



BEGINSELEN

DER

MECHANICA,

ALS INLEIDING TOT DE BEOEFENING DER
NATUURKUNDE.

DOOR

Dr. F. H. JULIUS,

Leeraar aan de Ryks Hoogere Burgerschool te Zwolle.

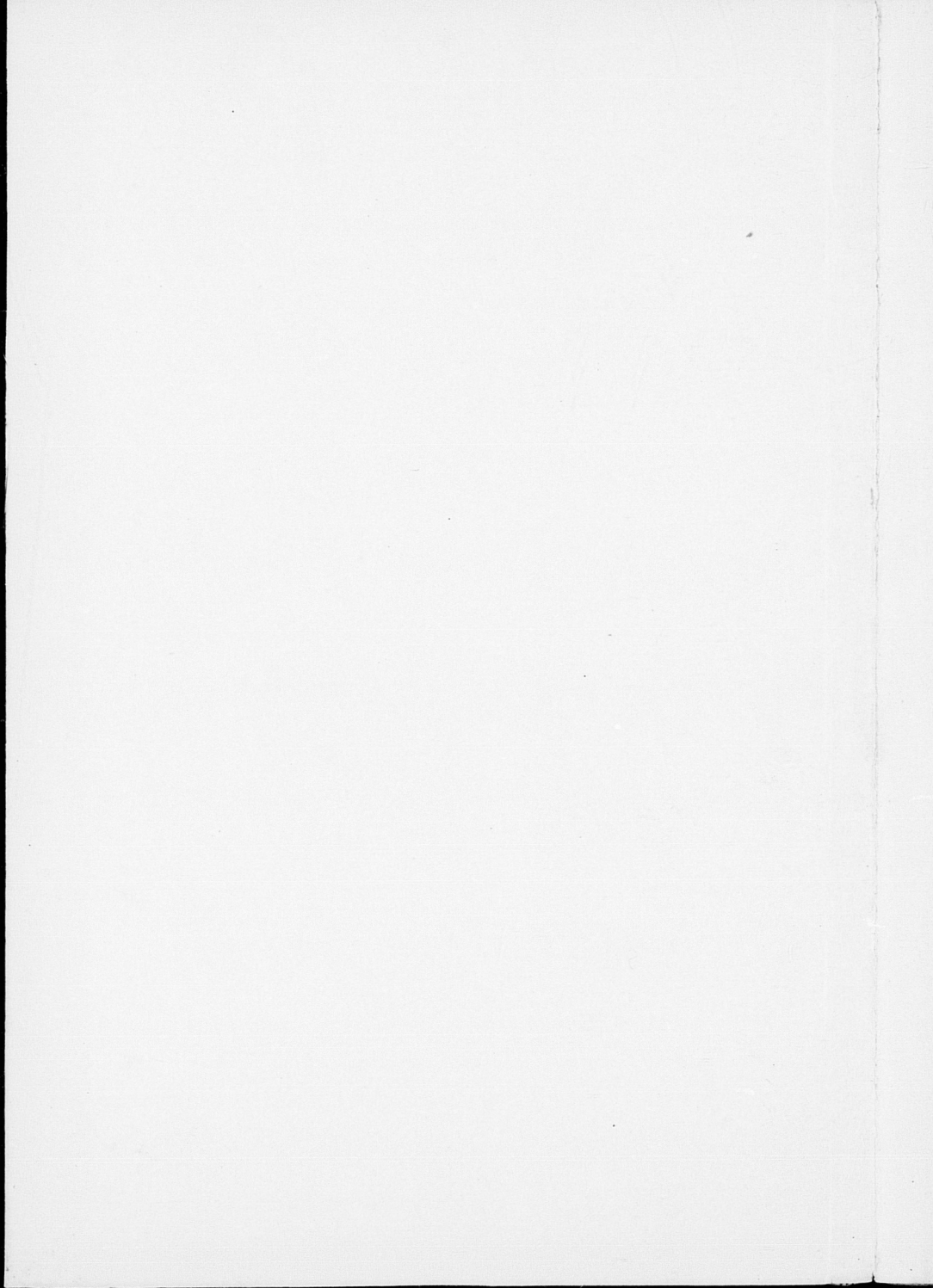
MET 63 FIGUREN.

ZWOLLE,

W. E. J. TJEENK WILLINK.



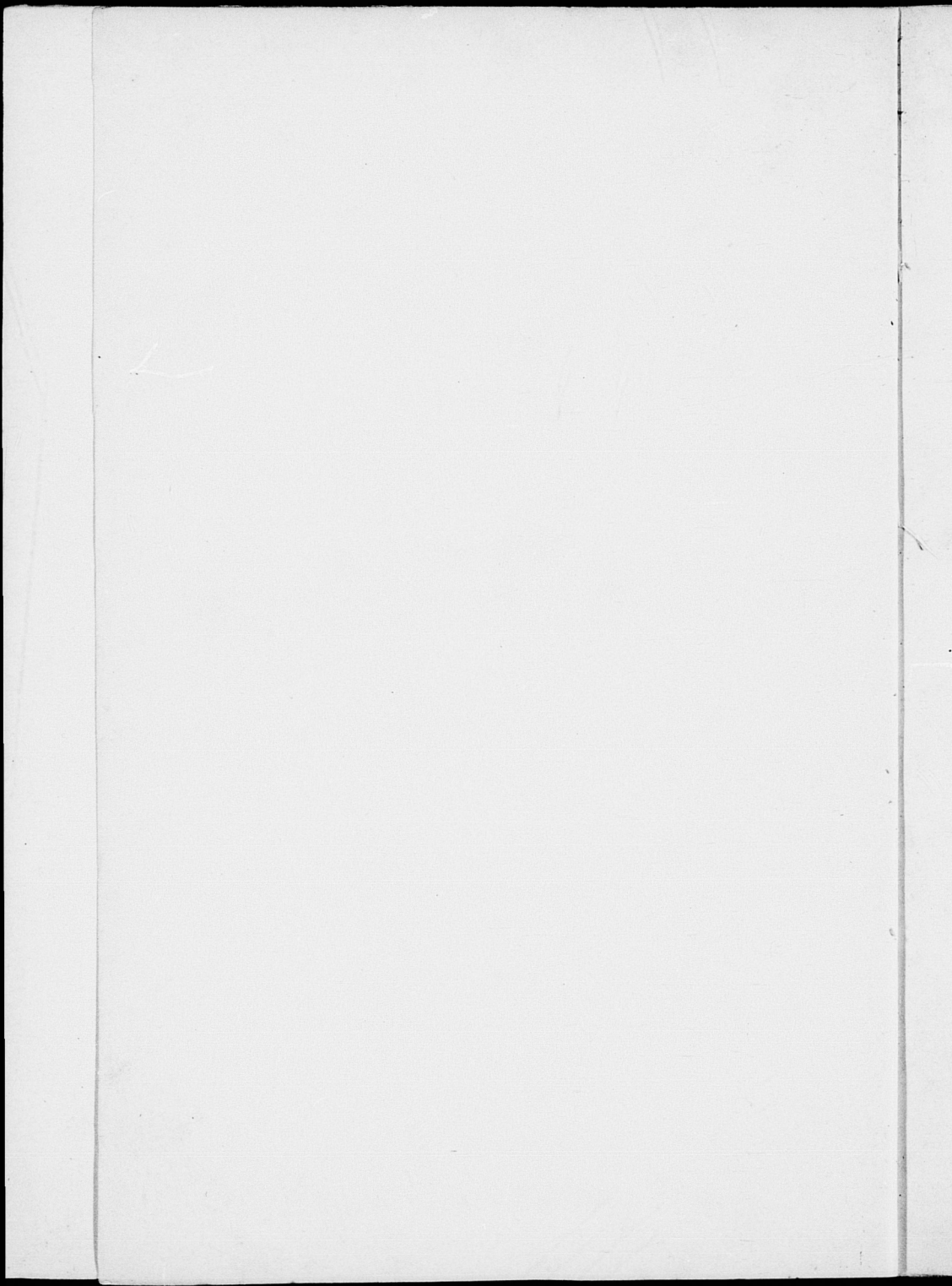
Prijs f 1.25.



XV B 145-

a. a

2A20



A. A. Nyland.
No. 495

BEGINSELEN DER MECHANICA.

gle

g.c.

BEGINSELEN

A. A. Nijland

DER

MECHANICA,

ALS INLEIDING TOT DE BEOEFENING DER
NATUURKUNDE.

DOOR

DR. F. H. JULIUS,

Leeraar aan de Rijks Hoogere Burgerschool te Zwolle.

MET 63 FIGUREN.

ZWOLLE,

W. E. J. TJEENK WILLINK.

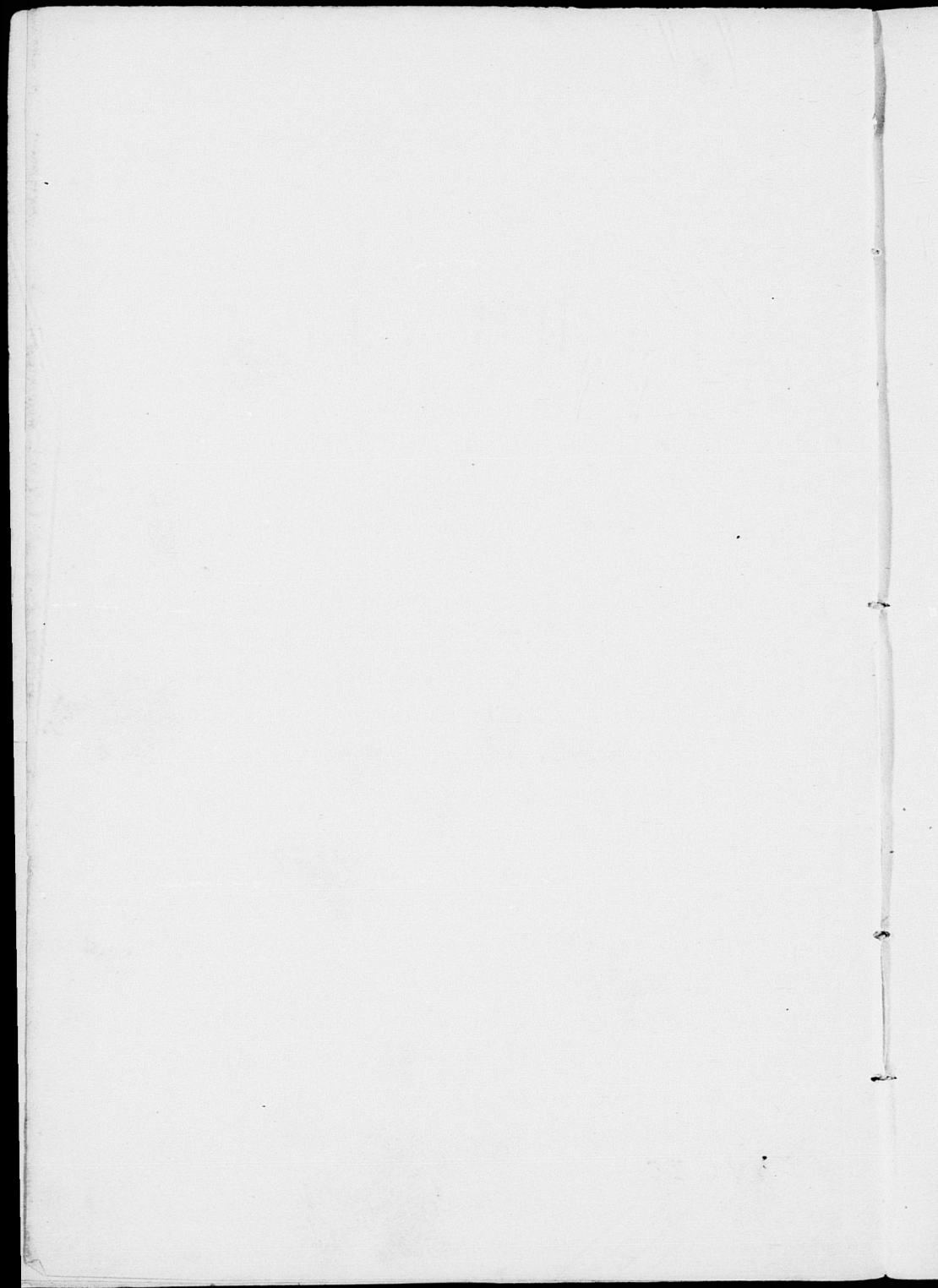
1889.

32
XVC 

RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT



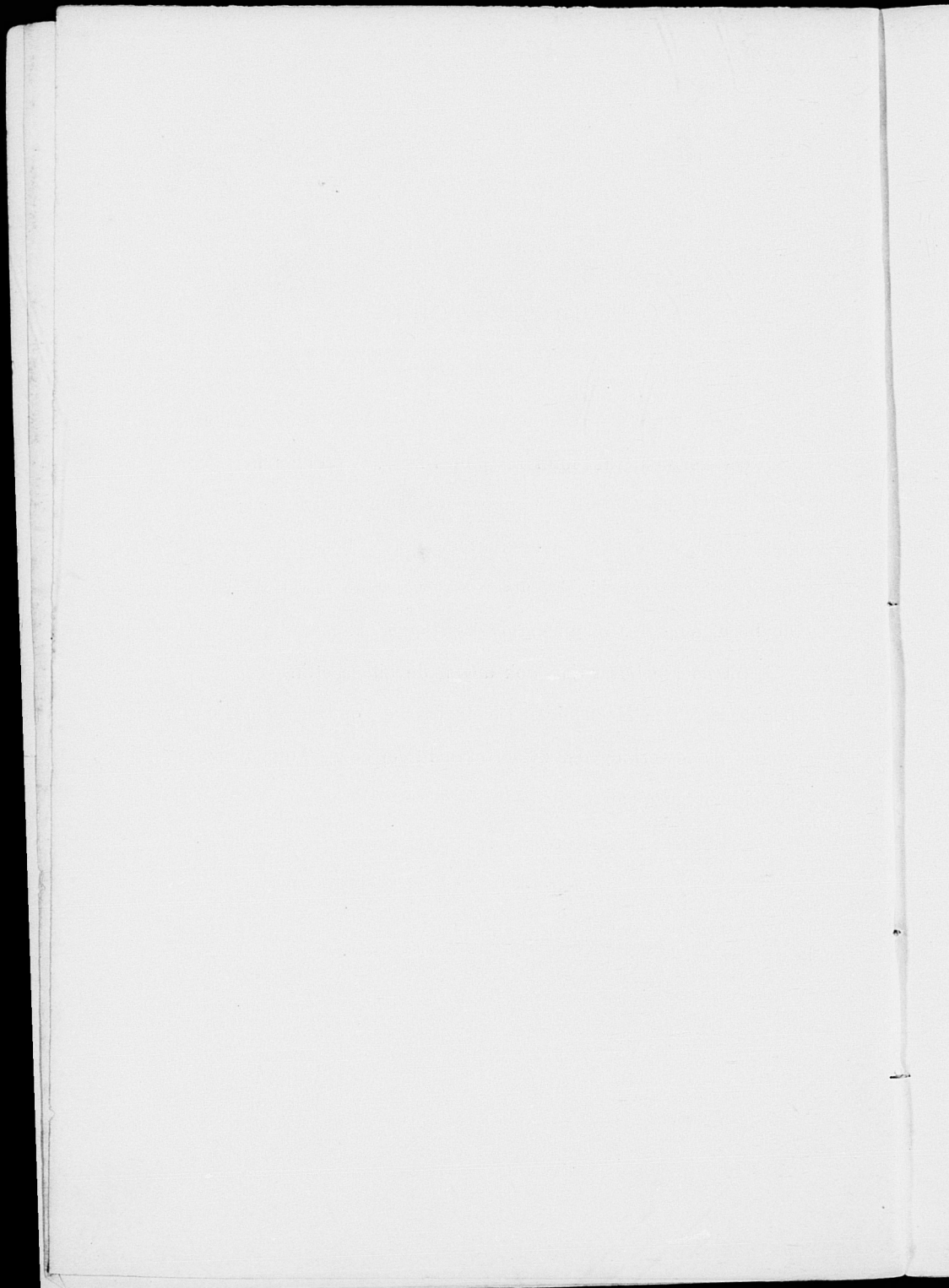
1980 7175



VOORBERICHT.

Op verzoek van mijn broeder DR. V. A. JULIUS heb ik uit mijn leerboek der Mechanica eenige hoofdstukken over het stoffelijk punt en over absoluut vaste lichamen omgewerkt tot een geheel, dat als een gewenschte inleiding voor de beoefening der natuurkunde beschouwd kan worden.

Dit boekje bevat dan ook alleen de uiteenzetting van de beginselen der Mechanica. De toepassing op de lichamen onder de inwerking der zwaartekracht, op de werktuigen enz. is achterwege gelaten.



INHOUD.

EERSTE AFDEELING. MECHANICA VAN HET STOFFELIJK PUNT.

Hoofdstuk I. Beweging. Snelheid. Versnelling.

	Bladz.
§ 1. Stoffelijk punt.....	1
§ 2. Rust. Beweging.....	1
§ 3. Eenparige beweging.....	2
§ 4. Veranderlijke beweging.....	4
§ 5. Eenparig versnelde beweging.....	7
§ 6. Eenparig vertraagde beweging.....	9

Hoofdstuk II. Ontbinden van bewegingen.

§ 7. Ontbinding van een rechtlijnige eenparige beweging.....	11
§ 8. Ontbinding van een rechtlijnige eenparig versnelde en van een rechtlijnige eenparig vertraagde beweging.....	13
§ 9. Ontbinding van een willekeurige beweging.....	15
§ 10. Ontbinding van de snelheid van een punt.....	15
§ 11. Ontbinding van de versnelling van een punt.....	16
§ 12. Deviatie.....	16

Hoofdstuk III. Massa. Kracht.

§ 13. Massa.....	23
§ 14. Een punt onder den invloed van twee of meer punten.....	26
§ 15. Kracht.....	27
§ 16. Ontbinding van een kracht.....	29
§ 17. Samenstelling van twee krachten.....	31
§ 18. Samenstelling van drie of meer krachten.....	34
§ 19. Arbeid door een kracht verricht.....	37
§ 20. Arbeidsvermogen.....	39
§ 21. Moment van een kracht ten opzichte van een as.....	44
§ 22. Moment van een kracht ten opzichte van een punt.....	48

**TWEEDE AFDEELING. MECHANICA DER ABSOLUUT VASTE
LICHAMEN.**

Hoofdstuk IV. Algemeene evenwichtsvergelijkingen.

	Bladz.
§ 23. Absoluut vaste lichamen.....	51
§ 24. Massa van een lichaam. Dichtheid.....	53
§ 25. Vervanging van krachten.....	54
§ 26. Vervanging van twee krachten langs onderling evenwijdige lijnen werkende.....	58
§ 27. Koppel.....	63
§ 28. Vervanging van koppels in één vlak werkende.....	65
§ 29. Vervanging van koppels in onderling evenwijdige vlakken werkende.	67
§ 30. Vervanging van koppels werkende in vlakken, die elkander snijden.	69
§ 31. Algemeene evenwichtsvergelijkingen voor willekeurige krachten op een lichaam werkende.....	72

Hoofdstuk V. Algemeene stellingen.

§ 32. Werking van de inwendige krachten.....	81
§ 33. Behoud van arbeidsvermogen.....	83
§ 34. Beginsel der virtueele verplaatsingen.....	85
§ 35. Beginsel van d'Alembert.....	88

**Hoofdstuk VI. Draaiende beweging van een lichaam
om een vaste as.**

§ 36. Arbeidsvermogen van beweging van een ronddraaiend lichaam. Traagheidsmoment.....	89
§ 37. Traagheidsmoment, gereduceerde massa, traagheidsstraal.....	90
§ 38. Eenparig draaiende beweging.....	99
§ 39. Vrije assen.....	103
§ 40. Hoekversnelling.....	106

**Hoofdstuk VII. Willekeurige beweging van een
lichaam.**

§ 41. Arbeidsvermogen van een lichaam.....	108
§ 42. Beweging van het massa-middelpunt.....	111
§ 43. Beweging van een vrij lichaam.....	113

EERSTE AFDEELING.

MECHANICA VAN HET STOFFELIJK PUNT.

HOOFDSTUK I.

Beweging. Snelheid. Versnelling.

§ 1. Stoffelijk punt.

Onder een stoffelijk punt verstaat men een lichaam van zoo kleine afmetingen, dat de plaats die het inneemt als een meetkundig punt mag worden beschouwd.

Men mag een lichaam als een stoffelijk punt behandelen, indien het onnoodig wordt geoordeeld de plaats, die eenig deel van het lichaam inneemt, te onderscheiden van de plaats, die door een ander deel van het lichaam wordt ingenomen. Zoo worden gewoonlijk bij de bepaling der banen, doorloopen door een afgeschoten kogel of door de aarde bij haar beweging om de zon, de kogel en de aarde als stoffelijke punten beschouwd.

§ 2. Rust. Beweging.

Indien de afstand van twee stoffelijke punten P en Q geen verandering ondergaat, dan zegt men dat P en Q *ten opzichte van elkander in rust* zijn. Ondergaat die afstand een verandering, dan zegt men dat P en Q *zich ten opzichte van elkander bewegen*. Gewoonlijk beschouwt men slechts één dier bewegingen, bijv. die van P ten opzichte van Q .

Indien een punt P zich beweegt ten opzichte van eenige punten Q , R , S enz., welke ten opzichte van elkander in rust zijn, dan worden de punten Q , R , S enz. te zamen de omgeving van P genoemd. Men zegt dan dat P zich beweegt

ten opzichte van zijn omgeving, gevormd door de punten Q , R , S , enz. Als de omgeving duidelijk aangewezen is, spreekt men korthedshalve ook wel eenvoudig van de beweging van P .

Daar de plaats door het stoffelijk punt P ingenomen, als een meetkundig punt mag worden beschouwd, doorloopt P bij zijn beweging een lijn, de *baan* van P genoemd. Al naarmate die baan een rechte of een kromme lijn is, heet de beweging van P rechtlijnig of kromlijnig.

Onder de richting der beweging van het punt P , dat zich in A bevindt, verstaat men de richting van de raaklijn in A aan de baan getrokken in den zin der beweging. Is de baan een rechte lijn AB , dan is de richting der beweging standvastig, zoolang het punt zich beweegt van A naar B ; is de baan een kromme lijn, dan verandert de richting der beweging van oogenblik tot oogenblik.

De lengte van het stuk der baan, door het punt P in eenig tijdsverloop afgelegd, heet de *weg* door P in dien tijd doorloopen.

Als eenheid van lengte wordt aangenomen de centimeter, dat is het honderdste gedeelte der lengte van een staaf platina, die te Parijs wordt bewaard.

Tot grondslag voor de tijdmeting dient de draaiing der aarde om haar as. Men neemt aan dat onderling gelijke tijdsverloopen die zijn, waarin de aarde onderling gelijke hoeken om haar as draait. Het meten van tijdsverloopen op dezen grondslag geschiedt met behulp van slingeruurwerken. Het is de zaak der sterrenkundigen te onderzoeken, of de aanwijzingen dier uurwerken juist zijn.

Als eenheid van tijdsverloop wordt de *seconde middelbare tijd* aangenomen

Naar de wegen in achtereenvolgende tijdsverloopen afgelegd, worden de bewegingen onderscheiden in eenparige en veranderlijke.

§ 3. Eenparige beweging.

Men zegt dat een punt een *eenparige beweging* heeft, indien het in onderling gelijke tijdsverloopen, hoe klein ook genomen, onderling gelijke wegen aflegt.

De snelheid van een punt met eenparige beweging wordt

bepaald door den weg, dien het in zekeren tijd aflegt. Zij wordt evenredig gesteld met den weg per seconde doorloopen. Is s het aantal centimeters in t seconden doorloopen, dan is $\frac{s}{t}$ centimeters de weg per seconde afgelegd; is v het aantal snelheidseenheden, dan heeft men:

$$v = f \frac{s}{t}.$$

Neemt men als eenheid van snelheid aan de snelheid, welke een punt met eenparige beweging heeft, dat in één seconde een weg van één centimeter doorloopt, dan wordt $f = 1$ en

$$v = \frac{s}{t} \text{ eenheden of } s = vt \text{ centimeters.}$$

Het aantal snelheidseenheden van de snelheid is dus gelijk aan het aantal centimeters per seconde afgelegd.

Het aantal centimeters van den in t seconden doorloopen weg is gelijk aan het product van het aantal snelheidseenheden en het aantal seconden.

Onder de richting der snelheid van een punt P , dat zich in A bevindt, verstaat men de richting van de raaklijn in A aan de baan getrokken in den zin der beweging.

Een eenparige beweging kan zijn rechtlijnig of kromlijnig. Is de baan een rechte lijn, dan is de richting der snelheid standvastig. Is de baan een kromme lijn, dan verandert de richting der snelheid van oogenblik tot oogenblik.

Daar de snelheid van een punt P is bepaald door haar grootte en richting, kan zij door een rechte lijn volledig worden voorgesteld. De richting der lijn geeft de richting der snelheid, de lengte der lijn de grootte der snelheid.

Wanneer een punt P een eenparige beweging heeft langs den omtrek van een cirkel, dan spreekt men ook wel van de *hoeksnelheid* van P . De lijn, die het punt P verbindt met het middelpunt van den cirkel, heet de *voerstraal* van P .

De hoeksnelheid van een punt met eenparige cirkelvormige beweging wordt bepaald door den hoek, dien de voerstraal in zekeren tijd doorloopt. Zij wordt evenredig gesteld met den hoek per seconde doorloopen.

Als eenheid van hoeksnelheid wordt aangenomen de hoek-

snelheid van een punt met eenparige cirkelvormige beweging, welks voerstraal in één seconde de hoekeenheid doorloopt.

Als eenheid van hoek wordt aangenomen de *radiaal*, dat is de hoek, die gemeten wordt door een boog, welks lengte gelijk is aan den straal. Daar een hoek van 360° gemeten wordt door een boog van $2 \pi r$ centimeters, zal een hoek van $\frac{360^\circ}{2 \pi}$ gemeten worden door een boog van r centimeters.

Een radiaal is dus een hoek van $57^\circ 17' 45''$.

Heeft een punt een eenparige cirkelvormige beweging met de hoeksnelheid ω eenheden, en is de hoek door den voerstraal in t seconden doorlopen α radialen, dan heeft men

$$\alpha = \omega t.$$

In tegenstelling met de hoeksnelheid spreekt men van de lijnsnelheid van een punt. Er bestaat een eenvoudige betrekking tusschen de hoeksnelheid en de lijnsnelheid van een punt.

Is de hoeksnelheid van een punt ω eenheden, de lijnsnelheid c eenheden, en is de straal van den cirkel r centimeters lang, dan heeft men:

$$c = r \omega.$$

§ 4. Veranderlijke beweging.

Een punt heeft een veranderlijke beweging, indien het in onderling gelijke tijdsverloopen onderling ongelijke wegen aflegt.

Een veranderlijke beweging kan zijn rechtlijnig of kromlijnig.

Onder de *gemiddelde snelheid* van een punt P gedurende eenig tijdsverloop, verstaat men de snelheid, die een punt met eenparige beweging zou moeten hebben, om in datzelfde tijdsverloop een even grooten weg af te leggen als P .

Is een punt P met veranderlijke beweging op den tijd t in A , en doorloopt het in de eerstvolgende s seconden een weg van s centimeters, dan is zijn gemiddelde snelheid $w = \frac{s}{s}$ eenheden. De grootte dier gemiddelde snelheid zal veranderen met den duur van het tijdsverloop s . Neemt men

dit tijdsverloop kleiner en kleiner, en laat men het tot nul naderen, dan nadert de gemiddelde snelheid tot een bepaalde grenswaarde. Deze grenswaarde is de gemiddelde snelheid van P gedurende het oneindig kleine tijdsverloop volgende op den tijd t , of wel, de snelheid van het punt P met veranderlijke beweging op den tijd t .

Indien op ieder oogenblik de plaats van het punt kan worden bepaald, dan is de beweging van het punt volkomen bekend, en dan kan de snelheid op ieder oogenblik worden gevonden.

De plaats van een punt P kan op ieder oogenblik worden bepaald, als gegeven zijn de baan van het punt, de plaats die het op eenig oogenblik inneemt, en de weg, dien het sedert dat oogenblik in een willekeurig tijdsverloop aflegt.

Laat bijv. de baan een rechte lijn zijn en het punt zich op eenig oogenblik in A bevinden.

De weg s , in t seconden volgende op dat oogenblik afgelegd, kan worden gegeven door een vergelijking, bewegingsvergelijking genoemd, welke een betrekking aangeeft tusschen s en t .

Zij bijv. gegeven $s = pt + qt^2$, en zij het punt op den tijd nul in A , dan is het punt na t seconden in B , op een afstand $pt + qt^2$ centimeters van A verwijderd. Om nu de snelheid van het punt op den tijd t te vinden, bepaalt men de gemiddelde snelheid gedurende het tijdsverloop $\bar{s}$ seconden, volgende op den tijd t . In de $t + \bar{s}$ eerste seconden is de afgelegde weg $s_1 = p(t + \bar{s}) + q(t + \bar{s})^2$; in de t eerste seconden $s = pt + qt^2$. In de $\bar{s}$ seconden, volgende op den tijd t , is dus de afgelegde weg:

$$l = s_1 - s = p\bar{s} + 2qt\bar{s} + q\bar{s}^2,$$

en de gemiddelde snelheid:

$$w = \frac{l}{\bar{s}} = p + 2qt + q\bar{s}.$$

Deze gemiddelde snelheid verandert met het tijdsverloop $\bar{s}$; maar wanneer $\bar{s}$ tot nul nadert, nadert de gemiddelde snelheid tot de grenswaarde $p + 2qt$. Is dus v het aantal snelheidseenheden op den tijd t , dan heeft men:

$$v = p + 2qt.$$

Zij om een ander voorbeeld te nemen, de bewegingsvergelijking:

$$s = pt + qt^2 + rt^3$$

en laat gevraagd worden de snelheid op den tijd t te bepalen.

De weg in de $t + \vartheta$ eerste seconden afgelegd, is:

$$s_1 = p(t + \vartheta) + q(t + \vartheta)^2 + r(t + \vartheta)^3.$$

De weg in de t eerste seconden afgelegd, is:

$$s = pt + qt^2 + rt^3.$$

De weg in ϑ seconden volgende op den tijd t afgelegd, is dan:

$$l = s_1 - s = (p + 2qt + 3rt^2)\vartheta + (q + 3rt)\vartheta^2 + r\vartheta^3,$$

en de gemiddelde snelheid:

$$w = \frac{l}{\vartheta} = p + 2qt + 3rt^2 + (q + 3rt)\vartheta + r\vartheta^2.$$

Laat men ϑ tot nul naderen, dan nadert w tot de grenswaarde $p + 2qt + 3rt^2$, en de snelheid op den tijd t is dus:

$$v = p + 2qt + 3rt^2.$$

Laat eindelijk de bewegingsvergelijking zijn:

$$s = r \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

De weg in de $(t + \vartheta)$ eerste seconden afgelegd, is:

$$s_1 = r \sin 2\pi \frac{t + \vartheta}{T}.$$

De weg in de t eerste seconden afgelegd, is:

$$s = r \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

De weg in ϑ seconden volgende op den tijd t afgelegd is:

$$l = s_1 - s = r \left(\sin 2\pi \frac{t + \vartheta}{T} - \sin 2\pi \frac{t}{T} \right) \text{ of}$$

$$l = 2r \sin 2\pi \frac{\vartheta}{2T} \cos 2\pi \frac{2t + \vartheta}{2T},$$

en de gemiddelde snelheid:

$$w = \frac{2r}{\vartheta} \sin 2\pi \frac{\vartheta}{2T} \cos 2\pi \frac{2t + \vartheta}{2T},$$

of voor ϑ oneindig klein:

$$v = \frac{2\pi r}{s} \cdot 2\pi \frac{s}{2T} \cos 2\pi \frac{t}{T} = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Neemt de snelheid van een punt voortdurend toe, dan is de beweging versneld; neemt de snelheid voortdurend af, dan is de beweging vertraagd.

§ 5. Eenparig versnelde beweging.

Een punt heeft een eenparig versnelde beweging, wanneer het in onderling gelijke tijdsverloopen, hoe klein ook genomen, onderling gelijke snelheidsvermeerderingen krijgt.

De *versnelling* van een punt met eenparig versnelde beweging wordt bepaald door de snelheidsvermeerdering, die het in zekeren tijd krijgt. Zij wordt evenredig gesteld met de snelheidsvermeerdering per seconde. Neemt de snelheid in t seconden met q eenheden toe, en is a het aantal versnellingeenheden,

dan is:

$$a = f \frac{q}{t}.$$

Als *eenheid van versnelling* wordt aangenomen, de versnelling van een punt met eenparig versnelde beweging, welks snelheid in één seconde met de snelheidseenheid toeneemt. Bovenstaande vergelijking verandert daardoor in:

$$a = \frac{q}{t} \text{ of } q = at.$$

Heeft een punt een eenparig versnelde beweging met de versnelling a eenheden, dan neemt de snelheid in t seconden met at eenheden toe. Is dus op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, dan is de snelheid v na t seconden:

$$v = c + at. \quad (1)$$

De snelheid c wordt de *aanvangssnelheid* genoemd, d. w. z. de snelheid bij het begin van den tijd t ; de snelheid v de *eindsnelheid*, d. w. z. de snelheid aan het einde van den tijd t .

