

Br, 1899, VII, 9

LEERBOEK

DER

TRIGONOMETRIE

DOOR

D. P. A. VERRIJP,

Leeraar aan het Gymnasium te Arnhem.

TWEEDE DEEL:

SPHERISCHE TRIGONOMETRIE.

(Met bijna 200 Vraagstukken.)

'S-GRAVENHAGE. — JOH. YKEMA. — 1899.

Prijs f 0.40.

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

Bij JOH. YKEMA, den Haag is mede verschenen :

S. DE GAST Jz.,

Leerboek der Rekenkunde,

1e deel, Vijfde Druk . . . f 1.25.

2e deel, Derde Druk . . . „ 1.25.

3e deel. „ 1.40.

Dit werk zou ik u als het mij voorkomende beste studiewerk kunnen aanraden, omdat het in alle geval de verdienste heeft, dat de hoofdzaken er goed in uitkomen en deze helder en breed zijn uitgewerkt. Het is m. i. voor studeerende onderwijzers *het beste, meest volledige, meest practische en bruikbare*. Een groot aantal opgaven, aan verschillende examens ontleend, besluit elk deeltje en verhoogt de waarde.

School en Studie.

A. J. M. BROGTROP.

Van de mij bekende leerboeken over rekenkunde wijkt het onderhavige in menig opzicht af. Ik behoeft daarbij slechts te wijzen op de rangschikking der stof, op den aard van vele bewijzen, op de menigte met zorg gekozen vragen en opgaven tusschen den tekst, op den toelag van den schrijver om den leerling een helder inzicht te geven in het verband, dat er tusschen verschillende eigenschappen bestaat. Wat eindelijk de bruikbaarheid van dit leerboek in mijn oog nog aanmerkelijk verhoogt, is dit, dat de schrijver bij vele eigenschappen wijst op het practisch nut er van. 'tKomt mij voor, dat het werk uitstekend geschikt is voor onderwijzers, die zonder leiding studeeren.

Tusschen den tekst vindt men tal van opgaven, die bijna evenzoo vele vingerwijzingen zijn. Aan 't slot treft men 250 methodisch gerangschikte voorstellen aan.

Dat een derde druk niet lang op zich zal laten wachten, waarborgen m. i. de twee voorname kenmerken van het boek: degelijkheid en duidelijkheid.

De Schoolwereld.

F. DUIKER.

Ik acht het boek van den heer DE GAST voor hen, die zich zelf moeten helpen bij de studie der rekenkunde beter dan eenig ander mij bekend leerboek over dat vak. Ik heb hierbij het oog op studeerenden voor hulp- en hoofdacte.

Het boek is overal streng logisch, eenvoudig en daardoor helder van stijl, volledig, maar volstrekt niet vermoeiend. Een rijke verzameling vraagstukken besluit elk deel.

Zie pag. 3 omslag.

Present Exemplaar
van den Uitgever.

LEERBOEK

DER

TRIGONOMETRIE

DOOR

D. P. A. VERRIJP,

Leeraar aan het Gymnasium te Arnhem.

TWEEDE DEEL:

SPHERISCHE TRIGONOMETRIE.

(Met bijna 200 Vraagstukken.)

'S-GRAVENHAGE. — JOH. YKEMA. — 1899.

RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT



2763 514 7

Bij JOH. YKEMA, den Haag is mede verschenen:

S. DE GAST Jr.,

Leerboek der Rekenkunde,

1e deel, Vijfde Druk / 1.25.

2e deel, Derde Druk 1.25.

3e deel. , 1.40.

Dit werk zou ik u als het mij voorkomende beste studiewerk kunnen aanraden, omdat het in alle geval de verdienste heeft, dat de hoofdzaken er goed in uitkomen en deze helder en breed zijn uitgewerkt. Het is m. i. voor studeerende onderwijzers *het beste, meest volledige, meest practische en bruikbare*. Een groot aantal opgaven, aan verschillende examens ontleend, besluit elk deeltje en verhoogt de waarde.

School en Studie.

A. J. M. BROGTROP.

Van de mij bekende leerboeken over rekenkunde wijkt het onderhavige in menig opzicht af. Ik behoeft daarbij slechts te wijzen op de rangschikking der stof, op den aard van vele bewijzen, op de menigte met zorg gekozen vragen en opgaven tusschen den tekst, op den toelag van den schrijver om den leerling een helder inzicht te geven in het verband, dat er tusschen verschillende eigenschappen bestaat. Wat eindelijk de bruikbaarheid van dit leerboek in mijn oog nog aanmerkelijk verhoogt, is dit, dat de schrijver bij vele eigenschappen wijst op het practisch nut er van. 't Komt mij voor, dat het werk uitstekend geschikt is voor onderwijzers, die zonder leiding studeeren.

Tusschen den tekst vindt men tal van opgaven, die bijna eventzovele vingerwijzingen zijn. Aan 't slot treft men 250 methodisch gerangschikte voorstellen aan.

Dat een derde druk niet lang op zich zal laten wachten, waarborgen m. i. de twee voornamen kenmerken van het boek: degelijkheid en duidelijkheid.

De Schoolverrekl.

F. DIJKER.

Ik acht het boek van den heer DE GAST voor hen, die zich zelf moeten helpen bij de studie der rekenkunde beter dan enig ander mij bekend leerboek over dat vak. Ik heb hierbij het oog op studeerenden voor hulp- en hoofdacte.

Het boek is overal streng logisch, eenvoudig en daardoor helder van stijl, volledig; maar volstrekt niet vermoeiend. Een rijke verzameling vraagstukken besluit elk deel.

S

Present Exemplaar
van den Uitgever.
LEERBOEK

DER

TRIGONOMETRIE

DOOR

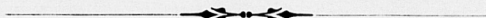
D. P. A. VERRIJP,
Leeraar aan het Gymnasium te Arnhem.



TWEEDE DEEL:

SPHERISCHE TRIGONOMETRIE.

(Met bijna 200 Vraagstukken.)



'S-GRAVENHAGE. — JOH. YKEMA. — 1899.

RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT



2763 514 7

SPHERISCHE TRIGONOMETRIE.

§ 106. De spherische of bolvormige Trigonometrie (Boldrie-hoeksmeting) houdt zich bezig met de toepassing der Goniometrie op figuren op den bol (hoofdzakelijk boldriehoeken) of op figuren die uit deze zijn samengesteld.

Zijden van of spherische lijnen in deze figuren en de hierin voorkomende hoeken worden, in welke richting en zin ook gemeten, steeds als positief beschouwd.

RECHTHOEKIGE BOLDRIEHOEKEN.

Formules.

§ 107. **Grondformules.** *In een rechthoekigen boldriehoek is de cosinus der schuine zijde gelijk aan het product van de cosinussen der rechthoekszijden.*

Zij van $\triangle ABC$: $BC = a$,
 $CA = b$, $AB = c$ en $\angle B = 90^\circ$,
 dan is:

$$\cos b = \cos a \cos c. \quad (1)$$

Bewijs. Zij O het middelpunt van den bol. Trek dan de stralen OA, OB en OC, laat uit een willekeurig punt R van OC de loodlijnen RP en RQ op de andere stralen of hunne verlengden neer, en verbind P met Q, dan is

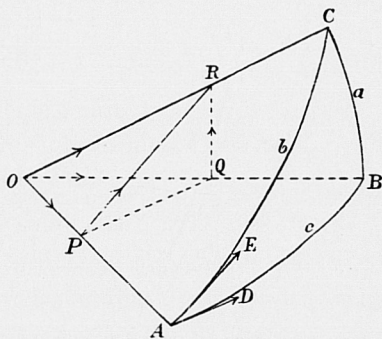


Fig. 36.

vooreerst $RQ \perp AOB$ dus $RQ \perp PQ$. Verder is $OP \perp PR$ en $OP \perp RQ$ dus $OP \perp PQ$. Laten nog OA , OB , OC , AD , AE [of PR] (beide laatste van raaklijnen aan de bogen AB en AC dus $\perp OA$) en QR positieve richtingen en lijnen in die richtingen en de tegengestelde gemeten resp. positief en negatief zijn, dan is

$$\cos a \cos c = \frac{OQ}{OR} \times \frac{OP}{OQ} = \frac{OP}{OR} = \cos b.$$

In een rechthoekigen boldriehoek is de tangens van een rechthoekszijde gelijk aan het product van de tangens van den overstaanden hoek en den sinus van de andere rechthoekszijde.

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} A \sin c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} C \sin a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bewijs van (2). $\operatorname{tg} A \sin c = \frac{QR}{PQ} \times \frac{PQ}{OQ} = \frac{QR}{OQ} = \operatorname{tg} a.$

Op soortgelijke wijze bewijst men (3).

§ 108. **Afgeleide formules.** *In een rechthoekigen boldriehoek is de sinus van een rechthoekszijde gelijk aan het product van den sinus van den overstaanden hoek en den sinus der schuine zijde.*

$$\sin a = \sin A \sin b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\sin c = \sin C \sin b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Bewijs van (4). Hiertoe elimineeren we c uit (1) en (2) aldus:

$$1 = \sin^2 c + \cos^2 c = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg}^2 A} + \frac{\cos^2 b}{\cos^2 a} \quad \cos^2 a$$

$$\cos^2 a = \sin^2 a \cot^2 A + \cos^2 b$$

$$1 - \sin^2 a = \sin^2 a \cot^2 A + 1 - \sin^2 b$$

$$\sin^2 b = \sin^2 a (1 + \cot^2 A)$$

$$\sin^2 A$$

$$\sin^2 b \sin^2 A = \sin^2 a,$$

dus, daar $\sin b$, $\sin A$ en $\sin a$ steeds positief zijn,

$$\sin b \sin A = \sin a.$$

Op soortgelijke wijze bewijst men (5).

In een rechthoekigen boldriehoek is de tangens van een rechthoekszijde gelijk aan het product van den cosinus van den aanliggenden scheeven hoek en de tangens van de hypotenusa.

$$\operatorname{tg} c = \cos A \operatorname{tg} b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} a = \cos C \operatorname{tg} b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Bewijs van (6). Hiertoe elimineeren we a uit (2), (4) en (1) aldus:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \frac{\sin a}{\cos a} \\ \operatorname{tg} A \sin c &= \frac{\sin A \sin b}{\frac{\cos b}{\cos c}} \\ \operatorname{tg} A \cos c &= \frac{\operatorname{tg} c = \cos A \operatorname{tg} b.}{\cos A} \end{aligned}$$

Op soortgelijke wijze bewijst men (7).

In een rechthoekigen boldriehoek is de cosinus van de schuine zijde gelijk aan het product van de cotangenten der aanliggende hoeken.

$$\cos b = \cot A \cot C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Bewijs. Uit (2), (3) en (1) volgt:

$$\begin{aligned} \cot A \cot C &= \frac{\sin c}{\operatorname{tg} a} \times \frac{\sin a}{\operatorname{tg} c} \\ &= \cos a \cos c \\ &= \cos b. \end{aligned}$$

In een rechthoekigen boldriehoek is de cosinus van elken scheeven hoek gelijk aan het product van den cosinus der overstaande zijde en den sinus van den anderen scheeven hoek.

$$\cos A = \cos a \sin C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\cos C = \cos c \sin A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Bewijs van (9). Uit (1), (5) en (6) volgt:

$$\begin{aligned} \cos a \sin C &= \frac{\cos b}{\cos c} \times \frac{\sin c}{\sin b} \\ &= \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b} \\ &= \cos A. \end{aligned}$$

Op soortgelijke wijze bewijst men (10).

§ 109. De formules (4)—(7) kunnen ook gemakkelijk uit de figuur worden afgeleid.

§ 110. Men kan de tien formules der rechthoekige boldriehoeken samenvatten in den **regel van Napier** (1614): *Indien men, den driehoek rondgaande, de elementen, met uitzondering van den rechten hoek, opschrijft in de volgorde, waarin zij voorkomen, en daarbij de*

rechthoekszijden vervangt door hunne complementen, dan is de cosinus van elk element gelijk aan het product van de cotangenten der aanliggende elementen, of gelijk aan het product van de sinussen der niet aanliggende elementen.

Immers den boldriehoek op de voorgeschreven wijze rondgaande, heeft men:

$$C, b, A, 90^\circ - c, 90^\circ - a, C, b, A, 90^\circ - c,$$

en dus volgens den aangegeven regel:

$$\cos A = \cot b \cot (90^\circ - c) \text{ of } \cos A = \cot b \operatorname{tg} c. \quad (6)$$

$$\cos A = \sin C \sin (90^\circ - a) \text{ „ } \cos A = \sin C \cos a. \quad (9)$$

$$\cos (90^\circ - c) = \cot A \cot (90^\circ - a) \text{ „ } \sin c = \cot A \operatorname{tg} a. \quad (2)$$

$$\cos (90^\circ - c) = \sin b \sin C \text{ „ } \sin c = \sin b \sin C. \quad (5)$$

$$\cos (90^\circ - a) = \cot (90^\circ - c) \cot C \text{ „ } \sin a = \operatorname{tg} c \cot C. \quad (3)$$

$$\cos (90^\circ - a) = \sin A \sin b \text{ „ } \sin a = \sin A \sin b. \quad (4)$$

$$\cos C = \cot (90^\circ - a) \cot b \text{ „ } \cos C = \operatorname{tg} a \cot b. \quad (7)$$

$$\cos C = \sin (90^\circ - c) \sin A \text{ „ } \cos C = \cos c \sin A. \quad (10)$$

$$\cos b = \cot C \cot A. \quad (8)$$

$$\cos b = \sin (90^\circ - a) \sin (90^\circ - c) \text{ of } \cos b = \cos a \cos c. \quad (1)$$

Vraagstukken.

Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC$ $\angle B = 90^\circ$, de volgende formules:

$$1. \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (b + c) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (b - c). \quad (\text{T. U.})$$

$$2. \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \frac{1}{2} A) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b + a)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b - a)}.$$

$$3. \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin (b - c)}{\sin (b + c)}.$$

$$4. \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \frac{1}{2} b) = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - a)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + a)}.$$

$$5. \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \frac{1}{2} a) = \frac{\sin (C - c)}{\sin (C + c)}.$$

$$6. \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \frac{1}{2} A) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (C - c) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (C + c).$$

$$7. \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} b = - \frac{\cos (A + C)}{\cos (A - C)}.$$

$$8. \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a = \cot \frac{1}{2} (A - C - 90^\circ) \cot \frac{1}{2} (A + C + 90^\circ).$$

$$9. \sin (A + C) = \frac{\cos a + \cos c}{1 + \cos a \cos c}.$$

10. $\sin (A - C) = \frac{\cos c - \cos a}{1 - \cos a \cos c}.$
 11. $\cos (A + C) = - \frac{\sin a \sin c}{1 + \cos a \cos c}. \text{ (T. U.)}$
 12. $\cos (A - C) = \frac{\sin a \sin c}{1 - \cos a \cos c}. \text{ (T. U.)}$
 13. $\sin (a + b) = 2 \cos^2 \frac{1}{2} C \cos a \sin b. \text{ (T. U.)}$
 14. $\sin (b - a) = 2 \sin^2 \frac{1}{2} C \cos a \sin b. \text{ (T. U.)}$
 15. $\sin (b - a) = \sin c \cos a \operatorname{tg} \frac{1}{2} C.$
 16. $\sin (b - a) = \operatorname{tg} c \cos b \operatorname{tg} \frac{1}{2} C.$
 17. $\sin (a + b) = \cot^2 \frac{1}{2} C \sin (b - a). \text{ (T. U.)}$
 18. $\sin^2 a \cos^2 c = \sin (b - c) \sin (b + c).$
 19. $\cos^2 A \sin^2 b = \sin (b - a) \sin (b + a).$
 20. $\sin^2 A \cos^2 b = \sin (A - a) \sin (A + a).$
 21. $\sin^2 A = \cos^2 C + \sin^2 A \sin^2 c.$
 22. $\operatorname{tg} a \cos b = \sin c \cot C.$
 23. $\sin^2 \frac{1}{2} b = \sin^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} c + \sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \frac{1}{2} a. \text{ (T. U.)}$
 24. $\operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 c. \text{ (Kl.)}$
 25. Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC \angle A = 90^\circ$ en $b = c$,
 $\cot B = \cos b.$
 26. Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC \angle C = 90^\circ$ en $c = 2a$,
 $\frac{\sin 2A}{\sin B} = 1. \text{ (L. M.)}$
 27. Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC \angle C = 90^\circ$ en p de spherische projectie van b op AB is,
 $\operatorname{tg}^2 b = \operatorname{tg} c \operatorname{tg} p. \text{ (Kl.)}$
 28. Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC \angle A = 90^\circ$, h de spherische hoogtelijn is op BC en p en q de stukken zijn, waarin die hoogtelijn BC verdeelt,
 $\sin^2 h = \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q. \text{ (Kl.)}$
 29. Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC a = 90^\circ$ en h de spherische hoogtelijn is op BC ,
 $\cot^2 h = \cot^2 B + \cot^2 C. \text{ (L. M.)}$
 30. Leid de formules (4) en (6) uit de figuur af.
-

Oplossing der rechthoekige boldriehoeken.

§ 111. Een rechthoekige boldriehoek is (volkomen) bepaald, zoo men behalve den rechten hoek nog twee van de overige vijf elementen geeft. De verschillende gevallen, die zich hierbij kunnen voordoen zijn:

1. Gegeven de hypotenusa en een scheeve hoek.
2. " de hypotenusa en een rechthoekszijde.
3. " de beide rechthoekszijden.
4. " de beide scheeve hoeken.
5. " een rechthoekszijde en de aangrenzende scheeve hoek.
6. " een rechthoekszijde en de overstaande hoek (niet *volkomen* bepaald).

In elk dezer zes gevallen kunnen we met behulp van den regel van Napier de overige drie elementen berekenen.

§ 112. **Geval I.** Gegeven b en A , gevraagd c , a en C .

Oplossing.

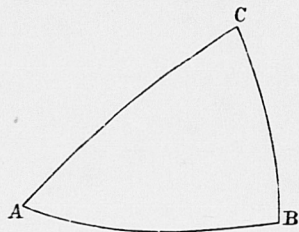


Fig. 37.

Om den regel van Napier gemakkelijk te kunnen toepassen, gaan we den boldriehoek op de voorgeschreven wijze rond, en onderstrepen de gegevens. Men heeft dan:

$C, \underline{b}, \underline{A}, 90^\circ - c, 90^\circ - a, C, \underline{b}, \underline{A}, 90^\circ - c.$
en dus ter berekening van

1) $c.$ $\cos A = \cot b \operatorname{tg} c$ (de betrekking tusschen $\underline{b}, \underline{A}$ en c)
 $\operatorname{tg} c = \cos A \operatorname{tg} b.$

2) $a.$ $\sin a = \sin A \sin b$ (de betrekking tusschen $\underline{b}, \underline{A}$ en a).

Daar volgens formule (2) a gelijksoortig is met A ¹⁾, verkrijgt men voor a één bepaalde waarde.

3) $C.$ $\cos b = \cot C \cot A$ (een betrekking tusschen $\underline{b}, \underline{A}$ en C)
 $\cot C = \cos b \operatorname{tg} A.$

Voorwaarde: geen.

Voorbeeld. $b = 71^\circ 24' 15''$, $A = 105^\circ 52' 32''$.

¹⁾ D. w. z. dat beide tegelijk scherp, recht of stomp zijn.

Berekening.

$$\begin{aligned}
 1) \ c. \quad & - \operatorname{tg} c = - \cos A \operatorname{tg} b \\
 & \cot (c - 90^\circ) = \sin (A - 90^\circ) \operatorname{tg} b \\
 & \log \cot (c - 90^\circ) = \log \sin (A - 90^\circ) + \log \operatorname{tg} b \\
 & \log \sin (A - 90^\circ) = 9,43703 - 10 \\
 & \log \operatorname{tg} b = 0,47308
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log \cot (c - 90^\circ) &= 9,91011 - 10 && \text{op} \\
 c - 90^\circ &= 50^\circ 53' 16'' \\
 c &= 140^\circ 53' 16''.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \ a. \quad & \cos (a - 90^\circ) = \sin b \cos (A - 90^\circ) \\
 & \log \cos (a - 90^\circ) = \log \sin b + \log \cos (A - 90^\circ) \\
 & \log \sin b = 9,97671 - 10 \\
 & \log \cos (A - 90^\circ) = 9,93311 - 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log \cos (a - 90^\circ) &= 9,95982 - 10 && \text{op} \\
 a - 90^\circ &= 24^\circ 16' \\
 a &= 114^\circ 16'.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \ C. \quad & \operatorname{tg} (C - 90^\circ) = \cos b \cot (A - 90^\circ) \\
 & \log \operatorname{tg} (C - 90^\circ) = \log \cos b + \log \cot (A - 90^\circ) \\
 & \log \cos b = 9,50365 - 10 \\
 & \log \cot (A - 90^\circ) = 0,54607
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log \operatorname{tg} (C - 90^\circ) &= 0,04972 && \text{op} \\
 C - 90^\circ &= 48^\circ 16' 21'' \\
 C &= 138^\circ 16' 21''.
 \end{aligned}$$

§ 113. **Geval II.** *Gegeven b en c , gevraagd A , a en C .*

Oplossing.

$$C, \underline{b}, A, 90^\circ - \underline{c}, 90^\circ - a, C, \underline{b}, A, 90^\circ - \underline{c}.$$

$$1) \ A. \quad \cos A = \cot b \operatorname{tg} c.$$

$$2) \ a. \quad \cos b = \cos a \cos c$$

$$\cos a = \frac{\cos b}{\cos c}.$$

$$3) \ C. \quad \sin c = \sin b \sin C$$

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin b}.$$

Daar volgens form. (3) C gelijksoortig is met c , verkrijgt men voor C één bepaalde waarde.

Voorwaarde: indien $b < 90^\circ$ en $c < 90^\circ$ moet $b > c$,
 " $b < 90^\circ$ " $c > 90^\circ$ " $b > 180^\circ - c$,
 " $b > 90^\circ$ " $c < 90^\circ$ " $180^\circ - b > c$,
 " $b > 90^\circ$ " $c > 90^\circ$ " $180^\circ - b$
 $> 180^\circ - c$ of $c > b$.

§ 114. **Geval III.** Gegeven a en c , gevraagd A , C en b .

Oplossing.

$C, b, A, 90^\circ - \underline{c}, 90^\circ - \underline{a}, C, b, A, 90^\circ - \underline{c}.$

- 1) $A.$ $\sin c = \cot A \operatorname{tg} a$
 $\cot A = \sin c \cot a.$
- 2) $C.$ $\sin a = \operatorname{tg} c \cot C$
 $\cot C = \sin a \cot c.$
- 3) $b.$ $\cos b = \cos a \cos c.$

Voorwaarde: geen.

§ 115. **Geval IV.** Gegeven A en C , gevraagd c , a en b .

Voorwaarden. Uit

$$\begin{aligned} A + B + C &> 180^\circ, \\ A + B - C &< 180^\circ, \\ A - B + C &< 180^\circ \\ \text{en } -A + B + C &< 180^\circ \end{aligned}$$

leidt men af:

$$\begin{aligned} 90^\circ &< A + C < 270^\circ \\ \text{en } -90^\circ &< A - C < 90^\circ. \end{aligned}$$

Oplossing.

$\underline{C}, b, \underline{A}, 90^\circ - c, 90^\circ - a, \underline{C}, b, \underline{A}, 90^\circ - c.$

- 1) $c.$ $\cos C = \cos c \sin A.$
 $\cos c = \frac{\cos C}{\sin A}.$
- 2) $a.$ $\cos A = \sin C \cos a$
 $\cos a = \frac{\cos A}{\sin C}.$
- 3) $b.$ $\cos b = \cot C \cot A.$

§ 116. **Geval V.** Gegeven c en A , gevraagd a , C en b .

Oplossing.

$$C, b, \underline{A}, 90^\circ - \underline{c}, 90^\circ - a, C, b, \underline{A}, 90^\circ - \underline{c}.$$

- 1) $a.$ $\sin c = \cot A \operatorname{tg} a$
 $\operatorname{tg} a = \sin c \operatorname{tg} A.$
 2) $C.$ $\cos C = \cos c \sin A.$
 3) $b.$ $\cos A = \cot b \operatorname{tg} c.$
 $\cot b = \cos A \cot c.$

Voorwaarde: geen.

§ 117. **Geval VI.** *Gegeven a en A , gevraagd c , C en b .*

Oplossing.

$$C, b, \underline{A}, 90^\circ - c, 90^\circ - \underline{a}, C, b, \underline{A}, 90^\circ - c.$$

- 1) $c.$ $\sin c = \cot A \operatorname{tg} a.$
 2) $C.$ $\cos A = \sin C \cos a$
 $\sin C = \frac{\cos A}{\cos a}.$
 3) $b.$ $\sin a = \sin A \sin b$
 $\sin b = \frac{\sin a}{\sin A}.$

Voorwaarden: 1. a en A moeten gelijksoortig zijn.

2. Indien $a < 90^\circ$ en $A < 90^\circ$ moet $a < A$,
 „ $a > 90^\circ$ „ $A > 90^\circ$ „ $180^\circ - a$
 $< 180^\circ - A$ of $A < a.$

Bespreking. Daar de onbekende elementen uit sinussen bepaald worden, vindt men in 't algemeen voor elk element twee waarden. Welke elementen bij elkaar behooren volgt uit de gelijksoortigheid van c en C en uit form. (1), waaruit we afleiden dat b scherp is, zoo a en c gelijksoortig, doch stomp is, zoo a en c ongelijksoortig zijn. Men heeft de volgende tabel:

a	$< 90^\circ$	$> 90^\circ$	$= 90^\circ$
A	$< 90^\circ$	$> 90^\circ$	$= 90^\circ$
c	$< 90^\circ, > 90^\circ$	$< 90^\circ, > 90^\circ$	onbepaald
C	$< 90^\circ, > 90^\circ$	$< 90^\circ, > 90^\circ$	„
b	$< 90^\circ, > 90^\circ$	$> 90^\circ, < 90^\circ$	$= 90^\circ$

Voorbeeld. $a = 94^{\circ} 12' 13''$, $A = 92^{\circ} 13' 47''$.

$$\begin{aligned}
 1) \ c. \quad & \sin c = -\cot A \times -\operatorname{tg} a \\
 & \sin c = \operatorname{tg} (A - 90^{\circ}) \cot (a - 90^{\circ}) \\
 & \log \sin c = \log \operatorname{tg} (A - 90^{\circ}) + \log \cot (a - 90^{\circ}) \\
 & \log \operatorname{tg} (A - 90^{\circ}) = 8,59034 - 10 \\
 & \log \cot (a - 90^{\circ}) = 1,13372 \\
 & \hline
 & \log \sin c = 9,72406 - 10 \quad \text{op} \\
 c_1 = 31^{\circ} 59' 15''. & \qquad \qquad c_2 = 148^{\circ} 0' 45''.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \ C. \quad & \sin C = \frac{-\cos A}{-\cos a} \\
 & \sin C = \frac{\sin (A - 90^{\circ})}{\sin (a - 90^{\circ})} \\
 & \log \sin C = \log \sin (A - 90^{\circ}) - \log \sin (a - 90^{\circ}) \\
 & \log \sin (A - 90^{\circ}) = 18,59002 - 20 \\
 & \log \sin (a - 90^{\circ}) = 8,86511 - 10 \\
 & \hline
 & \log \sin C = 9,72491 - 10 \quad \text{af} \\
 C_1 = 32^{\circ} 3' 27''. & \qquad \qquad C_2 = 147^{\circ} 56' 33''.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \ b. \quad & \sin b = \frac{\cos (a - 90^{\circ})}{\cos (A - 90^{\circ})} \\
 & \log \sin b = \log \cos (a - 90^{\circ}) - \log \cos (A - 90^{\circ}) \\
 & \log \cos (a - 90^{\circ}) = 19,99883 - 20 \\
 & \log \cos (A - 90^{\circ}) = 9,99967 - 10 \\
 & \hline
 & \log \sin b = 9,99916 - 10 \quad \text{af} \\
 b_1 = 93^{\circ} 34'. & \qquad \qquad b_2 = 86^{\circ} 26'.
 \end{aligned}$$

§ 118. De theorie van de oplossing der rechthoekige boldriehoeken vindt (evenals bij de vlakke driehoeken) ook haar toepassing bij de berekening van onbekende groottheden in een *gelijkbeenigen boldriehoek*, zoo twee onderling onafhankelijke groottheden gegeven zijn, en ook bij een *boldriehoek waarvan twee zijden samen* 180° *zijn*. Immers is b.v. (fig. 38) $a + b = 180^{\circ}$, dan kan men AC en AB verlengen tot ze elkaar in A' ontmoeten. In $\triangle BA'C$ is dan $CA' = 180^{\circ} - b = a$ dus $\triangle BA'C$ gelijkbeenig, enz.

