stralen.*

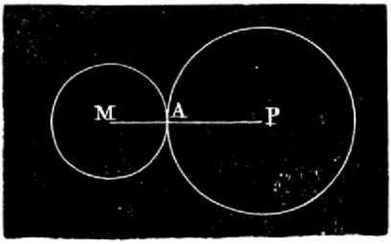
5. *Als de eene cirkel geheel binnen den anderen ligt, is de afstand der middelpunten kleiner dan 't verschil der stralen.*

Fig. 127.



BEWIJZEN. 1. Men heeft in fig. 127 MP = MA + AB + BP, MP > MA + BP, waarbij MP de afstand der middelpunten is, MA een straal van den eenen cirkel en BP een straal van den anderen cirkel.

Fig. 128.

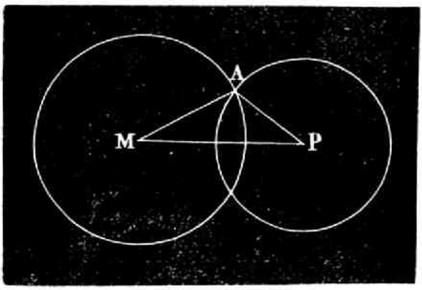


2. Als de twee cirkels elkaar uitwendig raken, liggen het raakpunt en de twee middelpunten in dezelfde rechte lijn. Dus is in fig. 128

$$MP = MA + AP,$$

waarbij MP weder de afstand der middelpunten is, terwijl MA en AP stralen zijn van de twee cirkels.

Fig. 129.

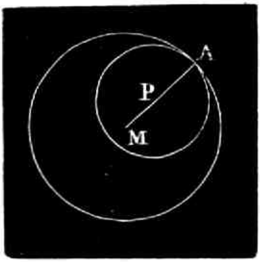


3. Als de twee cirkels elkaar snijden, vormt de lijn, die de middelpunten vereenigt, een driehoek met de twee stralen van een der snijpunten A.

In dien $\triangle$ MAP heeft men

$$MP < MA + AP \text{ en}$$
$$MP > MA - AP.$$

Fig. 130.

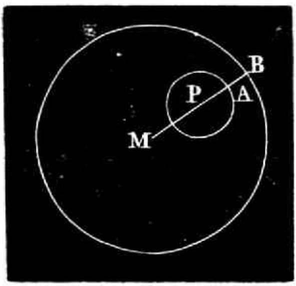


4. **Als de twee cirkels elkaar inwendig raken, liggen de middelpunten M en P in één rechte lijn met het raakpunt A. Men heeft dus**

$$MP = MA - PA,$$

of in woorden: ***de afstand der middelpunten is gelijk aan het verschil der stralen.***

Fig. 131.



5. **Men heeft in fig. 131**

$$MP = MB - PB,$$
$$MP = MB - PA - AB,$$
$$MP < MB - PA,$$

of in woorden: ***de afstand der middelpunten is kleiner dan het verschil der stralen.***

§ 199. Door toepassing **van den algemeenen regel in** § 43 **hebben** wij onmiddellijk de omgekeerde

STELLINGEN: 1. ***Als de afstand der middelpunten van twee cirkels grooter is dan de som der beide stralen, zoo ligt de eene cirkel geheel buiten den anderen.***

2. ***Als de afstand der middelpunten gelijk is aan de som der stralen, dan raken de cirkels elkaar uitwendig.***

3. ***Als de afstand der middelpunten kleiner is dan de som en grooter dan 't verschil der stralen, zoo snijden de cirkels elkaar.***

4. ***Als de afstand der middelpunten gelijk is aan 't verschil der stralen, dan raken de cirkels elkaar inwendig.***

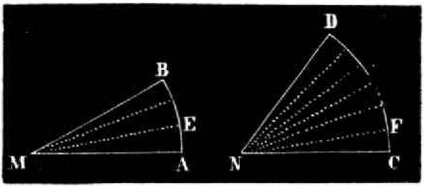
5. ***Als de afstand der middelpunten kleiner is dan 't verschil der stralen, zoo ligt de eene cirkel geheel binnen den anderen.***

OVER HET METEN VAN HOEKEN DOOR MIDDEL VAN CIRKELBOGEN.

§ 200. STELLING. *In denzelfden cirkel of in gelijke cirkels is de verhouding van twee middelpuntshoeken gelijk aan de verhouding der bogen, die tusschen de beenen der hoeken begrepen zijn.*

BEWIJS. Hierbij onderscheiden wij twee gevallen: de bogen zijn *onderling meetbaar* of ze zijn *onderling onmeetbaar*.

Fig. 132.



1°. Als de bogen AB en CD onderling meetbaar zijn, bestaat er een derde boog, die op de eerste twee een geheel aantal malen begrepen is. Zetten wij dien derden boog op AB en CD uit, dan worden deze in gelijke stukken verdeeld, bijv. AB in drie en CD in zes, en wij hebben

$$\frac{boog\ AB}{boog\ CD} = \frac{3}{6}.$$

Trekken wij nu naar de deelpunten van AB en CD stralen, dan worden de middelpuntshoeken in evenveel deelen verdeeld als de bogen, en al die deelen zijn volgens § 179 gelijk. Wij hebben dus ook

$$\frac{\angle AMB}{\angle CND} = \frac{3}{6} = \frac{boog\ AB}{boog\ CD}.$$

2°. Als de bogen onderling onmeetbaar zijn, kan men geheel op dezelfde wijze handelen als in het tweede geval van § 114 of in het tweede geval van § 157.

§ 201. In § 27 is gezegd, dat men tot het meten van hoeken gewoonlijk als eenheid aanneemt een **hoekgraad** of een negentigste gedeelte van een rechten hoek.

Om bogen van denzelfden cirkel of van gelijke cirkels te meten, neemt men gewoonlijk als eenheid aan het driehonderdzestigste gedeelte van de geheele kromme of het negentigste gedeelte van een vierde deel van den cirkel. Die eenheid noemt men een booggraad. Een zestigste van een booggraad noemt men een minuut en een zestigste van een minuut een seconde.

Als door het middelpunt van een cirkel twee lijnen rechthoekig op elkaar getrokken worden, verkrijgt men vier middelpuntshoeken, die alle recht, dus onderling gelijk zijn. Dezelfde lijnen verdeelen derhalve ook den cirkel in vier gelijke deelen, zoodat *met een rechten middelpuntshoek overeenkomt een vierde gedeelte van den cirkel.* Verdeelt men zulk een gedeelte der kromme lijn in negentig gelijke deelen, dan is elk dier deelen een booggraad. Vereenigt men alle deelpunten van den boog met het middelpunt, dan wordt de rechte hoek aan 't middelpunt in negentig gelijke deelen verdeeld, en elk dier deelen is een hoekgraad.

Met een hoekgraad aan 't middelpunt komt dus overeen een booggraad.

Als een bijzonder geval van de stelling der vorige § hebben wij nu: de verhouding van een middelpuntshoek tot een hoekgraad is gelijk aan de verhouding van den boog, die tusschen de beenen van den eersten hoek ligt, tot een booggraad. *De middelpuntshoek en de boog, die tusschen zijn beenen ligt, worden dus door dezelfde getallen uitgedrukt.*

Men drukt deze eigenschap uit, door bij verkorting te zeggen: *Een middelpuntshoek is gelijk aan den boog, die tusschen zijne beenen begrepen is.*

Wij zullen in het volgende dikwijls de oneigenlijke uitdrukking gebruiken, dat een hoek en een cirkelboog gelijk zijn. Dat beteekent dan telkens, dat zij door dezelfde getallen worden uitgedrukt, als men tot eenheid der hoeken aanneemt een driehonderdzestigste gedeelte van vier rechte hoeken en tot eenheid der cirkelbogen een driehonderdzestigste gedeelte van den cirkelomtrek.

§ 202. BEPALINGEN. Een hoek, wiens hoekpunt in den omtrek van een cirkel ligt en wiens beenen koorden zijn, noemt men een omtrekshoek.

Men zegt, dat zulk een hoek staat op den boog, die tusschen zijn beenen begrepen is.

De figuur, die gevormd wordt door een cirkelboog en de koorde, welke zijne uiteinden vereenigt, noemt men een **cirkelsegment.**

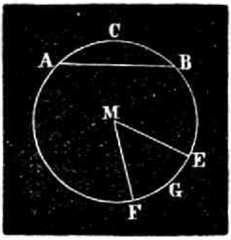
De figuur, die gevormd wordt door een cirkelboog en de stralen van zijne uiteinden, heet een **cirkelsector.**

De helft van een cirkelomtrek met de middellijn, die zijn uiteinden verbindt, vormt dus te gelijk een cirkelsegment en een cirkelsector.

Een cirkelsector, wiens boog een vierde gedeelte van de kromme is en wiens middelpuntshoek dus recht is, noemt men een **cirkelquadrant.**

Men duidt een cirkelsegment aan door het opnoemen van drie letters, waarvan twee bij de uiteinden van den boog staan en een bij een ander punt van den boog.

Fig. 133.

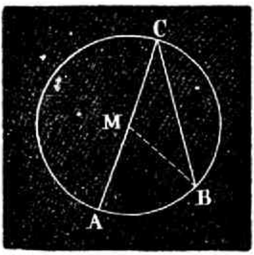


Men duidt een cirkelsector aan door het opnoemen van drie of vier letters, waarvan een bij het middelpunt van den cirkel staat en twee bij de uiteinden van zijn boog. De vierde letter dient om een ander punt van den boog aan te wijzen. Zoo heeft men in fig. 133 twee cirkelsegmenten ACB en AGB; FMEG en FCEM zijn cirkelsectoren.

§ 203. Stelling. *Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van den boog, waarop hij staat.*

Bewijs. Hierbij zijn drie gevallen te onderscheiden. Vooreerst kan het middelpunt van den cirkel in een der beenen van den hoek liggen; ten tweede kan het middelpunt binnen den hoek liggen; ten derde kan het middelpunt buiten den hoek liggen.

Fig. 134.



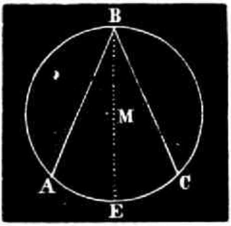
1°. Vereenig het middelpunt M met het punt B van het been, dat niet door 't middelpunt gaat. Nu is $\triangle$ BCM gelijkbeenig en zijn buitenhoek

$$AMB = \angle B + \angle C$$

$$\angle AMB = 2 \angle C.$$

Hoek C is de helft van $\angle$ AMB, en daar $\angle$ AMB $=$ *boog* AB is, zoo is $\angle$ C ook de helft van *boog* AB.

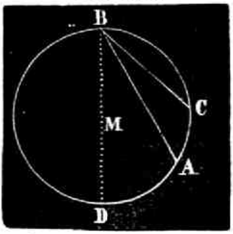
Fig. 135.



2°. Trek uit het hoekpunt B de middellijn BE, dan heeft men volgens het eerste geval

$$\begin{array}{l} \angle ABE = {}^1/_2 \; \textit{boog} \; AE, \\ \underline{\angle EBC = {}^1/_2 \; \textit{boog} \; EC.} \\ \angle ABC = {}^1/_2 \; \textit{boog} \; AC. \end{array}$$

Fig. 136.



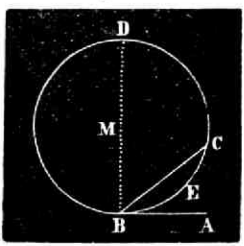
3°. Trek weer uit het hoekpunt B de middellijn BD, dan heeft men volgens het eerste geval

$$\begin{array}{ll} & \angle DBC = {}^1/_2 \; \textit{boog} \; DC, \\ \text{af} & \underline{\angle DBA = {}^1/_2 \; \textit{boog} \; DA.} \\ & \angle ABC = {}^1/_2 \; \textit{boog} \; AC. \end{array}$$

Gevolg. *Bij denzelfden cirkel of bij gelijke cirkels zijn twee omtrekshoeken gelijk, als de bogen, waarop zij staan, gelijk zijn;* en omgekeerd.

§ 204. De stelling der vorige § gaat door, hoe dicht de twee punten ook bij elkaar komen, waarin een been van den hoek den cirkel ontmoet. Laat men dus een der beenen om het hoekpunt draaien, tot het bewegende been twee opeenvolgende punten met den cirkel gemeen heeft, dan blijft de stelling doorgaan, zoodat *de hoek, die gevormd wordt door een raaklijn aan een cirkel en een koorde, die door 't raakpunt gaat, gelijk is aan de helft van den boog, die binnen den hoek ligt.*

Fig. 137.

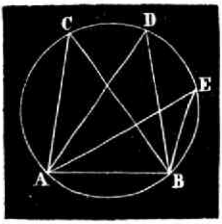


Opmerking. Men kan dit bijzondere geval der stelling van de vorige § ook aldus bewijzen:

Zij BA een raaklijn en BD een middellijn, dan is *boog* BCD $= 180°$ en $\angle ABD = 90°$.

$$\begin{array}{ll} \text{Dus} & \angle ABD = {}^1/_2 \; \textit{boog} \; BCD, \\ \text{af} & \underline{\angle CBD = {}^1/_2 \; \textit{boog} \; CD.} \\ & \angle ABC = {}^1/_2 \; \textit{boog} \; BEC. \end{array}$$

Fig. 138.

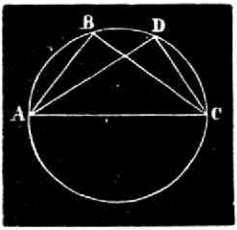


§ 205. Men zegt van een omtrekshoek ABC, dat hij in het cirkelsegment ACB staat.

Stelling. *Alle hoeken, die in een zelfde cirkelsegment staan, zijn gelijk.*

Bewijs. De hoeken ACB, ADB en AEB zijn onderling gelijk, omdat ieder gelijk is aan de helft van den *boog* AB.

Fig. 139.



Als een bijzonder geval van deze eigenschap hebben wij, dat alle hoeken, die in een halven cirkel staan, zooals ABC en ADC (fig. 139), gelijk zijn aan de helft van den halven cirkel, dus gelijk aan 90°.

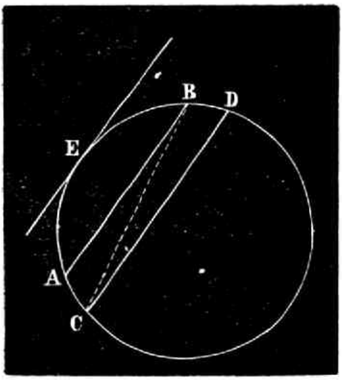
Alle hoeken, die in een halven cirkel staan, zijn dus recht.

§ 206. Stelling. *Als twee evenwijdige lijnen een cirkel snijden, dan zijn de twee bogen, die tusschen de evenwijdige lijnen liggen, gelijk*, en omgekeerd. (Zie fig. 140.)

Bewijs. Laat AB en CD evenwijdige lijnen zijn. Trek BC, dan volgt uit de evenwijdigheid der lijnen, dat de verwisselende binnenhoeken gelijk zijn.

$$\angle ABC = \angle BCD.$$

Fig. 140.



Deze zijn omtrekshoeken, die op de bogen AC en BD staan, en volgens het Gevolg van § 203 zijn nu ook de bogen AC en BD gelijk.

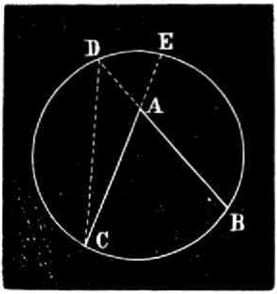
Bewijs van het omgekeerde. Indien men weet, dat de bogen AC en BD gelijk zijn, volgt hieruit (volgens § 203, Gevolg), dat de hoeken ABC en BCD gelijk zijn. En uit de gelijkheid van deze hoeken volgt verder, dat AB en CD evenwijdig zijn.

Opmerking. De voorgaande eigenschap gaat door, hoe dicht de twee snijpunten van een der snijlijnen bij elkaar liggen, en dus ook wanneer zulk een snijlijn twee opeenvolgende punten met den cirkel gemeen heeft, of m. a. w. als zij in een raaklijn overgaat.

Wij hebben dus als een bijzonder geval der vorige stelling: *Als een raaklijn en een snijlijn evenwijdig loopen, zijn de bogen, die tusschen de twee lijnen liggen, gelijk*, en omgekeerd.

§ 207. Stelling. *Een hoek, wiens hoekpunt binnen den cirkel ligt, is gelijk aan de halve som van twee bogen, waarvan de eene tusschen de beenen van den hoek en de andere tusschen de verlengden der beenen ligt.*

Fig. 141.



Gestelde. $\angle$ CAB $= \frac{1}{2}$ *boog* BC $+ \frac{1}{2}$ *boog* DE.

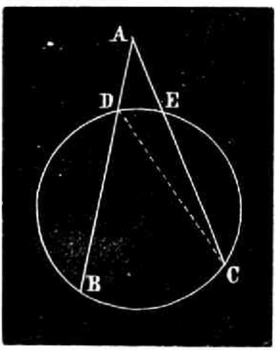
Bewijs. Trek DC, dan is de buitenhoek BAC van $\triangle$ DAC gelijk aan de som der hoeken C en D. Deze beide zijn omtrekshoeken, zoodat

$\angle$ C $= \frac{1}{2}$ *boog* DE,
$\angle$ D $= \frac{1}{2}$ *boog* BC.

Samen $\angle$ BAC $= \frac{1}{2}$ *boog* BC $+ \frac{1}{2}$ *boog* DE.

§ 208. Stelling. *Een hoek, wiens hoekpunt buiten den cirkel ligt en wiens beenen den cirkel snijden, is gelijk aan het halve verschil der bogen, die tusschen de beenen van den hoek liggen.*

Fig. 142.



Gestelde. $\angle$ A $= \frac{1}{2}$ *boog* BC $- \frac{1}{2}$ *boog* DE.

Bewijs. Trek CD, dan is BDC een buitenhoek van $\triangle$ ACD. Dus is

$\angle$ A $+ \angle$ C $=$ BDC,
$\angle$ A $= \angle$ BDC $- \angle$ C.

BDC en C zijn omtrekshoeken waarbij

$\angle$ BDC $= \frac{1}{2}$ *boog* BC, af
$\angle$ C $= \frac{1}{2}$ *boog* BE, blijft

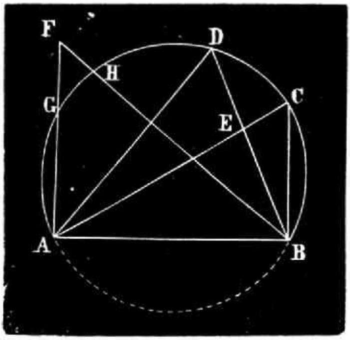
$\angle$ A $= \frac{1}{2}$ *boog* BC $- \frac{1}{2}$ *boog* DE.

Opmerking. De voorgaande stelling en het bewijs gaan door, als een der snijlijnen of beide in raaklijnen overgaan.

§ 209. Stelling. *De meetkundige plaats der toppunten van alle driehoeken, die een gegeven lijn tot basis hebben, die een tophoek van gegeven grootte hebben en wier toppunten aan een zelfden kant der basis liggen, is een cirkelboog.*

Bewijs. Zij AB de basis en C een punt, zoodat $\angle$ ACB gelijk is aan den gegeven hoek, dan is ABC een driehoek, die aan 't vereischte voldoet en C een punt der meetkundige plaats. Laat men nu een cirkel gaan door A, B en C, dan is voor ieder ander punt van den cirkelboog ACB

Fig. 143.



$$\angle \text{ADB} = \angle \text{ACB}.$$

Elk punt van dien boog is dus het toppunt van een $\triangle$, die AB tot basis heeft en wiens tophoek de vereischte grootte heeft. Alle punten van den cirkelboog behooren dus tot de meetkundige plaats, en het gestelde zal bewezen zijn, als wij laten zien, dat elk punt buiten den boog en aan denzelfden kant van AB, als waar C ligt, niet aan het vereischte voldoet. Voor een punt E binnen het segment ACB is

$$\angle \text{AEB} = {}^1/_2 \textit{ boog } \text{AB} + {}^1/_2 \textit{ boog } \text{CD},$$

$$\angle \text{AEB} > {}^1/_2 \textit{ boog } \text{AB},$$

of

$$\angle \text{AEB} > \angle \text{C},$$

zoodat E niet aan het vereischte voldoet.

