

Vol. 1897. II. 17

Straalbuigings-coëfficiënten

EN

Astronomische Straalbuiging

DOOR

W. CORNELIS

Luit. ter zee 1^e klasse

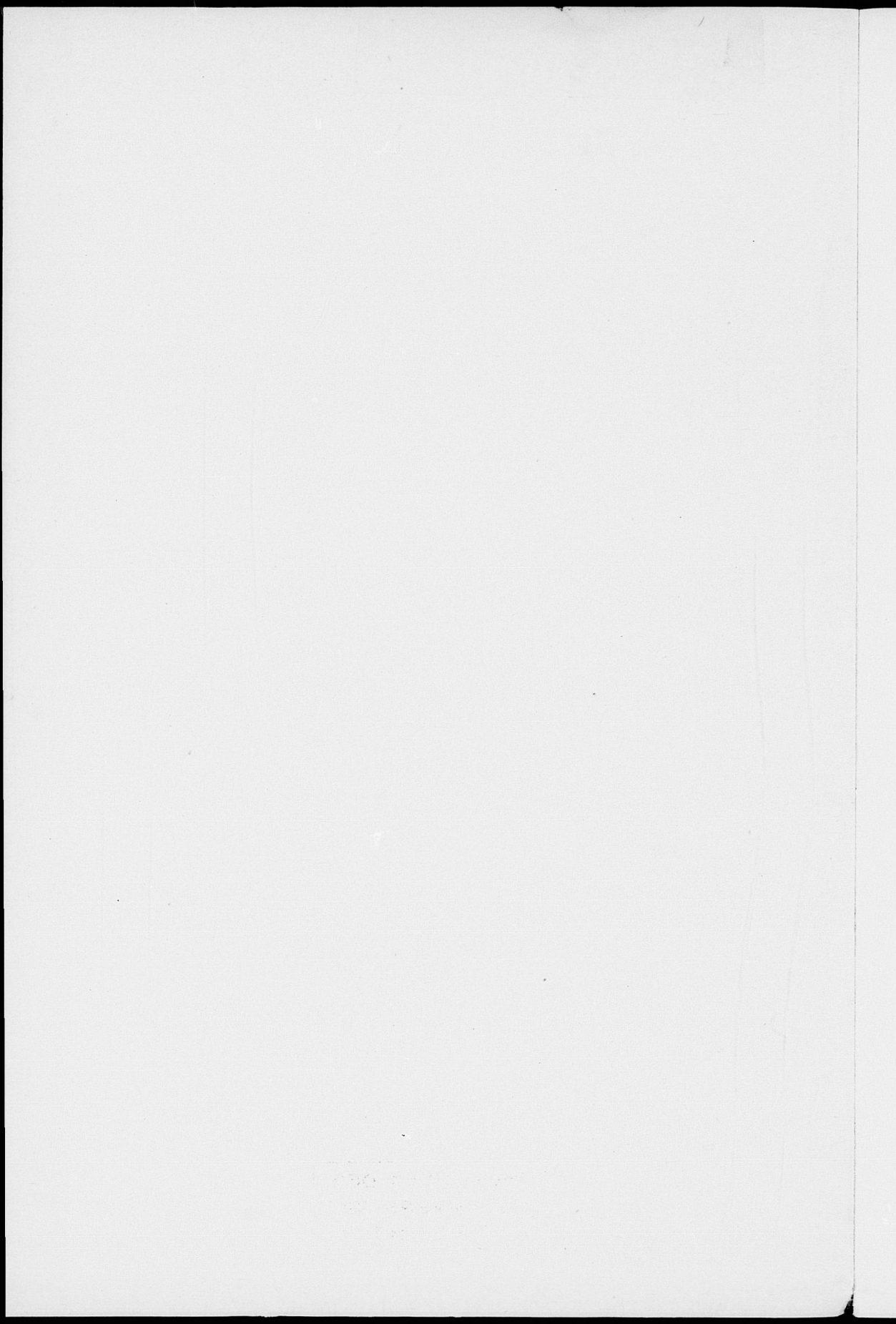


'S GRAVENHAGE

W. P. VAN STOCKUM & ZOON

1897

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.



Br. 1897 II. 17

Straalbuigings-coëfficiënten

EN

Astronomische Straalbuiging

DOOR

W. CORNELIS

Luit. ter zee 1^e klasse



RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT



2763 111 2

'S GRAVENHAGE

W. P. VAN STOCKUM & ZOON

1897

BIBLIOTHEEK DER
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT.

Op het hoogste punt van een eilandje, omstreeks 159.43 M. -- n.l.
R
40000 — boven het oppervlak der zee, wordt voor de schijnbare

hoogte van een ster gevonden $0^{\circ} 22' 34''.91$. De verlengde licht-
straal zal dan, de kimduiking voor die hoogte van het oog juist
 $0^{\circ} 22' 34''.91$ bedragende, de kim raken, en wel op een afstand
van $26' 10''$; m. a. w., op een afstand van $26' 10''$ van den waarnemer en in tegengestelde richting van de ster zal de schijnbare
hoogte op hetzelfde oogenblik $0^{\circ} 0' 0''$ zijn.

Zijn verder barometer- en thermometerstanden gelijk aan de in
Bessel's straalbuigingstafel als normaal aangenomene, dan vindt
men voor de ware hoogte bij den waarnemer

$$0^{\circ} 22' 34''.91 - 0^{\circ} 30' 23''.3 = - 0^{\circ} 7' 48''.39$$

en aan de kim

$$0^{\circ} 0' 0'' - 0^{\circ} 34' 54''.1 = - 0^{\circ} 34' 54''.1.$$

Het verschil in ware hoogte bedraagt alzoo $0^{\circ} 27' 5''.71$, hoezeer
overeenkomstig den afstand der twee punten het verschil in ware
hoogte bijna een minuut kleiner moest zijn.

Zuiver te werk gaande, moet ook nog in rekening worden ge-
bracht het verschil in dichtheid der lucht op het oppervlak der
zee en bij den waarnemer. Onder normale omstandigheden zal de
dichtheid bij toenemende hoogte afnemen. Is dan de dichtheid aan
de kim de normale, dan is die bij den waarnemer dus kleiner,
zoodat we ook bij den waarnemer een kleinere waarde zouden
moeten aannemen dan BESSEL's tafel voor de middelbare straal-

buiging aangeeft. Dit maakt het kwaad evenwel nog erger, want een kleinere waarde doet de ware hoogte grooter worden, waardoor het verschil in ware hoogte nog meer te groot zou worden gevonden. Het kwaad wordt dus verergerd in plaats van weggenomen.

Uit het gekozen voorbeeld blijkt, dat er geen overeenstemming bestaat tusschen den straalbuigingscoëfficiënt, gebezigd bij de berekening van kimduiking en afstand tot de kim, en de tafel voor de middelbare straalbuiging van BESSEL. De volgende bladzijden zullen een poging bevatten om daarin tot overeenstemming te geraken.

De oorzaak van de gevonden ongerijmdheid kan worden gezocht:

1°. In onnauwkeurigheden in de tafel van BESSEL voor de middelbare straalbuiging;

2°. In onnauwkeurigheid van de gebruikte waarde van den straalbuigingscoëfficiënt bij de berekening van kimduiking en afstand tot de kim;

3°. In mogelijke onjuistheid van de boven stilzwijgend aangenomen stelling, dat de astronomische straalbuiging bij gelijken topsafstand en gelijke dichtheid der lucht voor alle punten gelijk is.

Laten we beginnen met een poging om de oorzaak in slechts één dezer drie punten te zoeken.

1°. Hoewel het mogelijk is aan de middelbare straalbuiging zoodanige waarden toe te kennen, dat ongerijmdheden als in het gekozen en in andere voorbeelden niet meer voorkomen, zoo stuiten we daarbij op het bezwaar, dat we genoodzaakt worden in de tafel van BESSEL fouten aan te nemen, die de middelbare fouten van zijne waarnemingen verre overtreffen. *) Doordat we ons bij de tafels van alle waarnemers tot de aanneming van overeenkomstig groote fouten zouden zien genoodzaakt, is het vertrouwen in de deugdelijkheid der gedane waarnemingen reeds reden genoeg om niet uitsluitend in deze richting genezing te willen zoeken.

*) De waarden, die men zou moeten aannemen, komen voor op bladz. 16 in de kolom voor $K = 0.137$.

2°. In het gekozen voorbeeld is voor de waarde van den straalbuigingscoëfficiënt de BESSEL'sche waarde gekozen, nl. 0.137. Hoezeer die coëfficiënt veranderlijk genoeg is, om het aannemen van een daarvan afwijkende waarde geoorloofd te maken, zoo zouden we ons genoodzaakt zien, die waarde tot ruim 0.18 *) op te voeren om in het gekozen voorbeeld tot overeenstemming te geraken, maar wederom komen we dan in strijd met de vele waarnemingen, waarin we fouten zouden moeten aannemen, aanmerkelijk grooter dan de middelbare.

