



# **Over de theorie der trillende platen, en haar verband met de experimenten**

<https://hdl.handle.net/1874/259614>

OVER DE THEORIE  
DER  
**TRILLENDE PLATEN,**  
EN HAAR VERBAND MET DE EXPERIMENTEN.

21

OF THE THEORY

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

OF THE THEORY OF THE

7

9

OVER DE THEORIE  
DER  
**TRILLENDE PLATEN,**  
EN HAAR VERBAND MET DE EXPERIMENTEN.

---

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,  
AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT,

NA MAGTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

**Dr. T. HALBERTSMA,**

GEWOON HOOGLEERAAR BIJ DE GENEESKUNDIGE FACULTEIT,

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAAT

EN

VOLGENS BESLUIT VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE,

~~IN HET OPENBAAR~~ TE VERDEDIGEN

op Vrijdag, 14 Junij, 1872, des namiddags ten 3 ure,

DOOR

**WILLEM KAPTEYN,**

GEBOREN TE BARNEVELD.



BARNEVELD,  
P. ANDREÆ MENGER,

1872.

OVER DE THEORIE

DER

TRILLENDE PLATEN

EN HAAR VERBAND MET DE EXPERIMENTEN

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT

TEG. VERKRIJGING VAN DEN GRAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE HOOGESCHOOL TE UTRECHT

ZA AEGTIGING VAN DEN HEEREN MAGISTRUS

D. T. HALBERTSMA

GEWOON HOOGLERAAR IN DE ONTWERPINGS WETENSCHAP

MET TOESTEMMING VAN DEN ACADEMISCHEN SENAAT

IN

HOOGES RESULT VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE UTRECHT, DE DREDDIGSTE DE DAAG VAN

OP VRIJDAG, DEN 11 JUNI, 1872, DES NAMIDDAGS TEN 3 URE

DOOR

WILHELM RABRYN

GEBOREN TE DANKERVALE



LEVENSBOND

W. ANDRÉE MENGEL

1872

Aan mijne Ouders.

Asm mine Orders

L. S.

Hoe nuttig het voorzeker voor den Student zij, wanneer hij zijne academische studiën voor een groot deel heeft voleindigd, zich te wijden aan één bepaald onderwerp, het blijft voor hem altijd pijnlijk en onaangenaam, zich genoodzaakt te zien, zijne onderzoekingen in het licht te geven. De overtuiging, dat te weinig ondervinding en een beperkt onderzoek het gehalte van het geschrift nadeelig zijn, doet den vervaardiger niet dan met schroom zijn arbeid onderwerpen aan het oordeel van deskundigen.

Toch, gelijk het doorgaans gaat, als men den geest lang bezig gehouden heeft met één arbeid, krijgt men dien lief, zooals men een kind lief heeft, waarmede men lang heeft getobd en tegenspoed gehad.

Zóó ging het ook mij.

Bij het eindigen van mijn academisch proefschrift voed ik den wensch, dat het kleine boekje anderen moge uitlokken tot eene volledige behandeling van het omvangrijke onderwerp. Ik heb mij voorgesteld een overzicht te geven van hetgeen op dat gebied reeds was gepraesteerd, en verder door berekening de geleverde constructiën te bevestigen en aan te vullen.

Daardoor splitste zich het geheel in drie deelen. Het eerste is van theoretischen, het tweede van experimentelen aard, terwijl in het derde wordt aangegeven in hoeverre de experimenten door de theorie verklaard zijn.

Gaarne maak ik van deze gelegenheid gebruik, mijne erkentelijkheid te betuigen aan mijn promotor, den Hoogleraar Grinwis, voor de bereidwilligheid waarmede hij steeds mijne



—

bezwaren uit den weg ruimde. Voor zijne degelijke leiding en grondig onderwijs acht ik mij ten hoogste aan hem verplicht. Ook aan de Hooggeleerden Buys Ballot en Hoek bied ik mijnen opregten dank voor al wat zij hebben bijgedragen tot mijne ontwikkeling en vorming; zoomede aan den Hooggeleerden Harting wiens onderwijs, gelijk dat van wijlen den Hoogleeraar Miquel, steeds met de meeste belangstelling door mij werd gevolgd. Niet minder zal ik mij het bijzonder onderwijs van de Hooggeleerden van Rees en Mulder altijd dankbaar herinneren.

Eindelijk een woord van dank en vriendschap aan allen, die door aangenaam gezellig verkeer het hunne hebben bijgedragen, om mijn verblijf aan Utrechts Hoogeschool onvergetelijk te maken. Bij het verlaten van hun vriendenkring gevoel ik wat het zegt:

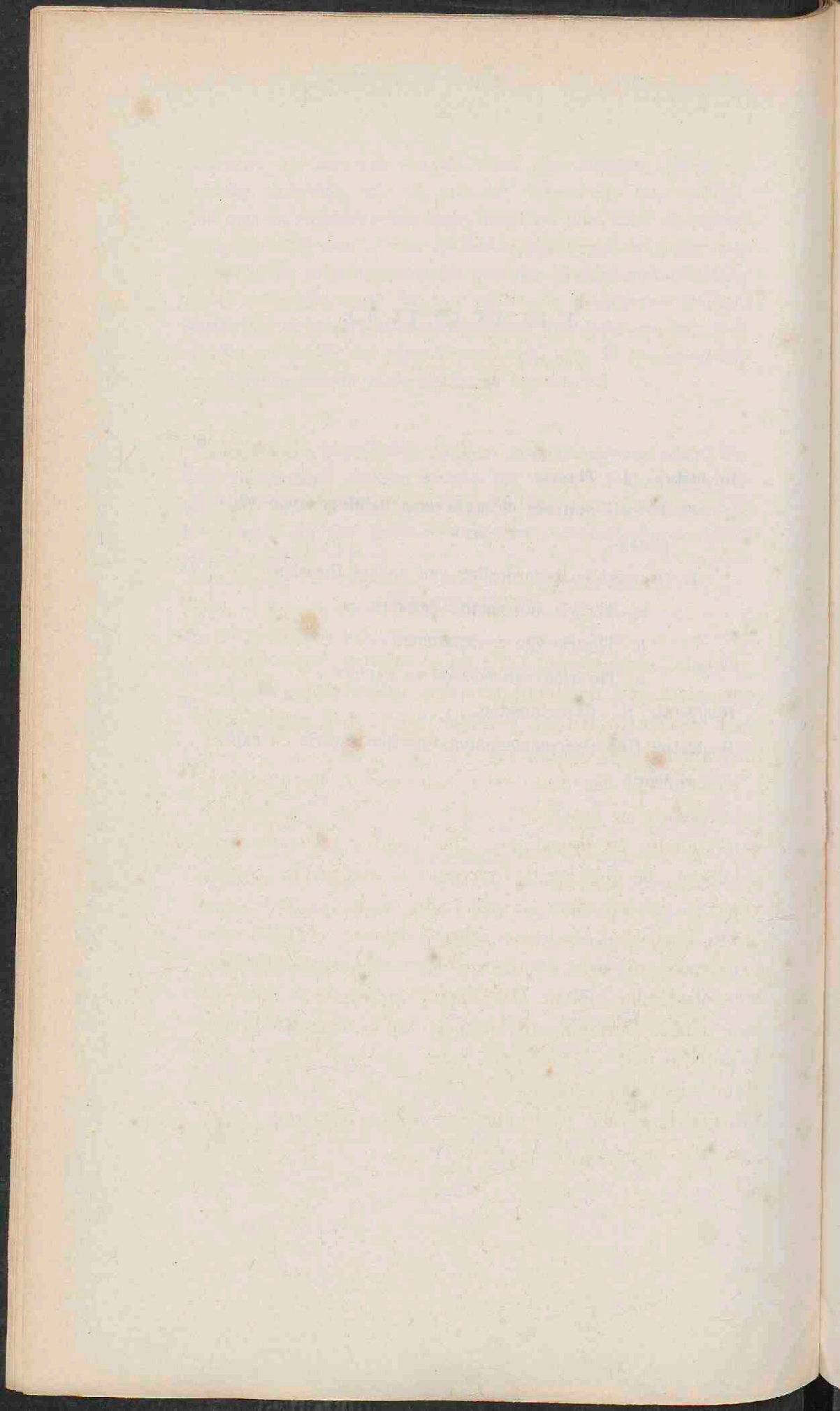
*Meminisse juvabit.*

## I N H O U D.

---

	blz.
Hoofdstuk I. Theorie . . . . .	1
A Theorie omtrent de transversaaltrillingen van vrije platen . . . . .	1
B Overzicht en beoordeeling van andere theoriën . . .	24
<i>a.</i> Theorie van SOPHIE GERMAIN . . . . .	24
<i>b.</i> Theorie van J. BERNOULLI . . . . .	29
<i>c.</i> Theoriën van POISSON en CAUCHY . . . . .	31
Hoofdstuk II. Experimenten. . . . .	36
Hoofdstuk III. Overeenstemming tusschen theorie en expe- riment . . . . .	74

---



## HOOFDSTUK I.

---

### A. *Theorie omtrent de transversaal-trillingen van vrije platen.*

---

#### § 1.

Chladni ontdekte in 1787 dat, wanneer een poeder op eene plaat van regelmatigen vorm uitgestrooid, en deze plaat daarna in trilling gebragt wordt, het poeder zich in symmetrische figuren ophoopt.

Korten tijd na deze ontdekking gaf J. Bernouilli 1) eene theorie in het licht, met oogmerk om de resultaten van Chladni te bevestigen. Het mogt hem echter niet gelukken, de gewenschte overeenstemming met de proeven van Chladni uit zijne theorie af te leiden.

De Parijsche Academie schreef daarom in 1810 eene prijsvraag uit over de theorie der transversaal-trillingen van elastische platen. Het daarop ingekomen antwoord van Sophie Germain, in het jaar 1811, berustte op eene hypothese over de krachten, waarmede eene plaat wederstand biedt aan veranderingen van vorm, — waaruit de schrijfster verder eene partiëele differentiaalvergelijking

1) Nov. Act. Acad. Petrop. 1787.

afleidde. Lagrange toonde echter aan, dat zij in hare berekening eene fout had gemaakt; herstelde deze, en vond de differentiaalvergelijking, die nog steeds als de ware erkend wordt.

Aan de alzoo verbeterde differentiaalvergelijking ontbraken echter nog de grensvoorwaarden, waardoor hare oplossing nader bepaald moest worden. Hierin voorzag de schrijfster zelve twee jaren daarna; loste tevens het vraagstuk op voor het geval van rechthoekige platen; en vond hare theorie door de waarnemingen bevestigd.

Later bood zij nog weder haar werk aan de Academie aan over platen die cilindervormig gebogen zijn; in welk geschrift zij aantoonde, dat ook hier de gedane waarnemingen met hare theorie overeenstemden.

Hoe verdienstelijk de arbeid van Sophie Germain 1) ook zij, toch is hij slechts eene eerste poging tot oplossing van het vraagstuk. Ondanks de overeenkomst toch der waarnemingen met hare theorie, kan men gevolgen uit hare theorie afleiden, die geheel in tegenspraak zijn met de waarheid.

Eene door Poisson 2) gegeven theorie voldoet ook niet geheel. Hij komt tot dezelfde partiële differentiaalvergelijking, waartoe de hypothese van Sophie Germain had geleid, maar met andere, en wel drie grensbepalingen. Door Kirchhoff 3) is aangetoond, dat aan deze drie grensvoorwaarden in het algemeen niet tegelijkertijd kan voldaan

1) Den hoofdinhoud van de genoemde verhandelingen vindt men in hare twee werken: »Recherches sur la théorie des surfaces élastiques» 1821. »Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et l'équation générale de ces surfaces» 1826.

2) Mémoires de l'Institut de France, Tom. VIII.

3) Crelle Bd. XL.

worden; daarenboven heeft hij voor deze drie, twee anderen in de plaats gesteld, welke wij hieronder zullen verklaren. De wijze van uiteenzetting ontleenen wij echter voornamelijk aan eene andere verhandeling van denzelfden schrijver 1) en aan de dissertatie van Gehring 2). Aan deze ontwikkeling wijden wij drie paragrafen; in de eerste zoeken wij de algemeene vergelijking, waarin de vergelijkingen van beweging bevat zijn; in de tweede bepalen wij de voorwaarden die deze algemeene vergelijking beperken in het geval eener elastische plaat; de derde eindelijk zal de wijze aantoonen, waarop de vergelijkingen van beweging met de grensbepalingen uit de vorige paragrafen kunnen worden afgeleid.

## § 2.

Een punt  $M(x, y, z)$  van een elastisch ligchaam in zijnen natuurlijken staat, worde door oneindig kleine uitwendige krachten verplaatst tot  $M'(x + u, y + v, z + w)$ . Na deze verplaatsing denke men zich door  $M'$  een vlak loodregt op de  $x$ -as; het ligchaam wordt dan in twee deelen verdeeld. Noemen wij de composanten van de elastische kracht, uitgeoefend door het deel met de grootste  $x$  op de eenheid van oppervlak van het andere

$$X_x, Y_x, Z_x$$

en geven analoge beteekenis aan

$$X_y, Y_y, Z_y$$

$$X_z, Y_z, Z_z;$$

bepalen wij de uitwendige krachten aldus:

1) Crelle Bd. LVI.

2) Diss. de aequat. diff. quibus laminae crystallinae definiuntur. Berol. 1860.

ligt  $M'$  in het ligchaam, dan werkt op de eenheid van volume in  $M'$  eene kracht met composanten

$$X, Y, Z;$$

ligt  $M'$  aan de oppervlakte van het ligchaam, zoo werkt op de eenheid van oppervlak in  $M'$  eene kracht met composanten

$$(X), (Y), (Z).$$

In geval er dan evenwigt bestaat, 1) is voor ieder element van het ligchaam:

$$(1) \quad Y_x = X_y, Z_y = Y_z, X_z = Z_x;$$

verder voor ieder element binnen het ligchaam:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz} + X = 0 \\ \frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} + Y = 0 \\ \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz} + Z = 0; \end{array} \right.$$

en voor ieder element aan de oppervlakte van het ligchaam, wanneer de cosinus der hoeken die de binnenvaarts getrokken normaal met de assen maakt  $\lambda, \mu, \nu$  zijn:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda X_x + \mu X_y + \nu X_z + (X) = 0 \\ \lambda Y_x + \mu Y_y + \nu Y_z + (Y) = 0 \\ \lambda Z_x + \mu Z_y + \nu Z_z + (Z) = 0. \end{array} \right.$$

De vergelijkingen (1), (2) en (3) zijn allen zamen te vatten in deze:

$$(4) \quad \delta\Omega - \delta \int F dx dy dz = 0$$

waarin  $\delta\Omega$  het moment der uitwendige krachten voorstelt voor oneindig kleine veranderingen van  $u, v$  en  $w$ , terwijl

1) Zie Lamé, Lecons sur la théorie mathém. de l'Elastic. des corps solides.

$$(5) F = K \left\{ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right)^2 + \theta \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right)^2 \right\} \text{ is;}$$

K en  $\theta$  zijn daarbij constanten die van den aard van het ligchaam afhangen.

Ten einde dit te bewijzen, zoeken wij den mechanischen arbeid, die verrigt wordt, wanneer ieder element van het ligchaam eene kleine verplaatsing ondergaat. Deze verplaatsing zij voor het punt  $(xyz)$   $\delta u$  volgens de  $x$ -as,  $\delta v$  volgens de  $y$ -as en  $\delta w$  volgens de as der  $z$ . Dan verkrijgt men voor den arbeid in het inwendige van het ligchaam deze uitdrukking: 1)

$$\begin{aligned} & \iiint \delta u \left( \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz} + X \right) dx dy dz \\ & + \iiint \delta v \left( \frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} + Y \right) dx dy dz \\ & + \iiint \delta w \left( \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz} + Z \right) dx dy dz \end{aligned}$$

en voor den arbeid verrigt door de krachten die aan de oppervlakte van het ligchaam werken:

$$\begin{aligned} & \int \delta u (\lambda X_x + \mu X_y + \nu X_z + (X)) dO \\ & + \int \delta v (\lambda Y_x + \mu Y_y + \nu Y_z + (Y)) dO \\ & + \int \delta w (\lambda Z_x + \mu Z_y + \nu Z_z + (Z)) dO. \end{aligned}$$

In de eerste drie integralen moet de integratie uitgestrekt worden over het geheele ligchaam, in de laatste is  $dO$  een element van het oppervlak en moet de integratie over het geheele oppervlak genomen worden.

Maken wij nu gebruik van de stelling: 1)

1) Zie Riemann: Partielle Differentialgleichungen, bearbeitet von K. Hattendorf. § 82.



$$\int F \frac{dG}{dx} dx dy dz = - \int G \frac{dF}{dx} dx dy dz - \int FG \cos(N, x) dO,$$

waarin  $F$  en  $G$  willekeurige functies van  $x, y, z$  aanduiden en  $(N, x)$  de hoek is, gevormd door de binnenwaarts aan het oppervlak getrokken normaal met de  $x$ -as. Merken wij daarbij op, dat in deze stelling  $x, y, z$  cyclisch verwisseld mogen worden, dan is:

$$\iiint \frac{dX_x}{dx} \delta u dx dy dz = - \int \lambda X_x \delta u dO - \iiint X_x \frac{d\delta u}{dx} dx dy dz$$

$$\iiint \frac{dX_y}{dy} \delta u dx dy dz = - \int \mu X_y \delta u dO - \iiint X_y \frac{d\delta u}{dy} dx dy dz$$

$$\iiint \frac{dX_z}{dz} \delta u dx dy dz = - \int \nu X_z \delta u dO - \iiint X_z \frac{d\delta u}{dz} dx dy dz$$

Op dezelfde wijze transformere men de integralen:

$$\iiint \delta v \left( \frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} \right) dx dy dz$$

$$\iiint \delta w \left( \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dZ_y}{dy} + \frac{dZ_z}{dz} \right) dx dy dz$$

Vereenigt men daarna alle integralen over het oppervlak, zoo is het duidelijk dat voor den arbeid der krachten aan het oppervlak werkende, overblijft:

$$\int \{ (X) \delta u + (Y) \delta v + (Z) \delta w \} dO.$$

Voor den arbeid der uitwendige krachten  $X, Y, Z$  vindt men verder:

$$\iiint dx dy dz (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w),$$

en voor den arbeid van de inwendige elastische krachten:

$$- \iiint dx dy dz \left\{ \begin{array}{l} X_x \delta \frac{du}{dx} + X_y \delta \frac{du}{dy} + X_z \delta \frac{du}{dz} \\ + Y_x \delta \frac{dv}{dx} + Y_y \delta \frac{dv}{dy} + Y_z \delta \frac{dv}{dz} \\ + Z_x \delta \frac{dw}{dx} + Z_y \delta \frac{dw}{dy} + Z_z \delta \frac{dw}{dz} \end{array} \right.$$

Met behulp van de vergelijkingen (1), wordt deze laatste arbeid :

$$- \iiint dx dy dz \left\{ \begin{array}{l} X_x \delta \frac{du}{dx} + X_y \delta \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\ + Y_y \delta \frac{dv}{dy} + Y_z \delta \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ + Z_z \delta \frac{dw}{dz} + Z_x \delta \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right). \end{array} \right.$$

Substitueert men hierin voor  $X_x$ ,  $X_y$  enz. de waarden :

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} X_x = 2K \left\{ (1 + \theta) \frac{du}{dx} + \theta \frac{dv}{dy} + \theta \frac{dw}{dz} \right\} \\ Y_y = 2K \left\{ \theta \frac{du}{dx} + (1 + \theta) \frac{dv}{dy} + \theta \frac{dw}{dz} \right\} \\ Z_z = 2K \left\{ \theta \frac{du}{dx} + \theta \frac{dv}{dy} + (1 + \theta) \frac{dw}{dz} \right\} \\ Y_z = K \left( \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right), Z_x = K \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right), X_y = K \left( \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right), \end{array} \right.$$

dan vindt men, achtgevende op de waarde voor  $F$  aangenomen :

$$- \iiint dx dy dz \delta F = - \delta \int F dx dy dz.$$

De vergelijkingen (a) vindt men in alle leerboeken over Elasticiteit 1) terug; zij gelden voor homogene lichamen, onder voorwaarde, dat de 9 differentiaalquotienten van  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ten opzichte van  $x$ ,  $y$ ,  $z$  oneindig klein zijn.

Neemt men nu in aanmerking, dat

$$\delta \Omega = \int dx dy dz (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) + \int dO ((X) \delta u + (Y) \delta v + (Z) \delta w) \text{ is,}$$

dan vindt men voor den totalen arbeid :

$$\delta \Omega = \delta \int F dx dy dz.$$

1) Zie o. a. Lamé § 20; Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper § 17.

Volgens het principe van Lagrange is nu het ligchaam in evenwigt, wanneer voor iedere mogelijke oneindig kleine verplaatsing de som der virtuele momenten, of de daarbij verrigte arbeid  $= 0$  is. Hieruit volgt dus, dat als voorwaarde van evenwigt evenzeer

$$\delta \Omega - \delta \int F dx dy dz = 0,$$

als de vergelijkingen (1), (2) en (3) gelden kan.

Aangaande de vergelijkingen (1), (2), (3) en (4) is nog het volgende op te merken: (1), (2) en (3) bevatten grootheden, die door ( $a$ ) zijn bepaald; de vergelijkingen ( $a$ ) gelden alleen bij de onderstelling, omtrent de differentiaalquotiënten van  $u$ ,  $v$  en  $w$  gemaakt; deze onderstelling is vervuld, wanneer het ligchaam in alle rigtingen eindig is 1); derhalve gelden (1), (2) en (3) of (4) voor lichamen, wier afmetingen alle eindig zijn.

