Utrecht University Library
Partner in Science
Universiteit Utrecht

Ferromagnetisme en kristalstruktuur

https://hdl.handle.net/1874/295515

f. qu. 192, 1924

FERROMAGNETISME
EN
KRISTALSTRUKTUUR

R. H. DE WAARD

BIBLIOTHEEK UNIVERSITEIT UTRECHT
3148 510 9

FERROMAGNETISME EN KRISTALSTRUKTUUR.

Boek- en Steendrukkerij Eduard IJdo. — Leiden.

Diss. Utrecht ge 1924

FERROMAGNETISME EN KRISTALSTRUKTUUR.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr. A. J. P. VAN DEN BROEK, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 11 FEBRUARI 1924, DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

REINIER HERMAN DE WAARD,

GEBOREN TE GRONINGEN.



LEIDEN. — EDUARD IJDO. — 1924.

AAN MIJN OUDERS.

AAN MIJN VROUW.

Het verschijnen van mijn proefschrift geeft mij de gelegenheid mijn dank te betuigen aan U, Hoogleraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, die door Uw onderwijs aan mijn studie leiding hebt gegeven.

In de eerste plaats geldt mijn dank U, Hooggeleerde Ornstein, *Geachte Promotor. Uw vriendschappelike omgang en hulpvaardige belangstelling hebben mij de bewerking van dit proefschrift tot een waar genot gemaakt. De opbouwende kritiek die Gij zo dikwijls wist te geven, en de wijze waarop Gij steeds mijn mening, ook al week die van de Uwe af, toondet te waarderen, worden door mij meer op prijs gesteld dan in deze weinige regels kan worden gezegd. Dat mijn kontakt met Uw persoon en het door U geleide laboratorium na de voltooiing van mijn proefschrift, in stede van te verminderen nog moge toenemen, is mijn oprechte wens.*

U, Hooggeleerde Julius, *ben ik dankbaar niet alleen voor de voortreffelike kolleges waardoor Gij mij in mijn eerste studiejaren in de beginselen der theoretiese natuurkunde hebt ingewijd, maar vooral voor het voorrecht dat ik ruim een jaar Uw assistent heb mogen zijn, waardoor ik voor verwaarlozing van het experiment gespaard ben gebleven.*

U, Hooggeleerde de Vries, Nijland *en* Wolff *dank ik voor de wijze waarop Gij voor de door U gedoceerde vakken mijn belangstelling wist op te wekken en gaande te houden.*

INHOUD.

Bladz.

INLEIDING 1

Opmerkingen naar aanleiding van de bestaande theorieën van het magnetisme.

AFDELING A.

DE VOORNAAMSTE GEGEVENS OVER HET FERROMAGETNISME.

HOOFDSTUK I. Enige hoofdpunten uit de algemene theorie van het magnetisme 7

HOOFDSTUK II. Experimentele methoden en gegevens 19

AFDELING B.

FENOMENOLOGIESE THEORIE VAN HET FERROMAGNETISME.

HOOFDSTUK III. De energie van aggregaten van elementairmagneetjes, die in een magneties veld zijn geplaatst 40

HOOFDSTUK IV. Het gedrag van stelsels, die door een ellipsoide worden begrensd 47

HOOFDSTUK V. Toepassingen in verband met de gegevens aangaande ijzer, nikkel en kobalt..... 62

AFDELING C.

ATOMISTIESE THEORIE VAN HET FERROMAGNETISME.

HOOFDSTUK VI. Berekening van de energie van dipoolstelsels met kubiese symmetrie 83

HOOFDSTUK VII. Het gedrag der beschouwde dipoolstelsels in magnetiese velden 99

Bladz.

HOOFDSTUK VIII. Numerieke resultaten in verband met de gegevens aangaande ijzer, nikkel, kobalt, magnetiet en enige staalsoorten 118

HOOFDSTUK IX. Een en ander over dipoolnetten met orthorhombiese en hexagonale symmetrie, in verband met de gegevens aangaande pyrrhotine 132

SLOTOPMERKINGEN 145

INLEIDING.

Opmerkingen naar aanleiding van de bestaande theorieën van het magnetisme.

De in de natuur voorkomende stoffen worden naar hunne magnetiese eigenschappen ingedeeld in drie groepen: ferromagnetiese, paramagnetiese en diamagnetiese stoffen. In dit proefschrift zal hoofdzakelik het ferromagnetisme worden beschouwd. Ter inleiding volgt een overzicht over de bestaande theorieën van het magnetisme.

Theorie van Weber.

Een molekulair-theoretiese beschouwing, waardoor zowel het paramagnetisme als het diamagnetisme wordt verklaard, is het eerst gegeven door WEBER [1]). Naar het voorbeeld van AMPÈRE neemt deze aan, dat in elk molekuul elektriese kringstromen voorkomen, die aanleiding geven tot een zeker molekulair magneties moment, en die daardoor het molekuul met een magneetje vergelijkbaar maken.

Men moet zich nu voorstellen dat, wanneer er geen uitwendig magneties veld aanwezig is, in para- en diamagnetiese lichamen de magnetiese assen der molekulen alle mogelike richtingen hebben, en dat om die reden van enige waarneembare magnetisatie geen sprake kan zijn. Brengt men echter een uitwendig magneties veld aan, dan komt in deze toestand verandering, en wel in verschillende zin naarmate de magnetiese assen der molekulen vaster of minder vast aan hunne richtingen gebonden zijn.

Denkt men zich deze assen onbeweeglik, dan zal het aanbrengen van een magneties veld gepaard gaan met induktie-verschijnselen

1) *Pogg. Ann.*, LXXXVII, 1852, S. 167.

in de molekulairstromen en dientengevolge aanleiding geven tot een magnetisatie, waarvan de richting aan die van het veld tegengesteld is. Het beschouwde lichaam is dan diamagneties.

Met paramagnetiese verschijnselen krijgt men te doen wanneer de magnetiese assen der molekulen hun richtingen min of meer kunnen veranderen. Onder invloed van een uitwendig veld zullen dan deze richtingen tot de veldrichting gaan naderen, en wanneer dit in voldoende mate het geval is zal een magnetisatie in de veldrichting moeten ontstaan.

Theorie van Maxwell.

De door WEBER gegeven beschouwingen zijn, voorzover ze op het paramagnetisme betrekking hadden, d. w. z. met verwaarlozing van de in de molekulairstromen optredende induktieverschijnselen, door MAXWELL [1]) mathematies ontwikkeld en uitgebreid tot een theorie, die ook van de hoofdverschijnselen van het ferromagnetisme rekenschap geeft. Door WEBER was aangenomen dat er voor de magnetiese as van elk molekuul slechts één richting is van stabiel evenwicht: neemt men met MAXWELL aan dat er verschillende van die richtingen zijn, dan komt men tot een mogelike verklaring van de voor ferromagnetiese lichamen kenmerkende magnetiese hysterese. Denkt men zich b.v. een lichaam, waarvan elk molekuul bij twee verschillende richtingen van de magnetiese as in stabiel evenwicht is, dan krijgt men, door in een of andere richting een voldoend sterk magneties veld aan te brengen, dat men vervolgens weer tot nul laat afnemen, een toestand, waarbij zonder uitwendig veld toch een merkbare magnetisatie aanwezig is: de magnetiese assen der molekulen zullen dan n.l. de evenwichtsstanden hebben opgezocht, waarbij hunne richtingen het minst afwijken van de richting waarin het veld heeft gewerkt.

Het model van Ewing.

De grondgedachte van de theorie van MAXWELL vindt men terug in een door J. A. EWING [2]) ontworpen molekulair model,

---

[1]) *Electricity and Magnetism*, Vol. II, § 443 en volgende.
[2]) *Phil. Mag.*, Vol. 30, 1890, p. 205.

dat in grote trekken dezelfde eigenschappen heeft als een ferromagneties lichaam. EWING denkt zich kleine konstante lijnmagneetjes in de ruimte gerangschikt in een kubies net. Hij onderstelt deze magneetjes vrij draaibaar om hunne centra, zodat op hunne rotaties alleen van invloed zijn de magnetiese krachten, die ze op elkaar uitoefenen, en een uitwendig magneties veld.

Denkt men zich nu door een sterk veld alle magneetjes gericht volgens één der hoofdrichtingen van het kubiese net, en laat men daarna dit veld tot nul afnemen, dan zullen de magnetiese assen de verkregen richting behouden: men krijgt op die manier weer een blijvende magnetisatie zonder uitwendig veld.

EWING heeft nu door berekening nagegaan welke de meest op de voorgrond tredende eigenschappen zijn van een aggregaat, dat bestaat uit een groot aantal van de beschouwde kubiese netten van magneetjes, en de resultaten vergeleken met de experimentele gegevens aangaande ijzer. Hij is daarbij tenslotte tot de konklusie gekomen, dat een behoorlike kwantitatieve overeenstemming niet te bereiken valt en heeft daarom enige tijd geleden [1]) z'n gehele model opgegeven en vervangen door een ander dat echter door z'n grote ingewikkeldheid en willekeurigheid weinigen zal kunnen bevredigen.

Het is me gebleken dat in de beschouwingen van EWING en van enige anderen [2]), die zich met dezelfde materie hebben beziggehouden, verschillende onjuistheden voorkomen. Het lag dus voor de hand het model aan een meer exakte mathematiese behandeling te onderwerpen en na te gaan of het inderdaad wel zo verwerpelik is als EWING zelf meent. In dit proefschrift zal worden aangetoond dat met een model als dat van EWING een zeer grote verscheidenheid van verschijnselen kan worden verklaard, en dat een dergelik model voor de verklaring van wat tegenwoordig aangaande het ferromagnetisme bekend is, voldoende kan worden geacht. De met de warmtebeweging samenhangende molekulaire rotaties zijn niet in aanmerking genomen, maar het vermoeden is gewettigd dat deze, zolang men met niet te hoge temperaturen te doen heeft, de verkregen resultaten niet principieel zouden hebben gewijzigd.

---

1) *Phil. Mag.*, Vol. 43, 1922, p. 493.

2) HONDA and OKUBO, *Sc. Rep. Tohoku Imp. Univ.*, N°. 3, 1916.
W. PEDDIE, *Edinburgh Proceedings*, 1905, 1907.

De theorieën van Langevin en Weiss.

LANGEVIN en WEISS hebben zich, op de basis der klassieke statistiese mechanica, beziggehouden met de theoretiese verklaring van de temperatuurafhankelikheid van de eigenschappen van para- en ferromagnetiese stoffen. Een theorie van het paramagnetisme is gegeven door LANGEVIN [1]). Evenals MAXWELL denkt deze zich een molekuul of atoom van een paramagnetiese stof als een vrijwel konstant magneetje: hij onderstelt echter de magneetjes volkomen vrij draaibaar om hunne centra en laat de magnetiese krachten, die ze op elkaar uitoefenen, buiten beschouwing. Werkt nu op een stof, die uit dergelike molekulen of atomen bestaat, een uitwendig magneties veld, dan zullen de magnetiese assen een neiging vertonen zich naar dat veld te richten. Dat ze zich niet volkomen richten komt doordat de warmtebeweging zich daartegen verzet.

Door LANGEVIN is nu de magnetisatie, die het lichaam tenslotte krijgt, bepaald als funktie van de veldsterkte en de temperatuur. Zijn resultaat is in behoorlijke overeenstemming met wat bij verschillende paramagnetiese stoffen is waargenomen: evenwel zijn ook afwijkingen, speciaal bij lage temperaturen, geen zeldzaamheden.

Op de basis van de theorie van LANGEVIN is door WEISS [2]) een theorie van het ferromagnetisme ontwikkeld. Deze theorie verschilt van die van LANGEVIN daarin, dat behalve met een uitwendig veld ook nog rekening wordt gehouden met de krachten, die de magneetjes op elkaar uitoefenen. Teneinde deze krachten in aanmerking te nemen vervangt WEISS in de door LANGEVIN gegeven formule de sterkte van het uitwendige veld door de resultante van dit veld en van een zogenaamd molekulair veld, dat hij voor elk magneetje evenredig stelt met de plaatselike magnetisatie. Hij geeft op deze wijze rekenschap van de mogelikheid van een blijvende magnetisatie zonder uitwendig veld, en krijgt wat betreft het verloop van deze spontane magnetisatie met de temperatuur in verschillende gevallen een bevredigende overeenstemming met de waarnemingen. Ook de

---

[1]) *Journ. de Physique*, IV, 1905, p. 678.

[2]) *Journ. de Physique*, VI, 1907, p. 661.
Physik. Zs., 1908, S. 358.

sprong, die de soortelike warmte van ijzer maakt bij het Curiepunt, d. i. de temperatuur (768° C.) waarboven geen spontane magnetisatie meer optreedt, wordt door de theorie van WEISS kwalitatief en kwantitatief verklaard. Echter heeft de theorie het bezwaar, dat het molekulaire veld van een stof als ijzer zo geweldig sterk zou moeten zijn, dat men onmogelik kan aannemen dat het van magnetiese aard is [1]). Ook de onderstelling dat het van elektriese oorsprong zou zijn is door WEISS om verschillende redenen verworpen: aan welke oorzaak het veld dan wel zou moeten worden toegeschreven laat hij echter geheel in het midden.

Een ernstiger bezwaar nog tegen de theorie is dat zij voor een stof als ijzer de voor omkering der spontane magnetisatie nodige magnetiese kracht zeker duizend maal te groot geeft. Men kan dus met het molekulaire veld de waargenomen verschijnselen zelfs niet bij benadering beschrijven, en de slotsom moet zijn, dat de theorie van WEISS om meer dan één reden onbevredigend is.

De moeilikheden, waarmee men in deze theorie te doen heeft, vinden alle hun oorsprong in het te sterke molekulaire veld, dat nodig is om de met de warmtebeweging samenhangende rotaties der magneetjes in toom te houden. Deze rotaties nu worden behandeld volgens de voorschriften der klassieke mechanica. Bij de studie van de soortelijke warmte der verschillende stoffen is echter sedert een aantal jaren gebleken, dat in werkelikheid deze rotaties een veel minder belangrijke rol spelen dan in de statistiese mechanica wordt aangenomen: bij eenatomige gassen kan men er geheel van afzien, en ook bij vaste stoffen worden ze door DEBYE [2]) en BORN en VON KARMAN [3]) niet in rekening gebracht. Het ligt dus voor de hand ook bij de beschouwing der (vaste) ferromagnetiese lichamen in eerste benadering van de warmterotaties af te zien en na te gaan of men op die wijze kan komen tot een behoorlike verklaring van de verschijnselen, die niet direkt met de temperatuur samenhangen.

Het is op grond van deze overweging dat bij de in dit proef-

---

[1]) *Arch. des Sciences*, XXXVII, 1913, p. 105, 201.
[2]) *Ann. der Physik*, XXXIX, 1912, S. 789.
[3]) *Physik. Zs.*, XIII, 1912, S. 1, en XIV, 1913, S. 15, 65.

schrift te geven beschouwingen over het ferromagnetisme met de invloed van de temperatuur op de verschijnselen geen rekening wordt gehouden. Meer in het biezonder zal gelet worden op het verband tussen de magnetiese eigenschappen en de door de RÖNTGEN-spektroskopie bekend geworden kristalstruktuur der voornaamste ferromagnetiese stoffen. Wat de wijze van behandeling aangaat moge hierbij worden opgemerkt dat in afdeling A (Hoofdstuk I—II) een aantal bekende theoretiese en experimenteele gegevens terwille van de volledigheid worden gerekapituleerd. In afdeling B (Hoofdstuk III—V) wordt op grond van een eenvoudige onderstelling een fenomenologiese theorie van het ferromagnetisme ontwikkeld: een zekere faktor Θ speelt in deze theorie een voorname rol, en in hoofdstuk V wordt voor een aantal ferromagnetiese stoffen de orde van grootte van deze faktor uit experimentele gegevens afgeleid. Afdeling C (Hoofdstuk VI—IX) geeft dan een atomistiese theorie van het ferromagnetisme, waarin een grootheid blijkt op te treden die in vele opzichten beantwoordt aan de in afdeling B ingevoerde faktor Θ. De waarden die deze grootheid bij modellen als dat van EWING in verschillende gevallen kan aannemen worden tenslotte vergeleken met de in hoofdstuk V voor Θ gevonden waarden.

AFDELING A.

De voornaamste gegevens over het ferromagnetisme.

HOOFDSTUK I.

Enige hoofdpunten uit de algemene theorie van het magnetisme.

§ 1. *De wet van Coulomb.*

De voor de theorie van het magnetisme fundamentele wet van COULOMB formuleren we als volgt: twee puntvormige magneetpolen, resp. van de sterkte m en m', stoten elkaar op afstand r af met een kracht van

$$K = \frac{mm'}{4\pi r^2} \text{ dynes} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 1)$$

De poolsterkten m en m' moeten daarbij gemeten worden in rationale eenheden.

§ 2. *De magnetiese kracht.*

In het algemeen moet men zich het magnetisme niet in punten gekoncentreerd denken, maar kontinu verdeeld over zekere volumina en oppervlakken. Onder de magnetiese kracht in een punt P verstaat men nu de kracht die door de in de ruimte aanwezige hoeveelheden magnetisme op een in P geplaatste eenheidspool zou worden uitgeoefend. Blijkbaar kan deze kracht **H**, bij gegeven verdeling van dit magnetisme, met behulp van de wet van COULOMB voor elk punt P worden berekend.

§ 3. *De verdeling van het magnetisme over de ruimte.*

Het experiment leert dat in alle magnetiese lichamen of delen van magnetiese lichamen de totale hoeveelheid magnetisme nul is. Denkt men zich nu de verdeling van een magneties lichaam voortgezet tot men gekomen is aan de samenstellende molekulen of atomen, dan ligt het voor de hand deze te beschouwen als elementairmagneetjes met tegengestelde poolladingen. Het lichaam wordt op die manier een aggregaat van elementairmagneetjes, en men krijgt het veld van het lichaam door de velden dezer magneetjes te superponeren.

§ 4. *De magnetiese potentiaal.*

Daar het door een gemagnetiseerd lichaam veroorzaakte veld bepaald wordt door de wet van COULOMB kan het met behulp van de formule

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 2)$$

worden afgeleid uit een potentiaal ψ. Zoals bekend verkrijgt men deze potentiaal door de bij de polen der elementairmagneetjes behorende potentialen bij elkaar te tellen.

Bevindt zich in een punt Q een lading van de sterkte m, dan veroorzaakt deze in een punt P op afstand r een magnetiese kracht in de richting QP van de grootte:

$$\mathbf{H} = \frac{m}{4\pi r^2}$$

De komponent $\mathbf{H}_n$ van deze kracht in de richting n, die met

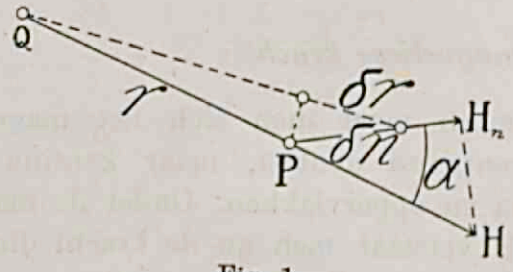

Fig. 1.

de veldrichting een hoek α insluit is blijkens fig. 1:

$$\mathbf{H}_n = \frac{m}{4\pi r^2} \cdot \cos\alpha = \frac{m}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{m}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{m}{4\pi r}\right).$$

Daar we hiervoor kunnen schrijven:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \frac{m}{4\pi r}$$

wordt de potentiaal van een enkele magneetpool gegeven door de formule:

$$\psi = \frac{m}{4\pi r}$$

Het is nu niet moeilijk de potentiaal te vinden van een elementair-magneetje. Dit veld wordt n.l. veroorzaakt door twee tegengesteld geladen polen, die een zekere afstand l van elkaar

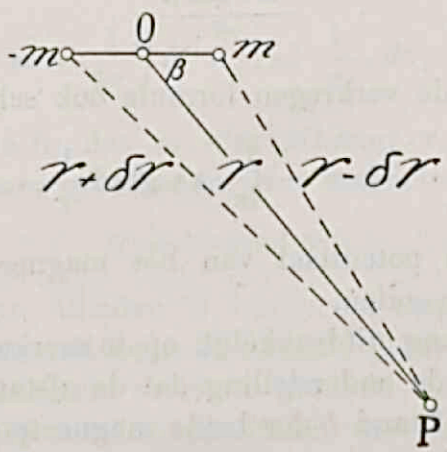

Fig. 2.

verwijderd zijn. Uit fig. 2 ziet men dat voor de potentiaal mag worden geschreven

$$\psi = \frac{m}{4\pi}\left(\frac{1}{r-\delta r} - \frac{1}{r+\delta r}\right),$$

hetgeen we, wanneer l klein is ten opzichte van r, kunnen benaderen door

$$\frac{m}{4\pi} \cdot \frac{2 \cdot \delta r}{r^2} \quad \text{of door} \quad \frac{ml}{4\pi} \cdot \frac{\cos\beta}{r^2},$$

waardoor we komen tot de formule:

$$\psi = \frac{ml}{4\pi} \cdot \frac{\cos\beta}{r^2}.$$

Onder het (magneties) moment λ van het magneetje verstaan we de vektor van de grootte $m\,l$, die de richting heeft van de uit de noordpool naar de zuidpool getrokken verbindingslijn. Door de uitdrukking

$$-\operatorname{grad}\frac{1}{r}$$

wordt verder aan elk punt P der ruimte toegevoegd een vektor van de grootte $\frac{1}{r^2}$ die de richting heeft van de verbindingslijn van het centrum van het magneetje met P. Daar het skalaire produkt van deze vektor met de vektor λ gelijk is aan

$$\frac{ml\,.\cos\beta}{r^2}$$

kunnen we voor de verkregen formule ook schrijven:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\,\lambda\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1,\,3)$$

waarmee voor de potentiaal van het magneetje een geschikte uitdrukking is gevonden.

Het is van belang uitdrukkelijk op te merken, dat de formule werd afgeleid in de onderstelling dat de afstand r groot is ten opzichte van de afstand l der beide magneetpolen. Zij is alleen streng wanneer de polen oneindig dicht bij elkaar liggen en een zogenaamde dipool vormen.

De potentiaal van het veld van een aggregaat van elementairmagneetjes vindt men door de potentialen der afzonderlike exemplaren bijeen te voegen. Men kan dus in het algemeen, met de aangewezen benadering natuurlik, schrijven:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi}\,\Sigma\left(\lambda\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (1,\,4)$$

§ 5. *De magnetisatie.*

Om met de verkregen formule de potentiaal ψ te bepalen van het door een gemagnetiseerd lichaam veroorzaakte veld zou men van alle samenstellende elementairmagneetjes de juiste plaats moeten kennen, en richting en grootte van het moment λ. Verder heeft deze potentiaal nog het bezwaar, dat

hij binnen het lichaam sterk en onregelmatig varieert en van de toestand daar een beeld geeft dat veel gekompliceerder is dan aan de waarneembare feiten beantwoordt. Men is daarom gewoon bij de diskussie van experimenten niet van elk der elementair-magneetjes afzonderlik het moment λ in aanmerking te nemen, maar dit moment kontinu over de magnetiese lichamen verdeeld te denken. Men kan dan in elk punt van het lichaam een vektor M aangeven, de z.g. magnetisatie, die voorstelt het magneties moment per volume-eenheid. Het totale moment der in een volume-element $d\tau$ aanwezige elementair-magneetjes moet men zich dan gegeven denken door het produkt $M \,.\, d\tau$.

Aan de hiermee gedefinieerde magnetisatie M beantwoordt een potentiaalfunktie

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int M \cdot \text{grad}\,\frac{1}{r}\cdot d\tau, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1,\ 5)$$

die op ψ vóór heeft, dat ze niet afhangt van voor de waarneming onbereikbare grootheden. Het magnetiese veld

$$H = -\,\text{grad}\,\Phi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1,\ 6)$$

dat men eruit kan afleiden is buiten de magnetiese lichamen vrijwel hetzelfde als het door de formule (1, 2) bepaalde veld **H**, en binnen die lichamen vertoont het een kontinuiteit, die in overeenstemming is met de resultaten der experimenteel uitvoerbare metingen.

§ 6. *De gebruikelike voorstelling van de magnetiese potentiaal en de magnetiese kracht als funkties van de magnetisatie.*

Sprekend van het veld van een lichaam met een zekere magnetisatie M bedoelt men in den regel het veld, dat men met behulp van de formule (1, 6) uit de potentiaalfunktie

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int M \cdot \text{grad}\,\frac{1}{r}\cdot d\tau$$

kan afleiden.

Voor deze uitdrukking kan, wanneer binnen de gemagnetiseerde lichamen de komponenten van M afgeleiden naar de ruimtekoordinaten bezitten, geschreven worden:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{M_n}{r} \cdot d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\text{div } M}{r} \cdot d\tau \,, \quad \ldots\ldots \quad (1, 7)$$

waarbij door $d\sigma$ worden voorgesteld de elementen van de grensoppervlakken der magnetiese lichamen, terwijl M_n de komponent volgens de naar buiten gerichte normaal n is van de magnetisatie aan die oppervlakken.

Door de formule (1, 7) te vergelijken met die voor de potentiaal ψ van een enkele pool van de strekte m ziet men dat men zich het veld van een magneties lichaam veroorzaakt kan denken door ladingen, die met een ruimtedichtheid — div M en een vlaktedichtheid M_n over die lichamen en hunne oppervlakken verdeeld zijn: de som dezer ladingen is, zoals verwacht moest worden, gelijk aan nul, en wel krachtens de bekende formule

$$\int \text{div } M \cdot d\tau = \int M_n \cdot d\sigma.$$

§ 7. *Differentiaalvergelijking en randvoorwaarde voor Φ. De magnetiese induktie.*

Uit de formule (1, 7) volgen direkt de differentiaalvergelijking

$$\text{div } M = \Delta\Phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 8)$$

en de randvoorwaarde

$$M_n = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_i - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_u \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 9)$$

welke laatste betrekking heeft op de grensvlakken der gemagnetiseerde lichamen. De indices i en u geven daarbij aan of bedoeld worden de differentiaal-quotienten binnen of buiten deze lichamen.

Uit de formule (1, 6) leiden we af:

$$(H_n)_i = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_i \,, \qquad (H_n)_u = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_u \,, \quad \text{en} \quad \text{div } H = -\Delta\Phi$$

zodat:

$$(M_n + H_n)_i - (H_n)_u = (M_n + H_n)_i - (M_n + H_n)_u = 0$$

en

$$\text{div } M + \text{div } H = \text{div } (M + H) = 0.$$

De vektor

$$B = M + H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 10)$$

invoerend heeft men dus:

$$(B_n)_i - (B_n)_u = 0 \qquad \text{en} \qquad \text{div } B = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1, 11)$$

Men noemt de vektor B de magnetiese induktie. Hij is van belang bij de bepaling van de elektriese krachten, die optreden wanneer van een of ander stelsel van lichaam de magnetiese toestand verandert.

§ 8. *Het veld van een ellipsoide met homogene magnetisatie.*

In het vervolg zal herhaaldelik nodig zijn de kennis van het veld van een ellipsoide met homogene magnetisatie. Het is daarom wenselik hier een paragraaf aan dit veld te wijden.

Laat a, b en c $(a > b > c)$ de halve assen zijn van een ellipsoide. Voor de vergelijking van het grensoppervlak kan men dan schrijven:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 12)$$

Laat verder M_x, M_y en M_z de volgens de koördinaatassen ontbonden komponenten zijn van de naar richting en grootte konstante magnetisatie M. Duiden we met φ_i aan de magnetiese potentiaal binnen, met φ_u die buiten de ellipsoide, dan volgt uit (1, 8) dat

$$\Delta\varphi_i = 0 \qquad \text{en} \qquad \Delta\varphi_u = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1, 13)$$

terwijl men uit (1, 5) gemakkelik kan afleiden dat in het oneindige φ nul moet worden, en dat aan het grensoppervlak der ellipsoide moet gelden de gelijkheid:

$$\varphi_i = \varphi_u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 14)$$

Volgens (1, 9) moet aan dit oppervlak bovendien voldaan zijn aan de gelijkheid

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_u}{\partial n} = M_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 15)$$

De funkties φ_i en φ_u die aan de gestelde voorwaarden vol-

doen worden gegeven door de formule (1, 7), die in dit speciale geval overgaat in:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{M_n}{r} \cdot d\sigma \ ,$$

waarbij de integraal genomen moet worden over het oppervlak van de ellipsoide. De direkte bepaling van deze integraal is echter nogal bezwaarlik, en men bereikt z'n doel gemakkeliker wanneer men uitgaat van enige oplossingen van de vergelijking van LAPLACE ($\Delta \Phi = 0$), die samenhangen met het bij de ellipsoide behorende stelsel van konfokale koördinaten.

Teneinde deze koördinaten te definieren merken we op dat de vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} - 1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1, 16)$$

voor elke waarde van Θ een tweedegraadsoppervlak voorstelt: de verschillende oppervlakken hebben alle dezelfde brandpunten en vormen dus een konfokaal stelsel. Door een gegeven punt P (x, y, z) gaan van dit stelsel drie oppervlakken: aan de gelijkheid (1, 16) wordt n.l. bij gegeven x, y, en z voldaan door drie reële waarden van θ. Deze waarden, λ, λ' en λ'', blijken steeds te voldoen aan de ongelijkheden:

$$\lambda > -c^2 > \lambda' > -b^2 > \lambda'' > -a^2$$

en zijn niet anders dan de konfokale koordinaten van het punt P. Ligt P op de gegeven ellipsoide, dan is blijkbaar $\lambda = 0$.

De potentiaalfunkties Φ_i en Φ_u, die men met behulp van deze koördinaten kan verkrijgen zijn nu:

$$\Phi_i = -x M_x \frac{abc}{2} \int_{\infty}^{0} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\Delta} - y M_y \frac{abc}{2} \int_{\infty}^{0} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\Delta} -$$

$$- z M_z \frac{abc}{2} \int_{\infty}^{0} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)\Delta}$$

en

$$\Phi_u = -x M_x \frac{abc}{2} \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\Delta} - y M_y \frac{abc}{2} \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\Delta} -$$

$$- z M_z \frac{abc}{2} \int_{\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)\Delta} , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1, 17)$$

waarin $\Delta = \sqrt{\{(a^2+\lambda)\ (b^2+\lambda)\ (c^2+\lambda)\}}$, en waaruit we de komponenten van de veldsterkte door differentiatie kunnen afleiden. Binnen de ellipsoide is het magnetiese veld blijkbaar homogeen en heeft men

$$H_x = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = -A\ M_x; \qquad H_y = -B\ M_y; \qquad H_z = -C\ M_z,$$

waarin

$$A = \frac{abc}{2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\,\Delta}, \text{ enz.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1, 18)$$

de ontmagnetiseringskoëfficiënten genoemd worden. Daar n.l. deze koëfficiënten positief zijn sluiten de vektoren M en H steeds een stompe hoek in en zijn dus min of meer tegengesteld gericht.

Wij zullen aantonen, dat de som der ontmagnetiseringskoëfficiënten 1 is. Men heeft:

$$A+B+C = \frac{abc}{2}\int_0^\infty \frac{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)+(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)+(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}{\Delta^3}\cdot d\lambda =$$

$$= \frac{abc}{2}\int_0^\infty \frac{3\lambda^2+2\lambda(a^2+b^2+c^2)+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{\Delta^3}\cdot d\lambda = \frac{abc}{2}\int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}\Delta^2 \cdot \frac{d\lambda}{\Delta^3} =$$

$$= abc\int_0^\infty \frac{d\Delta}{\Delta^2} = -abc\cdot\{\Delta^{-1}\}_0^\infty = 1,$$

waarmee het gestelde bewezen is:

$$A+B+C=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 19)$$

Bij een langgerekte omwentelingsellipsoide moet men nemen $b=c$ en heeft men dus:

$$A = \frac{ab^2}{2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)^3\cdot(b^2+\lambda)}}.$$

Door hierin de substitutie $\sqrt{(a^2+\lambda)} = z$ uit te voeren en voor c^2 te schrijven:

$$c^2 = a^2(1-e^2)\ ,$$

waarin e de excentriciteit voorstelt vindt men:

$$A = a^3(1-e^2)\int_0^\infty \frac{dz}{z^2(z^2-a^2e^2)} = \frac{1-e^2}{e^2}\left(\frac{1}{2e}\cdot \lg\frac{1+e}{1-e}-1\right) \quad (1, 20)$$

terwijl de koëfficiënten B en C gegeven worden door de formule

$$B = C = \frac{1 - A}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 20a)$$

Heeft men te doen met een afgeplatte omwentelingsellipsoide, dan heeft men te stellen $a = b$ en krijgt men

$$C = \frac{a^2 c}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(c^2 + \lambda)^3 \cdot (a^2 + \lambda)}}.$$

Door de substitutie $\sqrt{(c^2 + \lambda)} = z$ te verrichten en de excentriciteit in te voeren vindt men hieruit

$$C = a^3 \sqrt{(1 - e^2)} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2(a^2 e^2 + z^2)} = \frac{1}{e^2}\left(1 - \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{e} \arcsin e\right) \quad (1, 21)$$

terwijl de koëfficiënten A en B gevonden kunnen worden uit de formule:

$$A = B = \frac{1 - C}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1, 21a)$$

In de gevonden formules worden de ontmagnetiseringskoëffi-

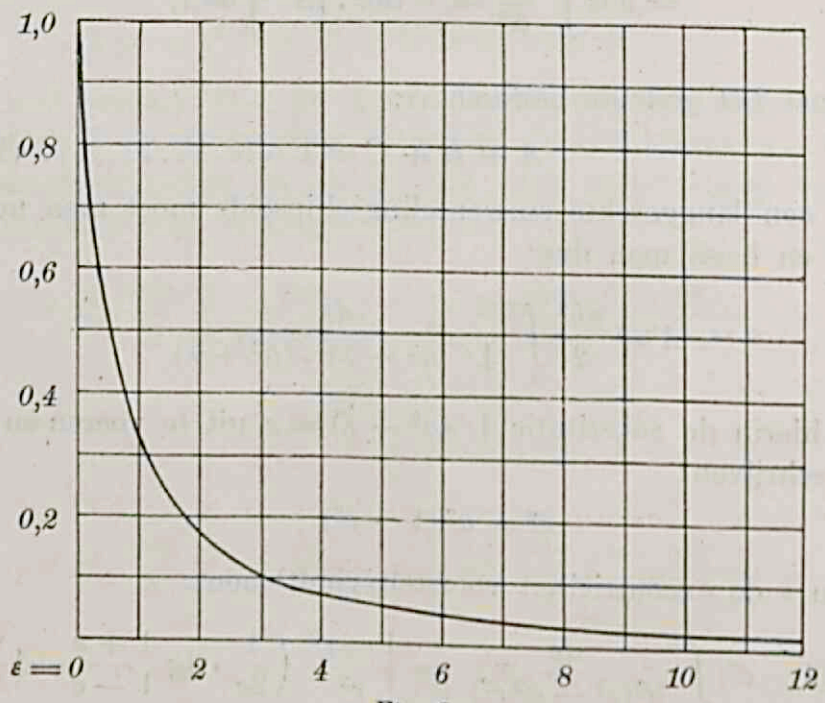

Fig. 3.

ciënten volgens de assen der beschouwde omwentelingsellipsoiden uitgedrukt als funkties van de excentriciteit. Men kan ze natuurlik ook uitdrukken als funkties van de verhouding ε van de assen loodrecht op de omwentelingsas tot die as zelf. In de grafiese voorstelling van fig. 3 vindt men de ontmagnetiseringskoëfficiënt als funktie van deze laatste grootheid.

§ 9. *Het magneties veld van stationnaire elektriese stromen.*

Het magneties veld van een stationnaire stroom kan men bepalen met behulp van de bekende wet van BIOT en SAVART. Past men deze wet toe op een lange solenoide, dan blijkt binnen deze solenoide een vrijwel homogeen veld te bestaan. In hoeverre de veldsterkte H in een op de as gelegen punt P afhangt van de openingshoeken α_1 en α_2 (zie fig. 4) kan men gemakkelik aflezen uit de formule:

$$H = \frac{j}{2c}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2),$$

waaruit tevens blijkt dat deze veldsterkte des te meer nadert

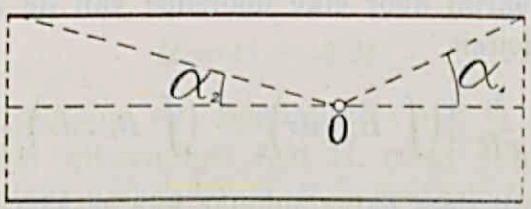

Fig. 4.

tot het bedrag $j:c$ naarmate de solenoide langer is: met j wordt bedoeld de z.g. stroom per cM., en met c de lichtsnelheid. Wat de richting van H betreft kan gezegd worden dat deze past bij die van de stroom. Daar de veldsterkte binnen een lange solenoide alleen afhangt van de stroom per cM. kan zij langs elektriese weg, b.v door elektrolyse, gemeten worden. Blijkbaar is zulk een solenoide een geschikt middel om een homogeen en konstant magneties veld op te wekken.

§ 10. *Elektriese stromen als gevolg van veranderingen in een magneties veld.*

Laat gegeven zijn een stroomkring zonder eigen elektromotoriese krachten, en laat $d\sigma$ een element zijn van een oppervlak Σ,

dat deze kring tot rand heeft. De door c gedeelde afgeleide naar de tijd

$$\frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} B_n \cdot d\sigma$$

van het aantal door de kring omvatte magnetiese induktielijnen speelt dan de rol van een elektromotoriese kracht en men heeft, als i en R de in rationale eenheden uitgedrukte stroomsterkte en weerstand in de keten zijn:

$$i\,R = -\frac{1}{c}\,\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} B_n \cdot d\sigma \quad \text{en dus} \quad i\,dt = -\frac{1}{cR}\,d\int_{\Sigma} B_n \cdot d\sigma\,,$$

waarbij het minteken aanduidt dat de stroom niet past bij de richting waarin het aantal induktielijnen toeneemt. Neemt dus in zeker tijdsverloop het aantal door de stroomkring omvatte induktielijnen toe van

$$\left(\int B_n \cdot d\sigma\right)_1 \quad \text{tot} \quad \left(\int B_n \cdot d\sigma\right)_2,$$

dan stroomt daarbij door elke doorsnee van de kring een hoeveelheid elektriciteit

$$h = -\frac{1}{cR}\left\{\left(\int B_n \cdot d\sigma\right)_2 - \left(\int B_n \cdot d\sigma\right)_1\right\}, \quad \ldots\ (1, 22)$$

die met een ballistiese galvanometer kan worden gemeten.

HOOFDSTUK II.

Experimenteele methoden en gegevens.

§ 1. *De ontmagnetiserende kracht in ellipsoiden en staven.*

Laat een omwentelingsellipsoide geplaatst zijn in een magneties veld van de sterkte H, dat de richting heeft van de omwentelingsas, en neem aan dat in diezelfde richting een (positieve of negatieve) magnetisatie M bestaat. De veldsterkte H binnen de ellipsoide vindt men dan door H te verminderen met de ontmagnetiserende kracht $A\,M$; A is hierin de ontmagniseringskoëfficiënt van de ellipsoide volgens de omwentelingsas. Dus:

$$H = \mathrm{H} - A\,M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2, 1)$$

Men is nu gewoon de magnetisatie niet te beschouwen als funktie van het uitwendige veld H, maar van het inwendige veld H, omdat het verband met H in veel mindere mate afhangt van de gedaante der ellipsoide. Zelfs wordt in vele gevallen aangenomen dat de gedaante van de ellipsoide op dit verband in het geheel geen invloed heeft [1]). Echter zal in het vervolg blijken dat deze opvatting noch door de experimentele gegevens, noch door theoretiese overwegingen gerechtvaardigd wordt.

Om uit een door het experiment gegeven M-H-kromme de korresponderende M-H-kromme af te leiden kan men gebruik maken van een door RAYLEIGH aangegeven konstruktie. Trekt men in een M-H-diagram door de oorsprong de rechte met richtingskoëfficiënt A^{-1} (zie fig. 5), dan beantwoordt aan een punt P met abscis $\mathrm{PR} = \mathrm{H}$ en ordinaat $\mathrm{PQ} = M$ een ontmagnetiserende kracht $A\,M$, die gegeven wordt door de lengte van RS. Dus wordt de inwendige veldsterkte $H = \mathrm{H} - A\,M$

[1]) F. AUERBACH, *Moderne Magnetik*, Leipzig 1921, § 38.

voorgesteld door de lengte van SP en krijgt men uit een uit punten P bestaande M-H-kromme de korresponderende, uit punten P' bestaande, M-H-kromme door de afstanden PP' gelijk te maken aan de afstanden SR, die aan de punten P beantwoorden.

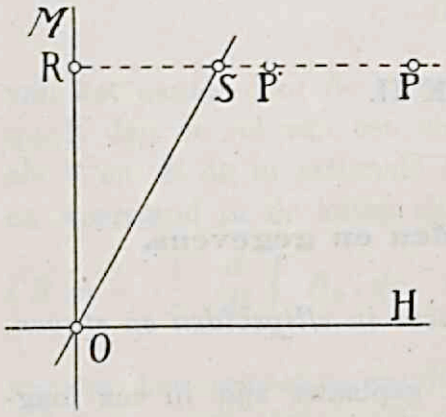

Fig. 5.

