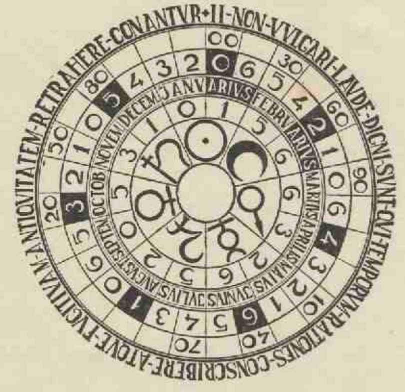
Beginselen der meetkunst, ontworpen, naar haren tegenwoordigen staat van vordering : onder anderen, inhoudende: een volledige behandeling van de platte- en bolvormige- (anders genaamd klootsche) driehoeksmetingen, ...


NON · VVLGARI · LAVDE · DIGNI · SVNT · QVI · TEMPORVM · RATIONES · CONSCRIBERE · ATQVE · FVGITIVAM · ANTIQVITATEM · RETRAHERE · CONANTVR · II ·
IANVARIVS
FEBRVARIVS
MARTIVS
APRILIS
MAIVS
IVNIVS
IVLIVS
AVGVSTVS
SEPTEM
OCTOB
NOVEM
DECEM

Univ. Muslim

BEGINSELEN

DER

MEETKUNST,

ONTWORPEN,

NAAR HAREN TEGENWOORDIGEN STAAT VAN VORDERING;

ONDER ANDEREN,

INHOUDENDE:

Eene volledige behandeling van de PLATTE- *en* BOLVORMIGE- (*anders genaamd* KLOOTSCHE) DRIEHOEKSMETINGEN, *de* VEELHOEKS- *en* VEELVLAKKIGE LIGCHAAMSMETING (POLYGONOMETRIE *en* POLYEDROMETRIE,) *benevens de* THEORIE *der* TRANSVERSALEN,

MET EENE BEKNOPTE AANWIJZING VAN DERZELVER GEBRUIK

In het LANDMETEN, *de* GEODESIE *en de* AARDRIJKS- *en* STERREKUNDE,

ALLES,

NAAR EENEN BEKNOPTEN EN ZUIVEREN BETOOGTRANT, VOORGEDRAGEN

DOOR

JACOB DE GELDER,

voor dezen, Professor *aan het* Hôtel *van de* Pages *van* Z. M. *den* voormaligen Koning *van* Holland.

Te AMSTERDAM, en in DEN HAAG,

BIJ DE GEBROEDERS VAN CLEEF

EN

B. SCHEURLEER, JUNIOR.

1810.

'Er is, in de Meetkunst, een gedeelte, dat voor de jeugd nuttig is; want zij oefent het verſtand, ſcherpt den geest, bevordert eene gemakkelijke bevatting: ja ook, de Meetkunst is niet, zoo als andere kunſten, ſlechts nuttig, wanneer men dezelve verſtaat; maar ook wanneer men ze leert.

QUINCTILIANUS.

Inſt. Orat. Lib. I. Cap. X. §. 8.

VOORREDE.

De Meetkunst, veelal ten onregte, de Wetenſchap der uitgebreidheden genoemd, berust alleen op het begrip, dat wij, van nature, van de uitgebreidheid en van derzelver grenzen en deelen verkregen hebben. Dit begrip, op zich zelve genomen, zou ons weinig verder brengen, dan ons over de volſtrekte gelijkheid of ongelijkheid van twee uitgebreidheden te leeren oordeelen en ons, daardoor, tot het algemeen beginſel van ſuperpoſitie te brengen, en, langs dien weg, tot ſommige van die eigenſchappen der figuren, welke derzelver gelijkheid betreffen. Om verder te komen, en, naar onfeilbare regels, te beoordeelen, hoe de betrekking van elke gegevene uitgebreidheid, tot eene andere van dezelfde ſoort, afhangt van de wijze, waarop zij beſtaat, en door hare grenzen bepaald wordt, heeft men nog met de gelijke deelen der uitgebreidheid en derzelver aantal te doen; en, in deze ſoort van beſchouwingen, moet de Meetkunst de beginſelen der Rekenkunst te hulp roepen, om de betrekkingen der gelijkſoortige uitgebreidheden tot elkander, door getallen, als de eigenaardige teekens van die betrekkingen, te bepalen en uittedrukken: ja ook, om zelfs nog verder te gaan, moeten de meetkundige grondwaarheden onderworpen worden aan de grondregelen van die verhevene kunst, welke, op eene onfeilbare wijze, uit geſtelde of aangenomene betrekkingen der grootheden, over de omſtandigheden en de gevolgen van die betrekkingen leert oordeelen en redeneren.

De Meetkunst berust derhalve op twee onderscheidene soorten van beginselen. 1° Op beginselen, welke in het wezen der ruimte en uitgebreidheid gegrond zijn. 2° Op beginselen, welke, daar zij op alle soorten van grootheden toepasselijk zijn, de uitgebreidheden zoowel, als alle andere denkbare grootheden, onder hun gebied stellen. De ontleding van de onderscheidene soorten van uitgebreidheden, als ook het beginsel der superpositie of op elkander pasing behooren tot de eerste soort; tot de tweede soort, de tweede en volgende axiomata, en inzonderheid, de Leer der evenredigheden, welke, in de beschouwing der meetkunstige figuren, en voornamelijk in de beginselen, eene eigene en regtstreeksche toepasing verkregen heeft.

Deze veréénigde beginselen, aan de redenering en haar veel vermogend werktuig, de wiskundige analysis, onderworpen, leert ons in de ruimte en uitgebreidheid lezen en dezelve over hare geheimen raadplegen, om, uit eene bron, die voor elks onderzoek geopend is, eenen rijken schat van wetenschappelijke kennis optezamelen. Zich zelven, in dit onderzoek, te leeren besturen, daarin op eene kunstmatige wijze te werk te gaan, is de Meetkunst, de kunst, welke in dit werk geleerd wordt, te beoefenen.

Deze wetenschappelijke kunst is derhalve zeer onderscheiden van elke geschiedkundige wetenschap, hoedanige de Aardrijkskunde, de Geschiedenis, de natuurlijke Historie en anderen zijn, in welker beoefening, men zich, met opgegevene daadzaken en getuigenissen van anderen, moet te vreden houden: hier integendeel, leert men kunstmatig, met de oogen des verstands zien, en waarnemen; met het werktuig der wiskundige taal,

uit

uit de ruimte en uitgebreidheid, als uit eene rijke en onuitputtelijke mijn, de ſchoonſte en verhevenſte waarheden opdelven; het eeuwig en onveranderlijk verband tusſchen de uitgebreidheden en hare wijze van beſtaan, benevens de waarlijk goddelijke en verhevene eigenſchappen van dit verband kennen en doorgronden.

De ruimte en uitgebreidheid, en bijzonderlijk de laatſte, zijn de voorwerpen, welke hier aan de beſchouwing van het verſtand onderworpen worden. Het doet hier niets ter zake, wat de Wijsgeeren over de ruimte en uitgebreidheid gedacht, ja ook ſomtijds gebeuzeld hebben: de Meetkunst heeft met deze wijsgeerige beſchouwingen niets gemeens: zij neemt de ruimte en uitgebreidheid aan, zoo als zij aan elk gezond menſchelijk verſtand voorkomen, en zoo als zij, naar onveranderlijke Phiſiologiſche wetten, zelfs door den bekrompenſten Hottentot, Otaheiter of Nieuw-zeelander, worden gevoeld, opgemerkt en waargenomen, en omtrent welken eene overgedrevene ſpitsvindigheid, om niet te zeggen ſophisterij, wanneer men in zich zelven, tot zijne eigene gewaarwordingen terug keert, niet de minſte twijfeling kan doen ontſtaan (1).

De oplettende beſchouwing der ligchamelijke uitgebreid-

(1) *Het zou 'er met de Meetkunst ellendig uitzien, indien men, zoo als ſommige drijven, eerst een gedeelte der Kantiaanſche Wijsbegeerte moest doorarbeiden, om zich tot de beoefening dezer Wetenſchap voortebereiden. Het barbarismus van vreemde Kantiaanſche woorden kan niet anders dan duisterheid te weeg brengen in begrippen, welke op zich zelve zoo klaar en eenvoudig zijn, dat niets meer dan eene duidelijke verklaring der woorden en zaken, en geene diep afgetrokkene redeneringen vereischt worden, om elke zaak grondig te bevatten en intuitief in te zien.*

breidheid brengt ons tot eene duidelijke voorſtelling van derzelver grenzen en deelen, en van daar tot de onderſcheiding van driederlei hoofd-ſoorten van uitgebreidheden; de ligchamelijke, *de* vlakte *en de* lengte-uitgebreidheid, *en eindelijk tot het* punt, *dat is, tot die* wezenlijk denkbare plaats, dat ergens zijn, dat iets, dat van alle uitgebreidheid beroofd is. *Deze vier hoofdzaken, het punt, de lijnen, de vlakken en de ligchamen, door aftrekking gedacht, of, uit de beſchouwing van eenige ligchamelijke uitgebreidheid, ontwikkeld, zijn de gegevene grondſtoffen, waaruit het verſtand alle mogelijke Meetkunſtige figuren ſchept en aan deszelfs beſchouwing onderwerpt, ten einde de eigenſchappen dezer figuren, welke de redenering ontwikkelt, in eenen regelmatigen zamenhang te brengen, in geſlachten en ſoorten te rangſchikken en alzoo tot een wetenſchappelijk zamenſtel te brengen, geſchikt, om toegepast te kunnen worden op die wetenſchappen, welke op de kennis van uitgebreidheid, tijd en andere ſoorten van grootheden, gegrond zijn.*

Het ganſche zamenſtel der Meetkunſtige onderwerpen is alzoo het werk van des menſchen ſchepping: het verſtand maakt of conſtrueert zelf die begrippen, naar de wetten van het gezond denkvermogen; wetten, die, zoo onveranderlijk als de natuurwetten zelve, in dezen, onder alle menſchen eene juiste overëënſtemming doen geboren worden, die de reden verklaard, waarom 'er, in de Wis- en Meetkundige waarheden, zoo als wel eens, in andere zaken, plaats heeft, geen verſchil van gevoelen beſtaat, en waarom een volk, dat nimmer met eenige beſchaafde volken van het verlicht Europa gemeenſchap mogt gehad hebben, op de eigen-

ſchap-

ſchappen der meetkunſtige figuren nadenkende, nogtans dezelfde dingen, welke wij kennen, zien en ontdekken zou.

De figuren der uitgebreidheid zijn ontelbaar, zoo oneindig in aantal, als het mogelijk is, de wetten, volgens welken derzelver deelen, of de deelen van derzelver grenzen, elkander opvolgen, onderſcheiden kunnen zijn: doch alle deze figuren kunnen onder twee groote hoofd-ſoorten gerangſchikt worden: 1° *de* eerſte *en* eenvoudigſte uitgebreidheden, 2° *de* meer zamengeſtelde. *De eerſte behooren onder het gebied der zoogenaamde* Elementaire Meetkunst *of de* Beginſelen, *en de tweede onder de* verhevener *of* zoogenaamde Analytiſche Meetkunst.

De eenvoudigſte uitgebreidheden zijn, onder de onbepaalde voortloopende lijnen, de regte lijn; onder de vlakken, het platte vlak, de cilinder- en kegel-vlakken; onder de bepaalde vlakte uitgebreidheden, de regtlijnige figuren en den cirkel; onder de ligchamelijke, de veelvlakkige ligchamen, de cirkelvormige cilinder, kegel en de bol: derzelver eigenſchappen, in deze beginſelen ontwikkeld en betoogd zijnde, geven de hulpmiddelen aan de hand, om in de hoogere Meetkunst, het onderzoek van de eigenſchappen der kromme lijnen en gebogene oppervlakken aan algemeene regels te onderwerpen, en het zamenſtel der Meetkunſtige Leerwijze, in haar geheel genomen, tot een eindelijk zamenhangend geheel te brengen.

Dit geheele werk, hetwelk de Elementaire Meetkunst bevat, is in twee groote hoofddeelen verdeeld. De negen eerſte Boeken behandelen de Meetkunst der vlakke figuren. De regte lijnen en regtlijnige figuren wor-

den in de I, III en IV. Boeken; de cirkels, de regelmatige veelhoeken en de daarmede in verband ſtaande Quadratuur des Cirkels, benevens de eerſte eigenſchappen der Iſoperimetriſche Figuren worden in de V en VII. Boeken behandeld; het VII. Boek leert niet ſlechts de conſtructien van de voornaamſte en dagelijks voorkomende meetkunſtige Werkſtukken kennen: maar geeft ook algemeene, en, door uitgezogte voorbeelden, opgehelderde, regels aan de hand, om een meetkunſtig werkſtuk, door een analytiſche redeneering, tot de oplosſing en eindelijke conſtructie te brengen, eene leerwijze, welke heden ten dage te veel verzuimd wordt en verdrongen is door de nieuwere leerwijze, welke, ja wel, vele voordeelen boven de eerſte bezit, maar ook in tegendeel, wederom in vele opzigten, beneden dezelve moet geſteld worden.

De VIII en IX Boeken handelen over de Goniometrie *of de* Meetkunst der hoeken, *en de* Trigonometrie *of de* platte Driehoeksmeting. *In hetzelve is de leer van den poſitieven en negatieven toeſtand der Goniometriſche lijnen, bij de meeste Schrijvers, zelfs de Franſche niet uitgezonderd, zoo onoplettend behandeld, naar de leerwijze, welke wij elders, in onze* Handleiding, *breeder ontvouwd hebben, op eene beknopte wijze voorgedragen* (2). *Vele nieuwe formulen zijn in het IX. Boek vervat, in hetwelke wij getracht hebben den leerling niet ſlechts, in de oplosſing der gewone* ge-

(2) *Van hoeveel belang deze kennis zij, zal uit de vergelijking onzer Driehoeksmeting met die van anderen blijken. Zie onder anderen aanmerkingen op de XIII. Stell. XIII. Boek. Velen onzer Wiskundigen van Profesſie ſchijnen daarmede niet grondig bekend te zijn.*

gevallen, door de berekening van gepaste voorbeelden, te oefenen; maar ook, in de behandeling der Trigonometrische ſtelkundige oplosſingen, bekwaam te maken.

Het tweede gedeelte van dit werk handelt in de X, XI en XII. Boeken over de Meetkunst der Ligchamen. *Door de ondervinding wetende, hoe nadeelig voor den goeden uitſlag der toekomſtige vorderingen eene al te ſlordige behandeling van de ligging en ſnijding der vlakken zij, hebben wij het X. Boek, hetwelk voor dit onderwerp beſtemd was, boven alles, met eene bijzondere oplettenheid behandeld; zoodat men in hetzelve alles, in een welgeordend verband, vinden zal, wat tot de ligging en ſnijding der regte lijnen en vlakken in de ruimte behoort, en inzonderheid eene naauwkeurige ontwikkeling der veelvlakkige of ligchamelijke hoeken, welker grondige kennis, in de toegepaste Meetkunst van zulk een groot aanbelang is. Op deze grondſlagen worden in het XI. Boek de eigenſchappen der veelvlakkige ligchamen en in het XII die der ronde ligchamen opgegeven en betoogd.*

Het XIII. Boek behandelt, op eene beknopte en volledige wijze, de Bolvormige of Sphæriſche Driehoeksmeting. In de behandeling dezer ſtof, hebben wij den Leerling niet ſlechts gelegenheid willen geven, om de gevallen dezer Driehoeksmeting op de Aardrijks- en Sterrekunde; maar ook op de Meetkunst zelve toetepasſen, en met de ontwikkeling en omzetting der formulen, door het uitbrengen van verſchillende oplosſingen, voor elk geval, gemeenzaam te maken. Dit ſtuk is zoo volledig behandeld, dat men, in verſcheidene groote en uitgebreide werken, alles wat wij hier, in een

kort

kort bestek, bij een gebragt hebben, te vergeefsch zoeken zal.

De XIV en XV Boeken, welke in zekeren zin, als eene bijlage tot het geheele werk kunnen aangemerkt worden, behandelen twee gewigte theorien, waarvan CARNOT *en* S. HUILIER *de uitvinders zijn, en het gebied der Elementaire Meetkunst niet weinig vergroot hebben: te weten de theorie der* Transverfalen *en de* Veelhoeksmeting, *onderwerpen, welke wij in het breede onderzogt, en, in eene geheele nieuwe en beknopte schikking, met de bijvoeging zelfs van vele nieuwe en nuttige eigenschappen, vergroot hebben.*

Met de behandeling van alle deze onderwerpen meenen wij aan onze Landgenooten den tegenwoordigen staat der Meetkunst, in haar geheel, beknoptelijk en tevens volledig, te hebben voorgedragen. Doch wij vleijen ons, dat zulks niet den eenigsten dienst zal zijn, welke wij aan onze Landgenooten bewezen zullen hebben. Wars van de slordigheid, waarmede men sederd een groot getal jaren, onder den naam van bekorting, de Demonstratiën of Betoogen behandelde, (3) *over-*

(3) *Onder zulke bekortingen tel ik regtstreeksche of ingewikkeld onnaauwkeurige en, met de regels strijdige, gevolgtrekkingen. Bij voorbeeld,* STEENSTRA *bewijst wel (IV. Prop. I. B.) dat de lijn, welke den tophoek van eenen gelijkbeenigen driehoek midden doordeelt, regthoekig op de basis staat, en dezelve in twee gelijke deelen deelt: maar hij handelt tegen de regels eener strikte redeneerkunde, wanneer hij ingewikkeld, in het betoog van de XI. Prop. I. B., besluit, dat de lijn, welke uit den tophoek van eenen gelijkbeenigen driehoek regthoekig op de basis valt, dezelve midden door deelt, eene zaak, die wel waar is, maar die hij niet bewijst. Op gelijke wijze, maakt diezelfde Schrijver, in zijne XXVII. Def. I. B. eene stilzwijgende onderstelling, welke, in het betoog der XII. Prop. eene nadere ontwikkeling verkrijgt, en zoo als*

overtuigd van de nadeelige gevolge, welke zulks na zich ſleept, hebben wij, aan den eenen kant, op alle mogelijke bekortingen bedacht geweest; maar ook, aan den anderen kant, ons niet veroorloofd valſche voor deugdzame, onvolledige voor volkomene bewijzen op te disſen, en vooral niet, uit eene bewezene ſtelling tot deszelfs omgekeerde leeren beſluiten: veel liever hebben wij, om alle mogelijke bekorting te maken, die betoogen, welke de leerling zelve vinden kan, evenwel ſlechts voor die ſtellingen, welke van minder aanbelang zijn, geheel weggelaten. Wij hebben alzoo getracht, den ſtrengen betoogtrant der Ouden, ontheven echter van die kleine etiquettes, welke in onzen tijd nutteloos zijn, tot ons model te nemen, zonder ons, door een overdreven vooroordeel voor hunne handelwijzen, te laten wegſlepen en blindelings overtenemen, hetgeen zij zeker beter zouden gedaan hebben, wanneer zij onze hulpmiddelen hadden te baat gehad. Dat wij nu hierin, zonder eenigzins omſlagtiger te worden, geſlaagd zijn, blijkt hieruit; dat in de zes eerſte boeken van den Heer STEENSTRA, *146 ſtellingen en werkſtuk-*

als uit onze XXIX. Stell. I. B. blijken zal, wel degelijk moet bewezen worden, en niet bewijsbaar is, zonder dat die XII. Prop. welke echter op die defenitie ſteunen moet, bewezen is. Wij zouden vele zulke onnaauwkeurigheden, welke het gevolg van die ſoort van bekortingen zijn, kunnen opgeven; onder anderen ook de concluſien tot het omgekeerde der ſtellingen, hetwelk tegen de eerſte regels ſtrijdt. Zal men zeggen, de eerstbeginnenden gevoelen die ſtrengheid van bewijzen niet? dit weten wij nogtans beter. 'Er is geen middenweg tusſchen deze twee dingen: de leerling moet de Meetkunſtige waarheden geſchiedkundig leeren kennen: maar dan moet het geen bewijzen heten; of, wanneer men bewijst, dan moet men het, naar de regels, en zoo als het behoort, doen.

ſtukken voorkomen; bij ons insgelijks 146 *over hetzelfde onderwerp, waarvan nogtans een veertigtal nieuwe ſtellingen, welke bij Z. E. niet voorkomen, gevonden worden, zonder de omgekeerde ſtellingen nog te rekenen, welke die ſchrijver nergens afzonderlijk bewijst: waaruit derhalve blijkt, dat men, zonder van de ſtrengheid afte wijken, nogtans bekorten kan.*

Wanneer wij, in zekere opzigten, uitvoeriger dan anderen mogten ſchijnen, is het in de toelichting, het zij der belangrijkſte, het zij der moeijelijkſte zaken. Wij wenſchen die beoordeelaars, die zulk een vlug verſtand hebben, dat zij, met een half woord, dat geene begrijpen, waartoe een gewoon mensch 'er tien noodig heeft, (maar dan ook tevens zoo vlug zijn, dat zij in hunne vlugt het oogmerk van den ſchrijver, dien zij beoordeelen, vergeten,) van harte, met hunne uitmuntende begaafdheden geluk: voor hun hebben wij ook niet geſchreven: maar voor die doordenkende verſtanden, welke zoo vlug niet zijn; doch gaarne eene zaak, met klaarheid en overtuiging, zien en gevoelen, eer zij aan dezelve hunne toeſtemming kunnen geven, en voor dezulke hebben wij zeker niet te veel, maar misſchien wel te weinig gezegd.

De gewigtigſte theorien, welke in de beginſelen der Meetkunst moeten voorkomen, zijn door ons, op eene geheel nieuwe wijze, behandeld en in een duidelijker en klaarder licht geſteld. Onder deze moeten wij van de leer der Evenredigheden en der gelijkvormige Figuren, met een woord, gewag maken.

Het is niet te verwonderen, dat zij, die blijde zijn, wanneer zij eenigen wiskundigen regel in het werkdadige weten te gebruiken, en zich dan verder over de ken-

kennis van deszelfs gronden niet bekommeren, minder ſmaak in onze wijze van de Evenredigheden te behandelen vinden moeten: maar dat Kunstregters, met eene enkelde pennenſtreek verklaren, dat onze behandeling der Evenredigheden minder bevalt, zonder optegeven, waarom? is zoo vreemd als onbillijk. Wij moeten dan nogmaals eenige oogenblikken bij dit ſtuk blijven ſtilſtaan, en de gronden ontvouwen, waarom onze wijze van behandeling der Evenredigheden beter dan de gewone en beter dan die van Euclides *is? De Meetkunst bewijst in vele gevallen ontegenzeggelijk,* à posteriori, *het beſtaan der onmeetbare grootheden, welke men zich* à priori *kan voorſtellen: zoodra men derhalve, op eene algeweene wijze, over de evenredigheden van lijnen, hoeken, cirkelbogen, vlakken en ligchamen, enz. in eenige geſtelde figuur, moet redekavelen, kunnen de grootheden, welker betrekking overwogen wordt, of onderling meetbaar of onderling onmeetbaar zijn: bevonden zich nu de termen der beſchouwde betrekking altijd in het eerſte geval, dan zou de gewone oppervlakkige wijze van de behandeling der evenredigheden zoo als dezelve, bij* Steenstra *en anderen, voorkomen, voldoende zijn: maar daar dit nu het geval niet is, zal, na den afloop van een betoog, nog altijd de vraag overblijven:* zal de betoogde ſtelling nu ook in het geval der onmeetbaarheid waar zijn? *en deze twijfeling kan, wanneer men de evenredigheden, als in getallen uitgedrukt zijnde, beſchouwt, en derzelver termen diensvolgens meetbare grootheden zijn, niet worden uit den weg geruimd.* Euclides *heeft deze zwarigheid zoo klaar ingezien, dat hij, in de* V. Bep. *van zijn* V. Boek, *eene geheele algemeene Bepaling van*

van de evenredigheid gegeven heeft, welke beide gevallen in zich ſluit. Deze bepaling van EUCLIDES *is duister: vandaar, dat ook alle zijne betoogen over de evenredigheden duister, gedwongen en omſlagtig zijn; en zulks is misſchien wel de reden, waarom de latere Schrijvers, geen kans ziende, om de zaak op eene betere wijze te redden, de gordiaanſche knoop hebben doorgehouwen, en zich alleenlijk bij de getallen evenredigheden bepaald. Het ontbrak echter aan* EUCLIDES *en de latere Schrijvers aan de noodige hulpmiddelen om de zaak te redden: de theorie der gedurige breuken, welker eerſte gronden tot het volledig verſtand der evenredigheden, zoo als wij dezelve behandelen, noodig is, was aan* EUCLIDES, *en zelfs voor de tijden van* EULER *en* LAGRANGE, *die dezelve hebben daargeſteld en verder ontwikkeld, onbekend: en deze theorie alleen kan het denkbeeld doen geboren worden, om de evenredigheden, naar onze wijze van voordragt, te behandelen. Die wijze van behandelen is nu duidelijk: het wezen der evenredigheid wordt hier met de eigenaardige geſteldheid der meetbare en onmeetbare grootheden en derzelver waar* criterium, *als ook met de theorie der gedurige breuken in een onafſcheidelijk en natuurlijk verband gebragt. Of nu onze wijze van voordragen, klaarheid, duidelijkheid en bekorting, in de behandeling van het onderwerp brengt, zal elk kunnen beoordeelen, die de moeite neemt, om ons tweede boek met het vijfde van* EUCLIDES *te vergelijken, en wij twijfelen dan niet, of onze wijze van behandelen, waaraan nog geen uitheemsch Schrijver gedacht heeft, zal, wegens de algemeenheid der voordragt en de rijkheid der ſtof, aan elk verſtandig man, wel verre van*

min-

minder dan eenig ander gedeelte van ons werk te bevallen, moeten behagen en vermaak doen.

De theorie der gelijkvormigheid, welke in het IV. Boek is voorgedragen, en waarvan wij reeds vroeger eene kleine proeve gegeven hadden, (4) *is van onze vinding, en buitenslands nog nergens op deze wijze voorgedragen. De bepaling der gelijkvormige figuren van* EUCLIDES *en anderen strekt zich alleen tot de regtlijnige figuren uit, en die der gelijkvormige ligchamelijke figuren is gebrekkig: de kromme lijnen en oppervlakten zijn in dezelve niet begrepen.* EUCLIDES *zelf, om zich gelijk te blijven, heeft niet durven zeggen:* dat cirkels gelijkvormige figuren zijn, *en de latere Schrijvers hebben alleen verzekerd dat alle Parabola's, Cisſoïden, Cycloïden, enz. gelijkformige figuren zijn, niet, omdat zij zulks uit eene algemeene bepaling besloten; maar, omdat zij in dezelve eigenschappen ontdekten, welke met die der gelijkvormige regtlijnige figuren overëënstemden. Onze bepaling van de gelijkvormigheid is algemeen, zijnde de XXII. Bepaling van het XI. Boek slechts eene herinnering van de III. van het IV. Boek; zij omvat de gelijkvormigheid der ligchamelijke, zoowel als die der vlakke figuren, en is, door nader aan het algemeen indrukſel te komen, dat de menschen, op het zien der gelijkvormigheid, ontwaren, meer populair, meer bevattelijk en meer naar de waarheid ingerigt.*

SIMPSON *en* LEGENDRE *hebben gegronde critiken op de bepalingen der gelijkvormigheid (de Euclidiaansche na-*

(4) *Wiskundige Verhandelingen, bij* A. LOOSJES, PZ. 1801.

namelijk) gemaakt; doch deze raken de gelijkvormigheid der regtlijnige figuren en veelvlakkige ligchamen. Volgens LEGENDRE, *zouden in de bepaling der gelijkvormigheid geen meer voorwaarden, dan volstrekt noodzakelijk zijn, behooren opgeteld te worden: dan, indien men zulks tot eenen regel zou willen aannemen, is onze bepaling, naar dien regel te beoordeelen, aan critiken onderworpen: doch men kan,* à priori, *inzien, dat eene bepaling, aan zulk eenen regel onderworpen, volstrekt onmogelijk is, gelijk ook de Heer* LEGENDRE *'er geene betere voor in de plaats stelt. De zaak nogtans wel ingezien zijnde, bevat onze bepaling, algemeen genomen, geene enkelde voorwaarde te veel of te weinig: dit alleen is waar: dat, wanneer de gelijkvormige regtlijnige figuren en veelvlakkige ligchamen aan dezelve worden onderworpen, een groot aantal voorwaarden onderling afhankelijk van elkander worden, en uit dien hoofde eene vermindering kunnen ondergaan: maar daar nu dit aantal voorwaarden, voor elke bijzondere soort van figuur, anders zou worden, gevoelt men immers ten klaarste, dat men geene algemeene bepaling, aan dien regel onderworpen, ontwerpen kan. Het is genoeg, dat onze bepaling in geene tegenstrijdigheden kan vallen, dat zij een algemeener licht over de zaak verspreidt en aanleiding tot nieuwe stellingen gegeven heeft, welke, in de werkdadige toepassing, van het grootste aanbelang en het uitgestrekste nut zijn.*

Wanneer men het zamenhangend geheel van onze Beginselen inziet, dan zal men bespeuren: dat de zaken in een zamenhangend en, zoo wij vertrouwen, in een natuurlijk verband geplaatst zijn. De theorie *der evenwijdige lijnen,* (5) *welke op het einde van het eerste boek behandeld is, en waartoe slechts weinig voorafgaande beginselen vereischt worden, is de grondslag van de geheele Meetkunst. Zij brengt ons, in het III. Boek, tot de eigenschappen Parallelogrammen, Regthoeken en Vierkanten, tot het bestaan der ongelijkvormige en gelijke figuren, tot de transformatie van alle soorten van figuren, tot het vergelijken der inhouden, tot het* Theorema *van* Pythagoras, *enz. In het IV. Boek, tot de eigenschappen der evenredige lijnen en gelijkvormige figuren. In het V en VI. Boek tot de eigenschappen des cirkels; zij is de grondslag van de theorie der transversalen, welke, met haar te zamen genomen, de basis en grondslag van het geheele meetkunstig zamenstel zijn. Diezelfde theorie eindelijk is de grondslag van de ligging en snijding der vlakken en van de Meetkunst der Ligchamen, welke daarop gegrond is.*

Indien het bestek dezer voorrede het gedoogde, zouden wij veel aangaande de Methodus docendi *en het gebruik, dat men van dit werk maken kan, te zeggen hebben: dan, daar wij ons voorstellen, zulks in een afzonderlijk stukje te doen, zullen wij dit onderwerp voor het tegenwoordige aan zijne plaats laten.*

Wij meenen genoeg gezegd te hebben, om den Lezer met den aard en de inrigting van dit werk bekend te maken: het bevat, zoo als de tijtel belooft, een ontwerp van beginselen, zoo als de tegenwoordige staat der kunst

(5) *Het is niet uit overtuiging, maar uit toegevenheid, dat wij de bewijzen van de XVIII en XIX. Stellingen van het I. Boek, elders gegeven, hier niet gebruikt hebben.*

kunst hetzelve vordert. De taak die wij ondernamen, was moeijelijk, vereischte geduld en oplettenheid, belanglooze opoffering van tijd en moeite; dan, de goedkeuring van verdienstelijke en in ons Vaderland met roem bekende mannen, die reeds de eerste afgedrukte bladen, met hunne goedkeuring vereerden en ook dezelve aanvankelijk tot eenen leiddraad in hun onderwijs gebruikten, heeft ons, in de getrouwe uitvoering van den ons opgelegden moeijelijken taak, niet weinig bemoedigd. Die goedkeuring, in plaats van ons onachtzaam te maken, en voor mogelijke mistastingen te verblinden, heeft integendeel onze eerzucht opgewekt, om met verdubbelde oplettenheid, niet slechts het vervolg van dit werk, met eene naauwgezette omzichtigheid, te bearbeiden; maar ook zelfs het reeds afgewerkte nader te verbeteren en te beschaven. Van daar dan ook, dat dit werk eenige maanden later, dan wij ons eerst hadden voorgesteld, in het licht verschijnt, eene vertraging, waaraan ook andere bezigheden, welke de onaangenaamheid des tijds veroorzaakten, het hunne hebben toegebragt.

Steeds geen ander doel, dan de waarheid en het beste, gehad hebbende, en, om, naar de mate onzer geringe vermogens en talenten, den roem van ons Vaderland, hetwelk steeds zoo vele beroemde mannen in dit vak opleverde, en, in alle vakken van geleerdheid en beschaving, voor deszelfs naburen niet behoeft te wijken, op te houden, en, ware het mogelijk te bevorderen, behoort ook onzen arbeid uit geen ander gezichtspunt beschouwd te worden. En, schoon wij in vele opzichten weinig aanmoediging genoten, zal zulks niet beletten, om, indien de Hemel ons gezondheid en krach-

krachten blijft verleenen, op den begonnen loopbaan, moedig voorttegaan; en eerlang de Analytische Meetkunst te voorschijn te brengen. Dan, zoo wij, in dit alles, ons de aanmerkingen van kundige, brave en welmeenende mannen, met dankbaarheid, te nutte maken, zullen wij nogtans, met eene stilzwijgende verachting, ons niet bekreunen aan die lage vitters, en in het donker vliegende uilen, welke de bewijzen met zich mede brengen, dat zij beoordeelen, wat zij niet verstaan, en lasteren, wien zij niet kennen, en sommige van welke, bij zekere gelegenheden, van zulke niets beduidende wezens als wij zijn, wel eens hebben willen leeren wat goed en nuttig is.

JACOB DE GELDER.

Amsterdam den 20 van
Herfstmaand 1810.

I N H O U D.

E E R S T E   D E E L.

OVER DE MEETKUNST DER VLAKKEN.

Toe-

TWEEDE DEEL.

OVER DE MEETKUNST DER LIGCHAMEN.

NOODIG BERIGT.

In dit werk worden de allereerſte Beginſelen der Reken- en Stelkunst en de kennis der teekens onderſteld.

Men kan, in de Lezing van dit werk, de tiende, elfde en twaalfde Boeken onmiddelijk op de zes eerſte laten volgen. De achtſte en negende Boeken maken met het dertiende een geheel. De veertiende en vijftiende Boeken bevatten afzonderlijke Theorien.

Men kan, met die Leerlingen, welke niet veel tijds hebben, de betoogen der omgekeerde Stellingen wel overſlaan, om dezelve bij eene andere gelegenheid, of bij eene herhaling, nategaan: onder beding, dat men dezelve niet, als gevolgtrekkingen der hoofdſtellingen, doe voorkomen. Met zoodanige leerlingen kan men ook overſlaan:

In het I. Boek, Stell. XXVIII.

In het III. Boek, Stell. XXI.

In het V. Boek, Stell. XXIII, XXIV, XXV, XXVI, XXVII en XXVIII.

En in het VI. Boek, het artijkel van de Iſoperimetriſche Figuren.

BE-

BEGINSELEN
DER
MEETKUNST.

EERSTE DEEL.

OVER DE MEETKUNST DER VLAKKEN.

Voorafgaande Bepalingen.

§. 1. I. BEPALING. De Meetkunst is de kunst, om te bepalen, hoe de grootheid van elke uitgebreidheid afhangt van de wijze, op welke zij door hare grenzen bepaald is, ten einde, langs dien weg, de regels te vinden, om dezelve met uitgebreidheden van dezelfde ſoort te vergelijken.

§. 2. II. BEPALING. Eene uitgebreidheid is eene ruimte, welke, aan alle kanten, binnen zekere grenzen beſloten is.

§. 3. III. BEPALING. Men verſtaat door de grenzen eener uitgebreidheid, in het algemeen, alle die plaatſen, welke noch binnen noch buiten die uitgebreidheid gelegen zijn; de plaats tot zoo verre deze uitgebreidheid ſtrekt, en van de omliggende ruimte is afgeſcheiden.

§. 4. 'Er zijn in de Meetkunst driederlei ſoort van uitgebreidheden: 1° de *ligchamelijke*, 2° de *vlakte*, 3° de *lengte uitgebreidheid*.

§. 5. IV. BEPALING. Eene *ligchamelijke uitgebreidheid*, eenvoudig *Ligchaam* genoemd, is, in alle rigtingen, tot aan hare grenzen uitgeſtrekt. Men drukt deze hoedanigheid uit, door te zeggen, *dat zij lengte, breedte en hoogte heeft.*

§. 6. V. Bepaling. De grenzen eener ligchamelijke uitgebreidheid zijn, over den omtrek van dit ligchaam, uitgeftrekt; zij maken, in haren geheelen zamenhang, eene uitgebreidheid, welke van eenen geheel anderen aard is, dan de ligchamelijke, en alleen *lengte* en *breedte*, zonder *dikte*, noch *hoogte* heeft: men noemt haar *vlakte uitgebreidheid*, eenvoudig *vlak*, *vlakte* of *oppervlakte*.

§. 7. Gevolg. *De omtrekken der ligchamen, of der ligchamelijke uitgebreidheden, zijn derhalve vlakken, en derzelver onderfcheidene deelen raken of fluiten altijd, volgens het beloop van vlakken, aan elkander.*

§. 8. VI. Bepaling. Eene *lengte uitgebreidheid*, eenvoudig *lijn* genoemd, heeft alleen lengte, zonder breedte noch dikte. — *De lijnen zijn derhalve de grenzen der vlakken, en de deelen eener vlakte raken of fluiten, volgens het beloop van lijnen, aan elkander.*

§. 9. VII. Bepaling. *De uiteinden der lijnen zijn punten. Punten hebben geene uitgebreidheid:* zij zijn alleen zekere bepaalde plaatfen, welke in de uitgebreidheid, of in hare grenzen, gedacht kunnen worden.

§. 10. De lijnen worden in twee groote hoofdfoorten onderfcheiden: in *Regte* en *Kromme*.

§. 11. VIII. Bepaling. Eene *regte lijn*, *Fig.* 1, is eene lijn, welke altijd in *dezelfde rigting voortgaat*, zonder, ter regter noch ter linkerhand, op noch benedenwaards, aftewijken. *Zij is klaarblijkelijk de kortfte affland, tusfchen twee punten A en B, en zij kan, aan denzelfden kant, flechts in ééne rigting, verlengd worden.*

§. 12. IX. Bepaling. Eene *kromme lijn* is eene lijn, welke, van elk punt tot het naastvolgende, onophoudelijk van rigting of ftreek verandert. Zie *Fig.* 2.

§. 13. X. Bepaling. Eene *platte vlakte* of een *plat vlak* is zulk eene vlakte, over welke eene regte lijn, in alle rigtingen, zoodanig kan bewogen worden, dat zij altijd, in alle hare punten, het vlak aanraakt. Bij voorbeeld, het oppervlak van een ftilftaand water.

§. 14. XI. Bepaling. Een *gebogen oppervlak* heeft eene te-

tegengestelde hoedanigheid: hetzelve zal niet, in alle rigtingen, door eene regte lijn, in alle deszelfs punten, kunnen worden aangeraakt.

§. 15. XII. Bepaling. De *figuur* eener uitgebreidheid *is de wijze, waarop zij bestaat*, en door de onderlinge ligging van hare grenzen bepaald is.

§. 16. Aanmerking. Men onderscheidt de Beginselen der Meetkunst, in de *Meetkunst der Vlakken*, en in de *Meetkunst der Ligchamen*, welke twee hoofddeelen, wederom hunne bijzondere onderdeelingen hebben. In de Meetkunst der Vlakken, bepaalt men zich alleenlijk tot de regtlijnige figuren en tot den Cirkel, en, in de Meetkunst der Ligchamen, tot de veelvlakkige Ligchamen, den Cilinder, Kegel en Bol. Van deze bijzondere uitgebreidheden, zullen wij ten tijde, wanneer, en ter plaatse, alwaar het zal te pas komen, de behoorlijke bepalingen geven. De *Leerwijze*, welke men, in de beginselen der Meetkunst, volgt, is de *synthetische*; men draagt de onderscheidene meetkunstige waarheden voor, welke elkander in eene aanëéngeschakelde orde opvolgen, en welke dan betoogd of bewezen worden. In elke stelling wordt iets ondersteld en iets gesteld, hetwelk, met dit ondersteldе, in een noodzakelijk verband staat. *Bewijzen of betoogen* is nu aantetoonen en klaarblijkelijk te maken: *dat het gestelde een noodzakelijk gevolg is van hetgeen in de stelling wordt aangenomen*. Nogtans moet men, met betrekking tot deze stellingen, den eerstbeginnenden waarschuwen: dat men eenige bewezene stelling niet omkeeren en het omgekeerde, zonder nader onderzoek, voor eene bewezene waarheid houden mag. Wij zullen ook daarom het omgekeerde der voornaamste en gewigtigste stellingen op zijne plaats betoogen.

§. 17. De gronden, welke tot het betoog der stellingen, als ontwijfelbare en in zich zelve klaarblijkelijke waarheden, aangenomen en daarom *Axiomata*, of *algemeene kundigheden*, genoemd worden, zijn de volgende.

I. Axioma. *Alle uitgebreidheden, welke zoodanig op elkander gelegd, of in elkander geplaatst kunnen worden, dat derzelver grenzen overal op en in elkander vallen, zijn gelijk of even groot.* Men noemt zulke uitgebreidheden *gelijk* en *gelijkvormig*, om dezelve van uitgebreidheden te onderscheiden, die wel *gelijk* zijn, maar niet *op elkander passen*.

II. Axioma. *Het gedeelte is kleiner dan het geheel.* —

Het geheel, omgekeerd, *grooter dan één zijner deelen.* —— *Het geheel is gelijk aan de ſom van alle deszelfs deelen.*

III. Axioma. *Geene uitgebreidheid kan een gedeelte van eene andere zijn, indien niet deze uitgebreidheid, een zeker aantal malen genomen zijnde, gelijk of grooter dan die andere uitgebreidheid, dan dit geheel, worden kan.*

Geen punt kan derhalve een deel van eene lijn, een vlak of ligchaam; geene lijn een deel van een vlak of ligchaam, geen vlak een deel van een ligchaam zijn: maar de deelen der lijnen, vlakken en ligchamen zijn insgelijks lijnen, vlakken en ligchamen.

IV. Axioma. *Indien twee dingen, elk in het bijzonder, aan een derde gelijk zijn; dan zijn ook die dingen gelijk of even groot.*

V. Axioma. *Indien een ding A gelijk is aan een ding B; maar B grooter of kleiner is dan een derde ding C; dan zal ook A grooter of kleiner dan C zijn.*

VI. Axioma. *Indien A grooter is dan B, en B wederom grooter dan C; dan zal ook A grooter dan C zijn.*

VII. Axioma. *Indien men bij gelijke grootheden gelijke of dezelfde grootheden optelt; dan zijn de ſommen gelijk.*

VIII. Axioma. *Indien men van gelijke grootheden gelijke aftrekt; dan zijn de verſchillen gelijk.*

IX. Axioma. *Indien A grooter dan B is; dan zal A, opgeteld met C, grooter zijn dan B opgeteld met C; en wederom, A min C grooter dan B min C zijn.*

X. Axioma. *Indien A grooter dan B, en C grooter dan D is; dan zal de ſom van A en C ook grooter dan de ſom van B en D zijn.*

XI. Axioma. *Indien van twee gelijke grootheden twee ongelijke afgetrokken worden; dan zullen de verſchillen ongelijk zijn, en de grootheid, waarvan het meest is afgetrokken, zal het minst overlaten.*

XII. Axioma. *Dezelfde veelvouden en dezelfde evenmatige deelen van gelijke grootheden zijn gelijk.*

XIII. Axioma. *Indien twee grootheden uit een bepaald of onbepaald; maar altijd hetzelfde aantal, gelijke deelen beſtaan; het eerſte deel gelijk aan het eerſte, het tweede gelijk aan het tweede, enz.; dan zijn deze grootheden gelijk.*

§. 18.

§. 18. Nog worden, tot het betoog der ſtellingen, de volgende zaken (*Postulata* of *Vereischten*) gevorderd.

I. *Dat men, van het eene punt tot het andere, eene regte lijn mag trekken.*

II. *Dat men eene regte lijn, naar welgevallen, mag verlengen.*

III. *Dat men een punt, in eene regte lijn, zoodanig mag ſtellen, dat het die lijn, in twee gelijke deelen, verdeelt.*

IV. *Dat men insgelijks, tusſchen de beenen van eenen hoek, eene lijn, uit deszelfs toppunt komende, zoodanig mag aannemen, dat zij dien hoek, in twee gelijke deelen, verdeelt.* (Zie XIV en XV. *Bep.* hier onder.)

§. 19. Bij de Meetkunſtenaars zijn nog de volgende bewoordingen in gebruik.

Eene *Propoſitie* is eene ſtelling, welke dan eens een *Theorema*, dan wederom een *Problema* is.

Een *Theorema* is eene eigenlijk gezegde Meetkunſtige ſtelling, in welke eene of andere eigenſchap, om te bewijzen, geſteld wordt.

Men noemt *Lemma*, of *Voorbewijs*, eene ſoortgelijke ſtelling; doch, welke met het onderwerp der onmiddelijk voorgaande en volgende ſtellingen geene of weinige gemeenſchap heeft, en nogtans tot het bewijs van eene of meer volgende ſtellingen dienen moet.

Een *Próblema*, of *Werkſtuk*, is een meetkunſtig Vraagſtuk, dat, door conſtructie, of berekening, moet opgelost worden.

Een *Corrollarium*, of *Gevolg*, is eene waarheid, welke uit eene bewezene ſtelling, of, uit den loop van derzelver betoog, onmiddelijk volgt.

Een *Scholium* is eene *Aanmerking*, of *Leering*, welke uit eenige ſtelling of derzelver betoog wordt afgeleid.

BERIGT.

Men onderſtelt, in dit eerſte deel der Beginſelen, ſtilzwijgend: dat alle punten, lijnen en cirkels, welke in eene figuur voorkomen, in dezelſde platte vlakte gelegen zijn. In het vervolg zal het woord *lijn* altijd *regte lijn* beteekenen.

EERSTE BOEK.

Over de regte Lijnen, de Hoeken, de Driehoeken, Loodlijnen en evenwijdige Lijnen.

I. Stelling. *Fig.* 3.

§. 20. *Indien twee punten, P en Q, van eene lijn AB in eene andere lijn CD gebragt worden; dan zullen deze lijnen, in alle derzelver punten, met elkander overëënkomen.*

Betoog. Nemen wij, dat de lijn *AB*, na dat hare punten *P* en *Q* in de lijn *CD* gebragt zijn, niet overal met dezelve overëënkome; en eene rigting aanneme, als in de figuur wordt voorgesteld; dan zou daaruit volgen: dat de lijn *AB* in haar beloop eene veranderlijke rigting hebben, en (*VIII. Bep.*) gevolgelijk geene regte lijn zijn zou. Alle hare punten moeten dan in de lijn *CD* vallen.

§. 21. I. Gevolg. *Men kan dan, van het één tot het ander punt, slechts ééne regte lijn trekken.*

§. 22. II. Gevolg. *Twee lijnen kunnen dan ook geene bepaalde vlakte insluiten.*

§. 23. XIII. Bepaling. *Fig.* 4. Twee lijnen *AB* en *CD*, worden gezegd *gelijk*, of *even lang*, te zijn, wanneer, het punt *A* in het punt *C*, en de lijnen voorts langs elkander gelegd zijnde, het punt *B* in het punt *D* valt.

§. 24. XIV. Bepaling. *Fig.* 5. Een *regtlijnige hoek*, bij verkorting, *hoek* genaamd, is de onbepaalde ruimte *P*, welke gelegen is tusschen twee lijnen, *AB* en *BC*, welke in één punt *B* zamenkomen, en naar welgevallen verlengd kunnen worden. De zamenkomende lijnen, *AB* en *BC*, noemt men de *beenen* of *zijden*, en het punt van zamenkomst *B* het *toppunt* of *hoekpunt* van den hoek. Anderen zeggen: dat een *hoek* de *helling* of *neiging* van twee regte lijnen is, die elkander ontmoeten.

§. 25. Indien het geene dubbelzinnigheid kan veroorzaken, drukt men, in eene figuur, een hoek door de letter, die aan het hoekpunt

staat,

ſtaat, uit; anders door drie letters, mits men de letter, aan het hoekpunt ſtaande, in het midden plaatſe. Men zegt dus: hoek *B*, hoek *ABC* of hoek *CBA*.

§. 26. Gevolg. *De hoegrootheid van eenen hoek hangt niet af van de lengte, welke deszelfs beenen in eene figuur hebben; maar van de grootere of kleinere ruimte, welke tusſchen deze beenen gelegen is.*

§. 27. Aanmerking. *Fig.* 6. *Hoeken ABC, CBD en DBE, zijn grootheden, welke, door de toppunten dezer hoeken in elkander, en derzelver beenen langs elkander te leggen, tot één geheel kunnen verëenigd worden. En elke hoek ABE kan, door, uit het hoekpunt B, binnen den hoek, lijnen BC BD enz. te trekken, in deelen ABC, CBD, DBE, enz. verdeeld worden.*

§. 28. XV. Bepaling. *Fig.* 7. Twee hoeken *ABC* en *DEF* worden gezegd *gelijk*, of *even groot*, te zijn: indien het hoekpunt *B* van den eerſten hoek *ABC* in het hoekpunt *E* van den tweeden hoek *DEF* gebragt zijnde, en een been *BA* van den eerſten, langs een been *ED* van den tweeden, dan ook het andere been *BC* van den eerſten langs het andere been *EF* van den tweeden valt.

§. 29. XVI. Bepaling. *Fig.* 8. Wanneer eene lijn *CD* op eene andere lijn *AB* zoodanig ſtaat, dat de hoeken *ADC* en *BDC*, aan weërszijden, gelijk zijn; dan wordt deze lijn *CD* gezegd *loodregt* (*perpendiculair*) op de andere *AB* te ſtaan, en de hoeken *ADC* en *BDC*, welke deze lijnen bepalen, worden alsdan *regte hoeken* genoemd.

II. Stelling. *Fig.* 9.

§. 30. *Alle regte hoeken zijn gelijk.*

Betoog. Laat *DC* loodregt op *AB* en *GH* loodregt op *EF* ſtaan; dan moet bewezen worden: dat hoek *ADC* gelijk aan hoek *EGH* is. Laat het punt *G* in het punt *D* en *GE* langs *DA* gelegd worden; dan zal (*I. Stell.*) *GF* langs *DB* vallen: indien nu *GH* niet langs *DC* valt; dan zal zij ter regter of linker zijde van *CD* vallen, en met *CD* een hoek *CDH* maken; en dan is hoek *BDH* $>$ hoek *BDC*; maar hoek *BDC* $=$ hoek *ADC* zijnde, (*onderstelling*) is hoek *BDH* > hoek *ADC*; wederom is hoek *BDH*, (*onderst.*) = hoek *ADH*; derhalve (*V. Ax.*) hoek *ADH* > hoek *ADC*, en het gedeelte zou derhalve grooter dan het geheel moeten zijn. De lijn *GH* kan derhalve niet buiten, maar wel langs de lijn *DC* vallen, en de hoek *ADC* moet derhalve gelijk zijn aan den hoek *EGH*.

§. 31. GEVOLG. *Uit een punt D, genomen in eene regte lijn AB, kan niet meer dan ééne loodlijn CD op dezelve worden opgerigt.*

§. 32. XVII. BEPALING. *Fig.* 10. Een hoek *ABC*, die kleiner dan een regte hoek is, wordt *scherpe* hoek genoemd.

§. 33. XVIII. BEPALING. *Fig.* 10. Een hoek *DBC*, die grooter dan een regte hoek is, wordt *stompe* of *plompe* hoek genoemd.

§. 34. XIX. BEPALING. *Fig.* 10. Indien men het been *AB* van eenen hoek *ABC* verlengt; dan wordt de hoek *DBC*, welke, door dit verlengde been en het andere been, gemaakt wordt, het *supplement* of *aanvulsel* van dezen hoek *ABC* genoemd. Op gelijke wijze is de hoek *ABC* het supplement van den hoek *DBC*.

III. STELLING.

§. 35. *De supplementen van gelijke hoeken zijn gelijk.* — en omgekeerd. — *De hoeken, welke gelijke supplementen hebben, zijn gelijk.*

BETOOG. Deze waarheid blijkt uit zich zelve.

IV. STELLING. *Fig.* 11.

§. 36. *Indien twee lijnen AB en CD elkander, in een punt E, doorsnijden; dan zijn de overstaande hoeken AED en BEC gelijk.*

BETOOG. Want de hoek *BED* is het supplement, zoo wel van den hoek *BEC*, als van den hoek *AED*. Volgens de *III. Stelling*, zijn dan de hoeken *BEC* en *AED* gelijk.

§. 37. GEVOLG. *Fig.* 12. *Wanneer men derhalve eene loodlijn CD naar beneden verlengt; dan ontstaan 'er, om het*

punt

punt van ontmoeting C, vier regte hoeken; en, indien eene lijn CD loodregt op eene andere BC ſtaat, ſtaat deze laatſte wederkeerig loodregt op de eerſte.

§. 38. Aanmerking. *Omdat alle regte hoeken gelijk zijn, zullen vier regte hoeken, om één punt, aan elkander ſluiten.*

V. Stelling. *Fig.* 10.

§. 39. *Een hoek ABC en zijn ſupplement DBC maken, te zamen genomen, twee regte hoeken.*

Betoog. Laat aangenomen worden: dat *BE* loodregt op *AD* ſtaat: dan is de hoek *DBC* gelijk aan de ſom van den regten hoek *DBE*, opgeteld met den hoek *CBE*. Hierbij voegende denzelfden hoek *ABC*, zal (*VII. Ax.*) de ſom van den hoek *ABC* en zijn ſupplement *DBC* gelijk zijn aan den regten hoek *DBE* met nog de ſom der hoeken *CBE* en *ABC*: maar de ſom der hoeken *CBE* en *ABC* is gelijk (*II. Ax.*) aan den regten hoek *ABE*; derhalve is de ſom van den hoek *ABC* en zijn ſupplement *DBC* gelijk aan eenen regten hoek *DBE*, met nog eenen anderen regten hoek *ABE*; dat is gelijk aan tweemaal éénen regten hoek.

VI. Stelling. (*Het omgek. der V. Stell.*) *Fig.* 13.

§. 40. *Wanneer twee hoeken, ABC en DEF, welker ſom twee regte hoeken bedraagt, tot één geheel aan elkander gevoegd worden; dan zijn de uiterſte beenen dezer hoeken, in dezelfde rigting, dat is, in dezelfde lijn, gelegen.*

Betoog. Want indien *DE* niet het verlengde van *AB* is; dan zal eene andere lijn *BG*, boven of beneden *DE*, het verlengde van *AB* zijn, en dan zal (*V. Stell.*) de ſom der hoeken *ABC* en *CBG*, gelijk aan twee regte hoeken zijn: maar, volgens de onderſtelling, is de ſom der hoeken, *ABC* en *CBD*, gelijk aan twee regte hoeken; derhalve (*IV. Ax.*) is de ſom der hoeken *ABC* en *CBD*, gelijk aan de ſom der hoeken *ABC* en *CBG*; indien men nu van deze gelijke ſommen denzelfden hoek *ABC* afneemt; dan zullen (*VIII. Ax.*) de resten, namelijk de hoeken *CBD* en *CBG*, moeten gelijk zijn: indien men derhalve *BG* als het verlengde van *AB* aanmerkt; dan zal het gedeelte aan het geheel moeten gelijk zijn, en zulks is (*II. Ax.*) onmogelijk. Geene andere, dan de lijn BD, kan bijgevolg het verlengde van AB zijn.

§. 41. Gevolgen uit de IV en V Stellingen.

1° *Indien men, Fig. 14, uit een punt C, in eene lijn AB, eenige andere lijnen CD, CE, CF en CG trekt; dan zal de som der hoeken, welke door deze lijnen gevormd worden, gelijk zijn aan twee regte hoeken.* Men drukt dit aldus uit:

$$\text{hoek } BCD + \text{hoek } DCE + \text{hoek } ECF + \text{hoek } FCG + \text{hoek } GCA = 2R.$$

2° *Indien men, Fig. 15, uit een punt A, in het rond, verscheidene lijnen AB, AC, AD, AE en AF trekt; dan zal de som der hoeken, welke, om dit punt, aan elkander sluiten, gelijk zijn aan vier regte hoeken:* dat is

$$\text{hoek } BAC + \text{hoek } CAD + \text{hoek } DAE + \text{hoek } EAF + \text{hoek } FAB = 4R$$

De letter R beteekent altijd een regte hoek.

Bijvoegsel.

§. 42. De regte hoek is de natuurlijke éénheid der hoeken. Van ouds verdeelde men denzelven in negentig kleinere hoeken, die men graden noemt; de graad in zestig kleinere hoeken, die men minuten noemt; eene minuut wederom in zestig kleinere hoeken, die men secunden noemt; de secunde in zestig tertien, de tertie in zestig quarten, enz.: doch thans gebruikt men, in deze verdeeling, welke men de *Sexagesimale* noemt, niet meer de benaming van tertien: maar men verdeelt de secunde, in tiende, honderdste, duizendste deelen, enz.

§. 43. Volgens de nieuwere verdeeling, verdeelt men den regten hoek in honderd graden, de graad in honderd minuten, de minuut in honderd secunden. Men noemt deze verdeeling de *Decimale verdeeling*.

§. 44. In beide verdeelingen, wordt het woord graad door °, minuut door ′ en secunde door ″ uitgedrukt: aldus wordt $73°\,18'\,17'',3$ gelezen: 73 graden, 18 minuten, 17 secunden, en 3 tiende van éénе secunde. In de decimale verdeeling, laat men nogtans de teekens ′ en ″ weg. Aldus wordt $63°, 83\,07$ gelezen: 63° decimale graden, 83 minuten en 7 secunden.

§. 45. *Een sexagesimale graad is gelijk aan één en één-negende decimale graad; en één decimale graad gelijk aan negen-tiende sexa-*

ſexageſimale. Hieruit volgt: dat men, om ſexageſimale graden tot decimale overtebrengen, bij het gegeven getal ſexageſimale graden één-negende van hetzelve moet optellen, na vooraf de minuten en ſecunden in tiende deelen van ſexageſimale graden herleid te hebben. (*Zie I. C.* §. 413.) En dat men, om decimale graden in ſexageſimale overtebrengen, (*zie I. C.* §. 354.) van het gegevene getal decimale graden één-tiende aftrekken, en de tiende, honderdſte, enz. deelen van graden tot minuten en ſecunden moet herleiden.

§. 46. XX. Bepaling. Om eene vlakte inteſluiten, worden ten minſte drie lijnen vereiſcht, welke elkander onderling ſnijden. Eene vlakte, welke

	drie		*driehoek*
	vier		*vierhoek*
	vijf	lijnen is inge-	*vijfhoek*
door	*zes*	ſloten, noemt	*zeshoek*
	zeven	men	*zevenhoek*
	onbepaald		*veelhoek*
	getal		

Onder den naam van *veelhoek*, kan men den *vierhoek*, *vijfhoek*, enz. begrijpen. De lijnen, welke eenen drie of veelhoek bepalen, noemt men de *zijden* des veelhoeks. Men geeft ook aan den *driehoek* en de *veelhoeken* den naam van *regtlijnige figuren*.

§. 47. Gevolg. *In elke regtlijnige figuur, (drie of veelhoek,) is altijd het getal der zijden gelijk aan het getal der hoeken.*

§. 48. XXI. Bepaling. *Fig.* 16. In eenen driehoek *ABC* onderſcheidt men: de drie zijden *AB*, *BC* en *AC*, die zijne grenzen zijn; de hoeken *ABC*, *BCA* en *BAC*, welke, door de onderlinge ontmoeting der zijden, ontſtaan; de punten *A*, *B* en *C*, welke de *hoekpunten* genoemd worden. Men noemt voorts de zijde *AB*, op welke de driehoek ſtaat, de *baſis* of *grondzijde*; *AC* en *BC* de *opſtaande zijden*; de hoeken *ABC* en *BAC* de *hoeken aan de baſis*; den hoek *ACB* den *tophoek*. Nogtans kan men, in de beſchouwing eens driehoeks, elke zijde als baſis aannemen. De hoek *ABC*, welke door twee zijden *AB* en *BC* gemaakt wordt, wordt gezegd *tegen over de derde zijde AC te ſtaan*. — En omgekeerd,

keerd, elke zijde *AB tegen over den hoek C*, welke door de twee andere zijden *AC* en *BC* gemaakt wordt.

§. 49. XXII. Bepaling. *Fig.* 16. De drie zijden van eenen driehoek kunnen alle in lengte onderscheiden zijn: in dit geval, noemt men den driehoek *ongelijkzijdig*.

§. 50. XXIII. Bepaling. *Fig.* 17. Men kan, op de beenen van eenen hoek *ABC*, *AB* gelijk *BC* nemen, en de lijn *AC* trekken, dan heeft de driehoek *ABC* twee gelijke zijden, *AB* en *BC*. Men noemt hem, in dit geval, *gelijkbeenig*. Men noemt de zijde, tegen over den hoek, tusschen de gelijke zijden, of beenen, bij voorkeur de *basis*.

§. 51. XXIV. Bepaling. *Fig.* 17. Men kan de beenen *AB* en *BC* in zulk eenen stand brengen, dat *AC* gelijk *AB* gelijk *BC* wordt. In dit geval, zijn al de zijden gelijk, en men noemt zulk eenen driehoek *gelijkzijdig*.

VII. Stelling. *Fig.* 16.

§. 52. *Elke zijde AB eens driehoeks ABC is korter dan de som zijner twee andere zijden, AC en BC.*

Betoog. Want de lijn *AB* is de kortste weg, om uit het punt *A* in het punt *B* te komen, en is bijgevolg korter dan de som der zijden *AC* en *BC*.

VIII. Stelling. *Fig.* 18.

§. 53. *Wanneer men uit een punt D, binnen eenen driehoek ABC, tot aan de uiteinden van ééne zijner zijden AB twee lijnen, AD en BD, trekt; dan is de som dezer lijnen kleiner dan de som zijner twee andere zijden, AC en BC. — Dat is,* $AD + BD < AC + BC$.

Betoog. Verleng *AD* tot aan *E*. In den driehoek *BED* is $BE + ED > BD$ (*VII. Stell.*); tel hierbij $AD = AD$; dan is (*IX. Ax.*) $BE + ED + AD$ of $BE + AE > BD + AD$.

Wederom is, in den driehoek *AEC*, (volgens *Stelling VII*), $AC + CE > AE$; tel hierbij $BE = BE$; dan is (*IX. Ax.*) $AC + CE + BE$ of $AC + BC > AE + BE$.

Maar, zoo even is bewezen, dat $AE + BE > AD + BD$ is; der-

derhalve zal (*VI. Ax.*), $AC + CB > AD + BD$ of $AD + BD < AC + BC$ zijn.

§. 54. Leering. Men leert hieruit: *dat de ſom der zijden AC en BC grooter is dan de ſom der lijnen AE en BE.*

IX. Stelling. *Fig.* 19.

§. 55. *Twee driehoeken zijn gelijk en gelijkvormig, wanneer eene zijde van den eerſten gelijk is aan eene zijde van den tweeden, en wanneer de hoeken, aan deze zijden gelegen, in de wederzijdſche driehoeken, gelijk zijn.*

Opheldering. Indien $AB = DE$; hoek $A =$ hoek D; en hoek $B =$ hoek E is; dan zal hoek $C =$ hoek F; $AC = DF$ en $BC = EF$ zijn.

Betoog. Men legge het punt D in het punt A; de zijde DE langs de zijde AB; dan zal, omdat $AB = DE$ is, (volgens *XIII. Bep.*) het punt B in het punt E vallen; en, omdat hoek $A =$ hoek D, en hoek $B =$ hoek E is, zal, (zie *XV. Bep.*) de zijde DF langs de zijde AC, en de zijde EF langs de zijde BC vallen: het punt F zal dan in het punt C vallen. Volgens de *XV. Bep.* zal de hoek $F =$ den hoek C, ook zal (*XIII. Bep.*) $DF = AC$ en $EF = BC$ zijn; de driehoeken zullen dan in alles gelijk en gelijkvormig zijn.

X. Stelling. *Fig.* 19.

§. 56. *Twee driehoeken zijn gelijk en gelijkvormig, indien een hoek van den eenen gelijk is aan eenen hoek van den anderen, en de zijden, welke, in de wederzijdſche driehoeken, deze hoeken bepalen, gelijk zijn.*

Opheldering. Indien hoek $A =$ hoek D; $AB = DE$ en $AC = DF$ is; dan zal $BC = EF$; hoek $B =$ hoek E, en hoek $C =$ hoek F zijn.

Betoog. Men brenge het punt D in het punt A, en DE langs AB; omdat dan $AB = DE$ is, zal (*XIII. Bep.*) het punt E in B vallen; voorts, omdat hoek $D =$ hoek A is, zal (*XV. Bep.*) DF langs AC vallen, en omdat $DF = AC$ is, zal het punt F in C vallen: volgens *XIII. Bep.* zal $BC = EF$, en volgens *XV. Bep.* zal hoek $B =$ hoek E, en hoek $C =$ hoek F zijn, en de driehoeken zijn derhalve gelijk en gelijkvormig.

XI. Stelling. *Fig.* 20, 21 *en* 22.

§. 57. *Wanneer twee zijden, AB en AC, van eenen driehoek ABC gelijk zijn aan twee zijden, DE en DF, van eenen anderen driehoek DEF; maar de hoek A, welke door deze twee zijden, AB en AC, in den eersten driehoek, gemaakt wordt, grooter is dan de hoek D, welke door de twee andere zijden, DE en DF, in den anderen driehoek DEF, gemaakt wordt; dan zal de derde zijde BC van den eersten driehoek grooter zijn dan de derde zijde EF van den tweeden driehoek.*

Betoog. *Fig.* 21. Laat het punt D in het punt A, en DE langs AB gelegd worden; omdat dan $DE = AB$ is, zal (*XIII. Bep.*) het punt E in het punt B vallen, en omdat hoek $EDF <$ hoek BAC is, zal de zijde DF binnen den hoek BAC vallen, en nu zal $AF = DF = AC$ en $BF = EF$ zijn. Het punt F zal dan, 1° of buiten den driehoek ABC, 2° of in deszelfs zijde BC, of 3°, binnen den driehoek vallen.

I. Geval. *Fig.* 21. Valt het punt F geheel buiten den driehoek ABC, dan is, volgens *VII. Stelling*, $AC < AG + GC$ en $BF < GF + BG$: deze twee ongelijkheden bij elkander tellende, dan is, (*X. Ax.*) $AC + BF < AG + GF + GC + BG$, of $AC + BF < AF + BC$; trekt men hiervan $AC = AF$ af; dan zal (*IX. Ax.*) $BF < BC$ of $BC > EF$ zijn.

II. Geval. *Fig.* 21. Valt het punt F in de zijde BC; dan blijkt het van zelven, dat BC grooter dan EF is.

III. Geval. *Fig.* 22. Valt eindelijk het punt F binnen den driehoek ABC; dan zal (*VIII. Stell.*) $AF + BF < AC + BC$ zijn; van deze ongelijkheid $AF = AC$ (*onderst.*) aftrekkende, zal het ook, in dit geval, blijken: (*IX. Ax.*) dat de zijde BF, of EF, kleiner dan de zijde BC is.

XII. Stelling. (*Het omgek. der IX. Stell.*) *Fig.* 20.

§. 58. *Indien twee zijden, AB en AC, van eenen driehoek ABC gelijk zijn aan twee zijden, DE en DF, van eenen tweeden driehoek DEF: maar de derde zijde BC des eersten driehoeks ABC grooter is, dan de derde zijde EF des tweeden driehoeks DEF; dan zal de hoek A, welke, in den eer-*

sten

ſten driehoek ABC, tegen over die grootere zijde BC ſtaat, ook grooter zijn, dan de hoek D, welke, in den tweeden driehoek DEF, tegen over de kleinere zijde EF ſtaat.

Betoog. Indien de hoek *A* niet grooter is dan de hoek *D*; dan zal, 1º de hoek *A* gelijk aan den hoek *D* moeten zijn, of 2º, de hoek *A* zal kleiner dan de hoek *D* moeten zijn. In het eerſte geval, zou, volgens de *X. Stelling*, $BC = EF$; en, in het tweede geval, zou, naar de *XI. Stelling*, *EF* grooter dan *BC* moeten zijn: beide deze gevolgen ſtrijden met de onderſtelling; de hoek *A* kan dan noch gelijk aan den hoek *D*, noch kleiner dan dezelve zijn: de hoek *A* moet derhalve grooter dan de hoek *D* zijn.

XIII. Stelling. *Fig.* 19.

§. 59. *Wanneer de drie zijden van eenen driehoek, elk in het bijzonder, gelijk zijn aan de drie zijden van eenen anderen driehoek; dan zullen de hoeken, welke, in deze driehoeken, over de gelijke zijden ſtaan, aan elkander gelijk, en de driehoeken zelve zullen gelijk en gelijkvormig zijn.*

Opheldering. Indien $AB = DE$; $AC = DF$ en $BC = EF$ is; dan zal moeten bewezen worden: dat hoek $A =$ hoek *D*; hoek $B =$ hoek *E* en hoek $C =$ hoek *F* zal zijn, en dat de driehoeken volmaakt op elkander zullen paſſen.

Betoog. Indien de hoek *A* niet gelijk is aan den hoek *D*; dan zal de hoek *A*, of grooter of kleiner dan de hoek *D* moeten zijn; omdat nu, volgens de onderſtelling, $AB = DE$ en $AC = DF$ is, zal, (*XI. Stell.*) in het eerſte geval, *BC* grooter, en, in het tweede geval, kleiner dan *EF* moeten zijn; daar zulks nu met de onderſtelling ſtrijdt, zal de hoek *A* niet grooter noch kleiner dan de hoek *D* kunnen zijn; hoek *A* moet dan gelijk aan hoek *D* zijn; en dan zal (*X. Stelling*) ook hoek $B =$ hoek *E*, en hoek $C =$ hoek *F*, en de driehoeken zullen gelijk en gelijkvormig zijn.

XIV. Stelling. *Fig.* 23.

§. 60. *De hoeken, A en B, welke, in eenen gelijkbeenigen driehoek ABC, tegen over de gelijke beenen, BC en AC, ſtaan, zijn gelijk.*

Be-

Betoog. Laat de lijn *CD* den tophoek *C* in twee gelijke hoeken *ACD* en *BCD* verdeelen; dan verkrijgt men, in de figuur, de driehoeken *ACD* en *BCD*, in welke *CD* eene gemeene zijde, *AC* = *BC* (*onderſt.*) en hoek *ACD* = hoek *BCD* is; de driehoeken *ACD* en *BCD* zijn dan (*X. Stell.*) gelijk en gelijkvormig, en hoek *CAD* = hoek *CBD*.

§. 61. I. Gevolg. *Al de hoeken van eenen gelijkzijdigen driehoek zijn gelijk.*

§. 62. II. Gevolg. *Fig.* 23. Indien men de gelijke beenen *AC* en *BC* tot in *E* en *F* verlengt; dan zijn de hoeken *ABF* en *BAE* de ſupplementen van de gelijke hoeken *ABC* en *BAC*, en zijn (*III. Stell.*) derhalve gelijk. *Indien men dan, in eenen gelijkbeenigen driehoek, de gelijke beenen tot beneden de baſis verlengt; dan zijn de hoeken, onder de baſis gelegen, ook aan elkander gelijk.*

§. 63. Leering. *Fig.* 23. Uit de bewezene gelijk en gelijkvormigheid der driehoeken *ACD* en *BCD* volgt: 1° dat *AD* = *BD* is, 2° dat hoek *ADC* = hoek *BDC* is; de lijn *CD* ſtaat dan (*XVI. Bep.*) loodregt op *AB*. *De lijn derhalve, welke den tophoek van eenen gelijkbeenigen driehoek, in twee gelijke deelen, verdeelt, ſtaat regthoekig op de baſis, en ſnijdt dezelve insgelijks, in twee gelijke deelen.*

XV. Stelling. (*Het omgek. der XIV. Stell.*) *Fig.* 24.

§. 64. *Wanneer een driehoek ABC twee gelijke hoeken, A en B, heeft; dan is de driehoek gelijkbeenig; dat is, de zijden, BC en AC, tegen over die gelijke hoeken, A en B, ſtaande, zullen gelijk zijn.*

Betoog. Want indien *AC* grooter dan *BC* konde zijn; dan zou men *AD* gelijk *BC* nemen kunnen, en, indien men dan de lijn *BD* trok; dan zouden, in de driehoeken *ABC* en *ABD*, de hoek *ABC* = hoek *BAD* (*onderſt.*) zijn; voorts *AB* = *AB* en *BC* = *AD*; deze driehoeken zouden dan (*X. Stell.*) gelijk en gelijkvormig, en bijgevolg hoek *ABD* = hoek *BAD* = hoek *ABC* zijn; dat is, het gedeelte gelijk aan het geheel. Het is dan ongerijmd *AC* grooter dan *BC* te ſtellen. Stelt men *AC* kleiner dan *BC*; dan valt men in dezelfde ongerijmdheid; de zijde *AC* kan derhalve niet anders dan gelijk zijn aan de zijde *BC*.

XVI.

XVI. STELLING. *Fig.* 25.

§. 65. *In elken driehoek, ABC, ſtaat eene grootere zijde tegen over eenen grooteren hoek:* en, omgekeerd, *een grooter hoek tegen over eene grootere zijde.*

Opheldering. Dat is, indien hoek *BAC* $>$ hoek *ABC* is; dan zal *BC* ook $>$ *AC* zijn. — en omgekeerd — Indien *BC* $>$ *AC* is; dan zal ook hoek *BAC* $>$ hoek *ABC* zijn.

BETOOG *van het eerſte.* Omdat hoek *BAC* $>$ hoek *ABC* is, zal men, binnen den driehoek, uit het hoekpunt *A*, de lijn *AD* kunnen trekken, zoodanig, dat de hoek *BAD* $=$ den hoek *ABD* is, en dan zal (*XV. Stell.*) *AD* $=$ *BD* zijn; bij elk dezer gelijke lijnen dezelfde lijn *CD* tellende, zullen (*VII. Ax.*) de ſommen gelijk zijn; dat is, de ſom van *AD* en *CD* gelijk aan de ſom van *BD* en *DC*, gelijk aan de zijde *BC*: maar de ſom der zijden *AD* en *CD* is (*VII. Stell.*) grooter dan de derde zijde *AC*; derhalve (*V. Ax.*) is ook de zijde *BC* grooter dan de zijde *AC*.

BETOOG *van het omgekeerde.* Stelt men *BC* $>$ *AC*; dan zal, indien hoek *BAC* niet $>$ hoek *ABC* is, of hoek *BAC* gelijk aan hoek *ABC*, of kleiner dan dezelve moeten zijn: in het eerſte geval, zou (*XV. Stell.*) *BC* $=$ *AC*, en, in het tweede geval, (*volgens het bewezene*,) *BC* $<$ *AC* moeten zijn: beide gevallen met de onderſtelling ſtrijdig zijnde, moet hoek *BAC* grooter dan hoek *ABC* zijn.

§. 66. XXV. BEPALING. *Fig.* 26. Elke hoek *ABC* eens driehoeks *ABC* heeft zijn *ſupplement* of *ſupplementshoek* *CBD*, of *ABE*, welke ontſtaat, wanneer men ééne van deszelfs zijden, *AB* of *BC*, naar welgevallen, verlengt, en deze ſupplementshoeken zijn (*IV. Stell.*) gelijk. Deze bepaling geldt voor elken anderen hoek des driehoeks, en ook voor de hoeken van alle veelhoeken, in het algemeen.

XVII. STELLING. *Fig.* 27.

§. 67. *Het ſupplement CBQ van elken hoek ABC eens driehoeks ABC is grooter dan één van de twee andere hoeken, BCA en BAC, dezes driehoeks: en de ſom van twee hoeken, BAC en ACB, eens driehoeks is gelijk aan het ſupplement CBQ van deszelfs derden hoek ABC.*

Betoog *van het eerste gedeelte.* Men neme, in de zijde BC, het punt D zoodanig, dat CD gelijk BD zij, en men trekke, van het hoekpunt A, door het punt D, eene onbepaalde lijn ADE, neme $DE = AD$, en trekke BE; dan liggen de lijnen AE en BE klaarblijkelijk binnen den hoek CAQ, en men heeft, in de figuur, de driehoeken ADC en EDB, welke gelijk en gelijkvormig zijn; want (*IV. Stell.*) hoek ADC is $=$ hoek BDE; $CD = BD$ en $AD = DE$ (volg. *conſt.*). Men zal dan (*X. Stell.*) hebben, hoek $ACB =$ hoek CBE, en hoek $CAE =$ hoek AEB; daar nu de lijn BE binnen den hoek CBQ ligt, is hoek CBE een gedeelte van den ſupplementshoek CBQ, en derhalve kleiner dan dezelve: de hoek ACB, welke gelijk aan den hoek CBE is, (*V. Ax.*) is gevolgelijk kleiner dan de ſupplementshoek CBQ. Indien men de zijde BC, naar beneden, tot in R verlengt; dan zal, uit het bewezene, volgen: dat de hoek ABR of de hoek CBQ grooter dan de hoek BAC is.

Betoog *van het tweede gedeelte.* Laat nu, op dezelfde wijze, als boven, de zijde BE van den driehoek ABE in F midden door gedeeld, uit het punt A de lijn AFG getrokken, $FG = AF$ gemaakt worden; dan zal, volgens het bewezene, in het eerſte gedeelte, hoek $AGB =$ hoek EAG en hoek $AEB =$ hoek EBG zijn: maar hoek AEB is $=$ hoek CAE (*bew.*); derhalve zal (*IV. Ax.*) hoek EBG $=$ hoek CAE zijn.

Men zal de zijde BG van den derden driehoek ABG in H midden door deelen, en, op het verlengde van AH, de lijn $HI = AH$ nemen, en de lijn BI trekken; waardoor men den driehoek ABI verkrijgen zal, en dan zal wederom, uit het bewezene, volgen; dat hoek $GBI =$ hoek EAG is.

Wanneer men, op dezelfde wijze, voortgaat, met de driehoeken ABL, ABN, ABP, *enz.* op de voorſchrevene wijze, zamen te ſtellen; dan zal, op gelijke wijze, volgen: dat hoek $IBL =$ hoek GAI; hoek $LBN =$ hoek IAL; hoek $NBP =$ hoek LAN; *enz.* zal zijn.

Nu is het klaarblijkelijk: dat men, zonder ophouden, met het zamenſtellen van volgende driehoeken, op dezelfde wijze, als boven, gevormd, zal kunnen voortgaan. De volgende hoeken, welke door deze voortgezette conſtructie, aan de hoekpunten A en B, zullen ontſtaan, blijven dan, één voor één, onderling aan elkander gelijk, terwijl zij ſteeds kleiner worden; en, offchoon men, ſtrikt geſproken, niet alle deze hoeken vinden kan, ziet men toch, dat eindelijk de zijden van den laatſten driehoek ABP in de lijn BQ moeten vallen. De hoeken

CAB

CAB en *EBQ* beſtaan dan elk, uit een onnoemlijk, maar hetzelfde aantal, deelen, welke onderling aan elkander gelijk zijn, het eerſte aan het eerſte, het tweede aan het tweede, het derde aan het derde, *enz.* het honderdſte aan het honderdſte, *enz.* deze deelen dan, één voor één, aan elkander gelijk zijnde, moeten noodzakelijk de geheelen (*XIII. Ax.*) gelijk zijn, en de hoek *EBQ* moet gevolgelijk gelijk aan den hoek *BAC* zijn.

Nu is hoek *CBE* = hoek *ACB* (*bew.*); derhalve zal (*VII. Ax.*) de ſom der hoeken *CBE* en *EBQ*, dat is de hoek *CBQ*, of het ſupplement van den hoek *ABC*, gelijk zijn aan de ſom der twee andere hoeken, *BAC* en *ACB*, des driehoeks.

XVIII. Stelling. *Fig.* 26.

§. 68. *De ſom van al de hoeken eens driehoeks is gelijk aan twee regte hoeken.*

Betoog. Laat éene der zijden, bij voorbeeld, de zijde *AB*, verlengd worden tot in *D*; dan is (*XVII. Stell.*) de ſom der hoeken *BAC* en *ACB* gelijk aan het ſupplement, *CBD* of *ABE*, van den derden hoek *ABC*; tel, bij elk dezer gelijke dingen, den hoek *ABC*; dan zullen (*VII. Ax.*) de ſommen gelijk zijn; dat is, de ſom van de hoeken *BAC*, *ACB* en *ABC* des driehoeks zal gelijk zijn aan de ſom van den hoek *ABC* en zijn ſupplement *CBD*, gelijk (*V. Stell.*) aan twee regte hoeken. Dit betoog geldt voor alle driehoeken.

§. 69. I. Gevolg. *Een driehoek kan geen twee regte hoeken, en nog veel minder twee ſtompe hoeken hebben.* Op deze waarheid berusten de volgende bepalingen.

§. 70. XXVI. Bepaling. *Fig.* 28. Een *regthoekige driehoek ABC* is een driehoek, welke éénen regten hoek *B* heeft. Zijne twee andere hoeken, *A* en *C*, zijn ſcherp. De zijde *AC*, welke tegen over den regten hoek *B* ſtaat, noemt men *hypothenuſa* of *ſchuinſche zijde*; de zijden *AB* en *BC*, om den regten hoek *B* ſtaande, noemt men de *regthoeks zijden.*

§. 71. XXVII. Bepaling. *Fig.* 29. Een *ſtomphoekige driehoek ABC* is een driehoek, welke éénen ſtompen hoek *B* heeft. Zijne twee andere hoeken, *A* en *C*, zijn ſcherp.

§. 72. XXVIII. Bepaling. *Fig.* 26. Een *ſcherphoekige driehoek* is een driehoek, welke drie ſcherpe hoeken heeft.

Men zegt, *welke drie ſcherpe hoeken heeft*, om daardoor den ſcherphoekigen driehoek van den regthoekigen en ſtomphoekigen te onderſcheiden.

§. 73. II. Gevolg. *Fig.* 28. *De ſom van de ſcherpe hoeken, A en C, eens regthoekigen driehoeks is gelijk aan het ſupplement van den regten hoek B, dat is, gelijk aan éénen regten hoek.*

§. 74. III. Gevolg. *Fig.* 30. Omdat de hoeken, *A* en *B*, aan de baſis *AB* van eenen gelijkbeenigen driehoek *ABC*, gelijk, en de ſom dezer hoeken bijgevolg gelijk is aan het dubbeld van elk éénen van dezelve, *zal het ſupplement BCD van den tophoek C eens gelijkbeenigen driehoeks gelijk zijn aan het dubbeld van elk éénen der hoeken aan de baſis. En, elk der hoeken aan de baſis gelijk aan het halve ſupplement van den tophoek.*

§. 75. IV. Gevolg. *Fig.* 26. *Wanneer twee hoeken, A en B, eens driehoeks, in getallen van graden en derzelver onderdeelingen, bekend zijn, zal men den derden hoek, zoo als men het noemt, bij concluſie, vinden kunnen, wanneer men de ſom dezer hoeken van twee regte hoeken, of van* 180°, *aftrekt.*

Gegeven *hoek A*	=	73° 41′ 33″	*optellen*
hoek B	=	56° 28′ 56″	
hoek A + *hoek B*	=	130° 10′ 29″	*aftrekken*
hoek C + *hoek A* + *hoek B*	=	180° 00′ 00″	
hoek C	=	49° 49′ 31″	

§. 76. V. Gevolg. *Fig.* 28. *Insgelijks zal men, wanneer één der ſcherpe hoeken A eens regtshoekigen driehoeks, in getal van graden, gegeven is, den anderen ſcherpen hoek C, bij concluſie, vinden kunnen, wanneer men den gegevenen ſcherpen hoek A van éénen regten hoek, of van* 90°, *aftrekt.*

Gegeven *hoek A*	=	56° 17′ 23″, 5	*aftrekken*
hoek A + *hoek C*	=	90° 00′ 00″, 0	
blijft . . *hoek C*	=	33° 42′ 36″, 5	

§. 77. VI. Gevolg. *De hoeken van eenen gelijkzijdigen driehoek* (*I. Gev. XIV. Stell.*) *gelijk, en derzelver ſom gelijk aan twee regte hoeken zijnde, zal elk één zijner hoeken gelijk*

aan

aan één-derde van twee regte hoeken, dat is, aan twee-derde van éénen regten hoek, of gelijk aan 60° zijn.

§. 78. VII. Gevolg. *Wanneer de tophoek van eenen gelijkbeenigen driehoek gegeven is; dan zal men elk der hoeken aan de basis vinden, door de helft van het supplement des tophoeks te nemen. En, wanneer één der hoeken aan de basis bekend is; dan zal men den tophoek vinden, door het dubbeld van dien hoek van 180° aftetrekken.*

§. 79. VIII. Gevolg. *Fig.* 31. *Wanneer twee hoeken, A en B, van eenen driehoek ABC, elk in het bijzonder, gelijk zijn aan twee hoeken, D en E, van eenen anderen driehoek DEF; dan zal men, al zijn die driehoeken niet gelijk, besluiten mogen: dat de derde hoek C des eersten driehoeks gelijk is aan den derden hoek F des tweeden driehoeks.* Want de som der hoeken *A*, *B* en *C* is gelijk aan de som der hoeken *D*, *E* en *F*; trekt men hiervan af de som der hoeken *A* en *B*, die (*VII. Ax.*) gelijk is aan de som der hoeken *D* en *E*; dan moet (*VIII. Ax.*) hoek $C =$ hoek F zijn.

§. 80. IX. Gevolg. *Fig.* 31. *Wanneer twee regthoekige driehoeken, ABC en DEF, (welke in B en E regthoekig zijn,) twee gelijke scherpe hoeken, A en D, hebben; dan zal men, al is het, dat deze regthoekige driehoeken voor het overige niet gelijk zijn, mogen besluiten: dat de twee andere scherpe hoeken, C en F, insgelijks aan elkander gelijk zijn.*

§. 81. X. Gevolg. *Fig.* 31. *Indien de som der hoeken A en B gelijk is aan de som der hoeken D en E, zonder dat hoek A = hoek D en hoek B = hoek E is; dan mag men besluiten: dat de derde hoek C gelijk is aan den derden hoek F.*

§. 82. XXIX. Bepaling. In het vervolg, zal de letter *R* eenen regten hoek beteekenen. De uitdrukking (zie *fig.* 26.)

$$\text{hoek } ABC + \text{hoek } BCA + \text{hoek } CAB = 2R$$

zal gelezen worden: *de som van de hoeken des driehoeks ABC is gelijk aan twee regte hoeken.*

§. 83. XXX. Bepaling. *Fig.* 32 *en* 33. De lijn *AC*, welke de hoekpunten van twee hoeken *A* en *C* eens veelhoeks *ABCDE* veréénigt, wordt *hoekpuntslijn* (*diagonaal*) genoemd.

§. 84. XXXI. Bepaling. *Fig.* 32 *en* 33. Een hoek D eens veelhoeks $ABCDE$ is *uitſpringend*, of *ſtaat naar buiten*, wanneer de hoekpuntslijn, welke de hoekpunten van de twee naaste hoeken verëénigt, *binnen den veelhoek gelegen is*, gelijk in *fig.* 32: maar hij ſtaat *naar binnen*, of is *inſpringend*, wanneer de hoekpuntslijn van de hoekpunten der twee naaste hoeken *buiten den veelhoek valt*, gelijk, in *fig.* 33.

XIX. Stelling. *Fig.* 34.

§. 85. *De ſom van al de hoeken eens veelhoeks, welks hoeken alle naar buiten ſtaan, is gelijk aan zoo veelmaal twee regte hoeken, als het getal der zijden min twee bedraagt. Dat is, het getal der zijden* $= n$, *en de ſom der hoeken* $= S$ *ſtellende, zal* $S = (n - 2) \times 2R$ *zijn. En de ſom van de ſupplementen van al de hoeken van zulk eenen veelhoek is, hoe groot het getal van deszelfs zijden, of hoeken, zijn moge, altijd gelijk aan vier regte hoeken.*

Betoog *van het eerſte.* Neem, binnen den veelhoek $ABCDE$, een punt P, en trek, van dit punt tot al de hoekpunten A, B, C, D en E, de regte lijnen, PA, PB, PC, PD, PE; dan zal de veelhoek in even zoo vele driehoeken ABP, BCP, CDP, DEP, EAP, als de veelhoek zijden of hoeken heeft, verdeeld zijn. Indien men nu al de hoeken dezer driehoeken bij elkander opteit, zal derzelver ſom (*XVIII. Stell.*) zooveelmaal twee regte hoeken, als de veelhoek zijden of hoeken heeft, moeten bedragen: dat is, in den vierhoek, viermaal, in den vijfhoek, vijfmaal, in den zeshoek, zesmaal, in den n hoek, n maal twee regte hoeken, of $n \times 2R$. Om dan de ſom van de hoeken des veelhoeks te verkrijgen, zal men van de ſom van de hoeken dezer driehoeken, dat is, van $n \times 2R$, al de hoeken, welke om het punt P ſtaan, en welker ſom (*II. Gev. VI. Stell.*) vier regte hoeken of, $2 \times 2R$, bedraagt, moeten aftrekken, en dan zal het verſchil, namelijk $(n-2) \times 2R$, gelijk zijn aan de ſom van de hoeken A, B, C, *enz.* des veelhoeks.

Betoog *van het tweede.* De ſom van al de hoeken eens veelhoeks is, met derzelver ſupplementen, te zamen genomen, klaarblijkelijk gelijk aan zooveelmaal twee regte hoeken, als de veelhoek zijden of hoeken heeft, gelijk aan $n \times 2R$: nu is de ſom der hoeken gelijk aan $n \times 2R -$

$2 \times 2R$: deze som van de voorgaande aftrekkende, vindt men, voor de som der supplementen, $2 \times 2R$, of vier regte hoeken.

§. 86. Gevolg. De som der hoeken van eenen vierhoek wordt, uit de algemeene vergelijking, $S = (n-2) \times 2R$, door $n=4$ te stellen, afgeleid, en bevonden gelijk te zijn aan vier regte hoeken.

XX. Stelling. *Fig.* 35.

§. 87. *Wanneer men, op het midden C van eene lijn AB, eene loodlijn CD oprigt; dan staat elk punt D dezer loodlijn CD op eenen gelijken afstand van de uiteinden, A en B, der lijn AB, op welke zij is opgerigt.* — En, omgekeerd. — *Alle punten D, welke, boven of beneden eene bepaalde lijn AB, op gelijke afstanden, AD en BD, van de uiterste punten, A en B, dezer lijn AB gelegen zijn, liggen in de loodlijn CD, welke, uit het midden C dezer lijn AB, op dezelve is opgerigt.*

Betoog *van het eerste.* Want, wegens den ondersteldеn loodregten stand van de lijn *CD* op *AB*, hebben (*XVI. Bep.*) de driehoeken *ACD* en *BCD* de gelijke hoeken *ACD* en *BCD*; voorts is (*ond.*) $AC = BC$, en zij hebben de gemeene zijde *CD*: zij zijn dan (*X. Stell.*) gelijk en gelijkvormig, en *AD* is derhalve gelijk aan *BD*.

Betoog *van het tweede.* Laat *C* in het midden van *AB* genomen worden, en trekt de lijn *CD*; dan is, behalve de ondersteldе gelijkheid der lijnen *AD* en *BD*, nog $AC = BC$ en $CD = CD$: de driehoeken *ACD* en *BCD* zijn dan (*XIII. Stell.*) gelijk en gelijkvormig; gevolgelijk is hoek $ACD =$ hoek *BCD*, en om die reden zal (*XVI. Bep.*) *CD* loodregt op *AB* staan, enz.

XXI. Stelling. *Fig.* 36.

§. 88. *Wanneer men, uit een punt P, buiten eene lijn AB gelegen, tot verscheidene punten, C, D, E, F, van die lijn AB andere regte lijnen, PC, PD, PE, PF, enz. trekt; dan zal:*

1° *Onder al die lijnen, slechts ééne lijn PC loodregt op deze lijn AB kunnen staan.*

2° *Die loodlijn PC zal korter zijn dan elke andere lijn PD of PF, welke men, uit dat punt P, aan de ééne of aan* *de andere zijde van de loodlijn PC tot de lijn AB, zal kunnen trekken.*

3° *De lijn PE, die verder van de loodlijn PC afſtaat, zal langer zijn dan de lijn PD, die nader aan dezelve gelegen is.*

4° *Men zal, aan weêrszijden van het voetpunt der loodlijn, ſlechts twee punten, D en F, vinden kunnen, welke op eenen gelijken afſtand van het punt P liggen, namelijk die twee punten, welke denzelfden afſtand van het voetpunt C der loodlijn PC hebben.*

Betoog *van het eerſte.* Men neme, dat *PC* en *PD*, twee onderſcheidene loodlijnen zijn; dan zal de driehoek *PCD* (*XVI. Bep.*) twee regte hoeken *PCD* en *PDC* hebben: zulks nu onmogelijk (*I. Gev. XVIII. Stell.*) zijnde, kunnen *CP* en *DP* niet te gelijk loodregt op *AB* ſtaan.