Kirchhoff heeft het geval onderzocht, dat alle afmetingen oneindig klein zijn, en gevonden 1) dat de vergelijkingen (1), (2) en (3) waar blijven; verder dat de grootheden  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  in (2) mogen verwaarloosd worden, terwijl de grootheden  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dx}$  enz. alsdan oneindig groot zullen zijn, in vergelijking van  $u$ ,  $v$  en  $w$ . De vergelijking (4) mag dus behouden worden, in geval de afmetingen van het ligchaam allen van dezelfde orde zijn. Een ligchaam, waarbij dit geen plaats heeft, denke men verdeeld in deelen die wel aan dezen eisch voldoen, en passe de vergelijking (4) op elk deel toe. Het evenwigt van het geheele ligchaam is dan gebonden aan de vergelijking:

$$(6) \delta \Omega - \delta \int F dx dy dz = 0,$$

1) Crelle. Bd. LVI.

wanneer  $\Sigma$  eene sommatie over alle deelen, waarin het ligchaam verdeeld gedacht is, voorstelt, en  $\delta\Omega$  het moment der uitwendige krachten beteekent, die op het geheele ligchaam worden uitgeoefend; daar het moment der elastische krachten, die op de grensvlakken der afzonderlijke deelen werken, verdwijnt.

Uit (6) is onmiddellijk voor het geval, dat het ligchaam in beweging is, af te leiden:

$$(7) \int dt \{ \delta T + \delta\Omega - \delta\Sigma \int F dx dy dz \} = 0$$

waarin  $t$  de tijd, en  $T$  de halve levende kracht van het geheele ligchaam is.

### § 3.

Overgaande tot het geval eener plaat, die oneindig dun is, zal de vergelijking (7) van toepassing zijn, mits men zich daarbij rekenschap geve van de wijze, waarop de verschillende deeltjes zijn aaneengevoegd.

De deeltjes, waaruit de plaat bestaat, of waarin zij verdeeld gedacht wordt, zijn prismaas, wier hoogte overeenkomt met hare oneindig kleine dikte  $2c$ , en waarvan de doorsneden elementen van het middenvlak uitmaken. Noemen wij zoodanig element  $da db$ , dan volgt hieruit:

$$\int F dx dy dz = da db \int_{-c}^{+c} F dz$$

wanneer wij letten op de twee hypothesen 1) waarvan Kirchhoff uitgaat, nl.:

1. Iedere loodlijn op het middenvlak van de plaat in haren natuurlijken toestand blijft bij de vormverandering regt, en te lood op het verplaatste middenvlak.

2. Alle elementen van het middenvlak blijven bij de vormverandering even groot.

1) Crelle, Bd. XL.

Voor de wijze waarop de deeltjes zijn aaneengevoegd, gaan wij nu eene analytische uitdrukking zoeken.

Kiezen wij vooraf twee coördinaten systemen.

Een punt  $O$  van het middenvlak der plaat, in haren natuurlijken toestand, zij de oorsprong van drie regthoekige assen  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  waarvan  $X'$  en  $Y'$  in het middenvlak liggen; een ander punt  $P$  ook in dit middenvlak, en in het eerste systeem bepaald door  $a$  en  $b$ , zij de oorsprong van drie andere assen  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  evenwijdig aan de eersten; deze laatsten zullen slechts voor punten in de nabijheid van  $P$  gebruikt worden.

Beweegt zich nu het middenvlak, dan nemen wij aan, dat de assen door  $P'$  (het verplaatste punt  $P$ ), altijd regthoekig blijvende, zich met het middenvlak in dier voege verplaatsen, dat het vlak  $X P' Y$  steeds met het verplaatste middenvlak zamenvalt, terwijl  $P'X$  de rigting aanduidt, waarin een element  $da$  na de verplaatsing gekomen is.

Een punt, dat primitief in het systeem  $X, Y, Z$  bepaald was door  $x, y, z$  zal dan tegenover  $P'$  niet meer denzelfden stand behouden hebben, als het ten opzichte van  $P$  bezat, maar bijv. gekomen zijn in  $x + u, y + v, z + w$ , of in het vaste systeem bepaald zijn door de coördinaten  $x', y', z'$ .

Heeft het punt  $P'$  dan tevens in het vaste systeem  $\xi, \eta, \zeta$  tot coördinaten, en zijn de cosinus der assen  $X', Y', Z'$

met  $X : \alpha_0, \beta_0, \gamma_0,$

met  $Y : \alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$

met  $Z : \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

geworden, dan is het verband tusschen de twee coördinaten-systemen dit:

$$(b) \begin{cases} x' = \xi + \alpha_0(x + u) + \alpha_1(y + v) + \alpha_2(z + w) \\ y' = \eta + \beta_0(x + u) + \beta_1(y + v) + \beta_2(z + w) \\ z' = \zeta + \gamma_0(x + u) + \gamma_1(y + v) + \gamma_2(z + w). \end{cases}$$

Zijn nu de deeltjes der plaat zoodanig aaneengevoegd, dat noch in de rigting der X-as, noch in de rigting der Y-as ledige tusschenruimten gevonden worden, zoo zal de volgende redenering van toepassing zijn:

Van een punt  $x + a$ ,  $y + b$ ,  $z$  der plaat zal men tot een naburig punt van de plaat in de rigting der X-as kunnen overgaan òf door  $x$  in  $x + dx$  te veranderen, terwijl men  $a$ ,  $b$ ,  $y$  en  $z$  constant laat, òf door  $a$  in  $a + da$  te veranderen, terwijl  $b$ ,  $x$ ,  $y$  en  $z$  constant blijven. Daar dit medebrengt dat  $dx = da$  is, zal men volgens het Theorema van Taylor, de coördinaten van een punt naburig aan  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  kunnen schrijven:

$$x' + \frac{dx'}{dx} dx, \quad y' + \frac{dy'}{dx} dx, \quad z' + \frac{dz'}{dx} dx,$$

of ook 
$$x' + \frac{dx'}{da} da, \quad y' + \frac{dy'}{da} da, \quad z' + \frac{dz'}{da} da$$

waaruit dan onmiddellijk volgt:

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{dx'}{da}, \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{da}, \quad \frac{dz'}{dx} = \frac{dz'}{da}.$$

Van het punt  $x + a$ ,  $y + b$ ,  $z$  tot een naburig punt in de rigting der  $y$ -as overgaande, vindt men op dezelfde wijze:

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{dx'}{db}, \quad \frac{dy'}{dy} = \frac{dy'}{db}, \quad \frac{dz'}{dy} = \frac{dz'}{db}.$$

Deze 6 conditiën worden volgens (b):

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 \left( 1 + \frac{du}{dx} \right) + \alpha_1 \frac{dv}{da} + \alpha_2 \frac{dw}{dx} = \frac{d\xi}{da} + \frac{d\alpha_0}{da} (x + u) \\ + \frac{d\alpha_1}{da} (y + v) + \frac{d\alpha_2}{da} (z + w) + \alpha_0 \frac{du}{da} + \alpha_1 \frac{dv}{da} + \alpha_2 \frac{dw}{da} \\ \text{enz.} \end{array} \right.$$

De 6 vergelijkingen (c) laten zich evenwel zeer vereenvoudigen, wegens het verband, dat er bestaat tusschen

sommige grootheden, die hierin voorkomen. Vooreerst hangen de 9 cosinus  $\alpha_0, \beta_0$  enz. van elkander af op deze wijze:

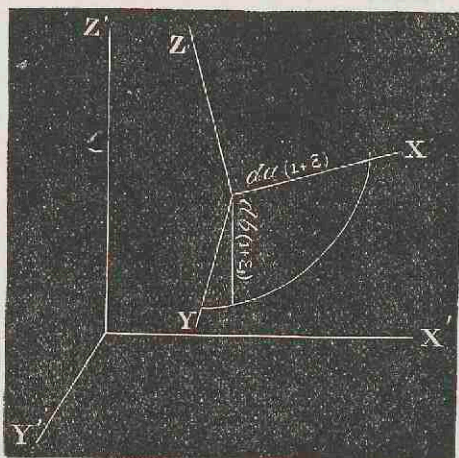
$$(d) \begin{cases} \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1, & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, & \alpha_0 \alpha_2 + \beta_0 \beta_2 + \gamma_0 \gamma_2 = 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, & \alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 + \gamma_0 \gamma_1 = 0; \end{cases}$$

verder bestaat er verband tusschen de differentiaalquotienten van  $\xi, \eta, \zeta$  ten opzichte van  $a$  en  $b$ , en de 9 cosinus  $\alpha_0, \beta_0$  enz., hetgeen aldus kan worden aangetoond.

Na de vormverandering der plaat zijn de elementen  $da$  en  $db$  beide een weinig verlengd, bijv. tot  $da(1 + \varepsilon)$ ,  $db(1 + \varepsilon_1)$ ; tevens is de hoek tusschen deze elementen veranderd, bijv. tot  $90^\circ - \sigma$ .

Volgens de wijze, waarop het bewegelijk coördinatenstelsel is aangenomen, zijn de projectiën van  $da(1 + \varepsilon)$  op de vaste assen:

$$\alpha_0 da(1 + \varepsilon), \beta_0 da(1 + \varepsilon), \gamma_0 da(1 + \varepsilon)$$



Wordt nu  $db(1 + \varepsilon)$  ontbonden in  $db(1 + \varepsilon) \sin \sigma$  volgens de X-as en  $db(1 + \varepsilon) \cos \sigma$  volgens de Y-as, en projecteert men daarna ieder dezer stukken op de vaste assen, dan is uit nevensstaande figuur gemakkelijk te vinden, dat de som der projectiën op de vaste assen na de ver-

eenvoudiging  $\sin \sigma = \sigma$ ,  $\cos \sigma = 1$ , geeft:

$(\alpha_1 + \alpha_0 \sigma) db(1 + \varepsilon_1)$ ,  $(\beta_1 + \beta_0 \sigma) db(1 + \varepsilon_1)$ ,  $(\gamma_1 + \gamma_0 \sigma) db(1 + \varepsilon_1)$ ; volgens het theorema van Taylor vindt men voor deze zelfde projectiën aanstonds:

$$\frac{d\xi}{da} da, \frac{d\eta}{da} da, \frac{d\xi}{da} da$$

$$\frac{d\xi}{db} db, \frac{d\eta}{db} db, \frac{d\xi}{db} db$$

waaruit dus volgt:

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{da} = \alpha_0 (1 + \varepsilon), \quad \frac{d\xi}{db} = (\alpha_1 + \alpha_0 \sigma) (1 + \varepsilon_1) \\ \frac{d\eta}{da} = \beta_0 (1 + \varepsilon), \quad \frac{d\eta}{db} = (\beta_1 + \beta_0 \sigma) (1 + \varepsilon_1) \\ \frac{d\xi}{da} = \gamma_0 (1 + \varepsilon), \quad \frac{d\xi}{db} = (\gamma_1 + \gamma_0 \sigma) (1 + \varepsilon_1). \end{array} \right.$$

Verwaarloost men  $\sigma^2$ , dan is hieruit ook:

$$(f) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{da}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{da}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{da}\right)^2} \\ 1 + \varepsilon_1 = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{db}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{db}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{db}\right)^2} \end{array} \right.$$

Om al te lange formules te vermijden, schrijven wij de 6 vergelijkingen (e): 1, 2, 3, 4, 5, 6 en nemen de volgende sommen:

$$(g) \left\{ \begin{array}{l} 1. \alpha_0 + 2. \beta_0 + 3. \gamma_0, \quad 4. \alpha_0 + 5. \beta_0 + 6. \gamma_0 \\ 1. \alpha_1 + 2. \beta_1 + 3. \gamma_1, \quad 4. \alpha_1 + 5. \beta_1 + 6. \gamma_1 \\ 1. \alpha_2 + 2. \beta_2 + 3. \gamma_2, \quad 4. \alpha_2 + 5. \beta_2 + 6. \gamma_2. \end{array} \right.$$

Vereenvoudigt men deze sommen door middel van de vergelijkingen (d), (e) en (f), en stelt men korthedshalve:

$$(h) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{da} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{da} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{da} = p \\ \alpha_2 \frac{d\alpha_0}{da} + \beta_2 \frac{d\beta_0}{da} + \gamma_2 \frac{d\gamma_0}{da} = q \\ \alpha_0 \frac{d\alpha_1}{da} + \beta_0 \frac{d\beta_1}{da} + \gamma_0 \frac{d\gamma_1}{da} = r \end{array} \right.$$



$$(h) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{db} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{db} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{db} = p_1 \\ \alpha_2 \frac{d\alpha_0}{db} + \beta_2 \frac{d\beta_0}{db} + \gamma_2 \frac{d\gamma_0}{db} = q_1 \\ \alpha_0 \frac{d\alpha_1}{db} + \beta_0 \frac{d\beta_1}{db} + \gamma_0 \frac{d\gamma_1}{db} = r_1, \end{array} \right.$$

zoo worden de vergelijkingen (g):

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{da} + r(y+v) - q(z+w) + \varepsilon$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{da} + p(z+w) - r(x+u)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{da} + q(x+u) - p(y+v)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{db} + r_1(y+v) - q_1(z+w) + \sigma(1 + \varepsilon_1)$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{db} + p_1(z+w) - r_1(x+u) + \varepsilon_1$$

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dw}{db} + q_1(x+u) - p_1(y+v).$$

Daar echter in 't algemeen de differentiaal-quotienten  $\frac{du}{da}$ ,  $\frac{dv}{da}$ ,  $\frac{dw}{da}$ ,  $\frac{du}{db}$ ,  $\frac{dv}{db}$ ,  $\frac{dw}{db}$  niet oneindig zijn in vergelijking van  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , omdat  $a$  en  $b$  eindige grootheden zijn, zoo kunnen zij verwaarloosd worden tegenover de quotienten  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dx}$ ,  $\frac{dw}{dx}$ ,  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ ,  $\frac{dw}{dy}$  die volgens § 2 oneindig zijn in vergelijking van  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Zonder merkbare fout kunnen de laatste vergelijkingen dus geschreven worden:

$$\frac{du}{dx} = ry - qz + \varepsilon, \quad \frac{du}{dy} = r_1y - q_1z + \sigma$$

$$\frac{dv}{dx} = pz - rx, \quad \frac{dv}{dy} = p_1 z - r_1 x + s_1$$

$$\frac{dw}{dx} = qz - py, \quad \frac{dw}{dy} = q_1 x - p_1 y.$$

De drie eersten hiervan volgens  $y$ , en de drie laatsten volgens  $x$  gedifferentieerd, toonen aan, dat:

$$\frac{d^2 v}{dx dy} = r = 0, \quad \frac{d^2 v}{dx dy} = 0 = -r_1, \quad \frac{d^2 w}{dx dy} = -p = q_1.$$

Substitueert men dit, dan verkrijgt men nog:

$$\frac{du}{dx} = -qz + s, \quad \frac{du}{dy} = pz + \sigma$$

$$\frac{dv}{dx} = pz, \quad \frac{dv}{dy} = p_1 z + s_1$$

$$\frac{dw}{dx} = qx - py, \quad \frac{dw}{dy} = -px - p_1 y$$

Deze vergelijkingen geïntegreerd leeren ons eindelijk den vorm kennen, waaraan  $u$ ,  $v$ ,  $w$  moeten voldoen, zal de plaat continu zijn; deze vorm is:

$$(k) \left\{ \begin{array}{l} u = z(-qx + yq) + sx + sy + u_0 \\ v = z(px + p_1 y) + s_1 y + v_0 \\ w = \frac{qx^2}{2} - pxy - \frac{p_1 y^2}{2} + w_0; \end{array} \right.$$

in de grootheden  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  kunnen natuurlijk alleen  $z$ ,  $a$  en  $b$  voorkomen.

#### § 4.

Thans vatten wij de vergelijking (7) weder op. In de onderstelling, dat uitwendige krachten ontbreken, wordt zij, volgens het begin der vorige §

$$\int dt (\delta T - \delta \Sigma da db \int_{-c}^{+c} F dz) = 0$$

$$\text{of } \int dt (\delta T - \delta \iint da db \int_{-c}^{+c} F dz) = 0.$$

Alvorens de integratie  $\int_{-c}^{+c} F dz$  te kunnen uitvoeren, moeten de grootheden  $u_0, v_0, w_0$  nader bepaald worden. Wetende dat  $u, v, w$  moeten voldoen aan de simultane vergelijkingen:

$$(m) \begin{cases} \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dZ_x}{dz} = 0 \\ \frac{dX_y}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} = 0 \\ \frac{dZ_x}{dx} + \frac{dY_z}{dy} + \frac{dZ_z}{dz} = 0 \end{cases}$$

en aan

$$(n) \begin{cases} \lambda X_x + \mu X_y + \nu Z_x = 0 \\ \lambda X_y + \mu Y_y + \nu Y_z = 0 \\ \lambda Z_x + \mu Y_z + \nu Z_z = 0, \end{cases}$$

substitueren wij de waarden van  $u, v, w$  uit (g) met behulp van de vergelijkingen (a) in de vergelijkingen (m), en vinden:

$$\frac{d^2 u_0}{dz^2} = 0, \frac{d^2 v_0}{dz^2} = 0, \frac{d}{dz} \left\{ (1 + \theta) \frac{dw_0}{dz} + \theta (z(p_1 - q) + s + s_1) \right\} = 0.$$

Hieruit is:

$$\frac{du_0}{dz} = \text{const.}, \frac{dv_0}{dz} = \text{const.}, (1 + \theta) \frac{dw_0}{dz} + \theta (z(p_1 - q) + s + s_1) = \text{const.}$$

De constanten bepalen wij uit (n); kiezen wij bijv. een der evenwijdige vlakken van de plaat, dan is  $\lambda = 0, \mu = 0, \nu = 1$  en:

$$\frac{du_0}{dz} = 0, \frac{dv_0}{dz} = -\frac{\theta}{1 + \theta} (z(p_1 - q) + s + s_1).$$

waaruit op nieuw:

$$u_0 = \text{const.}, v_0 = \text{const.}, w_0 = -\frac{z\theta}{1+\theta} \left( z \frac{p_1 - q}{2} + s + s_1 \right) + \text{const.}$$

Uit de keuze van het bewegelijk coördinatensysteem volgt dat voor  $x = 0, y = 0, z = 0$  de grootheden

$$u, v, w, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dy},$$

moeten verdwijnen; dit gesubstitueerd in (k) geeft, dat voor  $z = 0, u_0, v_0, w_0$  gelijk nul zijn, waaruit dan:

$$u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = -\frac{z\theta}{1+\theta} \left( z \frac{p_1 - q}{2} + s + s_1 \right).$$

Deze waarden en de vergelijkingen (k), maken

$$F = K \left\{ (-qz + s)^2 + (p_1 z + s_1)^2 + \frac{\theta}{1+\theta} (z(p_1 - q) + s + s_1) + \frac{(2pz + \sigma)^2}{2} \right\}$$

en

$$\int_{-c}^{+c} F dz = \frac{2Kc}{3} \left\{ c^2 (q^2 + p_1^2 + 2p^2) + 3 \left( s^2 + s_1^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\theta}{1+\theta} (c^2 (p_1 - q)^2 + 3(s + s_1)^2) \right\}$$

Laat ons nu de waarde van T ontwikkelen.

Beteekent  $\rho$  de digtheid van de plaat, dan is:

$$T = \rho c \iint da db \left\{ \left( \frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz'}{dt} \right)^2 \right\}$$

Worden de vergelijkingen (b) gedifferentieerd ten opzichte

van  $t$ , en de waarden van  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$  afgeleid uit

$u, v, w$  zoo verkrijgt men zeer omslagtige uitdrukkingen

voor  $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$ ; evenwel kunnen deze op de vol-

gende wijze zeer vereenvoudigd worden.

Uit de bepaling der grootheden  $s$ ,  $s_1$  volgt, dat  $\frac{ds}{dt}$ ,  $\frac{ds_1}{dt}$  niet  $\infty$  zijn in vergelijking van  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$ ,  $\frac{d\zeta}{dt}$ , tenzij  $\frac{d\xi}{da}$ ,  $\frac{d\eta}{da}$ ,  $\frac{d\zeta}{da}$ ,  $\frac{d\xi}{db}$ ,  $\frac{d\eta}{db}$ ,  $\frac{d\zeta}{db} \infty$  zijn, vergeleken bij  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ; dit geval zullen wij buiten rekening laten. Verder volgt uit (e), dat  $\frac{d\alpha_0}{dt}$ ,  $\frac{d\beta_0}{dt}$ ,  $\frac{d\gamma_0}{dt}$ ,  $\frac{d\alpha_1}{dt}$ ,  $\frac{d\beta_1}{dt}$ ,  $\frac{d\gamma_1}{dt}$ ,  $\frac{d\sigma}{dt}$  niet  $\infty$  zijn tegenover  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$ ,  $\frac{d\zeta}{dt}$  en uit de betrekkingen (d) dat  $\frac{d\alpha_2}{dt}$ ,  $\frac{d\beta_2}{dt}$ ,  $\frac{d\gamma_2}{dt}$  dezelfde eigenschap bezitten.

Bij eene dergelijke onderstelling is daarenboven uit (h) te bewijzen, dat geene der grootheden  $\frac{dp}{dt}$ ,  $\frac{dq}{dt}$ ,  $\frac{dp_1}{dt} \infty$  is in vergelijking van  $\frac{d\alpha_0}{dt}$  enz.