Voor een punt F buiten het segment heeft men

$$\angle \text{F} = {}^1/_2 \textit{ boog } \text{AB} - {}^1/_2 \textit{ boog } \text{GH},$$

$$\angle \text{F} < {}^1/_2 \textit{ boog } \text{AB}, \text{ of}$$

$$\angle \text{F} < \text{C},$$

zoodat F niet aan het vereischte voldoet.

Opmerking. Voor de meetkundige plaats der toppunten van alle driehoeken, die aan dezelfde voorwaarden voldoen, maar aan den anderen kant van AB liggen, vindt men een cirkelboog, die aan den anderen kant van AB ligt, dan waar C ligt. Vouwt men de figuur om volgens de lijn AB, dan vallen de meetkundige plaatsen samen.

Indien de gegeven hoek recht is, vindt men voor de meetkundige plaats aan den *eenen kant* der basis een halven cirkel, die de basis tot middellijn heeft. Voor de meetkundige plaats aan den *anderen kant* van de basis vindt men ook een halven cirkel, die de basis tot middellijn heeft. Die twee halve cirkels vormen samen een cirkel, zoodat: *de meetkundige plaats der toppunten van alle rechthoekige driehoeken, die een gegeven lijn tot basis hebben, is een cirkelomtrek, die de gegeven lijn tot middellijn heeft.*

WERKSTUKKEN.

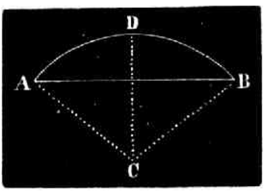
§ 210. Werkstuk. *Een cirkel te beschrijven, die door drie gegeven punten gaat.*

Uit de stelling van § 175 blijkt, dat men, door tweemaal het werkstuk van § 81 toe te passen, het middelpunt van den gevraagden cirkel vindt. Te gelijk is de straal van den cirkel bepaald.

In de opmerkingen van § 175 is tevens gebleken, dat het werkstuk onmogelijk is, als de drie gegeven punten in eene rechte lijn liggen, en dat er altijd één cirkel kan beschreven worden, als de drie punten niet in eene rechte lijn liggen.

§ 211. Werkstuk. *Een gegeven cirkelboog middendoor te deelen.*

Fig. 144.



Eerste constructie. Vereenig de uiteinden A en B van den boog met het middelpunt en deel $\angle$ ACB middendoor. Als de deellijn van den hoek den boog snijdt in D, dan volgt uit de gelijkheid der hoeken aan 't middelpunt ACD en BCD, dat de bogen AD en BD gelijk zijn.

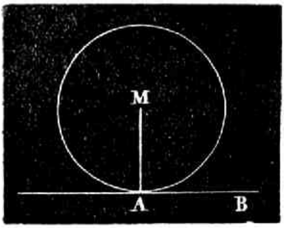
Tweede constructie. Maak een omtrekshoek van den cirkel, zoo dat die hoek op den gegeven boog staat. Deel dien hoek middendoor, dan zal (volgens § 203, Gevolg) de lijn, die den omtrekshoek middendoor deelt, ook den boog middendoor deelen.

DERDE CONSTRUCTIE. Deel de koorde, die den boog onderspant, rechthoekig middendoor, dan zal, volgens § 185, de lijn, die de koorde middendoor deelt, ook den boog middendoor deelen.

BEPALING. De rechte lijn, die het midden van een cirkelboog vereenigt met het midden van zijn koorde, noemt men de pijl van het cirkelsegment.

§ 212. WERKSTUK. *Door een gegeven punt van een cirkel een raaklijn aan de kromme te trekken.*

Fig. 145.



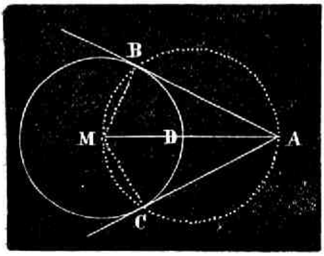
CONSTRUCTIE. Vereenig het gegeven punt A met het middelpunt M. Trek door A een lijn AB, die rechthoekig staat op AM, dan is, volgens § 188, AB een raaklijn.

In die zelfde § is gebleken, dat er niet meer dan één raaklijn mogelijk is in hetzelfde punt A.

§ 213. WERKSTUK. *Door een gegeven punt buiten een cirkel een raaklijn aan die kromme te trekken.*

Zij A het gegeven punt. Veronderstellen wij, dat het werkstuk opgelost is en dat AB raakt in B. Vereenigen wij M met B en A, dan is ∠ B recht en het punt B ligt daarom op den omtrek van den cirkel, die MA tot middellijn heeft. Dat zelfde punt ligt ook op den omtrek van den gegeven cirkel. Wij hebben dus de volgende

Fig. 146.



CONSTRUCTIE: Vereenig A met M en beschrijf op AM als middellijn een cirkel, die den gegeven cirkel snijdt in B. Trek daarna een lijn door A en B.

AB is dan een raaklijn, omdat ∠ B in een halven cirkel staat en dus recht is.

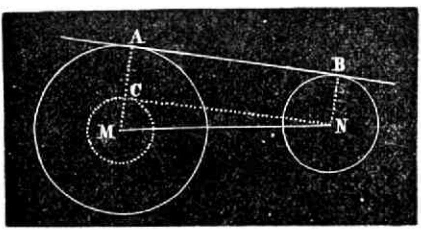
Opmerking. Daar M binnen en A buiten den gegeven cirkel ligt, zal een cirkel, door M en A getrokken, den gegeven cirkel tweemaal snijden, in B en in C; zóodat er altijd twee raaklijnen zijn en nooit meer.

Gevolg. Daar de rechthoekige driehoeken ABM en ACM $\cong$ zijn, zoo *zijn* AB *en* AC *even lang.*

§ 214. Werkstuk. *Een gemeenschappelijke raaklijn te trekken aan twee gegeven cirkels.*

1°. Stellen wij ons voor, dat het werkstuk opgelost is en dat AB een gemeenschappelijke raaklijn is, zoodat de twee cirkels aan denzelfden kant van AB liggen. (Zie figuur 147.) Trekken wij nu de stralen MA en NB, dan zijn $\angle$ A en $\angle$ B recht. Trekken wij ook NC evenwijdig aan AB, dan is $\angle$ C recht, zoodat NC een raaklijn is aan den cirkel, die M tot middelpunt en MC tot straal heeft. Daar ABNC een rechthoek is, heeft men AC = BN en dus MC = MA — CA = MA — NB gelijk het verschil der twee stralen. Men heeft nu de volgende

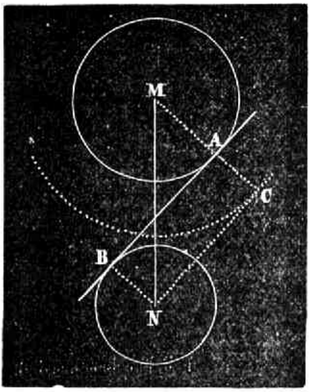
Fig. 147.



Constructie: Beschrijf uit M als middelpunt met het verschil der stralen van de gegeven cirkels tot straal een hulpcirkel: trek uit N een raaklijn NC aan dien hulpcirkel; trek door N en C de lijn MA, en evenwijdig met die lijn NB; vereenig daarna A met B. Omdat MC gelijk is aan 't verschil der stralen, zijn AC en BN gelijk; bovendien zijn deze lijnen evenwijdig, zoodat ABNC een parallelogram is. En daar $\angle$ C recht is, is ABNC een rechthoek. De hoeken A en B zijn dus recht, zoodat AB raakt in A en in B.

2°. Zij AB een gemeenschappelijke raaklijn, zoodat de twee cirkels aan verschillenden kant van AB liggen. Trekken wij de stralen MA en NB, dan zijn $\angle$ A en $\angle$ B recht. (Zie figuur 148.) Trekken wij NC evenwijdig met BA, dan is ook C recht, zoodat NC een raaklijn is aan den cirkel, die M tot middelpunt en MC

Fig. 148.



tot straal heeft. Daar ABNC een rechthoek is, zijn BN en AC gelijk; dus MC = MA + AC = MA + BN (de som der twee stralen). Wij hebben nu de volgende

CONSTRUCTIE. Beschrijf uit M als middelpunt, met de som der stralen van de twee gegeven cirkels tot straal, een cirkel; trek uit N een raaklijn NC aan dien cirkel; trek door M en C de lijn MA; trek NB evenwijdig met MA en vereenig A met B. Daar MC gelijk is aan de som der stralen van de gegeven cirkels, zijn AC en BN gelijk. Dewijl deze lijnen bovendien evenwijdig loopen, is ABNC een parallelogram, en daar $\angle$ C recht is, is ABNC een rechthoek. De hoeken A en B zijn recht, zoodat AB raakt in A en in B.

OPMERKING. De constructie *in het eerste geval* is onmogelijk, als N binnen den hulpcirkel ligt; dus als de afstand van N tot M kleiner is dan 't verschil der stralen van de gegeven cirkels of als (zie § 199, 5) een der gegeven cirkels geheel binnen den anderen ligt.

Als N juist op den hulpcirkel ligt, kan door N een raaklijn aan den hulpcirkel worden getrokken.

Men vindt dus één gemeenschappelijke raaklijn in het eerste geval, als de afstand der middelpunten van de gegeven cirkels gelijk is aan 't verschil der stralen of als (zie § 199, 4) de gegeven cirkels inwendig raken.

Als N buiten den hulpcirkel ligt, kan men door N twee raaklijnen aan den hulpcirkel trekken. Men vindt dus ook twee gemeenschappelijke raaklijnen, als de afstand der middelpunten grooter is dan 't verschil der stralen; dus als de gegeven cirkels elkaar snijden, als zij uitwendig raken en ook als de eene geheel buiten den anderen ligt.

De constructie *in het tweede geval* is onmogelijk, als N binnen den hulpcirkel ligt; dus als de afstand van N tot M kleiner is dan de som der stralen. Men vindt dus ook geen enkele gemeenschappelijke raaklijn in het tweede geval, als de eene cirkel binnen den anderen valt, als zij inwendig raken of als zij elkaar snijden.

Als N in het tweede geval op den omtrek van den hulpcirkel ligt, vindt men één raaklijn door N aan den hulpcirkel. Men vindt dus ook één gemeenschappelijke raaklijn, als de gegeven cirkels uitwendig raken.

Als N buiten den hulpcirkel ligt, zijn er twee raaklijnen aan den hulpcirkel; dus ook twee gemeenschappelijke raaklijnen. De gegeven cirkels vallen dan geheel buiten elkaar.

Vatten wij alles samen, wat op de twee gevallen betrekking heeft, dan blijkt, dat men vindt

a. Als de twee gegeven cirkels buiten elkaar liggen, vier gemeenschappelijke raaklijnen.

b. Als de cirkels elkaar uitwendig raken, drie.

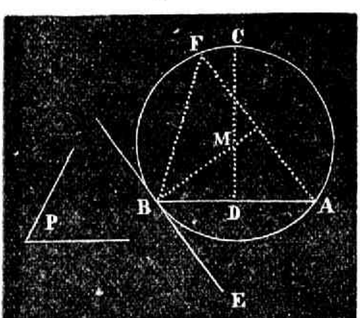
c. Als de cirkels elkaar snijden, twee.

d. Als de cirkels inwendig raken, één.

e. Als de eene cirkel geheel binnen den anderen valt, *geen* gemeenschappelijke raaklijn.

§ 215. WERKSTUK. *Op een gegeven lijn als koorde een cirkelsegment te beschrijven, dat een gegeven hoek bevat.*

Fig. 149.



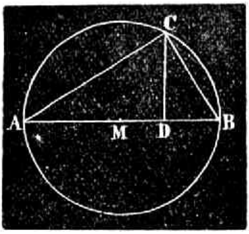
CONSTRUCTIE. Zij AB de gegeven koorde en P de gegeven hoek. De hoek, dien de raaklijn in B maakt met BA, is gelijk aan de helft van den boog, die tusschen de beenen van dien hoek ligt, dus ook gelijk aan den hoek, dien het cirkelsegment moet bevatten, dat is $\angle$ P. Maak dus $\angle$ ABE $= \angle$ P, dan moet BE aan den cirkel raken in het punt B. Richt men in B een loodlijn BM op de raaklijn op, dan moet het middelpunt in die loodlijn liggen. Het middelpunt moet ook in de lijn DC liggen, die AB rechthoekig middendoor deelt, zoodat het snijpunt M der twee loodlijnen het middelpunt van den gevraagden cirkel is. MB = MA is de straal van dien cirkel, zoodat de constructie nu onmiddellijk uitvoerbaar is.

OPMERKING. Door ∠ P aan den anderen kant van AB te plaatsen verkrijgt men een tweede cirkelsegment, dat alleen in stand van het eerste verschilt.

EVENREDIGE LIJNEN BIJ DEN CIRKEL.

§ 216. STELLING. *De loodlijn, die men uit een punt van een cirkelomtrek kan neerlaten op een middellijn, is middelevenredig tusschen de twee stukken, waarin zij de middellijn verdeelt.*

Fig. 150.



BEWIJS. Zij C het punt, waaruit de loodlijn CD neergelaten is op de middellijn AB. Vereenig C met A en met B, dan is de hoek ACB recht, omdat hij in een halven cirkel staat. Volgens een eigenschap van den rechthoekigen driehoek is dus

$$AD : CD = CD : DB.$$

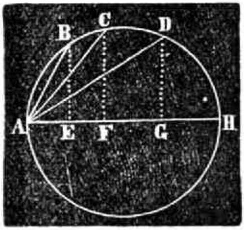
§ 217. STELLING. *Als men uit een punt van een cirkelomtrek een middellijn en een andere koorde trekt, is deze middelevenredig tusschen de middellijn en hare projectie op de middellijn.*

BEWIJS. Als AB de middellijn is en AC de andere koorde, vereenigt men C met B en laat men uit C de loodlijn CD neer. Dan is △ ACB rechthoekig, zoodat AC middelevenredig is tusschen AB en AD.

§ 218. STELLING. *Als men uit een zelfde punt van een cirkelomtrek een middellijn trekt en verschillende andere koorden, dan zijn de vierkanten van al die koorden evenredig met hare projecties op de middellijn.*

GESTELDE. $AB^2 : AC^2 : AD^2 = AE : AF : AG$.

Fig. 151.



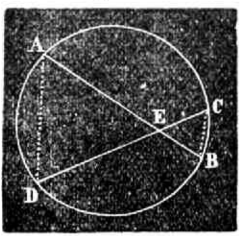
BEWIJS. Volgens de vorige stelling heeft men

$$AB^2 = AE \times AH,$$
$$AC^2 = AF \times AH,$$
$$AD^2 = AG \times AH.$$

Hieruit volgt
$AB^2 : AC^2 : AD^2 = AE \times AH : AF \times AH : AG \times AH$ of $AB^2 : AC^2 : AD^2 = AE : AF : AG$.

§ 219. STELLING. *Als twee koorden elkaar binnen den cirkel snijden, is het produkt der stukken van de eene koorde gelijk aan 't produkt der stukken van de andere koorde.*

Fig. 152.



GESTELDE. $AE \times BE = CE \times DE$.

BEWIJS. Vereenig B met C en A met D, dan heeft men

$$\angle A = \angle C = \tfrac{1}{2} \textit{ boog } BD,$$
$$\angle D = \angle B = \tfrac{1}{2} \textit{ boog } AC.$$

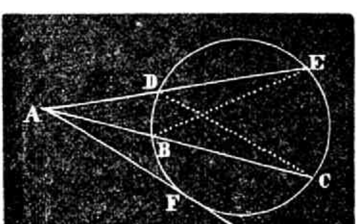
De driehoeken ADE en BCE zijn dus $\sim$, zoodat

$$AE : CE = DE : BE, \text{ of}$$
$$AE \times BE = CE \times DE.$$

§ 220. STELLING. *Als men door een punt buiten een cirkel twee snijlijnen trekt, worden van elk dezer lijnen, van haar gemeenschappelijk punt af gerekend, door den cirkel twee stukken afgesneden, zóo dat het produkt der stukken van de eene snijlijn gelijk is aan het produkt der stukken van de andere.*

GESTELDE. $AB \times AC = AD \times AE$.

Fig. 153.



BEWIJS. Vereenig B met E en C met D, dan heeft men

$$\angle C = \angle E = \tfrac{1}{2} \textit{ boog } BD.$$

Bovendien hebben de driehoeken ADC en ABE den hoek BAD gemeen, zoodat zij $\sim$ zijn. Hieruit volgt

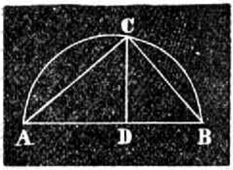
$$AB : AD = AE : AC,$$
$$AB \times AC = AD \times AE.$$

GEVOLG. Deze stelling en haar bewijs gaan door, als een der snijlijnen in een raaklijn overgaat; dus *als men door een punt buiten een cirkel een raaklijn en een snijlijn trekt, is de raaklijn middelevenredig tusschen de stukken der snijlijn.*

WERKSTUKKEN.

§ 221. WERKSTUK. *De meetkundig middelevenredige tusschen twee gegeven lijnen te construeeren.*

Fig. 154.



EERSTE CONSTRUCTIE. Plaats naast elkaar op dezelfde lijn twee stukken AD en DB, respectievelijk gelijk aan de twee gegeven lijnen. Beschrijf op AB als middellijn een halven cirkel en richt in het punt D, waar de twee lijnen bij elkaar komen, de loodlijn DC op, dan is deze, volgens § 216, middelevenredig tusschen AD en DB.

TWEEDE CONSTRUCTIE. Plaats de kleinste der twee gegeven lijnen in AD op de grootste AB; beschrijf op AB als middellijn een halven cirkel; richt de loodlijn DC op en vereenig C met A, dan is AC, volgens § 217, middelevenredig tusschen AD en AB.

GEVOLG. Met behulp van deze constructie kan men elk parallelogram en elken driehoek veranderen in een vierkant van gelijk oppervlak.

§ 222. WERKSTUK. *Een veelhoek te beschrijven, die gelijk is aan een veelhoek* P *en gelijkvormig met een veelhoek* Q.

CONSTRUCTIE. Noemen wij den gevraagden veelhoek X; zij q een zijde van den veelhoek Q en x de zijde van X, die gelijkstandig is met q. Volgens § 166 heeft men

$$\frac{Q}{X} = \frac{q^2}{x^2},$$

of, daar X gelijk moet zijn aan P,

$$\frac{Q}{P} = \frac{q^2}{x^2}.$$

Verander nu Q en P in twee vierkanten a^2 en b^2, dan is

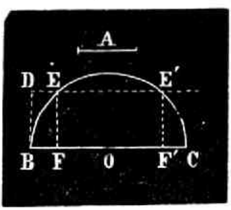
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{q^2}{x^2}, \text{ of } \frac{a}{b} = \frac{q}{x}.$$

Construeer nu een vierde evenredige tot a, b en q, dan heeft men x. Beschrijf op x als zijde een veelhoek, die gelijkvormig is met Q, zóo dat x gelijkstandig is met q, dan heeft men X.

§ 223. WERKSTUK. *Twee rechte lijnen te construeeren, als men hare som en haar produkt kent.*

Zij BC de gegeven som en A een rechte lijn, wier vierkant gelijk is aan 't gegeven produkt. Veronderstellen wij, dat het vraagstuk opgelost zij en dat BF en FC de gevraagde lijnen zijn.

Fig. 155.



Als men op BC als middellijn een halven cirkel beschrijft, zal de loodlijn FE middelevenredig zijn tusschen BF en FC, en bijgevolg gelijk aan A. De lijn, door E evenwijdig met BC getrokken, zal dus van de loodlijn in B een stuk BD afsnijden, dat gelijk is aan A. Uit het voorgaande vloeit voort de volgende

CONSTRUCTIE: Beschrijf op de som BC als middellijn een halven cirkel; richt in B een loodlijn BD op, gelijk aan A; trek DEE′ evenwijdig met BC en laat uit E en E′ de loodlijnen EF en E′F′ neer. De twee gevraagde lijnen zijn BF en FC, of, wat op hetzelfde neerkomt, BF′ en F′C.

OPMERKING. Uit het bovenstaande blijkt, dat er niet meer dan éen oplossing is. De constructie is mogelijk, als de evenwijdige lijn, die door D getrokken wordt, een punt met den cirkel gemeen heeft; dus als A niet grooter is dan de straal van den cirkel, of m. a. w. als A niet grooter is dan de helft der gegeven som.