Een derde toepassing heeft men op de *rechtzijdige boldriehoeken* (een zijde = 90°). Immers de pooldriehoek van een rechtzijdigen boldriehoek is een rechthoekige, waarvan men twee elementen kent, zoo er twee van den rechtzijdigen gegeven zijn. Van den rechthoekigen kan men dan de overige elementen berekenen, waarmede die van den rechtzijdigen eveneens bekend worden.

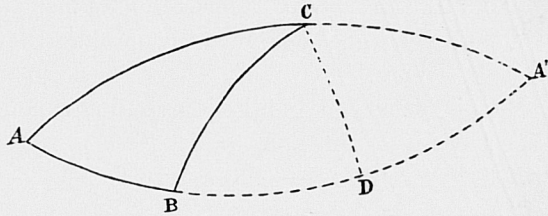


Fig. 38.

Vraagstukken.

Bereken de overige elementen van een bol $\triangle ABC$, zoo gegeven zijn:

1. $A = 90^\circ$, $a = 83^\circ 29' 16''$ en $C = 95^\circ 52' 48''$. (Kl.)
2. $C = 90^\circ$, $c = 71^\circ 24' 29''$ „ $A = 105^\circ 52' 40''$.
3. $B = 90^\circ$, $b = 95^\circ 39'$ „ $a = 72^\circ 25'$. (L. M.)
4. $A = 90^\circ$, $a = 112^\circ 30' 21''$ „ $b = 50^\circ 7'$.
5. $B = 90^\circ$, $a = 76^\circ 33' 11''$ „ $c = 103^\circ 18' 29''$.
6. $C = 90^\circ$, $a = 53^\circ 39'$ „ $b = 48^\circ 36' 16''$.
7. $A = 90^\circ$, $B = 97^\circ 13' 15''$ „ $C = 104^\circ 45' 21''$.
8. $C = 90^\circ$, $A = 65^\circ 15' 13''$ „ $B = 135^\circ 33' 40''$.
9. $B = 90^\circ$, $a = 92^\circ 47' 31''$ „ $C = 50^\circ 2' 2''$.
10. $C = 90^\circ$, $b = 125^\circ 26' 40''$ „ $A = 95^\circ 10' 30''$. (L. M.)
11. $A = 90^\circ$, $b = 62^\circ 11' 28''$ „ $B = 66^\circ 6' 24''$. (Kl.)
12. $B = 90^\circ$, $a = 120^\circ 10' 20''$ „ $A = 114^\circ 16' 40''$. (L. M.)
13. Van een bol $\triangle ABC$ is gegeven $A = 90^\circ$, $a = 82^\circ 3' 16''$ en $b = 77^\circ 56' 44''$. Bereken de spherische hoogtelijn op BC. (G.)
14. Van een bol $\triangle ABC$ is gegeven $B = 90^\circ$, $a = 36^\circ 15' 12''$ en $C = 42^\circ 14' 15''$. Bereken de spherische projectie van c op AC. (Kl.)
15. Van een bol $\triangle ABC$ is gegeven $C = 90^\circ$, $c = 25^\circ 36' 12''$ en $A = 60^\circ 13' 4''$. Verbind C spherisch met het midden D van AB en bereken $\angle CDA$. (G.)

16. Van een rechthoekigen boldriehoek zijn de rechthoekszijden $50^{\circ} 21'$ en $73^{\circ} 10'$. Bereken den boog, die het hoekpunt van den rechten hoek met het midden der hypotenusa verbindt. (B Techn.)

Bewijs voor een gelijkzijdigen boldriehoek de formules 17—21.

17. $2 \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} A = 1$. (T. U.)
 18. $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a = 1 - 2 \cos A$. (T. U.)
 19. $\sec A = 1 + \sec a$. (G.)
 20. $\sec A \sec a = \operatorname{tg}^2 A - \sec a$. (Kl.)
 21. $\cos h = \operatorname{cosec} \frac{1}{2} A - 2 \sin \frac{1}{2} A$ (h = sph. hoogtelijn). (T. U.)
 22. Van een gelijkzijdigen boldriehoek is de zijde 60° . Bereken den hoek.
 23. Van een gelijkzijdigen boldriehoek is de hoek 60° . Hoe groot is de zijde?
 24. Van een gelijkzijdigen boldriehoek is de hoek 70° . Bereken de zijde en de spherische hoogtelijn. (B Civ. Ing.)
 25. Van een bol $\triangle ABC$ is gegeven $A = B = 82^{\circ} 35' 17''$ en $C = 65^{\circ} 38' 24''$. Bereken de spherische hoogtelijn op BC. (G.)
 26. Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC$: $b + c = 180^{\circ}$,
 $\sin 2B + \sin 2C = 0$.
 27. Van een bol $\triangle ABC$ is gegeven $b = 102^{\circ} 3' 16''$, $a = 77^{\circ} 56' 44''$ en $A = 60^{\circ}$. Bereken de onbekende elementen.
 28. Van een bol $\triangle ABC$ is gegeven $b = 90^{\circ}$, $A = 87^{\circ} 12' 29''$ en $c = 129^{\circ} 57' 58''$. Bereken de overige elementen.
 29. Van een bol $\triangle ABC$ is gegeven $B = 90^{\circ}$, $A + C = 125^{\circ}$ en $a = 48^{\circ}$. Bereken A. (T. U.)
 30. Van een bol $\triangle ABC$ is gegsven $C = 90^{\circ}$, $A - B = 7^{\circ} 30'$ en $a = 105^{\circ}$. Bereken B. (G.)
 31. Een lijn maakt met de assen OX, OY en OZ van een recht-hoekig coördinatenstelsel der hoeken α , β en γ . Bepaal de hoeken, die hare projecties op de vlakken XOY, YOZ en ZOX met die assen maken. (B.)

WILLEKEURIGE BOLDRIEHOEKEN.

Formules.

§ 119. **Grondformules: Cosinusregel.** Zij van $\triangle ABC$: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ en O het middelpunt van den bol.

Trek dan de stralen OA, OB en OC; laat uit een willekeurig punt R van OC de loodlijn RP op AO of zijn verlengde, en de loodlijn RS op AOB neer; verbind S met P, dan is vooreerst $RS \perp PS$. Verder is $OP \perp PR$ en RS , dus ook $OP \perp PS$. Laten nog OA, OB, OC, AD, AE [of PR] (beide laatste van raaklijnen aan de bogen AB en AC dus $\perp$ OA) en SR positieve richtingen en lijnen in die richtingen en de tegengestelde gemeten resp. positief en negatief zijn, dan is, daar de eigenschap van § 25 ook geldt voor een gebroken lijn, waarvan de deelen niet in eenzelfde plat vlak liggen (OB lijn van projectie zijnde):

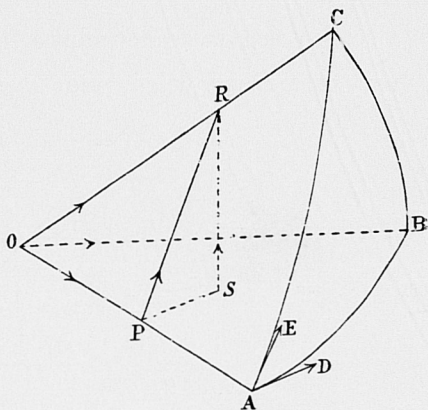


Fig. 39.

$$\text{proj. OR} = \text{proj. OP} + \text{proj. PS} + \text{proj. SR}$$

en volgens § 26:

$$\text{OR} \cos a = \text{OP} \cos c + \text{PS} \cos (90^\circ - c) + 0$$

of $\text{OR} \cos a = \text{OP} \cos c + \text{PR} \cos A \sin c.$

OR

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Evenzoo $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

en $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$

§ 120. **Afgeleide formules.** Uit (1) volgt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Alzoo:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} A &= + \left| \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \right| = \left| \sqrt{\frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{2 \sin b \sin c}} \right| \\ &= \left| \sqrt{\frac{\cos (b - c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}} \right| \\ &= \left| \sqrt{\frac{-2 \sin \frac{1}{2} (a + b - c) \sin \frac{1}{2} (b - c - a)}{2 \sin b \sin c}} \right| \end{aligned}$$

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-b)}{\sin b \sin c}} \quad (4)$$

Evenzoo nog twee dergelijke formules.

Op soortgelijke wijze vindt men:

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}} \quad (5)$$

enz.

Verder (5) op (4) deelende:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}} \\ &= \frac{1}{\sin(s-a)} \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}} \quad (6) \end{aligned}$$

enz.

Uit (4) en (5) kan men nog een formule voor $\sin A (= 2 \sin \frac{1}{2} A \times \cos \frac{1}{2} A)$ afleiden.

§ 121. **Sinusregel.** Uit (1) volgt:

$$(\cos a - \cos b \cos c)^2 = \sin^2 b \sin^2 c (1 - \sin^2 A)$$

$$\text{of } \cos^2 a + \cos^2 b \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c = \sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A$$

$$\text{dus } \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

$$\text{of } \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c \times \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

Men vindt op dezelfde wijze uit (2) en (3):

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c \times \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

$$\text{en } \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c \times \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c$$

Alzoo:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} &= \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c} \\ \text{en dus } \frac{\sin A}{\sin a} &= \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (7) \end{aligned}$$

In woorden: *In een boldriehoek zijn de sinussen der zijden evenredig met de sinussen der overstaande hoeken.*

§ 122. **Formules afgeleid uit** (1), (2), (3), (4) **en** (5). Noemt men de zijden van den pooldriehoek van $\triangle ABC$: a' , b' en c' , de hoeken van dien pooldriehoek A' , B' en C' , $A' + B' + C' = 2 S'$, dan is:

$$a = 180^\circ - A', b = \text{enz.}$$

$$A = 180^\circ - a', \text{ enz.}$$

$$\sin a = \sin (180^\circ - A') = \sin A', \text{ enz.}$$

$$\cos a = \cos (180^\circ - A') = -\cos A', \text{ enz.}$$

$$\cos A = \cos (180^\circ - a') = -\cos a', \text{ enz.}$$

$$\sin \frac{1}{2} A = \sin (90^\circ - \frac{1}{2} a') = \cos \frac{1}{2} a', \text{ enz.}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \cos (90^\circ - \frac{1}{2} a') = \sin \frac{1}{2} a', \text{ enz.}$$

$$\sin s = \sin (270^\circ - S') = -\cos S'$$

$$\sin (s - a) = \sin (90^\circ - S' + A') = \cos (S' - A') \text{ enz.}$$

Uit (1) volgt dan:

$$-\cos A' = \cos B' \cos C' - \sin B' \sin C' \cos a'$$

dus

$$\cos A' = -\cos B' \cos C' + \sin B' \sin C' \cos a'.$$

Deze formule geldt nu voor den pooldriehoek van een willekeurigen boldriehoek. Ze geldt dus voor elken boldriehoek zelf ook. Alzoo:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad . \quad . \quad (8)$$

enz.

Uit (5) volgt verder op dergelijke wijze, $A + B + C = 2 S$ stellende:

$$\sin \frac{1}{2} a = \left| \frac{-\cos S \cos (S - A)}{\sin B \sin C} \right| = \left| \frac{\cos (S - 180^\circ) \cos (S - A)}{\sin B \sin C} \right| \quad (9)$$

enz.

Op dergelijke wijze vindt men uit (4):

$$\cos \frac{1}{2} a = \left| \frac{\cos (S - B) \cos (S - C)}{\sin B \sin C} \right| \quad . \quad . \quad (10)$$

enz.

Verder (9) op (10) deelede:

$$\begin{aligned} \cot \frac{1}{2} a &= \left| \frac{\cos (S - B) \cos (S - C)}{\cos (S - 180^\circ) \cos (S - A)} \right| \\ &= \frac{1}{\cos (S - A)} \left| \frac{\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}{\cos (S - 180^\circ)} \right| \quad (11) \end{aligned}$$

enz.