Dientengevolge is:

$$T = \rho c \iint da db \left\{ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right\},$$

waarmede (7) wordt:

$$(8) \delta \iint \iint da db dt \left\{ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 - \frac{1}{\rho c} \int_{-c}^{+c} F dz \right\} = 0.$$

Beschouwen wij alleen het geval, dat de plaat slechts oneindig weinig uit haren natuurlijken toestand bewogen wordt, d. i. dat  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_0$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma$  grootheden 1<sup>e</sup> orde zijn en  $\alpha_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_2$  waarden hebben, die van de eenheid grootheden 2<sup>e</sup> orde verschillen, zoo vereenvoudigen zich de vergelijkingen (e) tot:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{da} &= \alpha_0 + \varepsilon, & \frac{d\xi}{db} &= \sigma + \alpha_1, \\ \frac{d}{da} &= \beta_0, & \frac{d\eta}{db} &= \beta_1 + \varepsilon_1, \\ \frac{d\gamma}{da} &= \gamma_0, & \frac{d\xi}{db} &= \gamma_1,\end{aligned}$$

terwijl de vergelijkingen (d) worden:

$$\beta_2 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \gamma_0 = 0, \quad \alpha_1 + \beta_0 = 0.$$

De grootheden  $q$ ,  $p$ ,  $p_1$ , die in  $\int_{-c}^{+c} F dz$  voorkomen, worden nu na verwaarloozing hunner kleinste termen:

$$q = \frac{d^2\xi}{da^2}, \quad p = -\frac{d^2\xi}{da db}, \quad p_1 = -\frac{d^2\xi}{db^2}.$$

$$\text{Stelt men } \int_{-c}^{+c} F dz = \frac{2 Kc^3}{2} f_1 + \frac{2 Kc}{3} f_2,$$

dan is uit het voorgaande:

$$f_1 = \left(\frac{d^2\xi}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\xi}{db^2}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2\xi}{da db}\right)^2 + \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{d^2\xi}{da^2} + \frac{d^2\xi}{db^2}\right)^2.$$

Substitueert men verder voor  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\sigma$  de waarden:

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{da} - 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{d\eta}{db} - 1, \quad \sigma = \frac{d\xi}{db} + \frac{d\eta}{da},$$

zoo wordt:

$$f_2 = \frac{2}{1+\theta} \left\{ (1+3\theta) + (1+3\theta) \left(\frac{d\xi}{da} + \frac{d\eta}{db}\right) + \frac{1+2\theta}{2} \left(\frac{d\xi}{da}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{db}\right)^2 + 2\theta \frac{d\xi}{da} \frac{d\eta}{db} + \frac{1+\theta}{2} \left(\frac{d\xi}{db} + \frac{d\eta}{da}\right) \right\}.$$

Daar  $f_1$  alleen van  $\xi$ ,  $f_2$  alleen van  $\xi$  en  $\eta$  afhangt, kan de vergelijking (8) vervangen worden door deze twee:

$$(9) \quad \delta \iiint dt da db \left\{ q \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - \frac{2K}{3} f_2 \right\} = 0,$$

$$(10) \quad \delta \iiint dt da db \left\{ q \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 - \frac{2Kc^3}{3} f_1 \right\} = 0.$$

De laatste dezer vergelijkingen geeft aanleiding tot de volgende ontwikkeling:

$$\frac{1}{2} \iint da db \delta f_1 = \iint da db \left\{ \frac{d^2 \zeta}{da^2} \frac{d^2 \delta \zeta}{da^2} + 2 \frac{d^2 \zeta}{da db} \frac{d^2 \delta \zeta}{da db} + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \frac{d^2 \delta \zeta}{db^2} + \frac{\theta}{1 + \theta} \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \right) \left( \frac{d^2 \delta \zeta}{da^2} + \frac{d^2 \delta \zeta}{db^2} \right) \right\}.$$

De drie eerste termen van het tweede lid dezer vergelijking zijn op deze wijze te ontbinden:

$$(p) \left\{ \begin{aligned} \iint da db \frac{d^2 \zeta}{da^2} \frac{d^2 \delta \zeta}{da^2} &= \iint da db \frac{d}{da} \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} \frac{d \delta \zeta}{da} \right) \\ &\quad - \iint da db \frac{d}{da} \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} \delta \zeta \right) + \iint da db \frac{d^4 \zeta}{da^4} \delta \zeta, \\ \iint da db \frac{d^2 \zeta}{da db} \frac{d^2 \delta \zeta}{da db} &= \iint da db \frac{d}{da} \left( \frac{d^2 \zeta}{da db} \frac{d \delta \zeta}{db} \right) \\ &\quad - \iint da db \frac{d}{db} \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2 db} \delta \zeta \right) + \iint da db \frac{d^4 \zeta}{da^2 db^2} \delta \zeta, \\ \iint da db \frac{d^2 \zeta}{da db} \frac{d^2 \delta \zeta}{da db} &= \iint da db \frac{d}{db} \left( \frac{d^2 \zeta}{da db} \frac{d \delta \zeta}{da} \right) \\ &\quad - \iint da db \frac{d}{da} \left( \frac{d^2 \zeta}{da db^2} \delta \zeta \right) + \iint da db \frac{d^4 \zeta}{da^2 db^2} \delta \zeta, \\ \iint da db \frac{d^2 \zeta}{db^2} \frac{d^2 \delta \zeta}{db^2} &= \iint da db \frac{d}{db} \left( \frac{d^2 \zeta}{db^2} \frac{d \delta \zeta}{db} \right) \\ &\quad - \iint da db \frac{d}{db} \left( \frac{d^2 \zeta}{db^2} \delta \zeta \right) + \iint da db \frac{d^4 \zeta}{db^4} \delta \zeta. \end{aligned} \right.$$

Aldus ontbonden, past men op een gedeelte dezer integralen toe de stelling:

$$\iint da db \frac{dF}{da} = - \int \cos \varphi ds F \quad 1),$$

1) Deze stelling van Gauss wordt aldus bewezen:

$$\iint da db \frac{dF}{da} = \int_{a_1}^{a_2} (F)_{a_1} db = \int_{a_2} F db - \int_{a_1} F db;$$

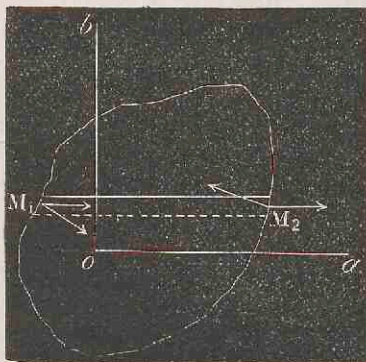
$$\iint da db \frac{dF}{db} = - \int \sin \varphi ds F,$$

waarin  $F$  eene willekeurige functie van  $a$  en  $b$ ,  $ds$  het element van den omtrek der plaat, en  $\varphi$  de hoek is, dien de binnenwaartsche normaal des omtreks met de positieve  $X$ -as maakt. Deze hoek wordt door de  $X$ -as beschreven, wanneer men haar draait, totdat zij evenwijdig loopt met de normaal; bij de draaijing moet daarenboven de positieve  $X$ -as, na één quadrant doorloopen te hebben, met de positieve  $Y$ -as zamenvallen:

De uitdrukkingen  $\frac{d\delta\xi}{da}$  en  $\frac{d\delta\xi}{db}$  verandert men tevens door de formules:

$$\frac{dF}{da} = \frac{dF}{dN} \cos \varphi + \frac{dF}{ds} \sin \varphi, \quad 1)$$

$a_1$  en  $a_2$  zijn de abscissen van twee punten  $M_1$  en  $M_2$ , waar eene regte lijn, evenwijdig aan de as  $oa$ , den omtrek van het middenvlak ontmoet.



In de enkelvoudige integralen is  $db$  de projectie van twee verschillende elementen  $ds_1$  en  $ds_2$  des omtreks, gelogen in  $M_1$  en  $M_2$ . Volgens de beteekenis, aan  $\varphi$  gegeven, heeft men dan:

$db = -ds_2 \cos \varphi_2$ ,  $db = ds_1 \cos \varphi_1$ ; immers in nevensstaande figuur is  $\varphi$  de inspringende hoek aan het punt  $M_1$  en  $\varphi_2$  de stompe hoek aan

punt  $M_2$  gevormd door de aldaar geteekende pijltjes. Noemt men dus in 't algemeen  $\varphi$  den hoek, gevormd door den normaal met de as  $oa$ , zoo heeft men:

$$\int da db \frac{dF}{da} = - \int F \cos \varphi ds.$$

1) Deze formules volgen aanstonds uit de vergelijkingen:



$$\frac{dF}{db} = \frac{dF}{dN} \sin \varphi - \frac{dF}{ds} \cos \varphi,$$

waarin  $F$ ,  $\varphi$  en  $s$  dezelfde beteekenis hebben als zooeven, terwijl  $dN$  het element der normaal voorstelt; verder is de rigting, waarheen  $s$  moet geteld worden, aldus aangenomen: wanneer men de positieve  $X$ -as draait op de wijze als straks, wordt zij evenwijdig aan de tangens, getrokken in de rigting van den wassenden boog, zoodra zij eenen hoek  $\varphi - 90$  beschreven heeft.

Nemen wij daarna de som der vergelijkingen ( $p$ ), dan ontstaat:

$$\begin{aligned} & \iint da db \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} + 2 \frac{d^2 \zeta}{da db} + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \right) \delta \zeta \\ & - \int ds \left\{ \frac{d^2 \zeta}{da^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{d^2 \zeta}{da db} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \sin^2 \varphi \right\} \frac{d\delta \zeta}{dN} \\ & + \int ds \left[ \left( \frac{d^3 \zeta}{da^3} + \frac{d^3 \zeta}{da db^2} \right) \cos \varphi + \left( \frac{d^3 \zeta}{da^2 db} + \frac{d^3 \zeta}{db^3} \right) \sin \varphi \right. \\ & \left. - \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d^2 \zeta}{da db} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left( \frac{d^2 \zeta}{db^2} - \frac{d^2 \zeta}{da^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi \right\} \right] \delta \zeta. \end{aligned}$$

Het overblijvende gedeelte van  $\frac{1}{2} \iint da db \delta f_1$  wordt herleid door de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \iint da db F \left( \frac{d^2 G}{da^2} + \frac{d^2 G}{db^2} \right) &= \iint da db G \left( \frac{d^2 F}{da^2} + \frac{d^2 F}{db^2} \right) + \\ &+ \int ds \frac{dF}{dN} G - \int ds \frac{dG}{dN} F, \quad 1) \end{aligned}$$

$$\frac{dF}{dN} = \frac{dF}{da} \cdot \frac{da}{dN} + \frac{dF}{db} \cdot \frac{db}{dN}$$

$$\frac{dF}{ds} = \frac{dF}{da} \cdot \frac{da}{ds} + \frac{dF}{db} \cdot \frac{db}{ds}$$

waarin, volgens aanname, deze waarden moeten gesubstitueerd worden:

$$\frac{da}{dN} = \cos \varphi, \quad \frac{db}{dN} = \sin \varphi, \quad \frac{da}{ds} = \cos (\varphi - 90), \quad \frac{db}{ds} = \cos (180 - \varphi).$$

1) Gevolg van het theorema van Green; zie Grinwis Wisk. theor. der wrijvingselectr. p. 26.

en  $\frac{dF}{dN} = \frac{dF}{da} \cos \varphi + \frac{dF}{db} \sin \varphi$ ; de beteekenis van alle letters blijft dezelfde als te voren,  $G$  is nu eene tweede willekeurige functie van  $a$  en  $b$ .

Alzoo herleid, wordt dit gedeelte :

$$\iint da db \left( \frac{d^4 \zeta}{da^4} + 2 \frac{d^4 \zeta}{da^2 db^2} + \frac{d^4 \zeta}{db^4} \right) \delta \zeta - \int ds \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \right) \frac{d \delta \zeta}{dN} +$$

$$+ \int ds \left\{ \left( \frac{d^3 \zeta}{da} + \frac{d^3 \zeta}{da db^2} \right) \cos \varphi + \left( \frac{d^3 \zeta}{da^2 db} + \frac{d^3 \zeta}{db^3} \right) \sin \varphi \right\} \delta \zeta.$$

De variatie van  $\iiint \varphi dt da db \left( \frac{d \zeta}{dt} \right)^2$  geeft verder :

$$2 \varphi \iiint dt da db \frac{\delta \zeta}{dt} \frac{d \delta \zeta}{dt} = 2 \varphi \iint da db \left( \frac{d \zeta}{dt} \right) \delta \zeta$$

$$- 2 \varphi \iiint dt da db \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \delta \zeta$$

Na substitutie van de gevonden waarden in (9), verkrijgt nu door de regels der Variatie-Rekening, voor alle punten van het middenvlak :

$$(11) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \varphi \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{2}{3} \frac{1+2\theta}{1+\theta} c^2 K \left( \frac{d^4 \zeta}{da^4} + 2 \frac{d^4 \zeta}{da^2 db^2} + \frac{d^4 \zeta}{db^4} \right) \\ &\text{voor alle punten aan den omtrek.} \\ 0 &= \frac{1+2\theta}{1+\theta} \left\{ \left( \frac{d^3 \zeta}{da^3} + \frac{d^3 \zeta}{da db^2} \right) \cos \varphi + \left( \frac{d^3 \zeta}{da^2 db} + \frac{d^3 \zeta}{db^3} \right) \sin \varphi \right\} \\ &- \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d^2 \zeta}{da db} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left( \frac{d^2 \zeta}{db^2} - \frac{d^2 \zeta}{da^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi \right\}, \\ 0 &= \frac{\theta}{1+\theta} \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \right) + \frac{d^2 \zeta}{da^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{d^2 \zeta}{da db} \cos \varphi \sin \varphi + \\ &\quad + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \sin^2 \varphi. \end{aligned} \right.$$

De vergelijkingen (11) zijn niet de eenige, die de bovenstaande theorie oplevert, want uit (9) zoude op

ongeveer dezelfde wijze een systeem vergelijkingen 1) voortvloeijen. Daar wij ons intusschen alleen met transversale trillingen wenschen bezig te houden, bepalen wij ons tot de vergelijkingen (11).

## B. *Overzicht en beoordeeling van andere theoriën.*

### § 5.

In zijne beroemde verhandeling (Crelle Bd. XL) heeft Kirchhoff tevens eene beoordeeling van de theoriën van Sophie Germain en Poisson medegedeeld. Deze beoordeelingen zullen wij nader toelichten, daar het ons voorkomt, dat zij te zeer ineengedrongen zijn, en wij het noodzakelijk achten, datgene te bewijzen, wat in § 1 is gezegd. Tevens zullen wij van Kirchhoff's methode gebruik maken om aan te toonen, dat de theorie van J. Bernouilli tot verkeerde uitkomsten moest leiden; hierin ligt dan ook de reden, waarom de chronologische orde in zooverre gewijzigd zal worden, dat de theorie van J. Bernouilli eene plaats vindt na die van Sophie Germain.

#### a. *Theorie van Sophie Germain.*

Sophie Germain stelde: wanneer een element  $df$  van het middenvlak van plaats verandert, is de kracht waarmee het wordt teruggedreven, evenredig aan zijne grootte en aan de som  $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ , waarin  $\varrho_1$  en  $\varrho_2$  de hoofdkromtestralen van het verplaatste element voorstellen.

1) Gehring, Diss. de aequationibus differ. quibus laminae crystallinae definiuntur p. 18.

Is  $N^2$  eene constante, afhankelijk van de natuur en dikte der plaat, en  $u$  de bovengenoemde som, zoo is de uitdrukking voor deze kracht:

$$N^2 u df.$$

Hieruit is dan aanstonds de voorwaarde voor het evenwigt der plaat:

$$(1) \quad \delta P - N^2 \int u \delta u df = 0$$

waarin  $\delta P$  het virtuele moment der uitwendige krachten, en  $\delta u$  de virtuele verandering van  $u$  aanduidt. Ingeval de plaat oneindig weinig uit haren natuurlijken toestand wordt gebracht door krachten, die op hare moleculen werken, loodregt op het middenvlak, geeft de vergelijking (1) aanleiding tot de volgende berekening: laat weder het middenvlak, in zijnen oorspronkelijken toestand het XY-vlak van een regthoekig coördinaten-systeem zijn,  $z$  de afwijking van een punt  $x, y$  en  $Z'$  de kracht die op de eenheid van volume wordt uitgeoefend. Legt men verder een vlak evenwijdig aan de  $Z$ -as, dat een hoek  $\varphi$  maakt met het vlak  $XZ$ , door het punt  $x, y, z$  dan wordt hierdoor het middenvlak gesneden volgens eene kromme; zij de kromtestraal dezer lijn in het punt  $x, y, z$ :  $\rho$ ; en  $\theta$  de hoek tusschen de normaal op het verplaatste middenvlak in hetzelfde punt met  $\varphi$ , dan is:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cos \varphi}{\frac{d^2z}{dx^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{d^2z}{dx dy} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{d^2z}{dy^2} \sin^2 \varphi} \quad 1)$$

Wegens de gemaakte onderstelling is het nu geoorloofd,  $\cos \theta = 1$  te schrijven, en  $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$ ,  $\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$  te verwaarloozen, waaruit volgt:

1) Sturm, Cours d'Anal. p. 209.

$$(a) \frac{1}{\varrho} = \frac{d^2z}{dx^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{d^2z}{dx dy} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{d^2z}{dy^2} \sin^2 \varphi$$

Zijn de hoofdkromtestralen  $\varrho_1$  en  $\varrho_2$ , dan zijn de waarden van  $\frac{1}{\varrho_1}$  en  $\frac{1}{\varrho_2}$  het maximum en minimum van  $\frac{1}{\varrho}$ , of de wortels van de vergelijking:

$$\left( \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{\varrho} \right) \left( \frac{d^2z}{dy^2} - \frac{1}{\varrho} \right) - \left( \frac{d^2z}{dx dy} \right)^2 = 0, \quad (1)$$

$$\text{dus} \quad u = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Bijgevolg is:

$$\int u \delta u df = \iint \left( \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} \right) \left( \frac{d^2 \delta z}{dx} + \frac{d^2 \delta z}{dy} \right) dx dy.$$

Past men hierop den bekenden regel:

$$pd^2q = d(pdq) - d(qdp) + qd^2p$$

toe, waarin  $p$  en  $q$  willekeurige functiën aanduiden, dan heeft men:

1) De maximum en minimum waarden van  $\frac{1}{\varrho}$  voldoen aan de conditie  $d\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0$ ; bijgevolg is uit de vergelijking (a), die wij korthalshalve schrijven:

$$\frac{1}{\varrho} = r \cos^2 \varphi + 2s \cos \varphi \sin \varphi + t \sin^2 \varphi,$$

$$d\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0 = (t - r) \sin 2\varphi + 2s \cos 2\varphi;$$

$$\text{waaruit } \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2s}{r-t}, \quad \cos 2\varphi = \frac{r-t}{\sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2s}{\sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}$$

Substitueren wij deze waarden in (a), die wij daartoe schrijven:

$$\frac{2}{\varrho} = (r+t) + (r-t) \cos 2\varphi + 2s \sin 2\varphi,$$

$$\text{zoo is:} \quad \left( \frac{2}{\varrho} - r - t \right)^2 = (r-t)^2 + 4s^2, \quad \text{of na herleiding:}$$

$$\left( r - \frac{1}{\varrho} \right) \left( t - \frac{1}{\varrho} \right) - s^2 = 0.$$

$$\iint \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d^2 \delta z}{dx^2} dx dy = \iint dx dy \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d \delta z}{dx} \right) \\ - \iint dx dy \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \delta z \right) + \iint dx dy \frac{d^2 z}{dx^2} \delta z,$$

$$\iint \frac{d^2 z}{dy^2} \frac{d^2 \delta z}{dx^2} dx dy = \iint dx dy \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 z}{dy^2} \frac{d \delta z}{dx} \right) \\ - \iint dx dy \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \delta z \right) + \iint dx dy \frac{d^2 z}{dx^2 dy^2} \delta z,$$

$$\iint \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d^2 \delta z}{dy^2} dx dy = \iint dx dy \frac{d}{dy} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d \delta z}{dy} \right) \\ - \iint dx dy \frac{d}{dy} \left( \frac{d^2 z}{dx^2 dy} \delta z \right) + \iint dx dy \frac{d^2 z}{dx^2 dy^2} \delta z,$$

$$\iint \frac{d^2 z}{dy^2} \frac{d^2 \delta z}{dy^2} dx dy = \iint dx dy \frac{d}{dy} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d \delta z}{dy} \right) \\ - \iint dx dy \frac{d}{dy} \left( \frac{d^2 z}{dy^2} \delta z \right) + \iint dx dy \frac{d^2 z}{dy^2} \delta z.$$

Vervormen wij nu de eerste en tweede termen van de laatste leden dezer vergelijkingen door de Gaussische formules:

$$\iint dx dy \frac{dF}{dx} = - \int ds \cos \varphi F, \quad 1)$$

$$\iint dx dy \frac{dF}{dy} = - \int ds \sin \varphi F,$$

$$\text{en } \frac{d\delta z}{dx} = \frac{d\delta z}{dN} \cos \varphi - \frac{d\delta z}{ds} \sin \varphi \quad 1), \quad \frac{d\delta z}{dy} \\ = \frac{d\delta z}{dy} \sin \varphi - \frac{d\delta z}{dN} \cos \varphi.$$

Na deze vervorming verkrijgt men, door optelling der

1) De grootheden  $T$ ,  $\varphi$ ,  $s$ ,  $N$  hebben hier dezelfde beteekenis als in § 4; alleen is nu  $F$  eene functie van  $x$  en  $y$  in plaats van, zooals daar, van  $a$  en  $b$ .

verticale rijen dier vergelijkingen, ééne nieuwe, waarvan het eerste lid is  $\int u \, du \, df$ , terwijl het tweede lid bestaat uit de drie sommen:

$$\begin{aligned} & - \int ds \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} \right) \frac{d\delta z}{dN} \\ & + \int ds \left\{ \cos \varphi \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} \right) + \sin \varphi \frac{d}{dy} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} \right) \right\} \delta z. \\ & + \int dx \, dy \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} \right) \right\} \delta z. \end{aligned}$$

Substitueert men deze uitkomst in vergelijking (1), en merkt op, dat  $\delta P = \iiint \varrho Z' \, dx \, dy \, dz$ ; zoo volgt, wanneer na vereeniging, de coëfficiënten van  $\delta z$  en  $\frac{d\delta z}{dN}$  gelijk nul gesteld worden:

$$(2) \quad N^2 \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = \varrho Z'$$

met de grensbepalingen:

$$u = 0, \quad \frac{du}{dN} = 0$$

De oplossing der differentiaalvergelijking (2) is nu door de voorwaarde  $u = 0$  reeds volkomen bepaald; in het algemeen is het dus niet mogelijk aan de tweede conditie te voldoen; hieruit volgt dat de plaat in het algemeen niet in evenwigt kan zijn. Een gevolg uit de hypothese van Sophie Germain afgeleid is dus onjuist; men mag dus veilig aannemen, dat ook de overeenstemming met experimenten door haar gevonden slechts schijnbaar is.