Een homogeen gemagnetiseerde staaf geeft, in tegenstelling met een ellipsoide, een inhomogeen ontmagnetiserend veld: strikt genomen kan daar dus van een bepaalde ontmagnetiseringskoëfficiënt geen sprake zijn. Wanneer echter de staaf lang genoeg is is de inhomogeniteit van ondergeschikt belang en kan men, door het ontmagnetiserende veld met behulp van een geschikt gekozen koëfficiënt te benaderen, eenzelfde behandelingswijze toepassen als bij een ellipsoide.

§ 2. *De magnetometer-methode en de ballistiese methode.*

De voornaamste methoden ter bepaling van de magnetisatie van staven en, eventueel, langgerekte ellipsoiden zijn de magnetometer-methode en de ballistiese methode. Zoals bekend wordt met de magnetometer de veldsterkte ter plaatse van een gesuspendeerde magneetnaald vergeleken met de sterkte van een bekend richtveld. Met de ballistiese methode daarentegen meet men veranderingen van het aantal induktielijnen, dat door een elektriese keten wordt omvat: het is de in de formule (1, 22) voorkomende grootheid h, die met een ballistiese galvanometer gemeten wordt.

Zowel in de magnetometriese als in de ballistiese methode kunnen talrijke variaties worden aangebracht. Naast deze twee zijn er nog andere, minder direkte methoden ter bepaling van M, die men behandeld vindt in verschillende leerboeken [1]).

---

1) B.v. F. Auerbach, *Moderne Magnetik.*

§ 3. *De magnetisatie van ijzer, staal, nikkel en kobalt.*

De experimentele gegevens over de magnetisatie van deze stoffen zijn voor een groot deel vastgelegd in een aantal krommen, waarin M en H als ordinaten en abscissen zijn uitgezet. In de meeste gevallen hebben deze krommen betrekking op staven en ellipsoiden waarop men, uitgaande van de normale, niet-magnetiese toestand, een steeds sterker worden veld H laat werken in de richting van de as. Na de sterkte van dit veld zo hoog mogelik te hebben opgevoerd laat men het langzaam tot nul afnemen en vervolgens zo sterk mogelik negatief worden,

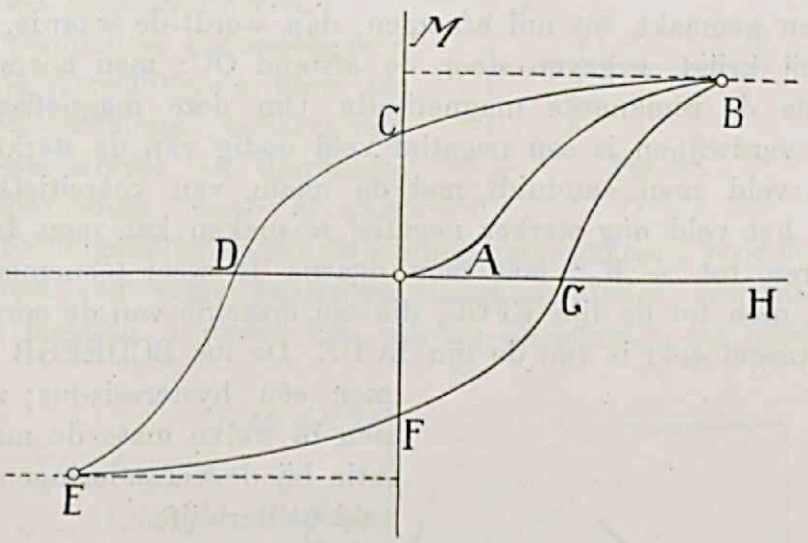

Fig. 6.

om het ten slotte weer zo veel mogelik te doen toenemen. Brengt men het verband, dat bij zulk een proces tussen M en H bestaat, in diagram, dan krijgt men een kromme van het type als in fig. 6 wordt weergegeven, en door op deze kromme de konstrukte van RAYLEIGH toe te passen komt men tot een M-H-kromme, die in hoofdtrekken hetzelfde uiterlik heeft, maar in kwantitatief opzicht minder van de gedaante van de ellipsoide of van de staaf afhankelik is. Een kromme als in fig. 6 is aangegeven wordt bij het beschreven proces doorlopen in de zin OABCDEFGB.

Zoals uit deze figuur blijkt neemt M eerst evenredig met H toe, om vervolgens sneller en daarna weer langzamer toe te nemen. Tenslotte nadert M bij het toenemen van H asymptoties

tot de verzadigingsmagnetisatie M_0. In vele gevallen beschouwt men de gedaante der „aanloopkromme" OAB als het meest karakteristieke van een ferromagnetiese stof: naarmate het begin dezer kromme steiler is noemt men dan de stof sterker ferromagneties.

Zolang M en H evenredig zijn is het magnetiseringsproces omkeerbaar: de faktor $\varkappa = M : H$ is de zogenaamde initiaalsusceptibiliteit. Heeft H eenmaal een zekere waarde overschreden, en laat men daarna deze grootheid weer tot nul afnemen, dan neemt M daarbij niet tot nul af, maar houdt een zekere positieve waarde

Laat men nu het veld H, na het eerst zo sterk mogelik te hebben gemaakt, tot nul afnemen, dan wordt de waarde, die M daarbij krijgt, gegeven door de afstand OC: men noemt deze waarde de remanente magnetisatie. Om deze magnetisatie te doen verdwijnen is een negatief veld nodig van de sterkte OD, welk veld men aanduidt met de naam van koërcitiefkracht. Door het veld nog sterker negatief te maken kan men M laten naderen tot $-M_0$; laat men daarna H weer toenemen, dan komt men tot de lijn EFGC, die ten opzichte van de oorsprong het spiegelbeeld is van de lijn BCDE. De lus BCDEFGB noemt men een hysteresis-lus; zij laat zien in welke mate de magnetisatie bij de veranderingen in het veld achterblijft.

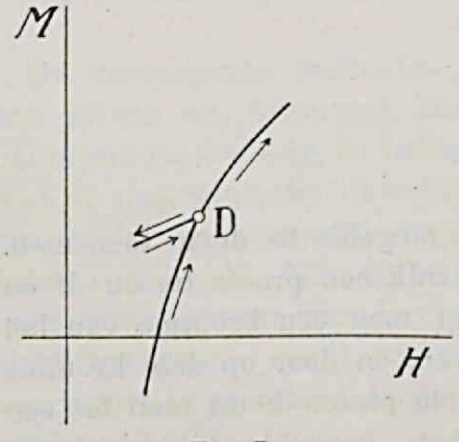

Fig. 7.

Men kan de staaf in z'n normale toestand terugbrengen door H tussen steeds nauwer wordende grenzen te laten oscilleren; men krijgt op die wijze een reeks van steeds kleiner wordende hysteresislussen, die tenslotte in de oorsprong worden samengeknepen.

In fig. 7 stelt de dikgetrokken lijn een deel van een M-H-kromme voor, dat men zou verkrijgen wanneer H gestadig toenam. Laat men echter, in het punt D gekomen, deze veldsterkte met een klein bedrag ε afnemen, om haar vervolgens weer te laten toenemen, dan heeft men, wanneer ε klein genoeg is, te doen met een omkeerbaar proces. Neemt men ε wat

groter, dan is dit niet meer het geval en krijgt men bij D een lusje (fig. 8).

De figuren 9—12 geven hysteresiskrommen voor draden van week en gehard ijzer, voor een zeer harde straaldraad, een nikkeldraad, en een stang van kobalt. Al deze krommen zijn ontleend aan het werk van EWING: „Magnetic induction in iron and other metals, New York 1894", maar op een schaal van rationale eenheden getransformeerd.

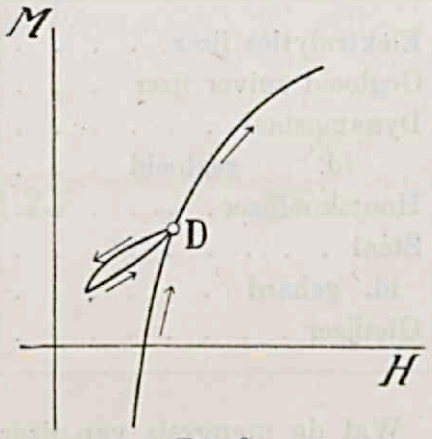

Fig. 8.

De magnetiese eigenschappen van de verschillende ijzer- en staalsoorten hangen, behalve van hun mechaniese en thermiese voorbehandeling, sterk af van hun koolstofgehalte, en zijn bovendien zeer gevoelig voor de aanwezigheid van enige procenten mangaan, nikkel, wolfraam, en andere metalen. Intussen kan worden opgemerkt, dat alleen bij

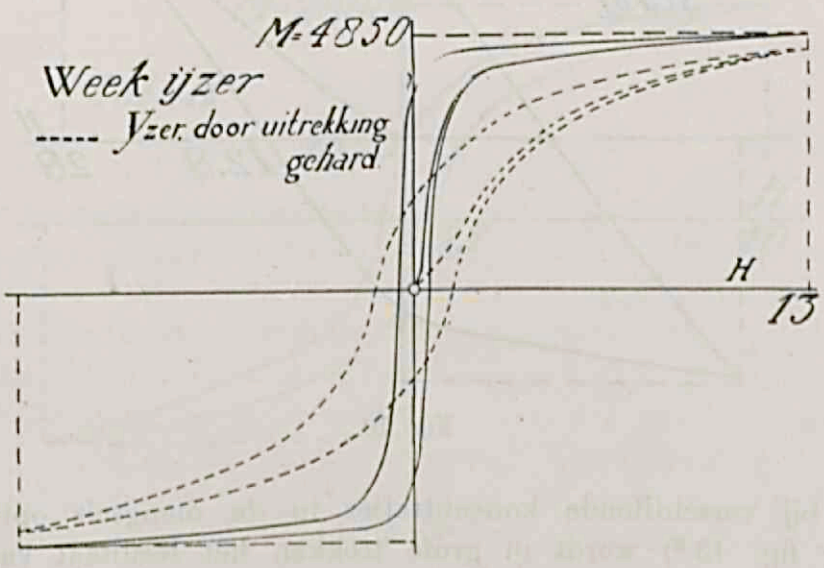

Fig. 9.

gietijzer de verzadigingsmagnetisatie zeer sterk afwijkt van de 5500 rationale eenheden. Verder gaat dikwijls een grote koërcitiefkracht gepaard met een kleine remanente magnetisatie.

Enige nadere gegevens kunnen nog worden afgelezen uit de volgende tabel: [1])

	Verzadigings-magnetisatie.	Remanente magnetisatie.	Koërcitief-kracht.
Elektrolyties ijzer	6100	3230	0,795
Gegloeid zuiver ijzer . . .	—	3460	0,73
Dynamostaal	6070	2850	0,41
id. gegloeid . . .	6000	3120	0,12
Houtskoolijzer	5980	3150	0,30
Staal	5590	3660	4,7
id. gehard	5030	2100	14,8
Gietijzer	4640	1440	3,2

Wat de mengsels van ijzer en koolstof betreft heeft men door mikroskopies onderzoek kunnen nagaan in welke vorm de kool-

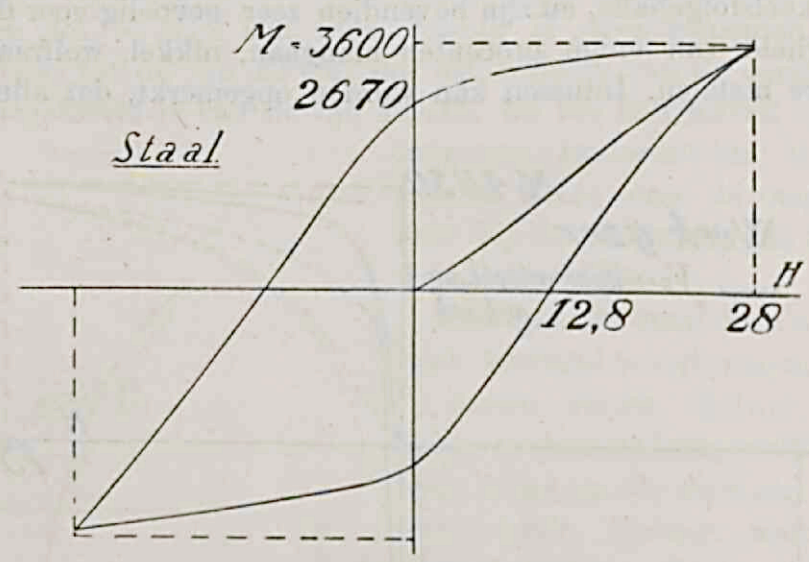

Fig. 10.

stof bij verschillende koncentraties in de mengsels optreedt. Door fig. 13 [2]) wordt in grote trekken het resultaat van dit onderzoek aangegeven.

---

[1]) Ontleend aan *Müller—Pouillet's Lehrbuch der Physik*, Braunschweig 1914, Bd. IV, S. 733.

[2]) Ontleend aan F. Auerbach's *Moderne Magnetik*, S. 75.

Voorts moet vermeld worden, dat met behulp der RÖNTGEN-spektroskopie is uitgemaakt, dat ijzer kristalliseert in een gecen-

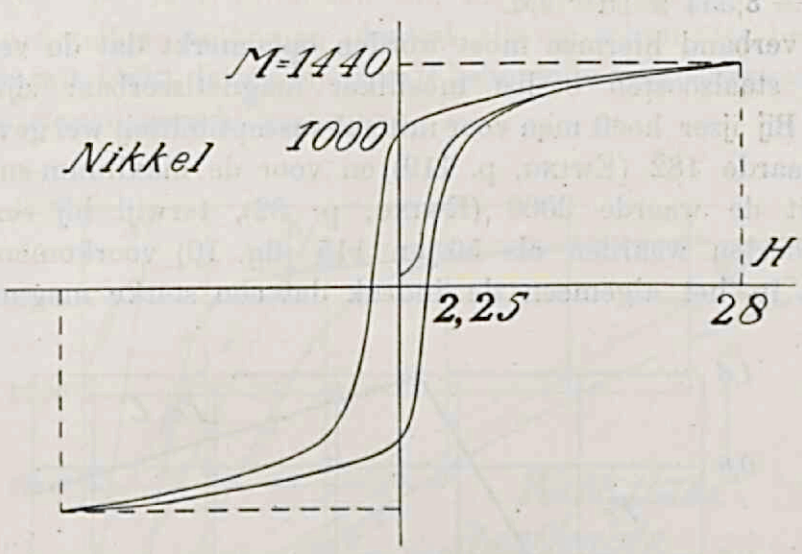

Fig. 11.

treerd kubies net met netkonstante $d = 2{,}83 \times 10^{-8}$ cM. [1]). Bovendien is door WESTGREN onderzocht de kristalstruktuur van

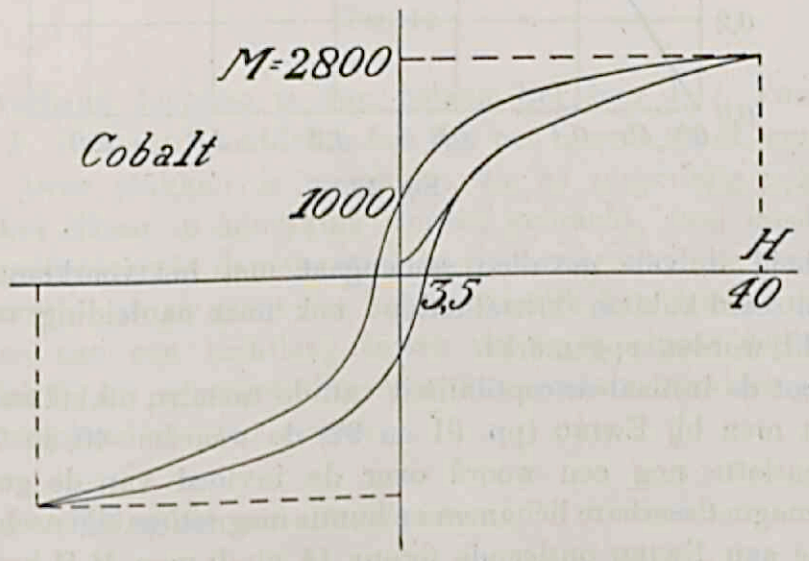

Fig. 12.

nikkelstaal en van mangaanstaal: in beide gevallen werden vlak-gecentreerd-kubiese netten gevonden, en wel met netkonstanten $d = 3{,}58 \times 10^{-8}$ cM. en $d = 3{,}61 \times 10^{-8}$ cM.

---

[1]) *Engineering*, 111, 1921, p. 727.

Bij de metalen nikkel en kobalt zijn door HULL [1]) gevonden vlak-gecentreerd-kubiese netten, resp. met $d = 3{,}540 \times 10^{-8}$ cM. en $d = 3{,}554 \times 10^{-8}$ cM.

In verband hiermee moet worden opgemerkt dat de verschillende staalsoorten beslist moeiliker magnetiseerbaar zijn dan ijzer. Bij ijzer heeft men voor initiaal-susceptibiliteit wel gevonden de waarde 182 (EWING, p. 119) en voor de maximum-susceptibiliteit de waarde 3000 (EWING, p. 82), terwijl bij sommige staalsoorten waarden als 50 en 115 (fig. 10) voorkomen. Men krijgt in het algemeen de indruk dat een sterke magnetiseer-

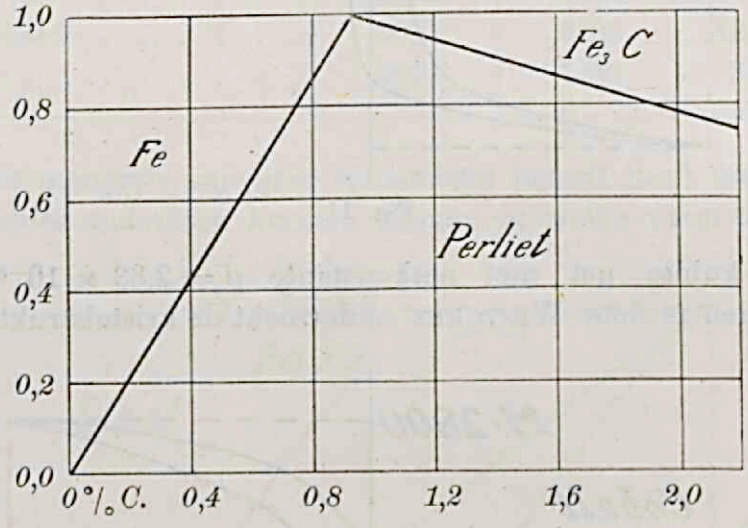

Fig. 13.

baarheid in vele gevallen samengaat met het voorkomen van gecentreerd-kubiese kristalnetten: ook naar aanleiding van § 6 zal dit worden opgemerkt.

Voor de initiaal-susceptibiliteit van de metalen nikkel en kobalt vindt men bij EWING (pp. 91 en 92) de waarden 40 en 75.

Tenslotte nog een woord over de invloed van de gedaante van magnetiseerbare lichamen op hunne magnetiese eigenschappen. In de aan EWING ontleende figuur 14 vindt men M-H-krommen (M uitgezet als funktie van het *uitwendige* veld H), betrekking hebbende op een weekijzeren staaf met een lengte van 200 maal de middellijn, van de helft van diezelfde staaf, en van het vierde deel ervan. Om M te vinden als funktie van het inwen-

---

[1]) *Phys. Review*, XVII, 1921, p. 571.

dige veld H moet men de konstruktie van RAYLEIGH toepassen: met het oog hierop zijn door de oorsprong de OA, OB en OC getrokken. De M-H-krommen die men verkrijgt zijn in grote trekken dezelfde: volkomen identiek zijn ze echter niet, hetgeen b.v. daaruit blijkt dat de bij $H = 0$ behorende magnetisaties voor de drie staven verschillend zijn.

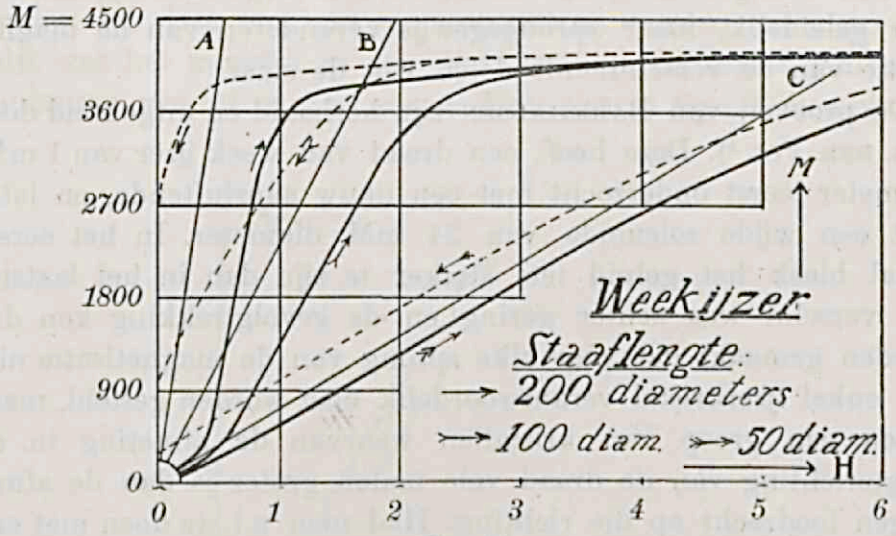

Fig. 14.

In verband hiermee is van belang het door J. J. THOMSON en H. F. NEWALL [1]) ontdekte feit dat een ijzeren staaf, wanneer hij in twee stukken is gesneden, die na zorgvuldig polijsten weer met elkaar in aanraking worden gebracht, veel moeiliker te magnetiseeren is dan de staaf in z'n oorspronkelijke toestand. Het verschil is zo groot dat het bezwaarlik kan worden toegeschreven aan een luchtlaag tussen de tegen elkaar geplaatste uiteinden [2]), en er moet dus naar een andere verklaring van het verschijnsel worden gezocht.

§ 4. *Het effekt van Barkhausen.*

Met behulp van de in de draadloze telegrafie gebruikelike trioden-versterkers is door BARKHAUSEN [3]) een verschijnsel ge-

---

1) *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1887.
2) cf. EWING, *Magn. Ind.*, p. 277.
3) *Physik. Zs.*, 1919, S. 401.

vonden dat enig inzicht geeft in het mechanisme van het magnetiseringsproces. Een ijzeren staaf werd daartoe door hem geplaatst in een kleine solenoide, die met een triode-versterker verbonden was. Wanneer nu een kleine permanente magneet geleidelik in de nabijheid van de staaf werd gebracht kon in een met de versterker verbonden telefoon een ritselend geluid worden waargenomen, dat moest worden toegeschreven aan een niet geleidelik, maar sprongsgewijs veranderen van de magnetisatie van de verschillende delen van de staaf.

De proeven van BARKHAUSEN zijn herhaald en uitgebreid door VAN DER POL [1]). Deze heeft een draad van week ijzer van 1 mM. diameter eerst onderzocht met een nauw aansluitende, en later met een wijde solenoide van 24 mM. diameter. In het eerste geval bleek het geluid iets sterker te zijn dan in het laatste; het verschil was echter gering en de gevolgtrekking kon dus worden gemaakt dat voor elke sprong van de magnetisatie niet een enkel ijzerkristal verantwoordelik mag worden gesteld, maar alleen een groep van kristallen waarvan de afmeting in de lengterichting van de draad vele malen groter is dan de afmetingen loodrecht op die richting. Had men n.l. te doen met een enkel kristal met in alle richtingen ongeveer dezelfde afmetingen, dan zouden de van dit kristal uitgaande induktielijnen zeker geheel binnen de wijde solenoide moeten verlopen en dus geen stroomstoot kunnen opwekken.

Wordt de permanente magneet verwijderd, dan neemt de magnetisatie van de staaf af, hetgeen met het bekende geluid in de telefoon gepaard gaat. Dit geluid wordt wederom hoorbaar wanneer men langs mechaniese weg, b. v. door de draad enige malen te rekken, de nog overgebleven remanente magnetisatie doet verdwijnen. Is deze eenmaal verdwenen, dan treedt bij verder rekken het geluid niet meer op.

Echter krijgt men het geluid weer te horen wanneer men de draad heen en weer buigt: ook een niet te voren gemagnetiseerde draad geeft trouwens bij ombuigen het geluid, en het gelukt niet door herhaald ombuigen de intensiteit ervan te doen afnemen. Men mag dus de konklusie trekken, dat ook in de niet-magnetiese toestand enige kristallen of kristalgroepen ge-

---

1) *Versl. K. A. W. Amsterdam*, Deel XXIX, 1920.

magnetiseerd zijn, en dat men deze magnetisatie door buigen veel meer dan door rekken kan beinvloeden.

Minder intens dan bij ijzer, maar overigens op dezelfde wijze, treedt het geluid op bij kobalt. Nikkel gedraagt zich anders: bij dit metaal hoort men niet zozeer een geritsel als wel een aantal gescheiden tikken. Het meest intense geluid werd waargenomen bij een draad van nikkelstaal: de optredende induktiestoten konden bij deze stof ook galvanometries worden geregistreerd. Zelfs was het mogelik in een M-H-kromme de aard der diskontinuiteiten van M aan te geven. Men ziet in fig. 15 hoe bij het

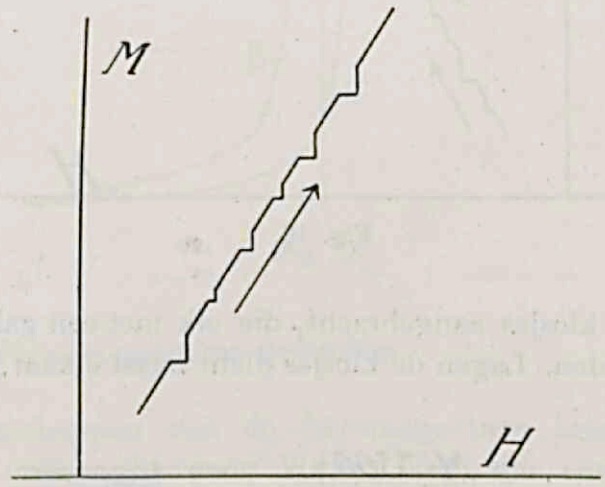

Fig. 15.

toenemen van H de magnetisatie telkens enige tijd konstant blijft om dan plotseling eerst met een sprong en daarna geleidelik toe te nemen, en ten slotte weer enige tijd konstant te blijven. Uit de volgende figuur ziet men dat, wanneer H eerst is toegenomen, en vervolgens een weinig afneemt om daarna nogmaals toe te nemen, de magnetisatie in het tweemaal doorlopen stuk der magnetisatiekromme geen sprongen vertoont.

Uit de grootte der galvanometeruitslagen en het aantal optredende sprongen kon als voorlopig resultaat worden afgeleid dat bij nikkelstaal de diameter der langgerekte kristalgroepen moet zijn van de orde van 0,05 mM.

In de figuren 17 en 18, resp. voorstellende hysteresis-lussen van de genoemde draad van nikkelstaal en van een ijzerdraad zijn de intervallen AB en CD aangegeven, waar diskontinuiteiten optreden.

Teneinde een idee te krijgen van de lengte van de groepen van kristallen, die gelijktijdig hun magnetisatie veranderen, zijn door VAN DER POL om de draad van nikkelstaal twee kleine

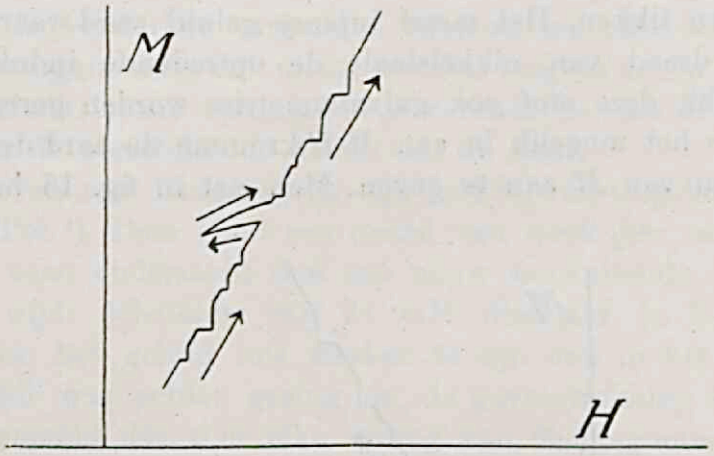

Fig. 16.

verschuifbare klosjes aangebracht, die elk met een galvanometer waren verbonden. Lagen de klosjes dicht naast elkaar, dan gaven

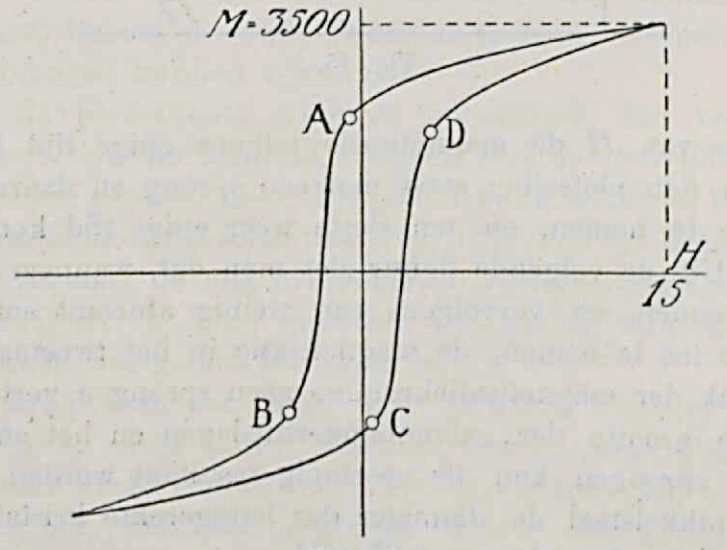

Fig. 17.

natuurlik de beide galvanometers dezelfde diskontinuiten aan. Men kon echter de grootste sprongen ook dan nog in beide galvanometers gelijktijdig waarnemen wanneer de klosjes ± 7 cM.

uit elkaar lagen. Dus moeten de grootste groepen zeker 7 cM. lang zijn geweest.

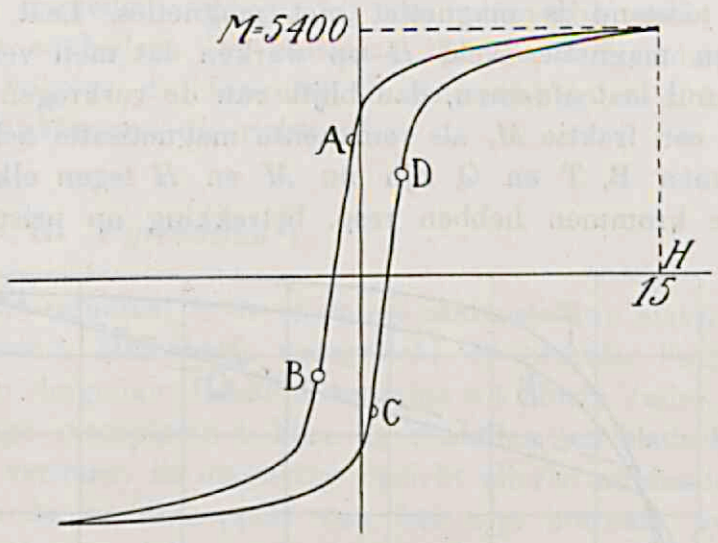

Fig. 18.

§ 5. *Ferromagnetiese kristallen.*

De eigenschappen van de ferromagnetiese kristallen zijn in hoofdzaak onderzocht door Weiss. Van zijn resultaten geven we een korte samenvatting.

I. *Magnetiet* [1]).

Dit mineraal (Fe_3O_4) komt in betrekkelijk grote kristallen (oktaeders en dodekaeders) in de natuur voor. Weiss heeft geexperimenteerd met prisma's en met platte schijfjes.

a. Proeven met prisma's. Uit drie prisma's werd een enkel langgerekt prisma gevormd, dat geklemd werd tussen twee magnetiseerbare weekijzeren staven. Het middelste der drie prisma's werd dan volgens de ballistiese methode onderzocht. Het uitwendige veld H had de richting van de as van dit prisma, en daar voor deze as steeds een symmetrieas van het kristal werd genomen kon verwacht worden dat de magnetisatie deze zelfde richting zou hebben. Van de ontmagnetiserende

---

[1]) *Journ. de Physique*, 3e série, tome V, 1896, p. 435.

kracht kon dan worden afgezien, en H kon met het inwendige veld H worden geïdentificeerd.

De resultaten der metingen zijn in fig. 19 samengevat. In de normale toestand is magnetiet niet magneties. Laat men er echter een magneties veld H op werken dat men vervolgens weer tot nul laat afnemen, dan blijft van de verkregen magnetisatie M een fraktie M_r als remanente magnetisatie achter. In de krommen B, T en Q zijn nu M en H tegen elkaar uitgezet; de krommen hebben resp. betrekking op prisma's die

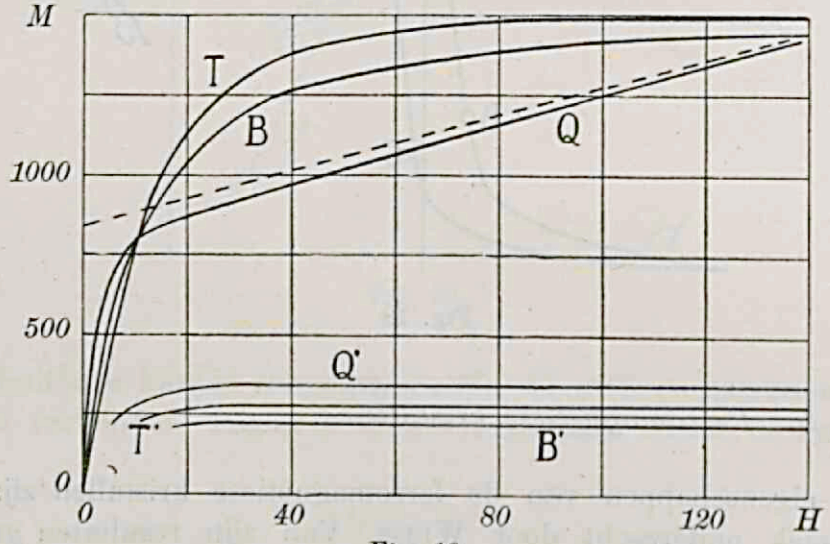

Fig. 19.

gesneden zijn volgens een binaire, een ternaire en een quaternaire as. De krommen B′, T′ en Q′ geven voor die gevallen het verband aan tussen H en M_r.

Opmerkelik is dat de kromme Q geen horizontale, maar een enigszins hellende asymptoot schijnt te hebben

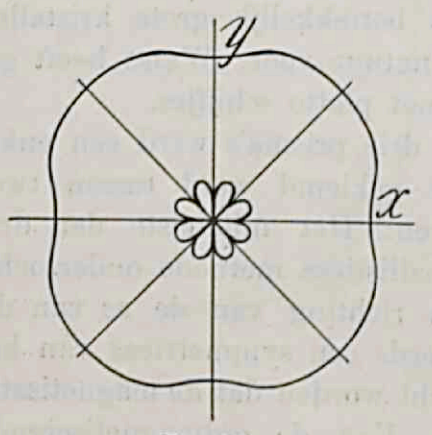

Fig. 20.

b. Proeven met schijfjes. Zes schijfjes werden onderzocht, alle van 20 mM. diameter en 0,3 mM. dikte: twee gesneden volgens kubusvlakken, twee volgens dodekaedervlakken, en twee volgens oktaedervlakken. De schijfjes werden om hun omwentelingsassen rondgedraaid in een konstant veld H loodrecht op die

assen; in verschillende standen werden daarbij de komponenten van M volgens en loodrecht op de veldrichting ballisties gemeten. Fig. 20 geeft de resultaten voor een volgens kubusvlakken gesneden schijfje, bij een uitwendig veld van 100 rationale eenheden. De buitenste lijn geeft de komponenten van M volgens, de binnenste die loodrecht op de richting van H, als funktie van die richting.

II. *Pyrrhotine* [1]).

Van dit mineraal is de chemiese samenstelling niet met zekerheid bekend. Men heeft voorgesteld de formules Fe_7S_8, Fe_8S_9, Fe_9S_{10} en dergelike. Behalve sommige uit Morro Velho (Brazilië) afkomstige exemplaren hebben de kristallen een bladerige struktuur en vertonen in magneties opzicht allerlei anomalieën.

Alleen de eigenschappen van het z. g. normale pyrrhotine zullen hier besproken worden. De op deze eigenschappen betrekking hebbende proeven werden genomen volgens de ballistiese methode, en ook door meting van de grootte der koppels, die in bepaalde omstandigheden op uit de kristallen gesneden schijfjes en bolletjes werden uitgeoefend.

Weiss kon de resultaten zijner metingen pas ontwarren toen hij ontdekt had dat de hexagonaal uitziende pyrrhotine-kristallen schijnen te bestaan uit drie orthorhombiese kristallen, die in zekere zin met elkaar zijn vergroeid. Deze vergroeiing heeft zó plaats, dat een bepaalde as voor de drie kristallen dezelfde richting heeft; volgens de gemeenschappelike richting dezer drie assen kan een pyrrhotine-kristal niet noemenswaard gemagnetiseerd worden. De standen der drie kristallen zijn verder zodanig, dat ze in elkaar overgaan bij wenteling om de genoemde as over hoeken van 120°.

De drie kristallen zijn geenszins gelijkelik vertegenwoordigd; o.a. werden door Weiss gevonden de verhoudingen 100 : 66,1 : 16,9; 100 : 4,7 : 3,1; 100 : 3 : 0. Enkelvoudige orthorhombiese kristallen komen blijkbaar niet voor.

De magnetiese eigenschappen van het enkelvoudige orthorhombiese kristal moeten dus uit die van twee- en drievoudige

---

[1]) *Journ. de Physique*, 4e série, tome IV, 1905, p. 469 et 829.

kristallen worden afgeleid. In eerste benadering kan men daarbij van de hysterese afzien. Zij OZ de as volgens welke een kristal geen merkbare magnetisatie kan aannemen. Van de beide andere

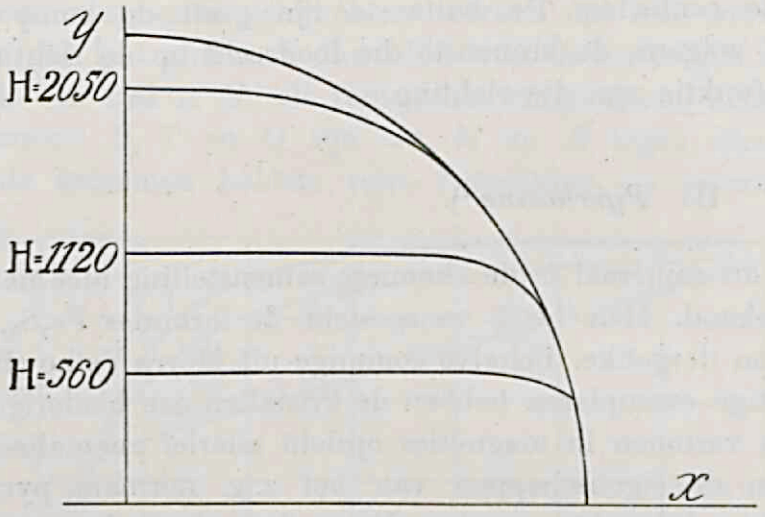

Fig. 21.

assen is er één, volgens welke het kristal zeer gemakkelik kan worden gemagnetiseerd; we duiden deze as aan met OX. Volgens de derde as OY kost het magnetiseren wat meer moeite.

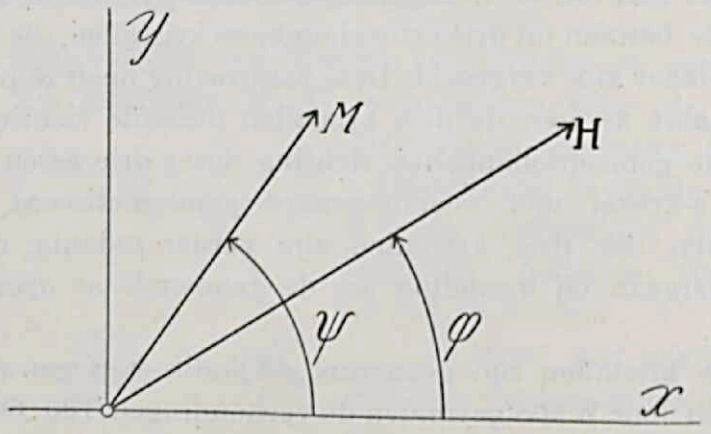

Fig. 22.

Het vlak XOY wordt door Weiss het magnetiese vlak van het kristal genoemd. Laat men een veld van bepaalde sterkte in dit vlak ronddraaien, dan behoort natuurlik bij elke richting van dit veld een bepaalde magnetisatie. In fig. 21 wordt voor

verschillende veldsterkten het verloop dezer magnetisatie aangegeven.

Uit fig. 22 kan men gemakkelik aflezen wat de betekenis is van de breuk

$$\frac{H \cdot \sin(\varphi - \psi)}{M \cdot \sin\psi \cdot \cos\psi} :$$

volgens Weiss is deze breuk tennaastebij konstant en heeft de waarde 12,4. De afwijkingen blijken groter naarmate men met zwakkere velden te doen heeft. Voor de verzadigingsmagnetisatie werd gemiddeld gevonden de waarde van 167 rationale eenheden.