Wel vermelden BESSEL †) en van KERKWIJK §), dat in Engeland de waarde 0.20 gebruikelijk is, maar blijkbaar is men sedert dien daarvan teruggekomen; de werken van WHARTON, LAUGHTON en CLARKE toch geven waarden, welke weinig of niet van de BESSEL'sche verschillen.

3°. Ware de dichtheid van de lucht overal dezelfde, dan zoude, evenals bij een lens de invallende stralen sterker worden gebroken, naarmate ze verder van de as invallen, bij gelijken waren en dus ook bij gelijken schijnbaren topsafstand de straalbreking moeten toenemen naarmate de afstand van het middelpunt der aarde en dus de hoogte van het oog toeneemt. Neemt men aan, dat de straalbuiging evenredig is aan de dichtheid, en dat deze afneemt bij toenemende hoogte, dan is het maar de vraag, welke invloed bij stijging het sterkst werkt nl. toeneming der straalbuiging, doordat we meer met randstralen te doen krijgen, of afneming daarvan door afneming der dichtheid.

Hoezeer algemeen aangenomen wordt, dat de laatste invloed overwegend groot is, zoo blijft niettemin de andere invloed bestaan, en dus ook de mogelijkheid, dat deze, althans bij niet al te groote hoogten van het oog, overwegend is. Het is daarom ook niet overbodig, na te gaan in hoeverre hierin de oorzaak van het gemis aan overeenstemming tusschen straalbuigingscoëfficiënten en astronomische straalbuiging kan gelegen zijn.

Nemen we alzoo aan, dat zoowel straalbuigingstafel als -coëfficiënt

*) Bij kleinere topsafstanden zelfs tot 0.23, zie bladz. 12.

†) Gradmessung in Ost-Preussen, bladz. 197.

§) Geodesie, 5^e druk, bladz. 411.

juist zijn, dan moeten we in het gekozen voorbeeld aannemen, dat de ware hoogte aan de kim — $0^{\circ} 34' 54''.1$ en die bij den waarnemer $26' 10''$ grooter, dus — $0^{\circ} 8' 44''.1$ bedraagt. De schijnbare hoogte $0^{\circ} 22' 34''.91$ bedragende, zoude men voor de straalbuiging $0^{\circ} 31' 19''.01$ moeten aannemen, zoodat in weerwil van het afnemen der dichtheid van de lucht de straalbuiging $55''.7$ grooter zoude zijn op 159.43 M. boven zee dan aan de oppervlakte daarvan.

Op elke willekeurige hoogte boven zee kunnen we op overeenkomstige wijze de straalbuiging berekenen voor topsafstanden gelijk aan en kleiner dan het complement van de kimduiking, door nl. den lichtstraal te verlengen tot die het oppervlak der aarde snijdt. Berekent men dan den afstand in boog en daaruit de kromming van den lichtstraal tusschen het oog en dat snijpunt, dan vindt men eerst den schijnbaren topsafstand op dat punt, daarna door toepassing van de middelbare straalbuiging bij dien topsafstand en den afstand in boog van snijpunt tot waarnemer den waren topsafstand bij den waarnemer. Het verschil van schijnbaren en waren topsafstand bij den waarnemer geeft eindelijk de waarde voor de middelbare straalbuiging behorende bij den schijnbaren topsafstand en de hoogte boven zee waarvan men is uitgegaan.

Op deze wijze te werk gaande, wordt de volgende tafel gevonden.

Hoogte in meters.	SCHIJNBARE TOPSAFSTANDEN.										Schijnbare topsafstand bij aanraking van de kim.	
	88° 0'	88° 10'	88° 20'	88° 30'	88° 40'	88° 50'	89° 0'	89° 10'	89° 20'	89° 30'		89° 40'
2500	933.6	991.7	1071.1	1202.8							1242.3	88° 30' 35".68
2400	940.0	999.2	1072.5	1184.5							1259.5	88° 32' 24".03
2300	945.9	1003.5	1074.5	1174.8							1277.1	88° 34' 14".65
2200	951.5	1008.4	1077.0	1169.9							1295.0	88° 36' 7".71
2100	957.4	1013.3	1080.1	1167.2							1313.4	88° 38' 3".38
2000	963.4	1018.4	1083.7	1166.3	1326.0						1332.2	88° 40' 1".83
1900	969.3	1023.4	1085.5	1166.5	1284.3						1351.5	88° 42' 3".29
1800	975.3	1028.9	1091.7	1167.9	1272.5						1371.3	88° 44' 7".99
1700	981.4	1034.4	1096.1	1169.9	1266.4						1391.7	88° 46' 16".21
1600	987.5	1039.9	1100.7	1172.4	1263.1						1412.7	88° 48' 28".26
1500	993.7	1045.8	1105.7	1175.5	1262.4	1397.4					1434.3	88° 50' 44".51
1400	999.9	1051.6	1110.7	1179.2	1261.5	1375.3					1456.7	88° 53' 5".39
1300	1006.2	1057.3	1115.9	1183.1	1262.6	1365.3					1479.9	88° 55' 31".40
1200	1012.5	1063.4	1121.2	1187.2	1264.4	1360.2					1504.0	88° 58' 3".14
1100	1018.6	1069.3	1126.6	1191.5	1267.0	1357.7	1495.5				1529.1	89° 0' 41".35
1000	1024.9	1075.4	1132.0	1196.2	1269.5	1356.7	1471.3				1555.4	89° 3' 26".93
900	1031.3	1081.5	1137.7	1201.3	1273.2	1357.0	1461.0				1583.0	89° 6' 21".03
800	1037.5	1087.8	1143.5	1206.3	1277.1	1358.3	1455.9				1612.3	89° 9' 25".11
700	1044.0	1093.9	1149.4	1211.5	1281.1	1360.0	1453.0	1574.4			1643.4	89° 12' 41".10
600	1050.3	1100.2	1155.3	1216.7	1285.3	1362.9	1452.1	1560.0			1676.8	89° 16' 11".67
500	1056.7	1106.5	1161.2	1222.0	1289.9	1366.0	1452.2	1553.1	1710.3		1713.2	89° 20' 0".65
400	1063.1	1112.7	1167.3	1227.6	1295.0	1369.6	1453.5	1549.2	1665.7		1753.4	89° 24' 13".94
300	1069.4	1118.9	1173.3	1234.3	1300.0	1373.5	1455.4	1547.6	1653.6		1799.0	89° 29' 1".45
200	1075.8	1125.3	1179.4	1239.1	1305.1	1377.7	1458.0	1547.3	1765.1		1853.2	89° 34' 42".49
100	1082.2	1131.6	1185.6	1244.9	1310.4	1382.1	1461.0	1548.1	1644.1	1750.5	1923.8	89° 42' 6".95
0	1088.6	1138.0	1191.9	1250.9	1315.6	1386.7	1464.6	1549.8	1642.7	1743.5	2094.1	90° 0' 0"

In de voorlaatste kolom zijn de straalbuigingen gegeven behoorende bij die topsafstanden, waarbij de verlengde lichtstraal de kim juist raakt; die topsafstanden zelf zijn in de laatste kolom gegeven. Verder is bij de berekening 6377390 M. aangenomen voor de lengte van den kromtestraal; heeft deze een andere waarde, dan geldt bovenstaande tafel eveneens, waarbij alleen de waarden van de eerste kolom een kleine wijziging zouden moeten ondergaan.

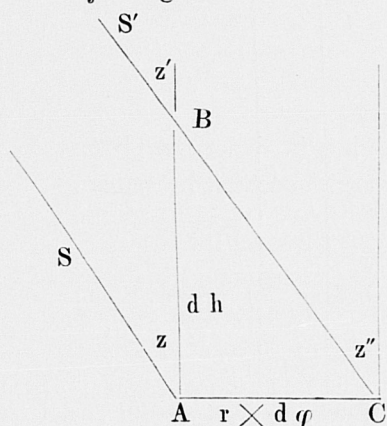
Hoewel mogelijk op het eerste gezicht in die tafel geen ongerijmdheid valt op te merken, wordt het anders, wanneer de verschillen in straalbuiging bij opeenvolgende topsafstanden worden nagegaan. Die veranderingen hebben steeds vrij regelmatig plaats zoolang de topsafstanden noemenswaard kleiner zijn dan het complement van de waarde der kimduiking. Zoodra men evenwel die waarde nabij komt, neemt de straalbuiging buitengewoon snel toe. Zoo neemt op 2500 M. hoogte de waarde van de straalbuiging nog sneller toe dan de topsafstand, wanneer deze grooter dan $88^{\circ} 30'$ wordt; hetzelfde is het geval bij een hoogte van 2000 M. en $88^{\circ} 40'$ topsafstand en bij 500 M. en $89^{\circ} 20'$ topsafstand. Hetzelfde verschijnsel zoude zich bij iedere hoogte hebben voorgedaan, indien de straalbuiging berekend ware voor een topsafstand onbeduidend kleiner dan het complement van de waarde der kimduiking.