§ 123. **Formules van Delambre** (1808 gegeven) of **Gauss** (1811 bewezen). ¹⁾

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c} \dots \dots (12)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} c} \dots \dots (13)$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} c} \dots \dots (14)$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b)}{\sin \frac{1}{2} c} \dots \dots (15)$$

Bewijs van (12):

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B + \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C}.$$

Voert men hierin de waarden, in § 120 gevonden voor $\sin \frac{1}{2} A$ enz., dan verkrijgt men na vereenvoudiging:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} C} &= \frac{\sin (s - b) + \sin (s - a)}{\sin c} \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} (2s - a - b) \cos \frac{1}{2} (a - b)}{2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} \\ \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} C} &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c}. \end{aligned}$$

Op dergelijke wijze bewijst men (13), (14) en (15).

§ 124. **Analogieën van Napier.** Deelt men (12) door (14), dan verkrijgt men:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \dots \dots (16)$$

(13) door (15) deelende:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \dots \dots (17)$$

(15) door (14) deelende:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a + b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \dots \dots (18)$$

¹⁾ Let bij het memoriseeren o. a. er op, dat in de tellers met den sinus van een halve som de cosinus van een half verschil overeenkomt, nl. in (12) en (15).

(13) door (12) deelede:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a - b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (A + B)} \cdot \cdot \cdot \cdot (19)$$

**Bewijs van den sinusregel uit de figuur
(door rechthoekige boldriehoeken).**

§ 125.

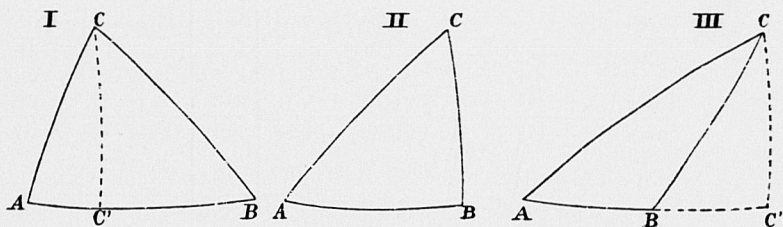


Fig. 40.

Laten we uit C de spherische loodlijn CC' op AB neer, dan kan C' tusschen A en B (fig. I), in een der punten A en B b.v. B (fig. II) of buiten AB (fig. III) vallen.

Onderstellen we vooreerst het eerste. In de rechthoekige boldriehoeken BC'C en AC'C is dan:

$$\sin a \sin B = \sin CC' = \sin b \sin A$$

en dus $\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$.

Onderstellen we vervolgens het tweede geval. In den rechthoekigen boldriehoek ABC is dan:

$$\sin a \times 1 = \sin b \sin A$$

of $\sin a \sin B = \sin b \sin A$ enz.

In het derde geval heeft men b.v.:

$$\sin a \sin (180^\circ - B) = \sin CC' = \sin b \sin A$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A \text{ enz.}$$

Formules ter bepaling van het oppervlak eens boldriehoeks.

§ 126. Noemen wij het spherisch exces van den driehoek E, den straal des bols ρ , en het oppervlak van den boldriehoek O, dan wordt in de stereometrie geleerd:

$$O = \frac{E}{720^\circ} \times 4\pi\rho^2 = \frac{E}{180^\circ} \times \pi\rho^2 \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

§ 127. Formule van L'Huilier.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{4} E &= \frac{\sin \frac{1}{4} E}{\cos \frac{1}{4} E} = \frac{\sin \frac{1}{4} (A + B + C - 180^\circ)}{\cos \frac{1}{4} (A + B + C - 180^\circ)} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{4} (A + B + C - 180^\circ) \cos \frac{1}{4} (A + B - C + 180^\circ)}{2 \cos \frac{1}{4} (A + B + C - 180^\circ) \cos \frac{1}{4} (A + B - C + 180^\circ)} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B) - \sin \frac{1}{2} (180^\circ - C)}{\cos \frac{1}{2} (A + B) + \cos \frac{1}{2} (180^\circ - C)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B) - \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (A + B) + \sin \frac{1}{2} C} \\ &= \frac{\frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} C} - 1}{\frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} C} + 1} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c} - 1}{\frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} c} + 1} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b) - \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} (a + b) + \cos \frac{1}{2} c} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C} = \\ &= \frac{-2 \sin \frac{1}{4} (a - b + c) \sin \frac{1}{4} (a - b - c)}{2 \cos \frac{1}{4} (a + b + c) \cos \frac{1}{4} (a + b - c)} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - c)}{\sin (s - a) \sin (s - b)}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{1}{2} (s - b) \sin^2 \frac{1}{2} (s - a)}{\cos^2 \frac{1}{2} s \cos^2 \frac{1}{2} (s - c)}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} s \sin \frac{1}{2} (s - c) \cos \frac{1}{2} (s - c)}{\sin \frac{1}{2} (s - a) \cos \frac{1}{2} (s - a) \sin \frac{1}{2} (s - b) \cos \frac{1}{2} (s - b)} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{4} E &= \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} s \operatorname{tg} \frac{1}{2} (s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (s - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (s - c)} \quad (21) \end{aligned}$$

Bij het gebruik van deze formule heeft men te bedenken dat $\frac{1}{4} E < 90^\circ$. Immers:

$$\begin{aligned} A + B + C - 180^\circ &< 3 \times 180^\circ - 180^\circ \\ E &< 2 \times 180^\circ \\ \frac{1}{4} E &< 90^\circ. \end{aligned}$$

§ 128. Is van een boldriehoek ABC $\angle B = 90^\circ$, dan is

$$E = A + B + C - 180^\circ = A + C - 90^\circ$$

dus $\frac{1}{2} E = \frac{1}{2} (A + C) - 45^\circ$.

Alzoo:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E &= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + C) - 1}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + C)} = \frac{\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B} - 1}{1 + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B}} \\ &= \frac{\frac{\cos \frac{1}{2} (a - c)}{\cos \frac{1}{2} (a + c)} - 1}{1 + \frac{\cos \frac{1}{2} (a - c)}{\cos \frac{1}{2} (a + c)}} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - c) - \cos \frac{1}{2} (a + c)}{\cos \frac{1}{2} (a + c) + \cos \frac{1}{2} (a - c)} = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} E &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} c. \quad \dots \quad (22) \end{aligned}$$

Formules voor de spherische stralen der om- en ingeschreven cirkels eens boldriehoeks.

§ 129. Zij $PA = R$ de spherische straal van den omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$, PF de spherische loodlijn uit P op AB neergelaten, dan is in den rechthoekigen boldriehoek AFP : $AF = \frac{1}{2} c$ en $\angle PAF = \pm \frac{1}{2} (A + B - C) = \pm (S - C)$ (stereometrie). Alzoo:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \cos \pm (S - C) \operatorname{tg} R$$

dus

$$\cot R = \cos (S - C) \cot \frac{1}{2} c \quad (23)$$

Deze formule geldt blijkbaar ook, zoo P op AB mocht vallen.

Substitueert men hierin voor $\cot \frac{1}{2} c$ de waarde volgens (11), dan verkrijgt men

$$\cot R = \sqrt{\frac{\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}{\cos (S - 180^\circ)}} \quad (24)$$

Uit form. (23) volgt ook:

$$\begin{aligned} \cot R &= \cos \left\{ \frac{1}{2} (A + B) - \frac{1}{2} C \right\} \cot \frac{1}{2} c = \left\{ \cos \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} C + \right. \\ &\quad \left. \sin \frac{1}{2} (A + B) \sin \frac{1}{2} C \right\} \cot \frac{1}{2} c \\ &= \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} C} + \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} C} \right\} \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C \cot \frac{1}{2} c \end{aligned}$$

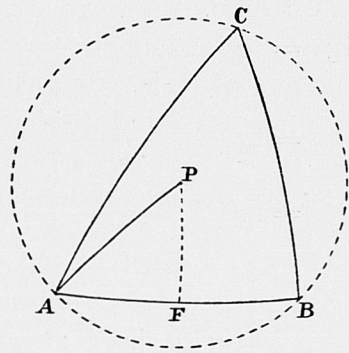


Fig. 41.

$$\cot R = \frac{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{\sin \frac{1}{2} c \sin a \sin b}$$

$$\cot R = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c} \quad (25)$$

§ 130. Zij F het raakpunt van den ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ met AB, MF = r de spherische straal van dien cirkel, dan is, boog MA trekkende, in den rechthoekigen boldriehoek AFM: AF = s - a en $\angle MAF = \frac{1}{2} A$. Alzoo:

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \sin (s-a) \quad (26)$$

Substitueert men hierin voor $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ de waarde volgens (6) dan verkrijgt men:

$$\operatorname{tg} r = \left| \frac{\sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s} \right| \quad (27)$$

Uit form. (26) volgt ook:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} r &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \sin \left\{ \frac{1}{2} (b+c) - \frac{1}{2} a \right\} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \left\{ \sin \frac{1}{2} (b+c) \cos \frac{1}{2} a - \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{1}{2} (b+c) \sin \frac{1}{2} a \right\} \\ &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2} (b+c)}{\sin \frac{1}{2} a} - \frac{\cos \frac{1}{2} (b+c)}{\cos \frac{1}{2} a} \right\} \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \\ &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \left\{ \frac{\cos \frac{1}{2} (B-C)}{\sin \frac{1}{2} A} - \frac{\cos \frac{1}{2} (B+C)}{\sin \frac{1}{2} A} \right\} \times \\ &\quad \left| \frac{\cos (S-180^\circ) \cos (S-A)}{\sin B \sin C} \right| \left| \frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C} \right| \\ &= \frac{2 \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \sqrt{\cos (S-180^\circ) \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}{\cos \frac{1}{2} A \sin B \sin C} \\ \operatorname{tg} r &= \frac{\sqrt{\cos (S-180^\circ) \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}}{2 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C} \quad (28) \end{aligned}$$

Vraagstukken.

Bewijs voor een willekeurigen bol $\triangle ABC$ de volgende formules:

$$1. \sin \text{vers } A = \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

$$2. \cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \sin C \cot A.$$

$$3. \cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A.$$

$$4. \cot a \sin b = \sin C \cot A + \cos b \cos C.$$

$$5. \cos a \sin B - \cos b \cos C \sin A = \cos A \sin C.$$

$$6. \sin A = \frac{2}{\sin b \sin c} \vee \sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c).$$

$$7. \sin a = \frac{2}{\sin B \sin C} \vee \cos (S - 180^\circ) \cos (S - A) \cos (S - B) \\ \times \sin (S - C).$$

$$8. \frac{\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin (s-b)}{\sin c}.$$

$$9. \frac{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin s}{\sin c}.$$

$$10. \frac{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin (s-c)}{\sin c}.$$

$$11. \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \frac{\sin (s-c)}{\sin s}.$$

$$12. \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B = \frac{\sin (s-b)}{\sin (s-a)}.$$

$$13. \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-b)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a+b)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A+B)}.$$

$$14. \frac{\sin (a+b)}{\sin c} = \frac{\cos A + \cos B}{1 - \cos C}.$$

$$15. \frac{\sin (a-b)}{\sin c} = \frac{\cos B - \cos A}{1 + \cos C}.$$

$$16. \frac{\sin (A+B)}{\sin C} = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}.$$

$$17. \frac{\sin (A-B)}{\sin C} = \frac{\cos b - \cos a}{1 - \cos c}.$$

$$18. \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a-A)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a+A)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b+B)}. \quad (\text{Kl.})$$

$$19. \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B+C)}{\sin C} = - \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c}.$$

$$20. \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B-C)}{\sin C} = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} c}.$$

$$21. \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B-C)}{\sin C} = \frac{\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}{\sin \frac{1}{2} c}.$$

Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC$: $A + C = B$, de volgende formules:

$$22. \sin^2 \frac{1}{2} a = -\cot B \cot C. \text{ (L. M.)}$$

$$23. \cos^2 \frac{1}{2} b = \cot A \cot C. \text{ (L. M.)}$$

$$24. \sin^2 \frac{1}{2} b = \sin^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} c.$$

$$25. \sin^2 \frac{1}{2} a = \sin \frac{1}{2} (b + c) \sin \frac{1}{2} (b - c).$$

$$26. \cos^2 \frac{1}{2} b = \cos \frac{1}{2} (a + c) \cos \frac{1}{2} (a - c).$$

$$27. \cos A = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cot \frac{1}{2} b.$$

$$28. \cos B = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} c.$$

$$29. \cos \frac{1}{2} (a + c) = \cos \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} B.$$

$$30. \cos \frac{1}{2} (a - c) = \cos \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \frac{1}{2} B.$$

$$31. \sin \frac{1}{2} (b + c) = \sin \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} A.$$

$$32. \sin \frac{1}{2} (b - c) = \sin \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} A.$$

$$33. \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + C) = \left| \frac{\cos \frac{1}{2} (a - c)}{\cos \frac{1}{2} (a + c)} \right|.$$

$$34. \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - C) = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - c)}{\sin \frac{1}{2} (a + c)} \times \left| \frac{\cos \frac{1}{2} (a + c)}{\cos \frac{1}{2} (a - c)} \right|.$$

$$35. \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - C) = \left| \frac{\sin \frac{1}{2} (b - c)}{\sin \frac{1}{2} (b + c)} \right|.$$

Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC$: $A + B + C = 360^\circ$, de volgende formules: ¹⁾

$$36. \cos^2 \frac{1}{2} a = \cot B \cot C.$$

$$37. \sin^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} b + \sin^2 \frac{1}{2} c = 2.$$

$$38. \cos a + \cos b + \cos c = -1.$$

$$39. \cos^2 \frac{1}{2} a = -\cos \frac{1}{2} (b + c) \cos \frac{1}{2} (b - c).$$

$$40. \cos A = -\cot \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} c.$$

$$41. \cos \frac{1}{2} (a + b) = -\cos \frac{1}{2} c \cot \frac{1}{2} C.$$

$$42. \cos \frac{1}{2} (a - b) = \cos \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \frac{1}{2} C.$$

$$43. \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) = \left| \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \right|.$$

$$44. \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \left| \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} \right|.$$

$$45. \text{ Bewijs, zoo van bol } \triangle ABC: a + b + c = 180^\circ, \\ \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} C = \cos a \cos b \cos c. \text{ (G.)}$$

¹⁾ De vraagstukken 36—44 kunnen ook worden opgelost door gebruik te maken van 22—35. Immers de som der hoeken van den nevendriehoek op de zijde b van den boldriehoek, bedoeld in 22—35, bedraagt 360° .