Betoog *van het tweede.* Indien *PC* de loodlijn is; dan is de driehoek *PCD* regthoekig in *C*; de hoek *PDC*, is dan (*XXVI. Bep.*) ſcherp en (*XVII. Bep.*) kleiner dan hoek *PCD*; de lijn *PC* is derhalve (*XVI. Stell.*) korter dan *PD*. Om dezelfde reden is *PC* korter dan *PF*.

Betoog *van het derde.* De hoek *PDC* (*bewezen*) ſcherp zijnde, is (*V. Stell.*) zijn ſupplement *PDE* ſtomp, en bijgevolg grooter dan de hoek *PED*, die (*XXVII. Bep.*) insgelijks ſcherp moet zijn; de lijn *PE* zal (*XVI. Stell.*) gevolgelijk langer dan de lijn *PD* zijn.

Betoog *van het vierde.* Omdat $CD = CF$ is, en *PC* loodregt op *AB* ſtaat, is (*XX. Stell.*) $PD = PF$: nu zal, voor elk punt *E*, tusſchen *C* en *D*, de lijn *PE*, volgens het bewezene, korter dan *PD*, en, voor elk punt *E*, aan den anderen kant van *D*, de lijn *EP* langer dan *PD* zijn. Niet meer dan twee punten, *D* en *F*, ter wederzijden van de loodlijn *PC*, op eenen gelijken afſtand, van het voetpunt *C*, genomen, kunnen denzelfden afſtand tot het punt *P* hebben.

§. 89. XXXII. Bepaling. *Fig.* 36. *De afſtand van een punt P tot eene regte lijn AB is de loodlijn PC, welke, uit dit punt P, op deze lijn AB valt. Hij is*, naar het betoogde, in de voorgaande ſtelling, *de kortſte weg, langs welken men, uit een gegeven punt P, in of tot eene gegevene lijn AB, kan komen.*

I. Lemma.

§. 90. *Wanneer men van eene zekere grootheid R de helft neemt, van de overblijvende helft wederom de helft, en telkens van hetgeen 'er overblijft op nieuw de helft, enz.; dan zal men daarmede zonder ophouden voortgaan, en dit halveren zelfs zoo verre kunnen voortzetten; dat het laatst overblijvend deel, (dat men echter altijd nog zal kunnen halveren,) kleiner dan de kleinste gegevene grootheid van dezelfde soort zal zijn: en, de som van alle deze deelen, te weten:* $\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}R + \frac{1}{8}R + \frac{1}{16}R + \frac{1}{32}R + \frac{1}{64}R + \frac{1}{128}R + \frac{1}{256}R +$ *enz. zal, op het laatst overblijvend deel na, het geheel uitmaken, en van hetzelve gevolgelijk minder dan de kleinste gegevene grootheid verschillen.*

Betoog. Deze stelling is uit zich zelve blijkbaar. Vergelijk nogtans I. C. §. 839; en II. C. §. 65.

XXII. Stelling. *Fig.* 37.

§. 91. *Twee loodlijnen, AC en BD, uit twee onderscheidene punten, A en B, eener regte lijn AB, op dezelve opgerigt zijnde, kunnen elkander, hoe verre zij, naar den éénen of naar den anderen kant, verlengd worden, nergens ontmoeten, of doorsnijden.*

Betoog. Want, indien zij elkander ergens, in een punt *P* of *Q*, ontmoeteden, zouden zij met de lijn *AB* eenen driehoek *ABP* of *ABQ* vormen, welke, strijdig met de eigenschap des driehoeks, (*I. Gev. XVIII. Stell.*) in *A* en *B*, twee regte hoeken zou hebben: deze lijnen kunnen derhalve elkander nergens ontmoeten.

XXIII. Stelling. (*Het omgek. der voorg. Stell.*) *Fig.* 38.

§. 92. *Indien twee lijnen, AB en CD, hoe verre zij, aan den eenen of anderen kant, verlengd mogten worden, elkander nimmer ontmoeten; dan staan zij beide loodregt op eenige derde lijn GH. Dat is: indien eene derde lijn GH loodregt op éêne dezer twee lijnen CD staat; dan staat zij ook tevens loodregt op de tweede lijn AB.*

Betoog. Indien de lijnen AB en CD elkander niet ontmoeten, en GH loodregt op CD ſtaat; dan moet bewezen worden: dat GH ook loodregt op AB ſtaat, of dat de hoek HGB een regte hoek is: en zulks zal bewezen zijn, wanneer men bewijzen kan: *dat, wanneer de hoek* HGB *ſcherp of ſtomp is, de lijnen* AB *en* CD *elkander noodzakelijk, het zij aan den éénen, het zij aan den anderen kant, moeten ſnijden.*

Men make $HI = HG$ en trekke de lijn GI; dan is GHI een gelijkzijdige regthoekige driehoek, en, volgens *III. Gev. XVIII. Stelling*, zal hoek $HIG =$ hoek $HGI =$ aan den halven ſupplementshoek $CHG =$ eenen halven regten hoek $= \frac{1}{2} R$ zijn.

Men neme wederom $IK = IG$ en trekke GK; dan zal, in den gelijkbeenigen driehoek IKG, om dezelfde reden, hoek $IKG =$ hoek $IGK =$ halven hoek $HIG = \frac{1}{4} R$ zijn.

Nemende verder $KL = GK$ en trekkende GL; wederom $LM = GL$ en trekkende GM; dan zal, om dezelfde reden, in de gelijkbeenige driehoeken GKL en GLM, de hoek $KGL = \frac{1}{8} R$ en de hoek $LGM = \frac{1}{16} R$ zijn.

Men zal, op dezelfde wijze, met de zamenſtelling van volgende gelijkbeenige driehoeken kunnen voortgaan; want men zal, op het verlengde van CD, altijd eene lijn gelijk aan de baſis van den laatſten gelijkbeenigen driehoek kunnen nemen, en, in de volgorde dezer driehoeken, zullen even, als in het begin, de hoeken aan de baſis van elken volgenden gelijkbeenigen driehoek gelijk zijn aan de helft van de hoeken aan de baſis van elken voorgaanden.

Men verkrijgt alzoo, door het voortzetten dezer gelijkbeenige driehoeken, in de figuur, aan het gemeene hoekpunt G, de hoeken HGI, IGK, KGL, LGM, *enz.* die (R altijd eenen regten hoek beteekenende,) gelijk $\frac{1}{2} R$, $\frac{1}{4} R$, $\frac{1}{8} R$, $\frac{1}{16} R$, $\frac{1}{32} R$, $\frac{1}{64} R$, *enz.* zullen zijn.

Nemen wij nu: dat de hoek HGB een ſcherpe hoek zij; dan zal men, door het punt G, eene lijn GF kunnen trekken, welke met HG eenen regten hoek maakt, en de hoek FGB zal, hoe klein hij ook zijn moge, eene wezenlijke grootte hebben.

Nu zal, volgens het voorgaande *Lemma*, de ſom der hoeken HGI, IGK, KGL, *enz.*, dat is, de ſom der hoeken $\frac{1}{2} R$, $\frac{1}{4} R$, $\frac{1}{8} R$, *enz.*, op het laatst minder van éénen regten hoek verſchillen dan de kleinſte hoek BGF, die men zich kan voorſtellen: hoek BGF zij dan zoo klein men wille, zoo lang hij eene wezenlijke grootte heeft, zal 'er, tusſchen de beenen van dezen hoek, eene lijn GZ beſtaan, die de

ba-

basis van éénen der volgende gelijkbeenige driehoeken zal zijn, en de lijn GB, die dan binnen dien driehoek valt, zal alsdan de lijn CD noodzakelijk moeten doorsnijden.

Men kan dan de hoek HGB niet zoo weinig van éénen regten hoek doen verschillen, of de lijn AB zal de lijn CD doorsnijden: *de hoek HGB kan derhalve niet scherp zijn.*

Stelt men den hoek HGB stomp; dan zal zijn supplement AGH scherp zijn: maar dan zal, volgens het bewezene, de lijn AB de lijn CD, aan den anderen kant, ontmoeten. *De hoek HGB kan dan ook niet stomp zijn.*

Indien dan de hoek HGB niet scherp noch stomp zijn kan, (omdat, in één van beide gevallen, de lijnen AB en CD elkander, aan den éénen of aan den anderen kant, moeten snijden,) moet hij regt zijn: *lijnen derhalve, die elkander nooit ontmoeten kunnen, zullen door eenige derde lijn, onder regte hoeken, worden doorgesneden.*

§. 93. XXXIII. Bepaling. *Lijnen, welke, het zij aan den éénen, het zij aan den anderen kant, verlengd zijnde, elkander nimmer snijden noch ontmoeten, worden evenwijdige of parallele lijnen genoemd.*

§. 94. Uit het bewezene, in de twee voorgaande stellingen, kan men dan deze drie gevolgen opmaken.

I. Gevolg. *Alle lijnen, welke loodregt op dezelfde lijn staan, zijn evenwijdig.*

II. Gevolg. *Wanneer ééne van twee evenwijdige lijnen, door eenige derde lijn, loodregt wordt doorgesneden; dan zal die derde lijn ook de tweede dezer evenwijdige lijnen noodzakelijk onder regte hoeken moeten snijden.*

III. Gevolg. *Door hetzelfde punt kan niet meer dan ééne lijn, evenwijdig aan eene andere lijn, getrokken worden.*

Want, indien *fig.* 38, CF evenwijdig aan AB loopt, en de lijnen CD en GF gevolgelijk met de derde lijn GH regte hoeken maken, zal eene andere lijn, welke door G getrokken wordt, met GH eenen scherpen hoek maken, en CD, volgens het betoog der voorgaande stelling, ergens ontmoeten, en gevolgelijk aan CD niet evenwijdig kunnen loopen.

XXIV. Stelling. *Fig.* 39.

§. 95. *Twee evenwijdige lijnen, AB en CD, worden door eene*

eene derde lijn EF, onder gelijke hoeken, EGB en EHD, doorgeſneden.

Betoog. Laat, uit eenig punt *E* der ſnijdende lijn *EF*, de lijn *EI* loodregt op éénе der evenwijdige lijnen, op *AB*, vallen; dan ſtaat derzelver verlengde (*II. Gev. XXXIII. Bep.*) ook loodregt op de andere lijn *CD*: de regthoekige driehoeken *EGI* en *EHK*, hebben nu uit zich zelven de gelijke ſcherpe hoeken, *GEI* en *HEK*; de hoeken *IGE* en *EHK* zijn (*IX. Gev. XVIII. Stell.*) bijgevolg gelijk.

XXV. Stelling. (*Het omgek. der voorg. Stell.*) *Fig.* 39.

§. 96. *Indien twee lijnen, AB en CD, door eene derde lijn EF, onder gelijke hoeken, EGB en EHD, worden doorgeſneden; dan zijn deze lijnen evenwijdig.*

Betoog. Laat, uit eenig punt *E*, de loodlijn *EK* op *CD* vallen; dan ſnijdt deze de lijn *AB* in *I*; de driehoeken *EGI* en *EHK* hebben dan de gelijke hoeken *EGI* en *EHK*, (*onderſt.*) en de gelijke hoeken *GEI* en *HEK*, (door de figuur,) de hoek *GIE* zal dan (*VIII. Gev. XVIII. Stell.*) gelijk zijn aan den hoek *HKE*; maar, vermits de hoek *HKE* een regte hoek is, is de hoek *GIE* ook regt; de lijnen *AB* en *CD* ſtaan dan regthoekig op dezelfde lijn *EK*, en zijn (*I. Gev. XXXIII. Bep.*) onderling evenwijdig.

§. 97. XXXIV. Bepaling. *Fig.* 40. De lijn *EF*, welke twee evenwijdige lijnen, *AB* en *CD*, doorſnijdt, wordt *ſnijlijn* genoemd.

Deze ſnijlijn maakt, door hare doorſnijding, met de evenwijdige lijnen, acht onderſcheidene hoeken; waarvan 'er *vier naar buiten*, en *vier naar binnen* ſtaan.

De naar buiten ſtaande hoeken, *AGE*, *BGE*, *CHF* en *DHF*, noemt men *uitwendige hoeken.*

De naar binnen ſtaande hoeken, *AGH*, *BGH*, *CHG* en *DHG*, noemt men *inwendige hoeken.*

Tot de uitwendige hoeken, *AGE*, *BGE*, *CHF* en *DHF*, behooren de inwendige hoeken, *CHG*, *DHG*, *AGH* en *BGH*, welke, ten opzigte van de eerſte, *tegenoverſtaande inwendige hoeken* genoemd worden.

Twee inwendige hoeken, *AGH* en *DHG*, of *BGH* en *CHG*, aan onderſcheidene lijnen en aan tegenovergeſtelde zij-

zijden van de snijlijn gelegen zijnde, noemt men *inwendige verwisselende hoeken.*

Twee inwendige hoeken, *AGH* en *CHG*, of *BGH* en *DHG*, die wel aan onderscheidene lijnen, maar aan dezelve zijde van de snijlijn, liggen, noemt men *inwendige hoeken aan dezelfde zijde van de snijlijn.*

Twee uitwendige hoeken, *AGE* en *DHF*, of *BGE* en *CHF*, aan onderscheidene lijnen en aan tegenovergestelde zijden van de snijlijn liggende, noemt men *uitwendige verwisselende hoeken.*

Twee uitwendige hoeken, *AGE* en *CHF*, of *BGE* en *DHF*, wel aan twee verschillende lijnen, maar aan dezelfde zijde van de snijlijn gelegen zijnde, noemt men *uitwendige hoeken aan denzelfden kant van de snijlijn.*

XXVI. STELLING. *Fig.* 40.

§. 98. *Indien twee evenwijdige lijnen, AB en CD, door eene derde lijn EF, gesneden worden; dan is:*

1° *Elke uitwendige hoek, BGE, AGE, CHF en DHF, gelijk aan zijnen tegenoverstaanden inwendigen hoek, DHG, CHG, AGH en BGH.*

2° *De inwendige verwisselende hoeken, AGH en DHG, gelijk ook BGH en CHG, zijn gelijk.*

3° *De som van twee inwendige hoeken, AGH en CHG, of BGH en DHG, aan denzelfden kant der snijlijn liggende, is gelijk aan twee regte hoeken, en één dezer hoeken is alzoo het supplement van den anderen.*

4° *De uitwendige verwisselende hoeken, AGE en DHF, benevens BGE en CHF, zijn gelijk.*

5° *De som van twee uitwendige hoeken, AGE en CHF, of BGE en DHF, aan dezelfde zijde van de snijlijn liggende, is gelijk aan twee regte hoeken, en de één is gelijk aan des anderen supplement.*

BETOOG *van het eerste.* De lijnen *AB* en *CD*, door de onderstelling, evenwijdig zijnde, is (*XXIV. Stell.*) hoek *BGE* = hoek *DHG*: maar (*III. Stell.*) gelijke hoeken hebben gelijke supplementen; derhalve ve is, 1° hoek *AGE* = hoek *CHG*, 2° hoek *CHF* = hoek *AGH*, en 3°, hoek *FHD* = hoek *BGH*.

Betoog *van het tweede*. Hoek *AGH* is (*IV. Stell.*) = hoek *BGE* en hoek *BGE* = hoek *DHG* (*bewezen*); derhalve is hoek *AGH* = hoek *DHG* (*IV. Ax.*); en, deze hoeken gelijk zijnde, zijn ook hunne ſupplementen (*III. Stell.*) gelijk; dat is: hoek *BGH* = hoek *CHG*.

Betoog *van het derde*. De hoek *BGE* is = hoek *DHG*, bewezen; tel, bij elk dezer gelijke hoeken, denzelfden hoek *BGH*; dan is de ſom der hoeken *BGH* en *DHG* (*VII. Ax.*) gelijk aan de ſom der hoeken *BGH* en *BGE*; maar de ſom dezer laatſte is (*V. Stell.*) gelijk aan twee regte hoeken; derhalve is de ſom der hoeken *BGH* en *DHG* gelijk aan twee regte hoeken. Op dezelfde wijze betoogt men: dat de ſom der hoeken *AGH* en *CHG* gelijk aan twee regte hoeken is.

Betoog *van het vierde*. Volgens het betoogde, is hoek *BGE* = hoek *DHG*; maar (*IV. Stell.*) hoek *DHG* is = hoek *CHF*; derhalve (*IV. Ax.*) is hoek *BGE* = hoek *CHF*; derzelver ſupplementen, namelijk de hoeken *AGE* en *DHF*, zijn dan (*III. Stell.*) ook gelijk.

Betoog *van het laatſte*. Tel bij elk der hoeken *BGE* en *DHG*, die (*bew.*) gelijk zijn, denzelfden hoek *DHF*; dan is de ſom der hoeken *BGE* en *DHF* gelijk aan de ſom der hoeken *DHG* en *DHF* (*VII. Ax.*), gelijk (*V. Stell.*) aan twee regte hoeken. Om dezelfde reden, zal de ſom der hoeken *AGE* en *CHF* insgelijks gelijk aan twee regte hoeken zijn.

XXVII. Stelling. (*Het omgek. der XXVI. Stell.*) *Fig.* 40.

§. 99. *Wanneer eenige lijn EF twee andere lijnen, AB en CD, zoodanig ſnijdt; dat, of de inwendige verwisſelende hoeken gelijk zijn; of, dat de ſom der inwendige hoeken, aan denzelfden kant van de ſnijlijn liggende, gelijk is aan twee regte hoeken; of, dat de uitwendige verwisſelende hoeken gelijk zijn; of, dat, eindelijk, de ſom van twee uitwendige hoeken, welke aan denzelfden kant van de ſnijlijn liggen, gelijk is aan twee regte hoeken; dan zal men, onder elk één dezer afzonderlijke omſtandigheden, tot de evenwijdigheid der alzoo geſnedene lijnen, AB en CD, mogen beſluiten.*

Betoog. 1° Indien de inwendige verwisſelende hoeken *AGH* en *GHD* gelijk zijn; dan zijn ook (*III. Stell.*) de andere inwendige verwisſelende hoeken *BGH* en *GHC*, die de ſupplementen der eerſte zijn,

zijn, gelijk: nu is hoek AGH (*IV. Stell.*) $=$ hoek BGE; derhalve is (*IV. Ax.*) hoek $BGE =$ hoek DHG.

2° Indien hoek $BGH +$ hoek $DHG = 2R$ is; dan zal, omdat (*V. Stell.*) hoek $BGE +$ hoek $BGH = 2R$ is, (volg. *IV. Ax.*) hoek $BGH +$ hoek $DHG =$ hoek $BGE +$ hoek BGH zijn: trekt men van deze gelijkheid denzelfden hoek BGH af; dan houdt men (*VIII. Ax.*) over: hoek $BGE =$ hoek DHG.

3° Is hoek $BGE =$ hoek CHF; dan zal, omdat (*IV. Stell.*) hoek $CHF =$ hoek DHG is, ook (*IV. Ax.*) hoek $BGE =$ hoek DHG zijn.

4° Is eindelijk hoek $BGE +$ hoek $DHF = 2R$; dan zal, aangezien (*V. Stell.*) hoek $DHF +$ hoek $DHG = 2R$ is, (volg. *IV. Ax.*) ook hoek $BGE +$ hoek $DHF =$ hoek $DHF +$ hoek DHG zijn; van deze gelijkheid denzelfden hoek DHF afnemende, zal (*VIII. Ax.*) hoek $BGE =$ hoek DHG zijn.

Welke der onderstelde omstandigheden, bij de doorsnijding van twee lijnen AB en CD, door eene derde lijn EF, dan plaats hebbe, zal deze derde lijn EF dezelve lijnen AB en CD, onder gelijke hoeken, doorsnijden, en zij zullen (*XXV. Stell.*) derhalve evenwijdig zijn.

II. Lemma. *Fig.* 41.

§. 100. *Twee regthoekige driehoeken, ABC en DEF, zijn gelijk en gelijkvormig, wanneer zij twee gelijke regthoekszijden, BC en EF, en twee gelijke hypothenusen, AC en DF, hebben.*

Betoog. Wanneer de derde zijde AB des eersten driehoeks niet gelijk is aan de derde zijde DE des tweeden; dan zal men $BG = DE$ kunnen nemen; trekkende dan CG; dan zullen, omdat $BG = DE$, $BC = EF$, (*onderst.*) en hoek $B =$ hoek E is (*onderst.*), de driehoeken GBC en DEF (*X. Stell.*) gelijk en gelijkvormig zijn; CG zal derhalve gelijk DF; dat is, (*onderst.*) gelijk AC zijn: dit strijdt nu met het betoogde in de XXI. *Stelling*: de zijde DE moet dan gelijk aan de zijde AB zijn, en (*XIII. Stell.*) de driehoeken ABC en DEF zijn derhalve gelijk en gelijkvormig.

XXVIII. Stelling. *Fig.* 42 *en* 43.

§. 101. *Twee punten, E en G, van ééne van twee evenwijdige lijnen, AB en CD, staan op eenen gelijken afstand van de twee-*

tweede CD; en eenig punt E van ééne dezer evenwijdige lijnen AB heeft tot de tweede CD denzelfden afstand, als eenig punt H van de tweede CD tot de eerste AB. — En, omgekeerd. — *Wanneer twee punten, E en G, van eenige lijn AB tot eene andere lijn CD denzelfden afstand hebben; of wel, wanneer eenig punt E, in eene lijn AB, van eene andere lijn CD zoo ver afstaat, als eenig punt H in de laatste CD van de eerste AB; dan zijn deze lijnen evenwijdig.*

Betoog *van het eerste.* Het eerste gedeelte dezer stelling bestaat uit twee deelen. 1° Indien de lijnen *AB* en *CD* evenwijdig zijn, en uit *E* en *G* de loodlijnen *EF* en *GH* op *CD* vallen; dan moet men bewijzen: dat deze loodlijnen, welke de afstanden (*XXXII. Bep.*) der punten *E* en *G* tot *CD* zijn, gelijke lengte hebben. Trek de lijn *FG*; dan zal, wegens de onderstelde evenwijdigheid der lijnen *AB* en *CD*, (*XXIII en II. Stell.*) hoek $FEG =$ hoek $GHF = R$ zijn, en (*XXIV. Stell.*) hoek $EGF =$ hoek GFH, en dan zal ook (*IX. Gev. XVIII. Stell.*) hoek $EFG =$ hoek FGH zijn; de driehoeken, die de gemeene zijde *FG* hebben, zijn dan (*IX. Stell.*) gelijk en gelijkvormig, en *EF* is derhalve gelijk aan *GH*.

2° Indien, uit *E*, de lijn *EF* loodregt op *CD*, en, uit *H*, de lijn *HG* loodregt op *AB* valt; dan moet bewezen worden: dat ook, in dit geval, $EF = GH$ zal zijn. Wederom zal, wegens de onderstelde evenwijdigheid, de driehoek *EFG* gelijk en gelijkvormig zijn aan den driehoek *FGH*, en gevolgelijk $EF = GH$.

Betoog *van het omgekeerde.* 1° Wanneer de loodlijnen *EF* en *GH*, welke uit de punten *E* en *G* op *CD* vallen, gelijk zijn; dan moet men bewijzen: dat *AB* evenwijdig aan *CD* is. Men trekke de lijn *FG*. Omdat dan hoek $GHF =$ hoek $HFE = R$ (*XVI. Bep.*) is, en (*II. Gev. XVIII. Stell.*) de som der hoeken *HFG* en *FGH* gelijk aan éénen regten hoek, gelijk aan de som der hoeken *HFG* en *EFG* is, zal, indien men van deze gelijkheid denzelfden hoek *HFG* aftrekt, (*VIII. Ax.*) hoek $FGH =$ hoek EFG overblijven: nu is $EE = GH$ (*onderst.*) en $FG = FG$: de driehoeken *FGH* en *EFG* zijn dan (*X. Stell.*) gelijk en gelijkvormig, en hoek $FEG =$ hoek $FHG = R$: de lijnen *AB* en *CD* worden dan door eene lijn *EF* onder regte hoeken doorgesneden, en zijn (*XXIII. Stell.*) evenwijdig.

2° Indien, *Fig.* 43, uit *E*, de lijn *EF* loodregt op *CD*, en, uit *H*, de loodlijn *HG* op *AB* valt, en $EF = GH$ is, zullen (*EH* trekkende) de twee regthoekige driehoeken *EFH* en *GFH* eene gemeene hy-

hypothenuſe *EH*, en twee gelijke regthoekszijden *EF* en *GH* hebben, en zullen derhalve (*II. Lemma*) gelijk en gelijkvormig zijn; de hoek *FHE* is dan gelijk aan den hoek *HEG*, en de lijnen *AB* en *CD* zijn (*XXVII. Stell.*) evenwijdig.

§. 102. Gevolg. Uit het betoogde volgt: *dat evenwijdige lijnen overal even ver van elkander afſtaan*, en dat, omgekeerd, *lijnen, die overal even ver van elkander afſtaan, evenwijdig zijn*. De Hollandſche benaming van *evenwijdige* (even ver van elkander afſtaande,) *lijnen* drukt deze eigenſchap zeer eigenaardig uit.

§. 103. XXXV. Bepaling. *Fig.* 42. De *afſtand* van twee evenwijdige lijnen, *AB* en *CD*, is de loodlijn *EF*, welke, uit eenig punt *E* van ééne dezer twee lijnen *AB*, op de andere *CD* valt. Zij heeft (*XXVIII. Stell.*) overal dezelfde lengte.

XXIX. Stelling. *Fig.* 44.

§. 104. *De lijnen AB en CD, welke, elk in het bijzonder, aan eene derde lijn LM evenwijdig zijn, zijn onderling evenwijdig.*

Betoog. Men trekke door een punt *S* van de lijn *LM* eene onbepaalde loodlijn *PS*: omdat dan *AB* en *CD*, elk in het bijzonder, evenwijdig aan *LM* loopen, zijn de hoeken, om de punten *Q* en *R*, regte hoeken (*II. Gev. XXXIII. Bep.*): de lijnen *AB* en *CD* ſtaan, bijgevolg loodregt op dezelfde lijn *PS*, en zijn (*I. Gev. XXXIII. Bep.*) bijgevolg evenwijdig.

XXX. Stelling. *Fig.* 45 *en* 46.

§. 105. *De hoeken ABC en QPR, welker beenen, beide in dezelfde rigting, evenwijdig aan elkander loopen, (AB aan PQ, en BC aan PR,) zijn gelijk.*

Betoog. De hoeken liggen in elkander, als in *fig.* 45, of buiten elkander, als in *fig.* 46: in het eerſte geval, verlenge men eene der zijden *PQ* van den binnenſten hoek *QPR* tot in *D*; dan is, in beide figuren, wegens de onderſtelde evenwijdigheid der lijnen, (*XXIV. Stell.*) hoek *ABC* = hoek *QDC*; en hoek *QDC* = hoek *QPR*; derhalve (*IV. Ax.*) is hoek *ABC* = hoek *QPR*.

XXXI. Stelling. *Fig.* 47.

§. 106. *De regte lijnen AD en BC, welke de uiteinden van twee gelijke en evenwijdige lijnen AB en CD vereënigen, zijn zelve gelijk en evenwijdig.*

Betoog. Trek de lijn BD; dan zijn de driehoeken ABD en BDC gelijk en gelijkvormig: want, omdat AB evenwijdig aan DC is, zijn de verwisselende hoeken ABD en BDC (*XXVI Stell.*) gelijk, en voorts zijn de zijden, om deze gelijke hoeken staande, gelijk, namelijk $BD = BD$ en $AB = CD$; derhalve is (*X. Stell.*) $AD = BC$ en hoek $ADB =$ hoek CBD, en (*XXVII. Stell.*) AD evenwijdig aan BC.

XXXII. Stelling. *Fig.* 48.

§. 107. *Indien men, uit alle de punten A, B, C, enz. van den omtrek eener regte of kromlijnige figuur, gelijke en evenwijdige lijnen AD, BE, CF, enz. trekt; (namelijk alle naar denzelfden kant,) dan zijn de uiteinden dezer lijnen gelegen in eene regte of kromlijnige figuur, welke aan de eerste gelijk en gelijkvormig is.*

Betoog. Vereënig de punten A, B en C door de lijnen AB, BC en AC, en de punten D, E en F door de lijnen DE, EF en DF. Omdat nu, (*onderst.*) $AD = BE = CF$ is, en deze lijnen onderling evenwijdig zijn, is (*XXXI. Stell.*) $AB = DE$; $BC = EF$ en $AC = DF$. Indien men nu het punt A in D, de lijn AC langs DF past, zal, omdat de driehoeken ABC en DEF (*XIII. Stell.*) gelijk en gelijkvormig zijn, het punt C in F, en B in E vallen. Wanneer dan de punten A en B van den omtrek der gegevene figuur in den omtrek der voortgebragte figuur DEF gebragt worden, zal een derde punt B van den omtrek der gegevene figuur in den omtrek der voortgebragte, in E, vallen; daar nu hetzelfde, voor alle andere punten G en H, gelden zal, zullen alle de punten der gegevene figuur in die der voortgebragte vallen, en de figuren zullen (*I. Ax.*) gelijk en gelijkvormig zijn. —— Voor regtlijnige figuren zal men de waarheid dezer stelling, met minder omslag, betoogen kunnen.

TWEE-

TWEEDE BOEK.

Over de Evenredigheden, of Proportien, *en derzelver voornaamste Eigenschappen.*

---

§. 108. I. BEPALING. Eene grootheid wordt door eene andere, als eene aangenomene maat, gemeten, wanneer men in dezelve, zoo lang zij strekt, deelen neemt, welke elk, in het bijzonder, aan die maat gelijk zijn.

§. 109. II. BEPALING. Eene grootheid A is een *evenmatig deel* van eene andere B, wanneer zij, eenige malen genomen, gelijk aan de grootheid B, waarvan zij als een gedeelte aangemerkt wordt, worden kan: of, wanneer, n een geheel getal zijnde, $n \times A = B$ is.

§. 110. III. BEPALING. In het tegengestelde geval, wanneer $n \times A < B$ en tevens $(n + 1) \times A > B$ is, zal A een *onevenmatig deel* van B zijn.

§. 111. IV. BEPALING. Eene grootheid C is eene *gemeene maat* van twee andere grootheden A en B, wanneer zij een evenmatig deel van elk dezer grootheden is.

§. 112. GEVOLG. Omdat elk evenmatig deel eener gemeene maat van twee grootheden noodzakelijk eene gemeene maat van diezelfde grootheden is, bestaat 'er tusschen deze grootheden, indien zij slechts ééne gemeene maat hebben, een onnoemlijk aantal van gemeene maten; en, onder alle deze gemeene maten, is ééne de *grootste*.

§. 113. V. BEPALING. De *betrekking* of *reden* van twee grootheden wordt uitgedrukt door twee getallen, welke te kennen geven, hoeveelmaal eenige gemeene maat van die grootheden op elk van dezelve verhouden is. De getallen, welke deze betrekking uitdrukken, zullen de kleinste zijn, indien de grootste gemeene maat dezer grootheden, in het bepalen dezer verhouding, is genomen geworden.

Wanneer, bij voorbeeld, C in A twintigmaal, en C in B dertienmaal begrepen is; dan zal de betrekking of reden der grootheden A en B door de getallen 20 en 13 worden uitgedrukt, en men zal zulks, bij verkorting, aldus schrijven.

$$A : B = 20 : 13.$$

§. 114. VI. Bepaling. Eene uitdrukking als deze

$$\left\{\begin{matrix} A, & B, & C, & D, & E, & F, & G \\ 2, & 1, & 4, & 3, & 1, & 2 & \end{matrix}\right\}$$

wordt, in het vervolg, aldus gelezen: *de grootheid B is in de grootheid A tweemaal met nog eene grootheid C (kleiner dan B) begrepen; de grootheid C is in B éénmaal met nog D begrepen; D is in C viermaal met nog E begrepen; E is in D driemaal met nog F begrepen; F is in E éénmaal met nog G; en G is in F juist tweemaal begrepen.* Zulk eene uitdrukking noemt men den *index* of *betrekkingswijzer* van de betrekking der grootheden A en B: hij bevat de volgende vergelijkingen, waardoor men de betrekking der grootheden, door denzelven uitgedrukt, in getallen, vinden kan.

$$\begin{aligned} F &= 2G \\ E &= F + G = 2G + G = 3G \\ D &= 3E + F = 9G + 2G = 11G \\ C &= 4D + E = 44G + 3G = 47G \\ B &= C + D = 47G + 11G = 58G \\ A &= 2B + C = 116G + 47G = 163G \end{aligned}$$

Men zie, wegens het berekenen van zulk eenen wijzer, den *Eersten Cursus* der *Wiskundige Lessen*, de XXXII. *Les*, §. 582, *et seq.*

§. 115. I. Aanmerking. Wanneer men twee gegevene grootheden, bij voorbeeld, twee lijnen, of twee hoeken, behandelt, als in de voorgaande bepaling beschreven is, en men alzoo derzelver betrekkingswijzer opmaakt, zal men altijd derzelver gemeene maat, indien deze nazerlijk bestaat, ontdekken, en dan zal de berekening van dezen wijzer leeren, hoeveelmaal de gemeene maat G in elk der grootheden A en B begrepen is, waardoor dan (*V. Bep.*) derzelver betrekking, in getallen zal bekend worden. In den bijgebragten wijzer zal, ingevolge de opgemaakte berekening, $A : B = 163 : 58$ zijn. Men kan nogtans die getallen, door eenen gemakkelijker regel vinden. (zie I. C. §. 609.)

§. 116. II. Aanmerking. *Twee grootheden kunnen zoodanig gesteld zijn; dat zij, op de voorschrevene wijze, behandeld zijnde, nimmer een*

een evenmatig deel te voorschijn brengen. Wanneer men derhalve de betrekking van twee grootheden onderzoekt, komen 'er twee gevallen in aanmerking. 1° Wanneer die grootheden *meetbaar;* ten 2°, wanneer zij *onmeetbaar* zijn.

§. 117. VII. Bepaling. Twee grootheden zijn *meetbaar*, (*commensurabel*,) wanneer eenig evenmatig deel van de eerste tevens een evenmatig deel van de tweede is. Zij hebben dan (*V. Bep.*) eene gemeene maat, welke, door het voorschrift der *VI. Bep.* zal gevonden worden, *en men zal derzelver betrekking altijd door twee getallen, volkomen en naauwkeurig, kunnen uitdrukken.*

§. 118. VIII. Bepaling. Twee grootheden zijn *onmeetbaar* (*incommensurabel*,) wanneer geen evenmatig deel van de eerste, als een half, een derde, een vierde, enz., welk een het ook zijn moge, en hoe klein ook genomen, tevens een evenmatig deel van de tweede zijn kan.

§. 119. Gevolg. *Onmeetbare grootheden hebben derhalve geene gemeene maat;* naar het voorschrift van de VI. Bepaling, behandeld zijnde, zal men, bij elke volgende meting, een overschot verkrijgen, en derzelver betrekkingswijzer zal gevolgelijk uit een onnoemlijk aantal termen bestaan.

§. 120. Aanmerking. In het geval der onmeetbaarheid, zullen de overschotten, die men bij de uitmeting verkrijgt, weldra zoo klein worden, dat zij niet meer handelbaar zijn: men zal dan, deze verwaarloozende of gelijk nul stellende, twee getallen vinden, welke, ten naaste bij, de betrekking dezer twee grootheden uitdrukken: maar, strikt genomen, kan die betrekking nooit volkomen, zelfs niet, door de grootste getallen, die men zich verbeelden kan, worden voorgesteld: want, hoe groot men deze getallen nemen moge, onderstellen zij eene gemeene maat, hoedanige twee onmeetbare grootheden, volgens de gegevene bepaling, nooit hebben kunnen.

§. 121. IX. Bepaling. *Vier grootheden, A, B, P, Q, maken eene evenredigheid, wanneer de betrekking der twee eerste dezelfde is als de betrekking der twee laatste: of meer bepaaldelijk, wanneer de betrekkingswijzer der twee eersten, namelijk*

$$\left\{\begin{array}{c} A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ \text{enz.} \\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \text{enz.} \end{array}\right\}$$

in alles, zoo wel ten aanzien van de termen, één voor één genomen, als ten aanzien van derzelver aantal, dezelfde is, als de betrekkingswijzer van de twee laatsten, namelijk

$$\left\{\begin{matrix} P, & Q, & R, & S, & T, & U, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & e, & enz. & \end{matrix}\right\}$$

§. 122. Nadere opheldering. Om dan te beoordeelen, of twee grootheden, A en B, in dezelfde reden zijn, als twee andere grootheden, P en Q, moet men de twee eersten A en B, als ook de twee laatsten P en Q, naar het voorschrift van de VI. Bepaling, behandelen, en, wanneer men dan, voor de eersten A en B, dezelfde wijzergetallen, als voor de twee laatsten verkrijgt; dan zullen de grootheden A en B evenredig zijn aan de grootheden P en Q. Zijn nu de grootheden A en B onmeetbaar, dan zal derzelver betrekkingswijzer nooit ten einde loopen: zal 'er dan eene evenredigheid bestaan, moet insgelijks de betrekkingswijzer van de twee andere grootheden P en Q nooit ten einde loopen, en men moet bovendien aannemen, dat, in beide, de wijzer getallen, term voor term, dezelfde zijn. Offchoon nu dit laatste, wegens de bepaaldheid onzer zintuigen, door dadelijke ervaring, niet blijken kan, zal men nogtans tot de evenredigheid dezer grootheden mogen besluiten, al is het, dat de twee eerste grootheden onmeetbaar ondersteld worden, bijaldien zij maar met de twee andere zoodanig verbonden zijn, dat men, door redenering, kan aantoonen, dat, wanneer men de uitmeting onbepaaldelijk konde voortzetten, de betrekkingswijzer van de twee eerste dezelfde zou moeten blijven als die van de twee laatste.

§. 123. Aanmerking. Zijn de twee eerste grootheden meetbaar; dan moeten ook de twee laatste meetbaar zijn: de betrekking der twee eerste moet dan door dezelfde getallen, als die der twee laatsten worden uitgedrukt. *Vier grootheden zijn dan evenredig, wanneer de gemeene maat der twee eersten, op elk van de twee eersten, zooveelmaal begrepen is, als de gemeene maat van de twee laatsten, op elk van dezelve.* In dien zin, zijn getallen evenredig.

§. 124. X. Bepaling. Wanneer twee grootheden, A en B, met twee andere grootheden, P en Q, evenredig zijn; dan worden de grootheden A, B, P, Q, in deze evenredigheid voorkomende, derzelver *termen* genoemd: de grootheden A en B noemt men dan de *termen der eerste*, en P en Q de *termen der tweede reden.*

§. 125.

§. 125. XI. Bepaling. De termen eener evenredigheid worden gezegd *welgeordend* te zijn, wanneer, in elke reden, de grootste op den kleinsten, of de kleinste op den grootsten term volgt.

Indien derhalve A, B, P en Q eene welgeordende evenredigheid uitmaken, moet $P >$ of $< Q$ zijn, indien $A >$ of $< B$ is.

§. 126. XII. Bepaling. Om te kennen te geven: dat de grootheden A, B, P en Q in eene welgeordende evenredigheid zijn, wordt zulks aldus geschreven

$$A : B = P : Q$$

en gelezen: *de grootheid A staat tot de grootheid B, in dezelfde reden, of, in dezelfde betrekking, als de grootheid P tot de grootheid Q.*

§. 127. XIII. Bepaling. De eerste term van elke reden wordt *voorgaande*; de tweede term *volgende* term genoemd. In de redens $A : B$, en $P : Q$, zijn A en P de *voorgaande*, en B en Q de *volgende termen.*

§. 128. XIV. Bepaling. Diensvolgens worden, in elke welgeordende evenredigheid, $A : B = P : Q$, de *eerste* en *derde* termen de *voorgaande*; de *tweede* en *vierde* de *volgende* termen genoemd.

§. 129. XV. Bepaling. In eene welgeordende evenredigheid, $A : B = P : Q$, dragen de *eerste* en *vierde* termen den naam van *uiterste*, en de *tweede* en *derde* den naam van *middelste termen.* De vierde term Q wordt *de vierde evenredige tot de drie grootheden A, B* en P genoemd.

§. 130. XVI. Bepaling. Wanneer de twee middelste termen eener evenredigheid, $A : B = B : C$, gelijk of dezelfde zijn; dan wordt deze evenredigheid eene *gedurige evenredigheid* genoemd. Zulk eene evenredigheid wordt wel eens aldus $\because A, B, C$ geschreven. De derde term C wordt de *derde evenredige tot A en B*; en de tweede term B de *midden evenredige tusschen A en C* genoemd.

§. 131. XVII. Bepaling. Wanneer, in eene reeks van grootheden, A, B, C, D, E, F, *enz.*, drie op elkander volgende termen altijd in eene gedurige evenredigheid zijn, wordt zij eene *meetkunstige reeks* genoemd. Bestaat deze reeks uit vier termen, dan heeten de middelsten de *twee midden-evenredigen* tusschen de uitersten; bestaat zij uit vijf termen; dan heeten de drie middelsten de *drie midden-evenredigen tusschen de uitersten*, *enz.* Zie I. C. XXXIX. Les.

§. 132. XVIII. Bepaling. Indien meer dan twee redens aan elkander gelijk zijn; dan maken deze redens eene *aanëengeschakelde evenredigheid.* Zulk eene is derhalve $A:B = C:D = E:F = G:H$. Zij kan uit zoo vele redens bestaan, als men goedvindt. Men pleeg wel te zeggen, de grootheden A, C, E, G, zijn evenredig met de grootheden B, D, F, H. Of $(A, C, E, G) :: (B, D, F, H)$.

I. Stelling.

§. 133. *Indien twee redens $A:B$ en $C:D$, elk in het bijzonder, aan eene derde reden $P:Q$ gelijk zijn; dan zijn deze redens onderling gelijk. Of indien $A:B = P:Q$ en $C:D = P:Q$; dan zal $A:B = C:D$ zijn.*

Betoog. Deze waarheid is uit het *IV. Axioma* blijkbaar.

II. Stelling.

§. 134. *De redens eener evenredigheid, $A:B = C:D$, mogen verplaatst worden. Dat is, men mag stellen: $C:D = A:B$.*

Betoog. Want, door het verplaatsen der redens, wordt de gelijkheid der betrekking, die het wezen der evenredigheid uitmaakt, niet veranderd.

III. Stelling.

§. 135. *De termen van de redens eener evenredigheid mogen omgezet worden. Dat is; men mag, uit de evenredigheid, $A:B = P:Q$, besluiten: dat $B:A = Q:P$ is.*

Betoog. De betrekking der grootheden A en B kan, of volkomen, of ten naaste bij, door twee getallen p en q worden uitgedrukt. Nu is het klaar: dat men zoo wel zeggen kan: B staat tot A gelijk q tot p, als A staat tot B gelijk p tot q; daar zulks nu, in beide redens, geschieden kan, zal men $B:A = Q:P$ kunnen stellen.

IV. Stelling.

§. 136. *Wanneer de termen van de eerste reden eener evenredigheid gelijk zijn; dan moeten ook de termen van de tweede reden dezer evenredigheid gelijk zijn.*

Betoog. Deze waarheid is een onmiddelijk gevolg van de bepaling der evenredigheid. Zie *IX. Bep.*

§. 137. I. Gevolg. *Twee gelijke grootheden zijn derhalve altijd in dezelfde reden als twee andere gelijke grootheden.*

§. 138. II. Gevolg. *Twee ongelijke grootheden kunnen dan ook met twee gelijke grootheden niet evenredig zijn.*

V. Stelling.

§. 139. *Wanneer de betrekking van twee meetbare grootheden A en B door de getallen a en b wordt uitgedrukt, en alzoo $A:B=a:b$ is; dan zal de eerste grootheid A, zooveelmaal genomen, als 'er éénheden in het tweede getal b zijn, gelijk zijn aan de tweede grootheid B, zooveelmaal genomen, als 'er éénheden in het eerste getal a zijn, of $bA=aB$.* — En omgekeerd. — *Indien eenig veelvoud eener grootheid A gelijk is aan eenig ander veelvoud eener andere grootheid B, of $b\times A=a\times B$; dan zullen deze grootheden tot elkander zijn als de getallen, waarmede zij vermenigvuldigd zijn, in eene omgekeerde orde genomen: dat is, $A:B=a:b$.*

Betoog *van het eerste.* De grootheden A en B kunnen niet tot elkander staan, als een getal a tot een getal b, indien zij geene gemeene maat hebben. Stel deze gemeene maat M; dan is $A=aM$ en $B=bM$: laten deze gelijkheden, de eerste met b, en de tweede met a, vermenigvuldigd worden; dan zullen (*XII. Ax.*) $bA=abM$ en $aB=abM$ zijn, en derhalve (*IV. Ax.*) $bA=aB$.

Betoog *van het omgekeerde.* Men kan elke grootheid, in zulk een getal evenmatige deelen verdeelen, als men goedvindt: laat A dan in een aantal van a gelijke deelen verdeeld, en elk dezer deelen M genoemd worden; dan zal $A=aM$ en (*XII. Ax.*) $bA=abM$ zijn: maar $bA=aB$ (*onderst.*) zijnde, is (*IV. Ax.*) $abM=aB$, en van elk dezer gelijke grootheden een a^{de} deel nemende, is (*XII. Ax.*) $bM=B$: dat is, wanneer de grootheid A een aantal van a deelen, elk gelijk M, bevat; dan bevat B een aantal van b zulke deelen, en derhalve is (*V. Bep.*) $A:B=a:b$.

VI. STELLING.

§. 140. *In elke evenredigheid*, $A:B=P:Q$, *zijn gelijke of dezelfde veelvouden, als ook dezelfde evenmatige deelen van de termen der eerste of tweede reden, met de termen der tweede of eerste reden, evenredig. Dat is, n een geheel of gebroken getal zijnde, zal* $nA:nB=P:Q$; *of* $A:B=nP:nQ$ *zijn.*

BETOOG. Laten de betrekkingswijzers der grootheden A en B en der grootheden P en Q

$$\left\{\begin{matrix} A, B, C, D, E, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} P, Q, R, S, T, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{matrix}\right\}$$

zijn, bestaande uit dezelfde, en hetzelfde aantal termen, indien de grootheden meetbaar zijn; maar, indien deze onmeetbaar zijn, onbepaald voortloopende, en uit dezelfde wijzer getallen bestaande; dan geeft (zie *VI. Bep.*) de eerste wijzer de vergelijkingen $A=aB+C$; $B=bC+D$; $C=cD+E$; *enz.* tot zoo ver de wijzer loopt, en welker aantal onbepaald is, indien de grootheden A en B onmeetbaar zijn: wanneer men nu alle deze vergelijkingen met n vermenigvuldigt; dan zal men (*XII. Ax.*) de vergelijkingen, $nA=anB+nC$; $nB=bnC+nD$; $nC=cnD+nE$; *enz.*, verkrijgen: maar deze vergelijkingen geven den betrekkingswijzer

$$\left\{\begin{matrix} nA, nB, nC, nD, nE, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{matrix}\right\}$$

naardien nu de wijzer- getallen van dezen betrekkingswijzer dezelfde zijn als die van den betrekkingswijzer der grootheden P en Q; zal (*IX. Bep.*) $nA:nB=P:Q$ zijn.

Men zal op dezelfde wijze betoogen: dat $A:B=nP:nQ$ is.

§. 141. I. GEVOLG. Men heeft bewezen: dat $nA:nB=P:Q$ is: maar $P:Q=A:B$ zijnde, zal (*I. Stell.*) $nA:nB=A:B$ zijn: wederom is $A:B=mP:mQ$; derhalve zal ook $nA:nB=mP:mQ$ zijn. Dat is: *gelijke veelvouden van de termen van de eerste reden eener evenredigheid zijn evenredig met gelijke veelvouden van de termen der tweede reden.*

§. 142. II. GEVOLG. Wanneer M en N twee gelijkslachtitige grootheden zijn; dan is $M:N=M:N$, en, volgens het voorgaande gevolg, $pM:pN=qM:qN$; dat is: *gelijke veelvouden van gelijkslachtige grootheden zijn evenredig met andere gelijke veelvouden van diezelfde grootheden.*

VII. STELLING.

§. 143. *Wanneer de vier termen eener evenredigheid, $A:B=P:Q$, alle gelijkslachtig zijn; dan zijn de voorgaanden tot elkander in dezelfde reden als de volgenden: of $A:P=B:Q$.*

BETOOG. I. GEVAL. Indien de grootheden A en B, en bijgevolg ook P en Q, onderling meetbaar zijn, zoo laat M de gemeene maat van A en B, en N de gemeene maat van P en Q zijn: indien dan M op A en B respectievelijk p en q maal begrepen is, zal (*Aanm. IX. Bep.*) N op P en Q insgelijks p en q maal begrepen zijn, en men zal, in plaats van de grootheden A, B, P en Q, stellen kunnen pM, qM, pN, qN, welke, wanneer zij in de rangorde, pM, pN, qM, qN, gesteld worden (*II. Gev. VI. Stell.*), eene evenredigheid maken; te weten: $pM:pN=qM:qN$; of $A:P=B:Q$.

II. GEVAL. Wanneer de grootheden A en B, en bijgevolg ook P en Q, onmeetbaar zijn; dan loopen de betrekkingswijzers, zonder einde, voort: wanneer men nu, in beide wijzers, hetzelve getal termen neemt, dan zal men twee getallen verkrijgen, welke ten naaste bij de betrekking van A tot B en van P tot Q uitdrukken; stellen wij, bij voorbeeld, dat, voor honderd wijzer getallen, r en s deze getallen zijn; dan is

$$A:B'=P:Q'=r:s$$

zijnde B' en Q' twee grootheden, welke tot A en P dezelfde reden hebben, als het getal r tot het getal s. Men zal dan, naar het betoogde, in het eerste geval, mogen stellen:

$$A:P=B':Q'$$

vermits nu de getallen r en s zooveel te naauwkeuriger de betrekking van A tot B en van P tot Q zullen uitdrukken, naar mate, uit de betrekkingswijzers, meer termen, tot de zamenstelling der getallen r en s, hebben mede gewerkt, zullen de grootheden B' en Q', die tot A en P in dezelfde reden, als r tot s, genomen zijn, zeer weinig van de grootheden B en Q verschillen, en al minder en minder, naar mate men, om nog naauwkeuriger waarden voor r en s te verkrijgen, meer

ter-

termen uit de wijzers neemt, tot dat eindelijk, indien men de geheele oneindigheid der termen te zamen neemt, $B' = B$ en $Q' = Q$ wordt; als wanneer $A : P = B : Q$ zal zijn.

§. 144. Gevolg. Omdat dan, uit de evenredigheid, $A : B = P : Q$, (indien alle hare termen gelijkflachtig zijn,) volgt $A : P = B : Q$; zal, wanneer $A = P$ is, ook (*IV. Stell.*) $B = Q$ zijn. *Wanneer dan de voorgaande termen eener evenredigheid gelijk zijn; dan moeten ook de volgende eene gelijke grootte hebben.*

VIII. Stelling.

§. 145. *In elke evenredigheid*, $A : B = P : Q$, *is*

1° *De fom van de termen der eerfte reden tot de fom van de termen der tweede reden, als de voorgaande der eerfte reden tot den voorgaanden der tweede reden, of als de volgende van de eerfte tot den volgenden van de tweede reden.*

2° *Het verfchil van de termen der eerfte reden is tot het verfchil van de termen der tweede reden, als de voorgaande of volgende van de eerfte tot den voorgaanden of volgenden van de tweede reden.*

3° *De fom van de termen der eerfte reden ftaat tot de fom van de termen der tweede reden, als het verfchil van de termen der eerfte reden tot het verfchil van de termen der tweede reden.*

Betoog *van het eerfte.* Laten de betrekkingswijzers van de reden A tot B en van P tot Q zijn:

$$\left\{\begin{matrix} A, B, C, D, E, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} P, Q, R, S, T, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{matrix}\right\}$$

dan is het klaar: dat, vermits B op A begrepen is a maal met nog C, de grootheid B op de fom van de grootheden A en B zal begrepen zijn $a + 1$ maal met nog C; en dat insgelijks, in den tweeden wijzer, Q op $P + Q$ zal begrepen zijn $a + 1$ maal met nog R: wanneer men dan de betrekkingswijzers van $A + B$ tot B, en van $P + Q$ tot Q opmaakt, zullen beider wijzergetallen (namelijk $a + 1$, b, c, d, *enz.*) dezelfde zijn, en men zal (*IX. Bep.*) mogen ftellen: $A + B : B = P + Q : Q$, waaruit (*VII. Stell.*) volgt, $A + B : P + Q = B : Q$; maar uit de geftelde evenredigheid, $A : B = P : Q$, volgt: (*VII.

(*VII. Stell.*) $A:P=B:Q$; derhalve zal (*I. Stell.*) $A+B:P+Q=A:P=B:Q$ zijn.

BETOOG *van het tweede.* Uit dezelfde wijzers volgt verder: dat B in $A-B$ zal begrepen zijn $a-1$ maal met nog C; dat Q in $P-Q$ insgelijks $a-1$ maal met nog Q zal begrepen zijn: indien men derhalve de betrekkingswijzers van $A-B$ tot B, en van $P-Q$ tot Q opmaakt, zullen zij dezelfde wijzer getallen, $a-1$, b, c, d, *enz.* hebben, en derhalve gelijk zijn; volgens de *IX. Bep.* zal $A-B:B=P-Q:Q$ zijn; en (*VII. Stell.*) $A-B:P-Q=B:Q=A:P$.

BETOOG *van het derde.* In de twee eerste gedeelten, is bewezen: dat $A+B:P+Q=A:P$, en $A-B:P-Q=A:P$ is; derhalve (*I. Stell.*) zal $A+B:P+Q=A-B:P-Q$ zijn.

IX. STELLING.

§. 146. *In elke evenredigheid*, $A:B=P:Q$, *welker termen alle gelijkslachtig zijn, is:*

1° *De som van de voorgaanden tot de som van de volgende termen, als een voorgaande tot eenen volgenden term van dezelfde reden.*

2° *Het verschil van de voorgaanden is tot het verschil van de volgende termen, als een voorgaande tot eenen volgenden term van dezelfde reden.*

3° *De som der voorgaanden termen staat tot die der volgenden, gelijk het verschil der voorgaanden tot het verschil der volgenden.*

BETOOG. Deze stelling is een onmiddelijk gevolg der twee voorgaande stellingen: want, uit de gestelde evenredigheid, $A:B=P:Q$, volgt (*VII. Stell.*) $A:P=B:Q$; waaruit, naar de *VIII. Stell.* wederom de evenredigheden, 1° $A+P:B+Q=A:B=P:Q$; 2° $A-P:B-Q=A:B=P:Q$; en 3°, $A+P:B+Q=A-P:B-Q$ volgen.

X. STELLING.

§. 147. *In eene aanëêngeschakelde evenredigheid*,

$$A:B=C:D=E:F=G:H=I:K \text{ enz.}$$

staat

ſtaat de ſom van al de voorgaande tot de ſom van al de volgende termen, als een voorgaande tot eenen volgenden term van dezelfde reden; dat is:

$$A+C+E+G+I:B+D+F+H+K=A:B.$$

Betoog. Volgens de onderſtelling, is $A:B=C:D$; derhalve (*IX. Stell.*) $A+C:B+D=A:B$; maar $A:B=E:F$ zijnde, is (*I. Stell.*) $A+C:B+D=E:F$. In deze laatſte evenredigheid is wederom (*IX. Stell.*) $A+C+E:B+D+F=E:F=A:B$; maar $A:B=G:H$ zijnde, zal $A+C+E:B+D+F=G:H$, en (*IX. Stell.*) $A+C+E+G:B+D+F+H=G:H=A:B$ zijn. Op deze wijze voortredenerende, zal men bevinden: dat, hoe vele redens ook mogten aanëéngeſchakeid zijn, de ſom der voorgaande tot de ſom der volgende termen altijd in dezelfde reden zal zijn, als een voorgaande tot eenen volgenden term van dezelfde reden.

§. 148. Aanmerking. De eigenſchappen der evenredigheden, in de voorgaande ſtellingen betoogd, zijn alleen betrekkelijk tot evenredigheden, welke, uit eenige geſtelde evenredigheid, worden afgeleid. In alle deze, heeft men de evenredigheden der grootheden, op welke de voornaamſte meetkunſtige betoogen gevestigd zijn, op de algemeenſte wijze, en ook zelfs, in het onmeetbare geval, overwogen: doch, de getallen kunnen ook evenredig zijn, en deze evenredigheid, welke van die der grootheden in geenerlei wijze, dan alleen daarin onderſcheiden is, dat de termen van derzelver redens, uit zich zelve, (*zie Aanm. IX. Bep.*) altijd meetbaar zijn, wordt in alle goede Rekenboeken geleerd, is ook door ons (I. C. XXXIV. *Les*) behandeld, en derzelver kennis wordt hier derhalve onderſteld. Wanneer men nu aanneemt, *dat eenige grootheden evenredig zijn; dan zijn ook de getallen, waardoor deze grootheden, in éénheden van dezelfde ſoort worden uitgedrukt, evenredig, en deze getallen, onderling evenredig zijnde, moeten ook, omgekeerd, de grootheden, die zij uitdrukken, zonder bedenking, als evenredig zijnde, beſchouwd worden.* Offchoon men nu de evenredigheid der onmeetbare grootheden niet naauwkeurig, in getallen, kan voorſtellen, neemt men toch meestal, in plaats van de grootheden, die in eene evenredigheid voorkomen, derzelver getallen waarden, en men houdt het alsdan daar voor, dat alles, wat van die getallen evenredigheid bewezen is, ook van de grooheden zelve, die zij uitdrukken, mag geſteld worden. De voornaamſte eigenſchappen der getallen evenredigheden, waarvan wij gebruik zullen maken, zijn nu de volgende:

I. *Dat*

I. *Dat, in elke evenredigheid, het product der uiterste termen gelijk is aan het product der middelsten.* Zie I. C. §. 650.

II. *Dat de vierde evenredige tot drie getallen gelijk is aan het product der twee laatste, gedeeld door het eerste.* Zie §. 653, I. C.

III. *Dat men de termen der eerste of tweede reden, of de beide voorgaanden, of de beide volgenden, door hetzelfde getal mag vermenigvuldigen of deelen.* Zie I. C. §. 658–§. 660.

IV. *Dat, eindelijk, de producten van de overëënkomstige termen van twee of meer evenredigheden met elkander evenredig zijn.* Zie I. C. §. 666. Waaruit dan volgt: *dat de tweede en derde magten van de termen eener evenredigheid insgelijks evenredig zijn.* De volgende stellingen zijn betrekkelijk tot de zoogenaamde omgekeerde en zamengestelde evenredigheden.

§. 149. XIX. Bepaling. Eene grootheid A is van eene grootheid P, of van meer andere grootheden P, Q, R, *enz.*, afhankelijk, wanneer, die grootheid P, of die grootheden P, Q en R, waarvan zij afhangt, andere waarden verkrijgende, ook tevens de grootheid A, volgens eene bestendige wet, daardoor insgelijks andere waarden verkrijgt.

§. 150. XX. Bepaling. Wanneer eene grootheid A van eene andere P zoodanig afhangt, dat twee onderscheidene waarden, welke aan P gegeven worden, evenredig zijn aan de waarden, welke A daardoor verkrijgt; dan zegt men: *A is in dezelfde reden van P, of A is evenredig aan P.*

Omdat, bij voorbeeld, de geldwaarden van twee onderscheidene hoeveelheden van dezelfde waar met die hoeveelheden, in maten of gewigten uitgedrukt, evenredig zijn, zegt men: *de geldwaarde van eene zekere waar, van dezelfde deugd en hoedanigheid, is evenredig aan derzelver hoeveelheid.*

§. 151. XXI. Bepaling. Maar hangt de grootheid A van de grootheid P zoodanig af, dat twee onderscheidene waarden van P, in eene omgekeerde orde genomen, evenredig zijn aan de overëënkomstige waarden, welke A verkrijgt, (dat is de tweede waarde van P tot de eerste, gelijk de eerste waarde van A tot de tweede,) dan zegt men: *A staat in de omgekeerde reden van P*, om daardoor te kennen te geven, *dat de waarden van A in eene omgekeerde reden van de overëënkomstige waarden van P zijn.*

Tot

Tot het vervaardigen van zeker werk, wordt een zeker getal arbeiders, en eenen bepaalden tijd, waarin zij hetzelve kunnen volbrengen, vereischt; wordt nu het getal arbeiders grooter genomen; dan zal 'er, in diezelfde reden, minder tijd noodig zijn, om dit werk te volbrengen: men drukt zulks uit, door te zeggen: *het aantal arbeiders is in de omgekeerde reden van den tijd.*

§. 152. I. Gevolg. *Elke regte evenredigheid* $A:B=P:Q$, (want aldus noemen wij, in het vervolg, wanneer het duidelijkshalve noodig zal zijn, eene gewone, en, zoo als in de XI. Bepaling gezegd is, welgeordende evenredigheid,) *kan in eene omgekeerde*

$$A:B \text{ omgek.} = Q:P$$

en elke omgekeerde in eene regte veranderd worden, door de termen van éėne der twee redens omtekeeren; of, in die reden, den voorgaanden met den volgenden term te verwisselen.

§. 153. II. Gevolg. In de Rekenkunst wordt bewezen: dat de waarden der breuken, welke de éénheid tot teller hebben, steeds, in dezelfde reden, kleiner of grooter worden, naar mate men den noemer grooter of kleiner stelt: het is daarom, dat men, de getallen, welke de betrekking van twee grootheden uitdrukken, in plaats van de grootheden zelve nemende, voor de omgekeerde evenredigheid

$$A:B \text{ omgek.} = P:Q$$

nemen kan de regte evenredigheid

$$A:B=\frac{1}{P}:\frac{1}{Q}$$

welke laatste dan gewonelijk gelezen wordt: *A is tot B in de omgekeerde reden van P tot Q, en dat, om uittedrukken: dat eene grootheid A in de omgekeerde reden van eene grootheid P is, zulks aldus, door het teeken* $A::\frac{1}{P}$, *kan te kennen gegeven worden.*

XI. Stelling.

§. 154. *Wanneer, in twee evenredigheden,* $A:B=C:D$ *en* $A:P=C:Q$, *de voorgaande termen in de eerste, dezelfde zijn als, of gelijk zijn aan, de voorgaande termen in de tweede; dan zullen de volgende termen der eerste evenredigheid evenredig zijn met de volgende termen der tweede, de laatste in dezelfde rangorde als de eerste genomen zijnde.* Dat is: $B:D=P:Q$.

Betoog. Want, uit de gestelde evenredigheden, volgt: (*VII. Stell.*) $A:C=B:D$ en $A:C=P:Q$; derhalve zal (*I. Stell.*) $B:D=P:Q$ zijn.

XII. Stelling.

§. 155. *En, wanneer de volgende termen, in de eerste van dezelfde evenredigheden, dezelfde zijn als, of gelijk zijn aan, de volgende termen der tweede; dan zullen de voorgaande termen der eerste evenredigheid evenredig zijn aan de voorgaande termen der tweede, wel verstaande, in dezelfde rangorde genomen. Dat is, wanneer* $A:B=C:D$ *en* $P:B=Q:D$ *is; dan zal* $A:C=P:Q$ *zijn.*

Betoog. Want (*VII. Stell.*) $A:C=B:D$, en $P:Q=B:D$ zijnde, zal (*I. Stell.*) $A:C=P:Q$ zijn.

XIII. Stelling.

§. 156. *Indien de uiterste termen van eene evenredigheid,* $A:B=C:D$*, gelijk zijn aan de uiterste termen van eene andere evenredigheid,* $A:P=Q:D$*; dan zal de tweede term der eerste evenredigheid tot den tweeden term der tweede, omgekeerd, zijn, als de derde term der eerste tot den derden term der tweede evenredigheid; dat is,* $B:P=\frac{1}{C}:\frac{1}{Q}$.

Betoog. Want, uit de gestelde evenredigheden, volgt: (*II. Gev. XXI. Bep.*)

$$A:B \text{ omgek.} = D:C = \frac{1}{D}:\frac{1}{C}$$

$$A:P \text{ omgek.} = D:Q = \frac{1}{D}:\frac{1}{Q}$$

volgens de *XI. Stelling*, zal uit deze de evenredigheid $B:\frac{1}{C}=P:\frac{1}{Q}$ volgen; en dan zal (*VII. Stell.*) $B:P=\frac{1}{C}:\frac{1}{Q}$ zijn.

XIV. Stelling.

§. 157. *Indien de middelste termen van twee evenredigheden,*

 $A:B$

$A:B = C:D$ en $P:B = C:Q$ dezelfde of gelijk zijn; dan ſtaat de eerſte term van de eerſte evenredigheid tot den eerſten term van de tweede, omgekeerd, als de laatſte term van de eerſte tot den laatſten term van de tweede: dat is $A:P = \frac{1}{D} : \frac{1}{Q}$.

Betoog. Want, uit de geſtelde evenredigheden, volgt: (*II. Gev. XXI. Bep.*)

$$A:B \text{ omgek.} = D:C = \frac{1}{D} : \frac{1}{C}$$

$$P:B \text{ omgek.} = Q:C = \frac{1}{Q} : \frac{1}{C}$$

volgens de *XII. Stelling*, is dan $A:\frac{1}{D} = P:\frac{1}{Q}$, en (*VII. Stell.*) $A:P = \frac{1}{D} : \frac{1}{Q}$.

§. 158. XXII. Bepaling. Wanneer eene grootheid A van twee andere grootheden, P en Q, zoodanig afhangt, dat zij, wanneer éene van beiden, P of Q, dezelfde waarde behoudt, altijd evenredig blijft aan de waardij, welke de andere dezer twee grootheden, Q of P, verkrijgt; dan zegt men, om deze afhankelijkheid kunstmatig uittedrukken: *de grootheid A is in de zamengeſtelde reden van de grootheden P en Q.*

In gelijke tijden, zijn, bij voorbeeld, de winſten aan de hoofdſommen, en, voor gelijke hoofdſommen, de winſten aan de tijden evenredig: men zal daarom zeggen: *de winſten zijn in de zamengeſtelde reden van de hoofdſommen en de tijden.*

§. 159. XXIII. Bepaling. Hangt eene grootheid A van eenige grootheden, P, Q, R, *enz.* zoodanig af, dat zij, wanneer alle deze grootheden P, Q, R, *enz.* tot op éene na, dezelfde blijven, evenredig is aan de grootheid, die van waarde verandert; dan zal men deze afhankelijkheid uitdrukken, door te zeggen: *de grootheid A is in de zamengeſtelde reden van de grootheden, P, Q, R, S, enz., waarvan zij afhangt.*

§. 160 I. Aanmerking. Het product van twee of meer getallen hangt van dezelve zoodanig af, dat het in dezelfde reden, als één dezer getallen, (alle andere factoren dezelfde blijvende,) grooter of kleiner wordt: men kan dan zeggen: dat het product van eenige factoren in de zamengeſtelde reden van diezelfde factoren is: daar nu de waarde de van een product door dadelijke multiplicatie gevonden wordt, is men gewoon, (nemende getallen voor de grootheden, welker betrekking zij uitdrukken,) om de grootheden, in welker zamengestelde reden een andere grootheid staat, door het teeken van multiplicatie aan elkander te verbinden. Aldus zal $A :: P \times Q$ zeggen: *A is in de zamengestelde reden van P en Q; dat is: de waarden, welke A verkrijgt, zijn in de zamengestelde reden van de waarden, welke P, en van de waarden, welke Q verkrijgt.* Op dezelfde wijze zal $A :: P \times Q \times R$; $A :: P \times Q \times R \times S$; *enz.* moeten verstaan worden.

§. 161. II. Aanmerking. Uit dit alles blijkt nu, waarom, wanneer in de Reken en Wiskunst, zie §. 682, I. C., de overëënkomstige termen van twee redens, die in getallen gegeven zijn, als $3:5$ en $7:13$, met elkander vermenigvuldigd worden, de producten, 21 en 65, gezegd worden in de zamengestelde reden van 3 tot 5, en van 7 tot 13 te zijn.

§. 162. XXIV. Bepaling. Wanneer de grootheid A van de grootheden P en Q zoodanig afhangt, dat, Q standvastig blijvende, A in de regte reden van P, en, P standvastig blijvende, A in de omgekeerde van Q verandert; dan zal men zeggen: *A is in de zamengestelde reden van de regte reden van P en van de omgekeerde reden van Q.*

§. 163. Aanmerking. Omdat een gebroken in dezelfde reden grooter wordt, indien men zijn teller kleiner neemt, en in dezelfde reden kleiner wordt, indien men zijn noemer grooter neemt; zal men deze verklaarde afhankelijkheid aldus $A :: \frac{P}{Q}$ uitdrukken. Men kan dit alles verder uitbreiden; vergelijk I. C. §. 683—§. 687.

§. 164. XXV. Bepaling. Hangt eene grootheid A van eene grootheid P zoodanig af, dat zij altijd in dezelfde reden is, als de tweede magt van het getal, dat de betrekking van P uitdrukt; dan zegt men: *de grootheid A is in de verdubbelde reden van de grootheid P.*

§. 165. XXVI. Bepaling. Doch, is deze afhankelijkheid zoodanig gesteld, dat A altijd evenredig is aan de derde magt van het getal, dat de betrekking van P uitdrukt; dan zegt men: *de grootheid A is in de verdriedubbelde reden van P.* Vergelijk verder I. C. §. 694. *et seq.*

XV. Stelling.

§. 166. *Indien* $A:B=P\times R:Q\times S$ *is; of de grootheden A en B in de zamengestelde reden van P tot Q, en van R tot S zijn, en wederom* $P:Q=C:D$ *is; dan zal* $A:B=C\times R:D\times S$ *zijn.*

Betoog. Want, indien men de termen der evenredigheid, $P:Q=C:D$, met $R:S=R:S$ vermenigvuldigt; dan zal (*IV. Eigensch.* §. 148.) $P\times R:Q\times S=C\times R:D\times S$ zijn; nu is $A:B=P\times R:Q\times S$ (*onderst.*), derhalve (*I. Stell.*) ook $A:B=C\times R:D\times S$.

XVI. Stelling.

$$\begin{array}{l} A:B=P:Q \\ B:C=R:S \\ C:D=T:U \\ D:E=V:W \end{array}$$

§. 167. *Wanneer, in eenige evenredigheden,* (als hiernevens uitgedrukt,) *de laatste term van de eerste reden van elke evenredigheid gelijk is aan den eersten term van de eerste reden der volgende evenredigheid; dan zal de eerste term van de reden der eerste evenredigheid tot den laatsten term van de eerste reden der laatste evenredigheid in eene reden zijn, welke zamengesteld is uit de tweede redens dezer evenredigheden.* Dat is:

$$A:C=P\times R:Q\times S$$
$$A:D=P\times R\times T:Q\times S\times U$$
$$A:E=P\times R\times T\times V:Q\times S\times U\times W.$$

Betoog. Want, indien men de overëënkomstige termen van de twee eerste evenredigheden vermenigvuldigt; dan zijn (*IV. Eigensch.* §. 148) de producten evenredig:' dat is $A\times B:B\times C=P\times R:Q\times S$: deelt men nu de termen der eerste reden door B; zal (*III. Eigensch.* §. 148.) $A:C=P\times R:Q\times S$ zijn. Op dezelfde wijze betoogt men de volgende evenredigheden.

*

DER-

DERDE BOEK.

Over de Parallelogrammen, Regthoeken en Vierkanten, de Inhouden der regtlijnige Figuren, en het Theorema *van* PYTHAGORAS.

---

§. 168. I. BEPALING. *Fig.* 49. Een *parallelogram ABCD* is een vierhoek, welks tegen over elkander ſtaande zijden evenwijdig zijn; namelijk *CD* aan *AB*, en *BC* aan *AD*. Men kan ééne van derzelver zijden, bij voorbeeld, *AB*, tot *baſis* nemen; de zijde *CD*, welke dan tegen over die baſis ſtaat, wordt de *bovenzijde* genoemd, en de twee andere zijden, *AD* en *BC*, dragen dan den naam van *opſtaande zijden*. Men kan voorts, in een parallelogram, ſlechts twee hoekpuntslijnen, *AC* en *BD*, trekken: de hoeken, welker hoekpunten deze hoekspuntslijnen veréénigen, worden *tegen over elkander ſtaande hoeken* genoemd.

I. STELLING. *Fig.* 49.

§. 169. *Elke hoekpuntslijn, AC of BD, van een parallelogram, deelt hetzelve in twee gelijke en gelijkvormige driehoeken, ABC en ACD, of ABD en BCD, en deszelfs overſtaande zijden en hoeken zijn gelijk.*

BETOOG. Want de hoekpuntslijn *AC* is eene gemeenſchappelijke zijde der driehoeken *ABC* en *ADC*; omdat nu (*onderſt.*) *CD* aan *AB*, en *AD* aan *BC* evenwijdig zijn, is (*XXVI. Stell. I. B.*) hoek *BAC* = hoek *ACD*, en hoek *ACB* = hoek *DAC*; de driehoeken *ABC* en *ADC*, zijn (*IX. Stell. I. B.*) derhalve gelijk en gelijkvormig. Men zal, op dezelfde wijze, betoogen: dat de hoekpuntslijn *BD* het parallelogram in de gelijke en gelijkvormige driehoeken *ABD* en *BCD* verdeelt. Uit de gelijkvormigheid dezer driehoeken volgt nu de gelijkheid der overſtaande zijden en hoeken van zelve.

§. 170. Gevolg. Het blijkt ook, uit de beschouwing der driehoeken, ABE en CDE, *dat de twee hoekpuntslijnen van een parallelogram elkander midden door deelen.* Zijnde $AE = EC$, en $BE = ED$.

II. Stelling. (*Het omgek. der voorg.*) *Fig.* 49.

§. 171. *Wanneer, of de overstaande zijden, of de overstaande hoeken van eenen vierhoek* $ABCD$ *gelijk zijn; dan is die vierhoek noodzakelijk een parallelogram.*

Betoog *van het eerste.* Laat eene hoekpuntslijn AC getrokken worden; dan zijn (omdat $AB = CD$ en $BC = AD$ gesteld wordt, en $AC = AC$ is,) de driehoeken ABC en ACD (*XIII. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig; daarom is hoek $BAC =$ hoek ACD, en hoek $BCA =$ hoek CAD; de lijnen AB en CD, alsmede de lijnen AD en BC, worden dan, door eene derde lijn AC, zoodanig gesneden, dat de verwisselende hoeken gelijk zijn; de zijde CD is dan (*XXVII. Stell. I. B.*) evenwijdig aan AB, en BC aan AD, en de vierhoek $ABCD$ is bijgevolg (*I. Bep.*) een parallelogram.

Betoog *van het tweede.* Omdat, uit de onderstelling, hoek $A =$ hoek C, en hoek $B =$ hoek D is; zal (*VII. Ax.*) hoek $A +$ hoek $B =$ hoek $C +$ hoek D zijn; hier bij tellende, hoek $A +$ hoek B; zal (*VII. Ax.*) tweemaal de som der hoeken A en B gelijk aan de som van al de hoeken des vierhoeks zijn; dat is, (*Gev. XIX. Stell. I. B.*) gelijk aan vier regte hoeken: de som der hoeken A en B is dan (*XII. Ax.*) gelijk aan twee regte hoeken; de zijde AD is dan (*XXVII. Stell. I. B.*) evenwijdig aan BC. Op dezelfde wijze volgt: dat AB evenwijdig aan CD is: de vierhoek $ABCD$ is dan, (*I. Bep.*) ook in dit geval, een parallelogram.

§. 172. II. Bepaling. *Fig.* 50. Een *regthoek* $ABCD$ (met eenen *regten hoek* niet te verwarren,) is een parallelogram, welks hoeken, A, B, C en D, alle regt zijn.

Eigenlijk is het genoeg, dat men zegt: *hetwelk eenen regten hoek heeft:* want, omdat de hoeken, welke aan dezelfde zijde liggen, de één het supplement van den anderen is, brengt het regt zijn van eenen der hoeken dat der anderen noodzakelijk mede.

§. 173. III. Bepaling. *Fig.* 51. Een *vierkant*, of *quadraat* $ABCD$, is een *regthoekig gelijkzijdig parallelogram*, of of een gelijkzijdige regthoek. — Men zegt ook wel: dat het een vierhoek is, welke vier regte hoeken en vier gelijke zijden heeft.

§. 174. IV. Bepaling. Een ſcheefhoekig parallelogram kan gelijkzijdig zijn: en, in dit geval, wordt het *rhombus* genoemd.

§. 175. Aanmerking. *De ſcheefhoekige parallelogrammen zijn van de regthoekige daarin onderſcheiden, dat de hoekpuntslijnen van de laatſte gelijk en die van de eerſte ongelijk zijn.* Met behulp der *X en XI. Stell. I. B.* zal men gemakkelijk betoogen, dat de hoekpuntslijnen van een' regthoek en vierkant gelijk zijn, en dat de hoekpuntslijn, welke de hoekpunten van de ſcherpe hoeken van een ſcheefhoekig parallelogram vereënigt, langer is dan die, welke de hoekpunten der ſtompe hoeken zamenvoegt.

§. 176. Berigt. Wanneer wij, in het vervolg, het woord *parallelogram* bezigen, begrijpen wij, onder hetzelve, tevens den regthoek en het vierkant. Alles, wat van de eerſte figuur bewezen is, moet gehouden worden ook van de twee laatſte bewezen te zijn.

§. 177. V. Bepaling. *Fig.* 52. Een parallelogram $ABCD$ wordt gezegd, onder twee lijnen P en Q en eenen hoek R, gemaakt of zamengeſteld te zijn; indien twee van deszelfs zijden, AB en BC, aan deze lijnen P en Q, en de hoek B, welken deze zijden bepalen, aan dezen hoek R gelijk zijn. — Omdat voorts al de hoeken van eenen regthoek regt zijn, zegt men: dat een regthoek, onder twee lijnen, P en Q; gemaakt is, wanneer twee zijner zijden aan deze lijnen gelijk zijn. — Eindelijk het vierkant, op eene lijn P beſchreven, is een vierkant, welks zijden de lengte van die lijn P hebben.

§. 178. VI. Bepaling. *Fig.* 50. Twee aan elkander liggende zijden, AB en BC, van eenen regthoek worden ook wel deszelfs *lengte* en *breedte* genoemd, zonder deze benamingen aan de langſte of kortſte zijde, in het bijzonder, toeteëigenen. *De lengte van een vierkant is dan gelijk aan deszelfs breedte.*

§. 179. VII. Bepaling. Door den *inhoud* eener figuur, verſtaat men de geheele ruimte, welke tusſchen de grenzen van die figuur begrepen is.

§. 180. Gevolg. *Omdat gelijke en gelijkvormige figuren (I. Ax.) gelijke ruimten hebben, zijn bijgevolg derzelver inhouden gelijk*

§. 181. Aanmerking. *Offchoon gelijke en gelijkvormige figuren gelijk van inhoud zijn, zijn nogtans niet alle figuren, die gelijke inhouden hebben, gelijkvormig, dat wil zeggen, hebben niet altijd dezelfde gedaante, pasſen niet altijd op elkander:* zulks blijkt ten klaarſte, wanneer men de deelen 1 en 2 van de 53 figuur verplaatst, en, gelijk in de 54 figuur wordt afgebeeld, aan elkander voegt.

III. Stelling. *Fig.* 55.

§. 182. *Parallelogrammen, $ABCD$ en $EFGH$, welke, onder gelijke zijden, AB, AD en EF, EH, en gelijke hoeken, A en E, zijn zamengeſteld, zijn gelijk en gelijkvormig.*

Betoog. Men trekke de hoekpuntslijnen BD en FH; dan is (*onderſt.*) $AB = EF$; $AD = EH$; en hoek $A =$ hoek E: de driehoeken ABD en EFH zijn dan (*X. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig; derhalve ook (*I. Stell.*) de driehoeken BCD en FGH; en eindelijk de parallelogrammen, $ABCD$ en $EFGH$, zelve.

IV. Stelling. *Fig* 56.

§. 183. *Wanneer ééne der zijden AB van een parallelogram $ABCD$ in een zeker aantal gelijke deelen verdeeld is, dan zullen de lijnen, EH, FI, GK, welke door de deelpunten E, F, G, evenwijdig aan de andere zijden AD of BC des parallelograms getrokken worden, hetzelve in even zoo vele gelijke en gelijkvormige parallelogrammen, $AEHD$, $EFIH$, $FGKI$, $GBCK$, verdeelen, als 'er deelen in deze zijde AB genomen zijn.*

Betoog. Want, wegens de onderſtelde evenwijdigheid der lijnen EH, FI, GK, zijn (*I. Bep.*) de deelen der figuur parallelogrammen, welke (*I. Stell.* en *onderſt.*) onder gelijke zijden en (*XXVI. Stell. I. B.*) onder gelijke hoeken zijn zamengeſteld, en bijgevolg (*III. Stell.*) gelijk en gelijkvormig zijn; zijnde voorts deze gelijke parallelogrammen klaarblijkelijk zooveel in aantal, als 'er deelen in de zijde AB genomen zijn.

V.

V. STELLING. *Fig.* 57.

§. 184. *Wanneer twee aan elkander liggende zijden, AB en AD, van een parallelogram ABCD, het eerste AB in p, en het tweede AD in q gelijke deelen verdeeld is, en, door de deelpunten, E, F, G, H, lijnen, evenwijdig aan de zijde AD; en door de deelpunten, I, L, N, lijnen, evenwijdig aan AB getrokken worden; dan zal het parallelogram ABCD in een aantal van $p \times q$ gelijke en gelijkvormige parallelogrammen AEPI, EFQP, enz. verdeeld zijn.*

BETOOG. Want het parallelogram *ABCD* wordt, door de lijnen, welke door *E*, *F*, *enz.* evenwijdig aan *AD* getrokken worden, (*IV. Stell.*) in *p* gelijke en gelijkvormige parallelogrammen; en elk dezer wordt wederom, door de evenwijdige *IK*, *LM*, *NO*, in *q* gelijke parallelogrammen verdeeld: het geheel is derhalve in $p \times q$, elk aan *AEPI* gelijke en gelijkvormige parallelogrammen, verdeeld.

VI. STELLING. *Fig.* 58.

§. 185. *Wanneer de lengte EF van eenen regthoek EFGH tot de zijde AB van een vierkant ABCD in dezelfde reden staat, als een getal p tot een getal q; en de breedte FG van dienzelfden regthoek tot de zijde BC van datzelfde vierkant, als het getal r tot het getal s; dan zal de inhoud van den regthoek EFGH tot dien van het vierkant ABCD, in dezelfde reden zijn, als het product $p \times r$ tot het product $q \times s$.*

BETOOG. Want, omdat $EF : AB = p : q$ is, zullen 'er (*Aanm. IX. Bep. II. B.*) in *EF* een aantal van *p* en in *AB* een aantal van *q* gelijke deelen kunnen genomen worden; en omdat $FG : BC = r : s$ is, zullen 'er in *FG* een aantal van *r*, en in *BC* een aantal van *s* gelijke deelen moeten bestaan: indien men nu, zoowel in den regthoek, als in het vierkant, door de deelpunten, evenwijdige lijnen aan de zijden trekt; dan zullen 'er (*V. Stell.*) in den regthoek *EFGH* een aantal van $p \times r$, en in het vierkant *ABCD* een aantal van $q \times s$ gelijke deelen of regthoeken ontstaan: gevolgelijk (*Aanm. IX. Bep. II. B.*) zal de inhoud van den regthoek *EFGH* tot den inhoud van het vierkant *ABCD* zijn, als het getal $p \times r$ tot het getal $q \times s$.

§. 186. I. GEVOLG. Men zal dan, wanneer de betrekkingen van elke zijde des regthoeks tot de zijde van het vierkant, in getal, gegeven is, altijd de betrekking van de inhouden dezer figuren tot elkander, in getal, kunnen bepalen: zijn nu de gegevene betrekkingen meetbaar, dan is ook die der inhouden meetbaar; zoo niet, zal de betrekking van den regthoek tot het vierkant slechts ten naaste bij in getal bepaald kunnen worden.

§. 187. II. Gevolg. Omdat

$$\textit{regth. } EFGH : \textit{vierk. } ABCD = p \times r : q \times s$$

is, zal (*V. Stell. II. B.*)

$$qs \times \textit{regth. } EFGH = pr \times \textit{vierk. } ABCD$$

zijn; en, wanneer men deze vergelijking door het getal qs deelt, zal (*XII. Ax.*)

$$\textit{regth. } EFGH = \frac{pr}{qs} \times \textit{vierk. } ABCD$$

zijn: nu is $\frac{pr}{qs} = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s}$; de breuken $\frac{p}{q}$ en $\frac{r}{s}$, drukken nu de betrekking van de zijden des regthoeks tot de zijde van het vierkant uit, en zijn, of eigenlijke breuken, of geheele getallen, naar dat de zijde van het vierkant een onevenmatig of evenmatig deel van de zijden van den regthoek is; *wanneer men derhalve de geheele of gebrokene getallen, welke de verhouding, of de betrekking, van de zijde eens vierkants op of tot de twee zijden van eenen regthoek uitdrukken, met elkander vermenigvuldigt, zal het product de verhouding, of de betrekking, van dit vierkant op of tot dien regthoek bepalen.*

§. 188. III. Gevolg. Omdat dan de betrekking van eenen gegeven regthoek tot een gegeven vierkant, door de vermenigvuldiging van geheele of gebrokene getallen gevonden wordt, zegt men, bij verkorting: *de inhoud van eenen regthoek is gelijk aan deszelfs lengte met deszelfs breedte vermenigvuldigd*, eene spreekwijs, welke altijd, als in het voorgaande gevolg, moet uitgelegd worden.

§. 189. IV. Gevolg. *De inhouden der vierkanten, beschreven op lijnen, welke in reden, als de getallen*, 1, 2, 3, 4, *enz.* n, *of* p *zijn, staan tot elkander, als de tweede magten dezer getallen, als* 1, 4, 9, 16, *enz.* n^2, *of* p^2.

§. 190. V. Gevolg. *De inhoud van eenen regthoek, in vierkante éénheden, en de lengte van ééne zijner zijden in lengte éénheden gegeven zijnde, zal men de andere zijde des regthoeks, in éénheden der lengte maat, vinden, wanneer men deszelfs gegevenen inhoud door de gegevene zijde deelt.*

§. 191.

§. 191. VI. Gevolg. *De inhoud van een vierkant, in vierkante éénheden, gegeven zijnde, zal men vinden, hoeveelmaal de éénheid der lengte maat in de zijde van dit vierkant begrepen is, door, uit dit gegeven getal vierkante éénheden, den vierkants wortel te trekken.* Zie, wegens deze worteltrekking, I. C. XXXVI. *Les.*

§. 192. Aanmerking. De Meetkunstenaars houden, omdat gelijke vierkanten in de lengte en breedte aan elkander sluiten, het vierkant als de natuurlijke en eigenaardige maat der vlakken, en verkiezen, onder alle vierkanten, het vierkant, dat op de éénheid van de lengte maat beschreven is. De éénheid van de lengte maat is de Meter (zie I. C. XXVI. *Les*); die der vlakte maat is derhalve het vierkant, op den meter beschreven. Men noemt dit vierkant *vierkanten meter*, welke in honderd vierkante decimeters; de vierkante decimeter in honderd vierkante centimeters, de vierkante centimeter in honderd vierkante millimeters verdeeld wordt. Laat nu, *fig.* 58, $EF = 17^m, 37$ en $GF = 6^m, 83$ zijn, dan zal de inhoud van den regthoek $EFGH = EF \times GF = 17^m, 37 \times 6^m, 83 = 118, 6371$ vierkante meters, of 118 vierkante meters, 63 vierkante decimeters en 71 vierkante centimeters zijn.

§. 193. VIII. Bepaling. *Fig.* 58. In het vervolg, zullen wij, om den inhoud van een' regthoek $EFGH$ uittedrukken, de aan elkander liggende zijden, EF en FG, van dien regthoek door het teeken van multiplicatie verbinden. Alzoo zal $EF \times FG$ gelezen worden: inhoud van den regthoek, welke de lijnen EF en FG tot zijden heeft. Ook zal AB^2 gelezen worden: inhoud van het vierkant, op de lijn AB beschreven.

§. 194. Uit het betoogde, in de voorgaande stellingen, kan men nog de volgende waarheden afleiden.

§. 195. VII. Gevolg. *Fig.* 59. Indien men, in eenen regthoek $ABCD$, eene lijn EF, evenwijdig aan ééne der zijden AD of BC trekt; dan wordt hij (*I. Bep.*) in twee regthoeken $AEFD$ en $BEFC$ verdeeld, welker som aan den regthoek $ABCD$ gelijk is; nu is (*VIII. Bep.*) regth. $ABCD = AB \times AD$; regth. $AEFD = AE \times AD$; en regth. $BEFC = BE \times BC = BE \times AD$; derhalve zal

$$AB \times AD = AE \times AD + BE \times AD.$$

Men kan hieruit opmaken; *dat de regthoek, onder twee lijnen, A en B, gelijk is aan de som der regthoeken, welke onder*

der de deelen van ééne der lijnen A, als lengte, gemaakt zijn, en welke alle de andere lijn B, tot breedte, hebben.

§. 196. VIII. Gevolg. *Fig.* 59. Wanneer $AD = AB$ genomen wordt, dan verandert de vergelijking van het voorgaande gevolg in $AB^2 = AB \times AE + AB \times BE$. *Het vierkant, dat op eene lijn beschreven is, is dan gelijk aan de som der regthoeken, die alle deze lijn, tot lengte, en derzelver afzonderlijke deelen, tot breedte, hebben.*

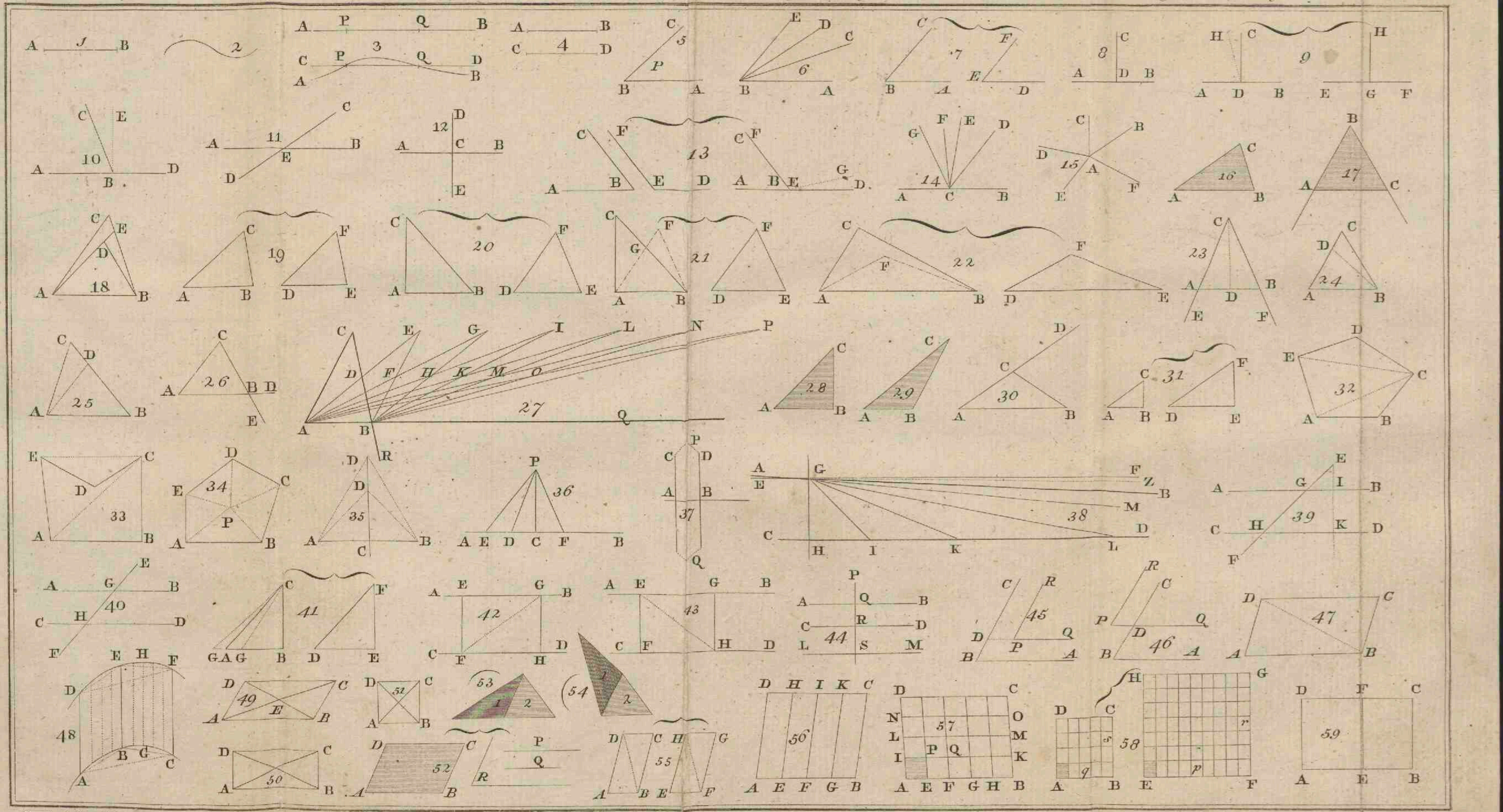
§. 197. IX. Gevolg. *Fig.* 59. Neemt men $AD = AE$; dan wordt de vergelijking $AB \times AE = AE^2 + AE \times EB$. *De regthoek, onder eenige lijn en ééne van derzelver deelen, is dan gelijk aan het vierkant van dit deel, met den regthoek van de deelen dezer lijn, te zamen genomen.*

§. 198. IX. Bepaling. De hoogte van een parallelogram is de afstand van eenig punt der bovenzijde tot de basis, of derzelver verlengde. Insgelijks is de hoogte van eenen driehoek de afstand van het toppunt tot de basis, of het verlengde van dezelve. Die hoogten zijn derhalve (*XXXII. Bep. I. B.*) de loodlijnen, welke, uit eenig punt van de bovenzijde des parallelograms, of uit het toppunt des driehoeks, op de basis of het verlengde van dezelve vallen.