Om den weg te bepalen, dien een punt P met eenparig versnelde beweging met de versnelling a aflegt in t seconden, volgende op het oogenblik waarop de snelheid is c , stelt men zich een ander punt Q voor, dat een reeks van n eenparige bewegingen volbrengt, die elk $\frac{t}{n}$ seconden duren.

Archiv

niel

Op den tijd nul heeft Q dezelfde snelheid als P ; telkens na $\frac{t}{n}$ seconden verandert de snelheid van Q , en wordt gelijk aan de snelheid, die P op dat oogenblik heeft. De snelheden, waarmede Q zich beweegt in de achtereenvolgende tijdsverloopen $\frac{t}{n}$, zijn:

$$c, c + a \frac{t}{n}, c + 2a \frac{t}{n} \dots c + (n - 1) a \frac{t}{n}.$$

De wegen, door Q in deze tijdsverloopen afgelegd, zijn:

$$c \frac{t}{n} \quad \left(c + a \frac{t}{n}\right) \frac{t}{n} \quad \left(c + 2a \frac{t}{n}\right) \frac{t}{n} \dots \left(c + (n - 1) a \frac{t}{n}\right) \frac{t}{n}.$$

De geheele weg, door Q in de t eerste seconden afgelegd, is de som der wegen, en dus:

$$s = ct + \frac{1}{2} at^2 - \frac{at^2}{2n}.$$

Hoe grooter n wordt genomen, des te meer komt de beweging van Q met die van P overeen, en des te kleiner wordt de term $\frac{at^2}{2n}$. Neemt men n oneindig groot, dan is de beweging van Q gelijk aan die van P , en voor den door P afgelegden weg verkrijgt men dan:

$$s = ct + \frac{1}{2} at^2. \quad (2)$$

Men kan ook op andere wijze tot de vergelijkingen (1) en (2) komen. Zij de bewegingsvergelijking van P

$$s = pt + qt^2,$$

dan is, volgens het in de vorige § bewezene, de snelheid op den tijd t

$$v = p + 2qt.$$

De snelheid op den tijd $t + \varepsilon$ is $v_1 = p + 2q(t + \varepsilon)$. De snelheidsvermeerdering gedurende het tijdsverloop ε volgende op den tijd t is $v_1 - v = 2q\varepsilon$, en dus onafhankelijk van t ; in één seconde is de snelheidsvermeerdering $2q$. P

heeft derhalve een eenparig versnelde beweging met de versnelling $a = 2q$ en de aanvangssnelheid $c = p$. Vervangt men in bovenstaande vergelijkingen p door c en q door $\frac{1}{2}a$, dan verkrijgt men de vergelijkingen (1) en (2).

Als men uit de vergelijkingen (1) en (2) t elimineert, dan verkrijgt men de vergelijkingen:

$$v = \sqrt{c^2 + 2as} \quad (3) \quad \text{en} \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2a} \quad (4)$$

Heeft dus een punt een eenparig versnelde beweging met de versnelling a eenheden, heeft het op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en heeft het daarna een weg s centimeters afgelegd, dan is zijn snelheid geworden $\sqrt{c^2 + 2as}$ eenheden, en omgekeerd:

Heeft een punt een eenparig versnelde beweging met de versnelling a eenheden, heeft het op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en heeft het na eenigen tijd de snelheid v eenheden gekregen, dan heeft het in dat tijdsverloop den weg $\frac{v^2 - c^2}{2a}$ centimeters afgelegd.

Is de aanvangssnelheid $c = 0$, dan veranderen de vergelijkingen in:

$$v = at \quad s = \frac{1}{2}at^2 \quad v = \sqrt{2as} \quad \text{en} \quad s = \frac{v^2}{2a}. \quad (5)$$

Is de beweging van het punt rechtlijnig eenparig versneld, dan verstaat men onder de richting der versnelling de richting van de lijn, waarlangs zich het punt beweegt in den zin der beweging.

Op soortgelijke wijze als de snelheid kan ook de versnelling van een punt in richting en grootte worden voorgesteld door een rechte lijn.

§ 6. Eenparig vertraagde beweging.

Een punt heeft een eenparig vertraagde beweging, wanneer het in onderling gelijke tijdsverloopen, hoe klein ook genomen, onderling gelijke snelheidsverminderingen ondergaat.

De vertraging van een punt met eenparig vertraagde be-

weging wordt bepaald door de snelheidsvermindering, die het in zekeren tijd ondergaat. Zij wordt evenredig gesteld met de snelheidsvermindering per seconde.

Als eenheid van vertraging wordt aangenomen de vertraging van een punt met eenparig vertraagde beweging, welks snelheid in één seconde met de snelheidseenheid vermindert.

Heeft een punt een eenparig vertraagde beweging met de vertraging a eenheden, dan neemt de snelheid in t seconden met at eenheden af. Is dus op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en na t seconden v eenheden, dan is:

$$v = c - at. \quad (6)$$

Op soortgelijke wijze als hierboven voor de eenparig versnelde beweging is geschied, kan de weg worden berekend door het punt afgelegd in de t seconden volgende op het oogenblik, waarop de snelheid c is. Men vindt daarvoor:

$$s = ct - \frac{1}{2} at^2. \quad (7)$$

Indien van een punt P de bewegingsvergelijking is:

$$s = pt - qt^2,$$

dan kan men op dezelfde wijze als in de vorige § is geschied aantoonen, dat P een eenparig vertraagde beweging heeft met de vertraging $2q$.

Door eliminatie van t uit de vergelijkingen (6) en (7), vindt men:

$$v = \sqrt{c^2 - 2as} \quad (8) \quad \text{en} \quad s = \frac{c^2 - v^2}{2a}. \quad (9)$$

Heeft dus een punt een eenparig vertraagde beweging met de vertraging a eenheden, heeft het op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en heeft het daarna een weg s centimeters afgelegd, dan is zijn snelheid geworden $\sqrt{c^2 - 2as}$ eenheden, en omgekeerd:

Heeft een punt een eenparig vertraagde beweging met de vertraging a eenheden, heeft het op eenig oogenblik de snelheid c eenheden, en heeft het na eenigen tijd de snelheid v eenheden gekregen, dan heeft het in dat tijdsverloop den weg $\frac{c^2 - v^2}{2a}$ centimeters afgelegd.

De aanvangssnelheid van een punt met eenparig vertraagde beweging kan niet nul zijn. Na een tijdsverloop $t = \frac{c}{a}$ is $v = 0$ en verliezen de vergelijkingen (6), (7), (8) en (9) haar beteekenis.

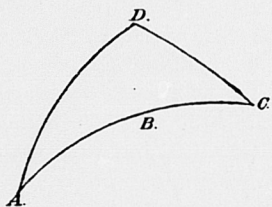
HOOFDSTUK II.

Ontbinden van bewegingen.

§ 7. Ontbinding van een rechtlijnige eenparige beweging.

Laat een punt P zich in t seconden bewegen van A over B naar C (fig. 1). Het zou ook in C zijn aangekomen, indien het eerst van A naar D en daarna van D naar C was gegaan. Worden de bewegingen van A naar D en van D naar C zoodanig gekozen, dat het punt t seconden zou noodig hebben, zoowel om den weg AD , als om den weg DC te doorloopen, dan noemt men de bewegingen van A naar D

Fig. 1.



en van D naar C de ontbindingsbewegingen van de werkelijke beweging die P heeft; men zegt dan, dat men de werkelijke beweging van P gedurende deze t seconden in twee bewegingen ontbonden heeft.

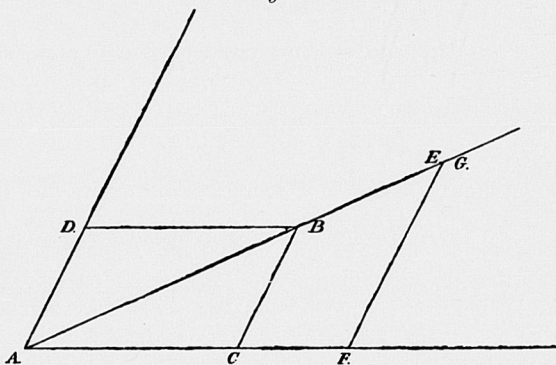
De werkelijke beweging van P kan op een oneindig aantal wijzen in twee bewegingen worden ontbonden.

Heeft een punt P een rechtlijnige eenparige beweging, dan kan men voor elk willekeurig tijdsverloop de beweging van P ontbinden in twee eenparige bewegingen langs verschillende rechte lijnen; daartoe wordt slechts vereischt, dat de lijn, die in richting en grootte de snelheid van het punt bij zijn werkelijke beweging voorstelt, de diagonaal is van het parallellogram beschreven op de lijnen, welke in richting

en grootte de snelheden van het punt bij zijn ontbindingsbewegingen voorstellen, en wel de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende zijden zijn.

Om dit te bewijzen wordt aangenomen, dat het punt P een rechtlijnige eenparige beweging heeft met een snelheid in richting en grootte voorgesteld door de lijn AB (fig. 2). Na 1 seconde zal P dan in B gekomen zijn. Zij verder

Fig. 2.



figuur $ABCD$ een parallelogram. In t seconden zal P in E komen, als $AE = t \cdot AB$. Indien P eerst gedurende t seconden een rechtlijnige eenparige beweging gehad had met een snelheid, voorgesteld door de lijn AC , dan zou het na t seconden in F gekomen zijn, als $AF = t \cdot AC$. Verkreeg P daarna gedurende t seconden een rechtlijnige eenparige beweging met een snelheid, in richting en grootte voorgesteld door de lijn AD , dan kan de plaats G , waar P zou aankomen, gevonden worden door uit F een lijn te trekken, evenwijdig aan AD , en daarop te nemen een stuk $FG = t \cdot AD$.

De driehoeken AFG en ACB zijn gelijkvormig, daar

$$\angle ACB = \angle AFG \text{ en } \frac{AC}{CB} = \frac{AF}{FG}.$$

Hieruit volgt $\angle BAC = \angle GAF$; de lijnen GA en BA vallen dus langs elkander, en het punt G ligt op de lijn AB . Daar verder $\frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC}$ en $AF = t \cdot AC$, zoo is $AG = t \cdot AB$. Het punt G valt dus samen met E .

Men kan op geheel dezelfde wijze aantonen dat het punt P eveneens in E zal aankomen, als men het eerst gedurende t seconden zich laat bewegen met de snelheid voorgesteld door de lijn AD , en daarna, van de plaats uit waar het zou gekomen zijn, wederom gedurende t seconden met de snelheid voorgesteld door de lijn AC .

§ 8. Ontbinding van een rechtlijnige eenparig versnelde en van een rechtlijnige eenparig vertraagde beweging.

Indien een punt P een eenparig versnelde beweging met de versnelling a eenheden heeft langs de lijn AB van A naar B , indien het zich op eenig oogenblik in A bevindt en de snelheid c eenheden heeft, dan kan voor een willekeurig tijdsverloop de beweging van P worden ontbonden in twee bewegingen langs de lijn AB van A naar B , waarvan de een eenparig is met de snelheid c eenheden, en de ander eenparig versneld met de versnelling a eenheden en de aanvangssnelheid nul.

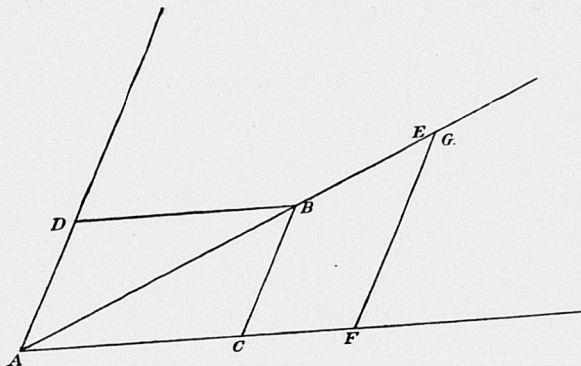
Indien een punt P een eenparig vertraagde beweging met de vertraging a eenheden heeft langs de lijn AB van A naar B , indien het zich op eenig oogenblik in A bevindt en de snelheid c eenheden heeft, dan kan voor een willekeurig tijdsverloop de beweging van P worden ontbonden in een eenparige beweging langs de lijn AB van A naar B met de snelheid c eenheden, en in een eenparig versnelde langs de lijn AB van B naar A , met de versnelling a eenheden en de aanvangssnelheid nul.

Indien een punt P een rechtlijnige eenparig versnelde beweging heeft met een aanvangssnelheid nul, dan kan zijn beweging voor een willekeurig tijdsverloop ontbonden worden in twee eenparig versnelde bewegingen met aanvangssnelheden nul langs verschillende rechte lijnen; daartoe wordt slechts vereischt, dat de lijn, die in richting en grootte de versnelling bij de werkelijke beweging voorstelt, de diagonaal is van het parallelogram beschreven op de lijnen, welke in richting en grootte de versnellingen bij de ontbindingsbe-

wegingen voorstellen, en wel de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende zijden zijn.

Om dit te bewijzen wordt aangenomen, dat het punt P een rechtlijnige eenparig versnelde beweging heeft met de aanvangssnelheid nul en een versnelling in richting en grootte voorgesteld door de lijn AB (fig. 3). Zij figuur $ABCD$

Fig. 3.



een parallelogram. Als P op den tijd nul zich in A bevindt, dan zal het op den tijd t seconden aangekomen zijn in E , als $AE = \frac{1}{2} t^2 \cdot AB$. Indien P eerst gedurende t seconden een rechtlijnige eenparig versnelde beweging gehad had met de aanvangssnelheid nul en met een versnelling voorgesteld door de lijn AC , dan zou het na t seconden in F gekomen zijn, als $AF = \frac{1}{2} t^2 \cdot AC$. Verkreeg P daarna gedurende t seconden een rechtlijnige eenparig versnelde beweging met de aanvangssnelheid nul en een versnelling voorgesteld door de lijn AD , dan kan de plaats G , waar P zou aankomen, gevonden worden door uit F een lijn te trekken evenwijdig aan AD , en daarop te nemen een stuk $FG = \frac{1}{2} t^2 \cdot AD$.

De driehoeken AFG en ACB zijn gelijkvormig, daar

$$\angle ACB = \angle AFG \text{ en } \frac{AC}{CB} = \frac{AF}{FG}.$$

Hieruit volgt $\angle BAC = \angle GAF$; de lijnen GA en BA vallen dus langs elkander, en het punt G ligt op de lijn

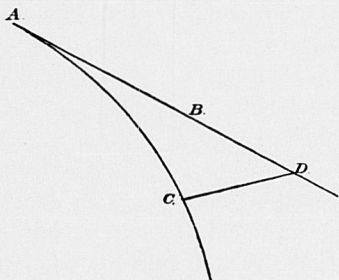
AB . Daar verder $\frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC}$ en $AF = \frac{1}{2} t^2 \cdot AC$, zoo is $AG = \frac{1}{2} t^2 \cdot AB$. Het punt G valt dus samen met E .

§ 9. Ontbinding van een willekeurige beweging.

Hierboven is reeds opgemerkt, dat een beweging op talloze wijzen in twee andere kan worden ontbonden. De volgende wijze van ontbinding wordt meermalen toegepast.

Laat P (fig. 4) op den tijd t seconden in A zijn en een snelheid c eenheden hebben, die in richting en grootte door

Fig. 4.



AB wordt voorgesteld; de lijn AB is dan raaklijn aan de baan in A . Laat P ϑ seconden later in C zijn aangekomen. De beweging van P gedurende deze ϑ seconden kan dan ontbonden worden in een eenparige langs de lijn AB met de snelheid c eenheden, zoodat P na ϑ seconden in D komt als $AD = c \vartheta$ centimeters, en

in een rechtlijnige eenparig versnelde beweging met de aanvangssnelheid nul langs de lijn DC , zoodat P in ϑ seconden van D naar C komt. De grootte van de versnelling dezer beweging kan worden berekend uit de lengte der lijn CD . Gewoonlijk bepaalt men de grenswaarde, waartoe deze versnelling nadert, wanneer ϑ kleiner en kleiner wordt genomen.

§ 10. Ontbinding van de snelheid van een punt.

Wanneer een punt P (fig. 4) op eenig oogenblik een snelheid heeft voorgesteld door de lijn AB , dan zou het, indien zijn snelheid noch in grootte noch in richting veranderde, een rechtlijnige eenparige beweging krijgen. Deze eenparige beweging zou (zie § 7) te ontbinden zijn in twee eenparige bewegingen. De snelheden van P bij deze ontbindingsbewegingen noemt men de ontbindingssnelheden van P . De wer-

kelijke beweging van P kan gedurende een oneindig klein tijdsverloop als rechtlijnig eenparig worden beschouwd; ontbindt men deze beweging in twee bewegingen, dan zijn de snelheden van P bij zijn ontbindingsbewegingen tevens de ontbindingssnelheden van P op dat oogenblik.

§ 11. Ontbinding van de versnelling van een punt.

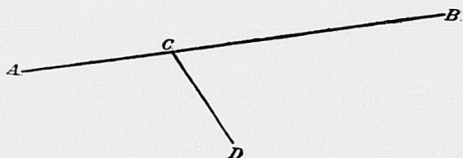
Als op een zeker oogenblik van een punt P de snelheid nul is, en de versnelling wordt voorgesteld door de lijn AB , dan zou, indien de versnelling noch in grootte noch in richting veranderde, de beweging van P te ontbinden zijn in twee eenparig versnelde bewegingen (zie § 8). De versnellingen van P bij deze ontbindingsbewegingen noemt men nu, ook als de werkelijke versnelling verandert, de ontbindingsversnellingen van P op dat oogenblik.

§ 12. Deviatie.

De bewegingstoestand van een punt wordt bepaald door de richting en de grootte van zijn snelheid. Indien grootte en richting der snelheid voortdurend dezelfde blijven, dan zegt men dat de bewegingstoestand van het punt niet verandert. Ondergaat een van beide of beide een wijziging, dan zegt men dat de bewegingstoestand verandert.

Laat het punt P (fig. 5) zich op den tijd t seconden in A bevinden en een snelheid hebben van c eenheden, welke in

Fig. 5.



richting en grootte wordt voorgesteld door de lijn AB . Indien de bewegingstoestand van P niet veranderde nadat het in A is geko-

men, dan zou het ε seconden later in C zijn, als $AC = c \varepsilon$ centimeters. Zoo nu P zich na ε seconden werkelijk in D bevindt, dan noemt men de lijn CD de *deviatie*, die P ondergaat in de ε seconden, volgende op den tijd t .

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{2.3.4.} - \text{enz.}, \text{ en}$$

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2.3} + \frac{\varphi^5}{2.3.4.5.} - \text{enz.}$$

Deze waarden substitueerende, wordt:

$$CB^2 = \frac{r^2 \varphi^4}{4} + A \varphi^6 + \text{enz.}$$

$$\text{en } CB = \frac{r \varphi^2}{2} + B \varphi^3 + \text{enz.}$$

Daar $r \varphi = c \hat{s}$ of $\hat{s} = \frac{r \varphi}{c}$, wordt

$$a = 2CB \frac{c^2}{r^2 \varphi^2} = \frac{c^2}{r} + C \varphi + \text{enz.}$$

Tegelijk met $\hat{s}$ nadert φ tot nul, en de grenswaarde van a is dus:

$$a = \frac{c^2}{r}. \quad (10)$$

Verder is:

$$tg CFA = \frac{\varphi - \sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{\frac{\varphi^3}{2.3} + \dots}{\frac{\varphi^2}{2} + \dots} = \frac{1}{3} \varphi + \dots$$

De grenswaarde van den hoek, dien CB maakt met AM is nul; de grensrichting van CB is dus de richting van AM .

Heeft een punt P een eenparige beweging met de snelheid c eenheden langs den omtrek van een cirkel, welks straal r centimeters lang is, dan heeft zijn deviatieversnelling

de grootte $\frac{c^2}{r}$ eenheden, en op ieder oogenblik de richting van den straal naar het middelpunt toe. De deviatieversnelling heeft dus standvastige grootte, maar veranderlijke richting. Daar zij steeds gericht is naar het middelpunt toe, wordt zij gewoonlijk de centripetaalversnelling genoemd.

Ook dan wanneer een punt P een rechte lijnige beweging heeft, spreekt men van zijn deviatie. In dat geval kan men de deviatieversnelling eenvoudiger op de volgende wijze vinden.

Onder de gemiddelde versnelling van een punt P met

rechtlijnige beweging gedurende eenig tijdsverloop, verstaat men de versnelling, die een punt met eenparig versnelde beweging zou moeten hebben, opdat zijn snelheid in datzelfde tijdsverloop met hetzelfde bedrag zou toenemen als die van P .

Is een punt P met rechtlijnige beweging op den tijd t seconden in A , en neemt zijn snelheid in de eerstvolgende $\hat{s}$ seconden toe met c eenheden, dan is zijn gemiddelde vers-

snelling $d = \frac{c}{\hat{s}}$ eenheden. De grootte dier gemiddelde vers-

snelling zal veranderen met den duur van het tijdsverloop $\hat{s}$. De grenswaarde, waartoe de gemiddelde versnelling nadert, als het tijdsverloop $\hat{s}$ kleiner en kleiner wordt, noemt men de versnelling op den tijd t ; zij is gelijk aan de devatieversnelling van P in A . Gedurende een oneindig klein tijdsverloop toch, kan de versnelling slechts een oneindig kleine verandering ondergaan, en de beweging mag voor dit tijdsverloop als eenparig versneld worden beschouwd.

Als voorbeelden zullen behandeld worden de drie vroeger in § 4 behandelde bewegingsvergelijkingen, en de daaruit gevonden snelheden op den tijd t , in de veronderstelling, dat in elk dier gevallen de beweging rechtlijnig is.

$$1. \quad s = pt + qt^2 \qquad v = p + 2qt.$$

De snelheid op den tijd $t + \hat{s}$ seconden is:

$$v_1 = p + 2q(t + \hat{s}).$$

De snelheid op den tijd t seconden is:

$$v = p + 2qt.$$

De snelheidsvermeerdering in de $\hat{s}$ seconden volgende op den tijd t is dus:

$$v_1 - v = 2q\hat{s}$$

en de gemiddelde versnelling:

$$d = \frac{2q\hat{s}}{\hat{s}} = 2q.$$

De gemiddelde versnelling is onafhankelijk van het tijdsverloop $\hat{s}$, en de devatieversnelling heeft dus standvastige grootte.

$$2. \quad s = pt + qt^2 + rt^3 \qquad v = p + 2qt + 3rt^2.$$

De snelheid op den tijd $t + \hat{s}$ seconden is:

$$v_1 = p + 2q(t + \hat{s}) + 3r(t + \hat{s})^2.$$

De snelheid op den tijd t seconden is:

$$v = p + 2qt + 3rt^2,$$

waaruit volgt:

$$v_1 - v = (2q + 6rt)\hat{s} + 3r\hat{s}^2$$

$$d = \frac{v_1 - v}{\hat{s}} = 2q + 6rt + 3r\hat{s}.$$

Voor $\hat{s} = 0$ wordt de deviatieversnelling dus:

$$a = 2q + 6rt.$$

$$3. \quad s = r \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad v = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

De snelheid op den tijd $t + \hat{s}$ seconden is:

$$v_1 = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t + \hat{s}}{T},$$

die op den tijd t seconden:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

waaruit:

$$v_1 - v = \frac{2\pi r}{T} \left(\cos 2\pi \frac{t + \hat{s}}{T} - \cos 2\pi \frac{t}{T} \right)$$

$$\text{of} \quad v_1 - v = -\frac{4\pi r}{T} \sin 2\pi \frac{2t + \hat{s}}{2T} \sin \pi \frac{\hat{s}}{T}$$

$$d = \frac{v_1 - v}{\hat{s}} = -\frac{4\pi r}{T\hat{s}} \sin 2\pi \frac{2t + \hat{s}}{2T} \sin \pi \frac{\hat{s}}{T},$$

Voor oneindig kleine waarde van $\hat{s}$ wordt dan de deviatieversnelling:

$$a = -\frac{4\pi r}{\hat{s}T} \cdot \pi \frac{\hat{s}}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T} = -\frac{4\pi^2 r}{T^2} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

of hierin substitueerende $s = r \sin 2\pi \frac{t}{T}$

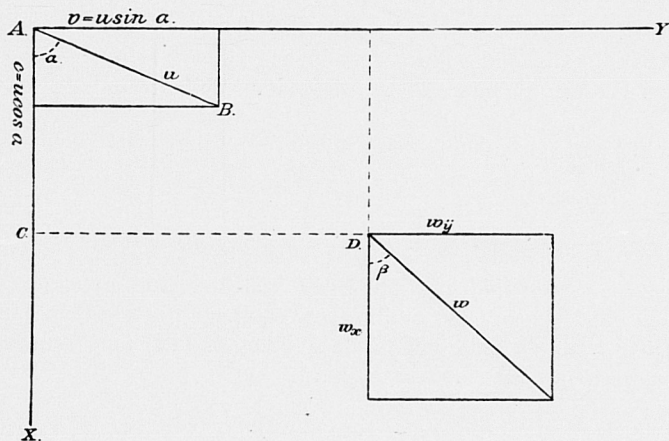
$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2} s.$$

Is de beweging van een punt P bekend, dan kan men door berekening op ieder oogenblik de deviatieversnelling in

richting en grootte bepalen. Omgekeerd kan men de beweging van P vinden, als zijn bewegingstoestand op eenig oogenblik, en zijn deviatieversnelling van oogenblik tot oogenblik bekend zijn.

Laat een punt P dat zich in A (fig. 7) bevindt, een snelheid u eenheden hebben voorgesteld door de lijn AB ; laat zijn standvastige deviatieversnelling a eenheden bedragen en

Fig. 7.



de richting AX hebben; laat eindelijk z de hoek zijn, dien AB maakt met AX . Daar de devatieversnelling standvastig is in grootte en richting, kan de beweging van P voor een willekeurig tijdsverloop ontbonden worden in een eenparige beweging langs de lijn AB met de snelheid u eenheden, en in een eenparig versnelde langs de lijn AX met de aanvangssnelheid nul en de versnelling a eenheden. De eenparige beweging kan wederom ontbonden worden in twee eenparige bewegingen, een langs de lijn AX met de snelheid $c = u \cos z$ eenheden, en een langs de lijn AY met de snelheid $v = u \sin z$ eenheden. Daar de eenparig versnelde beweging en eene der eenparige ontbindingsbewegingen in dezelfde richting plaats hebben, kan men deze twee ontbindingsbewegingen tot één samenvoegen, en wel

tot een eenparig versnelde beweging, langs de lijn AX met de aanvangssnelheid c eenheden en de versnelling a eenheden.

Is het punt op den tijd nul in A , dan kan de plaats D , waar het zich t seconden later bevindt, gevonden worden, door eerst den weg $AC = x = ct + \frac{1}{2}at^2$ op de lijn AX af te zetten, daarna uit C een lijn evenwijdig aan AY te trekken, en daarop af te zetten een stuk $CD = y = vt$.

Is P in D aangekomen, dan is de snelheid bij zijn ontbindingsbeweging in de richting AX $w_x = c + at$, en die bij zijn ontbindingsbeweging in de richting AY $w_y = v$. Zijn werkelijke snelheid is derhalve volgens § 10 $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$, en de hoek β , dien de richting der snelheid w met AX

maakt, kan gevonden worden uit de vergelijking $t g \beta = \frac{w_y}{w_x}$. De

vier vergelijkingen:

$$x = ct + \frac{1}{2}at^2 \quad y = vt \quad w_x = c + at \quad w_y = v \quad (11)$$

zijn dus voldoende om op ieder willekeurig oogenblik de plaats en de grootte en richting der snelheid van P te vinden.

Door t uit de twee eerste vergelijkingen (11) te elimineeren, verkrijgt men de vergelijking:

$$x = \frac{c}{v} y + \frac{a}{2v^2} y^2, \quad (12)$$

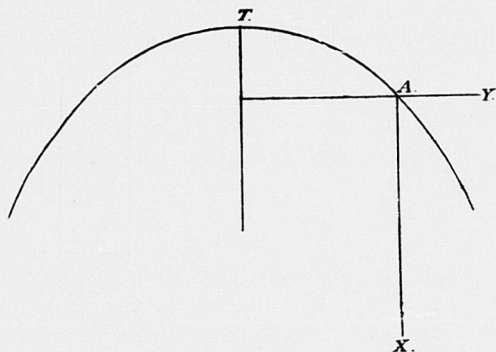
waaruit men voor een willekeurige waarde van y de bijbehorende waarde van x kan vinden. Uit deze vergelijking kan men vinden het geheel der plaatsen, die het punt P bij zijn beweging kan innemen, derhalve de baan van P . Deze baan is een kromme lijn, parabool genoemd (fig. 8). Men kan zich voorstellen dat de beweging, die P in A heeft, de voortzetting is van een vroegere beweging. De vergelijkingen (11) gelden ook voor die vroegere beweging; t moet dan echter negatief worden, d. w. z. die vergelijkingen hebben dan betrekking op den tijd t seconden vóór den tijd nul, toen P in A was.

Stelt men in de derde der vergelijkingen (11) $v = 0$, dan

$$\text{wordt:} \quad c + at = 0 \quad \text{of} \quad t = -\frac{c}{a}.$$

dat is, $\frac{c}{a}$ seconden vóór den tijd waarop P zich in A bevond, was de ontbindingssnelheid van P in de richting AX nul, en was dus de ontbindingssnelheid v langs AY de werkelijke snelheid van P . De plaats T waar P zich dan bevindt, heet

Fig. 8.



de top van den parabool, en de lijn, die door den top evenwijdig aan AX wordt getrokken, de as der parabool. Valt het punt A samen met T , dan gaat vergelijking (12) over in:

$$x = \frac{a}{2v^2} y^2,$$

uit welke vergelijking de baan van P op eenvoudige wijze kan worden geconstrueerd.

HOOFDSTUK III.

Massa. Kracht.

§ 13. *Massa.*

Kepler toonde aan, dat de beweging welke de planeten, van de aarde uit gezien, te midden van de vaste sterren

hebben, op eenvoudige wijze te verklaren is, als men aanneemt dat de zon stilstaat, dat elke planeet zich in een ellips beweegt, terwijl het middelpunt der zon in een der brandpunten van die ellips staat, en dat de aarde zelve een planeet is. Hij stelde drie wetten op aangaande de beweging der planeten. Uit deze wetten leidde Newton de deviatieversnelling der planeten af. Hij vond dat ten allen tijde de richting der deviatieversnelling van een planeet is de richting der lijn, die haar met het middelpunt der zon verbindt, en dat de grootte der deviatieversnelling omgekeerd evenredig is met het kwadraat van haar afstand tot het middelpunt der zon. Newton zocht de oorzaak hiervan in een zekeren invloed, dien de zon op de planeten zou uitoefenen, en kwam tot het besluit, dat elk lichaam onder dien invloed een deviatieversnelling zou krijgen, welker grootte omgekeerd evenredig is met het kwadraat van den afstand van het lichaam tot het middelpunt der zon.

Ook de beweging der maan te midden van de vaste sterren is te verklaren, als men aanneemt, dat zij zich in een ellips beweegt, terwijl het middelpunt der aarde in een der brandpunten staat. De deviatieversnelling der maan heeft ten allen tijde de richting van de lijn, die haar met het middelpunt der aarde verbindt, terwijl de grootte omgekeerd evenredig is met het kwadraat van haar afstand tot het middelpunt der aarde.

Indien men de deviatieversnelling van een lichaam, dat zich in de nabijheid van de oppervlakte der aarde beweegt, vergelijkt met de deviatieversnelling der maan, dan blijkt het dat die versnellingen zich omgekeerd verhouden als de kwadraten der afstanden van het lichaam en van de maan tot het middelpunt der aarde. De aarde oefent dus op eenig lichaam een invloed uit overeenkomstig met dien, welchen de zon uitoefent. De aarde zal dus ook haar invloed doen gevoelen op de zon evenals de zon op de aarde.

Newton stelde nu de hypothese, dat twee willekeurige stoffelijke punten P en Q op elkander een invloed uitoefenen, dat tengevolge daarvan elk dier punten een beweging krijgt; dat de richting van de deviatieversnelling van P de richting is der lijn die P en Q verbindt van P naar Q , dat de richting

van de deviatieversnelling van Q de richting is der lijn die P en Q verbindt van Q naar P , en dat de grootte der deviatieversnelling van P evenals die van Q omgekeerd evenredig is met het kwadraat van den afstand van P tot Q . De grootte der deviatieversnelling van P kan intusschen zeer veel verschillen van die van Q ; dit is bijv. het geval bij zon en aarde.