Figuur 23 geeft de resultaten van proeven, waarbij de veld-

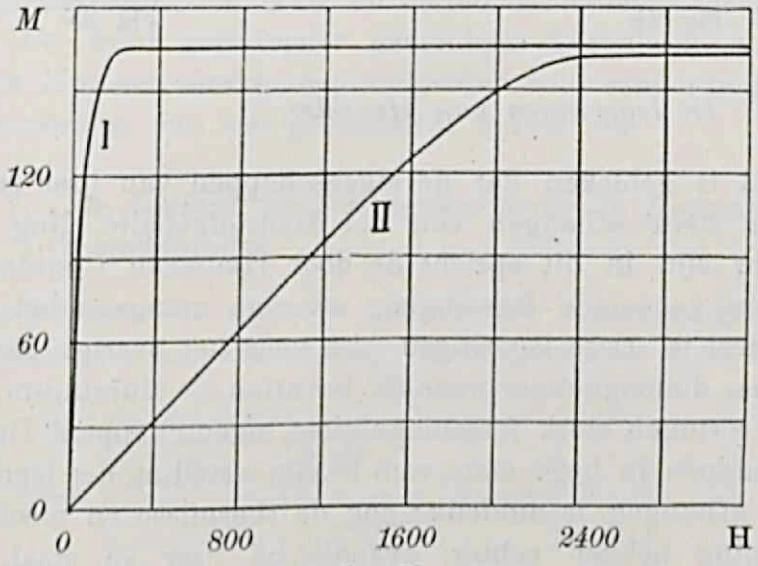

Fig. 23.

richting konstant was, en de veldsterkte van nul toenam tot een grote waarde. De kromme I heeft betrekking op de richting OX, de kromme II op de richting OY. Volgens Weiss is het zeer aannemelik dat ook het geringste inwendige veld in de richting OX tot verzadigingsmagnetisatie aanleiding zou geven wanneer men maar met volkomen gave kristallen te doen had.

De susceptibiliteit in de richting OZ is zeer gering en hoogstens 394×10^{-5}, terwijl ze in de richting OY nog 810×10^{-4} bedraagt. Aangaande de remanentie merkt Weiss op, dat de experimentele kromme van fig. 24, die betrekking heeft op de richting OX,

er na toepassing van de konstructie van RAYLEIGH vermoedelijk zou hebben uitgezien als fig. 25, wanneer de kristallen, waarmee geëxperimenteerd werd, gaaf waren geweest.

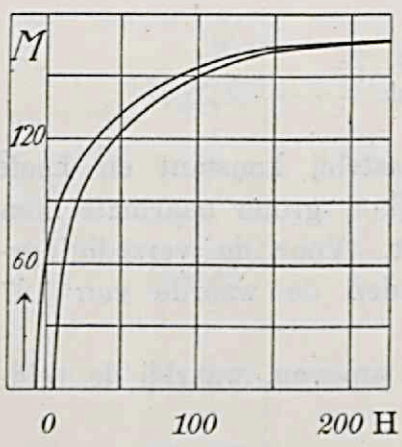

Fig. 24.

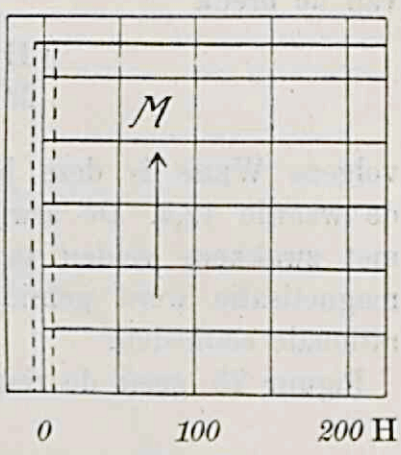

Fig. 25.

§ 6. *De legeringen van Heussler.*

In § 3 is gebleken dat de eigenschappen van ijzer en staal o.a. zeer sterk afhangen van het koolstofgehalte. Nog merkwaardiger zijn in dit opzicht de door HEUSSLER [1]) ontdekte en naar hem genoemde legeringen, waarvan mangaan het hoofdbestanddeel is. Deze legeringen, die voor het overige paramagnetiese en diamagnetiese metalen bevatten als aluminium, koper en tin, vertonen sterk ferromagnetiese eigenschappen. Dat deze eigenschappen in hoge mate van de samenstelling der legeringen moeten afhangen is duidelik: ook de thermiese en mechaniese behandeling hebben echter, evenals bij ijzer en staal, grote invloed.

Teneinde omtrent de legeringen van HEUSSLER iets naders te weten te komen heeft J. F. T. YOUNG [2]) met behulp van de methoden der RÖNTGEN-spektroskopie de kristalstruktuur van enige dezer legeringen bepaald. Bovendien heeft hij getracht de struktuur te vinden van zuiver mangaan, wat echter niet gelukt is. De diffraktie-figuur van dit metaal is zeer ingewikkeld en wijst erop dat men hier niet te doen kan hebben met

[1]) *Verh. der. D. Physik. Gesellsch.*, V, 1903, S. 219.
[2]) *Phil. Mag.*, Vol. 46, 1923, p. 291.

kristallen uit het regulaire systeem. Aluminium bleek, in overeenstemming met resultaten van HULL en anderen, te bestaan uit vlak-gecentreerd-kubiese kristalnetten, met netkonstante $d = 4{,}05 \times 10^{-8}$ cM., terwijl koper een dergelik resultaat gaf, met $d = 3{,}60 \times 10^{-8}$ cM.

Het onderzoek betrof nu twee legeringen van de metalen Mn, Al en Cu, van ongeveer dezelfde samenstelling. De voorbehandeling was niet bekend: de magnetiese eigenschappen waren echter zeer verschillend.

In de sterkst ferromagnetiese legering, waarin de verzadiging het gemakkelikst bereikt werd, bleken twee soorten van kristallen aanwezig te zijn, en wel een gecentreerd kubies net met $d = 2{,}98 \times 10^{-8}$ cM., en een vlak-gecentreerd kubies net met $d = 3{,}70 \times 10^{-8}$ cM. De andere legering vertoonde alleen het vlak-gecentreerde net. Van de netten der zuivere metalen Mn, Al en Cu werd geen spoor gevonden. Evenals in § 3 blijkt dus ook hier een sterke magnetiseerbaarheid samen te gaan met het voorkomen van een gecentreerd kubies net.

§ 7. *De invloed van de temperatuur op ferromagnetiese verschijnselen.*

Daar bij ijzer de met de temperatuur samenhangende verschijnselen zeer ingewikkeld zijn beschouwen we eerst fig. 26, [1])

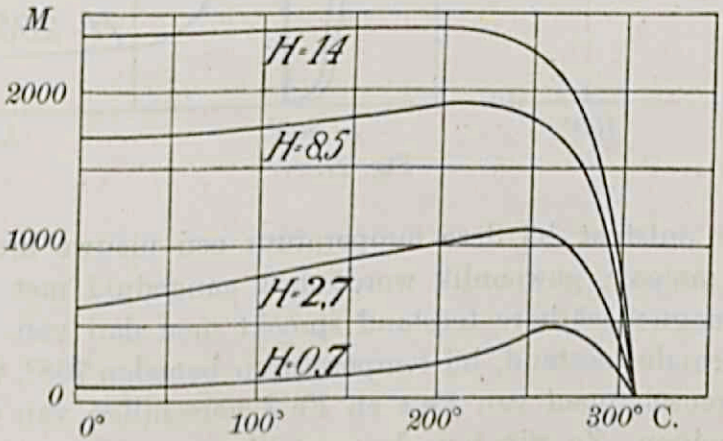

Fig. 26.

die betrekking heeft op nikkel. De aanloopkromme van dit

[1]) Door F. AUERBACH (*Moderne Magnetik*, S. 110) ontleend aan HOPKINSON, *Trans. Roy. Soc.*, 1889.

metaal hangt af van de temperatuur, en men kan nagaan hoe bij gegeven veldsterkte de magnetisatie zich als funktie van de temperatuur gedraagt. In de figuur zijn voor verschillende veldsterkten krommen getekend, die dit verband weergeven. Bij temperaturen boven 310° C. blijkt ook bij niet al te zwakke velden geen magnetisatie meer aanwezig te zijn: men is gewoon deze temperatuur het CURIE-punt te noemen. Opmerkelik is dat bij zwakke velden de magnetisatie bij stijgende temperatuur eerst toeneemt, om daarna pas te gaan afnemen.

De bij ijzer optredende verschijnselen zijn ingewikkelder, zoals uit fig. 27[1]) blijkt. In de eerste plaats is de ligging van het CURIE-punt minder scherp aan te geven. Opmerkeliker is echter dat, wanneer men ijzer ver boven dit punt (± 768° C.) verhit, het bij 1270° C. plotseling weer beter magnetiseerbaar wordt.

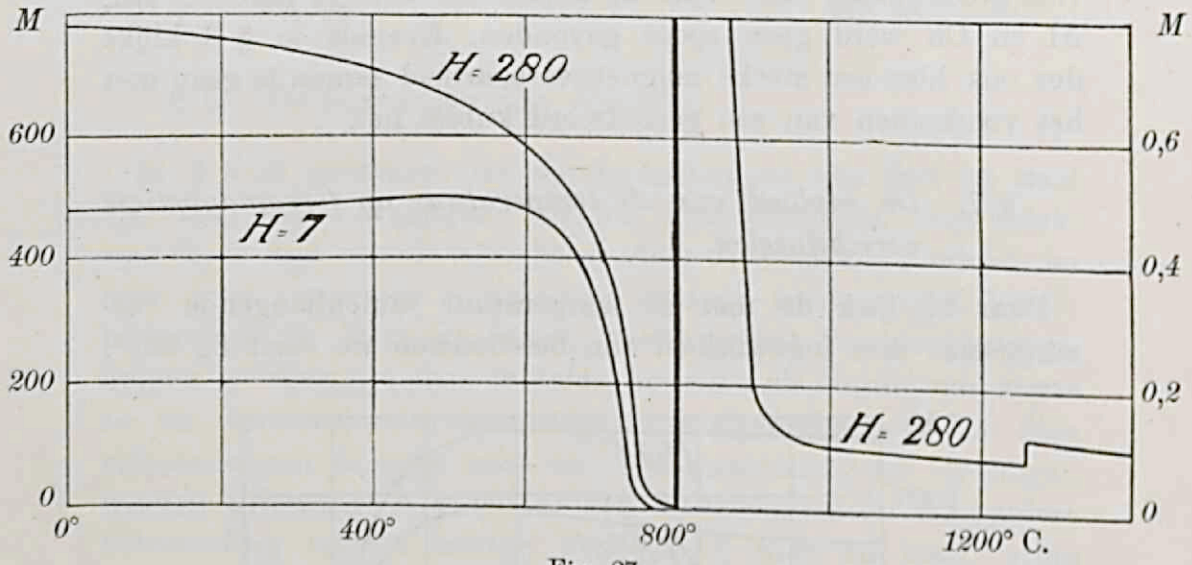

Fig. 27.

Blijkbaar ontstaat bij deze temperatuur een nieuwe modifikatie van het metaal: gewoonlik wordt deze aangeduid met Fe γ. In de niet-magnetiseerbare toestand spreekt men dan van Fe β, en in de normale toestand, bij temperaturen beneden 768°, van Fe α.

De eigenschappen van Fe α en Fe β verschillen van elkaar in vele opzichten. Zo zijn b.v. de soortelike warmten geheel ongelijk. WEISS heeft ondersteld, dat al deze verschillen gevolg zijn van het verschil in magnetiese eigenschappen, en dat men

---

[1]) Door F. AUERBACH (*Moderne Magnetik*, S. 111) ontleend aan CURIE, *C. R.* 118.

eigenlik van verschillende modifikaties niet mag spreken. Op grond van de door hem gegeven theorie van het ferromagnetisme berekent hij dan ook een sprong in de soortelike warmte, die in behoorlike overeenstemming is met de resultaten van enige zijner proeven.

Op grond van de in dit proefschrift te geven theorie kan nu een dergelike overeenstemming niet worden verwacht. Volgens deze theorie moeten dus Fe α en Fe β wel verschillende modifikaties zijn, een opvatting, waar trouwens geen enkel positief gegeven tegen schijnt te pleiten.

Wat remanentie en koërcitiefkracht aangaat merken we op, dat deze bij toename der temperatuur blijken af te nemen.

AFDELING B.

Fenomenologiese theorie van het ferromagnetisme.

HOOFDSTUK III.

De energie van aggregaten van elementair-magneetjes, die in een magneties veld zijn geplaatst.

§ 1. *De energie van een enkel elementair-magneetje ten opzichte van het uitwendige veld.*

In de inleiding werd aangekondigd, dat op de basis van het indertijd door EWING ontworpen model een theorie van het ferromagnetisme zou worden ontwikkeld. Men moet zich volgens zulk een theorie natuurlik voorstellen, dat er in ferromagnetiese stoffen atomen, atoomgroepen, of wel delen van atomen voorkomen, die met vrij draaibare en nagenoeg konstante magneetjes vergelijkbaar zijn. Dus ligt het voor de hand aggregaten van zulke magneetjes te beschouwen, en de magnetiese eigenschappen dezer aggregaten op te sporen. In hoeverre de hiermee te verkrijgen resultaten ook kunnen dienen voor de verklaring van para- en diamagnetiese verschijnselen moet dan achteraf worden nagegaan.

Laat het te beschouwen aggregaat zich bevinden in een gegeven uitwendig veld van de sterkte H. De energie van een enkel magneetje D kan dan worden opgevat als de som van de energie ten opzichte van dit veld, en van de energie ten opzichte van het veld van de overige magneetjes R van het aggregaat. We stellen door ψ voor de potentiaal van het uitwendige veld, door ψ' die van het veld der magneetjes R. In het algemeen zullen alle grootheden, die op de magneetjes R betrekking hebben, van akcenten worden voorzien. We nemen aan, dat zich geen magnetiese stoffen tot in het oneindige uit-

strekken; uit de potentiaal-definities (1, 3) en (1, 4) volgt dan, dat in het oneindige ψ en ψ' beide nul worden van de orde r^{-1}, wanneer r de afstand is tot een vast punt O.

De energie van D ten opzichte van het uitwendige veld definiëren we nu als de arbeid, die door dit veld wordt verricht wanneer het magneetje van z'n plaats naar het oneindige wordt gebracht. Is P de plaats van de noordpool, Q die van de zuidpool, l de afstand der polen, m de poolsterkte, en λ het magnetics moment, dan mogen we voor deze arbeid schrijven:

$$\varepsilon_1 = m\left(\int_P^\infty \mathrm{H} \cdot ds - \int_Q^\infty \mathrm{H} \cdot ds'\right) = m\,(\psi_P - \psi_Q)\,,$$

of, wanneer we ψ_P benaderen door

$$\psi_P = \psi_Q + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_Q \cdot dx + \cdot + \cdot :$$

$$\varepsilon_1 = ml\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{l} + \cdot + \cdot\right) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\ \psi = -\lambda \cdot \mathrm{H}.$$

Dus vinden we:

$$\varepsilon_1 = -\lambda \cdot \mathrm{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3, 1)$$

§ 2. *De energie van het magneetje* D *ten opzichte van de magneetjes* R *van het aggregaat.*

Met elk der magneetjes R korrespondeert een bepaalde potentiaalfunktie. De som dezer funkties is de potentiaalfunktie die we ψ' hebben genoemd. Brengen we nu het magneetje D van z'n plaats naar het oneindige, dan verricht het veld van de magneetjes R daarbij een arbeid

$$\varepsilon_2 = \lambda \cdot \mathrm{grad}\ \psi' = -\lambda \cdot \mathbf{H}' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3, 2)$$

Het magneetje D en de magneetjes R hebben dan ten opzichte van elkaar een potentiele energie ε_2. Van deze energie kennen we de helft toe aan D, en de rest aan de magneetjes R. In totaal vertegenwoordigt dan het magneetje D een energiebedrag

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3, 3)$$

Teneinde de uitdrukking $\frac{1}{2}\lambda \cdot \mathrm{grad}\ \psi'$ verder uit te werken denken we ons aggregaat door een kleine om D geslagen bol

met straal ρ verdeeld in twee delen, die voor ψ' resp. de bijdragen ψ'_1 en ψ'_2 leveren. De bijdrage ψ'_1, afkomstig van het buiten de bol gelegen deel van het aggregaat, kan, in overeenstemming met de formule (1, 5), geschreven worden in de gedaante

$$\psi'_1 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{r>\rho} M \cdot \text{grad}\,\frac{1}{r}\,.\,d\tau$$

alsof buiten die bol het magneties moment kontinu over de ruimte was verdeeld. Een dergelike formule toe te passen op de bijdrage ψ'_2 is natuurlik niet geoorloofd: men kan echter wel stellen

$$\psi'_2 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{r<\rho} M \cdot \text{grad}\,\frac{1}{r}\,.\,d\tau + \Delta\,,$$

en achteraf nagaan welke waarde men aan de korrektieterm Δ zal moeten geven. In verband met (1, 5) heeft men dan

$$\psi' = -\frac{1}{4\pi}\int M \cdot \text{grad}\,\frac{1}{r}\,.\,d\tau + \Delta = \Phi' + \Delta.$$

Voor het bedrag $\frac{1}{2}\varepsilon_2$ kan nu geschreven worden

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_2 = \tfrac{1}{2}\lambda \cdot \text{grad}\,\psi' = \tfrac{1}{2}\lambda \cdot \text{grad}\,\Phi' + \tfrac{1}{2}\lambda \cdot \text{grad}\,\Delta = -\tfrac{1}{2}\lambda \cdot H' + \\ + \tfrac{1}{2}\lambda \cdot \text{grad}\,\Delta,$$

en men komt dus tenslotte tot de formule

$$\varepsilon = -\lambda \cdot \mathrm{H} - \tfrac{1}{2}\lambda \cdot H' + \tfrac{1}{2}\lambda \cdot \text{grad}\,\Delta \;\ldots\ldots\; (3, 4)$$

§ 3. *Afleiding van een formule voor de totale energie van het aggregaat.*

De uitdrukking (3, 4) voor ε moet gesommeerd worden over alle magneetjes van het aggregaat. Bij deze sommatie maken we gebruik van het feit dat de magnetisatie M zó gedefinieerd is, dat de integraal $\int M\,.\,d\tau$, genomen over een of ander volume, dezelfde waarde heeft als de over dat volume genomen som $\Sigma\lambda$. Voor de totale energie van het aggregaat mag dus worden geschreven:

$$\mathrm{E} = -\int M \cdot \mathrm{H}\,.\,d\tau - \tfrac{1}{2}\int M \cdot H'\,.\,d\tau + \tfrac{1}{2}\int M \cdot \text{grad}\,\Delta\,.\,d\tau.$$

Aangaande de uitdrukking $M \cdot$ grad Δ willen we nu onderstellen, dat ze alleen afhangt van de magnetisatie M. Ze zal dan noodzakelik een even funktie van die magnetisatie moeten zijn, en de eenvoudigste onderstelling die we kunnen maken is wel die, dat we ervoor mogen schrijven ΘM^2, waarbij de koëfficiënt Θ niet afhangt van M. Men heeft dan:

$$E = -\int M \cdot H \, . \, d\tau - \tfrac{1}{2}\int M \cdot H' \, . \, d\tau + \tfrac{1}{2}\int \Theta M^2 \, . \, d\tau, \qquad (3, 5)$$

en het is deze formule, die ons als grondslag zal dienen voor de te ontwikkelen fenomenologiese theorie van het ferromagnetisme[1]). Heeft men te doen met een anisotroop lichaam, dan zal men de laatste term moeten vervangen door een term van de gedaante:

$$\tfrac{1}{2}\int (\Theta_{11} M_x^2 + \, . \, + \, . \, + 2\Theta_{23} M_y M_z + \, . \, + \, .) \, d\tau \qquad (3, 6)$$

Het is van belang hierbij nog op te merken dat men in deze laatste termen desgewenst ook nog energiebedragen opgenomen kan denken van niet-magnetiese aard.

De konstante Θ zal natuurlik van de struktuur van een ferromagneties lichaam afhankelik zijn, en dus niet voor al deze lichamen dezelfde waarde hebben. Wil men een dergelike waarde theoreties afleiden, dan moet men omtrent deze struktuur bepaalde onderstellingen maken: in de afdeling C wordt voor een aantal gevallen Θ bepaald.

§ 4. *Twee andere schrijfwijzen voor de integraal* $\int M \cdot H' \, . \, d\tau$.

Teneinde uit de formule (3, 5) de bekende relatie van MAXWELL

$$M = \varkappa (H + H') = \varkappa H$$

te kunnen afleiden schrijven we eerst de integraal $\int M \cdot H' \, . \, d\tau$ in een andere gedaante. Men heeft:

---

[1]) Een analoge uitdrukking doet dienst als uitgangspunt voor de theorie der dielektrica die voorkomt bij HELMHOLTZ, *Vorlesungen*, Bd. IV, § 52.

De beschouwingen, die LORENTZ (*Theory of electrons*, § 117) geeft bij de afleiding van de bewegingsvergelijkingen van een elektron binnen een gepolariseerd lichaam, berusten in de grond op hetzelfde beginsel: door GANS (*Gött. Nachr., Math. Physik. Kl.*, 1910) is van deze beschouwingen trouwens reeds gebruik gemaakt bij het opstellen van een theorie van het ferromagnetisme, die evenwel verschillende willekeurige en onnodig gespecialiseerde onderstellingen bevat.

$$\int M \cdot H' \cdot d\tau = -\int M \cdot \operatorname{grad} \Phi' \cdot d\tau = -\int \left(M_x \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \cdot + \cdot\right) d\tau =$$

$$= -\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (M_x \Phi') + \cdot + \cdot \right\} d\tau + \int \Phi' \cdot \operatorname{div} M \cdot d\tau =$$

$$= -\int M_n \cdot \Phi' \cdot d\sigma + \int \Phi' \cdot \operatorname{div} M \cdot d\tau ,$$

in welke uitdrukkingen door $d\tau$ worden voorgesteld de elementen van een volume V, waarvan het grensoppervlak S verdeeld is in elementen $d\sigma$. Laat men nu dit volume naar alle kanten groter worden, zodat S in het oneindige verdwijnt, dan vervalt de oppervlakte-integraal, en men houdt over de formule:

$$\int M \cdot H' \cdot d\tau = \int \Phi' \cdot \operatorname{div} M \cdot d\tau \ldots\ldots\ldots \quad (3, 7)$$

Daar $\operatorname{div} M = \Delta \Phi'$ mag men hiervoor ook schrijven:

$$\int M \cdot H' \cdot d\tau = \int \Phi' \cdot \Delta \Phi' \cdot d\tau = \int \left(\Phi' \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \cdot + \cdot \right) d\tau =$$

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right) + \cdot + \cdot \right\} d\tau - \int \left\{ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 + \cdot + \cdot \right\} d\tau =$$

$$= \lim \int \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial n} \cdot d\sigma - \int H'^2 \cdot d\tau ,$$

of, omdat de integrand van de oppervlakte integraal in het oneindige nul wordt van de orde r^{-3}:

$$\int M \cdot H' \cdot d\tau = -\int H'^2 \cdot d\tau , \ldots\ldots\ldots \quad (3, 8)$$

waarbij natuurlik, evenals in de formule (3, 7), de integralen genomen moeten worden over de gehele ruimte.

§ 5. *Afleiding van de relatie* $M = \varkappa H$.

We willen nu nagaan aan welke voorwaarde magnetisatie M voldoet wanneer de door (3, 5) gegeven energie E van ons aggregaat een extreme waarde heeft bereikt. Teneinde de extreemvoorwaarde te vinden schrijven we voor de energie:

$$\mathrm{E} = -\int M \cdot \mathrm{H} \cdot d\tau - \int \Phi' \cdot \operatorname{div} M \cdot d\tau - \tfrac{1}{2} \int \left\{ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \cdot + \cdot \right\} d\tau + \tfrac{1}{2} \int \Theta M^2 \cdot d\tau ,$$

wat in verband met (3, 7) en (3, 8) geoorloofd is. In deze formule moet nu, omdat met veranderingen van M veranderingen van φ' gepaard gaan, behalve deze M ook φ' gevarieerd worden. De variatie van φ' geeft echter:

$$-\int \delta\varphi' \,.\, \mathrm{div}\, M \,.\, d\tau - \int \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \,.\, \delta \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \,.\, + \,.\, \right) d\tau =$$

$$= -\int \delta\varphi' \,.\, \mathrm{div}\, M \,.\, d\tau - \int \left\{ \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \,.\, \frac{\partial}{\partial x} (\delta\varphi') + \,.\, + \,.\, \right\} d\tau =$$

$$= -\int \delta\varphi' \,.\, \mathrm{div}\, M \,.\, d\tau - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \,.\, \delta\varphi' \right) + \,.\, + \,.\, \right\} d\tau +$$

$$+ \int \Delta\varphi' \,.\, \delta\varphi' \,.\, d\tau = \int (\Delta\varphi' - \mathrm{div}\, M)\, \delta\varphi' \,.\, d\tau - \lim \int \delta\varphi' \,.\, \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \,.\, d\sigma,$$

hetgeen gelijk is aan nul omdat de oppervlakte-integraal weer wegvalt, en omdat $\Delta\varphi'$ gelijk is aan div M. We behoeven dus alleen rekening te houden met de variatie van M en vinden:

$$\delta \mathrm{E} = -\int \delta M \cdot \mathrm{H} \,.\, d\tau - \int \varphi' \,.\, \mathrm{div}\, \delta M \,.\, d\tau + \int \delta M \,.\, \Theta M \,.\, d\tau =$$

$$= \int \delta M \,.\, (\Theta M - \mathrm{H}) \,.\, d\tau - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi' \,.\, \delta M) + \,.\, + \,.\, \right\} d\tau +$$

$$+ \int \delta M \cdot \mathrm{grad}\, \varphi' \,.\, d\tau = \int \delta M \,.\, (\Theta M - \mathrm{H} - H') \,.\, d\tau - \lim \int \varphi' \,.\, \delta M \,.\, d\sigma.$$

Daar de oppervlakte-integraal weer verdwijnt voert de extreemvoorwaarde

$$\delta \mathrm{E} = 0$$

eenvoudig tot de gelijkheid

$$\Theta M = \mathrm{H} + H' = H \,.\,.\,.\,.\,. \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (3, 9)$$

of, wanneer men stelt

$$\varkappa = \Theta^{-1} \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (3, 10)$$

tot

$$M = \varkappa H, \quad .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (3, 11)$$

waarmee de betrekking van Maxwell gevonden is. In het volgende hoofdstuk zal echter blijken dat het extreem niet noodzakelijk een minimum is: met enige voorbeelden zal worden aangetoond dat het, althans wanneer Θ en $\varkappa$ negatief zijn, zeer goed een maximum kan wezen.

Dat er niettemin steeds een toestand bestaat, waarbij E zo klein mogelik is, vindt z'n oorzaak daarin dat de absolute waarde van de magnetisatie M niet groter kan worden dan de verzadigingsmagnetisatie, de magnetisatie die optreedt wanneer alle magneetjes dezelfde richting hebben. Met deze omstandigheid werd bij de diskussie van de variatie van E geen rekening gehouden.

Past men de beschouwing, die leidde tot de formule (3, 11), toe op het geval waarbij de laatste term van (3, 5) door de uitdrukking (3, 6) vervangen is, het geval dus van een anisotroop aggregaat, dan blijkt H het skalaire produkt te zijn van M en de tensor, waarvan de koëfficiënten $\Theta_{11}, .., \Theta_{23}, ..$ de komponenten zijn.

HOOFDSTUK IV.

Het gedrag van stelsels, die door een ellipsoide worden begrensd.

§ 1. *Inleidende opmerkingen.*

In het vorige hoofdstuk is gebleken, dat in een aggregaat van magneetjes, waarvan de energie gegeven wordt door een uitdrukking van de gedaante (3, 5), de magnetisatie in een bepaald punt ten nauwste samenhangt met het daar ter plaatse aanwezige magnetiese veld. We kunnen uit dit feit konkluderen dat in een aggregaat, hetwelk begrensd wordt door een ellipsoide en dat geplaatst is in een homogeen uitwendig veld, de magnetisatie homogeen zal zijn. In hoofdstuk I is n.l. gebleken dat in dat geval ook het door het aggregaat binnen de ellipsoide veroorzaakte veld H' homogeen is: denken we ons dit veld op het homogene uitwendige veld H gesuperponeerd, dan krijgen we binnen de ellipsoide weer een homogeen veld $H = \mathrm{H} + H'$, dat juist tot homogene magnetisatie aanleiding moet geven.

We willen de homogene magnetisatie van het aggregaat aangeven door M, de energie per cM^3 door E. Uit de formule (3, 5) volgt dan:

$$E = -M \cdot \mathrm{H} - \tfrac{1}{2} M \cdot H' + \tfrac{1}{2}\Theta M^2 \ldots\ldots\ldots (4, 1)$$

§ 2. *Definitieve formule voor de energie per volume-eenheid.*

We zagen in hoofdstuk I, dat het veld H' op eenvoudige wijze samenhangt met de magnetisatie M binnen onze ellipsoide. Kiezen we de assen van dit lichaam tot koördinaatassen, en zijn A, B, C de ontmagnetiseringskoëfficiënten, dan heeft men:

$$H'_x = -A M_x; \qquad H'_y = -B M_y; \qquad H'_z = -C M_z \ldots \quad (4, 2)$$

en dus:

$$-M \cdot H' = A M_x^2 + B M_y^2 + C M_z^2.$$

Substitueren we dit in (4, 1), dan vinden we:

$$E = -M \cdot H + \tfrac{1}{2}\{(A + \Theta) M_x^2 + (B + \Theta) M_y^2 + (C + \Theta) M_z^2\}$$

of, wanneer we stellen

$$A + \Theta = \mathrm{A}; \qquad B + \Theta = \mathrm{B}; \qquad C + \Theta = \mathrm{C}: \ldots\ldots \quad (4, 3)$$

$$E = -M \cdot H + \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} M_x^2 + \mathrm{B} M_y^2 + \mathrm{C} M_z^2) \ldots . \quad (4, 4)$$

Heeft men te doen met een anisotroop aggregaat, en wil men de laatste term van (3, 5) door de uitdrukking (3, 6) vervangen, dan krijgt men de formule

$$E = -M \cdot H + \{(A + \Theta_{11}) M_x^2 + . + . + 2\Theta_{22} M_y M_z + . + .\}$$

Door echter het assenstelsel op geschikte wijze te draaien kunnen we deze formule tot de gedaante (4, 4) terugbrengen. Nemen we dus deze laatste formule als uitgangspunt, dan behandelen we tegelijkertijd isotrope en anisotrope aggregaten: het gedrag der isotrope aggregaten is in geen enkel opzicht eenvoudiger dan dat der anisotrope.

Zijn de assen van anisotropie dezelfde als de assen van de ellipsoide, dan is geen draaiing van het assenstelsel nodig en heeft men op de oorspronkelike assen al dadelik:

$$\Theta_{23} = \Theta_{31} = \Theta_{12} = 0,$$

terwijl voor (4, 3) in de plaats treden de formules

$$A + \Theta_{11} = \mathrm{A}; \qquad B + \Theta_{22} = \mathrm{B}; \qquad C + \Theta_{33} = \mathrm{C} \quad (4, 5)$$

§ 3. *Over de toestand zonder uitwendig veld. Geen magnetisatie of magnetiese verzadiging.*

Wanneer $H = 0$ gaat (4, 4) over in:

$$E = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} M_x^2 + \mathrm{B} M_y^2 + \mathrm{C} M_z^2).$$

Zijn A, B, C alle positief, dan is blijkbaar E zo klein mogelik wanneer $M = 0$. In dat geval is er dus, zolang $H = 0$, geen magnetisatie.

Anders wordt de zaak, wanneer de koëfficiënten A, B, C niet alle positief zijn. Is b.v.

$$A < B \leqq C \qquad \text{en} \qquad A < 0,$$

dan is E kleiner naarmate M_x^2 groter is. Daar alleen rekening behoeft te worden gehouden met de voorwaarde

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 \leqq M_0^2,$$

waarin M_0 de verzadigingsmagnetisatie voorstelt, komt men gemakkelik tot de konklusie, dat E zo klein mogelik is wanneer

$$M_x = \pm M_0.$$

We zien hier dus bij afwezigheid van een magneties veld H steeds een spontane magnetisatie van de grootte M_0 optreden in een der beide x richtingen. In de volgende paragrafen zal blijken dat deze spontane magnetisatie nauw samenhangt met magnetiese hysterèse-verschijnselen.

§ 4. *Nadere beschouwing van het geval* $0 < A < B \leqq C$. *Het uitwendige veld werkt in de richting, die korrespondeert met de koëfficiënt* A.

Wanneer het uitwendige veld werkt in de x-richting is $H_y = H_z = 0$, en mogen we voor (4, 4) schrijven:

$$E = - M_x H + \tfrac{1}{2}(A M_x^2 + B M_y^2 + C M_z^2).$$

De eerste en de tweede variatie zijn blijkbaar:

$$\delta_1 E = (- H + A M_x)\, \delta M_x + B M_y \cdot \delta M_y + C M_z \cdot \delta M_z$$

en

$$\delta_2 E = \tfrac{1}{2}\{A (\delta M_x)^2 + B (\delta M_y)^2 + C (\delta M_z)^2\}.$$

Zolang $M^2 < M_0^2$ heeft men de evenwichtsvoorwaarde $\delta_1 E = 0$, waaruit volgt

$$A M_x = H \qquad M_y = 0 \qquad M_z = 0, \quad \ldots . \quad (4, 7)$$

terwijl aan de stabiliteitsvoorwaarde $\delta_2 E > 0$ automaties is voldaan. Aan de evenwichtsvoorwaarde kan blijkbaar niet worden voldaan wanneer

$$(H : A)^2 > M_0^2;$$

in dat geval moet dus het aggregaat verzadigd gemagnetiseerd

zijn en moeten we bij het opstellen der evenwichtsvoorwaarden rekening houden met de ongelijkheid:

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 \leqq M_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4, 8)$$

Door een onbepaalde koëfficiënt λ in te voeren kunnen we voor deze evenwichtsvoorwaarden schrijven:

$$\begin{aligned} -\mathrm{H} + \mathrm{A}\, M_x - 2\lambda M_x = 0\,, \qquad & \mathrm{B}\, M_y - 2\lambda M_y = 0\,, \\ \mathrm{C}\, M_z - 2\lambda M_z = 0\,, & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4, 9) \end{aligned}$$

uit welke gelijkheden drie verschillende evenwichtstoestanden kunnen worden afgeleid. Van deze toestanden blijkt echter

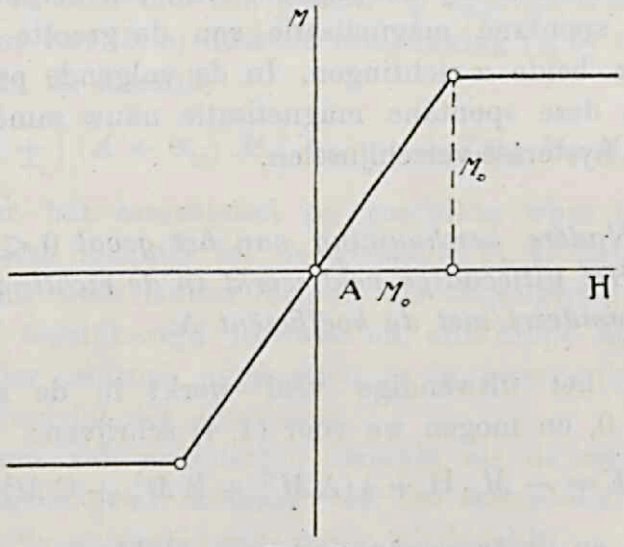

Fig. 28.

alleen stabiel te zijn de toestand, die bepaald wordt door de gelijkheden:

$$M_y = M_z = 0 \qquad \text{met} \qquad -\mathrm{H} \pm (\mathrm{A} - 2\lambda)\, M_0 = 0.$$

De toestand $M_x = M_0$ is stabiel wanneer $\mathrm{A}\, M_0 < \mathrm{H}$: tot deze voorwaarde voert n.l. de ongelijkheid $\delta_1 E > 0$ omdat $\delta M_x < 0$. Op dezelfde wijze kan men inzien, dat de toestand $M_x = -M_0$ stabiel is wanneer $-\mathrm{A}\, M_0 > \mathrm{H}$.

Men komt dus tenslotte tot het resultaat dat $M_x = -M_0$ wanneer $\mathrm{H} < -\mathrm{A}\, M_0$, dat $\mathrm{A}\, M_x = \mathrm{H}$ wanneer $-\mathrm{A}\, M_0 < \mathrm{H} < \mathrm{A}\, M_0$, en dat $M_x = M_0$ wanneer $\mathrm{A}\, M_0 < \mathrm{H}$. Het verband tussen M en H wordt dus weergegeven door de in fig. 28 getekende grafiek.

§ 5. *Het geval* $A < 0$, *met het uitwendige veld in de richting der spontane magnetisatie.*

Dit geval verschilt van het voorgaande daarin, dat aan de stabiliteitsvoorwaarde $\delta_2 E > 0$ nooit voldaan kan zijn. We hebben dus altijd te doen met een toestand van magnetiese verzadiging.

Om na te gaan wanneer de toestand $M_x = M_0$ stabiel is schrijven we, voorzover die in aanmerking komt, de totale variatie van E op:

$$\delta E = (-H + A\,M_0)\,\delta M_x + \tfrac{1}{2}\{A\,(\delta M_x)^2 + B\,(\delta M_y)^2\}.$$

De hierdoor gegeven δE moet positief zijn wanneer δM_x en δM_y voldoen aan de voorwaarde

$$(M_0 + \delta M_x)^2 + (\delta M_y)^2 \leqq M_0^2.$$

De uiterste waarden, die $(\delta M_y)^2$ nu bij gegeven (negatieve) δM_x kan aannemen worden blijkbaar gegeven door:

$$\delta M_y = 0 \quad \text{en} \quad 2\,M_0 \cdot \delta M_x + (\delta M_x)^2 + (\delta M_y)^2 = 0.$$

In het eerste geval is $\delta E > 0$ wanneer $-H + A\,M_0 < 0$, in het tweede geval wanneer $-H + A\,M_0 - B\,M_0 < 0$. De

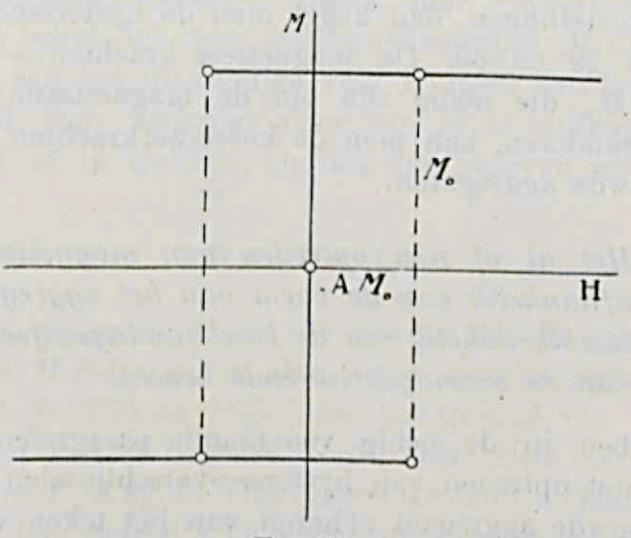

Fig. 29.

eerste voorwaarde is blijkbaar het meestomvattend wanneer $B > 0$, de tweede wanneer $B < 0$.

Laat nu H van een grote positieve tot een grote negatieve

waarde afnemen, dan kan men gemakkelik inzien dat $M_x = M_0$ zal blijven totdat $H = A\,M_0$ indien $B > 0$, en totdat $H = (A - B)\,M_0$ indien $B < 0$. Op die ogenblikken verandert de magnetisatie van teken en krijgt men $M_x = -M_0$. Laat men daarna H weer toenemen, dan keert de magnetisatie voor de tweede maal om wanneer $H = -A\,M_0$ indien $B > 0$, en wanneer $H = -(A - B)\,M_0$

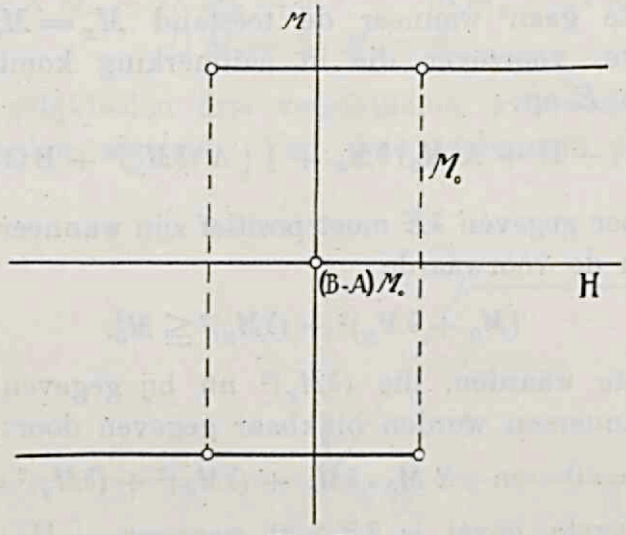

Fig. 30.

indien $B < 0$. Maakt men dus van het verband tussen M en H grafiese voorstellingen, dan krijgt men de hysterese-rechthoeken der figuren 29 en 30. De magnetiese krachten $-A\,M_0$, resp. $-(A - B)\,M_0$, die nodig zijn om de magnetisatie van teken te doen veranderen, kan men de koërcitiefkrachten noemen van de beschouwde aggregaten.