VII. Stelling. *Fig.* 60 *en* 61.

§. 199. *De inhouden van alle parallelogrammen, ABCD en ABEF, welke op dezelfde basis AB staan, en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen, AB en DE, geplaatst of besloten zijn, zijn gelijk.*

Betoog. Omdat $ABCD$ en $ABEF$ (*onderst.*) parallelogrammen zijn, zijn (*I. Bep.*) de zijden AD en AF evenwijdig aan de overstaande BC en BE; de hoeken DAF en CBE zijn derhalve (*XXX. Stell. I. B.*) gelijk, en de driehoeken AFD en BEC (*X. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig, en hebben (*VII. Bep.*) eenen gelijken inhoud. Wanneer men nu in, *fig.* 60, bij elken dezer driehoeken dezelfde vierhoekige figuur $ABCF$ optelt, zullen (*VII. Ax.*) de sommen gelijk zijn; dat is het parallelogr. $ABCD =$ aan het parallelogr $ABEF$. Maar wanneer men, in *fig.* 61, van diezelfde gelijke driehoeken, AFD en BEC, denzelfden driehoek CFG afneemt; dan zullen de over-



Jac. de Gelder delin. *J. A. Zurcher sculp.*

overblijvende ſtukken, (*VIII. Ax.*) namelijk de vierhoeken, $AGCD$ en $BGFE$, ook gelijk zijn: bij elk dezer laatſten denzelfden driehoek ABG optellende, zal (*VII. Ax.*) wederom parallelogr. $ABCD =$ parallelogr. $ABEF$ zijn.

§. 200. Aanmerking. Wij hebben, in onze *Handleiding tot de Beſch. en Werkd. Meetk.* §. 272, aangetoond: hoe men één der twee parallelogrammen in ſtukken verdeelen kan, welke, door eene geſchikte verplaatſing, de ruimte van het ander parallelogram kunnen vervullen. Het is nuttig, dat men de waarheid eener ſtelling, waarop bijna het geheele zamenſtel der Meetkunst berust, ook, op deze wijze, proefmatig aan het verſtand van den eerstbeginnenden doe gevoelen.

§. 201. I. Gevolg. Omdat parallelogrammen, welke gelijke baſes en gelijke hoogte hebben, (zie *IX. Bep.*) klaarblijkelijk op dezelfde baſis en tusſchen dezelfde evenwijdige lijnen kunnen geplaatst worden, kan men, uit het betoogde, onmiddelijk beſluiten: *dat de inhouden van parallelogrammen, die gelijke baſes en gelijke hoogten hebben, aan elkander gelijk zijn.*

§. 202. II. Gevolg. Onder alle parallelogrammen, die gelijke baſes en gelijke hoogten hebben, is 'er één, dat regthoekig is: in dezen regthoek wordt de baſis de lengte, en de breedte de hoogte; omdat nu de inhoud van eenen regthoek (*III. Gev. VI. Stell.*) gelijk is aan zijne lengte met zijne breedte vermenigvuldigd, *zal de inhoud van een parallelogram gelijk zijn aan de baſis, vermenigvuldigd met deszelfs hoogte.*

§. 203. Bij voorbeeld, de baſis $AB = 18^m,3$ en de hoogte $= 11^m,3$ zijnde, zal de inhoud $= 206,79$ vierkante meters bedragen.

VIII. Stelling. *Fig.* 62.

§. 204. *De inhoud van eenen driehoek ABC, is gelijk aan de helft van den inhoud van eenen regthoek $ABDE$, welke, met dien driehoek, dezelfde baſis AB en dezelfde hoogte CG heeft.*

Betoog. Wanneer de regthoek $ABDE$, en de driehoek ABC op dezelfde baſis ſtaan, dan kunnen zij (*XXVIII. St. I. B. en IX. Bep.*) niet dezelfde hoogte hebben, indien het toppunt C des driehoeks ABC niet in de bovenzijde ED des regthoeks, of derzelver verlengde, ge-

le-

legen is: men trekke dan AF evenwijdig aan BC; dan is $ABCF$ (*I. Bep. en onderst.*) een parallelogram, dat (*VII. Stell.*) gelijk is aan het regthoekig parallelogram $ABDE$: nu is (*I. Stell.*) de inhoud van den driehoek ABC gelijk aan de helft van den inhoud van het parallelogr. $ABCF$; derhalve (*IV. Ax.*) de inhoud des driehoeks ABC gelijk aan de helft van den inhoud des regthoeks $ABDE$.

§. 205. GEVOLG. *Fig.* 62. Omdat de inhoud van den regthoek $ABDE = AB \times AE = AB \times CG$ is, zal de inhoud van den driehoek $ABC = \frac{1}{2} AB \times CG$ zijn. *De inhoud van eenen driehoek is dan gelijk aan de helft van zijne basis vermenigvuldigd met zijne hoogte.*

§. 206. Laat, bij voorbeeld, $AB = 16^m,5$, $CG = 18^m,4$ zijn; dan is inhoud driehoek $ABC = \frac{1}{2} AB \times CG = \frac{1}{2} \times 16,5 \times 18,4 = 151,8$ vierkante meters.

IX. STELLING.

§. 207. *De inhouden van driehoeken, die gelijke bases en gelijke hoogten hebben, zijn gelijk.*

BETOOG. Want deze zijn (*VIII. Stell.*) gelijk aan de helft van de regthoeken, die op dezelfde basis staan en gelijke hoogte hebben; daar nu (*III. Stell.*) deze regthoeken gelijk zijn, zijn ook (*IV. Ax.*) de driehoeken, die gelijke bases en gelijke hoogten hebben, gelijk.

X. STELLING. (*Het omgek. der voorg.*) *Fig.* 63.

§. 208. *De toppunten, C en D, der driehoeken, ABC en ABD, die op dezelfde basis AB staan, en gelijke inhouden hebben, liggen in eene lijn CD, die evenwijdig aan de gemeenschappelijke basis AB loopt.*

BETOOG. Want, indien CD niet evenwijdig is aan AB, dan zal men door C eene lijn CE, evenwijdig aan AB, kunnen trekken; indien men dan BD tot aan E verlengt, en de lijn AE trekt; dan zal (*IX. Stell.*) driehoek $ABE =$ driehoek ABC zijn: maar driehoek ABC is (*onderst.*) $=$ driehoek ABD; derhalve zal (*IV. Ax.*) driehoek $ABD =$ driehoek ABE; dat is het gedeelte aan het geheel gelijk zijn; daar zulks nu (*II. Ax.*) onmogelijk is, kan CE, of eenige andere dan de lijn CD, niet evenwijdig aan AB zijn. De lijn CD is derhalve evenwijdig aan AB.

XI.

XI. STELLING. *Fig.* 64.

§. 209. *De inhouden der parallelogrammen, die gelijke hoogte hebben, ſtaan tot elkander in dezelfde reden als hunne baſes.* Dat is:

$$parall.\ ABCD : parall.\ EFGH = AB : EF.$$

BETOOG. I. GEVAL. Indien de baſes AB en EF onderling meetbaar zijn; dan hebben zij (*VII. Bep. II. B.*) eene gemeene maat M, welke een evenmatig deel van AB, en tevens een evenmatig deel van EF zal zijn; laat dit evenmatig deel p maal in AB, (in de figuur zevenmaal,) en q maal in EF (in de figuur tienmaal,) begrepen zijn; dan zal men in AB en EF reſpectievelijk p en q deelen, elk gelijk aan M, nemen kunnen: laten nu, in beide parallelogrammen, door de deelpunten der baſes, lijnen evenwijdig aan de opſtaande zijden, in $ABCD$, aan AD, en, in $EFGH$, aan EH getrokken worden; dan zal (*III. Stell.*) het parallelogr. $ABCD$ in p parallelogr. elk gelijk aan $AIKD$; en het parallelogr. $EFGH$ in q parallelogr., elk gelijk aan $ELMH$ verdeeld zijn; maar nu is $AI = EL = M$; en de parallelogr. $AIKD$ en $ELMH$ hebben nu met de geheele parallelogrammen, waarvan zij deelen zijn, dezelfde hoogte; doch deze geheele parallelogrammen hebben (*onderſt.*) gelijke hoogte; de parallelogrammen $AIKD$ en $ELMH$ hebben dan gelijke baſes en gelijke hoogten, en zijn derhalve (*VII. Stell.*) gelijk van inhoud: elk dezer parallelogrammen kan dus als eene gemeene maat der parallelogr. $ABCD$ en $EFGH$ worden aangemerkt; daar nu blijkt: dat die gemeene maat op elk der parallelogrammen, $ABCD$ en $EFGH$, zooveelmaal begrepen moet zijn, als de gemeene maat der baſes op elke baſis, zijn (*Aanm. IX. Bep. II. B.*) de inhouden dezer parallelogrammen in dezelfde reden als hunne reſpectieve baſes.

II. GEVAL. Indien de baſes onmeetbaar zijn; dan zal men, door uitmeting, derzelver betrekkingswijzer (zie *VI. Bep. II. B.*) vinden kunnen. Laat nu die betrekkingswijzer zijn:

$$\left\{\begin{matrix} EF, & AB, & P, & Q, & R, & S, & T, & enz. \\ & a, & b, & c, & d, & e, & f, & enz. \end{matrix}\right\}$$

dan zal men, in EF, een aantal van a deelen, elk gelijk aan AB, nemen kunnen, en, wanneer men door de deelpunten lijnen, evenwijdig aan de opſtaande zijden trekt, van $EFGH$ een aantal van a parallelogrammen, elk gelijk $ABCD$, kunnen afſnijden, en men zal nog een parallelogram P', op de baſis P ſtaande, overhouden, kleiner dan

$ABCD$

ABCD; omdat verder P op AB begrepen is b maal, zal, uit dezelfde gronden, blijken: dat het parallelogr. P' in $ABCD$ zal begrepen zijn b maal, en dat men een zeker parallelogram Q', op de basis Q staande, zal overhouden, enz. Hieruit blijkt derhalve: dat de betrekkingswijzer, welke de betrekking der inhouden voorstelt, noodzakelijk dezelfde zal moeten zijn als die, welke de betrekking der bases EF en AB uitdrukt; de inhouden zijn dan, ook in dit geval, (*IX. Bep. II. B.*) in dezelfde reden als de bases.

XII. STELLING. *Fig.* 65.

§. 210. *De inhouden van de parallelogrammen, ABCD en EFGH, welke gelijke bases, AB en EF, hebben, staan tot elkander in dezelfde reden, als hunne hoogten, AK en EL.* Dat is:

$$parall.\ ABCD : parall.\ EFGH = AK : EL.$$

BETOOG. Laten AK en BI loodregt op AB, en EL en FM loodregt op EF staan; dan zijn (*I. Gev. XXXIII. Bep. I. B. en II. Bep.*) $ABIK$ en $EFML$ regthoeken, welke met de parallelogrammen $ABCD$ en $EFGH$ op dezelfde bases en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen staan; regthoek $ABIK$ is dan (*VII. Stell.*) gelijk parall. $ABCD$, en regth. $EFML$ gelijk parall. $EFGH$. Nu kan men AK en EL als de bases van de regthoeken $ABIK$ en $EFML$ aanmerken, welke nu (*onderst.*) de gelijke hoogten AB en EF hebben: men heeft dan (*XI. Stell.*)

$$regth.\ ABIK : regth.\ EFML = AK : EL$$

of, wegens de betoogde gelijkheid der regthoeken en parallelogrammen,

$$parall.\ ABCD : parall.\ EFGH = AK : EL.$$

XIII. STELLING. *Fig.* 66.

§. 211. *De inhouden van twee parallelogrammen, ABCD en EFGH, staan tot elkander in de zamengestelde reden van hunne bases en hoogten.* Dat is:

$$parall.\ ABCD : parall.\ EFGH = AB \times CI : EF \times HK.$$

BETOOG. Want de getallen, welke de verhouding van de vierkante éénheden op de inhouden der parallelogrammen uitdrukken, worden gevonden, wanneer men de getallen, welke de verhouding van de leng-

lengte éénheid op de basis en hoogte van elk parallelogram uitdrukken, met elkander vermenigvuldigt (*II. Gev. VII. Stell.*); derhalve zal (*XXII. Bep. en I. Aanm. XXIII. Bep. II. B.*)

parall. $ABCD$: *parall.* $EFGH \doteq AB \times CI : EF \times HK$ zijn.

XIV. Stelling. *Fig.* 66.

§. 212. *De inhouden van twee driehoeken, ABC en EFH, staan tot elkander, als hunne bases, AB en EF, indien de hoogten, CI en HK, gelijk zijn; of als hunne hoogten, CI en HK, wanneer de bases gelijk zijn; of, beide ongelijk zijnde, in de zamengestelde reden van hunne bases en hoogten.*

Betoog. Omdat de driehoeken ABC en EFH (*I. Stell.*) de helften der parallelogrammen $ABCD$ en $EFGH$ zijn, volgt dit gestelde onmiddelijk uit de drie voorgaande *Stellingen* en de *VI. Stelling* van het *II. Boek.*

§. 213. Gevolg. *Wanneer twee parallelogrammen, of twee driehoeken, eenen gelijken inhoud hebben, dan zijn hunne bases in de omgekeerde reden van derzelver respectieve hoogten.*

Want, wanneer men de basis van eenen driehoek twee, drie, n maal grooter maakt, moet men, om denzelfden inhoud te behouden, de hoogte in dezelfde reden verminderen, en gelijk aan de helft, een derde, een n^{de} van die des gegevenen driehoeks nemen; de hoogten zijn dan (*XXI. Bep. II. B.*) in de omgekeerde reden van de bases.

XV. Stelling. *Fig.* 67.

§. 214. *Tot elke veelhoekige figuur ABCDE kan eene andere AFDE, van denzelfden inhoud zijnde, en ééne zijde minder hebbende, gevonden worden.*

Betoog. Want, indien men ééne van de zijden AB des gegevenen veelhoeks $ABCDE$ verlengt, en, uit het hoekpunt B van den hoek, aan deze zijde liggende, eenen hoek C tusschen beide latende, de hoekpuntslijn BD trekt, en voorts, door het hoekpunt C van den tusschen beiden liggenden hoek C, de lijn CF, evenwijdig aan BD; dan zal, nadat de lijn DF getrokken is, de vierhoek $AFDE$ gelijk aan den vijfhoek $ABCDE$ zijn. Want, omdat de driehoeken BFD en BCD op dezelfde basis BD en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen

nen BD en CF ſtaan, zijn (*IX. Stell.*) hunne inhouden gelijk; telt men nu, bij elken dezer gelijke driehoeken, den vierhoek $ABDE$; dan zal (*VII. Ax.*) de vierhoek $AFDE$ = den vijfhoek $ABCDE$ zijn.

§. 215. Aanmerking. Wanneer een veelhoek een grooter aantal zijden en hoeken heeft, zal men denzelven nogtans altijd, op dezelfde wijze, in eenen anderen veelhoek, van denzelfden inhoud, en ééne zijde minder hebbende, veranderen kunnen, en daar men elken nieuw verkregen veelhoek wederom, op dezelfde wijze, zal kunnen behandelen, zal men eindelijk tot eenen driehoek komen, welke met den gegevenen veelhoek denzelfden inhoud zal hebben. Men zal alzoo, door eene herhaling van dezelfde meetkunſtige conſtructie, den inhoud van eenen veelhoek met dien van eenen driehoek, en eindelijk (*Gev. VIII. Stell.*) met dien van eenen regthoek kunnen vergelijken. *Een veelhoek van n zijden zal eindelijk, op zoo vele onderſcheidene wijzen, als door het getal* $8 \times 10 \times 12 \times 14 \times$ *enz.* $2(n-2) \times 2(n-1) \times 2n$ *wordt aangewezen, in eenen driehoek veranderd kunnen worden.*

§. 216. X. Bepaling. *Fig.* 68. Een *trapezium* is een vierhoek $ABCD$, in welken alleen de baſis AB aan de bovenzijde CD, en niet de opſtaande zijde AD aan BC, evenwijdig is. *Het kan ſlechts twee regte hoeken hebben.*

§. 217. Gevolg. *Fig.* 68. Wanneer men dit trapezium, als, in de voorgaande ſtelling, is voorgeſchreven, behandelt; dan zal, omdat CD aan BE, en BD aan CF evenwijdig is, ook (*I. Stell.*) $BF = CD$ zijn; de driehoek AFD, welke (*XV. Stell.*) aan het trapezium $ABCD$ gelijk is, heeft dan eene baſis AF, welke gelijk is aan de ſom van de bovenzijde en van de baſis van het trapezium, en beide deze figuren hebben dezelfde hoogte DG. Nu is (*Gev. VIII. Stell.*) de inhoud van den driehoek $AFD = \frac{1}{2} AF \times DG$; derhalve is:

$$Inh.\ Trap.\ ABCD = \tfrac{1}{2} AF \times DG = \tfrac{1}{2}(AB + CD) \times DG.$$

Voorbeeld. Zij $AB = 27^m, 37$; $CD = 20^m, 63$ en $DG = 12^m$; dan zal de inhoud van het trapezium $ABCD = \frac{1}{2}(AB + CD) \times DG = \frac{1}{2} \times (27,37 + 20,63) \times 12 = 288$ vierkante meters zijn.

§. 218. Bijvoegsel. *Fig.* 69. Men kan elken veelhoek $ABCDE$, door hoekpuntslijnen te trekken, altijd in een aantal van driehoeken ABE, BCE en CDE verdeelen, welke ſteeds twee minder zijn, dan het aantal van de zijden dezes veelhoeks. *Wanneer men nu vinden kan,*

hoe-

hoeveelmaal de éénheid der lengte maat op ééne der zijden van elken driehoek, en op de loodlijn, welke, uit het toppunt van den overstaanden hoek dezes driehoeks, op die zijde valt, begrepen is, zal men (Gevolg VIII. Stell.) ook vinden kunnen, hoeveelmaal de vierkante éénheid op elken driehoek verhouden is? en de som van de inhouden dezer driehoeken zal klaarblijkelijk gelijk zijn aan den inhoud van den geheelen veelhoek.

§. 219. VOORBEELD. Laat $BE = 119^m$, $AF = 87^m,5$; verder $CE = 134^m,7$, en $BG = 96^m,3$, en $DH = 51^m,5$ zijn; dan is: (*Gev. VIII. Stell.*)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Drieh.}\ ABE = \tfrac{1}{2} BE \times AF = \tfrac{1}{2} . 119 \times 87,5 \ \ = 5206,25 \\ \textit{Drieh.}\ BCE = \tfrac{1}{2} CE \times BG = \tfrac{1}{2} . 134,7 \times 96,3 = 6485,805 \\ \textit{Drieh.}\ CDE = \tfrac{1}{2} CE \times DH = \tfrac{1}{2} . 134,7 \times 51,5 = 3468,525 \end{array}\right\} \textit{vierkante meters.}$$

Inhoud vijfhoek $ABCDE =$ . . . . 15160,58 *vierkante meters.*

I. LEMMA. *Fig.* 70.

§. 220. *Wanneer eenige lijn* AB, *door een punt* C, *in twee gelijke of ongelijke deelen, verdeeld wordt; dan is:*

1° *Het vierkant op de geheele lijn gelijk aan de som van de vierkanten op deze deelen, te zamen genomen met tweemaal den regthoek onder diezelfde deelen.*

2° *Het vierkant van één der deelen, te zamen genomen met den dubbelden regthoek, onder de geheele lijn en het andere deel, is gelijk aan de som der vierkanten, welke, op de geheele lijn, en op dit andere deel, beschreven zijn.*

Dat is: men moet betoogen, dat

1° . . . . . $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times BC$.

2° . . . . . $AC^2 + 2AB \times BC = AB^2 + BC^2$.

BETOOG. Men stelle op de lijn AB het vierhant $ABDE$; neme $AF = AC$, en trekke, door de punten C en F, de lijnen CI en FH, evenwijdig aan AE en AB; dan is het geheele vierkant $ABDE$, door die lijnen, welke elkander in G doorsnijden, (*I. en II. Bep.*) in vier regthoeken, $ACGF$, $GHDI$, $BCGH$ en $FGIE$, verdeeld.

Omdat nu $AF = AC$ is, is (*III. Bep.*) $ACGF$ een vierkant, op de lijn AC beschreven, en deszelfs inhoud wordt door AC^2 uitgedrukt.

Wanneer men van $AB = AE$ aftrekt $AC = AF$, is (*VIII. Ax.*) $BC = EF$: maar nu is, (*I. Stell.*) $EF = GI$ en $BC = GH$; derhalve $GI = GH$ en $GHDI$ is (*III. Bep.*) een vierkant, hetwelk, omdat $GH = BC$ is, gelijk is aan het vierkant op BC, of gelijk BC^2.

Omdat eindelijk $FG = CG = AC$ en $GI = GH = BC$ is, zijn de regthoeken $FGIE$ en $BCGH$ (*III. Stell.*) gelijk, en, elk in het bijzonder, gelijk aan den regthoek, welke AC tot lengte, en BC tot breedte heeft, gelijk aan $AC \times BC$.

Alle deze deelen zijn nu (*II. Ax.*) aan het geheel gelijk; derhalve is

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times BC.$$

Betoog *van het tweede.* Telt men bij de gelijke regthoeken $FGIE$ en $BCGH$ hetzelfde vierkant $GHDI$; dan zal (*VII. Ax.*) regthoek $FHDE =$ regthoek $BCID =$ regthoek $AB \times BC$ zijn. Neemt men nu deze regthoeken, $FHDE$ en $BCID$, met het vierkant $ACGF$ te zamen; dan heeft men klaarblijkelijk het geheele vierkant $ABCD$, met nog het vierkant $GHDI$; dat is:

$$AC^2 + 2AB \times BC = AB^2 + BC^2.$$

II. Lemma. *Fig.* 71.

§. 221. *Het verschil van twee vierkanten is gelijk aan eenen regthoek, welks zijden gelijk zijn aan de som en het verschil van de zijden dezer vierkanten.*

Opheldering. Laten $ABCD$ en $AEFG$ twee vierkanten zijn; dan is derzelver verschil de ruimte, tusschen de lijnen BE, BC, CD, DG, GF en EF begrepen: nu moet men bewijzen: *dat deze ruimte gelijk is aan eenen regthoek, welke de som der zijden, AB en AE, tot lengte, en het verschil dezer zijden, of BE, tot breedte heeft.*

Betoog. Verleng EF tot in H, en verder tot in I; maak $HI = DH = GF = AE$, en trek IK evenwijdig aan AB. Omdat nu (*III. Bep.*) $AB = AD$ en $AE = AG$ is, zal (*VIII. Ax.*) $BE = DG$ zijn: maar BE is $= CH$ (*I. Stell.*); daar nu (*constr.*) $HI = DH$ is, zal (*III. Stell.*) regthoek $GFHD =$ regthoek $HCKI$ zijn; hierbij tellende regthoek $EBCH$, zal (*VII. Ax.*) de som der regthoeken $EBCH$ en $GFHD$, (die gelijk aan het verschil der vierkanten op AB en AE is,) gelijk zijn aan den regthoek $EBKI$, dat is aan den regthoek, welke EI, dat is de som der zijden AB en AE tot lengte, en BE, of het verschil der zijden, tot breedte heeft. Men drukt dit aldus uit:

$$AB^2 - AE^2 = (AB + AE) \times (AB - AE).$$

XXI. STELLING. *Fig.* 72.

§. 222. *Het vierkant, op de hypothenusa, of schuinsche zijde, van eenen regthoekigen driehoek beschreven, is gelijk aan de som van de vierkanten, welke op deszelfs regthoekszijden beschreven zijn.*

Opheldering. Deze stelling is het vermaarde *Theorema* van PYTHAGORAS. Men moet namelijk bewijzen: dat, wanneer ABC een regthoekige driehoek is, en, op elke van derzelver zijden, vierkanten beschreven zijn; namelijk $ACED$ op de schuinsche zijde AC; $BAMG$ en $BCLF$ op de regthoekszijden AB en BC; de inhoud van het vierkant $ACED$ gelijk zal zijn aan de som van de inhouden der vierkanten $ABGM$ en $BCLF$; hetwelk aldus wordt uitgedrukt: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Dit gewigtig *Theorema* kan, onder anderen, op de volgende wijze, betoogd worden.

BETOOG. Laat, op de hypothenusa AC, het vierkant $ACED$ gemaakt zijn; en, door de punten, E en D, EF evenwijdig aan BC, en DG evenwijdig aan AB getrokken worden: deze snijden elkander in H. Omdat dan, uit den aard van het vierkant, (*I en III. Bep.*) DE evenwijdig aan AC is, zal (*XXX. Stell. I. B.*) hoek $DEH =$ hoek ACB en hoek $EDH =$ hoek CAB zijn; vermits nu nog $DE = AC$ is, (*III. Bep.*) zijn de driehoeken DEH en ACB (*IX. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig; en daarom is $EH = BC$, en $DH = AB$. Men trekke nu verder, van B door H, de lijn $BIHK$; dan is deze, (omdat EH gelijk en evenwijdig aan BC is,) volgens *XXXI. Stell. I. B.* evenwijdig aan CE; de vierhoeken $AIKD$ en $ICEK$ zijn dan (*I en II. Bep.*) regthoeken, en de lijn BI staat derhalve loodregt op AC. Men trekke nu CL evenwijdig aan AB; dan is (*II. Bep.*) $BCLF$ een regthoek; maar een regthoek, die gelijkzijdig en dus een vierkant is; want, de regthoekige driehoeken, CEL en CAB, hebben (*III. Bep.*) de gelijke hypothenusen, CE en CA, en, omdat hoek $ECA =$ hoek $LCB = R$ is, zal, indien men van deze gelijke hoeken denzelfden hoek ACL afneemt, (*VIII. Ax.*) hoek $ECL =$ hoek ACB overblijven. Deze driehoeken dan (*IX. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig zijnde, is $CL = BC$; en $BCLF$ is derhalve een vierkant, en wel het vierkant, op BC beschreven. Trekt men eindelijk AM evenwijdig aan BC, en dus ook evenwijdig aan EF; dan is (*XXX. Stell. I. B.*) hoek $CEL =$ hoek DAM, en hoek $ECL =$ hoek ADM; daar nu $AD = EC = AC$ is, zijn (*IX. Stell. I. B.*) de driehoeken

ADM en ELC gelijk en gelijkvormig, en nu is $AM = EL = AB$; de regthoek $ABGM$ is dan gelijkzijdig, en hij is het vierkant, op de regthoekszijde AB beschreven.

Nu is: 1° omdat (*conſt.*) DG evenwijdig aan AB is, (*VII. Stell.*) vierkant $ABGM =$ parallelogr. $ABHD$, en omdat BK evenwijdig aan AD is, is parallelogr. $ABHD =$ regthoek $AIKD$; derhalve (*IV. Ax.*) is het vierkant $ABGM =$ aan den regthoek $AIKD$.

2° Omdat EF evenwijdig aan BC is, is (*VII. Stell.*) het vierkant $BCLF =$ parallelogr. $BCEH$; en parallelogr. $BCEH =$ regthoek $CIKE$; derhalve (*IV. Ax.*) is het vierkant $BCLF =$ aan den regthoek $CIKE$.

3° De ſom der vierkanten, $ABGM$ en $BCLF$, is derhalve gelijk aan de ſom der regthoeken $AIKD$ en $CIKE$; maar de ſom dezer regthoeken is (*II. Ax.*) gelijk aan het vierkant $ACED$; derhalve is (*IV. Ax.*) de ſom der vierkanten $ABGM$ en $BCLF$ gelijk aan het vierkant $ACED$; dat is: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

§. 223. Leering. Het is, uit den loop van het voorgaande betoog, gebleken: dat BI loodregt op AC ſtaat; nu kan men, in plaats van den regthoek $AIKD$, ſtellen $AC \times IA$; en, in plaats van den regthoek $CIKE$, wederom $AC \times CI$ (zie *VIII. Bep.*) nu is regth. $AIKD =$ vierk. $ABGM$ en regth. $CIKE =$ vierk. $BCLF$; dat is: $AC \times AI = AB^2$ en $AC \times CI = BC^2$. *In elken regthoekigen driehoek, is dan het vierkant van elke regthoekszijde gelijk aan den regthoek, onder de hypothenuſa en het ſtuk, dat van dezelve, door de loodlijn, uit het hoekpunt van den regten hoek op de hypothenuſa vallende, wordt afgeſneden, en aan deze zijde gelegen is.*

§. 224. Gevolg. Omdat BI regthoekig op de hypothenuſa ſtaat, zijn de driehoeken ABI en BCI zelve regthoekige driehoeken; daarom is, volgens het bewezene, $AB^2 = BI^2 + AI^2$ en $BC^2 = BI^2 + CI^2$. Deze vergelijkingen bij elkander optellende, vindt men: $AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + AI^2 + CI^2$; maar $AB^2 + BC^2 = AC^2 = AI^2 + CI^2 + 2AI \times IC$ (*I. Lemma*) zijnde, is (*IV. Ax.*) $2BI^2 + AI^2 + CI^2 = 2AI \times IC + AI^2 + CI^2$; hiervan dezelfde grootheid $AI^2 + CI^2$ aftrekkende, zal (*VIII. Ax.*) $2BI^2 = 2AI \times IC$ of (*XII. Ax.*) $BI^2 = AI \times IC$ overblijven. *Het vierkant van de loodlijn, welke, uit het toppunt van den regten hoek eens regt-*

hoe-

hoekigen driehoek, op de hypothenusa valt, is dan gelijk aan den regthoek, onder de deelen, waarin zij de hypothenusa verdeelt.

§. 225. Bijvoegsel. Deze betoogde eigenschappen des regthoekigen driehoeks kunnen dienen, om, wanneer twee der zijden gegeven zijn, de derde zijde, benevens de loodlijn en de stukken van de hypothenusa, door berekening, te vinden. Zij gegeven $AB = 60$ meters; $BC = 91$ meters; dan is $AB^2 = 3600$ vierk. meters; $BC^2 = 8281$ vierk. meters; en de som van $AB^2 + BC^2 = 11881$ vierk. meters $= AC^2$. Hieruit zal men (*VI. Gev. VI. Stell.*) vinden; $AC = \sqrt{11881} = 109$ meters. Voorts is $AI = AB^2 : AC = 3600 : 109 = 33\frac{3}{109}$ meters; $CI = BC^2 : AC = 8281 : 109 = 75\frac{106}{109}$ meters; zijnde $AI + CI = 33\frac{3}{109} + 75\frac{106}{109} = 109$ meters. Eindelijk heeft men: $BI = \sqrt{(AI \times CI)} = \sqrt{(33\frac{3}{109} \times 75\frac{106}{109})} = 50\frac{10}{109}$ meters.

XVII. Stelling. (*Het omgek. der XVI. Stell.*) *Fig.* 73.

§. 226. *Wanneer het vierkant op ééne der zijden AC van eenen driehoek ABC gelijk is aan de som van de vierkanten op de twee andere zijden, AB en BC, dezes driehoeks; dan is hij regthoekig in den hoek, die tegen over die eerste zijde AC staat.*

Betoog. Laat BD regthoekig op BC gesteld en gelijk aan AB genomen worden: trek dan de lijn CD; dan is (*XVI. Stell.*) $CD^2 = BD^2 + BC^2$: maar $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (*onderst.*) zijnde, zal (*IV. Ax.*) $CD^2 = AC^2$ en $AC = DC$ zijn; de driehoeken ABC en DBC zijn derhalve (*XIII. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig; de hoek ABC is dan ook gelijk aan den hoek DBC; maar de hoek DBC is (*constr.*) een regte hoek; de hoek ABC is dan (*IV. Ax.*) insgelijks een regte hoek, en de driehoek ABC is derhalve regthoekig in B.

XVIII. Stelling. *Fig.* 74.

§. 227. *In elken driehoek, ABC, is het vierkant van de zijde AC, tegen over eenen scherpen hoek B staande, gelijk aan de som der vierkanten, op de twee andere zijden, AB en BC, verminderd met den dubbelden regthoek, welke ééne dezer twee andere zijden AB tot lengte heeft, en tot breedte dat gedeelte BD van diezelfde zijde AB, hetwelk gelegen is, tusschen dien scher-*

scherpen hoek B, en de loodlijn, welke, uit het hoekpunt, tegen over de zijde AB staande, op dezelve valt. Dat is:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD.$$

Betoog. Volgens het *I. Lemma*, is:

$$AD^2 + 2AB \times BD = AB^2 + BD^2$$

Van elk van de leden dezer vergelijking $2AB \times BD$ aftrekkende, zal 'er (*VIII. Ax.*) overblijven

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD$$

Wanneer men nu, bij elk van de leden dezer laatste vergelijking, CD^2 optelt; dan zal (*VII. Ax.*)

$$AD^2 + DC^2 = AB^2 + BD^2 + CD^2 - 2AB \times BD$$

zijn: nu is (*XVI. Stell.*) $AD^2 + DC^2 = AC^2$, en $BD^2 + CD^2 = BC^2$; derhalve (*IV. Ax.*)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD.$$

XIX. Stelling. *Fig.* 75.

§. 228. *In elken stomphoekigen driehoek, ABC, is het vierkant van de zijde AC, tegen over den stompen hoek B, gelijk aan de som van de vierkanten der twee andere zijden, AB en BC, opgeteld bij den dubbelden regthoek, welke ééne der zijden AB, om den stompen hoek B staande, tot lengte heeft, en den afstand van het hoekpunt van den stompen hoek B, tot de loodlijn, welke uit het overstaande hoekpunt C op die zijde AB valt, tot breedte. Dat is:*

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD.$$

Betoog. Volgens het *I. Lemma*, is:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB \times BD$$

telt men, bij elk dezer gelijke grootheden, het vierkant CD^2; dan zal men (*VII. Ax.*) verkrijgen;

$$AD^2 + CD^2 = AB^2 + BD^2 + CD^2 + 2AB \times BD$$

Nu is, omdat CD loodregt op AD staat, (*XVI. Stell.*) $AD^2 + CD^2 = AC^2$, en $BD^2 + CD^2 = BC^2$; derhalve zal (*IV. Ax.*) de voorgaande vergelijking in de volgende veranderen:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD.$$

§. 229. Leering. Wanneer men de XVI en de twee laatste stellingen met elkander vergelijkt; dan blijkt het: *dat het vierkant, op de zijde eens driehoeks, gelijk, grooter of kleiner,*

ner, dan de ſom van de vierkanten op de twee andere zijden zal zijn, naar dat de hoek, tegen over deze zijde ſtaande, regt, ſtomp of ſcherp is; en dat, in de twee laatſte gevallen, het onderſcheid tusſchen dit vierkant en de ſom der twee anderen, gelijk zal zijn aan den tweevoudigen regthoek, welke éene der zijden, om den ſtompen of ſcherpen hoek ſtaande, tot lengte en den afſtand van het hoekpunt van dien ſtompen of ſcherpen hoek tot de loodlijn, welke, uit het hoekpunt van den overſtaanden hoek, op deze zijde of deszelfs verlengde valt, tot breedte heeft. Het *Theorema* van PYTHAGORAS is bijgevolg een bijzonder geval dezer meer algemeene ſtelling. Zie *Bijgevoegde Stell. B. IV. B. Bladz.* 92.

§. 230. GEVOLG. *Fig.* 74 *en* 75. Wanneer men al de zijden des driehoeks ABC, als bekend aanmerkt, zal men de waarde van BD kunnen oplosſen: men zal namelijk vinden: zie (*V. Gev. VI. Stell.*)

$$BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB} \text{ ... in } Fig.\ 74, \text{ indien } B, \text{ ſcherp is.}$$

$$BD = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2AB} \text{ ... in } Fig.\ 75, \text{ indien } B, \text{ ſtomp is.}$$

wanneer nu BD, door de berekening dezer formulen, is bekend geworden, zal men, met behulp van de *XVI. Stelling*, in den regthoekigen driehoek BCD de loodlijn CD, uit de bekende zijden BC en BD, door de formule $CD = \sqrt{(BC^2 - BD^2)}$, vinden kunnen, en hieruit eindelijk den inhoud des driehoeks zelven. — Bij voorbeeld, gegeven zijnde $AB = 418$ meters; $BC = 290$ meters en $AC = 480$ meters; dan zal men vinden: $BD = 34$ meters, en $CD = 288$ meters, en de inhoud dezes driehoeks zal gelijk zijn aan 60192 vierkante meters. —— Men moet hier bij opmerken: *dat, wanneer men de vierkanten der gegevene zijden berekend heeft, de eerſte of tweede formule zal moeten gebruikt worden, naar dat de ſom der vierkanten op* AB *en* BC *grooter of kleiner dan het vierkant op* AC *is.*

BIJVOEGSEL. *Fig.* 74.

§. 231. Stellen wij, $AB = a$, $BC = b$ en $AC = c$; voorts $BD = d$ en $DC = p$; dan hebben wij, wegens de eigenſchappen des ſcherphoekigen driehoeks ABC, en des regthoekigen driehoeks BCD, deze twee vergelijkingen:

$$1^\circ\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ad; \quad \text{en } 2^\circ\ p^2 = b^2 - d^2$$

de eerste vergelijking geeft: $d=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, en $d^2=\ldots\ldots$ $\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}$; gevolgelijk is, (deze waarde van d^2 in de tweede vergelijking overbrengende,)

$$p^2=b^2-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2}=\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2};$$

eene vergelijking, welke ons de waarde van het vierkant van de loodlijn CD, in eene uitdrukking van de zijden des driehoeks voorstelt. Wanneer men de leden dezer vergelijking met $4a^2$ vermenigvuldigt, en onder het oog houdt: dat (de inhoud des driehoeks $=I$ stellende) $I=\frac{1}{2}ap$, $4I=2ap$ en $16I^2=4a^2p^2$ is; dan verkrijgt men:

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=4a^2p^2=16I^2$$

eene vergelijking, welke aanwijst: hoe de inhoud des driehoeks van zijne drie zijden afhangt? Het eerste lid dezer vergelijking bestaat uit het verschil van twee vierkanten; dit verschil is (*II. Lemma*) gelijk aan de som van de zijden dezer vierkanten, vermenigvuldigd met derzelver verschil; wij hebben dan:

$$(2ab+a^2+b^2-c^2)\times(2ab-a^2-b^2+c^2)=16I^2$$

$$\text{of, } [(a+b)^2-c^2]\times[-(a-b)^2+c^2]=16I^2$$

Het eerste lid dezer laatste vergelijking bestaat uit het product van twee factoren, en elk één dezer factoren bestaat wederom uit het verschil van twee vierkanten; wij hebben dan, om dezelfde reden:

$$[a+b+c]\times[a+b-c]\times[a-b+c]\times[-a+b+c]=16I^2$$

waarvoor kan geschreven worden:

$$I^2=\frac{a+b+c}{2}\times\frac{a+b-c}{2}\times\frac{a-b+c}{2}\times\frac{-a+b+c}{2}$$

stellen wij nu $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$; dan is $\frac{1}{2}(a+b-c)=s-c$; $\frac{1}{2}(a-b+c)=s-b$, en $\frac{1}{2}(-a+b+c)=s-a$; en wij verkrijgen dan eindelijk, voor den inhoud des driehoeks, de zeer voortreffelijke uitdrukking:

$$I=\sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]}$$

ons leerende: dat, *wanneer men van de halve som der zijden van eenen driehoek, (van welke gedaante hij ook dan wezen moge,) elk ééne der zijden aftrekt, het gedurige product dezer drie komende verschillen, nog eens met de halve som der zijden vermenigvuldigt, 'er alsdan een getal ontstaat, welks vierkants-wortel gelijk is aan den inhoud des driehoeks, uitgedrukt in een aantal van vierkanten, die tot zijde hebben de éénheid van de lengte maat, waarmede de zij-*

den

den des driehoeks zijn gemeten, en in getal uitgedrukt worden. Zij, bij voorbeeld, $a = 418$; $b = 290$ en $c = 480$; dan is, $s = \ldots \frac{1}{2}(a + b + c) = 594$; $s - a = 176$; $s - b = 304$; $s - c = 114$; en nu hebben wij:

$$I = \sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]} = \sqrt{(594 \times 176 \times 304 \times 114)}$$
$$= \sqrt{3623076864} = 60192.$$

Is de driehoek gelijkzijdig; dan is $a = b = c$; $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}.3a = 1\frac{1}{2}a$; $s - a = \frac{1}{2}a$; $s - c = \frac{1}{2}a$; $s - b = \frac{1}{2}a$; en $I = \sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]} = \sqrt{[1\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a]} = \sqrt{\frac{3}{16}a^4} = \frac{1}{4}a^2 \times \sqrt{3}$; dat is, *de inhoud van eenen gelijkzijdigen driehoek, is gelijk aan één-vierde van het vierkant, op ééne zijner zijden beschreven, vermenigvuldigd met den vierkants wortel uit het getal drie.*

XX. STELLING. *Fig.* 76.

§. 232. *De som van de vierkanten van twee zijden, AC en BC, eens driehoeks is gelijk aan de som van tweemaal het vierkant, op de helft van de derde zijde AB, en tweemaal het vierkant op de lijn CD, welke, uit het midden D van die derde zijde AB, tot het hoekpunt van den overstaanden hoek C getrokken wordt. Dat is:*

$$AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2.$$

BETOOG. Laat, uit het hoekpunt C, de loodlijn CE op de overstaande zijde AB vallen; dan is vooreerst, in den scherphoekigen driehoek BCD, (*XVIII. Stell.*)

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \times DE$$

en, in den stomphoekigen driehoek ACD, (*XIX. Stell.*)

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \times DE$$

Men telle deze vergelijkingen bij elkander op: dan zal (*VII. Ax.*)

$$AC^2 + BC^2 = BD^2 + AD^2 + 2CD^2 + 2AD \times DE - 2BD \times DE$$

zijn: maar nu is (*onderst.*) $AD = BD$; derhalve ook $AD^2 = BD^2$, en $2AD \times DE = 2BD \times DE$: men kan derhalve in plaats van $BD^2 + AD^2$ schrijven $2AD^2$; en $2AD \times DE - 2BD \times DE$ wordt dan gelijk nul, en de laatste vergelijking wordt derhalve:

$$AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2.$$

§. 233. GEVOLG. *Fig.* 49. Omdat de hoekpuntslijnen van een parallelogram elkander midden door deelen, is, volgens het bewezene,

$$AD^2 + CD^2 = 2DE^2 + 2AE^2$$
$$AB^2 + BC^2 = 2BE^2 + 2CE^2$$

In-

Indien men deze vergelijkingen optelt: dan zal, omdat $AE = EC$ en $DE = EB$ is, (*VII. Ax. en IV. Gev. VI. Stell.*)

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

zijn. *De som der vierkanten van de hoekpuntslijnen eens parallelograms is derhalve gelijk aan de som van de vierkanten van alle deszelfs zijden.*

XXI. Stelling. *Fig.* 76.

§. 234. *Wanneer men de basis AB van eenen driehoek ABC, in een punt D, zoodanig verdeelt, dat de deelen AD en BD tot elkander staan, als een getal m tot een getal n; dan zal altijd*

$$n \times AC^2 + m \times BC^2 = n \times AD^2 + m \times BD^2 + (m+n) \times CD^2$$

zijn.

Betoog. Volgens de XVIII en XIX *Stellingen*, is, in de driehoeken ADC en BCD,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2\,AD \times DE$$
$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2\,BD \times DE$$

Men neme nu het n voud van de eerste en het m voud van de tweede dezer vergelijkingen; dan is (*XII. Axioma*)

$$n \times AC^2 = n \times AD^2 + n \times CD^2 + 2\,n \times AD \times DE$$
$$m \times BC^2 = m \times BD^2 + m \times CD^2 - 2\,m \times BD \times DE$$

en, wanneer men nu deze vergelijkingen optelt, zal (*VII. Ax.*) men verkrijgen:

$$n \times AC^2 + m \times BC^2 = n \times AD^2 + m \times BD^2 + (m+n) \times CD^2$$
$$+ 2\,n \times AD \times DE - 2\,m \times BD \times DE$$

Nu is (*onderst.*) $AD : BD = m : n$; derhalve zal (*V. Stell. II. B.*) $n \times AD = m \times BD$ zijn, en volgens het *II. Axioma*, $2\,n \times AD \times DE = 2\,m \times BD \times DE$: deze twee termen, gelijk zijnde, vernietigen elkander in de voorgaande vergelijking, en zij verandert derhalve in de volgende:

$$n \times AC^2 + m \times BC^2 = n \times AD^2 + m \times BD^2 + (m+n) \times CD^2$$

welke moest bewezen worden. — Indien men $m = n$ stelt; dan verandert deze stelling in de voorgaande.

*

VIERDE BOEK.

Over de evenredige Lijnen, en de eigenschappen der gelijkvormige Driehoeken en gelijkvormige Figuren.

I. STELLING. *Fig.* 77.

§. 235. *Elk stelsel van drie evenwijdige lijnen, AB, CD en EF, snijdt van twee andere lijnen, AE en BF, welke, op eenigerlei wijze, naar welgevallen, geplaatst zijn, (mits niet evenwijdig aan de lijnen van dit stelsel loopende,) deelen af, welke met elkander eene welgeordende evenredigheid uitmaken. Dat is: $AC:CE = BD:DF$.*

BETOOG. Trek de lijnen CB, CF, AD en DE; dan zijn, 1° de driehoeken ACD en CBD, welke op dezelfde basis CD en (*onderst.*) tusschen dezelfde evenwijdige lijnen, CD en AB, staan, (*IX. Stell. III. B.*) gelijk; 2° zijn, om dezelfde reden, de driehoeken CDE en CDF, welke op dezelfde basis CD en (*onderst.*) tusschen dezelfde evenwijdige lijnen, CD en EF, staan, gelijk. Nu hebben de driehoeken, ACD en CED, omdat hunne toppen, in hetzelfde punt D, zamenkomen, gelijke hoogten; derhalve is (*XIV. Stell. III. B.*)

$$\text{drieh. } ACD : \text{drieh. } CED = AC:CE$$

Wederom is, om dezelfde reden,

$$\text{drieh. } BDC : \text{drieh. } DFC = BD:DF$$

Omdat nu (*IX. Stell. III. B.*) *drieh.* $ACD =$ *drieh.* BCD; en *drieh.* $CED =$ *drieh.* DFC is, zal (*I. Stell. I. B.*)

$$AC:CE = BD:DF$$

moeten zijn.

§. 236. I. GEVOLG. *Fig.* 77. *Wanneer meer lijnen, GH, IK, enz., evenwijdig aan AB, CD en EF, in dit stelsel gegeven zijn; dan zal, volgens het bewezene, $CE:EG = DF:FH$; wederom $EG:GI = FH:HK$ zijn, enz., en men zal (XVIII. Bep. II B.) hebben*

$$(AC, CE, EG, GI, \text{enz.}) :: (BD, DF, FH, HK, \text{enz.})$$

Een

Een stelsel van zoo vele evenwijdige lijnen, als men naar welgevallen aanneemt, snijdt dan van twee lijnen, welke, op eenigerlei wijze aangenomen zijn, deelen af, welke tot elkander in eene welgeordende evenredigheid staan.

§. 237. II. Gevolg. *Fig.* 77. Wanneer men, door het punt B, de lijn BO, evenwijdig aan AI, trekt; dan zijn $ABLC$, $CLME$, $EMNG$, enz. (*I. Bep. III. B.*) parallelogrammen, welker overstaande zijden (*I. Stell. III. B.*) gelijk zijn; namelijk $BL = AC$; $LM = CE$; $MN = EG$ en $NO = GI$; daar nu $(AC, CE, EG, GI,) :: (BD, DF, FH, HK,)$ is, zal ook

$$(BL, LM, MN, NO) :: (BD, DF, FH, HK)$$

zijn. Dat is: *de lijnen NH, MF, LD, welke, evenwijdig aan ééne der zijden KO van eenen driehoek BKO loopen, snijden de twee andere zijden des driehoeks, (namelijk BK en BO,) in evenredige deelen:* zoo dat $BD : DF = BL : LM$; $BD : FH = BL : MN$; *enz.* is.

§. 238. III. Gevolg. *Fig.* 77. Wanneer nu de deelen BL, LM, MN, NO, *enz.* gelijk zijn; dan moeten (*Gev. VII. Stell. II. B.*) ook de deelen BD, DF, FH, HK, *enz.* gelijk zijn. *Wanneer men dan de zijde BO van eenen driehoek BKO, in gelijke deelen verdeelt, en, door de deelpunten, lijnen, evenwijdig aan ééne der twee andere zijden, trekt; dan zullen deze evenwijdige lijnen de derde zijde des driehoeks insgelijks in gelijke deelen verdeelen.*

II. Stelling. *Fig.* 78.

§. 239. *De lijn DE, welke twee zijden, AC en BC, van eenen driehoek, ABC, in evenredige deelen verdeelt,* [*zoo dat $AD : DC = BE : EC$ is,*] *loopt evenwijdig aan de derde zijde AB.*

Betoog. Indien DE niet evenwijdig aan AB is; dan zal men, door het punt D, eene lijn DF, evenwijdig aan AB, kunnen trekken, en dan zal (*II. Gev. I. Stell.*) $AD : DC = BF : CF$ zijn; maar nu is, naar de onderstelling, $AD : DC = BE : EC$, derhalve zal (*I. Stell. II. B.*) $BF : FC = BE : EC$ zijn. Uit deze evenredigheid volgt (*VIII. Stell. II. B.*), $BF + FC : BE + EC = BF : BE$; dat is, $BC : BC = BF : BE$. Indien men dan eene andere, dan de lijn DE, evenwijdig aan AB, ſtelt; dan zal daaruit volgen, dat twee gelijke grootheden tot elkander in dezelfde reden, als twee ongelijke grootheden, zullen moeten zijn; daar zulks nu (*II. Gev. IV. Stell. II. B.*) onmogelijk is, blijkt daaruit: dat geene andere, dan de lijn DE, evenwijdig aan AB loopen kan.

§. 240. I. GEVOLG. *Fig.* 79. *Wanneer men dan, op de beenen, AB en BC, van eenen hoek ABC, van het hoekpunt B afterekenen, op het eene been AB, gelijke deelen, BD, DF, enz., en, op het andere been BC, insgelijks gelijke deelen, BE, EG, enz., aanneemt; dan zullen de lijnen, DE, FG, HI, enz., welke deze deelpunten verëénigen, onderling evenwijdig zijn.*

Want, door de gelijkheid der deelen, is (*I. Gev. IV. Stell. II. B.*) $BD : DF = BE : EG$; derhalve is DE evenwijdig aan FG. Om dezelfde reden, is HI evenwijdig aan FG, enz.

§. 241. II. GEVOLG. *Fig.* 79. Wanneer men, door de punten, E, G, I, L, N, enz., de lijnen, EV, GW, IX, enz., evenwijdig aan BA, trekt; dan zullen zij (*III. Gev. I. Stell.*) de lijnen FG, HI, enz. in gelijke deelen verdeelen; en, omdat, wegens de evenwijdigheid dezer lijnen, de vierhoeken, welke, in de figuur, aan elkander ſluiten, parallelogrammen zijn, waarvan de overſtaande zijden (*I. Stell. II. B.*) aan elkander gelijk zijn, *zal de eerſte lijn DE in de tweede FG tweemaal, in de derde HI driemaal, in de vierde KL viermaal, in de vijfde MN vijfmaal, in de zesde OP zesmaal, enz.; en, in het algemeen, in de n^{de} lijn n maal begrepen zijn.*

§. 242. III. GEVOLG. *Fig.* 79. Wanneer men dan aanneemt, dat de lijnen AB en BC onbuigbaar en om het punt B beweegbaar zijn, en men dezelve alsdan zoo verre opent, dat de afſtand van twee overëénkomſtige punten S en T, welke de lijn ST, in de figuur met 8 geteekend, verëénigt, gelijk worde aan eene gegevene lijn M; dan zal DE gelijk *één-achtſte*, FG gelijk *twee-achtſte*, HI gelijk *drie-achtſte*, enz. van de lijn M worden. Op deze eigenſchap is de zamenſtelling en het gebruik van de lijnen der gelijke deelen, op den *Proportie-pasſer*, gegrond.

§. 243. IV. Gevolg. *Fig. 79.* Stel, dat de gelijke deelen, op beide de beenen *BA* en *BC* van den hoek *ABC*, in een gelijk aantal van *n* deelen genomen zijn; dan is het oppervlak des driehoeks *ABC* in een zeker aantal gelijke parallelogrammen en een zeker aantal gelijke driehoeken verdeeld. Het aantal der parallelogrammen is klaarblijkelijk, gelijk aan de som van de termen der rekenkunstige reeks, $1 + 2 + 3 + 4 +$ *enz.* $+ (n-1) = (1 + n - 1) \times \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, (*zie I. C.* §. 824.) en het aantal der driehoeken $= n$. Nu zijn, wegens de gelijkheid der deelen, de bases der gelijke driehoeken gelijk aan die der parallelogrammen, en de driehoeken hebben met de parallelogrammen gelijke hoogten; wanneer men derhalve de laatste door hoekpuntslijnen *SV*, *enz.*, in gelijke en gelijkvormige driehoeken verdeelt; dan zal het oppervlak der figuur, behalve de *n* driehoeken, die aan de lijn *BC* liggen, nog in tweemaal zooveel driehoeken, als 'er parallelogrammen in de figuur voorkomen, dat is, in een aantal van $n +$ tweemaal $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, of $n + n^2 - n$ of n^2 gelijke en gelijkvormige driehoeken verdeeld zijn. *Wanneer men dan elke zijde van eenen driehoek in een aantal van n gelijke deelen verdeelt, en de deelpunten door lijnen vereënigt; dan wordt het oppervlak des driehoeks in een aantal van n^2, of $n \times n$, gelijke en gelijkvormige driehoeken verdeeld.*

§. 244. V. Gevolg. *Fig.* 80. *Wanneer men, op de lijnen PA, PB, PC, PD, welke, uit een punt P, tot eenige lijn AD getrokken worden, de punten E, F, G en H, zoodanig neemt, dat de deelen dezer lijnen altijd in dezelfde reden tot elkander staan, namelijk $PE : EA = PF : FB = PG : GC$, enz.; dan zullen alle deze punten E, F, G, H, enz. gelegen zijn in eene lijn, welke evenwijdig aan deze eerste lijn AD loopt.*

Want, omdat $PE : EA = PF : FB$ is, zal *EF*, volgens het bewezene, evenwijdig aan *AB* zijn; om dezelfde reden, is *FG* aan *BC* en *GH* aan *CD* evenwijdig: nu zijn *AB*, *BC*, *CD*, deelen van dezelfde lijn; *EF*, *FG*, *GH*, moeten dan ook insgelijks deelen van dezelfde, en aan *AD* evenwijdig loopende, lijn zijn.

III. Stelling. *Fig.* 81.

§. 245. *De lijnen, PA, PB, PC, PD, enz., welke, uit eenig punt P, tot eene andere lijn AD getrokken zijn,*

snij-

snijden van eene andere lijn EH, welke evenwijdig aan dezelve loopt, deelen, EF, FG, GH, af, welke evenredig zijn aan de deelen AB, BC, CD, op de lijn AD genomen. Dat is:

$$(EF,\ FG,\ GH,\ enz.) :: (AB,\ BC,\ CD,\ enz.)$$

Betoog. Trek de lijnen *BE* en *BG*; dan hebben wij: 1°, omdat *EH* evenwijdig is aan *AB*, (*XIV. Stell. III. B.*)

$$drieh.\,ABP : drieh.\,BCP = AB : BC$$

$$drieh.\,ABE : drieh.\,BCG = AB : BC$$

derhalve zal (*I. Stell. II. B.*)

$$drieh.\,ABP : drieh.\,BCP = drieh.\,ABE : drieh.\,BCG$$

zijn; en, volgens de *IX. Stelling, II. Boek*, zal *drieh. ABP* min *drieh. ABE* tot *drieh. BCP* min *drieh. BCG* zijn, als *drieh. ABP* tot *drieh. BCP*, als *AB* tot *BC*: dat is, volgens de figuur,

$$drieh.\,BEP : drieh.\,BGP = AB : BC.$$

2° Wederom is de (*XIV. Stell. III. B.*)

$$drieh.\,PEF : drieh.\,PFG = EF : FG$$

$$drieh.\,BEF : drieh.\,BFG = EF : FG$$

derhalve zal de (*I. Stell. II. B.*)

$$drieh.\,PEF : drieh.\,PFG = drieh.\,BEF : drieh.\,BFG$$

zijn, en, volgens de *IX. Stell. II. B.*

$$drieh.\,BPE : drieh.\,BPG = EF : FG$$

maar nu is bewezen: dat

$$drieh.\,BPE : drieh.\,BPG = AB : BC$$

is; derhalve zal de (*I. Stell. II. B.*)

$$EF : FG = AB : BC$$

zijn, en zulks alzoo zijnde, zal ook $FG : GH = BC : CD$ zijn; en, in het algemeen, $(EF,\ FG,\ GH,\ enz.) :: (AB,\ BC,\ CD,\ enz.)$

§. 246. Gevolg. Wanneer $AB = BC = CD$ *enz.* is; dan zal ook $EF = FG = GH =$ *enz.* zijn.

IV. Stelling. *Fig.* 82.

§. 247. *De lijn CD, welke den hoek ACB eens driehoeks ABC, in twee gelijke deelen, verdeelt, verdeelt de overstaande zijde AB in stukken, AD en BD, welke evenredig zijn aan de twee andere zijden, AC en BC des driehoeks: dat is, AD : BD = AC : BC. — En de lijn CF, welke het supplement van dien hoek, in twee gelijke deelen, snijdt, zal, indien de* *beenen van dien hoek niet gelijk zijn, en de driehoek niet gelijkbeenig is, het verlengde van de overstaande zijde, in een punt F, ontmoeten; en dan zullen de afstanden van dat punt F, tot de hoekpunten van de twee andere hoeken des driehoeks, insgelijks met deszelfs opstaande zijden evenredig zijn: dat is,* $AF : BF = AC : BC$.

Betoog *van het eerste.* Verleng AC tot in E, maak $CE = BC$, en trek BE; dan is driehoek BCE gelijkbeenig, en de helft van den hoek ACB is (*III. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) $=$ hoek CBE; maar (*onderst.*) de helft van den hoek ACB is $=$ hoek BCD; derhalve is (*XXVII. Stell. I. B.*) BE evenwijdig aan CD, en daarom is (*II. Gev. I. Stell.*) $AD : DB = AC : CE$; maar $CE = BC$ zijnde (*constr.*), zal $AD : DB = AC : BC$ zijn.

Betoog *van het tweede.* Neem $CG = BC$, en trek BG; dan is wederom (*III. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) de helft van den hoek BCE, dat is (*onderst.*) hoek $BCF =$ hoek CBG, en (*XXVII. Stell. I. B.*) BG evenwijdig aan CF; derhalve (*II. Gev. I. Stell.*) zal $AG : CG = AB : BF$ zijn, en (*VIII. Stell. II. B.*) $AG + CG : AB + BF = CG : BF$; of $AC : AF = CG : BF$; of eindelijk, (*VII. Stell. II. B.*) $AF : BF = AC : BC$.

V. Stelling. *Fig.* 83.

§. 248. *De regthoek, zamengesteld onder de uitersten,* A *en* D, *van vier evenredige lijnen,* A, B, C *en* D, *is gelijk aan den regthoek, zamengesteld onder de middelsten,* B *en* C, *dezer zelfde lijnen.*

Betoog. Laten, op de twee eerste lijnen, A en B, twee regthoeken P en Q gemaakt worden, welke de lijn D tot hoogte hebben; dan is (*XI. Stell. III. B.*) $P : Q = A : B$; maar $A : B = C : D$ zijnde (*onderst.*), zal (*I. Stell. II. B.*) $P : Q = C : D$ zijn. Men stelle nu, op de lijnen C en D, de regthoeken R en S, welke de lijn B tot hoogte hebben; dan is (*XI. Stell. III. B.*) $R : S = C : D$; maar $C : D = P : Q$ zijnde (*bewezen*), zal $P : Q = R : S$ zijn. Nu hebben de regthoeken Q en S de lijnen B en D tot zijden, en zijn (*III. Stell. III. B.*) gelijk; derhalve zullen (*Gev. VII. Stell. II. B.*) ook de regthoeken P en R gelijk zijn: dat is, de regthoek, onder de uiterste lijnen, A en D, gelijk aan den regthoek, onder de middelste lijnen B en C.

VI.

VI. Stelling. (*Het omgek. der voorg.*) *Fig.* 84.

§. 249. *Wanneer twee regthoeken ABC en DEF gelijk zijn, of gelijke inhouden hebben; dan zijn derzelver zijden wederkeerig evenredig: dat is, men zal de zijden, AB en BC, van den eersten regthoek, tot de uiterste of middelste, en de zijden, DE en EF, van den tweeden regthoek, tot de middelste of uiterste termen eener evenredigheid stellen kunnen.*

Betoog. Indien DE tot AB niet is, als BC tot EF; dan zal men eene lijn EG, grooter of kleiner dan EF, vinden kunnen, die de vierde evenredige tot DE, AB en BC is, en indien men dan door G eene lijn GH, evenwijdig aan DE, trekt; dan zal (*V. Stell.*) *regth.* $AB \times BC =$ *regth.* $DE \times EG$ zijn: maar *regth.* $AB \times BC =$ *regth.* $DE \times EF$ zijnde, is (*IV. Ax.*) *regth.* $DE \times EG =$ *regth.* $DE \times EF$, en zulks is (*II. Ax.*) onmogelijk: geene andere, dan de lijn EF, kan dan de vierde evenredige tot DE, AB en BC zijn. Men mag dan, uit de gelijkheid dezer regthoeken, tot de evenredigheid $DE : AB = BC : EF$ besluiten.

§. 250. Gevolg. Wanneer drie lijnen, A, B en C, gedurig evenredig zijn, en derhalve (*XVI. Bep. II. B.*) $A : B = B : C$ is, *dan zal de regthoek, onder de uiterste lijnen, A en C, gelijk zijn aan het vierkant op de middelste lijn B.*

§. 251. Aanmerking. Om nu, uit de zijden der gelijke regthoeken, eene welgeordende evenredigheid opteftellen, *moet men de zijden van den eersten regthoek voor de uiterste of middelste, en de zijden van den tweeden regthoek voor de middelste of uiterste termen der evenredigheid aannemen*, zonder dat het, voor het overige, noodig is, eenige andere orde, in de rangschikking der termen, in acht te nemen.

VII. Stelling. *Fig.* 85.

§. 252. *De vierkanten, welke op vier evenredige lijnen beschreven zijn, zijn evenredig.*

Betoog. Wanneer de lijnen A, B, C en D evenredig zijn; dan moet men bewijzen: dat $A^2 : B^2 = C^2 : D^2$ is. Wanneer men, op de lijnen A en B, twee regthoeken beschrijft, die de lijn A; en, op C en D, twee andere regthoeken, die de lijn C, tot hoogte, hebben; dan zal (*XI. Stell. III. B.*)

$$AA : AB = A : B = C : D$$

en $CC : CD = C : D = A : B$ zijn

derhalve (*I. Stell. II. B.*)

$$AA : AB = CC : CD \quad \ldots\ldots\ldots \quad (N)$$

Beschrijft men, op de twee eerste lijnen, A en B, regthoeken, welke de lijn B tot hoogte hebben; en, op C en D, regthoeken, welke dezelfde hoogte D hebben; dan zal wederom (*XI. Stell. II. B.*)

$$AB : BB = A : B = C : D$$

$$CD : DD = C : D = A : B$$

zijn, en, volgens de *I. Stell. II. B.* zal

$AB : BB = CD : DD$ zijn.

Nu is, door het verplaatsen van de termen van de redens der evenredigheid (N), volgens *II. Stell. II. B.*,

$$AB : AA = CD : CC$$

derhalve zal, volgens de *XI. Stell. II. Boek*,

$$BB : DD = AA : CC$$

of, $AA : CC = BB : DD$ (*II. Stell. II. B.*)

en, $AA : BB = CC : DD$ (*VII. Stell. II. B.*) zijn.

§. 253. I. Bepaling. *Fig.* 103. Twee regtlijnige figuren zijn *onderling gelijkhoekig*, wanneer de hoeken A, B, C, D, E en F, van de eene, in eene bestendige volgorde, regtsom of linksom, genomen zijnde, respectievelijk gelijk zijn aan de hoeken a, b, c, d, e en f, van de tweede figuur, deze laatste mede, in eene zekere volgorde, genomen zijnde. — Wanneer de hoeken, in beide figuren, in dezelfde volgorde, genomen zijn, staan deze figuren, ten opzigte van elkander, in eene *regte*; doch, in het tegengestelde geval, in eene *omgekeerde stelling*.

§. 254. II. Bepaling. De zijden, welke, in onderling gelijkhoekige figuren, om de gelijke hoeken staan, noemt men *overëënkomstige*, *gelijkstandige*, *eveneensgeplaatste zijden*. Aldus zijn AB en BC gelijkstandig met ab en bc, *enz.*

§. 255. Aanmerking. *Fig.* 86. Wanneer dan, in de driehoeken ABC en DEF, hoek $A =$ hoek D, hoek $B =$ hoek E, en bijgevolg (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) hoek $C =$ hoek F is; dan zijn de driehoeken ABC en DEF onderling gelijkhoekig, en de zijden AB, BC en AC gelijkstandig met DE, EF, DF. Bij onderlinge gelijkhoekige driehoeken, kan men zeggen: *dat de gelijkstandige zijden over de gelijke hoeken staan.*

§. 256.

§. 256. III. Bepaling. *Twee figuren en derzelver omtrekken zijn gelijkvormig, wanneer de afstand van elke twee punten, in den omtrek van de eene figuur, tot den afstand van de overëënkomstige punten, in de tweede, overal, waar men die punten, in de eerste figuur, ook nemen moge, in dezelfde reden is, als eene lijn tot eene lijn, of als een getal tot een getal.*

§. 257. Aanmerking. De *gelijkvormigheid* (welk woord letterlijk *gelijkheid van vorm, gelijkheid van gedaante* beteekent,) is eigenlijk die overëënkomst, in de figuur of gedaante van twee uitgebreidheden, welke, offchoon zij niet even groot zijn, op onze zintuigen nogtans de uitwerking maakt, *dat wij, in de ééne uitgebreidheid, de figuur of gedaante van de andere herkennen*, bestaande derhalve in hetgeen men, door de wandeling, *het wel gelijken* noemt. De ervaring, door de juistheid der Meetkunstige begrippen voorgelicht, leert: *dat de gelijkvormigheid in de voorwaarden der zoo even gegevene bepaling gelegen, en op alle soorten van figuren, zoowel kromlijnige als regtlijnige, zoowel vlakke als ligchamelijke, algemeen toepasselijk is.* Vergelijk *XXII. Bep. XI. B.*

Wanneer men nu onze algemeene bepaling van de gelijkvormigheid op regtlijnige figuren toepast, in welke de hoekpunten de merkwaardigste punten van den omtrek zijn, bespeurt men: dat deze aan de voorwaarden der gelijkvormigheid zullen onderworpen zijn, *wanneer de afstand van elke twee hoekpunten van ééne dezer regtlijnige figuren, tot den afstand van de twee overëënkomstige hoekpunten, in de andere, overal, in welk eene rangorde deze hoekpunten, in de eerste figuur, genomen worden, in dezelfde bestendige reden tot elkander staan*, zoodat de gelijkvormigheid van twee regtlijnige figuren noodzakelijk zoo vele evenredigheden medebrengt, als de hoekpunten van ééne dezer figuren, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, door regte lijnen, verëénigd kunnen worden. Wanneer men zulks nu, *fig.* 86, op twee driehoeken ABC en DEF toepast; dan zal de algemeene bepaling, in dit geval, zeggen: *dat de driehoeken ABC en DEF gelijkvormig zijn, wanneer de zijden dezer driehoeken evenredig zijn; dat is, indien $AB:DE = BC:EF = AC:DF$ of $(AB, BC, AC)::(DE, EF, DF)$ is.*

VIII. Stelling. *Fig.* 86.

§. 258. *Onderling gelijkhoekige driehoeken zijn gelijkvormig.*

Opheldering. Wanneer, in de driehoeken ABC en DEF, de hoek $A =$ hoek D; hoek $B =$ hoek E; en bijgevolg (*VIII. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) hoek $C =$ hoek F is; dan moet men betoogen: dat deze driehoeken gelijkvormig zijn; dat wil, zie *Aanmerk. III. Bep.*, zeggen: dat $(AB, BC, AC) :: (DE, EF, DF)$ zal zijn, of dat de drie volgende evenredigheden tusschen de gelijkstandige of overëénkomstige zijden dezer driehoeken, (zie *II. Bep.*)

$$AB : DE = BC : EF$$
$$AB : DE = AC : DF$$
en $$BC : EF = AC : DF$$

(waarvan de laatste (*I. Stell. II. B.*) een onmiddelijk gevolg der twee eerste is,) zullen plaats hebben.

Betoog. Laat de driehoek DEF naast den driehoek ABC geplaatst worden, zoodanig, dat het punt D in B, en de zijde DE op het verlengde van AB valle. Men verlenge dan de zijden AC en EF, tot dat zij elkander in G ontmoeten: omdat dan, volgens de onderstelling, hoek $A =$ hoek D, en hoek $B =$ hoek E is, zullen (*XXV. Stell. I. B.*) AG aan DF, en EG aan BC evenwijdig zijn; de vierhoek $BFGC$ is dan (*I. Bep. III. B.*) een parallelogram, welks (*I. Stell. III. B.*) overstaande zijden gelijk zijn, namelijk $CG = DF$ en $FG = BC$.

Nu heeft men, in de figuur, (*II. Gev. I. Stell.*) de volgende evenredigheden:

$$AB : DE = GF : EF, \text{ en } AB : DE = AC : CG$$

of, omdat $GF = BC$ en $CG = DF$ (*bew.*) is,

$$AB : DE = BC : EF, \text{ en } AB : DE = AC : DF$$

waaruit dan (*I. Stell. II. B.*) volgt, dat $BC : EF = AC : DF$ is.

§. 259. I. Gevolg. Volgens de VIII en IX Gevolgen van de XVIII Stelling van het I Boek, *zal men tot de gelijkvormigheid van twee scheefhoekige driehoeken, ABC en DEF, besluiten mogen, indien twee hoeken, A en B, van den eenen gelijk zijn aan twee hoeken, D en E, van den anderen, en tot de gelijkvormigheid van twee regthoekige driehoeken, indien één der scherpe hoeken van den eenen gelijk is aan één der scherpe van den anderen.*

§. 260. II. Gevolg. *Fig.* 87. Laten uit de hoekpunten der gelijke hoeken, C en F, de loodlijnen CG en FH, op de overstaande en overëénkomstige zijden vallen; dan zijn (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) de driehoeken ACG en DFH gelijkhoekig; derhalve is $CG : FH = AC : DF =$ (*bewez.*) $AB : DE$; wederom $AG : DH = AC : DF =$

$AB : DE = CG : FH$ en $BG : HE = BC : EF = AB : DE$. *Twee overëenkomstige loodlijnen zijn dan, in twee gelijkvormige driehoeken, in dezelfde reden, als de zijden, op welke zij vallen; en deze zijden zijn wederom evenredig aan de overëenkomstige stukken, in welke zij door die loodlijnen verdeeld worden.*

§. 261. III. Gevolg. *Fig.* 87. Wanneer men, uit de twee andere gelijke hoeken, A en D, de loodlijnen, AI en DK, op de overstaande zijden BC en EF laat vallen; dan zal, insgelijks, $AI : DK = AB : DE = CG : FH$, zijn. *De loodlijnen, welke, uit de hoekpunten der gelijke hoeken, op de overstaande zijden vallen, zijn gevolgelijk evenredig.* Dit alles stemt in met de III. Bepaling.

§. 262. IV. Gevolg. *Fig.* 88 *en* 89. *Wanneer de drie zijden, DE, EF, FD, van eenen driehoek DEF, evenwijdig loopen aan de zijden, AB, BC en AC, van eenen anderen driehoek ABC; dan zijn deze driehoeken, ABC en DEF, gelijkvormig.* Want, volgens de *XXX. Stell. I. B.*, zal hoek $A =$ hoek D, hoek $B =$ hoek E, en hoek $C =$ hoek F zijn; de driehoeken ABC en DEF zijn dan (*bew.*) onderling gelijkhoekig, en bijgevolg gelijkvormig, dat is: $(AB, BC, AC) :: (DE, EF, DF)$.

§. 263. V. Gevolg. *Fig*: 90. *Wanneer men ergens, in de zijden van eenen driehoek ABC, of derzelver verlengde, de punten G, H en I neemt, en, door die punten, loodlijnen GD, HF en IF op de zijden AC, BC en AB trekt; dan zal de driehoek DEF, welke door de snijding dezer loodlijnen ontstaat, aan den driehoek ABC gelijkvormig zijn, en $(AB, BC, AC) :: (FD, FE, DE)$.* Want, omdat de hoeken G en H, in den vierhoek $CHEG$ regt zijn, is (*Gev. XIX. Stell. I. B.*) hoek C het supplement van den hoek GEH; maar de hoek DEF is het supplement van denzelfden hoek GEH; derhalve is (*III. Stell. I. B.*) hoek $DEF =$ hoek C. Met behulp van den vierhoek $AGDI$, blijkt het, dat, om dezelfde reden, hoek $EDF =$ hoek A is; derhalve, enz.

§. 264. VI. Gevolg. *Fig.* 86. Men kan, uit elke der evenredigheden, welker 'er tusschen de zijden van gelijkvormige driehoeken bestaan, door (*VII. Stell. II. B.*) de eerste tot den derden, gelijk de tweede tot den vierden term, te stellen, eene andere evenredigheid afleiden, namelijk

$$\text{Uit}\left\{\begin{array}{l} AB : DE = BC : EF \\ AB : DE = AC : DF \\ BC : EF = AC : DF \end{array}\right\} \text{de evenredigheid} \left\{\begin{array}{l} AB : BC = DE : EF \\ AB : AC = DE : DF \\ BC : AC = EF : DF \end{array}\right\}$$

waaruit volgt: *dat de zijden, welke, in de onderling gelijkhoekige driehoeken, om de overëënkomstige gelijke hoeken staan, evenredig zijn.*

§. 265. Aanmerking. Men moet, in het opstellen der evenredigheden tusschen de zijden der gelijkhoekige driehoeken, ten einde de termen dezer evenredigheden wel geordend en de gevolgen, welke men uit zulk eene evenredigheid trekt, wettig zouden zijn, in acht nemen, dat men, voor de twee eerste termen der evenredigheid, twee zijden naar welgevallen nemen mag: maar dan moeten de twee overige termen in dier voege geordend worden, dat de voorgaande en volgende termen gelijkstandige zijden zijn, welke, in de wederzijdsche driehoeken over gelijke hoeken staan.

IX. Stelling. (*Het omgek. der voorg.*) *Fig.* 91.

§. 266. *Gelijkvormige driehoeken zijn onderling gelijkhoekig.*

Opheldering. Dat is, wanneer de zijden, AB, BC, en AC, van eenen driehoek ABC evenredig zijn aan de zijden, DE, EF, DF, van eenen anderen driehoek DEF, dat is $(AB, BC, AC)::(DE, EF, DF)$; dan zullen ook deze driehoeken onderling gelijkhoekig zijn.

Betoog. Men neme, in den grootsten driehoek ABC, $AG = DE$ en $AH = DF$, en trekke de lijn GH; omdat dan $AB:DE = AC:DF$ is, zal $AB:AG = AC:AH$ zijn, en (*VIII. Stell. II. B.*) $AB - AG:AG = AC - AH:AH$; of $BG:AG = CH:AH$. De lijn GH is daarom (*II. Stell.*) evenwijdig aan BC; derhalve (*XXIV. Stell. I. B.*) is hoek $AGH =$ hoek ABC, en hoek $AHG =$ hoek ACB; de driehoeken AGH en ABC, zijn dan gelijkhoekig, en, volgens de *VIII. Stelling*, is $AB:AG = BC:GH$: maar, volgens de onderstelling, is $AB:DE = BC:EF$; derhalve (*XI. Stell. II. B.*) $AG:GH = DE:EF$; maar $AG = DE$ zijnde, zal (*Gev. VII. Stell. II. B.*) ook $GH = EF$ zijn: de driehoeken, AGH en DEF, zijn dan (*XIII. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig, en, om die reden, is dan hoek $D =$ hoek BAC; hoek $E =$ hoek $AGH =$ hoek ABC, en hoek $F =$ hoek $AHG =$ hoek ACB: dat is, de driehoeken ABC en DEF zijn onderling gelijkhoekig.

X. Stelling. *Fig.* 91.

§. 267. *Twee driehoeken, ABC en DEF, zullen gelijkvormig zijn, wanneer een hoek A van den eersten gelijk is aan*

aan eenen hoek D van den tweeden, en, wanneer de zijden, AB en AC, in den eenen, met de zijden, DE en DF, in den anderen, om die gelijke hoeken ſtaande, evenredig zijn. Dat is, hoek A = hoek D, en AB : AC = DE : DF zijnde, zal ook hoek B = hoek E, en hoek C = hoek F zijn.

Betoog. Maak $AG = DE$; $AH = DF$; en trek HG; dan is, zie voorgaande betoog, $AG : GB = AH : HC$; derhalve is GH evenwijdig aan BC; en dan is (*XXIV. Stell. I. B.*) hoek G = hoek B, en hoek H = hoek C. Omdat nu hoek D = hoek A is, zijn (*X. Stell. I. B.*) de driehoeken AGH en DEF, gelijk en gelijkvormig; daarom is hoek E = hoek G = hoek B, en hoek F = hoek H = hoek C. enz.

XI. Stelling. *Fig.* 92.

§. 268. *De inhouden van gelijkvormige driehoeken, ABC en DEF, zijn tot elkander, in dezelfde reden, als de inhouden der vierkanten, ABKI en DEML, welke, op de gelijkſtandige zijden, AB en DE, beſchreven zijn.*

Betoog. Men late, uit de hoekpunten der hoeken C en F, de loodlijnen CG en FH vallen, en trekke de hoekpuntslijnen BI en EL; dan ſtaan de driehoeken ABC en ABI op dezelfde baſis AB; en zijn derhalve (*XIV. Stell. III. B.*) in dezelfde reden, als hunne hoogten: men heeft dan, omdat $AI = AB$ is,

$$drieh.\ ABC : drieh.\ ABI = CG : AI = CG : AB.$$

Maar nu is (*II. Gev. VIII. Stell.*) $CG : AB = FH : DE = FH : DL$; derhalve zal (*I. Stell. II. B.*)

$$drieh.\ ABC : drieh.\ ABI = FH : DL = FH : DE \text{ zijn.}$$

De driehoeken, DEF en DEL, ſtaan ook op dezelfde baſis DE, en zijn dus (*XIV. Stell. III. B.*) in dezelfde reden, als hunne hoogten, FH en DL; dat is:

$$drieh.\ DEF : drieh.\ DEL = FH : DL.$$

Vergelijkt men deze evenredigheid met de naast voorgaande; dan heeft men (*I. Stell. II. B.*)

$$drieh.\ ABC : drieh.\ ABI = drieh.\ DEF : drieh.\ DEL$$

of, volgens de *VII. Stell. II. B.*

$$drieh.\ ABC : drieh.\ DEF = drieh.\ ABI : drieh.\ DEL$$

en eindelijk (*VII. Stell. II. B.*)

$$drieh.\ ABC : drieh.\ DEF = 2\ maal\ drieh.\ ABI : 2\ maal\ drieh.\ DEL$$

Maar (*I. Stell. III. B.*) tweemaal *drieh.* ABI is gelijk het vierkant

$ABKI$: enz. de voorgaande evenredigheid verandert dan in deze:

$$\text{drieh.}\ ABC : \text{drieh.}\ DEF = \text{vierk.}\ ABKI : \text{vierk.}\ DEML$$

of . . . . . $\text{drieh.}\ ABC : \text{drieh.}\ DEF = AB^2 : DE^2$.

§. 269. I. GEVOLG. *Fig.* 92. Omdat (*VIII. Stell.*) $AB : DE = BC : EF = AC : DF = CG : FH$, en derhalve (*VII. Stell.*) $AB^2 : DE^2 = BC^2 : EF^2 = AC^2 : DF^2 = CG^2 : FH^2$ is, blijkt hieruit: *dat de inhouden der gelijkvormige driehoeken zijn, als de vierkanten der andere gelijkstandige zijden, of der loodlijnen, welke, uit de hoekpunten der gelijke hoeken, op de overstaande zijden vallen.*

§. 270. AANMERKING. De oude Meetkunstenaars, (en een groot aantal der hedendaagsche volgen zulks nog,) plegen de betoogde eigenschap der gelijkvormige driehoeken aldus uittedrukken. *Gelijkvormige driehoeken zijn in de verdubbelde reden van derzelver gelijkstandige zijden.* Zie XXV. Bep. II. B.

§. 271. II. GEVOLG. *Fig.* 92. Laat $AP = AC$ en $DR = DF$ genomen, en PQ evenwijdig aan AB, en RS evenwijdig aan DE getrokken worden; dan is (*XI. Stell. III. B.*) $\text{regth.}\ ABKI : \text{regth.}\ ABQP = AI : AP = AB : AC = DE : DF = DL : DR = \text{regth.}\ DEML : \text{regth.}\ DESR$, en (*VII. Stell. II. B.*) $\text{regth.}\ ABQP : \text{regth.}\ DESR = \text{regth.}\ ABKI : \text{regth.}\ DEML$: nu is $\text{regth.}\ ABKI : \text{regth.}\ DEML = \text{drieh.}\ ABC : \text{drieh.}\ DEF$; gevolgelijk

$$\text{drieh.}\ ABC : \text{drieh.}\ DEF = \text{regth.}\ ABQP : \text{regth.}\ DESR$$

of, . . $\text{drieh.}\ ABC : \text{drieh.}\ DEF = AB \times AC : DE \times DF$.

De inhouden van twee gelijkvormige driehoeken, zijn dan tot elkander, als de regthoeken, onder de zijden, welke om twee gelijke hoeken staan, dat is, (zie XIII. Stell. III. B.) in de zamengestelde reden van die zijden.

§. 272. III. GEVOLG. *Fig.* 93. *Niet slechts de inhouden der gelijkvormige driehoeken, maar ook de inhouden van alle driehoeken, ABC en ADE, welke twee gelijke hoeken hebben, zijn tot elkander in de zamengestelde reden van de zijden, die om deze gelijke hoeken staan. Dat is:*

$$\text{drieh}\ ABC : \text{drieh.}\ ADE = AB \times AC : AD \times AE.$$

Want, trek de lijn CD; dan is, volgens de *XIV. Stell. III. B.*

$$\text{drieh.}\ ABC : \text{drieh.}\ ACD = AB : AD$$
$$\text{drieh.}\ ACD : \text{drieh.}\ ADE = AC : AE$$

volgens de *XVI. Stell. II. B.* is dan

$$\text{drieh.}\ ABC : \text{drieh.}\ ADE = AB \times AC : AD \times AE.$$

XII.

XII. STELLING. *Fig.* 94.

§. 273. *De loodlijn CD, welke, uit het hoekpunt C van den regten hoek C eens regthoekigen driehoeks ABC, op de hypothenusa AB valt, deelt denzelven in twee andere regthoekige driehoeken, ACD en BCD, welke, elk in het bijzonder, met den geheelen driehoek, en derhalve ook onderling, gelijkvormig zijn.*

Betoog. Omdat de driehoeken ABC en ACD beide (*onderst.*) regthoekig zijn in C en D, en voorts denzelfden hoek A gemeen hebben, zal (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) hoek $ABC =$ hoek ACD zijn: de driehoeken ABC en ACD zijn dan (*VIII. Stell.*) gelijkvormig.

Omdat voorts de regthoekige driehoeken ABC en CBD den gemeenschappelijken hoek B hebben, zal (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) hoek $BAC =$ hoek BCD zijn; de driehoeken ABC en CBD zijn dan (*VIII. Stell.*) gelijkvormig.

Eindelijk hoek $CAD =$ hoek BCD, en hoek $ACD =$ hoek CBD zijnde, zijn ook de (*VIII. Stell.*) driehoeken ACD en BCD gelijkvormig.

§. 274. I. Aanmerking. Hoe verder men, in het zamenstel der Meetkunstige waarheden, voortgaat, zooveel te menigvuldiger worden de hulpmiddelen, om de waarheden van nieuwe stellingen te betoogen, Zoo zullen, onder anderen, de gevolgen, welke, uit de tegenwoordige stelling, kunnen getrokken worden, de eigenschappen des regthoekigen driehoeks, welke in de *XVI. Stelling* van het voorgaande boek bewezen zijn, op eene geheel andere wijze bevestigen.

§. 275. I. Gevolg. De gelijkvormige driehoeken ABC en ACD geven de evenredigheid

$$AB : AC = AC : AD$$

en, volgens de *V. Stelling*, is $AC^2 = AB \times AD$. Wederom geven de regthoekige driehoeken ABC en BCD de navolgende evenredigheid

$$AB : BC = BC : BD$$

en (*V. Stell.*) $BC^2 = AB \times BD$. Hieruit volgt dan: *dat elke regthoekszijde eens regthoekigen driehoeks midden-evenredig is, tusschen de hypothenusa en het stuk, dat van dezelve, door de loodlijn, aan den kant van die regthoekszijde, wordt afgesneden*, en telt men de vergelijkingen op, welke deze evenredigheden geven; dan vindt men: $AC^2 + BC^2 = AB \times AD + AB \times BD = AB^2$, eene waarheid, welke, in de *XVI. Stell. II. B.* uit andere beginselen, bewezen is.

§. 276. II. Gevolg. De gelijkvormige driehoeken ACD en CBD gegeven eindelijk de evenredigheid, $AD:CD=CD:BD$, en $CD^2=AD\times BD$. *De loodlijn, welke, uit het hoekpunt van den regten hoek, op de hypothenusa valt, is dan midden-evenredig tusschen de deelen, waarin zij de hypothenusa verdeelt.*

§. 277. III. Gevolg. Wanneer men BE loodregt op CB; EF loodregt op BE; FG loodregt op EF trekt, enz.; dan is (*voorg. gev.*) BD midden-evenredig tusschen CD en DE; DE tusschen DB en DF enz. *De lijnen AD, CD, BD, ED, FD, GD, enz. zijn dan (XVII. Bep. II. B.) in eene onafgebrokene meetkunstige reeks.*

§. 278. II. Aanmerking. De betoogde stelling is slechts een bijzonder geval van de volgende meer algemeene. *Wanneer men, aan het hoekpunt C, van eenen driehoek ABC, (AB de basis zijnde,) de hoeken ACD en BCE respectievelijk gelijk maakt, aan de hoeken B en A; dan zullen de driehoeken ACD en CBE respectievelijk gelijkvormig zijn aan den driehoek ABC. Voorts zal $AC^2=AB\times AD$, $BC^2=AB\times BE$ en $CD^2=CE^2=AD\times BE$.* Het betoog dezer stelling aan den Lezer overlatende, zullen wij, ter bevestiging van het gezegde in de *I. Aanm.*, 'er nog de volgende bijvoegen.

Bijgevoegde Stelling. B. *Fig.* 95.

§. 279. *Wanneer men, uit het toppunt C van eenen scheefhoekigen driehoek ABC, eene loodlijn CE op de basis AB laat vallen, en $ED=BE$ neemt, en voorts de lijn CD trekt; dan zal $AC^2=BC^2+AB\times AD$ zijn.*

Betoog. Omdat 1° $DE=EB$ is, zal (*XX. Stell. I. B.*) $CD=BC$ zijn. Men make ten 2° hoek $ADF=$ hoek ACB; de driehoeken ABC en AFD, hebben dan den hoek A gemeen; hoek $ACB=$ hoek ADF; derhalve zijn deze driehoeken (*VIII. Stell.*) gelijkvormig, en $AB:AC=AF:AD$ en (*V. Stell.*) $AB\times AD=AC\times AF$. Eindelijk 3°, omdat hoek $ABC=$ hoek $AFD=$ hoek BDC is, zullen de supplementen (*III. Stell. I. B.*) ADC en DFC gelijk zijn; de driehoeken ADC en DFC hebben nu, behalve deze twee gelijke hoeken, den gemeenschappelijken hoek ACD, en daarom is (*VIII. St.*) $AC:CD=CD:CF$ en (*V. Stell.*) $CD^2=AC\times CF=BC^2$. Tellende nu deze vergelijking bij de voorgaande, dan is $AB\times AD+BC^2=AC\times AF+AC\times CF=AC^2$.

§. 280. Gevolg. Naarmate de hoek B minder van eenen regten hoek verschilt, of liever, naarmate de zijde CB nader bij de loodlijn CE komt,

komt, zullen ook de punten B en D nader bij elkander komen, en, op het oogenblik, dat BC de loodlijn zelve wordt, verandert de driehoek ABC in eenen regthoekigen en de regthoek $AB \times AD$ in het vierkant op AB, en de betoogde vergelijking wordt van het *Theorema* van PYTHAGORAS. Men kan, voor het overige, uit deze vergelijking, gemakkelijk het betoogde in de XVIII en XIX. van het III. Boek afleiden, hetwelk ook, uit het betoog der ſtelling, in §. 278, voorgedragen, kan gevonden worden.

§. 281. AANMERKING. De VIII, IX, X en XI. Stellingen en derzelver gevolgen leeren de eigenſchappen der gelijkvormige driehoeken kennen; de XII en de bijgevoegde Stelling B, geven voorbeelden van derzelver gebruik: thans zullen wij, in de volgende, de eigenſchappen der gelijkvormige figuren, in het algemeen genomen, overwegen.]

XIII. STELLING. *Fig.* 96, 97, 98.

§. 282. *Wanneer men, of binnen, of buiten, of in den omtrek van eenige regtlijnige of kromlijnige figuur, regelmatige of onregelmatige, $ABCDEFG$, een punt P, naar welgevallen, aanneemt, en, uit dit punt P, tot aan al de punten van den omtrek dezer figuur, de lijnen, PA, PB, PC, PD, PE, enz. trekt; en, voorts op deze lijnen, of derzelver verlengde, van het punt P afterekenen, de deelen Pa, Pb, Pc, Pd, Pe, enz. zoodanig neemt, dat zij tot de geheele lijnen, PA, PB, PC, PD, PE, enz. altijd in dezelfde reden ſtaan, als eene lijn tot eene lijn, of als een getal tot een getal; dan zullen de punten a, b, c, d, e, enz. gelegen zijn in den omtrek eener figuur, welke aan de eerſte gelijkvormig is.*

BETOOG. Laten de punten A en B, door de lijn AB, en derzelver overëénkomſtige punten a en b, door de lijn ab, verëénigd worden; omdat dan (*onderſt.*) $PA:Pa = PB:Pb$ is, zal (*II. Stell.*) ab evenwijdig aan AB zijn, en (*VIII. Stell.*) dan zal $AB:ab = AP:aP$ zijn. Om dezelfde reden zal $BC:bc = PB:Pb = AP:aP$, en $AC:ac = AP:aP$, *enz.* de afſtand van twee punten, in den omtrek der geſtelde figuur, is dan tot den afſtand der overëénkomſtige punten, in de voorgebragte figuur, overal, waar men dezelve nemen moge, in dezelfde beſtendige reden: en om die reden zijn de figuren (*III. Bep.*) gelijkvormig.

§. 283.