Bewijs voor een willekeurigen bol $\triangle ABC$ de volgende formules:

$$46. \sin \frac{1}{2} E = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}.$$

$$47. \sin \frac{1}{2} E = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin s - c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}.$$

(Formule van Cagnoli.)

$$48. \cos \frac{1}{2} E = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C}{\cos \frac{1}{2} c}.$$

$$49. \cot \frac{1}{2} E = \frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b + \cos C}{\sin C}.$$

Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC$: $B = 90^\circ$, de volgende formules:

$$50. \sin \frac{1}{2} E = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} b}.$$

$$51. \cos \frac{1}{2} E = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} b}.$$

$$52. \sin E = \frac{\sin a \sin c}{1 + \cos b}.$$

$$53. \cos E = \frac{\cos a + \cos c}{1 + \cos b}.$$

$$54. \operatorname{tg} E = \frac{\sin a \sin c}{\cos a + \cos c}.$$

Bewijs voor een gelijkzijdigen boldriehoek:

$$55. \operatorname{tg} \frac{1}{4} E = \operatorname{tg} \frac{1}{4} a \sqrt{\operatorname{tg} \frac{3}{4} a \operatorname{tg} \frac{1}{4} a}.$$

Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC$: $B = 90^\circ$, de beide formules:

$$56. \cot R = \sqrt{1 - 2 \operatorname{tg} S \sin 2 (S - A)}.$$

$$57. \operatorname{tg} r = \sin (s - b).$$

58. Bewijs voor een gelijkzijdigen boldriehoek

$$\operatorname{tg} R = 2 \operatorname{tg} r.$$

Bewijs, zoo in bol $\triangle ABC$: h_a de spherische hoogtelijn op BC is, de beide formules:

$$59. \sin h_a = \frac{2}{\sin a} \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}.$$

$$60. \sin h_a = \frac{2}{\sin A} \sqrt{\cos (S - 180^\circ) \cos (S - A) \cos (S - B) \times \cos (S - C)}.$$

61. Bewijs, zoo in bol $\triangle ABC$, P en Q de hoeken zijn, die de spherische hoogtelijn op BC met AB en AC maakt,

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (Q - P)}{\cot \frac{1}{2} A} = \frac{\sin (b - c)}{\sin (b + c)}. \quad (\text{T. U.})$$

62. Bewijs, zoo in bol $\triangle ABC$, m_c de spherische mediaan van 't hoekpunt C is,

$$\cos m_c = \frac{\cos a + \cos b}{2 \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b) \cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c}. \quad (\text{G.})$$

63. Bewijs, zoo in bol $\triangle ABC$, P en Q de deelen zijn, waarin de spherische mediaan uit A , $\angle BAC$ verdeelt,

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (P - Q)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (P + Q)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b - c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b + c)}. \quad (\text{T. U.})$$

64. Bewijs, indien p , q en r de bogen van groote cirkels zijn, die de middens der zijden a , b en c van een boldriehoek verbinden,

$$\frac{\cos p}{\cos \frac{1}{2} a} = \frac{\cos q}{\cos \frac{1}{2} b} = \frac{\cos r}{\cos \frac{1}{2} c}. \quad (\text{B.})$$

65. Bewijs, zoo in bol $\triangle ABC$, p en q de deelen zijn, waarin de spherische bissectrix van $\angle A$, BC verdeelt,

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (q - p)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b - c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b + c)}. \quad (\text{T. U.})$$

Bewijs, zoo van bol $\triangle ABC$ R_a , R_b en R_c de spherische stralen der omgeschreven cirkels, r_a , r_b en r_c die der ingeschreven cirkels van zijn nevendriehoeken resp. op de zijden a , b en c zijn, de volgende formules:

$$66. \cot R_a = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}.$$

$$67. \cot R_a = \frac{\sqrt{\cos (S - 180^\circ) \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}}{\cos (S - A)}.$$

$$68. \frac{\cot R_a \cot R_b \cot R_c}{\cot R} = \cos^2 S.$$

$$69. \operatorname{tg} R_a + \operatorname{tg} R_b + \operatorname{tg} R_c - \operatorname{tg} R = \frac{2 \sin s}{\sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}}.$$

$$70. \operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cot R_b \cot R_c}{\cot R \cot R_a}}.$$

$$71. \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \sin s.$$

$$72. \operatorname{tg} r_a = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}}{\sin (s - a)}.$$

$$73. \operatorname{tg} r_a = \frac{\sqrt{\cos (S - 180^\circ) \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}}{2 \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}.$$

$$74. \frac{\operatorname{tg} r_a \operatorname{tg} r_b \operatorname{tg} r_c}{\operatorname{tg} r} = \sin^2 s.$$

$$75. \cot r_a + \cot r_b + \cot r_c - \cot r = \frac{2 \cos S}{\sqrt{\cos (S - 180^\circ) \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}}.$$

$$76. \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_a}{\operatorname{tg} r_b \operatorname{tg} r_c}}.$$

$$77. \operatorname{tg} R + \cot r = \operatorname{tg} R_a + \cot r_a = \operatorname{tg} R_b + \cot r_b = \operatorname{tg} R_c + \cot r_c.$$

$$78. \operatorname{tg} R + \cot r = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} R + \operatorname{tg} R_a + \operatorname{tg} R_b + \operatorname{tg} R_c).$$

$$79. \operatorname{tg} R + \cot r = \frac{1}{2} (\cot r + \cot r_a + \cot r_b + \cot r_c).$$

$$80. \operatorname{tg}^2 R + \operatorname{tg}^2 R_a + \operatorname{tg}^2 R_b + \operatorname{tg}^2 R_c = \cot^2 r + \cot^2 r_a + \cot^2 r_b + \cot^2 r_c.$$

Bewijs, zoo R' en r' de spherische stralen zijn resp. der om- en ingeschreven cirkels van den pooldriehoek van bol $\triangle ABC$, de volgende formules:

$$81. \cot R' = \sin (s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} A.$$

$$82. \operatorname{tg} r' = \cos (S - A) \cot \frac{1}{2} a.$$

$$83. R + r' = 90^\circ.$$

$$84. R' + r = 90^\circ.$$

Oplossing van scheefhoekige boldriehoeken.

§ 131. Een scheefhoekige boldriehoek is (volkomen) bepaald, zoo men drie van de zes elementen geeft. De verschillende gevallen, die zich hierbij kunnen voordoen zijn:

1. Gegeven de drie zijden.
2. " de drie hoeken.
3. " twee zijden en de tusschengelegen hoek.
4. " twee hoeken en de tusschengelegen zijde.
5. " twee zijden en de hoek tegenover een dier zijden (niet *volkomen* bepaald).
6. " twee hoeken en de zijde tegenover een dier hoeken (niet *volkomen* bepaald).

In elk dezer gevallen kunnen we met behulp van de afgeleide formules de overige elementen berekenen.

§ 132. **Geval I.** Gegeven a, b en c , gevraagd A, B en C .

Voorwaarden: $a + b + c < 360^\circ$, $a + b > c$, $b + c > a$
en $c + a > b$.

Oplossing.

$$\begin{aligned} 1) A. \operatorname{tg} \frac{1}{2} A &= \frac{1}{\sin(s-a)} \left| \frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s} \right. \\ 2) B. \operatorname{tg} \frac{1}{2} B &= \frac{1}{\sin(s-b)} \left| \frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s} \right. \\ 3) C. \operatorname{tg} \frac{1}{2} C &= \frac{1}{\sin(s-c)} \left| \frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s} \right. \end{aligned}$$

Dat men aan deze formules de voorkeur geeft boven die voor $\sin \frac{1}{2} A$ enz. is te wijten aan dezelfde redenen als waarom men aan soortgelijke formules in de Vlakke Driehoeksmeting bij een analoog geval de voorkeur geeft boven andere.

§ 133. **Geval II.** Gegeven A, B en C , gevraagd a, b en c .

Voorwaarden: $A + B + C > 180^\circ$, $A + B - C < 180^\circ$,
 $A - B + C < 180^\circ$ en $-A + B + C < 180^\circ$.

Oplossing.

$$\begin{aligned} 1) a. \cot \frac{1}{2} a &= \frac{1}{\cos(S-A)} \left| \frac{\cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}{\cos(S-180^\circ)} \right. \\ 2) b. \cot \frac{1}{2} b &= \frac{1}{\cos(S-B)} \left| \frac{\cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}{\cos(S-180^\circ)} \right. \\ 3) c. \cot \frac{1}{2} c &= \frac{1}{\cos(S-C)} \left| \frac{\cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}{\cos(S-180^\circ)} \right. \end{aligned}$$

Ook hier geeft men om soortgelijke redenen als in de vorige § de voorkeur aan deze formules boven die voor $\sin \frac{1}{2} a$ enz.

§ 134. **Geval III.** Gegeven a, b en C , gevraagd A, B en c .

Oplossing.

$$\begin{aligned} 1) A \text{ en } 2) B. \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) &= \cot \frac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B) &= \cot \frac{1}{2} C \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)}. \end{aligned}$$

Uit deze formules berekent men $\frac{1}{2} (A + B)$ en $\frac{1}{2} (A - B)$ en hieruit door optelling en aftrekking A en B .

$$3) c. \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \\ = \cos b (\cos a + \sin a \operatorname{tg} b \cos C).$$

Nu kan men $\operatorname{tg} b \cos C = \operatorname{tg} \psi$ of $= -\operatorname{tg} \psi$ stellen, het laatste, zoo $\operatorname{tg} b \cos C$ negatief is. Men kan dan ψ berekenen. Men verkrijgt dan in het eerste geval:

$$\cos c = \cos b (\cos a + \sin a \operatorname{tg} \psi) \\ = \frac{\cos b}{\cos \psi} (\cos a \cos \psi + \sin a \sin \psi) \\ \cos c = \frac{\cos b \cos (a - \psi)}{\cos \psi}.$$

Welke boog stelt ψ in den driehoek voor? Kunt ge nu ook langs anderen weg tot deze formule komen?

Voorwaarde: geen.

§ 135. **Geval IV.** Gegeven A, B en c , gevraagd a, b en C .

Oplossing.

$$1) a \text{ en } 2) b. \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}c. \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}c.$$

Uit deze formules berekent men $\frac{1}{2}(a+b)$ en $\frac{1}{2}(a-b)$ en hieruit door optelling en aftrekking a en b .

$$3) C. \quad \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

Men maakt deze formule op soortgelijke wijze geschikt voor de berekening met logaritmen als den cosinusregel in Geval III.

Voorwaarde: geen.

§ 136. **Geval V.** Gegeven a, b en A , gevraagd B, c en C .

Oplossing.

$$1) B. \quad \sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}.$$

2) c . Na berekening van B :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}c = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b).$$

3) C . Na berekening van B :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}C = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{1}{2}(A-B).$$

1° *Voorwaarde*: Uit de formule voor $\sin B$ volgt:

$$\sin A \sin b \leq \sin a.$$

Bespreking en voorwaarden. Uit (14) volgt:

$$\frac{1}{2} (A + B) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 90^\circ, \text{ naarmate } \frac{1}{2} (a + b) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 90^\circ$$

$$\text{dus} \quad A + B \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 180^\circ, \quad \text{,} \quad a + b \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 180^\circ.$$

Verder weten we uit de stereometrie dat

$$A \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} B, \text{ naarmate } a \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b.$$

Deze zaken vooropstellende, hebben we de onderstaande tabel als volgt te lezen:

Heeft men $a > b$ en $a + b < 180^\circ$ of $b < a < 180^\circ - b$, dan is b scherp. Ook heeft men nu $B < A < 180^\circ - B$. Is dus A scherp, dan moet ook B scherp zijn. Is A stomp, dan moet toch B scherp zijn. Er is dus steeds een oplossing, terwijl B en b gelijksoortig zijn, enz.

			A	B	Aantal oploss.	
$a > b$ en $a + b < 180^\circ$ of $b < a < 180^\circ - b$	$b < 90^\circ$	$B < A < 180^\circ - B$	$< 90^\circ$ $> 90^\circ$	$< 90^\circ$ $< 90^\circ$	1 1	B en b gelijks.
$a < b$ en $a + b > 180^\circ$ of $180^\circ - b < a < b$	$b > 90^\circ$	$180^\circ - B < A < B$	$< 90^\circ$ $> 90^\circ$	$> 90^\circ$ $> 90^\circ$	1 1	B en b gelijks.
$a > b$ en $a + b > 180^\circ$ of $180^\circ - a < b < a$	$a > 90^\circ$	$180^\circ - A < B < A$	$< 90^\circ$ $> 90^\circ$	onbestaanbaar $< 90^\circ$ en $> 90^\circ$	0 2	A en a ongelijks. A en a gelijks.
$a < b$ en $a + b < 180^\circ$ of $a < b < 180^\circ - a$	$a < 90^\circ$	$A < B < 180^\circ - A$	$< 90^\circ$ $> 90^\circ$	$< 90^\circ$ en $> 90^\circ$ onbestaanbaar	2 0	A en a gelijks. A en a ongelijks.