Uit (2) is tevens gemakkelijk te zien, dat voor het geval dat  $Z' = -\frac{d^2 z}{dt^2}$  is, deze vergelijking overgaat in de vroeger gevondene (§ 4. Verg. (11)), waardoor het

duidelijk wordt, dat de vergelijking van beweging, door haar afgeleid, toevallig de ware is.

b. *Theorie van J. Bernouilli.*

Zooals reeds vroeger werd vermeld, tracht J. Bernouilli de theorie van rechthoekige vrije platen terug te brengen tot de theorie van elastische staven, die door L. Euler eenige jaren vroeger gegeven was 1). Hij beschouwt daartoe eene plaat als de aaneenvoeging van twee lagen van gelijke dikte  $\theta$ ; ieder dezer lagen als de aaneenvoeging van oneindig vele staven die volkomen aan elkander gelijk zijn, naast elkander liggen en dezelfde dikte hebben als de laag waarvan zij een deel uitmaken; terwijl de staven der eene laag loodrecht op die der andere liggen.

Ligt de plaat oorspronkelijk in het vlak XOY, en wijkt een element  $dx dy$  der plaat (dit element bestaat dus uit twee op elkâar liggende quadraatjes) ten gevolge van uitwendige krachten hiervan eene grootheid  $z$  af, dan vindt hij voor de versnellende kracht in dit element = de som der versnellende krachten van beide lagen:

$$a^2 \left( \frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right),$$

waarin  $a$  eene constante is, afhankelijk van den aard en de dikte der plaat. Hiermede stelt hij, in navolging van Daniel Bernouilli, deze differentiaalvergelijking op:

$$(3) \quad a^2 \left( \frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) = \frac{z}{l}.$$

1) Investigatio motuum, quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt. Act. Acad. Petrop. pro ann. 1779.



Volgens d'Alembert schrijven wij haar :

$$(4) \quad a^2 \left( \frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) + \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

Ofschoon nu J. Bernouilli reeds zelf in zijne verhandeling eenige argumenten tegen zijne theorie noemt, en aantoonst, dat de gevolgen dier theorie veel verschillen van de resultaten door Chladni verkregen, voegen wij hierbij nog een bewijs, waarom zijne differentiaalvergelijking (4) niet de juiste kan zijn.

Zoeken wij vooreerst de grensconditiën die bij (4) behooren. Deze zijn gemakkelijk te vinden, wanneer men uitgaat van de vergelijking ((1) § 5)

$$\delta P - a^2 \int u \delta u \, dx \, dy = 0.$$

Behandelt men deze vergelijking op de wijze als reeds meermalen is geschied, onderstellende

$$u = \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z}{dy^2} \right)^2 \text{ en } \delta P = - \iint dx \, dy \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z,$$

zoo verkrijgt men de vergelijking (2) terug, en tevens als voorwaarden, aan den omtrek te vervullen ;

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = 0$$

$$\cos \varphi \frac{d^3 z}{dx^3} + \sin \varphi \frac{d^3 z}{dy^3} + \frac{d}{ds} \left( \cos \varphi \sin \varphi \left( \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} \right) \right) =$$

Stellen wij nu in (4)

$$z = v \sin \frac{t}{\sqrt{l}};$$

is hierin  $v$  eene functie van  $x$  en  $y$ , dan moet voldaan worden aan de voorwaarde :

$$a^2 \left( \frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{d^4 v}{dy^4} \right) = \frac{v}{l}.$$

Deze vergelijking dezelfde zijnde als (1), zoo zal de oplossing van J. Bernouilli ook hier gelden; bij gevolg is

$$\begin{aligned}
 (5) v = A & \left\{ e^{\frac{(2i+1)\pi x}{2a}} \pm e^{-\frac{(2i+1)\pi x}{2a}} \mp \left( e^{\frac{(2i+1)\pi}{4}} \pm e^{-\frac{(2i+1)\pi}{4}} \right) \right. \\
 & \left. \sqrt{2} \cdot \frac{\cos}{\sin} (2i+1) \frac{\pi x}{2a} \right\} \\
 & \left\{ e^{\frac{(2i+1)\pi y}{2b}} \pm e^{-\frac{(2i+1)\pi y}{2b}} \mp \left( e^{\frac{(2i+1)\pi}{4}} \pm e^{-\frac{(2i+1)\pi}{4}} \right) \right. \\
 & \left. \sqrt{2} \cdot \frac{\cos}{\sin} (2i+1) \frac{\pi y}{2b} \right\}.
 \end{aligned}$$

De coördinaten liggen hierbij evenwijdig aan de zijden  $a$  en  $b$ , en ontmoeten elkander in het snijpunt der diagonalen van den rechthoek; de grootheid  $A$  is eene willekeurige constante.

Leidt men  $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2}$  uit (5) af dan is het niet moeilijk aan te toonen, dat deze uitdrukking niet verdwijnt voor  $x = \pm \frac{a}{2}$  wat  $y$ , en  $y = \pm \frac{b}{2}$  wat  $x$  zij, zooals volgens de eerste grensbepaling moest plaats hebben. De tweede conditie-vergelijking hebben wij niet onderzocht, dewijl het vorenstaande reeds genoegzaam is, om de waarheid van de volgende redenering aan te toonen.

Was zijne differentiaalvergelijking (4) goed, dan moest zijne uitkomst aan de gevonden grensbepalingen voldoen; dit geschiedt niet; daaruit volgt dat of zijne differentiaalvergelijking niet deugt, of de bepaling zijner constanten foutief is; op deze bepaling der constanten valt niets aan te merken, dus is zijne vergelijking (4) niet de ware.

### c. *Theoriën van Poisson en Cauchy.*

Poisson was de eerste die eene theorie gaf, waarin hij een streng bewijs leverde voor de vergelijking der tril-

lende beweging eener plaat. Kortens tijd hierna verscheen eene theorie van Cauchy, die wel in de wijze van uiteenzetting van die van Poisson verschilt, maar toch in hoofdzaak daarmede overeenkomt. De grensbepalingen van beiden voor vrije platen komen overeen 1) en zijn drie in aantal, daar beide theoriën analytisch aangeven, dat de drie composanten der drukking op den rand der plaat  $= 0$  zijn.

Een overzicht van hunne theoriën zullen wij achterwege laten, daar dit te veel plaats zou vereischen; de rest van deze paragraaph echter zal gewijd worden aan het bewijs dat aan de grensconditiën van Poisson in het algemeen niet kan voldaan worden, en zij voor het geval eener cirkelvormige plaat overeen komen met die van Kirchhoff.

Ontbreken uitwendige krachten, zoo zijn de voorwaarden van Poisson, in onze schrijfwijze uitgedrukt: 2)

$$(7) \left( \frac{d^3 \zeta}{da^3} + \frac{d^2 \zeta}{da db^2} \right) \cos \varphi + \left( \frac{d^3 \zeta}{db^3} + \frac{d^2 \zeta}{db da^2} \right) \sin \varphi = 0,$$

$$(8) \frac{d^2 \zeta}{da db} \sin \varphi + \left( \frac{4}{3} \frac{d^2 \zeta}{da^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2 \zeta}{db^2} \right) \cos \varphi = 0,$$

$$(9) \frac{d^2 \zeta}{da db} \cos \varphi + \left( \frac{4}{3} \frac{d^2 \zeta}{db^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2 \zeta}{da^2} \right) \sin \varphi = 0.$$

Ten einde deze gemakkelijk met die van Kirchhoff te vergelijken, stellen wij in de laatsten  $\theta = \frac{1}{2}$ , daar Poisson

1) Voor platen die aan den rand zijn vastgeklemd (dont les bords sont encastrés) leveren hunne theoriën echter verschillende grensbepalingen op. In de Exerc. de math. trois. ann. p. 346 van Cauchy toch lezen wij:

»M. Poisson a joint une troisième condition qui disparaît d'elle même dans le cas où la plaque élastique devient circulaire, et dont l'admission, dans les autres cas, nous paraît sujette à quelques difficultés.

2) Mémoires de l'Institut de France, Tom. VIII, p. 538. (13).

in deze onderstelling zijne theorie heeft ontwikkeld; zij worden dan:

$$(I) \frac{4}{3} \left\{ \left( \frac{d^2\zeta}{da^2} + \frac{d^2\zeta}{da db^2} \right) \cos \varphi + \left( \frac{d^2\zeta}{db^2} + \frac{d^2\zeta}{db da^2} \right) \sin \varphi \right\} \\ - \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d^2\zeta}{da db} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left( \frac{d^2\zeta}{db^2} - \frac{d^2\zeta}{da^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi \right\} = 0,$$

$$(II) \frac{1}{3} \left( \frac{d^2\zeta}{da^2} + \frac{d^2\zeta}{db^2} \right) + \frac{d^2\zeta}{da^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{d^2\zeta}{da db} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{d^2\zeta}{db^2} \sin^2 \varphi = 0.$$

Voegen wij bij (I) en (II) nog deze:

$$(III) \frac{d^2\zeta}{da db} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left( \frac{d^2\zeta}{db^2} - \frac{d^2\zeta}{da^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi = 0$$

zoo blijkt het, dat (7), (8), (9) en (I), (II), (III) volmaakt dezelfde zijn; want uit (7), (8), (9) kunnen (I), (II), (III) afgeleid worden en wederkeerig deze uit gene, zooals aanstonds opgehelderd wordt door de identieke vergelijkingen:

$$(9) \sin \varphi + (8) \cos \varphi = (II)$$

$$(9) \cos \varphi - (8) \sin \varphi = (III)$$

waaruit wederkeerig:

$$(II) \cos \varphi - (III) \sin \varphi = (8)$$

$$(II) \sin \varphi + (III) \cos \varphi = (9).$$

Zijn nu  $\zeta_1$  en  $\zeta_2$  twee functiën, die aan de vergelijking:

$$(IV) \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -a^2 \left( \frac{d^2\zeta}{da^2} + 2 \frac{d^2\zeta}{da^2 db^2} + \frac{d^2\zeta}{db^2} \right),$$

en tevens aan (I) en (II) voldoen, onder voorwaarde evenwel, dat  $\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_2}{dt^2}$  1) zij, zoo zal de waarde  $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$  nog aan (I), (II) en (IV) voldoen.

1) Wij gaan hierbij dus van de onderstelling uit, dat er twee oplossingen bestaan kunnen, zoodanig dat  $\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_2}{dt^2}$ ; de mogelijkheid

De gelijkstelling der waarden van  $\frac{1}{2} \iint da db \delta f_1$ , voor en na de vervorming der vorige paragraaph, geeft eene identieke vergelijking; stelt men hierin  $\delta \zeta = i \zeta$ , beschouwt  $i$  als eene oneindig kleine constante en deelt door  $2i$  dan is:

$$\begin{aligned} \iint da db \left\{ \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{d^2 \zeta}{da db} \right) + \left( \frac{d^2 \zeta}{db^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\theta}{1 + \theta} \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \right)^2 \right\} = \\ \iint da db \frac{1 + 2\theta}{1 + \theta} \left\{ \frac{d^2 \zeta}{da^2} + 2 \frac{d^2 \zeta}{da^2 db^2} + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \right\} w + \\ + \int ds \left[ \frac{1 + 2\theta}{1 + \theta} \left\{ \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} + \frac{d^2 \zeta}{da db^2} \right) \cos \varphi + \left( \frac{d^2 \zeta}{db^2} + \frac{d^2 \zeta}{db da^2} \right) \sin \varphi \right\} - \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d^2 \zeta}{da db} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{d^2 \zeta}{db^2} - \frac{d^2 \zeta}{da^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi \right\} \right] w - \int ds \left\{ \frac{\theta}{1 + \theta} \left( \frac{d^2 \zeta}{da^2} + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{d^2 \zeta}{da^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{d^2 \zeta}{da db} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{d^2 \zeta}{db^2} \sin^2 \varphi \right\} \frac{d \delta w}{dN}. \end{aligned}$$

Door  $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$  wordt het laatste lid dezer vergelijking nul; dus moet ook het eerste lid verdwijnen. Dit brengt, daar  $\theta$  positief is, mede:

$$\frac{d^2 \zeta}{da^2} = 0, \quad \frac{d^2 \zeta}{da db} = 0, \quad \frac{d^2 \zeta}{db^2} = 0$$

waaruit  $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2 = Aa + Bb + C$ .

Wij zien dus dat alle oplossingen van (I), (II), (IV) bevat zijn in  $\zeta_1 + (Aa + Bb + C)$  wanneer men aan de arbitraire constanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  alle mogelijke waarden toekent.

hiervan blijkt, wanneer men zich de plaat in evenwigt denkt, dan toch is  $\frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} = \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} = 0$ .

Substitueert men deze algemeene oplossing in (III) zoo wordt zij:

$$\frac{d^2 \zeta_1}{dadb} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left( \frac{d^2 \zeta_1}{db^2} - \frac{d^2 \zeta_1}{da^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

Aan deze vergelijking kan, daar  $\zeta_1$  reeds eene bepaalde functie voorstelt, in 't algemeen niet voldaan worden. q. e. d. In het bijzondere geval, dat de plaat cirkelvormig is, wordt aan de vergelijking (III) intusschen wel voldaan. Leggen wij, om dit te bewijzen, den oorsprong der coördinaten in het middelpunt; wij mogen dan de ordinaat  $\zeta$  van een willekeurig punt van het middenvlak als eene functie van den afstand  $r$  tusschen dit punt en het middelpunt beschouwen; hiermede worden de partiele differentialen:

$$\frac{d\zeta}{da} = \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{a}{b}, \quad \frac{d\zeta}{db} = \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{b}{r}$$

$$\frac{d^2 \zeta}{da^2} = \frac{d^2 \zeta}{dr^2} \cdot \frac{a^2}{r^2} + \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{b^2}{r^3}, \quad \frac{d^2 \zeta}{db^2} = \frac{d^2 \zeta}{dr^2} \cdot \frac{b^2}{r^2} + \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{a^2}{r^3}$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dadb} = \frac{d^2 \zeta}{dr^2} \cdot \frac{ab}{r^2} - \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{ab}{r^3}$$

Voorts  $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{b}{r}$  schrijvende, ziet men

dat aan de vergelijking (III) van zelf voldaan wordt.

Uit deze berekening is het derhalve duidelijk, dat in dit bijzondere geval de conditie-vergelijkingen van Poisson volmaakt overeenstemmen met die van Kirchoff; en hierin ligt tevens de verklaring, waarom Poisson zijne vergelijkingen op dit geval kon toepassen; hij deed dit in het vervolg van zijne verhandeling, hierboven aangehaald.

## HOOFDSTUK II.

---

### *Experimenten.*

Daar dit hoofdstuk gewijd wordt aan een overzicht van hetgeen op experimenteel gebied omtrent ons onderwerp geschied is, zoo achten wij het noodzakelijk, daarop te wijzen, dat wij ons niet zoozeer met de wijze van proefneming, en eene nadere beschouwing daarvan wenschen bezig te houden, als wel met de resultaten, die uit de proeven zijn af te leiden; om daardoor tot eene juiste beoordeeling te geraken van hetgeen nog verwacht wordt van de Theorie der trillende platen, wanneer de oplossingen der differentiaalvergelijkingen, in het vorige hoofdstuk vermeld, voor alle bijzondere gevallen ontdekt zullen zijn.

### A. *Zandfiguren.*

Wanneer men eene plaat in zeker punt ondersteunt of vasthoudt, en aan haren rand met een strijkstok loodregt op haar vlak aanstrijkt, geraakt zij in eenen toestand van trilling, dien men transversaal heet, en laat daarbij een bepaalden toon hooren. Bij deze trillin-

gen is de beweging van alle deelen niet dezelfde, maar de plaat verdeelt zich in meerdere velden; zoodanig, dat de beweging van twee aangrenzende tegengesteld is. De lijnen die twee zulke velden scheiden, deelen dus in geene van deze beide bewegingen, en dragen daarom den naam van rust of knooplijnen.

Wordt nu bij horizontale ligging der plaat, zand of eenig ander grof poeder op hare oppervlakte gestrooid, dan hoopt zich dit, bij trilling, in de knooplijnen op en maakt deze zichtbaar.

De figuren hierdoor ontstaan, bespreken wij in twee paragrafen, waarvan de eerste handelt over de resultaten der proeven van Chladni of het verband tusschen de figuren en de toonen die tegelijker tijd worden voortgebracht; de tweede over de verklaring van sommige dezer figuren door Wheatstone.

### § 1.

De zooeven genoemde en vele andere proeven zijn het eerst door Chladni beschreven in zijne »Entdeckungen über die Theorie des Klanges (1787),» naauwkeuriger evenwel onderzocht in zijne »Akustik (1802)» en »Neue Beiträge zur Akustik (1817).» Zijne proeven hebben voornamelijk betrekking op regthoekige en elliptische platen, wanneer wij daaronder ook vierkante en cirkelvormige verstaan.

#### a. *Regthoekige platen.*

Bij de proefneming met regthoekige platen, valt onmiddellijk in het oog, dat de knooplijnen zeker streven













bezitten om zich in de rigting van de zijden van den regthoek te plaatsen. Tot deze normale rigtingen laten zich dan ook alle figuren dezer platen terugbrengen en dit geeft als van zelf de schrijfwijze aan de hand die Chladni invoert. Door middel van twee getallen, gescheiden door eene verticale streep, stelt hij iedere figuur voor. Het getal dat links staat, wijst dan aan hoeveel lijnen moeten beschouwd worden evenwijdig aan de kortste zijde (breedte) te loopen, het andere getal hoeveel lijnen parallel aan de langste zijde loopen of als zoodanig moeten worden aangezien.

Nemen wij nu met Chladni aan, dat iedere plaat oneindig veel toonen geven kan, dat er evenwel grenzen zijn die hunne voortbrenging, zoowel als het menschelijk gehoor beperken, dan volgt uit het voorgaande dat er bij alle platen ook oneindig vele klankfiguren zullen bestaan, die met deze toonen overeenkomen. Bij regthoekige platen kunnen dus alle klankfiguren voorgesteld worden door:

$$\begin{array}{l}
 0 \mid 0, \quad 0 \mid 1, \quad 0 \mid 2, \quad . . . . \text{ tot } 0 \mid \infty \\
 1 \mid 0, \quad 1 \mid 1, \quad 1 \mid 2, \quad . . . . \text{ tot } 1 \mid \infty \\
 2 \mid 0, \quad 2 \mid 1, \quad 2 \mid 2, \quad . . . . \text{ tot } 2 \mid \infty \\
 . . . . . \\
 \infty \mid 0, \quad \infty \mid 1, \quad \infty \mid 2 \quad . . . . \text{ tot } \infty \mid \infty.
 \end{array}$$

Hoe eenvoudig deze schrijfwijze nu ook schijnen moge, somtijds heeft men veel oefening noodig om juist te beoordeelen, welke de normale figuur is waartoe zekere kromlijnige figuur kan worden teruggebracht; iedere wijze van beweging, iedere klankfiguur toch kan menigvuldige veranderingen ondergaan, die nu eens worden teweeggebracht door onregelmatigheden van de plaat, dan weder te voorschijn treden bij eene kleine verandering van de

plaats waar vastgehouden en aangestreeken wordt. Hoewel bij dit laatste de figuur kan gewijzigd worden, brengt dit weinig of geene verandering van den toon te weeg, omdat ieder trillend veld aan de eene zijde in grootte verliest wat het aan de andere zijde wint; zoodat de verhouding van de grootte der velden en daarmede, volgens Chladni, de toonhoogte niet gewijzigd wordt;

					de achtereenvolgende
					overgangen hiernevens
					afgebeeld, treft men
					dan ook veelvuldig aan.