§. 283. I. Gevolg. *Fig.* 96, 97, 98. *Wanneer men drie punten A, B en C der gestelde figuur, door drie lijnen, AB, BC en AC, verëénigt; dan zal de driehoek ABC, welke daaruit geboren wordt, met den driehoek abc, welke uit de verëéniging der overëénkomstige punten a, b en c ontstaat, gelijkvormig zijn;* want, aangezien (*AB*, *BC*, *AC*) :: (*ab*, *bc*, *ac*) is, zijn (*IX. Stell.*) deze driehoeken gelijkhoekig. Drie punten eener figuur hebben dan, ten opzigte van elkander, dezelfde betrekkelijke ligging, als de drie overëénkomstige punten eener figuur, die met dezelve gelijkvormig is.

§. 284. II. Gevolg. *Fig.* 100. *Wanneer de figuur ABCDE regtlijnig is, dan zal de figuur abcde, welke op deze wijze wordt voortgebragt, insgelijks regtlijnig zijn;* want, wanneer de lijnen *PQ*, *PR*, *PS*, *PT*, getrokken, en *Pq*, *Pr*, *Ps*, *Pt*, tot deze lijnen, in de reden van *Pa* tot *PA*, genomen worden; dan zullen (*V. Gev. II. Stell.*) de punten *a*, *q*, *r*, *s*, *t*, *b*, in dezelfde lijn *ab*, die evenwijdig aan *AB* loopt, gelegen zijn. Men moet hier, als eene bijzondere omstandigheid van de gelijkvormige veelhoeken, herinneren: *dat twee veelhoeken gelijkvormig zijn, wanneer de afstand van twee hoekpunten der eerste figuur tot die van de overëénkomstige hoekpunten, in de tweede, altijd in een bestendige reden is.* Zie *Aanm. III. Bep.*

§. 285. I. Aanmerking. Door het betoogde wordt de mogelijkheid van het bestaan der gelijkvormige figuren, op de wijze, als in de III. Bepaling, is voorgeschreven, buiten allen twijfel gesteld.

§. 286. II. Aanmerking. *Fig.* 99. Wanneer men de deelen *Pa*, *Pb*, *Pc*, *enz.*, welke tot *PA*, *PB*, *PC*, *enz.* overal in dezelfde bestendige reden moeten zijn, op het verlengde dezer lijnen, en met betrekking tot de punten *A*, *B*, *C*, *enz.* aan den anderen kant neemt, dan zal de figuur *abcdef*, met betrekking tot de figuur *ABCDEF*, waarmede zij gelijkvormig is, in eene omgekeerde stelling gelegen zijn: de eene figuur zal zich aan de voorste, en de tweede aan de achterste zijde vertoonen.

§. 287. III. Aanmerking. *Fig.* 96, 97, 98 *en* 99. *Wanneer men de lijn AP om het punt P beweegbaar stelt, en aan de punten A en a op deze lijn zulk eene beweeging geeft, dat, wanneer het punt A den omtrek eener regte of kromlijnige figuur doorloopt, hetzelve door het andere punt a zoodanig gevolgd wordt, dat overal PA tot Pa in dezelfde standvastige reden is, dan zal het punt a eene figuur beschrijven, welke, blijkens het betoogde, aan de gegevene gelijkvormig is.*

XIV. Stelling. *Fig.* 101.

§. 288. *Wanneer men, op de verlengde zijden, AB en BC, van een parallelogram, $ABCD$, de punten P en E zoodanig neemt, dat zij, met het punt D, in dezelfde regte lijn PE liggen, en, voorts het geheele ſtelſel van lijnen, waaruit de zijden van het parallelogram beſtaan, om de hoekpunten A, B, C en D, in beweeging ſtelt, (deze lijnen onbuigbaar en onrekbaar ſtellende,) dan zullen, voor elken bijzonderen ſtand der figuur, de punten P, D en E, altijd in dezelfde regte lijn PE blijven, en PD zal altijd tot PE, in dezelfde ſtandvastige reden, van PA tot PB zijn.*

Betoog. Vermits, door de onderſtelling, $ABCD$, een parallelogram is, zal (*I. Bep. III. B.*) AD en DC aan BE en PB evenwijdig zijn; de driehoeken ADP, CED en BEP zullen dan (*IV. Gev. VIII. Stell.*) gelijkvormig zijn, en wij hebben derhalve de evenredigheden $AP:AD = CD:CE$ en $PD:PE = PA:PB$. Omdat nu de lijnen onbuigbaar en onrekbaar onderſteld worden, zal, wanneer de figuur den ſtand $A'B'C'D$ heeft aangenomen, $A'B' = AB$; $B'C' = BC$; $C'D' = CD$ en $A'D' = AD$ blijven, en (*I en II. Stell. III. B.*) $A'B'C'D'$ zal in dien ſtand nog een parallelogram zijn, terwijl, volgens het bewezene, $PA' : A'D' = D'C' : C'E'$ zal zijn, en (*XXX. Stell. I. B.*) hoek $PA'D$ = hoek $D'C'E'$; weshalve (*VIII. Stell.*) de driehoeken $PA'D'$ en $D'C'E'$ gelijkvormig zijn, zijnde hoek $PD'A'$ = hoek $D'E'C'$; en hoek $E'D'C'$ = hoek $D'PA'$; deze hoeken met de hoek $A'D'C'$ = hoek B' optellende, zal men (*VII. Ax.*) vinden, dat de ſom der hoeken $PD'A'$, $A'D'C'$ en $C'D'E'$ = de ſom der hoeken P, B' en E' (*XVIII. Stell. I. B.*) $= 2R$ is: de lijn $D'E'$ is dan, in dezen nieuwen ſtand der figuur, (*VI. Stell. I. B.*) het verlengde van de lijn PD', terwijl, wegens de gelijkvormige driehoeken, $PA'D'$ en $PB'E'$, de lijnen PD' en PE' tot elkander in dezelfde reden, als PA' tot PB', of, als PA tot PB zullen gebleven zijn.

§. 289. Gevolg. *Fig.* 101. Wanneer men het geheele ſtelſel om het punt P beweegbaar maakt; dan zal men het punt E, langs den omtrek eener figuur QRS, kunnen bewegen, en dan zal het punt D eene figuur qrs beſchrijven, welke, omdat PD tot PE altijd in eene beſtendige reden is, aan de figuur QRS gelijkvormig zal zijn.

§. 290.

§. 290. Aanmerking. In dezen toestel bestaat de *Pantographe* of *Verkleinaap*, in welke men nogtans PB gelijk aan BE neemt, en, in welke, men één der punten P, D of E, naar welgevallen, voor het vaste punt P, in *fig.* 96, 97, 98, 99, 100, kan aannemen. Neemt men, in *fig.* 102, de lijn EC, in het parallelogram $APBF$, evenwijdig aan AP, en het punt D op de hoekpuntslijn PF; dan zal men dien toestel van lijnen om het punt P beweegbaar kunnen stellen, en hij zal denzelfden dienst, als die van de 101 figuur, bewijzen.

XV. Stelling. *Fig.* 103.

§. 291. *Wanneer twee veelhoeken, $ABCDEF$ en $abcdef$, gelijkvormig zijn; dan zijn zij ook onderling gelijkhoekig, en de zijden, om de gelijke hoeken staande, zijn evenredig. Dat is, hoek A zal gelijk hoek a; hoek B gelijk hoek b; hoek C gelijk hoek c, enz. zijn; en (AB, BC, CD, DE, EF, FA) :: (ab, bc, cd, de, ef, fa).*

Betoog. Want aangezien (*III. Bep.*) de gelijkvormigheid van twee figuren bestaat in de standvastigheid van de reden tusschen den afstand van twee punten, in de eerste figuur, tot den afstand der overëénkomstige punten, in de tweede, zal, indien men de hoekpuntslijnen AC en ac trekt, $AB:ab = BC:bc = AC:ac$ zijn; de driehoeken ABC en abc zijn dan (*IX. Stell.*) gelijkhoekig, en de hoek B is derhalve gelijk aan den hoek b. Wanneer men nu verder de hoekpuntslijnen, BD en bd, CE en ce, DF en df, EA en ea, FB en fb trekt; dan zal het insgelijks blijken: dat hoek $C =$ hoek c; hoek $D =$ hoek d; hoek $E =$ hoek e; enz. zal zijn; en, wat nu de evenredigheid der zijden om de gelijke hoeken betreft, deze is, in de bepaling der gelijkvormigheid, reeds van zelve begrepen.

XVI. Stelling. (*Het omgek. der XV. Stell.*) *Fig.* 103.

§. 292. *Wanneer twee veelhoeken, $ABCDEF$ en $abcdef$, onderling gelijkhoekig, en de zijden, welke om de gelijke hoeken staan, daarenboven tot elkander dezelfde standvastige reden hebben; dan zijn deze veelhoeken ook gelijkvormig.*

Betoog. Indien men de hoekpuntslijnen AC en ac trekt; dan zal, aangezien (*onderst.*) $AB : ab = BC : bc$ of $AB : BC = ab : bc$ en hoek $B =$ hoek b is, (*X. Stell.*) de driehoek ABC, met den driehoek abc gelijkvormig zijn, en daarom zal (*VIII. Stell.*) $AB : ab = AC : ac$ zijn, en hoek $BAC =$ hoek bac; hoek $ACB =$ hoek acb. Om dezelfde reden, is $BD : bd = BC : bc = AB : ab$; wederom is $CE : ce = CD : cd = AB : ab$. Hetzelfde zal van elke hoekpuntslijn gelden, welke eenig hoekpunt met het hoekpunt van den tweeden daar aan volgenden hoek vereënigt. Maar hetzelfde geldt ook van de hoekpuntslijnen, welke het hoekpunt van eenigen hoek met dat van den derden of vierden hoek vereënigen; want, laten de hoekpuntslijnen AD en ad getrokken worden; omdat dan hoek $BCD =$ hoek bcd is, zal, wanneer men hier van hoek $BCA =$ hoek bca (*bew.*) aftrekt, (*VIII. Ax.*) hoek $ACD =$ hoek acd overblijven; daar nu bewezen is, dat $AC : ac = CD : cd$ is, zal (*VIII. Stell.*) $AD : ad = AC : ac = AB : ab$ zijn; en zulks is genoeg, om te doen zien: dat, wanneer de veelhoeken uit een grooter aantal zijden bestaan, de afstanden van twee hoekpunten, in de eerste figuur, tot die van de overeënkomstige hoekpunten, in de tweede, overal in dezelfde reden, en dat de veelhoeken diensvolgens (*III. Bep.*) gelijkvormig moeten zijn.

§. 293. Aanmerking. *Fig.* 103. Wanneer twee regtlijnige figuren meer dan drie zijden hebben, is de gelijkheid der hoeken niet genoeg, om tot derzelver gelijkvormigheid te besluiten; want een regthoek en een vierkant zijn, bij voorbeeld, gelijkhoekig en nogtans ongelijkvormig. Ook kan men, uit de evenredigheid der zijden, op zich zelve genomen, tot de gelijkvormigheid niet besluiten; want het is genoeg, om de zijden van eene der twee gelijkvormige figuren, bij voorbeeld, van $abcdefg$ om de hoekpunten een weinig te doen draaijen, (hetgeen altijd, behalve in den driehoek, geschieden kan,) om, behoudens de evenredigheid der zijden, die der hoekpuntslijnen, welke nogtans tot het wezen der gelijkvormigheid behooren, te verbreken. Het zijn alleen de driehoeken, in welke, of de gelijkheid der hoeken, of de evenredigheid der zijden, (welke (VIII en IX *Stell.*) de eene een noodzakelijk gevolg van de andere is,) elk op zich zelve, in het bijzonder genomen, de gelijkvormigheid tusschen dezelve noodzakelijk medebrengt: maar hebben de figuren meer dan drie zijden, wordt 'er tot de gelijkvormigheid zoowel de evenredigheid der zijden, als de gelijkheid der hoeken, vereischt, Euclides heeft daarom ook de gelijkvormige regtlijnige figuren bepaald, *als gelijke hoeken en om de gelijke hoeken evenredige zijden hebbende*; eene bepaling, welke, blijkens de XV Stelling, uit de onze volgt, en, naar de XVI Stelling, tot het bestaan der gelijkvormigheid genoeg toereikend is, hoewel anders deze bepaling, zoo als van zelve blijkt, niet even gemakkelijk op alle soorten van figuren toepasselijk is.

XVII. Stelling. *Fig.* 104.

§. 294. *De omtrekken van gelijkvormige veelhoeken staan tot elkander in dezelfde reden, als derzelver eveneens geplaatste zijden of hoekpuntslijnen, en derzelver inhouden staan tot elkander in dezelfde reden, als de vierkanten, welke op de eveneens geplaatste zijden of hoekpuntslijnen beschreven zijn.*

Opheldering. Dat is, wanneer de veelhoeken $ABCDE$ en $abcde$ gelijkvormig zijn, dan zal vooseerst

$$AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ef = AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = AE : ae = AC : ac = BD : bd = \text{enz.}$$

zijn; en, ten tweeden

$$\text{Inh. } ABCDE : \text{Inh. } abcde = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = AE^2 : ae^2 = AC^2 : ac^2 = BD^2 : bd^2 = \text{enz.}$$

Betoog *van het eerste.* Volgens de derde Bepaling, is $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = Ac : ae$; derhalve is (*X. Stell. II. B.*)

$$AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de$$

en, omdat (*III. Bep.*) de eveneens geplaatste zijden tot elkander in dezelfde reden, als de eveneens geplaatste hoekpuntslijnen zijn, zijn ook (*I. Stell. II. B.*) de omtrekken der gelijkvormige veelhoeken in dezelfde reden als de eveneens geplaatste hoekpuntslijnen.

Betoog *van het tweede.* Laten, uit de hoekpunten der gelijke hoeken A, en a tot al de overige hoeken der gelijkvormige veelhoeken, de hoekpuntslijnen AC en AD; ac en ad getrokken worden; dan worden beide veelhoeken, in hetzelfde aantal van driehoeken, ABC en abc, ACD en acd, ADE en ade verdeeld, welke omdat (*III. Bep.*) derzelver eveneens geplaatste zijden tot elkander in dezelfde reden staan, (*IX. Stell.*) gelijkvormig zijn: nu is (*XI. Stell.*)

$$\text{Inh. drieh. } ABC : \text{Inh. drieh. } abc = AB^2 : ab^2$$

maar aangezien $AB : ab = AC : ac$ is, is ook (*VII. Stell.*) $AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$; derhalve (*I. Stell. II. B.*)

Inh.

$Inh.\ drieh.\ ABC : Inh.\ drieh.\ abc = AC^2 : ac^2$
wederom is (*XI. Stell.*)

$Inh.\ drieh.\ ACD : Inh.\ drieh.\ acd = AC^2 : ac^2$
derhalve is (*I. Stell. II. B.*)

$Inh.\ drieh.\ ABC : Inh.\ drieh.\ abc = Inh.\ drieh.\ ACD : Ind.\ drieh.\ acd$
Uit dezelfde gronden zal volgen, dat

$Inh.\ drieh.\ ACD : Inh.\ drieh.\ acd = Inh.\ drieh.\ ADE : Inh.\ drieh.\ ade$
is, en zoo vervolgens, wanneer de veelhoeken, meer zijden hebbende, in een grooter aantal driehoeken kunnen verdeeld worden. Wij hebben dan de aanëéngeschakelde evenredigheid:

$Inh.\ drieh.\ ABC : Inh.\ drieh.\ abc = Inh.\ drieh.\ ACD : Inh.\ drieh.\ acd = Inh.\ drieh.\ ADE : Inh.\ drieh.\ ade$

daar nu, in zulk eene evenredigheid, (*X. Stell. II. B.*) de som van al de voorgaande tot de som van al de volgende termen in dezelfde reden staat, als een voorgaande tot een' volgenden, en de som der voorgaande termen aan den inhoud van den veelhoek $ABCDE$, en die der volgende aan den inhoud van den veelhoek $abcde$ gelijk is, zal

$Inh.\ ABCDE : Inh.\ abcde = Inh.\ drieh.\ ABC : Inh.\ drieh.\ abc$
zijn; maar $Inh.\ drieh.\ ABC : Inh.\ drieh.\ abc = AB^2 : ab^2$ zijnde, zal (*I. Stell. II. B.*)

$Inh.\ ABCDE : Inh.\ abcde = AB^2 : ab^2$
en daar eindelijk $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = AE : ae = AC : ac = BD : bd = enz.$ en daarom (*VII. Stell.*) $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = enz. = AC^2 : ac^2 = enz.$ is, zullen de inhouden der gelijkvormige veelhoeken tot elkander in dezelfde reden staan, als de vierkanten der eveneens geplaatste zijden of hoekpuntslijnen.

§. 295. LEERING. Het is, uit het betoog der laatste stelling, gebleken: *dat gelijkvormige veelhoeken, in een gelijk aantal gelijkvormige, en op dezelfde wijze aan elkander geplaatste driehoeken kunnen verdeeld worden.*

VIJFDE BOEK.

Over den Cirkel en deszelfs Eigenschappen.

---

§. 296. I. Bepaling. *Fig.* 105. *Een cirkel is eene platte vlakte, besloten binnen eene in zich zelve terugkeerende kromme lijn, welker punten A, B, C, enz., geen uitgezonderd, allen even ver afstaan van hetzelfde punt M, dat, in het midden gelegen zijnde, daarom het middelpunt genoemd wordt.* De kromme lijn *ABCDE*, welke de ruimte des cirkels bepaalt, wordt zijn *omtrek* genoemd.

§. 297. Aanmerking. De cirkel kan begrepen worden door de omwenteling eener regte lijn *MA*, om één zijner uiterste punten *M*, geboren te worden: wanneer die lijn, om het punt *M*, ééne omwenteling volbragt heeft, dan heeft de lijn *MA* de vlakte des cirkels en het punt *A* den omtrek doorgeloopen. De cirkel is, onder de kromme lijnen, de eenige, welke in alle deszelfs deelen eenerlei beloop en gedaante heeft. —— Het woord cirkel zal somtijds stilzwijgend voor deszelfs omtrek genomen worden: maar dan zal zulks ook zoo duidelijk in het oog loopen, dat men naar de beteekenis niet zal behoeven te raden.

§. 298. II. Bepaling. *Fig.* 105. De lijnen *AM*, *BM*, *CM*, *DM*, *enz.*, welke, van het middelpunt, tot aan den omtrek eens cirkels getrokken worden, noemt men *stralen* of *radien*: en de lijnen *AMD*, welke door het middelpunt loopen, en ter wederzijde aan den omtrek bepaald worden, dragen den naam van *middellijnen*.

§. 299. Gevolgen der twee voorgaande bepalingen.

I. *Alle stralen en middellijnen van denzelfden cirkel zijn onderling gelijk.*

II. *De middellijn eens cirkels is gelijk aan het dubbeld van deszelfs straal.*

III. *Indien men uit het middelpunt eene lijn trekt, zal het uiteinde van die lijn binnen, in, of buiten den omtrek liggen, naar dat die lijn korter, gelijk, of langer dan de ſtraal is.*

§. 300. III. Bepaling. *Fig.* 105. Een cirkel wordt gezegd, *uit een gegeven punt M, als middelpunt, met eene gegevene lijn P, als ſtraal, beſchreven te zijn*, wanneer dit punt *M* het middelpunt des cirkels, en deszelfs ſtraal *AM* aan die lijn *P* gelijk is.

§. 301. IV. Bepaling. *Fig.* 106. Een *cirkelboog* is een gedeelte van den omtrek des cirkels, als, bij voorbeeld, *ADB*, *ACB*.

§. 302. V. Bepaling. *Fig.* 106. De lijn *AB*, welke de uiteinden van eenen cirkelboog *ADB* verëénigt, en derhalve dien boog als onderſpant, wordt de *koorde* van dien boog genoemd. Wanneer die koorde door het middelpunt loopt, is zij eene *middellijn*.

Tot elke koorde *AB*, behooren twee bogen, *ADB* en *ACB*: doch, wanneer men van eenen boog ſpreekt, welke door eene koorde onderſpannen wordt, bedoelt men, indien het niet uitdrukkelijk anders gezegd wordt, den kleinſten der twee bogen.

§. 303. VI. Bepaling. *Fig.* 105. Een *cirkel ſector AMB* is een gedeelte des cirkels, tusſchen twee ſtralen, *AM* en *BM*, en eenen cirkelboog *AB* begrepen.

§. 304. VII. Bepaling. *Fig.* 106. Een *cirkel ſegment*, *ABD*, is een gedeelte des cirkels, tusſchen eenigen boog *ADB* en zijne koorde begrepen. — *Eene koorde deelt den cirkel altijd in twee ſegmenten.*

§. 305. VIII. Bepaling. *Fig.* 106. Eene lijn *AB* wordt gezegd, *in den cirkel te ſtaan*, of, *in den cirkel beſchreven te zijn*, wanneer zijne uiteinden *A* en *B* in den omtrek van dien cirkel vallen.

§. 306. IX. Bepaling. *Fig.* 107. Eene *ſecans* of *ſnijlijn*, *ABCD*, is eene lijn, waarvan één gedeelte binnen, en een ander gedeelte buiten den cirkel gelegen is.

§. 307. X. Bepaling. *Fig.* 107. Eene *tangens* of *raaklijn*, *FFG*, is eene lijn, welke, behalve een punt *F* van dezelve, hetwelk in den omtrek gelegen is, en het *raakpunt* genoemd wordt, voor het overige, geheel buiten den omtrek ligt. Zulk eene raaklijn wordt gezegd den cirkel in *het raakpunt aanteraken.*

§. 308. XI. Bepaling. *Fig.* 108. Een hoek *AMB*, wordt gezegd, *in den cirkel aan het middelpunt te ſtaan*, wanneer het hoekpunt *M* van dien hoek in het middelpunt gelegen is.

§. 309. XII. Bepaling. *Fig.* 108. Een hoek *ACB*, wordt gezegd, *aan den omtrek eens cirkels te ſtaan*, wanneer het hoekpunt *C* in den omtrek gelegen is, en deszelfs beenen, *AC* en *BC*, het zij beide ſnijlijnen, of het eene eene ſnijlijn en het andere eene raaklijn is. Men zegt ook: *dat een hoek*, *AMB of ACB*, *op eenen boog ADB*, *aan het middelpunt of aan den omtrek ſtaat*, wanneer de beenen van dien hoek door de uiteinden van dien boog loopen, en het toppunt aan het middelpunt, of aan het overige gedeelte van den omtrek, geplaatst is.

§. 310. XIII. Bepaling. Eene regtlijnige figuur wordt gezegd, *in den cirkel beſchreven te zijn*, wanneer alle derzelver hoekpunten, geen uitgezonderd, in den omtrek dezes cirkels liggen.

§. 311. XIV. Bepaling. Eene regtlijnige figuur wordt gezegd, *om den cirkel beſchreven te zijn*, wanneer alle hare zijden, of derzelver verlengde, geene uitgezonderd, den omtrek aanraken. Op dezelfde wijze moet het verſtaan worden, wanneer men zegt: *dat een cirkel in eenige regtlijnige figuur beſchreven is.*

§. 312. XV. Bepaling. *Fig.* 109. Een cirkel *MDEF*, raakt eenen anderen cirkel *ABCM*, in een punt *M inwendig*, wanneer die twee cirkels het *raakpunt M* alleen gemeen hebben, en derzelver omtrekken binnen elkander liggen; en een cirkel *MGHI* raakt den cirkel *ABCM*, in een punt *M*, *uitwendig*, wanneer zij ſlechts het punt *M* gemeen hebben, en de omtrekken buiten elkander gelegen zijn.

I. Stel-

I. Stelling.

§. 313. *De omtrekken en inhouden van cirkels, die gelijke ftralen, of middellijnen hebben, zijn gelijk.*

Betoog. Want, omdat de ftralen of middellijnen gelijk zijn, zullen, wanneer de middelpunten der cirkels op elkander gelegd worden, (*I. Gev. II. Bep.*) de omtrekken op elkander moeten vallen, en daarom zullen de omtrekken en inhouden (*I. Ax.*) gelijk zijn.

II. Stelling. *Fig.* 105.

§. 314. *Elke middellijn deelt den cirkel en deszelfs omtrek in twee gelijke deelen.*

Betoog. Men late de benedenfte helft der figuur *AFED* om de middellijn *AD* omdraaijen, en op de bovenfte helft vallen, dan zullen al de punten van den omtrek *AFED*, wegens de gelijkheid der ftralen, in den omtrek der figuur *ABCD* moeten vallen: de figuren *AFED* en *ABCD*, zullen derhalve (*I. Ax.*) gelijk zijn. Men gevoelt nu, waarom de lijn *AD*, die door het middelpunt gaat, middellijn genoemd wordt.

III. Stelling. *Fig.* 110.

§. 315. *In elken cirkel is eenige koorde, AB, korter dan deszelfs middellijn.*

Betoog. Omdat het middelpunt *M* des cirkels buiten elke koorde ligt, zal men, uit het uiteinde *A* der koorde *AB*, door het middelpunt *M*, de middellijn *AMC* kunnen trekken; indien men dan nog de ftraal *MB* trekt, dan zal (*VII. Stell. I. B.*) $AB < AM + BM$ zijn; vermits nu $AM + BM = AM + MC = AC$ (*I. Gev. II. Bep.*) is, zal (*V. Ax.*) $AB < AM$ zijn. De middellijn eens cirkels is alzoo de langfte lijn, die in denzelven kan geplaatst of befchreven worden.

IV. Stelling. *Fig.* 107.

§. 316. *Eene regte lijn, AD, kan den omtrek eens cirkels flechts in twee punten, B en C, doorfnijden.*

Betoog. Want, indien men aanneemt, dat zij den omtrek in drie

 pun-

punten doorſnijdt, en men dan uit het middelpunt tot die punten ſtralen trekt; dan zal men buiten eene lijn een punt hebben, dat op eenen gelijken afſtand van drie onderſcheidene punten gelegen is; daar zulks nu (*XXI. Stell. I. B.*) onmogelijk is, zal ook de doorſnijding van eene regte lijn, met eenen cirkel in geen meer, dan in twee punten, kunnen plaats hebbén.

V. Stelling. *Fig.* 111.

§. 317. *In denzelfden cirkel, of, in gelijke cirkels, worden gelijke cirkelbogen door gelijke koorden onderſpannen.* — En omgekeerd. — *Gelijke koorden onderſpannen, in denzelfden cirkel, of, in gelijke cirkels, gelijke bogen.*

Opheldering. Dat is, wanneer de ſtraal AM gelijk is aan de ſtraal $A'M'$, en de boog ACB gelijk aan den boog $A'C'B'$; dan zal de koorde AB gelijk zijn aan de koorde $A'B'$, — en omgekeerd, — wanneer de koorde AB gelijk is aan de koorde $A'B'$; dan zullen de bogen ACB en $A'C'B'$ gelijk zijn.

Betoog *van het eerſte.* Laat het punt M, in het punt M', en AM langs $A'M'$ gelegd worden; dan zal (*XIII. Bep. I. B.*) het punt A in het punt A' vallen, en de omtrek van den boog ACB (*I. Stell.*) langs den omtrek van den boog $A'C'B'$; omdat nu de bogen ACB en $A'C'B'$ gelijk zijn, zal het punt B in het punt B' vallen; de uiteinden der koorden AB en $A'B'$ vallen derhalve in elkander, en zijn (*XIII. Bep. I. B.*) gelijk.

Betoog *van het tweede.* Omdat de zijden der driehoeken, ABM en $A'B'M'$, volgens de onderſtelling, gelijk zijn, namelijk $AM = A'M'$; $BM = B'M'$ en $AB = A'B'$; zal (*XIII. Stell. I. B.*) hoek $AMB =$ hoek $A'M'B'$ zijn; de beenen dezer hoeken zullen dan (*XV. Bep. I. B.*) op elkander vallen; en, wegens de gelijke ſtralen, AM en BM en $A'M'$ en $B'M'$, zullen de punten A en B, in de punten A' en B', en de bogen ACB en $A'C'B'$ geheel in elkander vallen, en (*I. Ax.*) om die reden gelijk zijn.

VI. Stelling. *Fig.* 111.

§. 318. *In denzelfden cirkel, of, in gelijke cirkels, wordt een grooter boog door eene grootere koorde,* — en omgekeerd, — *eene grootere koorde door eenen grooteren boog onderſpannen, (mits de bogen kleiner dan een halve cirkel zijn.)*

Be-

Betoog *van het eerste.* Want, indien de boog $AD >$ boog AB is; dan zal, na de stralen, AM, BM en DM getrokken te hebben, $AM = AM$; $BM = DM$, en hoek $AMD >$ hoek AMD zijn; derhalve zal (*XI. Stell. I. B.*) $AD > AB$ zijn.

Betoog *van het tweede.* Indien, omgekeerd, $AD > AB$ is; dan zal, in dezelfde driehoeken, ABM en ADM, (*XII. Stell. I. B.*) hoek $AMD >$ hoek AMB; en derhalve boog $ACBD >$ boog ACB zijn.

§. 319. Aanmerking. *Fig.* 111. *Wanneer de bogen ACB en $ACBD$, grooter dan een halve cirkel zijn; dan zullen*, omgekeerd, *de bogen grooter worden, indien de koorden kleiner zijn.*

VII. Stelling. *Fig.* 112.

§. 320. *De straal MC, welke loodregt op eene koorde AB staat, deelt dezelve, zoo wel als den boog ACB, welken die koorde onderspant, in twee gelijke deelen.*

Betoog. Want trek de stralen AM en BM; dan zullen, omdat (*onderst.*) hoek $ADM = $ hoek $BDM = R$ is, en (*I. Bep.*) $AM = BM$ (*II. Lemma I. B.*) de regthoekige driehoeken ADM en BDM gelijk en gelijkvormig zijn, en, om die reden, zal $AD = BD$; en hoek $AMC = $ hoek BMC zijn. Trekt men nu de koorden AC en BC; dan zullen, omdat hoek $AMC = $ hoek BMC (*bewez.*), $CM = CM$, en $AM = BM$ (*I. Gev. II. Bep.*) is, de driehoeken AMC en BMC (*X. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig, en derhalve $AC = BC$ zijn; de boog AC zal dan (*V. Stell.*) gelijk aan den boog BC zijn.

VIII. Stelling. *Fig.* 112.

§. 321. *De lijn CM, welke loodregt op het midden eener koorde AB staat, loopt door het middelpunt des cirkels, en deelt den boog, welken die koorde onderspant, in twee gelijke deelen.*

Betoog. Want, omdat (*XX. Stell. I. B.*) al de punten M van de loodlijn DM op gelijken afstand van de uiteinden A en B der koorde AB staan, is het middelpunt des cirkels noodzakelijk in die lijn gelegen; indien nu de koorden AC en BC getrokken worden; dan zul-

zullen deze koorden (*XX. Stell. I. B.*) insgelijks gelijk zijn, en daarom zal (*V. Stell.*) boog $AC =$ boog BC zijn.

IX. Stelling. *Fig.* 112.

§. 322. *De ſtraal MC, of middellijn CE, eens cirkels, welke eenige koorde AB midden door deelt, deelt ook de beide bogen, ACB en AEB, welke deze koorde onderſpant, in twee gelijke deelen.* — En omgekeerd. — *De ſtraal MC, of middellijn CE, welke eenen boog ACB midden door deelt, ſnijdt de koorde AB, welke dezen boog onderſpant, regthoekig en in twee gelijke deelen.*

Betoog *van het eerſte.* Omdat (*onderſt.*) $AD = BD$ en (*I. Gev. II. Bep.*) $AM = BM$ en $MD = MD$ is, zijn de driehoeken ADM en BDM (*XIII. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig, de hoek ADM is dan gelijk aan den hoek BDM gelijk R; de ſtraal MC ſtaat dan (*XVI. Bep. I. B.*) loodregt op de koorde AB en deelt (*VIII. Stell.*) den boog ABC in twee gelijke deelen: maar de middellijn EC deelt den boog AEB insgelijks in twee gelijke deelen: omdat, wanneer van de halve omtrekken CAE en CBE, die (*II. Stell.*) gelijk zijn, de gelijke bogen AC en BC worden afgetrokken, de overblijvende bogen AE en BE (*VIII. Ax.*) gelijk zijn.

Betoog *van het tweede.* Wanneer de bogen AC en BC gelijk zijn, dan zijn (*V. Stell.*) de koorden AC en BC gelijk, en de driehoeken AMC en BMC, zijn dan (*XIII. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig; hoek AMD is dan gelijk hoek BMD, en de lijn CM ſtaat (*Leer. XIV. Stell. I. B.*) derhalve loodregt op de koorde AB.

X. Stelling. *Fig.* 113.

§. 323. *Drie punten A, B en C, welke naar welgevallen aangenomen worden, mits zij niet in dezelfde regte lijn gelegen zijn, liggen altijd in den omtrek van eenen cirkel.*

Betoog. Indien men, door het midden C van de lijn AB, eene loodlijn laat gaan; dan ſtaan al de punten M van die loodlijn, op eenen gelijken afſtand, van de uiterſte punten A en B dezer lijn; (*zie XX. Stell. I. B.*) Wanneer men dan, uit eenig punt M dezer loodlijn met MA als ſtraal, eenen cirkel beſchrijft, zal (*I. Gev. II. Bep.*)

de

de omtrek dezes cirkels ook door het punt B gaan, en nu blijkt het, ten klaarſte, dat door de punten A en B eene oneindigheid van cirkels, welker middelpunten alle op de lijn CM liggen, kunnen gebragt worden. Op dezelfde wijze zal men, door de punten B en C, eene oneindigheid van cirkels kunnen trekken, welker middelpunten op de loodlijn MD, door het midden van BC gaande, gelegen zijn. Wanneer nu de punten A, B en C, niet in dezelfde lijn liggen; dan zal BC met het verlengde van AB eenen hoek maken, en de verlengde loodlijn MD, zal het verlengde van AB (*V. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) onder eenen ſcherpen hoek E moeten doorſnijden; waaruit dan (*XXIII. Stell. I. B.*) volgt: dat de loodlijnen AM en DM, elkander ergens in een punt M moeten doorſnijden: dit punt M ſtaat dan (*XX. Stell. I. B.*) op denzelfden afſtand van de punten A, B en C, en de cirkel, welke uit M, als middelpunt, met MA, als ſtraal, beſchreven wordt, gaat noodzakelijk door de punten B en C, en deze drie punten liggen alzoo in den omtrek van eenen cirkel.

§. 324. I. Gevolg. Omdat de loodlijnen CM en DM, elkander ſlechts in één punt M kunnen doorſnijden, *beſtaat 'er ook niet meer dan één punt, dat even ver van de punten A, B en C afgelegen is; en, 'er kan gevolgelijk, door drie punten, niet meer dan een cirkel beſchreven worden.*

§. 325. II. Gevolg. *Twee cirkels kunnen elkander in geen meer dan in twee punten doorſnijden;* omdat, wanneer zij elkander in drie punten ſneden, door drie punten, ſtrijdig met het voorgaande gevolg, twee onderſcheidene omtrekken zouden beſchreven kunnen worden.

§. 326. Leering. Men leert hieruit: *dat om elken driehoek een cirkel kan beſchreven worden, welks middelpunt gelegen is in de doorſnijding van twee loodlijnen, welke, uit het midden van twee zijner zijden, op dezelve worden opgerigt.*

XI. Stelling. *Fig.* 114.

§. 327. *Gelijke koorden, AB en CD, ſtaan op gelijke afſtanden van het middelpunt; en de langſte, CE, van twee koorden, CE en CD, ſtaat digter bij het middelpunt, dan de kortſte, CD.*

Betoog *van het eerſte.* Men late, uit het middelpunt M, de loodlijn lijnen MF en MG op de koorden vallen; en trekke de ſtralen AM en CM; dan zijn (*VII. Stell.*) $AF = FB = \frac{1}{2} AB$ en $CG = \frac{1}{2} CD$; en omdat $AB = CD$ is, (*IV. Ax.*) zal $AF = CG$ zijn; de regthoekige driehoeken, AMF en CMG, hebben dan gelijke hypothenuſen AM en CM, en twee gelijke regthoekszijden, AF en CG, en zijn daarom (*II. Lemma I. B.*) gelijk en gelijkvormig; derhalve zijn de zijden MF en GM, of de afſtanden der koorden AB en CD tot het middelpunt, gelijk.

Betoog *van het tweede.* Is de koorde CE langer dan de koorde CD; dan zal de boog CDE (*VI. Stell.*) langer dan de boog CD zijn; indien men dan de loodlijnen MG en MH op deze koorden laat vallen, zal, omdat hoek $MCD >$ hoek MCE is, (*V. Gev. XVIII. Stell. I. B. en XI. Ax.*) hoek $CMI <$ hoek CMH zijn, en omdat MH loodregt op CE ſtaat, zal (*XXI. Stell. I. B.*) $MI > MH$ zijn; daar nu GM klaarblijkelijk grooter dan MI is, zal (*VI. Ax.*) GM grooter dan HM zijn; dat is: de kortſte koorde CD ſtaat het verſt van het middelpunt, enz.

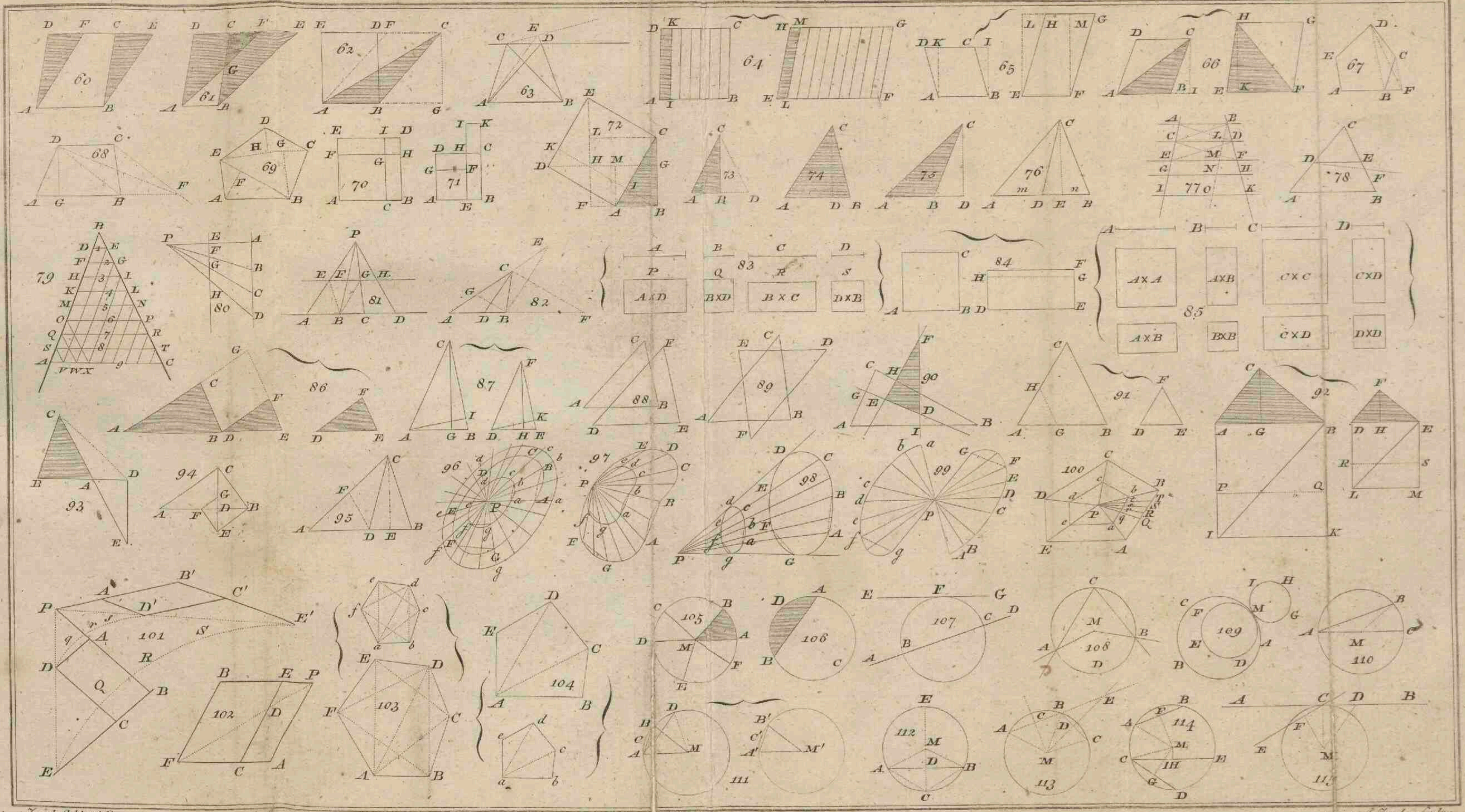
XII. Stelling. *Fig.* 115.

§. 328. *Eene lijn AB, welke loodregt op het einde van eene ſtraal CM ſtaat, is eene raaklijn, welke den omtrek, in het uiteinde van die ſtraal, in het punt C, aanraakt.*

Betoog. Want, indien men, aan de eene of andere zijde van de ſtraal CM, eene lijn MD, uit het middelpunt, tot aan de lijn AB trekt, zal (*XXI. Stell. I. B.*) die lijn langer dan de loodlijn zijn, en het punt D zal (*III. Gev. II. Bep.*) derhalve buiten den omtrek liggen; de lijn AB heeft dan met den omtrek des cirkels geen ander, dan het punt C, gemeen, en is daarom (*X. Bep.*) eene raaklijn.

§. 329. Aanmerking. *Fig.* 115. Wanneer men, door het raakpunt C, eene lijn CE trekt, welke met de raaklijn eenen zekeren hoek maakt; dan zal men, uit het middelpunt, eene loodlijn MF op die lijn kunnen laten vallen; daar nu die loodlijn (*XXI. Stell. I. B.*) korter dan de ſtraal MC is, zal het punt F binnen den omtrek liggen, en CE zal gevolgelijk eene ſnijlijn zijn. Hieruit volgt dan:

§. 330. *Dat door elk punt, aan den omtrek, ſlechts eene raaklijn aan den cirkel zal kunnen getrokken worden; en dat eene raaklijn noodzakelijk regthoekig ſtaat op de lijn, welke het raakpunt met het middelpunt des cirkels vereënigt.*



Jac. de Gelder delin.

A. Zurcher sculp.

XIII. STELLING. *Fig.* 116.

§. 331. *Uit elk punt, M, genomen op een lijn, BM, welke eenen hoek, ABC, midden door deelt, kan, als middelpunt, eenen cirkel beschreven worden, welke beide de beenen, AB en BC, van dien hoek, ABC, aanraakt.*

BETOOG. Men late, uit eenig punt *M* van de lijn *BM*, de loodlijnen *ME* en *MD* op de beenen *AB* en *BC* van den hoek *ABC* vallen; dan zijn de driehoeken *EBM* en *DBM* gelijk en gelijkvormig; want zij zijn (*constr.*) in *E* en *D* regthoekig, en, hoek *EBM* = hoek *DBM* zijnde, zal (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) hoek *BME* = *BMD* zijn, en (*IX. Stell. I. B.*) *ME* = *DM*; wanneer men dan, uit het punt *M*, met *ME*, als straal, eenen cirkel beschrijft, dan zal dien cirkel door de punten *E* en *D* gaan, en (*X. Bep. XII. Stell. en constr.*) de lijnen, *AB* en *BC*, in die punten, aanraken.

§. 332. LEERING. Omdat, wegens de gelijke en gelijkvormige driehoeken, *BEM* en *BDM*, ook *BE* = *BD* is, leert men hieruit: *dat de deelen, BE en BD, der raaklijnen, welke, uit hetzelfde punt B, tot aan den omtrek getrokken worden, (en die altijd twee in getal zijn,) en tusschen dat punt B, en de raakpunten, D en E, begrepen zijn, gelijk zullen zijn.*

§. 333. GEVOLG. *Fig.* 117. Wanneer de lijnen, *AD* en *BD*, twee hoeken, *A* en *B*, van eenen driehoek midden door deelen, *dan zal het punt D, alwaar deze lijnen elkander snijden, het middelpunt van eenen cirkel zijn, welke, met de loodlijn, DE, als straal, beschreven zijnde, de zijden van den driehoek zal aanraken, en bijgevolg in dien driehoek zal beschreven zijn. Men kan dan in elken driehoek eenen cirkel beschrijven.*

XIV. STELLING. *Fig.* 118.

§. 334. *Twee evenwijdige koorden, of snijlijnen, AB en CD, snijden twee gelijke bogen, AC en BD, van den omtrek af,* — en omgekeerd, — *twee gelijke bogen, AC en BD, zijn tusschen evenwijdige lijnen, AB en CD, gelegen.*

BE-

Betoog *van het eerste.* Laat, uit het middelpunt M des cirkels, eene loodlijn MF op AB vallen; dan zal, omdat AB evenwijdig aan CD is, die loodlijn (*I. Gev. XXXIII. Bep. I. B.*) ook loodregt op CD ſtaan; en daarom zal (*VII. Stell.*) de boog $ACH =$ boog BDH zijn; men trekke hiervan af den boog CH, die, om dezelfde reden, gelijk aan den boog DH is; dan zal (*VIII. Ax.*) de boog AC gelijk aan den boog DH overblijven.

Betoog *van het tweede.* Laten de boogen AC en DB gelijk zijn; dan moet bewezen worden: dat CD evenwijdig is aan AB. Laat H het midden van den boog CHD zijn, dan is dit punt ook (*VII. Ax.*) het midden van den boog $ACHDB$: indien men dan, van H tot het middelpunt M, de lijn HM trekt; dan zal (*IX. Stell.*) die lijn loodregt op AB, en tevens loodregt op CD ſtaan: de lijn AB is dan (*I. Gev. XXXIII. Bep. I. B.*) evenwijdig aan CD.

§. 335. Gevolg. Indien de lijn CD den cirkel niet ſnijdt, maar aanraakt; dan zal die aanraking in het punt H, of I, moeten plaats hebben, en dan zal de boog $AH =$ den boog BH, of de boog $AI =$ den boog BI zijn.

XV. Stelling. *Fig.* 119 *en* 120.

§. 336. *Wanneer de afſtand van de middelpunten van twee cirkels korter is dan de ſom van derzelver ſtralen, en tevens de grootſte ſtraal kleiner is dan de ſom van de kleinſte ſtraal en de afſtand der middelpunten; dan zullen deze cirkels elkander ſnijden, en de lijn, welke de middelpunten dezer cirkels vereënigt, zal de koorde, welke deze cirkels gemeen hebben, in twee gelijke deelen regthoekig doorſnijden.*

Betoog *van het eerſte.* Want, onder de geſtelde voorwaarden, zal men, met den afſtand der middelpunten MN, en de ſtralen AM en AN, (*VII. Stell. I. B.*) eenen driehoek AMN kunnen zamenſtellen, en op denzelfden baſis MN, den tegenovergeſtelden driehoek BMN plaatſen: wanneer men dan, uit de punten M en N, met de ſtralen, AM en AN, cirkels beſchrijft; dan zullen deze cirkels elkander in de punten A en B doorſnijden.

Betoog *van het tweede.* Omdat AB eene gemeenſchappelijke koorde van beide cirkels is, zal de lijn, welke loodregt door het midden C dezer koorde loopt, (*VIII. Stell.*) door de middelpunten van beide de cirkels loopen; omdat nu door twee punten ſlechts ééne regte lijn

lijn (*I. Stell. I. B.*) kan getrokken worden, kan geene andere, dan de lijn MN, loodregt door het midden van AB gaan.

XVI. STELLING. *Fig.* 121 *en* 122.

§. 337. *Wanneer de afstand van de middelpunten van twee cirkels gelijk is aan de som of aan het verschil van derzelver stralen; dan zullen die cirkels, in het eerste geval, elkander uitwendig, en, in het tweede geval, elkander inwendig aanraken.*

BETOOG *van het eerste. Fig.* 121. Wanneer de som der stralen AM en AN gelijk is aan den afstand MN der middelpunten; dan hebben de cirkels geen ander, dan het punt A, gemeen: want, indien men, in den omtrek van den eenen cirkel, het punt P neemt, en de lijnen MP en NP trekt; dan is (*VII. Stell. I. B.*) $MP + NP > MN$, hier van $MP = AM$ aftrekkende, zal (*IX. Ax.*) $NP > AN$ zijn: elk ander punt P zal (*III. Gev. II. Bep.*) buiten den tweeden cirkel liggen, en de cirkels zullen elkander (*X. Bep.*) in A uitwendig aanraken.

BETOOG *van het tweede. Fig.* 122. Indien men in den grootsten cirkel het punt P neemt, en dan PM en PN trekt; dan is (*VII. Stell. I. B.*) $PM + MN > PN$; maar $PN = AN$ (*I. Gev. II. Bep.*) zijnde, zal (*V. Ax.*) $PM + MN > AN$ zijn, en hiervan $MN = MN$ aftrekkende, zal (*IX. Ax.*) $PM > AM$ zijn: elk punt P zal dan (*III. Gev. II. Bep.*) buiten den omtrek van den tweeden cirkel liggen, en de cirkels zullen (*X. Bep.*) elkander in A inwendig aanraken.

§. 338. LEERING. Men leert hieruit: 1° *Dat, wanneer twee cirkels elkander uit of inwendig aanraken, derzelver middelpunten, met het raakpunt, op dezelfde regte lijn liggen.* 2° *Dat de middelpunten van alle cirkels, die elkander in hetzelfde punt uit of inwendig aanraken in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

XVII. STELLING. *Fig.* 123.

§. 339. *De beenen van gelijke hoeken, AMB en BMC, welke in eenen cirkel aan het middelpunt staan, snijden van den omtrek gelijke bogen, AB en BC, en van den inhoud gelijke en gelijkvormige sectors, AMB en BMC af,* — en omgekeerd, — *op gelijke bogen, AB en BC, aan den omtrek,*

trek, ſtaan gelijke hoeken, AMB en BMC aan het middelpunt.

Betoog *van het eerſte.* Trek de koorden *AB* en *BC*. Omdat nu de ſtralen *AM*, *BM* en *CM* (*I. Gev. II. Bep.*) gelijk zijn, en (*onderſt.*) hoek $AMB =$ hoek *BMC* is, zal (*X. Stell. I. B.*) $AB = BC$, en daarom zal (*V. Stell.*) boog $AB =$ boog *BC* zijn. — En wanneer men de ſectors *AMB* en *BMC* op elkander past, dan zullen zij klaarblijkelijk op elkander ſluiten, en (*I. Ax.*) gelijk en gelijkvormig zijn.

Betoog *van het tweede.* Wanneer de bogen *AB* en *BC* gelijk zijn; dan zijn (*V. Stell.*) de koorden, welke deze bogen onderſpannen gelijk en de driehoeken *AMB* en *BMC* zijn (*XIII. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig, en daarom is hoek $AMB =$ hoek *BMC*.

§. 340. I. Gevolg. *Fig.* 124. *Wanneer men dan, uit de hoekpunten, B en E, van gelijke hoeken, ABC en DEF, met gelijke ſtralen, AB en DE, twee cirkelboogen, AC en DF, beſchrijft, welke door de beenen dezer hoeken bepaald worden; dan zullen deze cirkelbogen, AC en DF, zoo wel als de cirkel ſectors, ABC en DEF, welke daardoor in de figuur ontſtaan, gelijk zijn.*

§. 341. II. Gevolg. *Fig.* 125. Omdat gelijke koorden (*V. Stell.*) gelijke bogen, en gelijke bogen gelijke hoeken, aan het middelpunt, onderſpannen, zal men eenen hoek *ABC*, op de volgende wijze kunnen vermenigvuldigen: *men beſchrijve, uit het punt B, met eene ſtraal AB, naar welgevallen genomen, eenen cirkel of cirkelboog, en met eene ſtraal, gelijk aan de koorde AC, uit C eenen boog, die den cirkel in D; uit D eenen boog, die den cirkel in E; uit E eenen boog, die den cirkel in F, enz. ſnijdt: dan zullen de bogen AC, CD, DE, EF, enz., welke, door die conſtructie, gelijke koorden hebben, aan het middelpunt B, gelijke hoeken ABC, CBD, DBE, EBF, enz bepalen, en men zal alzoo, met behulp des cirkels, eenen hoek, die gelijk twee, drie, vier en meermalen eenen gegeven hoek is, kunnen zamenſtellen. — Ook zal men, omgekeerd, een' hoek in een zeker aantal gelijke deelen verdeelen kunnen, door den boog, welke dien hoek onderſpant, in even zoo vele gelijke deelen te verdeelen.*

§. 342. III. Gevolg. Nog volgt hieruit: *dat, wanneer men uit het hoekpunt, alwaar twee loodlijnen elkander ſnijden, eenen cirkel beſchrijft, die loodlijnen den cirkel en deszelfs omtrek in vier gelijke deelen zullen verdeelen.* Men noemt deze deelen des cirkels *quadranten.*

XVIII.

XVIII. STELLING. *Fig.* 126.

§. 343. *In elken cirkel, staan de hoeken, AMB en BMC, aan het middelpunt, tot elkander in dezelfde reden, als de bogen, DE en EF, welke, door de beenen dezer hoeken, van den omtrek van dien cirkel worden afgesneden, en op welke zij derhalve geplaatst zijn. Dat is:*

Hoek AMB : Hoek BMC = Boog DE : Boog EF

BETOOG. I. GEVAL. Wanneer de hoeken *AMB* en *BMC* meetbaar zijn; dan hebben zij eene gemeene maat, welke in dezelve respectievelijk *p* en *q* (in de figuur zeven en negen) malen zal begrepen zijn: men zal dan, uit het middelpunt *M*, dat tevens het hoekpunt der hoeken is, een zeker aantal lijnen kunnen trekken, welke den hoek *AMB*, in *p* (in de figuur in zeven.) gelijke hoeken, *AMH*, *HMI*, *enz.*; en den hoek *BMC*, in *q* (in de figuur in negen,) gelijke hoeken, *BMK*, *KML*, *enz.* zullen verdeelen. De beenen dezer hoeken zullen den boog *DE* in *p* (of zeven) kleinere bogen *DN*, *NO*, *enz.*, en den boog *EF* in *q* (of negen) kleinere bogen *EP*, *PQ* *enz.* verdeelen. Omdat nu (*XVII. Stell.*) gelijke hoeken, aan het middelpunt, gelijke bogen van den omtrek afsnijden, zullen de deelen dezer bogen gelijk zijn: de hoek *AMH* zal dan, als de gemeene maat der hoeken, *AMB* en *BMC*, en de boog *DN*, dien deszelfs beenen van den omtrek afsnijden, als de gemeene maat der bogen, *DE* en *EF*, kunnen worden aangemerkt; daar het nu van zelf blijkt: dat de gemeene maat *AMH* der hoeken, *AMB* en *BMC*, op elken hoek zooveelmaal begrepen is, als de gemeene maat *DN* der bogen, *DE* en *EF*, op elken dezer bogen, zal (*Aanm. IX. Bep. II. B.*)

Hoek AMB : Hoek BMC = Boog DE : Boog EF zijn.

II. GEVAL. Wanneer de hoeken *AMB* en *BMC* onmeetbaar zijn; dan zal men, den hoek *BMC*, als den grootsten aannemende, van dien hoek zoo vele hoeken, gelijk aan den hoek *AMB*, afnemen, als mogelijk is, en 'er zal op het laatst een hoek *V* overblijven, kleiner dan de hoek *AMB*. Van den hoek *AMB* zal men den hoek *V* zoo menigmaal afnemen, als mogelijk is, en men zal eindelijk eenen hoek *W*, kleiner dan den hoek *V* overhouden. Op deze wijze, zal men den betrekkingswijzer der hoeken *BMC* en *AMB*, namelijk

$$\left\{\begin{matrix} BMC, & AMB, & V, & W, & X, & Y, & Z, & enz. \\ & a, & b, & c, & d, & e, & f, & enz. \end{matrix}\right\}$$

 door

door eene voortgezette uitmeting, verkrijgen. Maar nu is het, uit de *XVII. Stelling*, klaarblijkelijk: dat, zoo menigmaal de hoek *AMB* van den hoek *BMC* kan afgenomen worden, ook even zoo vele bogen, gelijk aan den boog *DE*, van den boog *EF* zullen worden afgefneden, en dat de hoek *V*, dien men op het laatst overhoudt, eenen boog *V'* zal bevatten, kleiner dan de boog *DE*; dat, al verder, van den boog *DE* zoo vele bogen, gelijk aan den boog *V'*, zullen afgefneden worden, als het mogelijk is, den hoek *V* van den hoek *AMB* aftenemen, terwijl de overblijvende hoek *W* eenen boog *W'* onderfpannen zal, kleiner dan de boog *V'*, *enz.* De uitmeting der hoeken *BMC* en *AMB*, zal dan tevens, door de fnijding van derzelver beenen, den betrekkingswijzer der bogen *EF* en *DE* doen kennen, namelijk:

$$\left\{\begin{matrix} EF, & DE, & V', & W', & X', & Y', & Z', & enz. \\ & a, & b, & c, & d, & e, & f, & enz. \end{matrix}\right\}$$

welke klaarblijkelijk dezelfde wijzergetallen, als de betrekkingswijzer der hoeken *BMC* en *AMB* zal hebben; volgens de *IX. Bepaling II. Boek*, zal dan ook, in het geval van de onmeetbaarheid der hoeken,

$$\text{Hoek } AMB : \text{Hoek } BMC = \text{Boog } DE : \text{Boog } EF$$

moeten zijn.

§. 344. I. Gevolg. *Fig.* 126. *In denzelfden cirkel, zullen de inhouden der fectors, DME en EMF, tot elkander ftaan, in dezelfde reden, als de hoeken, DME en EMF, van derzelver ftralen; of als de bogen, DE en EF, door welke deze fectors bepaald worden.*

§. 345. II. Gevolg. *Fig.* 124. *Twee hoeken, ABC en DEF, zullen dan ook tot elkander, in dezelfde reden ftaan, als de bogen, AC en DF, welke, uit de hoekpunten, B en E, dezer hoeken, met gelijke ftralen, AB en DE, befchreven zijn.*

§. 346. III. Gevolg. *Fig.* 126. *Ook ftaat elke hoek, AMB, tot vier regte hoeken, tot twee regte hoeken, of tot éénen regten hoek, in dezelfde reden, als de boog DE, welke met eene ftraal MD, naar welgevallen genomen, uit het hoekpunt, M, van dien hoek, befchreven zijnde, tusfchen de beenen van dien hoek begrepen is, tot den geheelen omtrek, den halven omtrek, en tot het quadrant van dien zelfden cirkel.*

§. 347.

§. 347. IV. Gevolg. *Fig.* 126. *Wanneer men de lijn AM, om het punt M, laat omdraaijen; dan wordt, door hare beweging, den hoek AMB voortgebragt, en elk punt D brengt, gelijktijdig met dien hoek, eenen boog DE voort, welke met dien hoek altijd in dezelfde bestendige reden staat.*

§. 348. Aanmerking. De waarheden, welke, in de twee voorgaande stellingen, betoogd zijn, zijn, zoo als, op zijnen tijd, omstandiger blijken zal, in het werkdadige der Meetkunst, van een zeer uitgestrekt gebruik; zij leeren ons: hoe den omtrek eens cirkels, groot of klein, dienstbaar gemaakt kan worden, om de betrekking van eenigen hoek tot éénen regten hoek te bepalen, hetgeen, zonder behulp eens cirkels, niet zoo gemakkelijk, en niet, zonder veel omslags, zou kunnen gedaan worden. Want, omdat gelijke koorden gelijke bogen onderspannen, kan men, met eenen passer, op den omtrek eens cirkels, met de uiterste practische naauwkeurigheid, zoo vele gelijke deelen nemen, als men goedvindt; en in de werkdadige Meetkunst, zal blijken: *hoe men den omtrek eens cirkels, in* 360 *of* 400 *deelen, verdeelen kan?* Zulk een verdeelde cirkel is nu wel geene eigenlijke en regtstreeksche maat van eenen hoek: (want elke uitgebreidheid kan alleen, door eene uitgebreidheid van dezelfde soort, gemeten worden,) *maar, wanneer het middelpunt van zulk eenen verdeelden cirkel in het hoekpunt van eenen hoek gelegd wordt; dan zullen de punten van den verdeelden omtrek aanwijzen, hoe vele hoeken, elk gelijk aan éénen graad, aan ééne minuut, enz.* (*vergelijk* §. 42, *en verv. hier boven,*) *in dien hoek begrepen zijn*, en die cirkel zal alzoo hetzelfde doen, als of men, in dien hoek, al de lijnen getrokken had, welke denzelven in graden, minuten, enz. verdeelen. Men zegt daarom:

§. 349. XVI. Bepaling. *Dat een hoek door eenen boog gemeten wordt, wanneer het middelpunt van dien boog, in het hoekpunt van dezen hoek gebragt zijnde, de uiteinden van dien boog aan de beenen van den hoek sluiten; of, wanneer die boog even zoo vele deelen van één-vierde van den omtrek bevat, als de hoek overëënkomstige deelen van éénen regten hoek.*

§. 350. Bijvoegsel. Uit het bewezene volgt: *hoe men, ingevolge de voorschriften* (*VI. Bep. II. B.*), *de betrekking van eenen hoek tot twee regte hoeken, zonder daartoe eenen hoekmeter te gebruiken, eenvoudig door eenen passer bepalen kan?* Ten dien einde, verlenge men één der beenen van den hoek, en men beschrijve, uit het hoekpunt, eenen cirkel; men noeme twee regte hoeken $=\pi$; de boog, tusſchen de beenen van den hoek bevat, $=p$. Stel: dat men π door p mete, *enz.* en, dat deze uitmeting de vergelijkingen: 1°. $\pi=4p+q$; 2°. $p=2q+r$; 3°. $q=3r+s$; 4°. $r=s+t$; 5°. $s=t+u$; 6°. $t=9u$ geve; dan geven ons deze vergelijkingen, zie *VI. Bep. II. B.* als volgt:

$$t=9u$$
$$s=t+u=9u+u=10u$$
$$r=s+t=10u+9u=19u$$
$$q=3r+s=3\times19u+10u=57u+10u=67u$$
$$p=2q+r=2\times67u+19u=134u+19u=153u$$
$$\pi=4p+q=4\times153u+67u=612u+67u=679u$$

Uit deze berekening blijkt nu: dat (*V. Bep. II. B.*) de hoek p tot den hoek π, of tot twee regte hoeken, ſtaat, in dezelfde reden, als 153 tot 679. Men heeft dan: $p=\frac{153}{679}\pi=\frac{153}{679}\times200^{g}=45^{g},06628$ decimale graden $=\frac{153}{679}\times180^{\circ}=40^{\circ}\ 33'\ 34'',7$ ſexageſimale, of oude graden.

Doch, behalve deze handelwijze, welke op de algemeene beginſels van de *VI. Bep. II. B.* berust, kan men nog eene andere volgen, die zeer eenvoudig, en, omdat men dezelve ſlechts, met ééne opening van den pasſer, uitvoert, aan minder misſlagen onderhevig is. Zij, *fig.* 323, *AMB* een hoek, welke met éénen regten hoek moet vergeleken worden. *Beſchrijf uit M, als middelpunt, met eene ſtraal, naar welgevallen, eenen cirkel ABC; neem de punten A en B, zoo naauwkeurig mogelijk, tusſchen de beenen van den pasſer, en laat deze afſtand, van het punt A, linksom, in den omtrek des cirkels gemeten worden, den geheelen cirkel rond, en zoo menigmaal rond, tot dat men in, of nagenoeg bij het punt A, te land kome. Tel dan het getal der afmetingen, als ook, hoeveelmaal men den cirkel zij rond geweest.* Stel dat men, na *drie-en-dertigmaal* den boog *AB* in den omtrek te hebben afgemeten, den cirkel zeer nabij *vijfmaal* zij rond geweest, ten minſte zoo nabij, dat het verſchil niet merkbaar is; dan bevat de hoek *AMB* klaarblijkelijk één-drie-en-dertigſte deel van vijfmaal 400^{g}; derhalve is hoek $AMB=\frac{1}{33}\times2000^{g}=60^{g}\ 606060$ decimale graden. Of $\frac{1}{33}$ van 5 maal $360^{\circ}=54^{\circ}\ 32'\ 43'',5$ graden van de ſexageſimale verdeeling.

XIX. STELLING. *Fig.* 127.

§. 351. *Wanneer eene raaklijn AC, en eene ſnijlijn BD el-*

elkander, in den omtrek eens cirkels, en gevolgelijk, in het raakpunt B, snijden; dan worden de hoeken, ABD en CBD, onder welke deze raak- en snijlijnen elkander, in het raakpunt, ontmoeten, gemeten door de helften van de bogen, BGD en BEHD, des omtreks, welke binnen elken dezer hoeken gelegen zijn.

Betoog. Men trekke, van het raakpunt B, door het middelpunt M, de middellijn BH; en nog de middellijn GE regthoekig op BD. Omdat dan AC eene raaklijn is, is (*XII. Stell.*) de hoek ABH regt en (*II. Ax.*) gelijk aan de som van deszelfs deelen, ABD en DBH, gelijk (*II. Gev. XVIII. Stell. I. B. en constr.*) aan de som der hoeken, MBF en BMF; trekt men nu van deze gelijkheid denzelfden hoek, hoek $DBH =$ hoek MBF, af; dan zal 'er, (*VIII. Ax.*) hoek ABD $=$ hoek BMF, overblijven; en, de supplementen dezer gelijke hoeken zullen insgelijks (*III. Stell. I. B.*) gelijk zijn, namelijk, hoek $CBD =$ hoek BME. Omdat nu de middellijn GE loodregt op de koorde BD staat, is (*VII. Stell.*) de boog $BG =$ den boog DG; en de boog $BE =$ den boog DHE; nu wordt (*XVII. Stell.*) de hoek $BMG =$ hoek ABD, door den boog BG, die de helft van den boog BGD is, en de hoek $BME =$ hoek CBD, door den boog BE, dat is, door de helft van den boog $BEHD$, gemeten; derhalve enz.

XX. Stelling. *Fig.* 128, 129 en 130.

§. 382. *De hoek, ABC, onder welken twee snijlijnen, AB en AC, eens cirkels elkander doorsnijden, wordt, wanneer (Fig. 128.) het punt van doorsnijding B in den omtrek des cirkels gelegen is, gemeten door de helft van den boog AC, welke tusschen de beenen van dien hoek ligt: maar, wanneer deze snijlijnen elkander, binnen of buiten den omtrek, ontmoeten (Fig. 129 en 130.); dan wordt de hoek ABC, onder welken deze snijlijnen elkander ontmoeten, gemeten door de halve som of het halve verschil der bogen, AC en DE, welke tusschen de beenen van dien hoek ABC gelegen zijn.*

Betoog. I. Geval. *Fig.* 128. Laat, door het hoekpunt B, de raaklijn DBE, aangenomen worden; dan wordt (*XIX. Stell.*) hoek DBC, door de helft van den boog BAC; en hoek DBA, door de helft van den boog BA gemeten; gevolgelijk (*VIII. Ax.*) het verschil der hoeken, DBC en DBA, dat is, hoek ABC, door het halve verſchil der bogen BAC en BA, dat is, door de helft van den boog AC.

II. Geval. *Fig.* 129. Trek EF, evenwijdig aan CD; dan is (*XIV. Stell.*) boog $CF =$ boog DE, en (*VII. Ax.*) boog $AC +$ boog $DE =$ boog $AC +$ boog $CF =$ boog AF. Nu wordt (*I. Geval*) de hoek AEF, door de helft van den boog AF, dat is, door de helft van de ſom der bogen, AC en DE, gemeten; die halve ſom moet dan ook den hoek ABC, die (*XXIV. Stell. I. B.*) aan den hoek AEF gelijk is, meten.

III. Geval. *Fig.* 130. Trek EF evenwijdig aan AB; dan is (*XIV. Stell.*) boog $AF =$ boog DE; derhalve (*VIII. Ax.*) boog $CF =$ het verſchil der bogen AC en DE; nu wordt de hoek CEF (*I. Geval*) door de helft van den boog CF, dat is, door het halve verſchil der bogen, AC en DE, gemeten, en dit zelfde halve verſchil meet dan ook de hoek ABC, die (*XXIV. Stell. I. B.*) aan den hoek CEF gelijk is.

§. 353. I. Gevolg. *Fig.* 128. Het blijkt, uit het eerſte geval der ſtelling: *dat een hoek ABC, aan den omtrek eens cirkels ſtaande, gemeten wordt door den halven boog AC, op welken hij ſtaat.* Zie *XII en XIX Bep.*

§. 354 II. Gevolg. *Fig* 128. Indien men de ſtralen AM en CM trekt; dan wordt de hoek AMC, aan het middelpunt, (*XVII. Stell.*) door den boog AC, waarop hij ſtaat, gemeten. *Wanneer dan, op denzelfden boog AC, twee hoeken, AMC en ABC, de eerſte aan het middelpunt, en de tweede aan den omtrek ſtaat; dan is de eerſte hoek gelijk aan het dubbeld van den tweeden; en de tweede gelijk aan de helft van den eerſten.* Zie *XII. Bep.*

§. 355 III. Gevolg. *Fig.* 131. *Alle hoeken, ACB, ADB, AEB, AFB, welke, aan den omtrek, op denzelfden boog AGB ſtaan, zijn gelijk*; omdat zij alle, door de helft van denzelfden boog, AGB, gemeten worden. *Ook zijn de hoeken, welke, in denzelfden cirkel, of in gelijke cirkels, aan den omtrek, op gelijke bogen, ſtaan, onderling gelijk.*

§. 356. IV. Gevolg. *Fig.* 128. *Wanneer men dan de beenen van den hoek ABC, als onbuigbaar aanneemt, en langs de vaste punten, A en C, heen en weder ſchuift; dan zal (mits dat de opening van den hoek ABC dezelfde blijve,) het hoekpunt B den cirkelboog ABC beſchrijven.*

§. 357.

§. 357. V. Gevolg. *Alle hoeken, welke in eenen halven cirkel ſtaan, zijn regt:* omdat zij, door eenen halven omtrek, gemeten worden. — En, *Fig.* 131, *de hoeken ACB, AGB, welke in een cirkel ſegment, AECB of AGB, ſtaan, zijn ſcherp of ſtomp, naar dat dit cirkel ſegment grooter of kleiner dan een halve cirkel is;* omdat de hoek, in het eerſte geval, door minder, en, in het tweede geval, door meer dan den halven omtrek, gemeten wordt.

§. 358. VI. Gevolg. *Fig.* 131. *De ſom van de overſtaande hoeken, ACB en AGB; of GAC en GBC, eens vierhoeks ACBG, welke in eenen cirkel beſchreven is, is gelijk aan twee regte hoeken, en elke hoek van dien vierhoek is gevolgelijk het ſupplement van zijnen overſtaanden hoek.*

Want, daar de hoeken *ACB* en *AGB*, door de helften der bogen, *AGB* en *ACB*, op welken zij ſtaan, gemeten worden, wordt derzelver ſom door de helft van den geheelen omtrek gemeten, en die ſom is dus gelijk aan twee regte hoeken, enz. Het is ook gemakkelijk te zien: *dat geen vierhoek in eenen cirkel kan beſchreven worden, indien niet elke hoek het ſupplement van den overſtaanden is. Om die reden, kan, bij voorbeeld, geen ſcheefhoekig parallelogram in eenen cirkel beſchreven worden.*

XXI. Stelling. *Fig.* 132 *en* 133.

§. 359. *Wanneer twee koorden, AB en CD, elkander, in een punt E, doorſnijden; dan zijn de regthoeken van derzelver deelen aan elkander gelijk. Dat is;* $AE \times BE = CE \times DE$.

Betoog. Men trekke de koorden, *AC* en *BD*; omdat dan de hoeken, *ACE* en *EBD*, op denzelfden boog *AFD*, en de hoeken, *CAE* en *BDE*, op denzelfden boog *CGB*, ſtaan, zijn zij (*III. Gev. XX. Stell.*) gelijk, en vermits de hoeken, *AEC* en *DEB*, (*IV. Stell. I. B.*) nog daarenboven gelijk zijn, zijn de driehoeken, *ACE* en *DBE*, onderling gelijkhoekig, en, om die reden, (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig; men heeft (*Aanm. VIII. Stell. IV. B.*) derhalve de evenredigheid, $AE : CE = DE : BE$: uit welke (*V. Stell. IV. B.*) de vergelijking $AE \times BE = CE \times ED$ volgt.

§. 360. Aanmerking. *Fig.* 133. Wanneer de koorde *AB* eene middeldellijn is, welke de koorde CD regthoekig doorfnijdt; dan is (*VII. Stell.*) $CE = DE$; daar nu, in dit geval, ook nog de betoogde eigenfchap zal plaats hebben, zal $AE \times BE = CE \times ED = CE^2$ zijn. Dat is: *het vierkant van de loodlijn, welke, uit eenig punt van den omtrek eens halven cirkels, op de middellijn valt, is gelijk aan den regthoek, onder de deelen, waarin zij de middellijn verdeelt; en is bijgevolg middenevenredig, tusfchen deze deelen.* Wanneer men nu de ftraal des cirkels $= a$ ftelt; dan is de middellijn $= 2a$; en noemt men dan al verder de afgefnedene AE van de middellijn $= x$, en de loodlijn $CE = y$; dan is $BE = 2a - x$; de vergelijking $AE \times EB = CE^2$ wordt dan ftelkundig aldus gefchreven, $y^2 = 2ax - x^2$, en deze is ééne der vergelijkingen, welke men op den cirkel maken kan, en uit welke alle zijne eigenfchappen kunnen worden afgeleid.

XXII. STELLING. *Fig.* 134.

§. 361. *Wanneer twee fnijlijnen,* EB *en* ED*, elkander, buiten den omtrek, in een punt* E*, doorfnijden; dan zijn de regthoeken, onder de deelen dezer fnijlijnen, welke, tusfchen het fnijpunt en den omtrek, begrepen zijn, gelijk. Dat is;* $AE \times BE = CE \times DE$.

BETOOG. Men trekke wederom de koorden AC en BD; dan is (*VI. Gev. XX. Stell.*) de hoek B het fupplement van den hoek ACD, en de hoek ACE is (*XIX. Bep. I. B.*) insgelijks het fupplement van denzelfden hoek ACD; de hoek ACE is dan (*III. Stell. I. B.*) gelijk aan den hoek B: om dezelfde reden, is de hoek $EAC =$ den hoek D; en, daar de driehoeken, EAC en EDB, nog bovendien eenen gemeenfchappelijken hoek E hebben, zijn zij onderling gelijkhoekig, en daarom (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig; om die reden is dan, $AE : EC = ED : EB$, en (*V. Stell. IV. B.*) $AE \times EB = CE \times ED$.

§. 362. I. AANMERKING. *Fig.* 134. Indien men de lijn EB, om het punt E, laat omdraaijen, en naar den kant van F bewegen; dan komen de punten A en B fteeds nader bij elkander, en vereenigen zich, op hetzelfde oogenblik, dat EB den cirkel, in het punt F, aanraakt; de regthoek $EA \times EB$ verandert dan ook in den regthoek $EF \times EF$, of in EF^2, en men heeft derhalve, $EF^2 = EA \times EB = EC \times ED$. *Wanneer dan eene raaklijn en eene fnijlijn elkander doorfnijden; dan is het vierkant van het gedeelte der raaklijn, tusfchen het raakpunt en het punt van doorfnijding begrepen, gelijk aan den*

den regthoek, onder de deelen van de ſnijlijn, welke, tusſchen het ſnijpunt en den omtrek, begrepen zijn.

§. 363. II. Aanmerking. *Fig.* 132 *tot* 134. De twee voorgaande ſtellingen, zijn twee gevallen van de volgende meer algemeene ſtelling. *Indien twee ſnijlijnen elkander, binnen of buiten den omtrek eens cirkels, doorſnijden; dat zijn de regthoeken der deelen, tusſchen het ſnijpunt en den omtrek begrepen, onderling gelijk.*

XXIII. Stelling. *Fig.* 135.

§. 364. *De vierkanten der koorden, AC en AD, welke, uit het uiteinde van de middellijn AB eens halven cirkels getrokken, en in denzelven geplaatst zijn, zijn tot elkander in dezelfde reden, als de deelen, AE en AF, welke, door de loodlijnen, uit de uiteinden dezer koorden, op de middellijn vallende, van de laatſte worden afgeſneden.*

Betoog. Trek de koorden BC en BD; dan zijn de hoeken, ACB en ADB regt, (*V. Gev. XX. Stell.*) omdat zij in eenen halven cirkel ſtaan, en daarom is (*Leer. XVI. Stell. III. B.*) $AC^2 = AB \times AE$, en $AD^2 = AB \times AF$; nu is (*XI. Stell. III. B.*) $AB \times AE : AB \times AF = AE : AF$; derhalve zal $AC^2 : AD^2 = AE : AF$ zijn.

§. 365. Gevolg. *Fig.* 134. Om dezelfde reden, is $AC^2 : AB^2 = AE : AB$.

XXIV. Stelling. *Fig.* 136.

§. 366. *Wanneer, op de ſtraal AM eens cirkels, en derzelver verlengde, twee punten, B en C, zoodanig genomen worden, dat de ſtraal AM middenevenredig is tusſchen de afſtanden, BM en CM, dezer punten, B en C, tot het middelpunt M, (namelijk $BM : AM = AM : CM$,) dan zullen de afſtanden, PB en PC, van elk punt P des omtreks, tot deze punten, B en C, in dezelfde beſtendige reden, van AB tot AC zijn. Dat is: $PB : PC = AB : AC$.*

Betoog. Omdat, volgens de *onderſtelling*, $BM : AM = AM : CM$ is, zal (*VIII. Stell. II. B.*) $AM - BM : CM - AM = AM : CM$, of $AB : AC = AM : CM$ zijn.

Men trekke nu de ſtraal PM; dan hebben de driehoeken MBP

en MPC den gemeenschappelijken hoek BMP, en vermits nu (*ond.*) $BM : AM = AM : CM$ is, of (omdat $PM = AM$ is,) $BM : PM = PM : MC$; zijn de driehoeken MBP en MPC (*X. Stell. IV. B.*) gelijkvormig; daarom zal (*VIII. Stell. IV. B.*) $BP : CP = PM : CM$, of $BP : CP = PM : CM = AM : CM$ zijn. Maar zoo even is bewezen, dat $AB : AC = AM : CM$ is; derhalve zal (*I. Stell. II. B.*) $BP : CP = AB : AC$ zijn.

XXV. STELLING. *Fig.* 137.

NB. Deze strekt tot een vervolg op de *IV. Stelling* van het *IV. Boek.*

§. 367. *Het vierkant van de lijn* CD, *welke den tophoek eens driehoeks* ABC *in twee gelijke hoeken*, ACD *en* BCD *verdeelt, is gelijk aan den regthoek der opstaande zijden*, AC *en* BC, *verminderd met den regthoek der deelen*, AD *en* BD, *waarin deze lijn* CD *de basis* AB *verdeelt. En het vierkant van de lijn* CF, *welke het supplement* BCE *des tophoeks in twee gelijke deelen verdeelt, is gelijk aan den regthoek, onder de afstanden van het punt* F, *alwaar die lijn het verlengde van de basis doorsnijdt, tot de hoekpunten van de basis*, (AF *en* BF,) *verminderd met den regthoek onder de opstaande zijden*, AC *en* BC, *des driehoeks. Dat is:*

$$1^\circ \quad CD^2 = AC \times BC - AD \times BD$$
$$2^\circ \quad CF^2 = AF \times BF - AC \times BC$$

BETOOG *van het eerste.* Breng, door hoekpunten des driehoeks, ABC, eenen cirkel; verleng CD, tot aan den omtrek, in G, en trek de lijn BG; dan zullen de driehoeken, ADC en GBC, gelijkvormig zijn; want hoek ACD is $=$ hoek GCB (*onderst.*) en hoek $CAD =$ hoek CGB, (*III. Gev. XX. Stell.*) omdat deze hoeken op denzelfden boog BC staan: derhalve zal (*VIII. Stell. IV. B.*) $AC : CD = CG : BC$ zijn, en (*V. Stell. IV. B.*) $AC \times BC = CD \times CG$; maar nu is (*VIII. Gev. VI. Stell. III. B.*) $CD \times CG = CD^2 + CD \times DG$, derhalve is, (*IV. Ax.*) $AC \times BC = CD^2 + CD \times DG$. Wederom is (*XXI. Stell.*) $CD \times DG = AD \times BD$; daarom zal (*IV. Ax.*) $AC \times BC = CD^2 + AD \times BD$, en $CD^2 = AC \times BC - AD \times BD$ zijn.

BETOOG *van het tweede.* Men verlenge CF, tot aan den omtrek in H, en trekke de koorde AH. Omdat dan (*onderst. en IV. Stell. I. B.*) hoek $ACH =$ hoek $ECF =$ hoek BCF, en (*VI. Gev. XX. St.*) hoek

hoek $AHF =$ hoek CBF is, zijn (*I. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) de driehoeken ACH en FCB gelijkvormig, en daarom is, $AC : CH = CF : BC$, en (*V. Stell. IV. B.*) $AC \times BC = CH \times CF$; hier bij tellende $CF^2 = CF^2$ zal (*VII. Ax.*) $AC \times BC + CF^2 = CH \times CF + CF^2 =$ (*VIII. Gev. VI. Stell. III. B.*) $FH \times FC$ zijn; maar nu is (*XXII. Stell.*) $FH \times FC = AF \times FB$; derhalve is (*IV. Ax.*) $AC \times BC + CF^2 = AF \times BF$; en $CF^2 = AF \times BF - AC \times BC$.

§. 368. Aanmerking. Men zal, naar aanleiding van het betoogde, in deze en in de *IV. Stell. IV. Boek*, de deelen, waarin elke zijde eens driehoeks, door de lijn, welke den overstaanden hoek midden door deelt, benevens deze lijn zelve, (de drie zijden des driehoeks gegeven zijnde,) kunnen berekenen.

XXVI. Stelling. *Fig.* 117.

§. 369. *De inhoud van eenen driehoek is gelijk aan eenen regthoek, welke de som van al de zijden dezes driehoeks tot lengte, en de halve straal des ingeschrevenen cirkels, tot breedte, heeft.*

Betoog. De lijnen, AD, BD en CD, welke, uit het middelpunt des ingeschrevenen cirkels, tot aan de hoekpunten des driehoeks getrokken worden, verdeelen den driehoek, ABC, in drie driehoeken, ABD, BCD en ACD, welker toppunten, in het middelpunt D, des ingeschrevenen cirkels, aan elkander sluiten; en welke, omdat de zijden des driehoeks den ingeschreven cirkel aanraken (*XII. Stell. en XI. Bep. III. B.*) deszelfs straal tot hoogte hebben; derhalve zal, de straal $= r$ stellende, (*Gev. VIII. Stell. III. B.*) *drieh.* $ABD = AB \times \frac{1}{2}r$; *drieh.* $BCD = BC \times \frac{1}{2}r$, en *drieh.* $ACD = AC \times \frac{1}{2}r$; en daarom (*VII. Ax.*) zal *Inh. drieh.* $ABC = (AB + BC + AC) \times \frac{1}{2}r$ zijn.

§. 370. Bijvoegsel. Wanneer men, gelijk, in het Bijvoegsel op de XVIII en XIX. *Stellingen* van het III. *Boek*, $AB = a$, $BC = b$, en $AC = c$ en $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$ stelt; dan is *Inh. drieh.* $ABC = \ldots \sqrt{(s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c))} = \frac{1}{2} r \times 2s = rs$; derhalve zal, wanneer men de leden dezer vergelijking tot de tweede magt verheft, daarna alles door s^2 deelt, en eindelijk uit de quotienten den vierkants-wortel trekt,

$$r = \sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}}$$

zijn;

zijn; eene vergelijking, waardoor de ſtraal van den cirkel, welke in eenen driehoek beſchreven is, wanneer deszelfs zijden gegeven zijn, zal kunnen berekend worden.

XXVII. Stelling. *Fig.* 138.

§. 371. *De regthoek, onder twee zijden, AC en BC, eens driehoeks ABC, is gelijk aan den regthoek, onder de loodlijn CE, (welke, uit het hoekpunt van den hoek C, welke tegen over de derde zijde AB, ſtaat, op dezelve valt,) en de middellijn CD, van den omgeſchreven cirkel. Dat is:* $AC \times BC = CE \times CD$.

Betoog. Men trekke de koorde BD; dan zijn de driehoeken, AEC en DBC, gelijkvormig; want de hoeken A en D, op denzelfden boog BC ſtaande, zijn (*III. Gev. XX. Stell.*) gelijk; en, omdat CD eene middellijn is, ſtaat de hoek DBC in eenen halven cirkel, en is derhalve (*V. Gev. XX. Stell.*) regt en gelijk aan den hoek AEC; de driehoeken, AEC en DBC, zijn dan (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig, en daarom is $AC:CD = CE:BC$, en eindelijk (*V. Stell. IV. B.*) $AC \times BC = CD \times CE$.

§. 372. Gevolg. Uit de betoogde vergelijking, volgt onmiddelijk: $CD = \frac{AC \times BC}{CE}$. Vermenigvuldigt men dan den teller en den noemer dezer breuk met AB; dan verkrijgt men: $CD = \frac{AB \times BC \times AC}{AB \times CE}$. Dat is: *de middellijn van den cirkel, welke om eenen driehoek omſchreven is, is gelijk aan het product der drie zijden, gedeeld door den dubbelden inhoud des driehoeks.* Wanneer men dan de ſtraal des omgeſchreven cirkels $= R$ ſtelt; dan zal

$$R = \frac{\frac{1}{4} a b c}{\sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]}}$$

zijn. Ook zal (*zie Bijv. op de XXVI. Stell.*) $Rr = \frac{abc}{4s}$ zijn.

XXVIII. Stelling. *Fig.* 139.

§. 373. *De regthoek, onder de hoekpuntslijnen, AC en BD, van eenen vierhoek, welke in den cirkel beſchreven is, is gelijk aan de ſom der regthoeken, welke onder de overſtaande* *zijden van dien vierhoek worden zamengesteld. Dat is:* $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. *En de twee hoekpuntslijnen,* AC *en* BD, *van dienzelfden vierhoek staan tot elkander, in dezelfde reden, als de sommen van de regthoeken der zijden, welke aan de uitzinden dezer hoekpuntslijnen zamenkomen. Dat is:*

$$AC : BD = AD \times AB + BC \times CD : AB \times BC + AD \times CD.$$

Betoog *van het eerste.* Neem de boog $AP =$ den boog BC, en trek de koorden DP en AP. Omdat dan de bogen AP en BC, gelijk zijn, zal (*VII. Ax.*) ook boog $APB =$ boog PBC zijn; derhalve is (*III. Gev. XX. Stell.*) hoek $ADE =$ hoek BDC, en hoek DAE of $DAC =$ hoek DBC; de driehoeken AED en BCD, zijn dan (*I. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig. Om dezelfde reden, is hoek $ADB =$ hoek EDC, en hoek $ABD =$ hoek ECD, en daarom zijn ook (*I. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) de driehoeken ABD en ECD gelijkvormig; daarom is (*VIII. Stell. IV. B.*) $AD : AE = BD : BC$; en $CD : CE = BD : AB$, en (*V. Stell. IV. B.*) $AD \times BC = AE \times BD$, en $CD \times AB = CE \times BD$. Deze vergelijkingen te zamen optellende, zal men vinden: (*VII. Gev. VI. Stell. III. B. en VII. Ax.*) $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$.

Betoog *van het tweede.* Behalve de gelijkvormige driehoeken, AED en BCD, zijn ook nog de driehoeken, APE en DBA gelijkvormig; want (*III. Gev. XX. Stell.*) hoek APE is $=$ hoek DBA; en, omdat boog $AB =$ boog PC is, is hoek $PAE =$ hoek BDA. Wij hebben dan (*VIII en V. Stell. IV. B.*) en, omdat (*conſt. en V. Stell.*) de koorde $AP =$ de koorde BC is,

$$\left\{\begin{array}{l} AD : DE = BD : DC \\ BC : PE = BD : AB \end{array}\right\}; \text{ derhalve } \left\{\begin{array}{l} DE \times BD = AD \times DC \\ PE \times BD = BC \times AB \end{array}\right\}.$$

Deze vergelijkingen optellende, en onder het oog houdende, dat $DE \times BD + PE \times BD$ (*VII. Gev. VI. Stell. III. B.*) $= BD \times PD$ is; dan zal men verkrijgen:

$$BD \times DP = AD \times DC + BC \times AB.$$

Wanneer men nu de boog $DQ =$ den boog $AP =$ den boog BC neemt, en de koorden AQ en DQ trekt; dan zal men, op dezelfde wijze, met behulp der gelijkvormige driehoeken, AFD en ABC; DQF en ACD, bewijzen dat

$$AC \times AQ = AD \times AB + BC \times CD$$

zal zijn: men zal dan (*I. Gev. IV. Stell. II. B.*) mogen stellen:

$$BD \times DP : AC \times AQ = AD \times DC + BC \times AB : AD \times AB + BC \times CD$$

maar,

maar omdat de bogen AP en DQ gelijk, en bijgevolg de bogen ADQ en DAP, insgelijks gelijk zijn, en daarom (*V. Stell.*) de koorde $AQ=$ de koorde DP is, zal $BD \times DP : AC \times AQ = BD : AC$ zijn, en daarom zal (*I. Stell. II. B.*) men hebben:

$$BD : AC = AD \times DC + BC \times AB : AD \times AB + BC \times CD.$$

BIJVOEGSEL. *Fig.* 139.

§. 374. Wanneer de zijden van eenen vierhoek, welke in eenen cirkel beſchreven is, gegeven zijn; dan zal men, door het betoogde der twee voorgaande ſtellingen, deszelfs inhoud en de middellijn des cirkels, waarin hij beſchreven is, onder anderen, aldus vinden kunnen. Stel $AD=a$; $DC=b$; $CB=c$, en $AB=d$; $AC=x$, en $BD=y$; dan heeft men, volgens het betoogde in de voorgaande ſtelling, de twee vergelijkingen:

$$xy = ac + bd; \quad \text{en} \quad \frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

deze twee vergelijkingen oplosſende, vindt men:

$$x = \sqrt{\left\{\frac{(ac+bd).(ad+bc)}{ab+cd}\right\}}; \quad \text{en } y = \sqrt{\left\{\frac{(ac+bd).(ab+cd)}{ad+bc}\right\}}.$$

Maar, volgens de XXVII *Stelling*, en het bijvoegſel op de XVIII en XIX *Stellingen* van het derde *Boek*, wordt de middellijn des cirkels, beſchreven om den driehoek, welks zijden a, b en x zijn, (die middellijn M noemde,) uitgedrukt door

$$M = 2\sqrt{\left\{\frac{a^2b^2x^2}{4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2}\right\}}$$

Wanneer men nu, in deze vergelijking, voor x, de waarde ſtelt, welke zoo even voor dezelve gevonden is; dan zal men, na behoorlijke herleiding, voor die middellijn verkrijgen:

$$M = 2\sqrt{\left\{\frac{(ac+bd).(ad+bc).(ab+cd)}{(a+b+c-d).(a+b+d-c).(a+c+d-b).(b+c+d-a)}\right\}}$$

Nu is de inhoud van den driehoek $ADC = \frac{1}{2}abx : M$; en die van den driehoek $ABC = \frac{1}{2}cdx : M$; de inhoud van den vierhoek $ABCD$ is derhalve gelijk aan $\frac{1}{2}(ab+cd)x : M$; wanneer men dan eindelijk, in deze laatſte uitdrukking, voor x en M, de waarden ſtelt, welke boven daarvoor gevonden zijn; dan verkrijgt men (den inhoud des vierhoeks $=I$ ſtellende,)

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{\left\{(a+b+c-d).(a+b-c+d).(a-b+c+d).(b+c+d-a)\right\}}$$

en

en ſtellende kortheidshalve, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d=s$, dan verandert deze uitdrukking in de volgende:

$$I=\sqrt{\{(s-a).(s-b).(s-c).(s-d)\}}$$

Dat is: *de inhoud van eenen vierhoek, in den cirkel beſchreven, is gelijk aan den vierkants-wortel uit het gedurig product der vier verſchillen, die overblijven, wanneer men, van de halve ſom der zijden, elke zijde, in het bijzonder, aftrekt.* Stelt men $a=14$, $b=27$, $c=38$ en $d=47$; dan vindt men: $I=840$ vierkante éénheden, en $M=\frac{1}{420}\sqrt{410197561}=48, 222$, *enz.*

Wanneer men, in de vergelijking, welke de waarde van den inhoud des vierhoeks, die in den cirkel beſchreven is, uitdrukt, (en alleen ter berekening van den inhoud van eenen vierhoek dienen kan, wanneer hij in eenen cirkel beſchreven kan worden,) ééne der zijden, bij voorbeeld, de zijde $d=0$ ſtelt; dan verandert die vierhoek in eenen driehoek, en dan is $s-d=s$, en de gevondene waarde voor I verandert dan in die, welke in het *Bijvoegſel op de XVIII en XIX Stellingen van het III Boek* gevonden is. Voorts wordt, in dezelfde onderſtelling, de teller der breuk, welke de waarde van M geeft, $ac\times bc\times ab=a^2b^2c^2$, en de vergelijking voor M wordt derhalve de vergelijking voor de middellijn of ſtraal van den cirkel, welke om den driehoek beſchreven is. Zie *Gevolg* XXVII *Stelling.*

ZESDE BOEK.