GEVOLG. In de vierkantsvergelijking

$$x^2 - mx + n^2 = 0$$

$x_1 = \frac{1}{2}m + \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - n^2}$

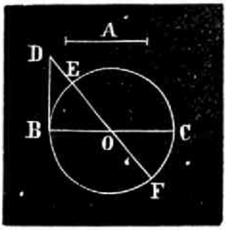
$x_2 = \frac{1}{2}m - \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - n^2}$

stelt m de som der wortels voor en n^2 het produkt. Het werkstuk van deze § leert dus de wortels construeeren van bovenstaande vergelijking.

§ 244. WERKSTUK. *Twee rechte lijnen te construeeren, als men haar verschil en haar produkt kent.*

Zij EF het gegeven verschil en A de rechte lijn, wier vierkant gelijk is aan 't gegeven produkt. Veronderstellen wij, dat het vraagstuk opgelost zij en dat DE en DF de gevraagde lijnen zijn. De raaklijn, uit D aan den cirkel getrokken, die EF tot middellijn heeft, zal middelevenredig zijn tusschen DE en DF en bijgevolg gelijk aan A. En daar die raaklijn rechthoekig staat op de middellijn BC, die gelijk is aan 't gegeven verschil, zoo heeft men de volgende

Fig. 156.



Constructie: Neem op de beenen van een rechten hoek een stuk BO, gelijk aan de helft van 't gegeven verschil, en BD $=$ A; beschrijf uit O als middelpunt, met OB als straal, een cirkel; trek vervolgens door D en O een lijn, die den cirkel snijdt in E en F, dan zijn DE en DF de gevraagde lijnen.

Opmerking. De constructie is altijd mogelijk en er is maar éen oplossing.

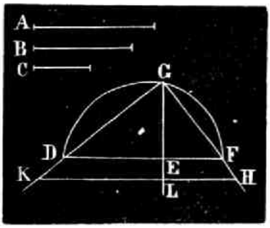
Gevolg. In de vierkantsvergelijking

$$x^2 - mx - n^2 = 0$$

stelt m het verschil der volstrekte waarden van de wortels voor en n^2 het produkt van die waarden. Het voorgaande werkstuk leert dus de wortels construeeren van de bovenstaande vergelijking.

§ 225. Werkstuk. *Een lijn te bepalen, zóo dat de verhouding van haar tweedemacht tot de tweedemacht van een gegeven lijn* A *gelijk is aan de verhouding van twee gegeven lijnen* B *en* C.

Fig. 157.



Constructie. Neem DE gelijk aan B en EF gelijk aan C; beschrijf op DF als middellijn een halven cirkel. Richt nu de loodlijn EG op en trek lijnen door G en D en door G en F, dan is

$$GD^2 = DE \times DF,$$
$$GF^2 = FE \times DF, \text{ dus}$$

$$\frac{GD^2}{GF^2} = \frac{DE}{FE} = \frac{B}{C}.$$

Neem GH gelijk aan de gegeven lijn A en trek HK evenwijdig met FD, dan is

$$\frac{GK}{GH} = \frac{GD}{GF}. \text{ Dus}$$

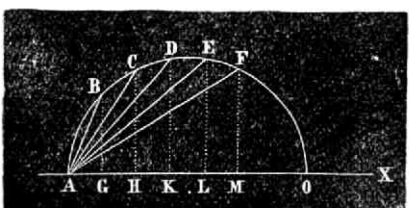
$$\frac{GK^2}{GH^2} = \frac{GD^2}{GF^2} \text{ of } \frac{GK^2}{A^2} = \frac{B}{C},$$

zoodat GK de begeerde lijn is.

Gevolgen. 1. Als in plaats van de twee lijnen B en C gegeven waren twee getallen, kon men twee lijnen bepalen, die tot elkaar staan als die getallen, zoodat men de voorgaande constructie ook kan toepassen, als de verhouding der tweedemachten door twee getallen wordt aangewezen.

2. Daar de oppervlakten van twee gelijkvormige veelhoeken tot elkaar staan als de tweedemachten van twee gelijkstandige zijden, zoo leert de voorgaande constructie ons ook: *de zijde van een veelhoek te vinden, die gelijkvormig is met een gegeven veelhoek, zóo dat de oppervlakten der twee veelhoeken tot elkaar staan als twee gegeven lijnen of getallen.*

Fig. 158.



§ 226. Werkstuk. *Indien een lijn als eenheid gegeven is, andere lijnen te construeeren, wier lengten worden uitgedrukt door* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, *enz.*

Constructie. Beschrijf een halven cirkel en plaats daarin $AB = 1$; laat uit B de loodlijn BG neer en neem $GH = HK = KL = LM = AG$, dan heeft men, volgens § 218,

$$AB^2 : AC^2 : AD^2 : AE^2 : AF^2 = AG : AH : AK : AL : AM,$$

$$1 : AC^2 : AD^2 : AE^2 : AF^2 = 1 : 2 : 3 : 4 : 5.$$

De eerste termen van de twee leden zijn gelijk; dus ook

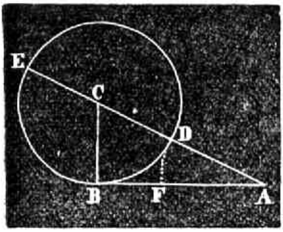
$$AC^2 = 2 \text{ of } AC = \sqrt{2},$$

$$AD^2 = 3 \text{ of } AD = \sqrt{3}, \text{ enz.}$$

§ 227. Bepaling. Als een lijn zoodanig in twee deelen verdeeld is, dat het vierkant van 't grootste stuk gelijk is aan 't produkt van de geheele lijn met het kleinste stuk, dan zegt men, dat de lijn **in de uiterste en middelste reden verdeeld is.**

WERKSTUK. *Een gegeven lijn in de uiterste en middelste reden te verdeelen.*

Fig. 159.



CONSTRUCTIE. Zij AB de gegeven lijn. Richt in haar eene uiteinde, B, eene loodlijn BC op, gelijk aan de helft der gegeven lijn. Beschrijf uit C als middelpunt, met CB als straal, een cirkel. (Deze zal AB raken.) Trek de lijn AC, die den cirkel snijdt in D, en neem AF $=$ AD, dan is F het gevraagde deelpunt.

BEWIJS. Verleng AC tot in E, dan heeft men, omdat AB een raaklijn is,

$$AE : AB = AB : AD.$$

Volgens een eigenschap der evenredigheden

$$(AE - AB) : (AB - AD) = AB : AD.$$

Daar DE $=$ 2BC $=$ AB, heeft men AE $-$ AB $=$ AE $-$ DE $=$ AD $=$ AF. Ook is AB $-$ AD $=$ AB $-$ AF $=$ BF, zoodat de voorgaande evenredigheid wordt

$$AF : BF = AB : AF, \text{ waaruit volgt}$$

$$AF^2 = BF \times AB.$$

Berekening van de stukken eener lijn, die in de uiterste en middelste reden verdeeld is.

Zij AB $= a$, dan is BC $= \frac{1}{2} a$, en volgens het theorema van Pythagoras vindt men hieruit

$$AC = \tfrac{1}{2} a \sqrt{5}.$$

Af

$$CD = \tfrac{1}{2} a.$$

$$AD = \tfrac{1}{2} a (\sqrt{5} - 1).$$

BF $=$ AB $-$ AF $= a - \frac{1}{2} a (\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2} a (3 - \sqrt{5})$.

VEELHOEKEN, BESCHREVEN IN OF OM EEN CIRKEL.

§ 228. Bepalingen. Als de hoekpunten van een veelhoek in een cirkelomtrek liggen, zegt men, dat de veelhoek in den cirkel beschreven is en dat de cirkel om den veelhoek beschreven is.

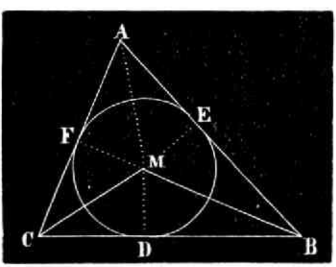
Als al de zijden van een veelhoek raken aan een cirkel, zegt men, dat de veelhoek om den cirkel beschreven is en dat de cirkel in den veelhoek beschreven is.

§ 229. Stelling. *Om en in elken driehoek kan een cirkel beschreven worden.*

Bewijs. Daar de drie hoekpunten van een driehoek niet in één rechte lijn liggen, zoo is het eerste gedeelte der stelling reeds in § 175 bewezen.

Als er binnen den driehoek een cirkel ligt, die raakt aan de zijden des driehoeks, dan is de afstand van het middelpunt van den cirkel tot de zijden des driehoeks gelijk aan den straal des cirkels. De afstanden van het middelpunt tot de zijden des driehoeks zijn dus gelijk.

Fig. 160.



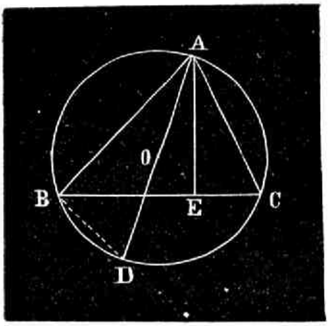
Het middelpunt moet daarom liggen in de lijnen, die twee hoeken B en C van den driehoek middendoor deelen. Omgekeerd zal het snijpunt M van die twee deellijnen op gelijke afstanden van de drie zijden liggen en dus het middelpunt zijn van een cirkel, die de drie zijden aanraakt. Daar de twee genoemde deellijnen elkaar slechts in één punt kunnen snijden, is er niet meer dan één cirkel mogelijk, die binnen een driehoek ligt en de zijden van dezen aanraakt.

Daar $\angle ABC + \angle ACB < 180^\circ$, is ook

$\angle MBC + \angle MCB < 180^\circ$, zoodat de lijnen, die twee hoeken van een driehoek middendoor deelen, elkaar (volgens § 33, Gevolg) moeten snijden. Hieruit volgt, dat er altijd één cirkel is, die binnen den driehoek ligt en de zijden van den driehoek aanraakt.

§ 230. *Den straal van den omgeschreven cirkel eens driehoeks te berekenen, als de drie zijden gegeven zijn.*

Fig. 161.



Zij BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ en noemen wij den straal r. Trek door hetzelfde hoekpunt A de loodlijn AE en de middellijn AD en vereenig B met D. Die $\triangle$ ABD staat in een halven cirkel en is dus rechthoekig. Verder is

$$\angle C = \angle D = \tfrac{1}{2} \textit{ boog } AB.$$

De rechthoekige driehoeken ACE en ADB zijn dus $\sim$.

Daaruit volgt

$$\begin{aligned} AC : AE &= AD : AB, \\ b : AE &= 2r : c, \\ bc &= 2r \times AE, \\ \text{vermenigvuldigd met} \quad a &= 2 \times \tfrac{1}{2}\, a, \\ \hline abc &= 4r \times O, \end{aligned}$$

waarbij O het oppervlak van dien driehoek voorstelt. Men heeft dus

$$r = \frac{abc}{4O} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

§ 231. *Den straal van den cirkel te berekenen, die de zijden van den driehoek aanraakt en binnen den driehoek ligt, als de zijden van den driehoek gegeven zijn.*

Men heeft (zie fig. 160) MD $=$ ME $=$ MF $= r$.

$$\begin{aligned} \triangle BCM &= \tfrac{1}{2} BC \times DM = \tfrac{1}{2}\, a \times r, \\ \triangle CAM &= \tfrac{1}{2} CA \times FM = \tfrac{1}{2}\, b \times r, \\ \triangle ABM &= \tfrac{1}{2} AB \times EM = \tfrac{1}{2}\, c \times r. \\ \hline \triangle ABC &= \tfrac{1}{2}(a + b + c) \times r = s \times r. \\ O &= s \times r. \\ r &= \frac{O}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}. \end{aligned}$$

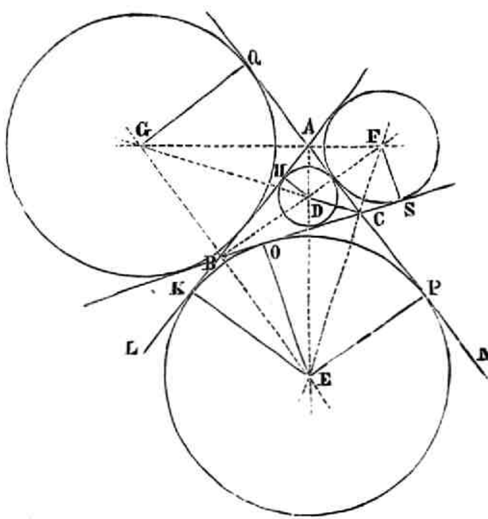
§ 232. Behalve de cirkel, die de zijden van een driehoek aanraakt en *binnen* den driehoek ligt, zijn er ook cirkels, die de zijden aanraken en *buiten* den driehoek liggen. Den eersten noemt men meer bepaald *den ingeschreven cirkel* en de andere, ter onderscheiding, *aangeschreven cirkels.*

Deelt men namelijk twee buitenhoeken A en C van den driehoek middendoor, dan is

$$\angle \mathrm{FAC} + \angle \mathrm{FCA} < 180^\circ,$$

zoodat de twee deellijnen elkaar noodzakelijk snijden in een punt F. Dit punt ligt op gelijke afstanden van de zijden des driehoeks en is dus het middelpunt van een cirkel, die aan de zijden raakt en buiten den driehoek ligt, dus van een *aangeschreven cirkel.*

Fig. 162.



Door de buitenhoeken A en B middendoor te deelen, vindt men een aangeschreven cirkel, die G tot middelpunt heeft. Door de buitenhoeken B en C middendoor te deelen, vindt men een aangeschreven cirkel, die E tot middelpunt heeft. Zoo vindt men in 't geheel *drie aangeschreven cirkels.*

§ 233. *De stralen der aangeschreven cirkels te berekenen, als d zijden van den driehoek gegeven zijn.*

Zij $EK = EO = EP = R_1$ en merken wij op, dat

$$\triangle ABC = \triangle EAB + \triangle ECA - \triangle EBC.$$

Verder

$$\begin{aligned} \triangle EAB &= \tfrac{1}{2} AB \times EK = \tfrac{1}{2} c \times R_1 \\ \triangle ECA &= \tfrac{1}{2} CA \times EP = \tfrac{1}{2} b \times R_1 \\ -\triangle EBC &= -\tfrac{1}{2} BC \times EO = -\tfrac{1}{2} a \times R_1 \\ \hline \triangle ABC &= \tfrac{1}{2}(c + b - a) \times R_1 \\ O &= (s - a) R_1 \\ R_1 &= \frac{O}{s - a}. \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$FS = R_2 = \frac{O}{s - b}.$$

$$GQ = R_3 = \frac{O}{s - c}.$$

Verband tusschen de stralen der in- en aangeschreven cirkels.

Uit de voorgaande formulen vindt men

1°. $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{s - a}{O} + \frac{s - b}{O} + \frac{s - c}{O} = \frac{3s - (a + b + c)}{O},$$

of $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{s}{O} = \frac{1}{r}.$$

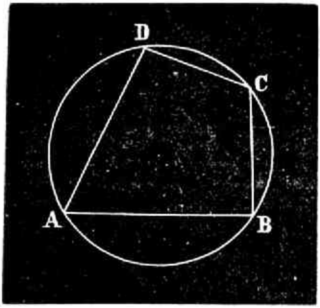
2°. $$r \times R_1 \times R_2 \times R_3 = \frac{O}{s} \times \frac{O}{s - a} \times \frac{O}{s - b} \times \frac{O}{s - c} = \frac{O^4}{O^2} = O^2,$$

of $\sqrt{r \times R_1 \times R_2 \times R_3} = O.$

§ 234. Daar een cirkel door drie zijner punten volkomen bepaald is, zal het in 't algemeen onmogelijk zijn, een cirkel te beschrijven, die door vier willekeurige punten gaat. Slechts in bijzondere gevallen kan men dus een cirkel beschrijven om een vierhoek, vijfhoek, enz.

Daar een cirkel door drie zijner raaklijnen bepaald is, geldt hetzelfde voor de ingeschreven cirkels.

Fig. 163.



Stelling. ***Als een vier~~kant~~hoek in een cirkel beschreven is, is de som van twee overstaande hoeken gelijk aan een gestrekten hoek.***

Bewijs. **Men heeft**

$\angle A = \frac{1}{2}$ *boog* BCD

$\angle C = \frac{1}{2}$ *boog* DAB

$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}$ *cirkelomtrek.*

$\angle A + \angle C = 180^\circ$.

Evenzoo vindt men

$\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Stelling. *Als een vierhoek niet in een cirkel is beschreven*, **d. i. als een cirkel, die door drie zijner hoekpunten gaat, niet door het vierde gaat,** *dan is de som van twee overstaande hoeken verschillend van een gestrekten hoek.*

Bewijs. **Als een cirkel beschreven wordt door C, D en A, dan zal het vierde hoekpunt buiten dien cirkel vallen, zooals in fig. 164*a*, of binnen dien cirkel, zooals in fig. 164*b*.**

Fig. 164*a*.

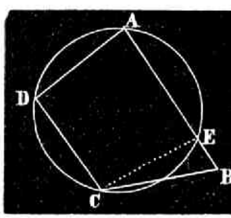
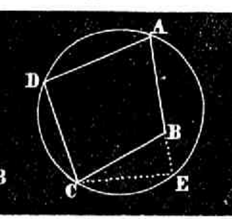


Fig. 164*b*.



In het eerste geval **heeft men (zie fig. 164*a*)**

$\angle A + \angle DCE = 180^\circ$, dus

$\angle A + \angle DCB > 180^\circ$, waaruit volgt

$\angle D + \angle B < 180^\circ$.

In het tweede geval **heeft men (zie fig. 164*b*)**

$\angle A + \angle DCE = 180^\circ$, dus

$\angle A + \angle DCB < 180^\circ$, waaruit verder volgt

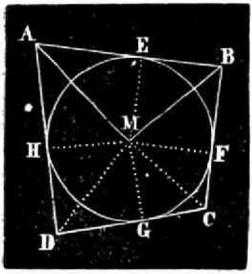
$\angle D + \angle ABC > 180^\circ$.

§ 235. Passen wij nu den algemeenen regel van § 43 toe, dan blijkt, dat de omgekeerde stellingen van de vorige ook waar zijn; dus

1°. *Als de som van twee overstaande hoeken eens vierhoeks gelijk is aan een gestrekten hoek, kan om dien vierhoek een cirkel beschreven worden.*

2°. *Als de som van twee overstaande hoeken eens vierhoeks verschillend is van een gestrekten hoek, kan om dien vierhoek geen cirkel beschreven worden.*

Fig. 165.



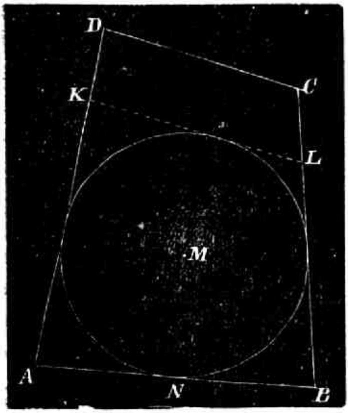
§ 236. STELLING. *Als een vierhoek om een cirkel beschreven is, zijn de sommen der overstaande ~~hoeken~~* zijden *even groot.*

BEWIJS. Volgens § 213, Gevolg, heeft men

$$\begin{aligned} AE &= AH \\ BE &= BF \\ CG &= CF \\ DG &= DH \\ \hline \text{samen} \quad AB + CD &= BC + DA. \end{aligned}$$

STELLING. *De sommen der overstaande zijden van een vierhoek zijn verschillend, als de vierhoek niet om een cirkel kan beschreven worden*, d. i. als een cirkel, die drie zijden aanraakt, niet tevens de vierde aanraakt.

Fig. 166.



BEWIJS. Zij ABCD de vierhoek, waarvan drie zijden DA, AB en BC door een cirkel aangeraakt worden. Er kan evenwijdig met CD een lijn KL getrokken worden, die wel aan den cirkel raakt.

Volgens de voorgaande stelling heeft men dan

$$AB + KL = AK + BL.$$

Ook is $DC < DK + CL + KL$.

En dus $AB + DC < AD + BC$, waarmee het gestelde bewezen is.

Evenzoo wanneer de vierde zijde niet, zooals CD, geheel buiten den cirkel ligt, maar den cirkel snijdt.