Beginnen wij nu met het eenvoudigste geval, dat nl. de beide zijden van een rechthoek gelijk zijn, dan spreekt het van zelf, dat in de schrijfwijze, zooeven aangenomen, het onverschillig is, welke zijde men als lengte, welke zijde als breedte beschouwt; 0 | 2 en 2 | 0, 2 | 3 en 3 | 2 dezelfde beteekenis hebben. In de volgende tabel, door Chladni zelf zamengesteld vindt men zijne proeven omtrent deze soort van platen geresumeerd 1):

1) Neue Beiträge zur Akustik.

In deze tabel is aangenomen dat *g* een octaaf dieper is dan *G*, hetgeen trouwens uit de trillingsgetallen reeds te zien is. Bovendien merken wij op dat de teekens + en - somtijds tusschen haakjes geplaatst zijn om aan te geven dat dit niet bij alle platen werd waargenomen.

1		$g, 6$								
2	$\frac{D-, 9-}{E.. F, 10(+)}$	B, 15	$A^1 \dots Bb^1$ 27+, 28-							
3	$G\#^1, 25$	$\frac{B^1, 30}{C^2(+), 32? 33?}$	$F\#^2, 45$	$C^3(+)$ 64, 65						
4	$\frac{G\#^2-, 49-}{G\#^3, 50}$	$\frac{Bb^2-,}{55, 56-}$	$\frac{C\#^3, 70}{D^3, 72}$	$F\#^3,$ 90, 91	$Bb^3 (-),$ 110+, 112					
5	$\frac{E^3(+)}{81}$	$\frac{F^3, 84}{F\#^3, 90}$ 91	$\frac{G\#^3, 98,}{99, 100-}$	$\frac{B^3, 119}{120}$ $C^4, 125$ 126 128-	$D\#^4,$ 150, 153	$F\#^4, 180$				
6	$\frac{B^3, 120}{121}$ $\frac{C^4-, 125}{126}$	$C^4, 138$	$\frac{C\#^4, 135}{140}$ $D^4, 144$	$E^4, 160$ 162	$\frac{G^4, 189}{192}$ $G\#^4, 196$ 198 200-	$Bb^4, 224(+)$ 231(-)	$C^5, 256(+)$ 264(-)			
7	$F^4, 169$	$F^4 \dots F\#^4$ 175? 180?	$\frac{F\#^4(+)}{180(+)?}$ 189(-)?	$\frac{G\#^4+, 209}{210}$ $A^4,$ 216 220	$B^4, 240$ 242	$\frac{C\#^5, 275}{280}$ $D^5, 286$ 288	$E^5, 320$ 324 325	$F\#^5, 360$ 364		
8	$\frac{Bb^4, 224}{225}$ $\frac{D^4+, 225?}{231?}$		$\frac{D^4, 240}{242}$ $\frac{C^5-, 245}{250}$	$C^5+, 256+$ 264-	$\frac{D^5, 286}{288}$ $\frac{D\#^5, 294}{299}$	$F^5, 386$ 388	$\frac{G^5, 377(+)}{384}$ $\frac{G\#^5, 390}{392}$	$A^5, 432$ 435	$B^5, 480$	
9	$D^5, 289$		$E^5-,$ 315	$\frac{F^5, 330}{336}$ $\frac{F^5+, 343}{345}$	$F\#^5,$ 360	$G\#^5-, 390$ 392	$Bb^5, 450$	$\frac{C^5-, 495}{C^5, 510}$ 512	$\frac{C\#^6+,}{561}$ $D\#^6,$ 612	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

In sommige vakjes vindt men twee toonen door eene horizontale lijn gescheiden. Dit wijst op het verschijnsel, dat somtijds twee figuren, beide weinig verschillende van ééne normale figuur, met verschillende toonen overeenkomen. Het valt in het oog dat dit enkel daar het geval is, waar de som van het aantal knooplijnen in beide rigtingen even is. Ter onderscheiding der beide figuren schrijft Chladni een dwarsstreep onder of boven de verticale streep van iedere figuur naar gelang hij de eerste of laatste bedoelt; zoodat bijv.  $4 \underline{1} 0$  de figuur aanduidt waarbij  $G^{\#2}$  —,  $4 \overline{1} 0$  die waarbij  $G^{\#2}$  staat. De toon aangenomen voor  $1 | 1$  is  $g$ . Dat men hierin vrij is, en dat platen van allerlei aard, mits van denzelfden vorm, tot het zamenstellen van zoodanige tabel kunnen dienen, is duidelijk wanneer men in aanmerking neemt dat bij elastische strooken en platen van denzelfden vorm deze wet geldt:

$$S = \frac{n^2 D}{L^2} \sqrt{\frac{2gR}{P}}, 1)$$

waarin de beteekenis der letters de volgende is:

$S$  het aantal transversaaltrillingen in eene seconde,  $n$  een getal dat voor iedere wijze van trilling verschillend is,  $D$  de dikte der strook,  $L$  hare lengte,  $R$  de vastheid (rigidité) der stof waaruit zij bestaat,  $P$  haar gewigt en  $g$  de versnelling der zwaartekracht.

Ten einde nu een gemakkelijk overzicht te verkrijgen van het verband dat tusschen de toonen der verschillende figuren bestaat, nemen wij nog eene tabel van Chladni

1) Euler Act. Petrop. A°. 1779 pars 1. Investigatio motuum quibus laminae etc.

over, waarin hij de trillingsgetallen der vorige tabel zoodanig in factoren ontbindt, dat daaruit de zamenhang der toonen zooveel mogelijk te voorschijn treedt. Voor wij deze tabel mededeelen merken wij nog op dat daaruit alleen verhoudingen tusschen de trillingsgetallen der verschillende toonen kunnen voortvloeyen, immers Chladni plaatst bij  $g$  niet het absolute aantal trillingen maar een willekeurig getal (6).

1		$\frac{6}{-2.3}$							
2	$\frac{9-}{8.3-}$ $\frac{10(+)}{2.5}$	$\frac{13}{3.5}$	$\frac{27(+)}{3.9}$						
3	25 5.5	$\frac{30}{3.10}$ $\frac{5.6}{32(+)}$ $\frac{2.4^2}{33(-)}$ 3.11	$\frac{45}{3.15}$ 5.9	65 5.13					
4	$\frac{49-}{7.7}$ $\frac{50}{5.10}$ 2.5 <sub>2</sub>	$\frac{55}{5.11}$ 56(-) 7.8	$\frac{70}{5.14}$ $\frac{7.10}{72}$ 2.6 <sub>2</sub>	91 7.13	112 7.16				
5	81 9.9	$\frac{84}{7.12}$ 91 7.13 90 9.10	98 7.14 2.7 <sub>2</sub> 99 9.11	$\frac{119}{7.17}$ 126 7.18 9.14 128(-) 2.8 <sub>2</sub>	155 9.17	180 9.20			
6	$\frac{121-}{11.11-}$ $\frac{126?}{9.14}$		$\frac{135}{9.15}$ 144 9.16	162 9.18 2.9 <sub>2</sub>	$\frac{189}{9.21}$ 198 9.22 11.16 200- 2.10 <sub>2</sub> -	231 11.21	264 11.24		
7	169 13.13		180(+)? 9.20 189(-)? 9.21	$\frac{209}{11.19}$ $\frac{220?}{11.20}$ 216 9.24	242 11.23 2.11 <sub>2</sub> 243 9.27	$\frac{275(+)}{11.25}$ $\frac{256}{11.26}$ 13.22 268 2.12 <sub>2</sub> 9.32	325 13.25 324 9.36	364 13.28 360 9.40	
8	$\frac{225-}{15.15-}$ ?			260 13.20	$\frac{286}{13.22}$ 299 13.23	338 13.26 2.13 <sub>2</sub>	$\frac{377(+)}{13.29}$ 390 13.30 15.26 392 2.14 <sub>2</sub>	435 15.29	480 15.32
	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Noemt men  $n$  een onbepaald geheel getal,  $N$  het on-  
even getal welks kwadraat bij de figuur  $n \mid 0$  gevonden  
wordt, dan zijn de merkwaardigste resultaten uit de laatste  
tabel af te leiden, de volgende:

1. De getallen bij de figuren  $n \mid 0$  behoorende zijn de  
kwadraten der reeks 3, 5, 7... wanneer  $n$  achtereenvol-  
gens de waarden 2, 3, 4... verkrijgt.

2. De getallen der figuren  $n \mid n-3$  zijn  $= 2(N-2)^2$ ;  
de waarden van  $n$ , waarvoor dit plaats heeft zijn: 5, 6, 7...

3. De getallen welke men bij  $n \perp n-2$  vindt, zijn  $=$   
 $(N-2)(2N-1)$  terwijl  $n = 5, 6, 7..$  is.

4. De getallen bij  $n \top n-2$  behoorende zijn  $= 2N$   
 $(N-2)$  of  $= 2(N-1)^2$ ; in het eerste geval kan  $n$  de  
waarden 5, 6, 7... hebben; in het laatste ook de waarde 4.

5. De getallen der figuren  $n \mid n-1$  zijn  $= 2N^2 - N$   
wanneer  $n = 2, 3, 4..$  is.

6. De getallen welke men bij  $n \mid n$  vindt zijn  $=$   
 $2N^2 + 2N$  in de onderstelling dat  $n = 4, 5, 6..$  is.

De andere soorten van regthoekige platen zullen ons  
minder lang bezig houden, daar zij niet zoo uitvoerig  
zijn nagegaan.

De proeven omtrent verschillende regthoekige platen,  
door Chladni genomen, brengt hij op dezelfde wijze als  
zooeven is aangetoond, weêr in tabellen; de regthoeken  
waarvan hij gebruik maakt, hebben allen eene zijde gelijk  
aan die van het vierkant dat de medegedeelde tabel op-  
leverde; hierdoor wordt de vergelijking gemakkelijker.  
Wij achten het voldoende alleen op deze tabellen gewe-  
zen te hebben, en gaan onmiddellijk tot eenige resultaten  
over, hieruit afgeleid.

Vooreerst valt in het oog, dat bij alle regthoeken, —  
wat ook hunne breedten zijn — (de lengte wordt con-

stant ondersteld) de absolute toonhoogte van de figuren  $2 | 0, 3 | 0, 4 | 0 \dots$  onveranderd blijft, terwijl de verhouding dezer toonen weder is als  $3^2 : 5^2 : 7^2 \dots$ . Dit gaat nog door, wanneer de breedte zoozeer afneemt dat de plaat in een staaf overgaat; geldt evenwel niet geheel wanneer de breedte der plaat gelijk is aan hare lengte: in geval van een vierkant zijn alle toonen van deze reeks ongeveer een' halven toon dieper.

In de tweede plaats vindt men ook bij de toonen van  $0 | 2, 0 | 3, 0 | 4 \dots$  de verhouding van  $3^2 : 5^2 : 7^2 \dots$  terwijl de hoogte dezer toonen toeneemt omgekeerd evenredig aan de vierkanten van de breedten.

Verder is duidelijk op te merken, dat bij voortdurende afneming der breedte de toonen van  $1 | 1, 2 | 1, 3 | 1 \dots$  de verhouding  $1 : 2 : 3 \dots$  naderen: deze verhouding wordt geheel bereikt, wanneer de lengte meer dan 8-maal de breedte meet. De hoogte van den eersten toon dezer reeks, dien van  $1 | 1$ , neemt ongeveer toe in omgekeerde reden van de breedte der plaat.

Bij figuren eindelijk, waar meerdere lijnen in de lengte en in de breedte voorkomen, worden alle toonen hooger, zoodra de breedte der plaat afneemt; dit verschijnsel hangt meer van het aantal lijnen in de lengte, dan van het aantal dwarslijnen af.

#### b. *Elliptische platen.*

Beginnen wij weder met het eenvoudigste geval, dat nl. de assen der ellips gelijk zijn; bij deze, cirkelvormige, platen, bestaan de knooplijnen uit cirkels en diameters of liever zij laten zich terugbrengen tot cirkels



die concentrisch zijn met de plaat en diameters van deze.

Op dezelfde wijs als vroeger, iedere figuur voorstellende door twee getallen gescheiden door eene verticale streep, waarvan het eerste het aantal diameters, het laatste het aantal cirkels telt, kunnen wij Chladni's proeven op nieuw in eene tabel zamenvatten. De willekeurig aangenomen, diepste toon bij 2 | 0 voortgebracht, zij c.

Aantal Cirkels		Aantal Diameters.							
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\varnothing$	$B^2$	$C^1$	$D^2, D^{\#2}$	$G^{\#2}$	$C^{\#3}$	$E^3, F^3$	$G^3$	$B^{\#2}$
1	$G^{\#1} +$	$F^2 +$	$B^{\#2}$	$D^{\#3}$	$G^3$	$B^{\#3}, B^3$	$C^{\#4}$	$D^{\#4}$	
2	$B^{\#2}, B^2$	$F^2 +$	$G^{\#3}, A^3$	$C^4$	$D^{\#4}$	$F^{\#4}$	$G^{\#4} +$	$B^{\#4}$	
3	$A^3$	$C^{\#4}$	$F^4$	$G^{\#4}, G^4$	$B^{\#4}$	$B^4, C^3$	$C^{\#5}$		
4	$F^4$	$G^{\#4}$	$B^4$	$C^{\#5}$					
5	$B^4$	$D^5$	$E^5$	$F^6 +$					
6	$B^5$								
7									

De verhoudingen van de toonen dezer tabel komen ongeveer overeen met de quadraten van de volgende getallen, waarin iedereen dadelijk de volgorde zal opmerken ;

Aantal Cirkels.		Aantal Diameters.							
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0			(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	2	3	4—	5—	6—	7—	8—	9—	
2	4+	5+	6	7—	8—	9—	10—	11—	
3	6+	7+	8+	9	10—	11—	12—	13—	
4	8++	9+	10+	11+	12	13—	14—		
5	10+++	11+++	12+	13+					
6	12++++	13++++	14++++	15+					
7	14++++								

De volgorde is evenwel niet geheel zoo fraai als zij aanvankelijk schijnt, daar de figuren  $2 | 0$ ,  $3 | 0..$  die wel toonen opleveren, evenredig aan  $2^2 : 3^2 \dots$  niet in de rij  $2 | 0$ ,  $2 | 1$ ,  $2 | 2 \dots$ ,  $3 | 0$ ,  $3 | 1 \dots$ , enz. passen;

ten einde dit duidelijk te maken zijn de cijfers behoorende bij  $2 | 0$ ,  $3 | 0 \dots$ , in haakjes ingesloten. Alle getallen van de laatste tabel kan men vinden, kleine afwijkingen verwaarloozende, door de formule  $(D + 2C)^2$  waarin  $C$  het aantal cirkels,  $D$  het aantal diameters van de corresponderende klankfiguur voorstelt.

Gaan wij nu over tot elliptische platen waarvan de assen verschillen.

In het algemeen hebben de klankfiguren der elliptische platen, waarvan de assen weinig verschillen, veel overeenkomst met die van cirkelvormige; — is dit verschil groot, dan ziet men duidelijk overeenkomst met rechthoekige platen.

Om nu dezelfde schrijfwijze van vroeger ook hier te behouden, zullen wij met Chladni aannemen dat eene elliptische knooplijn gelijk staat met twee lijnen evenwijdig aan de lange as. De veelvuldige proeven door Chladni omtrent deze soort van platen genomen, heeft hij weêr in dergelijke tabellen, als medegedeeld zijn, zamengevat. Bestudeert men deze tabellen die allen betrekking hebben op ellipsen waarvan ééne as ( $2a$ ) altijd gelijk blijft, terwijl de andere telkens afneemt, dan is het niet moeilijk daaruit het volgende te lezen:

De toonen van de twee horizontale reeksen

$$2 | 0, \quad 3 | 0, \quad 4 | 0 \dots$$

$$1 | 1, \quad 2 | 1, \quad 3 | 1 \dots$$

zijn, bij klein verschil van assen  $\left(\frac{a}{b} = \frac{9}{8}\right)$  volkomen dezelfde; bij toenemend verschil, beginnen zij allengs af te wijken; het eerst openbaart zich dit in de diepste toonen der beide reeksen.

De verhoudingen der toonen van de 1e reeks:  $2 | 0$ ,

3 | 6.. zijn niet meer dezelfde als bij eene cirkelvormige plaat: hier wijken zij minder uiteen dan  $2^2 : 3^2 : \dots$

De verhoudingen der toonen van de 2<sup>e</sup> reeks; 1 | 1, 2 | 1.. schijnen bij afneming van de as  $2b$  telkens nader te komen aan die van 1 : 2 : 3..

De absolute hoogte der toon van 1 | 1 neemt ongeveer in dezelfde reden toe, als de kleine as afneemt.

Bij de verticale reeks 0 | 2, of 0 | 3, ... is de verhouding der toonen ongeveer dezelfde, als die van de toonen der reeks: 2 | 0 3 | 0 ..., hoewel gene veel hoger zijn: ligt  $\frac{a}{b}$  tusschen  $\frac{5}{4}$  en  $\frac{4}{3}$ , zoo is het verschil een octaaf; dit verschil wordt voor  $\frac{a}{b} = 2$ , 2 octaaf; voor  $\frac{a}{b}$  iets kleiner dan 3, drie octaaf; voor  $\frac{a}{b}$  iets grooter dan 4, vier octaaf.

De tabellen, zamengesteld voor ellipsen, waarin  $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \dots$  of  $\frac{5 + 3n}{3}$ , waarin  $n$  ieder geheel getal mag zijn, vertoonen allen deze bijzonderheid, dat in de horizontale reeksen, 1 | 1, 1 | 2, ..., 2 | 0, 2 | 1, ... enz. dezelfde toonen in dezelfde volgorde voorkomen; terwijl de verticale reeksen, waaronder de gelijke toonen staan, bij  $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$  twee, bij  $\frac{a}{b} = \frac{8}{3}$  drie, enz. verschillen.

Dit wordt ook aldus uitgedrukt: wanneer het aantal dwarslijnen door B, het aantal lijnen in de rigting der lange as door A wordt voorgesteld, zoo hebben alle figuren voor welke  $B + (n + 2) A$  even groot is ook denzelfden toon (deze  $n$  is hier dezelfde als te voren, zoodat wanneer  $\frac{a}{b} = \frac{8}{3}$ ,  $n = 1$  is).

Merkwaardig zijn ook nog de platen, waar  $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$  is, daar men in dit geval de toonen van de twee reeksen:

0 | 2, 1 | 2, 2 | 2, 3 | 2...

3 | 0, 4 | 0, 5 | 0, 6 | 0...

even hoog vindt.

De proeven op platen van anderen vorm, dan de tot hiertoe behandelde, genomen gaan wij om twee redenen voorbij. Vooreerst, om wijdloopigheid te voorkomen; daar bij eenige andere plaat de figuren niet zoo gemakkelijk te groeperen zijn als dit in 't voorgaande geschied is en wij dus genoodzaakt zouden zijn iedere figuur en haren corresponderenden toon mede te deelen. Ten tweede meenen wij, dat de opgesomde resultaten, als de eenvoudigste, reeds genoegzaam zullen wezen om aan te toonen, hoe verre de Theorie bij de waarneming ten achter is.

## § 2.

Wheatstone 1) geeft eene soort van synthese van de figuren, die door Chladni op vierkante platen werden waargenomen, en bouwt daarop eene rangschikking dezer figuren.

Den grondslag, waarop deze synthese berust, zullen wij eerst trachten aan te geven en met een voorbeeld ophelderen om daarna als supplement van zijne theorie de vergelijkingen der klankfiguren te zoeken; eindelijk zijne rangschikking mededeelen.

De resultaten omtrent elastische strooken, door Euler

1) Philos. Transact. A<sup>o</sup> 1833: On the figures obtained by strewing sand on vibrating surfaces, commonly called acoustic figures.

theoretisch gevonden 1), zijn het uitgangspunt der synthese van Wheatstone. Resumeren wij deze resultaten, die door de waarneming volkomen bevestigd zijn, in weinige woorden.

Wanneer eene elastische homogene strook, d. i. eene plaat die overal gelijke dikte heeft, van den vorm eens regthoeks, welks eene zijde veel grooter is dan de andere, — in trilling gebragt wordt, zal deze strook zich bewegen en een stelsel knooplijnen vertoonen evenwijdig aan de kortste zijde. Deze knooplijnen zullen altijd op gelijke afstanden van elkander gelegen zijn; terwijl de afstand van de uitersten tot de uiteinden ongeveer de helft zal bedragen van den afstand tusschen twee knooplijnen. Het spreekt wel van zelf, dat bij ieder dezer figuren ook een verschillende toon behoort. Vergelijkt men platen die dezelfde figuur vertoonen, dan zal de hoogte van den toon wel veranderen met de lengte, maar niet met de breedte.

Daar in het vervolg alleen sprake zal zijn van knooplijnen die op de platen ontstaan, dat is van de plaatsen, waar de platen bij hunne trilling geene beweging onder vinden, en wij daarenboven weten, dat de velden waarin eene plaat door eene knooplijn verdeeld wordt tegengestelde beweging bezitten, komt het ons wenschelijk voor, de platen eenvoudig gebogen te denken, zooals zij dat werkelijk zijn op het oogenblik als de trillende deelen de grootste afwijking van hunnen oorspronkelijken toestand bereikt hebben; tevens zullen de deelen, die zich alsdan boven of onder hunne oorspronkelijke ligging bevinden, onderscheiden worden door de namen positief en negatief.

1) Act. Acad. Petrop. A° 1779 pars 1.