Over de regelmatige Veelhoeken, de Quadratuur *des Cirkels*, *en de* Isoperimetrische *Figuren.*

---

§. 375. I. BEPALING. *Fig.* 140. Een *regelmatige Veelhoek*, *ABCDEFG*, is een veelhoek, die gelijke zijden, *AB*, *BC*, *CD*, *enz.* en gelijke hoeken, *ABC*, *BCD*, *CDE*, *enz.* heeft. *Een regelmatige veelhoek is bijgevolg gelijkzijdig, en tevens gelijkhoekig.*

§. 376. AANMERKING. Een driehoek, die gelijkzijdig is, is tevens (*XIV. en XV. Stell. I. B.*) gelijkhoekig; en een driehoek, die gelijkhoekig is, is tevens gelijkzijdig: maar, wanneer eene regtlijnige figuur meer dan drie zijden heeft, is het gelijk zijn der zijden geen gevolg meer van het gelijk zijn der hoeken; noch de gelijkheid der hoeken een gevolg van de gelijkheid der zijden: beide deze omstandigheden moeten alsdan, om het wezen van eenen regelmatigen veelhoek uittemaken, te zamen vereénigd zijn.

I. STELLING. *Fig.* 140.

§. 377. *Men kan, in, en om, elken regelmatigen veelhoek, eenen cirkel beschrijven.* Of, met andere woorden: *de hoekpunten van eenen regelmatigen veelhoek liggen in den omtrek van denzelfden cirkel, en al deszelfs zijden zijn raaklijnen tot eenen anderen cirkel, welke met den eersten gelijkmiddelpuntig is, of met denzelven hetzelfde middelpunt heeft.*

BETOOG *van het eerste.* Onderstel: dat, door drie nabij elkander gelegene hoekpunten, *A*, *B* en *C*, eenen cirkel beschreven worde, welks middelpunt in *M* zij, (hetgeen volgens de *X. Stelling* van het *V. Boek*, altijd geschieden kan). Laten dan, van het middelpunt *M*, tot aan al de hoekpunten, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* en *G*, de lijnen, *AM*, *BM*, *CM*, *enz.* worden getrokken, en nog, uit hetzelfde middelpunt *M*, de lijn *MP*, loodregt op de zijde *BC*. Wanneer men dan de vier-

vierhoekige figuur *ABPM* op *MP* laat omdraaijen, tot dat dezelve op de vierhoekige figuur *DCPM* valt; dan zal vooreerst, omdat *MP* loodregt op *BC* ſtaat, hoek *CPM* = hoek *BPM*, en (*VII. Stell. V. B.*) *BP* = *CP* is, de lijn *BP* langs de lijn *CP*, en het punt *B* in het punt *C* vallen; voorts, omdat, (*onderſt.*) wegens den aard des gelijkvormigen veelhoeks, hoek *ABP* = hoek *DCP*, en *AB* = *CD* is, zal *AB* langs *CD*, en het punt *A* in het punt *D* vallen: de uiteinden der lijnen *MA* en *MD* vallen alzoo in elkander, en (*XIII. Bep. I. B.*) de lijn *AM* is gelijk aan de lijn *DM*. Omdat nu alle ſtralen van eenen cirkel gelijk zijn, zal de cirkel, welke door de hoekpunten *A*, *B* en *C* loopt, ook te gelijk door het hoekpunt *D* loopen. Op dezelfde wijze, zal, wanneer men de loodlijn *MQ* trekt, bewezen worden: dat diezelfde cirkel, welke door de hoekpunten *A*, *B*, *C* en *D* loopt, ook tevens door de hoekpunten *E*, *F*, *G*, *enz.* loopen zal, en het is derhalve daardoor ten klaarſte bewezen: dat al de hoekpunten van eenen veelhoek, die gelijke zijden en gelijke hoeken heeft, in den omtrek van denzelfden cirkel liggen, en dat men diensvolgens, om elken regelmatigen veelhoek, altijd eenen cirkel beſchrijven kan.

Betoog *van het tweede.* Wanneer men dan, om den veelhoek, eenen cirkel beſchreven heeft; dan zijn de zijden van dien veelhoek koorden van de bogen, waarin de hoekpunten van dien veelhoek den omtrek des omgeſchrevenen cirkels verdeelen: deze koorden zijn nu, wegens de regelmatigheid des veelhoeks, gelijk en zij hebben derhalve (*XI. Stell. V. B.*) gelijke afſtanden van het middelpunt, *M*, des omgeſchrevenen cirkels: dat is, de loodlijnen, *MP*, *MQ*, *MR*, *enz.* zijn even lang: wanneer men derhalve uit het middelpunt des omgeſchrevenen cirkels, als middelpunt, met ééne dezer loodlijnen, *MP*, bij voorbeeld, als ſtraal, eenen cirkel beſchrijft, dan zal die cirkel door de uiteinden *P*, *Q*, *R*, *S*, van al die loodlijnen gaan, en de zijden des veelhoeks *BC*, *CD*, *EF*, *enz.*, op welke zij loodregt vallen, (*XII. Stell. V. B.*) aanraken: die cirkel zal dan (*XIV. Bep. V. B.*) in den veelhoek beſchreven zijn, en met den cirkel die 'er om beſchreven is, hetzelfde middelpunt *M* gemeen hebben.

§. 378. Leering. *Fig.* 140. Men leert uit dit betoog: *dat een regelmatige veelhoek*, *ABCDEFGA*, *kan begrepen worden, zamengeſteld te zijn, uit de vereëniging van even zoo vele gelijke en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken*, *ABM*, *BCM*, *CDM*, *DEM*, *EFM*, *FGM*, *GAM*, *als de veelhoek zijden of hoeken heeft, welke gelijkbeenige driehoeken alle met derzelver toppunten, in één punt M, aan elkander ſluiten, welk punt het middelpunt van den regelmatigen veelhoek genoemd wordt, en tevens het gemeene middelpunt is van de cirkels, welke, om en in dien veelhoek, beſchreven zijn.*

§. 379. II. Bepaling. Elk een dezer gelijkbeenige driehoeken, ABM, BCM, *enz.* wordt de *middelpunts driehoek* des veelhoeks genoemd; en de tophoek AMB, van dien driehoek draagt den naam van *centerhoek* of *middelpuntshoek* van den veelhoek; terwijl elk der hoeken van den veelhoek, als, bij voorbeeld, ABC, BCD, *enz.* door de benaming van *polygoonshoek* des veelhoeks onderſcheiden wordt. De loodlijn MP, welke, uit het middelpunt M, op ééne der zijden valt, noemt men *apothema.*

§. 380. I. Gevolg. Omdat het getal der middelpunts driehoeken, uit welke een regelmatige veelhoek beſtaat, aan het getal zijner zijden, of hoeken, gelijk is, en de ſom der middelpuntshoeken van elken veelhoek (*II. Gev. VI. Stell. I. B.*) gelijk is aan vier regte hoeken, zal, indien n het getal der zijden of hoeken beteekent, de middelpuntshoek van eenen regelmatigen veelhoek door $\frac{4R}{n}$ worden uitgedrukt.

§. 381. II. Gevolg. *Fig.* 140. Omdat al de middelpunts driehoeken, ABM, BCM, *enz.*, van eenen regelmatigen veelhoek gelijk en gelijkvormig zijn, en (*III. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) het ſupplement van den tophoek eens gelijkbeenigen driehoeks gelijk is aan het dubbeld van éénen der hoeken aan de baſis, *moet de centerhoek van eenen veelhoek gelijk zijn aan het ſupplement van deszelfs polygoonshoek, en de polygoonshoek omgekeerd het ſupplement van den centerhoek.*

§. 382. III. Gevolg. Om derhalve de center- en polygoonshoeken van eenen regelmatigen veelhoek, die een gegeven getal zijden of hoeken heeft, te vinden, *deelt men* $4R$ *of* $360°$ *door het getal der zijden, dan verkrijgt men den centerhoek, en, dezen centerhoek van* $2R$ *of* $180°$ *aftrekkende, zal het verſchil gelijk aan den polygoonshoek zijn.* Aldus is:

In

In eenen regelmatigen	*de centerhoek*	*de polygoonshoek*
driehoek	$1\frac{1}{3}R = 120^{\circ}$	$\frac{2}{3}R = 60^{\circ}$
vierhoek	$R = 90^{\circ}$	$R = 90^{\circ}$
vijfhoek	$\frac{4}{5}R = 72^{\circ}$	$1\frac{1}{5}R = 108^{\circ}$
zeshoek	$\frac{2}{3}R = 60^{\circ}$	$1\frac{1}{3}R = 120^{\circ}$
n-hoek	$\frac{2}{n} \times 2R$	$\frac{n-2}{n} \times 2R$

§. 383. IV. Gevolg. *Fig.* 140. Nog volgt uit het bewezene: *dat de lijnen, welke twee polygoonshoeken van eenen veelhoek midden door deelen, gelijk ook de loodlijnen, welke, uit het midden van twee zijden, loodregt op dezelve worden opgerigt, elkander in het gemeene middelpunt van den veelhoek en van de in en omgeſchrevene cirkels ſnijden.* Hierdoor kan dan gemakkelijk het middelpunt eens veelhoeks gevonden, en eenen cirkel, in of om denzelven, beſchreven worden.

II. Stelling. *Fig.* 141.

§. 384. *Het vierkant, in den cirkel beſchreven, is gelijk aan tweemaal het vierkant van de ſtraal; en de zijde van dit vierkant ſtaat tot de ſtraal van dien cirkel, in dezelfde reden, als de vierkants-wortel uit het getal twee tot de éénheid.*

Betoog. Wanneer men in eenen cirkel twee middellijnen AC en BD trekt, welke elkander regthoekig ſnijden, en voorts de uiteinden dezer middellijnen door de koorden AB, BC, CD en AD vereénigt; dan zijn (*III. Gev. XVII. Stell. V. B.*) de bogen AB, BC, CD en AD, onderling gelijk, en bijgevolg (*V. Stell. V. B.*) ook de koorden, welke deze bogen onderſpannen: de vierhoek $ABCD$, is dan een regelmatige vierhoek, welke, door de middellijnen des cirkels, in vier gelijke middelpunts driehoeken, AMB, BMC, CMD en AMD verdeeld is. Nu is, in den regthoekigen driehoek, ABM (*XVI. Stell. III. B.*) $AB^2 = AM^2 + BM^2$; of, omdat $AM = BM$ is, $AB^2 = 2AM^2$, en daarom zal (*V. Stell. II. B.*) $AB^2 : AM^2 = 2 : 1$, en (*VI. Gev. VI. Stell. III. B.*) eindelijk $AB : AM = \sqrt{2} : 1$ zijn.

§. 385. Leering. Men leert, uit dit betoog, hoe een vierkant in eenen cirkel moet beſchreven worden.

§. 386. Gevolg. De hoekpuntslijn van een vierkant is de middellijn van deszelfs omgeſchrevenen cirkel.

III. STELLING. *Fig.* 142.

§. 387. *De betrekking van de hoekpuntslijn eens vierkants tot de zijde van dit vierkant is onmeetbaar.*

BETOOG. In het vierkant $ABCD$, is de hoekpuntslijn AC, grooter dan de zijde AC, en, wanneer men de zijde BC, op de hoekpuntslijn AC past, en $CE = BC$ maakt, zal men bevinden, dat deze hoekspuntslijn kleiner dan tweemaal de zijde van het vierkant is; al hetwelk ook, uit andere beginselen, bij gevolgtrekking, kan opgemaakt worden. Om nu de betrekking tusschen de hoekpuntslijn en de zijde des vierkants optemaken, zal men, naar het voorschrift der *VI. Bepaling* van het *II. Boek*, den betrekkingswijzer tusschen die lijnen moeten bepalen. Laat die betrekkingswijzer door

$$\begin{Bmatrix} AC, & AB, & AE, & P, & Q, & R, & S, & enz. \\ 1, & a, & b, & c, & d, & e, & enz. & \end{Bmatrix}$$

worden voorgesteld, in welken, zoo als reeds gebleken is, het eerste wijzergetal *één* is; dan zal men, om dien wijzer verder optemaken, AB, door AE, AE door P, P door Q, *enz.* meten, en dan zullen de getallen a, b, c, *enz.* bekend worden. Maar deze uitmeting wordt op het laatst moeijelijk en onzeker: de figuur geeft een geschikter middel aan de hand, om de volgende wijzergetalien, door gevolgtrekking, met behulp van reeds bekende beginselen, te bepalen. Men beschrijve uit C, met CB als straal, den halven cirkel EBF; omdat dan ABC een regte hoek is, is (*XII. Stell. V. B.*) AB eene raaklijn, en (*I. Aanm. XXII. Stell. V. B.*) $AB^2 = AF \times AE$: men heeft dan (*Gev. VI. Stell. en VI. Stell. IV. B.*) de evenredigheid, $AB : AE = AF : AB$; of, omdat $EF = 2BC = 2AB$ is, $AB : AE = 2AB + AE : AB$. Wanneer derhalve AB door AE gemeten wordt, dan zal (*IX. Bep. II. B.*) de betrekkingswijzer dezelfde zijn, als wanneer men AF door AB, of $2AB + AE$ door AB meet; maar $2AB + AE$ door AB gemeten zijnde, geeft twee, en 'er blijft AE over: de waarde van a is derhalve gelijk aan *twee*. Volgens den wijzer, moet voorts AE door P gemeten worden; dan, zulks zal hetzelfde zijn, als AB door AE, hetzelfde als $2AB + AE$ door AB te meten: men zal alzoo, voor het wijzergetal b, wederom het getal *twee* verkrijgen. Het blijkt hieruit: dat, wanneer men met die uitmetingen blijft voortgaan, de betrekking van elke twee op elkander volgende grootheden in den wijzer, dezelfde zal zijn, en dat de lijnen

AC en *AB* gevolgelijk geene gemeene maat hebben en (*VIII. Bep. II. B.*) daarom onmeetbaar zijn.

§. 388. Gevolg. *De zijde van den regelmatigen vierhoek is bijgevolg, met betrekking tot de middellijn, en de ſtraal des ingeſchreven cirkels, onmeetbaar.*

§. 389. Aanmerking. *Door het betoog dezer ſtelling, is de wezenlijkheid van het beſtaan der onmeetbare grootheden, door een dadelijk voorbeeld, meetkunſtig bevestigd.* Ook is, uit den zamenhang van dit betoog, gebleken: dat $\sqrt{2}$, door de gedurige breuk [1, (2) *enz.*], kan worden uitgedrukt. *Vergelijk II. C.* §. 322.

IV. Stelling. *Fig.* 143.

§. 390. *De zijde van den regelmatigen zeshoek is gelijk aan de ſtraal van den cirkel, waarin hij beſchreven is.*

Betoog. Volgens het *III. Gevolg I. Stelling*, is de centerhoek van eenen regelmatigen zeshoek gelijk twee-derde van eenen regten hoek: de regelmatige zeshoek beſtaat derhalve uit de vereëeniging van zes gelijkzijdige driehoeken, *ABM*, *BCM*, *CDM*, *DEM*, *EFM* en *AFM*, welke, aan hetzelfde hoekpunt *M*, aan elkander ſluiten: dit punt *M* is nu het middelpunt des zeshoeks, en tevens het middelpunt van den omgeſchrevenen cirkel, welks ſtraal *AM* bijgevolg gelijk is aan de zijde van den zeshoek.

§. 391. I. Gevolg. *Fig.* 143. Wanneer men derhalve, uit eenig punt *B*, in den omtrek eens cirkels, met deszelfs ſtraal *BM*, eenen cirkelboog beſchrijft, welke den omtrek in de punten *A* en *C* doorſnijdt, en voorts, door de punten *B*, *A* en *C*, de middellijnen, *BE*, *AD* en *CF* trekt; *dan zal de omtrek des cirkels, door die conſtructie, in zes gelijke deelen verdeeld zijn; en, wanneer men nu de uiteinden dezer deelen door koorden vereënigt, zal 'er een regelmatige zeshoek in den cirkel beſchreven zijn.*

§. 392. II. Gevolg. *Fig.* 143. Door diezelfde conſtructie, zal men eenen regelmatigen of gelijkzijdigen driehoek in den cirkel beſchrijven; want, nadat men, uit eenig punt *B*, met de ſtraal des cirkels, den cirkelboog *AMC* beſchreven heeft, zal men ſlechts de middellijn *BE* behoeven te trekken, en de punten, *A*, *C* en *E*, door regte lijnen, te vereënigen, om den gelijkzijdigen driehoek, *ACE*, in dien cirkel beſchreven, te verkrijgen.

§. 393. III. Gevolg. *Fig.* 143. Omdat de bogen *AB*, *BC*, *CD*,

 DE,

DE, EF en FA, gelijk zijn, zullen (*XIV. Stell. V. B.*) CF aan AB en DE; AD aan BC en EF; BE aan CD en AF evenwijdig zijn: de zeshoek $ABCDEF$, kan dan (*I. Bep. II. B.*) begrepen worden uit de zamenvoeging der parallelogrammen, $ABCM$, $CMED$ en $AMEF$, te ontſtaan: omdat nu (*Gev. I. Stell. III. B.*) de hoekpuntslijnen van eenen parallelogram elkander midden doorſnijden, is $MG = BG$; $MH = HD$; $MI = IF$; $AG = GC$; $CH = HE$; $AI = IE$; ook is (*I. Stell. III. B.*) driehoek $ABC =$ driehoek ACM; driehoek $CDE =$ driehoek CME; driehoek $AFE =$ driehoek AME. Men leert hieruit:

1° *Dat de loodlijn of apothema van eenen gelijkzijdigen driehoek gelijk is aan de helft van de ſtraal des cirkels, waarin hij beſchreven is.*

2° *Dat, wanneer een regelmatige driehoek en een regelmatige zeshoek in denzelfden cirkel beſchreven zijn, de inhoud van den zeshoek gelijk is aan tweemaal den inhoud des driehoeks.*

§. 394. IV. Gevolg. *Fig.* 143. Omdat de driehoek AMG (*IX. Stell. V. B.*) regthoekig is, zal (*XVI. Stell. III. B.*) $AM^2 = AG^2 + MG^2$ en $AG^2 = AM^2 - MG^2 = AM^2 - \frac{1}{4} AM^2 = \frac{3}{4} AM^2$ zijn; daarom zal $AG = AM \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} AM\sqrt{3}$, en $2\,AG = AC = AM \times \sqrt{3}$, en derhalve (*V. Stell. II. B.*) $AC : AM = \sqrt{3} : 1$, dat is: *de zijde van den regelmatigen driehoek ſtaat tot de ſtraal van den cirkel, waarin hij beſchreven is, als de vierkants-wortel uit drie tot de éénheid.*

§. 395. V. Gevolg. De loodlijn EG is gelijk aan $1\frac{1}{2}\ EM$, omdat $MG = \frac{1}{2} EM$ (*bew.*) is; gevolgelijk is (*Gev. VIII. Stell. III. B.*) de inhoud van den driehoek $ACE = \frac{1}{2} AC \times EG = \frac{1}{2} \times EM \times \sqrt{3}$ vermenigvuldigd met $1\frac{1}{2}\ EM = \frac{3}{4} EM^2 \times \sqrt{3}$; *de inhoud van den gelijkzijdigen driehoek ſtaat dan tot het vierkant van de ſtraal des omgeſchrevenen cirkels, gelijk driemaal de vierkants-wortel uit drie, tot vier.* — En hieruit is dan ook de betrekking van den inhoud des regelmatigen zeshoeks tot het vierkant van de ſtraal des omgeſchreven cirkels, of deszelfs zijde, bekend, en als $3\sqrt{3}$ tot 2.

§. 396. VI. Gevolg. Omdat de polygoonshoek van eenen regelmatigen zeshoek gelijk is aan 120°, en derhalve een evenmatig deel van vier regte hoeken is, *zullen gelijke regelmatige zeshoeken aan elkander geſloten kunnen worden, zonder eenige ruimte tusſchen dezelve open te laten.* Deze eigenſchap heeft de zeshoek met den regelmatigen driehoek en het vierkant gemeen: doch in geenen anderen veelhoek wordt deze eigenſchap gevonden.

§. 397.

§. 397. III. Bepaling. Wanneer men eene grootheid zoodanig in twee deelen deelt, dat de geheele grootheid tot het grootste deel, in dezelfde reden staat, als het grootste tot het kleinste deel; dan wordt die grootheid gezegd, in de *uiterste en middelste reden* verdeeld te zijn.

I. Lemma. *Fig.* 144.

§. 398. *Wanneer men, op het einde van eene lijn, AB, eene loodlijn BD, op dezelve oprigt, welker lengte gelijk is aan de helft dezer lijn, AB; en op de lijn AD, het gedeelte DE gelijk maakt aan BD of AC, of aan de helft van de lijn AB, en eindelijk AF gelijk neemt aan AC; dan zal de lijn AB, in het punt F, in de uiterste en middelste reden verdeeld zijn.*

Betoog. Omdat de driehoek ABD regthoekig is, zal (*XVI. Stell. III. B.*) $AD^2 = AB^2 + BD^2$ zijn: wederom is (*I. Lemma III. B.*) $AD^2 = AE^2 + DE^2 + 2AE \times ED$; derhalve (*IV. Ax.*) $AB^2 + BD^2 = AE^2 + DE^2 + 2AE \times ED$. Nu is (*onderst.*) $DE = BD$; en $BD^2 = DE^2$: deze laatste vergelijking van de naast voorgaande afgetrokken zijnde, zal (*VIII. Ax.*) $AB^2 = AE^2 + 2AE \times ED$ overblijven: in deze vergelijking kan men, in plaats van $2AE \times ED$, stellen $AE \times 2DE$, of (omdat $2DE = AB$ is,) $AE \times AB$: men heeft (*IV. Ax.*) gevolgelijk $AB^2 = AE^2 + AB \times AE$; wederom is (*VIII. Gev. VI. Stell. III. B.*) $AB^2 = AB \times AF + AB \times BF$; derhalve (*IV. Ax.*) $AB \times AF + AB \times BF = AE^2 + AB \times AE$; men trekke hier af (omdat $AF = AE$ is,) $AB \times AF = AB \times AE$; dan zal (*VIII. Ax.*) $AB \times BF = AE^2 = AF^2$ zijn, en daarom (*VI. Stell. IV. B.*) $AB : AF = AF : BF$, en (*III. Bep.*) de lijn AB is gevolgelijk in de uiterste en middelste reden verdeeld.

§. 399. Bijvoegsel. Wanneer men de lijn AB, als de éénheid aanneemt, dan zal men de waarde der deelen AF en BF, door berekening, gemakkelijk vinden kunnen; want omdat $BD = \frac{1}{2} AB$ is, zal $BD = \frac{1}{2}$ zijn: nu is (*XVI. Stell. III. B.*) $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; en $AD = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$; daarom $AF = AE = AD - DE = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$; en $BF = AB - AF = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. *De deelen eener lijn, welke in de uiterste en middelste reden verdeeld is, zijn derhalve, als van den vierkants-wortel uit het getal* vijf *afhangende, met betrekking tot de geheele lijn, onmeetbaar.*

V. Stelling. *Fig.* 145.

§. 400. *Wanneer men de ſtraal AM, eens cirkels in de uiterſte en middelſte reden deelt; dan is het grootſte deel LM, gelijk aan de zijde van den regelmatigen tienhoek, welke in dezen cirkel kan beſchreven worden.*

Betoog. Men make de koorde AB, gelijk aan het grootſte ſtuk LM, van de verdeelde ſtraal, en trekke de lijnen MB en BL; dan is (*onderſt.*) $AL:LM = LM:AM$; of, omdat $AB = LM$ is, $AL:AB = AB:AM$; de driehoeken ABM en ALB, welke den gemeenſchappelijken hoek A hebben, zijn derhalve (*X. Stell. IV. B.*) gelijkvormig, en om die reden is dan ook (*VIII. Stell. IV. B.*) $AM:BM = AB:BL$: maar nu is (*I. Gev. II. Bep. V. B.*) $AM = BM$; derhalve (*IV. Stell. II. B.*) ook $BL = AB = LM$. Wegens de eigenſchap des gelijkbeenigen driehoeks, is dan ook hoek $ABL =$ hoek $AMB =$ hoek LBM; de gelijke hoeken ABM en BAM zijn dan het dubbeld van den hoek AMB, en de ſom van de hoeken des driehoeks ABM, is gelijk aan vijfmaal den hoek AMB; vijfmaal den hoek AMB is dan (*XVIII. Stell. I. B.*) gelijk aan twee regte hoeken, en de hoek AMB is derhalve één-tiende van vier regte hoeken: de boog AB is derhalve (*XVII. Stell. V. B.*) één-tiende van den omtrek, en deszelfs koorde AB de zijde van den regelmatigen tienhoek, welke in den cirkel kan beſchreven worden.

§. 401. I. Gevolg. *Fig.* 145. Wanneer men derhalve de ſtraal eens cirkels in de uiterſte en middelſte reden deelt, zal men de koorde van eenen boog vinden, welke gelijk is aan één-tiende van den omtrek. Wanneer men nu dezen boog, naar het II. *Gev.* der XVII. *Stelling* van het V. *Boek*, in den omtrek rondpast, zal men denzelven in tien gelijke deelen verdeelen, en de koorden dezer gelijke bogen zullen de zijden van den regelmatigen tienhoek, $ABCDEFGHIK$, uitmaken.

§. 402. II. Gevolg. *Fig.* 145. Wanneer men de zijde van den regelmatigen tienhoek gevonden heeft, is die van den regelmatigen vijfhoek van zelve bekend: zij is namelijk de koorde van den dubbelden boog AB, de koorde van den boog ABC, of eindelijk de lijn AC.

§. 403. III. Gevolg. *Fig.* 145. Wanneer men uit A als middelpunt, met de ſtraal AM des cirkels, waarin de tien en de vijfhoek beſchreven zijn, eenen cirkelboog NO beſchrijft, welke den omtrek in

N doorsnijdt; dan is (*IV. Stell.*) de boog ABN één-zesde van den omtrek des cirkels; daar nu de bogen AB en ABC, respectievelijk één-tiende en één-vijfde van den omtrek bedragen, zal de boog NC gelijk aan $\frac{1}{5}$ min $\frac{1}{6}$ gelijk $\frac{1}{30}$ van den omtrek, en de boog BN gelijk $\frac{1}{6}$ min $\frac{1}{10}$, dat is $\frac{1}{15}$ van den omtrek zijn, en men zal alzoo één-vijftiende en één-dertigste deel van den omtrek des cirkels, en bijgevolg de zijden van eenen dertig en van eenen vijftien hoek verkrijgen.

§. 404. IV. GEVOLG. *Fig.* 145. Wanneer men de lijnen AB en MC verlengt, tot dat zij elkander in het punt Q ontmoeten; dan zal, omdat, wegens de gelijke hoeken LBM, BML en BMC, de lijnen BL en QM evenwijdig zijn, en daarom (*XXVI. Stell. I. B.*) hoek $ABL =$ hoek $BQM =$ (*bew.*) hoek BMQ is; BQ (*XV. Stell. I. B.*) gelijk BM zijn. Nu is (*II. Gev. I. Stell. IV. B.*) $AB : BQ = AL : LM$; en $AL : LM = LM : AM$ (volgens de *onderstelling*) $= BQ : AQ$; derhalve (*I Stell. II. B.*) $AB : BQ = BQ : AQ$; en $BQ = BM = AN$ zijnde, is BQ de zijde van den regelmatigen zeshoek. *Indien men dan de zijde van den regelmatigen zeshoek, en die van den regelmatigen tienhoek, welke in eenen cirkel beschreven zijn, in ééne regte lijn vereënigt, zal deze regte lijn in de uiterste en middelste reden verdeeld zijn.*

§. 405. V. GEVOLG. *Fig.* 145. Laat MR loodregt op AB gesteld worden, dan zal zij den hoek AMB in twee gelijke deelen verdeelen, en laat eindelijk de lijn BR worden getrokken; dan is de hoek $AMR = \frac{1}{20}$ van vier regte hoeken, en de hoek CMR gelijk $\frac{1}{5}$ min $\frac{1}{20}$ gelijk $\frac{3}{20}$ van vier regte hoeken, gelijk $\frac{3}{10}$ van twee regte hoeken: maar de hoek ACM, is de helft van het supplement van den hoek AMC; de helft van het supplement van $\frac{2}{5}$ van twee regte hoeken, de helft van $\frac{3}{5}$ van twee regte hoeken, gelijk $\frac{3}{10}$ van twee regte hoeken: de hoek RMC is dan (*IV. Ax.*) gelijk aan den hoek ACM, en CR is (*XV. Stell. I. B.*) gelijk MR; de driehoeken AMC en CRM, zijn daarom gelijkvormig; derhalve zal (*VIII. Stell. IV. B.*) $AC : AM = CM$ of $AM : CR$, en (*V. Stell. IV. B.*) $AC \times CR = AM^2$ zijn. Wederom zijn de driehoeken ABR en ACB gelijkvormig; want zij hebben den gemeenschappelijken hoek CAB, en, omdat hoek $AMR =$ hoek BMR, $AM = BM$ en $RM = RM$ is, zal (*X. Stell. I. B.*) $AR = RB$ en (*XV. Stell. I. B.*) hoek $ABR =$ hoek $BAR =$ hoek ACB zijn: de driehoeken ABC en ARB zijn daarom (*X. Stell. IV. B.*) gelijkvormig, en (*VIII. Stell. IV. B.*) $AR : AB = AB : AC$, en daarom is dan ook (*V. Stell. IV. B.*) $AB^2 = AR \times AC$:

maar nu is boven betoogd, dat $AM^2 = AC \times CR$ is; telt men deze vergelijkingen bij elkander, dan zal (*VII. Ax.*) $AB^2 + AM^2 = AC \times AR + AC \times CR =$ (*VIII. Gev. VI. Stell. VI. B.*) AC^2 zijn. Dat is: *Wanneer een regelmatige vijfhoek, zeshoek en tienhoek, in denzelfden cirkel, beschreven zijn, dan is het vierkant op de zijde des vijfhoeks gelijk aan de som van de vierkanten, welke op de zijden van den zeshoek en van den tienhoek beschreven zijn.*

§. 406. VI. Gevolg. *Fig.* 146. Laten de middellijnen AB en CP elkander in M regthoekig doorsnijden, en EM gelijk aan de zijde van den tienhoek genomen worden; dan is (*IV. Gev.*) de lijn AE in het punt M in de uiterste en middelste reden verdeeld; wanneer men dan de straal AM, in het punt D, in twee gelijke deelen verdeelt; dan is $AM^2 = 4MD^2 = AE \times EM = 2MD \times EM + EM^2$; hier bijtellende hetzelfde vierkant MD^2; dan zal (*VII. Ax.*) $5MD^2 = 2MD \times EM + EM^2 + MD^2 =$ (*I. Lemma III. B.*) $= ED^2$ zijn. Indien men nu de lijn CD trekt; dan is (*XVI. Stell. III. B.*) $CD^2 = DM^2 + MD^2 = AM^2 + MD^2 = 4MD^2 + MD^2 = 5MD^2$, en diensvolgens $DE^2 = DC^2$, of $DE = DC$. Uit dit alles volgt dan: *dat, wanneer men, in eenen cirkel, twee middellijnen AB en CP trekt, die elkander regthoekig doorsnijden, en voorts het punt D, in het midden van de straal, AM, neemt, en, uit dit punt D, als middelpunt, met CD, als straal, eenen cirkelboog beschrijft, of wel DE = DC neemt, de lijn EM de zijde van den tienhoek, en EC de zijde van den vijfhoek zal zijn, welke in dien cirkel kunnen beschreven worden.*

§. 407. VII. Gevolg. *Fig.* 146. Indien men FG loodregt op AB stelt, en de lijn EF trekt; dan is (*XVI. Stell. III. B.*) $EF^2 = ED^2 + DF^2$; maar (*VI. Gev.*) ED^2 is $= 5MD^2$ en DF^2 is (*Aanm. XXI. Stell. V. B.*) $BD \times AD = 3MD^2$; gevolgelijk is $EF^2 = 3MD^2 + 5MD^2 = 8MD^2 = 2AM^2 = AM^2 + CM^2 = AC^2$; daarom is $EF = AC$: nu is FG (*III. Gev. III. Stell.*) de zijde van den regelmatigen driehoek, welke in denzelfden cirkel beschreven is; AF is dan de zijde van den regelmatigen zeshoek, in denzelfden cirkel staande. *Wanneer men dan, na vooraf twee middellijnen, AB en CP, in den gegeven cirkel, regthoekig op elkander getrokken te hebben, AF = AM neemt, en uit F met eene straal gelijk aan AC eenen cirkelboog beschrijft, welke de middellijn AB in E doorsnijdt; dan zal EM de zijde des tienhoeks en EC de zijde des vijfhoeks zijn, welke in dezen cirkel kunnen beschreven worden.*

VI.

VI. STELLING. *Fig.* 147.

§. 408. *Wanneer een regelmatige veelhoek in eenen cirkel beſchreven is; dan zal men, in dien cirkel, eenen regelmatigen veelhoek kunnen beſchrijven, die een dubbeld aantal van zijden heeft.*

BETOOG. Laten *ABM*, *BCM*, *CDM*, *enz.* de middelpunts driehoeken van den veelhoek zijn, welke in den cirkel beſchreven is. Men beſchrijve, uit de hoekpunten *A* en *B*, met ééne en dezelfde ſtraal, naar welgevallen, twee cirkelbogen, welke elkander in *P* ſnijden; indien men dan de lijn *MP* trekt; dan zal de boog *AB*, in het punt *E*, in twee gelijke deelen, de bogen *AE* en *BE*, verdeeld zijn; want de driehoeken *AMP* en *BMP* zijn (*XIII. Stell. I. B.*) gelijk, en gelijkvormig, en daarom is hoek *AME* = hoek *BME*, en (*XVII. Stell. V. B.*) de boog *AE* = den boog *BE*; de koorde *AE* is dan ook (*V. Stell. V. B.*) gelijk aan de koorde *BE*. Op dezelfde wijze zal men de bogen *BC*, *CD*, *enz.* verdeelen, en men zal alzoo in den cirkel eenen veelhoek verkrijgen, die een dubbeld aantal zijden heeft.

§. 409. GEVOLG. *Omdat men, uit de III, IV en V Stellingen geleerd heeft, hoe een zeshoek, vierhoek, vijfhoek, tienhoek, vijftienhoek en dertighoek, in eenen cirkel kan beſchreven worden, zal men nu ook in ſtaat zijn, om eenen veelhoek van* 8, 16, 32, 64, 128, 256, *enz., zijden; van* 12, 24, 48, 96, 192, *enz., zijden; van* 20, 40, 80, 160, *enz., zijden; van* 60, 120, 240, 480, *enz., zijden in eenen cirkel te beſchrijven, en men zal derhalve den omtrek eens cirkels ook in even zoo vele gelijke deelen kunnen verdeelen.*

VII. STELLING. *Fig.* 147.

§. 410. *Wanneer een regelmatige veelhoek in eenen cirkel beſchreven is; dan zullen de raaklijnen, welke, door de hoekpunten van dezen veelhoek, aan den cirkel getrokken worden, eenen regelmatigen veelhoek van hetzelfde aantal zijden bepalen, en deze zal om den cirkel beſchreven zijn.*

BETOOG. De raaklijnen *AH* en *BH*, zullen elkander in het punt *H* ſnijden: en dan is (*Leer. XIII. Stell. V. B.*) *AH* = *BH*: om dezelfde reden, zal *BI* = *IC*; *CK* = *KD* zijn, *enz.*: daar nu (*XIII. St. I. B.*) hoek *AMH* = hoek *BMH*; hoek *BMI* = hoek *IMC* is, zal, omdat

dat de hoeken *AMB* en *BMC* gelijk zijn, ook hoek *BMH* = hoek *BMI* zijn; en derhalve (*IX. Stell. I. B.*) *HB* = *BI*; om dezelfde reden, zal *IC* = *CK* zijn, en (*VII. Ax.*) *HI* = *IK*, en uit dezelfde gronden, zal volgen: dat al de zijden van den veelhoek, welke door deze raaklijnen gevormd wordt, onderling gelijk zijn. Eindelijk zijn, wegens de gelijke en gelijkvormige driehoeken, *AMH*, *BMH*, *BMI*, *CMI*, de hoeken om de punten *H* en *I* gelijk, en daarom is hoek *AHI* = hoek *BIC* = hoek *CKD* = *enz.* De veelhoek, welke, door de raaklijnen bepaald wordt, is dan gelijkhoekig en gelijkzijdig, en derhalve (*I. Bep.*) een regelmatige veelhoek, welks zijden zooveel in aantal zijn, als de zijden van den regelmatigen veelhoek, welke ondersteld wordt, in den cirkel beschreven te zijn.

§. 411. Gevolg. *Fig.* 147. *Men zal dan, om eenen gegeven cirkel, alle die veelhoeken kunnen beschrijven, welke, naar aanwijzing van het gevolg der voorgaande stelling, in den cirkel beschreven kunnen worden.*

VIII. Stelling. *Fig.* 140.

§. 412. *De inhoud van eenen regelmatigen veelhoek is gelijk aan deszelfs omtrek, vermenigvuldigd met de halve apothema, of de halve straal van den ingeschreven cirkel.*

Betoog. Het is, uit het betoog van de *I. Stelling* gebleken, dat, in elken regelmatigen veelhoek, *ABCDEFG*, eenen cirkel kan beschreven worden, welke de zijden van dien veelhoek, in de punten *P*, *Q*, *R*, *S*, *enz.*, welke in het midden van dezelve gelegen zijn, aanraakt, en dat het middelpunt *M* van dien cirkel tevens het middelpunt van den veelhoek is, in hetwelk de toppunten van alle de middelpunts driehoeken, *ABM*, *BCM*, *CDM*, *DEM*, *enz.*, uit welke de veelhoek kan begrepen worden zamengesteld te zijn, zamenkomen. Nu is de inhoud van den middelpunts driehoek *BCM* (*Gev. VIII. Stell. III. B.*) gelijk aan de zijde *BC*, vermenigvuldigd met de helft van de loodlijn *MP*. Op dezelfde wijze, is inhoud driehoek $CDM = CD \times \frac{1}{2} MQ$; inhoud driehoek $DEM = DE \times \frac{1}{2} MR$, *enz.* De som van de inhouden dezer driehoeken is nu gelijk aan den inhoud van den geheelen veelhoek, en, (omdat al de stralen *MP*, *MQ*, *enz.* gelijk zijn,) gelijk aan de som van al de zijden des veelhoeks, vermenigvuldigd met de helft van de straal des ingeschreven cirkels, gelijk aan $(AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA) \times \frac{1}{2} MP$.

IX. STELLING. *Fig.* 148.

§. 413. *Alle regelmatige veelhoeken, hetzelfde aantal zijden of hoeken hebbende, zijn gelijkvormige figuren; en, als zoodanige, ſtaan derzelver omtrekken tot elkander, in dezelfde reden, als de ſtralen, of middellijnen, van derzelver in of omgeſchrevene cirkels; en de inhouden van diezelfde veelhoeken zijn tot elkander, in dezelfde reden, als de vierkanten van de ſtralen, of middellijnen, van diezelfde in en omgeſchrevene cirkels.*

BETOOG. Laten $ABCDE$ en $abcde$, twee regelmatige veelhoeken, bij voorbeeld, twee regelmatige vijfhoeken, zijn: dan moet bewezen worden: dat derzelver omtrekken tot elkander in dezelfde reden zijn, als de ſtralen of middellijnen der in en omgeſchreven cirkels; en dat de inhouden dezer veelhoeken tot elkander ſtaan, als de vierkanten van de ſtralen of middellijnen van diezelfde cirkels.

Het is, uit het eerſte *Gevolg* der eerſte *Stelling*, gebleken: dat elke regelmatige veelhoek begrepen kan worden, zamengevoegd te zijn, uit even zoo vele gelijke en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken, als 'er zijden of hoeken in dien regelmatigen veelhoek voorkomen. Laten dan ABM en abm, de middelpunts driehoeken der regelmatige veelhoeken zijn, in welke wij, ten einde het betoog algemeener te maken, een aantal van n zijden of hoeken aannemen; dan is (*III. Gev. I. Stell.*) de centerhoek, AMB, van den eerſten veelhoek, zoowel als die van den tweeden, gelijk aan $\frac{4R}{n}$; en de polygoonshoek van den eenen, zoowel als van den anderen veelhoek, gelijk aan $\frac{n-2}{n} \times 2R$; derhalve zijn ook de hoeken BAM en ABM, gelijk aan de hoeken bam en abm, welke de helften dezer polygoonshoeken zijn; de middelpunts driehoeken AMB en amb, zijn derhalve gelijkhoekig en om die reden (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig.

Omdat nu vooreerst, beide veelhoeken uit hetzelfde aantal van zulke gelijkvormige middelpunts driehoeken zijn zamengeſteld, zijn zij (*zie Leer. XVII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig.

Ten tweeden. Men heeft, ingevolge de gelijkvormigheid der driehoeken, ABM en abm, (*VIII. Stell. en II. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) e evenredigheden:

$$AB : ab = AM : am$$
$$AB : ab = PM : pm$$

maar

maar AM en am, zijn de ſtralen der omgeſchrevene en PM en pm de ſtralen der ingeſchrevene cirkels; de zijden der regelmatige veelhoeken zijn derhalve tot elkander in dezelfde reden, als de ſtralen der in en omgeſchrevene cirkels: maar nu is ook (*VI. Stell. II. B.*)

$$n \times AB : n \times ab = AM : am = 2AM : 2am$$

$$n \times AB : n \times ab = PM : pm = 2PM : 2pm$$

wanneer dan n het aantal van de zijden der veelhoeken beteekent; dan is $n \times AB$ gelijk aan den omtrek des eerſten, en $n \times ab$ gelijk aan den omtrek des tweeden veelhoeks, en de omtrekken der veelhoeken ſtaan dan ook tot elkander in dezelfde reden, als de ſtralen der in en omgeſchrevene cirkels, en derhalve ook als derzelver dubbelde ſtralen of middellijnen.

Eindelijk heeft men (*XI. Stell. IV. B.*) de evenredigheden:

$$\textit{Inh. drieh. } ABM : \textit{Inh. drieh. } abm = AM^2 : am^2 : 4AM^2 : 4am^2$$

$$\textit{Inh. drieh. } ABM : \textit{Inh. drieh. } abm = MP^2 : mp^2 : 4MP^2 : 4mp^2$$

en, volgens *VI. Stell. II. B.*, zal men dan ook de evenredigheden:

$$n \times ABM : n \times abm = AM^2 : am^2 = 4AM^2 : 4am^2$$

$$n \times ABM : n \times abm = MP^2 : mp^2 = 4MP^2 : 4mp^2$$

mogen ſtellen. Nu is $n \times ABM$, gelijk aan den inhoud van den eerſten, en $n \times abm$, gelijk aan den inhoud van den tweeden veelhoek: de inhouden der gelijkvormige regelmatige veelhoeken zijn derhalve tot elkander in dezelfde reden, als de vierkanten van de ſtralen of van de middellijnen der in en omgeſchrevene cirkels.

X. Stelling. *Fig.* 149.

§. 414. *Wanneer, in en om eenen cirkel, twee regelmatige veelhoeken, van hetzelfde aantal zijden, en welker inhouden wij A en B noemen, en voorts, in en om dienzelfden cirkel, twee veelhoeken, tweemaal zooveel zijden als de eerſte hebbende, en welker inhouden wij A' en B' noemen, beſchreven zijn: dan zal 1° de inhoud van den veelhoek, A', welke in den cirkel ſtaat en het dubbeld aantal zijden heeft, midden-evenredig zijn tusſchen de inhouden der veelhoeken, A en B, welke in en om den cirkel ſtaan, en het halve aantal zijden hebben. 2° Zal de ſom van de inhouden der veelhoeken A en A', in den cirkel ſtaande, tot het dubbeld van den inhoud van den kleinſten dezer veelhoeken A, welke het minſte getal zijden heeft,*

heeft, dat is $2A$, *in dezelfde reden ſtaan, als de inhouden van de veelhoeken van het enkelde en van dubbelde getal zijden, welke om den cirkel beſchreven zijn: dat is, men zal de evenredigheden*

$$A : A' = A' : B$$
$$A + A' : 2A = B : B'$$

moeten betoogen.

Betoog. Zij de gelijkbeenige driehoek, ABM, één der middelpunts driehoeken van den veelhoek A, aan welken wij een aantal van n zijden geven; dan is de inhoud van dien veelhoek gelijk aan n maal den inhoud van dien middelpunts driehoek, AMB; en dan is $A = n \times$ *drieh.* AMB. Men deele den tophoek, AMB, des middelpunts driehoeks, door de lijn MD, in twee gelijke deelen, en trekke aan het punt D, de raaklijn CDE, welke de verlengde beenen van den driehoek, ABM, in de punten C en E, ontmoet, dan is de driehoek, CEM, de middelpunts driehoek van den n hoek, welke om den cirkel beſchreven is, en dan is $B = n \times$ *drieh.* CEM. Men trekke voorts de koorden AD en BD; dan zijn ADM en BDM de middelpunts driehoeken van den $2n$ hoek, in den cirkel beſchreven, en, om die reden, zal $A' = 2n \times$ *drieh.* $ADM = n \times$ *vierh.* $ADBM$ zijn. Men deele eindelijk de hoeken AMD en BMD, door de lijnen MF en MG, in twee gelijke deelen, en trekke de lijnen AF en BG, welke (omdat $AM = DM$, $MF = MF$ en hoek $AMF =$ hoek DMF is, en (*X. Stell. I. B.*) hoek $MAF =$ hoek MDF is,) raaklijnen tot den cirkel zullen zijn, zijnde $AF = DF$ en $BG = DG$, en de hoek $FMG =$ den hoek AMD; de driehoek FGM zal dan de middelpunts driehoek van den $2n$ hoek zijn, welke om den cirkel beſchreven is, en men heeft derhalve, omdat *vierh.* $AFDM$ klaarblijkelijk gelijk aan den driehoek FGM is, $B' = 2n \times$ *vierh.* $AFDM$. Na deze verklaring van de bereiding der figuur, is het betoog der geſtelde evenredigheden zeer gemakkelijk.

1° Vooreerst hebben de driehoeken, AMH en AMD, als aan het toppunt A zamenkomende, gelijke hoogten, en zijn daarom (*XIV. St. III. B.*) tot elkander als hunne baſes, dat is:

$$\textit{Inh. drieh. } AMH : \textit{Inh. drieh. } AMD = MH : MD$$

maar, omdat de hoeken AHM en CDM, (*IX en XII. Stell. III. B.*) regt en de lijnen AH en CD (*I. Gev. XXXIII. Bep. I. B.*) derhalve evenwijdig zijn, zal (*II. Gev. I. Stell. IV. B.*) $MH : MD = AM : MC$ zijn, en men zal daarom (*I. Stell. II. B.*) mogen ſtellen:

Inh.

$$Inh.\ drieh.\ AMH : Inh.\ drieh.\ AMD = AM : CM.$$

Deze lijnen AM en CM, zijn de bases der driehoeken, ADM en CDM, welker toppunten, in hetzelfde punt D, zamenkomen, en daarom gelijke hoogten hebben: men zal dan (*XIV. Stell. III. B.*) wederom stellen kunnen:

$$Inh.\ drieh.\ AMD : Inh.\ drieh.\ CMD = AM : CM.$$

Vergelijkt men deze evenredigheid met de voorgaande; dan zal (*I. St. II. B.*)

$$Inh.\ drieh.\ AMH : Inh.\ drieh.\ AMD = Inh.\ drieh.\ AMD : Inh.\ drieh.\ CMD$$

zijn. De inhoud van den driehoek AMD, is derhalve midden-evenredig tusschen de inhouden der driehoeken, AMH en CMD: neemt men nu elken van de inhouden dezer driehoeken $2n$ maal; dan verkrijgt men de inhouden der veelhoeken, A, A' en B, en heeft derhalve de evenredigheid, $A : A' = A' : B$. De $2n$ hoek in den cirkel beschreven, is alzoo midden-evenredig tusschen de n hoeken, welke, in en om denzelfden cirkel, beschreven zijn.

2° Omdat de driehoeken, DMF en CFM, aan hetzelfde punt M zamenkomen; is (*XIV. Stell. III. B.*)

$$Inh.\ drieh.\ DMF : Inh.\ drieh.\ CFM = DF : CF$$

maar nu is, bij de bereiding der figuur, de hoek $DMF =$ den hoek CMF gemaakt, en daarom is (*IV. Stell. IV. B.*) $DF : CF = DM : CM$, of, omdat $AM = DM$ is, $DF : CF = AM : CM$, en dienvolgens (*I. Stell. II. B.*)

$$Inh.\ drieh.\ DMF : Inh.\ drieh.\ CFM = AM : CM$$

Nu is boven bewezen: dat de lijnen AM en CM tot elkander staan, als de driehoeken AMH en ADM, als de inhouden der veelhoeken, A en A': men heeft dan wederom (*I. Stell. II. B.*)

$$A : A' = Inh.\ drieh.\ MDF : Inh.\ drieh.\ CMF$$

uit deze evenredigheid en de figuur, volgt nu: (*VIII. Stell. II. B.*)

$$A + A' : A = Inh.\ drieh.\ CDM : Inh.\ drieh.\ MDF$$

en, wanneer men de volgende termen dezer evenredigheid dubbeld neemt, en onder het oog houdt, dat het dubbeld van den driehoek, MDF, gelijk aan den driehoek FGM is, is (*VI en VII. Stell. II. B.*)

$$A + A' : 2A = Inh.\ drieh.\ CDM : Inh.\ drieh.\ FGM.$$

Maar de driehoeken CDM en FGM, zijn, gelijk gezegd is, de 2^{nde} deelen van de veelhoeken B en B', en zijn daarom (*II. Gev. VI. St. II. B.*) met deze veelhoeken evenredig; dat is:

$$Inh.\ drieh.\ CDM : Inh.\ drieh.\ FGM = B : B'$$

men

men zal dan, (*I. Stell. II. B.*) deze evenredigheid met de voorgaande vergelijkende, verkrijgen:

$$A + A' : 2\,A = B : B'.$$

§. 415. I. Gevolg. Omdat de midden-evenredige tusſchen twee grootheden grooter dan de kleinſte, en kleiner dan de grootſte dezer grootheden is, en de veelhoek, welke om den cirkel beſchreven is, grooter is dan die, van hetzelfde getal zijden, welke in den cirkel ſtaat, zal van de veelhoeken, welke in den cirkel ſtaan, de veelhoek A' van $2\,n$ zijden grooter zijn, dan de veelhoek A van n zijden; en dan zal ook, in de evenredigheid, $A + A' : 2\,A = B : B'$, de eerſte term $A + A'$ grooter dan de tweede term $2\,A$ zijn, en derhalve ook B grooter dan B' zijn. *De veelhoeken, in den cirkel beſchreven, worden dan grooter, en die, welke om den cirkel beſchreven zijn, kleiner, wanneer men het getal der zijden verdubbelt.*

§. 416. II. Gevolg. Uit de eerſte evenredigheid, $A : A' = A' : B$, volgt: $A' = \sqrt{(A \times B)}$, en uit de tweede, $B' = 2\,A \times B : (A + A')$. Wanneer dan de betrekking van twee veelhoeken, van hetzelfde getal zijden, in en om eenen cirkel beſchreven zijnde, in getallen bekend is; dan zal men ook de getallen vinden kunnen, welke de betrekking van de inhouden der veelhoeken, welke een dubbeld getal zijden hebben, tot elkander en tot de gegevene veelhoeken, uitdrukken. Bij voorbeeld, wanneer, in en om eenen cirkel, eenen regelmatigen driehoek beſchreven is; dan is het ligt te zien: dat de inhoud van den driehoek, om den cirkel ſtaande, gelijk is aan viermaal den inhoud des driehoeks, welke in den cirkel ſtaat: indien men dan den laatſten als de vlakte éénheid aanneemt, dan zal $A = 1$; $B = 4$ zijn, en dan is: $A' = \sqrt{A \times B} = \sqrt{4} = 2 =$ den inhoud van den regelmatigen zeshoek, (hetwelk met het *III. Gev. IV. Stell.* overéénkomt,) en $B' = 2\,A \times B : (A + A') = 2\tfrac{2}{3} =$ inhoud van den zeshoek, om den cirkel beſchreven: ſtellende wederom $A = 2$ en $B = 2\tfrac{2}{3}$; dan is $A' = \sqrt{A \times B} = \sqrt{2 \times 2\tfrac{2}{3}} = 1\tfrac{1}{3}\sqrt{3} =$ inhoud van den twaalfhoek, in den cirkel beſchreven, en uitgedrukt in éénheden van den driehoek.

Over de Quadratuur *van den Cirkel.*

§. 417. IV. Bepaling. Door *Quadratuur van den cirkel* verſtaat men gemeenlijk de betrekking, welke 'er tusſchen deszelfs inhoud en het vierkant, hetwelk op de ſtraal of de middellijn van dien cirkel beſchreven is, beſtaat.

§. 418. Aanmerking. Het vinden van de Quadratuur des cirkels is met de theorie der regelmatige veelhoeken, welke, in en om denzelven, kunnen beſchreven worden, zoo naauw verknogt, dat het, na de voornaamſte en algemeenſte eigenſchappen dezer veelhoeken overwogen te hebben, hier de geſchiktſte plaats is, het Problema van de Quadratuur des cirkels te leeren oplosſen.

II. Lemma. *Fig.* 149.

§. 419. *De omtrek van eenen cirkel is langer dan de omtrek van eenigen regelmatigen veelhoek, welke in denzelven, en korter dan de omtrek van eenigen regelmatigen veelhoek, welke om denzelven beſchreven is.*

Betoog. Laten, ABM en CEM, de middelpunts driehoeken der in en omgeſchrevene veelhoeken zijn; dan zal, wanneer men het getal der zijden $= n$ ſtelt, de omtrek des veelhoeks in den cirkel beſchreven $= n \times AB = 2n \times AH$ zijn; en de omtrek van een' veelhoek van een dubbeld getal zijden $= 2n \times AD$; omdat nu de driehoek ADH regthoekig is, is (*XVI. Stell. I. B.*) $AD > AH$; derhalve $2n \times AD > 2n \times AH$, dat is: *de omtrek van eenen regelmatigen veelhoek, in den cirkel beſchreven, is grooter dan die, welke ſlechts het halve getal zijden heeft.* Wederom is, omdat hoek CMF $=$ hoek DMF is, (*IV. Stell. IV. B.*) $CF : DF = MC : DM$; maar $MC > DM$ zijnde, is $CF > FD$, of, $CF > AF$, en daarom (*IX. Ax.*) $CD > AF + FD$, of, $CD > FG$; derhalve $2n \times CD > 2n \times FG$, dat is: *wanneer, om eenen cirkel, twee regelmatige veelhoeken, waar van de eene het dubbeld getal zijden van de andere heeft, beſchreven zijn; dan zal de omtrek van den veelhoek van het dubbeld getal zijden kleiner dan die van den anderen veelhoek zijn.* De omtrekken der veelhoeken, welke in den cirkel beſchreven zijn, worden derhalve ſteeds grooter, wanneer men voortgaat, met derzelver zijden te verdubbelen; terwijl de veelhoeken, welke om den cirkel beſchreven zijn, integendeel, bij het verdubbelen van derzelver zijden, kleiner van omtrek worden. Hoe grooter nu het getal der zijden van twee gelijkſoortige veelhoeken is, de één in, en de ander om den cirkel beſchreven, zoo veel te minder zullen derzelver omtrekken van elkander verſchillen; want, $AB : CE = MH : MD$ zijnde, zijn de omtrekken dezer veelhoeken tot elkander als de loodlijn des veelhoeks, welke in den cirkel ſtaat, tot de ſtraal van den cirkel

waar-

waarin hij beschreven is. Het verschil tusschen deze loodlijn en deze straal wordt steeds kleiner, wanneer men het getal der zijden grooter neemt; de in- en omgeschrevene veelhoeken, zoowel als derzelver omtrekken, komen dan, in grootte en omtrek, hoe langer hoe nader bij elkander, en verschillen minder van den omtrek des cirkels, welke tusschen deze veelhoeken gelegen is: hier van daar pleeg men dan te zeggen: *dat een cirkel een regelmatige veelhoek is, uit een oneindig aantal zijden bestaande*, eene oneigenlijke wijze van zeggen, waardoor men te kennen geeft: dat een regelmatige veelhoek zooveel te nader met de figuur van eenen cirkel overëénstemt, naarmate dezelve uit een grooter aantal zijden bestaat. Wanneer men nu dit getal zijden grooter nemen kon dan eenig getal, dat men zich voorstellen kan, dan zouden de omtrekken der in en omgeschrevene veelhoeken met den omtrek des cirkels invallen, en aan denzelven gelijk worden, en daar nu, volgens het bewezene, een regelmatige veelhoek van minder zijden, in den cirkel beschreven, een kleiner, en die, welke om den cirkel beschreven is, een grooter omtrek heeft, is de omtrek des cirkels noodwendig grooter dan de omtrek eens veelhoeks, die in denzelven, en kleiner dan de omtrek eens veelhoeks, die om denzelven beschreven is.

III. LEMMA. *Fig.* 150.

§. 420. *Wanneer twee gelijk middelpuntige cirkels gegeven zijn; dan zal men, in den grootsten, eenen veelhoek kunnen beschrijven, welker zijden den omtrek van den kleinsten cirkel niet aanraken; en, om den kleinsten, eenen veelhoek, welker hoekpunten alle binnen den omtrek van den grootsten cirkel gelegen zijn.*

BETOOG. Laten AM en BM de stralen der cirkels zijn, welke hun gemeen middelpunt in M hebben. Hoe weinig nu de stralen dezer cirkels van elkander verschillen, zal het punt A altijd binnen den omtrek van den grootsten cirkel gelegen zijn, en, wanneer men derhalve de raaklijn CD trekt, welke, ter wederzijde, aan den omtrek van den grootsten cirkel, bepaald wordt, dan zal deze tevens eene koorde zijn, welke den boog CBD des grootsten cirkels onderspant, en de straal BM zal den boog CBD in twee gelijke bogen CB en BD doorsnijden: en dit alles zal plaats hebben, zoo lang AM kleiner dan BM is. Nu begrijpt men ligtelijk, dat men op den boog BC

 een

een gedeelte BE zal kunnen nemen, hetwelk een evenmatig deel van den omtrek des grootſten cirkels, en daarenboven een even aantal malen in denzelven begrepen is: die boog BE dan alzoo genomen hebbende, zal men den boog BF, gelijk den boog BE kunnen nemen, en de boog EBF zal insgelijks een evenmatig deel van den omtrek zijn, en wanneer men dan de koorde EF trekt, zal deze de zijde van eenen regelmatigen veelhoek zijn, welke in den grootſten cirkel kan beſchreven worden: dan, vermits de bogen CE en DF (*VIII. Ax.*) klaarblijkelijk gelijk zijn, is (*XIV. Stell. V. B.*) EF evenwijdig aan CD, en ligt bijgevolg geheel buiten den omtrek des kleinſten cirkels, en daar het nu geen verder betoog behoeft, dat alle de zijden van den regelmatigen veelhoek, in den grootſten cirkel beſchreven, den kleinſten niet zullen aanraken, is het eerſte gedeelte der ſtelling buiten alle bedenking geſteld. Wanneer men nu, om het tweede te betoogen, de ſtralen EM en MF trekt, dan zullen deze de koorde CD in de punten G en H ſnijden, en GH zal de zijde van eenen regelmatigen veelhoek zijn, om den kleinſten cirkel beſchreven, welke, wegens den gemeenſchappelijken centerhoek EMF, even zoo vele zijden zal hebben, als de regelmatige veelhoek, welke in den grootſten cirkel beſchreven is: nu liggen de hoekpunten, G en H, van dien omgeſchreven veelhoek in de koorde CD, en derhalve binnen den omtrek van den grootſten cirkel, en, daar hetzelfde voor alle de andere hoekputen van den veelhoek, welke om den kleinſten cirkel beſchreven is, gelden zal, is hierdoor ook de waarheid van het tweede gedeelte der ſtelling bevestigd.

§. 421. Aanmerking. Hetgeen hier van twee gelijkmiddelpuntige cirkels bewezen is, zal ook van twee gelijkmiddelpuntige ſectors, op dezelfde wijze, betoogd worden.

§. 422. Gevolg. *Fig.* 150. Vermits (*IX. Stell.*) de omtrekken der veelhoeken, welke hetzelfde getal zijden hebben, tot elkander ſtaan, in dezelfde reden, als derzelver loodlijnen, zoo is de veelhoek, om den kleinſten cirkel ſtaande, kleiner van omtrek, dan die, welke in den grootſten cirkel ſtaat; daar nu de omtrek van den kleinſten cirkel (*I. Lemma*) kleiner is dan de omtrek van den veelhoek, welke om denzelven beſchreven is, en de omtrek van den grootſten cirkel grooter dan de omtrek des veelhoeks, die in denzelven ſtaat, zal ook (*VI. Ax.*) de omtrek des grootſten cirkel grooter dan die van den kleinſten zijn.

XI.

XI. STELLING. *Fig.* 151.

§. 423. *Alle cirkels zijn gelijkvormige figuren.*

BETOOG. Laten twee cirkels, welke onderſcheidene ſtralen MA en MB hebben, in hetzelfde middelpunt M geplaatst worden, wanneer men dan de ſtralen MA en MC trekt, welke den omtrek des kleinſten cirkels in B en D ſnijden; dan is, wegens de eigenſchap des cirkels, $AM = CM$ en $MB = MD$, en daarom is $AM : BM = CM : MD$; nu geldt dezelfde evenredigheid voor elke andere ſtraal MC, de cirkels zijn derhalve (*XIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig.

XII. STELLING. *Fig.* 152.

§. 424. *De omtrekken der cirkels ſtaan tot elkander, als hunne ſtralen; en derzelver inhouden, als de vierkanten op deze ſtralen beſchreven.*

Ophelderiug. Laten, met de ſtralen AB en CD, uit de middelpunten B en D, twee cirkels beſchreven worden, en ſchrijven wij, kortheidshalve, voor den omtrek des cirkels, welke AB tot ſtraal heeft, *Omtr.* AB; en voor den inhoud des cirkels, welke AB tot ſtraal heeft, *Inh.* AB; dan zullen de twee evenredigheden

$$\text{Omtr. } AB : \text{Omtr. } CD = AB : CD$$
$$\text{Inh. } AB : \text{Inh. } CD = AB^2 : CD^2$$

moeten bewezen worden.

BETOOG *van het eerſte.* Wanneer *Omtr.* AB tot *Omtr.* CD niet ſtaat, als AB tot CD; dan zal AB tot CD in dezelfde reden moeten ſtaan, als de omtrek van AB, tot den omtrek van eenen cirkel, die met eene grootere of kleinere ſtraal, dan de ſtraal CD des tweeden cirkels, beſchreven is: ſtellen wij, bij voorbeeld, als de omtrek van AB tot den omtrek, welke met de ſtraal DE beſchreven is; en dan zijn de cirkels met DC en DE beſchreven gelijkmiddelpuntig, en men zal dus (*III. Lemma*) in den buitenſten eenen regelmatigen veelhoek $CIKL$ kunnen aannemen, welker zijden den omtrek van den binnenſten cirkel niet aanraken: wanneer men dan, in den cirkel, welke met AB beſchreven is, eenen veelhoek $AFGH$ beſchrijft, welke aan den veelhoek $CIKL$ gelijkvormig is, dan zal (*IX. Stell.*)

$$\text{Omtr. } AFGH : \text{Omtr. } CIKL = AB : CD$$

zijn: maar, in onze aangenomene onderſtelling, zal

$$AB : CD = \text{Omtr. } AB : \text{Omtr. } DE$$

 zijn,

zijn, en daarom (*I. Stell. II. B.*)

$$Omtr.\ AFGH : Omtr.\ CIKL = Omtr.\ AB : Omtr.\ DE$$

of wel (*VII. Stell. II. B.*)

$$Omtr.\ AFGH : Omtr.\ AB = Omtr.\ CIKL : Omtr.\ DE$$

Nu is (*II. Lemma*) de omtrek van den veelhoek $AFGH$, kleiner dan den omtrek des cirkels met AB beſchreven (*en III. Lemma en Gev.*) de omtrek van den veelhoek $CIKL$ grooter dan de omtrek des cirkels, welke met DE beſchreven is; in de laatſte evenredigheid zou dan de voorgaande term van de eerſte reden kleiner, en de voorgaande term van de tweede reden grooter dan de volgende term zijn: zulks ſtrijdt nu met den aard der evenredigheid, en de ſtralen AB en CD kunnen derhalve niet tot elkander ſtaan, als de omtrek van eenen cirkel met de eerſte ſtraal AB beſchreven, tot den omtrek eens cirkels, welke, met een kleinere, dan de ſtraal CD, beſchreven is. Op dezelfde wijze, zal men betoogen: dat AB tot CD niet zijn kan, als *omtr.* AB tot den omtrek eens cirkels, welke, met eene grootere, dan de ſtraal CD, beſchreven is: en hieruit volgt dan, dat $AB : CD = Omtr.\ AB : Omtr.\ CD$ moet zijn.

Betoog *van het tweede.* Wanneer $AB^2 : CD^2$ niet $= Inh.\ AB : Inh.\ CD$ is, en men diensvolgens ſteit, dat $AB^2 : CD^2 = Inh.\ AB : Inh.\ DE$; dan zal, alles nemende, als in het voorgaande betoog, (*IX. Stell.*)

$$Inh.\ AFGH : Inh.\ CIKL = AB^2 : CD^2$$

zijn, en, volgens de aangenomene onderſtelling,

$$AB^2 : CD^2 = Inh.\ AB : Inh.\ DE$$

en daarom (*I. Stell. II. B.*)

$$Inh.\ AFGH : Inh.\ CIKL = Inh.\ AB : Inh.\ DE$$

Maar nu is $Inh.\ AFGH < Inh.\ AB$, en $Inh.\ CIKL > Inh.\ DE$; daar zulks nu met den aard der evenredigheid ſtrijdt, kan de aangenomene evenredigheid niet beſtaan. Het zal, op gelijke wijze, blijken, dat zij ook niet beſtaan kan, wanneer men DE grooter dan CD neemt. Het vierkant van de ſtraal des eerſten cirkels kan dan tot het vierkant van de ſtraal des tweeden cirkels niet ſtaan, gelijk de inhoud des eerſten cirkels tot den inhoud van eenen cirkel, die grooter of kleiner dan de tweede is: de inhouden der cirkels zijn dus, in dezelfde reden, als de vierkanten van derzelver ſtralen.

§. 425. I. Gevolg. Omdat de middellijnen gelijk aan het dubbeld der ſtralen zijn, *zijn ook de omtrekken der cirkels, als*

als de middellijnen; en hunne inhouden tot elkander, als de vierkanten van derzelver middellijnen.

§. 426. V. Bepaling. *Fig.* 151. In onderscheidene cirkels, zijn gelijkvormige cirkelbogen, *AFC* en *BED*, bogen, welke tot hunne geheele omtrekken, in dezelfde reden staan, en derhalve aan de middelpunten gelijke hoeken *AMC* en *BMD* bepalen. *Gelijkvormige sectors*, *MAFC* en *MBED*, worden door gelijkvormige bogen bepaald, en derzelver stralen hebben om die reden gelijke hoeken. *Gevormige segmenten*, *AFC* en *BED*, eindelijk worden door gelijkvormige bogen en derzelver koorden bepaald.

§. 427. II. Gevolg. *Fig.* 151. Omdat gelijkvormige cirbogen, *AFC* en *BED*, tot de geheele omtrekken, tot welke zij behooren, in dezelfde reden staan, en deze met de stralen, *AM* en *BM*, en deze stralen (*VIII. Stell. IV. B.*) wederom met de koorden, *AC* en *BD*, dezer bogen evenredig zijn, *staan gelijkvormige cirkelbogen tot elkander, in dezelfde reden, als de stralen hunner cirkels en als de koorden, welke deze bogen onderspannen.*

§. 428. III. Gevolg. *Fig.* 151. En omdat de gelijkvormige cirkel sectors, *AMCF* en *BMDE*, tot elkander staan in dezelfde reden, als de inhouden der cirkels, tot welke zij behooren, en deze laatste in dezelfde reden zijn, als de vierkanten der stralen, en als de vierkanten van de koorden van de bogen dezer sectors, *staan gelijkvormige sectors in dezelfde reden, als de vierkanten der stralen, en als de vierkanten van de koorden, welke derzelver bogen onderspannen.*

§. 429. IV. Gevolg. *Fig.* 151. Daar dan de sectors *MAFC* en *MBED*, en (*XI. Stell. IV. B.*) de driehoeken, *AMC* en *BMD*, tot elkander in dezelfde reden staan, als de vierkanten der stralen, *AM* en *BM*, welke tot deze sectors behooren, is (*I. Stell. II. B.*)

$$\text{Sect. } MAFC : \text{Sect. } MBED = \text{drieh. } AMC : \text{drieh. } BMD$$

en volgens de *IX. Stell. II. B.*

$$\text{Sect. } MAFC - \text{drieh. } AMC : \text{Sect. } MBED - \text{drieh. } BMD =$$
$$\text{Sect. } MAFC : \text{Sect. } MBED = MA^2 : MB^2 = AC^2 : BD^2$$

dat is, volgens de figuur,

$$\text{Segm. } AFC : \text{Segm. } BED = AC^2 : BD^2$$

dat wil zeggen:

De gelijkvormige ſegmenten ſtaan tot elkander in dezelfde reden, als de vierkanten, op derzelver koorden beſchreven zijn.

§. 430. V. Gevolg. *Fig.* 150. De inhouden der cirkels, welke, met de ſtralen, CM en MA, beſchreven zijn, ſtaan tot elkander als de vierkanten dezer ſtralen, en bijgevolg (*VIII. Stell. II. B.*) zal het verſchil van de inhouden dezer cirkels tot het verſchil van de vierkanten van derzelver ſtralen, in dezelfde reden zijn, als de inhoud van den cirkel, met CM beſchreven, tot het vierkant van CM, als de inhoud van den cirkel, met CA beſchreven, tot het vierkant van CA; maar nu is (*XVI. Stell. III. B.*) het verſchil der vierkanten op CM en AM, gelijk aan het vierkant op AC; derhalve zal het verſchil van de inhouden der cirkels, met CM en AM beſchreven, gelijk zijn aan den inhoud des cirkels, met CA beſchreven; waaruit dan onmiddelijk volgt: *dat de ſom van de inhouden der cirkels, welke, met de regthoekszijden van eenen regthoekigen driehoek, als ſtralen, beſchreven worden, gelijk is aan den inhoud des cirkels, welke de hypothenuſa van dien regthoekigen driehoek tot ſtraal heeft.* En hieruit volgt dan verder: *dat de inhoud van den ring, tusſchen de omtrekken van twee gelijkmiddelpuntige cirkels gelegen, gelijk is aan den inhoud van den cirkel, welke met de halve raaklijn, die tusſchen die twee cirkels past, beſchreven is.*

XIII. Stelling. *Fig.* 153.

§. 431. *De inhoud van eenen cirkel is gelijk aan den inhoud van eenen driehoek, welke eene regte lijn, zoo lang als de omtrek des cirkels, tot baſis, en de ſtraal van dien cirkel tot hoogte heeft; of, gelijk aan den omtrek vermenigvuldigd met de helft van de ſtraal.*

Betoog. Wij zullen wederom den omtrek van den cirkel, welke met MA, als ſtraal, beſchreven is, door *Omtr.* AM, en deszelfs inhoud, door *Inh.* AM, uitdrukken; en dan zullen wij moeten bewijzen: dat

$$Inh.\ AM = Omtr.\ AM \times \tfrac{1}{2} AM$$

zal zijn.

Wanneer *Omtr.* $AM \times \frac{1}{2} AM$ niet gelijk is aan den inhoud of het oppervlak van den cirkel, welke met AM beſchreven is; dan zal die regthoek aan den inhoud van eenen grooteren of kleineren cirkel moeten gelijk zijn. Stel eerst, dat *Omtr.* $AM \times \frac{1}{2} AM$ gelijk zij aan den

in-

inhoud van den cirkel, welke, met de ſtraal MC, kleiner dan AM zijnde, beſchreven is: dan zal men, (*III. Lemma*) om den kleinſten dezer gelijkmiddelpuntige cirkels, eenen regelmatigen veelhoek $BDEFG$ kunnen beſchrijven, welker hoekpunten binnen den omtrek van den buitenſten of grootſten cirkel vallen, en dan zal de inhoud van dien veelhoek (*VIII. Stell.*) gelijk zijn aan

$$[BD + DE + EF + FG + \textit{enz.}] \times \tfrac{1}{2} CM$$

maar nu is de omtrek van den veelhoek $BDEFG$, (*II. Lemma en Gev. III. Lemma*) kleiner dan de omtrek des cirkels, welke met AM beſchreven is, en AM is grooter dan CM; bijgevolg is *Omtr.* $AM \times \frac{1}{2} AM$ grooter dan de inhoud van den veelhoek, $BDEFG$, en bijgevolg ook grooter dan de inhoud van den cirkel, welke, met CM, als ſtraal, beſchreven is, en om welken den gezegden veelhoek ſtaat.

Het blijkt dan: dat de regthoek *Omtr.* $AM \times \frac{1}{2} AM$ grooter is dan de inhoud van eenen cirkel, welke, met eene kleinere ſtraal, dan de ſtraal AM, beſchreven is.

Stellen wij nu verder: dat de regthoek *Omtr.* $AM \times \frac{1}{2} AM$ gelijk zij aan den inhoud van eenen cirkel, die met eene ſtraal MP, grooter dan de ſtraal AM, beſchreven is; dan zal men wederom (*III. Lemma*) om den cirkel, die, met de kleinſte ſtraal AM, beſchreven is, eenen regelmatigen veelhoek $bdefg$ kunnen beſchrijven, welker hoekpunten binnen den omtrek van den cirkel, welke MP tot ſtraal heeft, zullen gelegen zijn, en de inhoud van dien veelhoek zal (*VIII. Stell.*) aan deszelfs omtrek vermenigvuldigd met de halve ſtraal AM, of aan

$$[bd + de + ef + fg + \textit{enz.}] \times \tfrac{1}{2} AM$$

gelijk zijn. Nu is de omtrek van dien veelhoek (*II. Lemma*) grooter dan de omtrek van den cirkel, welke AM tot ſtraal heeft, en, om welken de veelhoek beſchreven is; de inhoud van dien veelhoek is dus grooter dan *Omtr.* $AM \times \frac{1}{2} AM$; daar nu de inhoud van den veelhoek (*Gev. III. Lemma*) kleiner is dan de inhoud des cirkels, met MP als ſtraal beſchreven, is die laatſte cirkel (*VI. Ax.*) ook grooter van inhoud dan de regthoek *Omtr.* $AM \times \frac{1}{2} AM$.

De regthoek *Omtr.* $AM \times \frac{1}{2} AM$, is derhalve grooter dan de inhoud eens cirkel, met eene ſtraal, kleiner dan AM; en kleiner dan de inhoud eens cirkels, met eene ſtraal, grooter dan AM, beſchreven; die regthoek moet derhalve gelijk zijn aan den inhoud van den cirkel, welke met AM beſchreven is, en wanneer men gevolgelijk eene regte lijn maken kan, welke de lengte van den omtrek eens cir-

 kels

kels heeft, en op dezelve, als basis, eenen driehoek stelt, die de hoogte van de straal dezes cirkels heeft; dan zal de inhoud van dezen driehoek aan den inhoud des cirkels gelijk zijn.

§. 432. I. Gevolg. *Fig.* 151. *De inhoud van eenen sector, AMCF, is derhalve gelijk aan deszelfs boog AFC, vermenigvuldigd met de helft van de straal des cirkels, tot dien sector behoorende.*

§. 433. II. Gevolg. *Wanneer de inhoud eens cirkels, benevens deszelfs straal of middellijn gegeven zijn, dan zal men den omtrek vinden, door den inhoud met de halve straal of éénvierde van de middellijn te deelen. Het vierkant van de straal staat dan tot den inhoud, gelijk de middellijn tot den omtrek.*

§. 434. Aanmerking. Naardien de inhouden van alle cirkels tot elkander staan, in dezelfde reden, als de vierkanten der stralen, bestaat 'er, in elken cirkel, tusschen deszelfs inhoud en het vierkant van de straal, waarmede hij beschreven is, eene standvastige betrekking, welke, bijaldien dezelve eens en vooral bepaald is, dienen kan, om den inhoud van elken cirkel, in vierkante éénheden van de lengte maat uittedrukken, wanneer namelijk de straal van dien cirkel, in éénheden van de lengte maat, gegeven is. De betrekking, tusschen den inhoud des cirkels en het vierkant van deszelfs straal te bepalen, is, meer bepaaldelijk, hetgeen men de *quadratuur van den cirkel* noemt. Men heeft zich veel moeite gegeven, om de getallen te bepalen, welke deze betrekking uitdrukken: men is nimmer kunnen slagen, om getallen te vinden, welke die overéénkomst juist uitdrukken; en latere ontdekkingen hebben de onbestaanbaarheid van die getallen overéénkomst bewezen; want het thans uitgemaakt: dat die betrekking onmeetbaar is, en dat derhalve geen twee getallen, hoe groot men dezelve nemen moge, bestaan kunnen, welke die betrekking met eene meetkunstige juistheid uitdrukken; of dat, om in den zin van de VIII *Bepaling* van het II *Boek* te spreken, *geen evenmatig deel van het vierkant van de straal tevens een evenmatig deel van den inhoud van den cirkel kan zijn.* Offchoon nu het betoog dezer onmeetbaarheid voor onze Beginselen te hoog is, kunnen wij nogtans, naar aanleiding van de betoogde eigenschap der veelhoeken, welke in en om den cirkel beschreven zijn, zie X *Stelling* hier boven, aanwijzen: hoe men, door benadering, den inhoud van eenen cirkel in bepaalde deelen van het vierkant der straal, ten naasten bij, bepalen kan?

Vraag-

VRAAGSTUK. *Fig.* 141.

§. 435. *Den inhoud eens cirkels, welks straal voor de éénheid van de lengte maat genomen wordt, met het vierkant, op deze éénheid, (met het vierkant van de straal,) beschreven, door benadering, te vergelijken?*

OPLOSSING. Zij, *Fig.* 141. de cirkel $ABCD$, met de straal AM, beschreven: laat deze straal AM als de éénheid worden aangenomen, en voorts, zoowel, in als om den cirkel, de regtmatige vierhoeken $ABCD$ en $EFGH$ beschreven worden; dan is (*II. Stell.*) het vierkant $ABCD$ gelijk aan tweemaal het vierkant van de straal, en (*IV. Gev. VI. Stell. III. B.*) het vierkant $EFGH$, gelijk aan viermaal het vierkant van de straal; beide deze vierkanten zijn dus, in ronde getallen van éénheden van de vlakte maat, bekend; namelijk $ABCD = 2$ en $EFGH = 4$. Men zal dan, (*II. Gev. X. Stell.*) $ABCD = A = 2$, en $EFGH = B = 4$ stellende, de inhouden der veelhoeken, welke een dubbeld getal zijden hebben, dat is, de inhouden der achthoeken, in en om den cirkel beschreven, en welke door A' en B' (zie boven *X. Stell.*) zijn uitgedrukt, vinden kunnen; want men heeft nu

$$A' = \sqrt{(A \times B)} = \sqrt{(2 \times 4)} = 2\sqrt{2} = 2,8284271$$

$$B' = \frac{2A \times B}{A + A'} = \frac{16}{2 + 2\sqrt{2}} = \ldots\ldots\ 3,3137085$$

De inhouden dezer achthoeken alzoo, door benadering, bekend zijnde, zoeke men de inhouden van de veelhoeken van een dubbeld getal zijden, namelijk van de zestienhoeken, in en om den cirkel beschreven, hetgeen door denzelfden regel, wordt ten uitvoer gebragt. Men stelle, tot dat einde, in dezelfde formulen van *II. Gev. X. Stell.* $A = 2,8284271$, en $B = 3,3137085$; dan zal $A' = \sqrt{(A \times B)} = \sqrt{(2,8284271 \times 3,3137085)} = 3,0614674$ gelijk zijn aan de benaderde waarde van den inhoud van den zestienhoek, in den cirkel beschreven; en $B' = \dfrac{2A \times B}{A + A'} = 3,1825979$ zal gelijk zijn aan de benaderde waarde van den inhoud van den zestienhoek, om den cirkel beschreven. Deze zestienhoeken zullen, als nieuwe gegevens aangemerkt, wederom dienen kunnen, om de inhouden van de twee-endertighoeken, in en om den cirkel beschreven; deze laatste wederom als gegevens, om de inhouden der vier-en-zestighoeken te vinden, enz. Men zal, op deze wijze, de berekening voortzettende, de uitkomsten, welke in de volgende tafel voorkomen, verkrijgen.

Ge-

Getal der zijden.	*Ingeschreve veelhoek.*	*Omgeschreven veelhoek.*
4	2, 0000000	4, 0000000
8	2, 8284271	3, 3137085
16	3, 0614674	3, 1825979
32	3, 1214451	3, 1517249
64	3, 1365485	3, 1441184
128	3, 1403311	3, 1422236
256	3, 1412772	3, 1417504
512	3, 1415138	3, 1416321
1024	3, 1415729	3, 1416025
2048	3, 1415877	3, 1415951
4096	3, 1415914	3, 1415933
8192	3, 1415923	3, 1415928
16384	3, 1415925	3, 1415927
32768	3, 1415926	3, 1415926

Omdat nu de inhouden dezer veelhoeken van vierkants-wortels uit wortelloose getallen afhangen, zijn zij, met betrekking tot de inhouden der in en omgeschrevene vierhoeken, onmeetbaar: men heeft daarom, in het berekenen van de getallen dezer tafel, een cijfer in de decimale breuken van elke uitkomst meer genomen, dan 'er in de tafel voorkomen, zijnde de laatste cijfers, of de naast grootere, of de naast kleinere, naar dat het volgend cijfer der breuk meer of minder dan vijf bevonden is. Uit deze berekende tafel blijkt nu: 1° dat de inhouden der omgeschrevene veelhoeken grooter dan die der ingeschrevene veelhoeken zijn; 2° dat de inhouden van twee veelhoeken van hetzelfde aantal zijden, in en om den cirkel beschreven, minder van elkander verschillen, naarmate het getal der zijden grooter wordt; 3° dat de zijden van den veelhoek van 32768 zijden, in en om den cirkel beschreven, tot in het zevende cijfer van de decimale breuk, met elkander overëënstemmen: zoodat, wanneer men voor den inhoud van den cirkel stelde 3, 1415927; men eenen inhoud stellen zou, grooter dan de inhoud van den 32768 hoek, om den cirkel beschreven, en gevolgelijk (*I. Lemma*) grooter dan de inhoud, welken de cirkel bij mogelijkheid hebben kan; en dat, wanneer men voor den inhoud des cirkels 3, 1415925 stelde, men eenen inhoud stellen zou, kleiner dan de inhoud van den 32768 hoek, in den cirkel beschreven, en bijgevolg kleiner dan de inhoud des cirkels. Men is dan zeker,

dat,

dat, wanneer de ſtraal des cirkels gelijk aan de éénheid genomen wordt, zijn inhoud meer dan 3,1415926 en minder dan 3,1415927 maal het vierkant van de ſtraal zal inhouden, en dat die inhoud gevolgelijk, op minder dan één-tien-millioenſte deel van het vierkant van de ſtraal, bekend is.

§. 436. Gevolg. Wanneer men nu dezen inhoud, door de helft van de ſtraal, dat is door $\frac{1}{2}$ of 0,5, deelt; dan zal men (*II. Gev. XIII. Stell.*) voor den omtrek nagenoeg vinden 6,2831852, en zooveelmaal zal de ſtraal in den omtrek begrepen zijn; doch, daar de middellijn gelijk aan het dubbeld van de ſtraal is, zal de middellijn in den omtrek nagenoeg de helft van 6,2831852, dat is 3,1415926 maal begrepen zijn, *en de omtrek zal alzoo tot de middellijn ſtaan, als* 3,1415926 *tot de éénheid.* Dat is, *wanneer men de middellijn in tien-millioenen deelen verdeelt; dan zal één dezer deelen in eene regte lijn, die gelijk aan den omtrek is, meer dan* 31415926, *en minder dan* 31415927 *maal begrepen zijn.*

§. 437. Aanmerking. Door eenen veelhoek van 96 zijden, in en om den cirkel te beſchrijven, en derzelver omtrekken te berekenen, heeft Archimedes het eerst gevonden: dat, de middellijn gelijk één geſteld zijnde, de omtrek kleiner dan $3\frac{10}{70}$ en grooter dan $3\frac{10}{71}$ is: hij ſtelde daarom de middellijn tot den omtrek nagenoeg, als 7 tot 22. Deze getallen geven eene eerſte benadering, welke, wegens derzelver eenvoudigheid, het meest bekend, en, voor ruwe berekeningen, genoegzaam voldoende is. Metius bepaalde deze betrekking naauwkeuriger, als 113 tot 355. Ludolf van Ceulen vond: *dat, wanneer de middellijn gelijk één geſteld wordt, de omtrek gelijk is aan*

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288

en men heeft naderhand het geduld gehad, om, echter langs veel gemakkelijker wegen, (zie II. C. §. 620—§. 623. pag. 367 en 368,) deze decimale breuk, tot het 127ᵉ, ja zelfs tot het 150ᵉ cijfer, voortezetten. Maar de benadering van van Ceulen komt nader aan de waarheid, dan tot de behoefte der kunst vereischt wordt; want men kan, in het werkdadige, nimmer in het geval komen, dat tot de allerſtrengſte naauwkeurigheid, zelfs de helft van het getal der cijfers, welke van Ceulen gevonden heeft, vereischt wordt. (*Vergelijk verder I. C.* §. 618, 1 *Voorb.*)

Bijvoegsel.

§. 438. Men ſtelle den omtrek des cirkels, welks middellijn de éénheid

heid is, gelijk π, eene letter, welke, in alle de deelen der Wiskunst, het getal 3, 14159, *enz.* aanduidt; dan is:

$$\pi = 3,\ 14159\ 26535\ 89793$$
$$\tfrac{1}{4}\pi = 0,\ 78539\ 81633\ 97448$$
$$Log.\,\pi = 0,\ 49714\ 98726\ 94134$$
$$Log.\,\tfrac{1}{4}\pi = -0,\ 10491\ 01186\ 33829$$

zijnde de laatste Logarithmus (vergelijk I. C. §. 880–§. 882.) in zijn geheel negatief genomen. De vijf eerste cijfers van de decimale breuken dezer Logarithmen zijn, in de meeste gevallen, voldoende: en het zal zelden noodig zijn, meer dan zeven cijfers dezer Logarithmen in de berekening te gebruiken.

Stel nu de middellijn van eenigen cirkel . . . $= a$
Zijnen omtrek . . . . $= p$
Zijnen inhoud . . . . $= I$
Den boog van eenigen sector, uit dien cirkel gesneden, in graden uitgedrukt . . . . . . $= q$
Denzelfden, in éénheden of deelen van de middellijn . $= Q$
Den inhoud van dien sector . . . . . $= K$
dan heeft men:

1° Omdat de omtrekken van twee cirkels tot elkander, in dezelfde reden zijn, als hunne middellijnen, $1 : \pi = a : p$; derhalve $p = \pi a$ of in Logarithmen.

$$Log.\ p = Log.\ a + 0,4971499.$$

2° Omdat de omtrek, vermenigvuldigd met één-vierde van de middellijn, gelijk aan den inhoud is, $I = \frac{1}{4}\pi a^2$, of, in Logarithmen:

$$Log.\ I = 2\,Log.\,a - 0,\ 1049101$$

3° Uit de eerste vergelijking, $p = \pi a$, volgt: $a = \frac{p}{\pi}$, of, in Logarithmen:

$$Log.\ a = Log.\ p - 0,4971499$$

en hierdoor zal men de middellijn vinden, wanneer de omtrek gegeven is.

4° Uit de tweede vergelijking: $I = \frac{1}{4}\pi a^2$, volgt: $a^2 = 4I : \pi$ en $a = \sqrt{\left\{4I : \pi\right\}}$, of, in Logarithmen:

$$Log.\ a = \tfrac{1}{2} : \left\{Log.\ I + 0,\ 1049101\right\}$$

door deze, zal de middellijn eens cirkels berekend worden, wanneer zijn inhoud gegeven is.

5° Om-

5° Omdat de omtrek, welks middellijn $= a$ is, door pa wordt uitgedrukt, zal $360^\circ : q = \pi a : Q$ zijn; derhalve $Q = qa \times \frac{\pi}{360^\circ}$ zijn. Of, in Logarithmen:

$$Log.\ Q = Log.\ q + Log.\ a - 2,0591526$$

door deze zal men, wanneer de middellijn gegeven is, de lengte van eenen boog van q graden, in deelen van die middellijn berekenen.

6° En uit deze laatste volgt:

$$Log.\ q = 2,0591526 + Log.\ Q - Log.\ a$$

en door deze, zal het getal graden van eenen boog gevonden worden, wanneer de middellijn, benevens de lengte van dezen boog, in deelen van de middellijn uitgedrukt, gegeven zijn.

7° Eindelijk, omdat de inhoud van eenen cirkel-sector gelijk is aan dan boog van dien sector, vermenigvuldigd met de halve straal, zal $K = Q \times \frac{1}{2}a = qa^2 \times \frac{\pi}{4 \times 360}$, of, in Logarithmen:

$$Log.\ K = 2 \times Log.\ a + Log.\ q - 2,6612126$$

I. Voorbeeld. *Hoe groot is de omtrek eens cirkels, welks middellijn $39^m,7$ lang is?*

Deze omtrek wordt, door de formule $Log.\ p = Log.\ a + 0,4971499$, berekend; in dezelve is $a = 39^m,7$.

Bij $Log.\ a = Log.\ 39^m,7 = 1,5987905$
tel bij . . . . $0,4971499$

komt $Log.\ p$ . . . . $= 2,0959404$
derhalve . . . . . $p = 124^m,7212$

II. Voorbeeld. *De inhoud eens cirkels te vinden, welks halve middellijn gelijk 25^m is?*

De inhoud wordt gevonden, door de formule $Log.\ I = 2\,Log.\ a - 0,1049101$; zijnde $a = 50^m$.

$Log.\ a = Log.\ 50 = 1,6989700$
(2
$2\ Log.\ a =$ . . . . . . $3,3979400$
trek af . . . . $0,1049101$

$Log.\ I$ . . . . . . $= 3,2930299$
derhalve $I = 1963,4954$ *vierk. meters.*

III. Voorbeeld. *Hoe lang moet de middellijn van eenen cirkel genomen worden, op dat zijn inhoud gelijk aan 2500 vierkante meters zij?*

Deze

Deze middellijn wordt, door de formule $Log. a = \frac{1}{2} . \left\{ Log. I + 0,1049101 \right\}$, gevonden, in welke $I = 2500$ is.

$$\begin{array}{rr} Log.\ I = Log\ 2500 = & 3,3979400 \\ \text{tel bij} \ldots\ldots & 0,1049101 \\ \hline & 3,5028501 \\ 2) \overline{} & \\ Log.\ a = & 1,7514250 \\ \text{derhalve } a = & 56^m,41895 \end{array}$$

Deze weinige voorbeelden zijn genoeg, om het gebruik van de andere formulen te leeren kennen.

Over de Isoperimetrische *Figuren.*

§. 439. VI. Bepaling. De som van al de zijden eener regtlijnige figuur, of de omtrek eener kromlijnige figuur, wordt *perimeter* of omtrek genoemd.

§. 440. VII. Bepaling. *Isoperimetrische* figuren zijn figuren, die gelijke omtrekken of perimeters hebben.

§. 441. VIII. Bepaling. Een *maximum* is eene grootheid, welke, onder alle grootheden, die op dezelfde wijze ontstaan, de grootste is: een *minimum*, welke de kleinste is.