Een zoodanig sterke toeneming der straalbuiging is met geen der bestaande hypothesen omtrent den physischen toestand van den dampkring in overeenstemming te brengen, waarom het bovenstaande reeds voldoende grond oplevert om althans niet uitsluitend in de veranderlijkheid van de waarden voor de middelbare straalbuiging met de hoogte van het oog boven zee, een middel te zoeken tot bereiking van overeenstemming.

Ons genoodzaakt ziende, de bestaande ongerijmdheid aan meer dan één oorzaak toe te schrijven, zullen we eerst onderzoeken of het mogelijk is, die ongerijmdheid weg te nemen door het aanbrengen van zoodanige correctiën aan straalbuigingstafels en -coëfficiënten beide, zóó, dat de verrichte waarnemingen niet te veel geweld behoeft aangedaan te worden. Zoo mogelijk moeten

we dan het thans nog algemeen aangenomen standpunt blijven vasthouden, dat de straalbuiging onafhankelijk is van de hoogte van het oog boven zee. *) Eenvoudigheidshalve kunnen we nog als algemeenene regel aannemen, dat barometer- en thermometerstanden aan de oppervlakte overeenkomen met die in BESSEL's tafel voor de middelbare straalbuiging.

Ten einde nu te onderzoeken voor welke waarden voor den straalbuigingscoëfficiënt k (de verhouding van aardstraal tot den kromtestraal van den lichtstraal) en de middelbare straalbuiging bij verschillende topsafstanden een gewenschte overeenstemming is te verkrijgen, zullen we het vraagstuk op de volgende algemeene wijze nagaan.



Zij in de figuur A de plaats van een waarnemer, die zich ter hoogte van het oppervlak der zee bevindt, welke waarnemer een ster S, die een schijnbaren topsafstand $BAS = Z$ heeft, in de richting AS ziet.

Bij een oneindig kleine stijging, van A tot B, mogen we de verandering in dichtheid evenredig stellen aan de verandering in hoogte, dus wordt

$$d\rho = a \times dh,$$

waarin ρ de dichtheid, dh het hoogteverschil AB en a een constante factor voorstelt. Neemt men verder aan, zooals nog algemeen gebruikelijk is, dat de straalbuiging evenredig met de dichtheid is, dan is

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} \text{ of } dR = \frac{R}{\rho} \times d\rho,$$

waarin R de straalbuiging voorstelt. Hierin de gevonden waarde voor $d\rho$ substitueerende, wordt

$$dR = \frac{a}{\rho} \times R \times dh$$

*) VON BAUERNEIND doet dit niet, maar de veranderingen met de hoogte van het oog zijn bij dezelfde dichtheid zoo onbeduidend, dat er alleen bij zeer groote topsafstanden en zeer groote hoogten van het oog rekening mede behoeft te worden gehouden.

In driehoek ABC is $AB = AC \cot ABC$

$$\text{of } dh = r \times d\varphi \cot z,$$

als r den kromtestraal en $d\varphi$ den afstand in boog van A tot C voorstelt.

Deze waarde voor dh in die voor dR invoerende, wordt

$$dR = \frac{a \times r}{\varrho} \times R \cot z \times d\varphi$$

Deze waarde stelt nu het verschil in straalbuiging en dus ook het verschil in schijnbaren topsafstand voor in A en B , zoodat we ook hebben

$$z = z' - \frac{a r}{\varrho} \times R \cot z d\varphi$$

of wanneer we de factor $\frac{a r}{\varrho} = p$ stellen:

$$z = z' - p R \cot z d\varphi.$$

Het verschil in astronomische straalbuiging in de punten B en C is gelijk aan de aardsche straalbuiging tusschen die punten $= k \times d\varphi^*$, waardoor

$$R' = R'' - k \times d\varphi$$

Doordat in C de ware topsafstand een bedrag $d\varphi$ grooter is dan die in B , wordt nu

$$z' = z'' - d\varphi + k d\varphi = z'' - (1 - k) d\varphi$$

Deze waarde van z' invoerende in de formule voor z , wordt

$$z = z'' - p R \cot z d\varphi - (1 - k) d\varphi \text{ of}$$

$$z'' - z = dz = \{p R \cot z + (1 - k)\} d\varphi$$

Het verschil in straalbuiging in de punten A en C , hetwelk hierna door dR zal worden weergegeven, bedroeg

$$k d\varphi - p R \cot z d\varphi = dR,$$

zoodat we voor de verandering in straalbuiging bij verandering van topsafstand vinden

$$\frac{dR}{dz} = \frac{(k - p R \cot z) d\varphi}{(1 - k + p R \cot z) d\varphi} = \frac{k - p R \cot z}{1 - k + p R \cot z} \dots \dots (1)$$

In deze differentiaal-vergelijking komen twee waarden k en p voor, die uit waarnemingen moeten worden afgeleid. Een er van

*) Onder aardsche straalbuiging tusschen twee punten wordt hier en later verstaan het verschil in richting van de raaklijn aan den lichtstraal in die punten.

kunnen we elimineeren door invoering van een andere. Voor zeer kleine topsafstanden toch wordt zoowel $\frac{dR}{dz}$ als $R \cot z$ gelijk aan α , die hier de gewone beteekenis heeft.

Op deze wijze krijgen we dus

$$\alpha = \frac{k - p \times \alpha}{1 - k + p \times \alpha}, \text{ waaruit}$$

$$p = \frac{k}{\alpha} - \frac{1}{1 + \alpha} \dots \dots \dots (2)$$

Door substitutie in (1) van deze waarde voor p vinden we voor de waarde van k

$$k = \frac{A - (1 + A) \times \frac{R \cot z}{1 + \alpha}}{(1 + A) \times \left(1 - \frac{R \cot z}{\alpha}\right)},$$

waarin A de waarde $\frac{dR}{dz}$ voorstelt.

Voor een bepaalde straalbuigingstafel is α een constante (n.l. bij constante barometer- en thermometerstanden), terwijl zoowel A als R voor verschillende topsafstanden uit de tafel kan worden genomen, zoodat we alle gegevens bezitten ter berekening van k .

De onderstaande tafel bevat de resultaten van deze berekening.

Z	G	B	B'	K
65°, 66°	0.238	0.200	0.232	0.176
66°, 67°	0.239	0.208	0.243	0.181
67°, 68°	0.239	0.206	0.244	0.187
68°, 69°	0.238	0.212	0.252	0.193
69°, 70°	0.238	0.211	0.254	0.198
70°, 71°	0.238	0.214	0.254	0.203
71°, 72°	0.238	0.214	0.254	0.208
72°, 73°	0.238	0.217	0.257	0.213
73°, 74°	0.239	0.217	0.257	0.217
74°, 75°	0.238	0.219	0.257	0.222
75°, 76°	0.239	0.221	0.257	0.226
76°, 77°	0.239	0.223	0.261	0.230
77°, 78°	0.239	0.223	0.261	0.234
78°, 78° 30'	0.238	0.226	0.251	0.237
78° 30', 79°	0.238	0.226	0.251	0.239
79°, 79° 30'	0.238	0.225	0.250	0.241

Z	G	B	B'	K
79° 30', 80°	0.238	0.227	0.252	0.243
80°, 80° 30'	0.237	0.227	0.252	0.244
80° 30', 81°	0.237	0.227	0.252	0.245
81°, 81° 30'	0.236	0.227	0.251	0.246
81° 30', 82°	0.236	0.228	0.252	0.247
82°, 82° 30'	0.235	0.229	0.254	0.248
82° 30', 83°	0.235	0.228	0.253	0.249
83°, 83° 30'	0.234	0.229	0.254	0.249
83° 30', 84°	0.233	0.229	0.253	0.249
84°, 84° 30'	0.232	0.229	0.253	0.249
84° 30', 84° 40'	0.231	0.228	0.250	0.249
84° 40', 84° 50'	0.231	0.230	0.251	0.249
84° 50', 85° 0'	0.231	0.229	0.251	0.248
85° 0', 85° 10'	0.230	0.235	0.257	0.248
85° 10', 85° 20'	0.229	0.239	0.262	0.248
85° 20', 85° 30'	0.229	0.234	0.257	0.248
85° 30', 85° 40'	0.228	0.229	0.251	0.247
85° 40', 85° 50'	0.228	0.224	0.245	0.247
85° 50', 86° 0'	0.227	0.220	0.241	0.245
86° 0', 86° 10'	0.226	0.218	0.239	0.246
86° 10', 86° 20'	0.225	0.216	0.236	0.246
86° 20', 86° 30'	0.224	0.216	0.236	0.244
86° 30', 86° 40'	0.224	0.220	0.240	0.243
86° 40', 86° 50'	0.223	0.221	0.242	0.242
86° 50', 87° 0'	0.221	0.223	0.244	0.241
87° 0', 87° 10'	0.222	0.225	0.245	0.241
87° 10', 87° 20'	0.220	0.225	0.246	0.239
87° 20', 87° 30'	0.219	0.221	0.242	0.235
87° 30', 87° 40'	0.218	0.218	0.240	0.233
87° 40', 87° 50'	0.216	0.215	0.233	0.232
87° 50', 88° 0'	0.215	0.214	0.233	0.231
88° 0', 88° 10'	0.213	0.213	0.233	0.227
88° 10', 88° 20'	0.211	0.214	0.233	0.225
88° 20', 88° 30'	0.209	0.215	0.234	0.222
88° 30', 88° 40'	0.207	0.216	0.234	0.219
88° 40', 88° 50'	0.205	0.216	0.235	0.214
88° 50', 89° 0'	0.203	0.215	0.234	0.209
89° 0', 89° 10'	0.200	0.213	0.232	0.202
89° 10', 89° 20'	0.197	0.210	0.228	0.195
89° 20', 89° 30'	0.194	0.205	0.223	0.187
89° 30', 89° 40'	0.190	0.198	0.216	0.179
89° 40', 89° 50'	0.187	0.191	0.207	
89° 50', 90° 0'	0.183	0.182	0.198	

In deze tafel bevat de eerste kolom de topsafstanden; het verschil van de bij die topsafstanden behorende straalbuigingen is gebezigd ter berekening van k , die in de overige kolommen is gegeven. Voorloopig hebben we alleen te maken met de 3^{de} kolom, gemerkt B, welke de waarde van k bevat, berekend voor een waarde van $\alpha = 57''.7987^*) = 0.000280216$ uit de BESSEL'sche waarden voor de middelbare straalbuiging.