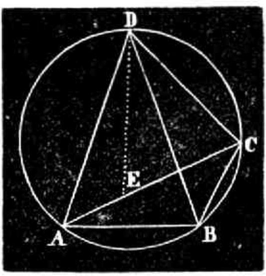
§ 237. Door toepassing van § 43 blijkt, dat de omgekeerde van de twee vorige stellingen waar zijn; dus

1°. *Als de sommen der overstaande zijden van een vierhoek gelijk zijn, kan in dien vierhoek een cirkel beschreven worden.*

2°. *Als de sommen der overstaande zijden van een vierhoek ongelijk zijn, kan in dien vierhoek geen cirkel beschreven worden.*

§ 238. STELLING. *Als een vierhoek in een cirkel kan beschreven worden, is het produkt der diagonalen gelijk aan de som der produkten van de overstaande zijden.*

Fig. 167.



BEWIJS. Trek DE zóo, dat $\angle$ ADE $= \angle$ BDC. Daar $\angle$ DAE $= \angle$ DBC $=$ $\frac{1}{2}$ *boog* CD, hebben de driehoeken DAE en DBC twee hoeken gelijk; zij zijn dus $\sim$, zoodat

$$DA : AE = DB : BC, \text{ of}$$
$$DA \times BC = AE \times DB.$$

Door bij elk der gelijke hoeken ADE en BDC op te tellen $\angle$ BDE, vindt men

$$\angle ADB = \angle EDC.$$

Ook is $\angle$ ABD $= \angle$ ECD $= \frac{1}{2}$ *boog* AD.

De driehoeken ABD en ECD hebben dus twee hoeken gelijk, zoodat zij $\sim$ zijn. Hieruit volgt

$$AB : BD = EC : CD, \text{ of}$$
$$AB \times CD = BD \times EC; \text{ opgeteld bij}$$
$$DA \times BC = BD \times AE.$$
$$\overline{AB \times CD + DA \times BC = BD \times (AE + EC).}$$
$$AB \times CD + DA \times BC = BD \times AC.$$

OPMERKING. De vorige stelling wordt het **theorema van Ptolemeus** genaamd, naar een Grieksch meet- en sterrenkundige, die haar heeft toegepast op het berekenen der koorden van hoeken aan 't middelpunt vun 0° tot 180°.

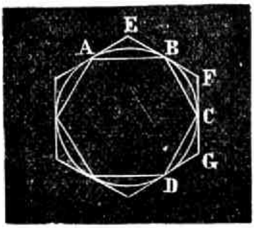
REGELMATIGE VEELHOEKEN.

§ 239. Bepaling. Een veelhoek, waarvan alle zijden en alle hoeken gelijk zijn, noem men een **regelmatigen veelhoek**.

Stellingen. *Als een cirkelomtrek in een willekeurig aantal gelijke cirkelbogen verdeeld is, dan vormen de koorden van die bogen een regelmatigen ingeschreven veelhoek, en de raaklijnen, in de deelpunten aan den cirkel getrokken, vormen een regelmatigen omgeschreven veelhoek.*

Bewijs. 1°. Als de bogen AB, BC, CD enz. gelijk zijn, dan zijn hunne koorden ook gelijk, zoodat de zijden van den veelhoek, die in den cirkel beschreven is, gelijk zijn. Verder is

Fig. 168.



$\angle$ ABC $=$ ½ *boog* AD $+$ ½ *boog* DC

$\angle$ BCD $=$ ½ *boog* AD $+$ ½ *boog* BA.

Daar de bogen BA en DC volgens de onderstelling gelijk zijn, zijn ook de hoeken ABC en BCD gelijk. Op dezelfde wijze toont men aan, dat de andere hoeken van den ingeschreven veelhoek gelijk zijn. Deze heeft bovendien de zijden gelijk en is dus regelmatig.

2°. Om aan te toonen, dat de omgeschreven veelhoek regelmatig is, merke men vooreerst op, dat de driehoeken EAB, FBC, GCD, enz. gelijkbeenig zijn, omdat de twee raaklijnen, die men uit een punt buiten een cirkel naar dien cirkel kan trekken, gelijk zijn. Bovendien zijn al die gelijkbeenige driehoeken $\cong$, daar men heeft

AB $=$ BC $=$ CD $=$ enz.

$\angle$ EAB $=$ $\angle$ EBA $=$ ½ *boog* AB $=$ $\angle$ FBC $=$ $\angle$ FCB $=$ ½ *boog* BC $=$ enz.

Uit de gelijk- en gelijkvormigheid van die driehoeken volgt:

1°. dat de hoeken van den veelhoek E, F, G, enz. gelijk zijn;

2°. dat de zijden EF, FG, enz., ieder gelijk aan twee beenen van de gelijkbeenige driehoeken, onderling gelijk zijn.

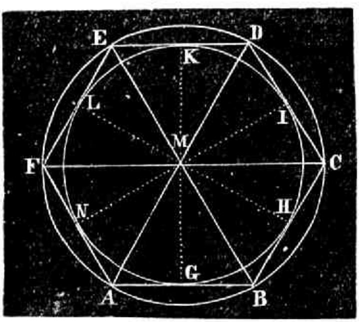
Opmerkingen. 1. Als men een cirkelboog in gelijke deelen verdeelt, dan blijkt op dezelfde wijze, dat de koorden van die deelen een gebroken lijn vormen, die uit onderling gelijke rechte lijnen bestaat, welke twee aan twee gelijke hoeken met elkaar maken. Die ingeschreven gebroken lijn noemt men **regelmatig**. Eveneens vormen de raaklijnen in de deelpunten van den cirkelboog een **regelmatige omgeschreven gebroken lijn**.

2. Als de zijden van een veelhoek, die in een cirkel beschreven is, gelijk zijn, dan zijn de bogen, die door de zijden onderspannen worden, ook gelijk, en de veelhoek is dus regelmatig.

§ 240. STELLING. *Om en in elken regelmatigen veelhoek kan een cirkel beschreven worden.*

BEWIJS. Om aan te toonen, dat om den regelmatigen veelhoek ABCDEF een cirkel kan beschreven worden, zullen wij bewijzen, dat een cirkel, die door drie opeenvolgende hoekpunten A, B en C gaat, door alle andere gaat. Zij M het middelpunt van den cirkel, die door A, B en C gaat, dan heeft men

Fig. 169.



$$MA = MB = MC.$$

Daar ook AB = BC, zijn MAB en MBC $\cong$. Dus zijn $\angle$ MBA en $\angle$ MBC onderling gelijk en derhalve ieder gelijk aan de helft van een hoek van den veelhoek. Nu is $\angle$ MCB, die gelijk is aan MBC, ook gelijk aan de helft van een hoek van den veelhoek, en bijgevolg ook $\angle$ MCD. Dus is

$$\angle MCD = \angle MCB,$$
$$MC = MC,$$
$$CD = CB;$$

zoodat de driehoeken MCB en MCD $\cong$ zijn. MBC is gelijkbeenig; dus ook MCD. Daar MD = MC, zal de cirkel, die door A, B en C gaat, ook door D gaan. Verder kan men geheel op dezelfde wijze aantoonen, dat MDE $\cong$ is met MCD, MEF met MDE en MFA met MEF. Men heeft dus MD = ME = MF, zoodat de punten D, E en F op den omtrek van den cirkel liggen, die door A, B en C gaat.

2°. Laat men uit M loodlijnen neer op AB, BC, CD, enz., dan volgt uit de gelijk- en gelijkvormigheid van de driehoeken MAB, MBC, MCD, enz., dat al die loodlijnen gelijk zijn:

$$MG = MH = MI = MK = ML = MN.$$

Beschrijft men dus uit M als middelpunt met MG als straal een cirkel, dan raakt deze aan al de zijden van den veelhoek.

OPMERKING. De cirkels, die men om en in een regelmatigen veelhoek beschrijven kan, zijn gelijkmiddelpuntig.

§ 241. BEPALINGEN. Het gemeenschappelijk middelpunt van de cirkels, die om en in een regelmatigen veelhoek kunnen beschreven worden, noemt men het middelpunt van den veelhoek.

Den straal van den omschreven cirkel noemt men den straal van den veelhoek.

Den straal van den ingeschreven cirkel noemt men het apothema van den veelhoek.

De hoeken van den veelhoek noemt men polygoonshoeken.

Een driehoek, die gevormd wordt door een zijde van den veelhoek en de stralen van hare uiteinden, noemt men een middelpuntsdriehoek. Volgens de vorige § zijn alle middelpuntsdriehoeken gelijkbeenig en onderling $\cong$.

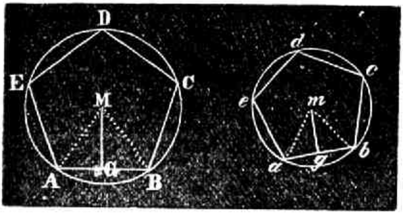
Een tophoek van zulk een gelijkbeenigen driehoek noemt men een middelpuntshoek van den veelhoek. Volgens de vorige § zijn alle middelpuntshoeken van denzelfden veelhoek gelijk, en voor een n-hoek dus gelijk aan $\frac{360°}{n}$.

§ 242. STELLING. *Twee regelmatige veelhoeken van hetzelfde aantal zijden zijn gelijkvormig.*

BEWIJS. Daar de grootte der hoeken van een regelmatigen veelhoek alleen afhangt van 't aantal zijden, zoo zijn de hoeken van twee regelmatige veelhoeken van 't zelfde aantal zijden gelijk. Bovendien zijn de zijden van den eenen veelhoek evenredig met die van den anderen, zoodat de twee veelhoeken volgens § 147 gelijkvormig zijn.

STELLING. *De zijden van twee regelmatige veelhoeken van hetzelfde aantal zijden staan tot elkaar als de stralen of de apothema's der veelhoeken.*

Fig. 170.



BEWIJS. Bij twee regelmatige n-hoeken heeft men

$$\angle AMB = \angle amb = \frac{360^\circ}{n}.$$

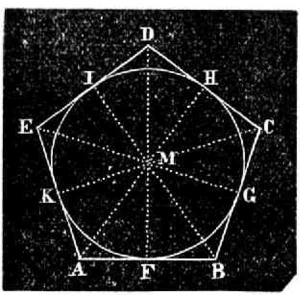
De gelijkbeenige driehoeken AMB en amb zijn dus $\sim$, zoodat

$$AB : ab = AM : am = MG : mg.$$

GEVOLGEN. 1. *De omtrekken van twee regelmatige veelhoeken van 't zelfde aantal zijden staan tot elkaar als hunne stralen of als hunne apothema's.* (Zie § 150.)

2. *De oppervlakken van twee regelmatige veelhoeken van 't zelfde aantal zijden staan tot elkaar als de vierkanten van hunne apothema's.* (Zie § 166.)

Fig. 171.



§ 243. STELLING. *Het oppervlak van een veelhoek om een cirkel beschreven is gelijk aan den omtrek, vermenigvuldigd met den halven straal van den ingeschreven cirkel.*

BEWIJS. Noemen wij den straal van den cirkel R, dan is

$$MF = MG = MH = MI = MK = R.$$

$$\triangle MAB = \tfrac{1}{2} R \times AB.$$
$$\triangle MBC = \tfrac{1}{2} R \times BC.$$
$$\triangle MCD = \tfrac{1}{2} R \times CD.$$
$$\triangle MDE = \tfrac{1}{2} R \times DE.$$
$$\triangle MEA = \tfrac{1}{2} R \times EA.$$

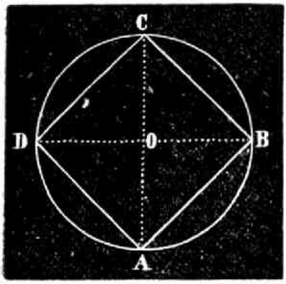
Samen *veelhoek* ABCDE $= \tfrac{1}{2}$ R (AB + BC + enz.),

veelhoek ABCDE $= \tfrac{1}{2}$ R $\times$ *omtrek*.

WERKSTUKKEN EN BEREKENINGEN.

§ 244. WERKSTUK. *Een vierkant in een cirkel te beschrijven.*

Fig. 172.



CONSTRUCTIE. Trek twee middellijnen AC en BD rechthoekig op elkaar en vereenig A met B, B met C, C met D en D met A, dan volgt uit de gelijk- en gelijkvormigheid van de rechthoekige driehoeken OAB, OBC, OCD en ODA:

$$AB = BC = CD = DA.$$

ABCD is dus een vierkant. (Zie § 239, Opmerking 2.)

BEREKENING. Zij R de straal van den cirkel, dan is in den rechthoekigen driehoek OAB:

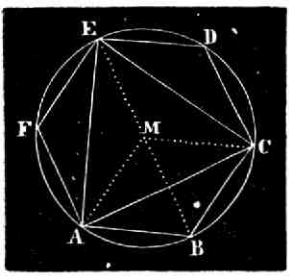
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2R^2.$$

$$AB = R\sqrt{2}.$$

WERKSTUKKEN. Door de bogen AB, BC, CD en DA middendoor te deelen, verkrijgt men volgens § 239 de hoekpunten van een *regelmatigen achthoek*.

Door de bogen middendoor te deelen, die door de zijden van een regelmatigen achthoek onderspannen worden, kan men een *regelmatigen zestienhoek* in den cirkel beschrijven.

Fig. 173.



Zoo voortgaande kan men dus in een cirkel achtereenvolgens regelmatige veelhoeken beschrijven van 4, 8, 16, 32, 64, ... en, in 't algemeen, van 2^n zijden.

§ 245. WERKSTUK. *In een cirkel een regelmatigen zeshoek te beschrijven.*

Onderstellen wij, dat ABCDEF een regelmatige zeshoek zij, in een cirkel beschreven. De middelpuntshoek AMB is dan gelijk aan $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. De driehoek AMB is dus gelijkzijdig, zoodat AB = AM, of in woorden: *de zijde van den zeshoek is gelijk aan den straal van den cirkel.*

Om den zeshoek te construeeren, moet men dus den straal als koorde in den cirkel uitzetten.

WERKSTUKKEN. Door drie niet opeenvolgende hoekpunten van den regelmatigen zeshoek te vereenigen, verkrijgt men een *regelmatigen driehoek*, in den cirkel beschreven: ACE bijv.

Door de bogen middendoor te deelen, die door de zijden van den zeshoek onderspannen worden, verkrijgt men de hoekpunten van een *regelmatigen ingeschreven twaalfhoek.*

Op die wijze kan men voortgaan, zoodat men in een cirkel regelmatige veelhoeken kan beschrijven van 3, 6, 12, 24, ... en, in 't algemeen, van $2^n \times 3$ zijden.

BEREKENING van de zijde des ingeschreven regelmatigen driehoeks.

Daar *boog* EF = *boog* FA = *boog* AB = 60°, zoo is

boog BAE = 180° = *een halven cirkelomtrek.*

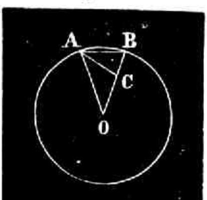
De lijn, die door B en E gaat, is dus een middellijn. De $\triangle$ ABE is derhalve rechthoekig en AB = R, BE = 2R.

$$AE^2 = BE^2 - AB^2$$
$$AE^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$
$$AE = R\sqrt{3}.$$

§ 246. WERKSTUK. *In een gegeven cirkel een regelmatigen tienhoek te beschrijven.*

Zij AB de zijde van een regelmatigen tienhoek, in den cirkel beschreven, dan is de middelpuntshoek

Fig. 174.



$$AOB = \frac{360°}{10} = 36°.$$

$$\angle OAB = \frac{180° - 36°}{2} = 72°.$$

Deelt men $\angle$ A middendoor door de lijn AC, dan is

$$\angle BAC = \angle OAC = 36°.$$

$$\angle ACB = 180° - \angle B - \angle CAB = 180° - 72° - 36° = 72°.$$

Daar de hoeken B en ACB ieder 72° bevatten, is $\triangle$ ABC gelijkbeenig of AC = AB.

Daar de hoeken O en OAC ieder 36° bevatten, is $\triangle$ OCA gelijkbeenig of AC $=$ OC.

Dewijl $\angle$ OAB middendoor gedeeld is, heeft men in $\triangle$ OAB

$$OA : AB = OC : CB.$$
$$OB : OC = OC : CB.$$
$$OC^2 = OB \times CB.$$

De straal OB is dus door het punt C in de uiterste en middelste reden verdeeld, zoodat OC het grootste stuk is. En daar OC $=$ AB, zoo is *de zijde van den ingeschreven regelmatigen tienhoek gelijk aan 't grootste stuk van den in de uiterste en middelste reden verdeelden straal.*

Om dus een regelmatigen tienhoek in een cirkel te beschrijven, moet men den straal van den cirkel in de uiterste en middelste reden verdeelen en het grootste stuk als koorde in den cirkel uitzetten.

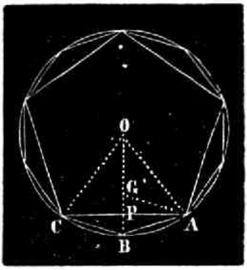
Berekening. Volgens de berekening in § 227 heeft men onmiddellijk

$$AB = OC = \tfrac{1}{2} R (-1 + \sqrt{5}).$$

§ 247. Werkstuk. *Een regelmatigen vijfhoek in een cirkel te beschrijven.*

Constructie. Verdeel den omtrek van den cirkel volgens de vorige § in tien gelijke deelen en vereenig de deelpunten om het andere, dan verkrijgt men een vijfhoek, wiens zijden ieder $^1/_5$ gedeelte van den cirkelomtrek onderspannen en die dus regelmatig is.

Fig. 175.



Berekening van de zijde des ingeschreven regelmatigen vijfhoeks.

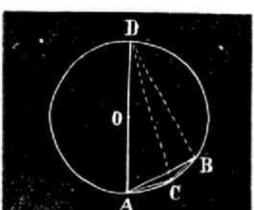
Zij AB $=$ BC $=$ OG de zijde des ingeschreven regelmatigen tienhoeks, dan is AC die van den vijfhoek. Daar OB den hoek AOC middendoor deelt, staat OB rechthoekig op het midden der basis AC van den gelijkbeenigen $\triangle$ AOC. En daar $\triangle$ ABG gelijkbeenig is, deelt de loodlijn AP de basis BG middendoor; dus PB $=$ PG. BG is gelijk aan 't kleinste stuk van den in de uiterste en middelste reden verdeelden straal; dus (zie § 227)

$$BG = \frac{1}{4} R (3 - \sqrt{5}).$$
$$BP = \frac{1}{4} R (3 - \sqrt{5}).$$
$$AB = \frac{1}{2} R (-1 + \sqrt{5}).$$
$$AP^2 = AB^2 - BP^2 = \frac{R^2}{16} (10 - 2\sqrt{5}).$$
$$AP = \frac{R}{4} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}.$$
$$AC = 2AP = \frac{R}{2} \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}.$$

WERKSTUKKEN. Als men de bogen middendoor deelt, die door de zijden van een regelmatigen tienhoek onderspannen worden, vindt men de hoekpunten van den *regelmatigen ingeschreven twintighoek*. Zoo kan men voortgaan om den ingeschreven regelmatigen veertighoek enz. te construeeren, zoodat men in een cirkel regelmatige veelhoeken kan beschrijven van 5, 10, 20, 40, 80, ... en in 't algemeen van $2^n \times 5$ zijden.

§ 248. WERKSTUK. *Een regelmatigen vijftienhoek in een cirkel te beschrijven.*

Fig. 176.



Wij moeten $\frac{1}{15}$ gedeelte van den cirkelomtrek bepalen, en daar $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$, zoo moet men slechts $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{10}$ gedeelte van den cirkelomtrek van elkaar aftrekken. Als dus AB de zijde van den regelmatigen zeshoek en AC de zijde van den tienhoek is, zal BC de zijde van den regelmatigen ingeschreven vijftienhoek zijn.

BEREKENING. Trek de middellijn AD en vereenig B en C met D, dan heeft men

$$AB = R, \quad AD = 2R,$$
$$AC = \frac{1}{2} R (-1 + \sqrt{5}).$$

Verder is

$$BD^2 = AD^2 - AB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$
$$BD = R\sqrt{3}.$$

Ook is

$$CD^2 = AD^2 - AC^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(10 + 2\sqrt{5}).$$

$$CD = \frac{R}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}.$$

Nu zijn van den vierhoek ACBD de diagonalen bekend en drie zijden: AD, BD en AC. Volgens het theorema van Ptolemeus is

$$AC \times CD = AC \times DB + DA \times BC.$$

$$R \times \frac{R}{2}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5}) \,.\, R\sqrt{3} + 2R \,.\, BC,$$

waaruit men vindt

$$BC = \frac{R}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}).$$

WERKSTUKKEN. Met behulp van den vijftienhoek kan men in denzelfden cirkel een *regelmatigen dertighoek* beschrijven, enz., zoodat men in een cirkel regelmatige veelhoeken kan beschrijven van 15, 30, 60, ... en, in 't algemeen, van $2^n \times 15$ zijden.