§ 6. *Het al of niet optreden van magnetiese hysterese afhankelik van de vorm van het aggregaat. De ontoereikendheid van de beschouwingswijze met behulp van de ontmagnetiserende kracht.*

We hebben in de beide voorgaande paragrafen gezien, dat het al of niet optreden van hysterese-verschijnselen bij het door ons beschouwde aggregaat afhangt van het teken van A. Volgens (5, 3) is echter:

$$A = A + \Theta\,,$$

waarin de konstante Θ afhangt van de hoedanigheid van het aggregaat, de ontmagnetiseringskoëfficiënt A daarentegen alleen

van de vorm van het begrenzende oppervlak. Of het aggregaat al dan niet hysterese zal vertonen hangt dus ten dele van de gedaante van dit oppervlak af.

Teneinde na te gaan in hoeverre met deze afhankelikheid rekening dient te worden gehouden merken we op, dat de ontmagnetiseringskoëfficiënten niet negatief kunnen zijn en bovendien voldoen aan de betrekking $A + B + C = 1$. Dus is in verband met de gemaakte onderstelling $A \leqq B \leqq C$:

$$0 \leqq A \leqq \tfrac{1}{3}.$$

We kunnen hieruit afleiden dat, wanneer $\Theta > 0$, geen hysterese kan optreden. In dat geval is n.l. steeds $A + \Theta = A > 0$. Omgekeerd zal er steeds hysterese zijn wanneer $\Theta < -\frac{1}{3}$, omdat uit deze ongelijkheid volgt: $A < 0$. Het optreden van hysterese is echter dubieus wanneer $-\frac{1}{3} < \Theta < 0$, en hangt in dat geval af van de gedaante van het aggregaat. We komen dus tot de konklusie dat het aggregaat nooit hysterese vertoont wanneer $\Theta > 0$, altijd hysterese vertoont wanneer $\Theta < -\frac{1}{3}$, en hysterese *kan* vertonen wanneer $0 > \Theta > -\frac{1}{3}$.

We beschouwen het laatste, meest interessante geval, en gaan na op welke punten de gebruikelike beschouwing met behulp van de ontmagnetiserende kracht hier verkeerde resultaten levert. Men moet bij deze beschouwingswijze M niet opvatten als funktie van het uitwendige veld H, maar van het inwendige veld H dat men verkrijgt door van H de ontmagnetiserende kracht $A\,M$ af te trekken en dat dus gegeven wordt door de formule

$$H = \mathrm{H} - A\,M.$$

Transformeert men de in de figuren 28—30 gegeven M-H-krommen in M-H-krommen, dan krijgt men de figuren 31—33, waaruit ten duidelikste blijkt, dat het gedrag van M volstrekt niet door dat van H bepaald wordt. Gaat men b.v. uit van de door het punt P in fig. 31 aangegeven toestand, en laat men H toenemen, dan kan daarbij M evengoed afnemen als konstant blijven: men weet n.l. niet langs welke tak van de M-H-kromme men moet bewegen. In de bedoelde toestand H te laten afnemen is blijkbaar ten enenmale onmogelik: men kan dus ook bezwaarlik H beschouwen als een geschikte onafhankelik-veranderlike. Het

is verder duidelik, dat de gebruikelike beschouwingswijze met behulp van de ontmagnetiserende kracht nooit aanleiding zal

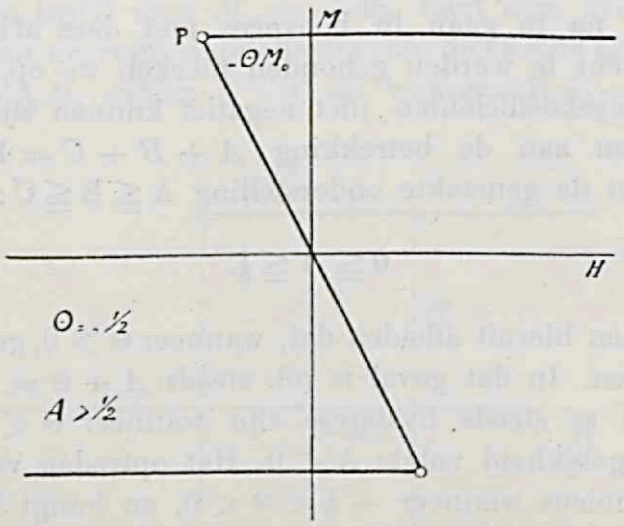

Fig. 31.

kunnen geven tot de onderscheiding van twee verschillende mogelike gevallen, en men zal dus moeten besluiten, dat het

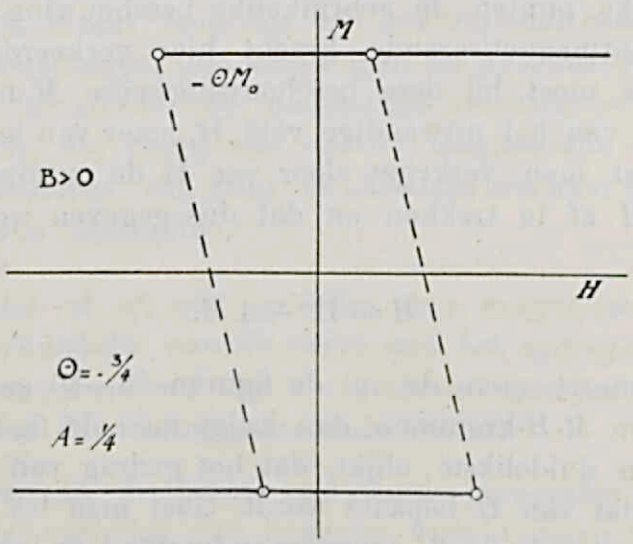

Fig. 32.

onwaarschijnlik is dat in de praktijk deze beschouwingswijze steeds tot korrekte resultaten zou voeren, en dat ze dus meer dan tot dusverre aan het experiment dient te worden getoetst.

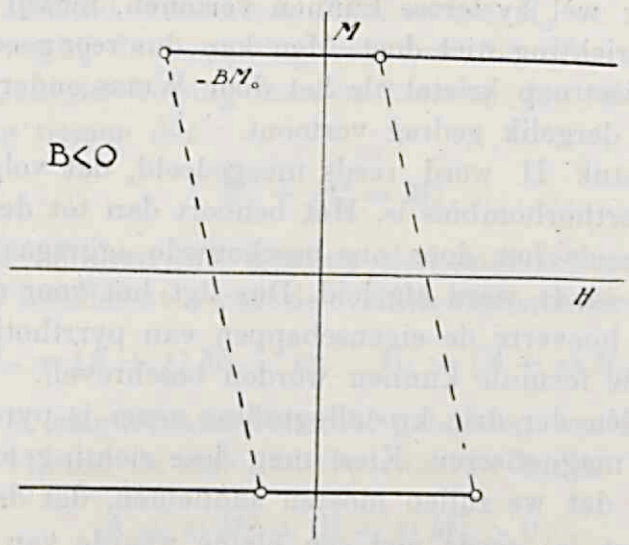

Fig. 33.

§ 7. *De diamagnetiese verschijnselen kunnen op grond van de gemaakte onderstellingen niet worden verklaard.*

Zoals reeds eerder is opgemerkt noemt men een stof diamagneties, wanneer de door de formule (3, 10) gedefinieerde susceptibiliteit $\varkappa$ negatief is. De volstrekte waarde van $\varkappa$ is voor al deze stoffen zeer klein, het grootst bij bismuth waar $\varkappa = -18 \times 10^{-5}$.

Daar in de door ons gegeven beschouwingen het produkt $\varkappa\Theta$ gelijk is aan 1 zouden deze ertoe moeten leiden in de bekende diamagnetiese stoffen aan de koëfficiënten Θ zeer grote negatieve waarden toe te kennen. We zagen echter dat dergelike waarden van Θ met een permanente magnetiese verzadigingstoestand gepaard zouden moeten gaan, geheel in tegenstelling met wat in werkelikheid wordt waargenomen. Voor een verklaring der diamagnetiese verschijnselen zijn dus de gemaakte onderstellingen volkomen ongeschikt: zulk een verklaring zal in een geheel andere richting moeten worden gezocht.

§ 8. *Enige opmerkingen in verband met het door Weiss onderzochte pyrrhotinekristal.*

De beschouwingen van § 6 zijn op anisotrope lichamen niet onveranderd van toepassing. De ongelijkheid $0 \leqq A \leqq \frac{1}{3}$ behoeft hier niet te gelden, en in het algemeen zal het lichaam in de

ene richting wèl hysterese kunnen vertonen, terwijl het dat in een andere richting niet doet. Men kan dus zeer goed begrijpen, dat een anisotroop kristal als het door WEISS onderzochte pyrrhotine een dergelik gedrag vertoont.

In hoofdstuk II werd reeds meegedeeld, dat volgens WEISS dit kristal orthorhombies is. Het behoort dan tot dezelfde symmetrieklasse als het door ons beschouwde aggregaat, waarvoor de formule (4, 4) werd afgeleid. Dus ligt het voor de hand na te gaan, in hoeverre de eigenschappen van pyrrthotine met behulp van die formule kunnen worden beschreven.

Volgens één der drie kristallografiese assen is pyrrhotine zeer moeilik te magnetiseren. Kiest men deze richting tot z-as, dan is duidelijk dat we zullen moeten aannemen, dat de koëfficiënt C zeer groot is: reeds met een kleine waarde van M_z^2 korrespondeert dan een belangrijke bijdrage tot de energie E. Door WEISS zijn voornamelijk onderzocht de gevallen, waarbij het magnetiese veld H loodrecht staat op de richting van moeilike magnetisatie en dus gelegen is in het x-y-vlak. In die gevallen is $H_z = 0$ en $M_z = 0$ en kan men voor (4, 4) schrijven

$$E = - M_x H_x - M_y H_y + \tfrac{1}{2} A M_x^2 + \tfrac{1}{2} B M_y^2 \ldots . \quad (4, 11)$$

Deze uitdrukking voor E zal nu nader onderzocht moeten worden; we onderstellen daarbij weer $A < B$ en behandelen achtereenvolgens de gevallen $A > 0$ en $A < 0$.

§ 9. *Het geval* $A > 0$, *met het veld* H *in het magnetiese vlak.*

De eerste en de tweede variatie van E zijn

$$\delta_1 E = (- H_x + A M_x) \delta M_x + (- H_y + B M_y) \delta M_y$$

en

$$\delta_2 E = \tfrac{1}{2} A (\delta M_x)^2 + \tfrac{1}{2} B (\delta M_y)^2.$$

Daar $0 < A < B$ is aan de stabiliteitsvoorwaarde $\delta_2 E > 0$ steeds voldaan. Zolang dus

$$M_x^2 + M_y^2 < M_0^2 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4, 12)$$

is de stabiliteit van de door de evenwichtsvoorwaarden

$$H_x = A M_x \quad \text{en} \quad H_y = B M_y \ldots \ldots \ldots \quad (4, 13)$$

bepaalde toestand verzekerd. Zijn echter H_x en H_y van dien aard, dat we bij de toepassing van deze formules met de voorwaarde (4, 12) in botsing zouden komen, dan moeten we in aanmerking nemen dat

$$M_x^2 + M_y^2 = M_0^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4, 14)$$

zal moeten zijn, en we kunnen dan met invoering van een onbepaalde koëfficiënt λ voor de evenwichtsvoorwaarden schrijven

$$H_x = (A + \lambda) M_x \quad \text{en} \quad H_y = (B + \lambda) M_y \ldots\ldots (4, 15)$$

Wanneer de magnetisatie volstrekt gebonden was aan de voorwaarde (4, 14) zou de stabiliteitsvoorwaarde luiden

$$(A + \lambda) M_y^2 + (B + \lambda) M_x^2 > 0;$$

ze is echter slechts gebonden aan

$$M_x^2 + M_y^2 \leqq M_0^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4, 16)$$

en dit brengt mee dat de werkelike stabiliteitsvoorwaarde scherper moet zijn. Zijn b. v. M_x en M_y beide positief, dan kunnen δM_x en δM_y tegelijkertijd negatief zijn, en aan de voorwaarde $\delta_1 E > 0$ kan dan alleen voldaan zijn wanneer

$$-H_x + A M_x < 0 \quad \text{en} \quad -H_y + B M_y < 0,$$

d. w. z wanneer

$$\lambda > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4, 17)$$

Dat deze voorwaarde voor stabiliteit ook voldoende is kan men zonder veel moeite inzien. Blijkbaar moeten H_x en H_y steeds dezelfde tekens hebben als M_x en M_y.

We gaan nu na wat het verloop zal zijn van de magnetisatie, wanneer een konstant veld ronddraait in het magnetiese vlak. Gedeeltelik gelden dan de formules (4, 13), waaruit men, omdat $H_x^2 + H_y^2 = H^2$, kan afleiden

$$A^2 . M_x^2 + B^2 . M_y^2 = H^2, \ldots\ldots\ldots (4, 18)$$

terwijl voor het overige voldaan is aan (4, 14) en we te rekenen hebben met de formules (4, 15).

Tekent men nu in het x-y-vlak de meetkundige plaats van de eindpunten van de bij een bepaalde veldsterkte H behorende vektoren M, dan blijkt deze te bestaan uit het deel van de

ellips (4, 18), dat gelegen is binnen de cirkel (4, 14), en voor het overige uit die cirkel zelf, gelijk in fig. 34 is aangegeven. Werkelik vertoont deze figuur grote analogie met de door Weiss gegeven fig. 21.

Tekenen we de figuur voor verschillende veldsterkten, dan krijgen we steeds dezelfde cirkel, terwijl de ellipsen blijkbaar gelijkvormig zijn. Neemt men H zeer klein, dan vallen deze ellipsen geheel binnen de cirkel en wordt bij geen enkele veldrichting magnetiese verzadiging bereikt.

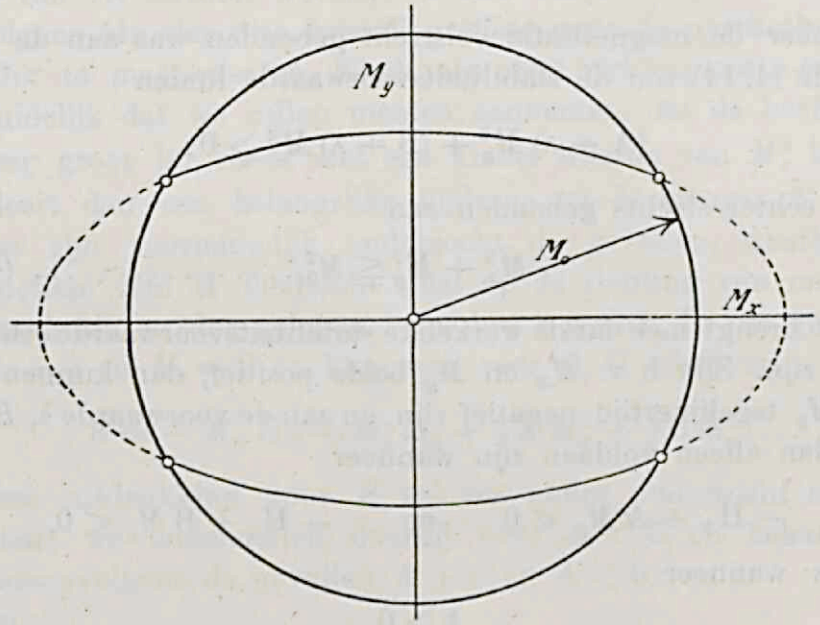

Fig. 34.

Men kan zowel uit (4, 13) als uit (4, 15) afleiden de formule

$$H_y M_x - H_x M_y = (B - A) \cdot M_x \cdot M_y ,$$

die dus volkomen algemeen moet gelden. Stelt men

$$H_x = H \cdot \cos \Phi \qquad H_y = H \cdot \sin \Phi$$
$$M_x = M \cdot \cos \psi \qquad M_y = M \cdot \sin \psi , \qquad (4, 19)$$

dan gaat ze over in de gelijkheid

$$H \cdot \sin (\Phi - \psi) = (B - A) \cdot M \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi \ldots . \quad (4, 20)$$

Weiss heeft nu inderdaad bij zijn metingen gevonden dat de verhouding

$$H \cdot \sin (\Phi - \psi) : M \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi$$

nagenoeg konstant is (zie hoofdstuk II, § 5): hij geeft van dit feit een theoretiese verklaring die in de grond veel heeft van de hier gegevene. Zeker is dus dat het door ons beschouwde aggregaat eigenschappen heeft die in zekere zin analoog zijn aan die van pyrrhotine.

§ 10. *Het geval $A < 0$, met het veld* H *in het magnetiese vlak.*

We kunnen in dit geval al dadelik opmerken, dat aan de voorwaarde $\delta_2 E > 0$ nimmer kan zijn voldaan. Dus is het aggregaat steeds verzadigd gemagnetiseerd en gelden de evenwichtsvoorwaarden (4, 15):

$$H_x = (A + \lambda) M_x \qquad H_y = (B + \lambda) M_y.$$

De stabiliteitsvoorwaarde

$$(A + \lambda) M_y^2 + (B + \lambda) M_x^2 > 0$$

of

$$\lambda > -\frac{A \cdot M_y^2 + B \cdot M_x^2}{M_x^2 + M_y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4, 21)$$

is hier echter niet noodzakelijk minder scherp dan de voorwaarde (4, 17); dit hangt af van het teken van de koëfficiënt B. We krijgen daardoor twee verschillende gevallen te onderscheiden, korresponderend met $B > 0$ en $B < 0$.

Teneinde deze gevallen gelijktijdig te onderzoeken gaan we uit van de zonder uitwendig veld stabiele evenwichtstoestand, waarin $M_x = M_0$, en denken in de y-richting een veld aangebracht, dat we van nul tot een zekere grote waarde laten aangroeien. Wanneer dit veld zo sterk is geworden dat de magnetisatie de y-richting heeft gekregen is $M_y = M_0$ en hebben we volgens (4, 15):

$$H = (B + \lambda) M_0.$$

Blijkbaar wordt door deze formule het zwakste veld gegeven dat de toestand, waarbij $M_y = M_0$, stabiel kan maken; dus heeft λ de kleinste waarde, die voldoet aan (4, 17) en (4, 21), d. w. z. de waarde $-A$. Men heeft derhalve:

$$H = (B - A) M_0$$

Gaan we nu weer uit van de toestand zonder veld, waarbij $M_x = M_0$, maar laten nu het veld van nul aangroeien in de de negatieve x-richting, dan is op het ogenblik dat de magnetisatie van teken zal gaan omkeren

$$-\mathrm{H} = (\mathrm{A} + \lambda)\, M_0$$

en dus, omdat λ weer de kleinst mogelike waarde heeft

$\mathrm{H} = (\mathrm{B} - \mathrm{A})\, M_0$ als $\mathrm{B} < 0$, en dus $\lambda = -\mathrm{B}$, en
$\mathrm{H} = -\mathrm{A}\, M_0$ als $\mathrm{B} > 0$, en dus $\lambda = 0$.

Het is nu niet moeilik na te gaan hoe het verloop van de magnetisatie zal zijn wanneer we uitgaan van de toestand, waarbij $M_x = M_0$, met een veld in de positieve x-richting, en we dit veld in het x-y-vlak tegen de wijzers van het uurwerk in laten ronddraaien.

We beschouwen de gevallen $\mathrm{B} < 0$ en $\mathrm{B} > 0$ afzonderlik.

Geval I. $\mathrm{B} < 0$.

a. Is $\mathrm{H} < \mathrm{B} - \mathrm{A}$, dan schommelt de magnetisatie om de positieve x-as, zonder ooit het eerste en het vierde kwadrant te verlaten.

b. Is $\mathrm{B} - \mathrm{A} < \mathrm{H}$, dan volgt de magnetisatie het veld in die zin, dat beider richtingen zich steeds in hetzelfde kwadrant bevinden. Deze richtingen passeren gelijktijdig de koördinaatassen.

Geval II. $\mathrm{B} > 0$.

a. Is $\mathrm{H} < -\mathrm{A}$, dan heeft men hetzelfde als in het vorige geval onder a.

b. Is $-\mathrm{A} < \mathrm{H} < \mathrm{B} - \mathrm{A}$, dan bereikt H de y-richting zonder dat ook de magnetisatie die richting aanneemt. Draait echter H verder door naar de negatieve x-richting, dan komt er een ogenblik, waarop de magnetisatie abrupt van het eerste naar het tweede kwadrant overslaat om, wanneer H de negatieve x-richting heeft bereikt, diezelfde richting te hebben aangenomen.

c. Is $\mathrm{B} - \mathrm{A} < \mathrm{H}$, dan heeft men hetzelfde als in het vorige geval onder b.

De hier behandelde gevallen, waarbij $A < 0$, blijken nogal aanmerkelik van het geval, waarbij $A > 0$ te verschillen. Het geval $A > 0$ vertoont verreweg de meeste analogie met de verschijnselen, die door WEISS bij pyrrhotine zijn waargenomen. Echter vinden we daarbij in onze beschouwingen geen spoor van hysterese. Enige hiermee samenhangende kwesties zullen in hoofdstuk IX worden besproken.

HOOFDSTUK V.

Toepassingen in verband met de gegevens aangaande ijzer, nikkel en kobalt.

§ 1. *Inleidende opmerkingen over het mechanisme van het magnetiseringsproces bij ijzer, nikkel en kobalt.*

Bij de bespreking van het effekt van BARKHAUSEN, in hoofdstuk II, § 4, is gebleken, dat bij de magnetisering en ontmagnetisering van ijzer, nikkel en kobalt de magnetisatie telkens sprongsgewijs verandert, en dat de sprongen moeten worden toegeschreven aan het gelijktijdig plotseling van richting veranderen van gehele groepen van elementair-magneetjes. Deze in magneties opzicht cohaerente groepen bleken in vele gevallen langgerekt van vorm te zijn, met de lange as in de richting van de magnetisatie: we willen aantonen dat men dit laatste feit ook op zuiver theoretiese gronden kan verwachten.

Beschouw daartoe een zeer lange ijzeren cylinder, waarin de ontmagnetiserende kracht kan worden verwaarloosd. Volgens de as van deze cylinder werkt een uitwendig magneties veld H, dat met een magnetisatie M in diezelfde richting samenhangt. Zij G in dit stuk ijzer een cohaerente groep van elementair-magneetjes. Tot op zekere hoogte zal de gedaante van zulk een groep benaderd kunnen worden door die van een ellipsoide. Buiten deze ellipsoide bevinden zich dan andere groepen van magneetjes, die in de door G ingenomen ruimte een zeker magneties veld veroorzaken.

We gaan na wat de sterkte H' is van dit veld voor het geval dat een der assen van de ellipsoide de richting heeft van de magnetisatie (zie fig. 35). De ontmagnetiseringskoëfficiënt volgens deze as stellen we voor door A. Denken we ons dan het ijzer homogeen magneties, maar de ruimte, waarbinnen zich de

groep G bevindt, ledig, dan zal het veld binnen die ruimte een bedrag $A\,M$ sterker zijn dan het uitwendige veld H, dus:

$$H' = H + A\,M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5,1)$$

Beschouw nu in verband hiermee de in fig. 18 weergegeven hysteresiskromme voor een weekijzeren draad. Is onder invloed van een sterk veld de magnetisatie nagenoeg verzadigd geworden, en laat men in die toestand H tot nul afnemen, dan neemt de magnetisatie daarbij niet meer af dan van 5400 tot 3800 eenheden, en op het ogenblik dat $H = 0$ is geworden heeft men

$$H' = A\,M = 3800\,A$$

Laat men nu H negatief worden, dan is M reeds tot 1800

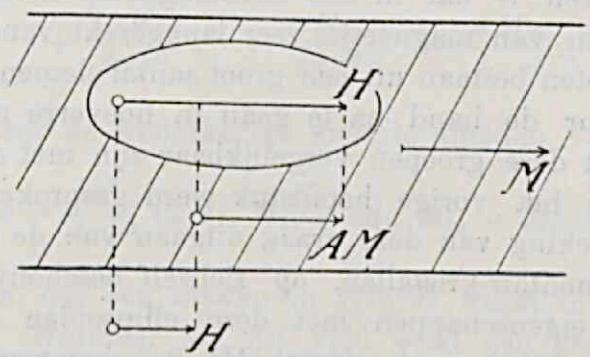

Fig. 35.

eenheden afgenomen wanneer H de waarde van $-1{,}2$ eenheden heeft bereikt. Op dit ogenblik is blijkbaar

$$H' = H + A\,M = -1{,}2 + 1800\,A\,,$$

en het is duidelijk dat de magnetisatie van de groep G alleen dan van richting veranderd kan zijn wanneer dit bedrag H' negatief is, dus:

$$A < \frac{1{,}2}{1800} = 0{,}0007 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5,2)$$

Het is duidelijk dat voor sommige groepen G de koëfficiënt A groter, voor de meeste echter kleiner moet zijn dan het bedrag 0,0007. Om in verband hiermee enig idee te krijgen van de vorm der groepen merken we op, dat een omwentelingsellipsoide

volgens de as een ontmagnetiseringskoëfficiënt 0,0007 heeft wanneer de assenverhouding ongeveer is als 1 : 70. We moeten dus aannemen, dat een groep van cohaerente elementairmagneetjes een groot aantal kristallen omvat, die een lange rij vormen in de richting van de magnetisatie. De verhouding 1 : 70 van de diameter tot de lengte is in verband met enige door VAN DER POL gegeven getallen volstrekt niet onaannemelik groot. Deze toch komt voor nikkel tot gemiddelden van 0,05 mM. en 7 cM., wat een verhouding geeft van 1 : 1400.

§ 2. *Over de cohaerente groepen van elementair-magneetjes en hunne magnetiese eigenschappen.*

Nu gebleken is dat in een ferromagneties metaal de cohaerente groepen van magneetjes zeer langgerekt van vorm zijn, en dus wel moeten bestaan uit een groot aantal elementairkristallen, ligt het voor de hand na te gaan in hoeverre men kan verwachten, dat deze groepen vergelijkbaar zijn met de ellipsoiden, waarover in het vorige hoofdstuk werd gesproken. We willen bij de bespreking van deze vraag uitgaan van de onderstelling, dat de elementair-kristallen, op zichzelf beschouwd, in hunne magnetiese eigenschappen met deze ellipsoiden overeenkomst vertonen, en dat de in hoofdstuk III, § 3, ingevoerde koëfficiënt Θ voor de verschillende kristallen van eenzelfde metaal dezelfde waarde heeft.

We beschouwen eerst twee identieke omwentelingsellipsoiden, met ontmagnetiseringskoëfficiënt A in de richting van de omwentelingsas, B in de richtingen loodrecht daarop. Neem aan, dat de assen in elkaars verlengde liggen (fig. 36), en zij v het

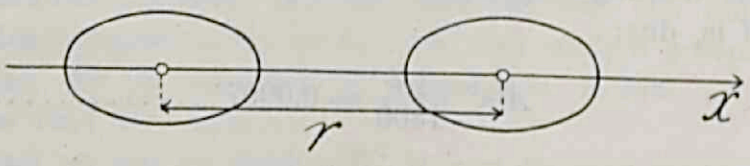

Fig. 36.

volume der ellipsoiden, en M en M_0 magnetisatie en verzadigingsmagnetisatie. Nemen we de x-as in de richting der omwentelings-

assen, dan bedraagt de eigen energie van de eerste ellipsoide

$$E_1 = \frac{v}{2}\left\{A M_{1x}^2 + B (M_{1y}^2 + M_{1z}^2)\right\}$$

en die van de tweede:

$$E_2 = \frac{v}{2}\left\{A M_{2x}^2 + B (M_{2y}^2 + M_{2z}^2)\right\},$$

waarin weer $A = A + \Theta$, $B = B + \Theta$.
Om de wederkerige energie op eenvoudige wijze te kunnen uitdrukken nemen we aan, dat de afstand r der centra groot is ten opzichte van de afmetingen der ellipsoiden. De komponenten van het bij benadering homogene veld, dat door de eerste ellipsoide ter plaatse van de tweede wordt veroorzaakt zijn dan

$$+\frac{2v M_{1x}}{4\pi r^3}, \quad -\frac{v M_{1y}}{4\pi r^3}, \quad -\frac{v M_{1z}}{4\pi r^3},$$

waaruit we voor de wederkerige energie afleiden

$$E_{12} = -\frac{v^2}{4\pi r^3}(2 M_{1x} M_{2x} - M_{1y} M_{2y} - M_{1z} M_{2z}).$$

Neem nu aan dat een uitwendig veld H werkt in de richting van de x-as. Wanneer we dit veld eerst een grote positieve waarde geven, en vervolgens op willekeurige wijze af- en toe laten nemen zullen zich de beide ellipsoiden op dezelfde wijze moeten gedragen en wel zal steeds

$$M_{1x} = M_{2x}, \qquad M_{1y} = -M_{2y}, \qquad M_{1z} = -M_{2z}$$

moeten zijn: uit de formule voor E_{12} blijkt n.l. gemakkelik dat M_{1y} en M_{2y} zeker niet hetzelfde teken zullen hebben, en M_{1z} en M_{2z} evenmin. Voor de energie per cM³ mag dus geschreven worden

$$E = -M_x H + \tfrac{1}{2}\left\{\left(A - \frac{2v}{4\pi r^3}\right) M_x^2 + \left(B - \frac{v}{4\pi r^3}\right)(M_y^2 + M_z^2)\right\} \quad (5, 3)$$

welke formule naar de vorm geheel vergelijkbaar is met de formule, die in hoofdstuk IV, §§ 4 en 5, als uitgangspunt diende. Naar analogie met het daar gevondene kunnen we zeggen dat, wanneer

$$A - \frac{2v}{4\pi r^3} < 0 ,$$

en

$$A - \frac{2v}{4\pi r^3} < B - \frac{v}{4\pi r^3} , \text{ dus } A < B + \frac{v}{4\pi r^3} \quad .. \quad (5, 4)$$

er van hysterese sprake is. Voor deze voorwaarde kan geschreven worden

$$A < \frac{2v}{4\pi r^3} \text{ wanneer } B > \frac{v}{4\pi r^3} ,$$

en

$$A < B + \frac{v}{4\pi r^3} \text{ wanneer } B < \frac{v}{4\pi r^3} \quad ..... \quad (5, 5)$$

en de koërcitiefkracht bedraagt

$$\left(\frac{2v}{4\pi r^3} - A\right) M_0 \text{ wanneer } B > \frac{v}{4\pi r^3} ,$$

en

$$\left(\frac{v}{4\pi r^3} + B - A\right) M_0 \text{ wanneer } B < \frac{v}{4\pi r^3} .$$

De ellipsoiden vertonen, elk voor zich genomen, in het geval $A < B$ hysterese wanneer $A < 0$. Nu is, wanneer $A < B$, zeker voldaan aan (5, 4), en wanneer dan bovendien nog

$$0 < A < \frac{v}{4\pi r^3}$$

is het duidelik dat, terwijl het stelsel van twee ellipsoiden wèl hysterese vertoont, dit met elk dezer lichamen afzonderlik niet het geval zal zijn.

We kunnen uit de hiermee verkregen resultaten konkluderen dat het beschouwde stelsel van twee ellipsoiden, wat magnetiese eigenschappen betreft, geheel vergelijkbaar is met een enkele langgerekte ellipsoide. Het al of niet optreden van hysterese is daarbij geheel afhankelik van de afstand der beide lichamen, en het is zeer goed mogelik dat de ellipsoiden, elk op zichzelf genomen, geen hysterese vertonen, terwijl het stelsel dat wel doet. Dit resultaat is begrijpelik omdat de beide ellipsoiden elkaar als het ware vasthouden.

Dat de orientatie der beide lichamen ten opzichte van elkaar

voor het al of niet optreden van deze hysterese van beslissende invloed kan zijn willen we nog aan een ander voorbeeld toelichten. Laat de lichamen weer parallel georienteerd zijn, en wel zo, dat de verbindingslijn der centra (die we tot y-as kiezen, zie fig. 37) loodrecht staat op de richting van de ontmagneti-

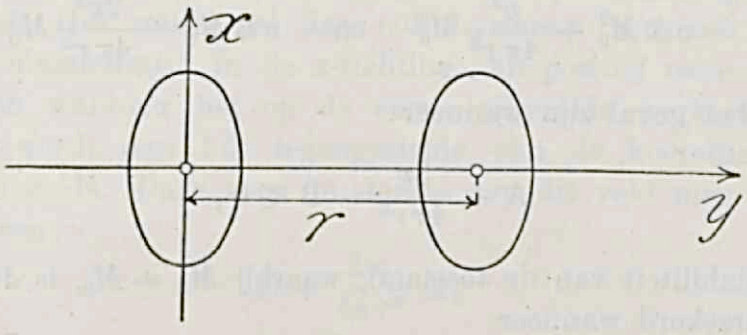

Fig. 37.

seringskoëfficiënt A (die we als x-richting willen beschouwen). Neem aan dat

$$A < 0 \quad \text{en} \quad A < B,$$

zodat de ellipsoiden, elk op zichzelf genomen, hysterese vertonen, en beschouw de toestand, waarbij

$$M_{1x} = M_{2x} = M_0.$$

We willen laten zien, dat deze toestand zeer goed instabiel kan zijn en dat dus bij het stelsel volstrekt geen hysterese aanwezig hoeft te wezen. De sterkte van het door de eerste ellipsoide veroorzaakte veld ter plaatse van de tweede ellipsoide is, wanneer r weer de afstand is van de centra

$$-\frac{v}{4\pi r^3} M_0$$

en de toestand kan alleen stabiel zijn wanneer

$$-\frac{v}{4\pi r^3} M_0 > A M_0, \text{ of } A + \frac{v}{4\pi r^3} < 0 \text{ indien } B > 0,$$

en wanneer

$$-\frac{v}{4\pi r^2} M_0 > (A - B) M_0 \text{ of } A + \frac{v}{4\pi r^3} - B < 0 \text{ indien } B < 0.$$

Dat aan deze voorwaarden volstrekt niet voldaan behoeft te

zijn is duidelik. Men ziet bovendien gemakkelik in, dat voor stabiliteit verder noodzakelik, en tevens voldoende is, dat de energie van het stelsel in de toestand, waarbij $M_x = M_0$ is, kleiner zij dan in de toestand waarbij $M_y = M_0$. Daar de waarden dezer energieën resp. bedragen

$$v\,\mathrm{A}\,M_0^2 + \frac{v^2}{4\pi r^3} M_0^2 \quad \text{en} \quad v\,\mathrm{B}\,M_0^2 - \frac{2v^2}{4\pi r^3} M_0^2$$

zal dit het geval zijn wanneer:

$$\mathrm{A} + \frac{3v}{4\pi r^3} - \mathrm{B} < 0\,,$$

en de stabiliteit van de toestand, waarbij $M_x = M_0$, is dus blijkbaar verzekerd wanneer

$$\mathrm{A} + \frac{v}{4\pi r^3} < 0 \quad \text{en} \quad \mathrm{A} + \frac{3v}{4\pi r^3} - \mathrm{B} < 0.$$

Het gedrag van het hiermee beschouwde stelsel is in zoverre ingewikkeld, dat zich niet minder dan vier stabiele evenwichtstoestanden kunnen voordoen, n.l. de toestanden waarbij $M_x = M_0$, $M_x = -M_0$, $M_{1x} = M_0$ met $M_{2x} = -M_0$, en $M_{1x} = -M_0$ met $M_{2x} = M_0$. Met een enkele ellipsoide is het stelsel dus slechts ten dele vergelijkbaar.

§ 3. *Bespreking van een karakteristiek biezonder geval.*

Beschouwden we tot dusver stelsels van twee identieke ellipsoiden, we willen tans nagaan waartoe we komen wanneer we de onderstelling van deze identiteit laten vallen.

Laat b.v. de ellipsoiden gelijkvormig zijn, maar niet kongruent. De ontmagnetiseringskoëfficiënten zijn in dat geval voor de beide lichamen nog gelijk, maar de volumina v_1 en v_2 verschillen. Plaatsen we de lichamen weer met de lange assen in elkaars verlengde, en is r weer de afstand der centra, dan mogen we voor de energie schrijven:

$$\mathrm{E} = \frac{v_1}{2}\left\{\mathrm{A}\,M_{1x}^2 + \mathrm{B}\,(M_{1y}^2 + M_{1z}^2)\right\} - \frac{v_1 v_2}{4\pi r^3}\,(2M_{1x}\,M_{2x} - M_{1y}\,M_{2y} - M_{1z}\,M_{2z}) +$$

$$+ \frac{v_2}{2}\left\{\mathrm{A}\,M_{2x}^2 + \mathrm{B}\,(M_{2y}^2 + M_{2z}^2)\right\} - \mathrm{H}\,(v_1 M_{1x} + v_2 M_{2x}) \ldots\ldots \quad (5, 6)$$

We nemen aan dat de eerste ellipsoide het grootst is en kunnen dan de volgende gevallen onderscheiden:

I. $A < B$, $A < 0$.

In dit geval vertonen de ellipsoiden, op zichzelf genomen, hysterese. Het stelsel zal dan ook hysterese vertonen, en wel zal de magnetisatie in de x-richting van positief naar negatief overslaan wanneer het op de eerste ellipsoide werkende veld kleiner wordt dan het tegengestelde van de koërcitiefkracht dier ellipsoide. Daar voor de sterkte van dit veld mag worden geschreven:

$$H + \frac{2v_2}{4\pi r^3} M_0$$

heeft de koërcitiefkracht van het stelsel de grootte

$$-\left(A - \frac{2v^2}{4\pi r^3}\right) M_0 \quad \text{indien} \quad B > 0$$

en

$$-\left(A - B - \frac{2v_2}{4\pi r^3}\right) M_0 \quad \text{indien} \quad B < 0 \quad \ldots\ldots \quad (5, 7)$$

Dat de tweede ellipsoide van magnetisatierichting zal omkeren zodra de eerste daarmee begint volgt daaruit, dat het veld ter plaatse van de tweede ellipsoide zwakker is dan het tegengestelde van de koërcitiefkracht, zodra de verandering in de eerste ellipsoide heeft plaats gehad.

II. $A < B$, $A > 0$.

De ellipsoiden vertonen in dit geval, op zichzelf genomen, geen hysterese. Gemakkelik is na te gaan wanneer ook het stelsel geen hysterese zal vertonen. Laat men H van een zeer grote waarde afnemen, dan zal, wanneer er geen hysterese is, het eerst de magnetisatie in de grootste ellipsoide geleidelik gaan afnemen. Deze afname begint op het ogenblik dat de veldsterkte binnen deze ellipsoide,

$$H + \frac{2v_2}{4\pi r^3} M_0,$$

gelijk is geworden aan $A M_0$, dus wanneer

$$H = \left(A - \frac{2v_2}{4\pi r^3}\right) M_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5, 8)$$

Neemt H verder af, dan zal, zolang de tweede ellipsoide verzadigd gemagnetiseerd blijft, de magnetisatie van de eerste ellipsoide gegeven worden door:

$$M_{1x} = \frac{1}{A}\left(H + \frac{2v_2}{4\pi r^3} M_0\right),$$

en de veldsterkte binnen de tweede ellipsoide zal dus bedragen:

$$H + \frac{2v_1}{4\pi r^3 A}\left(H + \frac{2v_2}{4\pi r^3} M_0\right) = H\left(1 + \frac{2v_1}{4\pi r^3 A}\right) + \frac{4v_1 v_2}{16\pi^2 r^6 A} M_0.$$

Wanneer deze uitdrukking aan $A M_0$ gelijk geworden is zal ook in de tweede ellipsoide de magnetisatie gaan afnemen: op dit ogenblik is blijkbaar

$$H\left(A + \frac{2v_1}{4\pi r^3}\right) = M_0\left(A^2 - \frac{4v_1 v_2}{16\pi^2 r^6}\right) \ldots\ldots\ldots (5, 9)$$

en voor nog kleinere H kan de evenwichtstoestand gemakkelik bepaald worden op grond van de uitdrukking (5, 6) voor de energie. Van deze uitdrukkingen hebben we blijkbaar alleen nodig de bestanddelen, die afhangen van M_{1x} en M_{2x}, dus

$$E = \tfrac{1}{2} v_1 A M_{1x}^2 - 2 v_1 v_2 M_{1x} M_{2x} + \tfrac{1}{2} v_2 A M_{2x}^2 - \\ - H (v_1 M_{1x} + v_2 M_{2x}).$$

Men heeft

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial M_{1x}} = v_1 A M_{1x} - \dfrac{2 v_1 v_2}{4\pi r^3} M_{2x} - H v_1 \\ \dfrac{\partial E}{\partial M_{2x}} = -\dfrac{2 v_1 v_2}{4\pi r^3} M_{1x} + v_2 A M_{2x} - H v_2 \\ \dfrac{\partial^2 E}{\partial M_{1x}^2} = v_1 A\,; \quad \dfrac{\partial^2 E}{\partial M_{2x}^2} = v_2 A\,; \quad \dfrac{\partial^2 E}{\partial M_{1x}\,\partial M_{2x}} = -\dfrac{2 v_1 v_2}{4\pi r^3}. \end{cases}$$

Een toestand, waarbij de volstrekte waarden van M_{1x} en M_{2x} beide van M_0 verschillen, kan dus alleen stabiel zijn wanneer

$$A > 0 \qquad \text{en} \qquad A^2 > \frac{4 v_1 v_2}{16\pi^2 r^6}.$$

In de formule (5, 9) is dan het rechterlid positief, en hetzelfde kan gezegd worden van de grenswaarde van H:

$$H = M_0 \frac{A^2 - \frac{4 v_1 v_2}{16 \pi^2 r^6}}{A + \frac{2 v_1}{4 \pi r^3}}$$

Voor kleinere waarden van H vinden we M_{1x} en M_{2x} uit de formules

$$\frac{\partial E}{\partial M_{1x}} = 0 \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial E}{\partial M_{2x}} = 0,$$

die voeren tot

$$M_{1x}\left(A^2 - \frac{4 v_1 v_2}{16 \pi^2 r^6}\right) = H\left(A + \frac{2 v_1}{4 \pi r^3}\right)$$

$$M_{2x}\left(A^2 - \frac{4 v_1 v_2}{16 \pi^2 r^6}\right) = H\left(A + \frac{2 v_2}{4 \pi r^3}\right),$$

waaruit we afleiden:

$$(v_1 M_{1x} + v_2 M_{2x})\left(A^2 - \frac{4 v_1 v_2}{16 \pi^2 r^6}\right) = H\left\{A(v_1 + v_2) + \frac{4 v_1 v_2}{4 \pi r^3}\right\}.$$

Het gedrag van een stelsel dat geen hysterese vertoont, waarvoor dus

$$A^2 > \frac{4 v_1 v_2}{16 \pi^2 r^6},$$

kan nu gemakkelik in figuur worden gebracht. Zet men het totale magnetiese moment uit tegen de magnetiese kracht H, dan vindt men een gebroken lijn met 4 knikken. (fig. 38).