De gemiddelde waarde, die we zodoende voor k vinden, is ongeveer 0.225, een aanmerkelijk grooter waarde dan bij eenige waterpassing is gevonden.

Verder neemt voor zeer groote topsafstanden die waarde opmerkelijk snel af, hoewel zij toch nog grooter blijft dan de meest gebruikelijke waarden. Met het afnemen der waarde voor k voor topsafstanden kleiner dan 75° behoeft daarentegen geen rekening te worden gehouden; zeer kleine fouten in de straalbuiging of in de verandering daarin bij verandering van z hebben een zoo grooten invloed op de waarde van k , dat het onraadzaam is aan die afneming beschouwingen vast te knoopen.

Ten einde te onderzoeken welke waarde voor k moet worden aangenomen om de daarmee samenhangende straalbuigingen zoo weinig mogelijk van de waargenomene te laten afwijken, kunnen we de straalbuiging berekenen, uitgaande van de waarde 0.000280216 voor α en diverse waarden voor k , b.v. 0.23, 0.225, 0.22 en 0.137.

De integratie van de differentiaal-vergelijking (1) is alleen dan volkomen te volbrengen, wanneer de noemer gelijk aan de eenheid wordt genomen, hetgeen geoorloofd is, zoolang de topsafstanden niet zeer nabij 90° komen. Daardoor wordt:

$$dR + p R \cot z dz = k dz.$$

Gebruik makende van den integreerenden factor $e^{\int p \cot z dz}$, wordt als eerste resultaat gevonden

$$R \times \sin^p z = k \int \sin^p z dz \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{Nu is } \int \sin^p z dz = \frac{p-1}{p} \int \sin^{p-2} z dz - \frac{1}{p} \sin^{p-1} z \cos z$$

*) M. KOWALSKI. Recherches sur la réfraction astronomique. p. 84.

$$= \frac{(p-1)(p-3)}{p(p-2)} \int \sin^{p-4} z \, dz - \frac{p-1}{p(p-2)} \sin^{p-3} z \cos z - \frac{1}{p} \sin^{p-1} z \cos z$$

Op deze wijze voortgaande vinden we, indien we p , die een waarde van omstreeks 800 verkrijgt, afronden tot een even geheel getal:

$$\begin{aligned} \int \sin^p z \, dz &= \frac{(p-1)(p-3) \dots 5 \times 3}{p(p-2)(p-4) \dots 4 \times 2} \times z - \frac{(p-1)(p-3) \dots 5 \times 3}{p(p-2)(p-4) \dots 4 \times 2} \times \sin z \cos z \\ &- \frac{(p-1)(p-3) \dots 7 \times 5}{p(p-2)(p-4) \dots 6 \times 4} \times \sin^3 z \cos z \dots - \frac{(p-1)(p-3)}{p(p-2)(p-4)} \sin^{p-5} z \cos z \\ &- \frac{p-1}{p(p-2)} \sin^{p-3} z \cos z - \frac{1}{p} \sin^{p-1} z \cos z + C. \end{aligned}$$

De hier gevonden waarde invoerende in (3), daarbij den factor van z buiten haken brengende, wordt

$$\begin{aligned} R \times \sin^p z &= \frac{k}{p} \times \frac{(p-1)(p-3) \dots 5 \times 3}{(p-2)(p-4) \dots 4 \times 2} \times \left\{ z - \sin z \cos z - \frac{2}{3} \sin^3 z \cos z \right. \\ &- \frac{2 \times 4}{3 \times 5} \sin^5 z \cos z - \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7} \sin^7 z \cos z \dots - \frac{2 \times 4 \times 6 \dots (p-8)(p-6)}{3 \times 5 \times 7 \dots (p-7)(p-5)} \times \sin^{p-5} z \cos z \\ &- \left. \frac{2 \times 4 \times 6 \dots (p-6)(p-4)}{3 \times 5 \times 7 \dots (p-5)(p-3)} \sin^{p-3} z \cos z - \frac{2 \times 4 \times 6 \dots (p-4)(p-2)}{3 \times 5 \times 7 \dots (p-3)(p-1)} \sin^{p-1} z \cos z + C' \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

Voor $z = 0$ worden alle termen en dus ook C en $C' = 0$.

In deze vergelijking de waarde van z , uitgedrukt in den sinus invoerende, nl.:

$$z = \left\{ \sqrt{1 - \sin^2 z} \right\} \left\{ \sin z + \frac{2}{3} \sin^3 z + \frac{2 \times 4}{3 \times 5} \sin^5 z + \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7} \sin^7 z + \dots \right\},$$

vallen alle in vergelijking (4) tussehen accoladen geplaatste termen weg, en blijven de machten van $\sin z$ boven p bestaan, zoodat we krijgen:

$$\begin{aligned} R \times \sin^p z &= \frac{k}{p} \times \frac{(p-1)(p-3) \dots 5 \times 3}{(p-2)(p-4) \dots 4 \times 2} \left\{ \frac{2 \times 4 \dots (p-2)p}{3 \times 5 \dots (p-1)(p+1)} \sin^{p+1} z \cos z + \right. \\ &+ \left. \frac{2 \times 4 \dots p(p+2)}{3 \times 5 \dots (p+1)(p+3)} \sin^{p+3} z \cos z + \dots \right\}, \text{ waaruit} \\ R &= \frac{k}{p} \left\{ \frac{p}{p+1} \sin z \cos z + \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+3)} \sin^3 z \cos z + \frac{p(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)(p+5)} \sin^5 z \cos z \dots \right\} \end{aligned}$$

Doordat $\frac{k}{p} \times \frac{p}{p+1} = a$ mag genomen worden (zie verg. (2)),

kan R nog eenvoudiger worden uitgedrukt in:

$$R = a \sin z \cos z \left\{ 1 + \frac{p+2}{p+3} \sin^2 z + \frac{(p+2)(p+4)}{(p+3)(p+5)} \sin^4 z + \frac{(p+2)(p+4)(p+6)}{(p+3)(p+5)(p+7)} \sin^6 z + \dots \right\} \quad (5)$$

Voor de berekening van de straalbuiging bij niet zeer kleine topsafstanden is de reeks in vergelijking (5) niet sterk conver-

geerend. Voor topsafstanden kleiner dan 75° mogen we de reeks als een meetkundige beschouwen met $\frac{p+2}{p+3} \sin^2 z$ als rede, waardoor de formule wordt:

$$R = \frac{\alpha \sin z \cos z}{1 - \frac{p+2}{p+3} \sin^2 z} = \frac{\alpha \sin z \cos z}{\cos^2 z + \frac{1}{p+3} \sin^2 z} = \alpha \operatorname{tg} z \left\{ 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 z}{p+3 + \operatorname{tg}^2 z} \right\} \dots\dots (6)$$

Voor topsafstanden van 75° tot 82° kunnen we nog de correctie-term $\alpha \times \operatorname{tg}^5 z \times \frac{2(p+2)}{(p+3)^2(p+5)}$ toepassen, die gevonden wordt door (6) van (5) af te trekken. We krijgen dan:

$$R = \alpha \operatorname{tg} z \left\{ 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 z}{p+3 + \operatorname{tg}^2 z} + \frac{2(p+2) \operatorname{tg}^4 z}{(p+3)^2(p+5)} \right\}, \dots\dots (7)$$

welke formule aan die van LAMBERT *) herinnert, en die te gebruiken is voor topsafstanden van 0° tot 82° . Voor grootere topsafstanden mag de noemer van de differentiaal-vergelijking niet meer als constant worden beschouwd.