Alzoo, wordt aan de eerste voorwaarde voldaan, dan volgt verder uit deze tabel:

Ligt a in tusschen b en $180^\circ - b$, dan is één driehoek mogelijk, waarvan B gelijksoortig is met b .

Ligt b in tusschen a en $180^\circ - a$, en zijn A en a gelijkssoortig, dan zijn twee driehoeken mogelijk.

Ligt b in tusschen a en $180^\circ - a$, en zijn A en a ongelijkssoortig, dan is geen driehoek mogelijk.

(Nog kunnen we afleiden:

Is $a = b = 90^\circ$ en $A = 90^\circ$, dan is ook $B = 90^\circ$, maar c en C onbepaald.

Is $a = b = 90^\circ$ en A niet 90° , dan is geen driehoek mogelijk.)

§ 137. Geval VI. Gegeven A , B en a , gevraagd b , c en C .

Oplossing.

$$1) \ b. \quad \sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}.$$

2) c . Na berekening van b :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\sin \frac{1}{2} (A - B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a - b).$$

3) C . Na berekening van b :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} (A - B).$$

1° *Voorwaarde.* Uit de formule voor $\sin b$ volgt:

$$\sin a \sin B \leq \sin A.$$

Bespreking en voorwaarden. Op dergelijke wijze het onderzoek inrichtende als in de vorige §, komt men tot het volgende resultaat:

Wordt aan de eerste voorwaarde voldaan, en

ligt A in tusschen B en $180^\circ - B$, dan is één driehoek mogelijk, waarvan b gelijksoortig is met B ,

doch ligt dan B in tusschen A en $180^\circ - A$, en zijn A en a gelijksoortig, dan zijn twee driehoeken mogelijk,

en ligt B in tusschen A en $180^\circ - A$, en zijn A en a ongelijksoortig, dan is geen driehoek mogelijk.

(Nog kunnen we afleiden:

Is $A = B = 90^\circ$ en $a = 90^\circ$, dan is ook $b = 90^\circ$, maar c en C onbepaald.

Is $A = B = 90^\circ$ en a niet 90° , dan is geen driehoek mogelijk.)

Berekening van het oppervlak en van de spherische stralen der om- en ingeschreven cirkels van een boldriehoek.

§ 138. Ter berekening van het oppervlak eens boldriehoeks volgens form. (20) dient eerst het spherisch exces bepaald te worden. Zijn de drie zijden eens boldriehoeks gegeven, dan kan hiertoe form. (21) gebruikt worden. Zijn andere elementen gegeven, dan berekent men eerst de onbekende hoeken, waarna dan ook het spherisch exces bekend wordt.

§ 139. Ter berekening van de spherische stralen der om- en ingeschreven cirkels eens boldriehoeks worden voor het geval, dat de drie zijden gegeven zijn, de formules (25) en (27), voor het geval, dat de drie hoeken gegeven zijn, de formules (24) en (28) en indien andere elementen gegeven zijn, na berekening van de onbekende hoeken of zijden, de formules (23) en (26) gebruikt.

Vraagstukken.

Bereken van een bol $\triangle ABC$ de onbekende elementen, het oppervlak (straal van den bol = 10 cM) en de spherische stralen der om- en ingeschreven cirkels, zoo gegeven zijn:

1. $a = 56^\circ 19' 40''$, $b = 40^\circ 16' 38''$ en $c = 24^\circ 9' 55''$.
2. $a = 48^\circ 13' 10''$, $b = 65^\circ 20' 20''$ „ $c = 73^\circ 5' 30''$.
3. $A = 86^\circ 15' 15''$, $B = 87^\circ 43' 36''$ „ $C = 153^\circ 17' 6''$. (L.M.)
4. $A = 97^\circ 20'$, $B = 95^\circ 31' 33''$ „ $C = 115^\circ 36' 4''$. (Kl.)
5. $b = 120^\circ 55' 35''$, $c = 88^\circ 12' 20''$ „ $A = 47^\circ 42' 1''$. (L.M.)
6. $c = 56^\circ 19' 40''$, $a = 20^\circ 16' 38''$ „ $B = 114^\circ 20' 16''$. (L.M.)
7. $B = 128^\circ 41' 49''$, $C = 107^\circ 33' 20''$ „ $a = 124^\circ 12' 31''$. (L.M.)

8. $C = 129^\circ 57' 59''$, $A = 63^\circ 15' 12''$ en $b = 55^\circ 52' 43''$. (L.M.)
9. $a = 134^\circ 15' 54''$, $b = 150^\circ 57' 5''$ „ $B = 144^\circ 22' 42''$. (T.U.)
10. $b = 120^\circ 55' 35''$, $c = 73^\circ 49' 38''$ „ $C = 88^\circ 52' 42''$.
11. $B = 123^\circ 40' 20''$, $C = 159^\circ 43' 22''$ „ $c = 159^\circ 50' 5''$. (T.U.)
12. $C = 139^\circ 53' 53''$, $A = 42^\circ 42' 45''$ „ $c = 109^\circ 15' 32''$.
13. $a = 72^\circ 25' 33''$, $A = 73^\circ 19' 24''$ „ $b - c = 13^\circ 22' 57''$.
14. $b = 116^\circ 44' 48''$, $a + c = 179^\circ 56' 52''$ „ $A + C = 179^\circ 9' 15''$.
15. $b = 52^\circ 16' 45''$, $c = 76^\circ 16' 26''$ „ $B + C = 170^\circ 34' 9''$.
16. $A = 90^\circ$, $C = 43^\circ 9' 10''$ „ $a + c = 156^\circ 26'$.
17. $c = 106^\circ 10' 22''$, $B = 63^\circ 15' 12''$ „ $a - b = 61^\circ 51' 10''$.
18. $a = 20^\circ 16' 38''$, $C = 114^\circ 20' 16''$ „ $b + c = 122^\circ 40' 24''$.
19. $b = 63^\circ 15' 12''$, $B = 88^\circ 12' 20''$ „ $A + a = 109^\circ 6' 26''$.
(L. M.)
20. $C = 108^\circ 12' 29''$, $A + B = 163^\circ 19' 24''$ „ $a + b + c = 277^\circ 6' 35''$.
21. Van een bol $\triangle ABC$ is $B = 65^\circ 13'$, $C = 110^\circ 22' 13''$ en h_a (sph. hoogtelijn op BC) $= 56^\circ 31' 37''$. Bereken a . (L. M.)
22. Van een bol $\triangle ABC$ is $C = 147^\circ 39'$, $h_c = 28^\circ 1' 2''$ en $a + b = 124^\circ 54' 30''$. Bereken c . (L. M.)
23. Van een bol $\triangle ABC$ is $a = 51^\circ 17' 30''$, $h_a = 30^\circ 5' 27''$ en $b + c = 115^\circ 20' 2''$. Bereken A .
24. Van een bol $\triangle ABC$ is $a = 56^\circ 2' 27''$, $b = 137^\circ 8' 6''$ en m_c (sph. mediaan uit C) $= 119^\circ 52' 33''$. Bereken c . (L. M.)
25. Van een bol $\triangle ABC$ is $b = 59^\circ 12' 16''$, $c = 122^\circ 24' 31''$ en b_a (sph. bissectrix uit A) $= 81^\circ 33' 47''$. Bereken a .
26. Van een bol $\triangle ABC$ is $b = 120^\circ 55' 35''$, $c = 73^\circ 49' 35''$ en $C = 88^\circ 52' 12''$. Bepaal waar de spherische buitenbissectrix van $\angle A$ de overstaande zijde ontmoet. (K1.)
27. Bereken in n^o. 1 den spherischen afstand van het middelpunt des ingeschreven cirkels tot A.
28. Bereken in n^o. 3 de lengte der spherische loodlijn uit het middelpunt van den omgeschreven cirkel op BC. (B Civ. Ing.)
29. Op een bol, welks straal 12 cM bedraagt, wordt een boldriehoek beschreven, waarvan de zijden resp. 20 cM, 25 cM en 15 cM lang zijn. Hoe groot zijn de hoeken van dezen boldriehoek? (L. M.)

30. Van een koordendriehoek eens bols (straal = 106 cM) zijn de zijden 49,538 cM, 43,685 cM en 63,032 cM. Hoe groot zijn de hoeken van den overeenkomstigen boldriehoek?
31. Op een bol, wiens straal 2 M is, is een gelijkzijdige boldriehoek beschreven, waarvan de omgeschreven cirkel een spherischen straal van $\frac{2}{3} \pi M$ heeft. Bereken het oppervlak van dezen boldriehoek. (G.)

TOEGEPASTE BOLDRIEHOEKSMETING.

Stereometrie.

§ 140. Van een parallelepipedum zijn gegeven de lengten der drie ribben en de hoeken die deze ribben twee aan twee met elkaar maken. Gevraagd den inhoud van dit parallelepipedum te bepalen.

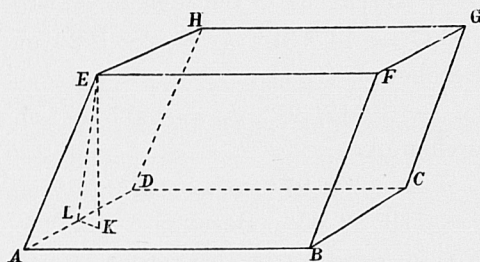


Fig. 43.

Oplossing.

Zij van het parallelepipedum $ABCDEFGH$
 $AB = p$, $AD = q$, $AE = r$, $\angle DAE = \alpha$,
 $\angle BAE = \beta$ en $\angle BAD = \gamma$; verder $EK \perp BAD$
 en $EL \perp AD$, dan is:

$$\begin{aligned} \text{Inh. par. pip. } ABCDEFGH &= EK \times \text{Opp. par. gr. } ABCD \\ &= EL \sin KLE \times pq \sin \gamma \\ &= r \sin \alpha \sin KLE \times pq \sin \gamma. \end{aligned}$$

Nu is $\angle KLE$ de standhoek van den drievlakshoek $ABDE$ op de ribbe AD , en dus, wegens het bekende verband tusschen drievlakshoek en boldriehoek:

$$\begin{aligned} \sin KLE &= 2 \sin \frac{1}{2} KLE \cos \frac{1}{2} KLE = \\ (\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma) \quad &= 2 \sqrt{\frac{\sin(\sigma - \alpha) \sin(\sigma - \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma}} \sqrt{\frac{\sin \sigma \sin(\sigma - \beta)}{\sin \alpha \sin \gamma}} \\ &= \frac{2}{\sin \alpha \sin \gamma} \sqrt{\sin \sigma \sin(\sigma - \alpha) \sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)}. \end{aligned}$$

Alzoo:

$$\text{Inh. par. pip. } ABCDEFGH = 2pqr \sqrt{\sin \sigma \sin(\sigma - \alpha) \sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)}.$$

§ 141. ¹⁾ Van een regelmatig veelvlak is
a de ribbe,
n het aantal zijden van elk zijvlak,
k het aantal ribben, dat in elk hoekpunt samenkomt;

men vraagt in deze grootheden uit te drukken:

- 1° den standhoek *S*,
- 2° den straal van den ingeschreven bol *r*,
- 3° den straal van den omgeschreven bol *R*,
- 4° het oppervlak *O*,
- 5° den inhoud *I* van het veelvlak.

Oplossing.

Zij PQ een halve ribbe, NQ het apothema van een zijvlak en MN de straal van den ingeschreven bol. Trek dan NP, MQ en MP, de laatste de straal van den omgeschreven bol. Construeer dan een boldriehoek ABC, die M tot middelpunt des bols heeft en waarvan A in MP, B in MQ en C in MN ligt. Van dezen boldriehoek is:

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{k} = \frac{180^\circ}{k},$$

$$B = 90^\circ \text{ (vl. PQM } \perp \text{ vl. NQM),}$$

$$C = \angle QNP = \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n},$$

$$BC = \angle BMC = 90^\circ - \angle MQN = 90^\circ - \frac{1}{2} S.$$

Alzoo is in den rechthoekigen boldriehoek ABC:

$$\cos BC = \frac{\cos A}{\sin C}$$

$$\text{of} \quad \sin \frac{1}{2} S = \frac{\cos \frac{180^\circ}{k}}{\sin \frac{180^\circ}{n}} \dots \dots \dots (1)$$

Van den rechthoekigen driehoek MNQ (rechth. in N) is:

$$\angle MQN = \frac{1}{2} S,$$

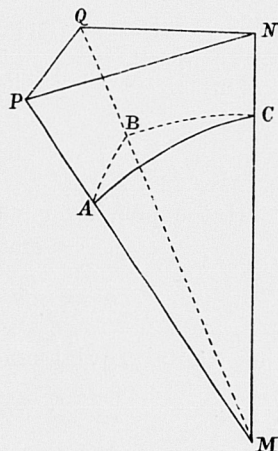


Fig. 44.