Vergelijkt men de deviatieversnelling van een planeet bij een bekenden afstand tot de zon met die der maan bij een eveneens bekenden afstand tot de aarde, dan blijkt het dat deze twee versnellingen zich niet verhouden in omgekeerde reden van de kwadraten der afstanden van planeet tot zon en van maan tot aarde. Indien een lichaam op denzelfden afstand van de zon geplaatst was, waarop de maan zich van de aarde bevindt, dan zou zijn deviatieversnelling vele malen grooter zijn dan die der maan. De deviatieversnelling van een stoffelijk punt Q onder den invloed van een stoffelijk punt P is dus niet alleen van den afstand dier punten afhankelijk.

Dit heeft geleid tot de invoering van het begrip *massa* of *hoeveelheid stof* van een stoffelijk punt. Men beoordeelt de massa van een stoffelijk punt P naar de deviatieversnelling, die een willekeurig punt Q , dat zich op zekeren afstand van P bevindt, onder zijn invloed verkrijgt; men stelt de massa van P evenredig met de grootte dier deviatieversnelling bij den afstand één

Men kan nu de massa's van twee hemellichamen, bijv. van zon en aarde, met elkander vergelijken. Neemt men bij benadering aan dat de banen van de aarde om de zon en van de maan om de aarde cirkels zijn, in welker middelpunten zon en aarde staan, dan kan deze vergelijking op eenvoudige wijze geschieden.

Zij Z de massa der zon, A de massa der aarde; zij R de straal van de aardbaan, r de straal van de maanbaan, T de omlooptijd van de aarde om de zon en t die van de maan om de aarde; zij eindelijk c de snelheid en p de deviatieversnelling der aarde, v de snelheid en q de deviatieversnelling der maan, dan is:

$$Z = f p R^2 \quad A = f q r^2 \quad \frac{Z}{A} = \frac{p R^2}{q r^2}$$

Volgens § 12 is:

$$p = \frac{c^2}{R} \quad q = \frac{v^2}{r}$$

of daar $cT = 2\pi R$ en $vt = 2\pi r$

$$p = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad q = \frac{4\pi^2 r}{t^2},$$

waaruit volgt:

$$\frac{Z}{A} = \frac{R^3 t^2}{r^3 T^2}$$

Voert men in deze vergelijking de bekende waarden van R , r , T en t in, dan vindt men dat de massa der zon ongeveer 321000 maal zoo groot is als de massa der aarde.

Tot nog toe is het moeilijk de massa's van twee willekeurige lichamen op aarde te vergelijken door hun invloed op andere lichamen na te gaan. Men volgt een minder rechtstreeksche methode, die hier echter niet zal worden uiteengezet, waarbij men gebruik maakt van de balans. Er wordt aangenomen dat men de massa's van twee lichamen weet te vergelijken.

Als eenheid van massa wordt aangenomen het *gram*, dat is het duizendste gedeelte der massa van een stuk platina, dat te Parijs wordt bewaard.

§ 14. Een punt onder den invloed van twee of meer punten.

De loopbanen der planeten zijn geen zuivere ellipsen; vooral de maanbaan wijkt van den ellipsvorm af. Die afwijking is het gevolg daarvan, dat de maan niet alleen den invloed van de aarde, maar ook dien van de zon en van de overige planeten ondervindt.

Er moet dus onderzocht worden, wat er gebeurt met een punt S , dat onder den invloed is van twee stoffelijke punten P en Q . Blijkens de waarneming wordt dan de deviatieversnelling van S in richting en grootte voorgesteld door de diagonaal van het parallelogram, waarvan de omliggende zijden in richting en grootte voorstellen de deviatieversnellingen die S volgens de hypothese van Newton zou verkrijgen, indien

het onder den invloed van P alleen en van Q alleen was. Wanneer P en Q met S op dezelfde rechte lijn zijn gelegen en aan dezelfde zijde van S , dan leert de waarneming dat de deviatieversnelling van S de som is van de deviatieversnellingen, die S volgens die hypothese zou krijgen als het zich onder de inwerking van P alleen en van Q alleen bevond. Wanneer P en Q met S op dezelfde rechte lijn zijn gelegen, maar ter weerszijden van S , dan leert de waarneming dat de deviatieversnelling van S het verschil is van de deviatieversnellingen, die S zou krijgen als het zich onder de inwerking van P alleen en van Q alleen bevond, en dat zij de richting heeft van de grootste versnelling.

Is S nog onder de inwerking van een derde punt R , dan leert de waarneming, dat de deviatieversnelling van S wordt voorgesteld door de diagonaal van het parallelogram, waarvan de eene omliggende zijde voorstelt de deviatieversnelling, die het onder de inwerking van P en Q samen, de andere omliggende zijde die, welke het onder de inwerking van R alleen zou verkrijgen.

Aanvaardt men de hypothese van Newton, dan geven de waargenomen verschijnselen het middel aan de hand om de deviatieversnelling te bepalen van een punt onder den invloed van een willekeurig aantal andere punten.

Omgekeerd is men, uitgaande van de hypothese van Newton en van bovenstaanden uit de waarnemingen afgeleiden regel, in staat geweest nagenoeg alle bewegingsverschijnselen die zich in het planetenstelsel voordoen te verklaren.

§ 15. Kracht.

Wanneer de bewegingstoestand van een punt verandert, dan schrijft men die verandering toe aan een oorzaak; men zegt, dat op het punt een *kracht* werkt.

Indien een punt in rust is of een rechtlijnige eenparige beweging heeft, dan werkt er dus geen kracht op; omgekeerd, indien op een punt geen kracht werkt, dan is het punt in rust of het heeft een rechtlijnige eenparige beweging. Is de beweging van het punt kromlijnig of rechtlijnig veranderlijk, dan werkt er een kracht op.

Men kent aan een kracht toe richting en grootte. Indien

een punt P dat oorspronkelijk in rust is, een rechtlijnige beweging van A naar B verkrijgt, dan zegt men dat er een kracht op werkt van standvastige richting. Onder de richting der kracht verstaat men dan de richting, waarin P zich gaat bewegen. Men zegt dat de kracht langs de lijn AB werkt. Krijgt het punt P bovendien een eenparig versnelde beweging, ondergaat dus zijn snelheid in onderling gelijke tijdsverloopen onderling gelijke vermeerderingen, dan kent men aan de kracht ook een standvastige grootte toe.

De grootte van de kracht, die aan een punt P , dat oorspronkelijk in rust is, een rechtlijnige eenparig versnelde beweging geeft, wordt bepaald door de massa van P en door de versnelling van P . Zij wordt evenredig gesteld met die massa en met die versnelling.

Is de beweging van P rechtlijnig niet eenparig versneld, dan werkt op P een kracht van standvastige richting, maar veranderlijke grootte.

Krijgt P een kromlijnige beweging, dan werkt er een kracht op, waarvan in het algemeen zoowel de grootte als de richting van oogenblik tot oogenblik verandert.

Heeft een punt P een willekeurige beweging, en bevindt het zich op eenig oogenblik in A , dan wordt de kracht die op P werkt als het in A is, bepaald door de massa van P en door de devatieversnelling van P in A . Onder de richting der kracht verstaat men dan de richting der devatieversnelling; de grootte der kracht wordt evenredig gesteld met de massa van P en met de grootte der devatieversnelling.

Heeft P een massa m gram, en is zijn devatieversnelling als het in A is, a eenheden, dan is het aantal krachts-eenheden K van de kracht, die in A op P werkt:

$$K = f a m.$$

Als eenheid van kracht wordt aangenomen de kracht, die aan een punt met de massa van één gram de versnellings-eenheid geeft.

Deze krachtseenheid wordt *dynaam* genoemd.

Indien een punt een massa m gram en in A een devatieversnelling van a eenheden heeft, dan werkt er in A een kracht van K dynamen op, als:

$$K = am.$$

in de twee versnellingen a_1 en a_2 eenheden, voorgesteld door de lijnen AC en AD , als figuur $ACBD$ een parallelogram is.

Indien de massa van P m gram bedraagt, dan werkt langs de lijn AB een kracht $K = ma$ dynamen. Deze kracht worde voorgesteld door AE . Om aan P een versnelling te geven voorgesteld door de lijn AC , is er een kracht $K_1 = ma_1$ dynamen noodig, werkende langs AC ; deze kracht worde voorgesteld door AF .

Om aan P een versnelling te geven voorgesteld door de lijn AD , is er een kracht $K_2 = ma_2$ dynamen noodig, werkende langs AD ; deze kracht worde voorgesteld door AG .

De krachten K_1 en K_2 , die aan het punt P de ontbindingsversnellingen a_1 en a_2 zouden geven, worden de *ontbindingskrachten* van K genoemd; men zegt dat men de kracht K in de krachten K_1 en K_2 heeft ontbonden.

De figuur $AFEG$ is een parallelogram. De driehoeken BAC en EAF toch zijn gelijkvormig, daar $\angle BAC = \angle EAF$ en $\frac{AE}{AF} = \frac{ma}{ma_1} = \frac{AB}{AC}$. Evenzoo de driehoeken BAD en EAG . Hieruit volgt dat EF evenwijdig is aan BC en EG aan BD ; daar nu $ACBD$ een parallelogram is, zoo is ook $AFEG$ een parallelogram.

Heeft het punt P oorspronkelijk niet de snelheid nul, dan blijft hetzelfde betoog geldig. De kracht toch die op het punt P werkt, wordt steeds beoordeeld naar de deviatieversnelling van P . Men kan aannemen dat de deviatie afgelegd wordt met een eenparig versnelde beweging, waarvan de aanvangssnelheid nul is. Daar de versnelling dier beweging in twee versnellingen kan worden ontbonden, zoo kan ook de kracht op de bovengenoemde wijze in twee krachten worden ontbonden.

Men mag dus steeds een kracht K ontbinden in twee krachten K_1 en K_2 , indien de lijn, die de kracht K in richting en grootte voorstelt, de diagonaal is van het parallelogram beschreven op de lijnen, die de krachten K_1 en K_2 voorstellen, en wel de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende zijden zijn.

§ 17. Samenstelling van twee krachten.

Volgens de hypothese van Newton (§ 13) oefenen twee stoffelijke punten P en Q een invloed op elkander uit. Is de massa van P m gram, die van Q m_1 gram, is hun afstand r centimeters, dan is de devatieversnelling van P $f \frac{m_1}{r^2}$, die van

Q $f \frac{m}{r^2}$ eenheden. De kracht welke op P werkt is dus

$f \frac{m m_1}{r^2}$ dynamen; de kracht welke op Q werkt is eveneens

$f \frac{m m_1}{r^2}$ dynamen.

Door de invoering van het begrip kracht kan nu de hypothese van Newton in een korteren vorm gebracht worden. Zij luidt dan:

Twee willekeurige punten P en Q trekken elkander aan met een kracht, waarvan de grootte evenredig is met de massa's van P en Q , en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun afstand.

Ook dan wanneer een punt P onder den invloed is van twee punten Q_1 en Q_2 kunnen de verschijnselen, die zich blijken de waarneming voordoen, door de invoering van het begrip kracht in korter woorden worden uitgedrukt.

Zij a_1 de door de lijn AC (fig. 9) voorgestelde devatieversnelling die P zou verkrijgen als het alleen onder de werking van Q_1 was, a_2 de door de lijn AD voorgestelde devatieversnelling, die P zou verkrijgen als het alleen onder de werking van Q_2 was, dan stelt volgens § 13 AB de devatieversnelling a voor, die P blijken de waarneming werkelijk verkrijgt, indien figuur $ACBD$ een parallelogram is. Is m gram de massa van P , dan is de onder den invloed van Q_1 op P werkende kracht ma_1 dynamen; zij worde voorgesteld door de lijn AF ; de onder den invloed van Q_2 op P werkende kracht is ma_2 dynamen; zij worde voorgesteld door de lijn AG . Is figuur $AFGE$ een parallelogram, dan ligt E op de lijn AB en stelt de lijn AE in richting en

grootte de kracht groot ma dynamen voor, die aan P de versnelling a , voorgesteld door de lijn AD , zou geven.

Men kan nu de uitkomsten der waarneming op de volgende wijze uitdrukken:

Wanneer op een punt P , onder den invloed van twee punten Q en Q_1 twee krachten K en K_1 werken, dan verkrijgt men de kracht R , die op P werkt tengevolge van den invloed van Q en Q_1 samen, door een parallelogram te beschrijven op de lijnen, die in richting en grootte de krachten K en K_1 voorstellen; de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende zijden zijn, stelt dan in richting en grootte de kracht R voor.

Men zegt, dat men de krachten K en K_1 heeft samengesteld, dat R de *resultante* is van K en K_1 , en dat K en K_1 de *composanten* zijn van R .

Indien de krachten K en K_1 langs dezelfde lijn in dezelfde richting werken, dan is de resultante R gelijk aan de som van K en K_1 , en werkt langs diezelfde lijn in diezelfde richting.

Indien de krachten K en K_1 langs dezelfde lijn in onderling tegengestelde richtingen werken, dan is de resultante R gelijk aan het verschil van K en K_1 , en werkt langs diezelfde lijn in de richting der grootste kracht. Zijn in dit geval K en K_1 even groot, dan is de resultante nul. Men zegt dan dat de krachten K en K_1 elkanders werking opheffen, of dat zij met elkander in evenwicht zijn.

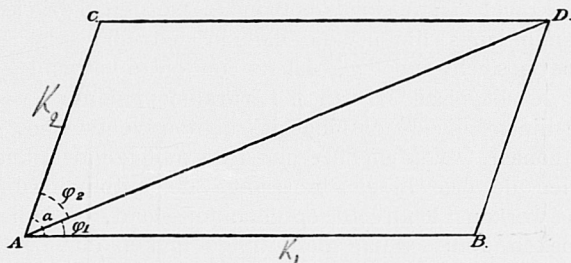
Uit hetgeen in de vorige § omtrent het ontbinden van een kracht is bewezen, blijkt dat de kracht R , die de resultante is van K en K_1 , ook in de krachten K en K_1 zou kunnen ontbonden worden, indien de kracht R op P werkte, tengevolge van den invloed door eenig ander punt op P uitgeoefend. Voor de uitwerking op het punt P is het dus onverschillig of K en K_1 de composanten, dan wel de ontbindingskrachten zijn van de kracht R .

Laat de krachten K_1 en K_2 voorgesteld worden door de lijnen AB en AC (fig. 10), die een hoek α met elkander maken, en de resultante K door de lijn AD , die met AB en AC hoeken φ_1 en φ_2 maakt. Daar $ABCD$ een parallelogram is, vindt men de volgende betrekkingen:

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2 K_1 K_2 \cos \alpha}$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{K_2 \sin \alpha}{K} \quad \sin \varphi_2 = \frac{K_1 \sin \alpha}{K}.$$

Fig. 10.



Is α een rechte hoek, dan vindt men :

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \quad \sin \varphi_1 = \frac{K_2}{K} \quad \sin \varphi_2 = \frac{K_1}{K}.$$

Werken op het punt P drie krachten K , K_1 , K_2 , dan kan men eerst de resultante R van K en K_1 door constructie vinden; en daarna op dezelfde wijze de resultante van R en K_2 . Op dezelfde wijze kan men verder gaan als er meer dan drie krachten op het punt P werken.

Zooals vroeger is opgemerkt, tracht men het bestaan van krachten te verklaren uit de aanwezigheid van stoffelijke punten; daarbij is men er toe gedrongen geworden aan te nemen, dat als het punt P op het punt Q een invloed uitoefent, steeds ook Q een invloed uitoefent op P ; en wel zoodanig, dat als tengevolge van dien invloed op Q een kracht werkt van zekere grootte en richting, ook op P een even groote kracht werkt in tegengestelde richting. Men zegt dat de werking gelijk is aan de terugwerking. Voorbeelden hiervan zijn de aantrekking die zon en aarde, de aantrekking of afstooting die twee magneetpolen, de drukking die twee lichamen op elkander uitoefenen.

Verder neemt men aan, indien het punt P onder den invloed van meer punten zich bevindt, dat men altijd de resultante kan afleiden uit de composanten door de constructie van het parallelogram, ook al maakt men omtrent de werking

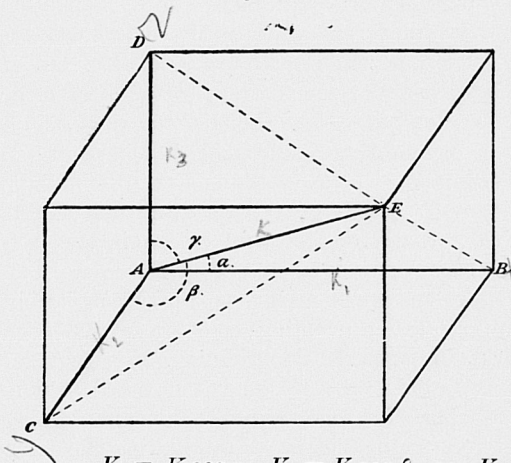
tusschen de stoffelijke punten geheel andere onderstellingen als Newton deed om tot de verklaring van de bewegingsverschijnselen in het planetenstelsel te komen.

§ 18. Samenstelling van drie of meer krachten.

Een kracht K kan steeds ontbonden worden in drie krachten werkende langs lijnen, die niet in hetzelfde vlak liggen; daartoe is slechts noodig, dat de lijn die de kracht K voorstelt, de diagonaal is van het parallelopipedum beschreven op de lijnen, die de ontbindingskrachten voorstellen, en wel de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende ribben zijn.

Indien de drie lijnen, waarlangs de ontbindingskrachten zullen werken, loodrecht op elkander staan, en indien men de hoeken kent, welke deze lijnen maken met de lijn die de kracht K voorstelt, dan kan de grootte der ontbindingskrachten op eenvoudige wijze worden berekend.

Fig. 11.



Laat $A B C D E$ (fig. 11) een recht-hoekig parallelo-pipedum zijn; de lijn $A E$ stelt de kracht K voor; de lijnen $A B$, $A C$ en $A D$ stellen de ontbindingskrachten K_1 , K_2 en K_3 voor. Make deze lijnen met de diagonaal hoeken α , β en γ , dan bestaan blijkens de figuur de betrekkingen:

$$K_1 = K \cos \alpha \quad K_2 = K \cos \beta \quad \text{en} \quad K_3 = K \cos \gamma.$$

Evenzoo kunnen drie krachten, werkende langs lijnen die niet in hetzelfde vlak liggen, tot een resultante worden samengesteld. De lijn, die de resultante voorstelt, moet dan zijn de diagonaal van het parallelopipedum op de lijnen be-

schreven, die de composanten voorstellen, en wel de diagonaal, waarvoor deze lijnen de omliggende ribben zijn.

Indien de drie lijnen, waarlangs de composanten werken, loodrecht op elkander staan, dan kan de diagonaal van het rechthoekig parallelipedum, beschreven op de lijnen die de composanten voorstellen, en dus de grootte en richting der resultante, op eenvoudige wijze worden berekend.

Laat (fig. 11) de lijnen AB , AC en AD de krachten K_1 , K_2 en K_3 , en de lijn AE de resultante K van K_1 , K_2 en K_3 voorstellen, dan bestaan blijkens de figuur de betrekkingen:

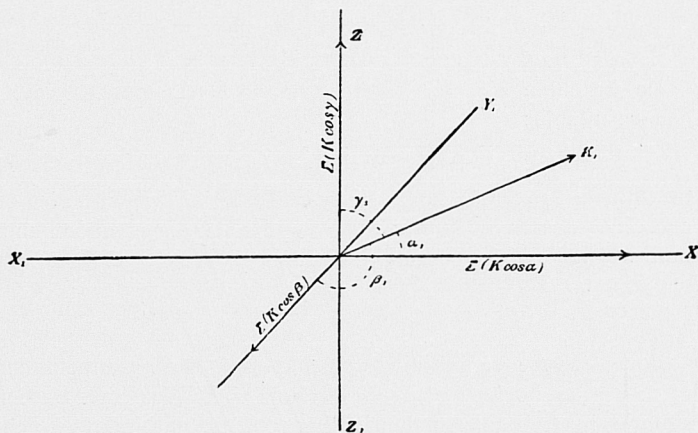
$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{K_1}{K}, \quad \cos \beta = \frac{K_2}{K}, \quad \cos \gamma = \frac{K_3}{K}.$$

Uit het bovenstaande wordt de methode afgeleid tot het berekenen van de grootte en de richting der resultante van een willekeurig aantal op een punt werkende krachten.

Laat O (fig. 12) de plaats zijn van een punt P waarop willekeurige krachten K_1 , K_2 , K_3 enz. werken. Men brengt

Fig. 12.



door O drie onderling loodrechte lijnen $X_1 X$, $Y_1 Y$, $Z_1 Z$,

die coördinatenassen worden genoemd. De richtingen van O naar X , van O naar Y en van O naar Z worden positief, die van O naar X_1 , van O naar Y_1 en van O naar Z_1 worden negatief genoemd. De lijnen, waarlangs de krachten K_1 , K_2 , K_3 enz. werken, maken hoeken α_1 , α_2 , α_3 enz. met het positieve gedeelte der X as, β_1 , β_2 , β_3 enz. met het positieve gedeelte der Y as, en γ_1 , γ_2 , γ_3 enz. met het positieve gedeelte der Z as.

Elk der krachten K_1 , K_2 , K_3 enz. kan ontbonden worden langs de drie coördinatenassen. Bij deze wijze van ontbinden kent men aan de ontbindingskrachten een teeken toe. Men noemt een ontbindingskracht langs de lijn XX_1 positief, als zij werkt in de richting van O naar X , negatief als zij werkt in de richting van O naar X_1 . Hetzelfde geldt voor de ontbindingskrachten langs de lijnen YY_1 en ZZ_1 .

De ontbindingskrachten van K_1 zijn $K_1 \cos \alpha_1$, $K_1 \cos \beta_1$, $K_1 \cos \gamma_1$; evenzoo die van K_2 $K_2 \cos \alpha_2$, $K_2 \cos \beta_2$, $K_2 \cos \gamma_2$ enz. Alle ontbindingskrachten langs de X as werkende hebben een resultante K_x , die gelijk is aan de algebraïsche som der krachten. Dus:

$$K_x = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \text{enz.} = \Sigma (K \cos \alpha)$$

Evenzoo voor de Y as en de Z as:

$$K_y = K_1 \cos \beta_1 + K_2 \cos \beta_2 + \text{enz.} = \Sigma (K \cos \beta)$$

$$K_z = K_1 \cos \gamma_1 + K_2 \cos \gamma_2 + \text{enz.} = \Sigma (K \cos \gamma),$$

De krachten K_x , K_y , K_z kunnen worden samengesteld tot een resultante:

$$K_o = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}, \quad (13)$$

terwijl de lijn, waarlangs de resultante K_o werkt, met de coördinatenassen hoeken α_o , β_o , γ_o maakt, die gevonden kunnen worden uit de vergelijkingen:

$$\cos \alpha_o = \frac{K_x}{K} \quad \cos \beta_o = \frac{K_y}{K} \quad \cos \gamma_o = \frac{K_z}{K}.$$

Bovenstaande vergelijkingen gelden ook dan, wanneer een of meer der hoeken α , β en γ stomp zijn. Was bijv. α_1 een stompe hoek, dan zou de richting van de ontbindingskracht $K_1 \cos \alpha_1$ die van de X as zijn van O naar X_1 ; zij zou in de $\Sigma (K \cos \alpha)$ met het negatieve teeken moeten voorkomen;

daar de cosinus van een stompen hoek negatief is, zoo zou dit werkelijk het geval zijn.

De hoeken α , β en γ die eenige lijn maakt met drie onderling loodrechte assen mogen niet willekeurig gegeven worden. Tusschen die hoeken bestaat de gemakkelijk aan te wijzen betrekking:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

§ 19. Arbeid door een kracht verricht.

Indien een punt P zich verplaatst heeft van A naar C ,
Fig. 13.

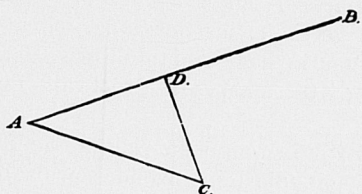
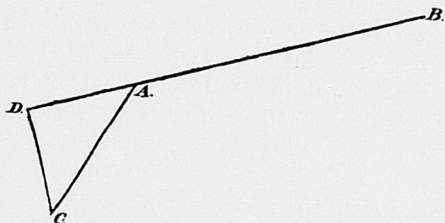


Fig. 14.



(fig. 13 en 14), terwijl er een kracht K op werkt langs de lijn AB , dan zegt men dat de kracht K arbeid heeft verricht. Deze arbeid wordt bepaald door de grootte der kracht en door de projectie AD van den afgelegden weg AC op de lijn AB . Is de richting van A naar D dezelfde als die der kracht, dan noemt men den verrichten arbeid positief; is de richting van A naar D tegen-

gesteld aan die der kracht, dan noemt men den verrichten arbeid negatief.

De projectie AD wordt de in de richting der kracht afgelegde weg genoemd. Men kent aan dezen weg een teeken toe, en wel een positief of een negatief teeken, al naarmate de weg is afgelegd in de richting der kracht of in tegengestelde richting.

Men stelt den arbeid evenredig met de grootte der kracht en met den weg in de richting der kracht afgelegd. Is dus de kracht K dynamen, en is de door P in de richting van K afgelegde weg l centimeters, dan is het aantal arbeids-eenheden van den arbeid:

$$A = f Kl.$$

Als eenheid van arbeid wordt aangenomen de arbeid, dien een kracht van één dynaam verricht, als haar aangrijpingspunt zich één centimeter in haar richting verplaatst. Een kracht van K dynamen, wier aangrijpingspunt zich l centimeters in haar richting verplaatst, verricht dan een arbeid van $A = Kl$ arbeidseenheden. Hierin kan l positief of negatief zijn; in het eerste geval is A positief, in het tweede negatief.

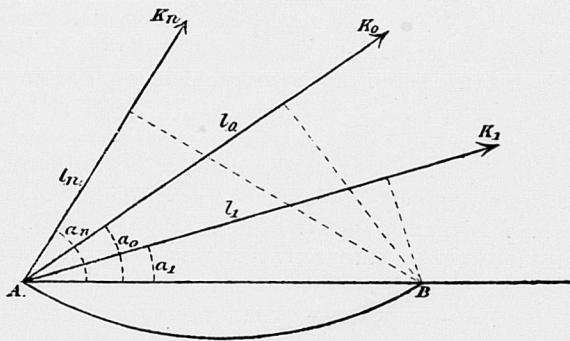
Deze arbeidseenheid wordt *ergoon* genoemd.

In de practijk wordt veel gebruik gemaakt van een andere arbeidseenheid, den *kilogrammeter*; dat is de arbeid, dien het gewicht van een kilogram verricht, als het aangrijpingspunt dier kracht zich één meter in haar richting verplaatst. De kilogrammeter is $981,2 \times 10^5$ maal zoo groot als de ergoon.

Indien de kracht K veranderlijke grootte en richting heeft, bepaalt men de som der arbeiden, die bij eenzelfde verplaatsing van P verricht zou worden door een kracht K' , welke telkens na een zeer klein tijdsverloop dezelfde richting en grootte heeft als K , en zoekt de grenswaarde van deze som, als dit tijdsverloop kleiner en kleiner wordt genomen.

Is de richting der kracht voortdurend loodrecht op de richting der beweging, dan is de door de kracht verrichte arbeid nul.

Fig. 15.



Laat $K_1, K_2, \dots, K_n$ (fig. 15) krachten zijn, die werken op een punt P dat zich verplaatst heeft van A naar B , en laat K_o de resultante dier krachten zijn, dan is langs elke willekeurige lijn:

$$K_o \cos \alpha_o = \Sigma (K \cos \alpha) = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \dots + K_n \cos \alpha_n.$$

Men kiese de lijn AX zoodanig, dat zij door A en B gaat, en late uit B loodlijnen neer op de lijnen, langs welke de krachten $K_1, K_2, \dots, K_n$ en K_o werken. De cosinussen der hoeken α hebben de volgende waarden:

$$\cos \alpha_o = \frac{l_o}{AB} \quad \cos \alpha_1 = \frac{l_1}{AB} \quad \dots \quad \cos \alpha_n = \frac{l_n}{AB}.$$

Substitueert men deze waarden in bovenstaande vergelijking, en laat men den gemeenschappelijken factor $\frac{1}{AB}$ weg, dan verkrijgt men:

$$K_o l_o = \Sigma (Kl) = K_1 l_1 + K_2 l_2 + \dots + K_n l_n. \quad (14)$$

Nu zijn $l_o, l_1, \dots, l_n$ de door het punt P in de richting der kracht afgelegde wegen; elk der producten $K_o l_o, K_1 l_1, \dots, K_n l_n$ is dus de grootte van den arbeid, door de daarin voorkomende kracht verricht bij de verplaatsing van het punt P van A naar B .

Uit de vergelijking volgt dus:

De arbeid door de resultante verricht is gelijk aan de som der arbeiden verricht door de composanten.

In fig. 15 kunnen $K_1, \dots, K_n$ ook zijn de ontbindingskrachten van K_o ; dus:

De arbeid door een kracht verricht is gelijk aan de som der arbeiden verricht door de ontbindingskrachten.

§ 20. Arbeidsvermogen.

Indien een stoffelijk punt door de omstandigheden, waarin het verkeert, in staat is een kracht negatieven arbeid op zich te laten verrichten, dan zegt men dat het arbeidsvermogen bezit.

De grootte van dit arbeidsvermogen wordt evenredig ge-

steld met het bedrag van den negatieven arbeid, dien het punt op zich kan laten verrichten.

Men zegt dat een punt P de eenheid van arbeidsvermogen bezit, als het de negatieve eenheid van arbeid op zich kan laten verrichten.

Deze eenheid van arbeidsvermogen wordt *ergist* genoemd.

In de praktijk wordt dikwijls gebruik gemaakt van een andere eenheid van arbeidsvermogen, de zoogenaamde *statische eenheid van arbeidsvermogen*, dat is het arbeidsvermogen van een punt, hetwelk den negatieven arbeid van één kilogrammeter op zich kan laten verrichten.

De statische eenheid van arbeidsvermogen bevat $981,2 \times 10^5$ ergisten.

Een punt P , dat een zekere snelheid bezit, heeft ten gevolge van die snelheid arbeidsvermogen.

Laat P zich in C bevinden en een snelheid c eenheden hebben in de richting CD . Als nu op P een kracht van K dynamen gaat werken langs de lijn CD van D naar C , dan verkrijgt P een rechte lijnige eenparig vertraagde beweging. Daar P zich dan beweegt in een richting tegengesteld aan die der kracht K , zoo laat het de kracht K negatieven arbeid verrichten: P bezit dus arbeidsvermogen. Om de grootte van dit arbeidsvermogen te bepalen, moet het bedrag gezocht worden van den negatieven arbeid, dien K kan verrichten.

Zij de massa van P m gram, dan is de vertraging $\frac{K}{m}$ eenh. De tijd, waarna de snelheid van P nul wordt, en K dus geen negatieven arbeid meer verricht, kan gevonden worden uit de vergelijking:

$$v = c - \frac{K}{m} t = 0 \quad \text{of} \quad t = \frac{mc}{K} \text{ seconden.}$$

In die t seconden heeft P een weg afgelegd van $ct - \frac{1}{2} \frac{K}{m} t^2$ of van $\frac{mc^2}{2K}$ centimeters. De kracht K heeft een arbeid verricht van $-\frac{mc^2}{2}$ ergonen; het bedrag van dezen arbeid is onafhankelijk van de grootte der kracht K .

Het arbeidsvermogen van een punt P , dat een massa van

m gram en een snelheid van c eenh. heeft, bedraagt dus $\frac{mc^2}{2}$ ergisten.

Het arbeidsvermogen, dat P bezit tengevolge van zijn snelheid, noemt men zijn *arbeidsvermogen van beweging*.

Elk stoffelijk punt, waarop een kracht werkt, en dat zich in de richting dier kracht kan verplaatsen zonder dat de kracht ophoudt te werken, heeft dientengevolge arbeidsvermogen.

Laat het punt P zich in C bevinden en een snelheid c eenheden hebben in de richting CD ; laat er verder een kracht van K dynamen op werken, langs de lijn CD in de richting van C naar D . Als nu op P langs de lijn CD een kracht K_1 gaat werken, die even groot is als K in de richting van D naar C , dan zijn de krachten K en K_1 in evenwicht, en P krijgt een eenparige beweging langs CD in de richting van C naar D ; het beweegt zich dus in de richting tegengesteld aan die van K_1 , en de kracht K_1 verricht daarbij negatieven arbeid, zonder dat de snelheid van P verandert. P bezit dus arbeidsvermogen, omdat er de kracht K op werkt. Het arbeidsvermogen, dat een punt bezit tengevolge van een kracht die er op werkt, noemt men zijn *arbeidsvermogen van plaats*.