Doordat voor de berekening der straalbuigingen bij zeer groote topsafstanden geen der bovenstaande formules kunnen worden gebezigd, worden die het best berekend door met formule (6) of (7) de straalbuiging te berekenen voor een topsafstand, waarbij nog goede overeenstemming wordt verkregen met de tafels, hetgeen voor waarden van k van 0.22 tot 0.23 nog tot 75° het geval is. Daarna kan dan met behulp der differentiaal-vergelijking de straalbuiging voor grootere topsafstanden worden gevonden, welke wijze van werken met vertrouwen kan worden gevolgd, omdat er geen gevaar bestaat, dat daarbij door opeenhooping van vele kleine foutjes ten slotte een groote fout zou kunnen ontstaan. Heeft men bv. voor een zekeren topsafstand een te groote waarde voor de straalbuiging aangenomen, dan heeft de fout een zoodanigen invloed in de differentiaal-vergelijking, dat de verandering in de straalbuiging te klein en daardoor de straalbuiging bij den grooteren topsafstand minder te groot of zelfs iets te klein wordt gevonden.

*) Les propriétés remarquables de la route de la lumière. 's-Gravenhage 1759.

Voor $\alpha = 0.000280216$ geeft formule (2):

$$\begin{aligned} \text{voor } k &= 0.23 & p &= 819.796 \\ " & k = 0.225 & p &= 801.952 \\ " & k = 0.22 & p &= 784.109 \\ " & k = 0.137 & p &= 487.909 \end{aligned}$$

Met deze waarden voor p geeft nu formule (6) bij een tops-afstand van 75° :

$$\begin{aligned} \text{voor } k &= 0.23 & R &= 212."12 \\ " & k = 0.225 & R &= 212.04 \\ " & k = 0.22 & R &= 211.96 \\ " & k = 0.137 & R &= 209.29 \end{aligned}$$

en volgens BESSEL $R = 212.1$

Met deze gegevens is de onderstaande tafel berekend.

Z	STRAALBUIGING				
	als $k = 0.23$	als $k = 0.225$	als $k = 0.22$	als $k = 0.137$	volgens BESSEL.
75° 0'	212.12	212.04	211.96	209.73	212.1
10'	214.60	214.52	214.44	212.18	
20'	217.14	217.07	216.99	214.69	
30'	219.65	219.57	219.49	217.17	
40'	222.24	222.16	222.07	219.69	
50'	224.84	224.77	224.67	222.25	
76° 0'	227.54	227.45	227.36	224.86	227.4
10'	230.28	230.19	230.10	227.52	
20'	233.10	233.00	232.91	230.24	
30'	235.97	235.87	235.77	233.02	
40'	238.92	238.81	238.71	235.86	
50'	241.93	241.82	241.71	238.77	
77° 0'	245.01	244.90	244.78	241.74	244.9
10'	248.17	248.05	247.93	244.78	
20'	251.40	251.28	251.16	247.89	
30'	254.71	254.59	254.46	251.07	
40'	258.16	258.03	257.90	254.32	
50'	261.60	261.46	261.32	257.66	
78° 0'	265.17	265.03	264.89	261.07	265.0
10'	268.82	268.68	268.53	264.57	268.7
20'	272.57	272.43	272.27	268.16	272.4
30'	276.43	276.28	276.12	271.84	276.3
40'	280.38	280.23	280.06	275.61	280.2
50'	284.45	284.29	284.11	279.48	284.3
79° 0'	288.63	288.46	288.27	283.46	288.5
10'	292.92	292.73	292.55	287.54	292.8
20'	297.34	297.16	296.95	291.73	297.2
30'	301.88	301.69	301.48	296.03	301.7
40'	306.56	306.36	306.13	300.45	306.4
50'	311.37	311.16	310.93	305.00	311.2

Z	STRAALBUIGING				
	als k = 0.23	als k = 0.225	als k = 0.22	als k = 0.137	volgens BESSEL.
80° 0'	316.33	316.10	315.86	309.67	316.2
10'	321.44	321.20	320.95	314.45	321.3
20'	326.70	326.45	326.19	319.39	326.5
30'	332.13	331.87	331.59	324.50	332.0
40'	337.73	337.46	337.17	329.75	337.6
50'	343.51	343.23	342.92	335.17	343.3
81° 0'	349.48	349.18	348.86	340.74	349.3
10'	355.65	355.33	354.99	346.49	355.4
20'	362.02	361.68	361.33	352.42	361.8
30'	368.61	368.26	367.89	358.54	368.4
40'	375.43	375.06	374.67	364.85	375.2
50'	382.49	382.11	381.70	371.38	382.3
82° 0'	389.81	389.40	388.97	378.12	389.6
10'	397.39	396.96	396.51	385.09	397.2
20'	405.26	404.80	404.33	392.30	405.1
30'	413.43	412.94	412.45	399.77	413.3
40'	421.91	421.39	420.87	407.50	421.7
50'	430.72	430.17	429.62	415.51	430.5
83° 0'	439.88	439.30	438.72	423.82	439.7
10'	449.42	448.80	448.18	432.44	449.2
20'	459.35	458.70	458.03	441.39	459.2
30'	469.70	469.01	468.30	450.68	469.5
40'	480.49	479.76	479.01	460.34	480.3
50'	491.76	490.98	490.18	470.38	491.6
84° 0'	503.53	502.68	501.85	480.83	503.3
10'	515.84	514.93	514.04	491.71	515.6
20'	528.72	527.75	526.80	503.05	528.4
30'	542.21	541.18	540.16	514.87	541.9
40'	556.35	555.25	554.16	527.21	556.0
50'	571.20	570.02	568.85	540.10	570.9
85° 0'	586.80	585.53	584.28	553.57	586.5
10'	603.20	601.85	600.50	567.66	603.3
20'	620.47	619.02	617.57	582.41	621.2
30'	638.68	637.12	635.55	597.87	639.6
40'	657.90	656.21	654.52	614.08	658.6
50'	678.21	676.39	674.56	631.10	678.3
86° 0'	699.70	697.73	695.75	648.98	698.9
10'	722.47	720.34	718.19	667.79	720.7
20'	746.63	744.32	741.99	687.60	743.7
30'	772.30	769.79	767.26	708.48	768.3
40'	799.63	796.89	794.14	730.51	795.0
50'	828.76	825.78	822.77	753.78	823.7

Z.	STRAALBUIGING				
	als k = 0.23	als k = 0.225	als k = 0.22	als k = 0.137	volgens BESSEL.
87° 0'	859.88	856.62	853.32	778.44	854.6
10'	893.17	889.60	885.98	804.51	887.8
20'	928.87	924.95	920.97	832.16	923.4
30'	967.22	962.90	958.52	861.52	960.9
40'	1008.51	1003.74	998.90	892.74	1000.7
50'	1053.06	1047.78	1042.42	925.99	1043.0
88° 0'	1101.26	1095.40	1089.44	961.46	1088.6
10'	1153.53	1147.01	1140.38	999.37	1138.0
20'	1210.39	1203.11	1195.70	1039.94	1191.9
30'	1272.43	1264.27	1255.97	1083.45	1250.9
40'	1340.35	1331.17	1321.83	1130.20	1315.6
50'	1414.98	1404.61	1394.06	1180.53	1386.7
89° 0'	1497.31	1485.54	1473.58	1234.84	1464.6
10'	1588.54	1575.11	1561.44	1293.59	1549.8
20'	1690.13	1674.73	1659.08	1357.29	1642.7
30'	1803.90	1786.12	1768.09	1426.56	1743.5
40'	1932.13	1911.46	1890.54	1502.10	1852.3
50'	2077.74	2053.50	2029.04	1584.76	1969.2
90° 0'	2244.54	2215.84	2186.97	1675.52	2094.1

Uit bovenstaande tafel blijkt, dat het mogelijk is door niet buitensporige correctiën aan de tafel van BESSEL aan te brengen de ongerijmdheid in het in den aanhef genoemde en alle andere overeenkomstige voorbeelden te doen verdwijnen. Eerst voor topsafstanden boven 88° 30' toch worden de verschillen van eenige beteekenis, terwijl voor die topsafstanden, waar ze eenigszins beduidend worden, aan BESSEL slechts enkele waarnemingen ten dienste stonden.

Hoe aantrekkelijk het evenwel ook moge zijn, op die wijze alle oorzaken tot ongerijmdheid weg te nemen, zoo moeten we toch daarvan afzien, omdat het te zeer in strijd met rechtstreeksehe waarnemingen zoude zijn, voor k een waarde van 0.23 à 0.22 aan te nemen. Wel is waar kunnen we k nog wel kleiner nemen zonder nog tot de aanneming van groote correctiën in de tafel voor de middelbare straalbuiging genoodzaakt te zijn, maar de straalbuigingen voor topsafstanden tusschen 75° en 85°, die zich nog op groote nauwkeurigheid en overeenstemming kunnen beroemen, geven zonder uitzondering de waarde van k tusschen

0.23 en 0.22, zoodat we daarvan zonder gegronde redenen niet mogen afstappen.