Wheatstone onderstelt nu, dat eene vierkante plaat, in trilling gebragt, twee gelijke systemen knooplijnen te gelijker tijd doet ontstaan, evenwel zoo, dat het eene systeem knooplijnen heeft evenwijdig aan de eene zijde, het andere systeem knooplijnen evenwijdig aan de andere zijde van het vierkant. Elk dezer systemen bepaalt denzelfden toon, terwijl de beide systemen aanleiding geven tot eene meer zamengestelde figuur. Beschouwt men de plaat als gebogen ten gevolge van beide bewegingen, dan is het gemakkelijk te begrijpen, waarom de zamensstelling der resulterende figuur geschieden moet naar de volgende regels:

De punten waar de knooplijnen van twee systemen elkaâr snijden, blijven in de resulterende figuur in rust.

De knooplijnen van eene figuur verdwijnen, zoodra zij vallen op deelen der tweede figuur die positief of negatief zijn.

Nieuwe rustpunten of compensatiepunten worden gevormd daar, waar buigingen in verschillende rigtingen elkaâr neutraliseren, of waar de algebraïsche som harer afwijkingen gelijk nul is.

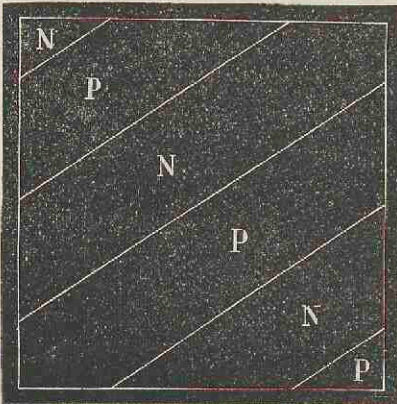
Nog dient te worden opgemerkt, dat bij superpositie van twee figuren of twee systemen, die hetzelfde aantal knooplijnen bevatten, het geval waar dit aantal even is, moet worden onderscheiden van het geval waar dit aantal oneven is; immers is het aantal even, zoo kunnen wij aannemen dat de buigingen der plaat die de twee systemen vergezellen gelijke of tegengestelde teekens hebben; er ontstaan derhalve twee verschillende resulterende figuren, terwijl hiervan bij een oneven aantal knooplijnen geen sprake kan zijn.

Ter verklaring van alle figuren, door Chladni ontdekt,

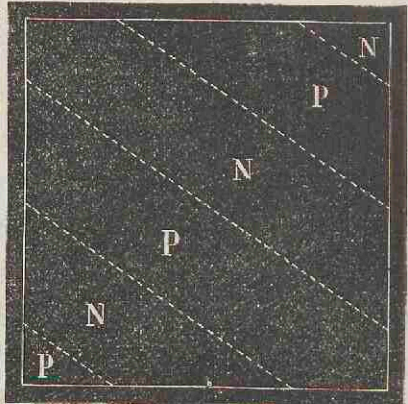


is deze hypothese nogtans onvoldoende; daarom neemt Wheatstone aan dat een systeem knooplijnen ook een willekeurigen hoek kan maken met eene zijde van het vierkant; wegens de symmetrie moeten dan nog drie andere systemen aangenomen worden, die evenzeer op de zijden hellen en wel zoodanig, dat, wanneer men zich twee assen OX en OY denkt evenwijdig aan de zijden van het vierkant, de parallelen van twee systemen ieder een gelijken hoek maken met OX, terwijl de parallelen van de twee andere systemen denzelfden hoek maken met OY.

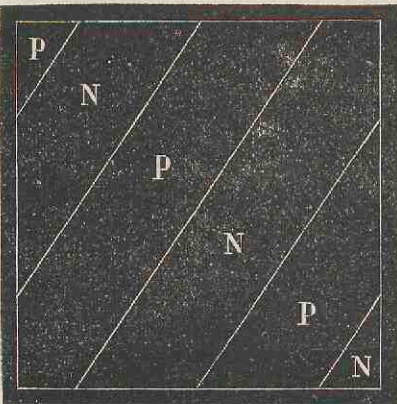
1.



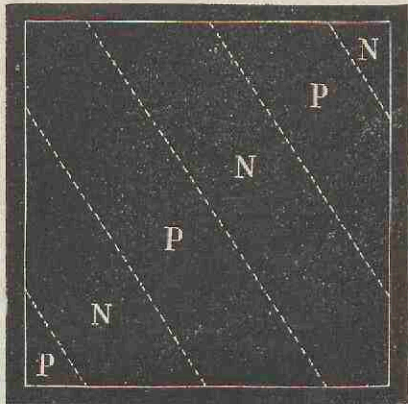
2.



3.



4.

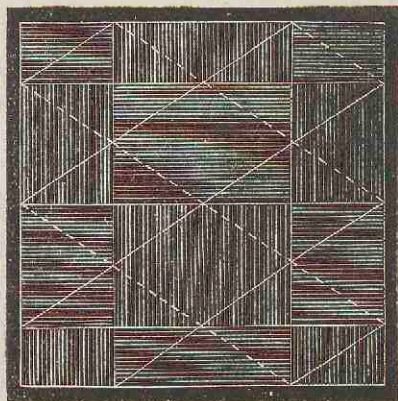


Voor wij verder gaan zullen wij het algemeene geval, waar van 4 systemen sprake is, met een enkel voorbeeld ophelderen. Nemen wij daartoe aan dat ieder dezer systemen bestaat uit 5 evenwijdige lijnen geplaatst als in fig. 1—4.

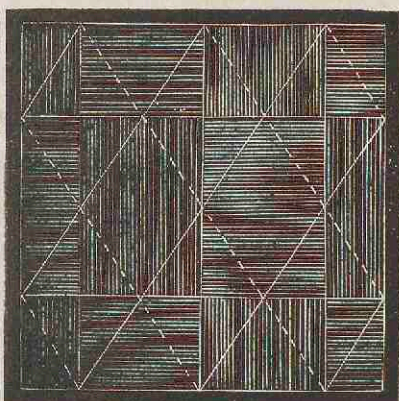
Omtrent deze figuren merken wij op dat voldaan is aan de voorwaarde, dat van de stukken, die op de zijden worden afgesneden, de uitersten half zoo groot zijn als de middelsten. Evenwel zijn dit niet de eenige figuren met 5 evenwijdige lijnen die aan deze voorwaarde voldoen. De teekens P en N in de verschillende deelen geplaatst kunnen nog op eenige andere wijzen gecombineerd worden; hier zullen wij ons echter niet bij alle deze combinatiën ophouden, maar slechts diegene kiezen die hiernevens is afgebeeld.

Met behulp van het voorgaande is het duidelijk dat de openlegging van de figuren 1 en 2 de figuur 5 oplevert, waarin dan de deelen van horizontale lijntjes voorzien

5.



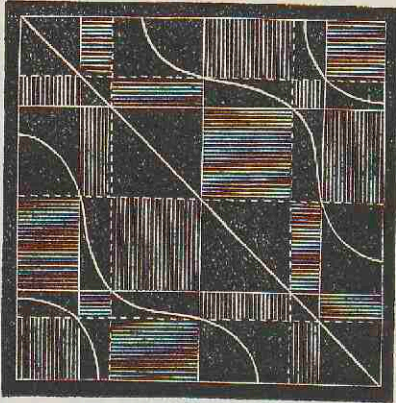
6.



geheel negatief (N), die met verticale lijntjes geheel positief (P) zijn, terwijl de nieuwe knooplijnen bestaan uit 3 horizontale en 2 verticale lijnen. Op gelijke wijze

vindt men als resultante van 3 en 4 eene figuur 6 met 2 horizontale en 3 verticale knooplijnen. Daarna geeft de resultante van 5 en 6 aanleiding tot figuur 7 waarin de resulterende figuur alleen door de zwart gebleven vakjes

7.



mag gaan; geeft men daarbij acht op de compensatiepunten, dan is volgens Wheatstone de resulterende fig. genoegzaam bepaald en moet noodzakelijk zijn zooals in figuur 7 is afgebeeld. Intusschen kwam het ons wenschelijk voor de figuur met juistheid te bepalen en niets aan het genie van den teekenaar over te laten;

daarom hebben wij getracht de vergelijkingen dezor figuren te bepalen. Zie hier het resultaat van dit onderzoek:

Reeds vroeger deden wij opmerken dat de platen, die ten gevolge harer trilling in beweging zijn, beschouwd kunnen worden als gebogen oppervlakken. Waar nu de resultante van vier systemen knooplijnen onderzocht zal worden, ligt het voor de hand, vier platen aan te nemen, elk voorzien van een systeem parallelen of vier platen, ieder zoodanig gebogen, dat de punten in haar systeem gelegen, geene afwijking ondergaan. De afwijking van het oorspronkelijke vlak wordt natuurlijk gemeten op eene as  $OZ$  loodregt staande op het vlak ( $XOY$ ) der plaat, wanneer deze in rust is; de voet der loodlijn  $OZ$  zij het middelpunt der plaat. Het vraagstuk kan derhalve aldus worden geformuleerd:

Vier gelijke, vierkante platen, worden ieder op eene

verschillende wijze gebogen; ten gevolge hiervan zullen hunne overeenkomstige punten afwijkingen in de rigting der Z-as ondergaan; gevraagd die overeenkomstige punten te vinden, voor welke de som dezer vier afwijkingen gelijk nul is.

Was de buiging van iedere plaat volkomen bekend, hadden wij dus de vergelijkingen van de vier gebogen oppervlakken, dan zoude aanstonds dit vraagstuk zijn opgelost; daarenboven zoude voor ieder punt de som der afwijkingen gemakkelijk gevonden kunnen worden; nu is dit evenwel niet het geval, maar toch is de wijze, waarop iedere plaat gebogen is, genoegzaam bekend, om bovengestelde vraag voldoende te beantwoorden.

Onderzoeken wij nu de wijze waarop deze buigingen plaats hebben. Nemen wij eene plaat en leggen door OZ een vlak ZO<sub>1</sub>X<sub>1</sub> loodregt op de rigting der parallelen van het systeem knooplijnen dat bij deze plaat behoort, dan wordt op dit vlak, door de plaat, die wij ons gebogen voorstellen, eene kromme afgeteekend; eene regte, die evenwijdig aan het vlak XOY deze kromme doorloopt, beschrijft dan volmaakt het oppervlak der gebogen plaat.

Wat is nu van deze kromme bekend?

Vooreerst weten wij dat deze kromme periodiek is, immers de deelen waarin de plaat door haar systeem knooplijnen verdeeld wordt, liggen afwisselend boven en onder het vlak XOY; voorts is bekend dat de perioden aan elkander gelijk zijn, omdat de knooplijnen op gelijke afstanden van elkander liggen.

Ten gevolge dezer bekendheid stellen wij de kromme in het vlak ZO<sub>1</sub>X<sub>1</sub>, voor

$$\text{of door } z = \pm u \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} x_1 + C \right\}$$

$$\text{of door } z = \pm u \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} x_1 + D \right\};$$

in beiden stelt  $\lambda$  tweemaal den afstand tusschen twee opvolgende knooplijnen voor,  $u$  eene onbekende constante die de grootste afwijking der kromme van de as  $OX_1$  aangeeft, terwijl  $C$  en  $D$  grootheden zijn die afhangen van de ligging der kromme ten opzichte van den oorsprong. Behandelt men de vier platen op dezelfde wijze zoo verkrijgt men 4 krommen. Deze vier krommen hebben allen gelijke  $\lambda$  en  $u$ , immers de systemen knooplijnen verschillen alleen in rigting, terwijl de intensiteit der vier wijzen van trilling ondersteld is dezelfde te zijn.

Voordat wij de onbepaaldheid in de vergelijkingen dezer krommen kunnen wegnemen, verdeelen wij alle systemen van knooplijnen in twee groepen naar gelang zij een even of oneven aantal knooplijnen bevatten. In het eerste geval gaat er nooit, in het laatste altijd een knooplijn door het middelpunt der platen; in het eerste geval zullen de krommen niet, in het laatste wel door  $O$  gaan. Bestaat het systeem uit een even aantal knooplijnen, zoo is in  $O$  de afwijking tevens maximum of minimum, en kunnen de krommen dus voorgesteld worden door

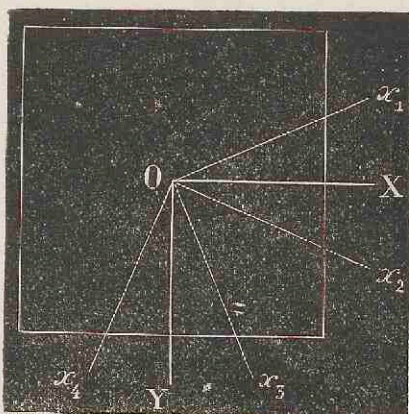
$$z = \pm u \cos \frac{2\pi x_1}{\lambda};$$

is daarentegen het aantal knooplijnen van ieder systeem oneven, zoo moeten wij gebruik maken van de uitdrukking:

$$z = \pm u \sin \frac{2\pi x_1}{\lambda}.$$

Denken wij nu de vier platen behoorlijk op elkander gelegd, dan zullen wij op ééne plaat, de rigtingen  $OX_1$ ,  $OX_2$ ,  $OX_3$ ,  $OX_4$  der doorsnijdingslijnen van het

vlak XOY met de vlakken waarin de krommen liggen, kunnen voorstellen. Dan is bekend:



$$\begin{aligned} XOx_1 &= XOx_2 = YOx_3 = \\ &YOx_4 = \theta \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ x_2 &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ x_3 &= x \sin \theta + y \cos \theta \\ x_4 &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

De resulterende figuren moeten dan, naarmate wij vier systemen met een even of oneven aantal knooplijnen beschouwen, blijkbaar bevat zijn in de eerste of tweede dezer vergelijkingen:

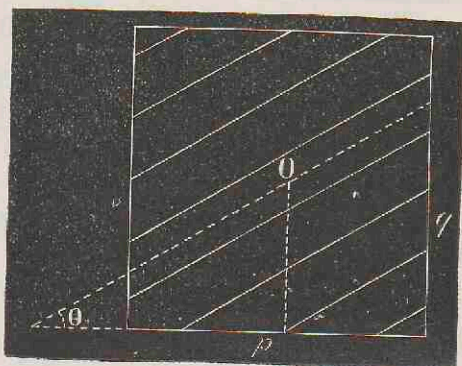
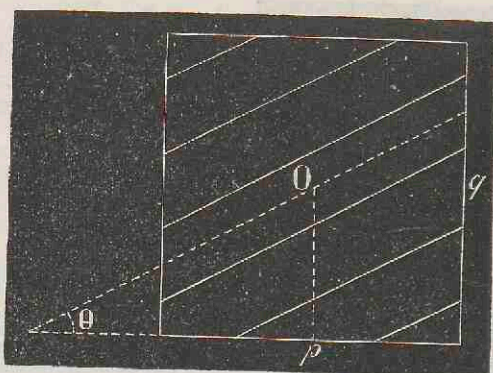
$$\text{I} \left\{ \begin{aligned} 0 &= \pm u \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \theta - y \sin \theta) \pm u \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \theta + y \sin \theta) \\ &\pm u \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta + y \cos \theta) \pm u \cos \frac{2\pi}{\lambda} (-x \sin \theta + y \cos \theta) \end{aligned} \right.$$

$$\text{II} \left\{ \begin{aligned} 0 &= \pm u \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \theta - y \sin \theta) \pm u \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \theta + y \sin \theta) \\ &\pm u \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta + y \cos \theta) \pm u \sin \frac{2\pi}{\lambda} (-x \sin \theta + y \cos \theta) \end{aligned} \right.$$

De vergelijkingen I en II kunnen nog belangrijk vereenvoudigd worden, wanneer men acht geeft op de wijze waarop  $\lambda$  in beide gevallen afhangt van de zijde  $a$  van het vierkant, den hoek  $\theta$  en het aantal knooplijnen van ieder systeem.

In geval het aantal knooplijnen  $= 2n$  is, zoo is  $\lambda = 2q \cdot \cos \theta$  wanneer de stukken van de zijden afgesneden en langs de zijden gemeten  $p$  en  $q$  genoemd worden.

Helderen wij dit met een voorbeeld op, of liever leiden wij uit de bijzondere gevallen van systemen, bestaande



uit 6 en 8 knooplijnen, het algemeene geval dat nl. het aantal knooplijnen  $2n$  is, af.

Uit bovenstaande figuren is gemakkelijk af te leiden dat ingeval ieder systeem uit  $2n$  knooplijnen bestaat altijd:

$$np = \frac{a}{2} (1 + \text{ctg } \theta), \quad nq = \frac{a}{2} (1 + \text{tg } \theta)$$

$$\therefore \frac{a}{p} = \frac{2n}{1 + \text{ctg } \theta} = h, \quad \frac{a}{q} = \frac{2n}{1 + \text{tg } \theta} = k;$$

$$\therefore \frac{h}{k} = \text{tg } \theta; \quad h + k = 2n \text{ en } \lambda = 2q \cos \theta = \frac{2a \cos \theta}{k}.$$

Evenzoo is, ingeval van  $2n + 1$  parallelen altijd:

$$(n + \frac{1}{2})p = \frac{a}{2}(1 + ctg \theta), \quad (n + \frac{1}{2})q = \frac{a}{2}(1 + tg \theta)$$

$$\therefore \frac{a}{p} = \frac{2n + 1}{1 + ctg \theta} = h, \quad \frac{a}{q} = \frac{2n + 1}{1 + tg \theta} = k;$$

$$\therefore \frac{h}{k} = tg \theta; \quad h + k = 2n + 1 \text{ en } \lambda = 2q \cos \theta = \frac{2a \cos \theta}{k}.$$

Deze waarden van  $\lambda$  in I en II gesubstitueerd zijnde, worden deze respectivelijk:

$$\text{III. } 0 = \pm \cos \frac{\pi}{a}(kx - hy) \pm \cos \frac{\pi}{a}(kx + hy) \pm \cos \frac{\pi}{a}(hx + ky) \\ \pm \cos \frac{\pi}{a}(-hx + ky)$$

$$\text{IV. } 0 = \pm \sin \frac{\pi}{a}(kx - hy) \pm \sin \frac{\pi}{a}(kx + hy) \pm \sin \frac{\pi}{a}(hx + ky) \\ \pm \sin \frac{\pi}{a}(-hx + ky)$$

Intusschen stellen III en IV ieder 16 figuren voor, naargelang de teekens gecombineerd worden; deze 16 zijn in twee groepen te verdeelen, zoodanig dat de teekens hunner componenten aan elkander tegengesteld zijn; hieruit volgt dat beide groepen dezelfde resulterende figuren opleveren; eene dezer groepen kan derhalve buiten behandeling blijven.

Schrijven wij nu ter bekorting:

$$A = \cos \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} + \sin \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} = P + Q$$

$$B = \cos \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} - \sin \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} = P - Q$$

$$C = \cos \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} - \sin \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = R - S$$

$$D = \cos \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} + \sin \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = R + S$$



$$A_1 = \sin \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} - \cos \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} = P_1 - Q_1$$

$$B_1 = \sin \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} + \cos \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} = P_1 + Q_1$$

$$C_1 = \sin \frac{\pi hy}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} + \cos \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = R_1 + S_1$$

$$D_1 = \sin \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} + \cos \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = R_1 + S_1$$

De combinatiën die voor III en IV moeten behouden blijven zijn deze:

$$(m) \left\{ \begin{array}{ll} A + B + C + D = 0, & A - B + C + D = 0. \\ A + B + C - D = 0, & A - B + C - D = 0. \\ A + B - C + D = 0, & A - B - C + D = 0. \\ A + B - C - D = 0, & A - B - C - D = 0. \end{array} \right.$$

De resulterende figuren moeten dus ook bevat zijn in:

$$\text{III}^a \left\{ \begin{array}{l} P + R = 0, \\ P - S = 0, \\ P + S = 0, \\ P - R = 0, \\ Q + R = 0, \\ Q - S = 0, \\ Q + S = 0, \\ Q - R = 0, \end{array} \right. \quad \text{IV}^a \left\{ \begin{array}{l} P_1 + S_1 = 0. \\ P_1 + R_1 = 0. \\ P_1 - R_1 = 0. \\ P_1 - S_1 = 0. \\ Q_1 - S_1 = 0. \\ Q_1 - R_1 = 0. \\ Q_1 + R_1 = 0. \\ Q_1 + S_1 = 0. \end{array} \right.$$

Onderstellen wij nu dat van de combinatiën (m) alleen mogelijk zijn die, waarin een even aantal positive en een even aantal negative teekens voorkomen 1) dan reduceert men gemakkelijk III<sup>a</sup> en IV<sup>a</sup> tot:

1) Mogt deze onderstelling vreemd schijnen, zoo merke men op, dat het ons in nevensgaande redenering alleen te doen is om de vergelijkingen der figuren te vinden, door Wheatstone voor een gedeelte willekeurig geconstrueerd; wij mogen dus verwachten dat de vereenvoudiging hier aangebragt, geene zijner figuren buiten rekening laat,

$$\text{III}^b \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} + \cos \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} = 0 \\ \cos \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} - \cos \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} = 0 \\ \sin \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} - \sin \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = 0 \\ \sin \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} + \sin \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = 0 \end{array} \right.$$

en :

$$\text{IV}^b \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} + \cos \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = 0 \\ \sin \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} - \cos \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = 0 \\ \cos \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} - \sin \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} = 0 \\ \cos \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} + \sin \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} = 0 \end{array} \right.$$

De vergelijkingen III<sup>b</sup> gelden nu voor het geval dat  $h + k$  een even getal is; dit geval splitsen wij in deze twee: 1°  $h$  een even dus  $k$  mede een even getal;

2°  $h$  een oneven dus  $k$  mede een oneven getal. In het eerste geval reduceren zich de vier vergelijkingen van III<sup>b</sup> tot de twee eersten daar in de twee laatsten dan ligt opgesloten dat alle zijden van het vierkant in rust zijn. Dat de vergelijkingen, waarbij dit plaats heeft onmogelijk resulterende figuren kunnen voorstellen, heeft daarin zijn grond dat de Chladnische figuren allen ontstaan wanneer de omtrek der plaat in beweging wordt gebragt; ontstonden deze figuren op eene andere wijze

daar hij bij zijne superpositiën dezelfde combinatiën uitsluit: alleen nog merken wij op, dat hij, o. i. in zijne verhandeling niet duidelijk genoeg hiervan gesproken heeft.

zoo moesten deze vergelijkingen misschien behouden blijven, nu vallen zij zeker weg. In het tweede geval vallen de twee eersten weg en blijven de twee laatsten behouden; zoodat in deze twee gevallen respectievelijk overblijven:

$$\text{III}_1^b \begin{cases} \cos \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} + \cos \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} = 0 \\ \cos \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} - \cos \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} = 0 \end{cases}$$

$$\text{III}_2^b \begin{cases} \sin \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} - \sin \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} = 0 \\ \sin \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} + \sin \frac{\pi hx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = 0 \end{cases}$$

Is  $h + k$  oneven, en geldt dus  $\text{IV}^b$  dan kan het zijn:

- 1° dat  $h$  even en  $k$  oneven;
- 2° dat  $h$  oneven en  $k$  even is.