Het bedrag van den negatieven arbeid, dien K_1 verrichten kan, hangt af van den weg, waarover P zich in de richting der kracht K kan bewegen, voordat die kracht K ophoudt op P te werken. Daar dit bedrag in vele gevallen niet kan worden bepaald, beschouwt men gewoonlijk slechts het bedrag van de verandering, die het arbeidsvermogen van plaats van een punt P ondergaat.

Indien op P een kracht werkt van K dynamen, en het zich l centimeters in de richting dier kracht heeft verplaatst, dan is het arbeidsvermogen van plaats van P met Kl ergisten verminderd, daar de negatieve arbeid, dien de kracht K_1 dan zou kunnen verrichten, met Kl ergonen afgenomen is. Werkt op P een kracht van K dynamen en verplaatst het zich l centimeters in de richting tegengesteld aan die van K ; dan is het arbeidsvermogen van plaats van P met Kl ergisten toegenomen, daar de negatieve arbeid, dien de kracht K_1

zou kunnen verrichten, met Kl ergonen is vermeerderd.

In het algemeen, als op een punt P een kracht K werkt, en het beweegt zich zoodanig dat K een positieven of negatieven arbeid van A ergonen verricht, dan zal het arbeidsvermogen van plaats van P met A ergisten vermindert of vermeerderd zijn.

Uit de hierboven bewezen vergelijking:

$$K_o l_o = K_1 l_1 + K_2 l_2 \dots + K_n l_n$$

volgt, dat als op P werkt een kracht K_o , die de resultante is van de krachten $K_1, K_2 \dots K_n$, bij een willekeurige verplaatsing van P de verandering in zijn arbeidsvermogen van plaats gelijk is aan de som van de veranderingen in arbeidsvermogen van plaats, die P bij diezelfde verplaatsing tengevolge van de inwerking van elk der composanten zou ondergaan.

En ook: als op P werkt een kracht K , dan is bij een willekeurige verplaatsing van P de verandering in zijn arbeidsvermogen van plaats gelijk aan de som van de veranderingen in arbeidsvermogen van plaats, die het bij dezelfde verplaatsing zou ondergaan onder de inwerking van elk der ontbindingskrachten van K .

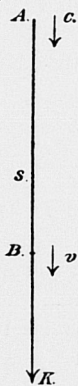
Een punt kan gelijktijdig arbeidsvermogen van plaats en arbeidsvermogen van beweging hebben.

Bevindt zich het punt P met de massa m gram in A (fig. 16), heeft het een snelheid van c eenheden in de richting AB , en werkt er op een kracht van K dynamen langs

Fig. 16. de lijn AB in de richting van A naar B , dan verliest het arbeidsvermogen van plaats, maar het wint arbeidsvermogen van beweging. Heeft P zich s centimeters verplaatst van A naar B , dan is zijn verlies aan arbeidsvermogen van plaats Ks ergisten. Daar P een eenparig versnelde

beweging heeft met de versnelling $\frac{K}{m}$ eenheden, heeft het volgens vergelijking (3) in B de snelheid:

$$v = \sqrt{c^2 + 2 \frac{K}{m} s}.$$



In B heeft het een arbeidsvermogen van beweging van $\frac{mv^2}{2}$ ergisten. De vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging is derhalve:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = Ks \text{ ergisten.}$$

De vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging van P is gelijk aan de vermindering van zijn arbeidsvermogen van plaats.

Werkt op P een kracht in de richting tegengesteld aan die der snelheid van P , dan kan op dergelijke wijze aangetoond worden, dat de vermindering van het arbeidsvermogen van beweging gelijk is aan de vermeerdering van het arbeidsvermogen van plaats.

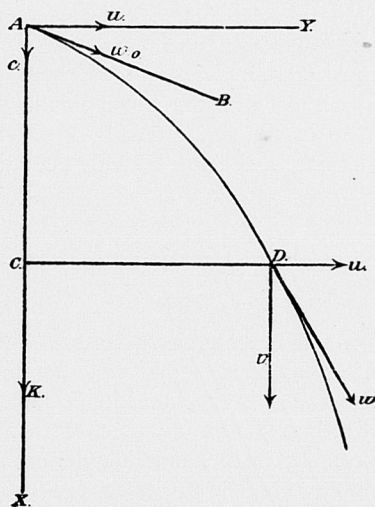
Laat het punt P met de massa van m gram zich in A (fig. 17) bevinden, laat het een snelheid w_0 eenheden in de richting AB hebben, en laat er een kracht op werken van K dynamen in de richting AX . Komt P na zekeren tijd in

D , en heeft het daar de snelheid w eenheden, dan is zijn arbeidsvermogen van beweging vermeer-

derd met $\frac{mw^2}{2} - \frac{mw_o^2}{2}$ ergisten; is de door P in de richting der kracht afgelegde weg $A C$ s centimeters lang, dan is zijn arbeidsvermogen van plaats verminderd met Ks ergisten.

Daar de deviatieversnel-
ling van P standvastig is,
kan volgens § 12 zijn be-
weging onthouden worden
in een eenparige bewe-
ging langs $A Y$ en een
eenparig versnelde langs
 $A X$. Voor deze laatste

Fig. 17.



geldt de hierboven gevonden vergelijking:

$$Ks = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} \quad (15)$$

waarin v en c de ontbindingssnelheden zijn van w en w_o in de richting AX . De ontbindingssnelheden van w en w_o in de richting AY zijn even groot; laten zij de grootte u eenheden hebben; nu is:

$$o = \frac{mu^2}{2} - \frac{mu^2}{2}. \quad (16)$$

Door optelling van de vergelijkingen (15) en (16) vindt men:

$$Ks = \frac{m(v^2 + u^2)}{2} - \frac{m(c^2 + u^2)}{2},$$

of daar $v^2 + u^2 = w^2$ en $c^2 + u^2 = w_o^2$,

$$Ks = \frac{mw^2}{2} - \frac{mw_o^2}{2}.$$

Ook in dit geval is de vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging van P gelijk aan de vermindering van zijn arbeidsvermogen van plaats.

Heeft de kracht K veranderlijke grootte en richting, dan kan men zich den geheelen duur der beweging in zoo kleine deelen verdeeld denken, dat gedurende zulk een tijdsverloop de kracht als standvastig kan worden beschouwd. Gedurende zulk een tijdsverloop is dan de som van het arbeidsvermogen van beweging en het arbeidsvermogen van plaats van P standvastig; dus ook voor den geheelen duur der beweging.

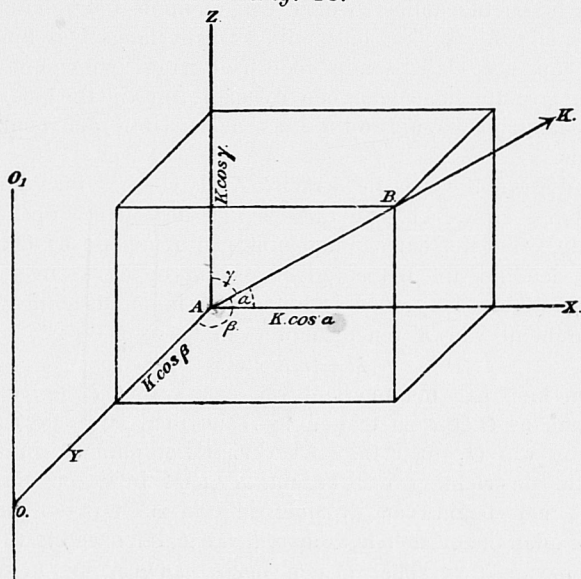
Dit is een bijzonder geval van de wet van het behoud van arbeidsvermogen, welke in de natuurkunde zulk een groote rol speelt, en waarvan ook in de mechanica dikwijls gebruik gemaakt wordt.

§ 21. Moment van een kracht ten opzichte van een as.

Sommige beschouwingen in de mechanica worden veel eenvoudiger door de invoering van het begrip het moment eener kracht K ten opzichte van een rechte lijn OO_1 . De groote belangrijkheid van dit begrip voor de mechanica zal intusschen eerst kunnen blijken bij de behandeling der vaste lichamen.

Zij A (fig. 18) de plaats waar zich het stoffelijk punt P bevindt, en K een kracht, die op P werkt langs de lijn AB . P wordt ook wel het aangrijppingspunt van de kracht K ge-

Fig. 18.



noemd. Men late uit A een loodlijn AO neer op de rechte lijn OO_1 , die voortaan de as zal genoemd worden. Men ontbinde de kracht K langs drie onderling loodrechte lijnen, en wel langs de loodlijn AY op de as OO_1 , langs de lijn AZ , die uit A evenwijdig aan de as OO_1 wordt getrokken, en langs de lijn AX , die loodrecht wordt getrokken op het vlak gaande door het punt A en de as OO_1 . Noemt men de hoeken die AB maakt met de lijnen AX , AY en AZ , α , β en γ , dan zijn de ontbindingskrachten langs deze drie lijnen respectievelijk:

$$K \cos \alpha, \quad K \cos \beta, \quad K \cos \gamma.$$

Het moment van de kracht K wordt evenredig gesteld met de grootte der ontbindingskracht van K langs de lijn AX , die loodrecht staat op het vlak gaande door het aangrijppingspunt van K en de as OO_1 , en met de lengte der loodlijn

uit het aangrijpingspunt van K op de as OO_1 neergelaten. Is M het aantal momentseenheden, en is de loodlijn AO r centimeters lang, dan heeft men:

$$M = f \cdot r K \cos \alpha.$$

Als momentseenheid wordt aangenomen het moment van een kracht K , welker ontbindingskracht langs een lijn loodrecht op het vlak gaande door haar aangrijpingspunt en de as, de grootte heeft van één dynaam, terwijl de loodlijn uit haar aangrijpingspunt op de as neergelaten één centimeter lang is.

Is de grootte van de kracht K dynamen, maakt de lijn waarlangs zij werkt, een hoek α met de loodlijn op het vlak gaande door het aangrijpingspunt van K en de as OO_1 , en is de loodlijn uit het aangrijpingspunt op de as neergelaten r centimeters lang, dan is het aantal momentseenheden van het moment van K ten opzichte van de as OO_1 :

$$M = r K \cos \alpha.$$

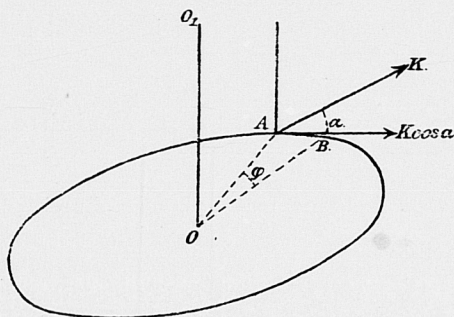
Men kent aan het moment van een kracht K ten opzichte van een as OO_1 een teeken toe. Ziet men langs de as in de richting van O_1 naar O , en verkrijgt het punt P , indien het zich in de richting der kracht K gaat bewegen om de as OO_1 , een begin van draaiing in den zin van den horlogewijzer, dan noemt men het moment van K ten opzichte van de as OO_1 positief; verkrijgt P een begin van draaiing in den zin tegengesteld aan dien van den horlogewijzer, dan is het moment van K ten opzichte van de as OO_1 negatief. In ieder geval wordt het moment uitgedrukt door $r K \cos \alpha$, want bij een draaiing in den zin tegengesteld aan dien van den horlogewijzer is α grooter dan $\frac{\pi}{2}$ en is dus $\cos \alpha$ negatief.

Indien het punt P deel uitmaakte van een vast lichaam om de as OO_1 draaibaar (fig. 19), dan zou P een cirkelvormige beweging hebben. Om den arbeid te bepalen dien de kracht K verricht, indien de voerstraal van P een oneindig kleinen hoek doorloopt van φ radialen, kan men opmerken dat de arbeid door K verricht, gelijk is aan den arbeid verricht door de ontbindingskracht $K \cos \alpha$, daar bij de beweging van P de richtingen der ontbindingskrachten $K \cos \beta$ en $K \cos \gamma$ voortdurend loodrecht zijn op de richting der beweging.

Daar de ontbindingskracht $K \cos \alpha$ voortdurend in de richting der beweging van P werkt, heeft de door haar verrichte arbeid de grootte:

$$\mathfrak{A} = K \cos \alpha \times \text{hoog } AB,$$

Fig. 19.



of, daar hoog $AB = AO \cdot \varphi$ centimeters,
 $\mathfrak{A} = K \cos \alpha \cdot AO \cdot \varphi$.

Het moment van K ten opzichte van de as OO_1 is:

$$M = K \cos \alpha \cdot AO,$$

dus: $\mathfrak{A} = M\varphi$.

Men verkrijgt dus het aantal ergonen onder deze omstandigheden door de kracht K verricht, als men het aantal

momentseenheden van het moment van K ten opzichte van de as OO_1 vermenigvuldigt met het aantal radialen van den oneindig kleinen hoek φ door den voerstraal van P doorloopen.

Momentenvergelijking.

Is K (fig. 18) de resultante van eenige krachten $K_1, K_2, \dots, K_n$ op P werkende, dan is volgens het vroeger verklaarde:

$$K \cos \alpha = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + \dots + K_n \cos \alpha_n$$

$$\text{of } K \cos \alpha \cdot AO = K_1 \cos \alpha_1 \cdot AO + K_2 \cos \alpha_2 \cdot AO + \dots + K_n \cos \alpha_n \cdot AO,$$

dus: $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$.

Bovenstaande vergelijking geldt ook dan, als een of meer der hoeken α stomp zijn. Was bijv. α_2 een stompe hoek, dan zou het moment $K_2 \cos \alpha_2 \cdot AO$ van K_2 ten opzichte van de as OO_1 negatief zijn, en in de $\Sigma (K \cos \alpha \cdot AO)$ met het negatieve teeken moeten voorkomen. Daar de cosinus van een stompen hoek negatief is, zoo zou dit werkelijk het geval zijn.

Het moment der resultante ten opzichte van een as is ge-

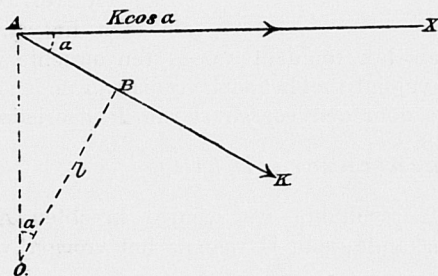
lijk aan de som van de momenten der composanten ten opzichte van diezelfde as.

Deze vergelijking wordt de *momentenvergelijking* genoemd. In figuur 18 kan de kracht K ook in verschillende krachten $K_1, K_2 \dots K_n$ worden ontbonden. Het is gemakkelijk in te zien, dat ook dan de momentenvergelijking geldt, en dus dat het moment van een kracht ten opzichte van een as gelijk is aan de som van de momenten der ontbindingskrachten ten opzichte van diezelfde as.

§ 22. Moment van een kracht ten opzichte van een punt.

De uitdrukking voor het moment van een kracht ten opzichte van een as wordt eenvoudiger, indien de lijn waarlangs de kracht werkt, gelegen is in het vlak, dat door het aangrijpingspunt der kracht loodrecht op de as wordt gebracht. Zij (fig. 20)

Fig. 20.



O het snijpunt van de as en dit vlak, en AB de lijn waarlangs de kracht K werkt op het punt P , dat zich in A bevindt. Het moment van K ten opzichte van de as OO_1 is dan $M = K \cos \alpha \cdot AO$. Laat men uit het punt O een loodlijn OB neer op de lijn AB waarlangs de kracht K werkt, dan is volgens de figuur de lengte l dier loodlijn:

$$l = OB = AO \cos \alpha.$$

of:

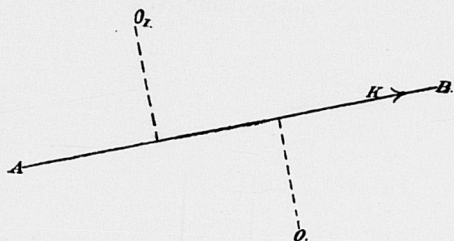
$$M = Kl.$$

In dit geval spreekt men van het moment der kracht K ten opzichte van het punt O , en men verkrijgt het aantal momentseenheden door het aantal dynamen der kracht te vermenigvuldigen met het aantal centimeters van de loodlijn, die uit O wordt neergelaten op de lijn waarlangs de kracht werkt.

Men kent aan het moment van een kracht ten opzichte van een punt een teeken toe.

De kracht K (fig. 21) werkende langs de lijn AB , zou

Fig. 21.



aan het punt P als het in rust was, een beweging geven langs AB . Deze beweging kan beschouwd worden als een begin van draaiing in den zin van den horlogewijzer om O , en als een begin van draaiing

in den zin tegengesteld aan dien van den horlogewijzer om O_1 . In het eerste geval noemt men het moment der kracht ten opzichte van een punt positief, in het tweede geval negatief.

Het moment van een kracht ten opzichte van eenig punt, gelegen in de lijn waarlangs de kracht werkt, is nul.

Het boven gegeven bewijs voor de momentenvergelijking geldt ook voor dit geval, dus:

Het moment van de resultante ten opzichte van een punt O is gelijk aan de som der momenten van de componenten ten opzichte van ditzelfde punt; en

Het moment van een kracht ten opzichte van een punt O is gelijk aan de som der momenten van de ontbindingskrachten ten opzichte van hetzelfde punt.

In deze som moet elk moment met het daaraan toekomend teeken worden genomen.

Schrijft men de momentenvergelijking in den vorm:

$$K_o l_o = K_1 l_1 + K_2 l_2 + \dots + K_n l_n = \sum (Kl),$$

dan blijkt het, dat als men kent de grootten der krachten die op een punt P werken, en de afstanden, waarop zich eenig punt O bevindt van de lijnen waarlangs die krachten werken, men steeds kan bepalen het product van het aantal dynamen der resultante met het aantal centimeters, waarop het punt O verwijderd is van de lijn, waarlangs de resultante werkt. De momentenvergelijking kan dus toegepast worden om een der grootheden K_o of l_o te berekenen, als men de

andere kent. Is $\sum (Kl)$ gelijk nul, dan moet of K , of l , gelijk nul zijn. Kan men derhalve een punt O vinden, ten opzichte waarvan de som der momenten van de op P werkende krachten gelijk nul is, dan gaat de lijn, waarlangs de resultante werkt, door O , en de richting der resultante is dan de richting van A naar O of van O naar A .

TWEEDE AFDEELING.

MECHANICA DER ABSOLUUT VASTE LICHAMEN.

HOOFDSTUK IV.

Algemeene evenwichtsvergelijkingen.

§ 23. Absoluut vaste lichamen.

In de vorige afdeeling werden de lichamen steeds beschouwd als stoffelijke punten, hetzij omdat de afmetingen zoo klein waren, dat zij konden verwaarloosd worden, hetzij omdat er alleen sprake was van de beweging van lichamen in hun geheel, zonder dat er acht geslagen werd op het verschil in de beweging der afzonderlijke deelen. Voortaan wordt van deze vereenvoudiging afgezien. In deze afdeeling zullen behandeld worden zoodanige lichamen, of lichamen onder zoodanige omstandigheden, dat het noodig is de plaats door een deel ingenomen, te onderscheiden van de plaats door een ander deel ingenomen.

De natuurkundigen stellen zich voor, dat ieder lichaam is opgebouwd uit zeer kleine deeltjes, moleculen genoemd, die elkander niet aanraken, maar door tusschenruimten, poriën, van elkander gescheiden zijn. Bovendien dringen de warmteverschijnselen er toe aan te nemen, dat de moleculen in aanhoudende beweging zijn. Van de banen der moleculen weet men bijna niets. Men mag aannemen, dat bij vaste lichamen de moleculen zich met zeer groote snelheden bewegen langs gesloten banen van uiterst geringe afmetingen, zoodat zij telkens op dezelfde plaats terugkomen, waar zij geweest zijn. Maar bij vele beschouwingen komt de beweging der moleculen niet in aanmerking, en wordt het werkelijke

lichaam in onze voorstelling vervangen door een ander, waarvan de moleculen in rust zijn, en zich bevinden op de gemiddelde plaatsen, die zij bij haar beweging innemen.

In de werkelijkheid is men in staat van elk lichaam het volume te veranderen, en dus de afstanden te wijzigen tusschen de gemiddelde plaatsen der moleculen. Men kan zich evenwel ook voorstellen een lichaam, waarvan de moleculen niet alleen in rust zijn, maar ook hun onderlinge afstanden onder geen voorwaarde kunnen wijzigen. Dergelijke vaste lichamen worden daarom *absoluut vaste lichamen* genoemd; en alleen de zoodanige zullen behandeld worden. Wanneer men de beschouwingen over de absoluut vaste lichamen wil toepassen op werkelijk bestaande lichamen, dan moet steeds in aanmerking genomen worden dat zulks alleen geoorloofd is, als de werkelijke lichamen onder zoodanige omstandigheden verkeerden, dat de deelen geen merkbare afstandsverandering ondergaan, en als het niet noodig geacht wordt rekening te houden met de beweging der moleculen, d. w. z. met de warmteverschijnselen, die zouden kunnen optreden.

Men neemt daarbij dan aan, dat er zoo noodig tusschen de punten van het lichaam krachten werken, die de afstanden dier punten onveranderd houden. Omtrent deze krachten worden slechts twee veronderstellingen gemaakt:

- 1^o dat zij werken langs de verbindingslijnen der punten, en
- 2^o dat wanneer P een werking — hetzij aantrekkend hetzij afstootend — ondergaat van Q , Q een even groote werking in tegengestelde richting ondervindt van P , m. a. w., dat ook bij deze krachten werking gelijk is aan terugwerking. Deze krachten worden inwendige krachten genoemd, in tegenstelling van uitwendige krachten, dat zijn zoodanige krachten, die optreden door den invloed van punten, geen deel van het beschouwde lichaam uitmakende.

Men zegt dat de bewegingstoestand van een lichaam niet verandert, als de bewegingstoestand van elk zijner punten onveranderd blijft. Dit laatste zal steeds het geval zijn, als de uit- en inwendige krachten op elk punt werkende in evenwicht zijn. Indien op verschillende punten van het lichaam uitwendige krachten werken, en deze zoodanig zijn, dat zij tengevolge van het onderling verband der punten, geen in-

vloed hebben op de beweging van het lichaam, dan zegt men, dat de uitwendige krachten op het lichaam werkende in evenwicht zijn.

§ 24. Massa van een lichaam. Dichtheid.

Onder de massa van een lichaam verstaat men de som van de massa's der stoffelijke punten, waaruit het lichaam bestaat. Zijn de massa's der stoffelijke punten $m_1, m_2, \dots, m_n$, dan is dus de massa van het lichaam:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \Sigma (m).$$

Is een lichaam opgebouwd uit deelen met de massa's $m_1, m_2, m_3, \dots$ enz. en zijn de afstanden dier massadeelen tot drie onderling loodrechte vlakken resp. $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ enz., dan verstaat men onder het *massa-middelpunt* van het lichaam het punt, waarvan de afstanden tot deze drie vlakken zijn x_o, y_o, z_o , als

$$x_o = \frac{\Sigma (mx)}{\Sigma (m)} \quad y_o = \frac{\Sigma (my)}{\Sigma (m)} \quad z_o = \frac{\Sigma (mz)}{\Sigma (m)}$$

De afstanden tusschen de stoffelijke punten zijn zeer klein, evenals de afmetingen dier punten. Vandaar dat men gewoonlijk niet beschouwt de massa van elk punt afzonderlijk, maar die van een groep stoffelijke punten, welke te zamen een zeker volume innemen. Onder dit volume worden ook begrepen de tusschenruimten tusschen de stoffelijke punten.

De *gemiddelde dichtheid* van een lichaam wordt bepaald door de massa van het lichaam en door zijn volume; zij wordt evenredig gesteld met de massa die de volumeeenheid bevat. Als eenheid van gemiddelde dichtheid wordt aangenomen de gemiddelde dichtheid van een lichaam, dat in een kubieken centimeter een massa van één gram bevat. Is de massa van een lichaam m gram en is zijn volume v kubieke centimeters, dan is zijn gemiddelde dichtheid d eenheden, als: $d = \frac{m}{v}$.

Als de gemiddelde dichtheid van eenig volumedeel van een lichaam dezelfde waarde heeft, hoe klein men dit volumedeel ook neemt, dan zegt men dat het lichaam een standvastige dichtheid heeft; men noemt het lichaam dan homogeen.

Onder de *soortelijke massa* van een stof verstaat men de massa van een kubieken centimeter dier stof.

Noemt men de volumedeelen waarin men een homogeen lichaam kan verdeelen i_1, i_2, i_3 en is de soortelijke massa van de stof, waaruit het lichaam bestaat γ , dan is $m_1 = \gamma i_1$, $m_2 = \gamma i_2 \dots m_n = \gamma i_n$.

Vervangt men in bovenstaande vergelijkingen voor het massamiddelpunt de waarden van m door de hier gevondene, dan verkrijgt men:

$$x_o = \frac{\sum (\gamma i x)}{\sum (\gamma i)} \quad y_o = \frac{\sum (\gamma i y)}{\sum (\gamma i)} \quad z_o = \frac{\sum (\gamma i z)}{\sum (\gamma i)}$$

Neemt men in aanmerking dat γ als een standvastige grootheid voor het somteeken mag worden gebracht, en noemt men het geheele volume van het lichaam I , dan wordt:

$$x_o = \frac{\sum (i x)}{I} \quad y_o = \frac{\sum (i y)}{I} \quad z_o = \frac{\sum (i z)}{I}$$

De plaats van het massa-middelpunt bij een homogeen lichaam, hangt dus alleen af van den vorm van het lichaam, en niet van de stof waaruit het bestaat.

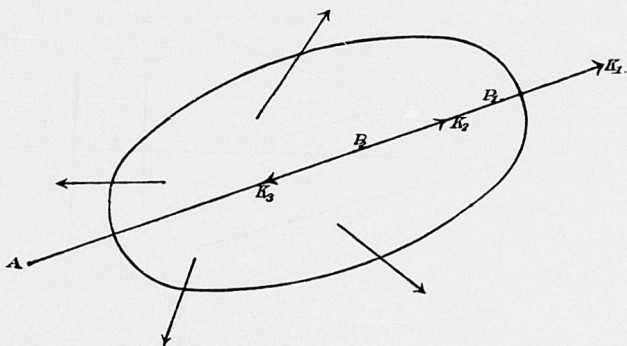
§ 25. Vervanging van krachten.

Indien op de punten P_1 en P_2 van een lichaam respectievelijk de uitwendige krachten K_1 en K_2 werken, in onderling tegengestelde richtingen langs de lijn die P_1 en P_2 verbindt, terwijl K_1 en K_2 even groot zijn, dan is de beweging van het lichaam geheel dezelfde alsof de krachten K_1 en K_2 er niet op werkten. Het is toch klaarblijkelijk dat K_1 en K_2 geen invloed op de beweging van het lichaam kunnen hebben, zonder dat de afstand van P_1 en P_2 een verandering ondergaat. Men zegt, dat de krachten K_1 en K_2 elkanders werking opheffen.

Men besluit hieruit tot het volgende: als op een punt P_1 van het lichaam een uitwendige kracht K_1 werkt langs de lijn AB , en als P_2 een ander punt van het lichaam is op de lijn AB gelegen, dan is de beweging, die het lichaam verkrijgt door de inwerking van de kracht K_1 , dezelfde als die welke het lichaam zou verkrijgen, indien op P_1 geen kracht, en op P_2 een kracht K_2 werkte, langs de lijn AB , even groot als K_1 en in dezelfde richting.

Laat toch K_1 (fig. 22) een der krachten zijn, die op het punt P_1 van het lichaam werken, en laat P_2 een ander punt van het lichaam zijn, in de lijn gelegen waarlangs K_1 werkt. Indien nu op P_2 nog bovendien twee krachten K_2 en K_3

Fig. 22.

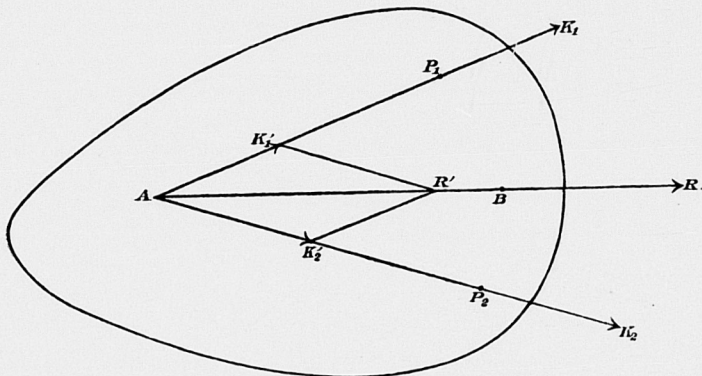


gaan werken, in onderling tegengestelde richtingen, langs dezelfde lijn en even groot als K_1 , dan zullen deze krachten geen invloed op de beweging van het lichaam hebben, omdat haar resultante nul is. Daar nu de krachten K_1 en K_3 , zooals hierboven is opgemerkt, elkanders werking opheffen, zoo zal de invloed, dien de kracht K_2 in P_2 aangrijpende op de beweging van het lichaam heeft, dezelfde zijn als die van de kracht K_1 in P_1 aangrijpende.

Uit deze beschouwingen blijkt, dat de invloed, dien een uitwendige kracht heeft op de beweging van het lichaam, alleen afhangt van haar grootte, van haar richting, en van de lijn waarlangs zij werkt, en niet van het punt waarop zij werkt, of zooals men het uitdrukt, van haar aangrijpingspunt. Is dus A (fig. 22) een meetkundig punt buiten het lichaam gelegen op de lijn waarlangs K_1 werkt, dan mag ook A als het aangrijpingspunt van K_1 worden beschouwd, mits men zich voorstelt, dat de afstand van A tot de stoffelijke punten van het lichaam niet kan veranderen.

Indien twee in de punten P_1 en P_2 van het lichaam aangrijpende krachten K_1 en K_2 (fig. 23) werken langs lijnen, die elkander in een punt A snijden, dan kunnen de krachten K_1 en K_2 in P_1 en P_2 aangrijpende, vervangen worden door

Fig. 23.



de even groote krachten K_1' en K_2' aangrijpende in A . Hierbij is het onverschillig of het snijpunt A in het lichaam is gelegen of daarbuiten, mits in het laatste geval A wordt beschouwd als een meetkundig punt, welks afstand tot de stoffelijke punten van het lichaam niet kan veranderen. De beweging van het lichaam is dus dezelfde onder de werking der krachten K_1' en K_2' in A aangrijpende, als onder de werking der krachten K_1 en K_2 aangrijpende in P_1 en P_2 . Is R' de resultante van de krachten K_1' en K_2' , dan heeft R' denzelfden invloed op de beweging van het lichaam als K_1 en K_2 te zamen. Men kan nu weer R' aangrijpende in A , vervangen door de even groote kracht R aangrijpende in eenig punt B van het lichaam, op de lijn gelegen waarlangs R' werkt. Op de beweging van het lichaam heeft dus ook R denzelfden invloed als K_1 en K_2 . Daar echter onder de werking der krachten K_1' en K_2' geheel andere inwendige krachten tot stand komen als onder de werking der krachten K_1 en K_2 , zoo kan R niet meer worden beschouwd als de resultante, de kracht

die in alle opzichten dezelfde uitwerking heeft als K_1 en K_2 . Vandaar dat men R noemt de *vervangende* van K_1 en K_2 ; met betrekking toch tot de beweging kan haar werking die van K_1 en K_2 vervangen.

Ook in dit geval geldt de momentenvergelijking. Volgens fig. 24 toch is:

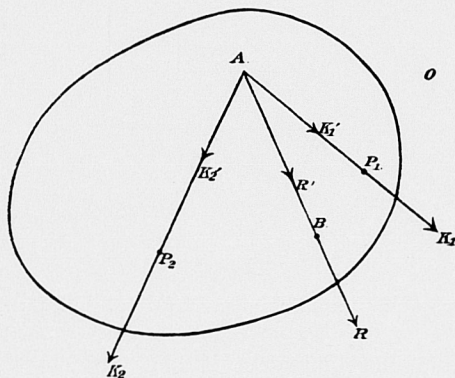
Moment R = moment R' = moment K_1' + moment K_2' .

Maar moment $K_1' =$ moment K_1 .

en moment $K_2' =$ moment K_2 ,

dus: moment $R =$ moment $K_1 +$ moment K_2 .

Fig. 24.



De som der momenten van twee uitwendige in één vlak werkende krachten ten opzichte van een punt O is gelijk aan het moment van de vervangende ten opzichte van hetzelfde punt O .