§ 249. Als men in de hoekpunten van een regelmatigen ingeschreven veelhoek raaklijnen aan den cirkel trekt, ontstaat daardoor een omgeschreven veelhoek, die volgens de stelling van § 239 regelmatig is. Als men dus een regelmatigen veelhoek van een bepaald aantal zijden in een cirkel kan beschrijven, dan *kan men een regelmatigen veelhoek van hetzelfde aantal zijden om dien cirkel beschrijven.*

OPMERKING. De regelmatige veelhoeken, waarvan tot dusverre gesproken is, zijn niet de eenige, die men in een cirkel kan beschrijven. GAUSS heeft in 1796 ontdekt, dat men, met behulp van passer en liniaal, een cirkelomtrek in n gelijke deelen kan verdeelen, als n ondeelbaar is en als tevens $n - 1$ een macht van 2 is. Als n ondeelbaar is en $n - 1$ niet een macht van 2, kan men, alleen met behulp van passer en liniaal, den cirkelomtrek niet in n gelijke deelen verdeelen. Zoo bestaat er geen constructie voor den 7-hoek, maar wel voor den 17-hoek, 257-hoek, 65537-hoek.

Met behulp der bovengenoemde veelhoeken kan men weer andere beschrijven, wier aantal zijden deelbaar is. Even als een constructie voor den 15-hoek afgeleid is uit die voor 6-hoek en 10-hoek, kan men den 51-hoek construeeren met behulp van 3-hoek en 17-hoek. Men heeft nl.

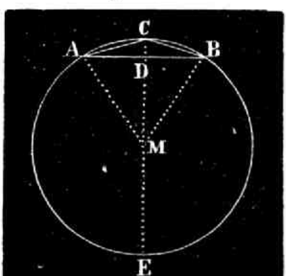
$$\frac{1}{3} - \frac{5}{17} = \frac{2}{51}.$$

De volgende 37 getallen duiden de aantallen zijden aan van de regelmatige veelhoeken, die minder dan 300 zijden hebben en die men in een cirkel kan beschrijven: 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272.

§ 250. Bij de volgende *berekeningen* duiden wij den straal van een cirkel aan door r; de zijden van een regelmatigen veelhoek, in dien cirkel beschreven, door a; de zijden van den regelmatigen veelhoek van evenveel zijden, om dien cirkel beschreven, door A, en de zijde van den regelmatigen veelhoek, die in den cirkel beschreven is en het dubbel aantal zijden heeft, door b.

Als de straal van een cirkel bekend is en de zijde van een ingeschreven regelmatigen veelhoek, de zijde te berekenen van den regelmatigen ingeschreven veelhoek van het dubbel aantal zijden.

Fig. 176*a*.



Zij $AB = a$, $AC = b$.

Men heeft

$$MA = MC = r \text{ en } CE = 2r.$$

De koorde AC is middelevenredig tusschen CE en $CD = CM - DM$; dus

$$b^2 = 2r(r - DM) = r(2r - 2DM).$$

In den rechthoekigen $\triangle$ MAD is

$$DM^2 = AM^2 - AD^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

$$DM = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - a^2)}.$$

Hierdoor wordt

$$b^2 = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2})}.$$

Deze formule noemt men gewoonlijk de *formule voor het dubbel aantal zijden.*

§ 251. Als men de lengte der zijde van een regelmatigen ingeschreven n-hoek kent, dan kan men, door herhaalde toepassing van de voorgaande formule, achtereenvolgens de zijden en bijgevolg de omtrekken, berekenen van een regelmatigen ingeschreven veelhoek van $2n$, $4n$, $8n$, ... zijden.

Als de straal van een cirkel 1 is, vindt men voor de zijde van het ingeschreven vierkant $\sqrt{2}$. Voor de zijde van den ingeschreven regelmatigen 8-hoek vindt men

$$\sqrt{(2-\sqrt{2})}.$$

De zijde van den 16-hoek is

$$\sqrt{\{2-\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}}.$$

De zijde van den 32-hoek is

$$\sqrt{[2-\sqrt{\{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}}]}.$$

Als $r = 1$ is, is ook de zijde van den ingeschreven regelmatigen 6-hoek 1. Voor de zijde van den 12-hoek vindt men, met behulp der formule voor het dubbel aantal zijden,

$$\sqrt{(2-\sqrt{3})}.$$

Hieruit vindt men voor de zijde van den ingeschreven 24-hoek

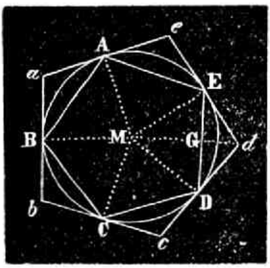
$$\sqrt{\{2-\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}}.$$

Voor de zijde van den 48-hoek vindt men

$$\sqrt{[2-\sqrt{\{2+\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}}]}.$$

§ 252. *Als de straal van een cirkel en de zijde van een ingeschreven regelmatigen veelhoek gegeven zijn, de zijde van den omgeschreven regelmatigen veelhoek van hetzelfde aantal zijden te berekenen.*

Fig. 177.



Als $de = A$ en $DE = a$, heeft men

$$dE = \tfrac{1}{2}A,\ EG = \tfrac{1}{2}a.$$

De rechthoekige driehoeken MGE en MEd hebben den scherpen hoek EMG gemeen, zoodat zij $\sim$ zijn.

Daarom is

$$MG : GE = ME : Ed, \text{ of}$$
$$MG : \tfrac{1}{2}a = r : \tfrac{1}{2}A.$$
$$A = \frac{ar}{MG}.$$

In den rechthoekigen $\triangle$ MGE is

$$MG = \sqrt{(ME^2 - GE^2)} = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}.$$

Door deze waarde voor MG in de plaats te stellen, komt er

$$A = \frac{ar}{\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}} = \frac{2ar}{\sqrt{(4r^2 - a^2)}}.$$

Met behulp van deze formule vindt men voor de zijde van den omgeschreven regelmatigen 6-hoek, als $r = a = 1$ is,

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

DE METHODE DER LIMIETEN.

§ 253. STELLING. *Als eenige veranderlijke grootheden ieder tot een bepaalde limiet naderen, dan heeft hare som tot limiet de som der limieten, waartoe de verschillende grootheden naderen*, of m. a. w. als X nadert tot A, IJ tot B, Z tot C, dan nadert $X + IJ + Z$ tot $A + B + C$.

BEWIJS. Wij moeten slechts laten zien, dat het verschil tusschen $A + B + C$ en $X + IJ + Z$ ten laatste kleiner wordt dan eenige te denken grootheid. Wij kunnen stellen

$$X = A + x,$$

waarin x positief of negatief is en tot 0 nadert. Evenzoo

$$IJ = B + y,$$

waarin y tot 0 nadert, en

$$Z = C + z,$$

waarin z tot 0 nadert. Door optelling der drie voorgaande vergelijkingen vindt men

$$X + IJ + Z = A + B + C + x + y + z.$$

$x + y + z$ drukt het verschil uit tusschen $A + B + C$ en $X + IJ + Z$. Elk der grootheden x, y en z nadert tot 0; hare som wordt dus ten laatste kleiner dan eenige te denken grootheid, of m. a. w. $X + IJ + Z$ heeft tot limiet $A + B + C$.

OPMERKING. De eigenschap gaat door, als één of meer der grootheden negatief zijn, en ook voor het verschil van twee grootheden.

§ 254. STELLING. *Als twee veranderlijke grootheden ieder tot een bepaalde limiet naderen, dan zal haar produkt tot limiet hebben het produkt der limieten van de twee factoren*, of: als X tot limiet heeft A en IJ heeft tot limiet B, dan zal XIJ tot limiet hebben AB.

BEWIJS. Stellen wij, even als in de vorige §,

$$\mathrm{X} = \mathrm{A} + x,\ \mathrm{IJ} = \mathrm{B} + y,$$

waarin x en y tot 0 naderen, dan heeft men

$$\mathrm{XIJ} = \mathrm{AB} + \mathrm{A}y + \mathrm{B}x + xy.$$

Omdat y tot 0 nadert, zal ook $\mathrm{A}y$ tot 0 naderen. Evenzoo $\mathrm{B}x$ en xy. De som van $\mathrm{A}y$, $\mathrm{B}x$ en xy heeft daarom ook tot limiet 0, zoodat het verschil tusschen XIJ en AB ten laatste kleiner wordt dan eenige te denken grootheid, of m. a. w. XIJ heeft tot limiet AB.

OPMERKING. Op dezelfde wijze toont men deze eigenschap aan voor drie of meer factoren.

§ 255. STELLING. *De limiet van 't quotient van twee veranderlijke grootheden is gelijk aan 't quotient van de limieten, waartoe deeltal en deeler naderen*, of als X tot limiet heeft A en IJ heeft tot limiet B, dan zal X : IJ naderen tot A : B.

BEWIJS. Wij stellen, even als vroeger, $\mathrm{X} = \mathrm{A} + x$ en $\mathrm{IJ} = \mathrm{B} + y$, dan is

$$\frac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{A} + x}{\mathrm{B} + y}$$

en wij moeten aantoonen, dat het verschil tusschen $\frac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{X}}$ en $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ tot 0 nadert. Men heeft

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{IJ}} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{A} + x}{\mathrm{B} + y} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B}x - \mathrm{A}y}{(\mathrm{B} + y)\,\mathrm{B}}.$$

Van de laatste breuk nadert de teller tot 0, terwijl de noemer tot limiet heeft B^2. Maar als de teller van een breuk tot grens heeft 0, terwijl de noemer niet tot 0 nadert, dan nadert ook de breuk zelve tot 0, zoodat het gestelde bewezen is.

BIJZONDER GEVAL. Als X tot limiet heeft A, zal $\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}$ tot limiet hebben 1.

§ 256. Als de overeenkomstige waarden van twee veranderlijke grootheden steeds gelijk zijn en de eene grootheid nadert tot een limiet, dan zal de andere grootheid blijkbaar tot dezelfde limiet naderen. De twee veranderlijke grootheden kunnen de twee leden eener vergelijking zijn.

Bestaat er een vergelijking tusschen eenige veranderlijke grootheden, waarbij deze verbonden zijn door optelling, aftrekking, vermenigvuldiging of deeling, en naderen de veranderlijke grootheden tot bepaalde limieten, dan zal, volgens de voorgaande opmerking en de eigenschappen der drie voorgaande §§, hetzelfde verband bestaan tusschen de limieten, waartoe de veranderlijke grootheden naderen.

Als het moeilijk is, het verband op te sporen tusschen eenige grootheden, geraakt men dikwijls tot dat verband, door die grootheden te beschouwen als de limieten van andere, meer eenvoudige. Vindt men een betrekking tusschen deze, dan gaat de vergelijking, die de betrekking aanwijst, ook door voor de grootheden, die de limieten zijn der meer eenvoudige. (Zie § 264, waar wij het oppervlak van een cirkel beschouwen als de limiet, waartoe het oppervlak van een ingeschreven regelmatigen veelhoek nadert, wanneer het aantal zijner zijden voortdurend aangroeit.)

Wanneer men het verband tusschen twee of meer grootheden opspoort, door ze te beschouwen als de limieten van andere grootheden, gebruikt men de *methode der limieten.*

OVER DE LENGTE VAN DEN CIRKELOMTREK.

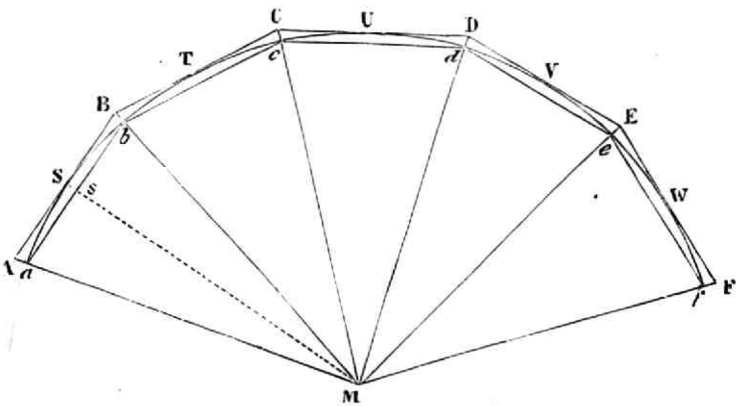
§ 257. Wij hebben vroeger gezegd, dat twee rechte lijnen *gelijk of even lang* genoemd worden, als zij elkaar kunnen bedekken. Wanneer de eerste rechte slechts een gedeelte van de tweede kan bedekken, dan zegt men, dat de tweede *langer* is dan de eerste. Op dezelfde wijze kan men een gebroken lijn met een rechte vergelijken, door de deelen, waaruit de gebroken lijn bestaat, naast elkander af te passen op de rechte. Maar men kan niet op dezelfde wijze handelen bij kromme lijnen in 't algemeen; deze kunnen slechts in bijzondere gevallen op elkaar worden gelegd, zooals wij hebben gezien bij cirkelbogen, die met gelijke stralen zijn beschreven. Cirkelbogen van verschillenden straal, alsmede cirkelbogen en rechte lijnen kunnen nooit op elkaar worden gelegd. Om nu ook de laatste met elkaar te kunnen vergelijken ten opzichte van hunne lengte, geven wij de volgende definitie:

De lengte van een cirkelboog is de limiet, waartoe een regelmatige gebroken lijn nadert, die met hare hoekpunten in den cirkelboog ligt, als het aantal deelen der gebroken lijn aanhoudend verdubbeld wordt.

Maar om deze definitie te mogen geven, moeten wij in de eerste plaats bewijzen, *dat er zulk een limiet bestaat*, en in de tweede plaats, *dat er slechts één limiet mogelijk is.*

1°. Zij *acf* een cirkelboog, waarin de gebroken lijn *abcdef* beschreven is. Kiest men nieuwe punten S, T, U, V, W van den cirkelboog en vervangt men de eerstgenoemde gebroken lijn *a*S*b*T*c*U*d*V*e*W*f*, dan is elke lijn zooals *ab* vervangen door twee andere, *a*S en S*b*. De gebroken lijn, die in den cirkelboog beschre-

Fig. 178.



ven is, is dus grooter geworden, en zal steeds grooter worden, als het aantal punten in den cirkelboog toeneemt. Hoe groot het aantal punten ook genomen worde, de ingeschreven gebroken lijn blijft kleiner dan een andere gebroken lijn aABCDEFf, die haar geheel omsluit (zie § 83). De ingeschreven gebroken lijn wordt dus bij het vermeerderen der hoekpunten steeds grooter, maar blijft kleiner dan aABCDEFf; zij nadert daarom tot een bepaalde limiet (zie § 130, Opmerking).

Opmerking. De omgeschreven gebroken lijn ABCDEF is gelijk aan de omgeschreven gebroken lijn, die ontstaat, als men raaklijnen trekt in a, b, c, d, e en f. De laatste omsluit elke ingeschreven gebroken lijn en is dus grooter dan een ingeschreven gebroken lijn. Een omgeschreven lijn, zoo als ABCDEF, is grooter dan elke ingeschreven lijn.

2°. Men merke vooreerst op, dat de lengten der gebroken lijnen $abcdef$ en ABCDEF, wier deelen twee aan twee parallel zijn, tot elkaar staan als Ms en MS. Wanneer het aantal hoekpunten der gebroken lijnen grooter wordt, nadert het verschil MS — Ms = sS < aS hoe langer hoe meer tot 0, omdat aS ten laatste kleiner wordt dan eenige te denken lijn. De verhouding van MS en Ms nadert dus tot 1 en de verhouding der gebroken lijnen eveneens, of m. a. w.: *de gebroken lijnen naderen tot dezelfde limiet*

Nu zullen wij aantoonen, dat alle gebroken lijnen, die in den cirkelboog beschreven zijn, tot dezelfde limiet naderen, door te laten zien, dat er onmogelijk twee verschillende limieten kunnen zijn. Waren namelijk in den cirkelboog twee gebroken lijnen beschreven, waarvan de eerste tot limiet heeft K en de tweede $K + k$, dan zouden de omgeschreven gebroken lijnen, wier deelen twee aan twee evenwijdig zijn met die der ingeschreven lijnen, tot dezelfde limieten naderen. Men kan het aantal hoekpunten der eerste omgeschreven gebroken lijn zóo groot nemen, dat zij minder dan $\frac{1}{3}k$ verschilt van hare limiet K en dus kleiner is dan $K + \frac{1}{3}k$. Eveneens zou men het aantal hoekpunten der tweede ingeschreven gebroken lijn zóo groot kunnen nemen, dat zij minder van hare limiet, $K + k$, verschilde dan $\frac{1}{3}$ K en dus grooter was dan $K + k - \frac{1}{3}k = K + \frac{2}{3}k$. Wij zouden alzoo hebben

een omgeschreven gebroken lijn $< K + \frac{1}{3}k$, en
een ingeschreven gebroken lijn $> K + \frac{2}{3}k$.

De eerste dier lijnen zou kleiner zijn dan de tweede, en dat is onmogelijk (zie Opmerking, 1). Er zijn dus geen twee verschillende limieten mogelijk.

§ 258. Ten aanzien van de regelmatige in- en omgeschreven lijnen, die, even als hierboven, tusschen dezelfde twee stralen, M*a* en M*f*, liggen, maken wij nog de volgende

OPMERKINGEN: 1. Bij het vermeerderen der hoekpunten worden de ingeschreven gebroken lijnen steeds langer, en zulk een lijn is daarom korter dan de limiet, waartoe de ingeschreven gebroken lijn nadert, of m. a. w.: *een ingeschreven gebroken lijn is korter dan de cirkelboog.*

2. Zoo veel te meer *is de koorde, die den boog onderspant, kleiner dan de boog.*

3. Een omgeschreven gebroken lijn is langer dan een ingeschreven gebroken lijn. Dit blijft waar, hoe groot ook het aantal hoekpunten der ingeschreven lijn genomen worde en dus ook wanneer deze tot hare limiet nadert, of m. a. w.: *een omgeschreven gebroken lijn is langer dan de cirkelboog.*

4. Al wat hierboven gezegd is van een cirkelboog, gaat door voor den geheelen cirkelomtrek. *Door de lengte van den cirkel verstaat men dus de limiet, waartoe de omtrek van een ingeschreven regelmatigen veelhoek nadert, als het aantal zijner hoekpunten voortdurend grooter wordt.*

§ 259. STELLING. *De lengten van twee cirkels staan tot elkaar als hunne stralen.*

BEWIJS. Moet de verhouding bepaald worden van de lengten L en *l* van twee cirkels, dan stelt men zich eerst voor, dat in die cirkels regelmatige veelhoeken beschreven zijn van hetzelfde aantal zijden. Deze zijn gelijkvormig en hunne lengten N en *n* staan tot elkaar als de stralen der omgeschreven cirkels R en *r* (zie § 242); dus

$$\frac{N}{n} = \frac{R}{r}.$$

Laat men nu het aantal zijden der twee regelmatige veelhoeken al grooter en grooter worden, dan blijft het tweede lid van bovenstaande vergelijking onveranderd; het deeltal in het eerste lid nadert tot L en de deeler tot l. En daar de limiet van een quotient gelijk is aan de limiet van deeltal, gedeeld door de limiet van deeler, zoo is

$$\lim. \frac{N}{n} = \frac{\lim. N}{\lim. n} = \frac{L}{l} = \frac{R}{r},$$

waardoor het gestelde bewezen is.