Merken wij nu op dat van de vergelijkingen  $\text{IV}^b$  de twee eersten dezelfde figuur voorstellen, waarvan alleen de ligging verschilt, verder dat ditzelfde plaats heeft met de twee laatste vergelijkingen; eindelijk dat in het eerste der beide aangenomen gevallen (1°) de vierde, in het laatste geval (2°) de tweede vergelijking van  $\text{IV}^b$  wegvalt om dezelfde reden als zoo even, zoo verkrijgen wij tot resulterende figuren.

$$\text{IV}_1^b \quad \sin \frac{\pi kx}{a} \cos \frac{\pi hy}{a} + \cos \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi ky}{a} = 0$$

$$\text{IV}_2^b \quad \sin \frac{\pi kx}{a} \sin \frac{\pi hy}{a} + \sin \frac{\pi hx}{a} \cos \frac{\pi ky}{a} = 0$$

Passen wij nu deze vergelijkingen toe op het voorbeeld dat straks werd gegeven, dan zien wij onmiddellijk dat  $h = 2$  en  $k = 3$  is; bijgevolg is de vergelijking van de resulterende figuur:

$$\sin \frac{3 \pi x}{a} \cos \frac{2 \pi y}{a} + \cos \frac{2 \pi x}{a} \sin \frac{3 \pi y}{a} = 0$$

De figuur door deze vergelijking voorgesteld is volmaakt dezelfde als figuur 7, wanneer men deze laatste 90° draait; hiervan kan men zich, door discussie der vergelijking, gemakkelijk overtuigen.

Uit het voorgaande blijkt genoegzaam hoe Wheatstone de figuren van Chladni vond. Hiervan uitgaande, rangschikte hij deze figuren naar het aantal knooplijnen van ieder systeem en den hock waaronder twee systemen, door hem primary figures genoemd, elkander snijden. Die snijdingshoek is natuurlijk  $180 - 2\theta$ , omdat beide systemen gelijke hoeken  $\theta$  maken met eene der assen OX of OY.

Uit deze rangschikking vloeide de volgende tabel voort:

2	90° (1   1) g, 6	180° (2   0) D —, 9				
		E..F, 10 +				
3	126° 52' (2   1) B, 15	180° (3   0) G <sup>#1</sup> , 25				
4	90° (2   2) A <sup>1</sup> ..B <sup>1</sup> , 27 +, 28—	143° 8' (3   1) B <sup>1</sup> , 30	180° (4   0) G <sup>#2</sup> —, 49 —			
		C <sup>2</sup> +, 32. P 33. ?	G <sup>#3</sup> , 50			
5	112° 38' (3   2) F <sup>#3</sup> , 45	151° 56' (4   1) B <sup>2</sup> —, 55..56—	180° (5   0) E <sup>3</sup> +, 81			
6	90° (3   3) C <sup>3</sup> +, 64..65	126° 52' (4   2) C <sup>#2</sup> , 70	157° 22' (5   1) F <sup>3</sup> , 84	180° (6   0) B <sup>3</sup> , 120..121		
		D <sup>3</sup> , 72	F <sup>#3</sup> , 90.91	C <sup>4</sup> —, 125..126		
7	106° 16' (4   3) F <sup>#3</sup> , 90..91	136° 22' (5   2) G <sup>#3</sup> , 98.99.100—	161° 4' (6   1) C <sup>4</sup> , 123	180° (7   0) F <sup>4</sup> , 169		
8	90° (4   4) B <sup>b3</sup> —, 110 +. 112	118° 4' (5   3) B <sup>3</sup> , 119. 120	143° 8' (6   2) C <sup>#4</sup> 135. 140	163° 44' (7   1) F <sup>4</sup> ..F <sup>#4</sup> 175. P 180. ?	180° (8   0) B <sup>b4</sup> 224. 225	
		C <sup>4</sup> , 125. 126. 128—	D <sup>4</sup> , 144		B <sup>4</sup> +, 225 +. 231. ?	
9	102° 40' (5   4) D <sup>#4</sup> , 150..153	126° 52' (6   3) E <sup>4</sup> , 160. 162	148° 6' (7   2) F <sup>#4</sup> +, 180 +. P 189—	165° 44' (8   1)	180° (9   0) D <sup>5</sup> 289	
10	90° (5   5) F <sup>#4</sup> , 180	112° 38' (6   4) G <sup>4</sup> , 189..192	133° 26' (7   3) G <sup>#4</sup> +, 209. 210	151° 56' (8   2) B <sup>4</sup> , 240. 242	167° 18' (9   1)	180° (10   0)
		G <sup>#4</sup> , 196. 198. 200—	A <sup>4</sup> , 216. 220	C <sup>5</sup> —, 245. 250		
11	100° 24' (6   5) B <sup>b4</sup> , 224 +. 231 —	120° 30' (7   4) B <sup>4</sup> , 240. 242	138° 52' (8   3) C <sup>5</sup> +, 256 +. 264 —	154° 56' (9—2) E —, 315	168° 34' (10   1)	180° (11   0)
12	90° (6   6) C <sup>5</sup> , 256 +. 264 —	108° 56' (7   5) C <sup>#5</sup> , 275. 280	126° 52' (8   4) D <sup>5</sup> , 286. 288	143° 8' (9   3) F <sup>5</sup> , 330. 336	157° 22' (10   2)	169° 36' (11   1) 180° (12   0)
		D <sup>5</sup> , 286. 288	D <sup>#5</sup> , 294. 299	F <sup>5</sup> +, 343. 345		

De getallen in de eerste verticale rij wijzen het aantal parallelen van ieder systeem aan. In de horizontale rijen vindt men de snijdingshoeken waarvan zooeven sprake was. Tusschen haakjes zijn de figuren van Chladni geplaatst die door den corresponderenden hoek en het aantal parallelen verklaard worden.

Bij een even aantal parallelen vindt men twee figuren die wel volgens Chladni denzelfden naam dragen maar daarom nog niet gepaard gaan met denzelfden toon: dit is de reden waarom in bovenstaande tabel somtijds twee toonen worden opgegeven.

De hypothese van Wheatstone leidt tot het gevolg, dat *alle* figuren van Chladni verklaard kunnen worden, immers sommige fig. als bijv. 9 | 7 mogten verwacht worden, wanneer Wheatstone zijne tabel tot het geval van 16 knooppunten had uitgebreid; omgekeerd worden Wheatstone's figuren niet allen bij Chladni teruggevonden; dit bewijst echter alleen dat Chladni niet alle figuren gevonden heeft, hetgeen later door de praktijk ongetwijfeld zal uitgewezen worden. De overeenstemming tusschen theorie en praktijk is hier o. i. allezins voldoende om de hypothese van Wheatstone tot stelling te verheffen. Wij zien er verder geen bezwaar in met hem aan te nemen »dat de fout van J. Bernouilli niet bestond in de onderstelling, dat de klankfiguren het resultaat zijn van het gelijktijdig bestaan van eenvoudiger wijzen van trilling, maar alleen in de manier waarop dit plaats heeft;» zelfs heeft de verklaring van Wheatstone ons zoo overtuigd, dat wij stellig eene theorie, op zijne aanname berustende, verwachten.

Voor wij deze paragraaf eindigen, maken wij nog eenige opmerkingen omtrent de vergelijkingen III<sup>l</sup> en IV<sup>l</sup>.

Toen wij deze ter neder schreven, hadden wij alleen de eerste aflevering eener Verhandeling van Radau 1): »Nouvelles recherches sur les plaques vibrantes» ingezien. Daarin geeft Radau als resultaat van zijn onderzoek op, dat de vergelijking (11, 1) van Hoofdstuk I deze particuliere integraal toelaat;

$$\left( \sin h \frac{\pi x}{a} \sin k \frac{\pi y}{a} \pm \sin k \frac{\pi x}{a} \sin h \frac{\pi y}{a} \right).$$

$$\sin \pi^2 (h^2 + k^2) \frac{e}{a^2} mt,$$

dat deze evenwel niet aan de grensbepalingen (11, 2 en 3) voldoet. Verder merkt men op dat men uit de constructie van:

$$\sin h \frac{\pi x}{a} \sin k \frac{\pi y}{a} + \sin h \frac{\pi x}{a} \sin h \frac{\pi y}{a} = 0$$

(waarin cosinus in plaats van sinus te schrijven zijn, hetgeen neerkomt op eene verplaatsing van den oorsprong van coördinaten) de figuren van Chladni verkrijgt. Opmerkelijk vonden wij de overeenstemming tusschen deze laatste vergelijking en de bovengenoemde III<sup>b</sup> en IV<sup>b</sup>. In de tweede aflevering 2), die ons eerst onlangs in handen kwam, vinden wij ditzelfde opgemerkt: Radau geeft daarin nl. eene transformatie waaruit blijkt dat de vergelijking:  $\frac{\sin \left( h \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left( k \frac{\pi y}{a} \right) \pm \sin \left( k \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left( h \frac{\pi y}{a} \right) = 0$  (R) tot de synthese van Wheatstone leiden kan.

Wegens de merkwaardigheid van het onderwerp en de korthed zijner transformatie laten wij deze hier volgen: »Nemen wij twee scheefhoekige coördinaten-systemen ( $x' y'$ )

1) Moniteur Scientifique N°. 178.

2) N°. 180.

en  $(x'' y'')$  aan, beide gelijke hoeken  $2A$  bezittende en onderstellen dat de lijn die den hoek van het eerste systeem middendoor deelt zamenvalt met de oude X-as, de deellijn van het tweede systeem zamenvalt met de oude Y-as. Zij verder:

$$\operatorname{tg} A = \frac{k}{h}, \text{ of wel: } h \cos A = k \sin A.$$

Dan is

$$\begin{cases} x = (x' + y') \cos A = (x'' - y'') \sin A \\ y = (x' - y') \sin A = (x'' + y'') \cos A \end{cases}$$

waaruit volgt:

$$\begin{cases} hx + ky = 2h \cos A \cdot x' & \begin{cases} hy + kx = 2h \cos A \cdot x'' \\ hy - kx = 2h \cos A \cdot y'' \end{cases} \\ hx - ky = 2h \cos A \cdot y' \end{cases}$$

Ligt men door de hoeken van het vierkant parallelen aan de coördinaten assen van het eene of andere der systemen zoo verkrijgt men eene ruit met zijde

$$b = \frac{1}{2} a \left( \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\cos A} \right) = \frac{a}{2h \cos A} (h + k)$$

dan is ook: 
$$\frac{2h \cos A}{a} = \frac{h + k}{b}.$$

Hiermede wordt (R):

$\sin(h+k)x' \pm \sin(h+k)y' \pm \sin(h+k)x'' \sin(h+k)y'' = 0$   
waarin cosinus in plaats van sinus kunnen geschreven worden. Dit zijn dan de vier primary figures van Wheatstone."

Eene tweede opmerking is deze:

Het komt ons niet onwaarschijnlijk voor dat vergelijkingen als III<sup>b</sup> en IV<sup>b</sup> ook kunnen opgesteld worden ten einde de resulterende figuren van regelmatige 8 —, 12 — enz. hoeken te vinden. Beschrijft men toch deze veelhoeken in cirkel dan is het gemakkelijk door het trekken van gepaste diagonalen, bij den 8-hoek twee, bij den 12-hoek drie quadraten te vinden, wier gemeenschappelijk



oppervlak juist uit eene regelmatige 8- of 12-hoek bestaat. Wij zullen dit echter nu niet onderzoeken daar ons de proeven ontbreken die met de uitkomsten der berekening zouden moeten vergeleken worden.

Eindelijk wijzen wij op de overeenstemming tusschen de verg. III<sup>b</sup>, IV<sup>b</sup> en dit gezegde van Chladni: 1)

»Ein besonders bemerkenswerther Umstand, ist die wesentliche Verschiedenheit der Schwingungsarten, wo die Summe der Linien, die nach beiden Richtungen gehen, eine gerade Zahl ist, von denen, wo sie ungerade ist.« Zelfs vindt men in deze vergelijkingen terug hetgeen Chladni hier onmiddellijk op laat volgen:

»Nur die Schwingungsarten, wo nach der einen Richtung so viele Linien gehen, wie nach der andern, machen hiervon eine Ausnahme.«

### § 3.

In de vorige paragraaph is aangetoond, hoe de onderstelling van Wheatstone rekenschap geeft van alle figuren, die op homogene vierkante platen kunnen ontstaan; in deze zullen nog eenige proefnemingen van Wheatstone en Koenig vermeld worden, die deze onderstelling volkomen wettigen.

De proeven van Wheatstone 1) hebben betrekking op houten platen; door middel van eene vierkante houten plaat, waarin de lengtevezels evenwijdig loopen met eene zijde van het vierkant, vond hij, dat de proefnemingen alleen figuren doen ontstaan, die overeenkomen met die,

1) Phil. Transact. 1833.

welke zijne theorie doet verwachten. Het is dus voldoende, wanneer men wil weten wat men bij dergelijke proefnemingen vindt, na te gaan wat zijne theorie voor deze soort van platen leert.

Neemt men twee regthoekige strooken hout, alleen daarin verschillende, dat in de eene de lengtevezels evenwijdig aan hare langste zijden, in de andere de lengtevezels parallel aan hare uiteinden loopen, dan zullen deze strooken, in trilling gebragt kunnen worden, zoodat zij dezelfde knooplijnen vertoonen; beiden zullen zij dan evenwel niet denzelfden toon voortbrengen. Tengevolge van dit verschil in toonen kunnen op de boven beschreven houten plaat ook geene figuren verwacht worden, die resulteren uit twee gelijke systemen knooplijnen, welke respectievelijk evenwijdig loopen aan de zijden van het vierkant. Op zulke platen moeten dus de figuren met diagonalen ontbreken.

Maken de parallelen van twee gelijke systemen gelijke hoeken met ieder van de elasticiteitsassen, dan zal er geene reden zijn om hunne resulterende figuren niet te verwachten.

De resulterende figuren eindelijk, voortvloeiende uit de zamenstelling van vier systemen knooplijnen zullen hier nimmer voorkomen.

Daarenboven vond Wheatstone, dat de figuren met diagonalen ontstaan, zoodra men eene regthoekige plaat neemt met zijden die omgekeerd evenredig zijn aan de vierkanten van den weerstand tegen buiging, dien het hout in de twee rigtingen bezit. Koenig 1) ging verder; hij

1) Poggendorff's Annal. A<sup>o</sup> 1864. Bd. 122 »Zur theorie der Klangfiguren.»

zocht de lengten van twee overigens gelijke messingstaven, zoodanig, dat zij bij aanstrijking *ongeveer* denzelfden toon lieten hooren, terwijl het aantal knooplijnen, parallel aan de uiteinden, dat zich hierbij vertoonde, in beide verschilde. Met deze lengten als zijden maakte hij een regthoek van dezelfde stof en dikte als de staven.

Volgens Wheatstone was nu gemakkelijk te bepalen, welke figuur hieruit zou voortvlooijen; en werkelijk leverde de proefneming van Koenig telkens dezelfde knooplijnen.

De laatstgenoemde natuurkundige onderzocht tevens, of zijne regthoekige platen hetzelfde verschijnsel opleverden, dat door Terquem bij staven werd waargenomen; en vond ook hier, dat het bijna onmogelijk was, de vooraf bepaalde figuren op zijne platen voort te brengen, wanneer de lengten der zijden zoodanig waren, dat de toonen, die bij de beide trillingsrigtingen behoorden, *volkomen* dezelfde waren. Om dit te bewijzen, nam hij eene staaf die twee knooplijnen vertoonde, bepaalde naauwkeurig hare lengte en toon ( $\alpha$ ); daarna zocht hij de verschillende lengten van staven die, te gelijk met drie knooplijnen eene reeks toonen gaven van welke ééne volkomen in overeenstemming was met  $\alpha$ , terwijl de anderen in verschillende mate hooger of lager waren dan deze.

Met behulp van regthoeken, die met de gevonden lengten als zijden geconstrueerd werden, toonde hij nu aan, dat de vooraf bepaalde figuur dan het gemakkelijkst te voorschijn trad, wanneer het verschil der beide corresponderende toonen een' geheel toon bedroeg; daarbij was altijd de resulterende toon het gemiddelde tusschen de componerende.

Is het aantal knooplijnen in beide rigtingen even, dan leert de constructie en ervaring, dat hierbij twee figuren ontstaan, die met weinig verschillende toonen overeenkomen. Van deze toonen, zegt Koenig, zal de een meer met dezen, de ander meer met genen componerenden toon overeenkomen.

### HOOFDSTUK III.

#### *Overeenstemming tusschen Theorie en Experiment.*

In dit hoofdstuk zullen wij, zonder hoofdzaken voorbij te gaan, trachten aan te toonen in hoeverre het gelukt is door de theorie de verschijnselen, die zich bij vrije trillende platen voordoen, te verklaren.

De overeenstemming tusschen theorie en experiment is tot nog toe alleen aangewezen voor het geval dat de plaat cirkelvormig is; voor dit geval alleen werd eene oplossing van de differentiaalvergelijkingen (Hoofdstuk I (11)) gevonden. Zooals reeds vroeger is gezegd, werd deze oplossing door Poisson gegeven; intusschen volgen wij in het onderstaande Kirchhoff, die hetzelfde vraagstuk op eene andere wijze ontwikkeld heeft en op sommige punten, vooral waar het de overeenkomst tusschen theorie en experiment geldt, uitvoeriger is.

Vooreerst zullen wij ons dus moeten bezighouden met de integratie van de vergelijking:

$$(1) \quad 0 = \varrho \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + 2\theta}{1 + \theta} \varepsilon^2 K \left( \frac{d^4 \zeta}{da^4} + 2 \frac{d^4 \zeta}{da^2 db^2} + \frac{d^4 \zeta}{db^4} \right)$$

De gevonden integraal zal daarna zoo gewijzigd worden

dat zij in staat is om tevens aan de grensvoorwaarden

$$(2) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{1+2\theta}{1+\theta} \left\{ \left( \frac{d^3\zeta}{da^3} + \frac{d^3\zeta}{dad^2b} \right) \cos \varphi + \left( \frac{d^3\zeta}{da^2db} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{d^3\zeta}{db^3} \right) \sin \varphi \right\} \\ &\quad - \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d^2\zeta}{dad^2b} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left( \frac{d^2\zeta}{db^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{d^2\zeta}{da^2} \right) \cos \varphi \sin \varphi \right\} \\ 0 &= \frac{\theta}{1+\theta} \left( \frac{d^2\zeta}{da^2} + \frac{d^2\zeta}{db^2} \right) + \frac{d^2\zeta}{da^2} \cos^2 \varphi \\ &\quad + 2 \frac{d^2\zeta}{dad^2b} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{d^2\zeta}{db^2} \sin^2 \varphi \end{aligned} \right.$$

te voldoen. Verder zal aangewezen worden dat de gevolgen uit deze oplossing afgeleid, overeenkomen met de proeven van Chladni omtrent cirkelvormige platen.

Stelt men kortheidshalve

$$\frac{2}{3} \frac{1+2\theta}{1+\theta} s^2 \frac{K}{\varphi} = \alpha^2, \text{ en } \frac{d^4}{da^4} + 2 \frac{d^4}{da^2db^2} + \frac{d^4}{db^4} = n^2$$

dan wordt de vergelijking (1):

$$0 = \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \alpha^2 n^2 \zeta$$

waaruit

$$\zeta = \sin(\alpha tn) \varphi(x, y) + \cos(\alpha tn) \psi(x, y)$$

$$\text{of } \zeta = \left\{ at \left( \frac{d^2}{da^2} + \frac{d^2}{db^2} \right) - \frac{\alpha^2 t^3}{1.2.3} \left( \frac{d^4}{da^4} + \frac{d^4}{db^4} \right)^{(3)} \right. \\ \left. + \dots \left\{ \varphi(x, y) + \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 t^2}{1.2} \left( \frac{d^2}{da^2} + \frac{d^2}{db^2} \right)^{(2)} + \dots \right\} \psi(x, y) \right. \right.$$

Ten einde deze oplossing in eindigen vorm te verkrijgen, onderwerpen wij de willekeurige functiën  $\varphi$  en  $\psi$  aan de volgende voorwaarden:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} 4\lambda^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{da^2} + 2 \frac{d^2 \varphi}{da^2 db^2} + \frac{d^2 \varphi}{db^2} \\ 4\lambda^2 \psi = \frac{d^2 \psi}{da^2} + 2 \frac{d^2 \psi}{da^2 db^2} + \frac{d^2 \psi}{db^2} \end{array} \right.$$

waarin  $\lambda$  eene constante voorstelt waarover later beschikt zal worden.