§. 442. *Opheldering.* Aldus is, onder alle koorden eens cirkels, de middellijn het *maximum*, of de grootste; en onder alle lijnen, welke men, van een punt tot eene regte lijn, trekken kan, (zie *XXI. Stell. I. B.*) is de loodlijn de kleinste, of het *minimum*. *Wanneer eene lijn AB (Fig. 154.) in twee deelen verdeeld wordt, zal, wanneer deze deelen aan elkander gelijk genomen worden, derzelver regthoek een maximum zijn.* Want indien men de lijn AB in D, in twee ongelijke deelen, en in C in twee gelijke deelen verdeelt; dan is $AD \times BD = (AC + CD)(AC - CD) =$ (*II. Lemm. III. B.*) $AC^2 - CD^2$, waaruit blijkt: dat hoe nader de punten C en D bij elkander komen, en CD^2 kleiner wordt, de regthoek $AD \times BD$ grooter worden zal, en op zijn grootst zijn, wanneer de punten D en C in elkander vallen. *En wanneer men dezelfde lijn in twee deelen deelt, zal de som van de vierkanten der deelen een minimum worden, wanneer de deelen aan elkander gelijk zijn.* Want volgens het I. *Lemma* III. *Boek* is:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2\,BC \times CD$$
$$AD^2 = AC^2 + CD^2 + 2\,AC \times CD$$

en,

en, wanneer men deze vergelijkingen optelt, is $AD^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2CD^2$. Hoe nader nu de punten C en D bij elkander komen, en hoe kleiner bijgevolg CD^2 wordt, des te kleiner zal $2AC^2 + 2CD^2$ worden, en $AD^2 + BD^2$, zal derhalve een minimum zijn, wanneer, het punt D in het punt C vallende, de deelen AD en BD aan elkander gelijk worden.

XIV. STELLING. *Fig.* 155.

§. 443. *Onder alle driehoeken, welke op dezelfde basis AB staan en gelijke omtrekken hebben, (of* isoperimetrisch *zijn,) is de gelijkbeenige de grootste, (is ten aanzien van den inhoud een* maximum.)

BETOOG. Laat op dezelfde basis AB eenen gelijkbeenigen driehoek, ABC, ($AC = BC$ zijnde,) en eenen anderen driehoek, ABD, gesteld worden, zoodanig, dat $AC + BC = AD + BD$, of $AB + AC + BC = AB + AD + BD$ zij. Wanneer men dan AC verlengt, en, op dit verlengde, $CE = AC = BC$ maakt, en door E en B eene onbepaalde lijn EF trekt; dan zal de hoek ABE een regte hoek zijn, omdat hij (*V. Gev. XX. Stell. V. B.*) wegens de gelijke lijnen AC, BC, CE, in den halven cirkel staat, welke, uit C, met AC, als straal, beschreven wordt. Men late nu, uit C en D, de loodlijnen CH en DG op EF vallen; dan is, aangezien $BC = CE$ is, ook (*II. Lemm. I. B.*) $BH = HE$. Men make verder $GF = BG$, en trekke de lijn DF, dan is (*XX. Stell. I. B.*) $DF = BD$. Indien nu AD grooter of kleiner dan DF is, kunnen de lijnen AD en DF niet in dezelfde regte lijn liggen; want aldan zou noodzakelijk (*Fig. en IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) hoek BAD + hoek BFD = hoek FBD + hoek ABD moeten zijn, en hiervan (*XIV. Stell. I. B.*) hoek BFD = hoek DBF aftrekkende, zou (*VIII. Ax.*) hoek BAD = hoek ABD overblijven, en (*XV. Stell. I. B.*) AD zou, tegen de onderstelling, gelijk aan BD moeten zijn. De lijnen AD en DF, liggen dan niet in dezelfde rigting; men kan dan de punten A en F door de lijn AF vereënigen, en AF zal dan kleiner dan $AD + BD$, kleiner dan AE zijn, derhalve is ook (*XXI. Stell. I. B.*) BF kleiner dan BE, en eindelijk $BG = \frac{1}{2} BF$ kleiner dan $BH = \frac{1}{2} BE$; de gelijkbeenige driehoek ABC, heeft dan eene grootere hoogte dan de driehoek ABD; de inhoud van den gelijkbeenigen driehoek is dan (*XIV. Stell. III. B.*) de grootste van alle driehoeken, welke denzelfden omtrek hebben.

XV. Stelling. *Fig.* 156.

§. 444. *Onder alle* isoperimetrische *veelhoeken, van hetzelfde aantal zijden, is de gelijkzijdige een* maximum.

Betoog. Nemen wij dat $ABCDEF$ een zeshoek zij, welke, onder denzelfden omtrek, den grootsten inhoud heeft; indien men dan aanneemt, dat de zijden AB en BC ongelijk zijn, dan zal men, op de hoekpuntslijn AC, eenen gelijkzijdigen driehoek APC kunnen zamenstellen, zoodanig dat $AP + CP = AB + CB$ zij; dan zal (*XIV. St.*) driehoek APC, grooter dan driehoek ABC, en (*VII. Ax.*) de veelhoek $APCDEF$, grooter dan veelhoek $ABCDEF$ zijn: en de veelhoek $ABCDEF$ zal alzoo, strijdig met de aangenomene onderstelling, geen grootste zijn, AB zal derhalve gelijk BC moeten zijn. Om dezelfde reden zal, opdat de veelhoek een grootste zijn moge, $BC = CD$, $CD = DE$, $DE = EF$, $EF = AF$ moeten zijn.

XVI. Stelling. *Fig.* 157.

§. 445. *Onder alle driehoeken, ABC, ABD en ABE, welke met twee gegevene zijden, AB en $AC = AD = AE$, en eenen hoek BAC, BAD, BAE, naar welgevallen genomen, gemaakt worden, is die driehoek ABD, in welken die gegevene zijden eenen regten hoek maken, de grootste.*

Bewijs. Want indien men, uit de punten C en E, de loodlijnen CF en EG, op de gemeene basis AB, laat vallen, dan zijn deze loodlijnen, welke de hoogte der driehoeken ABC en ABE zijn, (*XXI. Stell. I. B.*) korter dan AC, of AE, of AD; de driehoek ABD heeft derhalve de grootste hoogte, en is (*XIV. Stell. III. B.*) een maximum of grootste.

IV. Lemma. *Fig.* 158.

§. 446. *Wanneer dezelfde koorde, AB, twee onderscheidene bogen ACB en ADB onderspant; dan zal de hoek AEB, aan het middelpunt van den boog ACB, welke met de grootste straal AE beschreven is, kleiner zijn dan de hoek AFB, aan het middelpunt, op den boog ADB, welke met de kleinste straal beschreven is.*

BE-

Betoog. Want (*XVII. Stell. I. B.*) hoek $AFC >$ hoek AEF zijnde, zal het dubbeld van den hoek $AFG >$ dan het dubbeld van den hoek AEF; dat is hoek $AFB >$ hoek AEB zijn.

XVII. Stelling. *Fig.* 159.

§. 447. *Van alle veelhoeken, ABCDEFA, welke, met een zeker aantal gegevene zijden, AB, BC, CD, enz., en, met eene laatste zijde, AF, naar welgevallen genomen, kunnen gemaakt worden, zal de grootste veelhoek, of de veelhoek, wiens inhoud een maximum is, zoodanig moeten bepaald zijn, dat hij in eenen halven cirkel beschreven is, waarvan deze laatste of onbekende zijde de middellijn is: en 'er bestaat slechts een halve cirkel, in welke die veelhoek kan beschreven worden, aan welks omtrek nogtans de gegevene zijden, in zulk eene rangorde, als men goedvindt, zullen kunnen geplaatst worden.*

Betoog *van het eerste.* Men trekke de hoekpuntslijn BF; indien dan de hoek ABF niet regt is, dan zal men den hoek ABF regt kunnen maken, en de driehoek ABF, zal dan (*XVI. Stell.*) een maximum worden. Hieruit blijkt dan: dat, wanneer de hoek ABF niet regt is, de veelhoek $ABCDEF$, door dien hoek regt te maken, een maximum worden zal. Om dezelfde reden, zal de veelhoek $ABCDEF$, insgelijks geen maximum kunnen zijn, indien de hoeken ACF, ADF en AEF niet regt zijn. Hieruit volgt dan (*V. Gev. XX. Stell. V. B.*) dat de veelhoek, onder de gegevene zijden, en eene onbepaalde zijde, zamengesteld, alleen een maximum of grootste zal kunnen zijn, wanneer al zijne hoekpunten in den omtrek van eenen halven cirkel gelegen zijn, welks middellijn aan de onbepaalde zijde AF gelijk is.

Betoog *van het tweede.* Wanneer men nu onderstelt, dat de veelhoek in eenen grooter of kleiner halven cirkel beschreven zij; dan zullen, (*IV. Lemma*) in het eerste geval, de hoeken, welke op de bogen APB, BQC, CRD, DSE, ETF, aan het middelpunt, staan, kleiner, en in het tweede, grooter dan in de figuur zijn, en de som dezer bogen zal derhalve, in het eerste geval, kleiner, en in het tweede geval, grooter dan een halve cirkel zijn: de veelhoek zal dan, in die onderstellingen, in geenen halven cirkel staan; de hoeken ABF, ACF, ADF, AEF, zullen dan ook niet regt, en de veelhoek (eerste gedeelte van het betoog,) geen maximum zijn.

Betoog *van het derde.* Men plaatse in den halven cirkel de koor-

 den,

den, AB, BC, CD, DE en EF, in zulk eene rangorde, als men goedvinde, zij onderſpannen overal gelijke bogen, en bepalen gelijke ſegmenten: nu is de inhoud van den veelhoek gelijk aan den halven cirkel, op AF beſchreven: min de ſom der ſegmenten APB, BQC, CRD, DSE, ETF. Hij behoudt bijgevolg, op welk eene wijze de gegevene zijden des veelhoeks verëënigd worden, denzelfden inhoud.

XVIII. Stelling. *Fig.* 160.

§. 448. *De grootſte van alle veelhoeken, welke, onder gegevene zijden, zamengeſteld kunnen worden, is die, welks hoekpunten in den omtrek van eenen cirkel gelegen zijn.*

Betoog. Laat $ABCDEFG$ een veelhoek zijn, welke in eenen cirkel beſchreven is; dan zal men eenen anderen veelhoek $abcdefg$, onder dezelfde zijden, kunnen zamenſtellen, (zoodanig dat $AB = ab$, $BC = bc$, $CD = cd$, *enz.* is,) om welken geen cirkel kan beſchreven worden; men moet nu betoogen: dat $ABCDEFG$ grooter dan $abcdefg$ zal zijn. Trek de middellijn EH, en de koorden AH en BH; maak, op de zijde ab, den driehoek abh gelijk en gelijkvormig aan den driehoek ABH: dan is (*XVII. Stell.*) de veelhoek $EHBCD$, grooter dan de veelhoek $ehbcd$, en de veelhoek $EHAGF$, grooter dan de veelhoek $ehagf$; derhalve (*X. Ax.*) is de veelhoek $AHBCDEFG$, grooter dan de veelhoek $ahbcdefg$; hiervan de gelijke driehoeken AHB en ahb aftrekkende, zal de veelhoek $ABCDEFG$, grooter dan de veelhoek $abcdefg$ overblijven.

§. 449. Gevolg. *Fig.* 160. Men zal, op dezelfde gronden, als in de *XVII. Stell.* betoogen: *dat 'er ſlechts een cirkel beſtaat, in welken de veelhoek $ABCDBFG$ kan beſchreven worden, en dat men de zijden des veelhoeks, op zoo vele onderſcheidene wijzen, als mogelijk is, aan elkander kan voegen, zonder dat daardoor deszelfs inhoud eenige verandering zal ondergaan.*

XIX. Stelling.

§. 450. *Onder alle* iſoperimetriſche *veelhoeken, van hetzelfde getal zijden of hoeken, is de regelmatige (dat is, die gelijkzijdig en gelijkhoekig is,) de grootſte.*

Betoog. Want, volgens de *XV. Stelling*, moeten de zijden gelijk zijn, en zoo even is bewezen, dat hij in eenen cirkel moet kunnen

be-

beschreven worden: maar dit kan hij (*I. Stell.*) niet, zonder gelijkhoekig te zijn; derhalve, enz.

V. Lemma. *Fig.* 161.

§. 451. *De hoeken* ABC *en* DEF, *in onderscheidene cirkels, aan het middelpunt staande, zijn in de regte reden der bogen, op welke die hoeken staan, en in de omgekeerde reden van de stralen, waarmede deze bogen beschreven zijn. Dat is:*

$$\text{Hoek } ABC : \text{Hoek } DEF = \frac{AC}{AB} : \frac{DF}{DE}.$$

Betoog. Beschrijf, uit E, met $EG = AB$, als straal, den cirkelboog GH; dan is (*II. Gev. XVIII. Stell. V. B.*) hoek B : hoek E = boog AC : boog $GH = \frac{\text{boog } AC}{AB} : \frac{\text{boog } GH}{EG}$; maar nu is (*II Gev. XII. St.*) boog $GH : EG =$ boog $DF : DE$; derhalve $\frac{\text{boog } GH}{EG} = \frac{\text{boog } DF}{DE}$: stellende nu, in de voorgaande evenredigheid, in plaats van den vierden term, de grootheid, welke aan dezelve gelijk is; dan verkrijgt men: hoek ABC : hoek $DEF = \frac{AC}{AB} : \frac{DF}{DE}$.

XX. Stelling. *Fig.* 162.

§. 452. *Van twee regelmatige veelhoeken, welke denzelfden omtrek hebben, heeft die, welke het meeste getal zijden of hoeken heeft, ook den grootsten inhoud.*

Opheldering. Deze waarheid zal bewezen zijn, wanneer men betoogen kan, dat, onder denzelfden omtrek, een $n+1$ hoek grooter inhoud heeft dan een n hoek.

Betoog. Laten ABC en DEF, twee halve middelpunts driehoeken van eenen regelmatigen $n+1$, en van eenen regelmatigen n hoek zijn, beide denzelfden omtrek hebbende; dan zal $n+1$ maal $BC = n$ maal EF, en $n+1$ maal hoek $BAC = n$ maal hoek EDF zijn, en daarom zal hoek $EDF >$ hoek BAC zijn: wanneer men dan deze driehoeken, op eenen willekeurigen afstand van elkander, op dezelfde lijn AH plaatst; dan zullen de verlengden der zijden AC en DF elkander in een punt G ontmoeten. Laat dan de lijn CH loodregt

regt op AH getrokken, en, uit de punten A en D, als middelpunten, met AH en DH, als ſtralen, de cirkelbogen HK en HI beſchreven worden: de gelijkvormige driehoeken ABC, AHG, en DEF, DHG, geven dan (*VIII. Stell. IV. B.*) de evenredigheden:

$$BC : AB = HG : AH$$
$$DE : EF = DH : HG$$

en daarom zal (*XVI. Stell. II. B.*)

$$BC \times DE : EF \times AB = DH : AH$$

moeten zijn: nu is (*zie boven*) $BC : EF =$ *hoek* A : *hoek* D, en daarom zal (*XV. Stell. II. B.*)

$$DE \times \textit{hoek } A : AB \times \textit{hoek } D = DH : AH$$

zijn, en, wanneer men de voorgaande termen dezer laatſte evenredigheid door DE, en de volgende door AB deelt, (*zie Aanm. X. St.*)

$$\textit{hoek } A : \textit{hoek } D = \frac{DH}{DE} : \frac{AH}{AB}$$

maar, volgens het *V. Lemma*, is:

$$\textit{hoek } A : \textit{hoek } D = \frac{\textit{boog } HK}{AH} : \frac{\textit{boog } HI}{DH}$$

derhalve (*I. Stell. II. B.*)

$$\frac{DH}{DE} : \frac{AH}{AB} = \frac{\textit{boog } HK}{AH} : \frac{\textit{boog } HI}{DH}$$

en, omdat het product der uiterſte termen gelijk is aan het product der middelſten, heeft men:

$$\frac{DH \times \textit{boog } HI}{DH \times DE} = \frac{AH \times \textit{boog } HK}{AH \times AB}, \text{ of } \frac{\textit{boog } HI}{DE} = \frac{\textit{boog } HK}{AB}$$

en daarom $DE : AB =$ *boog* HI : *boog* HK. Laat nu, op het verlengde van den *boog* HI, den *boog* $IL =$ den *boog* HI genomen, en, op het verlengde van DL, met $ML = AH$, den *boog* Lp worden beſchreven; dan is *boog* $Lp +$ *boog* Hp klaarblijkelijk grooter dan *boog* HIL, en daarom *boog* $Hp >$ *boog* HI, en omdat $HK > Hp$ is, zal (*VI. Ax.*) *boog* HK, grooter dan *boog* HI zijn: in de laatſte evenredigheid, is dan ook de apothema AB grooter dan de apothema DE. Nu zijn, volgens de *VIII. Stelling*, de inhouden der regelmatige veelhoeken gelijk aan de omtrekken vermenigvuldigd met de apothemata; de inhouden der iſoperimetriſche veelhoeken, zijn derhalve in dezelfde reden, als de apothemata: maar nu is de apothema van den $n+1$ hoek grooter dan die van den n hoek; de inhoud van den $n+1$ hoek is dan ook grooter dan die van den n hoek.

XXI.

XXI. Stelling. *Fig.* 163.

§. 453. *Onder alle figuren, welke denzelfden omtrek hebben, heeft de cirkel den grootsten inhoud.*

Betoog. Onder alle veelhoeken, denzelfden omtrek hebbende, is (*XV. Stell.*) de regelmatige de grootste, en de regelmatige veelhoek wordt, onder denzelfden omtrek, grooter, wanneer men het getal zijner zijden vermeerdert (*XX. Stell.*). Wij moeten derhalve alleen eenen regelmatigen veelhoek met eenen cirkel van gelijken omtrek vergelijken. Laat *DAC* de middelpunts driehoek van eenen regelmatigen *n* hoek zijn, en de sector *HEFG* het *n* de gedeelte van den cirkel, welke met den *n* hoek isoperiometrisch is; dan is de hoek *ADC* gegelijk aan den hoek *EHG*, en dan moet de zijde *AC* van den *n* hoek gelijk aan den boog *EFG* zijn, en de inhoud van den *n* hoek zal tot dien van den cirkel staan, in dezelfde reden, als de middelpunts driehoek *DAC*, tot den sector *HEFG*, als de apothema *BD*, tot de straal *HF*. Laat nu de raaklijn *IK* aan het punt *F* getrokken, en de stralen *HE* en *HG* verlengd worden; dan is, wegens de gelijkvormige driehoeken, *DAC* en *HIK*, de apothema *BD* tot de straal *FH*, gelijk *AB* tot *IF*, of gelijk de boog *EF* tot de raaklijn *IF*; derhalve staat de inhoud van den veelhoek tot dien van den cirkel, gelijk de boog *EF* tot de raaklijn *IF*; maar nu is de raaklijn *IF* (*X. Stell.*) grooter dan de boog *EF*; gevolgelijk is ook de inhoud van den cirkel grooter dan die van den *n* hoek, welke met denzelven eenen gelijken omtrek heeft.

ZEVENDE BOEK.

Over de Oplossing der Meetkunstige Werkstukken.

§. 454. I. BEPALING. Een *Werkstuk* (*Problema*) is, algemeen genomen, zulk een voorstel, waarin, onder zekere in hetzelve opgegevene voorwaarden, ééne of meer onbekende grootheden moeten bepaald of bekend gemaakt worden. In een werkstuk komen *gegevene* of *bekende*, en *gevraagde* of *onbekende* grootheden voor, welke, zal de vraag bepaald en oplosbaar zijn, met elkander zoo naauwkeurig verknogt moeten zijn, dat men, uit die voorwaarden, het onbekende kan afleiden: de redenering, waardoor men het onbekende bekend maakt, heet *oplossing* of *ontknoping* van het vraagstuk.

§. 455. II. BEPALING. In de meetkunstige Werkstukken, zijn de onbekende, zoowel als de gegevens, altijd punten, lijnen, vlakken of ligchamen, omtrent welke de volgende onderscheidingen moeten in acht genomen worden. 1° *Alle punten, die men naar welgevallen stelt, worden als bekend aangemerkt.* 2° *Elke bepaalde of onbepaalde lijn, die men naar welgevallen trekt, wordt, even als alle punten, die men in dezelve aannemen kan, als bekend aangemerkt.* 3° *Elke bepaalde of onbepaalde lijn, welke door twee bekende of gegevene punten loopt, wordt als gegeven aangemerkt, en hare rigting, met betrekking tot de overige bekende deelen der figuur, moet dan ook voor bekend gehouden worden.* 4° *De hoek, onder welken twee gegevene, bekende, of naar welgevallen aangenomene lijnen, elkander doorsnijden, wordt insgelijks als bekend aangemerkt; of een hoek is bekend, wanneer deszelfs beenen bekend zijn.* 5° *Een punt wordt gezegd gegeven te zijn, wanneer men deszelfs afstand kent tot twee lijnen, welke, in de figuur, naar welgevallen zijn aangenomen, of wel, wanneer dit punt in éène dezer twee lijnen gelegen zijnde, deszelfs afstand tot de tweede lijn bekend is.* 6° *Eene lijn is in stelling gegeven, wanneer eenig punt, door welke deze lijn loopen moet, benevens de hoek, onder welke deze lijn eene gegevene lijn doorsnijdt, bekend of gegeven zijn.* 7° *Deze lijn is alleen in grootte gegeven, wanneer hare lengte, zonder hare plaatsing of stelling, bekend is.*

8° Zij is in ſtelling en grootte beide gegeven, wanneer zoowel hare lengte, als de hoek, onder welke zij eene gegevene lijn doorſnijdt, bekend is. 9° Een cirkel is in ſtelling gegeven, wanneer zijn middelpunt, 10° in grootte, wanneer zijne ſtraal, 11° in ſtelling en grootte, wanneer het middelpunt, benevens de ſtraal gegeven zijn. 12° De punten, in welke gegevene lijnen en cirkels elkander doorſnijden, zijn, op dezelfde wijze, bekend of gegeven. Alle deze bepalingen behelzen zoo vele klaarblijkelijke waarheden, waarvan men de gegrondheid, bij een oppervlakkig nadenken, gevoelen zal, en bij welken nog vele andere zouden kunnen gevoegd worden.

§. 456. III. Bepaling. Een meetkunſtig Werkſtuk wordt, op tweeërlei wijze, of door conſtructie, of door berekening, opgelost. —— Door *conſtructie*, wanneer men, door het trekken van lijnen en cirkels, onbekende punten, lijnen, hoeken, *enz.* bepaalt; of eene figuur, onder gegevene omſtandigheden en voorwaarden zamenſtelt, enz.: deze wijze van oplosſing wordt, als van alle getal en van alle berekening volſtrekt onafhankelijk zijnde, als zuiver meetkunſtig aangemerkt. — Door *berekening*, wanneer men de ſtelling van punten, lijnen, benevens de onbekende grenzen eener figuur in grootte en ſtelling bepaalt, door te vinden, hoeveelmaal de aangenomene éénheid of modulus in deze onbekende deelen begrepen is. Voorbeelden van deze ſoort van oplosſing zijn reeds, in *Bijv. XV. Stell. III. B.; Bijv. XVI. Stell. III. B.; Bijv. op XVIII en XIX. Stell. III. B.; Bijv. XXVI. Stell. V. B.; Gev. XXVII. Stell. V. B.; Bijv. XXVIII. Stell. V. B.* en *Vraagſt. VI. B.* en *Bijv.* op hetzelve, voorgekomen. De oplosſing door conſtructie zou, in vele gevallen, de eenvoudigſte en de naauwkeurigſte zijn, indien men van de onvolkomenheid der werktuigen, die men in dezelve gebruiken moet, niet afhing. De oplosſing door berekening verdient, in verre de meeste gevallen, den voorrang: de berekening is een onfeilbaar en bijgevolg het zekerſte werktuig, hetwelk ſlechts in de bepaling der onmeetbare grootheden, eene onzekerheid nalaat, welke echter, zonder ophouden, binnen nadere en nadere grenzen, kan beperkt worden.

§. 457. Aanmerking. De oude Meetkundigen trachtten altijd, in de conſtructie hunner werkſtukken, zich van geene andere lijnen dan van de regte lijn en den cirkel te bedienen, en deze lijnen worden ook indedaad, het gemakkelijkst, en met de meeste naauwkeurigheid, beſchreven: nogtans beſtaat 'er ſlechts eene zekere klasſe van werkſtukken, welke door de regte lijnen en de cirkels, of, zoo als men het noemt, met liniaal en pasfer kunnen opgelost worden, en met deze foort van werkftukken zullen wij ons, in dit Boek, alleen ophouden. Ten aanzien van de uitvoering der conftructien nu, moeten wij aanmerken: 1° dat het papier, waarop de conftructie wordt uitgewerkt, volkomen in een plat vlak moet liggen; 2° dat men de lijnen en cirkels zoo fijn mogelijk trekken moet, ten einde zooveel naauwkeuriger de ware punten van doorfnijding te kunnen onderfcheiden.

Oplosfing der meest gebruikelijke en dagelijks voorkomende Werkftukken.

§. 458. I. Werkstuk. *Fig.* 164. *Twee punten A en B gegeven zijnde, zoo vele andere punten, als men begeert, te vinden, welke, met deze gegevene punten, in dezelfde regte lijn gelegen zijn?*

Constructie. Men befchrijve, uit de gegevene punten, A en B, met eene ftraal, gelijk, of grooter, dan AB, twee cirkelbogen, elkander in C en D doorfnijdende. Uit deze punten C en D, met eene ftraal, grooter dan AC, twee andere cirkelbogen, welke elkander in de punten E en G fnijden; dan liggen deze punten E en G, met de gegevene A en B, in dezelfde regte lijn.

Betoog. Want omdat (*conftr.*) $AC = AD$; $EC = ED$; $BC = BD$; $GC = GD$ is, liggen (*XX. Stell. I. B.*) de punten E, A, B en G, in dezelfde regte lijn.

Aanmerking. Men zal, op dezelfde wijze, zoo vele punten F, H, als men begeert, in de rigting van AB kunnen vinden.

§. 459. II. Werkstuk. *Fig.* 165. *Eene gegevene bepaalde regte lijn AB in twee gelijke deelen te verdeelen?*

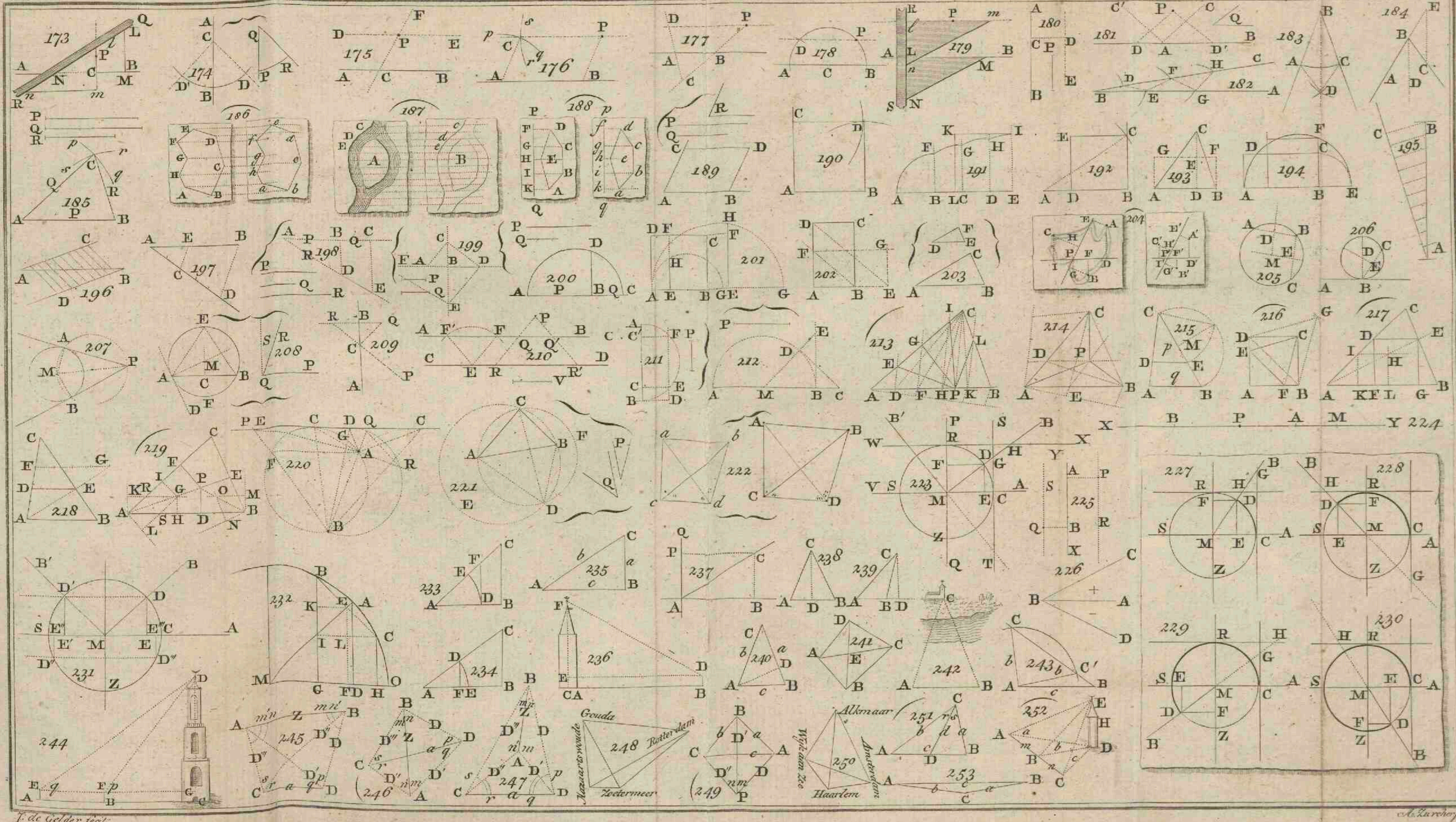
Constructie. Befchrijf, met eene opening des pasfers, grooter dan de helft van AB, twee cirkelbogen, of cirkels, welke elkander, in de punten C en D, fnijden: trek de lijn CD; dan zal deze de gegevene lijn AB, in het punt E, in twee gelijke deelen, AE, en BE, verdeelen.

Betoog. Want omdat de punten C en D op gelijken afftand van de punten A en B liggen, loopt (*XX. Stell. I. B.*) de lijn CD door het midden der gegevene lijn AB.

§. 460. III. Werkstuk. *Fig.* 166. *Uit een gegeven punt C, in eene gegevene lijn AB, eene loodlijn op dezelve opterigten?*

I. Constructie. Befchrijf, uit het gegeven punt C, met eene willekeurige opening des pasfers, eenen cirkel, welke de gegevene lijn, in de punten A en B, fnijdt; en met eene opening of ftraal, grooter dan AC, twee cirkelbogen, die elkander in D fnijden; dan zal (*XX. Stell. I. B.*) de lijn CD loodregt op AB ftaan.

II. Constructie. *Fig.* 167. Wanneer het gegeven punt B op het einde der gegevene lijn valt; dan befchrijve men, met eene ftraal, naar welge-



J. de Gelder fecit. A. Zürcher sc.

gevallen genomen, uit het gegeven punt B, den boog CD; uit C, met dezelfde straal, eenen boog, die den eersten in D snijdt; met dezelfde straal, uit D, eenen boog FG; trek door de punten C en D, de lijn CDF, welke den laatsten boog FG in F doorsnijdt; dan zal de lijn, BF, welke door de punten B en F loopt, loodregt op AB staan.

Betoog. Want omdat, volgens de constructie, $CD = DB = DF$ is, staat de hoek CBF in eenen halven cirkel, en is (*V. Gev. XX. Stell. V. B.*) regt.

§. 461. Aanmerking. Met voordeel bedient men zich, in de constructien der werkstukken, van eenen, uit hout of andere stoffe, vervaardigden regthoekigen driehoek ABC, *Fig.* 168. welks kanten zuiver bewerkt en regt zijn, en welker zijden AB en BC zoo volmaakt mogelijk, eenen regten hoek maken.

III. Constructie. *Fig.* 169. Men legge nu eene der regthoekszijden MN van zulk eenen driehoek langs de gegevene lijn AB, en sluite tegen de hypothenusa LN, een zuiver liniaal PQ; (echter kan men daartoe ook eenen dergelijken driehoek gebruiken,) dit liniaal onbeweeglijk in deszelfs stand vasthoudende, schuift men den driehoek LMN langs hetzelve, tot dat, in den stand lmn, de regthoekszijde LM of lm door het gegevene punt C ga, en men trekke dan de lijn lCm, welke, omdat LM evenwijdig aan lm, en derhalve hoek $M =$ hoek C is, regthoekig op AB zal staan.

§. 462. IV. Werkstuk. *Fig.* 170. *Uit een gegeven punt P, eene loodlijn, op eene gegevene lijn AB, te laten vallen?*

I. Constructie. Beschrijf, uit het gegeven punt P, met eene straal groot genoeg, om de lijn AB te kunnen snijden, eenen cirkelboog, welke de gegevene lijn, in de punten A en B, doorsnijdt: uit de punten A en B, met dezelfde straal, of dezelfde opening des passers, (waarvoor men nogtans eene grootere of kleinere opening nemen kan,) twee cirkelbogen, die elkander in C doorsnijden; dan zal (*XX. Stell. I. B.*) de lijn, PC, welke de punten P en C vereënigt, loodregt op AB staan.

II. Constructie. *Fig.* 171. Men neme, in de gegevene lijn AB, twee punten A en B, en beschrijve, uit deze punten, met AP en BP, als stralen, twee cirkelbogen, welke elkander, behalve in het punt P, nog in het punt C doorsnijden; dan zal (*XX. Stell. I. B.*) AB loodregt op PC staan.

III. Constructie. *Fig.* 172. Men neme, in de lijn AB, een punt A, naar welgevallen, trekke de lijn AP; deele dezelve, in C, in twee gelijke deelen, en beschrijve, uit C, met AC, eenen cirkel, welke de lijn AB, behalve in het punt A, nog in het punt B snijdt; indien men dan de lijn PB trekt; dan zal deze (*V. Gev. XX. Stell. V. B.*) regthoekig op AB staan.

IV. Constructie. *Fig.* 173. Men legge den regthoekigen driehoek LMN, met de regthoekszijde MN, langs de gegevene lijn AB, en het liniaal QR langs de hypothenusa LN. Het laatste in deszelfs stand onbeweeglijk

lijk houdende, schuift men den driehoek langs het liniaal, tot dat de driehoek LMN in den stand lmn kome, in welke de regthoekszijde lm door het gegeven punt P gaat, en men trekke dan de lijn lm, welke de begeerde zal zijn.

§. 463. V. Werkstuk. *Fig.* 174. *Een punt C, in eene lijn AB gegeven zijnde, door hetzelve eene lijn te trekken, die, met de gegevene lijn AB, eenen hoek, gelijk aan den gegevenen hoek PQR, maken zal?*

Constructie. Men beschrijve, met eene opening des passers, naar welgevallen genomen, uit het hoekpunt Q, van den gegevenen hoek PQR, als ook uit het gegevene punt C, twee cirkelbogen, en men make (*II. Gev. XVII. Stell. V. B.*) de boog $BD =$ de boog PR; wanneer men dan uit het punt C, door het punt D, de lijn CD trekt; dan zal deze de begeerde zijn; want de hoek C zal dan (*I. Gev. XVII. Stell. V. B.*) $=$ den hoek Q zijn.

Aanmerking. Wanneer men, beneden de gegevene lijn AB, den boog $BD' =$ den boog PR neemt, en de lijn CD' trekt; dan zal deze ook met de gegevene lijn AB, den hoek $BCD' =$ den hoek Q maken: 'er zijn alzoo op dit werkstuk twee oplossingen.

§. 464. VI. Werkstuk. *Fig.* 175. *Door een gegeven punt P, eene lijn, evenwijdig aan eene gegevene lijn AB te trekken?*

I. Constructie. *Fig.* 175. Neem, in de gegevene lijn AB, een punt C, naar welgevallen; trek, door hetzelve en het gegeven punt P, de lijn CPF, en maak (*V. Werkst.*) hoek $FPE =$ den hoek BCP; dan zal (*XXV. Stell. I. B.*) DE evenwijdig aan AB zijn.

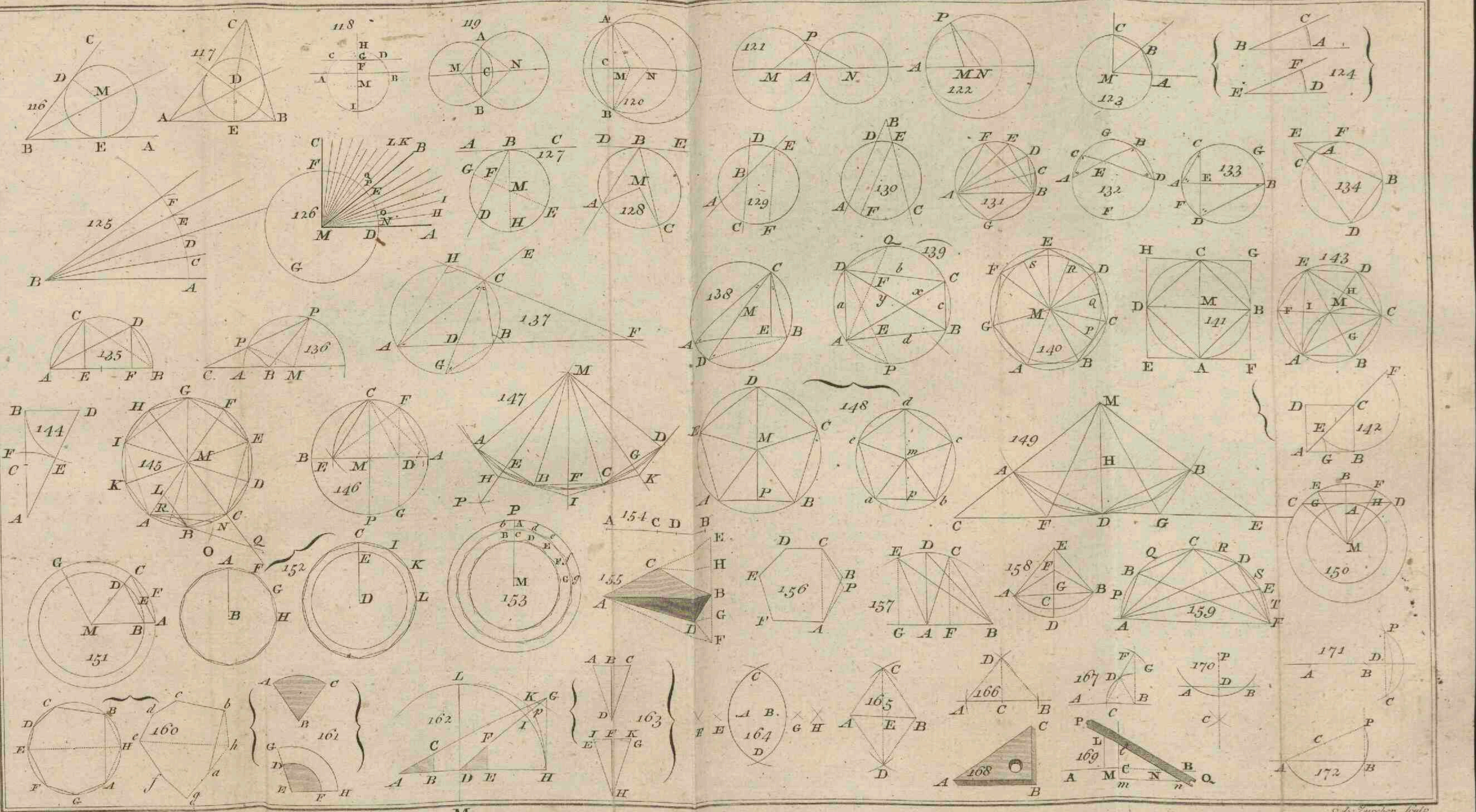
II. Constructie. *Fig.* 176. Neem, in de gegevene lijn AB, twee punten A en B, naar welgevallen; beschrijf, uit A, met eene straal, gelijk aan de lijn PB, eenen cirkelboog pq, en, uit P, met eene straal, gelijk aan de straal AB, eenen anderen cirkelboog rs, welke den eersten in het punt C doorsnijdt; dan zal de lijn PC evenwijdig aan AB loopen.

Betoog. Want $AB = CP$ en $AC = BP$ zijnde, zal (*II. Stell. III. B.*) PC evenwijdig aan AB zijn.

III. Constructie. *Fig.* 177. Trek, door het gegevene punt P, eene onbepaalde lijn PC, welke de gegevene AB, in het punt B, doorsnijdt; maak $BC = PB$, en trek door C wederom eene lijn CD, welke de gegevene in A snijdt: indien men dan $AD = AC$ maakt, en PD trekt, zal deze laatste lijn (*II. Stell. IV. B.*) evenwijdig aan AB loopen.

IV. Constructie. *Fig.* 178. Neem, in de gegevene lijn AB, een punt C, naar welgevallen; beschrijf, uit dit punt C, met de straal CP, eenen cirkel, welke de gegevene lijn AB, in de punten A en B, doorsnijdt; men neme dan (*II. Gev. XVII. Stell. V. B.*) den boog $AD =$ den boog PB; dan zal de lijn PD, welke door de punten P en D loopt, (*XIV. Stell. V. B.*) evenwijdig aan AB zijn.

V. Constructie. *Fig.* 179. Gewonelijk gebruikt men tot de constructie van de evenwijdige lijnen eenen regthoekigen driehoek. Men legge de regt-



Jac: de Gelder delin.

A. Zurcher sculp

regthoekszijde *LM* van den driehoek *LMN*, langs de gegevene lijn *AB*, en het liniaal *RS*, langs de zijde *LN*, schuive (het liniaal vasthoudende) den driehoek *LMN* langs hetzelve, tot dat, in den stand *lmn*, de zijde *LM* of *lm* door het punt *P* ga; dan zal, omdat de lijnen *LB* en *lm*, regthoekig op *lN* staan, de lijn *lPm* evenwijdig aan *AB* zijn.

§. 465. VII. Werkstuk. *Fig.* 180. *Op eenen afstand, gelijk aan eene gegevene lijn P, eene lijn, evenwijdig aan eene gegevene lijn AB, te trekken?*

Constructie. Neem in de gegevene lijn *AB* een punt *C*, naar welgevallen; maak (*III. Werkst.*) *CD* loodregt op *AB*, en trek, na *CD* = *P* genomen te hebben, de lijn *DE*, evenwijdig aan *AB*; dan bevindt deze zich (*XXXV. Bep. I. B.*) op eenen afstand van *AB*, die gelijk is aan de lijn *P*.

§. 466. VIII. Werkrsuk. *Fig.* 181. *Door een gegeven punt P eene lijn te trekken, welke eene gegevene regte lijn, onder eenen hoek, gelijk aan eenen gegevenen hoek Q, ontmoet?*

Constructie. Neem in de gegevene lijn *AB* een punt *A*, en trek door hetzelve (*V. Werkst.*) eene lijn *AC* of *AC'*, met *AB* eenen hoek, gelijk aan den gegeven hoek *Q* makende; wanneer men dan door het gegeven punt *P* de lijn *PD* of *PD'*, evenwijdig aan *AC* of *AC'*, trekt, zal deze de begeerde lijn zijn.

Betoog. Want, volgens *XXIV. Stell. I. B.* zal *hoek PDB* = *hoek CAB* = *hoek Q* zijn.

§. 467. IX. Werkstuk. *Fig.* 182. *Een hoek ABC gegeven zijnde, dezen hoek te vermenigvuldigen; dat wil zeggen, door constructie, eenen hoek te vinden, die twee, drie, vier, enz. malen dezen gegevenen hoek bevat?*

Constructie. Behalve de constructie, welke, in het II. *Gevolg* op de XVII. *Stelling. V. Boek*, voorkomt, kan men de begeerde hoeken nog aldus construeren. Met eene straal, naar welgevallen genomen, beschrijve men, uit het punt *B*, eenen cirkelboog, welke één der beenen van den gegevenen hoek, bij voorbeeld, het been *BC*, in *D* snijdt; uit *D*, met dezelfde opening, eenen boog, welke *AB* in *E* snijdt; uit *E*, met dezelfde opening, eenen boog, welke *BC* in *F* snijdt; uit *F*, met dezelfde opening eenen boog, welke *AB* in *G* snijdt; uit *G*, met dezelfde opening, eenen boog, welke *BC* in *H* snijdt; *enz.*; dan zal, indien men de lijnen *DE*, *EF*, *FG*, *GH*, *enz.* trekt; *hoek EDF* = 2 *hoek B*; *hoek FEG* = 3 *hoek B*; *hoek GFH* = 4 *hoek B*; *hoek AGH* = 5 *hoek B*; *enz.* zijn.

Betoog. Want, omdat *BD* = *DE* is, zal (*III. Gev. XVIII. St. I. B.*) *hoek EDF* = 2 *hoek B* zijn; maar *DE* = *EF* zijnde; zal *hoek EDF* = *hoek EFD* = 2 *hoek B* zijn; nu is (*XVII. Stell. I. B.*) *hoek FEG* = *hoek B* + *hoek DFE* = 3 *hoek B*. Op dezelfde wijze betoogt men: dat *hoek GFH* = 4 *hoek B* is, *enz.*

§. 468.

§. 468. X. Werkstuk. *Fig.* 183. *Eenen gegevenen hoek ABC in twee gelijke deelen te verdeelen?*

I. Constructie. Befchrijf, uit het hoekpunt *B*, van den gegevenen hoek, eenen cirkelboog *AC*, en, met dezelfde of eene grootere of kleinere ftraal, uit *A* en *C*, twee andere cirkelbogen, die elkander in *D* fnijden; dan zal de lijn, welke, van het hoekpunt *B*, door dit punt *D* getrokken wordt, den gegevenen hoek in twee gelijke deelen verdeelen.

Betoog. Want, trekkende de lijnen *AD* en *CD*, dan zijn (*XIII. St. I. B.*) de driehoeken *ABD* en *CBD*, gelijk en gelijkvormig, en derhalve hoek *ABD* = den hoek *CBD*.

II. Constructie. *Fig.* 184. Verleng *AB*. Neem, op het verlengde van *AB*, het punt *E*; *BC* = *BE*, en trek *BD* evenwijdig aan *CE*; dan zal hoek *ABD* = hoek *CBD* zijn.

Betoog. Want, wegens de evenredige lijnen *CE* en *BD*, en den gelijkbeenigen driehoek *CBE*, is (*XIV en XXVI. Stell. I. B.*) *hoek ABD* = *hoek BEC* = *hoek BCE* = *hoek CBD*.

§. 469. Aanmerking. Men kan dan ook eenen gegeven hoek, in 4, 8, 16, 32, *enz.* gelijke deelen, verdeelen: doch, met pasfer en liniaal, kan geen hoek in 3, 5, 6, 7, 9, 10, *enz.* gelijke deelen verdeeld worden. Wanneer men nogtans (*Fig.* 182.) zoo vele onbuigbare lijnen, van gelijke lengte, *BD*, *DE*, *EF*, *FG*, *enz.* en, om de punten *D*, *E*, *F*, *G*, beweegbaar zijnde, als de gegevene hoek in deelen moet verdeeld worden, tusfchen twee andere, om het punt *B*, beweegbare lijnen *AB* en *BC*, zoodanig plaatst, dat de hoekpunten *D*, *E*, *F*, *G*, in deze laatfte lijnen *AB* en *BC* blijven; dan zal men dit ftelfel van lijnen zoodanig plaatfen kunnen, dat de laatfte lijn, bij voorbeeld, *EF*, met *AB* den gegeven hoek maakt, en dan zal de hoek *B* het evenmatig deel van den gegeven hoek, en, in het geval der figuur, een derde gedeelte van denzelven zijn.

§. 470. XI. Werkstuk. *Fig.* 185. *Eenen driehoek te conftrueren, welks zijden aan drie gegeven lijnen P, Q en R gelijk zijn?*

Constructie. Men make *AB* = *P*, en befchrijve, uit *A* en *B*, met de lijnen *Q* en *R*, als ftralen, de cirkelbogen *pq* en *rs*, die elkander in *C* fnijden, wanneer men dan de lijnen *AC* en *BC* trekt; dan zal *ABC* de begeerde driehoek zijn. — De fom van twee der gegevene lijnen moet (*VII. Stell. I. B.*) grooter dan de derde zijn, anders is de vraag onmogelijk.

§. 471. XII. Werkstuk. *Eene figuur te conftrueren, gelijk en gelijkvormig zijnde aan eene gegevene?*

Men noemt zulks eene figuur overtebrengen of te kopieren, hetwelk op verfcheidene wijzen, waarvan de volgende de voornaamfte zijn, kan uitgevoerd worden.

I. Constructie. I. Geval. *Fig.* 186. Wanneer de gegevene figuur regtlijnig is, dan zal men uit al hare hoekpunten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, evenwijdige lijnen *Aa*, *Bb*, *Cc*, *enz.* trekken, waaraan men eene gelijke lengte geven zal; de uiteinden *a*, *b*, *c*, *d*, *enz.* dezer evenwijdige lij-

lijnen zullen dan (*XXXII. Stell. I. B.*) de hoekpunten der begeerde figuur zijn.

II. Geval. *Fig.* 187. Is de figuur niet regtlijnig; dan zal men nogtans, naar aanleiding van de XXXII. *Stell. I. B.* dezelve als boven construeren. Men hechte het papier *A*, waarop de gegevene figuur geteekend is, benevens een papier *B*, waarop men de kopij wil overbrengen, op een teekenbord, en trekke, met een fijn potlood, eene genoegzame menigte van evenwijdige lijnen Cc, Dd, Ee, en men make $Cc = Dd = Ee$; dan zal men eene figuur verkrijgen, die gelijk en gelijkvormig aan de gegevene zal zijn.

II. Constructie. *Fig.* 188. Laat $ABCDE$ de gegevene figuur zijn, (de wijze van constructie, die hier beschreven zal worden, geldt voor de kromlijnige figuren, zoowel als voor de regtlijnige,) men trekke eene onbepaalde lijn PQ, naar welgevallen, en late, uit alle de hoekpunten, of voorname punten der gegevene figuur, loodlijnen AK, BI, CG, *enz.* op deze lijn PQ vallen. Voorts trekke men op het papier, waarop men de kopij brengen wil, eene onbepaalde lijn pq; men neme op dezelve $pf = PF$, $fg = FG$, $gh = GH$, $hi = HI$, $ik = IK$: men trekke voorts, uit de punten f, g, h, i, k, op pq, de loodlijnen fd, gc, he, ib, ka; en, men make eindelijk, $fd = FD$; $gc = GC$; $he = HE$; $ib = IB$; $ka = KA$; dan zullen a, b, c, d, e, de overgebragte punten zijn, hetgeen gemakkelijk uit de gelijke en gelijkvormige regthoekige trapeziums $CDFG$ en $cdfg$, *enz.* zal kunnen betoogd worden.

§. 472. XIII. Werkstuk. *Fig.* 189. *Een parallelogram, onder twee gegevene zijden P en Q, en eenen gegevenen hoek R zamentestellen?*

Constructie. Maak (*V. Werkst.*) de hoek $BAC =$ den gegeven hoek R; neem $AB = P$ en $AC = Q$; trek CD aan AB, en BD aan AC evenwijdig; dan is (*I. en V. Bep. III. B.*) $ABDC$ het begeerde parallelogram.

§. 473. Aanmerking. Wanneer men eenen regthoek, onder eene gegevene lengte en breedte, moet zamenstellen, zal men den hoek ABC regt maken, en voor het overige, op dezelfde wijze, als in de constructie opgegeven is, te werk gaan.

§. 474. XIV. Werkstuk. *Fig.* 190. *Op eene gegevene regte lijn AB, een vierkant te beschrijven?*

Constructie. Trek (*III. Werkst.*) AC loodregt op AB; maak $AC = AB$, en trek CD aan AB, en BD aan AC evenwijdig; of, beschrijf, uit B en C, met eene straal, gelijk aan AB, twee cirkelbogen, die elkander in D snijden, en trek de lijnen CD en BD; dan zal (*III en V. Bep. III. B.*) het vierkant $ABDC$, op de lijn AB, beschreven zijn.

§. 475. XV. Werkstuk. *Fig.* 191. *Een vierkant zamentestellen, gelijk zijnde aan de som van eenige gegevene vierkanten, welke ondersteld worden, op de lijnen AB, BC, CD en DE, beschreven te zijn?*

Con-

Constructie. Stel de zijden AB, BC, CD, DE, der gegevene vierkanten, op dezelfde regte lijn, nevens elkander, en trek de onbepaalde loodlijnen BF, CG, DH, EI, op AE; beschrijf uit B, met AB als straal, den cirkelboog, die BF, in F snijdt; uit C, met CF, den boog, die CG in G; uit D, met DG den boog DG, die DH in H; uit E den boog, die EI in I snijdt, *enz.* indien 'er nog meer vierkanten gegeven waren. Nu zal $BF^2 = AB^2$; $CG^2 = AB^2 + BC^2$; $DH^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$; $EI^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2$ zijn, zoo als uit *XVI. St. III. B.* gemakkelijk te zien is. — Men zal, op deze wijze, gemakkelijk een vierkant kunnen vinden, dat gelijk n maal een gegeven vierkant is, ook zal men, wanneer eenige lijn als éénheid aangenomen wordt, door dezelfde constructie, de lijnen vinden, welke door $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, *enz.* worden uitgedrukt.

§. 476. XVI. Werkstuk. *Fig.* 192. *Een vierkant zamentestellen, gelijk zijnde aan het verschil van twee gegevene vierkanten?*

Constructie. Stel op AB, de zijde van het kleinste der twee gegevene vierkanten, de loodlijn BC; beschrijf, uit A, als middelpunt, met de zijde van het grootste vierkant, eenen cirkelboog, welke BC in C snijdt; dan is (*XVI. Stell. III. B.*) BC^2 of $BCED$ gelijk aan het verschil der vierkanten, welke, op de gegevene lijnen, AC en AB, beschreven zijn.

§. 477. XVII. Werkstuk. *Fig.* 193. *Eenen regthoek, welks inhoud gelijk is aan dien van eenen gegevenen driehoek ABC, te construeren?*

Constructie. Men late de loodlijn CD, uit het toppunt C des driehoeks, op zijne basis AB vallen; deele dezelve (*II. Werkst.*) in E in twee gelijke deelen, en trekke, door E, de lijn FG evenwijdig aan AB; door A en B, de lijnen AG en BF, evenwijdig aan CD; dan zal (*VIII. Stell. III. B.*) *regth.* $ABFG =$ *drieh.* ABC zijn.

§. 478. XVIII. Werkstuk. *Fig.* 194. *De zijde van een vierkant te vinden, welks inhoud gelijk is aan dien van eenen gegevenen regthoek $ABCD$?*

Constructie. Verleng de zijde AB; maak $BE = BC$; beschrijf op AE eenen halven cirkel; verleng BC tot in F; dan zal (*zie Aanm. XXI. Stell. V. B.*) BF de zijde van het begeerde vierkant zijn.

§. 479. Aanmerking. Het is uit de *XV. Stell. III. B.* gebleken, hoe tot elke veelhoekige figuur eenen driehoek van denzelfden inhoud kan gevonden worden; daar men nu, naar aanleiding van de twee voorgaande werkstukken, tot elken driehoek eenen regthoek, en tot elken regthoek een vierkant van denzelfden inhoud vinden kan, zal men ook een vierkant vinden kunnen, welks inhoud aan dien van eenen gegevenen veelhoek gelijk zal zijn.

§. 480. XIX. Werkstuk. *Fig.* 195 *en* 196. *Eene gegevene regte lijn AB, in een gegeven aantal gelijke deelen, te verdeelen?*

I. Con-

I. CONSTRUCTIE. *Fig.* 195. Zij *AB* de gegevene lijn, welke men, bij voorbeeld, in *tien* gelijke deelen begeert te verdeelen. Men trekke, uit het punt *A*, eene onbepaalde regte lijn *AC*, met *AB* eenen willekeurigen hoek makende; op deze lijn, neme men, van *A* afterekenen, tien gelijke deelen, naar welgevallen; verëenige, door de lijn *BC*, het uiteinde *C* van het laatſte deel met het punt *B*, en trekke eindelijk door alle de deelpunten lijnen die evenwijdig aan *BC* loopen; dan zullen deze evenwijdigen de lijn *AB* (*III. Gev. I. Stell IV. B.*) in tien gelijke deelen verdeelen.

II. CONSTRUCTIE. *Fig.* 196. Men trekke, uit *A*, eene lijn *AC*; en uit *B*, de lijn *BD*, evenwijdig aan *AC*; op beide lijnen, van de punten *A* en *B* afterekenen, een aantal van gelijke deelen, dat één minder is dan het aantal deelen, waarin de lijn *AB* moet verdeeld worden: men verëenige dan de deelpunten der twee lijnen *AC* en *BD*, welke (*XXXI. Stell. I. B.*) evenwijdig zullen zijn, en de gegevene lijn in het begeerde aantal deelen zullen verdeelen.

§. 481. AANMERKING. Door eene dergelijke conſtructie, worden alle ſoorten van ſchalen zamengeſteld.

§. 482. XX. WERKSTUK. *Fig.* 197. *Eene gegevene lijn AB, in eene gegevene reden, bij voorbeeld, als het getal twee tot het getal drie, te verdeelen?*

CONSTRUCTIE. Men trekke de onbepaalde lijn *AD*, neme *AC* gelijk aan *twee*, *CD* gelijk aan *drie* gelijke deelen; men trekke de lijn *BD* en *CE* evenwijdig aan *BD*; dan zal (*I. Stell. IV. B.*) $AE:EB = AC:CD = 2:3$ zijn. — Op dezelfde wijze, zal men de gegevene lijn *AB*, in eene andere reden, als een getal tot een getal, of, als eene lijn tot eene lijn, in twee of meer gelijke deelen kunnen verdeelen.

§. 483. XXI. WERKSTUK. *Fig.* 198. *Tot drie gegevene lijnen, P, Q, R, eene vierde evenredige te vinden?*

CONSTRUCTIE. Trek twee onbepaalde lijnen *AC* en *AD*, onder eenen willekeurigen hoek; neem op de eerſte *AB*, de deelen $AB = P$, $BC = Q$; op de tweede $AD = R$; trek *BD*, en, door *C*, de lijn *CE* evenwijdig aan *BD*; dan zal (*I. Stell. IV. B.*) $AB:BC = AD:DE$; of $P:Q = R:DE$ zijn, en *DE* is alzoo de vierde evenredige tot *P*, *Q* en *R*.

§. 484. XXII. WERKSTUK. *Fig.* 199. *Tot twee gegevene lijnen, P en Q, eene derde evenredige te vinden?*

CONSTRUCTIE. Trek twee onbepaalde lijnen *AB* en *BC*, die elkander, onder eenen regten hoek doorſnijden, maak $AB = P$, $BC = Q$; trek *AC*, en *CD* loodregt op *AC*; dan zal (*II. Gev. XII. Stell. IV. B.*) *BD* de derde evenredige tot *AB* en *CD*, of tot *P* en *Q*, zijn.

§. 485. AANMERKING. Indien men *DE* evenwijdig aan *AC*, *EF* evenwijdig aan *DC* trekt, *enz.*, zullen de lijnen *AB*, *BC*, *BD*, *BE*, *BF*, *enz.* in eene meetkunſtige reeks zijn.

§. 486. XXIII. Werkstuk. *Fig.* 200. *Tusschen twee gegevene lijnen, P en Q, eene midden-evenredige lijn te vinden?*

Constructie. Stel de twee gegevene lijnen, *P* = *AB* en *Q* = *BC*, op dezelfde lijn, nevens elkander, en beschrijf op deze vereënigde lijn *AC* eenen halven cirkel; trek *BD* regthoekig op *AC*; dan is *BD* midden-evenredig tusschen *AB* en *BC*, of tusschen *P* en *Q*. Zie *Aanm. XXII. Stell. V. B.*

§. 487. Aanmerking. *Fig.* 199. Men kan, door de snijding van lijnen en cirkels, geen twee midden-evenredigen tusschen twee gegevene lijnen vinden: nogtans is de volgende werktuigelijke constructie volmaakt naauwkeurig. Men plaatse de twee gegevene lijnen *AB* en *BE* op de beenen van eenen regten hoek *ABE*, welks beenen onbepaaldelijk verlengd zijn. Men plaatse nu twee zuivere winkelhaken, *ACD* en *EDC*, zoodanig, dat derzelver zijden aan elkander sluiten, de beenen *AC* en *ED* door de punten *A* en *E* gaan, en de hoekpunten *C* en *D* op de lijnen *BC* en *BD* blijven: deze winkelhaken in dien stand gebragt zijnde, zijn *BC* en *BD* de gevraagde midden-evenredigen.

§. 488. XXIV. Werkstuk. *Fig.* 201. *Een vierkant te vinden, dat tot een gegeven vierkant ABCD in reden staat, als eene lijn P tot een lijn Q?*

Constructie. Zij *ABCD* het gegeven vierkant, zoek, volgens het *XXI. Werkstuk* tot *P*, *Q* en *AB*, de vierde evenredige *AE*; trek *EF* evenwijdig aan *AD*, en verleng (indien het noodig is,) *CD* tot in *F*; dan is (*XI. Stell. III. B.*) *vierk. ABCD* : *regth. AEFD* = *AB* : *AE* = *P* : *Q*. Men moet dan een vierkant vinden gelijk aan den regthoek *AEFD*: men make tot dat einde, (gelijk in het *XVIII. Werkstuk*) *EG* = *EF* = *AB*, en beschrijve op *AG* eenen halven cirkel: indien men dan *EF*, tot aan den omtrek verlengt, dan zal *EH* de zijde van het begeerde vierkant zijn.

§. 489. XXV. Werkstuk. *Fig.* 202. *Op eene gegevene lijn P een regthoek te beschrijven, gelijk zijnde aan eenen gegevenen regthoek ABCD?*

Constructie. Men brenge op *AB*, de lijn *AE* = *P* over, trekke *ED* en *EF* evenwijdig aan *ED*; dan zal (*I. Gev. I. Stell. IV. B.*) *AB* : *AF* = *AE* : *AD* zijn, en (*V. Stell. IV. B.*) *AB* × *AD* = *AF* × *AE*. De lijn *AF* is dan de breedte van den gevraagden regthoek, zoodat, wanneer men *FG* evenwijdig aan *AE* en *EG* evenwijdig aan *AF* trekt, *AEGF* de begeerde regthoek zal zijn.

§. 490. XXVI. Werkstuk. *Fig.* 203. *Op eene gegevene lijn DE eenen driehoek te beschrijven, gelijkvormig aan eenen gegevenen driehoek ABC?*

I. Constructie. Maak (*VIII. Werkst.*) de hoeken *D* en *E*, gelijk aan de hoeken *A* en *B*; dan zullen (*I. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) de driehoeken *DEF* en *ABC* gelijkvormig zijn.

II. Con-

II. Constructie. Men ſtelle DE in de rigting van AB, of evenwijdig aan AB, en trekke de lijnen DF en EF evenwijdig aan AC en BC; dan zal (*XXX. Stell. I. B. en IV. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) de driehoek DEF gelijkvormig zijn aan den driehoek ABC.

§. 491. XXVII. Werkstuk. *Fig.* 204. *Een figuur te conſtrueren, welke gelijkvormig is aan eene gegevene figuur?*

De *XIII. Stelling* van het *IV. Boek*, behelst reeds eene wijze, om deze conſtructie uittevoeren, en, behalve deze, beſtaan 'er nog vele anderen, welke, omdat wij dezelve hier niet kunnen bijbrengen, in onze Lesſen over de Werkdadige Meetkunst, zullen verklaard worden. Wij moeten nogtans doen opmerken, dat het vervaardigen van alle ſoorten van kaarten en plans niets anders is, dan dit werkſtuk, in alle deszelfs bijzonderheden, optelosſen. Wij zullen ons thans alleenlijk vergenoegen met de volgende conſtructie opgegeven. Laten, *fig.* 204, eenige punten A, B, C, *enz.* voorname en merkwaardige punten van eene figuur of van een terrein gegeven zijn Neem in deze figuur twee lijnen, ID en EG, naar welgevallen, aan, welke met elkander in het punt P, eenen regten of ſcheven hoek maken; trek op het plan, waarop men de gelijkvormige figuur wil overbrengen, twee lijnen $I'D'$ en $E'G'$, naar welgevallen elkander in P', onder eenen hoek gelijk aan den hoek P, welke de lijnen ID en EG maken, doorſnijdende; men late nu, uit de punten der gegevene figuur, op de aangenomene lijnen ID en EG, uit de punten A, B, C, *enz.* de loodlijnen AD, BF, CI op ID, en de loodlijnen AE, BG en CH op GE vallen. Nu overlegge men, in welke reden de afſtanden van de punten der overgebragte figuur tot die van de overeenkomſtige punten der gegevene figuur moeten ſtaan: ſtellen wij die reden als *één tot twee*; dan make men $P'D' : PD = P'F' : PF = PI : P'I' = 2:1$ en $P'E' : PE = P'G' : PG = P'H' : PH = 2:1$, en trekke uit de punten D', F' en I' loodlijnen op $I'D'$, en uit de punten E', G', H' loodlijnen op $E'G'$; de punten A', B' en C', alwaar deze loodlijnen elkander ſnijden, zijn dan de overgebragte punten, en, wanneer 'er meer punten gegeven zijn, worden zij op dezelfde wijze overgebragt. Het betoog dezer conſtructie kan uit de *VIII. Stell. IV. B.* gemakkelijk opgemaakt worden.

§. 492. XXVIII. Werkstuk. *Fig.* 205. *Het middelpunt van eenen gegevenen cirkel te vinden?*

Constructie. Neem, in den omtrek, drie punten A, B en C, naar welgevallen, en deel de koorden AB en BC in D en E midden door; trek de loodlijnen DM en EM op dezelve; dan zal (*X. Stell. V. B.*) M het middelpunt des gegevenen cirkels zijn. — Op dezelfde wijze wordt het middelpunt van eenen cirkel gevonden, welke door drie gegevene punten loopt.

§. 493. XXIX. Werkstuk. *Fig.* 206. *Eenen cirkel te beſchrijven, welke eene gegevene lijn AB, in een punt B, aanraken, en door een gegeven punt C zal gaan?*

CONSTRUCTIE. Omdat de cirkel door de punten *B* en *C* gaan moet, ligt deszelfs middelpunt (*X. Stell. V. B.*) in de lijn *DE*, die loodregt op het midden van *BC* staat, en omdat de cirkel de lijn *AB* in het punt *B* moet aanraken, ligt het middelpunt in de lijn *BD*, welke loodregt op *AB* staat. Men trekke dan *BD* loodregt op *AB*, veréénige de punten *B* en *C*, trekke (*IV. Werkst.*) eene lijn *DE*, welke loodregt op het midden van *DE* staat; dan is *D* het middelpunt des begeerden cirkels.

§. 494. XXX. WERKSTUK. *Fig.* 207. *Door een gegeven punt P, buiten den omtrek van eenen cirkel gelegen, eene raaklijn tot dien cirkel te trekken?*

CONSTRUCTIE. Veréénig het gegeven punt *P* met het middelpunt *M* des cirkels, en beschrijf op *MP*, als middellijn, eenen cirkel, die den gegevenen, in de punten *A* en *B*, snijdt; dan zullen de lijnen *PA* en *PB* den cirkel in de punten *A* en *B* aanraken.

BETOOG. Men trekke de stralen *AM* en *BM*, dan zijn (*V. Gev. XX. Stell. V. B.*) de hoeken *PAM* en *PBM* regte hoeken, en daarom zijn (*XII. Stell. V. B.*) *PA* en *PB* raaklijnen.

§. 495. XXXI. WERKSTUK. *Fig.* 208. *Op eene gegevene lijn AB een cirkel segment te beschrijven, in hetwelk eenen hoek, gelijk aan den gegevenen hoek PQR, kan geplaatst worden?*

CONSTRUCTIE. Men trekke, door het punt *A*, de lijn *AD*, welke met *AB* den hoek *DAB* = den hoek *PQR* maakt, wanneer dan, volgens het *XXIX. Werkst.* eenen cirkel beschreven wordt, welke door de lijn *AD* in het punt *A* wordt aangeraakt, en door het punt *B* loopt; dan wordt (*XIX. Stell. V. B.*) hoek *BAD* door de helft van den boog *AFB* gemeten, en omdat diezelfde halve boog (*I. Gev. XX. Stell. V. B.*) den hoek *AEB* meet, zal hoek *AEB* = hoek *BAD* = hoek *PQR* zijn. Men make daarom hoek *BAD* = hoek *PQR*; trekke *MC* loodregt op het midden van *AB*; en *AM* loodregt op *AD*; dan zal *M* het middelpunt van het begeerde cirkel segment zijn. — Of men trekke *QS* loodregt op *QP*, en make hoek *BAM* = hoek *RQS*; dan zal men ook het middelpunt van het begeerde segment verkrijgen.

§. 496. AANMERKING. Het beschrijven der regelmatige veelhoeken, in en om eenen gegeven cirkel, volgt uit de betoogde stellingen van het zesde Boek zoo onmiddelijk, dat dezelve hier te plaatsen, slechts eene herhaling van reeds gezegde zaken zijn zou. Ook zullen wij, in de werkdadige Meetkunst, dit onderwerp gelijk ook de verdeeling van den omtrek des cirkels opzettelijk behandelen. Intusschen moeten wij den Leerling, die wenscht de opgegevene Werkstukken, door den enkelden passer te leeren uitvoeren, het Italiaansche werk van den Heer L. MASCERONI, getijteld: *Geometria del compasso*, of de Fransche vertaling van hetzelve bijzonderlijk aanbevelen.

Voor-

Voorbeelden van de oplossing van meer ingewikkelde meetkunstige Werkstukken.

§. 497. De meeste Werkstukken, welker oplossing en constructie wij leerden kennen, zijn de grondslagen van de constructie van alle andere meetkundige werkstukken. *Om nu een meetkunstig werkstuk optelossen, begint men met eene figuur voor hetzelve te teekenen, in welke men de vraag, als opgelost zijnde, beschouwt; daarna overweegt men wel ernstig, welke bekende eigenschappen van evenwijdige lijnen, gelijkvormige driehoeken, cirkels, enz. welke in die figuur voorkomen, of daarin gemaakt kunnen worden, tot de oplossing of constructie kunnen brengen.* De oplossingen der volgende werkstukken zullen den Leerling op den weg brengen, om de oplossing van anderen te vinden, en zich met de verklaarde beginselen al meer en meer bekend en gemeenzaam te maken.

§. 498. XXXII. Werkstuk. *Fig.* 209. *Boven eene regtelijn AB, zijn twee punten P en Q gelegen: nu begeert men, uit het punt P, in eene regte lijn PC, naar eenig punt C van de gegevene lijn AB te gaan, en uit dit punt C, tot het ander gegevene punt Q, insgelijks in eene regte lijn terug te keeren, zoodanig, dat men den kortsten weg aflegge, of dat de som der lijnen PC en CQ kleiner is, dan, wanneer men het punt C, meer naar de regter of naar de linkerhand, nemen mogt.*

Oplossing. Stellende, dat het punt C gevonden zij; dan ziet men terstond: dat, wanneer men uit Q de loodlijn QBR op AB laat vallen, RB = QB neemt, en voorts de lijn CR trekt, de lijn CR (*XX. Stell. I. B.*) gelijk aan de lijn CQ zal moeten zijn; derhalve zal PC + CQ = PC + CR zijn, omdat nu PC + CQ een *minimum* zijn moet, zal ook PC + CR een minimum zijn, en het punt C zal derhalve zoo moeten bepaald worden, dat men van P tot C, en van C tot R, of van P tot R, langs den kortsten weg komt; dat is, het punt C zal in de lijn, welke de punten P en R veréénigt, moeten gelegen zijn. Nu is AB, benevens de punten P en Q gegeven; derhalve zijn de loodlijn QBR, en het punt C gegeven. Hieruit volgt dan deze Constructie. Men late uit Q de loodlijn QBR op AB vallen; make BR = BQ; en trekke de lijn PR; dan is het punt C, alwaar deze de lijn AB doorsnijdt, het begeerde punt.

§. 499. XXXIII. Werkstuk. *Fig.* 210. *Door een gegeven punt P eene regte lijn PQR te trekken, zoodanig dat derzelver gedeelte QR, hetwelk tusschen twee gegevene evenwijdige lijnen, AB en CD, gelegen is, gelijk zij aan eene gegevene lijn V?*

Oplossing. Onderstellen wij, dat PQR de begeerde lijn zij; indien men dan, door een punt E, eene lijn EF, evenwijdig aan PQR, trekt; dan zal

(*I. Stell. III. B.*) EF = QR zijn; hieruit volgt: dat, wanneer men, uit een punt E, als middelpunt, met eene ſtraal, gelijk aan de lijn V, eenen cirkel beſchrijft, welke AB in de punten F en F′ ſnijdt, de lijn PQR of PQ′R′, welke evenwijdig aan de ſtralen EF en EF′ loopt, de begeerde lijn zal zijn. Dit vraagſtuk heeft alzoo twee oploſſingen.

§. 500. XXXIV. WERKSTUK. *Fig.* 211. *Eene gegevene lijn AB, zoodanig, door het punt C, in twee deelen te verdeelen, dat de regthoek AC × BC der deelen gelijk zij aan het vierkant op de gegevene lijn P?*

OPLOSSING. Onderſtellen wij, dat C het begeerde punt zij; wanneer men dan op AB eenen halven cirkel beſchrijft, en CE loodregt op AB ſtelt; dan zal (*XVIII. Werkſt.*) $EC^2 = AC \times BC$ zijn; nu is EC = P gegeven; wanneer men derhalve door E, de lijn FED evenwijdig aan AB trekt; dan zal eene loodlijn, BD op het einde van AB opgerigt, gelijk aan CE = P zijn: hieruit volgt deze CONSTRUCTIE. Beſchrijf op AB eenen halven cirkel; trek BD loodregt op AB, en maakt dezelve gelijk aan P, trek door D, eene lijn, evenwijdig aan AB; deze zal den cirkel, in de punten E en F, ſnijden. Laat dan, uit deze punten, de lijnen EC en FC′, loodregt op AB vallen; dan zullen de punten C en C′ de begeerde punten zijn. De vraag heeft derhalve twee oploſſingen, en wanneer P grooter is dan $\frac{1}{2}$ AB, dat is grooter, dan de ſtraal des halven cirkels, dan zal de lijn DF den cirkel niet ſnijden, en de vraag zal, onder die bepaling, onmogelijk zijn.

§. 501. XXXV. WERKSTUK. *Fig.* 212. *Eene gegevene lijn AB, tot in eenig punt C, zoodanig te verlengen, dat de regthoek, welke de geheele lijn, met het verlengde ſtuk te zamen genomen, tot lengte, en het verlengde ſtuk tot breedte heeft, gelijk zij aan het vierkant van eene gegevene lijn P?*

OPLOSSING. Wanneer C het begeerde punt is, en op AB als middellijn eenen halven cirkel beſchreven wordt; dan zal, omdat, wanneer uit C eene raaklijn CD getrokken wordt, (*I. Aanmerk. XXII. Stell. V. B.*) $CD^2 = AC \times BC$ zijn: maar nu moet $AC \times BC = P$ zijn: men zal dan het punt C zoodanig moeten bepalen: dat de raaklijn CD = P zij. Wanneer men nu BE loodregt op AB ſtelt, en gelijk P maakt, en voorts de lijn ME trekt; dan zal (*IX. Stell. I. B.*) ME = MC en DC = BE = P zijn. Hieruit volgt dan deze CONSTRUCTIE. Beſchrijf op AB eenen halven cirkel; ſtel BE loodregt op AB, en gelijk aan P, en trek ME; maak eindelijk MC = ME; dan zal C het begeerde punt zijn.

§. 502. XXXVI. WERKSTUK. *Fig.* 213. *Men begeert, uit een punt P, hetwelk in de baſis van eenen driehoek ABC gegeven is, eenige regte lijnen PE, PG, enz., te trekken, welke den driehoek in een zeker aantal ſtukken van gelijken inhoud verdeelen?*

OPLOSSING. Nemen wij: dat de driehoek in vijf gelijke deelen zal verdeeld worden. Wanneer men AD = $\frac{1}{5}$ AB neemt, en de lijn CD trekt, dan

dan zal (*XIV. Stell. III. B.*) drieh. ACD = één-vijfde van drieh. ABC zijn; de driehoek AEP zal dan aan den driehoek ADC gelijk moeten zijn; wanneer men nu de lijn DE trekt, en van deze gelijke driehoeken den driehoek ADE aftrekt, zullen de driehoeken DEP en DEC moeten gelijk zijn; maar deze ſtaan op dezelfde baſis; de lijn PC is dan (*X. Stell. III. B.*) evenwijdig aan DE, en DE evenwijdig aan PC. Nu is P gegeven, derhalve ook PC; en, omdat AE gegeven is, is ook AD = $\frac{1}{5}$ AB gegeven; dus ook het punt D, en de lijn DE. Men neme dan AD = $\frac{1}{5}$ AB, en trekke DE evenwijdig aan PC, dan zal de lijn PE één-vijfde gedeelte van den driehoek ABC afſnijden. Op gelijke wijze, zal volgen: dat, wanneer men AF = $\frac{2}{5}$ AB neemt, en FG evenwijdig aan PC trekt, drieh. APG = drieh. ACF = $\frac{2}{5}$ drieh. ABC zal zijn, *enz.* Hierop berust nu de volgende algemeene CONSTRUCTIE. Verdeel de baſis AB in vijf gelijke deelen, AD, DF, FH, HK en BK; trek, door de deelpunten dezer deelen, lijnen, welke evenwijdig aan PC loopen; namelijk DE, FG, HI, KL; dan zullen deze op de zijden AC en BC des driehoeks de punten E, G, I, L, bepalen, door welke, uit het gegevene punt P, de deellijnen PE, PG, PI en PL, getrokken moeten worden, welke den gegevenen driehoek in vijf gelijke deelen zullen verdeelen.

§. 503. XXXVII. WERKSTUK. *Fig.* 214. *Binnen eenen gegevenen driehoek ABC, een punt P te vinden, zoodanig, dat, wanneer men, uit hetzelve, tot de hoekpunten A, B en C, des driehoeks, regte lijnen AP, BP en CP trekt; de driehoek in de ſtukken ABP, ACP en BCP, zal verdeeld zijn, welke tot elkander in reden ſtaan als de getallen 4, 5 en 3?*

OPLOSSING. Omdat de driehoeken APB, ACP en BCP, tot elkander als de getallen 4, 5 en 3, moeten zijn, zal (*X. Stell. II. B.*) de drieh. ABP: drieh. ABC = 4 : 4 + 5 + 3 = 4 : 12 = 1 : 3 moeten zijn; trekt men dan PD evenwijdig aan AB; dan zal (*IX. Stell. III. B.*) drieh. ABD = drieh. ABP zijn; derhalve drieh. ABC : drieh. ABP = 3 : 1 = AC : AD. Hieruit volgt: dat, wanneer men AD = $\frac{1}{3}$ AC neemt, en DP evenwijdig aan AB trekt, het begeerde punt P in de lijn DP zal gelegen zijn. Wederom zal drieh. APC : drieh. ABC = 5 : 12 zijn; of, wanneer men PE evenwijdig aan AC trekt, drieh. ABC : drieh. AEC = 12 : 5 = AB : AE: deelt men derhalve AB in twaalf gelijke deelen, en neemt men AE gelijk aan vijf van die deelen; dan zal het begeerde punt P gelegen zijn in de lijn, welke door E evenwijdig aan AC loopt; gevolgelijk zal het in de doorſnijding der lijnen DP en EP, welker ſtelling door de oploſſing gevonden is, gelegen, en derhalve bekend zijn.

§. 504. XXXVIII. WERKSTUK. *Fig.* 215. *Eenen gegevenen driehoek ABC, door eene lijn DE, evenwijdig aan de baſis loopende, in eene gegevene reden, zoodanig te verdeelen, dat DEC tot DEBA ſtaat, in reden als p tot q?*

OPLOSSING. Wanneer de driehoek ABC, in de gegevene reden, verdeeld

deeld is, zoo als is voorgeschreven; dan moet (*VIII. Stell. II. B.*) drieh. CDE: drieh. CBA $= p : p + q$ staan; maar (*XI. Stell. IV. B.*) drieh. CDE: drieh. ABC $= CE^2 : BC^2$; derhalve moet $BC^2 : CE^2 = p + q : p$ zijn; laat nu het punt M zoodanig genomen worden, dat $CM : MB = p : q$, en derhalve $CB : CM = p + q : p$ zij; dan is $BC^2 : CE^2 = CB : CM = CB^2 : CM \times CB$; derhalve $CE^2 = CM \times CB$ of CE midden-evenredig tusschen BC en CM. Hieruit volgt deze CONSTRUCTIE. Deel de zijde BC in het punt M in reden van p tot q: neem CE midden-evenredig tusschen CM en CB, dan zal de lijn, welke, door E, evenwijdig AB, getrokken wordt, de begeerde zijn.

§. 505. XXXIX. WERKSTUK. *Fig.* 216. *In een gegeven vierkant eenen gelijkzijdigen driehoek te beschrijven?*

OPLOSSING. Een gelijkzijdige driehoek wordt gezegd in een vierkant te staan, wanneer een van deszelfs hoekpunten C in een hoekpunt van het vierkant valt, en de twee andere hoekpunten E en F, in twee der zijden van datzelfde vierkant gelegen zijn. Onderstellende dan, dat de gelijkzijdige driehoek in het vierkant beschreven zij; dan zal, omdat $CE = CF$, en $CD = CB$ is, (*II. Lemma I. B.*) $DE = BF$ en $AE = AF$, en daarom $AF : BF = AE : DE$ en (*II. Stell. IV. B.*) EF evenwijdig aan BD zijn; wanneer men dan DG, evenwijdig aan EC, en BG evenwijdig aan CF trekt; dan zal de driehoek BDG (*IV. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig zijn met den driehoek ECF, en derhalve gelijkzijdig. Hieruit volgt dan: dat, wanneer men op de hoekpuntslijn BD eenen gelijkzijdigen driehoek BDG beschrijft, en door het hoekpunt C de lijnen CE en CF evenwijdig aan DG en BG trekt; en, eindelijk de punten E en F vereënigt, de driehoek CEF de begeerde gelijkzijdige driehoek zal zijn.

§. 506. XL. WERKSTUK. *Fig.* 217. *In eenen gegevenen driehoek ABC een vierkant FGED te beschrijven, welks zijde FG op de basis AB rust?*

OPLOSSING. Onderstellen wij, dat FGED het begeerde vierkant zij; indien men dan de lijn AE trekt, en in dezelve een punt H neemt, en HI en HL evenwijdig aan ED en EG trekt, dan zal (*VIII. Stell. IV. B.*) $DE : IH = AE : AH = EG : HL$ zijn: maar $DE = EG$ zijnde, is $HI = HL$ en (*XXX. Stell. I. B.*) hoek IHL = hoek DEG. Hieruit volgt, omgekeerd: dat, wanneer men eenig vierkant KLHI op de basis plaatst, met het hoekpunt I in de zijde AC, en, van A, door H, eene lijn trekt, welke de zijde BC, in het punt E, ontmoet, dit punt E een der hoekpunten van het begeerde vierkant zal zijn; dan dit hoekpunt door constructie bekend zijnde, is al het overige bekend. — CONSTRUCTIE. Men neme dan in AC een punt I, en late IK loodregt op AB vallen, trekke IH evenwijdig aan AB, en make $IH = IK$; trekke, van A door H, eene lijn AE; dan is E een der hoekpunten van het begeerde vierkant, hetwelk, indien men EG loodregt op AB, ED evenwijdig aan AB, en DF evenwijdig aan EG trekt, in den driehoek zal beschreven zijn.

§. 507. XLI. WERKSTUK. *Fig.* 218. *In de opstaande zijde AC*

van

van eenen driehoek ABC een punt D te vinden, zoodanig, dat, wanneer men DE evenwijdig aan AB trekt, AD:DE=p:q zal zijn?

Oplossing. Nemende, dat DE de begeerde lijn zij; indien men dan de lijn AE trekt, en, door eenig punt F, FG evenwijdig aan DE of AB; dan zal (*VIII. Stell. IV. B.*) AF : FG = AD : DE = p : q zijn. Nu kan men AF = p en FG = q nemen; wanneer men dan AG trekt, dan zal deze lijn, of deszelfs verlengde, AB in E snijden; de lijn, welke dan door E evenwijdig aan AB of FG getrokken wordt, zal de begeerde zijn.

§. 508. XLII. Werkstuk. *Fig.* 219. *Men begeert zich, in een punt P, binnen den driehoek ABC, zoodanig te plaatsen, dat de afstanden, welke men, in dit punt P, tot de zijden AB, BC en AC, van dien driehoek heeft, tot elkander in reden staan, als bij voorbeeld, de getallen* 5, 6 *en* 7; *dat is zoodanig, dat* (*DP, PE, PF*) :: (5, 6, 7) *zij?*

Oplossing. Stellende, dat *P* het begeerde punt zij, wanneer men dan in de lijn AP een punt G neemt, en uit hetzelve de loodlijnen, GH en GI, op AB en AC, laat vallen, dan zal (*VIII. Stell. IV. B.*) AP:AG = PD:GH = PF:GI, of PD:PF = GH:GI zijn. Hieruit volgt: dat, wanneer men, uit het hoekpunt A, tot het begeerde punt P, eene lijn AP trekt, al de punten van deze regte lijn op dezelfde evenredige afstanden van de zijden AB en AC zullen gelegen zijn; wanneer men derhalve eenig punt G van de lijn AG vinden kan, dan zal men weten, in welke lijn het punt P gelegen is. Zulk een punt is nu gemakkelijk te vinden; want indien men, uit het punt A, de loodlijnen AK en AL op AB en AC oprigt, en gelijk aan *vijf* en *zeven* deelen neemt, en voorts, door de punten K en L, de lijnen KG en LG, evenwijdig aan AB en AC trekt; dan zal het punt G zoodanig bepaald zijn, dat GH : GI = 5 : 7 is, en het punt P zal derhalve in de lijn AG gelegen zijn. Om dezelfde redenen zal, wanneer men BM en BN loodregt op AB en BC plaatst, en MB gelijk vijf, en BM gelijk zes deelen neemt, en voorts MC en NC evenwijdig aan AB en BC trekt, het punt P in de lijn BC gelegen zijn. Het punt P, alwaar de lijnen AP en PB elkander doorsnijden, is dan het begeerde punt.

§. 509. Aanmerking. Het parallelogram ASGR, is (*II. Gev. VII. St. III. B.*) gelijk aan AS × GH = AR × GI; derhalve is AS : AR = GI : GH = PF : PD. Hieruit volgt eene eenvoudiger constructie. Men neme AS naar welgevallen, en AR tot AS gelijk PD tot PF, en trekke SG en RG evenwijdig aan AC en AB, en voorts de lijn AG, in welke het punt P moet gelegen zijn, en men bepaalt op dezelfde wijze de lijn BC, *enz.*

§. 510. XLIII. Werkstuk. *Fig.* 220. *Wanneer twee voorwerpen A en B aan dezelfde zijde van eene regte lijn AB gelegen zijn,*

 be-

begeert men, op deze regte lijn, het punt C te vinden, uit hetwelke deze voorwerpen, onder den grootsten hoek ACB, gezien worden?

Oplossing. Wanneer C het begeerde punt is, dan moet de hoek ACB grooter zijn dan de hoeken ADB en AEB, welke in de nabijheid van het punt C, ter regter of linkerhand van hetzelve, uit de punten D en E worden waargenomen: dit alzoo zijnde, zal men op BD, een punt G, en, op BE, een punt F, vinden kunnen, zoodanig dat de hoeken AGB en AFB, elk aan den hoek ACB gelijk zijn, en dan zullen de punten G, C en F, (*III. Gev. XX. Stell. V. B.*) in den omtrek van eenen cirkel gelegen zijn, welke door de punten A en B gaat, en de lijn PQ in het begeerde punt C aanraakt. Het is ook klaarblijkelijk, dat 'er aan de regterzijde van de lijn BAQ een punt C′ bestaan moet, uit hetwelk de voorwerpen A en B onder eenen hoek AC′B gezien worden, grooter dan de hoeken, onder welke men die voorwerpen, in de nabij gelegene punten, waarneemt. Nu moet (*I. Aanmerk. XXII. Stell. V. B.*) $QC^2 = AQ \times BQ$ zijn; men moet derhalve, na, door de punten A en B, de lijn BAQ getrokken te hebben, eene midden-evenredige tusschen AQ en BQ zoeken, welke gevonden wordt, indien men op BQ eenen halven cirkel beschrijft, en AR loodregt op BQ stelt, als wanneer (*I. Gev. XII. Stell. IV. B.*) QR de begeerde midden-evenredige zal zijn, zoodat, wanneer QC en QC′, elk gelijk QR genomen worden, de voorwerpen A en B, uit de punten C en C′ onder den grootsten hoek zullen gezien worden.

§. 511. XLIV. Werkstuk. *Fig.* 221. *Wanneer men aanneemt, dat de onderlinge afstanden van drie punten A, B en C, bekend zijn; en dat men, in een vierde punt D, alwaar men zich bevindt, de hoeken BDC en CDA, onder welke de punten B en C, benevens C en A gezien worden, door waarneming bekend, en gelijk aan de hoeken P en Q zijn, begeert men, door constructie, de betrekkelijke ligging van het punt D, dat is deszelfs afstanden tot de punten A, B en C, te vinden?*

Oplossing. Vermits de onderlinge afstanden der punten A, B en C, gegeven zijn, zal men (*XI. Werkst.*) den driehoek kunnen construeren, in welker hoekpunten deze punten gelegen zijn: die driehoek dan geconstrueerd zijnde, zal men (*XXXI. Werkst.*) op de lijn CB een cirkel segment BDEC, waarin de hoek CDB = den hoek P, en op de lijn AC, het cirkel segment ADFC, waarin de hoek ADC = den hoek Q geplaatst is, kunnen beschrijven: de omtrekken dezer cirkel segmenten zullen elkander, behalve in het punt C, ook nog in het punt D snijden, welk laatste punt het begeerde punt zal zijn; daar nu dit punt D door deze constructie bekend wordt, zullen ook deszelfs afstanden tot de punten A, B en C, dat is de lijnen AD, BD en CD, bekend worden.

§. 512. XLV. Werkstuk. *Fig.* 222. *Indien men aanneemt, dat de afstand der voorwerpen A en B bekend is, en dat men, uit twee an-*

andere voorwerpen, en C en D, welker ligging ten opzigte van elkander, en met betrekking tot de twee eerste voorwerpen A en B, niet bekend is, uit het eerste C, de hoeken, ACB en BCD, onder welke de voorwerpen A, B en D, gezien worden, en, uit het tweede D, de hoeken, ADB en ADC, onder welken de voorwerpen A, B en C gezien worden, door waarneming bepaalt, dan begeert men, door eene meetkunstige constructie, de betrekkelijke ligging der voorwerpen C en D, dat is de afstanden CD, AC, BC, AD en BD te vinden?

OPLOSSING. Laat, op eene lijn *cd*, volgens het *V. Werkstuk*, aan het punt *c* de hoeken *acb* en *bcd*, gelijk aan de hoeken ACB en BCD, en, aan het punt *d*, de hoeken *adb* en *adc*, gelijk aan de hoeken ADB en ADC gemaakt, en de lijn *ab* getrokken worden; dan zijn de hoeken *cad*, *dab*, *abc*, *cbd*, bepaald. Wanneer men nu op de gegevene lijn AB, volgens het *V. Werkstuk*, de hoeken CAD, BAD, ABC en CBD, respectievelijk aan de hoeken *cad*, *bad*, *abc* en *cbd*, welke door de voorgaande constructie gevonden zijn, gelijk maakt, en voorts de lijn CD trekt, dan zal de betrekkelijke ligging van de punten C en D bekend zijn. Want omdat, volgens de constructie, hoek CAB = hoek *cab*; hoek DAB = hoek *dab*; hoek ABC = hoek *abc* is, is (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) hoek ACB = hoek *acb*; wederom zal, om dezelfde reden hoek ADB = hoek *adb* zijn: de driehoeken ABC en ABD, zijn dan (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig aan de driehoeken *abc* en *abd*; derhalve is BC : *bc* = AB : *ab*, en BD : *bd* = AB : *ab*, en diensvolgens BC : *bc* = BD : *bd*, of BC : BD = *bc* : *bd*, daar nu hoek DBC = hoek *dbc* is, zal (*X. Stell. IV. B.*) de driehoek BCD aan den driehoek *bcd* gelijkvormig zijn, en daarom (*IX. Stell. IV. B.*) hoek BCD = hoek *bcd* en hoek CBD = hoek *cbd*, en derhalve ook hoek ADC = hoek *adc*, en de punten C en D; zijn derhalve zoodanig bepaald, dat de voorwerpen A en B uit dezelve onder de gegevene hoeken gezien worden.

*

ACHT-

ACHTSTE BOEK.

Over de Goniometrie, *of de Meetkunst der Hoeken.*

---

§. 513. I. Bepaling. De *Goniometrie* is een bijzonder gedeelte der Meetkunst, welke de waarde van de hoeken der figuren, met behulp van zekere lijnen, die men *goniometrische* of *hoekmeetkunstige lijnen* noemt, leert bepalen, en onderling, zoo met elkander, als met de hoeken, of bogen, tot welke zij behooren, leert vergelijken.