Uit het vorenstaande volgt dus, dat het niet mogelijk is tot overeenstemming te komen door het aanbrengen van kleine correctiën in straalbuigingstafels en — coëfficiënten, zoodat we genoodzaakt zijn aan te nemen, dat de straalbuiging ook onder geheel normale omstandigheden afhankelijk is, niet alleen van den topsafstand der ster en de dichtheid der lucht, maar evenzeer van de plaats van den waarnemer, en wel in het bijzonder van de hoogte boven zee of boven het omringende terrein.

Zoolang niet opzettelijke waarnemingen zijn gedaan, blijft het bezwaarlijk den invloed van de hoogte van het oog met juistheid na te gaan; voorloopig weten we alleen met zekerheid, dat die invloed bestaat, zoodat de hiervoren aangenomen stelling, dat bij stijging de straalbuiging evenredig aan de dichtheid afneemt, moet worden prijsgegeven.

In de volgende regelen zal een poging gewaagd worden om door aanneming van een afwijkende gesteldheid der onderste luchtlagen ten opzichte van de hooger gelegene, tot voldoende overeenstemming te geraken. Doordat de hoofdbedoeling is de richting aan te geven, waarin een oplossing *kan* worden gezocht, is het van ondergeschikt belang of de aangenomen getalwaarden de juiste zijn.

Waar een ieder met toeneming der hoogte een min of meer regelmatige afneming der waarde van k zou verwachten, kan het niet anders dan verwondering wekken, dat bij de waterpassing van Java geen afneming is kunnen worden opgemerkt zoolang de hoogten 1700 M niet overtreffen, terwijl een betrekkelijk sterke afneming boven die grens is opgemerkt *) Een zoodanige afhankelijkheid van de hoogte boven zee is alleen te verklaren uit een betrekkelijk langzame afneming der dichtheid in de onderste, en een betrekkelijk

*) Uit 115 bepalingen werd voor k een waarde van 0.1374 afgeleid; voor elke 100 M boven de 1700 scheen die waarde met een bedrag van 0.0012 of nagenoeg met 1 pCt. van die waarde af te nemen. Zie: „Notiz über die Triangulation von Java von J. A. C. OUDEMANS“, Auszug aus den Verhandlungen der Conferenz der internationalen Erdmessung in Florenz 1891 bladz. 13.

snelle afneming in de bovenste lagen van een 1700 M hooge luchtkolom, terwijl mogelijk in de hooger gelegen lagen een meer regelmatige afneming plaats heeft. In overeenstemming daarmede moet op hoogten van omstreeks 1700 M de temperatuurafneming gering zijn in vergelijking met de lager gelegen luchtlagen. Nu heeft een betrekkelijk snelle afneming van temperatuur plaats bij stijgende of dalende luchtstromingen beneden de hoogte waarop de wolkenvorming of -oplossing plaats heeft, en daar de wolkenvorming gewoonlijk op 1400 à 1500 M begint, moet van 0 tot 1500 M een betrekkelijk snelle, daarboven een minder snelle afneming plaats hebben. In overeenstemming daarmede mag men op hoogten van 1500 à 1700 M een betrekkelijk groote waarde van k verwachten ten opzichte van de lager gelegen luchtlagen.

Bij sterk stijgende en dalende luchtstromingen zal, zoolang geen wolkenvorming of -opsorping plaats heeft, de temperatuur voor omstreeks elke honderd meter 1°C dalen, dus is

$$dt = -\frac{dh}{100}$$

Stelt b den barometerstand (uitgedrukt in 751.84 m.M. als eenheid) voor, dan is

$$\begin{aligned} db &= -\frac{0.76 \times \text{soortelijk gewicht van kwik}}{\text{soortelijk gewicht van lucht bij } 0^\circ \text{C en } 0.76 \text{ M. bar.}} \times \frac{273}{273+t} \times b \times dh \\ &= -0.0001251566 \times \frac{273}{273+t} \times b \times dh = -\frac{0.03416774}{273+t} \times b \times dh \quad (8) \end{aligned}$$

Stelt verder ρ de dichtheid (uitgedrukt in die bij 751.84 m.M. en $9^\circ.3 \text{C}$ als eenheid) voor, dan is

$$\begin{aligned} d\rho &= db - \frac{b \times dt}{273+t} \\ &= -0.0001251566 \times \frac{273}{273+t} \times b \times dh + \frac{b \times dh}{100(273+t)} \\ &= \frac{b \times dh}{273+t} \times (-0.03416774 + 0.01) = -\frac{0.0241677 \times b}{273+t} \times dh \quad (9) \end{aligned}$$

Indien een lichtstraal gebroken wordt op de grens van twee luchtlagen, waarvan de onderste een dichtheid ρ , de bovenste eene ρ' heeft, dan is

$$\sin z' : \sin z = 1 + c\rho : 1 + c\rho', \text{ waarin } c \text{ een constante.}$$

$$\text{Hieruit } \sin z' - \sin z : \sin z' = c(\rho - \rho') : 1 + c\rho$$

$$2 \sin \frac{1}{2}(z' - z) \cos \frac{1}{2}(z' + z) : \sin z' = c(\rho - \rho') : 1 + c\rho.$$

Voor $z' = z + dz$ en $\rho' = \rho - d\rho$, gaat de vergelijking over in:

$$z' - z = dz = \frac{c \times d\varphi}{1 + c\varphi} \times \operatorname{tg} z$$

Voor 751.84 m.M. barometer- en 9.°3 C thermometerstand is $\varphi = 1$ en $c = a = 0.000280216$, waardoor

$$dz = dR = \frac{a \operatorname{tg} z}{1 + a} \times d\varphi$$

Evenzoo is:

$$dR = k \times d\varphi = -\frac{k}{r} \times \operatorname{tg} z \times dh,$$

waardoor

$$\frac{a \operatorname{tg} z}{1 + a} \times d\varphi = -\frac{k}{r} \times \operatorname{tg} z \times dh,$$

waaruit

$$d\varphi = -\frac{k(1+a)}{a} \times \frac{dh}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Uit (9) en (10) volgt nu:

$$\frac{k(1+a)}{a} \times \frac{dh}{r} = \frac{0.02416774 \times b}{273 + t} \times dh,$$

waaruit eindelijk:

$$k = \frac{0.02416774 \times a \times r \times b}{(1+a) \times (273+t)} = \frac{0.02416774 \times 0.000280216 \times 6377390}{1.000280216} \times \frac{b}{273+t} \\ = \frac{43.1767}{273+t} \times b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Bij constante temperatuur wordt:

$$d\varphi = db = -\frac{0.03416774}{273+t} \times b \times dh,$$

in welk geval we door verbinding met (10) vinden:

$$k = \frac{0.03416774 \times 0.000280216 \times 6377390}{1.000280216} \times \frac{b}{273+t} = \frac{61.0421}{273+t} \times b \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

De door de formules (11) en (12) gegeven waarden voor k kunnen we onder normale omstandigheden gevoegelijk als de grenswaarden van k aannemen. Voor een grootere waarde dan (12) geeft, is het noodig, dat met toeneming van de hoogte ook de temperatuur toeneemt, wat alleen onder bijzondere omstandigheden het geval zal zijn. Aan den anderen kant is het om tot een kleinere waarde te geraken dan (11) geeft, noodig een zoo

snelle daling der temperatuur bij toenemende hoogte aan te nemen, dat daardoor een labiele evenwichtstoestand in den dampkring geboren wordt, hetgeen eveneens tot de abnormale toestanden moet worden gerekend, al moge die toestand ook minder zeldzaam zijn.

Voor $b = 1$ (751.84 m.M.) en $t = 9^{\circ}.3$ C worden de grenswaarden 0.2163 en 0.1529. Voor $b = 0.8$ en $t = 0$ (omstreeks 1800 M. hoogte) worden ze 0.1789 en 0.1265.

De uit gelijktijdige wederkeerige waarnemingen afgeleide waarden voor k zijn, althans wat de lagere luchtlagen betreft, aanmerkelijk kleiner dan die door formule (11) worden gegeven, zoodat er bij dag over het algemeen een labiele toestand schijnt te heerschen. Doordat de astronomische straalbuiging als regel uit nachtelijke waarnemingen wordt afgeleid, en uit van uur tot uur gedane wederkeerige waarnemingen een sterke afneming van k in de eerste uren van den dag is gebleken, is er reden voor onze beschouwingen een grootere waarde aan te nemen.