Om de resultante R van twee in een punt A aangrijpende krachten K_1 en K_2 te vinden, kan men uit de vergelijkingen:

$$R \cos \alpha = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 \quad (17)$$

$$R \sin \alpha = K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_2 \quad (18)$$

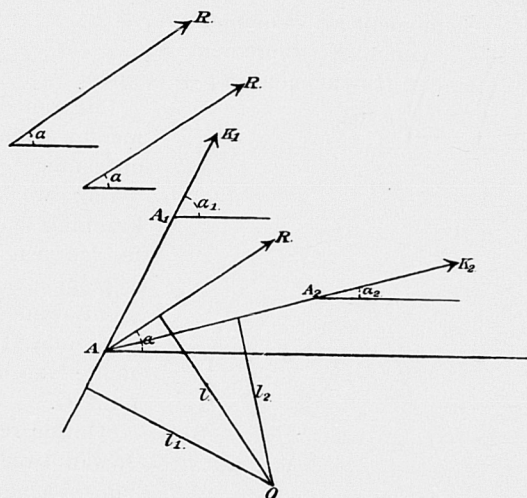
de grootte en de richting der resultante bepalen, terwijl het punt A haar aangrijpingspunt is.

Moet echter de vervangende gezocht worden van de krachten K_1 en K_2 aangrijpende in A_1 en A_2 (fig. 25), dan zijn bovenstaande vergelijkingen niet meer voldoende.

In dit geval is er nog een vergelijking noodig, welke aangeeft, dat van al de oneindig vele krachten R , die de uit de vergelijkingen (17) en (18) voortvloeiende grootte en richting hebben, diegene wordt bedoeld, welke werkt langs de

lijn gaande door A , het snijpunt van de lijnen waarlangs K_1 en K_2 werken. Men kan daartoe gebruik maken van de momentenvergelijking, want van alle lijnen, waarlangs de kracht

Fig. 25.



R kan werken, is er slechts één, wier afstand tot het punt O de uit de momentenvergelijking gevonden grootte l heeft. Voegt men dus bij de vergelijkingen (17) en (18) nog de volgende:

$$Rl = K_1 l_1 + K_2 l_2, \quad (19)$$

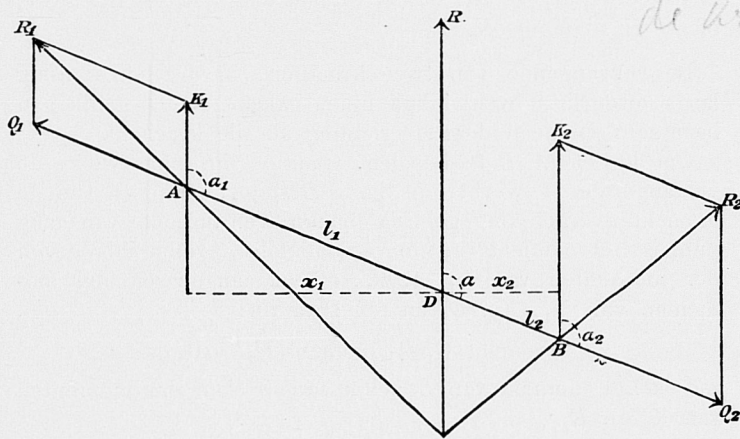
dan zijn de grootte en de richting van de vervangende, en de lijn langs welke zij werkt, volkomen bepaald.

§ 26. Vervanging van twee krachten langs onderling evenwijdige lijnen werkende.

Bij de boven gegeven beschouwingen is uitgegaan van de veronderstelling dat de lijnen, waarlangs de krachten werken, elkander snijden. Er moet dus onderzocht worden of deze drie vergelijkingen nog geldig blijven, indien de krachten langs onderling evenwijdige lijnen werken.

Werken op de punten A en B (fig. 26) van een lichaam twee uitwendige krachten K_1 en K_2 langs onderling evenwijdige lijnen in dezelfde richting, dan zal het op de beweging van het lichaam geen invloed hebben, als er nog bovendien op de punten A en B twee even groote krachten Q_1 en Q_2 gaan werken, langs de lijn AB in onderling tegengestelde

Fig 26.



richtingen. De krachten K_1 en K_2 hebben dus op de beweging denzelfden invloed als de vier krachten K_1 , K_2 , Q_1 en Q_2 te zamen. De krachten K_1 en Q_1 hebben tot resultante R_1 ; de krachten K_2 en Q_2 hebben tot resultante R_2 . De vervangende van K_1 en K_2 heeft dus denzelfden invloed op de beweging als de vervangende R van R_1 en R_2 , en daar de lijnen, waarlangs deze laatste werken, elkander snijden, mogen de vergelijkingen (17) (18) en (19) ook ter bepaling van de vervangende van K_1 en K_2 worden aangewend.

Neemt men als assen aan de lijn AB en een lijn loodrecht op AB , en noemt men de hoeken, die de lijnen waarlangs R_1 en R_2 werken, maken met de lijn AB φ_1 en φ_2 , dan gaan de vergelijkingen (17) en (18) over in:

$$R \cos \alpha = R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2 \quad R \sin \alpha = R_1 \sin \varphi_1 + R_2 \sin \varphi_2.$$

Neemt men verder in aanmerking dat R_1 de resultante is van K_1 en Q_1 , R_2 die van K_2 en Q_2 , dat de lijn waarlangs Q_1 werkt den hoek π , die waarlangs Q_2 werkt den hoek 0 maakt met AB , terwijl $\alpha_1 = \alpha_2$ en $Q_1 = Q_2$, dan is:

$$\begin{aligned} R_1 \cos \varphi_1 &= K_1 \cos \alpha_1 - Q_1 & R_1 \sin \varphi_1 &= K_1 \sin \alpha_1 \\ R_2 \cos \varphi_2 &= K_2 \cos \alpha_1 + Q_1 & R_2 \sin \varphi_2 &= K_2 \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

Bovenstaande vergelijkingen veranderen daardoor in:

$$\begin{aligned} R \cos \alpha &= (K_1 + K_2) \cos \alpha_1 & R \sin \alpha &= (K_1 + K_2) \sin \alpha_1 \\ \text{of} \quad R &= K_1 + K_2 & \alpha &= \alpha_1 = \alpha_2. \end{aligned}$$

De vervangende van twee krachten, in dezelfde richting langs onderling evenwijdige lijnen werkende, is gelijk aan haar som en heeft dezelfde richting als die krachten.

Om het punt D te bepalen, waar de lijn langs welke de vervangende R werkt, de lijn AB snijdt, kan men van de momentenvergelijking gebruik maken. Ten opzichte van eenig punt is het moment van de vervangende R gelijk aan de som der momenten van R_1 en R_2 , of ook aan de som der momenten van K_1 , K_2 , Q_1 en Q_2 . Daar nu:

$$\text{moment } Q_1 + \text{moment } Q_2 = 0,$$

zoo is het moment van R gelijk aan de som der momenten van K_1 en K_2 .

Neemt men de momenten ten opzichte van het punt D , dan is:

$$0 = K_1 x_1 - K_2 x_2 \quad \text{of} \quad 0 = K_1 l_1 - K_2 l_2.$$

De twee stukken l_1 en l_2 , waarin de lijn AB door het punt D wordt verdeeld, zijn omgekeerd evenredig met de grootten der krachten, die op de uiteinden van AB werken.

Vervangt men l_2 door $AB - l_1$, dan vindt men voor den afstand l_1 van D tot aan het aangrijpingspunt van K_1 :

$$l_1 = \frac{K_2}{K_1 + K_2} \cdot AB.$$

Dit punt heet het middelpunt der krachten K_1 en K_2 omdat de ligging er van onafhankelijk is van de richting der krachten, en alleen afhangt van haar grootten en van de plaats der aangrijpingspunten van K_1 en K_2 .

Werken er meer dan twee krachten langs onderling evenwijdige lijnen in één vlak, dan kan men eerst de vervangende R_1 zoeken van K_1 en K_2 , daarna de vervangende R_2 van R_1 en K_3 enz. Ook voor de vervangende van een willekeurig aantal krachten, werkende langs onderling evenwijdige lijnen in één vlak gelegen, geldt dus:

De vervangende is gelijk aan de som der krachten, en heeft dezelfde richting als deze krachten.

Het moment der vervangende ten opzichte van een in het vlak gelegen punt 0, is gelijk aan de som der momenten van alle krachten ten opzichte van hetzelfde punt 0.

Korter uitgedrukt, heeft men:

$$R = \Sigma (K) \qquad Rl_o = \Sigma (Kl).$$

Ook in dit geval bestaat een middelpunt van krachten.

Indien de krachten K_1 en K_2 werken langs onderling evenwijdige lijnen in onderling tegengestelde richtingen, kan men op dezelfde wijze als hierboven te werk gaan. Er blijkt dan (fig. 27) dat als K_1 en K_2 even groot zijn, de lijnen waarlangs de resultanten R_1 en R_2 werken, steeds onderling gelijke hoeken maken met de lijn AB , en dus ook onderling evenwijdig zijn. In dit geval kunnen K_1 en K_2 niet vervangen worden door twee krachten langs twee elkander snijdende lijnen.

Hebben K_1 en K_2 verschillende grootten, dan maken de lijnen waarlangs de resultanten R_1 en R_2 werken, onderling ongelijke hoeken met de lijn AB . De krachten K_1 en K_2 kunnen dan vervangen worden door krachten R_1 en R_2 , werkende langs twee elkander snijdende lijnen, en in dit geval gelden dus ook de vergelijkingen (17) (18) en (19).

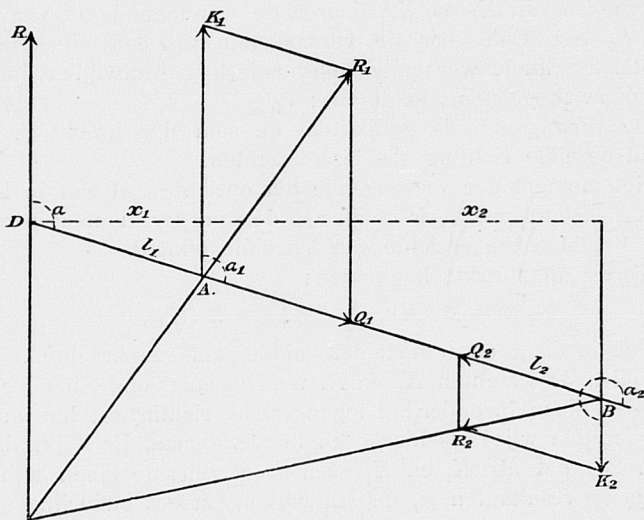
De vergelijkingen (17) en (18) gaan weer over in:

$$R \cos \alpha = R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2 \qquad R \sin \alpha = R_1 \sin \varphi_1 + R_2 \sin \varphi_2.$$

Neemt men in aanmerking, dat R_1 de resultante is van K_1 en Q_1 , R_2 die van K_2 en Q_2 , dat de lijn waarlangs Q_1 werkt den hoek α , die waarlangs Q_2 werkt den hoek π maakt met AB , dat $\alpha_2 = \pi + \alpha_1$ en $Q_1 = Q_2$, dan is

$$\begin{aligned} R_1 \cos \varphi_1 &= K_1 \cos \alpha_1 + Q_1 & R_1 \sin \varphi_1 &= K_1 \sin \alpha_1 \\ R_2 \cos \varphi_2 &= -K_2 \cos \alpha_1 - Q_1 & R_2 \sin \varphi_2 &= -K_2 \sin \alpha_1. \end{aligned}$$

Fig. 27.



Bovenstaande vergelijkingen veranderen daardoor in

$$R \cos \alpha = (K_1 - K_2) \cos \alpha_1 \quad R \sin \alpha = (K_1 - K_2) \sin \alpha_1$$

Brengt men deze vergelijkingen tot het kwadraat, en telt men ze op, dan wordt:

$$R^2 = (K_1 - K_2)^2$$

of $R = \pm (K_1 - K_2) \text{ en } \sin \alpha = \frac{K_1 - K_2}{R} \sin \alpha_1.$

Een kracht is uit den aard der zaak steeds een positieve grootheid. Is dus $K_1 > K_2$, dan heeft men:

$$R = K_1 - K_2 \text{ en } \sin \alpha = \sin \alpha_1.$$

Is $K_1 < K_2$, dan wordt:

$$R = K_2 - K_1 \text{ en } \sin \alpha = - \sin \alpha_1.$$

De vervangende van twee krachten van ongelijke grootten, werkende langs onderling evenwijdige lijnen in onderling tegengestelde richtingen, is gelijk aan het verschil der krachten, en werkt in de richting der grootste.

Het punt D , waar de lijn langs welke de vervangende R werkt, de lijn AB snijdt, kan weer uit de momentenvergelijking worden gevonden. Neemt men de momenten ten opzichte van het punt D , dan is:

$$-K_1 x_1 + K_2 x_2 = 0 \text{ of } -K_1 l_1 + K_2 l_2 = 0.$$

De twee stukken l_1 en l_2 , waarin de lijn AB door het punt D wordt verdeeld, zijn omgekeerd evenredig met de grootten der krachten, die op de uiteinden van AB werken. Vervangt men l_2 door $l_1 + AB$, dan verkrijgt men voor den afstand l_1 van D tot aan het aangrijpingspunt van K_1 :

$$l_1 = \frac{K_2}{K_1 - K_2} \cdot AB.$$

§ 27. Koppel.

In de vorige paragraaf is aangetoond, dat men twee even groote krachten K_1 en K_2 op een lichaam werkende, langs onderling evenwijdige lijnen in onderling tegengestelde richtingen, niet kan vervangen door twee krachten, werkende langs elkander snijdende lijnen; zij kunnen dus niet door één kracht worden vervangen. Een zoodanig stel krachten noemt men een *koppel*. Het vlak waarin de krachten werken heet het *koppelvlak*; de afstand van de lijnen, waarlangs de krachten K_1 en K_2 werken, heet de *arm* van het koppel.

Het *moment* van een koppel wordt bepaald door de grootte der krachten en door den arm. Het wordt evenredig gesteld met de grootte der krachten en met den arm. Is elk der krachten K dynamen groot, en is de arm l centimeters, dan is het koppelmoment:

$$M = f K l.$$

Als eenheid van koppelmoment wordt aangenomen het moment van een koppel, waarvan elk der krachten één dynaam is, en dat een arm heeft van één centimeter. Is elk der krachten K dynamen, en is de arm l centimeters, dan is het moment van het koppel M dier eenheden, als

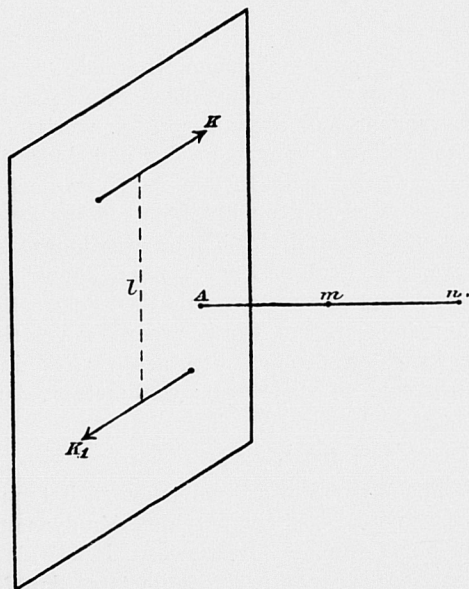
$$M = K l.$$

Men kent aan een koppelmoment een teeken toe. Indien de krachten, die het koppel vormen, aan het koppelvlak een

draaiing trachten te geven in den zin van den horlogewijzer, dan noemt men het koppelmoment positief; trachten zij het koppelvlak te doen draaien in den zin tegengesteld aan dien van den horlogewijzer, dan noemt men het koppelmoment negatief. Natuurlijk hangt dan het teeken van een gegeven koppel nog af van de plaats, welke men zich voorstelt in te nemen. Met de voeten in het koppelvlak staande, kan men zich met het hoofd òf naar de eene zijde òf naar de andere zijde van het vlak gericht denken.

Wanneer men in eenig punt A van het koppelvlak (fig. 28) een loodlijn op dat vlak opricht aan dien kant, van waaruit

Fig. 28.



gezien het koppel aan het koppelvlak een draaiing tracht te geven in den zin van den horlogewijzer, en wanneer op die loodlijn een stuk mn wordt genomen, welks lengte evenredig is met het moment van het koppel, dan noemt men dat stuk mn in de richting van m naar n , de *as* van het koppel. Er zal aangetoond worden, dat de uitwerking van een koppel geheel bepaald is door de grootte en de

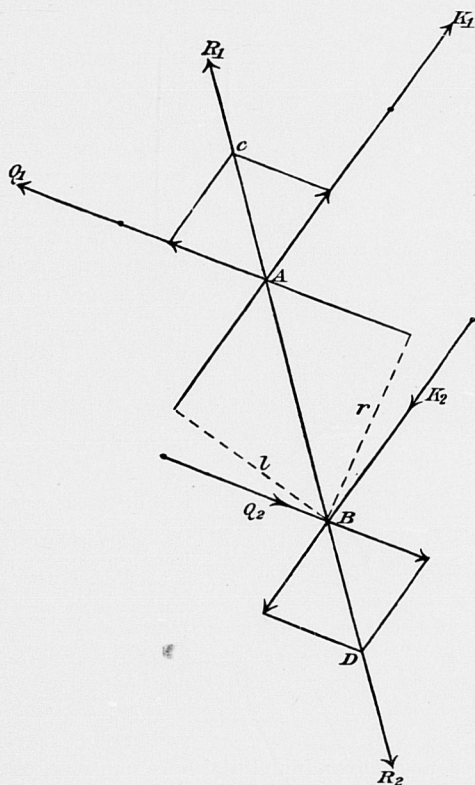
richting van zijn *as*, en dat dus de *as* beschouwd mag worden als de graphische voorstelling van het koppel.

§ 28. Vervanging van koppels in één vlak werkende.

Wanneer twee koppels zoodanig op een lichaam werken, dat zij te zamen geen invloed hebben op de beweging van het lichaam, dan zegt men dat die koppels elkander in evenwicht houden.

Twee koppels in hetzelfde vlak werkende en met willekeurige armen, houden elkander in evenwicht, wanneer hun

Fig. 29.



momenten even groot zijn, maar in teeken verschillen, en dus de algebraïsche som der momenten nul is.

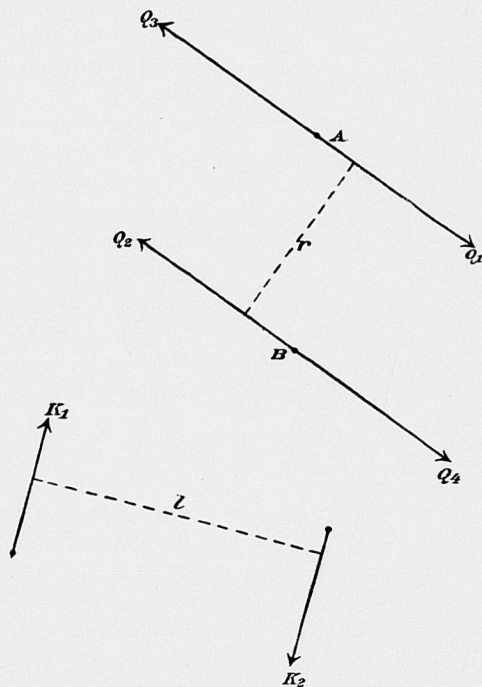
Laat Kl en $-Qr$ eenheden de momenten zijn van twee op een lichaam werkende koppels (fig. 29), terwijl $Kl = Qr$ is.

Men verlange de lijnen, waarlangs de krachten K_1 en Q_1 werken, totdat zij elkander snijden in A , en bepale door de parallelogramconstructie de lijn AC , die de vervangende R_1 van K_1 en Q_1 voorstelt. Men verlange evenzoo de lijnen, waarlangs K_2 en Q_2 wer-

ken, en bepale de lijn BD , die de vervangende van K_2

en Q_2 voorstelt. De lijnen AC en BD zijn even groot als gelijkstandige diagonalen van congruente parallelogrammen. Het moment van R_1 ten opzichte van het punt B is volgens de momentenvergelijking $Kl = Qr$; dit moment is nul, daar gegeven is $Kl = Qr$. De lijn, waarlangs R_1 werkt, gaat dus door B . Op dezelfde wijze toont men aan dat de lijn, waarlangs R_2 werkt, door A gaat. Daar R_1 en R_2 even groot zijn, en langs dezelfde lijn AB in onderling tegengestelde richtingen werken, houden zij elkander in evenwicht; dit is dus ook het geval met de koppels $K_1 K_2$ en $Q_1 Q_2$.

Fig. 30.



Uit het hier bewezene volgt, dat men een koppel $K_1 K_2$ (fig. 30) steeds mag vervangen door een in hetzelfde vlak werkend koppel $Q_1 Q_2$, mits dit laatste hetzelfde moment heeft als het eerste. Men trekke toch door de twee willekeurige punten A en B van het lichaam, twee onderling evenwijdige lijnen, wier afstand r centimeters bedraagt.

Indien langs die lijnen nog bovendien krachten gaan werken, en wel op A de even groote krachten Q_1 en Q_3 in onderling tegengestelde richtingen, en op B de even groote krachten

Q_2 en Q_4 in onderling tegengestelde richtingen, dan heeft dit geen invloed op de beweging van het lichaam.

Hebben de krachten Q_1 , Q_2 , Q_3 en Q_4 alle de grootte Q dynamen, dan werken nu op het lichaam de drie koppels $K_1 K_2$, $Q_1 Q_2$ en $Q_3 Q_4$, terwijl zijn beweging dezelfde is gebleven. Is bovendien $Qr = Kl$, dan houden de koppels $K_1 K_2$ en $Q_3 Q_4$ elkander in evenwicht, omdat de som hunner momenten nul is. Het koppel $K_1 K_2$ is derhalve vervangen door het koppel $Q_1 Q_2$, waarvan het moment gelijk is aan dat van $K_1 K_2$.

Werken er verschillende koppels in eenzelfde vlak met momenten M_1 , M_2 enz., dan kan elk dier koppels vervangen worden door een ander, waarvan de krachten aangrijpen in twee willekeurig gekozen punten A en B , en werken langs gegeven onderling evenwijdige lijnen. Is de afstand dier lijnen l centimeters, dan werken langs elk dier lijnen krachten groot $\frac{M_1}{l}$, $\frac{M_2}{l}$ enz. dynamen. De in A en de in B aangrijpende resultanten der langs elke lijn werkende krachten, vormen dus een koppel, waarvan het moment is:

$$M = M_1 + M_2 + \text{enz.}$$

Indien derhalve eenige koppels in één vlak op een lichaam werken, dan is het moment van het vervangende koppel gelijk aan de som der momenten van de gegeven koppels.

§ 29. Vervanging van koppels in onderling evenwijdige vlakken werkende.

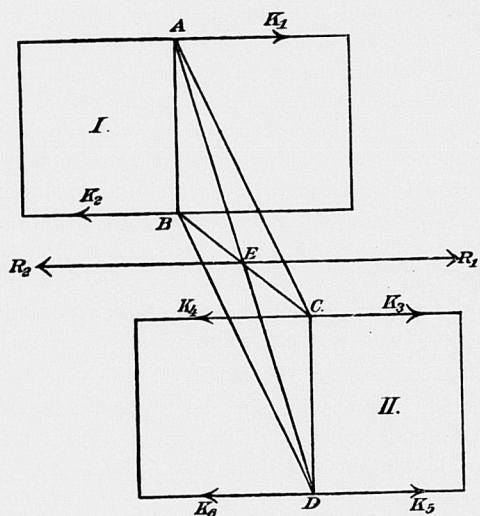
Alles wat hierboven bewezen is, geldt ook voor koppels in onderling evenwijdige vlakken werkende.

Om dit aan te toonen behoeft men slechts te bewijzen, dat een koppel werkende in het vlak I , vervangen kan worden door een ander koppel met een even groot moment, werkende in een vlak II evenwijdig aan vlak I , zonder dat de beweging van het lichaam verandert.

Zijn $K_1 K_2$ (fig. 31) de krachten van een koppel werkende in vlak I ; trekt men ergens een loodlijn AB op de lijnen waarlangs die krachten werken, dan mogen de punten A en B als de aangrijpingspunten van K_1 en K_2 worden beschouwd.

Zij CD een lijn in vlak II gelijk en evenwijdig aan AB ; indien nu nog bovendien in C de krachten K_3 en K_4 , in D de krachten K_5 en K_6 gaan werken; alle even groot als K_1 langs lijnen loodrecht op CD in onderling tegengestelde richtingen, dan houden die krachten elkander in evenwicht,

Fig. 31.



en hebben dus geen invloed op de beweging van het lichaam. De krachten K_1 en K_5 kunnen door R_1 , de krachten K_2 en K_4 door R_2 vervangen worden. Beide vervangenden R_1 en R_2 grijpen aan in het snijpunt E der diagonalen AD en BC van het parallelogram $ABCD$; zij zijn even groot, en werken langs dezelfde lijn in onderling tegengestelde richtingen;

zij zijn dus met elkander in evenwicht. De krachten K_3 K_6 vormen nu in vlak II een koppel, dat het gegeven koppel K_1 K_2 in vlak I vervangt.

In elk der beide vlakken mag een willekeurig koppel vervangen worden door een ander met hetzelfde moment; hiermede is derhalve geheel algemeen bewezen, dat een koppel in eenig vlak werkende, steeds vervangen kan worden door een ander, werkende in een vlak evenwijdig aan het zijne, mits het moment hetzelfde blijft.

In verband met het in de vorige paragraaf bewezene volgt hieruit nog:

Koppels werkende in evenwijdige vlakken kunnen steeds

worden vervangen door één koppel, welks moment gelijk is aan de algebraïsche som van de momenten der gegeven koppels; als vlak van het vervangend koppel mag beschouwd worden elk willekeurig vlak evenwijdig aan de gegeven vlakken.

Door de as van een koppel zijn bepaald de grootte van het moment en de stand van alle onderling evenwijdige vlakken loodrecht op de as. Hiermede is dus tevens het bewijs geleverd, dat de werking van een koppel geheel bepaald is door zijn as.

§ 30. Vervanging van koppels werkende in vlakken, die elkander snijden.

Werken twee koppels met momenten M en M_1 in vlakken die elkander snijden (fig. 32), dan kunnen zij steeds vervangen worden door twee andere koppels KK_1 en QQ_1 , waarvan de krachten werken op twee willekeurige punten A en B in de doorsnede der vlakken gelegen, en langs lijnen loodrecht op AB getrokken. Is de lijn AB l centimeters lang, dan is:

$$K = \frac{M}{l} \text{ en } Q = \frac{M_1}{l} \text{ dynamen.}$$

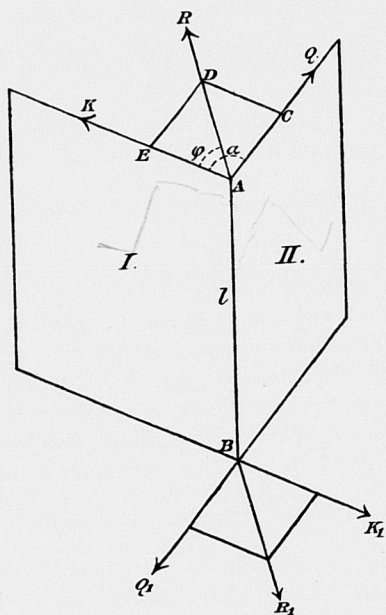
De krachten K en Q in A aangrijpende kunnen tot een resultante R worden samengesteld; de krachten K_1 en Q_1 in B aangrijpende tot een resultante R_1 . De lijnen, die R en R_1 voorstellen, zijn de diagonalen van twee parallelogrammen, die in evenwijdige vlakken liggen, en slechts verschillen door de onderling tegengestelde richtingen der gelijkstandige zijden. De resultanten R en R_1 zijn dus even groot, en werken langs onderling evenwijdige lijnen in onderling tegengestelde richtingen; zij vormen derhalve een koppel. Het moment van het vervangend koppel is Rl .

Er zal aangetoond worden, dat als op de lijnen OM en ON , die de assen der gegeven koppels voorstellen, een parallelogram wordt beschreven, de diagonaal OL , waarvoor OM en ON de omliggende zijden zijn, in grootte en richting de as van het vervangend koppel voorstelt.

De lijn OM stelle de as voor van het koppel KK_1 ; zij staat dus loodrecht op vlak I en heeft de lengte Kl centimeters;

de lijn ON stelde de as voor van het koppel Q_1 ; zij staat dus loodrecht op vlak II en heeft de lengte $Q_1 l$ centimeters. De twee parallelogrammen $ACDE$ en $OMLN$ zijn gelijkvormig, want de hoek tus-

Fig. 32.



schen de lijnen OM en ON is gelijk aan den hoek tusschen de vlakken I en II , en bijgevolg ook aan den hoek tusschen de lijnen, waarlangs de krachten K en Q werken; de zijden om dien hoek in het parallelogram $OMLN$ zijn l maal zoo lang als de gelijkstandige zijden van het parallelogram $ACDE$. De diagonaal OL is derhalve ook l maal zoo lang als de gelijkstandige diagonaal AD ; zij heeft dus de grootte Rl . De hoeken die de diagonaal OL maakt met de zijden OM en ON

zijn gelijk aan de hoeken, die de diagonaal AD maakt met

de zijden AE en AC , bijgevolg gelijk aan de hoeken, die het vlak van het vervangend koppel maakt met de vlakken I en II . Hieruit volgt dat de lijn OL loodrecht staat op het vlak van het vervangend koppel, dat zij dus niet alleen in grootte, maar ook in richting de as van het vervangend koppel voorstelt. Eenig koppel, welks vlak loodrecht staat op deze lijn, en welks moment zooveel eenheden heeft als de lijn OL centimeters lang is, kan als het vervangende koppel der twee gegeven koppels beschouwd worden.

In het bovenstaande is bewezen, dat om van twee koppels op een lichaam werkende het vervangende koppel te vinden, men van dezelfde parallelogramconstructie mag gebruik maken, die vroeger is aangewend tot het vinden der resultante van twee krachten. Alle toepassingen uit die constructie gemaakt ter bepaling van de resultante van een willekeurig aantal op een punt werkende krachten, kunnen dus ook dienen bij het bepalen van het vervangend koppel van een willekeurig aantal gegeven koppels.

Laat bijv. een willekeurig aantal koppels met momenten $M_1, M_2, \dots, M_n$ op een lichaam werken. Uit een willekeurig punt O richtte men loodlijnen op de verschillende koppelvlakken op, neme op iedere loodlijn van het punt O af een stuk, zooveel centimeters lang als het daarbij behorende koppel momentseenheden heeft, en' wel in die richting, van waar uit gezien het koppel aan het koppelvlak een draaiing tracht te geven in den zin van den horlogewijzer. Die lijnen stellen dan de assen der koppels voor. Men brenge nu door O drie onderling loodrechte coördinatenassen. Men kan dan elke koppelas ontbinden langs de drie coördinatenassen. Maken de koppelassen hoeken $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \dots, \lambda_n, \mu_n, \nu_n$ met de coördinatenassen, dan zijn die ontbondenen $M_1 \cos \lambda_1, M_1 \cos \mu_1, M_1 \cos \nu_1, \dots, M_n \cos \lambda_n, M_n \cos \mu_n, M_n \cos \nu_n$. De ontbondenen langs elk der coördinatenassen hebben een resulterende gelijk aan haar som, dus:

$$M_x = \Sigma (M \cos \lambda) \quad M_y = \Sigma (M \cos \mu) \quad M_z = \Sigma (M \cos \nu).$$

Voor de as van het vervangend koppel vindt men hieruit de grootte:

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad (20)$$

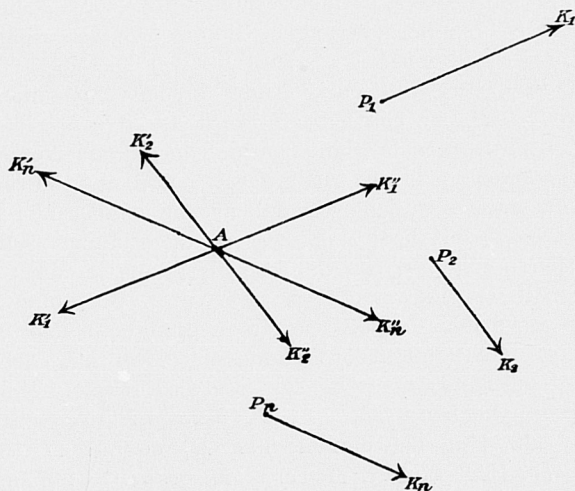
terwijl de richting der as bepaald wordt uit de vergelijkingen:

$$\cos \lambda_o = \frac{M_x}{M_o} \quad \cos \mu_o = \frac{M_y}{M_o} \quad \cos \nu_o = \frac{M_z}{M_o}.$$

§ 31. Algemeene evenwichtsvergelijkingen
voor willekeurige krachten op een
lichaam werkende.