¹⁾ Aan deze § dient een degelijke stereometrische beschouwing der regelm. veelvlakken vooraf te gaan.

uit $\triangle PQN$ (rechth. in Q):

$$NQ = PQ \cot QNP = \frac{1}{2} a \cot \frac{180^\circ}{n},$$

$$MN = r.$$

Alzoo:

$$MN = QN \operatorname{tg} MQN$$

$$r = \frac{1}{2} a \cot \frac{180^\circ}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{2} S. \quad (2)$$

Van den rechthoekigen driehoek MNP (rechth. in N) is:

$$MN = \frac{1}{2} a \cot \frac{180^\circ}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{2} S.$$

$$\cos PMN = \cos AC = \cot \frac{180^\circ}{k} \cot \frac{180^\circ}{n}$$

$$MP = R.$$

Dus

$$MP = \frac{MN}{\cos PMN}$$

$$R = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{k} \operatorname{tg} \frac{1}{2} S. \quad (3)$$

Het oppervlak o van een zijvlak van het veelvlak =

$$= \text{omtrek zijvlak} \times \frac{1}{2} \text{apothema}$$

$$o = na \times \frac{1}{2} NQ = \frac{1}{4} na^2 \cot \frac{180^\circ}{n};$$

het aantal zijvlakken is (stereometrie):

$$Z = \frac{4k}{2n + 2k - nk}$$

Alzoo:

$$O = Z \times o$$

$$O = \frac{nk a^2 \cot \frac{180^\circ}{n}}{2n + 2k - nk} \quad (4)$$

De inhoud van het veelvlak is:

$$I = \frac{1}{3} r O$$

$$I = \frac{nk a^3 \cot^2 \frac{180^\circ}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{2} S}{6 (2n + 2k - nk)} \quad (5)$$

horizon het *zuidpunt*, het snijpunt N het *noordpunt* en PN de *poolhoogte* (= geogr. breedte) voor den waarnemer. Het vlak door M loodrecht op MP (*hemelas*) snijdt het hemelgewelf volgens den grooten cirkel AQ den *aequator*, welke den horizon in O het *oostpunt* en W het *westpunt* snijdt. Zij S een *ster*, dan is TSS_h de *vertikaalcirkel*, SS_h de *hoogte* (ST de *zenithsafstand*), ZS_h (steeds van Z naar W gemeten) het *azimuth*, PSS_a de *declinatiecirkel*, SS_a de *declinatie* der ster. Verder is nog LS_a (gemeten van het *lentepunt* ¹⁾ L (γ) af, van P uit gezien in tegengestelden zin van dien der beweging van de wijzers van een uurwerk) de *rechte klimming*, de hoek APS_a (gemeten van het deel des meridiaans PZ af in den zin der dagelijksche beweging des hemels) de *uurhoek* der ster. Nog is AL (van A af gemeten in den zin der dagelijksche beweging) in uren uitgedrukt de *sterretijd*, zoodat men, in uren (1 uur = 15°) uitgedrukt, heeft:

Rechte klimming = Sterretijd — Uurhoek [$+ 24$ u. ²⁾].

De plaats van de ster S kan door de coördinaten azimuth en hoogte (t/o van den horizon) of door de coördinaten rechte klimming en declinatie (t/o van den aequator) bepaald worden. Nu levert ons de *parallactische driehoek* PST, die tot hoekpunten heeft de pool des hemels, de ster en het zenith een geschikt middel op om deze coördinaten in elkaar uit te drukken. Immers daarin is PT het complement der poolhoogte of der geogr. breedte, onafhankelijk dus van de plaats der ster. Verder is TS het complement der hoogte, PS het complement der declinatie, $\angle$ PTS het verschil van het azimuth en 180° (steeds dit verschil positief genomen), $\angle$ TPS de uurhoek of het verschil van 360° en den uurhoek (naargelang de uurhoek $\leq$ 180°), terwijl men den hoek S ook nog den naam van *parallactischen hoek* geeft. Kent men de poolhoogte (= geogr. breedte), dan dienen dus nog twee der coördinaten azimuth, hoogte, uurhoek (of rechte klimming, als men den sterretijd ook geeft) en declinatie gegeven te zijn om de andere te kunnen berekenen.

¹⁾ Snijpunt van aequator en *ecliptica* (zonsweg); plaats der zon op 21 Maart; beweging der zon van P uit gezien tegengesteld aan die der wijzers van een uurwerk.

²⁾ Als de sterretijd kleiner is dan de uurhoek.

De dagelijksche beweging eener ster S (ook der zon) geschiedt in het algemeen volgens een kleinen (parallel-) cirkel evenwijdig aan het vlak van den aequator. Gaat ze door den meridiaan, dan zegt men dat ze *culmineert* (*bovenste en onderste culminatiepunt*). Merken we op, dat wanneer een ster (of de zon) *opkomt* of *ondergaat* de hoog TS 90° bedraagt, en dat op den langsten en kortsten dag de zon de grootste (noordelijke of zuidelijke) declinatie heeft, welke gelijk is aan de helling der ecliptica op den aequator nl. $23^\circ 27'$.

Vraagstukken.

1. Van een scheef driezijdig prisma zijn drie in een hoekpunt samenkomende ribben 18 dM, 14 dM en 12 dM. De twee laatste ribben behooren tot het grondvlak, waarvan het oppervlak $42 \sqrt{3}$ dM² bedraagt. Wanneer nu de standhoeken op de ribben van 14 dM en 12 dM 95° en 80° bedragen, bereken dan den inhoud van dit prisma. (T. U.)
2. Bewijs dat de inhoud van een driezijdige pyramide, waarvan p , q en r drie ribben, die in een hoekpunt samenkomen en A, B en C resp. de standhoeken op deze ribben zijn, is:

$$I = \frac{-2 p q r \cos S \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}{3 \sin A \sin B \sin C}.$$

[$S = \frac{1}{2} (A + B + C)$]. (G.)

3. Den inhoud te berekenen van een drievlakkigen bolsector als de straal des bols 12 cM is en de hoeken die de ribben met elkaar maken $93^\circ 44' 45''$, $27^\circ 16' 10''$ en $88^\circ 12' 20''$ groot zijn. (Kr.)
4. Bereken de standhoeken tusschen de zijvlakken van een regelmatige vierzijdige pyramide als de tophoek der opstaande zijvlakken $30^\circ 20' 45''$ bedraagt. (L. M.)
5. Bereken de standhoeken tusschen de zijvlakken van een regelmatige tienzijdige pyramide als de opstaande ribben 19 en de ribben van het grondvlak 7 cM lang zijn.
6. Van een regelmatige achzijdige pyramide is de standhoek op een opstaande ribbe 165° . Hoe groot is de som der zijden van den achtlakshoek in den top der pyramide? (T. U.)

7. Uit een punt A van de doorsnede AD van twee vlakken P en Q zijn twee lijnen nl. AB in het vlak P en AC in het vlak Q getrokken. Wanneer $\angle BAD = 53^\circ 13'$, $\angle CAD = 58^\circ 51'$ en $\angle BAC = 82^\circ 2' 45''$, vraagt men de hoeken te berekenen, die deze lijnen AB en AC met de vlakken P en Q maken.
8. Zoo in de figuur van het vorige vraagstuk $\angle BAD = 53^\circ 13'$, $\angle CAD = 58^\circ 51'$ en de standhoek der vlakken P en Q $82^\circ 2' 45''$ bedraagt, vraagt men den hoek te berekenen, die AD met het vlak der lijnen AB en AC maakt.
9. De beenen van $\angle AOB = 33^\circ 27'$ maken hoeken van $5^\circ 3'$ en $10^\circ 53'$ met het horizontale vlak door O. A en B liggen aan dezelfde zijde van dit vlak. Men vraagt de projectie van $\angle AOB$ op dit vlak te berekenen. (B Techn.)
10. Zoo in de figuur van het vorige vraagstuk de hoeken der beenen met het horizontale vlak weer $5^\circ 3'$ en $10^\circ 53'$ zijn, maar de projectie van $\angle AOB$ op het horizontale vlak $33^\circ 27'$ is, vraagt men $\angle AOB$ te berekenen.
11. Een driehoek ABC, wiens hoek A 70° is ligt met de zijde BC in een horizontaal vlak, terwijl A boven dit vlak ligt. De driehoek wordt op dat vlak geprojecteerd. Wanneer AB en AC met dat vlak hoeken maken van 50° en 46° , vraagt men den hoek te berekenen, dien het vlak van den driehoek met het vlak van projectie maakt. (T. U.)
12. Een gelijkzijdige driehoek, die met één zijde in een horizontaal vlak ligt, wordt op dit vlak geprojecteerd. De projectie van den hoek welks hoekpunt niet in dat vlak ligt $= 97^\circ 30'$. Onder welken hoek snijdt het vlak van den driehoek het vlak van projectie? (T. U.)
13. De spherische afstand tusschen twee plaatsen A en B op het aardoppervlak bedraagt 1470 uren gaans ($1^\circ = 20$ uren gaans). A ligt op den evenaar en B heeft een noorderbreedte van $47^\circ 32'$. Men vraagt het lengteverschil te berekenen. (T. U.)
14. De spherische afstand tusschen Parijs en Berlijn is 118 G M ($1^\circ = 15$ G M). De breedte van Parijs is $48^\circ 54' 13''$ en die van Berlijn $52^\circ 30' 16''$. Men vraagt het lengteverschil te berekenen. (Kl.)

15. Van twee plaatsen A en B op de aarde ligt A op 15° N. Br. en $50^{\circ} 13'$ O. L. terwijl B op 45° N. Br. en $140^{\circ} 13'$ O. L. ligt. Wanneer men over deze plaatsen een grooten cirkel trekt, *waar en onder welken hoek* snijdt deze dan den aequator in het Oost. halfroond? (G.)
 16. Van een ster is de hoogte $22^{\circ} 45' 12''$, het azimuth $50^{\circ} 14' 23''$ en de declinatie $7^{\circ} 54' 4''$. Hoe groot is de uurhoek der ster en de breedte der plaats van waarneming? (Kl.)
 17. Van een ster is de Rechte Kl. $57^{\circ} 24' 32''$, de declinatie $40^{\circ} 2' 13''$ en de helling der ecliptica (op den aequator) $23^{\circ} 27' 28''$. Bereken de lengte en breedte der ster (coördinaten t/o van de ecliptica — oorsprong L — gemeten in een zin van P uit gezien tegengesteld aan dien der beweging van de wijzers van een uurwerk). (Kl.)
 18. Op het oogenblik, dat de declinatie der zon $13^{\circ} 15' 20''$ noordelijk is, wordt op een plaats gelegen op $27^{\circ} 14' 30''$ zuiderbreedte de hoogte der zon gemeten en bevonden te zijn $31^{\circ} 18' 40''$. Op welke lengte ligt de plaats, als het tijdens de meting te Greenwich 9 u. 17 min. 10 sec. is? (Kl.)
 19. In Petersburg komt de zon den 22^{sten} Juni op om 2 u. 45 min. 40 sec. Gevraagd de poolshoogte van Petersburg. (Kl.)
 20. De poolshoogte van Berlijn te bepalen, als de langste dag er 16 u. 35 min. 41 sec. duurt. (Kl.)
-