Het stelsel der twee ellipsoiden vertoont wèl hysterese wanneer

$$A^2 < \frac{4 v_1 v_2}{16 \pi^2 r^6};$$

de door de formule (5, 9) voor H gegeven waarde is dan negatief, en wanneer bij het afnemen H deze waarde wordt bereikt zal de magnetisatie van de tweede ellipsoide plotseling van teken veranderen en negatief verzadigd worden. Ook de magnetisatie van de eerste ellipsoide, die de waarde

$$M_0 \frac{A + \frac{2 v_2}{4 \pi r^3}}{A + \frac{2 v_1}{4 \pi r^3}}$$

had, zal daarbij overslaan naar de negatieve waarde tegengesteld aan die, welke behoorde bij het tegengesteld gerichte veld van

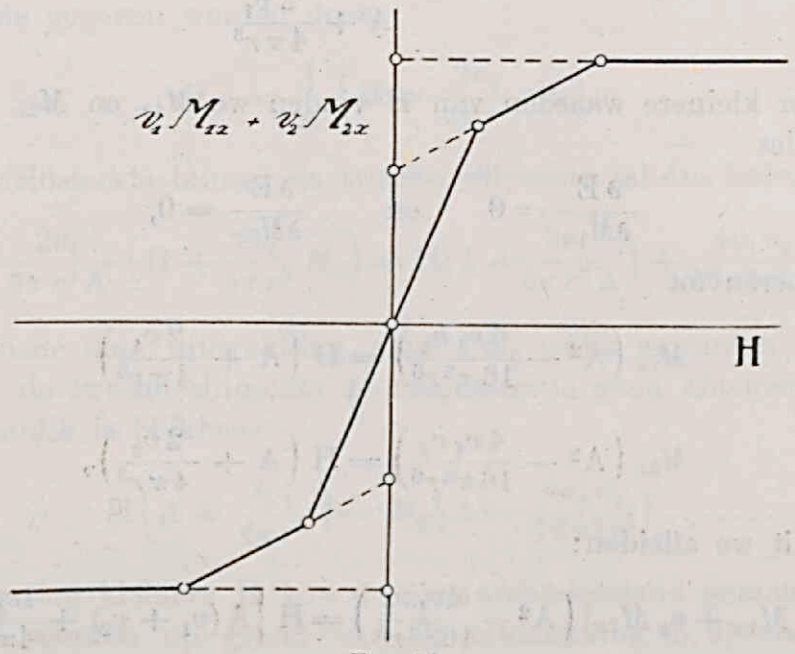

Fig. 38.

dezelfde grootte. Om tenslotte het verband tussen H en het

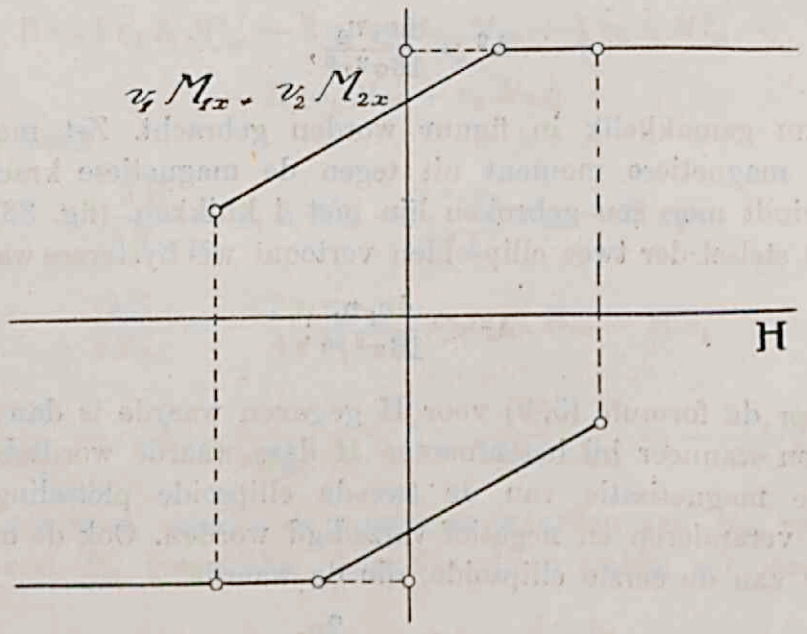

Fig. 39.

totale magnetiese moment in teekening te kunnen brengen (fig. 39) resumeren we de volgende resultaten:

$$v_1 M_{1x} + v_2 M_{2x} = (v_1 + v_2) M_0 \quad \text{voor} \quad \mathrm{H} > \left(\mathrm{A} - \frac{2v_2}{4\pi r^3}\right) M_0$$

en

$$v_1 M_{1x} + v_2 M_{2x} = \frac{v_1 \mathrm{H}}{\mathrm{A}} + \left(\frac{2v_1 v_2}{4\pi r^3 \mathrm{A}} + v_2\right) M_0 \text{ voor } \left(\mathrm{A} - \frac{2v_2}{4\pi r^3}\right) > \frac{\mathrm{H}}{M_0} > \frac{\mathrm{A}^2 - \frac{4v_1 v_2}{16\pi^2 r^6}}{\mathrm{A} + \frac{2v_1}{4\pi r^3}},$$

met behulp waarvan de figuur gemakkelik kan worden verkregen.

§ 4. *Beschouwing van een keten van identieke ellipsoiden.*

Een karakteristiek geval, dat bij benadering kan worden behandeld, is dat van een keten van identieke omwentelingsellipsoiden, die met de assen in elkaars verlengde liggen. Denken we ons voor het gemak deze keten oneindig lang, dan zal de afstand van een bepaalde ellipsoide tot de overige ellipsoiden bedragen r, $2r$, enz., wanneer r de lange as der lichamen voorstelt (fig. 40).

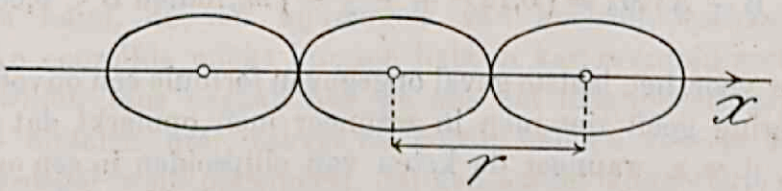

Fig. 40.

Het volume der omwentelingsellipsoiden duiden we aan met v. Nemen we aan dat het uitwendige veld H werkt in de (x-)richting van de aan alle lichamen gemeenschappelike omwentelingsas, en onderstellen we dat M_x voor al die lichamen dezelfde is terwijl M_y en M_z voor twee aan elkaar grenzende ellipsoiden tegengestelde tekens hebben, dan kunnen we, naar analogie met het in § 2 behandelde, de energie per cM³. ruw benaderen door de formule

$$E = -M_x \mathrm{H} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\mathrm{A} - \frac{4v}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nr)^3}\right) M_x^2 + \left(\mathrm{B} + \frac{2v}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(nr)^3}\right)(M_y^2 + M_z^2)\right\}$$

Stellen we

$$v = \tfrac{4}{3}\pi\varepsilon^2\left(\frac{r}{2}\right)^3,$$

dan is ε de assenverhouding, en zijn dus de ellipsoiden langgerekt indien $\varepsilon < 0$, afgeplat indien $\varepsilon > 1$, en geldt de formule

$$E = -M_x\,\mathrm{H} + \tfrac{1}{2}\left\{(\mathrm{A} - 0{,}20\,\varepsilon^2)\,M_x^2 + (\mathrm{B} - 0{,}08\,\varepsilon^2)\,(M_y^2 + M_z^2)\right\}$$

zodat, daar steeds voldaan is aan de ongelijkheid

$$\mathrm{A} < \mathrm{B} + 0{,}12\,\varepsilon^2, \qquad \text{d.w.z.} \quad -\frac{1-3A}{2} < 0{,}12\,\varepsilon^2,$$

hysterese zal optreden wanneer

$$\mathrm{A} < 0{,}2\,\varepsilon^2,$$

en voor de koërcitiefkracht mag worden geschreven:

$$(0{,}2\,\varepsilon^2 - \mathrm{A})\,M_0 = (0{,}2\,\varepsilon^2 - A - \Theta)\,M_0 \quad \text{indien} \quad \mathrm{B} > 0{,}08\,\varepsilon^2,$$

en

$$(0{,}12\,\varepsilon^2 + \mathrm{B} - \mathrm{A})\,M_0 = \left(0{,}12\,\varepsilon^2 + \frac{1-3A}{2}\right)M_0 \text{ indien } \mathrm{B} < 0{,}08\,\varepsilon^2 \quad (5, 10)$$

Dat de voor het laatste geval opgegeven formule een onvoldoende benadering geeft ziet men in wanneer men opmerkt dat zij voor $\varepsilon = \infty$, d. w. z. wanneer de keten van ellipsoiden in een oneindig lange cylinder is overgegaan, zou moeten leiden tot een koërcitiefkracht $-\Theta M_0$: in de formule komt Θ in het geheel niet voor, en de eruit voortvloeiende koërcitiefkracht is oneindig groot. De eerste formule daarentegen is minder verwerpelik en is b.v. voor $\Theta > -0{,}1$ vermoedelik wel te gebruiken zolang $\varepsilon > 1$. Men kan nu uit het onderstaande tabelletje zien in hoeverre een keten van identieke ellipsoiden meer hysterese vertoont dan elk der ellipsoiden afzonderlik, en in welke mate deze hysterese achterstaat bij die van een oneindig lange cylinder. Stelt men de koërciefkracht voor door H_c, dan bedraagt voor elk der ellipsoiden afzonderlik $\mathrm{H}_c = -(A + \Theta)\,M_0$, en voor een oneindig lange cylinder $\mathrm{H}_c = -\Theta\,M_0$. In de tabel wordt met H_c bedoeld de koërcitiefkracht voor de keten van ellipsoiden.

ε	$H_c : M_0$	$-(A+\Theta)$	$-\Theta$
0,002	$-0{,}0000232 - \Theta$	$-0{,}000024 - \Theta$	$-\Theta$
0,02	$-0{,}00132 - \Theta$	$-0{,}0014 - \Theta$	id.
0,1	$-0{,}018 - \Theta$	$-0{,}02 - \Theta$	id.
0,5	$-0{,}165 - \Theta$	$-0{,}17 - \Theta$	id.
1,0	$-0{,}13 - \Theta$	$-0{,}33 - \Theta$	id.
∞	$0{,}000 - \Theta$	—	id.

§ 5. *Bepaling van de orde van grootte van enige konstanten bij ijzer, staal, nikkel en kobalt.*

We zagen dat reeds bij de magnetisatiekrommen van stelsels van twee ellipsoiden van een grote verscheidenheid kan worden gesproken. Dat in werkelikheid bij een stof als ijzer een nog veel groter verscheidenheid wordt aangetroffen kan dus niet verwonderen, en evenmin dat bewerkingen als uitgloeien, temperen en uitrekken op het magneties gedrag van dit metaal van beslissende invloed zijn. Dat n.l. door deze bewerkingen de samenhang der elementairkristallen sterk kan veranderen ligt voor de hand, en dat bijmengels van koolstof, wolfraam, en dergelike eenzelfde effekt kunnen hebben kan evenmin verbazen.

We willen tans nagaan hoe we ons het magnetiseringsproces van de metalen ijzer, nikkel en kobalt hebben voor te stellen. Reeds vroeger werd opgemerkt, dat een aantal langgerekte aggregaten van elementairkristallen, met de assen in de richting van de magnetisatie, als eenheden moeten worden opgevat: de magnetiese toestanden van de verschillende kristalletjes van zulk een aggregaat hangen ten nauwste met elkaar samen. Het ligt voor de hand de eigenschappen dezer aggregaten te vergelijken met die van de langgerekste ellipsoiden, waarvan in het vorige hoofdstuk sprake was. Het gedrag van deze ellipsoiden werd bepaald door de waarde van een konstante

$$A = A + \Theta,$$

waarvan de beide bestanddelen respektievelik afhingen van de gedaante van het lichaam en van de aard van de stof waaruit het was samengesteld. Het al of niet optreden van hysterese hing af van het negatief of positief zijn van A.

We denken ons nu de te beschouwen langgerekte aggregaten verdeeld in een groep mèt en een groep zonder hysterese, en stellen ons voor, dat de magnetisatiekrommen dezer groepen ten ruwste benaderd worden door de figuren 28 en 29. De konstante A denken we ons echter niet als som van twee, maar van drie bestanddelen:

$$A = A + \Theta + \delta,$$

waarvan A alleen afhangt van de vorm van het aggregaat, Θ van de aard van de stof waaruit dit is samengesteld, terwijl δ in verband staat met de samenhang der elementairkristallen. Het lijkt plausibel voor deze δ een positieve waarde te verwachten: wanneer n.l. het aggregaat niet homogeen is of van de vorm van een ellipsoide afwijkt zullen die afwijkingen allicht de kans op hysterese verminderen, gelijk door het in § 4 behandelde voorbeeld waarschijnlijk wordt gemaakt. Dat echter δ zeer klein zou zijn doordat b.v. de aggregaten bij benadering de gedaante hebben van lange cylinders lijkt volstrekt niet onaannemelik.

We willen nu nagaan in hoeverre we uit bekende magnetisatiekrommen kunnen besluiten tot de orde van grootte der konstanten A, A, Θ en δ.

I. Week ijzer.

We gebruiken als uitgangspunt de aan VAN DER POL ontleende en in fig. 18 weergegeven hysteresiskromme. Bij de teruglopende tak dezer kromme zien we, dat de magnetisatie sterk afneemt wanneer H afneemt van 1,5 tot $-0,7$ eenheden. Van diskontinue sprongen der magnetisatie is hierbij nog niet te merken, en we moeten dus aannemen dat hier de verandering van magnetisatie is toe te schrijven aan de aanwezigheid van kristal-aggregaten, die een magnetisatiekromme hebben als in fig. 28 wordt aangegeven. Deze aggregaten moeten tamelik langgerekt zijn omdat anders de sterke magnetisatie der omgeving de oorspronkelik bestaande verzadiging in stand zou houden. Hadden we te doen met oneindig lange cylinders, dan zou de magnetisatie der omgeving in het geheel geen invloed hebben. Wanneer de verzadigingsmagnetisatie van zulk een cylinder 5400 eenheden bedraagt, en deze magnetisatie begint af te nemen bij een veld H van 1,5 eenheden, dan moet $\Theta + \delta$ de waarde $1,5 : 5400 = 0,00028$ hebben. Beschouwen we in plaats van een

cylinder een langgerekte ellipsoide met ontmagnetiseringskoëfficiënt A, dan is op het ogenblik dat de magnetisatie begint af te nemen

$$H + A\,M = (A + \Theta + \delta)\,M_0\,,$$

en wanneer men stelt $H = 1{,}5$ en $M = 4300 = 0{,}8\ M_0$ leidt men hieruit af:

$$H : M_0 = 0{,}00028 = \Theta + \delta + A\left(1 - \frac{M}{M_0}\right) = \Theta + \delta + 0{,}2\ A,$$

zodat men mag aannemen dat de maximale waarde van $\Theta + \delta$ van de orde is van 0,0003.

Diskontinuiteiten in de magnetisatie beginnen op te treden wanneer H kleiner wordt dan $-0{,}7$ eenheden. Voor deze diskontinuiteiten moeten verantwoordelik worden gesteld kristalaggregaten met magnetisatiekrommen van het in fig. 29 weergegeven type. Bij een inwendig veld $H = -\ 0{,}7$ zullen plotseling die aggregaten van magnetisatierichting veranderen waarvoor

$$H + A\,M = (A + \Theta + \delta)\,M_0\,,$$

en door in deze formule de getalwaarden $H = 0{,}7$ en $M = 3000 = 0{,}6\ M_0$ te substitueren vinden we:

$$H : M_0 = -\ 0{,}00013 = \Theta + \delta + 0{,}4\ A.$$

Daar echter het op het aggregaat werkende veld negatief moet zijn heeft men

$$H + A\,M = -\ 0{,}7 + 3000\ A < 0\,,$$

zodat

$$A < 0{,}7 : 3000 = 0{,}00023$$

en men dus komt tot:

$$-\ (\Theta + \delta) = 0{,}4\ A + 0{,}00013 < 0{,}00021\,,$$

waaruit volgt dat gezegd mag worden dat voor de aggregaten, die het eerst diskontinuiteiten veroorzaken, de positieve grootheid $-\ (\Theta + \delta)$ niet groter kan zijn dan van de orde van ongeveer 0,0003.

Voor de aggregaten, die het laatst een plotselinge verandering van magnetisatie vertonen, behoeft deze orde van grootte geen andere te zijn. Men heeft hier n.l.

$$H : M_0 = -\ 0{,}00035 = \Theta + \delta + 1{,}5\ A,$$

zodat het alleen van de waarde van A afhangt of $-\ (\Theta + \delta)$

dichter of minder dicht bij de 0,00035 ligt. Blijkbaar wijst dus de magnetisatiekromme van de beschouwde ijzerdraad erop, dat voor de meest op de voorgrond tredende langgerekte kristalaggregaten de volstrekte waarde van de grootheid $\Theta + \delta$ hoogstens is van de orde van 0,0004.

II. Nikkelstaal.

Op nikkelstaal heeft betrekking de aan VAN DER POL ontleende figuur 17. De verzadigingsmagnetisatie bedraagt hier ongeveer 3500 eenheden, en wanneer het uitwendige veld afneemt van 15 eenheden tot nul is de afname der magnetisatie tamelik regelmatig. Diskontinue sprongen beginnen op te treden bij een veld van $-0{,}7$ eenheden. Voor $-(\Theta + \delta)$ voert dit tot een maximale waarde van $0{,}7 : 3500 = 0{,}0002$, en daar de diskontinuiteiten ophouden bij een veld van $-3{,}8$ eenheden is het niet nodig dat we $-(\Theta + \delta)$ groter onderstellen dan van de orde van $3{,}8 : 3500 = 0{,}0011$.

III. Staal.

De magnetisatiekrommen der verschillende staalsoorten vertonen een grote verscheidenheid: in sommige gevallen wijken ze zozeer af van het normale type dat men ze met de reeds beschouwde krommen onmogelik kan vergelijken. Zo is het bij de kromme van fig. 10 niet mogelik door een analogie-redenering aan te geven in welk gebied de magnetisatie haar diskontinuiteiten zal moeten vertonen. Wel kan men als zeker aannemen dat het punt van de teruglopende tak, waarvoor $M = 0$ is, tot dit gebied zal behoren. Daar de koërcitiefkracht 12,8 eenheden bedraagt en de verzadigingsmagnetisatie zeker niet groter is dan 4000 eenheden vinden we voor de grootheid $-(\Theta + \delta)$ een orde van grootte van $12{,}8 : 4000 = 0{,}0032$. Grotere waarden voor deze grootheid dan ongeveer 0,004 zijn ter verklaring van de eigenschappen der verschillende staalsoorten vermoedelik niet nodig. De koërcitiefkracht van wolfraamstaal is n.l. ongeveer even groot als die van de hier beschouwde staalsoort, en nog grotere koërcitiefkrachten zijn niet waargenomen.

IV. Nikkel en kobalt.

De figuur 11, betrekking hebbende op een nikkeldraad, geeft een verzadigingsmagnetisatie aan van 1500 eenheden bij een

koërcitiefkracht van 2,25 eenheden. De orde van grootte van $-(\Theta + \delta)$ kan dus geschat worden op $2{,}25 : 1500 = 0{,}0015$.

Voor kobalt vindt men uit fig. 12 voor deze grootheid de orde van grootte $3{,}5 : 2900 = 0{,}0012$.

§ 6. *Een en ander over het mechanisme van het magnetiseringsproces.*

We kunnen, met het oog op de gemakkelikheid waarmee week ijzer kan worden gemagnetiseerd, zonder bezwaar aannemen, dat in een verzadigd gemagnetiseerde, lange staaf van dit metaal nagenoeg alle elementairkristallen in de richting der magnetisatie verzadigd magneties zijn. We zijn tot de konklusie gekomen, dat onder deze omstandigheden er langgerekte reeksen van elementairkristallen zijn, langgerekt in de richting der magnetisatie, die in zekere zin als zelfstandige aggregaten kunnen worden beschouwd en waarin bij het negatief worden van het uitwendige veld alle delen gelijktijdig en in onderling verband het teken hunner magnetisatie veranderen. Dat de vorming van dergelike ketens ook werkelik kan worden verwacht ziet men aan de in de §§ 2 en 3 behandelde voorbeelden, waarbij twee met de lange assen in elkaars verlengde liggende ellipsoiden in magnetisch opzicht een zeer uitgesproken samenhang bleken te kunnen vertonen. Wanneer we trouwens het veld beschouwen, dat op een binnen een stuk ijzer liggend elementairkristal werkt tengevolge van de magnetisatie der omgevende kristallen is het wel duidelik, dat het magneties gedrag van dat kristal in hoofdzaak samenhang zal moeten vertonen met de naburen, die er een rij mee vormen in de richting van de magnetisatie.

Beschouw nu de in fig. 9 weergegeven magnetisatiekrommen voor een weke en een door uitrekking geharde ijzerdraad. Blijkbaar wordt het weke ijzer veel gemakkeliker gemagnetiseerd en ontmagnetiseerd dan het geharde. Men kan dit feit begrijpelijk maken door de zeer plausibele onderstelling, dat in week ijzer de elementairkristallen a priori een veel geringere samenhang hebben dan in het geharde metaal. Hierdoor zal in het eerste geval de vorming van samenhangende ketens, die zich uitsluitend naar het uitwendige veld en naar de magnetisatie richten, gemakkeliker plaats hebben dan in het tweede; in het eerste geval zullen zodoende meer kristallen deel uit-

maken van de aggregaten, die aan de hysterese en het gemakkelik magnetiseerbaar zijn meewerken, dan in het tweede, terwijl in dit tweede geval de aggregaten, die zich wèl naar de magnetisatie en het uitwendig veld richten, en waarin dus de door deze oorzaken in het leven geroepen samenhang door een mechaniese samenhang wordt gesteund, een sterke hysterese moeten bezitten en daardoor tot een grotere koërcitiefkracht aanleiding kunnen geven. We willen verder op deze kwestie niet ingaan omdat we daardoor te veel in gissingen zouden moeten vervallen.

Van belang is echter nog de opmerking, dat het in hoofdstuk II, § 3, besproken effekt van THOMSON en NEWALL op grond van onze hypothesen op zeer aannemelike wijze kan worden verklaard. Verdeelt men n.l. een ijzeren staaf in twee stukken, dan wordt daarbij zonder twijfel de oorspronkelik aanwezige samenhang tussen verschillende elementair-kristallen verbroken, en dat dit van invloed kan zijn op de magnetiese eigenschappen spreekt vanzelf.

§ 7. *Over de orde van grootte der initiaal-susceptibiliteit.*

In hoofdstuk II, § 3, werd opgemerkt, dat het begin van het magnetiseringsproces omkeerbaar is; wanneer men op een niet-magneties stuk ijzer een veld laat werken gaat er pas hysterese optreden wanneer de sterkte van dit veld een bepaald bedrag heeft overschreden. We moeten ons dus voorstellen, dat niet onmiddellik tussen de verschillende kristallen de samenhang aanwezig is, die tot hysterese aanleiding geeft. Wel mag men aannemen, dat de vorming der hiervoor nodige aggregaten zeer spoedig begint, en dat in een eenmaal gevormd aggregraat de samenstellende kristalletjes reeds bij zwakke uitwendige velden de magnetiese verzadiging nabij komen [1]). Het ontstaan van de

---

[1]) In tegenstelling hiermee gaat EWING (*Phil. Mag.* Vol. 43, 1922, p. 493) uit van de onderstelling dat ook in niet gemagnetiseerd ijzer alle kristallen magneties verzadigd zijn: naar buiten wordt echter van magnetisatie pas iets merkbaar wanneer door een uitwendig veld voor een aantal van deze kristallen de richting der magnetisatie is veranderd. Op grond van deze voorstelling komt nu EWING in konflikt met experimentele gegevens, en dit konflikt heeft hem er toe geleid z'n model te verwerpen en door een ander,

definitieve samenhang zal men zich n.l. zó moeten denken dat eerst onder invloed van het uitwendige veld een kleine magnetisatie ontstaat, en dat dan de kristallen, die het meest door dit veld zijn beïnvloed, op hun naburen een magnetiserende werking gaan uitoefenen; waardoor na enige tijd de magnetisatie sneller gaat toenemen dan aanvankelik het geval was. Dat zich daarbij cohaerente ketens zullen vormen in de richting der magnetisatie is duidelik, en verder is op ongedwongen wijze verklaard waarom de eerste helft van de aanloopkromme van een ferromagneties metaal de gedaante heeft, die b.v. door fig. 6 wordt aangegeven.

De initiaal-susceptibiliteit varieert voor ijzer en verschillende staalsoorten tussen 185 en 50, bedraagt voor nikkel ongeveer 40, en voor kobalt 75. We kunnen deze getallen in verband brengen met de grootheden A en Θ voor de tans individueel te beschouwen elementairkristallen, waaruit de genoemde metalen zijn opgebouwd. Ketens van deze kristallen hebben zich in het beginstadium der magnetisering natuurlik nog niet in noemenswaard aantal gevormd en voorzover ze reeds aanwezig zijn in de niet-magnetiese toestand is er geen voorkeur-richting voor hunne assen, en zal dus van de invloed van een zeer zwak veld in eerste benadering kunnen worden verwaarloosd. Is nu ε de fraktie van de kristallen die wèl op zulk een veld reageeren, en M de gemiddelde magnetisatie dier kristallen, dan is de magnetisatie van het aggregaat

$$M = \varepsilon \, \mathrm{M}.$$

---

minder bevredigend en veel gekompliceerder te vervangen (Ewing, loc. cit.). De bedoelde moeilikheid is de volgende:

„Het is bekend dat bij het magnetiseringsproces, zolang dit omkeerbaar is, de magnetisatie hoogstens 1 % bedraagt van de verzadigingsmagnetisatie. Reeds wanneer deze geringe magnetisatie is bereikt zouden dus kristallen van magnetisatierichting moeten gaan veranderen. Ewing, die uitgaat van magneetjes met eindige lengte, vindt nu dat dit alleen mogelik is wanneer de lengte van deze magneetjes niet te klein is in vergelijking met hun onderlinge afstand. Deze voorwaarde leidt echter tot de konsekwentie dat de magnetiese velden, die nodig zouden zijn om dan in de kristallen een richtingsverandering in de magnetisatie teweeg te brengen, veel sterker zijn dan aan de werkelikheid beantwoordt".

Het is duidelik dat op de in dit proefschrift ontwikkelde theorie dit bezwaar geen vat heeft.

Is nu voor een dezer laatste kristallen A de ontmagnetiseringskoëfficiënt in de richting der magnetisatie, dan bevindt het zich krachtens de magnetisatie van de omgeving in een veld van de sterkte

$$H + A\,M,$$

zodat de gemiddelde magnetisatie ongeveer zal moeten bedragen

$$\mathrm{M} = \frac{H + \bar{A}\,M}{\bar{\mathrm{A}}},$$

in welke formule $\bar{A}$ een gemiddelde voorstelt van de ontmagnetiseringskoëfficiënten A, terwijl $\bar{\mathrm{A}} = \bar{A} + \Theta$. Uit de gevonden gelijkheden kan nu worden afgeleid

$$H = \frac{\bar{A}\,(1 - \varepsilon) + \Theta}{\varepsilon}\,M, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5, 11)$$

welke formule een schatting geeft voor ε zodra $\bar{A}$, Θ en de initiaalsusceptibiliteit bekend zijn.

AFDELING C.

Atomistiese theorie van het ferromagnetisme.

HOOFDSTUK VI.

Berekening van de energie van dipoolstelsels met kubiese symmetrie.

§ 1. *Over het gedrag van dipoolnetten met kubiese symmetrie in magnetiese velden.*

Wil men zich op grond van het met de RÖNTGEN-spektroskopie verkregen inzicht in de bouw der ferromagnetiese metalen en in verband met de in de inleiding besproken hypothese van EWING een beeld vormen van het mechanisme der verschijnselen, die men bij deze metalen kan waarnemen, dan zal men moeten aannemen dat in ieder atoom een vrij draaibaar magneetje met konstant moment aanwezig is, of wel dat elk atoom in z'n geheel als een zodanig magneetje kan worden beschouwd. In ieder geval zal men dus hebben na te gaan hoe zich in konstante en langzaam veranderlike magnetiese velden stelsels van magneetjes zullen gedragen, die gerangschikt zijn in kubiese, gecentreerd-kubiese of vlak-gecentreerd-kubiese netten.

We denken ons daartoe binnen een ellipsoide een stelsel van vrij draaibare magneetjes, die geplaatst zijn in de roosterpunten van een of ander net met kubiese symmetrie. De afmetingen dezer magneetjes onderstellen we zó klein ten opzichte van de netkonstante d dat we ze als dipolen mogen beschouwen: de orientatie van het net ten opzichte van de ellipsoide is willekeurig.

Laat nu volgens een der assen van de ellipsoide een magneties veld van de sterkte H_x werken: de richting van dit veld nemen we tot x-richting. Wanneer H_x zeer groot is zullen

natuurlik alle dipolen volgens de x-as gericht zijn. Laat men echter in deze toestand H_x afnemen, dan zal er een ogenblik komen, waarop dit ophoudt het geval te zijn. Is op dit ogenblik H_x negatief, dan ligt het voor de hand aan te nemen dat zich plotseling alle dipolen gaan richten volgens de negatieve x-as: is evenwel H_x nog positief, dan moet met verschillende mogelikheden rekening worden gehouden. In de eerste plaats kan men zich voorstellen, dat alle dipolen op gelijke wijze van richting zullen veranderen: het is echter even goed denkbaar dat ze zich in verschillende groepen splitsen, zodanig dat van elke groep de dipolen dezelfde richting hebben, maar aan verschillende groepen verschillende richtingen beantwoorden.

Natuurlik zal de wijze, waarop de dipolen in groepen worden ingedeeld, ten nauwste samenhangen met de struktuur van het net, en dus in ieder geval een zekere regelmaat moeten vertonen. Het ligt voor de hand daarbij aan te nemen, dat de groepen onderling gelijkwaardig zijn, en dus b.v. alle een gelijk aantal dipolen zullen herbergen. Teneinde een idee te krijgen van de soort van groepindelingen, die men kan verwachten, beschouwen we eerst eens een vlak rechthoekig net en nemen aan dat in de binnen een bepaalde cirkel C gelegen roosterpunten magnetiese dipolen zijn geplaatst, alle met hetzelfde moment, die in het vlak vrij kunnen ronddraaien. Het is duidelik, dat het hiermee verkregen stelsel de kleinst mogelike energie heeft wanneer de dipolen zich ongeveer hebben ingesteld zoals dat in fig. 41 wordt aangegeven.

Laten we nu in horizontale richting een steeds sterker wordend magneties veld H werken, dan zullen de dipolen hoe langer hoe meer de richting van dat veld gaan aannemen en zich ten slotte geheel in deze richting instellen. Neemt in deze toestand het veld weer af, dan is het duidelik dat, afgezien van een mogelike verwisseling van de beide richtingen loodrecht op de veldrichting, in omgekeerde volgorde dezelfde reeks van toestanden zal worden doorlopen als bij het toenemen van het veld gebeurde.

De dipolen van het stelsel splitsen zich dus bij afname van het veld werkelik in twee gelijkwaardige groepen. Om deze groepen te karakteriseren merken we op dat de dipolen kunnen worden ingedeeld in de op de evenwijdige lijnen a, b, c, enz., gelegen rijen. Elke groep bevat de helft van deze rijen, en wel

behoren steeds de dichtst bij elkaar gelegen rijen tot verschillende groepen. Wanneer het uitwendige veld nul is hebben de dipolen van de ene groep alle dezelfde richting, evenwijdig aan de genoemde lijnen, terwijl de richting van de dipolen van de andere groep daaraan tegengesteld is.

Het ligt nu voor de hand te onderstellen dat zich analoge verschijnselen zullen voordoen wanneer dipolen gerangschikt zijn in de roosterpunten van een ruimtenet, dat door een ellipsoide wordt begrensd. Laat b.v. gegeven zijn, dat een dergelik stelsel

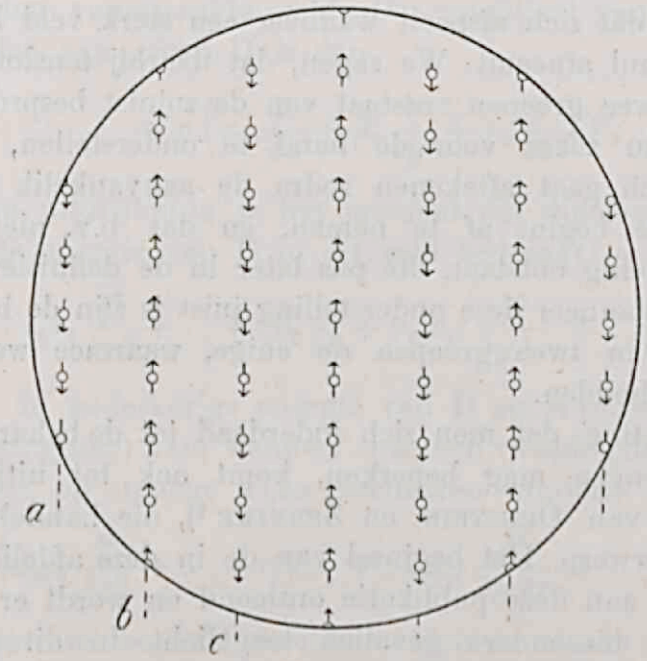

Fig. 41.

van dipolen door een uitwendig veld in de richting van de langste as verzadigd gemagnetiseerd is, en dat deze magnetisatie niet gehandhaafd blijft wanneer men het veld langzaam tot nul laat afnemen. Men is dan zeker geneigd aan te nemen, dat de dipolen zich ten slotte instellen op zodanige wijze, dat de eksemplaren, die gelegen zijn op een aan een bepaalde symmetrie-as van het net evenwijdige lijn, alle eenzelfde richting zullen hebben evenwijdig aan die as, maar dat daarbij de op twee naburige lijnen gelegen dipolen grote kans lopen tegengesteld gericht te zijn, terwijl in ieder geval de beide

genoemde richtingen even vaak vertegenwoordigd zullen zijn.

Het is duidelik dat op deze wijze de dipolen, die eenzelfde richting hebben, een reeks van evenwijdige netvlakken zullen vullen. Men krijgt dus twee reeksen van netvlakken, die natuurlik ook onderling evenwijdig zijn, en wel zal de toestand zó zijn, dat in twee naburige netvlakken gelegen dipolen tegengesteld gericht zijn. De groepindelingen, waarmee men te doen krijgt, ontstaan dus wanneer men een reeks van evenwijdige netvlakken beschouwt, en deze beurtelings voegt bij de ene en de andere groep.

We keren nu terug tot ons stelsel van dipolen en beschouwen het proces, dat zich afspeelt wanneer een sterk veld langzamerhand tot nul afneemt. We zagen, dat daarbij tenslotte een indeling in twee groepen ontstaat van de zojuist besproken soort. Het ligt nu zeker voor de hand te onderstellen, dat deze indeling zich gaat aftekenen zodra de aanvankelik verzadigde magnetisatie begint af te nemen, en dat b.v. niet eerst een andere indeling ontstaat, die pas later in de definitieve indeling overgaat. Wanneer deze onderstelling juist is zijn de beschouwde *indelingen in twee groepen de enige, waarmee we rekening* hebben te houden.

De opvatting, dat men zich inderdaad tot de behandeling van deze indelingen mag beperken, komt ook tot uiting in een publikatie van Ornstein en Zernike [1]), die handelt over hetzelfde onderwerp. Het beginsel van de in deze afdeling te geven theorie is aan deze publikatie ontleend en wordt er aan enige eenvoudige biezondere gevallen toegelicht. In dit proefschrift zullen de berekeningen algemener worden opgezet, en daardoor tamelik veel ingewikkelder worden. We zullen ons ook niet bepalen tot het geval, waarbij het uitwendige veld de richting heeft van een der assen van de reeds beschouwde ellipsoide, maar de richting van dit veld willekeurig onderstellen.

§ 2. *Bepaling van de energie der beschouwde stelsels van dipolen.*

Beschouw de ellipsoide van zoeven, waarbinnen magnetiese dipolen geplaatst zijn in de roosterpunten van een net met

---

1) *Versl. K.A.W. Amsterdam*, deel XXVII, 1918, p. 396.

kubiese symmetrie. De dipolen denken we op regelmatige wijze verdeeld in twee groepen I en II: voor de eerste groep zijn α_1, β_1, γ_1 de richtingscosinussen van het magnetiese moment, voor de tweede α_2, β_2, γ_2.

Stel nu dat een dipool D van groep I zich onafhankelik van de rest R van die groep kan bewegen, en laat α_0, β_0, γ_0 de cosinussen zijn voor D. Voor de wederkerige energie van D en van groep II kan dan gemakkelik een geschikte uitdrukking worden opgeschreven.

Denk daartoe de dipolen van groep II een ogenblik door eenheidspolen vervangen, en laat V de potentiaal zijn van het door deze polen veroorzaakte veld. De potentiaal van het veld van de dipolen van groep II is dan

$$-p\left(\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_2\frac{\partial}{\partial z}\right)V,$$

in welke uitdrukking p het moment der dipolen voorstelt. De potentiele energie van D in dit veld bedraagt:

$$-p^2\left\{\alpha_0\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ldots+(\beta_0\gamma_2+\gamma_0\beta_2)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+\ldots\right\}V(\mathrm{D}) \quad (6,1)$$

en voor de wederkerige energie van D en R (de overige dipolen der eerste groep) kan, wanneer men een tweede potentiaalfunktie U invoert, op analoge wijze geschreven worden:

$$-p^2\left\{\alpha_0\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ldots+(\beta_0\gamma_1+\gamma_0\beta_1)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+\ldots\right\}U(\mathrm{D}), \quad (6,2)$$

zodat allereerst bepaald moeten worden de tweede afgeleiden van de funkties U en V ter plaatse van de dipool D.

Om de tweede afgeleiden van $U+V$ te vinden beschouwen we de uitdrukking

$$-p^2\left\{\alpha_0\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ldots+(\beta_0\gamma_1+\gamma_0\beta_1)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+\ldots\right\}\{U(\mathrm{D})+V(\mathrm{D})\},$$

die de wederkerige energie aangeeft van D enerzijds en de groepen R en II anderzijds wanneer deze laatste beide de richting $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ hebben. Teneinde de in deze uitdrukking voorkomende tweede differentiaalquotienten te bepalen denken we ons het net van dipolen ook buiten de ellipsoide voortgezet, maar daar ter plaatse door een met konstante dichtheid over de ruimte verdeeld magneties moment geneutraliseerd. Wanneer

we aannemen dat op een volume ω^3 één dipool voorkomt moet natuurlik de dichtheid van dit moment bedragen $-p\,\omega^{-3}$ eenheden.