Laat $K_1, K_2, \dots, K_n$ (fig. 33) zijn uitwendige krachten, die in de punten $P_1, P_2, \dots, P_n$ van een lichaam aangrijpen, en werken langs lijnen, die ten opzichte van elkander willekeurig gelegen zijn. Zij A een punt van het lichaam of een meetkundig punt daarbuiten, waarvan de afstanden tot de

Fig. 33.



punten van het lichaam niet kunnen veranderen. De beweging van het lichaam zal geen wijziging ondergaan, indien nog bovendien in A gaan werken: de krachten K_1' en K_1'' , even groot als K_1 , in onderling tegengestelde richtingen langs een lijn evenwijdig met die, waarlangs K_1 werkt; de krachten K_2' en K_2'' , even groot als K_2 , in onderling tegenge-

stelde richtingen langs een lijn evenwijdig met die, waarlangs K_2 werkt, enz.

Elk der n gegeven krachten K is dan vervangen door drie krachten K , K' en K'' . De kracht K'' grijpt aan in het punt A en heeft dezelfde richting als de onmiddellijk gegeven kracht K ; de twee andere K en K' vormen te zamen een koppel. In het geheel verkrijgt men dus n krachten van bekende richting en grootte, met het gemeenschappelijk aangrijpingspunt A , en bovendien n koppels, welker momenten en assen uit de ligging van het willekeurig gekozen punt A en uit de gegeven krachten kunnen bepaald worden.

De n krachten, in één punt A aangrijpende, kunnen tot een resultante R samengesteld worden. Van de n koppels kan men op de wijze in de vorige paragraaf uiteengezet, het vervangend koppel bepalen. Daar een koppel niet door een kracht kan vervangen worden, een koppel en een kracht elkander dus nooit in evenwicht kunnen houden, zoo kan er slechts dan evenwicht zijn, indien de vervangende kracht en het moment van het vervangend koppel elk afzonderlijk nul zijn. De algemeene evenwichtsvergelijkingen zijn dus:

$$R = 0 \quad (21) \text{ en } M = 0. \quad (22)$$

Elk dezer beide vergelijkingen sluit evenwel drie andere in zich. De algemeene uitdrukking toch voor de resultante van n in één punt aangrijpende krachten is:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

en de algemeene uitdrukking voor het moment van het vervangend koppel van n gegeven koppels is:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

De onder de wortelteekens staande termen kunnen als kwadraten nooit negatief worden; R en M kunnen dus slechts dan nul zijn, als elk dier termen afzonderlijk nul is. De vergelijkingen (21) en (22) sluiten dus de volgende zes evenwichtsvergelijkingen in zich:

$$R_x = 0 \quad R_y = 0 \quad R_z = 0 \quad (23)$$

$$M_x = 0 \quad M_y = 0 \quad M_z = 0 \quad (24)$$

De in deze zes vergelijkingen voorkomende grootheden

moeten nu nog in de gegevens worden uitgedrukt. Als zoodanig moeten beschouwd worden:

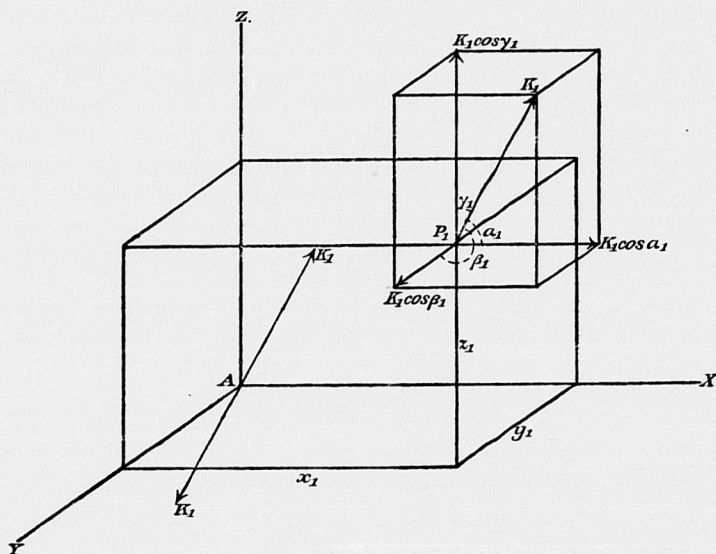
1^o de grootten der krachten $K_1 \dots K_n$;

2^o de hoeken $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, die de lijnen waarlangs de krachten werken, maken met de drie coördinatenassen.

3^o de coördinaten $x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n$ van de aangrijppingspunten, dat zijn de afstanden dier punten tot de drie coördinatenvlakken (fig. 34).

De in de vergelijkingen (23) voorkomende grootheden R_x ,

Fig. 34.



R_x, R_y, R_z zijn de ontbondenen langs de drie coördinatenassen van die kracht, welke de resultante der gegeven krachten zou zijn, indien deze laatste op het gemeenschappelijk aangrijppingspunt A werkten, elk langs de lijn evenwijdig aan die lijn, waarlangs de gegeven kracht werkt, en in denzelfden zin als de gegeven kracht. De grootheden R_x, R_y, R_z hebben derhalve hier volkomen dezelfde beteekenis als in § 18 de grootheden K_x, K_y, K_z , namelijk:

$$R_x = \sum (K \cos \alpha) \quad R_y = \sum (K \cos \beta) \quad R_z = \sum (K \cos \gamma) \quad (25).$$

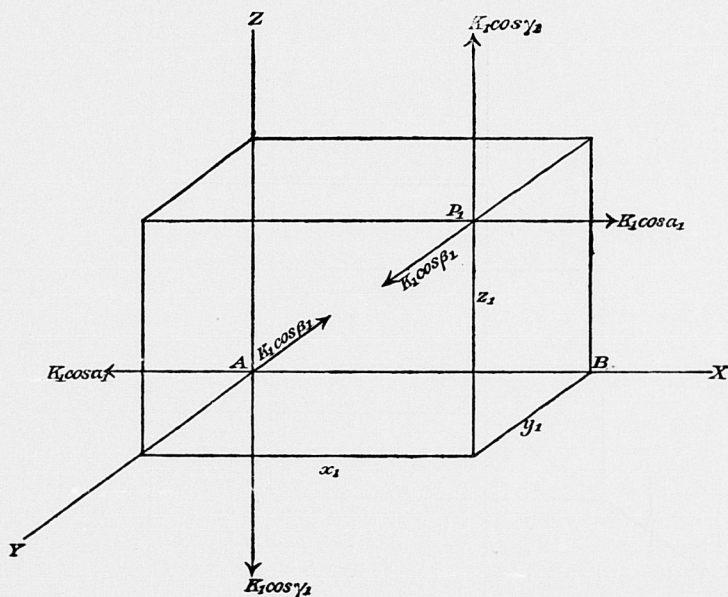
De in vergelijking (24) voorkomende grootheden M_x , M_y , M_z beteekenen de momenten van drie koppels, wier koppelassen met de drie coördinatenassen samenvallen, en wier samenstelling het vervangend koppel oplevert.

Men bepaalt deze drie grootheden door de as van elk der n koppels langs de drie coördinatenassen te ontbinden, en de som te nemen van de ontbondenen langs elk der coördinatenassen.

Men kan bewijzen, dat de getalwaarde van het koppelmoment M_x even groot is als de getalwaarde van de som der momenten van de oorspronkelijk gegeven krachten ten opzichte van de as $A X$; hetzelfde geldt dan voor de assen $A Y$ en $A Z$.

Om dit te bewijzen is het voldoende om aan te toonen,

Fig. 35.



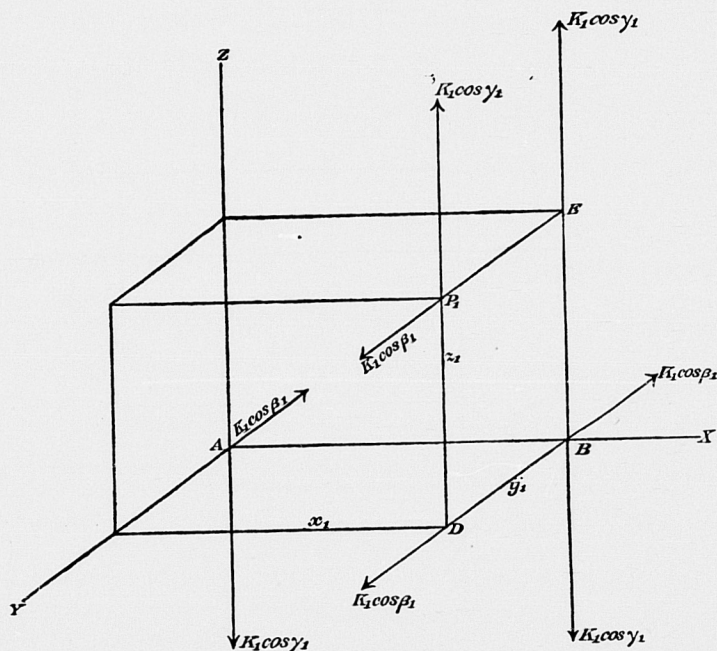
dat de bijdrage tot het koppelmoment M_x , door een van de

n koppels $K_1 K_1'$ geleverd, dezelfde getalwaarde heeft als het moment der oorspronkelijk gegeven overeenkomstige kracht K_1 ten opzichte van de as AX .

Daartoe ontbindt men elk der beide krachten K_1 van het koppel (fig. 35) in drie krachten in de richting der coördinatenassen. In plaats van het eene koppel $K_1 K_1'$ verkrijgt men dan drie koppels, waarvan de krachten zijn: $K_1 \cos \alpha_1$, $K_1 \cos \beta_1$ en $K_1 \cos \gamma_1$. De as van het koppel $K_1 \cos \alpha_1$ staat loodrecht op de as AX , omdat deze laatste in het koppelvlak ABP_1 ligt; de as van dit koppel heeft geen onthondene langs de lijn AX , en het moment van dit koppel levert dus geen bijdrage aan het moment M_x .

De beweging van het lichaam zal geen verandering ondergaan, indien er nog bovendien aan de uiteinden der lijn BD (fig. 36) twee elkander in evenwicht houdende krachten

Fig. 36.

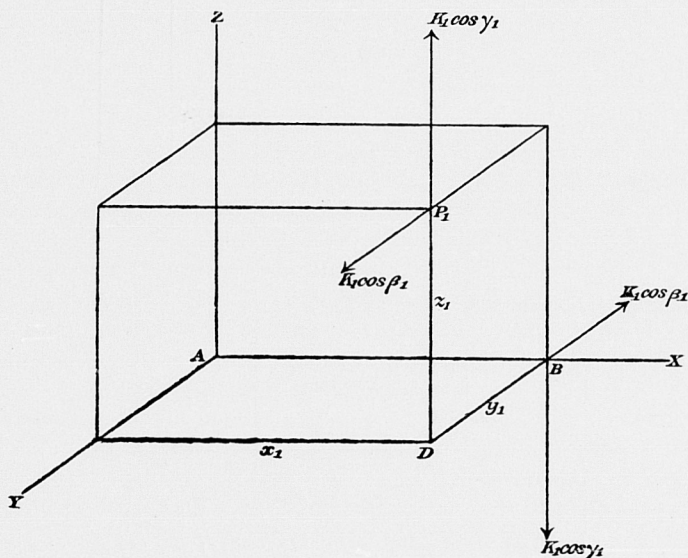


$K_1 \cos \beta_1$, en aan de uiteinden der lijn $B E$ twee elkander in evenwicht houdende krachten $K_1 \cos \gamma_1$ gaan werken. In plaats van twee, heeft men dan vier koppels. De in de punten A en D aangrijpende krachten $K_1 \cos \beta_1$ vormen een koppel, in welks vlak de as $A X$ ligt; dit is ook het geval met de in de punten A en E aangrijpende krachten $K_1 \cos \gamma_1$.

De assen dezer twee laatste koppels staan derhalve loodrecht op $A X$, en de momenten dier koppels kunnen bij de ontbinding geen bijdragen leveren aan het moment M_x .

Er zijn derhalve nog slechts de twee in fig. 37 aangegeven

Fig. 37.



koppels over, wier koppelvlakken beide loodrecht staan op $A X$, en wier assen dus langs de coördinatenas $A X$ vallen. De momenten dier koppels $y_1 K_1 \cos \gamma_1$ en $z_1 K_1 \cos \beta_1$ zijn derhalve de bijdragen, die het koppel $K_1 K_1'$ aan het moment M_x levert. De as van het eerste koppel is gericht van A naar X , die van het tweede van X naar A . De bijdrage van het eerste koppel aan het moment M_x is dus positief, die van

het tweede koppel negatief. De geheele bijdrage van het koppel $K_1 K_1'$ tot het moment M_x is dus:

$$M'_x = y_1 K_1 \cos \gamma_1, - z_1 K_1 \cos \beta_1 \quad (26)$$

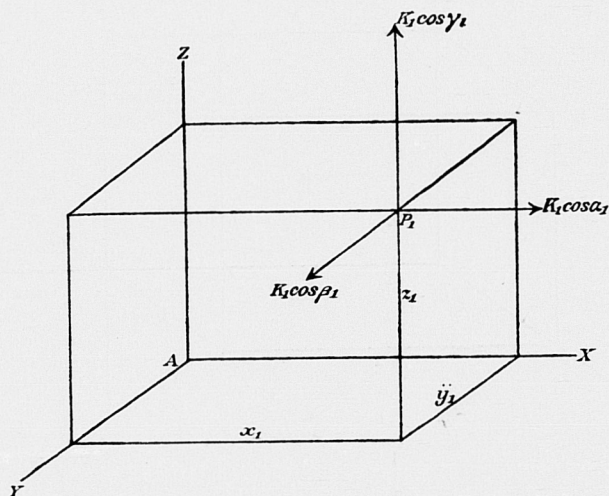
Volgens het in § 21 verklaarde is het moment van de kracht K_1 ten opzichte van eenige as, gelijk aan de som der momenten van haar ontbindingskrachten $K_1 \cos \alpha_1$, $K_1 \cos \beta_1$, $K_1 \cos \gamma_1$ ten opzichte van dezelfde as.

De momenten dier drie ontbindingskrachten ten opzichte van de as AX zijn volgens fig. 38:

$$y_1 K_1 \cos \gamma_1, - z_1 K_1 \cos \beta_1 \text{ en nul.}$$

De som dier drie grootheden komt geheel overeen met de

Fig. 38.



in vergelijking (26) gevonden waarde van M'_x ; bijgevolg heeft de bijdrage door het koppel $K_1 K_1'$ geleverd tot het moment M_x dezelfde getalwaarde als het moment van de oorspronkelijk gegeven, in het punt P_1 aangrijpende kracht K_1 ten opzichte van de as AX .

De grootheid M_x kan dus beschouwd worden als de som

der momenten van alle gegeven krachten ten opzichte van de as AX . Zij heeft de grootte:

$$M_x = \Sigma (y K \cos \gamma - z K \cos \beta).$$

Daar de as AX geheel willekeurig genomen is, geldt dit bewijs evenzoo voor de assen AY en AZ . De momenten M_y en M_z hebben dan de waarden:

$$M_y = \Sigma (z K \cos \alpha - x K \cos \gamma).$$

$$M_z = \Sigma (x K \cos \beta - y K \cos \alpha).$$

De algemeene evenwichtsvergelijkingen zijn dus de volgende:

$$\Sigma (K \cos \alpha) = 0 \quad (27)$$

$$\Sigma (K \cos \beta) = 0 \quad (28)$$

$$\Sigma (K \cos \gamma) = 0 \quad (29)$$

$$\Sigma (y K \cos \gamma - z K \cos \beta) = 0 \quad (30)$$

$$\Sigma (z K \cos \alpha - x K \cos \gamma) = 0 \quad (31)$$

$$\Sigma (x K \cos \beta - y K \cos \alpha) = 0 \quad (32)$$

Daar het stel coördinatenassen geheel willekeurig is aangenomen, zoo moet aan vergelijking (27) tot (32) nog voldaan zijn als men willekeurige andere assen kiest. Die vergelijkingen in woorden uitgedrukt, luiden dan als volgt:

Wanneer de op een absoluut vast lichaam werkende uitwendige krachten met elkander in evenwicht zijn, dan is de som der ontbindingskrachten in elke willekeurige richting, en de som der momenten van alle krachten ten opzichte van elke willekeurige as gelijk nul.

Omgekeerd:

Wanneer op een absoluut vast lichaam uitwendige krachten werken, wanneer de som der ontbindingskrachten in drie onderling loodrechte richtingen, en de som der momenten van alle krachten ten opzichte van drie onderling loodrechte assen gelijk nul is, dan is dit in iedere richting en ten opzichte van elke as het geval, en dan zijn de krachten met elkander in evenwicht.

Is aan de evenwichtsvergelijkingen (27) tot (32) niet voldaan, dan kunnen de uitwendige krachten, die op verschillende punten van een lichaam werken, in haar invloed op de beweging van het lichaam vervangen worden door een kracht en een koppel. Deze kracht hangt, wat grootte en

richting betreft, niet af van de plaats van het punt A ; van die plaats hangt wel af de grootte en richting der as van het vervangend koppel.

Het is mogelijk dat het moment van het vervangend koppel nul is; dan is genoemde kracht de vervangende van $K_1 \dots K_n$; is alleen de kracht nul, dan is het genoemde koppel het vervangend koppel van $K_1 \dots K_n$.

Het kan gebeuren dat het lichaam niet geheel vrij is in zijn beweging. Is bijv. één punt van het lichaam vast, dan is het voor het evenwicht niet noodig dat de vervangende kracht nul is, mits zij werkt langs een lijn gaande door het vaste punt. Neemt men toch het vaste punt aan als snijpunt der coördinatenassen, dan wordt aan de vergelijkingen (27) (28) en (29) steeds voldaan. Voor het evenwicht wordt dan alleen vereischt, dat voldaan zij aan de vergelijkingen (30) (31) en (32).

Zijn in een lichaam twee punten P_1 en P_2 vast, dan zijn alle punten vast op de lijn die P_1 en P_2 verbindt. Kiest men die vaste lijn als een der coördinatenassen, bijv. als de as AZ , dan is steeds aan de vergelijkingen (27) tot (31) voldaan, en voor het evenwicht wordt dan alleen vereischt, dat voldaan zij aan vergelijking (32).

Het zou ook kunnen gebeuren, dat zich in het lichaam een vaste as bevond, zoodanig dat een beweging van het lichaam langs die as mogelijk bleef. Kiest men deze as dan als AZ , dan wordt aan de vergelijkingen (27) (28) (30) en (31) steeds voldaan, en er wordt voor het evenwicht alleen vereischt, dat voldaan zij aan de vergelijkingen (29) en (32).

Zijn eindelijk in een lichaam drie vaste punten, die niet op dezelfde rechte lijn zijn gelegen, dan is het lichaam altijd in rust, welke uitwendige krachten er ook op mogen werken.

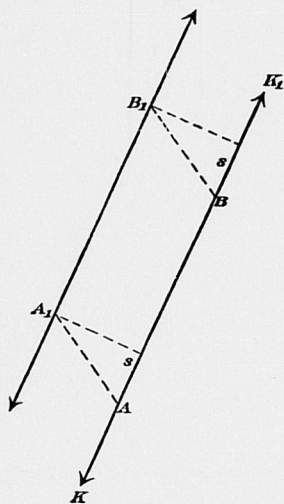
HOOFDSTUK V.

Algemeene stellingen.

§ 32. Werking van de inwendige krachten.

Als op twee stoffelijke punten, deel uitmakende van een vast lichaam, twee krachten K en K_1 werken langs de lijn AB

Fig. 39.



die de punten verbindt, als bovendien K en K_1 even groot en onderling tegengesteld gericht zijn, dan is de som van de arbeiden door deze krachten bij elke willekeurige voortgaande beweging verricht gelijk nul. Zij toch A_1B_1 (fig. 39) de lijn die de punten in hun nieuwen stand verbindt, dan is A_1B_1 evenwijdig aan AB . De kracht K heeft den arbeid $-Ks$, de kracht K_1 den arbeid $+K_1s$ verricht. De som dier arbeiden is nul.

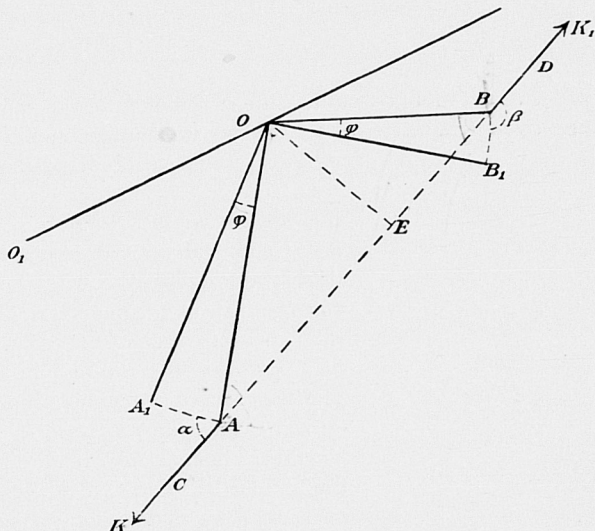
Ook indien het lichaam om een willekeurig punt O draait, is de som der arbeiden door K en K_1 bij een oneindig kleine draaiing verricht gelijk nul. Gedurende de oneindig kleine draaiing toch mogen de richtingen der krachten

als standvastig worden beschouwd.

Een willekeurige oneindig kleine draaiing om O (fig. 40) kan ontbonden worden in twee draaiingen om onderling loodrechte assen. Kiest men de assen zoodanig dat de eene as OO_1 in het vlak AOB ligt, en de andere in O loodrecht op het vlak AOB staat, dan is de som der arbeiden door de krachten K en K_1 verricht bij de draaiing om de as OO_1 nul, omdat de krachten loodrecht gericht zijn op de verplaatsingen der aangrijpingspunten. Ook bij de draaiing om de andere as is die som nul.

Zij toch de oneindig kleine draaiingshoek φ , de hoek A_1AC

Fig. 40.



α , en de hoek B_1BD β radialen, dan zijn de arbeiden door K en K_1 verricht:

$$K.OA.\varphi.\cos \alpha \text{ en } K_1.OB.\varphi.\cos \beta.$$

$$\text{Nu is } OAA_1 = OBB_1 = \frac{1}{2} \pi$$

$$OAB = \frac{1}{2} \pi - \alpha \quad OBA = \beta - \frac{1}{2} \pi$$

$$OE = OA \sin OAB = OB \sin OBA$$

of

$$OA \cos \alpha = -OB \cos \beta$$

en daar $K = K_1$

$$K.OA.\varphi.\cos \alpha + K_1.OB.\varphi.\cos \beta = 0$$

Daar bij elke oneindig kleine draaiing de som der arbeiden door K en K_1 verricht nul is, zoo is dit ook het geval bij een willekeurige draaiing.

Welke ook de beweging zij van een lichaam, men kan haar steeds voor een willekeurig tijdsverloop onthinden in

een voortgaande beweging en in een draaiende beweging om het punt O .

Het is klaarblijkelijk dat de arbeid, door een kracht verricht bij de werkelijke beweging van haar aangrijpingspunt, gelijk is aan de som der arbeiden door die kracht verricht bij de ontbindingsbewegingen van haar aangrijpingspunt. Daar nu voor elk der beide ontbindingsbewegingen de som der arbeiden door K en K_1 verricht gelijk is aan nul, zoo is dit ook het geval voor de werkelijke, dus voor elke willekeurige beweging van het lichaam.

Ook dan nog geldt deze stelling, indien gedurende de beweging de krachten K en K_1 van grootte veranderen. In dit geval toch kan de geheele duur der beweging verdeeld worden in deelen die zoo klein zijn, dat gedurende zulk een tijddeel de krachten als standvastig mogen beschouwd worden. Voor elk afzonderlijk tijddeel is de stelling reeds bewezen; zij moet derhalve ook gelden voor de som van alle tijddeelen, d. i. voor den geheelen duur der beweging.

Volgens de wet van werking en terugwerking zijn de in een stelsel van stoffelijke punten werkende inwendige krachten twee aan twee even groot en onderling tegengesteld gericht. Daar tevens, zooals in § 23 is verklaard, bij een absoluut vast lichaam deze inwendige krachten steeds die grootte hebben, welke noodig is om de punten op onveranderde afstanden te houden, zoo volgt uit de boven bewezen stelling, dat bij een absoluut vast lichaam de som der arbeiden door de inwendige krachten verricht steeds nul is, hoe ook de beweging van het lichaam moge zijn, en hoe ook de inwendige krachten gedurende de beweging mogen veranderen.

§ 33. Behoud van arbeidsvermogen.

Wanneer op eenig stoffelijk punt P van een absoluut vast lichaam een uitwendige kracht K werkt, dan zal de beweging van dat punt in het algemeen verschillen van die, welke het volkomen vrije punt onder de werking van de kracht K zou verkrijgen. Het eene stoffelijk punt toch kan niet in beweging worden gebracht, zonder dat de overige punten eveneens in beweging geraken, en een verandering in zijn be-

wegingstoestand is in het algemeen onafscheidelijk verbonden met veranderingen in de bewegingstoestanden der overige punten. De kracht die op het punt P blijkt zijn beweging werkt, is dus de resultante van de kracht K en van de inwendige krachten, die den afstand van P tot de overige punten onveranderd houden.

Het optreden van uitwendige krachten heeft derhalve steeds het in werking komen van inwendige krachten ten gevolge, wier grootten van de uitwendige krachten afhangen.

Kent men K , de resultante der uitwendige op P aangrijpende krachten, en I , de resultante der inwendige krachten $i_1, i_2, i_3, \dots$ door de overige punten van het lichaam op P uitgeoefend, dan kan de beweging van P worden bepaald met behulp van de in § 20 voor een enkel stoffelijk punt bewezen stelling omtrent het behoud van arbeidsvermogen.

Noemt men $\mathfrak{A}$ den door de kracht K , en α den door de kracht I gedurende de beweging verrichten arbeid, is $\frac{mc^2}{2}$ het arbeidsvermogen van beweging van het punt P bij het begin, en $\frac{mv^2}{2}$ dat aan het einde der beweging, dan is volgens vergelijking (15):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = \mathfrak{A} + \alpha.$$

Stelt men deze vergelijking op voor elk der andere punten van het lichaam, en telt men de gevonden vergelijkingen bij elkander op, dan verkrijgt men:

$$\sum \left(\frac{mv^2}{2} \right) - \sum \left(\frac{mc^2}{2} \right) = \sum (\mathfrak{A}) + \sum (\alpha).$$

In deze vergelijking beteekent $\sum (\alpha)$ de som der arbeiden door alle inwendige krachten verricht, welke som volgens de in de vorige paragraaf bewezen stelling steeds nul is. Men heeft dus:

$$\sum \left(\frac{mv^2}{2} \right) - \sum \left(\frac{mc^2}{2} \right) = \sum (\mathfrak{A}). \quad (33)$$

De grootheid $\sum (\mathfrak{A})$ beteekent de som der arbeiden door

de gegeven uitwendige krachten K verricht, de grootheid $\Sigma \left(\frac{m c^2}{2} \right)$ de som van het arbeidsvermogen van beweging

van alle afzonderlijke punten bij het begin, $\Sigma \left(\frac{m v^2}{2} \right)$ de som van het arbeidsvermogen van beweging van alle afzonderlijke punten aan het einde der beweging. Uit bovenstaande vergelijking blijkt dus, dat de vroeger voor het stoffelijk punt gevonden wet van het behoud van arbeidsvermogen ook geldt voor een absoluut vast lichaam.

Indien de uitwendige op een lichaam werkende krachten den arbeid A ergonen verricht hebben, en het arbeidsvermogen van plaats van het lichaam dus met A ergisten is verminderd, dan is het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam met A ergisten toegenomen.

§ 34, Beginsel der virtueele verplaatsingen.

De som der arbeiden door de inwendige krachten verricht, is zooals boven is aangetoond steeds nul. Werken dus op de punten waaruit een lichaam bestaat, alleen inwendige krachten, dan is bij elke mogelijke beweging de vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam gelijk nul. Gaat nu op dit lichaam een stel uitwendige krachten werken, die in evenwicht zijn, dan verandert daardoor de beweging van het lichaam niet. Ook dan nog is de vermeerdering van het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam gelijk nul, en dus ook volgens vergelijking (33) de som der arbeiden door de uitwendige krachten verricht.

In § 31 is aangetoond, dat elk stel uitwendige krachten op een lichaam werkende kan vervangen worden door een kracht aangrijpende in een punt A en door een koppel, welks moment en koppelvlak van de keuze van het punt A afhangen. Men kan nu steeds het aangrijpingspunt van de vervangende kracht zoodanig kiezen, dat het koppelvlak loodrecht staat op de lijn waarlangs de vervangende werkt, de koppelas dus met die lijn samenvalt. Om dit te bewijzen wordt het punt A (fig. 41) als snijpunt der coördinatenassen gekozen. Als X -as wordt aangenomen de lijn waarlangs de

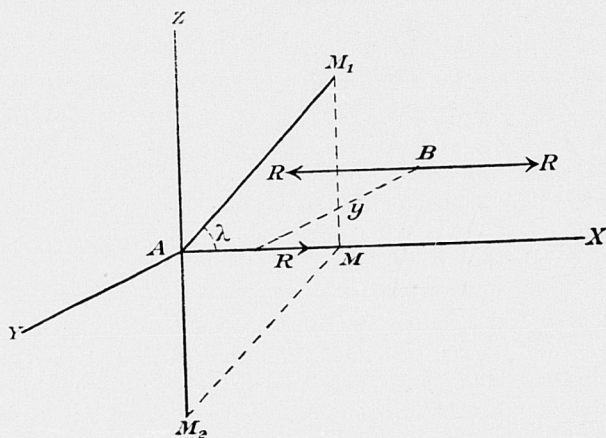


Fig. 41.

vervangende R werkt, en als vlak XZ het vlak, waarin de as M_1 van het vervangend koppel ligt. De hoek dien deze as maakt met de X -as zij λ .

Indien op het lichaam nog een koppel werkte, welks as M_2 langs de Z -as viel en de grootte had $M_2 = -M_1 \sin \lambda$ dan zou de as van het vervangende der twee koppels M_1 en M_2 langs de X -as vallen. Is R de kracht van het koppel M_2 dan heeft de arm de grootte $y = -\frac{M_1 \sin \lambda}{R}$.

Is nu een punt B in het vlak XY gelegen, en is zijn afstand tot de X -as $y = -\frac{M_1 \sin \lambda}{R}$, dan kan men de kracht R in A aangrijpende vervangen door de kracht R in B aangrijpende en een koppel, welks as M_2 aan de bovengestelde voorwaarden voldoet.

Hiermede is dus bewezen, dat in het algemeen elk stel uitwendige krachten vervangen kan worden door een kracht R en door een koppel M , werkende in een vlak loodrecht op de lijn, waarlangs R werkt. In bijzondere gevallen kan of het moment M , of de grootte van R nul zijn; zijn beide nul, dan zijn de krachten met elkander in evenwicht. Wan-

neer nu het lichaam gedraaid wordt om de lijn, waarlangs R werkt, en dus om de koppelas, dan kan de som der arbeiden door de uitwendige krachten verricht niet nul wezen, tenzij het moment M nul is; wanneer het lichaam verschoven wordt langs de koppelas, dan kan de som der arbeiden niet nul zijn, tenzij de grootte van R nul is. Indien derhalve op een lichaam een stel uitwendige krachten werken, en indien bij *elke mogelijke* verplaatsing de som van de arbeiden door de uitwendige krachten verricht nul is, dan zijn die krachten met elkander in evenwicht.

De toepassing van de wet van het behoud van arbeidsvermogen op het bijzonder geval dat de uitwendige krachten in evenwicht zijn, voert dus tot de volgende algemeene stelling:

Wanneer de op een absoluut vast lichaam werkende uitwendige krachten in evenwicht zijn, dan is bij elke mogelijke beweging van het lichaam de som der arbeiden door de uitwendige krachten bij een oneindig kleine verplaatsing der aangrijpingspunten verricht gelijk nul.

En omgekeerd:

Wanneer voor elke mogelijke beweging deze voorwaarde is vervuld, dan zijn de uitwendige krachten in evenwicht.

De toevoeging „bij een oneindig kleine verplaatsing der aangrijpingspunten” is noodig, omdat in het algemeen bij de beweging van het lichaam, de stand der lijnen waarlangs de krachten werken, verandert ten opzichte van het lichaam.

Deze stelling wordt het „beginsel der virtueele verplaatsingen” genoemd.

Bij een voortgaande beweging van het lichaam, wordt de som der arbeiden door de uitwendige krachten bij een oneindig kleine verplaatsing harer aangrijpingspunten verricht, verkregen door den afgelegden weg te vermenigvuldigen met de som der ontbindingskrachten in de richting der beweging. Bij een draaiing van het lichaam verkrijgt men deze volgens § 21 door den oneindig kleinen draaiingshoek te vermenigvuldigen met de som der momenten van alle krachten ten opzichte van de draaiingsas. Daar beide sommen nul moeten zijn, zoo blijkt dat men de twee in § 31 gevonden evenwichtsvergelijkingen onmiddellijk uit het beginsel der virtueele verplaatsingen kan afleiden.