De uitdrukking voor  $\xi$  wordt dan:

$$(4) \xi = \varphi(x, y) \sin(4\lambda^2 at) + \psi(x, y) \cos(4\lambda^2 at).$$

Deze waarde van  $\xi$  bestaat uit twee gedeelten die ieder afzonderlijk aan (1) voldoen. Korthedshalve zullen wij met het eerste gedeelte de berekening voortzetten en daarna besluiten tot de uitkomst die verkregen zoude zijn wanneer beide gedeelten in de berekening waren opgenomen.

De eerste der vergelijkingen (3) is identisch met twee anderen nl.

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} 4\lambda^2 z = \frac{d^2 z}{da^2} + \frac{d^2 z}{db^2} \\ 4\lambda^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{da^2} + \frac{d^2 \varphi}{db^2} \end{array} \right.$$

Zijn nu

$$(6) \varphi = S + D, \quad z = S - D$$

dan worden de grootheden  $S$  en  $D$  bepaald door de differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 S &= \frac{d^2 S}{da^2} + \frac{d^2 S}{db^2} \\ - 4\lambda^2 D &= \frac{d^2 D}{da^2} + \frac{d^2 D}{db^2} \end{aligned}$$

of in polaire coördinaten  $r, \psi$  door:

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 S &= \frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 S}{d\psi^2} \\ - 4\lambda^2 D &= \frac{d^2 D}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dD}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 D}{d\psi^2} \end{aligned}$$

Hieraan wordt voldaan door te stellen :

$$(7) \begin{cases} S = A \cos n\psi X \\ D = B \cos n\psi Y \end{cases}$$

A en B zijn dan willekeurige constanten,  $n$  is een geheel getal terwijl X en Y twee functies van  $r$  voorstellen die bepaald zijn door de vergelijkingen :

$$(8) \begin{cases} \frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} - \left( \frac{n^2}{r^2} + 4\lambda^2 \right) X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dY}{dr} - \left( \frac{n^2}{r^2} - 4\lambda^2 \right) Y = 0 \end{cases}$$

Voert men nu  $x = \lambda r$  in, dan worden (8):

$$(9) \begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dX}{dx} - \left( \frac{n^2}{x^2} + 4 \right) X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dY}{dx} - \left( \frac{n^2}{x^2} - 4 \right) Y = 0 \end{cases}$$

Door middel van de symbolische methode 1) vindt men hieruit gemakkelijk de particuliere integralen :

$$(10) \begin{cases} X^{(n)} = \frac{x^n}{1.2.3..n} \left( 1 + \frac{x^2}{1.n+1} + \frac{x^4}{1.2.n+1.n+2} + \dots \right) \\ Y^{(n)} = \frac{x^n}{1.2.3..n} \left( 1 - \frac{x^2}{1.n+1} + \frac{x^4}{1.2.n+1.n+2} - \dots \right) \end{cases}$$

Andere particuliere integralen 2) zijn :

$$(11) \begin{cases} X^{(n)'} = X^n \int_{x_0}^x \frac{dx}{x Y^{(n)} X^{(n)}} \\ Y^{(n)'} = Y^n \int_{x_0}^x \frac{dx}{x Y^{(n)} Y^{(n)}} \end{cases}$$

waarin  $x_0$  eene willekeurige eindige grootheid voorstelt.

De algemeene integralen van de vergelijkingen (9) zijn dus :

1) Boole, Differential Equations. Supplementary Volume p. 175. 1.

2) Sturm, Cours d'Analyse. DL II p. 130.



$$X = \alpha X^{(n)} + \alpha' X^{(n)'}$$

$$Y = \beta Y^{(n)} + \beta' Y^{(n)'}$$

Uit (11) volgt dat  $X^{(n)'}$  en  $Y^{(n)'}$  voor  $x = 0$  oneindig worden; bij eene volle plaat moeten evenwel voor  $r = 0$  of  $x = 0$   $\varphi$  en  $z$ , dus ook  $X$  en  $Y$  eindig blijven; derhalve zijn de constanten  $\alpha'$  en  $\beta' = 0$ . Schrijft men nu  $\alpha = \beta = 1$ , wat zonder schade voor de algemeenheid kan geschieden dan worden (7):

$$(12) \begin{cases} S = A \cos n\psi X^{(n)} \\ D = B \cos n\psi Y^{(n)} \end{cases}$$

Ten einde nu de gevonden integraal aan de condities (2) te laten voldoen zij:

$s = l\psi$ , waarin  $l$  de straal der cirkelvormige plaat is, dan volgt uit eene vroeger gegeven bepaling

$$\varphi = \psi + 180^\circ.$$

Hiermede worden de vergelijkingen (2) in polaircoördinaten  $r \psi$  aldus:

$$(13) \begin{cases} \left( \frac{1+2\theta}{1+\theta} \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\zeta}{d\psi^2} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{r^2} \left( \frac{d^2\zeta}{dr d\psi} - \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{d\psi} \right) = 0 \right. \\ \left. \frac{\theta}{1+\theta} \left( \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\zeta}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2\zeta}{d\psi^2} \right) + \frac{d^2\zeta}{dr^2} = 0 \right.$$

Deze verg. gelden voor  $r = l$  wat  $\psi$  of  $t$  ook zij. Volgens (3) mag men dus ook  $u$  in plaats van  $\zeta$  schrijven. Geeft men daarenboven acht op de eerste vergelijking (5) dan worden (13).

$$4\lambda^2 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \frac{dx}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^3\varphi}{dr d\varphi^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\varphi}{d\psi^2} = 0$$

$$4\lambda^2 \frac{\theta}{1+\theta} x + \frac{d^3\varphi}{dr^2} = 0$$

Substitueert men hierin voor  $u$  en  $v$  hare waarden uit

(6 en 12) en schrijft  $r = \frac{x}{\lambda}$  dan verkrijgt men met behulp van de vergelijkingen (9) en de verkorting

$$\frac{1 + 2\theta}{1 + \theta} = \gamma:$$

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} 0 = A \left\{ n^2 X^{(n)} - x (n^2 - 4\gamma x^2) \frac{dX^{(n)}}{dx} \right. \\ \quad \left. + B \left\{ n^2 Y^{(n)} - x (n^2 + 4\gamma x^2) \frac{dY^{(n)}}{dx} \right. \right. \\ 0 = A \left\{ (n^2 + 4\gamma x^2) X^{(n)} - x \frac{dX^{(n)}}{dx} \right\} \\ \quad \left. + B \left\{ (n^2 - 4\gamma x^2) Y^{(n)} - x \frac{dY^{(n)}}{dx} \right\} \right. \end{array} \right.$$

Deze vergelijkingen moeten voldaan worden voor  $x = \lambda$ .

Dit geschiedt wanneer voor die waarde van  $x$  hare determinante verdwijnt d. i. als voor  $x = \lambda$ :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} 0 = 8\gamma n^2 x^2 X^{(n)} Y^{(n)} - 8\gamma n^2 x^3 \left( X^{(n)} \frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)} \frac{dX^{(n)}}{dx} \right) \\ - \{ n^2 (n^2 - 1) x + 16 \gamma^2 x^5 \} \left( X^{(n)} \frac{dY^{(n)}}{dx} - Y^{(n)} \frac{dX^{(n)}}{dx} \right) \\ \quad + 8\gamma x^4 \frac{dX^{(n)}}{dx} \frac{dY^{(n)}}{dx} \end{array} \right.$$

Uit (15) moet dus  $\lambda$  worden bepaald en uit eene der vergelijkingen (14) de verhouding  $\frac{A}{B}$ . Is derhalve  $\lambda_{n\mu}$  een wortel van (15) en:

$$(16) U_{n\mu} = X^{(n)} \left\{ (n^2 - 4\gamma x^2) Y^{(n)} - x \frac{dY^{(n)}}{dx} \right\} \\ - Y^{(n)} \left\{ (n^2 + 4\gamma x^2) X^{(n)} - x \frac{dX^{(n)}}{dx} \right\}$$

nadat in de factor van het tweede lid dezer vergelijking,

die tusschen haakjes staat voor  $x$ ,  $\lambda_{n\mu}$  gesubstitueerd is, zoo verkrijgt men voor de oplossing van (1 en 2)

$$\xi = C \sin(4\lambda_{n\mu}^2 \alpha t) \cos n\psi U_{n\mu}$$

of ook :

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \xi = \{ \cos(4\lambda_{n\mu}^2 \alpha t) (A \cos n\psi + B \sin n\psi) \\ \quad + \sin(4\lambda_{n\mu}^2 \alpha t) (C \cos n\psi + D \sin n\psi) \} U_{n\mu} \end{array} \right.$$

waarin A, B, C, D willekeurige constanten zijn. Deze constanten worden bepaald uit den initialen toestand van de plaat: A en B uit hare initiale afwijking, C en D uit hare initiale snelheid.

De oplossing (17) biedt nu verschillende punten van vergelijking aan met de resultaten door Chladni verkregen.

Voorcerst is uit (17) afte leiden dat de knooplijnen bevat zijn in de vergelijkingen:

$$(18) \quad U_{n\mu} = 0$$

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} A \cos n\psi + \sin n\psi = 0 \\ C \cos n\psi + \sin n\psi = 0 \end{array} \right.$$

De vergelijking (18) wijst op knooplijnen die bestaan uit concentrische cirkels. De stralen alsmede het aantal dezer cirkels zijn uit deze vergelijking te berekenen, nadat men in haar voor  $\lambda_{n\mu}$  eene der waarden gesubstitueerd heeft, die door de vergel. (15) worden verkregen.

Behalve deze knooplijnen kunnen in de klankfiguren eener cirkelvormige plaat nog diameters voorkomen, die den cirkelomtrek in gelijke deelen verdeelen; dit vloeit voort uit de vergelijking (19). Zijn toch de grootheden A, B, C, D zoodanig, dat  $A : B = C : D$  dan is:

$$n\psi = \text{arc tang. } 0$$

$$\psi = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \pi, \pi + \frac{\pi}{n}, \dots$$

Van dit oneindig aantal waarden zijn er evenwel slechts  $n$  die werkelijk onderscheiden zijn.

De normale knooplijnen van eene cirkelvormige plaat worden derhalve door de theorie verklaard. Zij geeft echter geene rekenschap van de veelvuldige afwijkingen die men bij de proefneming ziet ontstaan; Kirchhoff onderstelt dat dit daaraan moet worden toegeschreven, dat de plaat niet volkomen vrij is, zooals bij de theorie wordt aangenomen.

Stelt men door  $n$  het aantal trillingen voor dat  $n$  de eenheid van tijd plaats heeft, dan volgt uit de vergelijking (17) verder:

$$n = \frac{2 \lambda_{n\mu}^2 a}{\pi}$$

De hoogte der toonen die de klankfiguren vergezellen is dus regtstreeks evenredig met de quadraten van  $\lambda_{n\mu}$  of van de wortels der vergelijking (15).

Om deze wortels te vinden is het noodig in de vergelijking (15) de waarden van de grootheden  $X^{(n)}$ ,  $Y^{(n)}$  en hare differentiaalquotienten te substitueren. De vergelijking die aldus ontstaat, wordt door Kirchhoff getransformeerd tot deze:

$$(20) \quad 0 = (4\gamma - 1)n^2(n-1) + \sum_1^{\infty} k (-1)^k \frac{E_k}{M_k} x^{4k}$$

waarin

$$E_k = -n^2(n^2 - 1) + 4\gamma(n + 2k)(n + 2k + 1) \\ \quad \quad \quad \{ n(n-1) - 2k + 4\gamma k(n+k) \}, \\ M_k = 1 \cdot 2 \dots k \cdot n + 1 \cdot n + 2 \dots n + k \cdot n + 1 \cdot n + 2 \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad n + 2k - 1.$$

Identisch met de vergelijking (20) is dus ook

$$(21) \quad 0 = 1 - \frac{x^4}{A_1} + \frac{x^8}{A_2} - \frac{x^{12}}{A_3} + \dots;$$

de grootheden  $A_1, A_2, \dots$  zijn hierin geheel bepaald zodra men voor  $n$  eene waarde gekozen en voor  $\theta$  eene

onderstelling (bijv. die van Poisson  $\theta = \frac{1}{2}$  of Wertheim  $\theta = 1$ ) gedaan heeft. Ingeval  $n = 0$  of  $n = 1$  lette men echter bij de berekening van  $A_1, A_2 \dots$  op de omstandigheid, dat  $(4\gamma - 1)n^2(n - 1) = 0$  is, en men de vergelijking (20) derhalve door  $x^*$  kan deelen.

Beschouwt men nu  $x^*$  als onbekende, dan zal uit de vergelijking (21) voor iedere waarde van  $n$  (bij eene zekere onderstelling omtrent  $\theta$ ) een oneindig aantal wortels benaderd kunnen worden die in orde hunner grootte

$$(l\lambda_{n0})^*, (l\lambda_{n1})^*, (l\lambda_{n2})^*, \dots (l\lambda_{n\mu})^*, \dots$$

mogen heeten. Uit ieder dezer grootheden is nu ééne positieve reële waarde van  $l\lambda_{n\mu}$  te vinden. Intusschen wordt deze wijze van berekening door Kirchhoff alleen gevolgd voor de kleinere wortels, de grootere benadert hij meer direct uit de vergelijking (15) op deze wijze:

Is  $n = 0$  dan kan men  $X^{(0)}$  en  $Y^{(0)}$  aldus ontwikkelen:

$$X^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + \frac{1^2}{1} \cdot \frac{1}{16x} + \frac{(1.3)^2}{1.2} \frac{1}{(16x)^2} + \frac{(1.3.5)^2}{1.2.3} \frac{1}{(16x)^3} + \dots \right\}$$

$$Y^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ (\cos 2x + \sin 2x) \left( 1 - \frac{(1.3)^2}{1.2} \frac{1}{(16x)^2} + \frac{(1.3.5.7)^2}{1.2.3.4} \frac{1}{(16x)^4} - \dots \right) + (\sin 2x - \cos 2x) \left( \frac{1^2}{1} \frac{1}{16x} - \frac{(1.3.5)^2}{1.2.3} \frac{1}{(16x)^3} + \frac{(1.3.5.7.9)^2}{1.2.3.4.5} \frac{1}{(16x)^5} - \dots \right) \right\}$$

Met deze twee reeksen kan men nu successievelijk  $X^{(1)}$ ,  $Y^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$ ,  $Y^{(2)}$ , ...,  $X^{(n)}$ ,  $Y^{(n)}$  ontwikkelen, daar uit de vergelijkingen (10) volgen:

$$X^{(n+1)} = \frac{1}{2} x^n \frac{d}{dx} \left( \frac{X^{(n)}}{x^n} \right)$$

$$Y^{(n+1)} = -\frac{1}{2} x^n \frac{d}{dx} \left( \frac{Y^{(n)}}{x^n} \right)$$

Hiermede vindt men dan :

$$X^{(n)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} \left\{ 1 + \frac{1-4n^2}{1} \frac{1}{16x} + (1-4n^2)(9-4n^2) \frac{1}{(16x)^2} \right. \\ \left. + \frac{(1-4n^2)(-4n^2)(25-4n^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{(16x)^3} + \dots \right\}$$

$$Y^{(n)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ (\cos(2x - \frac{1}{2}n\pi) + \sin(2x - \frac{1}{2}n\pi)) \right. \\ \left. 1 - \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{1 \cdot 2} \frac{1}{(16x)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)(49-4n^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1}{(16x)^4} + \dots \right) + \\ \left. + (\sin(2x - \frac{1}{2}n\pi) - \cos(2x - \frac{1}{2}n\pi)) \left( \frac{1-4n^2}{1} \frac{1}{16x} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{(16x)^3} + \dots \right) \right\}$$

Deze waarden in de vergelijking (15) substituerende, kan men tang  $(2x - \frac{1}{2}n\pi)$  aldus uitdrukken:

$$(22) \quad \text{tang} \left( 2x - \frac{1}{2}n\pi \right) = \frac{\frac{b}{16x} + \frac{c}{(16x)^2} - \frac{d}{(16x)^3} + \dots}{a + \frac{b}{16x} + \frac{d}{(16x)^3} + \dots}$$

waarin

$$a = \gamma$$

$$b = \gamma(1-4n^2) - 8$$

$$c = \gamma(1-4n^2)(9-4n^2 + 48(1-4n^2))$$

$$d = -\gamma \frac{1}{3} \{ (1-4n^2)(9-4n^2)(13-4n^2) \} + 8(9 \\ + 136n^2 + 80n^4)$$

Is de waarde van  $x$  groot, dan wordt (22) eenvoudig

$$\text{tang} \left( 2x - \frac{1}{2}n\pi \right) = 0$$

en  $x = l_{n\mu} = \frac{1}{2} \pi (n + 2h)$  wanneer  $h$  een positief geheel getal voorstelt.

Door vergelijking met de overige wijze van berekening vindt men het getal  $h$  altijd  $= \mu$  waaruit

$$l_{n\mu} = \frac{1}{2} \pi (n + 2\mu).$$

Niet alleen leert deze uitkomst de grootere waarden van  $l_{n\mu}$  kennen, maar tevens volgt hieruit de wet, door Chladni gevonden, dat de trillingsgetallen der toonen, die in hunne klankfiguren hetzelfde aantal diameters hebben (deze hebben dus allen  $n$  gelijk) uitgenomen de diepte, zich ongeveer als de quadraten van de op elkander volgende even of oneven getallen verhouden.

Omtrent de numerische resultaten, volgens de aangegeven handelwijzen verkregen, merken wij alleen dit op:

In de eerste plaats dat de absolute hoogte der diepste toonen geene onaanzienlijke verschillen doet zien met die welke Chladni opgeeft; zulke verschillen doen zich althans voor, wanneer men gebruik maakt van eene der beide onderstellingen:  $\theta = \frac{1}{2}$  of  $\theta = 1$ ; zoolang  $\theta$  niet met juistheid bekend is, laat zich hier echter geene betere overeenstemming verwachten. In de tweede plaats levert de berekening der stralen van de cirkelvormige knooplijnen uit de vergelijking (18) eene overeenkomst op met de directe metingen, zuiver genoeg om aan te nemen dat de verschillen aan onvermijdelijke metingsfouten moeten worden toegeschreven.

## STELLINGEN.

---

1.

De verklaring der klankfiguren, door WHEATSTONE gegeven, is voldoende bevestigd.

2.

«... le rôle de l'élasticité dans la nature est au moins aussi important que celui de la pesanteur universelle.»

LAMÉ.

3.

Bij toeval heeft SOPHIE GERMAIN de differentiaal vergelijking gevonden, waarin de beweging eener trillende plaat ligt opgesloten.

4.

Onjuist zijn de bepalingen van de grootheid  $\theta$  door POISSON ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) en door WERTHEIM ( $\theta = 1$ ).



## 5.

De gronden door LEIBNITZ aangevoerd voor de volgende bewering zijn onvoldoende:

«.... le calcul par deux, c'est à dire par 0 et par 1, en récompense de sa longueur, est le plus fondamental pour la science, et donne de nouvelles découvertes qui se trouvent utiles ensuite, même pour la pratique des nombres, et surtout pour la géométrie.»

## 6.

De bepaling van eenledigen vorm in de leerboeken van LACROIX, KEMPEES en BADON GHYBEN & STROOTMAN, is af te keuren.

## 7.

De methode van D'ALEMBERT voor de integratie der lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten, voor het geval van gelijke wortels is niet zeer aan te bevelen.

## 8.

De methode ter benadering der wortels eener hoogere magtsvergelijking van BYRNE, door middel van zijne Dual Arithmetie is niet zoo geschikt als die van HORNER.

## 9.

«.... le conseil le plus important que l'on puisse donner à ceux qui étudient les mathématiques, c'est d'exercer

leur imagination beaucoup plus que leur mémoire, c'est de lire peu et de penser beaucoup, de chercher par eux-mêmes les démonstrations, ou du moins d'essayer leurs forces le plus souvent qu'ils pourront.»

LALANDE.

10.

De verklaring van de kleuren der sterren door DOPPLER is onaannemelijk.

11.

De beste calorimeter is tot nog toe de ijscalorimeter van BUNSEN.

12.

De verklaring der ijsperiode moet gezocht worden in de veranderde verhouding van land en water.

13.

De hypothese van THOMSON omtrent het ontstaan van het leven op aarde is niet wetenschappelijk.

14.

De onderscheiding van het mensdóm in soorten verdient de voorkeur boven de verdeling in rassen.

---

## VERBETERINGEN.

---

pag. 36 reg. 6 v. o. moet *wegvallen*: A. Zandfiguren.

» 41 » 6 v. o. *lees*: is, en afhangt van het aantal knoop-  
lijnen, D enz.

» 74 » 7 v. b. *lees*: experiment.

---