Voor de energie van de dipool D in het hiermee verkregen magnetiese veld schrijven we:

$$-p^2\left\{\alpha_0\,\alpha_1\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ldots+(\beta_0\,\gamma_1+\gamma_0\,\beta_1)\,\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+\ldots\right\}W(\mathrm{D})$$

en we maken dan verder gebruik van de benaderingsformules

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{U(\mathrm{D})+V(\mathrm{D})\}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,W(\mathrm{D})\ \text{enz.},$$

en

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\{U(\mathrm{D})+V(\mathrm{D})\}=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\,W(\mathrm{D}),\ \text{enz.}\ \ldots.\ (6,3)$$

Merkbare afwijkingen van deze formules treden alleen op in de onmiddelike nabijheid van het oppervlak van de ellipsoide[1]):

---

[1]) Van de graad der benadering krijgt men een idee wanneer men van de op blz. 97 voorkomende formules voor

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}\quad\text{en}\quad\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}$$

gebruik maakt. Men heeft b.v.:

$$\left|\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}\right|<\frac{8\pi^2}{a^3\,b}\sum_m\sum_n\frac{m^2}{k_{mn}}\,e^{-k_{mn}z},$$

en door in het rechterlid te substitueren $a=b=\omega$ komt men tot:

$$\left|\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}\right|<\frac{4\pi}{\omega^3}\sum_m\sum_n\frac{m^2}{\sqrt{m^2+n^2}}\,e^{-\frac{2\pi z}{\omega}\sqrt{m^2+n^2}}.$$

De dubbele som kan nu benaderd worden door de integraal

$$\int\int\frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,e^{-\frac{2\pi z}{\omega}\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,d\xi\,d\eta,$$

in het (ξ,η)-vlak genomen over het gebied binnen het eerste kwadrant, dat gelegen is buiten een met straal $^1/_2$ om de oorsprong getrokken cirkel. Door invoering van poolkoördinaten vindt men voor deze integraal:

$$\left(1+\frac{2\omega}{\pi z}+\frac{2\omega^2}{\pi^2 z^2}\right)\frac{\omega}{8\pi z}\,e^{-\frac{\pi z}{\omega}},$$

de formules zijn dus voor bijna alle dipolen van het stelsel bruikbaar en geven derhalve voor de totale energie een betrouwbare benadering. Eerst moeten nu de grootheden

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \ldots \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z}, \ldots$$

bepaald worden. We kunnen dit doen door uit te gaan van de uitdrukking

$$-p^2 \left\{ \alpha_0 \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots + (\beta_0 \gamma_1 + \gamma_0 \beta_1) \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z} + \ldots \right\} W'(\mathrm{D}),$$

waarmee men te doen krijgt wanneer men zich de homogene magnetisatie met dichtheid $-p\,\omega^{-3}$ ook binnen de ellipsoide voortgezet denkt en vervolgens de aan de binnen de ellipsoide

---

hetgeen voor $z > \omega$ kleiner is dan

$$\frac{\omega}{4\pi z}\, e^{-\frac{\pi z}{\omega}}.$$

Stel nu dat voor een punt P, op afstand z van een vlak σ gelegen, de tweede afgeleiden moeten worden bepaald van de potentiaal van een stelsel in σ gelegen eenheidspolen, waarvan er per oppervlak ω^2 één voorkomt. De uitdrukking

$$\frac{1}{\omega^3}\, \frac{\omega}{z}\, e^{-\frac{\pi z}{\omega}}$$

geeft dan een schatting van de fout, die gemaakt wordt wanneer men de lading homogeen verdeeld denkt over een laag met dikte ω. De fouten, die men bij de toepassing van de formules (6, 3) maakt wanneer z de afstand is van D tot het oppervlak van de ellipsoide, kunnen nu begroot worden op

$$\frac{1}{\omega^3} \int_z^\infty \frac{e^{-\frac{\pi z}{\omega}}}{z}\, dz,$$

welke uitdrukking voor $z = n\omega$ kleiner is dan

$$\frac{1}{\omega^3} \int_{n\omega}^\infty \frac{e^{-\frac{\pi z}{\pi}}}{n\omega}\, dz = \frac{1}{\omega^3}\, \frac{e^{-\pi n}}{\pi n}.$$

Stelt men hierin $n = 3$, dan krijgt men reeds $\frac{0{,}0002}{\omega^3}$, zodat de benadering meer dan voldoende is.

aanwezige magnetisatie beantwoordende bijdragen

$$\frac{\partial^2 W''}{\partial x^2}, \cdots \qquad \frac{\partial^2 W''}{\partial y\, \partial z}, \cdots$$

in mindering brengt. Men heeft dan:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W''}{\partial x^2}, \cdots \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 W'}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 W''}{\partial y\, \partial z}, \cdots \quad (6, 4)$$

Om de waarden van

$$\frac{\partial^2 W'}{\partial x^2}, \cdots \qquad \frac{\partial^2 W'}{\partial y\, \partial z}, \cdots$$

te vinden beschouwen we een deel S van de ruimte, dat op aanmerkelike afstand van D is gelegen. Binnen dit volume bevinden zich een aantal magnetiese dipolen en verder een homogene magnetisatie, waardoor deze dipolen zoveel mogelik worden geneutraliseerd: de bijdragen van het volume S tot de opgeschreven grootheden stellen we voor door:

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}, \cdots \qquad \frac{\partial^2 w'}{\partial y\, \partial z}, \cdots$$

Blijkbaar zijn deze grootheden de tweede afgeleiden van de potentiaalfunktie w' van de ladingsverdeling, die men verkrijgt door de dipolen te vervangen door eenheidspolen en de magnetisatie door een homogene lading met dichtheid $-\omega^{-3}$. Is R de afstand van D tot een punt van S, dan is w' van de orde van SR^{-3}, en zijn de tweede afgeleiden dezer funktie van de orde van SR^{-5}: deze afgeleiden kunnen dus zonder bezwaar over de gehele ruimte worden gesommeerd [1]).

Voor volumina S, die D niet bevatten, is ter plaatse van die dipool voldaan aan de vergelijking van LAPLACE $\Delta w' = 0$, terwijl voor het volume dat D bevat, tengevolge van de aanwezigheid der homogene lading, geldt: $\Delta w' = \omega^{-3}$. Bij het sommeren over alle volumina vindt men dus:

$$\frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W'}{\partial z^2} = \omega^{-3},$$

en wanneer we de hoofdrichtingen van het kubiese net tot

---

[1]) Merk op, dat de som der funkties w' divergeert en men dus niet mag schrijven: $W' = \Sigma w'$.

koördinaatassen kiezen mogen we op grond van symmetrie-overwegingen schrijven:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 W'(D)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 W'(D)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W'(D)}{\partial z^2} = \frac{1}{3\omega^3} \\ \frac{\partial^2 W'(D)}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^2 W'(D)}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2 W'(D)}{\partial x\,\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6, 5)$$

Het is gemakkelik in te zien dat, wanneer deze formules op één assenstelsel gelden, ze voor elk assenstelsel juist moeten zijn. Dus kunnen we verder zonder bezwaar gebruik maken van het stelsel dat door de assen van de ellipsoide wordt bepaald.

De waarden van de grootheden

$$\frac{\partial^2 W''}{\partial x^2}, \ldots, \qquad \frac{\partial^2 W''}{\partial y\,\partial z} \ldots$$

ten opzichte van deze assen zijn nu gemakkelik te bepalen. Wanneer n.l. A, B en C de ontmagnetiseringskoëfficiënten zijn volgens deze assen zijn de komponenten van het ontmagnetiserende veld der homogene magnetisatie:

$$\alpha_1 A \frac{p}{\omega^3} \qquad \beta_1 B \frac{p}{\omega^3} \qquad \gamma_1 C \frac{p}{\omega^3}$$

en bedraagt dus de energie van de dipool D in het veld dezer magnetisatie

$$-\frac{p^2}{\omega^3}(\alpha_0\alpha_1 A + \beta_0\beta_1 B + \gamma_0\gamma_1 C).$$

Daar deze uitdrukking identiek moet zijn met

$$-p^2 \left\{ \alpha_0\,\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots + (\beta_0\,\gamma_1 + \gamma_0\,\beta_1) \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z} + \ldots \right\} W''$$

vinden we:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 W''}{\partial x^2} &= \frac{A}{\omega^3}, \quad \frac{\partial^2 W''}{\partial y^2} = \frac{B}{\omega^3}, \quad \frac{\partial^2 W''}{\partial z^2} = \frac{C}{\omega^3} \\ \frac{\partial^2 W''}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^2 W''}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2 W''}{\partial x\,\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6, 6)$$

We komen derhalve tot het resultaat, dat ter plaatse van de dipool D gelden de formules

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{3\omega^3}(1-3A),\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{3\omega^3}(1-3B),\ \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{1}{3\omega^3}(1-3C) \\ \text{en} \\ &\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6, 7)$$

Voeren we nu in de homogeen kwadratiese funktie

$$2T = \frac{x^2}{6\omega^3}(1-3A) + \frac{y^2}{6\omega^3}(1-3B) + \frac{z^2}{6\omega^3}(1-3C) \quad (6, 8)$$

dan is

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{U(\mathrm{D}) + V(\mathrm{D})\} = 2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ enz.,} \ldots\ldots\ldots (6, 9)$$

en wanneer we daarnaast nog een homogeen kwadratiese funktie S definieren door de voorwaarden

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{U(\mathrm{D}) - V(\mathrm{D})\} = 2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \text{ enz. } \ldots\ldots (6, 10)$$

komen we tot de formules

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(\mathrm{D}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T+S), \text{ enz.} \\ \text{en} \\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(\mathrm{D}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T-S), \text{ enz.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6, 11)$$

De invoering van de funkties S en T geeft enig voordeel omdat T alleen afhangt van de gedaante der beschouwde ellipsoide en S alleen van de bouw van het net van dipolen.

§ 3. *De definitieve uitdrukking voor de energie van het beschouwde stelsel van dipolen.*

Geef de dipool D weer de richting van de groep R, stel dus $\alpha_0 = \alpha_1$, enz., dan hebben alle dipolen van groep I weer dezelfde richting. Neem verder aan dat de verdeling in groepen zodanig is dat, wanneer voor D een willekeurige dipool van de groep gekozen wordt, de tweede afgeleiden van de funktie S steeds dezelfde waarden hebben: met de funkties U en V is dat dan ook het geval en in hoofdstuk VIII zal blijken, dat de hiermee

gestelde beperking bij geen der te geven toepassingen tot moeilikheden aanleiding geeft.

Voor de wederkerige energie van D en de groep R mag nu worden geschreven:

$$-p^2\left\{\alpha_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+2\beta_1\gamma_1\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}+..\right\}U(\mathrm{D})$$

en van dit bedrag moet aan D zelf de helft worden toegekend. Daar op een volume $2\omega^3$ één dipool van groep I voorkomt bedraagt de eigen energie van deze groep per cM³.:

$$E_1=-\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{\alpha_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+2\beta_1\gamma_1\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+..\right\}U(\mathrm{D})$$

Voor de wederkerige energie van D en groep II heeft men

$$-p^2\left\{\alpha_1\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+(\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+..\right\}V(\mathrm{D}),$$

zodat voor de wederkerige energie der beide groepen per cM³. in rekening moet worden gebracht het bedrag

$$E_{12}=-\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{\alpha_1\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+(\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+..\right\}V(\mathrm{D}).$$

Uit de symmetrie dezer uitdrukking blijkt dat we dezelfde tweede afgeleiden $\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(\mathrm{D}')$, enz. zouden hebben gevonden wanneer we van een dipool D' van groep II waren uitgegaan. Hieruit volgt direkt dat voor de eigen energie per cM³. van groep II, naar analogie met de uitdrukking voor E_1, mag worden geschreven:

$$E_2=-\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{\alpha_2^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+2\beta_2\gamma_2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+..\right\}U(\mathrm{D})$$

Daar steeds tweede afgeleiden bedoeld worden ter plaatse van de dipool D kan het argument (D) verder zonder bezwaar worden weggelaten.

Bij het opmaken van de totale energie per cM³. van het dipolenstelsel moet tenslotte nog in rekening worden gebracht de energie ten opzichte van een uitwendig magneties veld.

Is H de intensiteit van dit veld, en zijn α, β, γ de richtingscosinussen, dan geeft dit een bijdrage

$$E_H = -\frac{p\,H}{2\omega^3}\{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+..\},$$

en in totaal komen we dus per cM^3. tot een energie

$$E = -\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+..+2(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}+..\right\}-$$
$$-\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{\alpha_1\alpha_2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+..+(\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+..\right\}-$$
$$-\frac{p\,H}{2\omega^3}\left\{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+..\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6,12)$$

of, wanneer we de funkties S en T invoeren:

$$E = -\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\alpha_1+\alpha)^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+..+2(\beta_1+\beta_2)(\gamma_1+\gamma_2)\frac{\partial^2 T}{\partial y\partial z}+..\right\}-$$
$$-\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+..+2(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z}+..\right\}-$$
$$-\frac{p\,H}{2\omega^3}\left\{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+..\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6,13).$$

§ 4. *De berekening van de tweede afgeleiden der funktie V.*

De in § 2 ingevoerde potentiaalfunktie V heeft betrekking op het veld, dat veroorzaakt wordt door eenheidspolen, die zich bevinden ter plaatse van de dipolen van groep II. Bij de te geven toepassingen blijken nu alleen groepindelingen in aanmerking te komen waarbij deze dipolen gerangschikt zijn in de roosterpunten van een enkel orthorhombies net, of van twee zulke netten: natuurlik strekken deze netten zich niet uit buiten de ellipsoide, die het aggregaat van dipolen begrenst.

De kennis van het veld, dat veroorzaakt wordt door eenheidspolen, die zich binnen deze ellipsoide bevinden en daar gerangschikt zijn in de roosterpunten van een orthorhombies net, is dus voor ons van belang. We hebben echter van dit veld alleen de tweede afgeleiden van de potentiaalfunktie nodig in punten binnen de ellipsoide.

Teneinde deze tweede afgeleiden te bepalen denken we ons het orthorhombiese net weer buiten de ellipsoide voortgezet,

maar daar ter plaatse geneutraliseerd door een homogene ruimtelading, waarvan we de dichtheid door $-\rho$ willen voorstellen. Deze homogene lading beschouwen we als de superpositie van een homogene lading met dichtheid ρ binnen de ellipsoide, en van de ladingsverdeling die van de oorspronkelike alleen daarin verschilt dat de homogene lading ook binnen de ellipsoide is doorgedrongen. De potentiaal van deze lading binnen de ellipsoide stellen we voor door $-V''$.

Van een potentiaal der zich tot in het oneindige uitstrekkende ladingen kan niet worden gesproken omdat deze niet eindig zou zijn. We verdelen daarom de ruimte in lagen en maken voor de binnen elke laag gelegen ladingen de potentiaalfunktie v' op, om tenslotte de gelijknamige tweede afgeleiden dezer funkties te sommeren. We stellen dan

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} = \sum \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}, \text{ enz.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6, 14)$$

en maken verder gebruik van de aan de formules (6, 3) analoge benaderingsformules

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V''}{\partial x^2}, \ldots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^2 V'}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 V''}{\partial y\,\partial z}, \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (6, 15)$$

We geven nu eerst een methode aan [1]), volgens welke de grootheden $\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2}$ enz. kunnen worden bepaald. Laat a, b en c de ribben zijn van een elementair-parallelepipidum van het orthorhombiese net. Kiezen we een roosterpunt tot oorsprong, en de hoofdrichtingen van het net tot koördinaatassen, dan kunnen we de koördinaten van de roosterpunten voorstellen door

$$x = p\,a \qquad y = q\,b \qquad z = r\,c,$$

waarbij

$$p,\ q,\ r = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

---

[1]) De methode is ontleend aan een publikatie van L. S. Ornstein en F. Zernike (*Verslagen K.A.W. Amsterdam*, deel XXVII, 1918, p. 896) en aan een van E. Madelung (*Physik. Zs.*, 1918, S. 524): op het divergeren der potentiaalfunktie V' wordt echter in deze publikaties niet gelet. Zie voor litteratuur: M. Born, *Atomtheorie des festen Zustandes*, 2e Aufl. 1923, S. 714, u. s. w.

We verdelen nu de ruimte in lagen door de evenwijdige vlakken, die tot vergelijkingen hebben

$$z = \pm \tfrac{1}{2}c, \qquad z = \pm \tfrac{3}{2}c, \qquad z = \pm \tfrac{5}{2}c, \ldots$$

en beschouwen de potentiaal v' van de ladingen tusschen de vlakken

$$z = \tfrac{1}{2}c \qquad \text{en} \qquad z = -\tfrac{1}{2}c.$$

We stellen deze potentiaal voor door de FOURIER-reeks

$$v' = Z_{00} + \sum_m \sum_n Z_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi xy}{b} \ldots . \quad (6, 16)$$

waarin de koëfficiënten Z_{mn} functies voorstellen van z alleen.

Daar de homogene lading niet periodiek is in x en y en de puntladingen dat wel zijn, kan de funktie Z_{00} alleen afhangen van de homogene lading binnen de laag, terwijl de andere funkties alleen met de puntladingen te maken hebben.

De funktie Z_{00} moet dus binnen de laag voldoen aan de gelijkheid

$$\frac{d^2 Z_{00}}{dz^2} = \rho = \frac{1}{abc} \ldots \ldots \ldots \quad (6, 17)$$

en buiten de laag aan

$$\frac{d^2 Z_{00}}{dz^2} = 0. \ldots \ldots \ldots \quad (6, 17a)$$

Daar het ons alleen om tweede afgeleiden te doen is, is de funktie zelf verder van geen belang. Wat de funktie Z_{mn} aangaat kunnen we opmerken dat voor $z \neq 0$ voldaan moet zijn aan de vergelijking van LAPLACE:

$$\Delta \sum_m \sum_n = \sum_m \sum_n \left\{ \frac{d^2 Z_{mn}}{dz^2} - 4\pi^2 Z_{mn} \left(\frac{m^2}{n^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right\} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{b} = 0,$$

dus aan:

$$\frac{d^2 Z_{mn}}{dx^2} - 4\pi^2 Z_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = 0$$

terwijl voor $z = \pm \infty$ moet gelden $Z_{mn} = 0$. We leiden hieruit af dat

$$Z_{mn} = C_{mn} e^{-k_{mn}|z|} \ldots \ldots \ldots \quad (6, 18)$$

moet zijn, waarin

$$k_{mn} = 2\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6, 19)$$

Bij de gevonden potentiaalfunktie behoort nu in het vlak $z = 0$ een ladingsverdeling, die gegeven wordt door de uitdrukking

$$2\left(\frac{\partial}{\partial z}\sum_m\sum_n\right)_{z=0} = 2\sum\sum k_{mn}\, C_{mn} \cos\frac{2\pi mx}{a} \cos\frac{2\pi ny}{b},$$

en door de in het probleem gegeven ladingsverdeling aan deze uitdrukking gelijk te stellen vindt men, op de voor de bepaling van FOURIER-koëfficiënten gebruikelike wijze, dat voor $m \neq 0$ en $n \neq 0$ geldt:

$$C_{mn} = \frac{2}{abk_{mn}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6, 20)$$

terwijl voor $m = 0$ of $n = 0$ slechts de helft van dit bedrag moet worden genomen. Afgezien hiervan vinden we dus:

$$v' = Z_{00} + \frac{2}{ab}\sum_m\sum_n \frac{e^{-k_{mn}|z|}}{k_{mn}} \cos\frac{2\pi mx}{a} \cos\frac{2\pi ny}{b},$$

waaruit voor $|z| < \frac{1}{2}c$ volgt:

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = \frac{8\pi^2}{a^3 b}\sum_m\sum_n \frac{m^2 e^{-k_{mn}|z|}}{k_{mn}} \cos\frac{2\pi mx}{a} \cos\frac{2\pi ny}{b}$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} = \frac{8\pi^2}{ab^3}\sum_m\sum_n \frac{n^2 e^{-k_{mn}|z|}}{k_{mn}} \cos\frac{2\pi mx}{a} \cos\frac{2\pi ny}{b}$$

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} = \frac{1}{abc} + \frac{2}{ab}\sum_m\sum_n k_{mn}\, e^{-k_{mn}|z|} \cos\frac{2\pi mx}{a} \cos\frac{2\pi ny}{b},$$

terwijl ook de gemengde differentiaalquotienten gemakkelik kunnen worden opgeschreven.

De analoge uitdrukkingen voor de andere lagen kunnen hieruit direkt worden afgeleid: door vervolgens de tweede afgeleiden naar x bij elkaar te tellen vinden we:

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} = \sum \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = \frac{8\pi^2}{a^3 b}\sum_m\sum_n \frac{m^2}{k_{mn}} \cos\frac{2\pi mx}{a} \cos\frac{2\pi ny}{b} \times$$

$$\times \left\{ e^{-k_{mn}(c-z)} + e^{-k_{mn}(2c-z)} + \ldots + e^{-k_{mn}z} + e^{-k_{mn}(z+c)} + e^{-k_{mn}(z+2c)} + \ldots \right\} =$$

$$= \frac{8\pi^2}{a^3 b}\sum_m\sum_n \frac{m^2}{k_{mn}} \frac{e^{-k_{mn}(c-z)} + e^{-k_{mn}z}}{1 - e^{-k_{mn}c}} \cos\frac{2\pi mx}{a} \cos\frac{2\pi ny}{b} \quad (6, 21)$$

en op dezelfde wijze:

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} = \frac{8\pi^2}{ab^3} \sum_m \sum_n \frac{n^2}{k_{mn}} \frac{e^{-k_{mn}(c-z)} + e^{-k_{mn}z}}{1 - e^{-k_{mn}z}} \cos\frac{2\pi m x}{a} \cos\frac{2\pi n y}{b}, \quad (6, 21a)$$

terwijl voor de tweede afgeleide naar z mag worden geschreven:

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} = \frac{1}{abc} + \frac{2}{ab} \sum_m \sum_n k_{mn} \frac{e^{-k_{mn}(c-z)} + e^{-k_{mn}z}}{1 - e^{-k_{mn}c}} \cos\frac{2\pi m x}{a} \cos\frac{2\pi n y}{b} \quad (6, 21b)$$

Voor de gemengde afgeleiden vindt men sommen met termen, waarin sinussen voorkomen.

Bij het gebruik dezer formules moet natuurlik steeds in het oog worden gehouden dat de termen met $m = 0$ of $n = 0$ slechts voor de helft in rekening moeten worden gebracht, terwijl de term met $m = n = 0$ ontbreekt.

Om de door (6, 15) gedefinieerde grootheden $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, enz. te vinden zijn nog nodig de tweede afgeleiden van de funktie V'', de potentiaal van een binnen onze ellipsoide aanwezige homogene lading met konstante dichtheid $-(a\,b\,c)^{-1}$.

Zijn weder A, B en C de ontmagnetiseringskoëfficiënten voor dit lichaam, dan zijn de tweede afgeleiden van V'' in de richtingen der assen:

$$\frac{A}{abc} \qquad \frac{B}{abc} \qquad \text{en} \qquad \frac{C}{abc}.$$

Zijn dus ξ, η, ζ deze assenrichtingen, dan heeft men:

$$\frac{\partial^2 V''}{\partial \xi^2} = \frac{A}{a\,b\,c}, \quad \frac{\partial^2 V''}{\partial \eta^2} = \frac{B}{a\,b\,c}, \quad \frac{\partial^2 V''}{\partial \zeta^2} = \frac{C}{a\,b\,c}, \quad (6, 22)$$

terwijl de gemengde differentiaalquotiënten gelijk zijn aan nul. De afgeleiden in andere richtingen kunnen hieruit gemakkelik gevonden worden, en door ze af te trekken van de uitdrukkingen voor

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2}, \text{ enz.} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial^2 V'}{\partial y\,\partial z}, \text{ enz.}$$

vinden we de gezochte tweede afgeleiden van de funktie V. Deze voldoen aan de gelijkheid:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6, 23)$$

HOOFDSTUK VII.

Het gedrag der beschouwde dipoolstelsels in magnetiese velden.

§ 1. *De extreem-voorwaarden voor de energie-funktie.*

Wil men nagaan hoe zich in een gegeven magneties veld de dipolen der in het vorige hoofdstuk beschouwde stelsels zullen instellen, dan zal men moeten onderzoeken wanneer, bij een gegeven indeling in groepen, de door de formule (6, 13) bepaalde energie E een minimum-waarde bereikt, en men zal vervolgens de grootte der minimum-waarden, die aan verschillende groepindelingen beantwoorden, moeten vergelijken.

We schrijven allereerst op de extreem-voorwaarden voor E bij gegeven groepindeling. Hierbij moet rekening worden gehouden met de identiteiten:

$$f_1 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \qquad f_2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \quad \ldots . \quad (7, 1)$$

Door onbepaalde koëfficiënten $\varkappa_1$ en $\varkappa_2$ in te voeren kunnen we de extreem-voorwaarden schrijven in de gedaante:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} + \varkappa_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{(\alpha_1 + \alpha_2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\beta_1 + \beta_2)\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} + (\gamma_1 + \gamma_2)\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial z}\right\} - \\
&\quad - \frac{p^2}{2\omega^3}\left\{(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + (\beta_1 - \beta_2)\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} + (\gamma_1 - \gamma_2)\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial z}\right\} - \\
&\qquad - \frac{pH}{2\omega^3}\alpha + 2\varkappa_1\alpha_1 = 0, \text{ enz.,} \\
&\text{en} \\
&\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} + \varkappa_2 \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} = -\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{(\alpha_1 + \alpha_2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\beta_1 + \beta_2)\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + (\gamma_1 + \gamma_2)\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}\right\} + \\
&\quad + \frac{p^2}{2\omega^3}\left\{(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + (\beta_1 - \beta_2)\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + (\gamma_1 - \gamma_2)\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z}\right\} - \\
&\qquad - \frac{pH}{2\omega^3}\alpha + 2\varkappa_2\alpha_2 = 0, \text{ enz.}
\end{aligned}\right\} \quad (7, 2)$$

Naast deze extreem-voorwaarden moeten nog minimum-voorwaarden of, fysies gesproken, stabiliteitsvoorwaarden in aanmerking worden genomen. Alvorens ons met de stabiliteit bezig te houden willen we echter nagaan of wel voldaan is aan een ander stel voor de hand liggende evenwichtsvoorwaarden, en onderzoeken tot welke stabiliteitsvoorwaarden deze nieuwe voorwaarden aanleiding geven.

§ 2. *Evenwicht en stabiliteit voor elke dipool afzonderlik.*

Onderstel dat bij een gegeven groepindeling in een bepaalde toestand aan de evenwichts-voorwaarden voldaan is, en dat aan die toestand een minimum van de funktie E beantwoordt. Een dergelike toestand kan alleen een fysies werkelike evenwichtstoestand zijn wanneer de energie toeneemt zodra we een of andere dipool van richting laten veranderen en daarbij de overige dipolen vasthouden. Om na te gaan of deze voorwaarde vervuld is bepalen we de energie E_0 van een dipool D ten opzichte van alle overige dipolen. Stel dat D weer behoort tot groep I, dan is de wederkerige energie van D en van de rest R van die groep:

$$-p^2\left\{\alpha_0\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+(\beta_0\gamma_1+\gamma_0\beta_1)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+..\right\}U$$

en die van D en de groep II:

$$-p^2\left\{\alpha_0\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+(\beta_0\gamma_2+\gamma_0\beta_2)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+..\right\}V$$

in welke uitdrukkingen α_0, β_0, γ_0 de richting van D bepalen. Voor de energie ten opzichte van het uitwendige veld heeft men de uitdrukking

$$-p\,\mathrm{H}\,(\alpha\alpha_0+\beta\beta_0+\gamma\gamma_0)$$

en in totaal vindt men, wanneer men de funkties T en S invoert:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_0=&-p^2\left[\alpha_0(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+..+\left\{\beta_0(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_0(\beta_1+\beta_2)\right\}\frac{\partial^2T}{\partial y\partial z}+..\right]-\\&-p^2\left[\alpha_0(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\partial^2S}{\partial x^2}+..+\left\{\beta_0(\gamma_1-\gamma_2)+\gamma_0(\beta_1-\beta_2)\right\}\frac{\partial^2S}{\partial y\partial z}+..\right]-\\&-p\,\mathrm{H}\,(\alpha\alpha_0+\beta\beta_0+\gamma\gamma_0).\end{aligned}$$

Door nu een onbepaalde koëfficiënt $\varkappa_0$ in te voeren kunnen we, in verband met de voorwaarde

$$f_0 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7, 3)$$

voor de evenwichtsvoorwaarden schrijven:

$$\frac{\partial E_0}{\partial \alpha_0} + 2\varkappa_0 \omega^3 \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_0} = -p^2 \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\beta_1 + \beta_2) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} \right\} -$$

$$- p^2 \left\{ (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + (\beta_1 - \beta_2) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + (\gamma_1 - \gamma_2) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} \right\} -$$

$$- p \, \mathrm{H} \, \alpha + 4\omega^3 \varkappa_0 \alpha_0 = 0, \text{ enz.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7, 4)$$

Aan deze gelijkheden en aan de voorwaarde (7, 3) is nu werkelik voldaan wanneer $\alpha_0 = \alpha_1$, enz., en wanneer, gelijk we ondersteld hebben, de gelijkheden (7, 1) en (7, 2) van kracht zijn. Men heeft blijkbaar: $\varkappa_0 = \varkappa_1$.

De bij de evenwichtsvoorwaarden (7, 4) behorende stabiliteitsvoorwaarden vindt men door de eis te stellen dat bij de mogelike variaties van $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ de funktie E_0 in tweede benadering zal toenemen. Daar E_0 in deze veranderliken lineair is geldt in elke benadering:

$$\delta E_0 = \frac{\partial E_0}{\partial \alpha_0} \delta \alpha_0 + \frac{\partial E_0}{\partial \beta_0} \delta \beta_0 + \frac{\partial E_0}{\partial \gamma_0} \delta \gamma_0 = -4\omega^3 \varkappa_0 (\alpha_0 \delta \alpha_0 + \beta_0 \delta \beta_0 + \gamma_0 \delta \gamma_0)$$

en daar

$$\alpha_0 \delta \alpha_0 + \beta_0 \delta \beta_0 + \gamma_0 \delta \gamma_0 + \tfrac{1}{2} (\delta \alpha_0^2 + \delta \beta_0^2 + \delta \gamma_0^2) = 0$$

mag hiervoor worden geschreven:

$$\delta E_0 = 2\omega^3 \varkappa_0 (\delta \alpha_0^2 + \delta \beta_0^2 + \delta \gamma_0^2).$$

De voorwaarde $\delta E_0 > 0$ voert dus eenvoudig tot $\varkappa_0 > 0$, en we mogen konkluderen dat voor stabiliteit van ons stelsel van dipolen nodig is dat

$$\varkappa_1 > 0 \qquad \text{en} \qquad \varkappa_2 > 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7, 5)$$

§ 3. *De stabiliteitsvoorwaarde.*

De uitdrukking (6, 12) voor E luidt:

$$E = -\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+2(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+..\right\}U-$$

$$-\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{\alpha_1\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+(\beta_1\gamma_2+\gamma_1\beta_2)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+..\right\}V-$$

$$-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\left\{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+..\right\}$$

De eerste variatie is dus

$$\delta_1 E=\frac{\partial E}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1+..+\frac{\partial E}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2+..=-2\varkappa_1(\alpha_1\delta\alpha_1+\beta_1\delta\beta_1+\gamma_1\delta\gamma_1)-$$

$$-2\varkappa_2(\alpha_2\delta\alpha_2+\beta_2\delta\beta_2+\gamma_2\delta\gamma_2).$$

Daar echter

$$2(\alpha_1\delta\alpha_1+\beta_1\delta\beta_1+\gamma_1\delta\gamma_1)+\delta\alpha_1^2+\delta\beta_1^2+\delta\gamma_2^2=0,\ \text{enz.}$$

mag hiervoor worden geschreven

$$\delta_1 E=\varkappa_1(\delta\alpha_1^2+\delta\beta_1^2+\delta\gamma_1^2)+\varkappa_2(\delta\alpha_2^2+\delta\beta_2^2+\delta\gamma_2^2),$$

en de som van eerste en tweede variatie is derhalve:

$$\delta E=+\varkappa_1(\delta\alpha_1^2+\delta\beta_1^2+\delta\gamma_1^2)+\varkappa_2(\delta\alpha_2^2+\delta\beta_2^2+\delta\gamma_2^2)-$$

$$-\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\delta\alpha_1^2+\delta\alpha_2^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+2(\delta\beta_1\delta\gamma_1+\delta\beta_2\delta\gamma_2)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+..\right\}U-$$

$$-\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{\delta\alpha_1\delta\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+(\delta\beta_1\delta\gamma_2+\delta\gamma_1\delta\beta_2)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}+..\right\}V.$$

We hebben nu voor verschillende gevallen na te gaan wanneer deze kwadratiese vorm positief is. De algemene theorie der kwadratiese vormen is daarbij niet bruikbaar omdat de veranderliken van elkaar afhankelik zijn. We diskussiëren daarom elk biezonder geval afzonderlik, behandelen daarbij eerst een eenvoudig geval, waarbij alles kan worden doorgerekend, en gaan daarna tot meer ingewikkelde gevallen over.

§ 4. *Bolvormige begrenzing van het aggregaat.*

In dit geval zijn alle ontmagnetiseringskoëfficiënten gelijk aan $\frac{1}{3}$ en is dus de door (6, 8) gedefinieerde funktie T identiek nul. Dus is

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\ , \text{ enz.}$$

en mag voor E worden geschreven

$$E = \frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+..+2(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}+..\right\}V- \\ -\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\left\{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+..\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (7, 6)$$

Kiezen we de koördinaatassen zo, dat de gemengde differentiaalquotienten nul worden, dan gaat dit over in

$$E = \frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(\beta_1-\beta_2)^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+(\gamma_1-\gamma_2)^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}- \\ -\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\left\{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+\beta(\beta_1+\beta_2)+\gamma(\gamma_1+\gamma_2)\right\}\ldots \quad (7, 7)$$

en voor de evenwichtsvoorwaarden vindt men hieruit:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{p^2}{2\omega^3}(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\alpha+2\varkappa_1\alpha_1=0\\
&\frac{p^2}{2\omega^3}(\beta_1-\beta_2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\beta+2\varkappa_1\beta_1=0\\
&\frac{p^2}{2\omega^3}(\gamma_1-\gamma_2)\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\gamma+2\varkappa_1\gamma_1=0\\
-&\frac{p^2}{2\omega^3}(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\alpha+2\varkappa_2\alpha_2=0\\
-&\frac{p^2}{2\omega^3}(\beta_1-\beta_2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\beta+2\varkappa_2\beta_2=0\\
-&\frac{p^2}{2\omega^3}(\gamma_1-\gamma_2)\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\gamma+2\varkappa_2\gamma_2=0
\end{aligned}\right\} \ldots.(7, 8)$$

Neem nu aan dat het uitwendige veld werkt in de x-richting. In dat geval is $\beta=\gamma=0$, en $\mathrm{H}\alpha=\mathrm{H}_x$. Wanneer H_x zeer

groot is hebben alle dipolen de richting van het veld en is dus

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ en } \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,$$

zodat de evenwichtsvoorwaarden leiden tot

$$-\frac{p\,H_x}{2\omega^3} + 2\varkappa_1 = 0 \qquad \text{en} \qquad -\frac{p\,H_x}{2\omega^3} + 2\varkappa_2 = 0$$

waaruit volgt:

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \frac{p\,H_x}{4\omega^3} = \varkappa.$$

We vragen ons nu af tot welk bedrag we H_x kunnen laten afnemen voordat deze toestand instabiel wordt. Variatie van E geeft blijkbaar de voorwaarde:

$$\delta E = \varkappa_1(\delta\alpha_1^2 + \delta\beta_1^2 + \delta\gamma_1^2) + \varkappa_2(\delta\alpha_2^2 + \delta\beta_2^2 + \delta\gamma_2^2) +$$

$$+ \frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\delta\alpha_1 - \delta\alpha_2)^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \ldots\right\} > 0.$$

De variaties $\delta\alpha_1$, $\delta\beta_1$, $\delta\gamma_1$, enz. zijn niet onafhankelik van elkaar: door $\delta\beta_1$ en $\delta\gamma_1$ is b.v. $\delta\alpha_1$ bepaald. Voor zover het termen betreft van de eerste orde heeft men hierbij

$$\alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1 = 0,$$

en daar in de beschouwde toestand $\alpha_1 = 1$ is en $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ heeft men in eerste benadering $\delta\alpha_1 = 0$. Evenzo is in eerste benadering $\delta\alpha_2 = 0$, en voor de stabiliteitsvoorwaarde mag dus geschreven worden:

$$\delta\beta_1^2\left(\varkappa_1 + \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) - 2\delta\beta_1\delta\beta_2\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \delta\beta_2^2\left(\varkappa_2 + \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ \delta\gamma_1^2\left(\varkappa_1 + \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) - 2\delta\gamma_1\delta\gamma_2\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \delta\gamma_2^2\left(\varkappa_2 + \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) > 0 \quad (7, 9)$$

waarbij

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa = \frac{p\,H_x}{4\omega^3}.$$

Daar de termen met $\delta\beta$'s en $\delta\gamma$'s van elkaar gescheiden voorkomen mag deze ongelijkheid worden vervangen door

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa + \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > 0 \text{ met } \left(\varkappa + \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)^2 > \left(\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)^2 \\ &\text{en} \\ &\varkappa + \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} > 0 \text{ met } \left(\varkappa + \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)^2 > \left(\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)^2. \end{aligned}\right\} (7,10)$$

Wanneer $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ en $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ positief zijn, zijn deze voorwaarden minder scherp dan de reeds gevonden voorwaarde $\varkappa > 0$. Is dit echter niet het geval, en is de kleinste van de twee, b.v. het quotient naar y, negatief, dan geven de opgeschreven voorwaarden:

$$\varkappa + \frac{p^3}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > 0 \quad \text{en} \quad \varkappa + \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > -\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

waaraan voldaan is wanneer

$$\varkappa = \frac{p\,\mathrm{H}_x}{4\omega^3} > -\frac{p^2}{2\omega^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

d. w. z

$$\mathrm{H}_x > -2p\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (7,11)$$

Het is nu niet moeilik aan te tonen, dat bij elke indelingswijze der dipolen minstens één indeling kan worden aangegeven, waarbij

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} < 0.$$

De funktie V voldoet nl. aan de vergelijking van LAPLACE, en wanneer bij een bepaalde indeling het opgeschreven differentiaalquotient niet reeds negatief is kan men er toch steeds door permutatie der assen een indeling uit afleiden waarvoor dit wel het geval is: alleen het geval waarbij alle tweede afgeleiden nul zijn vormt een onbelangrijke uitzondering.

Laat men nu inderdaad H_x van een of andere grote waarde tot nul afnemen, dan zal de toestand, waarbij $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ is, instabiel worden op het ogenblik dat voor een of andere indeling der dipolen aan de voorwaarde (7, 11) niet meer voldaan is: op dit ogenblik gaan zich de dipolen in de aan deze indeling beantwoordende groepen splitsen, en uit de stabiliteitsvoorwaarde

blijkt dat daarbij in de eerste plaats β_1 en β_2 zullen gaan veranderen. Op grond van symmetrie-overwegingen kan worden vermoed dat steeds zullen gelden de gelijkheden

$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad \beta_1 = -\beta_2 \qquad \gamma_1 = -\gamma_2$$

en inderdaad blijkt op deze wijze aan de voorwaarden (7, 8) te kunnen worden voldaan. Men vindt:

$$-\frac{p\,\mathrm{H}_x}{2\omega^3} + 2\varkappa_1\,\alpha_1 = 0, \qquad \frac{p^2}{\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,\beta_1 + 2\varkappa_1\,\beta_1 = 0$$

en

$$\frac{p^2}{\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,\gamma_1 + 2\varkappa_1\,\gamma_1 = 0,$$

waaruit, als $\beta_1 \neq 0$, volgt dat $\gamma_1 = 0$, en verder

$$\frac{p}{\omega^3}\,\alpha_1 = \frac{\mathrm{H}_x}{2p\,\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7, 12)$$

Blijkbaar geldt deze formule ook voor negatieve H_x, en in 't algemeen wanneer:

$$|\mathrm{H}_x| \leqq -\,2p\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7, 13)$$

Voor een sterk negatief veld is natuurlik $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ en zijn alle dipolen volgens dit veld gericht. Merk nu op dat

$$M_0 = \frac{p}{\omega^3}$$

de verzadigingsmagnetisatie moet zijn van het dipolenstelsel, en dat in het beschouwde geval

$$M_x = \frac{p}{\omega^3}\,\alpha_1$$

de magnetisatie is in de richting van de x-as. Het gevonden resultaat kan dus geschreven worden in de gedaante:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_0 \text{ voor } \mathrm{H}_x > -\,2p\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ M_x &= -\,\frac{\mathrm{H}_x}{2p\,\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}} \text{ voor } -\,2p\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > \mathrm{H}_x > 2p\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ M_x &= -\,M_0 \text{ voor } 2p\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > \mathrm{H}_x. \end{aligned}\right\} \quad (7, 14)$$

en de grafiese voorstelling, waarin M_x tegen H_x is uitgezet, heeft dezelfde gedaante als de in hoofdstuk IV verkregen fig. 28.

Wanneer we het veld H ten opzichte van het aggregaat van dipolen een willekeurige richting geven kunnen de hier verrichte berekeningen alleen numeriek doorgevoerd worden. Kiezen we de x-as in de veldrichting, dan hebben de evenwichtsvoorwaarden niet meer de gedaante (7, 8), maar luiden:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(\beta_1-\beta_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+(\gamma_1-\gamma_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right\}-\frac{pH_x}{2\omega^3}+2\varkappa_1\alpha_1=0\\
&\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+(\beta_1-\beta_2)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+(\gamma_1-\gamma_1)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right\}+2\varkappa_1\beta_1=0\\
&\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}+(\beta_1-\beta_2)\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}+(\gamma_1-\gamma_2)\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}+2\varkappa_1\gamma_1=0\\
&\text{en}\\
&-\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+(\beta_1-\beta_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+(\gamma_1-\gamma_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right\}-\frac{pH_x}{2\omega^3}+2\varkappa_2\alpha_2=0,\ \text{enz.}
\end{aligned}\right\}\quad(7,15)$$

Wanneer H_x zeer groot is zal natuurlik alleen de toestand, waarbij $\alpha_1=\alpha_2=1$ stabiel zijn: we willen nagaan tot welk bedrag H_x kan afnemen voordat deze toestand instabiel wordt.