Nemen we voorloopig een constante waarde voor k aan voor hoogten van 0 tot 1700 M., dan kunnen we voor verschillende topsafstanden den lichtstraal in zijn benedenloop volgen, waarbij zoowel de topsafstanden als de waarden der astronomische straalbuiging kleiner worden, de laatste met een bedrag gelijk aan de aardse straalbuiging $= k \times \varphi$, de eerste met een bedrag $(1 - k) \times \varphi$. Zoodoende kunnen we uit BESSEL's tafel voor de middelbare straalbuiging een dergelijke tafel voor een hoogte van 1700 M. afleiden, terwijl formule (10) ons daarbij in staat stelt de verandering in dichtheid der lucht, en daarmee de nieuwe constante voor die straalbuiging $= \alpha'$ te berekenen. Met de vroeger gevonden formule

$$k = \frac{A - (1 + A) \times \frac{R \cot z}{1 + \alpha}}{(1 + A) \times \left(1 - \frac{R \cot z}{\alpha}\right)}$$

kunnen we dan opnieuw de waarde van k berekenen, als we daarin α door α' vervangen, en A en R aan de afgeleide straalbuigingstafel ontleenen. Om deze berekende k te laten overeenstemmen met de te voren willekeurig aangenomene, moeten we

voor niet zeer groote topsafstanden voor k een waarde aannemen van 0.186. In omgekeerden zin te werk gaande, kunnen we nu deze waarde voor k van 0 tot 1700 M. aannemen, en met behulp van de formules (10) en (2) de waarden van α' en p berekenen, om eindelijk met formule (6) of (7) en de differentiaal formule (1) een volledige tafel voor de middelbare straalbuiging op 1700 M. hoogte saam te stellen.

Op die wijze vinden we:

$$k = 0.186,$$

$$\alpha' = 0.0002306206 = 47''.5689,$$

$$p = 805.520,$$

terwijl onderstaande tafel de straalbuiging geeft.

Z graden.	MINUTEN.					
	0	10	20	30	40	50
80	260.19	264.38	268.70	273.16	277.76	282.50
81	287.40	292.47	297.70	303.11	308.71	314.51
82	320.51	326.74	333.19	339.89	346.85	354.08
83	361.60	369.42	377.56	386.04	394.89	404.13
84	413.77	423.86	434.41	445.45	457.03	469.18
85	481.94	495.35	509.48	524.36	540.06	556.65
86	574.19	592.77	612.47	633.40	655.66	679.37
87	704.68	731.74	760.72	791.83	825.28	861.32
88	900.27	942.44	988.22	1038.08	1092.54	1152.21
89	1217.83	1290.29	1370.65	1460.19	1560.51	1673.60
90	1802.02					

Verlengen we nu den lichtstraal voor verschillende topsafstanden, totdat deze het oppervlak der aarde snijdt, dan kunnen we zoödoende de middelbare straalbuiging aan de oppervlakte vinden. Voor eenige topsafstanden zijn de resultaten in de tweede kolom van onderstaande tafel gegeven, waarbij voor k een standvastige waarde van 0.186 is aangenomen.

Z					
80° 0'	316.2	316.2	316.2	310.2	310.1
82° 0'	389.7	389.6	389.7	382.3	382.2
84° 0'	503.3	503.3	503.3	493.8	493.7
86° 0'	699.0	698.9	699.0	686.0	685.6
87° 0'	858.4	854.6	858.3	842.6	841.9
88° 0'	1096.8	1088.6	1096.5	1077.4	1075.5
88° 30'	1263.8	1250.9	1263.2	1242.3	1239.0
89° 0'	1478.8	1464.6	1477.4	1455.5	1449.1
89° 10'	1564.0	1549.8	1561.9	1540.4	1532.0
89° 20'	1657.3	1642.7	1654.2	1633.5	1622.5
89° 30'	1759.3	1743.5	1754.4	1735.6	1720.8
89° 40'	1870.7	1852.3	1862.3	1847.6	1826.7
89° 50'	1992.2	1969.2	1978.1	1970.0	1940.2
90° 0'	2124.1	2094.1	2099.5	2103.4	2059.3

Ter vergelijking zijn in de derde kolom de BESSEL'sche waarden eveneens opgenomen. Voor topsafstanden kleiner dan 87° is de overeenstemming volkomen, terwijl voor grootere topsafstanden de verschillen onbeduidend mogen genoemd worden in vergelijking met de op bladz. 18 gegeven waarden.

De verschillen zouden nog kleiner gevonden zijn, wanneer we k tot op nog grootere hoogte constant hadden aangenomen, maar daartegenover zoude het nadeel hebben gestaan, dat dan de waarde van k te veel buiten de door de formules (11) en (12) gegeven grenswaarden valt.

Indien we k tot 1700 M niet geheel constant, maar op kleine hoogten kleiner aannemen dan op grootere hoogten, dan heeft dit ook merkbaren invloed op de straalbuiging, althans bij zeer groote topsafstanden, omdat een lichtstraal een langeren weg moet afleggen om van 0 tot op b.v. 100 meter hoogte te komen dan van 100 tot 200 M.

Nemen we b.v. $k = 0.188$ van 1700 tot 200 M en $= 0.171$ beneden 200 M, waarbij de gemiddelde waarde 0.186 blijft, dan vinden we voor de straalbuiging de waarden, die in de vierde kolom van bovenstaande tafel zijn opgenomen. De verschillen met de voorgaande kolom zijn nu tot bescheidene waarden teruggebracht (maximum 13"), welk resultaat wij ook, mogelijk zelfs nog beter, met andere combinaties zouden hebben kunnen verkrijgen, b.v. k

= 0.189 boven, en 0.174 beneden 340 M, of wel $k = 0.190$ boven en 0.173 beneden 400 M.

Welke waarden we aan k op verschillende hoogten moeten toekennen, is niet uit te maken zoolang de waarden voor de middelbare straalbuiging ook bij zeer groote topsafstanden niet met meer zekerheid bekend zijn; één gevolgtrekking kunnen we daarentegen wel met vrij groote zekerheid maken, n.l. dat k voor de onderste luchtlagen een kleinere waarde moet hebben dan voor de hoogere (beneden 1700 M), vooral wanneer we bedenken, dat andere waarnemers bij zeer groote topsafstanden vrij belangrijk kleinere waarden dan de BESSEL'sche hebben gevonden.

De vijfde kolom van bovenstaande tafel bevat de waarde van de middelbare straalbuiging op 200 M hoogte, als overigens de physische toestand der lucht is zooals voor de vierde kolom is aangenomen, n.l. $k = 0.188$ van 1700 tot 200 M en $= 0.171$ beneden 200 M, terwijl aan de oppervlakte thermometer- en barometerstanden overeenkomen met de BESSEL'sche normaalwaarden.

Berekenen we eindelijk nog met behulp van formule (10) de dichtheid op 200 M hoogte voor $k = 0.171$, dan vinden we $q' = 0.980857$, $\alpha' = 0.000274852$. Ware de verhouding van de straalbuiging op 200 M hoogte tot die op 0 M gelijk aan de verhouding der dichtheden, dan zoude de straalbuiging zijn, zooals in de laatste kolom van de laatste tafel is aangegeven. De verschillen der laatste en voorlaatste kolommen zijn voor topsafstanden boven 89° merkbaar, en nabij 90° zijn ze groot genoeg om de verwachting te wettigen, dat het bestaan er van aan waarnemingen kan worden getoetst. Ongelukkig zijn de plaatsen, waar nauwkeurige straalbuigingswaarnemingen zijn verricht (Greenwich, Koningsbergen, Pulkowa, Kasan), zoodanig gelegen, dat bij zeer groote topsafstanden de lichtstraal over een groote uitgestrektheid dicht langs de oppervlakte der aarde loopt. Om den invloed van de hoogte boven de oppervlakte uit waarnemingen af te kunnen leiden, zoude het daarom zeer gewenscht zijn, dat wij konden beschikken over waarnemingen op plaatsen aanmerkelijk hooger gelegen dan het omliggende terrein b.v. op den Eiffeltoren, indien deze niet te veel trilt, of wel op een steile berghelling, in welk geval de lichtstraal slechts over een geringen afstand nabij de oppervlakte is gelegen.

Uit het voorgaande volgt dus, dat, om ongerijmdheden in voorbeelden als het in den aanhef genoemde te voorkomen, wij genoodzaakt zijn:

1°. In de BESSEL'sche tafel voor de middelbare straalbuiging veranderingen aan te brengen, waardoor we waarden als in de vierde kolom op bladz. 24 krijgen.

2° Den coëfficiënt der aardsche straalbuiging grooter en wel ongeveer $= 0.171$ tot hoogten van 200 en $= 0.188$ op hoogten van 200—1700 M. te nemen.

3° Bij toeneming van de hoogte van het oog de straalbuiging niet te laten afnemen evenredig aan de dichtheid der lucht, doch bij zeer groote topsafstanden in merkbaar minder snelle mate, zoodat zelfs toeneming mogelijk is (zie de voorlaatste kolom bij een topsafstand van 90°).

1° De verschillen van de straalbuiging volgens genoemde vierde kolom met de BESSEL'sche waarden zijn zoo klein, dat die tot geen hoofdbreken aanleiding behoeven te geven. De waarden uit die vierde kolom worden hier ook geenszins onfeilbaar genoemd; andere waarden voor k zouden die kolom met eenigszins andere waarden gevuld hebben.

2° Voor k een waarde aan te nemen aanmerkelijk grooter dan 0.137 wordt minder bezwaarlijk als men bedenkt, dat de BESSEL'sche waarden voor de middelbare straalbuiging nagenoeg zonder uitzondering zijn afgeleid uit waarnemingen op tijdstippen waarop door alle waarnemers een veel grootere waarde voor k wordt aangenomen dan op tijdstippen, waarop men gewoon is waterpas-waarnemingen te doen.