§ 35. Beginsel van d'Alembert.

Indien een lichaam in beweging is, dan is de op eenig punt blijkens zijn beweging werkende kracht Q , de resultante van de gegeven uitwendige kracht K en de onbekende inwendige kracht I , welke van het verband van dit punt met de overige punten van het lichaam afhangt. Is m de massa en q de deviatieversnelling van het punt, dan is steeds $Q = mq$. Indien op het punt nog bovendien ging werken een kracht Q' even groot als Q , maar in tegengestelde richting, dan zouden de krachten Q' , K en I in evenwicht zijn. Hetzelfde heeft plaats in elk der andere punten van het lichaam. Daar het stelsel inwendige krachten I op zich zelf in evenwicht is, zoo zullen ook de krachten K en Q' in evenwicht zijn.

Wanneer dus op elk punt van een lichaam een kracht Q' gaat werken, even groot als de kracht die op dat punt blijkens zijn beweging werkt, maar in tegengestelde richting, dan zullen de krachten Q' en de uitwendige krachten K in evenwicht zijn.

Deze stelling wordt het beginsel van D'ALEMBERT genoemd.

De algemeene evenwichtsvergelijkingen kunnen derhalve worden toegepast om de onbekende krachten mq , en daarmede de onbekende deviatieversnellingen der afzonderlijke stoffelijke punten te bepalen.

Evenals de wet van het behoud van arbeidsvermogen in den bijzonderen vorm van het beginsel der virtueele verplaatsingen kan worden gebruikt om de evenwichtsvergelijkingen af te leiden uit de wetten der bewegingsleer, zoo kunnen omgekeerd door middel van het hier gevonden beginsel van D'ALEMBERT, de wetten der bewegingsleer worden teruggebracht tot de reeds vroeger gevonden evenwichtsvergelijkingen.

HOOFDSTUK VI.

Draaiende beweging van een lichaam om een vaste as.

§ 36 Arbeidsvermogen van beweging van een ronddraaiend lichaam. Traagheidsmoment.

Het arbeidsvermogen van beweging van een lichaam is gelijk aan de som der grootheden die het arbeidsvermogen van beweging van elk der punten voorstellen. Is m de massa en v de snelheid van eenig punt, dan is het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam:

$$A = \Sigma \left(\frac{mv^2}{2} \right).$$

Is de beweging van het lichaam een voortgaande, dan is de snelheid van alle punten even groot; v kan dan voor het somteeken gebracht worden, of:

$$A = \frac{v^2}{2} \Sigma (m) = \frac{Mv^2}{2}.$$

Wanneer de beweging van het lichaam in een draaiing om een as O bestaat, en ω de hoeksnelheid is, dan is de lijnsnelheid van een punt, dat zich op den afstand ρ van de as bevindt:

$$v = \rho \omega.$$

Stelt men deze waarde van v in bovenstaande uitdrukking van het arbeidsvermogen van beweging, dan verkrijgt men:

$$A = \Sigma \left(\frac{m \rho^2 \omega^2}{2} \right),$$

of daar ω voor alle punten dezelfde waarde heeft:

$$A = \frac{\omega^2}{2} \Sigma (m \rho^2)$$

De uitdrukking $\Sigma (m \rho^2)$ beteekent de som der producten van alle afzonderlijke massadeelen van het lichaam met de vierkanten van hun afstanden tot de as. De waarde er van is de maat van wat men noemt het *traagheidsmoment van het lichaam ten opzichte van die as*.

Stelt men het traagheidsmoment van het lichaam ten opzichte van de as O voor door T_o , dan is dus:

$$T_o = \Sigma (m \rho^2).$$

Voor het arbeidsvermogen van beweging van een lichaam, dat met een hoeksnelheid ω draait om de as O , vindt men dan:

$$A = \frac{T_o \omega^2}{2}, \quad (34)$$

Om de wet van het behoud van arbeidsvermogen bij de draaiende beweging van een lichaam te kunnen toepassen, moet eerst het traagheidsmoment van het lichaam ten opzichte van de draaiingsas worden berekend.

§ 37. Traagheidsmoment, gereduceerde massa, traagheidsstraal.

Indien de afzonderlijke massadeelen van het lichaam alle op denzelfden afstand van de draaiingsas O liggen, dan kan in de uitdrukking voor het traagheidsmoment de standvastige grootte ρ voor het somteeken gebracht worden, waardoor men verkrijgt:

$$T_o = \Sigma (m \rho^2) = \rho^2 \Sigma (m),$$

of, de geheele massa van het lichaam μ noemende:

$$T_o = \mu \rho^2. \quad (35)$$

Het traagheidsmoment van een ring of hollen cilinder met oneindig kleine wanddikte ten opzichte van zijn meetkundige as, is dus gelijk aan het product van zijn massa en het vierkant van zijn straal.

Het traagheidsmoment van een willekeurig lichaam kan als gevonden worden beschouwd, zoodra de massa μ bekend is, die een ring met den gegeven straal ρ zou moeten hebben, opdat zijn traagheidsmoment gelijk zij aan dat van het gegeven lichaam. Deze massa μ noemt men de op den straal ρ *gereduceerde massa* van het lichaam. De grootte der gereduceerde massa hangt af van de grootte van den aangenomen straal ρ . Daar het product $\mu \rho^2$ als traagheidsmoment van het lichaam een bepaald, standvastig getal is, zoo komt met elke waarde van ρ een bepaalde waarde van μ overeen. Die waarde van ρ , voor welke de gereduceerde massa μ ge-

Volgens de in § 24 gevonden vergelijkingen voor het massamiddelpunt van een homogeen lichaam heeft men, als x_o de afstand is van het massamiddelpunt dezer pyramide tot een vlak evenwijdig aan het grondvlak door den top C gebracht:

$$I x_o = \sum_{x=0}^{x=R} (i x).$$

Daar het massamiddelpunt van een pyramide gelegen is op de lijn, die den top verbindt met het massamiddelpunt van het grondvlak, op een afstand van het grondvlak gelijk aan een vierde van de hoogte, heeft men $x_o = \frac{3}{4} R$. Substitueert men nu in bovenstaande vergelijking:

$$I = \frac{R^3}{3} \quad x_o = \frac{3}{4} R \quad \text{en} \quad i = x^2 \Delta,$$

dan vindt men:

$$\sum_{x=0}^{x=R} (x^3 \Delta) = \frac{R^4}{4}.$$

Stelt men deze waarde in vergelijking (37), dan wordt:

$$T_o = \gamma \pi \frac{R^4}{2} \quad (38)$$

of na substitutie van de in vergelijking (36) gevonden waarde $\gamma \pi R^2 = M$:

$$T_o = \frac{M R^2}{2}. \quad (39)$$

De op den straal ρ gereduceerde massa van den cirkel vindt men door gelijkstelling der beide uitdrukkingen:

$$\mu \rho^2 = \frac{M R^2}{2}.$$

Stelt men in deze vergelijking $\rho = R$, dan verkrijgt men voor de op den straal R gereduceerde massa van den cirkel de waarde:

$$\mu = \frac{M}{2}.$$

Stelt men $\mu = M$, dan verkrijgt men voor den traagheidsstraal van den cirkel:

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Bovenstaande vergelijkingen gelden niet slechts voor een cirkel, maar ook voor een oneindig dunne cirkelvormige schijf; slechts beteekent dan γ de massa in de cubieke eenheid.

Ook voor een cilinder met de willekeurige hoogte h gelden deze vergelijkingen. Verdeelt men toch den cilinder door vlakken evenwijdig aan het grondvlak in schijfjes met de oneindig kleine dikte Δ , dan is de massa van zulk een schijfje $m = \gamma \pi R^2 \Delta$ en het traagheidsmoment $\frac{m R^2}{2} = \frac{\gamma \pi R^4}{2} \Delta$.

Het traagheidsmoment van den cilinder is dus:

$$T_o = \frac{\gamma \pi R^4}{2} \Sigma \Delta = \frac{\gamma \pi R^4 h}{2},$$

of daar de massa is $M = \gamma \pi R^2 h$

$$T_o = \frac{M R^2}{2}.$$

Om het traagheidsmoment te bepalen van een hollen cilinder, welks binnenste straal r , en welks buitenste straal R is, moet men hem beschouwen als het verschil van twee cilinders, en derhalve het traagheidsmoment van den binnensten ontbrekkenden cilinder van dat des geheelen cilinders aftrekken. Volgens vergelijking (36) is het verschil der massa's of de massa van den hollen cilinder:

$$M = \gamma \pi h (R^2 - r^2).$$

Voor het traagheidsmoment vindt men volgens vergelijking (38):

$$T_o = \gamma \pi h \frac{R^4 - r^4}{2}.$$

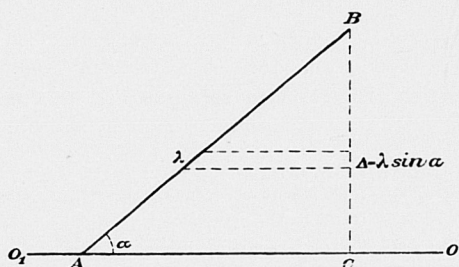
Deelt men deze vergelijking door de voorgaande, dan wordt:

$$T_o = M \frac{R^2 + r^2}{2},$$

Rechte stang en rechthoekige plaat.

Wanneer een massa gelijkmatig is verdeeld over een rechte

Fig. 43.



lijn, in dier voege dat elke lengte-eenheid de massa γ bevat, dan is de massa van de lijn AB (fig. 43), wier lengte l centimeters is:

$$M = \gamma l.$$

Verdeelt men de lijn in oneindig kleine stukken λ , dan is de massa m van zulk een deeltje:

$$m = \gamma \lambda$$

en het traagheidsmoment ten opzichte van de as $O O_1$ van een deeltje op den afstand x dier as gelegen:

$$mx^2 = \gamma \lambda x^2,$$

of λ vervangende door $\frac{\Delta}{\sin \alpha}$

$$mx^2 = \frac{\gamma}{\sin \alpha} x^2 \Delta.$$

Het traagheidsmoment van de stang AB is gelijk aan de som der traagheidsmomenten van alle oneindig kleine deeltjes, en dus:

$$T_o = \frac{\gamma}{\sin \alpha} \sum_{x=0}^{x=R} (x^2 \Delta). \quad (40)$$

De uitdrukking $\sum_{x=0}^{x=R} (x^2 \Delta)$ beteekent, dat men de lijn $BC = R$

moet verdeelen in de oneindig kleine deelen Δ , en de som moet nemen van alle producten $x^2 \Delta$, die men verkrijgt, als men aan x achtereenvolgens de waarden $\Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta = R$ geeft. Om de waarde van deze som te bepalen, kan men

opmerken, dat zij den inhoud voorstelt van de pyramide in fig. 42. Men heeft dus:

$$\begin{array}{l} x=R \\ \Sigma (x^2 \Delta) = \frac{R^3}{3} \\ x=0 \end{array}$$

of naar $R = l \sin \alpha$ is:

$$\begin{array}{l} x=R \\ \Sigma (x^2 \Delta) = \frac{(l \sin \alpha)^3}{3} \\ x=0 \end{array}$$

Substitueert men deze waarde in vergelijking (40), dan wordt:

$$T_o = \gamma l \frac{(l \sin \alpha)^2}{3}$$

of daar $\gamma l = M$ is:

$$T_o = M \frac{(l \sin \alpha)^2}{3}. \quad (42)$$

De traagheidsstraal der stang heeft de waarde:

$$\rho = \frac{l \sin \alpha}{\sqrt{3}},$$

en de op den straal $R = l \sin \alpha$, of de op het eindpunt B gereduceerde massa is:

$$\mu = \frac{M}{3}.$$

Staat de stang loodrecht op de as OO_1 , dan is $\sin \alpha = 1$, en bovenstaande vergelijkingen gaan over in:

$$T_o = \frac{Ml^2}{3} \quad \rho = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad (42)$$

terwijl de op het eindpunt der stang gereduceerde massa ook in dit geval een derde van de werkelijke massa bedraagt.

Bovenstaande vergelijkingen gelden niet alleen voor een lijn, maar ook voor een oneindig smalle vlakke strook; slechts beteekent dan γ de massa op de vlakke-eenheid.

Op soortgelijke wijze als hierboven voor den cilinder is geschied, kan aangetoond worden, dat de twee laatste vergelijkingen ook gelden voor een rechthoekige plaat met willekeurige breedte, wier eene zijde langs de as ligt.

Bij de bepaling van traagheidsmomenten kan dikwijls met vrucht gebruik gemaakt worden van de twee volgende stellingen:

- 1^o, Het traagheidsmoment van een lichaam ten opzichte van een willekeurige as OO_1 is gelijk aan het traagheidsmoment ten opzichte van een door het massamiddelpunt gaande as evenwijdig aan OO_1 , vermeerderd met het product van de massa van het lichaam en het vierkant van den afstand der beide assen;
- 2^o. Het traagheidsmoment van een vlakke oneindig dunne plaat ten opzichte van een as, die in het punt O loodrecht staat op de plaat, is gelijk aan de som der traagheidsmomenten van die plaat ten opzichte van twee in de plaat gelegen onderling loodrechte assen, die elkander in het punt O snijden.

Zij, om de eerste stelling te bewijzen, O (fig. 44) een as loodrecht staande op het vlak van teekening, S een aan O evenwijdige as gaande door het massamiddelpunt van het lichaam. Volgens de figuur is:

$$T_o = \sum (m \rho^2) \text{ en } T_s = \sum (m r^2).$$

Nu is:

$$r^2 = x^2 + z^2 \text{ en}$$

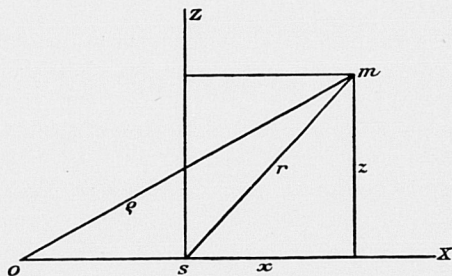
$$\rho^2 = (a \pm x)^2 + z^2 = a^2 + x^2 + z^2 \pm 2ax = r^2 + a^2 \pm 2ax$$

of

$$T_o = \sum (m r^2) + a^2 \sum (m) \pm 2a \sum (mx).$$

Van de drie termen in het tweede lid is de eerste T_s ,

Fig. 44.



de tweede is $M a^2$, als M de massa van het lichaam is, en de derde is nul, omdat volgens de vergelijkingen van het massamiddelpunt $\sum (mx) = 0$ is. Het traagheidsmoment ten opzichte van de as O is dus:

$$T_o = T_s + M a^2. \quad (43)$$

Om de tweede stelling te bewijzen zij O (fig. 45) een as loodrecht staande op het vlak van teekening, in welk vlak de oneindig dunne

Fig. 45.

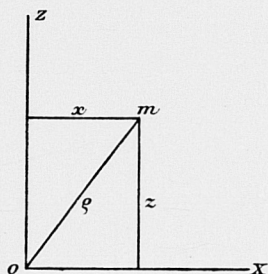
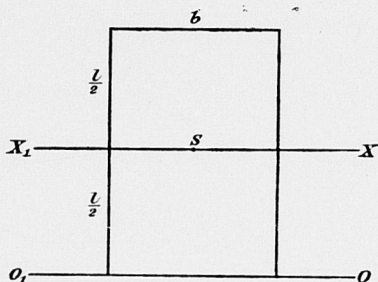


Fig. 46.



plaat en de twee onderling loodrechte assen OX en OZ gelegen zijn. Volgens de figuur is:

$$T_o = \sum (m\rho^2) \quad T_x = \sum (mz^2) \quad T_z = \sum (mx^2),$$

of daar

$$\rho^2 = x^2 + z^2$$

$$T_o = T_x + T_z. \quad (44)$$

Uit eenige voorbeelden zal blijken hoe deze stellingen kunnen dienen tot het vinden van traagheidsmomenten.

Volgens vergelijking (42) is het traagheidsmoment van een een rechthoekige plaat ten opzichte van de as OO_1 (fig. 46):

$$T_o = \frac{Ml^2}{3}.$$

Het traagheidsmoment van die plaat ten opzichte van de aan OO_1 evenwijdige as XX_1 door het massamiddelpunt S gaande, is dan volgens vergelijking (43):

$$T_x = T_o - Ma^2 = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12}.$$

Evenzoo is het traagheidsmoment ten opzichte van de as ZZ_1 (fig. 47):

$$T_z = \frac{Mb^2}{12}.$$

Het traagheidsmoment ten opzichte van de as S , die in

Fig. 47.

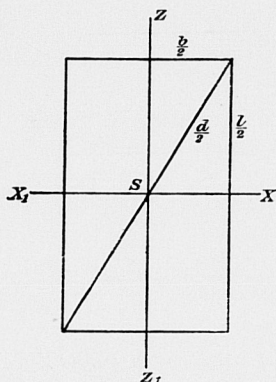
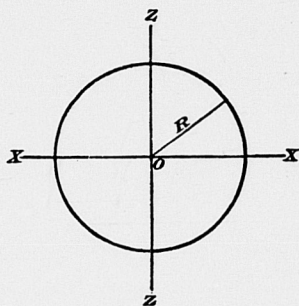


Fig. 48.



het massa-middelpunt loodrecht op de plaat staat, is dus volgens vergelijking (44):

$$T_s = T_x + T_z = \frac{M}{12} (l^2 + b^2) = \frac{M d^2}{12}.$$

Op soortgelijke wijze als vroeger kan men aantoonen, dat deze vergelijking ook geldt voor het traagheidsmoment van een rechthoekig parallelipedum ten opzichte van een as gaande door het massa-middelpunt en loodrecht staande op de twee zijvlakken, wier zijden l en b , of wier diagonaal d is.

Volgens vergelijking (39) is het traagheidsmoment van de oneindig dunne cirkelvormige schijf ten opzichte van de as O (fig. 48):

$$T_o = \frac{M R^2}{2}.$$

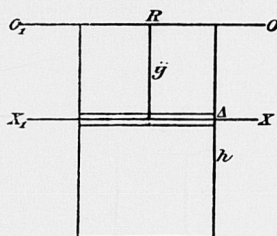
Daar klaarblijkelijk $T_x = T_z$ is, vindt men uit vergelijking (44) voor het traagheidsmoment van een cirkelvormige schijf ten opzichte van een middellijn:

$$T_x = \frac{1}{2} T_o \text{ of } T_x = \frac{M R^2}{4}.$$

Om het traagheidsmoment van een cilinder ten opzichte

van een middellijn $O O_1$ van het bovenvlak (fig. 49) te vinden,

Fig. 49.



verdeelt men den cilinder door vlakken evenwijdig aan het bovenvlak in schijfjes met de oneindig kleine dikte Δ . Is $m = \gamma \pi R^2 \Delta$ de massa van zulk een schijfje, dan is het traagheidsmoment ten opzichte van de middellijn $X X_1$:

$$\frac{m R^2}{4} = \frac{\gamma \pi R^4 \Delta}{4}.$$

Is y de afstand van het schijfje tot de as $O O_1$, dan is volgens vergelijking (43) zijn traagheidsmoment ten opzichte van de as $O O_1$:

$$\frac{\gamma \pi R^4 \Delta}{4} + \gamma \pi R^2 y^2 \Delta.$$

Voor het traagheidsmoment van den cilinder ten opzichte van de as $O O_1$ verkrijgt men dan:

$$T_o = \frac{\gamma \pi R^4}{4} \sum (\Delta) + \gamma \pi R^2 \sum_{y=0}^{y=h} (y^2 \Delta)$$

$$\text{of } T_o = \frac{\gamma \pi R^4 h}{4} + \frac{1}{3} \gamma \pi R^2 h^3 = \frac{\gamma \pi R^2 h}{12} (3 R^2 + 4 h^2).$$

Voert men in deze vergelijking de massa $M = \gamma \pi R^2 h$ in, dan wordt:

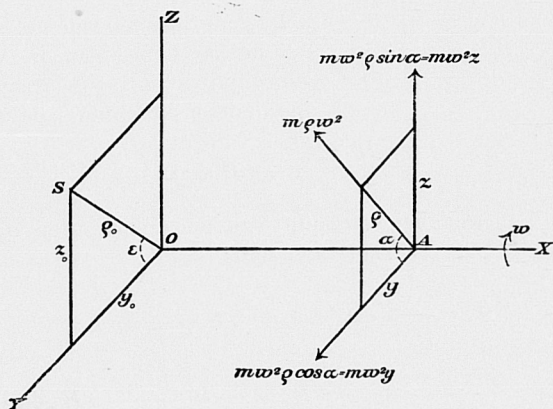
$$T_o = \frac{M (3 R^2 + 4 h^2)}{12}$$

§ 38. Eenparig draaiende beweging.

Indien een lichaam een eenparig draaiende beweging heeft om een vaste as, dan volbrengt elk punt een eenparige cirkelvormige beweging, en op elk punt werkt dus de centripetaalkracht. De krachten Q' , die volgens het beginsel van D'ALEMBERT in evenwicht zijn met de uitwendige krachten — waartoe ook de weerstanden behooren, waardoor de draai-

ingsas in onveranderlijken stand wordt gehouden — zijn dus even groot als de centripetaalkrachten, maar werken in tegengestelde richting. Is ω de hoeksnelheid van het lichaam, dan heeft de centripetaalkracht, werkende op een stoffelijk punt met de massa m en op den afstand ρ van de as gelegen, de grootte $m\rho\omega^2$ en de richting van den straal naar binnen. De kracht Q' is even groot en werkt in de richting van den

Fig. 50.



straal naar buiten. Als aangrijpingspunt dier kracht kan ook beschouwd worden het punt A (fig. 50), waarin de lijn waarlangs zij werkt, de as snijdt.

Om de werking der gezamenlijke krachten Q' te bepalen, kan men een rechthoekig coördinatenstelsel $OXYZ$ aanbrengen, in dier voege dat het massa-middelpunt S van het lichaam in het vlak OYZ ligt, en de draaiingsas langs de as OX valt. Ontbindt men de kracht $m\rho\omega^2$ op de in de figuur aangegeven wijze in de krachten $m\omega^2y$ en $m\omega^2z$, en handelt men op dezelfde wijze met de op de overige punten van het lichaam werkende krachten Q' , dan verkrijgt men twee groepen van krachten, wier aangrijpingspunten alle in de draaiingsas OX liggen; de eene groep bestaat uit krachten,

der krachten; elk der beide groepen van koppels een vervangend koppel, welks moment gelijk is aan de som der momenten. In het geheel zijn er dus twee krachten en twee koppels. De grootte en richting der krachten en der koppelsassen zijn in fig. 52 aangegeven.

De twee in het punt O aangrijpende krachten R_y en R_z hebben een resultante, wier richting bepaald is door de vergelijking:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{R_z}{R_y} = \frac{\Sigma(mz)}{\Sigma(my)}.$$

Is M de massa van het lichaam, dan is volgens de vergelijkingen voor het massa-middelpunt $\Sigma(mz) = Mz_o$ en $\Sigma(my) = My_o$; bijgevolg is:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{z_o}{y_o}.$$

Hieruit blijkt, dat de hoek ε gelijk is aan hoek SOY in fig. 50; derhalve gaat de lijn, waarlangs de kracht R werkt, door het massa-middelpunt S van het lichaam, en mag het massa-middelpunt als aangrijpingspunt der kracht R worden beschouwd. Voor de grootte van R vindt men:

$$R = \sqrt{R_y^2 + R_z^2} = M \omega^2 \sqrt{y_o^2 + z_o^2},$$

of daar volgens figuur 50 $\sqrt{y_o^2 + z_o^2} = \rho_o$ is:

$$R = M \rho_o \omega^2. \quad (45)$$

Op gelijke wijze kan het moment van het vervangend koppel worden bepaald.

Als men volgens de in § 30 gevonden regels de twee koppels voorstelt door hun assen, en deze assen:

$$\mathfrak{M}_y = \omega^2 \Sigma(mzx) \quad (46) \text{ en } \mathfrak{M}_z = \omega^2 \Sigma(myx) \quad (47)$$

samenstelt, dan heeft de as van het vervangend koppel de grootte:

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}.$$

De as van het vervangend koppel ligt in het vlak YZ , en staat dus loodrecht op de draaiingsas van het lichaam; de hoek, dien zij met de as OY maakt, kan op dezelfde wijze als hoek ε gevonden worden.

Men kan dus de krachten Q' vervangen door een kracht

R en een koppel $\mathfrak{M}$. De kracht R heeft de grootte, die de centripetaalkracht zou hebben, indien de massa van het lichaam in het massa-middelpunt S vereenigd was; zij werkt langs dezelfde lijn als deze, maar in tegengestelde richting. De as van het koppel staat loodrecht op de draaiingsas; haar grootte hangt af van de twee sommen $\Sigma (mzx)$ en $\Sigma (myx)$, dat is, van de wijze, waarop de massa over het lichaam is verdeeld.

§ 39. Vrije assen.

De krachten Q' , en dus ook de kracht R en het koppel $\mathfrak{M}$ in de vorige paragraaf gevonden, zijn op elk oogenblik in evenwicht met de uitwendige krachten. Werken er op het lichaam geen andere uitwendige krachten als de weerstanden, die de draaiingsas in een onveranderlijken stand houden, dan kunnen die weerstanden vervangen worden door een kracht even groot als R , maar in tegengestelde richting werkende, en door een koppel, waarvan het moment even groot is als $\mathfrak{M}$, maar het tegengestelde teeken heeft.

In het bijzondere geval, dat R en $\mathfrak{M}$ beide nul zijn, en dat dus de krachten Q' met elkander in evenwicht zijn, wordt de draaiingsas van het lichaam een *vrije as* genoemd. In dit geval zijn er geen weerstanden noodig om de draaiingsas in haar stand te houden; die as zou ook dan niet van stand veranderen, indien het lichaam vrij in de ruimte zweefde.

Opdat de draaiingsas OX (fig. 50) een vrije as zij, moet voldaan zijn aan de twee volgende voorwaarden:

$$R = 0 \quad (48) \quad \mathfrak{M} = 0. \quad (49)$$

Stelt men in vergelijking (48) voor R de waarde in vergelijking (45) gevonden, dan wordt:

$$M\rho_o\omega^2 = 0 \quad \text{of} \quad \rho_o = 0.$$

De draaiingsas kan dus slechts dan een vrije as zijn, als zij door het massa-middelpunt van het lichaam gaat.

Daar $\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}$ is, sluit vergelijking (49) twee andere vergelijkingen in zich, namelijk:

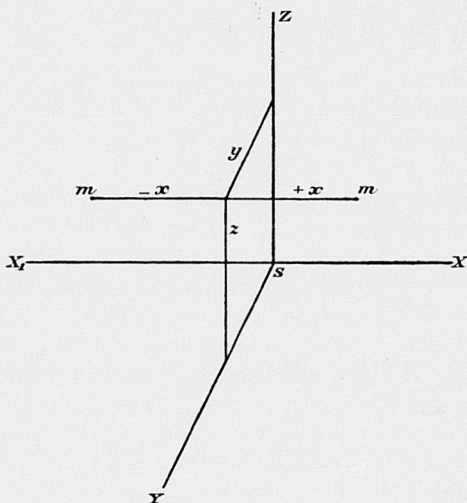
$$\mathfrak{M}_y = 0 \quad \text{en} \quad \mathfrak{M}_z = 0,$$

welke na substitutie der waarden uit de vergelijkingen (46) en (47) overgaan in:

$$\Sigma (mzx) = 0 \quad (50) \quad \text{en} \quad \Sigma (myx) = 0. \quad (51)$$

Aan deze twee voorwaarden is bijv. voldaan, als de massa

Fig. 53.

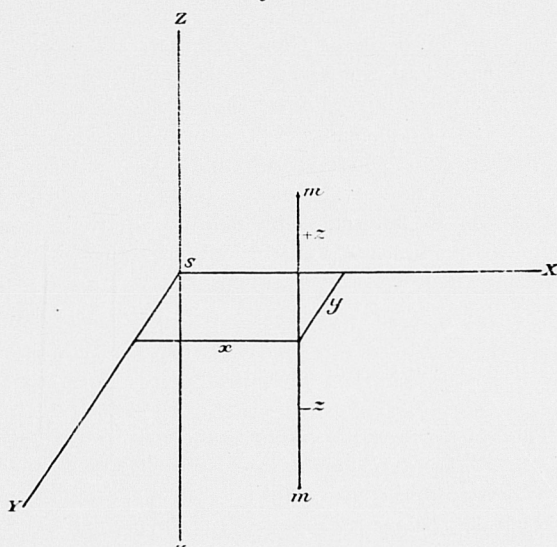


van het lichaam ten opzichte van het vlak YZ symmetrisch is verdeeld, in dier voege, dat tegenover eenig massa-deeltje m (fig. 53) op den afstand $+x$ van dit vlak gelegen, zich steeds een ander even groot massadeeltje op den afstand $-x$ bevindt. De bijdragen toch door deze twee massadeeltjes aan de som $\Sigma (mzx)$ geleverd, zijn dan

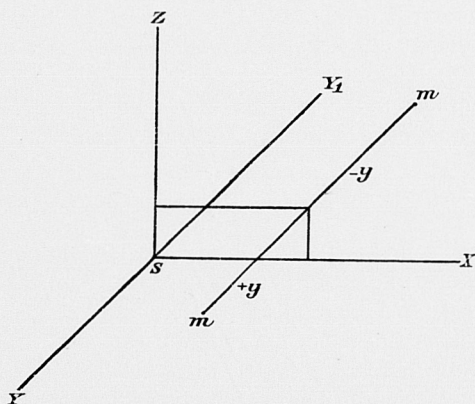
$m.z.(+x)$ en $m.z.(-x)$ en heffen elkander dus op; terwijl de bijdragen door hen aan de som $\Sigma (myx)$ geleverd $m.y.(+x)$ en $m.y.(-x)$ zijn, en elkander dus eveneens opheffen. Hetzelfde geldt van de bijdragen, die de overige massadeeltjes paarsgewijze aan elk dier sommen leveren. Bij elk homogeen lichaam, dat den vorm heeft van een recht prisma, is de lijn, die de massa-middelpunten der eindvlakken verbindt, steeds een vrije as. Evenzoo is bij een lichaam, dat den vorm heeft van een oneindig dunne vlakke plaat, de door het massa-middelpunt S gaande loodlijn op het vlak der plaat steeds een vrije as, daar in dit geval de factor x in alle termen der sommen $\Sigma (myx)$ en $\Sigma (mzx)$ nul is.

Nog in een ander geval blijkt het dadelijk, dat aan ge-

noemde twee voorwaarden is voldaan, namelijk wanneer de
Fig. 54.



massa van het lichaam ten opzichte van elk der beide vlak-
Fig. 55.



ken YX en ZX
 symmetrisch is
 verdeeld.

Is toch de mas-
 sa van het lichaam
 symmetrisch ver-
 deeld ten opzichte
 van het vlak
 YX (fig. 54), dan
 ligt tegenover elk
 massadeeltje m ,
 dat aan het eerste
 lid der vergelij-
 king (50) de bij-
 drage $m.x.(+z)$
 levert, een ander

dat aan die som de even goote negatieve bijdrage $m.x.(-z)$

levert; en is de massa van het lichaam tevens symmetrisch verdeeld ten opzichte van het vlak ZX (fig. 55), dan ligt tegenover elk massadeeltje, dat aan het eerste lid der vergelijking (51) de bijdrage $m.x.(+y)$ levert, steeds een ander, dat aan die som de even groote negatieve bijdrage $m.x.(-y)$ levert. Hieruit volgt bijv. dat bij een homogeen omwentelingslichaam de omwentelingsas steeds een vrije as is.

Door middel van hoogere wiskunde kan worden aangetoond, dat er in elk willekeurig lichaam steeds *drie* vrije assen zijn, die in het massa-middelpunt loodrecht op elkander staan. In elk lichaam kan dus een rechthoekig coördinatenstelsel zoodanig worden aangebracht, dat elk der coördinatenassen een vrije as is.

§ 40. Hoekversnelling.

Een lichaam heeft een eenparig versneld draaiende beweging als het in onderling gelijke tijdsverloopen, hoe klein ook genomen, onderling gelijke vermeerderingen van de hoeksnelheid krijgt.

De *hoekversnelling* van een lichaam met eenparig versneld draaiende beweging wordt evenredig gesteld met de vermeerdering van de hoeksnelheid per seconde.

Als *eenheid van hoekversnelling* wordt aangenomen de hoekversnelling van een lichaam met eenparig versneld draaiende beweging, welks hoeksnelheid in één seconde met de hoeksnelheidseenheid toeneemt.

Neemt de hoeksnelheid in t seconden met α eenheden toe, dan is het aantal eenheden der hoekversnelling ε , als:

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{t}.$$

Heeft een lichaam een hoekversnelling ε , dan doorloopt eenig op den afstand ρ van de draaiingsas gelegen stoffelijk punt een cirkelomtrek met den straal ρ , en wel met een eenparig versnelde beweging; de lijnsnelheid van dit punt neemt in elke seconde met $\rho \varepsilon$ eenheden toe.