§ 260. 1. Als men in twee cirkelbogen, wier middelpuntshoeken gelijk zijn, regelmatige gebroken lijnen van 't zelfde aantal hoekpunten beschrijft, dan zijn die gebroken lijnen $\backsim$ en hare lengten staan tot elkaar als de stralen der cirkelbogen. Daardoor kan op de twee cirkelbogen dezelfde redeneering toegepast worden, die hierboven voor twee cirkelomtrekken gevolgd is. *Twee cirkelbogen, wier middelpuntshoeken gelijk zijn, staan dus tot elkaar als hunne stralen.*

2. Uit de vorige eigenschap en de eigenschap, dat twee cirkelbogen, die met gelijke stralen beschreven zijn, tot elkaar staan als hun middelpuntshoeken, volgt, dat *twee cirkelbogen, wier stralen en wier middelpuntshoeken ongelijk zijn, samengesteld evenredig zijn met hunne stralen en hunne middelpuntshoeken.*

3. Uit de vergelijking $\frac{L}{l} = \frac{R}{r}$ volgt

$$\frac{L}{R} = \frac{l}{r},$$ of in woorden:

De verhouding van een cirkelomtrek tot zijn straal is een standvastig getal. Dat getal wordt gewoonlijk voorgesteld door 2π, zoodat voor elken cirkel

$$L = 2\pi R.$$

OPMERKINGEN. Het teeken π is de Grieksche letter p, de eerste van een woord, dat omtrek beteekent.

Het getal π is onmeetbaar; dit is in 1761 bewezen door LAMBERT. Later heeft LEGENDRE aangetoond, dat de tweedemacht van π ook onmeetbaar is.

Ofschoon men π zoo nauwkeurig kan bepalen als men wil, is het niet mogelijk om, met behulp van een eindig aantal rechte lijnen en cirkels, een rechte lijn te construeeren, die zoo lang is als een gegeven cirkelomtrek. Dat dit onmogelijk is, werd in 1882 bewezen door Prof. LINDEMANN.

§ 261. *Benadering van het getal π.* Als de straal van een cirkel 1 is, stelt π zijn halven omtrek voor. Beschrijft men in en om dien cirkel regelmatige veelhoeken, zoo is de halve omtrek van den cirkel grooter dan de halve omtrek van den ingeschreven veelhoek en kleiner dan die van den omgeschreven veelhoek. π ligt dus tusschen de getallen, die de halve omtrekken van de twee veelhoeken voorstellen. In zooveel decimalen als de halve omtrekken der veelhoeken met elkander overeenkomen, in evenveel decimalen komen zij met π overeen. Voor den ingeschreven regelmatigen 6-hoek vindt men 3, voor den omgeschreven 3,46 ..., dus minder dan 4, zoodat π tusschen 3 en 4 ligt.

Met behulp der vroeger ontwikkelde formules vindt men voor de halve omtrekken

Aantal zijden.	Omgeschreven veelhoek.	Ingeschreven veelhoek.
12	3,21540	3,10582
24	3,15967	3,13262
48	3,14609	3,13935
96	3,14272	3,14103
192	3,14188	3,14145

$r = 1.$

Al deze halve omtrekken zijn onmeetbare getallen. De getallen der tweede kolom zijn alle grooter dan de halve omtrekken, maar zóo, dat zij minder dan *een honderdduizendste* te groot zijn. De getallen der derde kolom zijn alle te klein, maar zóo, dat zij minder dan *een honderdduizendste* verschillen van de omtrekken der ingeschreven veelhoeken.

Uit de halve omtrekken der 12-hoeken blijkt, dat π ligt tusschen 3,21540 en 3,10582.

Uit de halve omtrekken der 24-hoeken blijkt, dat π ligt tusschen 3,15967, 3,13262, enz.

Uit de 24-hoeken blijkt dus, dat de geheelen en de eerste decimaal van π zijn

$$3,1.$$

Uit de 96-hoeken blijkt, dat de geheelen en twee decimalen van π zijn

$$3,14.$$

Uit de 192-hoeken blijkt, dat men tot in drie decimalen nauwkeurig heeft

$$\pi = 3{,}141.$$

Deze benadering kan men voortzetten om zooveel decimalen van π te berekenen als men wil. Voortgaande zou men vinden

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots.$$

Bij berekeningen heeft men dikwijls noodig

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830988618379067153\ldots.$$

$$\log.\ \pi = 0{,}49714987269413385435\ldots.$$

§ 262. Door middel van kettingbreuken vindt men

$$\pi = \frac{22}{7},\ \text{tot in twee decimalen nauwkeurig},$$

$$\pi = \frac{333}{106},\ \text{tot in vier decimalen nauwkeurig},$$

$$\pi = \frac{355}{113},\ \text{tot in zes decimalen nauwkeurig}.$$

OPMERKING. Het getal π is het eerst met eenige nauwkeurigheid bepaald door ARCHIMEDES, die te Syracuse leefde, 287—212 v. C. Hij berekende de omtrekken van een om- en een ingeschreven regelmatigen 96-hoek en vond daardoor, dat π tusschen $3\frac{1}{7}$ en $3\frac{10}{71}$ ligt. De eerste van deze waarden, of 22 : 7, wordt gewoonlijk de verhouding van Archimedes genoemd.

Onze landgenoot METIUS bepaalde omstreeks het jaar 1550 de verhouding 355 : 113, die men gewoonlijk de verhouding van Metius noemt.

Onze landgenoot LUDOLPH VAN CEULEN zette de benadering veel verder voort (1586) en berekende door herhaalde worteltrekkingen het getal π eerst tot in 20 en later tot in 32 decimalen nauwkeurig. Naar hem wordt π dikwijls het Ludolphiaansche getal genoemd.

In den laatsten tijd heeft men, met behulp der hoogere algebra, de benadering veel verder voortgezet en π zelfs tot in 530 decimalen berekend.

§ 263. Volgens het voorgaande kan men den omtrek van een cirkel berekenen, als men zijn straal kent. Volgens een vroeger bewezen eigenschap staat een cirkelboog tot den geheelen omtrek, als het aantal graden van den middelpuntshoek, die op den boog staat, tot 360, of ook als het aantal booggraden van den boog tot 360. Als dus de straal van een cirkel gegeven is en een middelpuntshoek, dan kan men eerst den geheelen cirkelomtrek berekenen en daarna den boog, die tusschen de beenen van den hoek ligt. Men heeft, als n het aantal graden van een boog voorstelt en l zijn lengte,

$$l = \frac{n}{360} \times 2R\pi = \frac{nR\pi}{180}.$$

Indien de lengte van een cirkelboog gegeven is en de straal van den cirkel, dan kan men de lengte van den geheelen cirkelomtrek berekenen en daarna ook het aantal graden van den boog. Men heeft dan

$$2R\pi : l = 360 : n, \text{ of}$$

$$n = \frac{180l}{R\pi}.$$

VOORBEELD. *Het aantal graden te berekenen van een cirkelboog, die even lang is als de straal.*

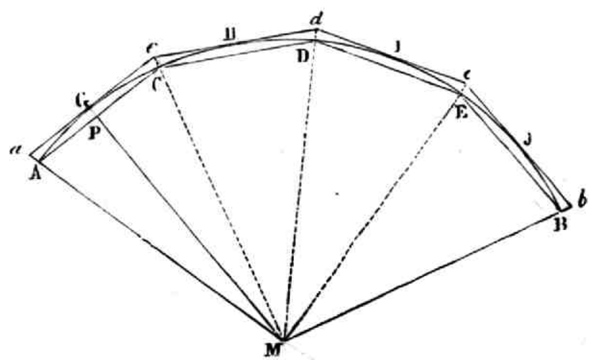
$$n = \frac{R \times 180^\circ}{R\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ\, 17'\, 44'', 80 \ldots.$$

HET OPPERVLAK VAN DEN CIRKEL EN VAN DEELEN VAN DEN CIRKEL.

§ 264. Wij hebben reeds gezien, hoe de oppervlakken van verschillende rechtlijnige figuren vergeleken worden. In dit hoofdstuk zullen wij het vergelijken der oppervlakken van kromlijnige figuren onderling en met rechtlijnige terugbrengen tot het vergelijken van rechtlijnige figuren met elkaar.

Beschouwen wij een cirkelsector MAHB met de in- en omgeschreven veelhoeken MACDEB en M*acdeb*. De ingeschreven veelhoek bedekt een gedeelte van den cirkelsector en is dus kleiner dan deze. De omgeschreven veelhoek wordt gedeeltelijk door den sector bedekt en is dus grooter dan deze. De cirkelsector is derhalve grooter dan de ingeschreven en kleiner dan de omgeschreven veelhoek, en dit blijft waar, als men het aantal deelen der gebroken lijnen ACDEB en *acdeb* voortdurend laat aangroeien. Daarbij wordt de ingeschreven veelhoek steeds grooter en de omgeschreven steeds kleiner. Voor het oppervlak O van veelhoek MACDEB vindt men, als AC = CD = DE = EB is, de lengte L der ingeschre-

Fig. 179.



ven gebroken lijn vermenigvuldigd met de helft van het apothema MP = a. Dus

$$O = \tfrac{1}{2}\, a \times L.$$

Wordt het aantal deelen der gebroken lijn steeds grooter, dan vindt men

$$\lim.\ O = \lim.\ (\tfrac{1}{2}\, a \times L) = \lim.\ \tfrac{1}{2}\, a \times \lim.\ L = \tfrac{1}{2}\, R \times \textit{boog}\ AB.$$

Evenzoo is het oppervlak o van den omgeschreven veelhoek gelijk aan de lengte l der omgeschreven gebroken lijn, vermenigvuldigd met den halven straal

$$o = \tfrac{1}{2}\, R \times l.$$

Wordt het aantal deelen der omgeschreven gebroken lijn steeds grooter, dan heeft men

$$\lim.\ o = \lim.\ (\tfrac{1}{2}\, R \times l) = \tfrac{1}{2}\, R \times \lim.\ l = \tfrac{1}{2}\, R \times \textit{boog}\ AB.$$

De oppervlakken der in- en omgeschreven veelhoeken naderen dus tot een gemeenschappelijke grens ($\frac{1}{2}$ R $\times$ *boog* AB), en het verschil van die oppervlakken kan dus zoo klein gemaakt worden, als men wil. Maar dan kan ook het verschil van het oppervlak des sectors met een der veelhoeken, bijv. met den ingeschreven veelhoek, zoo klein gemaakt worden, als men wil, of m. a. w.:

Men kan het oppervlak van een cirkelsector beschouwen als de grens van het oppervlak des ingeschreven veelhoeks, of als de grens van het oppervlak des omgeschreven veelhoeks.

Evenzoo *kan men het oppervlak van een cirkel beschouwen als de grens van het oppervlak van een ingeschreven regelmatigen veelhoek of van een omgeschreven regelmatigen veelhoek.*

Uit de voorgaande beschouwingen blijkt tevens de waarheid der

STELLINGEN. 1. *Het oppervlak van een cirkelsector is gelijk aan de lengte van zijn boog, vermenigvuldigd met den halven straal.*

2. *Het oppervlak van den cirkel is gelijk aan zijn omtrek, vermenigvuldigd met den halven straal.*

§ 265. STELLING. *Het oppervlak van een cirkel is gelijk aan* π, *vermenigvuldigd met het vierkant van den straal.*

GESTELDE. $O = R^2 \times \pi$.

BEWIJS. Volgens de voorgaande stelling is

$$O = \tfrac{1}{2} R \times \textit{omtrek}.$$

Volgens een vroeger bewezen stelling is

$$\textit{omtrek} = 2R \times \pi, \text{ dus}$$

$$O = \tfrac{1}{2} R \times 2R \times \pi = R^2 \times \pi.$$

§ 266. STELLING. *De oppervlakken van twee cirkels staan tot elkaar als de vierkanten hunner stralen.*

BEWIJS. Als O en o de oppervlakken van twee cirkels zijn, R en r hun stralen, dan heeft men

$$O = R^2 \times \pi \text{ en } o = r^2 \times \pi, \text{ waaruit volgt}$$

$$O : o = R^2 : r^2.$$

§ 267. STELLINGEN. 1. *De oppervlakken van twee sectoren van denzelfden cirkel staan tot elkaar als hun bogen of als hun middelpuntshoeken.*

2. *De oppervlakken van twee sectoren, die gelijke middelpuntshoeken hebben, staan tot elkaar als de vierkanten hunner stralen.*

BEWIJZEN. Laat O en o de oppervlakken van twee cirkelsectoren voorstellen, R en r hunne stralen, L en l hunne bogen, dan heeft men volgens § 264

$$O = \tfrac{1}{2}\, R \times L \text{ en } o = \tfrac{1}{2}\, r \times l; \text{ dus}$$

$$\frac{O}{o} = \frac{R}{r} \times \frac{L}{l}.$$

In het eerste geval zijn R en r gelijk, zoodat men heeft

$$\frac{O}{o} = \frac{L}{l};$$

en daar nu de verhouding van L en l gelijk is aan de verhouding der middelpuntshoeken, zoo is de eerste stelling bewezen.

In het tweede geval kan men, volgens § 259, voor de verhouding van L en l in de plaats stellen de verhouding van R en r; dus

$$\frac{O}{o} = \frac{R}{r} \times \frac{L}{l} = \frac{R}{r} \times \frac{R}{r} = \frac{R^2}{r^2}.$$

§ 268. *Het oppervlak van een cirkelsegment te berekenen.* Als het segment kleiner is dan een halve cirkel, zooals het segment CGD in fig. 110, dan is het gelijk aan 't verschil van een cirkelsector MCGD en een driehoek MCD.

Als het segment grooter is dan een halve cirkel, zoo als het segment CED in fig. 110, dan is het gelijk aan de som van een cirkelsector MCED en een driehoek MCD.

Het oppervlak van den sector kan men berekenen, als men den boog kent en den straal. Om het oppervlak des driehoeks te berekenen moet men, behalve den straal, nog de koorde van den boog kennen. Om dus het segment te berekenen moet men den straal kennen, den boog van 't segment, en de koorde van dien boog.

VRAAGSTUKKEN.

§ 15—§ 28.

1. Van een cirkel is de straal 3 cM., terwijl een punt 25 mM. van het middelpunt verwijderd is. Zal dat punt binnen of buiten den cirkel liggen?

2. Bereken het supplement van een hoek, die gelijk is aan 25° 37′ 21″.

3. Bereken het complement van denzelfden hoek.

4. Van een hoek is het complement 31° 27′; hoe groot is zijn supplement?

5. Van een hoek is het supplement 100° 12′; hoe groot is zijn complement?

6. Hoeveel bedraagt het verschil tusschen het supplement en het complement van een hoek?

7. Welken hoek maken de lijnen met elkaar, die een hoek en zijn supplement middendoor deelen?

8. Welken hoek maken de lijnen met elkaar, die een hoek en zijn complement middendoor deelen? 45°

9. Van de vier hoeken, die ontstaan door snijding van twee lijnen, is er één gelijk aan 42° 17′ 8″. Bereken de andere hoeken.

§ 36—§ 47.

10. Kunnen de hoeken van een driehoek zijn 37°, 50° en 48°?

11. Twee hoeken van een driehoek zijn 50° en 72°. Hoe groot is de derde hoek?

12. Van driehoek ABC is $\angle A = 52^\circ$, $\angle B = 48^\circ$. Hoe groot is een buitenhoek bij het hoekpunt C?

13. Van een driehoek ABC is een buitenhoek bij C 94°, terwijl $\angle A$ 50° bevat. Hoe groot is $\angle B$?

14. Van een driehoek is een binnenhoek $37^\circ 12'$ en een buitenhoek $84^\circ 25'$. Hoe groot zijn de andere binnen- en buitenhoeken?

15. Bereken de hoeken van een gelijkzijdigen driehoek.

16. Van een gelijkbeenigen driehoek is de tophoek 75°. Hoe groot zijn de hoeken aan de basis?

17. Van een rechthoekigen driehoek is een der scherpe hoeken $37^\circ 15' 12''$. Hoe groot is de andere scherpe hoek?

18. Van een driehoek is $\angle A = 30^\circ$ en $\angle B = 70^\circ$. Welke hoeken maken met elkaar de lijnen, die $\angle A$ en $\angle B$ middendoor deelen?

19. Kunnen de zijden van een driehoek zijn 15 cM., 7 cM. en 6 cM.? Of kunnen ze zijn 7 cM., 10 cM. en 3 cM.?

20. Bewijs, dat de lijn, die den nevenhoek van den tophoek van een gelijkbeenigen driehoek middendoor deelt, evenwijdig loopt met de basis.

21. Bewijs, dat de som der supplementen van de hoeken van een driehoek twee gestrekte hoeken bedraagt.

22. Bewijs, dat de som der complementen van de hoeken van een scherphoekigen driehoek een rechten hoek bedraagt. $3 \times 90 - 180$

23. Als men een punt binnen een driehoek vereenigt met de hoekpunten, is de som der drie vereenigingslijnen kleiner dan de omtrek van den driehoek en grooter dan de halve omtrek. Bewijs die twee eigenschappen.

24. Hoe groot is een hoek van een driehoek, als hij gelijk is aan de som der twee andere hoeken.

25. Een driehoek is rechthoekig, als de lijn, die een zijner hoekpunten met het midden der overstaande zijde verbindt, gelijk is aan de helft van die zijde. Bewijs dit.

26. Een hoek van een driehoek is stomp, als de lijn, die zijn hoekpunt verbindt met het midden der overstaande zijde, kleiner is dan de helft dier zijde. Bewijs dit.

§ 47—§ 68.

27. De loodlijnen, die men uit de uiteinden der basis van een gelijkbeenigen driehoek kan neerlaten op de overstaande zijden, zijn gelijk.

28. De loodlijnen, die men uit de uiteinden eener zijde van een driehoek neerlaat op de lijn, die het midden dier zijde met het overstaande hoekpunt verbindt, zijn even lang.

29. Een driehoek is gelijkbeenig, als de loodlijnen, die men uit twee hoekpunten op de overstaande zijden kan neerlaten, even lang zijn. Bewijs dit. ?Is niet andersom†.

30. Een driehoek is gelijkzijdig, als zijn drie loodlijnen even lang zijn. Bewijs dit.

31. Twee gelijkzijdige driehoeken zijn gelijk en gelijkvormig, als de hoogte van den eenen driehoek gelijk is aan die van den anderen.

32. De lijn, die een hoekpunt van een driehoek verbindt met het midden der overstaande zijde, is kleiner dan de halve som der twee andere zijden.

33. De lijnen, die de hoekpunten van een driehoek verbinden met de middens der overstaande zijden, zijn samen kleiner dan de omtrek van den driehoek.

34. Als men uit het midden eener zijde van een driehoek lijnen trekt, evenwijdig aan de andere zijden van dien driehoek, dan ontstaan twee driehoeken, die gelijk en gelijkvormig zijn.

35. Als men door de hoekpunten van een driehoek lijnen trekt, evenwijdig met de overstaande zijden, en die lijnen verlengt tot zij elkaar snijden, dan ontstaan drie driehoeken, die gelijk- en gelijkvormig zijn met den gegeven driehoek.

36. De lijnen, die de hoeken aan de basis van een gelijkbeenigen driehoek middendoor deelen, zijn even lang.

37. De lijnen, die de uiteinden der basis van een gelijkbeenigen driehoek verbinden met de middens der overstaande zijden, zijn even lang.

38. Bewijs, dat de drie lijnen, die de zijden van een driehoek rechthoekig middendoor deelen, door één punt gaan.

† tenzij de hoekpunten uit de basis genomen worden, of wel dat een gelijkzijdige driehoek is.

39. Bewijs, dat de drie lijnen, die de hoeken van een driehoek middendoor deelen, door één punt gaan.

40. De som der loodlijnen, die men uit een punt der basis van een gelijkbeenigen driehoek kan neerlaten op de beenen, is gelijk aan de loodlijn, uit een uiteinde der basis neergelaten op de overstaande zijde. Bewijs dit.

41. Als een hoek van een rechthoekigen driehoek 30° bevat, is de zijde tegenover dien hoek de helft der hypotenusa. Bewijs dit.

§ 68—§ 83.

42. Construeer driehoeken, wier zijden respectievelijk zijn:

$2\frac{1}{2}$, 3 en 5 cM.;
24, 27 en 30 mM.;
2, 3 en 5 cM.;
18, 21 en 40 mM.

43. Construeer een gelijkzijdigen driehoek, wiens zijden 3 cM. lang zijn.

44. Construeer een driehoek, als een zijde gegeven is en als gij weet, dat de aanliggende hoeken 45° en 60° zijn.

45. Construeer een rechthoekigen driehoek, als een rechthoekszijde en de schuine zijde gegeven zijn.

46. Construeer een gelijkzijdigen driehoek, als zijn hoogte gegeven is.

47. Verdeel een hoek in vier gelijke deelen.

48. Verdeel een rechten hoek in drie gelijke deelen.

OPMERKING. De constructie: een willekeurigen hoek in drie gelijke deelen te verdeelen, kan niet verricht worden met behulp der postulaten in de planimetrie. De Grieksche meetkundigen hebben verschillende kromme lijnen uitgedacht om de vraag te beantwoorden Latere wiskundigen hebben afzonderlijke werktuigen vervaardigd om een willekeurigen hoek in drie gelijke deelen te verdeelen.