Dat bij stijging in het eerst toeneming in plaats van afneming van de waarde van k plaats heeft, blijkt ook eenigszins uit het volgende. Over het algemeen zijn kleine waarden voor k gevonden bij de nivelleeringen in Oost-Pruisen *), waar zoowel wegens het weinig golvende van het terrein als door de lage opstelling der instrumenten de lichtstraal over het grootste deel zeer nabij de

*) Nivellements- und Höhenbestimmungen der Punkte erster und zweiter Ordnung ausgeführt von dem Bureau der Landes-Triangulation. Erster Band. Berlin 1870, bladz. 133.

Gradmessung in Ost-Preussen bladz. 63.

oppervlakte moest vallen. Daarentegen wordt in Nederland, waar door de hooge opstelling der instrumenten in weerwil van het zeer vlakke terrein de lichtstraal reeds meer van de oppervlakte verwijderd blijft, voor k een gemiddelde waarde gevonden, die reeds aanmerkelijk grooter is dan de genoemde Pruisische.

Zelfs von BAUERNFEIND schijnt geneigd te zijn op geringe hoogten een kleine waarde voor k aan te nemen. *)

Tegen aanneming van de bovengenoemde waarden van 0.171 en 0.188 voor k behoeft dus ook geen overwegend bezwaar te bestaan, al spreekt het van zelf, dat nauwkeurige waarnemingen op dit gebied wijzigingen in die waarden noodzakelijk zullen maken.

3° Tegen de laatste wijziging, nl. aanneming van betrekkelijk grootere waarden voor de straalbuiging bij toeneming der hoogte van het oog, zal na al het vorenstaande ook wel geen bezwaar meer bestaan.

De ongerijmdheid in voorbeelden als het in den aanhef genoemde kunnen we dus hiermede als opgelost beschouwen.

De grondslag van de hierboven aangegeven denkbeelden wordt gevormd door het feit, dat de uit waarnemingen afgeleide waarden der straalbuiging voor topsafstanden van 65° tot 85° ons noodzaakten voor k een waarde van 0.22 à 0.23 aan te nemen. Deze grondslag zoude vervallen zijn, indien we voor de middelbare straalbuiging zoodanige gewijzigde waarden hadden aangenomen, dat de daaruit afgeleide waarden van k een gelijkmatige kleinere waarde zouden zijn nabij gekomen. Wel is waar is het mogelijk zoodanige waarden voor de straalbuiging aan te nemen zonder nog buitensporig van de BESSEL'sche waarden af te wijken, maar die afwijkingen zouden niet tot de allergrootste topsafstanden beperkt blijven; ook voor topsafstanden van 75° tot 85° , waarbij de nauwkeurigheid der waarnemingen weinig te wenschen overlaat, zouden we fouten moeten aannemen, die de waarnemingsfouten overtreffen.

Ten overvloede zijn nog uit de waarnemingen van anderen de

*) Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraction. Zweite Mittheilung 1883 bladz. 42.

waarden voor k berekend, welke eveneens in de tafel op bladz. 11 zijn opgenomen. De kolom G bevat de waarden voor k berekend uit de straalbuigingstafel van GYLDÉN *), de kolom K bevat de waarden afgeleid uit de tafel van KOWALSKY †). Ten einde de laatste, die afgeleid zijn uit een tafel voor 0° C en 760 m.M barometerhoogte, te kunnen vergelijken, zijn in de kolom B' de overeenkomstige waarden opgenomen afgeleid uit de BESSEL'sche waarden der straalbuiging voor die barometer- en thermometerstanden.

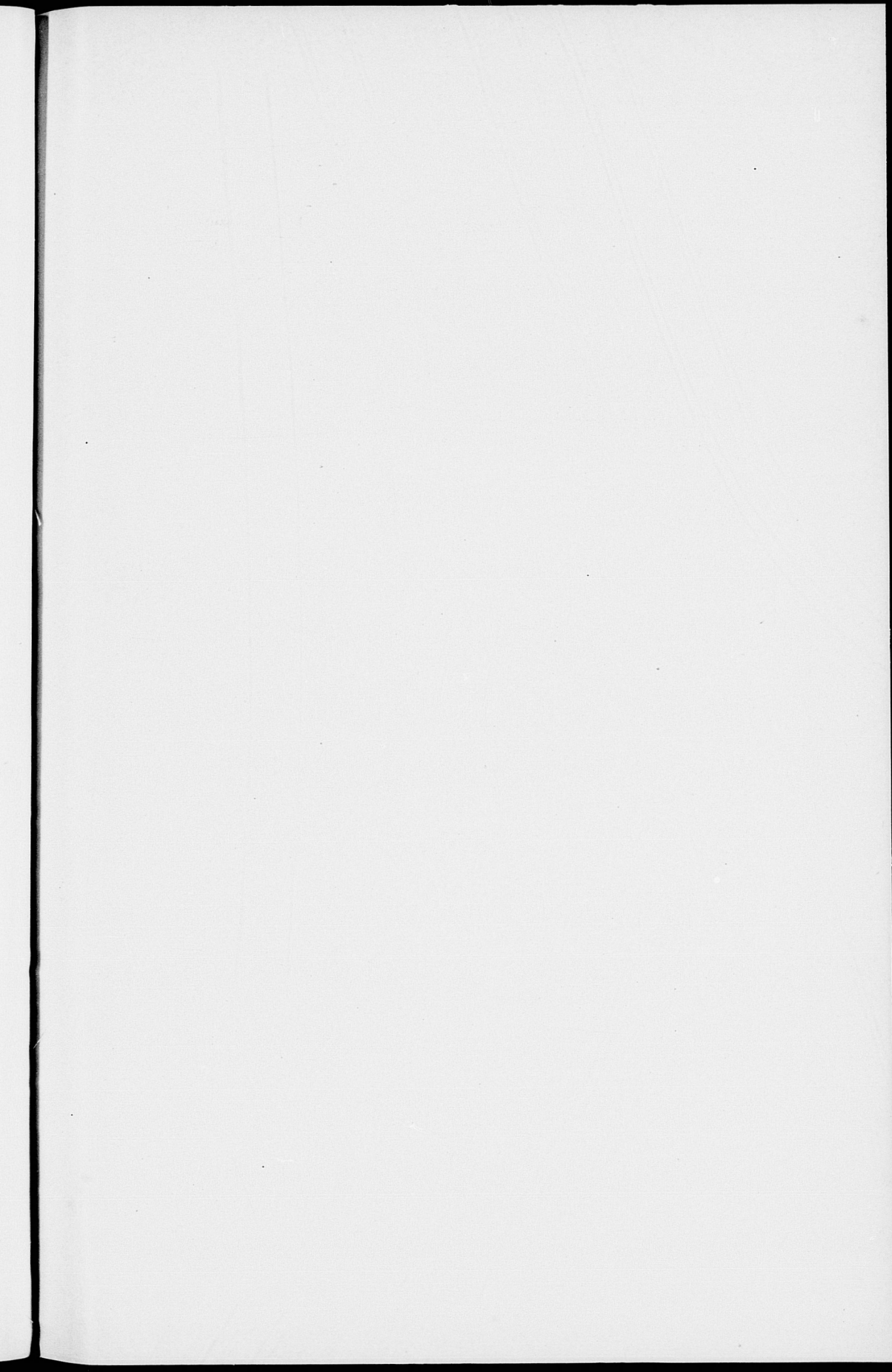
Uit alle kolommen zouden we dezelfde gevolgtrekkingen kunnen maken, als we hiervoor uit kolom B hebben gedaan, waardoor de gevolgde gedachtengang meer gerechtvaardigd wordt.

Opvallend is de zeer sterke afneming bij zeer groote topsafstanden in kolom K, zoodat, als we de straalbuigingstafel van KOWALSKY als uitgangspunt hadden gekozen, wij het verschil der waarde voor k op kleine en op grootere hoogte veel grooter hadden moeten aannemen dan hierboven is noodig gebleken. Dit is in overeenstemming met den vorm van de oppervlakte der aarde bij het observatorium te Kasan §), waardoor bij zeer groote topsafstanden de lichtstraal over een zeer grooten afstand dicht langs dat oppervlak loopt.

*) H. GYLDÉN. Untersuchung über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Erste Abtheilung 1866 bladz. 81.

†) M. KOWALSKY. Recherches sur la réfraction astronomique 1878 p. 165.

§) id. p. 131.



Door W. P. VAN STOCKUM EN ZOON te 's Gravenhage
is mede uitgegeven:

<i>Jhr. L. M. A. VON SCHMID.</i>	De permanente inrichting van de stelling van Amsterdam . . .	f 0.70
— —	Antwoord aan de kritiek op: De permanente inrichting der stelling van Amsterdam . . .	- 0.55
— —	„Een betrouwbaar Rechter“? — Nogmaals de stelling van Amsterdam	- 0.40
— —	Wachtforten voor de stelling van Amsterdam	- 0.50