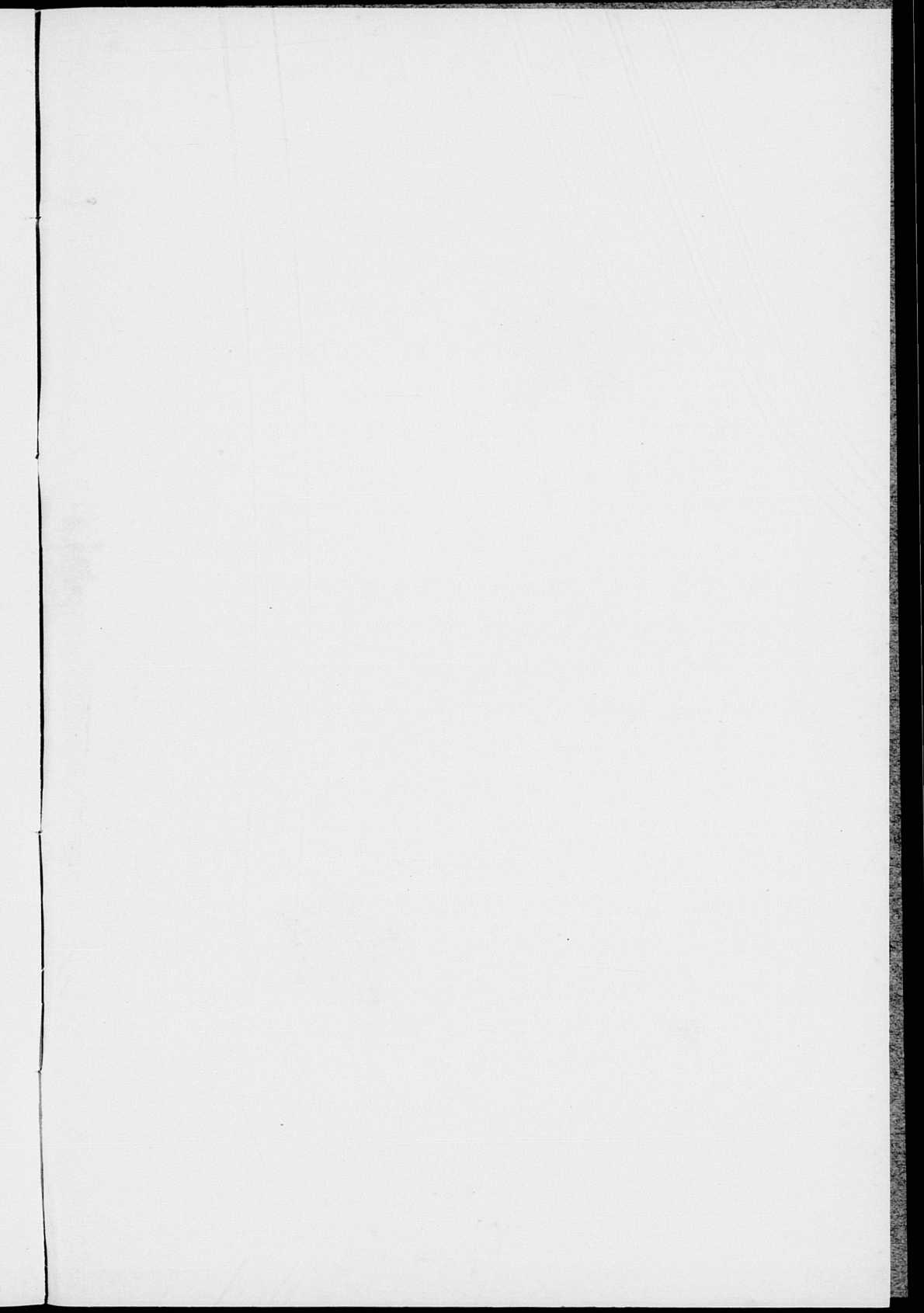
7. Uit een punt A van de doorsnede AD van twee vlakken P en Q zijn twee lijnen nl. AB in het vlak P en AC in het vlak Q getrokken. Wanneer $\angle BAD = 53^\circ 13'$, $\angle CAD = 58^\circ 51'$ en $\angle BAC = 82^\circ 2' 45''$, vraagt men de hoeken te berekenen, die deze lijnen AB en AC met de vlakken P en Q maken.
8. Zoo in de figuur van het vorige vraagstuk $\angle BAD = 53^\circ 13'$, $\angle CAD = 58^\circ 51'$ en de standhoek der vlakken P en Q $82^\circ 2' 45''$ bedraagt, vraagt men den hoek te berekenen, die AD met het vlak der lijnen AB en AC maakt.
9. De beenen van $\angle AOB = 33^\circ 27'$ maken hoeken van $5^\circ 3'$ en $10^\circ 53'$ met het horizontale vlak door O. A en B liggen aan dezelfde zijde van dit vlak. Men vraagt de projectie van $\angle AOB$ op dit vlak te berekenen. (B Techn.)
10. Zoo in de figuur van het vorige vraagstuk de hoeken der beenen met het horizontale vlak weer $5^\circ 3'$ en $10^\circ 53'$ zijn, maar de projectie van $\angle AOB$ op het horizontale vlak $33^\circ 27'$ is, vraagt men $\angle AOB$ te berekenen.
11. Een driehoek ABC, wiens hoek A 70° is ligt met de zijde BC in een horizontaal vlak, terwijl A boven dit vlak ligt. De driehoek wordt op dat vlak geprojecteerd. Wanneer AB en AC met dat vlak hoeken maken van 50° en 46° , vraagt men den hoek te berekenen, dien het vlak van den driehoek met het vlak van projectie maakt. (T. U.)
12. Een gelijkzijdige driehoek, die met één zijde in een horizontaal vlak ligt, wordt op dit vlak geprojecteerd. De projectie van den hoek welks hoekpunt niet in dat vlak ligt $= 97^\circ 30'$. Onder welken hoek snijdt het vlak van den driehoek het vlak van projectie? (T. U.)
13. De spherische afstand tusschen twee plaatsen A en B op het aardoppervlak bedraagt 1470 uren gaans ($1^\circ = 20$ uren gaans). A ligt op den evenaar en B heeft een noorderbreedte van $47^\circ 32'$. Men vraagt het lengteverschil te berekenen. (T. U.)
14. De spherische afstand tusschen Parijs en Berlijn is 118 G M ($1^\circ = 15$ G M). De breedte van Parijs is $48^\circ 54' 13''$ en die van Berlijn $52^\circ 30' 16''$. Men vraagt het lengteverschil te berekenen. (Kl.)

15. Van twee plaatsen A en B op de aarde ligt A op 15° N. Br. en $50^{\circ} 13'$ O. L. terwijl B op 45° N. Br. en $140^{\circ} 13'$ O. L. ligt. Wanneer men over deze plaatsen een grooten cirkel trekt, *waar en onder welken hoek* snijdt deze dan den aequator in het Oost. halfrond? (G.)
 16. Van een ster is de hoogte $22^{\circ} 45' 12''$, het azimuth $50^{\circ} 14' 23''$ en de declinatie $7^{\circ} 54' 4''$. Hoe groot is de uurhoek der ster en de breedte der plaats van waarneming? (Kl.)
 17. Van een ster is de Rechte Kl. $57^{\circ} 24' 32''$, de declinatie $40^{\circ} 2' 13''$ en de helling der ecliptica (op den aequator) $23^{\circ} 27' 28''$. Bereken de lengte en breedte der ster (coördinaten t/o van de ecliptica — oorsprong L — gemeten in een zin van P uit gezien tegengesteld aan dien der beweging van de wijzers van een uurwerk). (Kl.)
 18. Op het oogenblik, dat de declinatie der zon $13^{\circ} 15' 20''$ noordelijk is, wordt op een plaats gelegen op $27^{\circ} 14' 30''$ zuiderbreedte de hoogte der zon gemeten en bevonden te zijn $31^{\circ} 18' 40''$. Op welke lengte ligt de plaats, als het tijdens de meting te Greenwich 9 u. 17 min. 10 sec. is? (Kl.)
 19. In Petersburg komt de zon den 22^{sten} Juni op om 2 u. 45 min. 40 sec. Gevraagd de poolshoogte van Petersburg. (Kl.)
 20. De poolshoogte van Berlijn te bepalen, als de langste dag er 16 u. 35 min. 41 sec. duurt. (Kl.)
-

INHOUD.

	Blz.
Rechthoekige boldriehoeken	3
Formules	3
Vraagstukken	6
Oplossing der rechthoekige boldriehoeken	8
Vraagstukken	13
Willekeurige boldriehoeken	14
Formules	14
Bewijs van den sinusregel uit de figuur (door recht- hoekige boldriehoeken)	19
Formules ter bepaling van het oppervlak eens boldrie- hoeks	20
Formules voor de spherische stralen der om- en inge- schreven cirkels eens boldriehoeks	21
Vraagstukken	22
Oplossing van scheefhoekige boldriehoeken	27
Berekening van het oppervlak en van de spherische stralen der om- en ingeschreven cirkels van een bol- driehoek	32
Vraagstukken	32
Toegepaste boldriehoeksmeting	34
Stereometrie	34
Kosmographie	37
Vraagstukken	39

da 4370





Recensien Rekenkunde van DE GAST.

Wanneer ik hier verklaar, dat ik het werk in handen van iederen onderwijzer wensch, dan volg ik het voorbeeld van vele bevoegde beoordeelaars, en ik doe dat gaarne.

Het Nieuwe Schoolblad.

H. VERHAGEN.

De schrijver heeft zijn werk in dezen tweeden druk vrijwat gewijzigd en verbeterd met behoud van het vele goede, dat de eerste druk reeds bevatte. Alles is met nauwgezetheid herzien en de hoop, dat het boek in dezen vorm de oude vrienden zal behouden en nieuwe zal verwerven is zeker zeer gegrond.

Schoolblad.

Dit praktische Leerboek, dat zonder geleerden omslag de hoofdzaken behandelt en de bijzaken niet te veel op den voorgrond brengt, zal zijn weg wel vinden. Werken in den praktischen, eenvoudigen toon, dien de schrijver aanslaat, zullen voor onze opleiding steeds gewenscht blijven.

Nieuw Nijmeegsch Schoolblad.

De 1e druk, naar de behoeften van onderwijzers ingericht, is om zijne vele goede eigenschappen met warmte door de onderwijzers ontvangen. De 2e druk is met zorg herzien. Wij bevelen dit werk ten zeerste in de aandacht der onderwijzers aan.

Vriend der Wiskunde.

't Kan volstrekt niet in mijne bedoeling liggen deze werken breedvoerig te bespreken, nog minder ze aan te bevelen. Men kent DE GAST en zijn werk en dan weet men genoeg. En wie er soms nog iets van uit de Katholieke School weten wil, verzoek ik mijne beoordeeling te lezen van een zijner werken nl. „Het oplossen van rekenk. vraagst. in typen, voorbeelden en opgaven, waarna uit genoegzaam blijkt, dat de heer DE GAST passé maitre is.

De vierde druk van het 1e deel bewijst, dat het Leerboek der Rekenk. aan vele inrichtingen van onderwijs gebruikt wordt. Het 2e deel is in den 3en druk vereenvoudigd en daardoor inderdaad verbeterd, met name de les over de verkorte bewerkingen, terwijl ééne aantek. geheel en ééne andere gedeeltelijk is weggelaten, omdat op het examen voor de Hoofdatie naar deze onderwerpen nooit wordt gevraagd.

Meer heb ik er niet over te zeggen. De nieuwe drukken zullen wel weten, waar ze hunne voorgangers kunnen aantreffen.

De Kathol. School.

R.

Recensiën Rekenkunde van DE GAST.

Wanneer ik hier verklaar, dat ik het werk in handen van iederen onderwijzer wensch, dan volg ik het voorbeeld van vele bevoegde beoordeelaars en ik doe dat gaarne.

Het Nieuwe Schoolblad.

H. VERHAGEN.

De schrijver heeft zijn werk in dezen tweeden druk vrijwat gewijzigd en verbeterd met behoud van het vele goede, dat de eerste druk reeds bevatte. Alles is met nauwgezetheid herzien en de hoop, dat het boek in dezen vorm de oude vrienden zal behouden en nieuwe zal verwerven is zeker zeer gegrond.

Schoolblad.

Dit practische Leerboek, dat zonder geleerden omslag de hoofdzaken behandelt en de bijzaken niet te veel op den voorgrond brengt, zal zijn weg wel vinden. Werken in den practischen, eenvoudigen toon, dien de schrijver aanslaat, zullen voor onze opleiding steeds gewenscht blijven.

Nieuw Nijmeegsch Schoolblad.

De 1e druk, naar de behoeften van onderwijzers ingericht, is om zijne vele goede eigenschappen met warmte door de onderwijzers ontvangen. De 2e druk is met zorg herzien. Wij bevelen dit werk ten zeerste in de aandacht der onderwijzers aan.

Vriend der Wiskunde.

't Kan volstrekt niet in mijne bedoeling liggen deze werken breedvoerig te bespreken, nog minder ze aan te bevelen. Men kent DE GAST en zijn werk en dan weet men genoeg. En wie er soms nog iets van uit de Katholieke School weten wil, verzoek ik mijne beoordeeling te lezen van een zijner werken nl. „Het oplossen van rekenk. vraagst. in typen, voorbeelden en opgaven, waaruit genoegzaam blijkt, dat de heer DE GAST passé maitre is.

De vierde druk van het 1e deel bewijst, dat het Leerboek der Rekenk. aan vele inrichtingen van onderwijs gebruikt wordt. Het 2e deel is in den 3en druk vereenvoudigd en daardoor inderdaad verbeterd, met name de les over de verkorte bewerkingen, terwijl ééne aantek. geheel en eene andere gedeeltelijk is weggelaten, omdat op het examen voor de Hoofdacte naar deze onderwerpen nooit wordt gevraagd.

Meer heb ik er niet over te zeggen. De nieuwe drukken zullen wel weten, waar ze hunne voorgangers kunnen aantreffen.

De Kathol. School.

R.

S. DE GAST Jz. Beginselen der Algebra.

2 Stukjes à f 0,60

De schrijver dezer beginselen wil achtereenvolgens behandelen: rekenk., algemeene rekenk. en algebra. We moeten verklaren, dat DE GAST het geheim bezit de zaken helder en klaar voor te stellen, wat ook weder overtuigend uit zijne Beginselen der Algebra blijkt. Ofschoon de behandelde leerstof uit den aard der zaak veel met die van gelijksoortige werkjes overeenkomt, mogen we den schrijver toch een woord van lof niet onthouden. Wie Algebra moet onderwijzen of leeren, zal zich de kennismaking niet beklagen.

De Schoolwereld.

De geleidelijke weg is op onderwijsgebied nog steeds in goeden reuk, omdat hij gewoonlijk beter tot het doel voert dan sommige kortere wegen, waarop te veel struikelblokken zijn voor middelmatige en zwakke leerlingen.

Getrouw aan het „verdeel en heersch” wil de heer DE GAST de leerlingen door middel van het 1e deeltje de noodige vaardigheid verschaffen in het werken met lettervormen, terwijl in het 2e deeltje de bewerkingen met pos. en neg. getallen behandeld worden.

Met genoegen heb ik het 1e deeltje nagegaan; ik ben er zeker van, dat de leerlingen met wie dit boekje is behandeld, behoorlijk bedreven zullen zijn in het werken met lettervormen.

Het komt mij voor, dat ook het 2e deeltje met zorg is bewerkt.

Het Schoolblad.

B. S. Veenstra.

Ik geloof, dat de schrijver van deze uitgave veel voldoening zal hebben, juist en vooral om hetgeen hij zich ten doel heeft gesteld en wat hem bijzonder is gelukt: eenvoudig en duidelijk te zijn

De Katholieke School.

A.

Wie het Leerboek der Rekenk. van dezen schrijver kent en gebruikt heeft, heeft daarin zeker leeren waardeeren den streng logischen gang. Dezelfde logische voortgang in de opvolging der bewerkingen en in de bewijzen der eigenschappen vindt men in de Beginselen der Algebra terug. In het 1e deeltje komen nog geen neg. getallen voor. We zijn het met den schrijver eens, dat dit de beste gang is.

Het Onderwijs.

v. G.