De kracht, die op het punt blijktens zijn beweging werkt, kan dus ontbonden worden in de centripetaalkracht $m \rho \omega^2$

en in een langs de raaklijn in den zin der beweging werkende kracht $m \rho \varepsilon$, tangentieele kracht genoemd.

Bij de niet-eenparig versneld draaiende beweging verandert de hoekversnelling van oogenblik tot oogenblik. Verdeelt men echter den geheelen duur der beweging in oneindig kleine deelen, dan kan de beweging gedurende zulk een tijdsverloop als eenparig versneld draaiend worden beschouwd. Ook dan kan dus de kracht, die op het punt blijkens zijn beweging werkt, ontbonden worden in de centripetaalkracht en in de tangentieele kracht.

Volgens het beginsel van D'ALEMBERT moeten de krachten Q' met de uitwendige krachten in evenwicht zijn. Blijkens het hierboven aangetoonde kan elke kracht Q' ontbonden worden in een kracht $m \rho \omega^2$, even groot als de centripetaalkracht, maar in tegengestelde richting werkende, en een kracht $m \rho \varepsilon$, werkende langs de raaklijn in den zin tegengesteld aan dien der beweging. De eerste ontbindingskracht werkt langs een lijn die de draaiingsas snijdt. Is deze een vaste as, dan is de eenige evenwichtsvergelijking die, welke uitdrukt dat de som der momenten ten opzichte van de draaiingsas nul is. Noemt men korthedshalve het moment van een der uitwendige krachten ten opzichte van de draaiingsas m , dan heeft men:

$$\Sigma(m) - \Sigma(m \rho \varepsilon, \rho) = 0,$$

of daar ε een gemeenschappelijke factor is:

$$\varepsilon \Sigma(m \rho^2) = \Sigma(m).$$

De hoekversnelling op eenig oogenblik is dus:

$$\varepsilon = \frac{\Sigma(m)}{\Sigma(m \rho^2)} = \frac{\mathfrak{M}}{T},$$

waarin $\mathfrak{M} = \Sigma(m)$ de som is der momenten van de uitwendige krachten, en $T = \Sigma(m \rho^2)$ het traagheidsmoment van het lichaam, beide ten opzichte van de draaiingsas.

HOOFDSTUK VII.

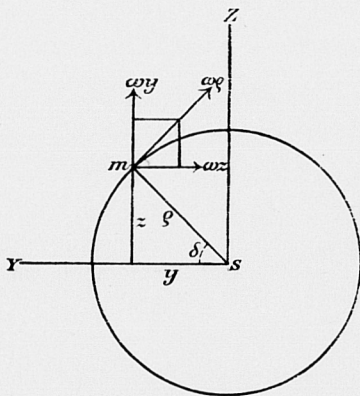
Willekeurige beweging van een lichaam.

§ 41. Arbeidsvermogen van een lichaam.

De beweging van een lichaam kan voor elk oneindig klein tijdsverloop ontbonden worden in een draaiende beweging om een as door het massa-middelpunt gaande en een voortgaande beweging; de hoeksnelheid der eerste ontbindingsbeweging zij ω , de snelheid der tweede zij u . Er wordt gevraagd het arbeidsvermogen van beweging van het lichaam te bepalen.

Men brengt daartoe door het massa-middelpunt van het lichaam drie onderling loodrechte coördinatenassen, waarvan de eene SX met de draaiingsas samenvalt, en de tweede SZ zoodanig wordt gekozen, dat de richting van de snelheid u evenwijdig is aan het vlak XZ ; daarna bepaalt men het arbeidsvermogen van beweging van een punt met de massa m en op den afstand ρ van de draaiingsas gelegen. De snelheid van dit punt kan ontbonden worden in $\omega\rho$ (fig. 56) en

Fig. 56.

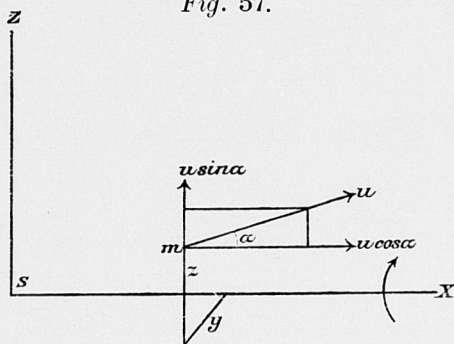


u fig. (57). De ontbindingssnelheid $\omega\rho$ kan wederom ontbonden worden in $\omega\rho \cos \delta = \omega y$ en $\omega\rho \sin \delta = \omega z$; de ontbindingssnelheid u in $u \cos \alpha$ en $u \sin \alpha$.

De ontbindingssnelheden van het punt (fig. 58) zijn dus: $u \cos \alpha$ in de richting SX , — ωz in de richting SY , en $u \sin \alpha + \omega y$ in de richting SZ . De werkelijke snelheid v kan derhalve gevonden worden uit de vergelijking:

$$v^2 = (u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha + \omega y)^2 + (\omega z)^2,$$

Fig. 57.



of daar $u^2 \cos^2 \alpha + u^2 \sin^2 \alpha = u^2$ en $\omega^2 y^2 + \omega^2 z^2 = \omega^2 \rho^2$ is :

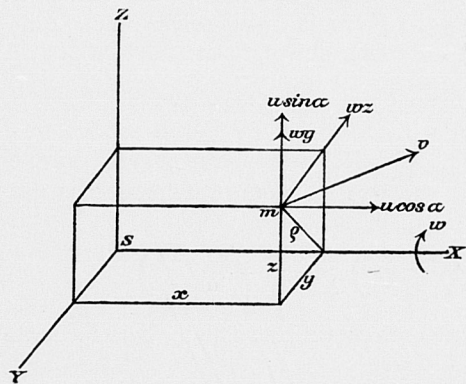
$$v^2 = u^2 + \omega^2 \rho^2 + 2u \sin \alpha \cdot \omega y.$$

Het arbeidsvermogen van beweging van het punt is $\frac{mv^2}{2}$,
 en die van het geheele lichaam $\Sigma \left(\frac{mv^2}{2} \right).$

Daar u , ω en α voor alle punten dezelfde waarden hebben, vindt men:

$$\Sigma \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{u^2}{2} \Sigma (m) + \frac{\omega^2}{2} \Sigma (m \rho^2) + u \omega \sin \alpha \Sigma (my).$$

Fig. 58.



van het geheele lichaam:

Daar het massamiddelpunt in het vlak XZ is gelegen is $\Sigma (my) = 0$. Noemt men $\Sigma (m)$ — de geheele massa van het lichaam — M_1 , en $\Sigma (m \rho^2)$ — het traagheidsmoment ten opzichte van de door het massamiddelpunt gaande draaiingsas — T_s , dan is het arbeidsvermogen van beweging

$$\mathfrak{A} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{T_s \omega^2}{2}$$

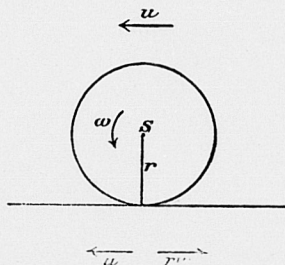
De term $\frac{Mu^2}{2}$ is het arbeidsvermogen van beweging ten gevolge van de voortgaande, $\frac{T_s \omega^2}{2}$ dat ten gevolge van de draaiende ontbindingsbeweging van het lichaam. Bovenstaande vergelijking zegt dus:

Men vindt het arbeidsvermogen van beweging van een lichaam door zijn beweging te ontbinden in een voortgaande en in een draaiende om een door het massa-middelpunt gaande as, het arbeidsvermogen van beweging te bepalen dat het lichaam heeft ten gevolge van elk dier ontbindingsbewegingen, en de som dier grootheden te nemen.

Als voorbeeld diene het volgende:

Indien een cilinder met den straal r over een horizontaal vlak rolt, dan kan zijn beweging voor een willekeurig tijdsverloop ontbonden worden in een voortgaande met de snelheid u (fig. 59) en een ronddraaiende om zijn as met de hoeksnelheid ω . Een punt op den omtrek van den cilinder heeft bij de laatste ontbindingsbeweging de lijnsnelheid $r\omega$.

Fig. 59.



De werkelijke snelheid van het punt, waar de cilinder het vlak aanraakt is nul, anders zou de beweging geen zuiver rollende zijn. Hieruit volgt dat

$$u = r\omega \quad \text{of} \quad \omega = \frac{u}{r}.$$

Het arbeidsvermogen van beweging van den cilinder is derhalve:

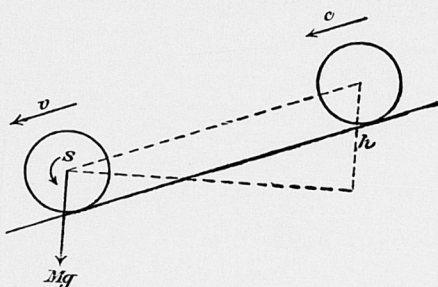
$$\mathfrak{A} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{T_s}{2} \left(\frac{u}{r}\right)^2 = \frac{u^2}{2} \left(M + \frac{T_s}{r^2}\right).$$

Voor $\frac{T_s}{r^2}$, de op den omtrek van den cilinder gereduceerde

massa, is vroeger gevonden de waarde $\frac{M}{2}$, dus:

$$\mathfrak{A} = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3M}{2} = \frac{3Mu^2}{4}.$$

Rolt een cilinder onder de werking der zwaartekracht
Fig. 60.



langs een hellend vlak naar beneden (fig. 60), dan is volgens de wet van het behoud van arbeidsvermogen:

$$\frac{3Mv^2}{4} - \frac{3Mc^2}{4} = Mgh.$$

of

$$v = \sqrt{c^2 + 2g\left(\frac{2}{3}h\right)}.$$

Is de aanvangssnelheid nul, dan wordt de eindsnelheid:

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{2}{3}h\right)},$$

dus even groot als die van een lichaam, dat van de hoogte $\frac{2}{3}h$ vrij valt.

§ 42. Beweging van het massa-middelpunt.

De algemeene vergelijkingen voor het massa-middelpunt gelden voor elken stand van het lichaam. Indien een lichaam zich beweegt veranderen de coördinaten zoowel van de afzonderlijke punten als van het massa-middelpunt. Op ieder oogenblik echter is het product van de geheele massa met den afstand van het massa-middelpunt tot het vaste vlak YZ gelijk aan de som der producten, die men verkrijgt als men elk massadeeltje vermenigvuldigt met zijn afstand tot ditzelfde vlak, of volgens fig. 61:

$$Mx_o = \sum(mx) \quad (52)$$

Indien men de snelheden der afzonderlijke punten op de in de figuur aangeduide wijze ontbindt, dan zal gedurende het eerstvolgende oneindig kleine tijdsdeel τ de grootheid x in $x + v\tau$, en de grootheid x_0 in $x_0 + v_0\tau$ overgaan. De algemeene vergelijking (52) geldt ook voor het einde van dit tijdsdeel, bijgevolg is:

$$M(x_0 + v_0\tau) = \Sigma [m(x + v\tau)]$$

of
$$Mx_0 + Mv_0\tau = \Sigma (mx) + \tau \Sigma (mv).$$

Trekt men hiervan de vergelijking (52) af, en laat men den gemeenschappelijken factor τ weg, dan verkrijgt men:

$$Mv_0 = \Sigma (mv). \quad (53)$$

Op elk oogenblik is het product van de geheele massa en de ontbindingssnelheid van het massa-middelpunt in eenige richting gelijk aan de som van de producten der massa's van alle afzonderlijke punten en hun ontbindingssnelheden in diezelfde richting.

Dezelfde stelling geldt ook voor de versnellingen. Is p de ontbindingsversnelling van de massa m , en p_0 de ontbindingsversnelling van het massa-middelpunt, beide in de richting

OX , dan zal gedurende het oneindig kleine tijdsdeel τ de grootheid v in $v + p\tau$, en de grootheid v_0 in $v_0 + p_0\tau$ overgaan. Vergelijking (53) geldt ook voor het einde van dit tijdsdeel; bijgevolg is:

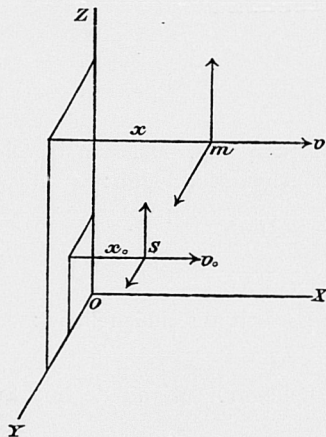
$$M(v_0 + p_0\tau) = \Sigma [m(v + p\tau)]$$

of
$$Mv_0 + Mp_0\tau = \Sigma (mv) + \tau \Sigma (mp).$$

Trekt men hiervan de vergelijking (53) af, en laat men den gemeenschappelijken factor τ weg, dan verkrijgt men:

$$Mp_0 = \Sigma (mp). \quad (54)$$

Op elk oogenblik is het product van de geheele massa



en de ontbindingsversnelling van het massa-middelpunt in eenige richting gelijk aan de som van de producten der massa's van alle afzonderlijke punten en hun ontbindingsversnellingen in diezelfde richting.

Met behulp van deze stelling kan de ontbindingsversnelling p_o van het massa-middelpunt in de richting OX berekend worden, indien op het lichaam willekeurige uitwendige krachten K werken. De producten mp stellen namelijk in grootte en richting de ontbondenen voor van de krachten Q , die blijkens hun beweging op de punten werken. De ontbondenen van de krachten Q' werken in tegengestelde richting. Ontbindt men de uitwendige krachten K langs drie onderling loodrechte asrichtingen, en stelt men de ontbindingskrachten in de richting OX door X voor, dan verkrijgt men volgens het beginsel van D'ALEMBERT de vergelijking:

$$\Sigma (X) - (\Sigma mp) = 0$$

of volgens vergelijking (54):

$$Mp_o = \Sigma (X).$$

De ontbindingsversnelling van het massa-middelpunt in de richting OX is dus:

$$p_o = \frac{\Sigma (X)}{M}.$$

Men zou dezelfde ontbindingsversnelling gevonden hebben voor een enkel stoffelijk punt met de massa M , waarop alle krachten K werkten langs lijnen evenwijdig aan die, waarlangs zij werkelijk werken. Dit is niet slechts waar voor de richting OX , maar ook voor de richtingen OY en OZ , en derhalve voor elke willekeurige richting.

Het massa-middelpunt van een lichaam beweegt zich evenzoo alsof de geheele massa er in vereenigd was en alsof alle krachten er op werkten langs lijnen evenwijdig aan die, waarlangs zij werkelijk werken.

Deze stelling geldt, evenals het beginsel van D'ALEMBERT, niet slechts voor absoluut vaste lichamen, maar geheel algemeen voor elk willekeurig stelsel stoffelijke punten.

§ 43. Beweging van een vrij lichaam.

Zooals in § 31 is aangetoond, kunnen de op een lichaam

werkende uitwendige krachten steeds vervangen worden door een kracht in het massa-middelpunt aangrijpende en een koppel. In verband met het in de vorige paragraaf bewezene, kan dus steeds de versnelling van het massa-middelpunt gevonden worden; zij is namelijk:

$$q = \frac{R}{M},$$

waarin R de vervangende kracht, en M de geheele massa van het lichaam beteekent.

Daar de krachten van een koppel geen invloed hebben op de beweging van het massa-middelpunt, zoo zal de werking van een koppel bestaan in een draaiing van het lichaam om het massa-middelpunt.

De algemeene oplossing van dit geval is te moeilijk om hier behandeld te worden. Er zal dus een eenvoudiger geval worden aangenomen; er zal namelijk worden verondersteld, dat de lijn door het massa-middelpunt van het lichaam gaande en loodrecht staande op het koppelvlak een vrije as is.

Daar bij de bepaling van de ontbindingsbeweging, die het gevolg is van het op het lichaam werkende koppel, de overige ontbindingsbewegingen niet in aanmerking komen, zoo kan men aannemen dat het massa-middelpunt van het lichaam in rust is. Stelt men zich voor dat de vrije as, die loodrecht staat op het koppelvlak, door weerstanden in een onveranderlijken stand wordt gehouden, dan krijgt het lichaam om die as een versneld draaiende beweging met de versnelling:

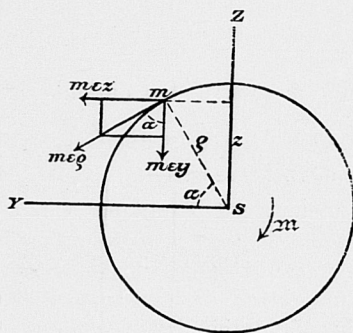
$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{T},$$

waarin $\mathfrak{M}$ het koppelmoment en T het traagheidsmoment ten opzichte van de draaiingsas beteekent. Men kan nu bewijzen dat de weerstanden, die de as in onveranderlijken stand houden, nul zijn.

Zijn de weerstanden nul, dan zijn de krachten van het koppel de eenige uitwendige krachten, en moeten volgens het beginsel van D'ALEMBERT met de krachten Q' in evenwicht zijn; en omgekeerd, zijn die krachten in evenwicht, dan zijn de weerstanden nul.

De krachten Q' kunnen ontbonden worden in krachten even groot als de centripetaalkrachten maar in tegengestelde

Fig. 62.

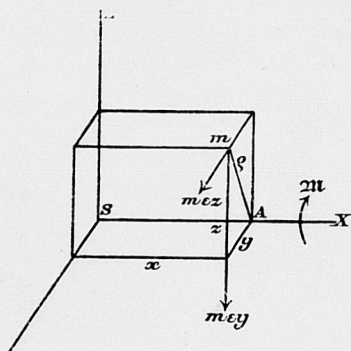


richting werkende, en in de tangentele krachten, werkende in den zin tegengesteld aan dien der beweging. Daar de draaiingsas een vrije as is, zijn zooals in § 39 is aange- toond de eerste ontbindingskrachten met elkan- der in evenwicht, en er moet dus slechts bewezen worden, dat de tangen- tieele ontbindingskrachten van Q' met de krachten van het koppel in even- wicht zijn.

Daartoe bringe men door het massa-middelpunt S drie on- derling loodrechte coördinatenassen zoodanig aan, dat de as SX met de draaiingsas samenvalt (fig. 62 en 63).

Zij $\mathfrak{M}$ het moment van het koppel, en $m \varepsilon \rho$ (fig. 62)

Fig. 63.



een der tangentele ontbin- dingskrachten; ontbindt men deze laatste op de in de figuur aangegeven wijze in de twee krachten $m \varepsilon \rho \cos \alpha = m \varepsilon y$ en $m \varepsilon \rho \sin \alpha = m \varepsilon z$, dan blijkt dat aan de zes even- wichtsvergelijkingen is vol- daan. In de richting der as SX zijn geen ontbindings- krachten; de som der ont- bindingskrachten in de rich- ting SY is $\Sigma(m \varepsilon z) = \varepsilon \Sigma(mz)$, die in de richting SZ is $\Sigma(m \varepsilon y) = \varepsilon \Sigma(my)$, en daar

het massa-middelpunt zoowel in het vlak XZ als in het vlak XY ligt, is:

$$\Sigma (my) = 0 \text{ en } \Sigma (mz) = 0.$$

De sommen der momenten ten opzichte van de assen SX , SY en SZ zijn:

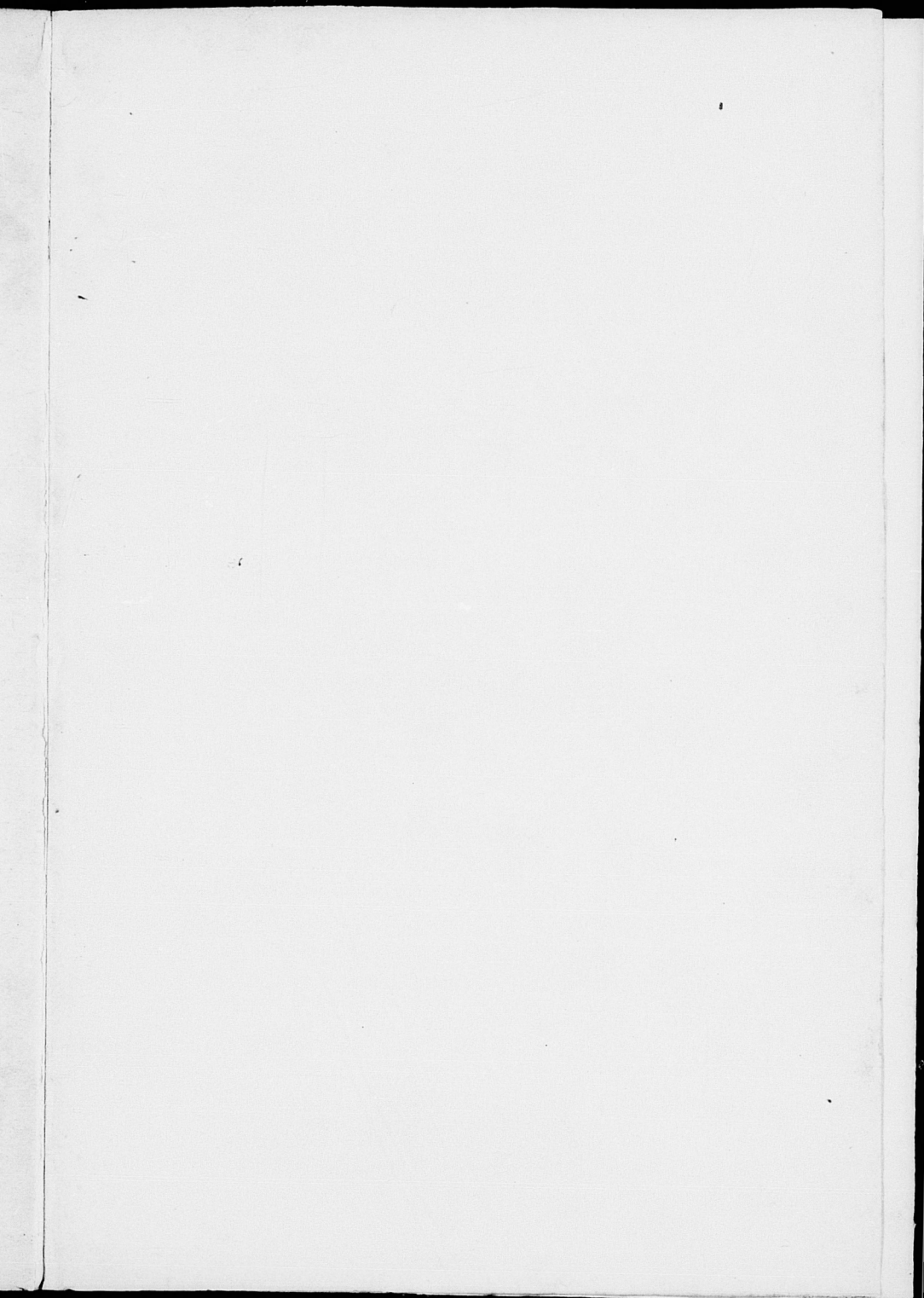
$$\begin{aligned} \mathfrak{M} - \Sigma (m \varepsilon \rho^2) & \quad \Sigma (m \varepsilon y x) & \quad \text{en} & \quad \Sigma (m \varepsilon z x) \\ \text{of} \quad \mathfrak{M} - T \varepsilon & \quad \varepsilon \Sigma (m y x) & \quad \text{en} & \quad \varepsilon \Sigma (m z x). \end{aligned}$$

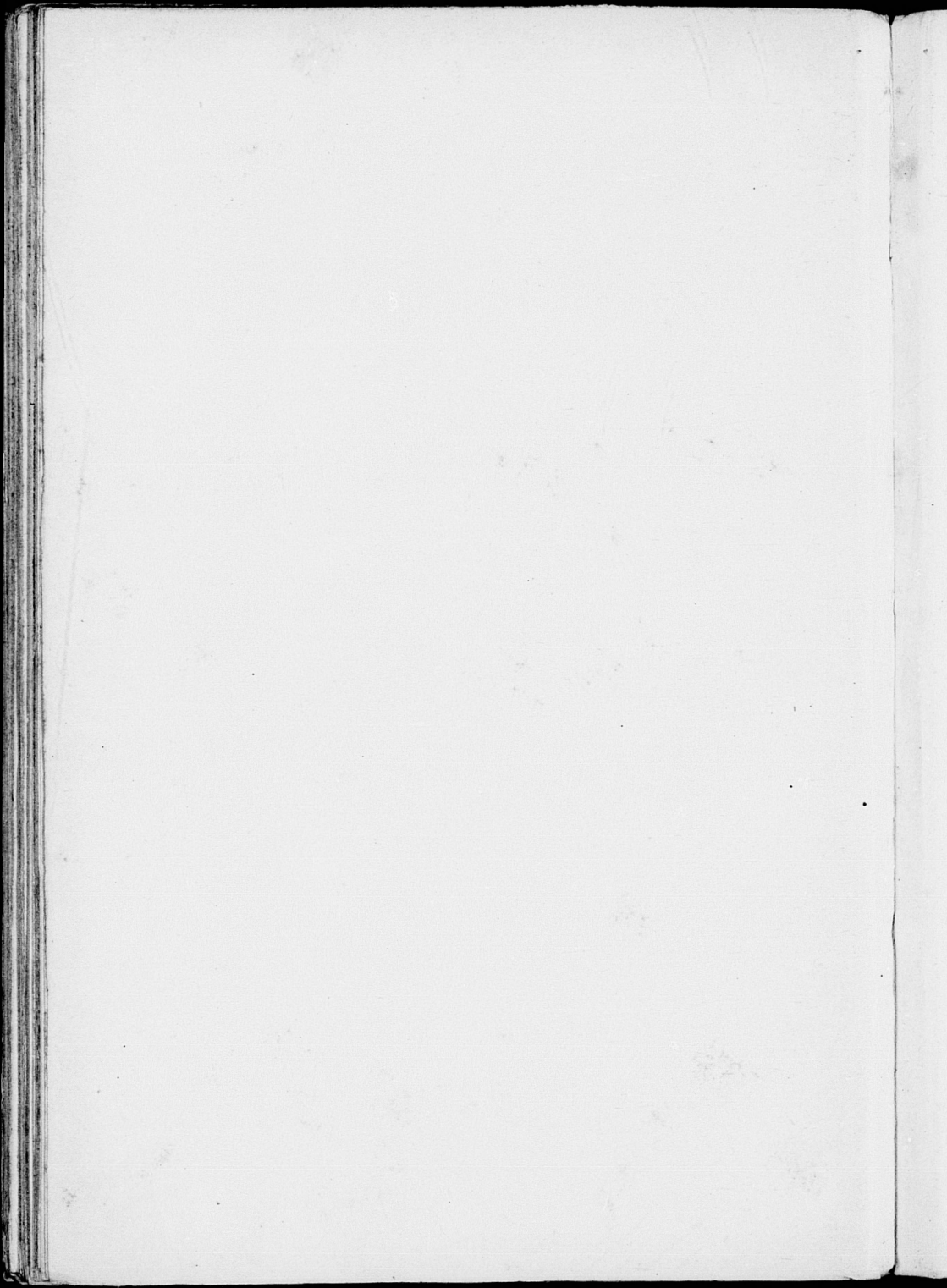
Daar $\varepsilon = \frac{\mathfrak{M}}{T}$ is, is de som der momenten ten opzichte van de as SX gelijk nul. Daar verder de as een vrije as is, heeft men:

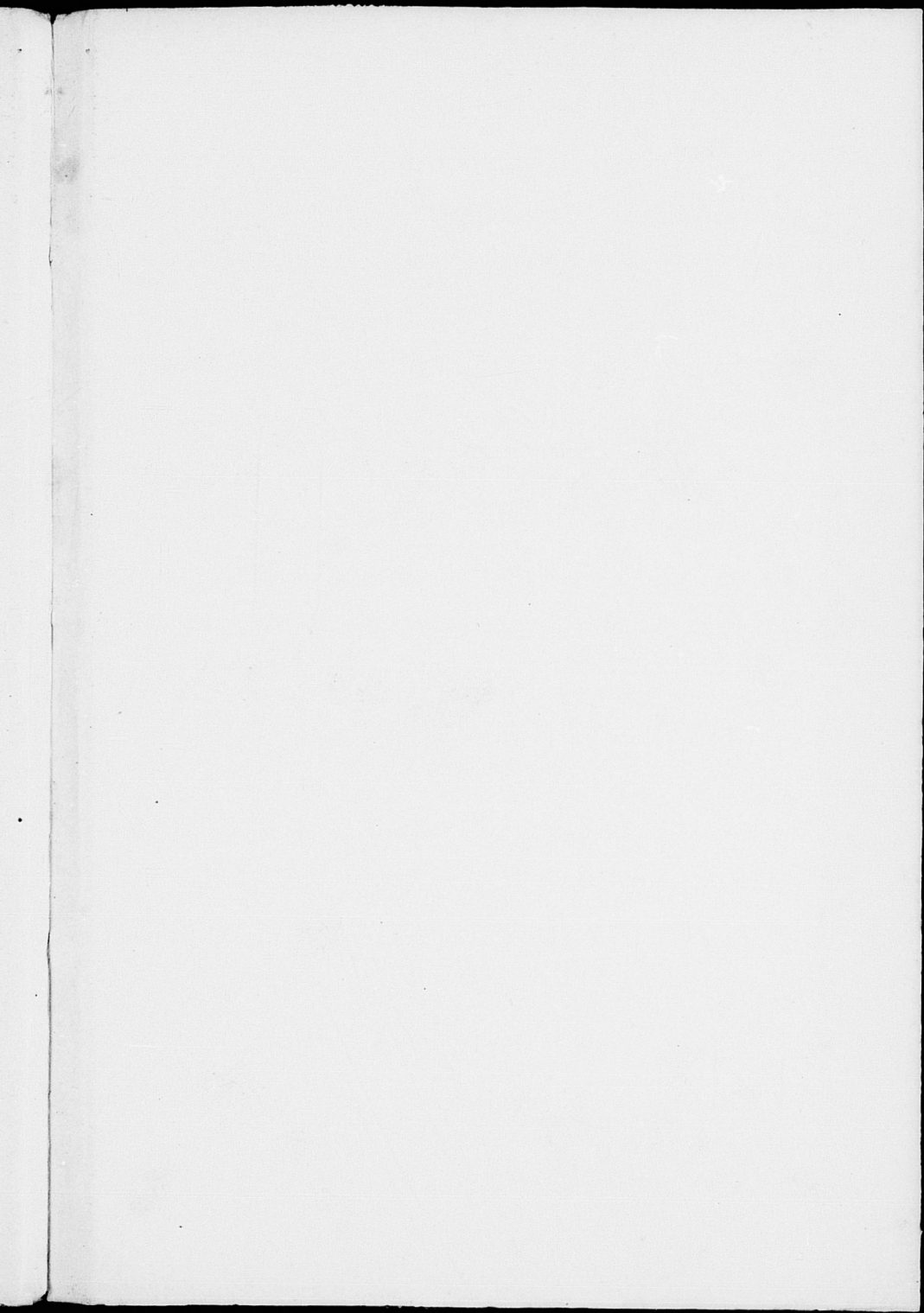
$$\Sigma (myx) = 0 \text{ en } \Sigma (mzx) = 0,$$

zoodat ook de sommen der momenten ten opzichte van de assen SY en SZ gelijk nul zijn.

Daar aan de zes evenwichtsvergelijkingen voldaan is, zijn er geen weerstanden noodig om de as in onveranderlijken stand te houden, en heeft dus de ontbindingsbeweging op bovengenoemde wijze plaats.







LEERBOEK DER MECHANICA

DOOR

Dr. F. H. JULIUS,

Leeraar aan de Rijks Hoogere Burgerschool te Zwolle.

MET 238 FIGUREN. Prijs f 3.50.

PLATEN

VOOR

Natuur- en Werktuigkunde,

UITGEGEVEN DOOR

Dr. J. L. HOORWEG.

bestaande uit 2 Serien, die elk afzonderlijk verkrijgbaar zijn ad f 5. per Serie.

De platen bestaan ieder een oppervlakte van 76 bij 56 c.M. en zijn in verschillende kleuren gelithographeerd, zooveel mogelijk overeenkomende met de kleuren der materialen, waaruit de bestanddeelen zijn gevormd.

Desverkiezende worden zij ook geleverd opgeplakt op stevig bordpapier en voorzien van lis, tegen verhooging van dertig cents per plaat.

VRAAGSTUKKEN

tot oefening in de beginselen der Werktuigkunde.

VERZAMELD DOOR

Dr. J. L. HOORWEG.

Vijfde druk. — Met de Antwoorden. — 182 bladz. f 2.00.

Dr. J. L. HOORWEG.

Beknopt Overzicht

DER

NATUUR- EN WERKTUIGKUNDE

100 bladzijden. — Prijs f 0.50.

NA
STE
RU

2