Men kan de assen zo kiezen, dat $\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}=0$. Voor de variatie van E kan dan geschreven worden:

$$\delta E=\varkappa_1(\delta\beta_1^2+\delta\gamma_1^2)+\varkappa_2(\delta\beta_2^2+\delta\gamma_2^2)+$$
$$+\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\delta\beta_1-\delta\beta_2)^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+(\delta\gamma_1-\delta\gamma_2)^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}$$

waarbij reeds in aanmerking is genomen dat men in de termen van de tweede orde mag stellen $\delta\alpha_1=\delta\alpha_2=0$. De stabiliteitsvoorwaarde

$$\delta E>0$$

voert nu weer tot de voorwaarden (7, 10), en daar wederom in de te onderzoeken toestand

$$\varkappa_1=\varkappa_2=\frac{pH_x}{4\omega^3}=\varkappa$$

luidt, wanneer voor de beschouwde indeling $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} < \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ is, de stabiliteitsvoorwaarde weer:

$$H_x > -2p \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Neemt dus H_x van een zeer grote waarde tot nul af, dan wordt de toestand waarbij $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ instabiel op het ogenblik dat voor een of andere indeling der dipolen aan deze voorwaarde niet meer voldaan is. De dipolen gaan zich dan naar hun richting splitsen in de aan deze indeling beantwoordende groepen, en wanneer $H_x = 0$ is geworden zijn de richtingen dezer groepen juist tegengesteld.

Teneinde dit laatste aan te tonen kiezen we de assen zo, dat de gemengde differentiaalquotienten van V wegvallen. De vergelijkingen (7, 15) gaan dan over in de gelijkheden (7, 8) en wanneer we hierin $H = 0$ stellen komen we tot:

$$\frac{p^2}{2\omega^3}(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\varkappa_1 \alpha_1 = 0, \text{ enz.},$$

en

$$-\frac{p^2}{2\omega^3}(\alpha_1 - \alpha_2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2\varkappa_2 \alpha_2 = 0, \text{ enz.}$$

Aan deze gelijkheden kunnen we nu werkelik voldoen door te stellen

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \qquad \beta_1 = -\beta_2 \qquad \gamma_1 = -\gamma_2:$$

men heeft dan $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$ en

$$\frac{p^2}{\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\alpha_1 + 2\varkappa\alpha_1 = 0, \frac{p^2}{\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\beta_1 + 2\varkappa\beta_1 = 0, \frac{p^2}{\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\gamma_1 + 2\varkappa\gamma_1 = 0.$$

Hieraan en aan de voorwaarde $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ wordt nu voldaan wanneer we stellen

$$\alpha_1 = \pm 1, \quad \beta_1 = \gamma_1 = 0, \quad \text{of} \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \pm 1, \quad \gamma_1 = 0,$$
$$\text{of} \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = \pm 1$$

De hiermee korresponderende evenwichtstoestanden willen we onderzoeken op hun stabiliteit. In de toestand met $\alpha_1 = 1$ is

$$\varkappa = -\frac{p^2}{2\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

en dus zou hierbij alvast

$$-\frac{p^2}{2\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0 \quad \text{d. w. z.} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0$$

moeten zijn.

Bovendien moet echter voldaan zijn aan de voorwaarde (7, 9), die door de voorwaarden (7, 10) kan worden vervangen. Substitueren we hierin de voor z gevonden waarde, dan komt er:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > \frac{1}{4}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right| - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > \frac{1}{4}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right| - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Wanneer $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ en $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ beide positief zijn geven deze ongelijkheden niets nieuws. Is echter van de twee er één, b.v. de eerste (ze kunnen niet beide mèt $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ negatief zijn) negatief, dan vinden we:

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Dus kan de toestand $\alpha_1 = 1$ alleen stabiel zijn wanneer voor de beschouwde indeling $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ het kleinste is van de differentiaalquotienten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ en $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$. Natuurlijk zal in de praktijk een der toestanden optreden, waarbij de dipoolindeling van dien aard is, dat een der genoemde quotienten de kleinste waarde heeft die mogelik is.

Ofschoon we niet, zoals in het vorige geval, alles hebben doorgerekend, kunnen we wel vermoeden dat bij langzaam afnemen van H_x van een grote positieve tot een grote negatieve waarde het volgende zal plaats hebben:

„Aanvankelik heeft men de toestand, waarbij $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Na verloop van tijd zullen zich echter de dipolen gaan splitsen in de groepen die korresponderen met de verdeling waarvoor, bij de gegeven x-richting, het differentiaalquotient $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ zo klein

mogelik is. De splitsing zal een aanvang nemen wanneer

$$H_x = -2p \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

is geworden en de magnetisatie in de x-richting zal dan met H_x tot nul afnemen om tegelijk met H_x negatief te worden. Voor

$$2p \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > H_x.$$

zal tenslotte $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ zijn."

Bij benadering wordt blijkbaar dit gedrag weergegeven door de bij het vorige geval behorende figuur 28: alleen zal de rechte door de oorsprong enigszins gebogen zijn. Verder moet worden opgemerkt dat de waarde van $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ voor de verschillende richtingen, die het magneties veld ten opzichte van het dipoolnet kan hebben, niet steeds dezelfde zal zijn. In hoofdtrekken blijkt echter het gedrag der hier beschouwde netten te zijn zoals men op grond van de in afdeling B uitgewerkte fenomenologiese theorie had kunnen verwachten: zolang we te doen hebben met een bolvormige begrenzing is er van hysterese weer geen sprake.

§ 5. *Over de mogelikheid van hysterese bij een aggregaat, dat de vorm heeft van een ellipsoide.*

Bij de in hoofdstuk IV beschouwde aggregaten bleek het optreden van magnetiese hysterese steeds samen te gaan met het voorkomen van verzadigingsmagnetisatie bij uitwendig veld nul. Deze verzadigingsmagnetisatie had steeds de richting van de langste as der ellipsoiden.

Natuurlik kan iets dergeliks ook tans worden verwacht. Dus ligt het voor de hand na te gaan onder welke voorwaarden de toestand, waarbij $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ is, stabiel zal zijn. Voor x-as kiezen we daarbij de lange as van de ellipsoide die ons dipolenstelsel begrenst.

Substitueren we in de evenwichtsvoorwaarden (7, 2)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \text{en}\ H = 0,$$

dan krijgen we

$$-\frac{p^2}{\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\varkappa_1=0 \quad \text{en} \quad \varkappa_1=\varkappa_2=\varkappa, \ldots\ldots \quad (7,16)$$

en dit moet in de stabiliteitsvoorwaarde worden gesubstitueerd. In de kwadratiese uitdrukking voor δE mag weer $\delta\alpha_1=\delta\alpha_2=0$ worden gesteld, en verder is het geschikt de assen zo te kiezen dat

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}=0.$$

Voor de stabiliteitsvoorwaarde kan dan worden geschreven

$$(\delta\beta_1^2+\delta\beta_2^2)\left(\varkappa-\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)-2\delta\beta_1\delta\beta_2\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+$$
$$+(\delta\gamma_1^2+\delta\gamma_2^2)\left(\varkappa-\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)-2\delta\gamma_1\delta\gamma_2\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-$$
$$-2(\delta\beta_1\delta\gamma_1+\delta\beta_2\delta\gamma_2)\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}>0,$$

welke ongelijkheid kan worden vervangen door:

$$\left.\begin{array}{l}\varkappa-\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}>0 \qquad \varkappa-\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}>0\\[2ex]
\left(\varkappa-\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2-\left(\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)^2>\left(\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)^2\dfrac{\varkappa-\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}}{\varkappa-\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}}\\[2ex]
\left(\varkappa-\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)^2-\left(\dfrac{p^2}{4\omega^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)^2>\left(\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)^2\dfrac{\varkappa-\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}}{\varkappa-\dfrac{p^2}{4\omega^3}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}}\end{array}\right\} \quad (7,17)$$

en

$$\left\{\left(\varkappa-\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)^2\right\}\left\{\left(\varkappa-\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)^2\right\}>$$
$$>2\left(\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}\right)^2\left\{\left(\varkappa-\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\varkappa-\frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+\frac{p^4}{16\omega^6}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}$$

Om van de betekenis dezer weinig overzichtelike voorwaarden een idee te krijgen beschouwen we het biezondere geval, waarbij

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}=0;$$

dit geval doet zich b.v. steeds voor wanneer men met een omwentelingsellipsoide te doen heeft. De stabiliteitsvoorwaarden gaan dan over in:

$$\varkappa - \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} > \frac{p^2}{4\omega^3}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right| \quad \text{en} \quad \varkappa - \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} > \frac{p^2}{4\omega^3}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right| \quad .. \quad (7, 18)$$

of, omdat

$$\varkappa = \frac{p^2}{2\omega^3}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{p^2}{4\omega^3}\frac{1-3A}{3\omega^3}$$

in

$$\frac{1-3A}{3\omega^3} > \left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right| + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \text{en} \quad \frac{1-3A}{3\omega^3} > \left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right| + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad .... \quad (7, 19)$$

Aan deze ongelijkheden kan nooit voor alle in aanmerking komende indelingen der dipolen voldaan zijn wanneer niet A de kleinste is der drie ontmagnetiseringskoëfficiënten. Was b.v. $B < A$, dan zou aan de voorwaarde

$$\frac{1-3A}{3\omega^3} > \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1-3B}{3\omega^3}$$

niet voldaan zijn. Is echter $A < B$ en $A < C$, dan behoeven we alleen te letten op indelingen waarbij òf de afgeleide naar y, òf die naar z, òf beide negatief zijn, en hebben we dus alleen rekening te houden met de ongelijkheden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1-3A}{3\omega^3} &> -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \\ \frac{1-3A}{3\omega^3} &> -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \end{aligned}\right\} \quad .... \quad (7, 20)$$

Of, en zo ja, in hoeverre aan deze voorwaarden voor het optreden van magnetiese hysterese voldaan kan zijn hangt natuurlik af van de waarden der tweede afgeleiden van de funktie V, die in het volgend hoofdstuk zullen worden berekend. Daarbij zal blijken, dat geen hysterese zal optreden wanneer de beschouwde dipolen gerangschikt zijn in een gewoon kubies net, maar dat dit bij plaatsing in een gecentreerd- of vlakgecentreerd-kubies net wel het geval is.

Men kan, mede op grond van de in hoofdstuk IV verkregen resultaten, verwachten, dat bij de beschouwde aggregaten een

toestand, waarbij de beide dipoolgroepen tegengesteld gericht zijn, zonder uitwendig veld niet stabiel kan zijn wanneer in die omstandigheden een toestand met verzadigingsmagnetisatie ook stabiel is.

Voor een eenvoudig geval willen we aantonen dat deze verwachting juist is. Stel daartoe in de evenwichtsvoorwaarden (7, 2):

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \qquad \beta_1 = -\beta_2 \qquad \gamma_1 = -\gamma_2 \quad \text{en} \quad H = 0.$$

Men vindt dan:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{p^2}{\omega^3}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\beta_1\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}+\gamma_1\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial z}\right)+2\varkappa_1\alpha_1=0, \text{ enz.}\\ &\text{met}\\ &\qquad\qquad \varkappa_1=\varkappa_2=\varkappa \end{aligned}\right\} \quad (7, 21)$$

Kiezen we nu ons assenstelsel zo, dat de gemengde differentiaalquotienten van S verdwijnen, dan vinden we drie gelijkwaardige evenwichtstoestanden, waarvan we de toestand met $\alpha_1 = 1$ op stabiliteit willen onderzoeken. Men heeft in deze toestand:

$$-\frac{p^2}{\omega^3}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+2\varkappa=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7, 22)$$

Neem nu ter vereenvoudiging aan dat de assen van de ellipsoide, waardoor het aggregaat wordt begrensd, dezelfde zijn als de koördinaatassen. De gemengde afgeleiden van de funktie T zijn dan nul, en hetzelfde is het geval met die van de funkties U en V. De stabiliteitsvoorwaarden (7, 18) kunnen dan onveranderd worden overgenomen, en men vindt, door voor $\varkappa$ de uitdrukking (7, 22) te substitueren:

$$2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} > \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right| \quad \text{en} \quad 2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} > \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|.$$

Op gelijke wijze als naar aanleiding van de ongelijkheden (7. 19) vindt men nu dat voor stabiliteit noodzakelik is dat voor de beschouwde dipoolindeling $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ het grootste is van de differentiaalquotienten $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$ en $\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$. Voor het overige heeft men dan alleen rekening te houden met de voorwaarden

$$2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} > \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{of} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} > \frac{1-3B}{3\omega^3}$$

en

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} > \frac{1-3C}{3\omega^3},$$

die juist het tegendeel inhouden van wat in (7, 20) wordt geëist.

§ 6. *Bepaling van de grootte der koërcitiefkracht.*

Laat op de langgerekte ellipsoide van de vorige paragraaf in de richting van de lange as een uitwendig veld werken van de sterkte H_x. Wanneer H_x groot is hebben natuurlik alle dipolen de richting van dit veld en is dus $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Hebben we te doen met een geval waarin hysterese optreedt, dan zal bij afname van H_x deze toestand gehandhaafd blijven totdat de genoemde grootheid een zekere negatieve waarde heeft bereikt. Op dit ogenblik zal de magnetisatie plotseling omkeren en de toestand intreden waarbij $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$.

De vraag is nu tot welk bedrag men het veld kan laten afnemen vóór deze verandering plaats heeft. Voor $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ leiden we uit de evenwichtsvoorwaarden (7, 2) af:

$$-\frac{p^2}{\omega^3}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{pH_x}{2\omega^3} + 2\varkappa_1 = 0 \text{ met } \varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa \qquad (7, 23)$$

Maken we weer de vereenvoudigende onderstellingen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} = 0,$$

dan kunnen we weer de voorwaarden (7, 18) gebruiken, waarvoor tans moet worden geschreven:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1-3A}{3\omega^3} + \frac{H_x}{p} &> \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right| \\ \frac{1-3A}{3\omega^3} + \frac{H_x}{p} &> \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right| \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \qquad (7, 24)$$

Het komt er dus blijkbaar maar op aan na te gaan welke de grootste waarde is die de uitdrukking

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|$$

voor de verschillende indelingen der dipolen kan aannemen. Is voor deze indeling

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} > 0,$$

dan heeft men de stabiliteitsvoorwaarde

$$\frac{1-3A}{3\omega^3} + \frac{H_x}{p} > 2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1-3B}{3\omega^3}$$

of wel

$$H_x > (A-B)\frac{p}{\omega^3} = (A-B)M_0, \quad \ldots\ldots \quad (7, 25)$$

zodat de koërcitiefkracht bedraagt:

$$H_c = -(A-B)M_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7, 26)$$

Dit geval is geheel te vergelijken met het in hoofdstuk IV behandelde geval, dat door fig. 30 wordt toegelicht. Aan fig. 29 beantwoordt dan het geval dat zich voordoet wanneer voor de kritieke indeling

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} < 0$$

is. Men heeft dan de stabiliteitsvoorwaarde

$$\frac{H_x}{p} > -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1-3A}{3\omega^3} = \frac{A}{\omega^3} + 2\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3\omega^3}$$

of

$$H_x > \left(A + 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3}\right)M_0$$

waaruit we voor de koërcitiefkracht vinden:

$$H_c = -\left(A + 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3}\right)M_0. \quad \ldots\ldots \quad (7, 27)$$

Deze formule heeft ook nog z'n betekenis wanneer de koëfficiënt

$$A + 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3}$$

negatief is. In dat geval is er van hysterese geen sprake en neemt eenvoudig de magnetisatie af van M_0 tot 0 wanneer H_x van de door (7, 27) gegeven waarde tot nul afneemt. Het gedrag van het aggregaat wordt dan tennaastebij weergegeven door fig. 28.

§ 7. *Vergelijking van de in dit hoofdstuk behandelde aggregaten met de in hoofdstuk IV beschouwde.*

Teneinde de verkregen resultaten zo te kunnen formuleren dat de analogie met het in hoofdstuk IV gevondene duidelik naar voren komt denken we ons een aggregaat van dipolen dat begrensd wordt een langgerekte omwentelingsellipsoide, en stellen de ontmagnetiseringskoëfficiënt volgens de lange as voor door A. Men heeft dan:

$$B = C = \tfrac{1}{2}(1 - A) < A.$$

Kies nu de lange as tot x-as en ga na bij welke dipoolindeling en welke y-richting de uitdrukking

$$2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3}$$

de grootst mogelike waarde heeft. Stel vervolgens

$$2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3} = \Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7, 28)$$

en verder, evenals in (4, 3):

$$A + \Theta = \mathrm{A} \qquad \text{en} \qquad B + \Theta = \mathrm{B} \ldots\ldots \quad (7, 29)$$

Men heeft dan bij de gevonden resultaten te onderscheiden de gevallen:

$$\mathrm{A} > 0 \qquad \text{en} \qquad \mathrm{A} < 0.$$

Is $\mathrm{A} > 0$, dan wordt het gedrag van het dipolenstelsel ongeveer weergegeven door fig. 28; alleen zal de rechte door de oorsprong in de regel een weinig gekromd zijn.

In $\mathrm{A} < 0$, dan moet men nagaan welke van de grootheden

$$A - B = \mathrm{A} - \mathrm{B} \qquad \text{en} \qquad \mathrm{A}$$

het grootst is. Is $\mathrm{B} > 0$, dan is de tweede het grootst en is fig. 29 van toepassing; is daarentegen $\mathrm{B} < 0$, dan geldt de figuur 30.

De tans beschouwde stelsels van dipolen gedragen zich dus analoog aan de in hoofdstuk IV behandelde aggregaten. De uitdrukking

$$2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3}$$

speelt daarbij de rol van de koëfficiënt Θ: de waarde van deze uitdrukking hangt alleen af van de struktuur van het aggregaat en niet van de gedaante der begrenzende ellipsoide.

In het volgend hoofdstuk zullen de waarden berekend worden die de genoemde uitdrukking heeft bij verschillende netten met kubiese symmetrie, en vervolgens zullen deze waarden worden vergeleken met de waarden die in hoofdstuk V, op grond van experimentele gegevens, in verschillende gevallen voor Θ werden gevonden.

HOOFDSTUK VIII.

Numerieke resultaten in verband met de gegevens aangaande ijzer, nikkel, kobalt, magnetiet en enige staalsoorten.

§ 1. *De groepindelingen van de roosterpunten bij netten met kubiese symmetrie.*

In hoofdstuk VI dachten we ons magnetiese dipolen geplaatst in de roosterpunten van netten met kubiese symmetrie. We stelden ons voor dat deze dipolen op regelmatige wijze waren ingedeeld in twee even talrijke groepen, en we beschouwden bij elke indeling een viertal funkties (U, V, S en T), waarvan de tweede afgeleiden naar de ruimtekoördinaten van biezonder belang bleken te zijn. Met de bepaling van de voornaamste dezer tweede afgeleiden willen we ons tans bezighouden, en we behandelen daarbij achtereenvolgens de groepindelingen die bij kubiese, gecentreerd-kubiese, en vlak-gecentreerd-kubiese netten bij het onderzoek naar evenwicht en stabiliteit op de voorgrond treden.

§ 2. *Bepaling van numerieke gegevens voor kubiese netten.*

Is d de netkonstante van een kubies net, dan kunnen we voor de koördinaten der roosterpunten schrijven:

$$x = l\,d \qquad y = m\,d \qquad z = n\,d \ldots\ldots\ldots \quad (8, 1)$$
$$(l,\ m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2\ldots).$$

Deze punten kunnen op verschillende wijzen in geschikte gelijkwaardige groepen ingedeeld worden: de indelingen zijn echter voor een deel equivalent, en de voor ons doel belangrijke kunnen worden teruggebracht tot de volgende typen:

a. de groep I met n even en de groep II met n oneven.

b. de groepen I ($l + m$ even) en II ($l + m$ oneven).

c. de groepen I ($l + m + n$ even en II ($l + m + n$ oneven).

We behandelen achtereenvolgens deze drie typen.

a. I (n even) en II (n oneven).

Bij deze indeling vormen blijkbaar beide groepen een orthorhombies net met d, d en $2d$ tot ribben der elementairparallelepipida. Elk punt van groep I ligt in het midden van een opstaande ribbe van een elementairparallelepipidum van groep II. Willen we dus met behulp van de in hoofdstuk VI, § 4 gegeven formules de tweede afgeleiden van de funktie S bepalen, dan moeten we stellen:

$$a = d, \qquad b = d, \qquad c = 2d, \qquad x = y = 0,$$
$$z = d = \tfrac{1}{2}c \quad \text{en} \quad abc = 2\omega^3.$$

Voor de vergelijking (6, 22) mag dan worden geschreven

$$\frac{\partial^2 V''}{\partial \xi^2} = \frac{A}{2\omega^3}, \qquad \frac{\partial^2 V''}{\partial \eta^2} = \frac{B}{2\omega^3}, \qquad \frac{\partial^2 V''}{\partial \zeta^2} = \frac{C}{2\omega^3},$$

en wanneer we in de vergelijkingen (6, 8) tot (6, 10) de koördinaten x, y, z vervangen door ξ, η, ζ vinden we gemakkelik

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{1 - 3A}{6\omega^3} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}, \text{ enz},$$

zodat

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} = \frac{1 - 3A}{6\omega^3} - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}, \text{ enz.}$$

uit welke gelijkheid direkt kan worden afgeleid

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} = \frac{1}{6\omega^3} - \frac{\partial^2 V'}{\partial \xi^2}, \text{ enz.}$$

en dus

$$2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} - \frac{1}{3} = -2\omega^3 \frac{\partial^2 V'}{\partial \xi^2}, \text{ enz.}$$

Door nu tot de koördinaten x, y, z terug te keren en gebruik te maken van de formules (6, 21) vindt men:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^3} - \frac{1}{3} &= +0{,}0666\,; \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z} = 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3} &= +0{,}0666\,; \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z\,\partial x} = 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{3} &= -1{,}1332\,; \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots . (8, 2)$$

b. I ($l + m$ even) en II ($l + m$ oneven).

Teneinde deze indeling beter te kunnen overzien wentelen we de koördinaatassen over een hoek van 45° om de z-as waardoor we krijgen:

$$x' = \tfrac{1}{2}(x + y)\sqrt{2} \qquad y' = \tfrac{1}{2}(x - y)\sqrt{2} \qquad z' = z \qquad (8, 3)$$

Stellen we verder

$$l' = l + m \qquad \text{en} \qquad m' = l - m\,, \quad \ldots\ldots \quad (8, 4)$$

dan hebben de roosterpunten tot koördinaten:

$$x' = \tfrac{1}{2} l' d\sqrt{2} \qquad y' = \tfrac{1}{2} m' d\sqrt{2} \qquad z' = nd \qquad (8, 5)$$

en wordt de groepindeling gekarakteriseerd door:

I (l' en m' oneven) en II (l' en m' even).

Beide groepen vormen blijkbaar een orthorhombies net met als ribben der elementairparallelepipida $d\sqrt{2}$, $d\sqrt{2}$ en d. Elk punt van groep I ligt in het midden van het grondvlak van een elementairparallelepipidum van groep II. Men vindt weer:

$$2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x'^2} - \frac{1}{3} = -\,2\omega^3 \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2}\,, \text{ enz.,}$$

en door in de formules (6, 21) x en a met z en c om te wisselen en te substitueren:

$$a = b = d\sqrt{2}\,, \qquad c = d\,, \qquad x = x' = \tfrac{1}{2} a, \qquad y = y' = \tfrac{1}{2} b$$

en

$$z' = z = 0$$

vindt men:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x'^2} - \frac{1}{3} &= -\,4{,}50\,; & 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y' \partial z'} &= 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y'^2} - \frac{1}{3} &= -\,4{,}50\,; & 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x'} &= 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z'^2} - \frac{1}{3} &= +\,8{,}00\,; & 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x' \partial y'} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots . \quad (8, 6)$$

c. I ($l + m + n$ even) en II ($l + m + n$ oneven).

Op grond van de gelijkwaardigheid der drie assenrichtingen kan bij deze indeling al dadelik worden opgemerkt dat

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} = \frac{1}{6\omega^3}$$

terwijl ook gemakkelik kan worden ingezien dat

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V'}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 V'}{\partial x \partial y} = 0.$$

Van de elementairkubus, waarvan $(0, 0, 0)$, $(d, 0, 0)$, $(0, d, 0)$ en $(0, 0, d)$ vier hoekpunten zijn, behoren n.l. tot groep II de netpunten $(d, 0, 0)$, $(0, d, 0)$, $(0, 0, d)$ en (d, d, d), en elk dezer netpunten maakt deel uit van een kubies net met netkonstante $2d$ dat geheel tot die groep behoort. Een punt D van groep I ligt ten opzichte van elk der drie eerste kubiese netten in het midden van een ribbe van een elementairkubus, en ten opzichte van het vierde net in het centrum van een kubus. Uit de formules (6, 21), en in het laatste geval op grond van symmetrie-overwegingen, kan men nu gemakkelik afleiden dat onder deze omstandigheden alle bijdragen tot de grootheden $\frac{\partial^2 V'}{\partial y \partial z}$, enz. nul moeten zijn, en dat we dus mogen schrijven:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{3}; & 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} &= 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{3}; & 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} &= 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{3}; & 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8, 7)$$

§ 3. *Bepaling van numerieke gegevens voor gecentreerd-kubiese netten.*

Is $d = 2s$ de netkonstante van een gecentreerd-kubies net, dan is $d^3 = 2\omega^3$, en voor de koördinaten der roosterpunten mag geschreven worden

$$x = ls \qquad y = ms \qquad z = ns \ldots\ldots\ldots (8, 8)$$

waarin l, m, n alle drie oneven of alle drie even getallen moeten zijn. Achtereenvolgens zullen weer drie typen van indelingen besproken worden.

a. I (l, m, n even) en II (l, m, n oneven).

Beide groepen vormen in dit geval een kubies net met netkonstante $d = 2s$. Elk punt D van groep I ligt in het centrum

van een elementairkubus van groep II en men heeft dus om reden van symmetrie

$$\left.\begin{aligned} 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}; \quad 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial z}=0\\ 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}; \quad 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial z\,\partial x}=0\\ 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}; \quad 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}=0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8,9)$$

b) I $\left(\frac{l+m}{2}\text{ even}\right)$ en II $\left(\frac{l+m}{2}\text{ oneven}\right)$.

We wentelen het koördinatenstelsel weer over een hoek van 45° om de z-as en maken gebruik van de formules (8, 3). Stellen we dan

$$l+m=2l' \qquad l+m=2m', \quad \ldots\ldots \quad (8,10)$$

dan mag voor de koördinaten der netpunten geschreven worden

$$z'=l's\sqrt{2}, \qquad y'=m's\sqrt{2}, \qquad z'=ns \qquad (8,11)$$

en de karakteristiek der te beschouwen indeling gaat over in

I (l' even) en II (l' oneven).

Het is duidelik dat $m'=l'-m$ bij gegeven l' zowel even als oneven kan zijn: dit hangt af van het even of oneven zijn van n. De groep II kan dus worden gesplitst in de ondergroepen

II_1 (l' oneven, m' even, n oneven) en II_2 (l' en m' oneven, n even),

die beide orthorhombiese netten vormen met als ribben der elementairparallelepipida $d\sqrt{2}$, $d\sqrt{2}$, en d. Een punt D van groep I ligt ten opzichte van de ene ondergroep in het midden van het grondvlak van een elementairparallelepipidum, en ten opzichte van de andere ondergroep in het midden van een zijvlak loodrecht op de y'-richting. Teneinde nu voor de bijdragen dezer beide ondergroepen tot de grootheden $\frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2}$, enz. snel konvergerende reeksen te verkrijgen verwisselen we in de formules (6, 21) de koördinaten x en z en substitueren eerst

$$a = b = d\sqrt{2}, \quad c = d, \quad x = \tfrac{1}{2}a, \quad y = \tfrac{1}{2}b \quad \text{en} \quad z = 0$$

en daarna

$$a = b = d\sqrt{2}, \quad c = d, \quad x = \tfrac{1}{2}a, \quad y = 0, \quad z = \tfrac{1}{2}c,$$

waardoor we respektievelik uitdrukkingen krijgen voor zes grootheden

$$\frac{\partial^2 V_1'}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 V_1'}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 V_1'}{\partial z^2} \quad \frac{\partial^2 V_1'}{\partial y\,\partial z} \quad \frac{\partial^2 V_1'}{\partial z\,\partial x} \quad \frac{\partial^2 V_1'}{\partial x\,\partial y}$$

en voor zes grootheden

$$\frac{\partial^2 V_2'}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 V_2'}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 V_2'}{\partial z^2} \quad \frac{\partial^2 V_2'}{\partial y\,\partial z} \quad \frac{\partial^2 V_2'}{\partial z\,\partial x} \quad \frac{\partial^2 V_2'}{\partial x\,\partial y}$$

Door nu in de formules

$$2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x'^2} - \frac{1}{3} = -2\omega^3 \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} = -2\omega^3 \left(\frac{\partial^2 V_1'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2'}{\partial x^2} \right), \text{ enz.}$$

de verkregen uitdrukkingen te substitueren en de in het resultaat voorkomende sommaties uit te voeren vindt men tenslotte:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x'^2} - \frac{1}{3} &= -0{,}8624\,; \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y'\,\partial z'} = 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y'^2} - \frac{1}{3} &= -0{,}0172\,; \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z'\,\partial x'} = 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z'^2} - \frac{1}{3} &= -0{,}1204\,; \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x'\,\partial y'} = 0. \end{aligned}\right\} \ldots (8, 12)$$

c. I ($l + m + n$ even) en II ($l + m + n$ oneven).

Deze indeling is blijkbaar identiek met de onder *a.* behandelde en voert dus niet tot iets nieuws.

§ 4. *Bepaling van numerieke gegevens voor vlak-gecentreerd-kubiese netten.*

Schrijven we voor de netkonstante weer $d = 2s$, dan is $d^3 = 4\omega^3$, en de koördinaten der roosterpunten zijn

$$x = l\,s \qquad y = m\,s \qquad z = n\,s \ldots . \quad (8, 13)$$

waarbij $l + m + n$ even is.

We behandelen weer drie typen van indelingen der roosterpunten.

a. I (n even) en II (n oneven).

Blijkbaar is deze indeling dezelfde als de indeling die gekarakteriseerd wordt door:

b. I ($l+m$ even) en II ($l+m$ oneven).

Dus behoeft de eerste indeling niet afzonderlik te worden behandeld. We wentelen het koördinatenstelsel weer over een 45° om de z-as en maken gebruik van de formules (8, 3) en (8, 4). De koördinaten der netpunten worden dan

$$x' = \tfrac{1}{2} l' s \sqrt{2} \qquad y' = \tfrac{1}{2} m' s \sqrt{2} \qquad z' = n s \quad .. \quad (8, 14)$$

en de karakteristiek van de groepindeling gaat over in

I (l', m', n even) en II (l', m', n oneven):

men kan n.l. gemakkelik inzien dat l' en m' gelijktijdig even of oneven zijn.

Blijkbaar vormen beide groepen een orthorhombies net met als ribben der elementairparallelepipida $s\sqrt{2}$, $s\sqrt{2}$ en $2s$. Men heeft in de formules (6, 21) te stellen

$$a = b = s\sqrt{2}, \quad c = 2s \quad \text{en} \quad x = \tfrac{1}{2} a, \quad y = \tfrac{1}{2} b, \quad z = \tfrac{1}{2} c,$$

en vindt na sommatie der reeksen:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x'^2} - \frac{1}{3} &= -0{,}1848\,; & 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y' \partial z'} &= 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y'^2} - \frac{1}{3} &= -0{,}1848\,; & 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z' \partial x'} &= 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z'^2} - \frac{1}{3} &= -0{,}6304\,; & 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x' \partial y'} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad .. \quad (8, 15)$$

c) I $\left(\dfrac{l+m+n}{2} \text{ even}\right)$ en II $\left(\dfrac{l+m+n}{2} \text{ oneven}\right)$.

Evenals in § 2 onder *c.* kan hier worden opgemerkt dat

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} = \frac{1}{6\omega^3}$$

moet zijn. Dat ook

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V'}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 V'}{\partial x \partial y} = 0$$

kan op de volgende wijze worden ingezien:

Van de elementairkubus, waarvan $(0, 0, 0)$, $(d, 0, 0)$, $(0, d, 0)$ en $(0, 0, d)$ vier hoekpunten zijn behoren tot groep II de netpunten $(0, s, s)$, $(s, 0, s)$, $(s, s, 0)$, $(2s, 0, 0)$, $(0, 2s, 0)$, $(0, 0, 2s)$ en $(2s, 2s, 2s)$. Elk dezer netpunten maakt deel uit van een kubies net met netkonstante $2d$ dat geheel tot groep II behoort. Een punt D van groep I ligt ten opzichte van de eerste zes dezer netten in een zijvlak van een elementairkubus, en ten opzichte van het zevende net in het centrum van zulk een kubus. Uit de formules (6, 21), en in het laatste geval op grond van symmetrie-overwegingen, kan men nu weer afleiden dat alle bijdragen tot de grootheden $\frac{\partial^2 V'}{\partial x \partial y}$, enz. nul moeten zijn en dat we dus mogen schrijven:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{3}; \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} = 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{3}; \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0 \\ 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{3}; \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (8, 16)$$

§ 5. *De waarde van Θ bij een kubies net.*

We denken ons, volgens het in hoofdstuk VII, § 7, gegeven voorschrift, een kubies net van magnetiese dipolen, dat begrensd wordt door een langgerekte omwentelingsellipsoide. De waarde van de grootheid Θ moet dan als volgt bepaald worden:

„Men kiest de lange as van de ellipsoide tot x-as en gaat na bij welke groepindeling en bij welke keuze van de y-as de uitdrukking

$$2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8, 17)$$

de grootst mogelike waarde heeft Deze grootste waarde is volgens (7, 28) de Θ voor de gegeven x-richting."

We willen Θ bepalen voor de tweetallige, de drietallige en de viertallige assen van het kubiese net; de bij deze richtingen behorende waarden van die grootheid stellen we voor door Θ_2, Θ_3 en Θ_4

Om Θ_2 te bepalen merken we op dat loodrecht op elke tweetallige as een viertallige as gevonden wordt. Kiezen we nu een

tweetallige as als x-as en de viertallige as loodrecht daarop als y-as, dan zien we uit (8, 6) dat er een groepindeling moet zijn waarvoor de uitdrukking (8, 17) de waarde + 8,00 heeft: dat een grotere waarde niet kan voorkomen volgt uit de formules (8, 2), (8, 6) en (8, 7) onmiddelik en men heeft dus:

$$\Theta_2 = 8{,}00 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8, 18)$$

De bepaling van Θ_3 is iets ingewikkelder. Natuurlik hebben we daarbij alleen te letten op de formules (8, 2) en (8, 6): de formule (8, 7) kan n.l. niet anders geven dan $\Theta = -\frac{1}{3}$, dus de kleinste waarde die ooit mogelik is Voor de aan de andere formules beantwoordende groepindelingen bestaat blijkbaar steeds symmetrie ten opzichte van een viertallige as: de richtingen loodrecht op die as zijn gelijkwaardig.

Kies nu een of andere drietallige as tot x-richting. Om na te gaan welke de grootste waarde is voor de uitdrukking (8, 17), die een groepindeling als de aan de formules (8, 6) beantwoordende kan leveren, beschouwen we in verband met deze formules de invariante uitdrukking

$$\left(2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x'^2} - \frac{1}{3}\right) x'^2 + \ldots + 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y' \partial z'} y' z' + \ldots \qquad (8, 19)$$

en transformeren deze op een assenstelsel (x, y, z) dat de gekozen drietallige as tot x-as heeft. Nemen we aan dat deze as met de x', y' en z'-assen scherpe hoeken maakt, dan kunnen we voor y-as kiezen de oude y'-as, waardoor tevens de z-as is vastgelegd. De transformatie-formules zijn:

$$x' = x\frac{\sqrt{3}}{3} + z\frac{\sqrt{6}}{3}, \qquad y' = y, \qquad z' = x\frac{\sqrt{6}}{3} - z\frac{\sqrt{3}}{3},$$

en men vindt op de nieuwe assen voor de koëfficiënten van y^2, yz en z^2:

$$2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{1}{3} = -4{,}50, \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} = 0, \quad 2\omega^3 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{1}{3} = 5{,}83.$$

Verwisselen we nu de y- en de z-richting met elkaar, dan krijgt de uitdrukking (8, 17) blijkbaar de grootste waarde die bij de gegeven x-richting mogelik is, n.l. 5,83. Dat een groepindeling als de aan de formules (8, 2) beantwoordende geen

grotere waarde kan geven is duidelik en men heeft dus:

$$\Theta_3 = 5{,}83 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8, 20)$$

Kiezen we een viertallige as tot x-richting, dan vinden we loodrecht daarop twee andere viertallige assen. Nemen we een dier richtingen voor y-richting, dan bestaat er zeker een groepindeling waarvoor de uitdrukking (8, 17) de grootste waarde heeft die bij enige x-richting mogelik is, n. l. 8,00. Dus hebben we:

$$\Theta_4 = 8{,}00 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8, 21)$$

§ 6. *De waarden van Θ bij een gecentreerd kubies en een vlak-gecentreerd kubies net.*

Uit de formules (8, 12) zien we dat bij een gecentreerd kubies net de uitdrukking (8, 17) de grootst mogelike waarde krijgt wanneer voor y-richting genomen wordt een tweetallige as en wanneer een daarbij passende groepindeling wordt gekozen: deze grootste waarde is $-0{,}0172$. Daar loodrecht op elke tweetallige, drietallige of viertallige as minstens één tweetallige as wordt gevonden, die als y-richting dienst kan doen, geldt bij deze netten:

$$\Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_4 = -0{,}0172 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8, 22)$$

Echter zijn er richtingen waarvoor Θ kleiner is. De kleinste waarde

$$\Theta = -0{,}038 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8, 23)$$

wordt gevonden bij een x-richting die in één vlak ligt met twee naburige twee- en viertallige assen en met deze richtingen hoeken maakt van 9° en 36°.

Bij een vlak-gecentreerd kubies net kunnen we op grond van de formules (8, 15) gemakkelik inzien dat

$$\Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_4 = -0{,}1814\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8, 24)$$

zelfs blijkt dat voor elke richting mag worden geschreven:

$$\Theta = -0{,}1814 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8, 25)$$

§ 7. *De susceptibiliteit van het kubiese net.*

Met behulp van de formule (3, 10):

$$\varkappa = \frac{1}{\Theta}$$

kan uit de in § 5 vermelde getallen de susceptibiliteit worden afgeleid van een kubies net van magnetiese dipolen. Men heeft in de richtingen der twee-, drie- en viertallige assen respectievelik:

$$\varkappa_2 = 0{,}125 \qquad \varkappa_3 = 0{,}17 \qquad \varkappa_4 = 0{,}125 \ldots . \quad (8, 26)$$

Zoals bekend is worden susceptibiliteiten van deze grootte bij geen enkele paramagnetiese stof gevonden: de grootste waarden treft men aan bij vaste zuurstof met $\varkappa = 53 \times 10^{-4}$ en bij mangaan met $\varkappa = 9{,}9 \times 10^{-4}$ [1]). Van biezonder belang is dit echter niet omdat een enkelvoudige stof, die in een gewoon kubies net kristalliseert, tot dusverre niet is gevonden.

Opmerkelik is evenwel dat we bij het regulaire kubiese net in verschillende richtingen aanmerkelik verschillende susceptibiliteiten vinden en er dus in magneties opzicht geen sprake is van isotropie. In verband met de door Weiss voor magnetiet gevonden figuur 20 pleit dit voor de bruikbaarheid der theorie.

§ 8. *Toetsing van de theoretiese resultaten aan de gegevens omtrent weekijzer.*

Daar weekijzer kristalliseert in een gecentreerd kubies net zou volgens de gegeven theorie gemiddeld

$$\Theta = -\,0{,}02$$

moeten zijn. Deze waarde is in bevredigende overeenstemming met wat in hoofdstuk V, § 5, op grond van experimentele gegevens werd afgeleid. In deze paragraaf werd n.l. een positieve grootheid δ ingevoerd, die in verband stond met de samenhang van de kristallen waaruit de in het metaal voorkomende langgerekte ketens zijn samengesteld, en de som van deze δ en de grootheid Θ bleek voor de meest op de voorgrond tredende

[1]) Zie F. Auerbach, *Moderne magnetik*. S. 87.

ketens zowel positief als negatief te kunnen zijn. De ketens met negatieve $\Theta + \delta$ gaven aanleiding tot de hysterese verschijnselen, en voor deze ketens bleek de genoemde som niet kleiner te zijn dan ongeveer $-0{,}0004$. De theoretiese waarde van Θ leidt dus tot

$$-0{,}02 + \delta \geqq -0{,}0004 \quad \text{of} \quad \delta \geqq 0{,}0196\,,$$

hetgeen plausibel mag worden genoemd.

Ook de beschouwing van de initiaal-susceptibiliteit volgens de in hoofdstuk V, § 7, gegeven methode voert tot een bevredigend resultaat. Stelt men de waarde dezer grootheid op 150, dan geeft de formule (5, 11):

$$\frac{1}{150} = \frac{\bar{A}\,(1-\varepsilon) - 0{,}02}{\varepsilon}\,,$$

en hieraan kan men met geschikte waarden voor $\bar{A}$ en ε voldoen. Neemt men b.v. bolvormige elementairkristallen, dus $\bar{A} = 0{,}33$, dan vindt men $\varepsilon = 0{,}92$.