Evenmin kan men met de gewone hulpmiddelen: passer en liniaal, een willekeurigen hoek in 5, 6, 7, 9 enz. gelijke deelen verdeelen. De verdeeling kan alleen uitgevoerd worden, als het aantal deelen 2^n is.

49. Een punt te vinden, dat op gelijke afstanden ligt van drie gegeven lijnen.

50. Een punt te vinden, dat op gelijke afstanden ligt van drie gegeven punten.

51. In een gegeven lijn een punt te bepalen, dat op gelijke afstanden ligt van twee gegeven punten.

52. Construeer een gelijkbeenigen driehoek, als zijn basis en zijn hoogte gegeven zijn.

53. Construeer de hoeken aan de basis van een gelijkbeenigen driehoek, als zijn tophoek gegeven is.

54. Construeer een driehoek, als zijn hoogte en zijn opstaande zijden gegeven zijn.

55. In een gegeven lijn een punt te bepalen, dat op gelijke afstanden ligt van twee andere gegeven lijnen.

56. Construeer een gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek, als zijn hoogte gegeven is.

57. Een driehoek te beschrijven, waarvan gegeven zijn: een hoek, een aanliggende zijde en de som der twee andere zijden (zie fig. 23).

§ 83—§ 109.

58. Hoeveel diagonalen kan men trekken uit één hoekpunt van een vijftienhoek? $n-3=12$.

59. In hoeveel driehoeken wordt een twaalfhoek verdeeld door de diagonalen, die men uit één hoekpunt kan trekken? $n-2:10$

60. Hoeveel diagonalen kan men trekken in een tienhoek? $\frac{10(10-3)}{2}=35$

61. Bereken de som der hoeken van een vierhoek. 380

62. Hoeveel bedraagt de som der hoeken van een vijftienhoek? $n-2(180):13$ gest. h

63. Van een vijfhoek zijn vier der hoeken 137° 12′, 48°, 62° en 162° 15′. Hoe groot is de andere hoek?

64. Van een zeshoek staan de hoeken tot elkaar als 2, 3, 5, 6, 7, 1. Bereken elk der hoeken. $2x+3x$ en $24x=720$ $x=30$

65. Aan hoeveel gestrekte hoeken is de som der supplementen van de hoeken eens tienhoeks gelijk?

66. Hoeveel bedraagt die som bij een n-hoek?

67. Als een diagonaal twee hoeken van een vierhoek middendoor deelt, staat zij rechthoekig op het midden der andere diagonaal.

68. Bewijs het omgekeerde der vorige stelling.

69. Wat is het omgekeerde van de stelling 36? (Hier wordt naar de stelling gevraagd en niet naar een bewijs. Twee bewijzen van het omgekeerde der stelling in 36 vindt men in mijn werkje: *Methoden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken.*)

70. Door een gegeven punt een lijn te trekken, waarvan twee evenwijdige lijnen een stuk van gegeven lengte afsnijden.

71. Verdeel een gegeven rechte lijn in drie gelijke deelen.

72. Hoeveel zijden heeft een veelhoek, als de som zijner hoeken zeven gestrekte hoeken is? 7+2

73. Construeer een ruit, als hare diagonalen gegeven zijn.

74. Beschrijf een parallelogram, waarvan een zijde en de diagonalen gegeven zijn.

75. In een scheefhoekig parallelogram is die diagonaal de langste, welke de hoekpunten der scherpe hoeken verbindt.

76. De stukken, waarin de diagonalen van een gelijkbeenig trapezium elkaar verdeelen, vormen met de zijden van het trapezium vier driehoeken. Twee daarvan zijn gelijkbeenig en de twee andere zijn gelijk en gelijkvormig.

77. Het verschil tusschen de evenwijdige zijden van een trapezium is grooter dan het verschil tusschen de twee beenen.

78. Beschrijf een trapezium, als zijn vier zijden gegeven zijn.

79. Van een lijn, die men door het snijpunt der diagonalen van een parallelogram trekt, worden door dat snijpunt en twee evenwijdige zijden gelijke stukken afgesneden.

80. Verdeel een gegeven rechte lijn in vijf gelijke deelen.

81. De loodlijnen, die men uit de uiteinden der basis van een gelijkbeenig trapezium kan neerlaten op de beenen van het trapezium, zijn even lang.

82. Bewijs ook het omgekeerde van de vorige stelling.

83. Twee trapeziums zijn gelijk en gelijkvormig, als de evenwijdige zijden van het eene gelijk zijn aan die van het andere en als tevens de beenen van het eene gelijk zijn aan die van het andere.

84. Een ruit wordt door hare diagonalen in vier driehoeken verdeeld, die gelijk en gelijkvormig zijn.

85. De lijn, die de middens der evenwijdige zijden van een gelijkbeenig trapezium vereenigt, staat loodrecht op de evenwijdige zijden.

86. In een vierkant ABCD wordt door A een lijn getrokken, die BC in E en CD in F snijdt. Een loodlijn uit D op AE neergelaten, snijdt BC in G en AB in H. Bewijs

$$AE = DH \text{ en } AF = DG.$$

87. In een vierkant ABCD is P een punt in AB en Q een punt in CD. Een lijn, die rechthoekig op PQ staat, snijdt BC in R en AD in S. Bewijs

$$PQ = RS.$$

88. Een vierkant te beschrijven, welks zijden achtereenvolgens door vier gegeven punten gaan. (Een oplossing van dit vraagstuk vindt men op bl. 73 van den eersten jaargang van mijn *Tijdschrift voor de Beginselen der Wiskunde.*)

89. Een lijn, die door het snijpunt der diagonalen van een parallelogram getrokken wordt, verdeelt het parallelogram in twee trapeziums, die gelijk en gelijkvormig zijn.

§ 114—§ 123.

90. Van een lijn worden door drie evenwijdige lijnen twee stukken afgesneden, 7 en 9 eenheden lang. Het grootste stuk, dat de drie evenwijdige lijnen van een andere lijn afsnijden, is 11 eenheden; hoe lang is het kleinste stuk, dat van die zelfde lijn afgesneden wordt?

91. Twee zijden van een driehoek zijn lang 11 en 15. Door een lijn evenwijdig aan de derde zijde wordt de eerste verdeeld in twee stukken, lang 4 en 7. In welke stukken wordt de tweede zijde verdeeld?

92. Een zijde van een driehoek is lang 10. Evenwijdig aan die zijde wordt een lijn getrokken, die een zijde van den driehoek verdeelt in twee stukken, 5 en 7. Hoe lang is de evenwijdige lijn?

93. Van een trapezium zijn de evenwijdige zijden 13 en 15. Hoe lang is de lijn, die de beenen middendoor deelt?

94. Als men de punten vereenigt, die de zijden van een driehoek middendoor deelen, ontstaan vier driehoeken, die gelijk en gelijkvormig zijn. Bewijs dit.

95. Als men de zijden van een willekeurigen vierhoek middendoor deelt en de deelpunten der opeenvolgende zijden vereenigt, ontstaat een parallelogram. Bewijs dit.

96. Welke soort van parallelogram ontstaat, als men in plaats van een willekeurigen vierhoek neemt

een vierkant,
een ruit,
een rechthoek,
een parallelogram?

97. Bewijs het omgekeerde der stelling van § 118.

98. Van een driehoek zijn de zijden 15, 16 en 17 cM. Bereken de stukken, waarin elke zijde verdeeld wordt door de lijn, die den overstaanden hoek middendoor deelt.

99. Construeer twee rechte lijnen, als hare som en hare verhouding gegeven zijn.

100. Construeer een driehoek, waarvan gegeven zijn de stukken, waarin de basis verdeeld wordt door de lijn, die den tophoek middendoor deelt, benevens een der opstaande zijden.

§ 123—§ 130.

101. Een trapezium wordt door zijn diagonalen in vier driehoeken verdeeld, waarvan twee gelijkvormig zijn.

102. Van een driehoek zijn de zijden 7, 11 en 13; van een tweeden driehoek, die gelijkvormig is met den eersten, is de grootste zijde 30. Bereken de andere zijden van dezen driehoek.

103. Als het kleinste der beenen van een rechthoekig trapezium middelevenredig is tusschen de evenwijdige zijden, dan staan de diagonalen rechthoekig op elkaar.

104. Bewijs het omgekeerde der vorige stelling.

105. Twee loodlijnen van een driehoek maken een evenredigheid met de zijden, waarop zij neergelaten zijn. Bewijs dit.

106. Van een driehoek zijn de zijden 8, 11 en 13; van een drie-

hoek, die met den eerstgenoemden gelijkvormig is, is de omtrek 72. Bereken de zijden van den laatsten driehoek.

107. Kunnen de loodlijnen van een driehoek zijn 1, 2 en 3 cM.?

108. In twee gelijkvormige driehoeken zijn de loodlijnen evenredig.

109. Twee driehoeken zijn gelijkvormig, als de loodlijnen van den eenen evenredig zijn met die van den anderen.

110. Van een driehoek zijn de loodlijnen 7, 8 en 9; van een gelijkvormigen driehoek is de loodlijn op de grootste zijde 14. Bereken de twee onbekende loodlijnen van dezen driehoek.

111. In een parallelogram is de afstand van het grootste paar evenwijdige zijden kleiner dan de afstand van het andere paar evenwijdige zijden. Bewijs dit.

§ 136—§ 143.

112. Van een rechthoekigen driehoek is de schuine zijde 15 cM. en de eene rechthoekszijde 13 cM. Bereken de stukken, waarin de hypotenusa verdeeld wordt door de loodlijn.

113. Bereken ook van den driehoek in het vorige vraagstuk de loodlijn en de andere rechthoekszijde.

114. De schuine zijde van een rechthoekigen driehoek wordt door de loodlijn verdeeld in twee stukken, lang 8 en 15 cM. Bereken de rechthoekszijden in honderdsten van millimeters nauwkeurig.

115. Van een rechthoekigen driehoek zijn de rechthoekszijden 7 en 8. Bereken de hypotenusa in drie decimalen nauwkeurig.

116. Van een rechthoekigen driehoek is de eene rechthoekszijde 10 en de schuine zijde 15. Bereken de andere rechthoekszijde in duizendste deelen nauwkeurig.

117. Bereken de loodlijn van den vorigen driehoek in honderdste deelen nauwkeurig.

118. Van een driehoek zijn de zijden 8, 9 en 10 cM. Bereken de projectie van de grootste zijde op de kleinste.

119. Twee zijden van een driehoek zijn 11 en 13 cM., en de projectie van de eerste op de tweede is 5 cM. Hoe lang is de derde zijde, in tienden van millimeters nauwkeurig?

120. Als a, b en c de zijden van een driehoek voorstellen, vraagt men in elk der volgende gevallen te berekenen, of de driehoek rechthoekig, scherphoekig dan wel stomphoekig is;

$$a = 5,\ b = 7,\ c = 9;$$
$$a = 10,\ b = 8,\ c = 6;$$
$$a = 13,\ b = 14,\ c = 15;$$
$$a = 15,\ b = 20,\ c = 25;$$
$$a = 13,\ b = 17,\ c = 20.$$

121. Bereken de loodlijnen van een driehoek, als zijn zijden zijn 13, 14 en 15 cM.

122. Van een gelijkbeenigen driehoek is de basis 7 en de hoogte 6. Bereken de opstaande zijden in twee decimalen nauwkeurig.

123. De diagonalen van een ruit zijn 5 en 14 cM. Bereken de zijde tot in millimeters nauwkeurig.

124. Van een gelijkzijdigen driehoek de hoogte te bepalen, als de zijde a is. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$

125. Bepaal de zijde van een gelijkzijdigen driehoek, als zijn hoogte b is. $\frac{2}{3}b\sqrt{3}$

126. Bereken, in twee decimalen nauwkeurig, de hoogte van een trapezium, als zijn evenwijdige zijden 9 en 12 cM. zijn en de beenen 12 en 13 cM.

§ 143—§ 154.

127. Twee veelhoeken zijn gelijkvormig, als de hoeken op één na van den eenen gelijk zijn aan de hoeken op één na van den anderen, als de zijden op twee na van den eenen evenredig zijn met de zijden op twee na van den anderen, en als bovendien de gelijke hoeken en de evenredige zijden in de twee veelhoeken in dezelfde volgorde voorkomen. Bewijs dit.

128. Twee parallelogrammen zijn gelijkvormig, als twee zijden en de diagonaal, die in hetzelfde hoekpunt samenkomen, in het eene parallelogram evenredig zijn met de overeenkomstige lijnen in het andere. Bewijs dit.

129. Bewijs, dat in twee gelijkvormige veelhoeken een paar gelijkstandige lijnen evenredig is met een paar gelijkstandige zijden.

130. Twee ruiten zijn gelijkvormig, als zij een hoek gelijk hebben.

131. Wanneer zijn twee rechthoeken gelijkvormig?

132. Twee trapeziums zijn gelijkvormig, als de zijden van het eene evenredig zijn met die van het andere.

133. Als men een willekeurig punt P vereenigt met de hoekpunten van een veelhoek ABCDE en op de vereenigingslijnen punten A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 neemt, zóo dat

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{PB_1}{PB} = \frac{PC_1}{PC} = \frac{PD_1}{PD} = \frac{PE_1}{PE},$$

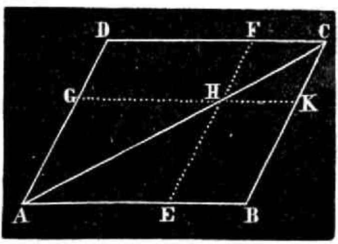
dan zijn de veelhoeken ABCDE en $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ gelijkvormig.

§ 154—§ 169.

134. Verander een parallelogram in een rechthoek van hetzelfde oppervlak.

135. Verander een scherphoekigen driehoek in een rechthoekigen van gelijk oppervlak. Doe hetzelfde met een stomphoekigen driehoek.

Fig. 110.



136. Door een punt H van de diagonaal AC van een parallelogram worden (zie fig. 180) lijnen getrokken, evenwijdig met de zijden van het parallelogram. Bewijs, dat de parallelogrammen BEHK en DFHG gelijk zijn.

137. Van twee parallelogrammen, die gelijke oppervlakten hebben, staan de bases tot elkaar als 4 tot 5. Bepaal de verhouding der hoogten.

138. Twee driehoeken hebben gelijke oppervlakken. De basis en de hoogte van den eenen zijn 10 en 12 cM. De hoogte van den anderen is 15 cM.; bereken zijn basis.

139. Een vierhoek wordt door zijn diagonalen in vier driehoeken verdeeld, wier oppervlakken een evenredigheid vormen.

140. Elke ruit is de helft van een rechthoek, wiens zijden gelijk zijn aan de diagonalen der ruit.

141. Twee driehoeken hebben gelijke oppervlakken, als zij twee zijden gelijk hebben, terwijl de ingesloten hoeken elkaars supplementen zijn.

142. Als x de zijde voorstelt van een gelijkzijdigen driehoek, waaraan is dan het oppervlak gelijk? $O = \frac{1}{4} x^2\sqrt{3}$

143. Van een gelijkzijdigen driehoek is het oppervlak 15; bereken zijn zijde, tot in twee decimalen nauwkeurig.

144. Bereken, tot in honderdste deelen nauwkeurig, de zijde van een gelijkzijdigen driehoek, die even groot is als een driehoek, waarvan de zijden 17, 20 en 23 zijn.

145. Van een ruit zijn de diagonalen 7 en 11 cM. Bereken haar oppervlak.

146. Een parallelogram is een ruit, als de afstand van het eene paar evenwijdige zijden gelijk is aan den afstand van het andere paar.

147. Bereken het oppervlak van een vierhoek, als zijn diagonalen rechthoekig op elkaar staan en 12 en 21 cM. lang zijn.

148. Een rechthoek is de helft van een anderen, wiens zijden de diagonalen der vierkanten zijn, die men op twee aanliggende zijden van den eersten rechthoek kan beschrijven.

149. De driehoek, die gevormd wordt door een der beenen van een trapezium, en de lijnen, die zijn uiteinden verbinden met het midden van 't andere been, is de helft van het trapezium. Bewijs dit.

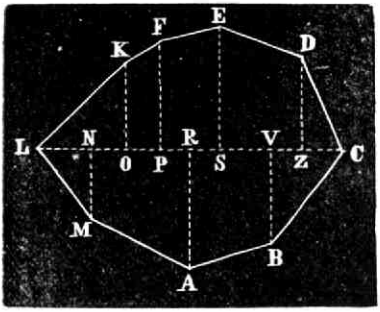
150. De vierkanten, die men kan beschrijven op de schuine zijde en de rechthoekszijden van een rechthoekigen driehoek, zijn evenredig met de schuine zijde en de projecties op deze van de rechthoekszijden.

151. Bereken het oppervlak van een trapezium, als de evenwijdige zijden 7 en 9 zijn en de opstaande zijden 4 en 5; in drie decimalen nauwkeurig.

152. Het oppervlak van een trapezium is gelijk aan een der opstaande zijden, vermenigvuldigd met de loodlijn, op die zijde neergelaten uit het midden der overstaande zijde.

153. Bereken het oppervlak van den veelhoek in fig. 104, als gegeven zijn: LN $=$ 3, NO $=$ OP $=$ PR $=$ RS $=$ 2, SV $=$ 3, VZ $= 2\frac{1}{2}$, ZC $= 2\frac{1}{2}$, MN $=$ 5, OK $=$ 6, PF $=$ 7, SE $= 7\frac{1}{2}$, ZD $=$ 9, AR $=$ 8, BV $=$ 7.

Fig. 104.



154. Beschrijf een vierkant, dat gelijk is aan de som van drie gegeven vierkanten.

155. Beschrijf een vierkant, dat de helft is van een gegeven vierkant.

156. Beschrijf een vierkant, dat gelijk is aan een derde gedeelte van een gegeven vierkant.

157. Verdeel een driehoek in vier gelijke deelen, door lijnen te trekken uit één hoekpunt.

158. Verdeel een driehoek in twee gelijke deelen, door een lijn te trekken uit een gegeven punt in een der zijden.

159. Een trapezium wordt middendoor gedeeld door de lijn, die de evenwijdige zijden middendoor deelt. Bewijs dit.

160. Verdeel een driehoek in vier gelijke deelen, door lijnen te trekken uit een punt in een der zijden.

§ 172—§ 187.

161. Bepaal het middelpunt van een gegeven cirkel.

162. Met een gegeven lijn als straal een cirkel te beschrijven, die door twee gegeven punten gaat.

163. Bepaal de grootste en de kleinste lijn, die men uit een gegeven punt naar eenig punt van een cirkel kan trekken.

164. De kleinste koorde, die men door een punt binnen een cirkel kan trekken, wordt in dat punt middendoor gedeeld.

165. Bepaal de meetkundige plaats der toppunten van alle driehoeken, die een gegeven basis hebben en waarvan de lijn, die het toppunt met het midden der basis vereenigt, een gegeven lengte bezit.

166. Als twee gelijke koorden van een cirkel elkaar snijden, zijn de stukken der eene koorde gelijk aan die der andere.

167. Door een punt A buiten een cirkel, wiens middelpunt O is, trekt men een snijlijn ACD, waarvan het deel AC, dat buiten

den cirkel ligt, gelijk is aan den straal. Bovendien wordt de middellijn AOB getrokken. Bewijs, dat ∠ COA het derde gedeelte is van ∠ DOB.

168. De stralen, die een koorde in drie gelijke deelen verdeelen, verdeelen den kleinsten boog, die door de koorde onderspannen wordt, in drie deelen, waarvan het middelste verschilt van de twee andere. Bewijs dat.

169. Door een punt, dat binnen een cirkel gegeven is, een koorde te trekken, die in dat punt middendoor gedeeld wordt.

§ 187—§ 193.

170. Bepaal de meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die een gegeven lijn in een gegeven punt raken.

171. Beschrijf een cirkel, die een gegeven lijn in een gegeven punt aanraakt en door een gegeven punt gaat.

172. Bepaal de meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die een gegeven lijn aanraken en een straal van gegeven lengte hebben.