§. 514. II. Bepaling. *Fig.* 223. Om een klaar en duidelijk denkbeeld van de verschillende *goniometrische* of *hoekmeetkunstige lijnen*, welke de Meetkundigen uitgedacht hebben, te verkrijgen, en zich dezelve, in eene welgeregelde orde, één voor één, en, in haren onderlingen zamenhang, te leeren voorstellen, zullen wij aannemen, dat eene onbepaalde regte lijn MA, om het punt M, bewogen worde, en dat men, op dezelve, eene lijn MC, als de éénheid van de lengte maat aanneme; dan zal deze lijn, door hare beweging, om het punt C, eenen hoek AMB voortbrengen, terwijl het punt C den cirkelboog CD zal beschrijven: de hoeken AMB zullen dan (*XVIII. Stell. V. B.*) evenredig zijn aan de bogen CD, welke gelijktijdig met dezelve worden voortgebragt; zoodat, wanneer de lijn MA eene geheele omwenteling volbragt, en de geheele vlakte van de figuur doorgeloopen zal hebben, het punt C den omtrek van den cirkel, welks middelpunt in het hoekpunt valt, gelijktijdig zal hebben voortgebragt. Verbeelden wij ons nu, dat AM onbepaaldelijk verlengd zij; dat de onbepaalde lijn PQ, loodregt op AM sta, en dat de lijnen ST en WX, den cirkel in de punten C en R aanraken; dan gebruiken wij, duidelijkshalve, de volgende benamingen:

1° De

1° De lijn AM is de oorſprong, van waar de deelen van den voortgebragten hoek AMB geteld worden.

2° De lijn PM is de oorſprong der complements hoeken.

3° De lijn VM is de oorſprong der ſupplements hoeken.

4° De boog CD, (tusſchen de beenen van den hoek AMB begrepen,) is de *metende boog*: hij meet den hoek AMB. Meestal zullen wij hem eenvoudig *boog* noemen.

5° Het punt C is de oorſprong van den metenden boog; het punt D zijn uiteinde of uiterſte punt.

6° Het punt R is de oorſprong der complements bogen; het punt S de oorſprong der ſupplements bogen.

7° De regte hoek AMP, of de boog CR, het eerſte quadrant; de regte hoek PMV, of de boog RS, het tweede quadrant; de regte hoek VMQ, of de boog SZ, het derde quadrant; de regte hoek AMQ, of de boog CZ, het vierde quadrant. —— En daar de lijn AM, na ééne omwenteling volbragt te hebben, nog, in dezelfde rigting, onbepaaldelijk kan omdraaijen, zal men AMP het vijfde quadrant noemen, enz.

§. 515. Aanmerking. Offchoon de uitſpringende hoeken eener regtlijnige figuur altijd kleiner dan twee regte hoeken zijn, volgt daaruit niet, dat 'er geen hoeken, grooter dan twee of meer regte hoeken zouden kunnen beſtaan: want men kan immers zoo vele hoeken als men goedvindt, bij elkander optellen, en deze ſom zal eenen regten hoek verſcheidene malen kunnen overtreffen.

§. 516. III. Bepaling. *Fig.* 223. De hoek BMP, of $B'MP$, welke bij eenen hoek AMB opgeteld, of van eenen hoek AMB' moet afgetrokken worden, opdat, in het eerſte geval, de ſom, en, in het tweede geval, het verſchil gelijk aan eenen regten hoek zij, wordt het *complement* van den hoek AMB of AMB' genoemd.

§. 517. IV. Bepaling. *Fig.* 223. De hoek BMV, welke bij eenen gegevenen hoek AMB moet opgeteld, of van eenen gegevenen hoek moet afgetrokken worden, om twee regte hoeken te verkrijgen, noemt men het *ſupplement* van dien hoek. Vergelijk *XIX. Bep. I. B.*

§. 518.

§. 518. V. Bepaling. *Fig.* 223. De *Sinus* van eenen hoek *AMB*, of de *Sinus* van den boog *CD*, welke dezen hoek meet, is de afſtand *DE* van het uiteinde *D* van dien boog *CD*, tot den oorſprong *AM* van den hoek, welken hij meet, dat is tot het been *AM*, of deszelfs verlengde *MV*. *Hij is de loodlijn DE, welke uit het uiteinde D van den boog CD op de middellijn CS valt.*

§. 519. VI. Bepaling. *Fig.* 223. De loodlijn *DF*, is dan de Sinus van den hoek *BMP*, dat is: *de Sinus van het complement van den hoek AMB.* Men noemt deze *Sinus* de *Coſinus* van den hoek *AMB*; hij is (*I. Stell. III. B.*) gelijk aan de lijn *ME*. Men kan dan zeggen: *dat de Coſinus van eenen hoek de afſtand van het uiteinde van den boog tot den oorſprong der complements hoeken is; of de afſtand van het middelpunt tot de Sinus.*

§. 520. VII. Bepaling. *Fig.* 223. Men noemt de lijn *EC*, of de afſtand van den oorſprong van den metenden boog tot de Sinus, de *Sinus verſus*; en de lijn *SE*, den afſtand van den oorſprong der ſupplements bogen tot de Sinus, de *Suſinus verſus* van den hoek *AMB*, of van den boog *CD*. *De Sinus verſus is dan gelijk aan de ſtraal min de Coſinus, en de Suſinus verſus gelijk aan de ſtraal, opgeteld bij de Coſinus.* De lijn *RF* is de *Coſinus verſus*, en de lijn *ZF* de *Sucoſinus verſus.*

§. 521. VIII. Bepaling. *Fig.* 223. De *Tangens* (*Raaklijn*) van eenen hoek *AMB*, of van deszelfs metenden boog *CD*, is dat gedeelte *CG* van de onbepaalde raaklijn *ST*, welke den metenden boog in den oorſprong *C* aanraakt, hetwelk, tusſchen dien oorſprong, en het punt, alwaar het beweegbaar been van den hoek *AMB* deze raaklijn ſnijdt, gelegen is.

§. 522. IX. Bepaling. *Fig.* 223. De *Secans* (*Snijlijn*) van eenen hoek *AMB*, of van zijnen metenden boog *CD*, is de lijn *MG*, welke, op het beweegbaar been, *MB*, van den hoek *AMB*, van het hoekpunt *M*, tot het punt *G*, alwaar het de raaklijn doorſnijdt, begrepen is.

§. 523. X. Bepaling. *Fig.* 223. De *Cotangens* van eenen

hoek

hoek *AMB*, is de Tangens *RH* van het complement *BMP* van den hoek *AMB*.

§. 524. XI. Bepaling. *Fig.* 223. De *Cosecans* van den hoek *AMB*, is de Secans *MH*, van het complement van dien hoek. Beide deze lijnen ontstaan, op de raaklijn *WX*, op dezelfde wijze, als de Tangens en Secans, op de raaklijn *ST*.

§. 525. I. Aanmerking. Elke hoek, of elke boog, welke de betrekkelijke waarde van dezen hoek voorstelt, heeft alle de goniometrische lijnen, welke, in de voorgaande bepalingen, zijn beschreven. Wanneer deze lijnen, voor elken hoek of boog, in deelen van de straal des metenden cirkels, (die altijd de éénheid is,) uitgedrukt, en in eene tafel veréénigd zijn, dan noemt men deze tafel, naar de voornaamste dezer lijnen, *Sinus tafel*, anders *Tafelen der Sinussen*, *Tangens en Secanten*, anders ook wel *Trigonometrische* of *Driehoeksmeetkunstige Tafelen*. Deze tafel is de ware *getallen-hoekmeter*, het voornaamste werktuig, door hetwelk alle berekeningen, waarin men met meetkunstige figuren te doen heeft, worden uitgevoerd; het werktuig, waardoor alle hoeken en zijden der figuren met elkander vergeleken, en met den uitersten graad van naauwkeurigheid bepaald kunnen worden. Om nu deze tafel in derzelver gebruik wel te leeren verstaan, moet men het volgende overwegen. 1° Hoe men dezelve kan zamenstellen. 2° Hoe zij ingerigt is, en op welke wijze zij gebruikt moet worden. Ten einde nu tot deze kennis te geraken, moeten de verklaarde goniometrische lijnen nader overwogen worden.

§. 526. II. Aanmerking. Wanneer men, in de telling der hoeken, verder dan het eerste quadrant komt, dan zijn de goniometrische lijnen, op eene andere wijze, dan in het eerste quadrant, gelegen. Dit onderscheid van ligging moet, in alle berekeningen, door de noodige teekens, behoorlijk onderscheiden worden; want daaraan is zooveel gelegen, dat de wezenlijke waarde van eenen hoek of boog niet slechts, door de volstrekte getallen waarde van eene zijner goniometrische lijnen; maar ook nog bovendien, door de ligging van die lijn, met betrekking tot de voornaamste deelen der figuur, bepaald wordt. Dit onderscheid van ligging wordt nu, met behulp van de volgende grondregels, door de teekens + en —, uitgedrukt.

§. 527. I. Grondregel. *Fig.* 224. *Om, in de berekening, de afstanden der punten, welke in dezelfde regte lijn liggen, onderling met elkander te vergelijken, is het voldoende, dat men de afstanden dezer punten tot één vast en onveranderlijk*

punt

punt P, in deze lijn aangenomen, kenne: daar nu deze punten, met betrekking tot het punt P, ter regter of ter linkerhand van hetzelve kunnen gelegen zijn, onderscheidt men deze ligging, door de teekens + en —, en noemt den afstand ter linkerhand negatief, *indien de afstand ter regterhand* positief *genomen is, — en omgekeerd.*

§. 528. Opheldering. Wanneer derhalve de lijnen *AP* en *BP* de lengte van 5 en 6 meters hebben, zal men zeggen: dat *AP*=+5^m en *BP*=—6^m is. De reden van dit onderscheid is, in de overeënkomst tusschen de plaatsing dezer punten en de wijze, op welke de positieve en negatieve grootheden, in de gewone berekening, ontstaan, (*Verg. I. C.* §. 460.) gelegen. Stel, om deze overeënkomst te gevoelen, dat men, na, van *P* tot *M* gegaan te zijn, van *M* tot *P* terugkeere; dan zal men, om te vinden, hoe verre men, in het punt *A*, van het vaste punt *P* afstaat? den terug geganen afstand *AM* van den eerst verkregen afstand *PM* moeten aftrekken, en dan is *AP*=*PM*—*AM*. Wanneer men nu van het punt *M* blijft terug gaan, dan zal de afstand van *A* tot *P* verminderen; gelijk *nul* worden, wanneer *AM*=*PM* wordt, en, wanneer men verder dan *PM* terug gegaan is, zal men aan den anderen kant van *P* gekomen zijn: omdat men nu, eene grootere lijn *AM* van eene kleinere *PM* aftrekkende, het verschil negatief noemt, zal (*I. C.* §. 463,) de afstand van een punt *B*, ter linkerhand van *P*, als negatief moeten aangemerkt worden.

§. 529. II. Grondregel. *Fig.* 224. *Men moet dezelfde wijze van de telling der afstanden van een vast punt in acht blijven nemen, wanneer de lijn XY van stand verandert, het zij zij evenwijdig aan zich zelve bewogen wordt, het zij zij, om het vaste punt P, eene omwentelende beweging aanneemt.*

§. 530. III. Grondregel. *Fig.* 225. *Omdat een punt of boven of beneden eene onbepaalde, maar altijd in dezelfde stelling blijvende, lijn XY, of ter linker of ter regterhand van dezelve kan gelegen zijn; noemt men den afstand van een punt aan de eene zijde van die lijn* positief, *en aan de andere zijde van die lijn* negatief.

§. 531. Opheldering. Indien men dus de afstand *AP* als positief aanneemt; dan zal de afstand *BQ* voor eenen negatieven afstand moeten gehouden worden. Deze afstanden doen de stelling der evenwijdige lijnen *PR* en *QS*, in welke deze punten liggen, bekend worden.

§. 532.

§. 532. IV. Grondregel. *Fig.* 226. *Wanneer een hoek, van eene vaste en in dezelfde ſtelling blijvende lijn AB, afgerekend wordt; dan zal men, den hoek ABC als* poſitief *aannemende, den hoek ABD, welke, in de tegenovergeſtelde rigting, geteld wordt, als* negatief *moeten aanmerken; en, omgekeerd.*

Wanneer men dan, *Fig.* 223, den hoek *AMB* als poſitief aanneemt; dan zullen de hoeken, welke, van denzelfden oorſprong *AM*, in eene tegengeſtelde rigting, geteld worden, eene negatieve waarde verkrijgen. Hetzelfde, wat van de hoekên gezegd is, geldt ook van de bogen, welke deze hoeken afmeten.

§. 533. V. Grondregel. *De benamingen van poſitief en negatief, geene onderſcheidene ſoorten van grootheden uitdrukkende, maar alleen ſtrekkende, om aantewijzen, hoe de grootheden, die deze benamingen dragen, in de telling en terugtelling beſchouwd worden, moeten deze onderſcheidingen, in dezelfde figuur, op dezelfde wijze aangenomen worden, en, men zal daarin nooit kunnen dwalen, wanneer men nagaat, van welke punten of lijnen, de afſtanden van punten, en, van welke lijn, eenigen hoek afgerekend wordt; en ten dien einde neemt men vrij algemeen aan: dat de afſtanden ter regterhand, voorwaards en opwaards, poſitief, en die ter linkerhand, achterwaards en benedenwaards, negatief zijn; dat de hoeken ter linkerhand, van den oorſprong afterekenen, poſitief, en ter regterhand negatief zijn.*

§. 534. Door de toepaſſing dezer grondregels, en de beſchouwing van de 227, 228, 229 en 230 figuren, blijkt het: dat, in de eerſte plaats, de complements hoeken, in het eerſte quadrant, poſitief; maar, in het tweede en de volgende quadranten, negatief zijn; dat diezelfde complements hoeken, voor alle negatieve bogen, poſitief zijn; dat, al verder, de ſupplementen der hoeken, welke in het eerſte en tweede quadrant vallen, gelijk ook van alle negatieve hoeken poſitief, en, de ſupplementen van alle poſitieve hoeken, grooter dan 180°, negatief zijn. Eindelijk, wanneer men aanneemt, dat de goniometriſche lijnen der hoeken of bogen, welke in het eerſte quadrant vallen, poſitief zijn; dan zullen die lijnen, in de tweede en volgende quadranten, de teekens verkrijgen, welke, in de volgende tafel, voor elke van dezelve, worden opgegeven, gelijk, uit de beſchouwing der figuren, van zelf blijkt.

Tafel *van de omſtandigheden van het poſitief of negatief zijn der* Goniometriſche *lijnen, zoowel voor de* poſitieve *als voor de* negatieve *hoeken en bogen.*

	1e *Quad.* *van* 0° *tot* 90°	2e *Quad.* *van* 90° *tot* 180°	3e *Quad.* *van* 180° *tot* 270°	4e *Quad.* *van* 270° *tot* 360°	5e *Quad.* *van* 360° *tot* 450°	
	I. *Voor* poſitieve *Hoeken.*					*enz.*
Sinus	+	+	−	−	+	*enz.*
Cosinus	+	−	−	+	+	*enz.*
Tangens	+	−	+	−	+	*enz.*
Cotangens	+	−	+	−	+	*enz.*
Secans	+	−	−	+	+	*enz.*
Cosecans	+	+	−	−	+	*enz.*
Koorde	+	+	+	+	−	*enz.*
	II. *Voor* negatieve *Hoeken.*					
Sinus	−	−	+	+	−	*enz.*
Cosinus	+	−	−	+	+	*enz.*
Tangens	−	+	−	+	−	*enz.*
Cotangens	−	+	−	+	−	*enz.*
Secans	+	−	−	+	+	*enz.*
Cosecans	−	−	+	+	−	*enz.*
Koorde	−	−	−	−	+	*enz.*

§. 535. Gevolg. Wanneer men de teekens der goniometriſche lijnen, voor de poſitieve en negatieve bogen, welke in de bovenſtaande Tafel voorkomen, voor zoo verre deze lijnen, voor beide wijzen van tellen, in dezelfde quadranten vallen, met elkander vergelijkt; dan zal het

het blijken: dat, wanneer a eenen zekeren boog beteekent, altijd de volgende vergelijkingen zullen plaats hebben.

$Sin.(-a) = - Sin.a$	$Sin.a = - Sin.(-a)$
$Cos.(-a) = + Cos.a$	$Cos.a = + Cos.(-a)$
$Tang.(-a) = - Tang.a$	$Tang.a = - Tang.(-a)$
$Cot.(-a) = - Cot.a$	$Cot.a = - Cot.(-a)$
$Sec.(-a) = + Sec.a$	$Sec.a = + Sec.(-a)$
$Cosec.(-a) = - Cosec.a$	$Cosec.a = - Cosec.(-a)$

Voorts blijkt, uit de beschouwing van dezelfde figuren, als ook uit de voorgaande bepalingen: dat men, voor elke positieve of negatieve waarde van a, zal mogen stellen:

$Sin.\ Compl.\ a = Cos.\ a$	$Sin.\ Suppl.\ a = Sin.\ a$
$Cos.\ Compl.\ a = Sin.\ a$	$Cos.\ Suppl.\ a = - Cos.\ a$
$Tang.\ Compl.\ a = Cot.\ a$	$Tang.\ Suppl.\ a = - Tang.\ a$
$Cot.\ Compl.\ a = Tang.\ a$	$Cot.\ Suppl.\ a = - Cot.\ a$
$Sec.\ Compl.\ a = Cosec.\ a$	$Sec.\ Suppl.\ a = - Sec.\ a$
$Cosec.\ Compl.\ a = Sec.\ a$	$Cosec.\ Suppl.\ a = Cosec.\ a$

Omdat nu, voor elke waarde van a, het complement van a gelijk $90^\circ - a$ is, zal men, in plaats van de vergelijking $Sin.\ Compl.\ a = Cos.\ a$, schrijven kunnen $Sin.\ (90^\circ - a) = Cos.\ a$; en, omgekeerd. Hetzelfde geldt voor al de vergelijkingen, welke in de eerste kolom voorkomen.

Eindelijk geeft nog de beschouwing van dezelfde figuren de waarden van de goniometrische lijnen van het quadrant, welke in het eerste gedeelte van de eerste Tabelle voorkomen.

I. Stelling. *Fig.* 231.

§. 536. *Elke hoek, of boog, heeft maar ééne Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, Secans of Cosecans: maar tot elk ééne dezer lijnen behoort een onbepaald aantal, zoowel negatieve als positieve bogen, welke die lijn, tot Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, Secans of Cosecans, hebben, en, in rekenkunstige reeksen, opklimmen en afdalen.*

Betoog. Het eerste gedeelte der stelling volgt onmiddelijk uit de voorgaande bepalingen. Laat, om het tweede te betoogen, *fig.* 231, de boog CD, wiens Sinus DE is, tot het eerste quadrant behooren; indien men dan DD' evenwijdig aan AS trekt; dan is (*XXVIII. St. I. B.*)

I. B.) $D'E' = DE$: de Sinus van CD is dan gelijk aan de Sinus van CDD'. Laat nu het punt D onophoudelijk door D, S, Z, C, *enz.* omwentelen; dan zal, na elke 360°, welke het punt D is doorgelopen, hetzelve wederom in de punten D en D' terugkomen, en de lijnen DE en $D'E'$, zullen de Sinusſen van $360° + CD$, $360° + CDD'$, $2 \times 360° + CD$, $2 \times 360° + CDD'$, $n \times 360° + CD$, $n \times 360° + CDD'$ zijn. Neemt men den boog $CDD'SD''$, in het derde quadrant, dan is zijne Sinus $D''E''$ negatief, en trekt men nu $D''D'''$ evenwijdig aan AS; dan is $D'''E''' = D''E''$, en de boog $CDD'D''$ heeft met den boog $CDD'D''D'''$, dezelfde negatieve Sinus, $D''E''$; de lijnen, $D''E''$ en $D'''E'''$, zullen dan de Sinusſen der bogen $\times n$ $360° + CDD'D''$ en $n \times 360° + CDD'D''D'''$ zijn. Hieruit blijkt derhalve: dat de poſitieve bogen, welke tot eenige poſitieve of negatieve Sinus behooren, twee onderſcheidene rekenkunſtige reekſen maken, welker eerſte termen de bogen CD en CDD', of $CDD'D''$ en $CDD'D''D'''$, zijn, en welker verſchil 360° is. Neemt men de bogen negatief, dat is, telt men dezelve, van C door D''', D'', D', D; dan zullen de negatieve bogen, tot de poſitieve Sinusſen behoorende, zijn $-CD'''D''D'$ en $-CD'''D''D'D$; en algemeen, $-n \times 360° - CD'''D''D'$, en $-n \times 360° - CD'''D''D'D$, en de negatieve bogen, tot de negatieve Sinusſen behoorende, $-CD'''$ en $-CD'''D''$ of $-n \times 360° - CD'''$ en $-n \times 360° - CD'''D''$, welke dus insgelijks twee rekenkunſtige reekſen uitmaken. Men behoeft ſlechts, voor de Coſinusſen, Tangenten, Secanten, Cotangenten en Coſecanten, afzonderlijke figuren te ontwerpen, om zich ook, ten aanzien van deze lijnen, van de waarheid van het geſtelde volkomen te overtuigen.

§. 537. Gevolg. Uit het betoogde, zal men, nemende dat n een geheel getal, a kleiner dan 90° en $\pi = 180°$ is, gemakkelijk de volgende vergelijkingen kunnen opmaken.

$$Sin. ((2n+1)\pi - a) = Sin. (2n\pi + a) = Sin. a$$

$$Cos. (2n\pi - a) = Cos. (2n\pi + a) = Cos. a$$

vergelijkingen, welke dienen, om de Sinusſen en de Coſinusſen der bogen, welke grooter dan 90° zijn, in de gewone Tafels te zoeken.

II. Stelling. *Fig.* 227—230.

§. 538. *De Goniometriſche lijnen, welke tot denzelfden boog behooren, hebben de volgende eigenſchappen.* 1° *De ſom van de vierkanten der Sinus en Coſinus is gelijk aan het vierkant van*

van de ſtraal. 2° *Het vierkant van de Secans is gelijk aan de ſom der vierkanten van de ſtraal en de Tangens.* 3° *Het vierkant van de Coſecans is gelijk aan de ſom der vierkanten van de ſtraal en de Cotangens.* 4° *De Coſinus ſtaat tot de Sinus, in dezelfde reden, als de ſtraal tot de Tangens.* 5° *De Sinus ſtaat tot de Coſinus, in dezelfde reden, als de ſtraal tot de Cotangens.* 6° *De ſtraal is midden-evenredig tusſchen de Tangens en de Cotangens.* 7° *Zij is ook midden-evenredig tusſchen de Coſinus en de Secans.* 8° *En ook midden-evenredig tusſchen de Sinus en de Coſecans.*

BETOOG *van het eerſte.* In den regthoekigen driehoek MED, is (*XVI. Stell. III. B.*) $ME^2 + ED^2 = MD^2$; dat is, (wanneer men den boog $CD = a$, en de ſtraal $MD = 1$ ſtelt,) $Cos^2.a + Sin^2.a = 1$.

BETOOG *van het tweede.* In den regthoekigen driehoek MCG, is (*XVI. Stell. III. B.*) $MG^2 = MC^2 + CG^2$; dat is: $Sec^2.a = 1 + Tang^2.a$.

BETOOG *van het derde.* In den regthoekigen driehoek MHR, is (*XVI. Stell. III. B.*) $MH^2 = MR^2 + RH^2$; dat is: $Cosec^2.a = 1 + Cot^2.a$.

BETOOG *van het vierde.* De regthoekige driehoeken MED en MCG zijn, als denzelfden ſcherpen hoek M hebbende, (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig; daarom is $ME : ED = MC : CG$; dat is: $Cos.a : Sin.a = 1 : Tang.a$.

BETOOG *van het vijfde.* De regthoekige driehoeken MFD en MRH zijn, om dezelfde reden, gelijkvormig; daarom is $MF : DF = MR : RH$; dat is: $Sin.a : Cos.a = 1 : Cot.a$.

BETOOG *van het zesde.* Wegens de evenwijdigheid der lijnen AM en RH, CG en MR, zijn (*IV. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) de driehoeken MCG en HRM gelijkvormig, en daarom is $CG : MC = MR : RH$; dat is: $Tang.a : 1 = 1 : Cot.a$.

BETOOG *van het zevende.* De gelijkvormige driehoeken MED en MCG geven, $ME : MD = MC : MG$; dat is: $Cos.a : 1 = 1 : Sec.a$.

BETOOG *van het achtſte.* De gelijkvormige driehoeken MFD en MRH geven, $MF : MD = MR : MH$; dat is: $Sin.a : 1 = 1 : Cosec.a$.

§. 539. GEVOLG. Uit de betoogde vergelijkingen en evenredigheden, welke voor alle poſitieve en negatieve waarden van den boog a gelden, volgen de vergelijkingen, welke, in het tweede gedeelte van de eerſte Tabelle, voorkomen.

III. Stelling. *Fig.* 232.

§. 540. *Wanneer de Sinussen en Cosinussen van twee bogen, a en b, als bekend aangenomen worden; dan zal: 1° de Sinus van de som dezer bogen gelijk zijn aan het product van de Sinus van den grootsten boog, vermenigvuldigd met de Cosinus van den kleinsten, opgeteld bij het product van de Sinus van den kleinsten met de Cosinus van den grootsten boog. 2° De Sinus van het verschil dezer bogen zal gelijk zijn aan het eerste dezer producten, verminderd met het tweede. 3° De Cosinus van de som der bogen zal gelijk zijn aan het product van de Cosinussen, verminderd met het product van de Sinussen dezer bogen. 4° En, eindelijk, zal de Cosinus van het verschil der bogen gelijk zijn aan het product van de Cosinussen dezer bogen, opgeteld met het product van derzelver Sinussen. Dat is:*

$$Sin.(a+b) = Sin.a \times Cos.b + Sin.b \times Cos.a \quad . \ . \quad (1)$$
$$Sin.(a-b) = Sin.a \times Cos.b - Sin.b \times Cos.a \quad . \ . \quad (2)$$
$$Cos.(a+b) = Cos.a \times Cos.b - Sin.a \times Sin.b \quad . \ . \quad (3)$$
$$Cos.(a-b) = Cos.a \times Cos.b + Sin.a \times Sin.b \quad . \ . \quad (4)$$

Betoog. Stel de bogen $OA = a$ en $AB = b$, en laat $AC = AB$ genomen worden; dan is $OB = a + b$ en $OC = a - b$. Men late verder de loodlijnen CH, AD en BG, op de straal OM vallen, welke straal wij, als naar gewoonte, gelijk aan de éénheid stellen: voorts trekke men de koorde BC en de straal AM, welke elkander in E regthoekig snijden; dan is $AD = Sin.a$; $MD = Cos.a$; $BE = EC = Sin.b$; $ME = Cos.b$; $BG = Sin.(a+b)$; $CH = Sin.(a-b)$; $MG = Cos.(a+b)$; $MH = Cos.(a-b)$. Men trekke EF evenwijdig aan BG, dat is loodregt op OM; CI evenwijdig aan OM, en EK evenwijdig aan CI; dan is (*II. Gev. I. Stell. IV. B.*) $BK:KI = BE:EC$, en $IL:LC = BE:EC$; omdat nu $BE = EC$ is, is $BK = KI$ en $IL = LC$: nu is (*I. Stell. III. B.*) $EF = GK$; $CH = GI$; $GF = IL = KE$; $HF = CL$; en nu zal volgen, dat:

$$Sin.(a+b) = BG = KG + BK = EF + BK \quad . \ . \ . \quad (\psi)$$
$$Sin.(a-b) = CH = KG - KI = EF - BK$$
$$Cos.(a+b) = MG = MF - FG = MF - EK$$
$$Cos.(a-b) = MH = MF + FH = MF + EK$$

is. Nu zijn de regthoekige driehoeken MDA en MFE, omdat zij den denzelfden fcherpen hoek M hebben, gelijkvormig, en daarom is:

$$MA : ME = AD : EF; \text{ of } 1 : Cos. b = Sin. a : EF$$
$$MA : ME = MD : MF; \text{ of } 1 : Cos. b = Cos. a : MF$$

diensvolgens is $EF = Sin. a \times Cos. b$, en $MF = Cos. a \times Cos. b$. Wederom zijn (*IV. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) de driehoeken MAD en BEK gelijkvormig, en geven de evenredigheden:

$$MA : BE = AD : EK, \text{ of } 1 : Sin. b = Sin. a : EK$$
$$MA : BE = MD : BK, \text{ of } 1 : Sin. b = Cos. a : BK$$

en men zal derhalve hebben $EK = Sin. a \times Sin. b$ en $BK = Sin. b \times Cos. a$. Stelt men nu deze waarden van EF, MF, EK en BK, in de bovenftaande vergelijkingen (ψ), dan verkrijgt men:

$$Sin. (a + b) = Sin. a \times Cos. b + Sin. b \times Cos. a$$
$$Sin. (a - b) = Sin. a \times Cos. b - Sin. b \times Cos. a$$
$$Cos. (a + b) = Cos. a \times Cos. b - Sin. a \times Sin. b$$
$$Cos. (a - b) = Cos. a \times Cos. b + Sin. a \times Sin. b$$

§. 541. I. Aanmerking. Deze vergelijkingen gelden voor alle bogen a, b, het zij pofitieve, het zij negatieve, en niet flechts voor bogen, welke (gelijk in de figuur plaats heeft,) in het eerfte quadrant vallen. Zij zijn de grondflagen van al de eigenfchappen der goniometrifche lijnen, welke in de volgende ftellingen zullen betoogd worden.

§. 542. II. Aanmerking. De drie laatfte vergelijkingen kunnen, door eene ligte fubftitutie, uit de eerfte worden afgeleid. Stellen wij 1°, in de eerfte vergelijking, $b = -p$; dan is, $Cos. b = Cos. (-p)$ en $Sin. b = - Sin. p$; wij verkrijgen dan, $Sin. (a - p) = Sin. a \times Cos. p - Sin. p \times Cos. a$. 2° Men kan, in plaats van $Cos. (a + b)$, fchrijven: $Sin. (90° - a - b)$ of $Sin. ((90° - a) - b)$; maar nu is, volgens de tweede vergelijking, $Sin. ((90° - a) - b) = Sin. (90° - a) \times Cos. b - Cos. (90° - a) \times Sin. b$, of (omdat $Sin. (90° - a) = Cos. a$, en $Cos. (90° - a) = Sin. a$ is,) $Cos. a \times Cos. b - Sin. a \times Sin. b = Cos. (a + b)$. 3° Stelt men in deze laatfte $b = -p$, dan zal men de vierde vergelijking verkrijgen.

§. 543. I. Gevolg. Men kan, uit de betoogde vergelijkingen, gemakkelijk de Sinus en Cofinus van de fom van drie en meer bogen vinden, wanneer derzelver Sinusfen en Cofinusfen, als bekend, aangenomen worden. Want volgens de vergelijking (1), is $Sin. (a + b + c) = Sin. (a + b) \times Cos. c + Sin. c \times Cos. (a + b)$, en, wanneer men in deze, voor $Sin. (a + b)$ en $Cos. (a + b)$, hare waarden ftelt; (zie (1) en (3) *Verg.*) dan verkrijgt men:

$$Sin.(a+b+c)=\left\{\begin{matrix}Sin.a\times Cos.b\times Cos.c\\ Sin.b\times Cos.a\times Cos.c\\ Sin.c\times Cos.a\times Cos.b\end{matrix}\right\}-Sin.a\times Sin.b\times Sin.c$$

eene vergelijking, welke, met behulp van de vergelijking (3), in de volgende

$$Sin.(a+b+c)=\left\{\begin{matrix}Cos.(a+b)\times Sin.c\\ Cos.(a+c)\times Sin.b\\ Cos.(b+c)\times Sin.a\end{matrix}\right\}+2Sin.a\times Sin.b\times Sin.c\quad(5)$$

kan veranderd worden.

Men zal, uit de vergelijking, $Cos.(a+b+c)=Cos.(a+b)\times Cos.c-Sin.(a+b)\times Sin.c$, met behulp van de (1) en (3) vergelijkingen, verkrijgen:

$$Cos.(a+b+c)=Cos.a\times Cos.b\times Cos.c-\left\{\begin{matrix}Cos.a\times Sin.b\times Sin.c\\ Cos.b\times Sin.a\times Sin.c\\ Cos.c\times Sin.a\times Sin.b\end{matrix}\right\}$$

welke, met behulp van de (3) vergelijking, onder de volgende gedaante kan gebragt worden:

$$Cos.(a+b+c)=\left\{\begin{matrix}Cos.(a+b)\times Cos.c\\ Cos.(a+c)\times Cos.b\\ Cos.(b+c)\times Cos.a\end{matrix}\right\}-2Cos.a\times Cos.b\times Cos.c\quad(6)$$

§. 544. II. Gevolg. Stelt men, in vergelijking (5), $a+b+c=90°$; dan is $Sin.(a+b+c)=1$; voorts is $Cos.(a+b)=Cos.(90°-c)=Sin.c$; $Cos.(a+c)=Cos.(90°-b)=Sin.b$; en $Cos.(b+c)=Cos.(90°-a)=Sin.a$; wij hebben dan, (alle deze waarden in de vergelijking (5) overbrengende, na de behoorlijke verschikking der termen,) voor drie bogen, welker som aan éénen regten hoek gelijk is, de vergelijking:

$$1-Sin^2.a-Sin^2.b-Sin^2.c-2Sin.a\times Sin.b\times Sin.c=0\,..\,(7)$$

§. 545. III. Gevolg. Stelt men, in vergelijking (6), eerst $a+b+c=180°$, en daarna $a+b+c=360°$; dan is: 1° voor drie bogen, a, b en c, welker som 180° is, $Cos.(a+b)=Cos.(180°-c)=Cos.\,suppl.\,c=-Cos.c$. Om dezelfde reden is $Cos.(a+c)=-Cos.b$ en $Cos.(b+c)=-Cos.a$. Stelt men nu deze waarden in de vergelijking (6), en houdt men onder het oog, dat .... $Cos.(a+b+c)=Cos.180°=-1$ is; dan vindt men:

$$1-Cos^2.a-Cos^2.b-Cos^2.c-2Cos.a\times Cos.b\times Cos.c=0\,..\,(8)$$

en, 2° voor drie bogen, a, b en c, welker som 360° bedraagt, is $Cos.(a+b)=Cos.(360°-c)=Cos.360°\times Cos.c+Sin.360°\times Sin.c=Cos.c$; terwijl, om dezelfde reden, $Cos.(a+c)=Cos.b$ en

Cos.

$Cos.(b+c) = Cos.a$ zal zijn; houdt men nu onder het oog, dat $Cos.(a+b+c) = Cos.360^\circ = 1$ is; dan verandert de vergelijking (6) in de volgende:

$$1 - Cos^2.a - Cos^2.b - Cos^2.c + 2\,Cos.a \times Cos.b \times Cos.c = 0 \quad . . (9)$$

§. 546. IV. Gevolg. Wanneer men, in de vergelijking (1), $a=b$ ſtelt; dan wordt $Sin.(a+b) = Sin.\,2a$; $Sin.b = Sin.a$; $Cos.b = Cos.a$; en men heeft derhalve:

$$Sin.\,2a = 2\,Sin.a \times Cos.a \quad . . . . . . (10)$$

of, indien men $2a = p$ ſtelt, als wanneer $a = \frac{1}{2}p$ is,

$$Sin.p = 2\,Sin.\tfrac{1}{2}p \times Cos.\tfrac{1}{2}p \quad . . . . . (11)$$

De Sinus van het dubbeld van eenen boog is dan gelijk aan tweemaal het product van de Sinus van dien boog, met deszelfs Coſinus vermenigvuldigd.

§. 547. V. Gevolg. Stellende in de vergelijking (3), insgelijks $a=b$; dan verandert zij in $Cos.\,2a = Cos^2.a - Sin^2.a$. Stelt men nu, in deze vergelijking, voor $Cos^2.a$ derzelver waarde, $1 - Sin^2.a$, of, voor $Sin^2.a$ derzelver waarde $1 - Cos^2.a$; dan hebben wij:

$$Cos.\,2a = 1 - 2\,Sin^2.a = 2\,Cos^2.a - 1$$

waaruit, na verſchikking der termen, volgt:

$$2\,Sin^2.a = 1 - Cos.\,2a \quad . . . . (12)$$

$$2\,Cos^2.a = 1 + Cos.\,2a \quad . . . . (13)$$

of, wanneer men $2a = p$ ſtelt;

$$2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}p = 1 - Cos.p \quad . . . . (14)$$

$$2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}p = 1 + Cos.p \quad . . . . (15)$$

Men kan, door deze vergelijkingen, de Sinus en de Coſinus van de helft van eenen boog vinden, wanneer de Coſinus van dien boog bekend is; want men verkrijgt: $Sin.\tfrac{1}{2}p = \sqrt{[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}Cos.p]}$, en $Cos.\tfrac{1}{2}p = \sqrt{[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}Cos.p]}$.

§. 548. Bijvoegsel. Men kan nog twee fraaije vergelijkingen vinden, *waardoor de Sinus en de Coſinus van de helft van eenen boog, alleenlijk, met behulp van de* Sinus *van dien boog, kunnen gevonden worden.* Wanneer men, namelijk, de uitdrukking: $Sin.a + Cos.a$ tot de tweede magt verheft; dan is: $(Sin.a + Cos.a)^2 = Sin^2.a + Cos^2.a + 2\,Sin.a \times Cos.a$; maar $Sin^2.a + Cos^2.a = 1$, en $2\,Sin.a \times Cos.a = Sin.\,2a$ zijnde, is

$$Sin.a + Cos.a = \pm\sqrt{(1 + Sin.\,2a)}$$

op dezelfde wijze, zal men vinden:

$$Sin.a - Cos.a = \mp\sqrt{(1 - Sin.\,2a)}$$

Wanneer men nu deze vergelijkingen optelt, en de tweede van de eer-

eerste aftrekt; en voorts $2a = p$ stelt, dan verkrijgt men:

$$Sin. \tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + Sin. p)} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - Sin. p)} \quad . \quad . \quad (16)$$

$$Cos. \tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + Sin. p)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - Sin. p)} \quad . \quad . \quad (17)$$

In deze vergelijkingen gelden het bovenste of het onderste teeken, naar dat p kleiner of grooter dan een regte hoek is.

IV. Stelling.

§. 549. *De Tangens van de som van twee bogen is gelijk aan de som van derzelver Tangenten, gedeeld door de éénheid, verminderd met het product van de Tangenten van diezelfde bogen; en de Tangens van het verschil van twee bogen is gelijk aan het verschil van derzelver Tangenten, gedeeld door de éénheid, opgeteld met het product van de Tangenten dezer bogen. Dat is:*

$$Tang. (a + b) = \frac{Tang. a + Tang. b}{1 - Tang. a \times Tang. b} \quad . \quad . \quad (18)$$

$$Tang. (a - b) = \frac{Tang. a - Tang. b}{1 + Tang. a \times Tang. b} \quad . \quad . \quad (19)$$

Betoog *van het eerste.* Omdat (*II. Stell.*) de Tangens van eenen boog gelijk is aan de Sinus, gedeeld door de Cosinus van dien boog, zal men, noemende a en b de bogen, (*III. Stell.*) hebben:

$$Tang. (a + b) = \frac{Sin. (a + b)}{Cos. (a + b)} = \frac{Sin. a \times Cos. b + Sin. b \times Cos. a}{Cos. a \times Cos. b - Sin. b \times Sin. a}$$

deelende nu den teller en den noemer dezer breuk door $Cos. a \times Cos. b$, en schrijvende, in plaats van de Sinus, gedeeld door de Cosinus, de Tangens; dan zal men de eerste vergelijking (18) verkrijgen.

Betoog *van het tweede.* Men neme, in de betoogde (18) vergelijking, b negatief; dan verandert dezelve (omdat de Tangens van eenen negatieven boog negatief is,) in de (19) vergelijking.

§. 550. I. Gevolg. Stellen wij, in de zoo even betoogde vergelijkingen (18) en (19), *boog* $a = 45°$; dan is (omdat de Tangens van 45°, als makende met de straal en de Secans eenen gelijkbeenigen regthoekigen driehoek, gelijk aan de straal of de éénheid is,) $Tang. a = 1$; wij hebben dan, in aanmerking nemende, dat $45° + b = Compl. (45° - b)$ is, (*X. Bep.*) $Tang. (45° + b) = Cot. (45° - b)$, en $Tang. (45° - b) = Cot. (45° + b)$. Men verkrijgt dan:

$$Tang. (45° + b) = \frac{1 + Tang. b}{1 - Tang. b} = Cot. (45° - b) \quad . \quad . \quad (20)$$

$$Tang.(45^\circ - b) = \frac{1 - Tang.\,b}{1 + Tang.\,b} = Cot.(45^\circ + b) \quad . \quad . \quad (21)$$

§. 551. II. Gevolg. Wanneer men de tellers en noemers der breuken, welke in de laatste vergelijkingen voorkomen, door *Tang. b* deelt, en onder het oog houdt: dat $1 : Tang.\,b = Cot.\,b$ is; dan wordt

$$Tang.(45^\circ + b) = \frac{Cot.\,b + 1}{Cot.\,b - 1} = Cot.(45^\circ - b) \quad . \quad . \quad (22)$$

$$Tang.(45^\circ - b) = \frac{Cot.\,b - 1}{Cot.\,b + 1} = Cot.(45^\circ + b) \quad . \quad . \quad (23)$$

§. 552. III. Gevolg. Stelt men, in de vergelijking (18), $a = b$; dan verkrijgt men:

$$Tang.\,2\,a = \frac{2\,Tang.\,a}{1 - Tang^2.\,a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

en hieruit volgt, met behulp van de *II. Stelling*, wanneer men namelijk de leden dezer laatste vergelijking omkeert,

$$Cot.\,2\,a = \tfrac{1}{2}\,Cot.\,a - \tfrac{1}{2}\,Tang.\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

V. Stelling.

§. 553. *Wanneer a en b twee bogen zijn, a de grootste en b de kleinste; dan zal: 1° het product van de Sinus van den grootsten boog, vermenigvuldigd met de Cosinus van den kleinsten, gelijk zijn aan de halve Sinus van de som, opgeteld met de halve Sinus van het verschil dezer bogen. 2° Maar, wanneer men de Sinus van den kleinsten boog met de Cosinus van den grootsten vermenigvuldigt; dan zal het product gelijk zijn aan de halve Sinus van de som, verminderd met de halve Sinus van het verschil dezer bogen. 3° Het product van de Sinussen van diezelfde bogen zal gelijk zijn aan de halve Cosinus van het verschil, verminderd met de halve Cosinus van de som dezer bogen. 4° Eindelijk zal het product van de Cosinussen van diezelfde bogen gelijk zijn aan de halve Cosinus van de som, opgeteld met de halve Cosinus van het verschil dezer bogen. Dat is:*

$$Sin.\,a \times Cos.\,b = \tfrac{1}{2}\,Sin.(a + b) + \tfrac{1}{2}\,Sin.(a - b) \quad . \quad . \quad (26)$$

$$Sin.\,b \times Cos.\,a = \tfrac{1}{2}\,Sin.(a + b) - \tfrac{1}{2}\,Sin.(a - b) \quad . \quad . \quad (27)$$

$$Sin.\,a \times Sin.\,b = \tfrac{1}{2}\,Cos.(a - b) - \tfrac{1}{2}\,Cos.(a + b) \quad . \quad . \quad (28)$$

$$Cos.\,a \times Cos.\,b = \tfrac{1}{2}\,Cos.(a + b) + \tfrac{1}{2}\,Cos.(a - b) \quad . \quad . \quad (29)$$

Be-

Betoog. Want, wanneer men de vergelijkingen (1) en (2) optelt, en de vergelijking (2) van (1) aftrekt, verkrijgt men de (26) en (27) vergelijkingen; en de vergelijkingen (28) en (29) ontstaan door (3) van (4) aftetrekken, en dezelve bij eikander optetellen.

VI. Stelling.

§. 554. *Wanneer de boog p grooter is dan de boog q; dan zal: 1° de som van de Sinussen dezer bogen gelijk zijn aan tweemaal het product van de Sinus van de halve som, vermenigvuldigd met de Cosinus van het halve verschil dezer bogen. 2° Het verschil van de Sinussen van die bogen zal gelijk zijn aan het dubbeld product van de Sinus van het halve verschil, vermenigvuldigd met de Cosinus van de halve som. 3° De som van de Cosinussen dezer bogen zal gelijk zijn aan het dubbeld product van de Cosinussen van de halve som en van het halve verschil dezer bogen. 4° Eindelijk, zal de Cosinus van den kleinsten boog, min de Cosinus van den grootsten, gelijk zijn aan tweemaal het product van de Sinussen van de halve som van het halve verschil dezer bogen. Dat is:*

$$Sin.\,p + Sin.\,q = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \qquad (30)$$
$$Sin.\,p - Sin.\,q = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \qquad (31)$$
$$Cos.\,p + Cos.\,q = 2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \qquad (32)$$
$$Cos.\,q - Cos.\,p = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times Sin.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \qquad (33)$$

Betoog. Men stelle in de vergelijkingen (26) tot (29), $a+b=p$ en $a-b=q$; dan is $a=\tfrac{1}{2}(p+q)$ en $b=\tfrac{1}{2}(p-q)$, en de gestelde vergelijkingen zullen dan van zelve te voorschijn komen.

VII. Stelling.

§. 555. *De som van de Sinussen van twee bogen, p en q, staat tot derzelver verschil, gelijk de Tangens van de halve som dezer bogen tot de Tangens van derzelver halve verschil. Dat is:*

$$Sin.\,p + Sin.\,q : Sin.\,p - Sin.\,q = Tang.\,\tfrac{1}{2}(p+q) : Tang.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad (34)$$

Betoog. Wanneer men de vergelijking (30), door de vergelijking (31) deelt; dan verkrijgt men:

Sin.

$$\frac{Sin. p + Sin. q}{Sin. p - Sin. q} = \frac{Sin. \frac{1}{2}(p+q)}{Cos. \frac{1}{2}(p+q)} \times \frac{Cos. \frac{1}{2}(p-q)}{Sin. \frac{1}{2}(p-q)}$$

Nu is (*II. Stell.*) de Sinus, gedeeld door de Cosinus, gelijk aan de Tangens; en de Cosinus, gedeeld door de Sinus, gelijk aan de Cotangens: men kan dan, in plaats van de laatste vergelijking, schrijven:

$$\frac{Sin. p + Sin. q}{Sin. p - Sin. q} = Tang. \tfrac{1}{2}(p+q) \times Cot. \tfrac{1}{2}(p-q)$$

maar nu mag (*Gev. II. Stell.*), in plaats van de Cotangens van eenen boog, geschreven worden, de éénheid, gedeeld door de Tangens: men heeft diensvolgens:

$$\frac{Sin. p + Sin. q}{Sin. p - Sin. q} = \frac{Tang. \frac{1}{2}(p+q)}{Tang. \frac{1}{2}(p-q)}$$

dat is, in de gewone taal der evenredigheden,

$$Sin. p + Sin. q : Sin. p - Sin. q = Tang. \tfrac{1}{2}(p+q) : Tang. \tfrac{1}{2}(p-q).$$

VIII. STELLING.

§. 556. *De som van de Cosinussen van twee bogen staat tot derzelver verschil, gelijk de Cotangens van de halve som tot de Tangens van het halve verschil dezer bogen; of, gelijk de Cotangens van het halve verschil der bogen tot de Tangens van derzelver halve som. Dat is:*

$$Cos. p + Cos. q : Cos. q - Cos. p = Cot. \tfrac{1}{2}(p+q) : Tang. \tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots \quad (35)$$

$$Cos. p + Cos. q : Cos. q - Cos. p = Cot. \tfrac{1}{2}(p-q) : Tang \tfrac{1}{2}(p+q) \quad \ldots \quad (36)$$

BETOOG. Wanneer men de vergelijking (32), door de vergelijking (33), deelt; dan verkrijgt men:

$$\frac{Cos. p + Cos. q}{Cos. q - Cos. p} = \frac{Cos. \frac{1}{2}(p+q)}{Sin. \frac{1}{2}(p+q)} \times \frac{Cos. \frac{1}{2}(p-q)}{Sin. \frac{1}{2}(p-q)}$$

en hier voor kan (*Gev. II. Stell.*) gesteld worden:

$$\frac{Cos. p + Cos. q}{Cos. q - Cos. p} = Cot. \tfrac{1}{2}(p+q) \times Cot. \tfrac{1}{2}(p-q)$$

Omdat nu de Cotangens van eenen boog gelijk is aan de éénheid, gedeeld door deszelfs Tangens, zal men mogen stellen:

$$\frac{Cos. p + Cos. q}{Cos. q - Cos. p} = \frac{Cot. \frac{1}{2}(p+q)}{Tang. \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{Cot. \frac{1}{2}(p-q)}{Tang. \frac{1}{2}(p+q)}$$

welke dubbelde vergelijking van de gestelde evenredigheden niet onderscheiden is.

IX.

IX. STELLING.

§. 557. *Wanneer men de som van de Sinusſen van twee bogen door de ſom en het verſchil van derzelver Coſinusſen deelt; dan zijn de respectieve quotienten de Tangens van de halve ſom en de Cotangens van het halve verſchil dezer bogen; en wanneer men het verſchil van de Sinusſen van diezelfde bogen door de ſom en het verſchil van derzelver Coſinusſen deelt; dan zijn de respectieve quotienten de Tangens van het halve verſchil en de Cotangens van de halve ſom dezer bogen. Dat is:*

$$\frac{Sin.\,p + Sin.\,q}{Cos.\,p + Cos.\,q} = Tang.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

$$\frac{Sin.\,p + Sin.\,q}{Cos.\,q - Cos.\,p} = Cot.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

$$\frac{Sin.\,p - Sin.\,q}{Cos.\,p + Cos.\,q} = Tang.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$\frac{Sin.\,p - Sin.\,q}{Cos.\,q - Cos.\,p} = Cot.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

BETOOG. De waarheid van dit geſtelde zal blijken, wanneer men de vergelijking (30), door de vergelijkingen (32) en (33); en de vergelijking (31), door diezelfde vergelijkingen (32) en (33) deelt, en, in de uitkomſten dezer deelingen, onder het oog houdt, dat $Sin.\,m : Cos.\,m = Tang.\,m$; en $Cos.\,m : Sin.\,m = Cot.\,m$ is.

§. 558. I. GEVOLG. Stelt men, in de vergelijkingen (37) en (38), de boog $q = 0$; dan zullen zij, omdat $Sin.\,0^\circ = 0$ en $Cos.\,0^\circ = 1$ is, in de volgende veranderen:

$$\frac{Sin.\,p}{1 + Cos.\,p} = Tang.\,\tfrac{1}{2}p \;.\; (41) \quad \text{en} \quad \frac{Sin.\,p}{1 - Cos.\,p} = Cot.\,\tfrac{1}{2}p \;.\;.\; (42)$$

§. 559. II. GEVOLG. Deelt men de vergelijking $1 = 1$, door de leden van elke der twee laatst gevondene; dan zal men verkrijgen:

$$Cot.\,\tfrac{1}{2}p = \frac{1 + Cos.\,p}{Sin.\,p} = \frac{1}{Sin.\,p} + \frac{Cos.\,p}{Sin.\,p} = Cosec.\,p + Cot.\,p \;.\;.\; (43)$$

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}p = \frac{1 - Cos.\,p}{Sin.\,p} = \frac{1}{Sin.\,p} - \frac{Cos.\,p}{Sin.\,p} = Cosec.\,p - Cot.\,p \;.\;.\; (44)$$

§. 560. III. GEVOLG. De helft van de ſom en van het verſchil dezer laatſte vergelijkingen geven de twee volgende:

Cot.

$$Cot.\tfrac{1}{2}p + Tang.\tfrac{1}{2}p = 2\,Cosec.\,p \quad \ldots\ldots \quad (45)$$
$$Cot.\tfrac{1}{2}p - Tang.\tfrac{1}{2}p = 2\,Cot.\,p \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

§. 561. IV. Gevolg. Deelende (42) door (41), en (41) door (42); dan verkrijgt men:

$$\frac{1 + Cos.\,p}{1 - Cos.\,p} = Cot^2.\tfrac{1}{2}p \;..\; (47) \qquad \frac{1 - Cos.\,p}{1 + Cos.\,p} = Tang^2.\tfrac{1}{2}p \quad (48)$$

En, wanneer men, uit de twee laatste vergelijkingen, de waarde van $Cos.\,p$ afzondert; dan vindt men:

$$Cos.\,p = \frac{1 - Tang^2.\tfrac{1}{2}p}{1 + Tang^2.\tfrac{1}{2}p} = \frac{Cot^2.\tfrac{1}{2}p - 1}{Cot^2.\tfrac{1}{2}p + 1} \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

X. Stelling.

§. 562. *De Sinus van de som van twee bogen staat tot de som van derzelver Sinussen, gelijk de Cosinus van de halve som dezer bogen tot de Cosinus van derzelver halve verschil: maar de Sinus van de som der bogen staat tot het verschil van derzelver Sinussen, gelijk de Sinus van de halve som tot de Sinus van het halve verschil dezer bogen. Dat is:*

$$Sin.\,(p+q) : Sin.\,p + Sin.\,q = Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q) : Cos.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots\ldots \quad (50)$$
$$Sin.\,(p+q) : Sin.\,p - Sin.\,q = Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q) : Sin.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

Betoog. Omdat (*IV. Gev. III. Stell.*) $Sin.\,a = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}a \times Cos.\,\tfrac{1}{2}a$ is, zal $Sin.\,(p+q) = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)$ zijn; deelen wij dan deze vergelijking door $Sin.\,p + Sin.\,q = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p-q)$; (zie *Verg.* (30)) dan verkrijgt men:

$$\frac{Sin.\,(p+q)}{Sin.\,p + Sin.\,q} = \frac{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)}{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p-q)} = \frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)}{Cos.\,\tfrac{1}{2}(p-q)}$$

en, wanneer men diezelfde vergelijking, $Sin.\,(p+q) = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)$, door de vergelijking (31) deelt, zal men vinden:

$$\frac{Sin.\,(p+q)}{Sin.\,p - Sin.\,q} = \frac{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)}{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(p-q) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q)} = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(p+q)}{Sin.\,\tfrac{1}{2}(p-q)}$$

waaruit de twee gestelde evenredigheden van zelve volgen.

§. 563. I. Gevolg. Men stelle nu, in deze evenredigheden, $p = 90^\circ$; dan is $Sin.\,(p+q) = Sin.\,(90^\circ + q) = Sin.\,90^\circ \times Cos.\,q + Cos.\,90^\circ \times Sin.\,q = Cos.\,q$, en de evenredigheden (50) en (51)

zul-

zullen in de volgende vergelijkingen veranderen:

$$\frac{Cos.\,q}{1+Sin.\,q}=\frac{Cos.(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{Cos.(45^\circ-\frac{1}{2}q)}\ (52);\quad \frac{Cos.\,q}{1-Sin.\,q}=\frac{Sin.(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{Sin.(45^\circ-\frac{1}{2}q)}\ (53)$$

§. 564. II. Gevolg. En deelt men de twee laatste door elkander, dan zal men vinden:

$$\frac{1-Sin.\,q}{1+Sin.\,q}=\frac{Tang.(45^\circ-\frac{1}{2}q)}{Tang.(45^\circ+\frac{1}{2}q)}=Tang^2.(45^\circ-\frac{1}{2}q)\ .\ .\ (54)$$

XI. Stelling.

§. 565. *De som van de Tangenten van twee bogen staat tot het verschil van diezelfde Tangenten, gelijk de Sinus van de som dezer bogen, tot de Sinus van derzelver verschil. Insgelijks staat de som der Cotangenten van diezelfde bogen tot derzelver verschil, gelijk de Sinus van de som tot de Sinus van het verschil dezer bogen. Dat is:*

$$Tang.\,a+Tang.\,b : Tang.\,a-Tang.\,b=Sin.\,(a+b): Sin.\,(a-b)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (55)$$

$$Cot.\,a+Cot.\,b : Cot.\,b-Cot.\,a=Sin.\,(a+b): Sin\,(a-b)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (56)$$

Betoog. Volgens de *III. Stelling* is:

$$\frac{Sin.\,(a+b)}{Sin.\,(a-b)}=\frac{Sin.\,a\times Cos.\,b+Sin.\,b\times Cos.\,a}{Sin.\,a\times Cos.\,b-Sin.\,b\times Cos.\,a}$$

deelt men nu den teller en den noemer der breuk, door het product $Cos.\,a\times Cos.\,b$; dan zal men, onder het oog houdende, dat $Sin.\,p : Cos.\,p=Tang.\,p$ is, verkrijgen:

$$\frac{Sin.\,(a+b)}{Sin.\,(a-b)}=\frac{Tang.\,a+Tang.\,b}{Tang.\,a-Tang.\,b}$$

en deelt men den teller en den noemer van diezelfde breuk, door $Sin.\,a\times Sin.\,b$; dan zal men verkrijgen:

$$\frac{Sin.\,(a+b)}{Sin.\,(a-b)}=\frac{Cot.\,a+Cot.\,b}{Cot.\,b-Cot.\,a}$$

welke vergelijkingen van de gestelde evenredigheden niet anders, dan in de wijze van uitdrukken, verschillen.

XII. Stelling.

§. 566. *De Sinus van de som van twee bogen, vermenigvuldigd met de Sinus van derzelver verschil, is gelijk aan het ver-*

verschil van de vierkanten van de Sinussen dezer bogen, en ook gelijk aan het verschil van de vierkanten van derzelver Cosinussen. Dat is:

$$Sin.(a+b) \times Sin.(a-b) = Sin^2.a - Sin^2.b \quad . (57)$$

$$Sin.(a+b) \times Sin.(a-b) = Cos^2.b - Cos^2.a \quad . (58)$$

Betoog. Want, wanneer men de vergelijkingen:

$$Sin.(a+b) = Sin.a \times Cos.b + Sin.b \times Cos.a$$

$$Sin.(a-b) = Sin.a \times Cos.b - Sin.b \times Cos.a$$

in de *III. Stelling* betoogd, met elkander vermenigvuldigt; dan verkrijgt men:

$$Sin.(a+b) \times Sin.(a-b) = Sin^2.a \times Cos^2.b - Sin^2.b \times Cos^2.a$$

Stelt men nu, in deze vergelijking, $Cos^2.b = 1 - Sin^2.b$, en . . . $Cos^2.a = 1 - Sin^2.a$; dan zal zij veranderen in:

$$Sin.(a+b) \times Sin.(a-b) = Sin^2.a - Sin^2.b$$

Stelt men verder, in deze laatste, $Sin^2.a = 1 - Cos^2.a$, en $Sin^2.b = 1 - Cos^2.b$; dan zal men verkrijgen:

$$Sin.(a+b) \times Sin.(a-b) = Cos^2.b - Cos^2.a$$

Over de zamenstelling der gewone Sinus-Tafelen.

§. 567. De eigenschappen der goniometrische lijnen, welke wij, in de voorgaande stellingen, betoogd hebben, zijn, in de platte en sphærische Driehoeksmetingen, benevens, in al de deelen der hoogere en toegepaste Wiskunst, vooral in de Sterre-, Aardrijks en Zeevaartkunde, van het uiterste gewigt; maar ook strekken velen van dezelve, om de Sinus-tafel zamentestellen; dat is, de lengte van elke goniometrische lijn van eenen gegevenen boog, in deelen van de straal, die hier de één-heid of modulus is, uittedrukken. Nu hebben wij reeds gezien: dat, wanneer men de Sinus en de Cosinus van eenen gegevenen boog kent, de Tangens en Secans, benevens de Cotangens en de Cosecans van dien boog, door gewone berekeningen, kunnen gevonden worden: maar wij hebben nog niet aangetoond, hoe de Sinus en Cosinus eens boogs van denzelven afhangen, en hoe de lengte van eenen boog, van een bepaald aantal graden, in deelen van de straal, kan worden uitgedrukt. Dit oogmerk nu zal, in de oplossing van het volgende vraagstuk, vervuld worden.

I. Vraagstuk.

§. 568. *Ondersteld zijnde, dat een boog, in deelen van de*

 straal,

ſtraal, gegeven is, eene formule of eenen regel te vinden, waardoor men de Sinus en de Coſinus van dien boog insgelijks, in deelen van de ſtraal, bepalen kan?

OPLOSSING. Indien men $Sin.\,x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 + enz.$, ſtelt, in welke de coefficienten A, B, C, *enz.* voor alle waarden van x, dezelfde blijven; dan voldoet deze aangenomene uitdrukking aan de omſtandigheid, bij welke de Sinus van eenen boog het tegengeſtelde teeken verkrijgt, wanneer de boog negatief genomen wordt. Wij hebben dan:

$$Sin.\,x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 + enz.$$

derhalve ook, omdat deze uitdrukking voor alle waarden van x algemeen moet zijn,

$$Sin.\,y = y + Ay^3 + By^5 + Cy^7 + Dy^9 + enz.$$

en, wanneer men deze laatſte van de eerſte vergelijking aftrekt,

$$Sin.\,x - Sin.\,y = (x-y) + A.(x^3 - y^3) + B.(x^5 - y^5) + enz.$$

maar nu is (*VI. Stell.*) $Sin.\,x - Sin.\,y = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(x-y) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(x+y)$ en $2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(x-y) = Koorde\,(x-y)$; derhalve zal

$$Koorde\,(x-y) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(x+y) = (x-y) + A(x^3-y^3) + B(x^5-y^5) + C(x^7-y^7) + enz.$$

zijn. Deelende nu beide leden dezer vergelijking door $x-y$; dan zal men verkrijgen:

$$\frac{Koorde\,(x-y)}{x-y} \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(x+y) = 1 + A(x^2+xy+y^2) + B(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) + enz.$$

Stelt men nu, in deze vergelijking, $x = y$; dan is de *Koorde* $(x-y)$ tot den *boog* $(x-y)$ gelijk één tot één, en $Cos.\,\tfrac{1}{2}(x+y) = Cos.\,x$; $x^2+xy+y^2 = 3x^2$; $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4 = 5x^4$; *enz.* en wij verkrijgen derhalve:

$$Cos.\,x = 1 + 3Ax^2 + 5Bx^4 + 7Cx^6 + 9Dx^8 + 11Ex^{10} + enz. \quad \ldots \ldots \quad (\varphi)$$

Dit alzoo zijnde, zal ook noodzakelijk

$$Cos.\,y = 1 + 3Ay^2 + 5By^4 + 7Cy^6 + 9Dy^8 + 11Ey^{10} + enz.$$

moeten zijn; trekt men nu deze laatſte van de voorgaande vergelijking af; dan zal men verkrijgen:

$$Cos.\,x - Cos.\,y = 3A(x^2-y^2) + 5B(x^4-y^4) + 7C(x^6-y^6) + enz.$$

Maar nu is (*VI. Stell.*) $Cos.\,x - Cos.\,y = 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(y-x) \times Sin.\,\tfrac{1}{2}(x+y) = Koorde\,(y-x) \times Sin.\,\tfrac{1}{2}(x+y)$: men mag derhalve, na alles door $y-x$ gedeeld te hebben, daarbij onder het oog houdendende, dat $x^2 - y^2$, gedeeld door $y - x$, gelijk is aan $x^2 - y^2$, gedeeld door $x - y$, negatief genomen, ftellen:

$$\frac{Koorde\,(y-x)}{(y-x)} \times Sin. \tfrac{1}{2}(x+y) = -3A(x+y) - 5B(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) - 7C(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5) - enz.$$

Neemt men nu $x = y$; dan verkrijgt men:

$$Sin.\,x = -2 \times 3Ax - 4 \times 5Bx^3 - 6 \times 7Cx^5 - 8 \times 9Dx^7 - 10 \times 11Ex^9 - 12 \times 13Fx^{11} - enz.$$

Deze gevondene uitdrukking moet nu met de aangenomene

$$Sin.\,x = x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + Dx^9 + Ex^{11}$$

volkomen identiek, dat is dezelfde zijn; men heeft bijgevolg de vergelijkingen:

$$1 = -2 \times 3A; \text{ derhalve } A = -\frac{1}{1.2.3}$$

$$A = -4 \times 5B \;\ldots\ldots\; B = +\frac{1}{1.2.3.4.5}$$

$$B = -6 \times 7C \;\ldots\ldots\; C = -\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$$

$$C = -8 \times 9D \;\ldots\ldots\; D = +\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

enz. enz.

Brengen wij nu deze waarden van A, B, C, D, *enz.* in de aangenomene vergelijking: $Sin.\,x = x + Ax^3 + enz.$ en in de vergelijking (ϕ) over; dan hebben wij:

$$Sin.\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + enz. \quad (59)$$

$$Cos.\,x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + enz. \;.\;.\; (60)$$

Deze reekfen loopen zonder einde voort, en zijn ten laatfte altijd convergent; doch men zal door dezelve de Sinus en de Cofinus van eenen boog zooveel te fpoediger vinden, naarmate die boog door een kleiner gebroken wordt uitgedrukt. Men zie onze *Handleid. tot de Befch. en Werkd. Meetk. I. Deel*, §. 1066, en *II. Curf. LXI. Les*, §. 615. *en verv.*

§. 569. Aanmerking. Het is, *II. C.* §. 619, *pag.* 366, bewezen: dat, wanneer e het getal verbeeldt, wiens Neperjaanfche of zoogenaamde Hyperbolifche Logarithmus de éénheid is, de Sinus en de Cofinus van eenen boog, door de volgende vergelijkingen, zullen worden uitgedrukt:

$$Cos.\,x = \frac{e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \text{ en } Sin.\,x = \frac{e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad (61)$$

waaruit, zie aangehaalde plaats, volgt:

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times Nep.\,Log.\left\{\frac{1 + Tang.\,x\sqrt{-1}}{1 - Tang.\,x\sqrt{-1}}\right\} \ldots (62)$$

Nu is, *zie II. Curf.* §. 577. *en verv.*

$$Nep.\,Log.\left\{\frac{1+u}{1-u}\right\} = 2 \times \left\{u + \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{7}u^7 + enz.\right\}$$

wanneer men dan, in deze laatfte, $u = Tang.\,x\sqrt{-1}$ ftelt; dan zal men verkrijgen:

$$x = Tang.\,x - \tfrac{1}{3}.Tang^3.\,x + \tfrac{1}{5}.Tang^5.\,x - \tfrac{1}{7}.Tang^7.\,x + enz. \quad (63)$$

door welke reeks de waarde van eenen cirkelboog, in deelen van de ftraal, zal gevonden worden, wanneer de Tangens van dien boog, in éénheden van diezelfde deelen, gegeven is. Men kan dit alles op de aangehaalde plaatfen omftandiger nagaan: ook is *II. C.*, §. 623, aangetoond: dat het getal π, (*IV. B.* §. 438, *pag.* 158, reeds opgegeven,) dat is de betrekking van de middellijn tot den omtrek eens cirkels, met behulp van éénc der twee volgende vergelijkingen:

1° $Arc.\,45° = 4\;Arc.\,Tang.\,\tfrac{1}{5} - Arc.\,Tang.\,\tfrac{1}{239}$

2° $Arc.\,45° = 8\;Arc.\,Tang.\,\tfrac{1}{10} - 4\;Arc.\,Tang.\,\tfrac{1}{515} - Arc.\,Tang.\,\tfrac{1}{239}$

door eene zeer ligte berekening, zal kunnen gevonden worden.

§. 570. Toepassing. Nemen wij nu, in de reekfen (59) en (60), den boog $x = \frac{p}{q} \times 90°$; zijnde p en q twee getallen, naar welgevallen; dan moet de boog van 90°, in deelen van de ftraal, worden uitgedrukt; wanneer nu de ftraal $= 1$ genomen wordt; dan is $90° = \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2} \times 3,14159\;enz. = 1,57079\;enz.$ Voorts is $x^2 = \frac{p^2}{q^2} \cdot \frac{1}{4}\pi^2$, $x^3 = \frac{p^3}{q^3} \times \frac{1}{8}\pi^3$, *enz.* wanneer men derhalve eens en vooral de moeite neemt, om de onderfcheidene magten van het getal π te berekenen, dan zal men $\left(\frac{p}{q} = m \text{ ftellende,}\right)$ de volgende, voor de berekening, zeer gefchikte uitdrukkingen, voor de Sinus en Cofinus, van eenen boog verkrijgen.

Sin. m

$Sin. m \times 90^\circ =$	$Cos. m \times 90^\circ =$
$+1,\ 57079\ 63267\ 948966 . m$	$+1,\ 00000\ 00000\ 000000$
$-0,\ 64596\ 40975\ 062463 . m^3$	$-1,\ 23370\ 05501\ 361698 . m^2$
$+0,\ 07969\ 26262\ 461670 . m^5$	$+0,\ 25366\ 95079\ 010480 . m^4$
$-0,\ 00468\ 17541\ 353187 . m^7$	$-0,\ 02086\ 34807\ 633530 . m^6$
$+0,\ 00016\ 04411\ 847874 . m^9$	$+0,\ 00091\ 92602\ 748394 . m^8$
$-0,\ 00000\ 35988\ 432352 . m^{11}$	$-0,\ 00002\ 52020\ 423731 . m^{10}$
$+0,\ 00000\ 00569\ 217292 . m^{13}$	$+0,\ 00000\ 04710\ 874779 . m^{12}$
$-0,\ 00000\ 00006\ 688035 . m^{15}$	$-0,\ 00000\ 00063\ 866031 . m^{14}$
$+0,\ 00000\ 00000\ 060669 . m^{17}$	$+0,\ 00000\ 00000\ 656596 . m^{16}$
$-0,\ 00000\ 00000\ 000438 . m^{19}$	$-0,\ 00000\ 00000\ 005294 . m^{18}$
$+0,\ 00000\ 00000\ 000003 . m^{21}$	$+0,\ 00000\ 00000\ 000034 . m^{20}$

§. 571. De termen dezer reekſen zijn ſlechts tot zoo verre berekend, als noodig is, om de Sinus en Coſinus van eenen gegevenen boog, tot in het vijſtiende cijfer der tiendeelige breuk, met juistheid, te bepalen, en daar de goniometriſche lijnen, in de gewone Tafelen, ſlechts, tot in het zevende cijfer, benaderd zijn, zijn de berekende termen, tot de conſtructie dezer tafels, meer dan voldoende. Wanneer men nu de Sinus en de Coſinus van eenen boog, kleiner dan 90°, door de gevondene vergelijkingen, bepalen zal, maakt men m gelijk aan eene breuk, welke de graden van den gegevenen boog tot teller en 90° tot noemer heeft, en de waarde der termen worden dan door de gewone multiplicatie gevonden. Tot de berekening van de Sinus en de Coſinus van 90°, worden al de termen der gevondene vergelijkingen vereischt; want, in dit geval is $m = 1 = m^2 = m^3 = m^4 =$ *enz.:* deze berekening opmakende, zal, ten proeve van de naauwkeurigheid der gevondene vergelijkingen, $Sin.\ 90^\circ = 1$, en $Cos.\ 90^\circ = 0$ bevonden worden. Om de Sinus en de Coſinus van 45° te vinden, moet $m = \frac{1}{2}$ geſteld worden, en dan zal men vinden:

$$Sin.\ 45^\circ = Cos.\ 45 = 0,\ 70710\ 67811\ 865475$$

eene uitkomst, welke men (tot eene tweede proef van de juistheid der gevondene vergelijkingen,) door $Sin.\ 45^\circ = Cos.\ 45 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; dat is, door de vierkants-worteltrekking uit *twee*, vinden zal.

§. 572. De berekening zal zooveel te ſpoediger afloopen, als de breuk m kleiner is. Om alzoo de Sinus van 9° te vinden, zal $m = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$ zijn, en dan hebben wij om deze Sinus te vinden:

De eerste term $=$	$+$ 0,	15707	96326	79489	66	
De tweede term $=$	$-$	64	59640	97506	25	*aftrekken*
	$+$ 0,	15643	36685	81983	41	
De derde term $=$	$+$		7969	26262	46	*bijtellen*
	$+$ 0,	15643	44655	08245	87	
De vierde term $=$	$-$		4	68175	41	*aftrekken*
	$+$ 0,	15643	44650	40070	46	
De vijfde term $=$	$+$			160	44	*bijtellen*
Sin. 90° $=$	$+$ 0,	15643	44650	40230	90	*nagenoeg*

Uit deze berekening blijkt, dat tot het berekenen van de Sinus van 9° slechts vijf termen van de reeks vereischt worden, en dit getal zal nog minder zijn, wanneer men de Sinus en Cosinus van den boog van 1° wil berekenen. De volgende Sinusſen en Cosinusſen zijn door dezelfde vergelijkingen gevonden:

$$Sin.\ 9^\circ = Cos.\ 81^\circ = 0,\ 15643\ \ 44650\ \ 40231$$
$$Sin.\ 18^\circ = Cos.\ 72^\circ = 0,\ 30901\ \ 69943\ \ 74947$$
$$Sin.\ 27^\circ = Cos.\ 63^\circ = 0,\ 45399\ \ 04997\ \ 39547$$
$$Sin.\ 36^\circ = Cos.\ 54^\circ = 0,\ 58778\ \ 52522\ \ 92473$$
$$Sin.\ 45^\circ = Cos.\ 45^\circ = 0,\ 70710\ \ 67811\ \ 86548$$
$$Sin.\ 54^\circ = Cos.\ 36^\circ = 0,\ 80901\ \ 69943\ \ 74947$$
$$Sin.\ 63^\circ = Cos.\ 27^\circ = 0,\ 89100\ \ 65241\ \ 88368$$
$$Sin.\ 72^\circ = Cos.\ 18^\circ = 0,\ 95105\ \ 65162\ \ 95154$$
$$Sin.\ 81^\circ = Cos.\ 9^\circ = 0,\ 98768\ \ 83405\ \ 95138$$

en men zal de Sinusſen en Cosinusſen van alle andere bogen op dezelfde wijze vinden kunnen.

II. VRAAGSTUK.

§. 573. *De Sinus en Cosinus van eenen boog bekend zijnde, de Sinusſen en Cosinusſen van alle volgende bogen te vinden, welke met een gelijk verſchil, bij voorbeeld, van éénen graad, of ééne minuut, opklimmen.*

OPLOSSING. Volgens de *V. Stelling*, is

$$Sin.\ (a+b) = 2\ Sin.\ a \times Cos.\ b - Sin.\ (a-b)$$
$$Cos.\ (a+b) = 2\ Cos.\ a \times Cos.\ b - Cos.\ (a-b)$$

en, omdat, wanneer men bij eene grootheid eene grootheid optelt, en naderhand diezelfde grootheid 'er van aftrekt, de waarde dezelfde blijft, zal men, in de plaats dezer vergelijkingen, ſtellen kunnen:

Sin.

$Sin.(a+b) = 2\,Sin.a + 2\,Sin.a \times Cos.b - 2\,Sin.a - Sin.(a-b)$
$Cos.(a+b) = 2\,Cos.a + 2\,Cos.a \times Cos.b - 2\,Cos.a - Cos.(a-b)$
Nu is, zie *V. Gev. III. Stell. Verg.* (14) $1 - Cos.b = 2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}b$; wij hebben derhalve:

$$-2\,Sin.a + 2\,Sin.a \times Cos.b = -4\,Sin^2.\tfrac{1}{2}b \times Sin.a$$
$$-2\,Cos.a + 2\,Cos.a \times Cos.b = -4\,Sin^2.\tfrac{1}{2}b \times Cos.a$$

en de twee laatst gevondene vergelijkingen veranderen in de twee volgende:

$$Sin.(a+b) = 2\,Sin.a - Sin.(a-b) - 4\,Sin^2.\tfrac{1}{2}b \times Sin.a \quad . . (64)$$
$$Cos.(a+b) = 2\,Cos.a - Cos.(a-b) - 4\,Sin^2.\tfrac{1}{2}b \times Cos.a \quad . . (65)$$

Stellen wij nu $b = 1^\circ$; dan is $\tfrac{1}{2}b = 30'$; en de twee algemeene vergelijkingen worden dan:

$$Sin.(a+1^\circ) = 2\,Sin.a - Sin.(a-1^\circ) - 4\,Sin^2.30' \times Sin.a \quad (66)$$
$$Cos.(a+1^\circ) = 2\,Cos.a - Cos.(a-1^\circ) - 4\,Sin^2.30' \times Cos.a \quad (67)$$

vergelijkingen, waardoor men de Sinusſen en Coſinusſen, van graad tot graad, vinden zal. Stelt men $b = 1'$; *dan zal men de vergelijkingen vinden, waardoor de Sinusſen en Coſinusſen, van minuut tot minuut, zullen bekend worden, enz.*

§. 574. I. Aanmerking. Wanneer men, in de vergelijkingen (26) en (28), (*V. Stell.*) $a = 30^\circ$ ſtelt; dan zullen zij, aangezien $Sin.30^\circ = \tfrac{1}{2}$ is, in de volgende veranderen:

$$Sin.(30^\circ + b) = Cos.b - Sin.(30^\circ - b) \quad . . . (68)$$
$$Cos.(30^\circ + b) = Cos.(30^\circ - b) - Sin.b \quad . . . (69)$$

en ſtelt men, in de vergelijkingen (27) en (29), $a = 60^\circ$; dan verkrijgt men, omdat $Cos.60^\circ = Sin.30^\circ = \tfrac{1}{2}$ is,

$$Sin.(60^\circ + b) = Sin.b + Sin.(60^\circ - b) \quad . . . (70)$$
$$Cos.(60^\circ + b) = Cos.b - Cos.(60^\circ - b) \quad . . . (71)$$

Wanneer men derhalve de Sinusſen en Coſinusſen der bogen, van 0° tot 30° berekend heeft, zal men, door (68) en (69), de Sinusſen en Coſinusſen der bogen, van 30° tot 60°, en door (70) en (71), de Sinusſen en Coſinusſen der bogen, van 60° tot 90°, door eenvoudig optellen of aftrekken, vinden kunnen.

§. 575. II. Aanmerking. Volgens het *V. Gev. V. Stell. VI. B.*, is het vierkant van de zijde des regelmatigen vijfhoeks gelijk aan de ſom van de vierkanten van de zijden van den regelmatigen zeshoek en tienhoek, met den vijfhoek, in denzelfden cirkel ſtaande; dat is: $4\,Sin^2.36^\circ = 4\,Sin^2.18^\circ + 4\,Sin^2.30^\circ = 4\,Sin^2.18^\circ + 1$; maar nu is $4\,Sin^2.a = 2 - 2\,Cos.2a$, (zie *Verg.* (12)), en daarom zal $2 - 2\,Cos.72^\circ = 2 - 2\,Cos.36 + 1$ moeten zijn; dat is (omdat $Cos.72^\circ$ =

$= Sin.\, 18^\circ$ en $Cos.\, 36^\circ = Sin.\, 54^\circ$ is,) $Sin.\, 54^\circ - Sin.\, 18^\circ = \frac{1}{2}$. Laat nu, in de vergelijking $Sin.\,(a + b) + Sin.\,(a - b) = 2\, Sin.\, a \times Cos.\, b$, eerst $a = 18^\circ$, daarna $a = 54^\circ$ gesteld worden; dan is:

$$Sin.\,(18^\circ + b) + Sin.\,(18^\circ - b) = 2\, Sin.\, 18^\circ \times Cos.\, b$$

$$Sin.\,(54^\circ + b) + Sin.\,(54^\circ - b) = 2\, Sin.\, 54^\circ \times Cos.\, b$$

Wanneer men nu de eerste dezer vergelijkingen van de tweede aftrekt, zal men, omdat $2\, Cos.\, b \times (Sin.\, 54^\circ - Sin.\, 18^\circ) = Cos.\, b$, en $Cos.\, b = Sin.\,(90^\circ - b)$ is, verkrijgen:

$$Sin.\,(90^\circ - b) + Sin.\,(18^\circ + b) + Sin.\,(18^\circ - b) = Sin.\,(54^\circ + b) + Sin.\,(54^\circ - b) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (72)$$

door welke vergelijking de berekende Sinus-Tafel kan beproefd worden.

§. 576. III. Aanmerking. Wanneer de Sinussen en de Cosinussen van de bogen des quadrants berekend zijn, kan men de overige goniometrische lijnen, welke tot deze bogen behooren, door de *II. Stelling* vinden. De volgende vergelijkingen maken nogtans die berekening gemakkelijker. 1° Volgens *verg.* (25), is $Cot.\, 2\,a = \frac{1}{2}\, Cot.\, a - \frac{1}{2}\, Tang.\, a$: stellen wij in dezelve $a = 30^\circ - b$; dan verkrijgen wij, na behoorlijke herleiding,

$$2\, Tang.\,(30^\circ + 2\,b) = Cot.\,(30^\circ - b) - Tang.\,(30^\circ - b) \ldots (73)$$

2° Trekt men de (21) van de (22) vergelijking af, dan zal men, met behulp van de (25), vinden:

$$Tang.\,(45^\circ + b) = 2\, Tang.\, 2\,b + Tang.\,(45^\circ - b) \ldots (74)$$

Door de eerste, zal men de Tangenten van alle bogen, boven de 30°, en door de tweede, de Tangenten der bogen, boven de 45°, door eenvoudig aftrekken en optellen, vinden.

3° De Secanten en Cosecanten zullen, wanneer de Tangenten en Cotangenten berekend zijn, door de vergelijkingen:

$$Sec.\, b = Cot.\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\, b) - Tang.\, b \quad \ldots \quad (75)$$

$$Cosec.\, b = Cot.\, \tfrac{1}{2}\, b - Cot.\, b \quad \ldots \ldots \quad (76)$$

door optellen en aftrekken, gevonden worden.

Over de Logarithmen der Goniometrische lijnen, en de Logarithmus-Sinus-Tafelen.

§. 577. In de *Wiskundige Lessen*, I. C. XL. *Les*, is uitvoerig verklaard, wat Logarithmen zijn, en in de II. C. LX. *Les*, is deze stof vervolgd. Wij onderstellen derhalve deze kennis, ten minste, in zoo verre, dat men het gebruik der Logarithmen kent. De Logarithmen der getallen, welke de betrekking der goniometrische lijnen tot de straal uitdrukken, noemt men *Logarithmus-Sinus*, *Logarithmus-Cosinus*,

enz.,

enz., en de Tafel, in welke de Logarithmen der goniometrische lijnen vereënigd zijn, noemt men de *Logarithmus-Sinus-Tafel*, omtrent welker zamenstelling het volgende een beknopt denkbeeld zal geven.

§. 578. Omdat, wanneer men de straal gelijk één stelt, alle Sinussen en Cosinussen, benevens de Tangenten, in de eerste helft van het quadrant, en bijgevolg de Cotangenten, in de tweede helft van hetzelve, breuken en derzelver Logarithmen om die reden negatief zijn, hetgeen de min geoefenden, welke de tafelen dagelijks gebruiken moeten, zou kunnen in de war brengen, heeft men, in de zamenstelling der Logarithmus-Sinus-Tafel, de straal gelijk aan de tiende magt van tien $= 10^{10} = 10000000000$ gesteld; wanneer men nu ook alle de goniometrische lijnen, in de gewone Sinus-tafel voorkomende, met dit getal of 10^{10} vermenigvuldigt, zal men eene Sinus-tafel verkrijgen, welke slechts op een grooter modulus berekend is, en nogtans dezelfde diensten als de eerste zal bewijzen. Noemen wij dan de straal van de Sinus-tafel r; dan zijn *II. Stelling*

$$Tang.\,a = \frac{r \times Sin.\,a}{Cos.\,a};\quad Cot.\,a = \frac{r \times Cos.\,a}{Sin.\,a};\quad Cot.\,a = \frac{r^2}{Tang.\,a}$$

$$Sec.\,a = \frac{r^2}{Cos.\,a} \text{ en } Cosec.\,a = \frac{r^2}{Sin.\,a}$$

en volgens §. 859, *I. C.*, en omdat $Log.\,r = 10$ is

$$Log.\,Tang.\,a = 10 + Log.\,Sin.\,a - Log.\,Cos.\,a \quad . \quad . \quad (77)$$

$$Log.\,Cot.\,a = 10 + Log.\,Cos.\,a - Log.\,Sin.\,a \quad . \quad . \quad (78)$$

$$Log.\,Cot.\,a = 20 - Log.\,Tang.\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

$$Log.\,Sec.\,a = 20 - Log.\,Cos.\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

$$Log.\,Cosec.\,a = 20 - Log.\,Sin.\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

§. 579. Het komt 'er dan nu alleen maar op aan, om de Logarithmen van de Sinussen, en de Cosinussen der bogen te vinden. Wij zullen ons thans vergenoegen, met de uitkomsten, die wij elders (II. C. §. 747.) opgegeven hebben, alhier overtenemen. Indien namelijk M de modulus van de gewone Briggiaansche Logarithmen beteekent, namelijk:

$$M = 0,43429\ 44819\ 03251\ 82765$$

dan zal, indien de Logarithmen der Sinussen en Cosinussen met *tien* verhoogd worden,

$$Log.\,Sin.\,x = 10 + Log.\,x - M \times \left\{ \frac{x^2}{2.\,3} + \frac{x^4}{4.\,5.\,9} + \frac{x^6}{5.\,7.\,81} + \right.$$

$$\frac{x^8}{7.\,8.\,25.\,27} + \frac{x^{10}}{7.\,11.\,25.\,243} + \frac{691\,x^{12}}{6.\,11.\,13.\,49.\,125.\,729} + \ldots$$

$$\frac{2x^{14}}{11.13.25.49.729} + \frac{3617x^{16}}{11.13.16.17.49.625.2187} + enz. \Big\} \quad (82)$$

$$Log.\ Cos.\ x = 10 - M \times \Big\{ \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.9} + \frac{17x^8}{5.7.8.9} + \cdots$$

$$\frac{31x^{10}}{7.25.81} + \frac{691x^{12}}{6.7.11.25.81} + \frac{10922x^{14}}{11.13.25.49.243} + \cdots$$

$$\frac{929569x^{16}}{11.13.16.49.125.729} + enz. \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

zijn; door welke, reekſen (welke naar aanleiding van II. C. §. 846, zonder moeite verder kunnen voortgezet worden,) de Logarithmen der Sinusſen en Coſinusſen van bogen, van 0° tot 45°, zeer gemakkelijk kunnen berekend worden. Doch, om deze reekſen te kunnen gebruiken, moet de boog x niet in graden, maar in deelen van de ſtraal gegeven zijn; wanneer nu de ſtraal $= 1$ is; dan is een boog van $180° = 3,14159\ 26535\ 89793 = \pi$ (zie §. 437.). Men zegge dan $180° : x = \pi$ tot de waarde van x, in deelen van de ſtraal uitgedrukt, en welke in het berekenen van *Log. Sin.* x en *Log. Cos.* x moet gebruikt worden. De tafelen, in welke de Briggiaanſche Logarithmen tot twintig cijfers zijn voortgezet, en die bij Callet voorkomen, kunnen hier met voordeel gebruikt worden.

§. 580. De beste Tafelen zijn die van Callet, welke wij, I. C. §. 884, hebben leeren kennen: behalve deze, komen de Tafelen van Borda, en die van Hobert en Ideler in aanmerking: doch deze zijn alleen naar de tiendeelige verdeeling van het quadrant ingerigt, verdeeling, welke wij, offchoon beter zijnde, dan de ſexageſimale, niet gevolgd zijn, om daardoor eenigzins aan veler vooringenomenheid toetegeven. Wat nu het gebruik dezer Tafelen aangaat, men kan niet beter doen, dan de verklaringen, welke voor dezelve geplaatst zijn, te raadplegen. De voorreden van Delambre, voor de Tafelen van Borda geplaatst, verdient vooral gelezen te worden. Eindelijk dient tot narigt van den eerstbeginnenden, dat de regels ter berekening der goniometriſche lijnen, in dit boek verklaard, gelijk ook die der platte en ſphæriſche Driehoeksmetingen, aangezien zij algemeen zijn, dezelfde blijven, het zij men de Sexageſimale of Decimale verdeeling van het quadrant, in de dadelijke berekening, gebruikt.

NE-

NEGENDE BOEK.

Over de Trigonometrie, *of de Meetkunst der platte Driehoeken.*

---

§. 581. I. Bepaling. De *Trigonometrie*, of *Driehoeksmeting*, is dat gedeelte der Meetkunst, hetwelk, door middel der goniometrische lijnen, de betrekking van de zijden eens driehoeks, tot deszelfs hoeken leert kennen, om alzoo, wanneer, of ééne zijde en twee hoeken, of twee zijden en éénen hoek, of de drie zijden eens driehoeks gegeven zijn, de regels, ter bepaling van deszelfs andere onbekende zijden en hoeken, uit deze gekende betrekkingen, te leeren afleiden.

§. 582. Aanmerking. Men zou de Driehoeksmeting, in eene ruimere beteekenis nemen, en tot dezelve alle werkstukken betrekkelijk kunnen maken, in welke, door drie, van elkander onafhankelijke, gegevens, een driehoek moet bepaald worden: maar de gegevene bepaling omschrijft de Driehoeksmeting, in de gewone beteekenis, en in alle derzelver hoofdgevallen, waarvan het geval, in hetwelke alleenlijk de hoeken des driehoeks gegeven zijn, moet uitgezonderd worden, omdat, wegens de standvastige som van de hoeken eens driehoeks, een oneindig aantal van gelijkvormige driehoeken aan drie gegevene hoeken voldoet.

Beschouwing van de Regthoekige Driehoeken.

§. 583. II. Bepaling. *Fig.* 233. In de beschouwing van den regthoekigen driehoek, ABC, in welken de regte hoek B van zelven bekend is, noemt men ééne der regthoekszijden, AB, de basis; BC de opstaande regthoekszijde, AC de hypothenusa, en den hoek A den hoek aan de basis.

I. Stelling. *Fig.* 233.

§. 584. *In elken regthoekigen driehoek, is de opstaande*

regt-

regthoekszijde gelijk aan de basis, vermenigvuldigd met de Tangens van den hoek aan de basis; en de hypothenusa is gelijk aan de basis, vermenigvuldigd met de Secans van den hoek aan de basis. Dat is:

$$1^{\circ}\ BC = AB \times Tang.A. \quad 2^{\circ}\ AC = AB \times Sec.A.$$

Betoog. Laat AD, als de éénheid van de lengte maat, aangenomen, en uit A, met AD, als straal, den cirkelboog DE beschreven worden; dan is deze de maat van den hoek A: men trekke de lijn DF loodregt op AB; dan zal (*zie VIII en IX. Bep. VIII. B.*) $DF = Tang.A$ en $AF = Sec.A$ zijn. Nu zijn de regthoekige driehoeken ABC en ADF, welke denzelfden hoek A gemeen hebben, (*I. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig, en daarom is:

$$\left\{\begin{matrix} AD : DF = AB : BC \\ AD : AF = AB : AC \end{matrix}\right\}, \text{ of } \left\{\begin{matrix} 1 : Tang.A = AB : BC \\ 1 : \ Sec.A = AB : AC \end{matrix}\right\}$$

uit welke evenredigheden (*V. Stell. IV. B.*) volgt:

$$1^{\circ}.\ BC = AB \times Tang.A. \quad 2^{\circ}.\ AC = AB \times Sec.A.$$

§. 585. Gevolg. *Fig.* 233. Omdat (*II. Stell. VIII. B.*) $Sec.A = 1 : Cos.A$ is, kan men, in plaats van de vergelijking $AC = AB \times Sec.A$, schrijven: $AC = AB : Cos.A$. Dat is: *de hypothenusa is gelijk aan de basis gedeeld door de Cosinus van den hoek aan de basis.*

§. 586. I. Aanmerking. *Fig.* 233. Men zal, volgens het betoog de, in den regthoekigen driehoek ABC, stellen kunnen: $AB = BC \times Tang.C$ en $AC = BC \times Sec.C = BC : Cos.C$.

§. 587. II. Aanmerking. *Fig.* 233. Omdat de hoek C het complement van den hoek A is, zal $Tang.A = Cot.C$; $Cot.A = Tang.C$; $Sec.A = Cosec.C$ en $Cosec.A = Sec.C$ zijn, en men zal daarom

$$\text{in plaats van} \left\{\begin{matrix} BC = AB \times Tang.A \\ AC = AB \times \ Sec.A \\ AB = BC \times Tang.C \\ AC = BC \times \ Sec.C \end{matrix}\right\} \text{ stellen kunnen } \left\{\begin{matrix} BC = AB \times \ Cot.C \\ AC = AB \times Cosec.C \\ AB = BC \times \ Cot.A \\ AC = BC \times Cosec.A \end{matrix}\right\}$$

welke transformatien hare nuttigheid kunnen hebben.