§ 9. *Toetsing aan de gegevens omtrent nikkel en kobalt.*

Nikkel en kobalt kristalliseren in vlak-gecentreerd-kubiese netten en dus heeft men volgens de theorie:

$$\Theta = -0{,}18.$$

In hoofdstuk V, § 5, wordt de kleinste waarde van $\Theta + \delta$ bij nikkel geschat op $-0{,}0015$ en bij kobalt op $-0{,}0012$. De kleinste waarden van δ zouden dus begroot moeten worden op 0,1785 en 0,1788, welke getallen weer aannemelik zijn.

De beschouwing der initiaal-susceptibiliteiten voert tot de formules

$$\frac{1}{40} = \frac{\bar{A}\,(1-\varepsilon) - 0{,}18}{\varepsilon} \qquad \frac{1}{75} = \frac{\bar{A}\,(1-\varepsilon) - 0{,}18}{\varepsilon}\,,$$

waaraan voor $\bar{A} = 0{,}33$ wordt voldaan door $\varepsilon = 0{,}42$ en $\varepsilon = 0{,}43$.

§ 10. *Opmerkingen naar aanleiding van de gegevens over enige staalsoorten.*

In hoofdstuk V, § 5, is gebleken dat ter verklaring van de eigenschappen der verschillende staalsoorten men $\Theta + \delta$ nooit

kleiner hoeft te onderstellen dan ongeveer — 0,004. Daar de Θ's voor gecentreerd- en vlak-gecentreerd-kubiese netten beide kleiner zijn dan dit bedrag zou men zich beide netten als bouwstof voor deze staalsoorten kunnen denken. Men kan hiertegen echter het bezwaar maken dat de gecentreerd-kubiese netten al te kleine δ's zouden vereisen.

Aan dit bezwaar nu wordt tegemoet gekomen door wat de RÖNTGEN-spektroskopie heeft geleerd aangaande de struktuur van nikkel- en mangaanstaal. Beide staalsoorten kristalliseeren in vlak-gecentreerd-kubiese netten, en het blijkt dus dat het kristalnet van het hoofdbestanddeel ijzer zeer gevoelig is voor bijmengsels van andere stoffen. Wellicht is dus de onderstelling gewettigd dat de staalsoorten met hun krachtige hysterese voor een groot deel bestaan uit vlak-gecentreerd-kubiese kristalnetten, en dat deze het zijn die de hysterese veroorzaken. Natuurlik zal door RÖNTGEN-onderzoek moeten worden uitgemaakt in hoeverre deze onderstelling waarheid bevat.

§ 11. *Diskussie van de gegevens aangaande magnetiet.*

Wanneer men in verband met de gegeven theorieën een verklaring wil geven van de verschijnselen, die door WEISS bij magnetiet zijn waargenomen, stuit men op een moeilikheid. Alvorens deze moeilikheid te bespreken rekapituleren we in het kort hoe WEISS de in fig. 19 samengevatte resultaten heeft verkregen. In hoofdstuk II werd reeds opgemerkt dat hij daarbij gebruik maakte van de ballistiese methode. De proeven waren zo ingericht, dat om het middelste van de drie stukken. waaruit een lang magnetiet-prisma was samengesteld, twee van elkaar onafhankelike windingen waren aangebracht, waarvan de wijdste zoveel wijder was dan de nauwste, dat tussen deze twee enige ruimte open bleef. Wanneer dan het magneties veld in de omgeving dezer windingen in voldoende mate homogeen is mag men aannemen dat dit veld in de ruimte tussen de windingen even sterk is als binnen het middenstuk van het prisma. Door nu de windingen afwisselend parallel en tegen elkaar in te schakelen en dan telkens het uitwendige veld te wijzigen kon WEISS zowel het inwendige veld als de magnetisatie ballisties bepalen.

Men ziet dat in fig. 19 de magnetisatiekromme voor de viertallige as sterk van de andere krommen verschilt. Deze afwijking schijnt op de basis van onze theorie, en van elke andere theorie trouwens, volkomen raadselachtig. Het vermoeden is echter wel gewettigd dat men hier met een abnormaliteit te doen heeft, die b.v. bij volkomen gave en zuivere kristallen nooit zou kunnen optreden. Neemt men dit in aanmerking, dan krijgt men de indruk dat voor de twee-, drie- en viertallige assen de grootheid Θ tennaastebij dezelfde positieve waarde heeft, en wel ongeveer 0,01: zolang namelik de verzadigingsmagnetisatie niet bereikt is, is volgens de gegeven theorie:

$$H = \Theta M$$

Een positieve waarde van Θ sluit echter volgens die theorie de mogelikheid van hysterese ten enenmale uit, en men komt dus in konflikt met de in fig. 19 voorkomende krommen, die op de remanente magnetisatie betrekking hebben.

Teneinde aan het hiermee geformuleerde bezwaar tegemoet te komen kan men opmerken dat bij de opstelling van Weiss het magnetietprisma feitelik niet alleen, maar te zamen met de aan de uiteinden aansluitende stukken weekijzer aan de werking van een uitwendig veld wordt blootgesteld. Dat een stelsel waarin op deze wijze weekijzer is opgenomen enige hysterese vertoont, is volgens onze theorie geenszins verwerpelik, ook al is bij magnetiet alléén van remanentie geen sprake. Het behoeft van dit standpunt ook niet te verwonderen dat niettegenstaande de waargenomen hysterese het door Weiss onderzochte magnetiet in de normale toestand geen magnetisatie heeft.

Men zou tegen deze opvatting het bezwaar kunnen maken dat magnetiet toch de bouwstof is van de reeds in de oudheid bekende natuurlike magneten: echter zijn deze magneetstenen in den regel verre van zuiver, en worden ze steeds in een ijzerhoudende omgeving aangetroffen, zodat verontreinigingen met ijzer een zeer voorname rol moeten spelen.

Dat de uit fig. 20 blijkende anisotropie van magnetiet met onze theorie niet in strijd is werd reeds in § 7 opgemerkt.

De voor Θ gevonden waarde

$$\Theta = 0{,}01$$

bewijst dat men zich niet mag voorstellen dat in een magnetiet-

kristal één enkele soort van elementairmagneetjes op de voorgrond treedt, die in een kubies, gecentreerd kubies of vlak-gecentreerd kubies net gerangschikt zijn. Het is echter zeer goed mogelik dat men b.v. twee soorten van elementairmagneetjes heeft, met verschillende magnetische momenten, en dat elk dezer soorten in zulk een net gerangschikt is. De gebruikelike chemiese formule $Fe(FeO_2)_2$ wijst zelfs enigszins in die richting.

HOOFDSTUK IX.

Een en ander over dipoolnetten met orthorhombiese en hexagonale symmetrie, in verband met de gegevens aangaande pyrrhotine.

§ 1. *Uitbreiding der in hoofdstuk VI gegeven beschouwingen tot netten met orthorhombiese symmetrie.*

De beschouwingen van hoofdstuk VI gelden voor netten met kubiese symmetrie: om ze tot gevallen van orthorhombiese symmetrie uit te breiden kan men zich echter in beginsel bepalen tot het aanbrengen van een wijziging in de formules (6, 5), en in verband daarmee in de formules (6, 7) en (6, 8). De wijzigingen zijn weinig ingrijpend en laten het karakter der bedoelde formules geheel onveranderd.

De gelijkheden (6, 5) zullen moeten worden vervangen door

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{L}}{\omega^3}; \quad \frac{\partial^2 W'}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{M}}{\omega^3}; \quad \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{N}}{\omega^3}; \\ \frac{\partial^2 W'}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 W'}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2 W'}{\partial x\,\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (9, 1)$$

waarbij $\mathrm{L} + \mathrm{M} + \mathrm{N} = 1$. Men moet echter in het oog houden dat dit nieuwe stel vergelijkingen niet meer voor elk assenstelsel geldt, maar alleen voor een stelsel waarvan de assen tevens de hoofdrichtingen zijn van het orthorhombiese net. De formules (6, 6) zullen natuurlik in het algemeen gelden op een ander assenstelsel: men kan echter steeds een derde assenstelsel aangeven, waarop vergelijkingen gelden die met de gelijkheden (6, 7) in zoverre overeenstemmen dat men heeft

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Zijn de assen van de ellipsoide, waardoor ons stelsel van dipolen begrensd wordt, tevens hoofdrichtingen van het orthorhombiese net, dan zijn de bedoelde drie assenstelsels identiek, en heeft men in plaats van de gelijkheden (6, 7):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\mathrm{L} - A}{\omega^3}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{M} - B}{\omega^3}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\mathrm{N} - C}{\omega^3} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9, 2)$$

De funktie $2T$ gaat dientengevolge over in:

$$2T = \frac{x^2}{2\omega^3}(\mathrm{L} - A) + \frac{y^2}{2\omega^3}(\mathrm{M} - B) + \frac{z^3}{2\omega^3}(\mathrm{N} - C). \quad (9, 3)$$

Een kenmerkend verschil met de in hoofdstuk VI gegeven beschouwingen is nu wel het feit dat tans deze funktie, behalve van de gedaante van de ellipsoide waardoor het beschouwde net van dipolen wordt begrensd, ook nog van de struktuur van het net afhangt: de grootheden L, M en N hangen n.l. ten nauwste met deze struktuur samen. In de volgende paragraaf willen we nagaan hoe de waarden dezer grootheden kunnen worden bepaald.

§ 2. *Over de bepaling van de waarden der grootheden* L, M en N.

De grootheden L, M en N hangen samen met de ladingsverdeling die men verkrijgt door het te beschouwen net van dipolen tot in het oneindige voortgezet te denken, daarna alle dipolen door eenheidspolen te vervangen, vervolgens deze polen door een homogene lading met dichtheid $-\omega^{-3}$ te neutraliseren, en ten slotte een der eenheidspolen weg te nemen. De genoemde grootheden hebben betrekking op de omgeving van het punt D, waar zich deze eenheidspool oorsponkelik bevond.

De verkregen ladingsverdeling heeft in deze omgeving geen eindige potentiaal: van tweede afgeleiden der potentiaalfunktie kan dus niet worden gesproken. Tot grootheden die dezelfde betekenis hebben als deze tweede afgeleiden komt men echter als volgt:

„Men verdeelt de ruimte in verschillende delen, zodanig dat

de binnen elk deel aanwezige ladingen in de omgeving van D een eindige potentiaal hebben: de tweede afgeleiden der verschillende potentiaalfunkties naar een bepaalde ruimtekoördinaat (voor koördinaasassen nemen we de hoofdrichtingen van het orthorhombiese net) sommeert men vervolgens over de gehele ruimte."

Men verkrijgt op deze wijze grootheden die de plaats der tweede afgeleiden naar x, y en z van de potentiaalfunktie der totale ladingsverdeling, in de omgeving van D, op geschikte wijze kunnen vervullen, en de drie waarden die men voor het punt D zelf vindt zijn bij definitie:

$$\frac{L}{\omega^3}, \qquad \frac{M}{\omega^3} \quad \text{en} \quad \frac{N}{\omega^3}.$$

Merk nu op dat men elk net met orthorhombiese symmetrie, b.v. een gecentreerd orthorhombies net, kan beschouwen als de superpositie van een aantal enkelvoudige orthorhombiese netten. Ook de te beschouwen ladingsverdeling kan dan opgevat worden als de superpositie van een aantal ladingsverdelingen, die elk korresponderen met een enkelvoudig orthorhombies net. Het net waartoe D behoort mist blijkbaar één eenheidspool: de andere netten zijn echter volledig, en voor deze netten kunnen dus de bijdragen tot L, M en N berekend worden met behulp van de in hoofdstuk IV, § 4, voorkomende formules.

De bepaling van de bijdragen van het eerste net is blijkbaar hetzelfde probleem als de bepaling van de grootheden L, M en N zelf voor een enkelvoudig orthorhombies net: we kunnen ons dus tot de behandeling van dit laatste geval beperken. Met het aangeven van een methode ter berekening van L kan daarbij worden volstaan, omdat L, M en N volkomen gelijkwaardig zijn.

Kies D tot oorsprong van het te gebruiken koördinatenstelsel, en laat a, b en c de ribben zijn van een elementairparallelepipidum. De koördinaten der eenheidspolen zijn dan:

$$x = pa \qquad y = qb \qquad z = rc,$$

waarbij $p, q, r = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

We verdelen nu door de vlakken

$$z = \pm \frac{1}{2} c, \quad \pm \frac{3}{2} c, \quad \pm \frac{5}{2} c \ldots.$$

de ruimte in lagen van de dikte c. De lagen onder en boven de laag, waarbinnen zich D bevindt, leveren dan tot L de bijdrage

$$-\omega^3 \frac{8\pi^2}{a^3 b} \sum_m \sum_n \frac{m^2}{k_{mn}} \frac{1}{e^{k_{mn}c} - 1}, \quad \ldots\ldots\ldots (9, 4)$$

welke uitdrukking men vindt door voor het hier te beschouwen geval een formule af te leiden als (6, 21), en in die formule te stellen $x = y = z = 0$: ook tans moeten echter de termen, waarbij $m = 0$ of $n = 0$, slechts voor de helft in rekening moeten worden gebracht, terwijl de term met $m = n = 0$ geheel ontbreekt

De bepaling van de bijdrage van de laag waarbinnen zich D bevindt vraagt een afzonderlike beschouwing. Van de homogene lading binnen deze laag kan daarbij worden afgezien, omdat deze op L geen invloed kan hebben. Blijven dus over de eenheidspolen met de koördinaten

$$x = p\,a \qquad y = q\,b \qquad z = 0,$$

waarbij $p,\ q = \pm 1,\ \pm 2, \ldots.$

Van deze eenheidspolen beschouwen we eerst de exemplaren waarvoor a een bepaalde, van nul verschillende waarde heeft: blijkbaar liggen deze op een lijn evenwijdig aan de x-as. We kunnen ze gerust door een homogeen over de lijn verdeelde lading met lijndichtheid $-a^{-1}$ geneutraliseerd denken, omdat een dergelike lading op L geen invloed heeft. Is nu r de afstand van een punt der ruimte tot de beschouwde lijn, dan kunnen we de potentiaal van de op deze lijn aanwezige ladingen voorstellen door een FOURIER-reeks van de gedaante [1])

$$\Phi = \sum_n f_n(r) \cos \frac{2\pi nr}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9, 5)$$

Buiten de lijn moet deze potentiaal voldoen aan de vergelijking van LAPLACE: stellen we de eis dat elke term aan deze vergelijking zal voldoen, dan vinden we dat de funktie $f_n(r)$ moet voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 f_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_n}{dr} + \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} f_n = 0$$

---

[1]) Deze methode is weer ontleend aan E. MADELUNG, *Physik. Zs.* 1918, S. 524.

die, wanneer we als nieuwe veranderlike invoeren

$$r' = \frac{2\pi n}{a} r$$

overgaat in:

$$\frac{d^2 f_n}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{df_n}{dr'} + f_n = 0,$$

de bekende BESSEL'se differentiaalvergelijking van de orde nul. Van deze vergelijking zijn voor ons doel alleen bruikbaar oplossingen die voor oneindig groot argument zo sterk naar nul konvergeren dat ook de reeks (9, 5) voor alle waarden van x naar nul konvergeert. De enige oplossing die aan deze voorwaarde voldoet is de door HANKEL ingevoerde funktie [1])

$$i \, \mathrm{H}_0^{(1)} \left(i \frac{2\pi nr}{a} \right),$$

die voor grote waarden van r vergelijkbaar is met

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{nr}} \, e^{-\frac{2\pi nr}{a}}$$

en die voor kleine waarden van deze grootheid nadert tot de funktie

$$\frac{2}{\pi} \lg \frac{a}{\gamma \pi nr}.$$

waarin γ de konstante van EULER voorstelt. In de omgeving van de beschouwde lijn heeft men dus:

$$\Phi = \frac{2}{\pi} \sum_n C_n \lg \frac{a}{\gamma \pi nr} \cdot \cos \frac{2\pi nx}{a} \ldots\ldots\ldots (9, 6)$$

waaruit volgt dat voor de ladingsdichtheid mag worden geschreven:

$$2\pi \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=0} = 4 \sum_n C_n \cos \frac{2\pi nx}{a}.$$

Daar deze ladingsdichtheid bekend is kunnen de konstanten C_n als FOURIER-koëfficiënten bepaald worden. De aanwezigheid

---

[1]) cf. JAHNKE & EMDE, *Funktionentafeln*, SS. 98, 102.

der homogene lading heeft tengevolge dat in de reeks de konstante term ontbreekt. Overigens heeft deze lading geen invloed, en men vindt:

$$C_n = \frac{1}{2a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9, 7)$$

zodat voor de potentiaal Φ mag worden geschreven:

$$\Phi = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} i\, H_0^{(1)}\left(i\frac{2\pi nr}{a}\right) \cos\frac{2\pi nx}{a} \quad \ldots\ldots \quad (9, 8)$$

en voor de tweede afgeleide naar x:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{2\pi^2}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} i n^2\, H_0^{(1)}\left(i\frac{2\pi nr}{a}\right) \cos\frac{2\pi nx}{a}.$$

Van deze tweede afgeleide hebben we alleen nodig de waarde voor $x = 0$, dus:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{x=0} = -\frac{2\pi^2}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} i n^2\, H_0^{(1)}\left(i\frac{2\pi nr}{a}\right)$$

en voor de bijdrage tot L van de in het vlak $z = 0$ gelegen puntladingen die zich buiten de x-as bevinden komen we dus tot de uitdrukking:

$$-\omega^3 \frac{4\pi^2}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} i n^2\, H_0^{(1)}\left(i\frac{2\pi mnb}{a}\right) \ldots\ldots \quad (9, 9)$$

Om tenslotte de bijdrage te vinden van de op de x-as gelegen eenheidspolen merken we op, dat op deze lijn de tweede afgeleide naar x van de potentiaalfunkte dezer polen gegeven wordt door de uitdrukking

$$\frac{1}{4x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{2a-x} + \ldots + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{2a+x} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{(a-x)^3} + \frac{1}{(2a-x)^3} + \ldots + \frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(2a+x)^3} + \ldots\right\},$$

die voor $x = 0$ gelijk is aan

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(2a)^3} + \ldots\right) = -\frac{1}{\pi a^3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) = -\frac{0{,}41}{a^3}$$

en dus tot L bijdraagt het bedrag

$$-\omega^3 \frac{0{,}41}{a^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9, 10)$$

Tellen we nu tenslotte de gevonden bijdragen bij elkaar, dan vinden we als eindresultaat:

$$\left.\begin{aligned} L = -\Big(\frac{8\pi^2}{a^3 b} \sum_m \sum_n \frac{m^2}{k_{mn}} \frac{1}{e^{k_{mn} c} - 1} + \frac{4\pi^2}{a^3} \sum_m \sum_n i n^2 H_0^{(1)} \Big(i \frac{2\pi m n b}{a} \Big) + \\ + \frac{0{,}41}{a^3} \Big) \omega^3 , \end{aligned} \right\} \quad (9, 11)$$

waarbij in aanmerking moet worden genomen dat in de eerste reeks bepaalde termen slechts voor de helft in rekening moeten worden gebracht.

§ 3. *Vergelijking van de magnetiese eigenschappen van dipoolnetten met orthorhombiese symmetrie met die van enige in hoofdstuk IV behandelde aggregaten, en met die van pyrrhotine.*

We gaan bij onze beschouwingen uit van de formules (6, 12) en (6, 13). Nemen we aan dat de ellipsoide, waardoor het te beschouwen dipoolnet begrensd wordt, de hoofdrichtingen van dit net tot assen heeft, dan zijn de gemengde differentiaalquotienten van de funktie T alle gelijk aan nul. Verder ligt het voor de hand te onderstellen, dat voor de in aanmerking komende indelingen der dipolen in twee gelijkwaardige groepen ook de gemengde afgeleiden van de funktie S verdwijnen: in de formules (6, 12) en (6, 13) kunnen dan alle termen met gemengde differentiaalquotienten worden weggelaten, terwijl we zonder deze vereenvoudigende onderstelling te doen zouden krijgen met allerlei asymmetrieën, waarvan volgens Weiss altans bij het normale pyrrhotine geen sprake is.

De vereenvoudigde formules (6, 12) en (6, 13) luiden:

$$\left.\begin{aligned} E = -\frac{p^2}{4\omega^3} \Big\{ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\beta_1^2 + \beta_2^2) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \Big\} - \\ - \frac{p^2}{2\omega^3} \Big\{ \alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \beta_1 \beta_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \Big\} - \\ - \frac{p H}{2\omega^3} \Big\{ \alpha (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta (\beta_1 + \beta_2) + \gamma (\gamma_1 + \gamma_2) \Big\} \end{aligned} \right\} \quad (9, 12)$$

en

$$\left.\begin{aligned} E = &-\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\alpha_1+\alpha_2)^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+(\beta_1+\beta_2)^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+(\gamma_1+\gamma_2)^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\}- \\ &-\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\alpha_1-\alpha_2)^2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+(\beta_1-\beta_2)^2\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+(\gamma_1-\gamma_2)^2\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right\}- \\ &-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\left\{\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+\beta(\beta_1+\beta_2)+\gamma(\gamma_1+\gamma_2)\right\}, \end{aligned}\right\} \quad (9,13)$$

terwijl voor de evenwichtsvoorwaarden (7, 2) mag worden geschreven:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{p^2}{2\omega^3}(\alpha_1+\alpha_1)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{p^2}{2\omega^3}(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\alpha+2\varkappa_1\alpha_1=0 \text{ enz.} \\ &\text{en} \\ &-\frac{p^2}{2\omega^3}(\alpha_1+\alpha_2)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{p^2}{2\omega^3}(\alpha_1-\alpha_2)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\frac{p\,\mathrm{H}}{2\omega^3}\alpha+2\varkappa_2\alpha_2=0, \text{ enz.} \end{aligned}\right\} \quad (9,14)$$

De uitdrukking voor de som van de eerste en de tweede variatie der energie gaat verder over in:

$$\left.\begin{aligned} \delta E = &\varkappa_1(\delta\alpha_1^2+\delta\beta_1^2+\delta\gamma_1^2)+\varkappa_2(\delta\alpha_2^2+\delta\beta_2^2+\delta\gamma_2^2)- \\ &-\frac{p^2}{4\omega^3}\left\{(\delta\alpha_1^2+\delta\alpha_2^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ldots.+\ldots.\right\}U- \\ &-\frac{p^2}{2\omega^3}\left\{\delta\alpha_1\,\delta\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\ldots.+\ldots.\right\}V \end{aligned}\right\} \quad (9,15)$$

We willen nu een geval beschouwen, dat zoveel mogelik overeenstaat met het in hoofdstuk IV, § 9, behandelde. Het daar beschouwde aggregaat had geen hysterese, en de susceptibiliteit in de z-richting werd uiterst gering ondersteld. Iets dergeliks krijgen we ook tans wanneer we aannemen dat in (9, 13) de grootheid $\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$ de grootste is van de zes tweede afgeleiden, hetgeen natuurlik meebrengt dat $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ negatief is. In de normale toestand, zonder uitwendig magneties veld heeft men dan:

$$\gamma_1 = 1 \quad \text{en} \quad \gamma_2 = -1,$$

of omgekeerd, en deze toestand is ook nog stabiel wanneer in

de z-richting een magneties veld werkt waarvan de sterkte H voldoet aan de voorwaarden

$$H^2 < 4p^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right) \quad \ldots\ (9, 16)$$

en

$$H^2 < 4p^2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right) \quad \ldots\ (9, 17)$$

men ziet dit zonder moeite in wanneer men bedenkt dat men in de voorwaarde $\delta E > 0$ de variaties $\delta\gamma_1$ en $\delta\gamma_2$ nul mag stellen. Een niet al te sterk veld in de z-richting veroorzaakt dus generlei magnetisatie, en we mogen zeggen dat voor zulk een veld de susceptibiliteit nul is.

De toestand, waarbij $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, is stabiel wanneer in de x-richting een veld werkt waarvan de sterkte H voldoet aan de ongelijkheid

$$H > 2p\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right); \quad \ldots\ (9, 18)$$

de ongelijkheid

$$H > 2p\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad \ldots\ (9, 19)$$

geeft de voorwaarde aan waaraan een veld H volgens de y-as moet voldoen om in die richting magnetiese verzadiging te veroorzaken. Neemt men nu in aanmerking dat de verzadigingsmagnetisatie

$$M_0 = \frac{p}{\omega^3}$$

bedraagt, dan voert een vergelijking met de formules (4, 13) tot de gelijkheden

$$A = 2\omega^3\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \quad \text{en} \quad B = 2\omega^3\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right),$$

en wanneer men verder (4, 5) en (9, 3) in aanmerking neemt komt men tot

$$\Theta_{11} = 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - L \quad \text{en} \quad \Theta_{22} = 2\omega^3\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - M, \quad (9, 20)$$

welke formules blijkbaar uitbreidingen zijn van de gelijkheid (7, 28). Daar in de z-richting de susceptibiliteit nul is zou men verder kunnen stellen:

$$\Theta_{33} = \infty \quad \ldots\ (9, 21)$$

Men kan nu verder aantonen dat de figuur 34, die betrekking heeft op de verschijnselen die zich voordoen wanneer een konstant veld in het x-y-vlak ronddraait, geheel ongewijzigd kan worden overgenomen: de overeenstemming met het in hoofdstuk IV, § 9, behandelde geval mag dus volkomen worden genoemd. Intussen moet het voorbehoud worden gemaakt dat stilzwijgend is aangenomen, dat het steeds één en dezelfde dipoolindeling is waarop bij de bepaling van evenwicht en stabiliteit moet worden gelet.

Wat getalwaarden betreft lijkt het zeer wel mogelijk dat met de door Weiss aangaande pyrrhotine verstrekte gegevens overeenstemming te bereiken is; de kwestie van de remanentie en van de verschilpunten tussen de figuren 21 en 34 schakelen we daarbij voorlopig uit. Volgens de gegevens van fig. 23 zou men moeten hebben

$$2\omega^3\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 12{,}4$$

en

$$2\omega^3\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = 0{,}186$$

en verder moeten de tweede afgeleiden van S en T voldoen aan de gelijkheden $\Delta S = 0$ en $\Delta T = 0$. Voorts moet $\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$ de grootste van deze afgeleiden zijn. Het is wel duidelik dat aan deze voorwaarden op verschillende manieren kan worden voldaan, en dat men er bovendien nog voor kan zorgen dat de waarde van

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

zo groot is dat de ongelijkheid (9, 16) aan de kleinheid van H geen hoge eisen stelt: zonder dit laatste zou met een betrekkelik zwak veld toch nog een magnetisatie in de z richting kunnen worden teweeggebracht.

Algemeeen gesproken lijkt het dus wel mogelik de eigenschappen van pyrrhotine op grond van de gegeven theorie te verklaren. Op enige biezonderheden zal in de volgende paragraaf nog worden ingegaan.

§ 4. *Opmerkingen over dipoolnetten met hexagonale symmetrie, in verband met de symmetrie van het pyrrhotine-kristal.*

In hoofdstuk II, § 5, werd opgemerkt dat WEISS op grond van z'n magnetiese metingen tot de konklusie is gekomen, dat de hexagonaal uitziende pyrrhotine-kristallen als regel bestaan uit drie orthorhombiese kristallen, die zodanig met elkaar zijn vergroeid dat een bepaalde as voor alle drie dezelfde richting heeft, terwijl voor het overige de standen der kristallen zodanig zijn, dat ze in elkaar overgaan bij wenteling om de genoemde as over hoeken van 120°. We zullen in het volgende met een voorbeeld laten zien, dat een dergelike konklusie op de basis der in dit proefschrift gegeven beschouwingen niet gerechtvaardigd is.

Beschouw daartoe een enkelvoudig hexagonaal net van dipolen. De roosterpunten in een netvlak loodrecht op de hexagonale as zijn dan gerangschikt zoals fig. 42 dat aangeeft. Men ziet uit deze figuur hoe de roosterpunten in twee gelijkwaardige groepen kunnen worden ingedeeld, die elk een enkelvoudig orthorhombies net vormen. Baseert men nu op deze groepindeling een diskussie van de magnetiese eigenschappen, dan komt men noodzakelik tot resultaten, die volkomen vergelijkbaar zijn met wat voor netten met orthorhombiese symmetrie werd gevonden. Men ziet echter gemakkelik in dat er twee dipoolindelingen kunnen worden aangegeven, die met de beschouwde indeling gelijkwaardig zijn en daaruit kunnen worden afgeleid door wenteling om de hexagonale as over hoeken van 120°. Fysies kan er nu natuurlik voor geen dezer indelingen enige voorkeur zijn, en men kan dus, wat de magnetiese eigenschappen aangaat, evengoed symmetrie verwachten ten opzichte van de hoofdrichtingen die behoren bij de orthorhombiese netten der ene groepindeling als ten opzichte van de hoofdrichtingen die aan een andere groepindeling beantwoorden. Blijkbaar behoort

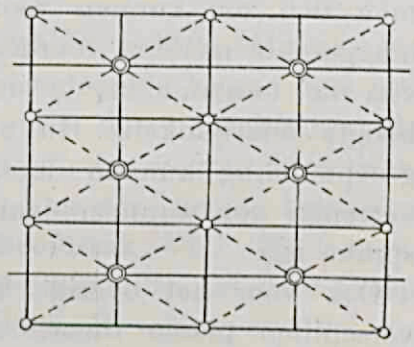

Fig. 42.

bij elke indeling de hexagonale as tot de hoofdrichtingen, terwijl verder twee gelijksoortige hoofdrichtingen steeds een hoek met elkaar maken van 120°.

Al wat WEISS over de symmetrie van pyrrhotine meedeelt is in verband met deze beschouwing volkomen begrijpelik. Daar door hem verschillende anomalieën worden toegeschreven aan onvoldoende homogeniteit der onderzochte kristallen is het niet gewaagd te onderstellen dat voor verschillende delen dezer kristallen verschillende groepindelingen zullen domineeren. Het is echter zeer natuurlik dat daarbij de ene indeling meer voorkomt dan de andere, en men vindt dus een ongedwongen verklaring voor het zo sterk uiteenlopen der in hoofdstuk II genoemde verhoudingen, die aangeven in welke mate de drie orthorhombiese kristallen, waaruit pyrrhotine zou zijn samengesteld, vertegenwoordigd zijn. We mogen dus wel zeggen dat pyrrhotine waarschijnlik een kristal is met hexagonale symmetrie, en dat van een vergroeiing van drie orthorhombiese kristallen geen sprake is.

Wat nu de remanentie betreft kan worden opgemerkt dat men zich zou kunnen voorstellen dat in een pyrrhotine-kristal langgerekte naalden voorkomen die behoorlik homogeen zijn en van de toestand in de omgevende kristalstof tot op zekere hoogte onafhankelik. In zulk een naald zou overal dezelfde groepindeling kunnen domineren, en hij zou hysterese kunnen vertonen ook wanneer daarvan in meer normale gevallen geen sprake is.

Ook voor het overige kan men een aantal ondergeschikte verschillen tussen theorie en experiment op rekening schuiven van de inhomogeniteit der door WEISS onderzochte kristallen. Dat de waarde van de breuk

$$\frac{H \,.\, \sin(\Phi - \psi)}{M \,.\, \sin\psi \,.\, \cos\psi}$$

niet geheel konstant is, en dat de afwijkingen groter zijn naarmate men met zwakkere velden te doen heeft, beantwoordt b.v. geheel aan wat men in verband met deze inhomogeniteit zou verwachten.

SLOTOPMERKINGEN.

We hebben ons in de loop der gegeven beschouwingen een voorstelling gevormd van het mechanisme van het magnetiseringsproces bij metalen als ijzer en nikkel. Volgens deze voorstelling komen in de genoemde metalen — ook in de niet-magnetiese toestand — langgerekte ketens van elementairkristallen voor, die in hun magnetiese eigenschappen cohaerent zijn, en daardoor in de richting van de assen der ketens nagenoeg verzadigd zijn gemagnetiseerd. Daar echter deze assen alle mogelike richtingen kunnen hebben is naar buiten van enige magnetisatie niets te merken.

Laat men nu op het metaal een zwak uitwendig veld werken, dan zullen de kristallen, die van de genoemde ketens deel uitmaken, hierop in mindere mate reageren dan de kristallen, die hun individualiteit hebben behouden: de waarde van de initiaalsusceptibiliteit zal dus in hoofdzaak van deze laatste kristallen moeten afhangen. We vonden in hoofdstuk VIII, §§ 8 en 9, dat bij week ijzer ongeveer 92 % der kristallen tot deze groep behoort, tegen ongeveer 42 % bij nikkel. Dus is bij het ijzer in de niet-magnetiese toestand slechts 8 % der kristallen tot ketens verenigd, en bij nikkel niet minder dan 58 %.

Van dit grote verschil kan een eenvoudige verklaring gegeven worden. IJzerkristallen moeten n.l. volgens de gegeven theorie beschouwd worden als gecentreerd-kubiese netten van magnetiese dipolen, en voor deze netten werd gevonden

$$\Theta = -0{,}02.$$

Zal nu een door een omwentelingsellipsoide begrensd net van deze soort hysterese vertonen, dan moet

$$A + \Theta < 0, \qquad \text{dus} \qquad A < 0{,}02,$$

d. w. z. de ellipsoide moet zó langgerekt zijn dat (zie fig. 3) de assenverhouding ε voldoet aan:

$$\varepsilon < \frac{1}{12}.$$

Bij nikkel daarentegen, waar men met een vlak-gecentreerd-kubies net te doen heeft, vindt men de voorwaarde

$$A < 0{,}18\,,$$

die leidt tot:

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\,,$$

zodat men hier veel minder langgerekte ellipsoiden nodig heeft. Het is duidelik dat hieruit volgt dat in ijzer een kristalketen, die hysterese vertoont, veel meer langgerekt zal moeten zijn dan bij nikkel nodig is, en dat dus de kans op de vorming van zulke ketens bij nikkel veel groter is.

We kunnen verder opmerken, dat de bij nikkel voorkomende ketens gemiddeld ook sterker hysterese zullen vertonen dan die bij ijzer. Dit feit is van belang voor het verdere verloop van het magnetiseringsproces. Laat men n.l. het uitwendige veld sterker worden, dan zullen op den duur alleen die ketens intakt kunnen blijven, wier magnetisatie de richting heeft van het uitwendige veld. De andere ketens moeten vroeg of laat verbroken worden, en hun samenhang zal daarbij plaats maken voor een samenhang, die zich hoofdzakelik richt naar het uitwendige veld. Het is nu duidelijk dat bij ijzer voor het verbreken der ketens een minder sterk veld nodig zal zijn dan bij nikkel, en men kan hierin de oorzaak zien van het feit dat het eerste metaal een steilere aanloopkromme bezit.

We willen deze opmerking nog in verband brengen met een in de figuren 26 en 27 aangegeven temperatuur-effekt. Vooral in fig. 26, die op nikkel betrekking heeft, ziet men duidelik, dat de invloed van een zwak veld op de magnetisatie bij toenemende temperatuur eerst toeneemt, en eerst in de buurt van het CURIE-punt geringer gaat worden. Om dit verschijnsel te verklaren moeten we ons rekenschap geven van de invloed van de temperatuur op de elementairmagneetjes. Tot dusverre werd deze invloed op grond van een in de inleiding genoemde overweging niet in aanmerking genomen; dat men er bij hogere

temperaturen wèl rekening mee moet houden bewijst echter het bestaan van het CURIE-punt.

Omtrent de invloed van de temperatuur op de elementairmagneetjes kan intussen weinig met zekerheid worden gezegd. Men kan alleen als vaststaand aannemen dat er warmte-rotaties zijn, die levendiger worden naarmate de temperatuur hoger wordt. Op grond van dit feit kan het gesignaleerde temperatuur-effekt begrijpelik worden gemaakt. We zagen n.l. dat bij de magnetisering van nikkel de samenhang van een groot aantal ketens van elementairkristallen verbroken moet worden: dat dit nu gemakkeliker geschiedt naarmate de elementairmagneetjes in levendiger beweging zijn is duidelik. Wordt de beweging echter te levendig, dan is voor het verbreken van de genoemde samenhang in het geheel geen veld meer nodig; er is dan van de vorming van ketens geen sprake meer en alle magnetisatie is verdwenen zodra er geen uitwendig veld meer werkt, kortom, het CURIE-punt is overschreden.

Dat bij ijzer het beschouwde effekt veel minder op de voorgrond treedt kan verklaard worden uit het feit, dat hier veel minder ketens voorkomen. Bij de kristallen magnetiet en pyrrhotine, die een grote mate van homogeniteit bezitten, is het verschijnsel natuurlik in het geheel niet te verwachten.

Ten slotte nog enige opmerkingen over de mogelijkheid van een verklaring van de eigenschappen van de legeringen van HEUSSLER. Het beslissende bestanddeel van deze legeringen is mangaan. Van dit metaal is het kristalnet tot dusverre niet gevonden: volgens YOUNG (zie pag. 36) is de diffraktiefiguur van het RÖNTGEN-licht te ingewikkeld voor een net met kubiese symmetrie. Men kan echter wel zeggen, dat het mangaanatoom een magneties moment heeft. WEISS en KAMERLINGH ONNES [1]) hebben n.l. bij zuiver mangaan, dat eerst in poedervorm was gebracht, en vervolgens bijeengesmolten, een sterke magnetiseerbaarheid gevonden, en volgens SECKELSON [2]) is de magnetiseerbaarheid van galvanies neergeslagen mangaan ongeveer het dertigste deel van die van ijzer.

Men stelle zich nu voor een legering van mangaan met één of meer metalen, waarvan de atomen geen of nagenoeg geen

---

1) *Comm.* Leiden, No. 114, 1910.

2) *Wied. Ann.*, LXVII, 1899, S. 37.

magneties moment bezitten In zulk een legering kunnen kristallen van mangaan en de andere metalen gescheiden voorkomen; het is echter ook mogelik dat men kristallen vindt, waarin zowel mangaanatomen als andere atomen vertegenwoordigd zijn. Volgens de gegeven theorie hangt in het laatste geval het al of niet optreden van ferromagnetiese verschijnselen eenvoudig af van de wijze, waarop in zulk een kristal de mangaanatomen zijn gerangschikt. Bevinden ze zich in de roosterpunten van een kubies net, dan krijgt men al een betrekkelik grote magnetiseerbaarheid, maar geen hysterese; bij een gecentreerd kubies net is de magnetiseerbaarheid groter en is er enige kans op hysterese, terwijl men bij een vlak-gecentreerd kubies net van hysterese wel zeker kan zijn.

Natuurlik zijn deze opmerkingen meer bedoeld als verklaringsmogelijkheid dan als verklaring; essentieel is alleen dat de magnetiese eigenschappen geheel afhangen van de aard der netten, waarin de magnetiese atomen zijn gerangschikt, en dat hierop de stoffen, waaruit de legering is samengesteld, van beslissende invloed zijn is vanzelfsprekend. De invloed van bijmengsels van kool en dergelike stoffen op de magnetiese eigenschappen van ijzer kan op soortgelijke wijze worden verklaard, en men ziet gemakkelik in dat deze verklaringswijze in overeenstemming is met de voorstelling, die fig. 13 geeft van de samenstelling van mengsels van ijzer en kool.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

Voor de elektriese en magnetiese energie per cM^3. geeft de klassieke elektrodynamica de uitdrukkingen $\frac{1}{2} E \cdot D$ en $\frac{1}{2} H \cdot B$, waarin E, D, H en B voorstellen elektriese kracht, diëlektriese verplaatsing, magnetiese kracht en magnetiese induktie. Deze energiebedragen kunnen zeer goed van andere dan elektriese, resp. magnetiese aard zijn.

II.

De formule $W = \frac{1}{2} \int H \cdot B \, . \, d\tau$ voor de magnetiese energie wordt door JEANS *(Electricity and Magnetism, §§ 448, 470 en 471)* foutief afgeleid, en wel alleen voor een klasse van lichamen waarvoor zij niet geldt.

III.

Een magneties veld dat de eigenschappen heeft, die door GANS *(Gött. Nachr., Math. Ph. Kl., 1910, S. 97)* worden toegekend aan het door hem in zijn theorie van het ferromagnetisme ingevoerde molekulaire veld, is onbestaanbaar.

IV.

Elke op de klassieke statistiese mechanica gebaseerde theorie van het ferromagnetisme geeft kwantitatief onjuiste resultaten.

V.

De bezwaren die BOREL *(Journal de Physique, 1913)* opwerpt tegen de methoden der statistiese mechanica, en in het biezonder tegen het gebruik van de stelling van LIOUVILLE, zijn ongegrond.

VI.

VON SEELIGER heeft opgemerkt dat de onderstelling volgens welke het heelal gelijkmatig met materie zou zijn gevuld, in strijd is met de gravitatiewetten van NEWTON.

De onderstelling is echter niet in strijd met de gravitatiewetten, die uit de vergelijking van POISSON kunnen worden afgeleid.

VII.

Volgens de wetten der kinetiese gastheorie kan de door J. C. KAPTEYN in een opstel van 1921 *(Physica, 1921, p. 352)* aan het grote sterrestelsel toegeschreven bewegingstoestand niet stationnair zijn. Het is dus inkonsequent deze wetten, voorzover ze op stationnaire toestanden betrekking hebben, bij de diskussie van de genoemde bewegingstoestand toe te passen.

VIII.

De paradox van St.-Petersburg bevat niets paradoxaals: voor de opvatting dat „espérance mathématique" de waarde zou aangeven van een kans op winst of verlies is n.l. geen gegronde reden.

IX.

Ten onrechte geeft CARATHEODORY in zijn „Vorlesungen über reëlle Funktionen" de indruk dat het mogelijk is de theorie der getallen op bevredigende wijze te ontwikkelen door de stelling „Elke verzameling van getallen heeft een bovenste grens" als axioma in te voeren.