173. Bepaal de meetkundige plaats der middelpunten van alle koorden van een cirkel, die een gegeven lengte hebben.

174. Beschrijf een cirkel, die door een gegeven punt gaat, een gegeven lijn aanraakt en een straal van gegeven lengte heeft.

175. In een cirkel, wiens middellijn 11 centimeters is, heeft men een koorde getrokken van 5 centimeters. Bereken den afstand van het middelpunt tot die koorde, in millimeters nauwkeurig.

176. Bepaal de kleinste lijn, die een punt van een cirkel verbindt met een punt van een rechte lijn, die den cirkel niet snijdt.

177. Beschrijf een cirkel, waarvan de straal gegeven is, en die twee gegeven rechte lijnen aanraakt.

§ 193—§ 200.

178. Van twee snijdende cirkels is de afstand der middelpunten 11, en zijn de stralen 5 en 7. Bereken de gemeenschappelijke koorde in 2 decimalen nauwkeurig.

179. Er zijn twee cirkels gegeven, die elkaar niet snijden. Men vraagt de kortste en ook de langste lijn te bepalen, die een punt van den eenen cirkel met een punt van den anderen kan verbinden.

180. Bepaal de meetkundige plaats der middelpunten van alle cirkels, die een gegeven cirkel in een gegeven punt aanraken.

181. Beschrijf den cirkel, die een gegeven cirkel in een gegeven punt raakt en door een ander gegeven punt gaat.

182. Bepaal de meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die een straal van gegeven lengte hebben en een gegeven cirkel aanraken.

183. Beschrijf een cirkel, die een gegeven lijn en een gegeven cirkel aanraakt en een straal van gegeven lengte heeft.

184. Beschrijf een cirkel, die twee gegeven cirkels aanraakt en een straal van gegeven lengte heeft.

185. Een cirkel rolt langs de buitenzijde van een anderen, wiens straal tweemaal zoo groot is. Bepaal de meetkundige plaats van het middelpunt van den rollenden cirkel.

186. Indien de afstand der middelpunten van twee cirkels aangeduid wordt door a, hunne stralen door R en r, vraagt men den onderlingen stand der cirkels te bepalen in elk der volgende gsvallen:

$$a = 17,\ R = 9,\ r = 8.$$
$$a = 14,\ R = 7,\ r = 5.$$
$$a = 3,\ R = 7,\ r = 5.$$
$$a = 4,\ R = 8,\ r = 4.$$
$$a = 2,\ R = 7,\ r = 6.$$
$$a = 5,\ R = 5,\ r = 5.$$

187. Van twee cirkels, die elkaar snijden, is de afstand der middelpunten 20 centimeter, terwijl de stralen 11 en 13 centimeters zijn. Bereken den afstand van de snijpunten der twee cirkels, tot in tienden van millimeters nauwkeurig. /13.2)

§ 206—§ 216.

188. Hoe groot is een middelpuntshoek van een cirkel, als de boog, waarop de hoek staat, $^5/_8$ is van den cirkelomtrek?

189. Hoe groot is de omtrekshoek, die op denzelfden boog staat?

Fig. 181.

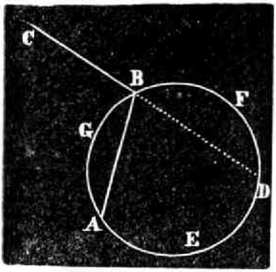
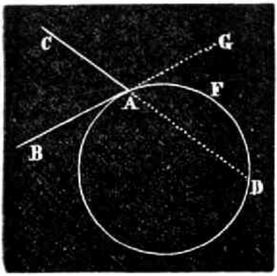


Fig. 182.



190. Bewijs, dat de hoek ABC in fig. 181 gelijk is aan de helft van den boog AGBFD.

191. Hoeveel graden moet de boog van een cirkelsegment bevatten, opdat een hoek, die in dat segment staat, scherp of stomp zij?

192. Aan welken boog is hoek BAC gelijk, als BA een raaklijn is (zie fig. 182)?

193. Als twee evenwijdige raaklijnen aan een zelfden cirkel getrokken zijn, wordt de omtrek van dien cirkel door de raakpunten in twee gelijke deelen verdeeld.

194. Als van een zeshoek, wiens hoekpunten in den omtrek van een cirkel liggen, de eerste zijde evenwijdig loopt met de vierde en de tweede met de vijfde, dan zal ook de derde zijde evenwijdig loopen met de zesde.

195. Bepaal de meetkundige plaats der punten, die de koorden van een cirkel middendoor deelen, welke door één zelfde punt van den cirkelomtrek gaan.

196. Evenzoo als dat punt binnen of buiten den cirkel ligt.

197. Een driehoek te beschrijven, als de basis, de tophoek en de hoogte gegeven zijn.

198. De hoek, die gevormd wordt door twee raaklijnen, welke men uit een punt buiten den cirkel aan dien cirkel kan trekken, bevat 50° 20′. Hoeveel graden bevat elk der deelen, waarin de cirkel door de raakpunten verdeeld wordt?

199. Verdeel een cirkelboog in vier gelijke deelen.

200. Aan een gegeven cirkel een raaklijn te trekken, die evenwijdig loopt met een gegeven lijn.

201. Aan een gegeven cirkel een raaklijn te trekken, die rechthoekig staat op een gegeven lijn.

202. Aan een gegeven cirkel een raaklijn te trekken, die een hoek van 60 graden maakt met een gegeven lijn.

203. Een driehoek te beschrijven, als gegeven zijn de basis en de loodlijnen, die men uit de uiteinden der basis op de overstaande zijden kan neerlaten.

204. Een rechte lijn te beschrijven, die door een gegeven punt gaat, en waarvan een gegeven cirkel een koorde van gegeven lengte afsnijdt.

205. Een rechte lijn te beschrijven, die raakt aan een gegeven cirkel en waarvan door een anderen gegeven cirkel een koorde van bepaalde lengte wordt afgesneden.

206. Een rechte lijn te beschrijven, waarvan twee gegeven cirkels koorden van gegeven lengten afsnijden.

§ 216—§ 228.

207. Construeer een vierkant, dat gelijk oppervlak heeft met een gegeven rechthoek.

208. Construeer een vierkant, dat gelijk oppervlak heeft met een gegeven driehoek.

209. Als in fig. 153 gegeven zijn AD = 7, DE = 9, AB = 7,2, vraagt men te berekenen BC en AF tot in 3 decimalen.

210. Als p en q gegeven lijnen voorstellen, vraagt men een lijn x te construeeren zoo dat

$$x = \sqrt{(p^2 + pq + 2q^2)}.$$

211. Een cirkel te beschrijven, die door twee gegeven punten gaat en een gegeven rechte lijn aanraakt.

212. Als een lijn van 9 centimeters in de uiterste en middelste reden verdeeld wordt, vraagt men de twee stukken te berekenen in honderdsten van millimeters nauwkeurig.

213. Construeer een vierkant, dat evenveel oppervlak heeft, als een gegeven trapezium.

214. Construeer een rechthoek, waarvan de zijden tot elkaar staan als $\sqrt{2} : \sqrt{3}$, indien de diagonaal gegeven is.

215. Als AB en CD elkaar snijden in P, volgt uit

$$PA \times PB = PC \times PD,$$

dat A, B, C en D op den omtrek van een zelfden cirkel liggen.

216. Als een driehoek met een hoek van 60° gegeven is, vraagt men een gelijkzijdigen driehoek te construeeren, die gelijk oppervlak heeft.

217. Verander een willekeurigen driehoek in een gelijkzijdigen.

218. Als AE in fig. 159 in de uiterste en middelste reden verdeeld wordt, is het grootste stuk gelijk aan AB. Bewijs dit.

§ 228—§ 239.

219. Om elk gelijkbeenig trapezium kan een cirkel beschreven worden. Bewijs dit.

220. Als een trapezium in een cirkel beschreven is, is het gelijkbeenig. Bewijs dit.

221. Kan men een cirkel beschrijven om een parallelogram, om een ruit of om een rechthoek?

222. Kan een cirkel beschreven worden in een scheefhoekig ongelijkzijdig parallelogram, in een ruit of in een rechthoek?

223. Van een driehoek zijn de zijden 7, 8 en 9; bereken de stralen van de in- en omgeschreven cirkels, tot in drie decimalen nauwkeurig.

224. Bereken de stralen der aangeschreven cirkels van denzelfden driehoek, met dezelfde nauwkeurigheid.

225. Als de diagonalen van een vierhoek, waarom men een cirkel kan beschrijven, rechthoekig op elkaar staan, is het oppervlak van den vierhoek gelijk aan de halve som van de produkten der overstaande zijden.

226. Bereken den straal van den cirkel, die kan beschreven worden in een ruit, wier diagonalen 6 en 8 centimeter zijn.

§ 239—§ 253.

227. Een veelhoek is regelmatig, als men in en om hem concentrische cirkels kan beschrijven.

228. Is een veelhoek regelmatig, als hij in een cirkel beschreven is en zijn hoeken onderling gelijk zijn?

229. Bereken de zijde van den ingeschreven regelmatigen twintighoek, als a de straal is.

230. Bereken de zijde van den omgeschreven regelmatigen vijfhoek, als de straal 1 is.

231. Bereken den omtrek van den ingeschreven 32-hoek in twee decimalen nauwkeurig, als de straal 7 is.

232. Als R den straal voorstelt en A een zijde van een omgeschreven regelmatigen veelhoek, vraagt men een formule te bepalen voor de zijde van den ingeschreven regelmatigen veelhoek van hetzelfde aantal zijden.

233. Waaraan is de zijde van een regelmatigen veelhoek gelijk, als p zijn straal en q zijn apothema voorstelt?

234. Op een gegeven lijn als zijde een regelmatigen achthoek te beschrijven.

235. Bereken het oppervlak van een regelmatigen twaalfhoek, als zijn apothema 12 is, in twee decimalen nauwkeurig.

236. De diagonalen van een regelmatigen vijfhoek verdeelen elkaar in de uiterste en middelste reden, zoo dat hun grootste stuk gelijk is aan de zijde van den veelhoek.

237. Op een gegeven lijn als zijde een regelmatigen vijfhoek te beschrijven.

§ 259—§ 264.

238. Van een cirkel is de middellijn 12; bereken den omtrek in 3 decimalen nauwkeurig.

239. Van een cirkel is de straal 5 centimeters; bereken den omtrek tot in millimeters nauwkeurig.

240. Van een cirkel is de omtrek 88; bereken den straal tot op een honderdste nauwkeurig.

241. De omtrek van een cirkel is 742; bereken den straal in twee decimalen nauwkeurig.

242. Hoe groot is een boog van 36°, als de straal 106 is? (In twee decimalen nauwkeurig.)

243. Hoeveel graden, minuten en seconden bevat een cirkelboog van 9 centimeters, als de straal 7 centimeters is?

§ 264—§ 268.

244. Hoe lang is de middellijn van een cirkel, als zijn omtrek en zijn oppervlak door hetzelfde getal worden voorgesteld?

245. Als de straal van een cirkel 7,2 is, vraagt men het oppervlak in drie decimalen nauwkeurig.

246. Als een cirkelboog van 32 graden 5 centimeters lang is, hoe lang is dan zijn straal, in honderdsten van millimeters nauwkeurig.

247. Bereken het oppervlak van een cirkelsector, als zijn straal 7 is en zijn middelpuntshoek 25°, tot in 2 decimalen nauwkeurig.

248. Van een cirkelsector is de omtrek 25 en de middelpuntshoek 36°. Bereken den straal in 2 decimalen.

249. Bereken het oppervlak van een cirkelsegment, welks koorde gelijk is aan den straal R.

250. Bereken het oppervlak van een cirkelsegment, welks koorde gelijk is aan de zijde van den ingeschreven regelmatigen vijfhoek.

GEMENGDE VRAAGSTUKKEN.

251. In een gegeven driehoek een vierkant te beschrijven.

252. Een cirkel te beschrijven, die door een gegeven punt gaat en twee gegeven lijnen aanraakt.

253. De produkten der loodlijnen, die men uit een punt van een cirkel kan neerlaten op de overstaande zijden van een ingeschreven vierhoek, zijn gelijk.

254. Als twee evenwijdige lijnen door een derde gesneden worden, loopen de lijnen, die twee overeenkomstige hoeken middendoor deelen, evenwijdig.

255. Een cirkel te beschrijven, die een anderen cirkel in een gegeven punt aanraakt en bovendien raakt aan een gegeven rechte lijn.

256. De lijnen, die twee hoekpunten van een driehoek verbinden met de middens der overstaande zijden, verdeelen elkaar in stukken, die tot elkaar staan als 1 tot 2.

257. De lijnen, die de drie hoekpunten van een driehoek verbinden met de middens der overstaande zijden, gaan door één punt.

258. In een gegeven cirkelsegment een vierkant te beschrijven.

259. Als een rechte lijn en twee punten daar buiten gegeven zijn, vraagt men in die lijn een ander punt te bepalen, zoo, dat de som van zijn afstanden tot de twee gegeven punten zoo klein mogelijk zij.

260. Verdeel een gegeven cirkel in drie gelijke deelen door concentrische cirkels.

261. Verdeel een driehoek in vijf gelijke deelen, door lijnen te trekken, evenwijdig aan een der zijden.

262. De som der vierkanten van twee lijnen, die een willekeurig punt verbinden met twee overstaande hoekpunten van een rechthoek, is gelijk aan de som der tweedemachten van de lijnen, die hetzelfde punt met de andere hoekpunten verbinden. Bewijs dit.

263. De lijnen, die de middens der overstaande zijden van een vierhoek vereenigen, deelen elkaar middendoor. Bewijs dit.

264. Beschrijf een driehoek, als gegeven zijn: de basis, de tophoek, en de opstaande zijden.

265. In een driehoek ABC een lijn DE te trekken, die evenwijdig loopt met AB, zoodat DE gelijk is aan AD.

266. In een driehoek ABC een lijn DE te trekken, zoo dat $DE = AD + BE$.

267. Construeer een driehoek, waarvan de omtrek en twee hoeken gegeven zijn.

268. Twee concentrische cirkels gegeven zijnde, uit een punt in den omtrek van den grootsten cirkel een koorde te trekken, die door den kleinsten cirkel in drie gelijke deelen verdeeld wordt.

269. Door een gegeven punt een rechte lijn te trekken, zóo, dat de som der afstanden van twee andere gegeven punten tot die rechte lijn een gegeven grootte heeft, kleiner dan de afstand der twee punten en dat de twee punten aan weerszijden van die lijn liggen.

270. Beschrijf een driehoek, waarvan gegeven zijn de basis, de tophoek en het verschil der opstaande zijden.

271. Beschrijf een vierhoek, waarvan gegeven zijn de diagonalen, de lijn, die de middens van een paar overstaande zijden verbindt, en twee aanliggende zijden.

272. Het vierkant der lijn, die het toppunt van een gelijkbeenigen driehoek verbindt met een punt der basis, is gelijk aan het vierkant van een opstaande zijde, verminderd met het produkt der stukken, waarin de basis door genoemd punt verdeeld wordt.

273. De som der loodlijnen, die men uit een punt binnen een gelijkzijdigen driehoek kan neerlaten op de zijden, is gelijk aan de hoogte van den driehoek.

274. De loodlijnen van een driehoek deelen de hoeken middendoor van den driehoek, die ontstaat, als men de voetpunten der loodlijnen van den eersten driehoek twee aan twee vereenigt.

275. Construeer een driehoek, als de voetpunten van zijn drie loodlijnen gegeven zijn.

276. Construeer een rechthoek, die gelijk is aan een gegeven vierkant, en wiens omtrek door een gegeven rechte lijn wordt voorgesteld.

277. Construeer twee lijnen, als haar verschil en hare verhouding gegeven zijn.

278. Als alle zijden van een vierhoek even lang zijn, is hij een ruit of een vierkant. Bewijs dit.

279. De meetkundige plaats der middelpunten van de ingeschreven cirkels van alle driehoeken, die in een zelfde cirkelsegment staan, is een cirkelboog. Bewijs dit.

280. Beschrijf een driehoek, waarvan gegeven zijn een zijde en de stralen van den in- den omgeschreven cirkel.

281. Een cirkel en een rechte lijn gegeven zijnde, vraagt men een andere rechte lijn te construeeren, zóo dat de cirkel er een koorde van gegeven lengte afsnijdt en dat het gedeelte tusschen den cirkel en de gegeven rechte lijn een bepaalde lengte heeft.

282. Twee cirkels gegeven zijnde, een rechte lijn te construeeren, zóo dat de eene cirkel er een koorde van gegeven lengte afsnijdt, terwijl het stuk, dat tusschen de twee cirkels ligt, ook een bepaalde lengte heeft.

283. Door de uiteinden van een gegeven koorde van een cirkel

twee andere onderling evenwijdige koorden te trekken, wier som gegeven is.

284. Het oppervlak van een rechthoek in 25 vierkante centimeters en zijn omtrek 21 centimeters. Bereken de zijden in twee decimalen nauwkeurig.

285. Van een cirkelsector, wiens oppervlak gelijk is aan tweemaal het vierkant van den straal, vraagt men den boog te berekenen tot in tienden van sekonden.

286. Bepaal de meetkundige plaats der middens van alle rechte lijnen, die men uit een gegeven punt kan trekken naar de verschillende punten van een gegeven rechte lijn.

287. Beschrijf een cirkel, die raakt aan de stralen en den boog van een gegeven cirkelsector.

288. Als twee koorden van een cirkel elkaar rechthoekig snijden, is de som der tweedemachten van de deelen der koorden gelijk aan het vierkant der middellijn. Bewijs dit.

289. Twee cirkels hebben stralen van 7 en 4 centimeters, terwijl de afstand tusschen de twee middelpunten 13 centimeter is. Bereken de lengte van een uitwendige gemeenschappelijke raaklijn, gemeten tusschen de twee raakpunten. (In tienden van millimeters nauwkeurig). Evenzoo voor een inwendige gemeenschappelijke raaklijn.

290. Bereken bij dezelfde cirkels den afstand van een der middelpunten tot het snijpunt der twee uitwendige gemeenschappelijke raaklijnen. Bereken ook den afstand van het snijpunt der twee inwendige raaklijnen tot de twee middelpunten.

291. Beschrijf op de hypotenusa van een rechthoekigen driehoek een halven cirkel, die door 't hoekpunt van den rechten hoek gaat; beschrijf ook halve cirkels op de rechthoekszijden naar de buitenzijde van den driehoek; dan ontstaan twee figuren in den vorm van halve manen. Bewijs, dat de som der oppervlakken van die twee figuren gelijk is aan het oppervlak van den driehoek.

292. Als een cirkel rolt langs de binnenzijde van een anderen, wiens straal tweemaal zoo groot is, dan beschrijft een punt van den eersten cirkelomtrek een rechte lijn. Bewijs dit.

Opmerking. Daar het middelpunt van de bewegende kromme lijn een cirkelomtrek doorloopt, terwijl een van hare punten een rechte lijn beschrijft, zoo kan de voorgaande eigenschap toegepast worden, om een cirkelvormige beweging te veranderen in een rechtlijnig heen- en weergaande.

293. In een driehoek is een vierkant beschreven. De zijde van den driehoek, langs welke een zijde van 't vierkant valt, is 33 centimeters, en de loodlijn op die zijde van den driehoek neergelaten is 27 centimeters. Bereken de zijde van het vierkant.

294. De som der tweedemachten van de diagonalen van een parallelogram is gelijk aan de som der tweedemachten van de zijden.

295. De lijn, die de middens der diagonalen van een trapezium verbindt, is gelijk aan 't halve verschil der evenwijdige zijden.

296. Als men uit het toppunt van een driehoek een loodlijn neerlaat op de basis, wordt deze in twee deelen verdeeld, zóo dat het verschil dier deelen staat tot het verschil der opstaande zijden, als de som der opstaande zijden tot de basis.

297. Een punt doorloopt een rechte lijn, als het zich zoo beweegt, dat het verschil der vierkanten van de afstanden van dat punt tot twee gegeven punten niet verandert. (Opgelost in Methoden, § 58).

298. Beschrijf een vierhoek, waarvan gegeven zijn een diagonaal, de lijnen, die de middens van elk paar overstaande zijden verbinden, en twee aanliggende zijden. (Opgelost in Methoden, § 60)

299. De meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die de omtrekken van twee gegeven cirkels middendoor deelen, is een rechte lijn.

300. Beschrijf een cirkel, die de omtrekken van drie gegeven cirkels middendoor deelt.

INHOUD.

x 149 1912

—