II. Stelling. *Fig.* 234.

§. 588. *In elken regthoekigen driehoek, is de basis gelijk aan de hypothenusa, vermenigvuldigd met de Cosinus van den hoek aan de basis, en de opstaande zijde gelijk aan de hypothe-*

thenusa, vermenigvuldigd met de Sinus van den hoek aan de basis. Dat is:

$$1^\circ\ AB = AC \times Cos.A \quad en \quad 2^\circ\ BC = AC \times Sin.A.$$

Betoog. Laat AD, als de éénheid van de lengte maat, aangenomen, en uit A, met AD, als straal, den cirkelboog DE beschreven worden; dan is DE de maat van den hoek A, en, wanneer men nu, uit D, de loodlijn DF op AB laat vallen, dan is (*V en VI. Bep. VIII. B.*) $DF = Sin.A$, en $AF = Cos.A$, en de regthoekige driehoeken, welke den hoek A gemeen hebben, en daarom (*I. Gev. VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig zijn, geven de evenredigheden:

$$\left\{\begin{array}{l} AD : AF = AC : AB \\ AD : DF = AC : BC \end{array}\right\}, \text{ of } \left\{\begin{array}{l} 1 : Cos.A = AC : AB \\ 1 : Sin.A = AC : BC \end{array}\right\}$$

waaruit (*V. Stell. IV. B.*) volgt: 1°. $AB = AC \times Cos.A$; en 2°. $BC = AC \times Sin.A$.

§. 589. Aanmerking. *Fig.* 235. De vier vergelijkingen, welke in de twee voorgaande stellingen betoogd zijn, kunnen als de gronden der Driehoeksmeting worden aangemerkt, en men moet zich daarom met dezelve gemeenzaam maken. Sommigen drukken de zijden der driehoeken en hare overstaande hoeken, door dezelfde letter, den hoek door de hoofdletter, en de overstaande zijde door de kleine letter uit: wij zullen dit voortaan volgen: de vier betoogde vergelijkingen worden dan, als in het nevenstaande tafeltje, geschreven.

1°	$a = c \times Tang.A$
2°	$b = c \times Sec.A$
of	$b = c : Cos.A$
3°	$c = b \times Cos.A$
4°	$a = b \times Sin.A$

Toepassing der gelegde gronden op de oplossing van de gevallen der Regthoekige Driehoeken.

§. 590. In de regthoekige driehoeken, wordt de regte hoek stilzwijgend als een gegeven aangemerkt, en dan kunnen behalve denzelven gegeven zijn:

1° Éene regthoekszijde met éénen der scherpe hoeken.
2° De hypothenusa met éénen der scherpe hoeken.
3° De twee regthoekszijden.
4° Éene regthoekszijde en de hypothenusa.

§. 591. I. Vraagstuk, voor het eerste geval. *Fig.* 235. *Eene regthoekszijde met éénen der scherpe hoeken gegeven zijnde, de andere regthoekszijde, benevens de hypothenusa, te vinden?*

Op-

Oplossing. Zij gegeven de hoek A, en de regthoekszijde $c = AB$; dan zal *I. Stelling:*

$$1^\circ.\ C = 90^\circ - A;\quad 2^\circ.\ a = c \times Tang.\,A;\quad 3^\circ.\ b = \frac{c}{Cos.\,A}\ \text{zijn.}$$

Of, daar men in Logarithmen werkt,

$$Log.\,a = Log.\,c + Log.\,Tang.\,A \quad \ldots\ldots \quad (M)$$
$$Log.\,b = Log.\,c - Log.\,Cos.\,A \quad \ldots\ldots \quad (N)$$

I. Voorbeeld. *Zij gegeven hoek* $A = 63^\circ\ 28'\ 17'',3$ *en* $AB = c = 173^m,74$: *men vraagt, hoek* C, *de regthoekszijde* $BC = a$, *en de hypothenuse* $AC = b$ *te vinden?*

Berekening. 1°. hoek $C = 90^\circ - A = 90^\circ - 63^\circ\ 28'\ 17'',3 = 26^\circ\ 31'\ 42'',7$

2° *Berekening van a.*	3° *Berekening van b.*
$Log.\,c = 2,2398998$	$Log.\,c = 2,2398998$
$Log.\,Tang.\,A = 0,3017225$	$Log.\,Cos.\,A = 9,6499609$
$Log.\,a = 2,5416223$	$Log.\,b = 2,5899389$
$a = 348^m,0345$	$b = 388^m,9904$

II. Voorbeeld. *Fig.* 236. *Om de hoogte van eenen Toren* CF, *boven den grond* CAB, *die men onderstelt waterpas gelegen te zijn, te meten, is men, van het muurwerk, uit het punt* A, *achterwaards gegaan, tot in* B, *op eenen afstand van* 117 *meters, en men heeft, op eenen voet* BD, *die de hoogte van* $1^m,5$ *heeft, eenen graphometer gesteld, met welken men den hoek* EDF *gemeten en bevonden heeft gelijk te zijn aan* $43^\circ\ 17'\ 30''$, [*de lijn* DE *wordt ondersteld evenwijdig aan* AB *te zijn,*] *indien nu de lijn* $CA = 5$ *meters is, vraagt men de hoogte van den Toren* CF *te vinden?*

Berekening. Omdat de toren stilzwijgend ondersteld wordt, loodregt op den grond te staan, is de hoek C, en dus ook de hoek E regt, en men heeft $EF = DE \times Tang.\,D$; nu is $DE = BC = AB + AC = 117 + 5 = 122$ meters: in Logarithmen is dan $Log.\,EF = Log.\,DE + Log.\,Tang.\,D$: derhalve

$$Log.\,DE = Log.\,122 = 2,0863598$$
$$Log.\,Tang.\,D = Log.\,Tang.\,43^\circ\ 17'\ 20'' = 9,9740868$$
$$Log.\,DE = 2,0604466$$
$$\text{derhalve } DE = 114^m,9335$$
$$\text{tel bij } CE = BD = 1^m,5$$
$$\text{komt, voor de hoogte des Torens, } CF = 116^m,4335$$

III. Voor-

III. Voorbeeld. *Fig.* 237. *Wetende, dat de voorwerpen A en B eenen afstand van 623 meters hebben; wanneer men zich dan, van het voorwerp B, in eene lijn BC, welke loodregt op AB staat, verwijdert, tot dat men, in C, de voorwerpen A en B, onder eenen hoek van $48^\circ\ 37'\ 40''$ ziet, vraagt men: hoe verre men, in dat punt C, van de voorwerpen A en B verwijderd is?*

Berekening. In deze vraag is, in den regthoekigen driehoek ABC, de zijde AB, benevens de overstaande hoek C, bekend, en nu is $BC = AB \times Cot.\,C$, en $AC = AB \times Cosec.\,C = AB : Sin.\,C$.

Berekening van BC.	Berekening van AC.
$Log.\,AB = 2,7944880$	$Log.\,AB = 2,7944880$
$Log.\,Cot.\,C = 9,9448563$	$Log.\,Sin.\,C = 9,8753111$
$Log.\,BC = 2,7393443$	$Log.\,AC = 2,9191769$
$BC = 548^m,712$	$AC = 830^m,189$

§. 592. II. Vraagstuk, voor het tweede geval. *Fig.* 235. *De hypothenusa met éénen der scherpe hoeken gegeven zijnde, begeert men den anderen scherpen hoek, benevens de twee regthoekszijden, te vinden?*

Oplossing. Zij gegeven $AC = b$ en hoek A: dan is (*II. Stelling*) $C = 90^\circ - A$; $a = b \times Sin.\,A$; $c = b \times Cos.\,A$; of, in Logarithmen:

$$Log.\,a = Log.\,b + Log.\,Sin.\,A \quad \ldots\ldots \quad (P)$$
$$Log.\,c = Log.\,b + Log.\,Cos.\,A \quad \ldots\ldots \quad (Q)$$

I. Voorbeeld. *Fig.* 235. *Gegeven zijnde $AC = b = 786^m,73$ en hoek $A = 53^\circ\ 17'\ 52'',83$, de zijden $AB = c$, $BC = a$ te berekenen?*

Berekening. 1° $C = 90^\circ - A = 90^\circ - 53^\circ\ 17'\ 52'',83 = \ldots$ $36^\circ\ 42'\ 7'',17$.

2° Berekening van c.	3° Berekening van a.
$Log.\,b = 2,8958257$	$Log.\,b = 2,8958257$
$Log.\,Cos.\,A = 9,7764491$	$Log.\,Sin.\,A = 9,9040406$
$Log.\,c = 2,6722748$	$Log.\,a = 2,7998663$
$c = 470^m,1915$	$a = 630^m,7631$

II. Voorbeeld. *Fig.* 237. *Uit een punt A, alwaar twee lijnen AB en AP, elkander regthoekig doorsnijden, verwijdert men zich, in eene regte lijn AC, op eenen afstand van 1087 meters, van het punt A, in eene rigting, welke met AB eenen hoek van $55^\circ\ 38'$ maakt.*

Men

Men vraagt, hoe verre men, in het punt C, van de lijnen AB en AP verwijderd is?

Berekening. Om aan het vereischte der vraag te voldoen, moet men de loodlijnen CB en CP vinden, dat is, omdat (*I. Stell. III. B.*) $AB = CP$ is, men moet den regthoekigen driehoek ABC oplossen, in welken $AB = AC \times Cos. A$, en $BC = AC \times Sin. A$ is.

1° *Berekening van BC.*	2° *Berekening van AB.*
$Log. AC = 3,0362295$	$Log. AC = 3,0362295$
$Log. Sin. A = 9,9166866$	$Log. Cos. A = 9,7516538$
$Log. BC = 2,9529161$	$Log. AB = 2,7878833$
$BC = 897^m,255$	$AB = 613^m,597$

§. 593. III. Vraagstuk, voor het derde geval. Fig. 235. *De twee regthoekszijden $AB = c$ en $BC = a$ gegeven zijnde, de scherpe hoeken A en C, benevens de hypothenusa te vinden?*

Oplossing. Volgens de *I. Stelling*, is $a = c \times Tang. A$, en $c = a \times Tang. C$: door deze vergelijkingen kunnen de hoeken A en C gevonden worden: want, $Tang. A = \frac{a}{c}$, en $Tang. C = \frac{c}{a}$ zijnde, *zal de Tangens van éénen der scherpe hoeken gevonden worden, wanneer men de zijde over dien scherpen hoek, door de andere regthoekszijde deelt:* doch het is genoeg, om éénen der hoeken te berekenen, omdat, wanneer één der hoeken, bij voorbeeld, A bekend is, de andere scherpe hoek C, door de vergelijking $C = 90° - A$ gevonden wordt. Wanneer men nu de scherpe hoeken A en C, door berekening, verkregen heeft; dan zal de schuinsche zijde b gevonden worden, door de vergelijking $b = c : Cos. A = a : Cos. C$. In Logarithmen is nu

$$Log. Tang. A = Log. a - Log. c;\; Log. Tang. C = Log. c - Log. a \quad (R)$$
$$Log. b = Log. c - Log. Cos. A;\; Log. b = Log. a - Log. Cos. C \quad (S)$$

Voorbeeld. *Gegeven zijnde $AB = c = 237^m$ en $BC = a = 289^m$, men vraagt de hoeken A en C, en de hypothenusa AC te berekenen.*

1° *Berekening van hoek A.*	2° *Berekening van hoek C.*
$Log. a = 2,4608978$	$Log. c = 2,3747483$
$Log. c = 2,3747483$	$Log. a = 2,4608978$
$Log. Tang. A = 0,0861495$	$Log. Tang. C = 9,9138505$
$A = 50°38'45'',15$	$C = 39°21'14'',85$

Ten proeve van de juistheid dezer berekening, maakt de som der ge-

gevondene hoeken A en C volkomen 90°. Nu moet nog de zijde b berekend worden: dit kan geschieden

1° *Door den hoek A.*	2° *Door den hoek C.*
$Log. c = 2,3747483$	$Log. a = 2,4608978$
$Log. Cos. A = 9,8021657$	$Log. Cos. C = 9,8883152$
$Log. b = 2,5725826$	$Log. b = 2,5725826$
$b = 373^m,7512$	$b = 373^m,7512$

en beide berekeningen geven dezelfde uitkomst, welke men ook door het Theorema van PYTHAGORAS verkrijgen zal; want $b = \sqrt{(a^2 + c^2)}$

$$= \sqrt{(289^2 + 237^2)} = \sqrt{\left\{83521 + 56169\right\}} = \sqrt{139690} = \ldots$$

373,7512, hetgeen, tot in het laatste cijfer, met de voorgaande berekening, overëénkomt.

§. 594. IV. VRAAGSTUK, VOOR HET VIERDE GEVAL. *Fig.* 235. *De hypothenusa, met ééne der regthoekszijden gegeven zijnde, de scherpe hoeken, benevens de andere regthoekszijde, te vinden?*

OPLOSSING. Laten b en c gegeven zijn; dan is (*Aanm. I. Stell.*) $c = b \times Cos. A$, en derhalve $Cos. A = c : b$. Door deze vergelijking wordt dan de hoek A bekend, terwijl de zijde a, door de vergelijking $a = c \times Tang. A$, zal gevonden worden.

VOORBEELD. *Fig.* 235. *Zij* $b = 816^m$ *en* $c = 639^m,5$: *men vraagt de hoeken A en C en de zijde a te vinden?*

1° *Berekening van den hoek A.*	2° *Berekening van de zijde a.*
$Log. c = 2,8058405$	$Log. c = 2,8058408$
$Log. b = 2,9116902$	$Log. Tang. A = 9,8990381$
$Log. Cos. A = 9,8941503$	$Log. a = 2,7048789$
$A = 38^\circ 23' 57'',54$	$a = 506^m,894$
$C = 51^\circ 36' 2'',46$	

Men zal, door de vergelijking $a = \sqrt{(b^2 - c^2)}$, dezelfde waarde voor a vinden.

§. 595. AANMERKING. Het blijkt, uit de oplossing der straks opgetelde gevallen, dat men, in de oplossing van elken regthoekigen driehoek, denzelven met eenen anderen gelijkvormigen driehoek vergelijkt, van welken, of ééne regthoekszijde, die men als basis aanmerkt, of de hypothenusa aan de éénheid der lengte maat gelijk gesteld wordt: de zijden van dien aangenomen driehoek worden, onder deze bepaling, in de gewone Sinus-Tafel gevonden, of kunnen, door eene ligte in-

interpolatie, uit dezelve gehaald worden; want, is de basis gelijk aan de éénheid; dan zijn de opstaande zijde en de hypothenusa de Tangens en Secans van den hoek aan de basis, en neemt men de hypothenusa voor de éénheid, dan zijn de basis en de opstaande zijde de Cosinus en de Sinus van den hoek aan de basis; dewijl nu de goniometrische lijnen van alle hoeken van 0° tot 90° in de Sinus-Tafel gevonden worden, vindt men ook in dezelve alle regthoekige driehoeken, waarvan de basis of de hypothenusa gelijk één is, en welker hoeken aan de basis, van tien tot tien secunden, opklimmen. Om deze reden kan men de Sinus-Tafel, behalve dat zij een telkunstige hoekmeter is, als eene in voorraad berekende tafel van alle mogelijke regthoekige driehoeken aanmerken, welker zijden met het getal, dat de verhouding van de éénheid op de zijde van eenen gegevenen regthoekigen driehoek uitdrukt, moet vermenigvuldigd worden, om de waarden der onbekende zijden, in éénheden van diezelfde lengte maat, te verkrijgen, en de oplossing van eenen regthoekigen driehoek bestaat dan slechts in de handelwijze, om uit den gelijkvormigen driehoek, die in de tafel voorkomt, den gegevenen afteleiden.

§. 596. Bijvoegsel. *Fig.* 235. Alhoewel de vier vergelijkingen, welke in de twee voorgaande stellingen betoogd zijn, tot de oplossing van alle gevallen toereikend zijn, kan men, om de onbekende hoeken van eenen gegevenen regthoekigen driehoek te vinden, uit de reeds betoogde vergelijkingen, nog andere afleiden, welke, of ter bevestiging van eene reeds verkregene uitkomst kunnen strekken, of, in sommige gevallen, voordeeliger dan de gewone regels zijn.

§. 597. Wij hebben vooreerst (*II. Stell.*) de evenredigheid $1 : Sin. C = b : c$; dat is, omdat $Sin. C = Cos. A$ is, $1 : Cos. A = b : c$. Uit deze evenredigheid volgt (*VIII en VI. Stell. II. B.*)

$$2b : b - c = 2 : 1 - Cos. A$$
$$2b : b + c = 2 : 1 + Cos. A$$

maar nu is (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $1 - Cos. A = 2\, Sin^2. \tfrac{1}{2} A$, en $1 + Cos. A = 2\, Cos^2. \tfrac{1}{2} A$: en daarom zal

$$2b : b - c = 2 : 2\, Sin^2. \tfrac{1}{2} A$$
$$2b : b + c = 2 : 2\, Cos^2. \tfrac{1}{2} A$$

zijn, waaruit volgt: dat

$$Sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left\{\frac{b-c}{2b}\right\}}; \; Cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left\{\frac{b+c}{2b}\right\}} \; . \; . \; . \; . \; . \; ,$$

$$\text{en } Tang. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left\{\frac{b-c}{b+c}\right\}}$$

zal

zal zijn. Om dezelfde reden, zal

$$Sin. \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\left\{\frac{b-a}{2b}\right\}}; \quad Cos. \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\left\{\frac{b+a}{2b}\right\}} \quad . \ . \ . \ .$$

en $Tang. \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\left\{\frac{b-a}{b+a}\right\}}$

zijn, en men zal, door éene dezer formulen, de helft van éenen der scherpe hoeken kunnen vinden.

§. 598. Omdat (*II. Stell.*) $1 : Sin. A = b : a$ en $1 : Sin. C = b : c$ is, zal (*XI. St. II. B.*) $Sin. A : Sin. C = a : c$ zijn, en $Sin^2. A : Sin^2. C = a^2 : c^2$ en (*VIII. Stell. II. B.*) $Sin^2. A - Sin^2. C : a^2 - c^2 = Sin^2. A : a^2 = 1 : b^2$; derhalve $Sin^2. A - Sin^2. C = \frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{(a+c)(a-c)}{b^2}$; maar nu is (*XII. Stell. VIII. B.*) $Sin^2. A - Sin^2. C = Sin. (A - C)$, in de onderstelling namelijk, dat $A + C = 90°$ is; men heeft dan eindelijk, $Sin. (A - C) = \frac{(a+c)(a-c)}{b^2}$.

§. 599. Wanneer men het vierkant van de laatste vergelijking van $1 = 1$ aftrekt; dan vindt men $Cos. (A - C) = \frac{2ac}{b^2}$, en, omdat de Sinus, gedeeld door de Cosinus, de Tangens geeft, zal men vinden, $Tang. (A - C) = \frac{(a+c)(a-c)}{2ac}$, *welke vergelijking zeer geschikt is, om de scherpe hoeken te vinden, wanneer de regthoekszijden gegeven zijn; want, wanneer het verschil $A - C$ der scherpe hoeken gevonden is; dan kent men de som en het verschil der onbekende hoeken, en de grootste hoek is dan gelijk $45° + \tfrac{1}{2}(A - C)$, en de kleinste hoek gelijk $45° - \tfrac{1}{2}(A - C)$.*

§. 600. Omdat elke scherpe hoek eens regthoekigen driehoeks het complement van den anderen is, is $Sin. A = Cos. C$, en $Cos. A = Sin. C$. Nu is volgens de *II. Stell.*

$$a = b \times Sin. A = b \times Cos. C; \text{ en } c = b \times Cos. A = b \times Sin. C$$

het product dezer vergelijkingen geeft, omdat, in het algemeen, (*IV. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $Sin. 2p = 2 Sin. p \times Cos. p$ is,

$$2ac = b^2 \times Sin. 2A = b^2 \times Sin. 2C$$

waaruit, omdat $b^2 = a^2 + c^2$ is, onmiddelijk volgt: dat

$$Sin. 2A = Sin. 2C = \frac{2ac}{b^2} = \frac{2ac}{a^2 + c^2}$$

is, welke vergelijking ons leert: *dat, in elken regthoekigen driehoek,* *de Sinusſen van het dubbeld der ſcherpe hoeken gelijk zijn*, eene waarheid, welke, omdat $A + C = 90^\circ$, en derhalve $2A + 2C = 180^\circ$ is, bevestigd wordt, door het beginſel, hetwelk leert: *dat een boog en zijn ſupplement dezelfde Sinus hebben.*

§. 601. Men kan nu ook gemakkelijk de Coſinus van het dubbeld der ſcherpe hoeken vinden. Volgens *V. Gev. III. Stell. VIII. B.*, is

$$Cos. 2A = 1 - 2 Sin^2. A = 1 - \frac{2a^2}{b^2} = \frac{b^2 - 2a^2}{b^2} = \frac{c^2 + a^2 - 2a^2}{b^2}$$

$= \frac{c^2 - a^2}{b^2}$; of $Cos. 2A = \frac{(c+a)(c-a)}{b^2}$; *en deze Coſinus is poſitief of negatief, naar dat c grooter of kleiner dan a is; of, naar dat de hoek A minder of meer dan eenen halven regten hoek bedraagt.*

§. 602. Deelt men eindelijk de waarde van $Sin. 2A$ door die van $Cos. 2A$; dan vindt men (*II. Stell. VIII. B.*) $Tang. 2A = \ldots\ldots$

$\frac{2ac}{(c+a).(c-a)}$; *en deze Tangens is poſitief of negatief, naar dat a kleiner of grooter dan c is.*

§. 603. Men zal met behulp van de vergelijking $Sin. 4A = \ldots$ $2 Sin. 2A \times Cos. 2A$, uit de voorgaande vergelijkingen, vinden:

$$Sin. 4A = \frac{4ac}{b^2} \times \frac{(a+c).(a-c)}{b^2} = \frac{4ac(a+c)(a-c)}{b^4}$$

welke Sinus poſitief of negatief zal zijn, naar dat $a >$ *of* $< c$ *is.*

§. 604. Aanmerking. De Sinusſen van hoeken, welke zeer na aan 90° komen, hebben kleine verſchillen, en dit maakt, dat men, wanneer een hoek door zijne Sinus moet gevonden worden, in zeer fijne berekeningen, op geene groote juistheid kan ſtaat maken. Hetzelfde geldt van de Coſinusſen van kleine bogen. Insgelijks nemen de Tangenten van bogen, tusſchen de 84° en 90°, en de Cotangenten, tusſchen 0° en 6° niet gelijkmatig genoeg toe, om, door de evenredige deelen, de hoeken, in die gevallen, tot in de tiende deelen der ſecunden, te verkrijgen. Om in fijne berekeningen dit inconvenient voort te komen, gebruikt men, ter bepaling van die hoeken, ſoortgelijke formulen, als boven gevonden zijn, waar bij de helften of tweevouden van de hoeken gevonden worden. Zie verder de Werkdadige Meetkunst.

Beſchouwing van de Scheefhoekige Driehoeken.

§. 605. De eigenſchappen der regthoekige driehoeken, welke in de twee eerſte ſtellingen betoogd zijn, zijn de grond-

grondſlagen van die der ſcheefhoekige, tot welker beſchouwing wij thans overgaan.

III. STELLING. *Fig.* 238 *en* 239.

§. 606. *In alle driehoeken, ſtaan de zijden tot elkander, in dezelfde reden, als de Sinusſen der overſtaande hoeken. Dat is:*

$$(AB,\ BC,\ AC) :: (Sin.\ C,\ Sin.\ A,\ Sin.\ B)$$

BETOOG. Onder de betoogen, welke van deze merkwaardige hoofdeigenſchap der driehoeken voorhanden zijn, ſtaat het volgende in een meer onmiddelijk verband met de reeds betoogde eigenſchappen des regthoekigen driehoeks. Laat, uit het hoekpunt van den hoek C, de lijn CD op de overſtaande zijde AB vallen; dan ontſtaan 'er in de figuur twee regthoekige driehoeken, ADC en BDC, in den eerſten van welken (*II. Stell.*) $CD = AC \times Sin.\ A$, en, in den anderen, $CD = BC \times Sin.\ B$ is; derhalve (*IV. Ax.*) zal $AC \times Sin.\ A = BC \times Sin.\ B$, en (*VI. Stell. IV. B. of V. Stell. II. B.*) $AC : BC = Sin.\ B : Sin.\ A$ zijn.

Deze evenredigheid ondergaat nu geene verandering, wanneer, gelijk in *Fig.* 239. een hoek ABC ſtomp is; want, omdat (*I. Stell. VIII. B.*) de Sinus van eenen hoek gelijk is aan de Sinus van zijn ſupplement, zoowel, in de getallen waarde, als ten aanzien van het teeken, zal men voor $Sin.\ CBD$ mogen ſtellen $Sin.\ ABC$, en de evenredigheid $AC : BC = Sin.\ B : Sin.\ A$ zal derhalve voor den ſtomphoekigen driehoek, zoowel als voor den ſcherphoekigen, gelden.

Op dezelfde wijze zal volgen: dat $AB : AC = Sin.\ C : Sin.\ B$ en $AB : BC = Sin.\ C : Sin.\ A$ is, en men heeft derhalve, in het algemeen, $(AB,\ BC,\ AC) :: (Sin.\ C,\ Sin.\ A,\ Sin.\ B)$.

§. 607. GEVOLG. Indien de hoek $B = 90°$ is; dan is $Sin.\ B = 1$, en men heeft $AC : BC = 1 : Sin.\ A$ of $BC = AC \times Sin.\ A$, hetgeen met de tweede ſtelling overëënſtemt.

§. 608. AANMERKING. *Fig.* 240. Wij zullen, in het vervolg, de zijden en hoeken van eenen driehoek, op dezelfde wijze, als in Aanmerking op de *II. Stelling*, gezegd is, uitdrukken. Wij hebben dan, volgens het betoogde, $(a,\ b,\ c,) :: (Sin.\ A,\ Sin.\ B,\ Sin.\ C)$.

IV. STELLING. *Fig.* 240.

§. 609. *In elken driehoek, ſtaat de ſom van twee zijden tot* der-

derzelver verschil, gelijk de Cotangens van de helft van den ingesloten hoek tot de Tangens van het halve verschil der twee andere hoeken, welke over die twee zijden staan. Dat is:

$$a + b : a - b = Cot. \tfrac{1}{2} C : Tang. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

Betoog. Volgens de *III. Stelling*, is $a : b = Sin. A : Sin. B$, uit welke evenredigheid (*VIII en VII. Stell. II. B.*) volgt:

$$a + b : a - b = Sin. A + Sin. B : Sin. A - Sin. B$$

maar nu is (*VII. Stell. VIII. B.*)

$$Sin. A + Sin. B : Sin. A - Sin. B = Tang. \tfrac{1}{2} (A + B) : Tang. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

derhalve zal (*I. Stell. II. B.*)

$$a + b : a - b = Tang. \tfrac{1}{2} (A + B) : Tang. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

zijn. Maar nu is (*XVIII. Stell. I. B.*) $A + B + C = 180^\circ$; derhalve $\tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} C = 90^\circ$ en $\tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B$ of $\tfrac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2} C$; derhalve $Tang. \tfrac{1}{2} (A + B) = Tang. (90^\circ - \tfrac{1}{2} C) = Cot. \tfrac{1}{2} C$, en de laatste evenredigheid verandert gevolgelijk in:

$$a + b : a - b = Cot. \tfrac{1}{2} C : Tang. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

§. 610. Leering. Men leert, uit den loop van dit betoog: dat, in plaats van de betoogde evenredigheid, kan geschreven worden:

$$a + b : a - b = Tang. (90^\circ - \tfrac{1}{2} C) : Tang. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

V. Stelling. *Fig.* 240.

§. 611. *Wanneer men twee zijden a en b, met den ingesloten hoek C, van eenen driehoek als bekend aanmerkt; dan is de Tangens van eenen der onbekende hoeken gelijk aan de zijde, welke tegen over dien hoek staat, vermenigvuldigd met de Sinus van den bekenden hoek, gedeeld door het verschil van de bekende zijde, aan dien onbekenden hoek gelegen, verminderd met het product van de zijde, over den onbekenden hoek, met de Cosinus van den bekenden hoek. Dat is:*

$$Tang. B = \frac{b \times Sin. C}{a - b \times Cos. C}, \text{ en } Tang. A = \frac{a \times Sin. C}{b - a \times Cos. C}$$

Betoog. Men late, uit het hoekpunt van den hoek A, de loodlijn AD op de overstaande zijde BC vallen; dan is (*II. Stell.*) $AD = b \times Sin. C$; $CD = b \times Cos. C$, en $BD = CB - CD = a - b \times Cos. C$. Wanneer de hoek C stomp is, en de loodlijn buiten den driehoek valt; dan zal $BD = BC + CD$ zijn; maar, omdat de Cosinus van C, in dit geval, negatief wordt; zal BD nog gelijk aan $a - b \times Cos. C$ blij-

yen,

ven, mits men de Cosinus, zoo als het behoort, negatief neme. Eindelijk is, in den regthoekigen driehoek *ABD*, (*I. Stell.*) $AD = BD \times Tang.\,B = (a - b\,Cos.\,C) \times Tang.\,B = b \times Sin.\,C$, waaruit volgt:

$$Tang.\,B = \frac{b \times Sin.\,C}{a - b \times Cos.\,C}$$

§. 612. I. Gevolg. Omdat de Cotangens van eenen boog gelijk is aan de éénheid, gedeeld door de Tangens, zal men de betoogde vergelijking tot de volgende kunnen herleiden.

$$Cot.\,B = \frac{a - b \times Cos.\,C}{b \times Sin.\,C} = \frac{a}{b} \times Cosec.\,C - Cot.\,C.$$

§. 613. II. Gevolg. Stelt men, in deze laatste, (zie *III. Gev. IX. Stell. VIII. B.*) $2\,Cosec.\,C = Cot.\,\tfrac{1}{2}C + Tang.\,\tfrac{1}{2}C$ en $2\,Cot.\,C = Cot.\,\tfrac{1}{2}C - Tang.\,\tfrac{1}{2}C$, dan verkrijgt men:

$$Cot.\,B = \frac{a}{2b} \times (Cot.\,\tfrac{1}{2}C + Tang.\,\tfrac{1}{2}C) - \frac{b}{2b} \times (Cot.\,\tfrac{1}{2}C - Tang.\,\tfrac{1}{2}C)$$

welke, wanneer men de termen, die $Cot.\,\tfrac{1}{2}C$ en $Tang.\,\tfrac{1}{2}C$ tot factoren hebben, vereënigt, in de volgende verandert:

$$Cot.\,B = \left(\frac{a+b}{2b}\right) \times Tang.\,\tfrac{1}{2}C + \left(\frac{a-b}{2b}\right) \times Cot.\,\tfrac{1}{2}C.$$

VI. Stelling. *Fig.* 240.

§. 614. *Elke zijde eens driehoeks is gelijk aan de som der producten van de twee andere zijden, elk vermenigvuldigd met de Cosinus van den hoek, welke die zijde met de eerstgenomene zijde maakt. Dat is:*

$$a = b \times Cos.\,C + c \times Cos.\,B.$$

Betoog. Men late, uit het hoekpunt *A* van den hoek *A*, de loodlijn *AD* op de zijde *BC* vallen; dan is (*II. Stell.*) $CD = b \times Cos.\,C$, en $BD = C \times Cos.\,B$, en de som dezer vergelijkingen geeft: $BC = CD + BD = b \times Cos.\,C + c \times Cos.\,B$. Wanneer nu één der hoeken, bij voorbeeld, de hoek *C* stomp is; dan zal de loodlijn *CD* buiten den driehoek vallen, en *BC* zal gelijk $BD - CD$ zijn; maar omdat, in dit geval, de Cosinus van den stompen hoek *C* negatief is, zal men voor den stomphoekigen driehoek, zoowel als voor den scherphoekigen, stellen kunnen: $a = b \times Cos.\,C + c \times Cos.\,B$, mits men, in de berekening van deze vergelijking, de Cosinus van eenen

eenen ſtompen hoek negatief neme. Op dezelfde wijze, zal blijken: dat $b = a \times Cos.\, C + c \times Cos.\, A$, en $c = a \times Cos.\, B + b \times Cos.\, A$ is.

VII. Stelling. *Fig.* 240.

§. 615. *Het vierkant van elke zijde eens driehoeks, is gelijk aan de ſom van de vierkanten der twee andere zijden, min tweemaal het product dezer zijden, vermenigvuldigd met de Coſinus van den ingeſloten hoek. Dat is:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times Cos.\, C.$$

Betoog. Aannemende, dat de driehoek ſcherphoekig zij, indien men dan, uit A, de loodlijn AD op BC laat vallen; dan zal (*XVIII. Stell. III. B.*)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\, BC \times CD$$

zijn: maar (*II. Stell.*) $CD = AC \times Cos.\, C$ zijnde, zal, wanneer men deze waarde van CD, in de voorgaande vergelijking, overbrengt,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\, AC \times BC \times Cos.\, C$$

zijn, of, in de aangenomene notatie,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times Cos.\, C$$

Wanneer de hoek C ſtomp is; dan wordt zijne Coſinus negatief, en de term $-2ab \times Cos.\, C$ verkrijgt dan het poſitieve teeken, zoodat, in dit geval, eigenlijk $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \times Cos.\, C$ is, hetwelk dan ook, met het betoogde, in de *XIX. Stell. III. B.*, overëënkomt: maar men houdt, tot eenen beſtendigen regel, in alle berekeningen, onder het oog, de teekens der termen eener betoogde vergelijking altijd in het algemeen te laten, zoo als zij, in eene betoogde ſtelling, of, in de uitkomst eener oploſſing, voorkomen, en geeft, in de dadelijke berekening, naauwkeurig acht, welke termen, uit hoofde der poſitieve of negatieve waarden, welke één of meer factoren verkrijgen, volgens de gewone ſtelkundige regels voor de teekens der uitdrukkingen, van teeken moeten veranderen.

VIII. Stelling.

§. 616. *Het vierkant van de Sinus van de helft van den hoek eens driehoeks is gelijk aan het quotient, dat men verkrijgt, wanneer men de halve ſom der zijden met elk der zijden, om dezen hoek ſtaande, verminderd, en het product dezer*

ver-

verschillen door het product der zijden, welke om dezen zelfden hoek staan, deelt. Dat is, indien $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ *gesteld wordt, dan is:*

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{(s-b)\times(s-c)}{bc}$$

Betoog. Volgens de voorgaande stelling, is

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times Cos.A$$

zondert men uit deze vergelijking $Cos.A$ af; dan zal

$$Cos.A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

zijn, en dan mag men ook stellen:

$$1 - Cos.A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc}$$

maar nu is (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $1 - Cos.A = 2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}A$ derhalve zal

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}$$

moeten zijn: maar, $a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c) \times (a-b+c)$ zijnde, zal

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{\frac{1}{2}(a+b-c) \times \frac{1}{2}(a-b+c)}{bc}$$

zijn, en stellen wij nu: $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = s$; dan zal $\frac{1}{2}(a+b-c) = s-c$ en $\frac{1}{2}(a-b+c) = s-b$ zijn, en wij verkrijgen alzoo de vergelijking:

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{(s-b)\times(s-c)}{bc}$$

welke betoogd moest worden.

§. 617. I. Gevolg. Omdat $Cos^2.\tfrac{1}{2}A = 1 - Sin^2.\tfrac{1}{2}A$ is, zal

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}A = 1 - Sin^2.\tfrac{1}{2}A = 1 - \frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{bc-(s-b).(s-c)}{bc}$$

zijn, of, na behoorlijke ontwikkeling,

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{bc - s^2 + bs + cs - bc}{bc} = \frac{(b+c)s - s^2}{bc} = \frac{(b+c-s)s}{bc}$$

maar nu is: $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = s$; derhalve $b + c - s = s - a$, en wij hebben alzoo

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{s.(s-a)}{bc}$$

§. 618. II. Gevolg. En deelt men nu de waarde van $Sin^2.\tfrac{1}{2}A$, door die van $Cos^2.\tfrac{1}{2}A$; dan zal (*II. Stel. VIII. B.*)

$$Tang^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{(s-b).(s-c)}{s.(s-a)}$$

§. 619. III. Gevolg. Wij hebben derhalve,

$$Sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\ Cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\ \ldots\ldots$$

en $$Tang.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b).(s-c)}{s.(s-a)}}.$$

IX. Stelling. *Fig.* 240.

§. 620. *De inhoud van eenen driehoek is gelijk aan de helft van het product van twee zijner zijden, vermenigvuldigt met de Sinus van den ingesloten hoek. Dat is, wanneer de inhoud door I wordt uitgedrukt; dan is* $I = \tfrac{1}{2}ab \times Sin.C.$

Betoog. Want, volgens *Gev. VIII. Stell. III. B.*, is $I = \tfrac{1}{2}BC \times AD$; maar (*II. Stell.*) $AD = AC \times Sin.C$; derhalve zal $I = \tfrac{1}{2}BC \times AC \times Sin.C = \tfrac{1}{2}ab \times Sin.C$ zijn. Om dezelfde reden, is $I = \tfrac{1}{2}bc \times Sin.A = \tfrac{1}{2}ac \times Sin.B$.

§. 621. I. Gevolg. *Fig.* 238. Wanneer men uit het toppunt C, van eenen driehoek eene lijn CD, tot aan de basis trekt; dan is *Inh. drieh.* $ACD = \tfrac{1}{2}AD \times CD \times Sin.ADC$, en *Inh. drieh.* $BCD = \tfrac{1}{2}BD \times CD \times Sin.BDC$; omdat nu $Sin.ADC = Sin.BDC$ is, zal $I = \tfrac{1}{2}AB \times CD \times Sin.ADC$ zijn.

§. 622. Gevolg. *Fig.* 241. Hieruit volgt ook: dat de inhoud van den vierhoek $ABCD = \tfrac{1}{2}AC \times BD \times Sin.E$ is. Dat is: *men zal den inhoud van eenen vierhoek vinden, wanneer men den halven regthoek der hoekpuntslijnen met de Sinus van den hoek, onder welke zij elkander doorsnijden, vermenigvuldigt.*

§. 623. III. Gevolg. *Fig.* 240. Wanneer men in de vergelijking, $I = \tfrac{1}{2}ab \times Sin.C$, in plaats van $Sin.C$, schrijft $2\,Sin.\tfrac{1}{2}C \times Cos.\tfrac{1}{2}C$, en voor $Sin.\tfrac{1}{2}C$ en $Cos.\tfrac{1}{2}C$ de waarden stelt, welke, in het *III. Gev. VIII. Stell.* voorkomen, dan verkrijgt men:

$$I = \sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]}$$

welke uitkomst, in het *Bijv. op de XVIII en XIX. Stell. III. B.*, uit andere beginselen is afgeleid.

§. 624. IV. Gevolg. Wanneer men de vergelijking $I = \tfrac{1}{2}ab \times Sin.C$ eerst met c vermenigvuldigd, en daarna door $I \times Sin.C$ deelt; dan zal men verkrijgen: $\frac{c}{Sin.C} = \frac{abc}{2I}$, eene vergelijking, welke de de ſtandvastige betrekking van de zijde eens driehoeks, tot de Sinus van zijnen overſtaanden hoek, leert kennen.

X. STELLING. *Fig.* 240.

§. 625. *De inhoud van eenen driehoek, is gelijk aan de helft van het vierkant van de baſis, vermenigvuldigd met het product van de Sinusſen van de hoeken aan de baſis, gedeeld door de Sinus van de ſom dezer zelfde hoeken. Dat is:*

$$I = \tfrac{1}{2} c^2 \times \frac{Sin.\,A \times Sin.\,B}{Sin.\,(A+B)}$$

BETOOG. Volgens de *IX. Stelling*, is $I = \tfrac{1}{2} bc \times Sin.\,A$, en (*III. Stell.*) $Sin.\,C : Sin.\,B = c : b$; of, omdat C het ſupplement van $A+B$ is, $Sin.\,(A+B) : Sin.\,B = c : b$: derhalve is $b = \frac{c\,Sin.\,B}{Sin.\,(A+B)}$, ſtelt men nu deze waarde in de vergelijking $I = \tfrac{1}{2} bc \times Sin.\,A$; dan verkrijgt men: $I = \tfrac{1}{2} c^2 \times \frac{Sin.\,A \times Sin.\,B}{Sin.\,(A+B)}$.

§. 626. AANMERKING. Door de vergelijkingen, welke in deze en de voorgaande ſtelling betoogd zijn, kan men den inhoud van eenen driehoek, of, uit twee zijden en den ingeſloten hoek, of, uit eene zijde en de hoeken, of, uit de drie zijden, berekenen.

BIJVOEGSEL.

§. 627. Volgens de *VI. Stelling*, heeft men de drie volgende vergelijkingen:

$$a - b\,Cos.\,C - c\,Cos.\,B = 0$$
$$b - a\,Cos.\,C - c\,Cos.\,A = 0$$
$$c - b\,Cos.\,A - a\,Cos.\,B = 0$$

in welke al de zijden en de hoeken des driehoeks voorkomen.

§. 628. 1° Nemen wij, dat de hoeken A, B en C, en bijgevolg ook derzelver Coſinusſen bekend zijn, en dat men de zijden begere te vinden: dan zal men deze vergelijkingen, als naar gewoonte, moeten oploſſen: en men zal hebben:

$$c = \frac{a - b\,Cos.\,C}{Cos.\,B}; \quad c = \frac{b - a\,Cos.\,C}{Cos.\,A}; \quad c = b\,Cos.\,A + a\,Cos.\,B$$

deze

deze waarden van c, twee aan twee, vergelijkende, zal men vinden:

$$b = a \times \frac{Cos.\,A + Cos.\,B \times Cos.\,C}{Cos.\,B + Cos.\,A \times Cos.\,C};\quad b = a \times \frac{Cos.\,C + Cos.\,A \times Cos.\,B}{1 - Cos^2.\,A}$$

en vergelijkt men nu deze twee waarden van b met elkander, dan verdwijnt de grootheid a uit dezelve, en men verkrijgt:

$$\frac{Cos.\,A + Cos.\,B \times Cos.\,C}{Cos.\,B + Cos.\,A \times Cos.\,C} = \frac{Cos.\,C + Cos.\,A \times Cos.\,B}{1 - Cos^2.\,A}$$

welke vergelijking, na eene ligte herleiding, tot de volgende gebragt wordt:

$$1 - Cos^2.\,A - Cos^2.\,B - Cos^2.\,C - 2\,Cos.\,A \times Cos.\,B \times Cos.\,C = 0$$

ons leerende: dat de hoeken van eenen driehoek, door eene bijzondere vergelijking, van elkander afhankelijk zijn, en daarom geen genoegzame gegevens opleveren, om de zijden te bepalen.

§. 629. 2° Neemt men de drie zijden als bekend aan; dan zal men, door de oplossing der drie vergelijkingen, de Cosinussen der hoeken vinden, te weten:

$$Cos.\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\quad Cos.\,B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};\quad Cos.\,C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

§. 630. 3° Wanneer men eindelijk éénen der hoeken, bij voorbeeld, den hoek B regt stelt; dan wordt $Cos.\,B = 0$, en men zal alsdan, uit de drie gestelde vergelijkingen, al de betoogde eigenschappen des regthoekigen driehoeks wedervinden.

Toepassing der gelegde gronden op de oplossing der Scheefhoekige Driehoeken.

§. 631. In de oplossing der scheefhoekige driehoeken, komen vier gevallen voor.

1° Wanneer ééne zijde en twee hoeken.

2° Wanneer twee zijden met éénen hoek over ééne dezer zijden staande.

3° Wanneer twee zijden met den ingesloten hoek.

4° Wanneer de drie zijden gegeven zijn.

§. 632. V. VRAAGSTUK, VOOR HET EERSTE GEVAL. Fig. 240. *Eene zijde, benevens twee hoeken gegeven zijnde, den derden hoek, benevens de twee andere zijden, te vinden?*

GE-

Oplossing. Laten de zijde a, benevens de hoeken B en C gegeven zijn; dan zal de derde hoek A, als zijnde het supplement van de som der twee bekende hoeken, door de formule $A = 180^\circ - (B + C)$ gevonden, en alzoo als bekend kunnen aangenomen worden. Nu is, volgens de *III. Stelling*,

$$\left\{\begin{array}{l} Sin.\,A : Sin.\,B = a : b \\ Sin.\,A : Sin.\,C = a : c \end{array}\right\}; \text{ derhalve } \left\{\begin{array}{l} b = (a : Sin.\,A) \times Sin.\,B \\ c = (a : Sin.\,A) \times Sin.\,C \end{array}\right\}$$

en hieruit volgen de Logarithmische vergelijkingen:

$$Log.\,a - Log.\,Sin.\,A = \Omega$$
$$Log.\,b = \Omega + Log.\,Sin.\,B$$
$$Log.\,c = \Omega + Log.\,Sin.\,C$$
$$Log.\,b = (Log.\,a - Log.\,Sin.\,A) + Log.\,Sin.\,B$$
$$Log.\,c = (Log.\,a - Log.\,Sin.\,A) + Log.\,Sin.\,C$$

Men trekke derhalve van den Logarithmus der bekende zijde den Logarithmus van de Sinus van den hoek, over die zijde staande, af; men telle bij het verschil de Logarithmen van de Sinussen der hoeken, welke over de onbekende zijden staan, en dan zijn de sommen de Logarithmen van de onbekende zijden. Wanneer men de berekening op deze wijze inrigt, dan wint men altijd ééne aftrekking uit.

Voorbeeld. *Fig.* 249. *Om te vinden, hoe ver men, in een punt A, van een ontoegankelijk voorwerp C verwijderd is, heeft men, op het terrein, eene basis AB, de lengte van* $2097^m,53$ *hebbende, gemeten, en uit de punten A en B, door waarneming, de hoeken A en B bepaald, (hoe zulks geschiedt, zal in de Werkdadige Meetkunst geleerd worden,) namelijk, hoek* $A = 88^\circ\ 17'\ 47'',8$ *en hoek* $B = 57^\circ\ 43'\ 28'',3$. *Men vraagt de afstanden van het voorwerp C tot de punten A en B te vinden?*

Berekening. 'Er is gegeven $A = 88^\circ 17' 47'',8$ / $B = 57^\circ 43' 28'',4$ } *optellen*

$$Supplem.\,C = A + B = 156^\circ\ 1' 16'',1; \textit{ trek af van } 180^\circ$$
$$\text{derhalve} \ldots\ldots C = 33^\circ 58' 43'',9$$

$$Log.\,AB = 3,3217082$$
$$Log.\,Sin.\,C = 9,7473240 \textit{ aftrekken}$$

$$\Omega = 3,5743842 \quad \ldots \quad \Omega = 3,5743824$$
$$Log.\,Sin.\,A = 9,9998081, \quad Log.\,Sin.\,B = 9,9271087 \textit{ bij}$$

$$Log.\,BC = 3,5741923 \qquad Log.\,AC = 3,5014929$$
$$BC = 3751^m,39 \qquad AC = 3173^m,17$$

Men lette wel op, *dat, wanneer één der hoeken stomp is, het sup-*

ple-

plement van dien hoek moet genomen worden, om deszelfs Sinus in de Tafel te kunnen vinden.

§. 633. VI. VRAAGSTUK, VOOR HET TWEEDE GEVAL. *Fig.* 240. *Van eenen driehoek twee zijden en één hoek, tegen over ééne dezer zijden staande, gegeven zijnde, de twee andere hoeken, benevens de derde zijde, te vinden?*

OPLOSSING. Stellen wij: dat de zijden b en c, benevens de hoek B, welke tegen over de zijde b staat, gegeven zijn; dan hebben wij (*III. Stell.*) de evenredigheid, $b:c = Sin. B : Sin. C$; waaruit volgt: $Sin. C = \frac{c \times Sin\ B}{b}$, of, in Logarithmen, $Log. Sin. C = Log. Sin. B + Log. c - Log. b$. Men zal alzoo den hoek C, door zijne Sinus, leeren kennen: *maar alzoo elke Sinus tot twee hoeken behoort, te weten, tot eenen scherpen, en tot eenen stompen hoek, welke het supplement des eersten is, zoo zullen 'er ook twee driehoeken op deze gegevens passen; dat is, de hoeken C en A, en de zijde a, zullen twee onderscheidene waarden verkrijgen: zelfs zullen, in dit geval, de gegevens met eenigen driehoek onbestaanbaar kunnen zijn; wanneer namelijk $c \times Sin. B$, grooter dan b zijnde, de Sinus van C, strijdig met den aard van Sinus, grooter dan de éénheid wordt.* Dit alles wordt, door de volgende constructie, nog duidelijker. Men neme, *Fig.* 243, $AB = c$, en make den hoek ABC, gelijk den gegevenen hoek B, en beschrijve uit A, met eene straal, gelijk aan de zijde b, eenen cirkelboog. Wanneer nu de gegevens met eenigen driehoek bestaanbaar zijn, zal die cirkelboog de lijn BC, in één punt aanraken, of in twee punten moeten snijden; in het laatste geval, zullen de driehoeken ABC en ABC', de gegevene zijden c en b, en den gegevenen hoek B hebben, en, in het eerste geval, zullen zij zich, in éénen regthoekigen driehoek ABC vereënigen, en de hoek ACB, zal gelijk den hoek $AC'B$, gelijk eenen regten hoek, en $b = c \times Sin. B$ worden. Om nu eindelijk de zijden BC en BC' der twee driehoeken, ABC en ABC' te vinden, zal (*III. Stell.*) $Sin. B : AC = Sin. BAC : BC$, en $Sin. B : AC = Sin. BAC' : BC'$ zijn, en daarom zal

$$BC = \frac{AC}{Sin. B} \times Sin. BAC; \text{ en } BC' = \frac{AC}{Sin. B} \times Sin. BAC'$$

zijn. In Logarithmen heeft men dan de volgende vergelijkingen:

1° $Log. Sin. (ACB \text{ of } AC'B) = Log. Sin. B + Log. AB - Log. AC$

2° *Hoek*

3° *Hoek* $BAC = 180° - (B + ACB)$, en *Hoek* $BAC' = 180° - (B + AC'B)$

3° $Log. BC = Log. AC - Log. Sin. B + Log. Sin. BAC$

4° $Log. BC' = Log. AC - Log. Sin. B + Log. Sin. BAC'$

VOORBEELD. *Fig.* 243. *Gegeven zijnde*, $AB = 729^m,3$; $AC = 630^m,78$, *en hoek* $B = 36° 17' 43'',5$: *de hoeken* A *en* C, *benevens de zijde* BC, *te vinden?*

BEREKENING. 1° *Om den hoek C te vinden*

$$\begin{array}{rll} Log. Sin. B = & 9,7722840 & \\ Log. AB = & 2,8629062 & \textit{bijtellen} \\ \hline & 12,6351902 & \\ Log. AC = & 2,7998779 & \textit{aftrekken} \\ \hline \text{rest } Log. Sin. C = & 9,8353123 & \\ \text{derhalve } hoek\ ACB = & 43° 11' 19'',42 & \\ hoek\ AC'B = & 136° 48' 40'',58 & \end{array}$$

2° *Om de hoeken BAC en BAC' te vinden.*

$$\begin{array}{rll} Hoek\ B = 36° 17' 43'',50 \ldots\ldots & Hoek\ B = & 36° 17' 43'',50 \\ Hoek\ ACB = 43° 11' 19'',42 \ldots & Hoek\ AC'B = & 136° 48' 40'',58 \ \textit{opt.} \\ \hline 79° 29' 02'',92 & & 173° 06' 24'',08 \\ Hoek\ BAC = 100° 30' 57'',08 \ldots & Hoek\ BAC' = & 6° 53' 35'',92 \end{array}$$

3° *Om de zijden BC en BC' te vinden.*

$$\begin{array}{ll} Log. AC = 2,7998779 & \\ Log. Sin. B = 9,7722840 \ \textit{aftrekken} & \\ \hline 3,0275939 \ \ldots\ldots\ldots & 3,0275939 \\ Log. Sin. BAC = 9,9926438, & Log. Sin. BAC' = 9,0792570 \ \textit{bijt.} \\ \hline Log. BC = 3,0202377 \ \ldots & Log. BC' = 2,1068509 \\ BC = 1047^m,702 & BC' = 127^m,8942 \end{array}$$

Ten blijke van de juistheid dezer berekening, zal men bevinden: dat $AB^2 = AC^2 + BC \times BC'$ is, zoo als, volgens *Bijgev. Stelling B. IV. Boek*, moet plaats hebben.

§. 634. VI. VRAAGSTUK, VOOR HET DERDE GEVAL. *Fig.* 240. *Twee zijden, met den ingesloten hoek, gegeven zijnde; de twee onbekende hoeken, benevens de derde zijde, te vinden?*

Voor dit geval, zijn onderscheidene oplossingen voorhanden, elke van welke, in onderscheidene omstandigheden, hare nuttigheid kunnen hebben.

§. 635. I. Oplossing. Laten de zijden a en b, benevens de hoek C, de gegevens zijn; dan is *IV. Stelling*,

$$a+b : a-b = Cot.\tfrac{1}{2}C, \text{ of } Tang.(90^\circ-\tfrac{1}{2}C) : Tang.\tfrac{1}{2}(A-B)$$

derhalve

$$Tang.\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\times Cot.\tfrac{1}{2}C=\frac{a-b}{a+b}\times Tang.(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)$$

door deze vergelijking, zal het halve verschil der onbekende hoeken gevonden worden, en dewijl de halve som dezer hoeken $\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B = 90-\tfrac{1}{2}C$ is, zal men de hoeken zelve, door de vergelijkingen:

$$A=(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)+\tfrac{1}{2}(A-B), \text{ en } B=(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)-\tfrac{1}{2}(A-B)$$

dat is, „*door het halve verschil bij de halve som der hoeken optetellen, en van dezelve aftetrekken*, vinden. Deze hoeken bekend zijnde, zal men de derde zijde, door éénе der twee evenredigheden,

$$\begin{cases} Sin.\,B : Sin.\,C = b : c \\ Sin.\,A : Sin.\,C = a : c \end{cases}; \text{ of door } \begin{cases} c = b \times Sin.\,C : Sin.\,B \\ c = a \times Sin.\,C : Sin.\,A \end{cases}$$

berekenen, en de driehoek zal opgelost zijn. Maar, wanneer, (hetgeen meestal het geval is,) de zijden der driehoeken, door hare Logarithmen gegeven zijn; dan zal men aan de vergelijking, welke de Tangens van het halve verschil der onbekende hoeken geeft, eene andere gedaante kunnen geven, welke de berekening, niet alleen, in dit geval, maar ook, wanneer de zijden regtstreeks gegeven zijn, gemakkelijker maakt. Wanneer men den teller en noemer van het gebroken $(a-b):(a+b)$ door b deelt, dan komt de vergelijking van . . . $Tang.\tfrac{1}{2}(A-B)$ onder de volgende gedaante:

$$Tang.\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a:b-1}{a:b+1}\times Tang.(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)$$

Deze vergelijking berust op de onderstelling, dat a grooter dan b is; het quotient $a:b$ is dan een gebroken, dat grooter dan de éénheid is. Omdat nu de Sinussen en Cosinussen, kleiner dan *één* zijn, kan men elke eigenlijke breuk, door de Sinus of Cosinus van eenen zekeren boog, die altijd uit het eerste quadrant kan genomen worden, uitdrukken, en omdat de Tangenten, in het eerste quadrant, van *nul*, tot in het oneindige, toenemen, kan men elk *geheel* en *gebroken* getal, door de Tangens van eenigen boog voorstellen. Men stelle dan $a:b$ gelijk aan de Tangens van zekeren hoek of boog, die wij door ϕ uitdrukken, en, omdat deze hoek in de figuur niet gevonden wordt, den *hulp-hoek* zullen noemen. Stellende dan $a:b = Tang.\,\phi$; dan zal

$$\frac{a:b-1}{a:b-1}$$

$$\frac{a:b-1}{a:b+1}=\frac{Tang.\,\phi-1}{Tang.\,\phi+1};\text{ en } Tang.\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{Tang.\,\phi-1}{Tang.\,\phi+1}\times Tang.\,(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)$$

moeten zijn; maar nu is (*I. Gev. IV. Stell. VIII. B. Verg.* (21))

$$\frac{1-Tang.\,\phi}{1+Tang.\,\phi}=Tang.\,(45^\circ-\phi);\text{ derhalve }\frac{Tang.\,\phi-1}{Tang.\,\phi+1}=-Tang.\,(45^\circ-\phi)=Tang.\,(\phi-45^\circ).$$

Zie *Verg.* (15) *p.* 216.
Wanneer men dan de waarde dezer breuk, in de voorgaande waarde van $Tang.\,\frac{1}{2}(A-B)$, overbrengt; dan zal men, wanneer de twee zijden, a en b, met den ingesloten hoek C, gegeven zijn, de twee andere hoeken, A en B, en de derde zijde c, door de berekening der onderstaande vergelijkingen vinden:

Zij de grootste der gegevene zijden $=a$; *de kleinste* $=b$; *dan heeft men, als volgt:*

1° $a:b=Tang.\,\phi$ (*de hoek* ϕ *is altijd grooter dan* 45°)

2° $Tang.\,\frac{1}{2}(A-B)=Tang.\,(\phi-45^\circ)\times Tang.\,(90^\circ-\frac{1}{2}C)$

3° *grootste hoek* $A=(90^\circ-\frac{1}{2}C)+\frac{1}{2}(A-B)$

4° *kleinste hoek* $B=(90^\circ-\frac{1}{2}C)-\frac{1}{2}(A-B)$

5° *derde zijde* $c=a\times Sin.\,C:Sin.\,A=b\times Sin.\,C:Sin.\,B$

Men kan deze vergelijkingen gemakkelijk in Logarithmen overbrengen; want, volgens de bekende regels, verkrijgt men:

$$Log.\,Tang.\,\phi=Log.\,a-Log.\,b$$

$$Log.\,Tang.\,\tfrac{1}{2}(A-B)=Log.\,Tang.\,(\phi-45^\circ)+Log.\,Tang.\,(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)$$

$$Log.\,c=Log.\,a+Log.\,Sin.\,C-Log.\,Sin.\,A$$

$$Log.\,c=Log.\,b+Log.\,Sin.\,C-Log.\,Sin.\,B$$

§. 636. Men kan aan deze vergelijkingen nog eene andere gedaante geven. Wanneer men, (indien wederom a de grootste en b de kleinste zijde is,) $Tang.\,\phi'=b:a$ stelt; dan zal $Tang.\,\frac{1}{2}(A-B)=Tang.\,(45^\circ-\phi')\times Tang.\,(90^\circ-\frac{1}{2}C)$ zijn, hetwelk op hetzelfde uitkomt. De vorm, der bovenstaande vergelijkingen is slechts daarin gemakkelijker; dat men ligter 45° van eenen boog, dan van 45° eenen kleineren boog aftrekt. Het spreekt van zelven, dat, wanneer men de Sinus-Tafelen, welke naar de nieuwe verdeeling zijn ingerigt, gebruikt, 50°, in plaats van 45°, moet genomen worden.

VOORBEELD. *Fig.* 240. *Wetende: dat men, in het punt C, van de punten A en B, de volgende afstanden heeft:* $AC=b=2839^m,7$; $BC=a=4309^m,73$; *indien dan de hoek C, naauwkeurig gemeten zijnde, bevonden wordt, gelijk te zijn aan* 56° 39′ 33″,4, *vraagt men: niet alleen, de hoegrootheid van de hoeken A en B; maar ook* *voornamelijk den afstand van de punten A en B van elkander te vinden?*

1° Berekening der Hoeken.

Gegeven $C = 56^\circ\, 39'\, 33'',4$

$\frac{1}{2} C = 28^\circ\, 19'\, 46'',7$

$90^\circ - \frac{1}{2} C = 61^\circ\, 40'\, 13'',3$

$Log.\, a = 3,6344500$

af $Log.\, b = 3,4532725$

$Log.\, Tang.\, \varphi = 0,1811775$

$\varphi = 56^\circ\, 37'\, 08'',15$

$\varphi - 45^\circ = 11^\circ\, 37'\, 08'',15$

$L.\, Tang.\, (90^\circ - \frac{1}{2} C) = 0,2683210$

$Log.\, Tang.\, (\varphi - 45^\circ) = 9,3130545$

$Log.\, Tang.\, \frac{1}{2}(A - B) = 9,5813755$

$\frac{1}{2}(A - B) = 20^\circ\, 52'\, 35'',84$

$(90^\circ - \frac{1}{2} C) = 61^\circ\, 40'\, 13'',30$

derhalve $A = 82^\circ\, 32'\, 49'',14$

$B = 40^\circ\, 47'\, 37'',46$

2° Berekening van de onbekende zijde c.

α) Door de eerste vergelijking.

$Log.\, a = 3,6344500$

$Log.\, Sin.\, C = 9,9219033$ *bij*

$3,5563533$

$Log.\, Sin.\, A = 9,9963153$ *af*

$Log.\, c = 3,5600380$

β) Door de tweede vergelijking.

$Log.\, b = 3,4532725$

$Log.\, Sin.\, C = 9,9219033$

$3,3751758$

$Log.\, Sin.\, B = 9,8151378$

$Log.\, c = 3,5600380$

$c = 3631^m,098$

De twee berekeningen van c geven dezelfde uitkomst, hetwelk nogtans geen zeker waarborg is; want, men kan zich in de *Log. Sin. C* vergissen, zonder zulks aan de ongelijkheid der uitkomsten te bemerken.

§. 637. II. Oplossing. Volgens de *VII. Stelling*, is $c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \times Cos.\, C$. Omdat nu (*II. Stell. VIII. B.*) $1 = Sin^2.\, \frac{1}{2} C + Cot^2.\, \frac{1}{2} C$ is, en (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $Cos.\, C = Cos^2.\, \frac{1}{2} C - Sin^2.\, \frac{1}{2} C$, en de uitdrukking $a^2 + b^2$ kan worden aangezien als het product van $(a^2 + b^2) \times 1$, zal onze gestelde vergelijking in $c^2 = (a^2 + b^2) \times (Sin^2.\, \frac{1}{2} C + Cos^2.\, \frac{1}{2} C) - 2\, a\, b \times (Cos^2.\, \frac{1}{2} C - Sin^2.\, \frac{1}{2} C)$ veranderen; of wel, wanneer men de producten ontwikkelt, en de termen, welke $Sin^2.\, \frac{1}{2} C$ en $Cos^2.\, \frac{1}{2} C$ vermenigvuldigen, te zamen vereenigt, in

$$c^2 = (a + b)^2 \times Sin^2.\, \tfrac{1}{2} C + (a - b)^2 \times Cos^2.\, \tfrac{1}{2} C$$

Deze vergelijking, welke wederom eene fraaije eigenschap der driehoeken voorstelt, kan op tweederlei wijze herleid worden: 1° door derzelver tweede lid, eerst door $(a + b)^2 \times Sin^2.\, \frac{1}{2} C$ te deelen, en naderhand het quotient met diezelfde grootheid te multipliceren, hetgeen, omdat $Cos.\, p : Sin.\, p = Cot.\, p$ is, na den wortel uit beide leden getrokken te hebben, geven zal:

$$c = (a + b) \times Sin.\, \tfrac{1}{2} C \times \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{a - b}{a + b} \times Cot.\, \tfrac{1}{2} C \right]^2 \right\}} \quad . \; . \; (\alpha)$$

2° Deelt men het tweede lid door $(a-b)^2 \times Cos^2.\frac{1}{2}C$, en behandelt men voorts de vergelijking op dezelfde wijze; dan verkrijgt men:

$$c = (a-b) \times Cos.\tfrac{1}{2}C \times \sqrt{\left\{1 + \left[\frac{a+b}{a-b} \times Tang.\tfrac{1}{2}C\right]^2\right\}} \ldots (\beta)$$

Nu is, zie voorgaande oplosfing, of *IV. Stelling*, $\frac{a-b}{a+b} \times Cot.\frac{1}{2}C = Tang.\frac{1}{2}(A-B)$; bijgevolg zal, wanneer men $1 = 1$ door de leden dezer vergelijking deelt, $\frac{a+b}{a-b} \times Tang.\frac{1}{2}C = Cot.\frac{1}{2}(A-B)$ zijn, en de vergelijkingen (α) en (β) veranderen derhalve (omdat, in het algemeen (*III. Stell. VIII. B.*) $\sqrt{(1 + Tang^2.p)} = Sec.p = 1 : Cos.p$ en $\sqrt{(1 + Cot^2.p)} = Cosec.p = 1 : Sin.p$ is,) in de volgende:

$$c = \frac{(a+b).Sin.\frac{1}{2}C}{Cos.\frac{1}{2}(A-B)}, \text{ en } c = \frac{(a-b) \times Cos.\frac{1}{2}C}{Sin.\frac{1}{2}(A-B)}$$

Men heeft dan, om, wanneer de twee zijden, met den ingesloten hoek, gegeven zijn, de onbekende hoeken en de derde zijde te vinden, de volgende formulen of vergelijkingen:

$$1^\circ \; Tang.\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \times Tang.(90^\circ - \tfrac{1}{2}C)$$

$$2^\circ \; A = (90^\circ - \tfrac{1}{2}C) + \tfrac{1}{2}(A-B);\; B = (90^\circ - \tfrac{1}{2}C) - \tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$3^\circ \; c = \frac{(a+b) \times Sin.\frac{1}{2}C}{Cos.\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{(a-b) \times Cos.\frac{1}{2}C}{Sin.\frac{1}{2}(A-B)}$$

TOEPASSING. Nemen wij, om de uitkomsten dezer oplosfing, op een voorbeeld, in getallen, toetepassen, dezelfde gegevens, als in het voorbeeld der eerste oplosfing, *pag.* 241; dan hebben wij:

$$C = 56^\circ\, 39'\, 33'',4 \;\ldots\ldots\; a = 4309^m,73$$
$$\tfrac{1}{2}C = 28^\circ\, 19'\, 46'',7 \;\ldots\ldots\; b = 2839^m,70$$
$$90^\circ - \tfrac{1}{2}C = 61^\circ\, 40'\, 13'',3 \quad a+b = 7149^m,43$$
$$a-b = 1470^m,03$$

Berekening van de hoeken A en B.

$$Log.(a-b) = 3,1673262$$
$$Log.Tang.(90^\circ - \tfrac{1}{2}C) = 0,2683210$$
$$\overline{3,4356472}$$
$$Log.\,a+b) = 3,8542714$$

$Log.\,Tang.\frac{1}{2}(A-B) = 9,5813758$; en $\frac{1}{2}(A-B) = 20^\circ\, 52'\, 35'',9$

derhalve $A = 61^\circ\, 40'\, 13'',3 + 20^\circ\, 52'\, 35'',9 = 82^\circ\, 32'\, 49'',2$

$B = 61^\circ\, 40'\, 13'',3 - 20^\circ\, 52'\, 35'',9 = 40^\circ\, 47'\, 37'',4$

Berekening van de derde zijde C.

$Log.(a+b)=3,8542714$	$Log.(a-b)=3,1673262$
$Log.Sin.\frac{1}{2}C=9,6762761$	$Log.Cos.\frac{1}{2}C=9,9445972$
$13,5305475$	$13,1119234$
$Log.Cos.\frac{1}{2}(A-B)=9,9705095$	$Log.Sin.\frac{1}{2}(A-B)=9,5518854$
$Log.c=3,5600380$	$Log.c=3,5600380$

Hetwelk met de voorgaande berekening overëénkomt.

§. 638. III. Oplossing. Wanneer men alleen de onbekende zijde behoeft te kennen; dan kan de oplossing, op de volgende wijze, worden ingerigt. Men stelle, in de vergelijking, $c^2=a^2+b^2-2ab\times Cos.C$, het gebroken $a:b=Tang.\chi$; dan is $a=b\times Tang.\chi$ en $a^2=b^2\times Tang^2.\chi$, en de vergelijking verandert in $c^2=b^2\times Sec^2.\chi-2b^2\times Tang.\chi\times Cos.C$, welke vergelijking, met weinig moeite, onder de volgende gedaante

$$c^2=\frac{b^2}{Cos^2.\chi}\left\{1-2\,Cos^2.\chi\times Tang.\chi\times Cos.C\right\}$$

of, omdat $2\,Sin.\chi\times Cos.\chi=Sin.2\chi$ is, onder deze:

$$c^2=\frac{b^2}{Cos^2.\chi}\left\{1-Sin.2\chi\times Cos.C\right\}$$

kan gebragt worden. Stellen wij nu $\sqrt{(2\,Sin.^2\chi\times Cos.C)}=Sin.\omega$; dan wordt

$$c^2=\frac{b^2\times Cos^2.\omega}{Cos^2.\chi},\text{ en }c=\frac{b\times Cos.\omega}{Cos.\chi}$$

§. 639. Wanneer men, in dezelfde vergelijking, $b=a\times Cot.\chi$ stelt; dan zal men vinden: $c=\frac{a\times Cos.\omega}{Sin.\chi}$. Men verkrijgt derhalve, om de derde zijde te vinden, zonder vooraf de onbekende hoeken te berekenen, de volgende vergelijkingen:

$$1^\circ\ \frac{a}{b}=Tang.\chi;\quad 2^\circ\ Sin.\omega=\sqrt{\left\{Sin.2\chi\times Cos.C\right\}}$$

$$3^\circ\ c=\frac{b\times Cos.\omega}{Cos.\chi}=\frac{a\times Cos.\omega}{Sin.\chi}$$

§. 640. IV. Oplossing. Men kan de vergelijking $c^2=a^2+b^2-2ab\times Cos.C$, onder éénе van de twee volgende gedaanten brengen:

$$c^2=a^2+2ab+b^2-2ab-2ab\times Cos.C$$
$$c^2=a^2-2ab+b^2+2ab-2ab\times Cos.C$$

en dan wordt, volgens *V. Gev. III. Stell. VIII. B.*

$$c^2=(a+b)^2-2ab\times(1+Cos.C)=(a+b)^2-4ab\times Cos^2.\tfrac{1}{2}C$$
$$c^2=(a-b)^2+2ab\times(1-Cos.C)=(a-b)^2+4ab\times Sin^2.\tfrac{1}{2}C$$

Deze

De laatfte vergelijkingen kan men wederom in de volgende veranderen:

$$c^2 = (a+b)^2 \times \left\{ 1 - \frac{4ab \times Cos^2.\frac{1}{2}C}{(a+b)^2} \right\}; \; c^2 = (a-b)^2 \times$$

$$\left\{ 1 + \frac{4ab \times Sin^2.\frac{1}{2}C}{(a-b)^2} \right\}$$

In de eerfte dezer vergelijkingen, is $(a+b)^2$ altijd grooter dan $4ab$, en, om die reden, zal het gebroken $\frac{4ab \times Cos^2.\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}$ altijd kleiner dan de éénheid zijn, en men zal hetzelve daarom gelijk $Sin^2.\mu$ kunnen ftellen, en dan zal

$$c = (a+b) \times Cos.\mu$$

worden. Stelt men, in de tweede vergelijking, $\frac{4ab \times Sin^2.\frac{1}{2}C}{(a-b)^2} = Tang^2.\nu$; dan zal men vinden:

$$c = (a-b) : Cos.\nu$$

Men heeft alzoo, om de derde zijde regtftreeks te vinden, deze twee ftelfels van vergelijkingen:

Eerfte Stelfel.	*Tweede Stelfel.*
1° $\frac{2\,Cos.\frac{1}{2}C}{a+b} \times \sqrt{ab} = Sin.\mu$	1° $Tang.\nu = \frac{2\,Sin.\frac{1}{2}C}{a-b} \times \sqrt{ab}$
2° $c = (a+b) \times Cos.\mu$	2° $c = (a-b) : Cos.\nu$

vergelijkingen, welke, offchoon zij, bij meest alle Schrijvers over de Driehoeksmeting, voorkomen, nogtans minder fraai dan die der voorgaande oplosfing zijn. Wanneer men dezelfde getallen, als in de twee eerfte oplosfingen, neemt, zal men dezelfde waarde voor c vinden. Wij kunnen deze berekeningen niet plaatfen, en moeten ook de oplosfingen, waarbij men éénen der onbekende hoeken afzonderlijk verkrijgen kan, en welke, uit de *V. Stelling* en derzelver gevolgen, gehaald kunnen worden, met ftilzwijgen voorbijgaan.

§. 641. Bijvoegsel op dit geval. Het is uit de *V. Stelling* gebleken: dat $Tang.B = \frac{Sin.B}{Cos.B} = \frac{b \times Sin.C}{a - b\,Cos.C}$ is. Stelt men nu in deze vergelijking, in plaats van $Sin.B$, $Sin.C$, $Cos.B$ en $Cos.C$, de waarden, welke in de (61) *Verg. pag.* 212, voor die lijnen zijn opgegeven; dan heeft men:

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{+1}}}{e^{B\sqrt{-}} + e^{-B\sqrt{-1}}} = \frac{b \times (e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}})}{2a - b \times (e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}})}$$

Hieruit volgt, na eene ligte herleiding:

$$e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{a - b e^{-C\sqrt{-1}}}{a - b e^{C\sqrt{-1}}}$$

omdat nu $Log.(a-x) = Log.a - \left(\frac{x}{a} + \frac{1}{2}.\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{3}.\frac{x^3}{a^3} + enz.\right)$ is; zal men hebben:

$$2B\sqrt{-1} = \frac{b}{a} \times \left\{e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}}\right\} + \frac{b^2}{2a^2} \times \ldots \left\{e^{2C\sqrt{-1}} - e^{-2C\sqrt{-1}}\right\} + \frac{b^3}{3a^3} \times \left\{e^{3C\sqrt{-1}} - e^{-3C\sqrt{-1}}\right\} + enz.$$

Stelt men nu voor $e^{mC\sqrt{-1}} - e^{-mC\sqrt{-1}}$ derzelver waarde $2\sqrt{-1} \times Sin.\,m\,C$; dan verkrijgt men, na alles door $2\sqrt{-1}$ gedeeld te hebben:

$$B = \frac{b}{a} \times Sin.C + \frac{b^2}{2a^2} \times Sin.2C + \frac{b^3}{3a^3} \times Sin.3C + \frac{b^4}{4a^4} \times Sin.4C + enz.$$

Men zal, door deze fraaije reeks, welke tot in het oneindige voortloopt, de waarde van den hoek B, in deelen van de ſtraal, vinden kunnen, en men zal daartoe zooveel minder termen noodig hebben, naarmate a, ten opzigte van b, grooter is. Om nu den hoek B, welke, in deelen van de ſtraal, bekend wordt, in ſecunden overtebrengen, moet men, omdat een boog, welks lengte aan de ſtraal gelijk is, 206264″, 8 bevat, de waarde van B met dit getal ſecunden vermenigvuldigen, of bij den Logarithmus van de waarde van B den ſtandvastigen Logarithmus 5, 3144251 optellen.

§. 642. Het is gemakkelijk te zien: dat de uitdrukking $a^2 - 2ab\,Cos.C + b^2 = (a - be^{C\sqrt{-1}}) \times (a - be^{-C\sqrt{-1}})$ is; derhalve zal men, in plaats van de meermalen aangehaalde vergelijking, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,Cos.C$, kunnen ſchrijven:

$$c^2 = (a - b \times e^{C\sqrt{-1}}) \times (a - b \times e^{-C\sqrt{-1}})$$

van beide leden dezer vergelijking de Logarithmen nemende, en voorts, als in de voorgaande §, te werkgaande, zal men vinden:

$$Log.c = Log.a - \frac{b}{a}.Cos.C - \frac{b^2}{2a^2}.Cos.2C - \frac{b^3}{3a^3}.Cos.3C - enz.$$

eene reeks, welke niet minder fraai dan de voorgaande is. Men moet derzelver termen met den Modulus der Briggiaanſche Logarithmen, dat is, met 0, 43429448, vermenigvuldigen, om de waarde van c, in Briggiaanſche, of gewone Logarithmen, te verkrijgen.

§. 643.

§. 643. VIII. VRAAGSTUK, VOOR HET VIERDE GEVAL. *Wanneer de drie zijden van eenen driehoek gegeven zijn, deszelfs hoeken te vinden?*

OPLOSSING. Wanneer men a, b, c, voor de zijden, en A, B en C, voor de overstaande hoeken stelt; dan is, ($\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = s$ stellende,) volgens de *VIII. Stelling*,

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{b\,c}};\quad Sin.\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{a\,c}},$$

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{a\,b}}$$

Men kan ook de hoeken, zie *III. Gev. VIII. Stell.* door de Cosinussen of door de Tangenten van derzelver helften vinden.

VOORBEELD. *Gegeven zijnde,* $a = 739$, $b = 809$, *en* $c = 755$; *de hoeken* A, B *en* C, *te vinden?*

Berekening van den hoek A.

$a = 739$

$b = 809$ . . . . $Log.\,b = 2,9079485$

$c = 755$ . . . . $Log.\,c = 2,8779470$

$2s = 2303$ $\qquad Log.\,b\,c = 5,7858955$

$s = 1151,5$

$s - b = 342,5$ . . . $Log.\,(s-b) = 2,5346606$

$s - c = 396,5$ . . . $Log.\,(s-c) = 2,5982432$

$Log.\,(s-b) \times (s-c) = 5,1329038$

af, $Log.\,b\,c = 5,7858955$

$19,3470083$

2)

$Log.\,Sin.\,\tfrac{1}{2}A = 9,6735041$

$\tfrac{1}{2}A = 28^\circ\ 07'\ 59'',85$

en $A = 56^\circ\ 15'\ 59'',70$

Men vindt, op dezelfde wijze, $\begin{cases} B = 65^\circ\ 33'\ 40'',79 \\ C = 58^\circ\ 10'\ 19'',52 \end{cases}$

en, ten blijke van de juistheid der berekening, maakt de som der berekende hoeken 180°. Men moet, in deze berekening, bij de som der Logarithmen van $s-b$ en $s-c$, den Logarithmus van het vierkant van de straal, dat is het getal 20, in de gedachte bijtellen; omdat, wanneer men de straal niet gelijk aan de éénheid, maar $= r$ stelt, de vergelijking, welke in de *VIII. Stelling* bewezen is, $Sin^2.\,A = \frac{r^2\,(s-b) \times (s-c)}{b\,c}$ wordt.

Oplossing van meer zamengestelde gevallen der Driehoeken, welke, in de Werkdadige Meetkunst, het meest voorkomen.

§. 644. IX. Vraagstuk. *Fig.* 244. *Om de hoogte van een verheven en ontoegankelijk voorwerp CD te bepalen, heeft men, op eene lijn AC, welker rigting de loodlijn CD, uit het toppunt van dit voorwerp vallende, doorsnijdt, eene lijn* $AB = 89^m,7$ *genomen, en op twee bakens BF en AE, die de hoogte van* $1^m,5$ *hebben, eenen Graphometer geplaatst, en de hoeken DFG en DEG, die wij p en q zullen noemen, gemeten, en bevonden* $p = 56^\circ\,17'\,10''$; $q = 34^\circ\,8'\,30''$. *Hoe bepaalt men, door deze gegevens, de hoogte van dit voorwerp, in de onderstelling, dat EG evenwijdig aan den waterpas liggenden grond AC loopt?*

Oplossing. In den driehoek EFD, is de hoek $EDF = p - q$; nu is (*III. Stell.*) $Sin.\,EDF : Sin.\,E = EF$, (of AB) $: DF$; dat is $Sin.\,(p-q) : Sin.\,q = AB : DF$; en $DF = AB \times \frac{Sin.\,q}{Sin.\,(p-q)}$. Wederom is, in den regthoekigen driehoek DFG, (*II. Stell.*) $DG = DF \times Sin.\,F = DF \times Sin.\,p$: stellende nu, in plaats van DF, de waarde zoo even voor dezelve gevonden; dan hebben wij:

$$DG = \frac{AB \times Sin.\,p \times Sin.\,q}{Sin.\,(p-q)}$$

Berekening.

$Log.\,AB =$	$1,9527924$	$p =$	$56^\circ\,17'\,10''$
$Log.\,Sin.\,p =$	$9,9200291$	$q =$	$34^\circ\,8'\,30''$
$Log.\,Sin.\,q =$	$9,7491494$	$p-q =$	$22^\circ\,8'\,40''$
	$21,6219709$		
$Log.\,Sin.\,(p-q) =$	$9,5762755$		
$Log.\,DG =$	$2,0456954$;	derh. $DG =$	$111^m,095$
		tel hier bij, $CG =$	$1^m,5$
	komt, voor de begeerde hoogte,	$DC =$	$112^m,595$

§. 645. X. Vraagstuk. *Fig.* 245, 246 *en* 247. *De afstand van de middelpunten van twee afgelegene en ontoegankelijke voorwerpen, A en B, te vinden?*

Oplossing. Men neme eene basis CD, zoodanig, dat uit elk harer uiteinden, C en D, zoowel de voorwerpen A en B, als de baak, welke in het ander uiteinde geplaatst is, zigtbaar zijn; en tot zulk eene lengte, dat de hoeken der driehoeken niet te stomp noch te scherp wor-

worden. Deze basis, met de uiterste naauwkeurigheid, gemeten zijnde, moeten, aan derzelver uiteinden, de hoeken, welke zij met de lijnen maakt, die van hare uiteinden tot de voorwerpen loopen, door waarneming, bepaald worden: men verkrijgt dan vijf gegevens, door welken, niet slechts de begeerde afstand der voorwerpen, maar tevens de afstanden van diezelfde voorwerpen tot de uiteinden van de basis kunnen gevonden worden.

§. 646. I. GEVAL. *Fig.* 245. Wij stellen eerst: dat het verlengde van de basis het verlengde der lijn, welke door beide voorwerpen loopt, ontmoet, en noemen

a de lengte van de basis.

p en q de hoeken, aan het uiteinde van de basis ter regterhand, uit het punt D, te weten, de hoeken BDA en ADC, altijd van de regter naar de linkerhand gaande.

r en s, de hoeken BCD en BCA, uit het punt C, aan het uiteinde van de basis ter linkerhand, wederom, in rangorde, van de regter naar de linkerhand, genomen.

D en D' de afstanden der voorwerpen B en A, tot het regtsche uiteinden van de basis.

D'' en D''' de afstanden der voorwerpen B en A, tot het linksche uiteinde van de basis.

Z den begeerden afstand der voorwerpen A en B.

Dan geven ons in de eerste plaats de driehoeken CDB en CDA, volgens de *III. Stelling*,

$$D = \frac{a \times Sin.\, r}{Sin.\,(p+q+r)};\; D' = \frac{a \times Sin.\,(r+s)}{Sin.\,(q+r+s)};\; D'' = \frac{a \times Sin.\,(p+q)}{Sin.\,(p+q+r)}$$

$$\text{en } D''' = \frac{a \times Sin.\, q}{Sin.\,(q+r+s)} \;\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\Delta)$$

Men zal nu, door de oplossing der driehoeken, ABD en ABC, welker twee zijden met den ingesloten hoek bekend zijn, de begeerde afstand Z, op twee onderscheidene wijzen, kunnen vinden. Men stelle, volgens *I. Oplosf. III. Geval pag.* 241, in den driehoek ADB,

$$\frac{D'}{D} = \frac{Sin.\,(r+s) \times Sin.\,(p+q+r)}{Sin.\, r \times Sin.\,(q+r+s)} = Tang.\, \phi$$

dan is, zie §. 241, *en verv.*

$$Tang.\, \tfrac{1}{2}(ABD - BAD) = Tang.\,(\phi - 45^\circ) \times Tang.\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}p),$$

stel $Tang.\, \tfrac{1}{2}(ABD - BAD); = Tang.\, \mu$; dan is

$$hoek\; ABD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}p + \mu,\; \text{stel} = m$$

$$hoek\; BAD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}p - \mu,\; \text{stel} = n$$

 $Z =$

$$Z = \frac{D \times Sin.p}{Sin.n} = \frac{D' \times Sin.p}{Sin.m} = \frac{a \times Sin.r \times Sin.p}{Sin.n \times Sin.(p+q+r)} = \frac{a \times Sin.p \times Sin.(r+s)}{Sin.m \times Sin.(q+r+s)}$$

Men ſtelle verder, in den driehoek ABC,

$$\frac{D''}{D'''} = \frac{Sin.(p+q) \times Sin.(q+r+s)}{Sin.q \times Sin.(p+q+r)} = Tang.\phi'$$

dan is, zie wederom §. 635, *pag.* 241.

$$Tang.\tfrac{1}{2}(BAC - ABC) = Tang.(\phi' - 45^\circ) \times Tang.(90^\circ - \tfrac{1}{2}s);$$

ſtel $Tang.\tfrac{1}{2}(BAC - ABC) = Tang.\mu'$, dan is:

$$hoek\ BAC = 90^\circ - \tfrac{1}{2}s + \mu' = m'$$
$$hoek\ ABC = 90^\circ - \tfrac{1}{2}s - \mu' = n'$$

$$Z = \frac{D'' \times Sin.s}{Sin.m'} = \frac{D''' \times Sin.s}{Sin.n'} = \frac{a \times Sin.s \times Sin.(p+q)}{Sin.m' \times Sin.(p+q+r)} = \frac{a \times Sin.q \times Sin.s}{Sin.n' \times Sin.(q+r+s)}$$

§. 647. Zie hier dan het ſtelſel van vergelijkingen, door welke de begeerde afſtand, langs twee onderſcheidene wegen, kan gevonden worden.

I. Oplossing. Men ſtelle, dezelfde notatie als boven gebruikende,

1° $Tang.\phi = \dfrac{Sin.(r+s) \times Sin.(p+q+r)}{Sin\ r \times Sin.(q+r+s)}$

2° $Tang.\mu = Tang.(\phi - 45^\circ) \times Tang.(90^\circ - \tfrac{1}{2}p)$

3° $m = 90^\circ - \tfrac{1}{2}p + \mu$, en $n = 90^\circ - \tfrac{1}{2}p - \mu$

dan zal men hebben:

4° $Z = \dfrac{a \times Sin.r \times Sin.p}{Sin.n \times Sin.(p+q+r)} = \dfrac{a \times Sin.p \times Sin.(r+s)}{Sin.m \times Sin.(q+r+s)}$

II. Oplossing. Men ſtelle verder:

1° $Tang.\phi' = \dfrac{Sin.(p+q) \times Sin.(q+r+s)}{Sin.q \times Sin.(p+q+r)}$

2° $Tang.\mu' = Tang.(\phi' - 45^\circ) \times Tang.(90^\circ - \tfrac{1}{2}s)$

3° $m' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}s + \mu'$, en $n' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}s - \mu'$

dan zal men hebben:

4° $Z = \dfrac{a \times Sin.s \times Sin.(p+q)}{Sin.m' \times Sin.(p+q+r)} = \dfrac{a \times Sin.q \times Sin.s}{Sin.n' \times Sin.(q+r+s)}$

Wanneer nu deze vergelijkingen naar behooren berekend zijn; dan moeten de uitkomſten aan deze twee volgende vergelijkingen voldoen.

1° $(p+q) + (r+s) + m + m' = 360^\circ$

2° $q + r = n + n'$

Ge-

Gebeurt het, dat de hoek ϕ kleiner dan $45°$ is; dan wordt de boog $(\phi - 45°)$, en deszelfs Tangens negatief, en dan is ook μ negatief, en de teekens van die letter moeten dan in N° 3° omgekeerd worden. Hetzelfde geldt ten opzigte van den hulpboog ϕ'. — Wil men de afstanden D, D', D'' en D''' kennen; dan zal men de vergelijkingen (Δ) *pag.* 249. berekenen.

§. 648. VOORBEELD. Gegeven zijnde $a = 5736^m,7$; .... $p = 56°\ 17'\ 33'',3$; $q = 40°\ 13'\ 17'',5$; $r = 47°\ 48'\ 38'',5$; ... $s = 44°\ 38'\ 17'',2$; dan zal men, zie de berekening, *op de volgende bladzijde*, Littera A. vinden, dat $Z = 7129^m,243$ is. Men heeft de berekening, in alle deszelfs deelen, uitgevoerd, en het blijkt uit dezelve: dat elke vergelijking voor Z, dezelfde uitkomst geeft. Nogtans zouden de Logarithmen van de achterste cijfers der laatste uitkomsten wel eens één of twee éénheden kunnen verschillen, (want zij bepalen slechts derzelver naast kleinere of naast grootere waardijen,) dan, in dit geval, zou men een midden uit de vier uitkomsten moeten nemen, en dit middelgetal voor den waren Logarithmus afstand houden. Met behulp der vergelijkingen (Δ), zal men vinden: $D = 7288^m,353$, $D' = 7795^m,090$, $D'' = 9773^m,26$ en $D''' = 5038^m,237$.

§. 649. II. GEVAL. *Fig.* 246. Wanneer de basis CD de lijn, welke de voorwerpen A en B vereënigt, doorsnijdt; dan zal men de volgende oplossingen vinden.

I. OPLOSSING. Men stelle, de notatie der figuur gebruikende:

$$1° \quad Tang.\,\phi = \frac{Sin.\,s \times Sin.\,(q+r)}{Sin.\,r \times Sin.\,(p+s)}$$

$$2° \quad Tang.\,\mu = Tang.\,(\phi - 45°) \times Tang. \left\{ 90° - \tfrac{1}{2}(p+q) \right\}$$

$$3° \quad m = 90° - \tfrac{1}{2}(p+q) + \mu, \text{ en } n = 90° - \tfrac{1}{2}(p+q) - \mu$$

en dan is:

$$4° \quad Z = \frac{a \times Sin.\,s \times Sin.\,(p+q)}{Sin.\,m \times Sin.\,(p+s)} = \frac{a \times Sin.\,r \times Sin.\,(p+q)}{Sin.\,n \times Sin.\,(q+r)}$$

II. OPLOSSING. Men stelle voorts:

$$1° \quad Tang.\,\phi' = \frac{Sin.\,q \times Sin.\,(p+s)}{Sin.\,p \times Sin.\,(q+r)}$$

$$2° \quad Tang.\,\mu' = Tang.\,(\phi' - 45°) \times Tang. \left\{ 90° - \tfrac{1}{2}(r+s) \right\}$$

$$3° \quad m' = 90° - \tfrac{1}{2}(r+s) + \mu', \text{ en } n' = 90° - \tfrac{1}{2}(r+s) - \mu$$

en dan is:

$$4° \quad Z = \frac{a \times Sin.\,q \times Sin.\,(r+s)}{Sin.\,m' \times Sin.\,(q+r)} = \frac{a \times Sin.\,p \times Sin.\,(r+s)}{Sin.\,n' \times Sin.\,(p+s)}$$

(*Zie het vervolg, op bladz.* 253.) §. 650.

LITTERA A.

BEREKENING *van het opgegevene* VOORBEELD, *op Bladzijde* 251.

GEGEVENS $a = 5736^{m},7$ $\qquad$ $Log.\ a = 3,7586621$

$$\begin{array}{rl}
p = & 56^{\circ}\,17'\,33'',3 \\
q = & 40^{\circ}\,13'\,17'',5 \\
p+q = & 96^{\circ}\,30'\,50'',8 \\
r = & 47^{\circ}\,48'\,38'',5 \\
p+q+r = & 144^{\circ}\,19'\,29'',3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
r = & 47^{\circ}\,48'\,38'',5 \\
s = & 44^{\circ}\,38'\,17'',2 \\
r+s = & 92^{\circ}\,26'\,55'',7 \\
q = & 40^{\circ}\,13'\,17'',5 \\
q+r+s = & 132^{\circ}\,40'\,13'',3
\end{array}$$

I. OPLOSSING.

$$\begin{array}{rl}
Log.\,Sin.\,(r+s) = & 9,9996032 \\
Log.\,Sin.\,(p+q+r) = & \underline{9,7658098} \\
 & 19,7654130 \\
Log.\,Sin.\,r = & 9,8697771 \\
Log.\,Sin.\,(q+r+s) = & \underline{9,8664443} \\
Log.\,Tang.\,\varphi = & 0,0291916 \\
\varphi = & 46^{\circ}55'26'',943 \\
\varphi - 45^{\circ} = & 1^{\circ}55'26'',943 \\
\tfrac{1}{2}p = & 28^{\circ}\ 8'46'',65 \\
90^{\circ} - \tfrac{1}{2}p = & 61^{\circ}51'13'',35 \\
L.\,Tang.\,(\varphi^{\circ} - 45^{\circ}) = & 8,5262798 \\
L.\,Tang.\,(90^{\circ} - \tfrac{1}{2}p) = & \underline{0,2716552} \\
Log.\,Tang.\,\mu = & 8,7979350 \\
\mu = & 3^{\circ}35'35'',71 \\
90 - \tfrac{1}{2}p = & 61^{\circ}51'13'',35 \\
m = & 65^{\circ}26'49'',06 \\
n = & 58^{\circ}15'37'',64
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
Log.\,a = & 3,7586621 \\
Log.\,Sin.\,r = & 9,8697771 \\
Log.\,Sin.\,p = & \underline{9,9200619} \\
Log.\,Sin.\,n = & 9,9296479 \\
Log.\,Sin.\,p = & \underline{9,7658098} \\
Log.\,Z = & 3,8530434
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
Log.\,a = & 3,7586621 \\
Log.\,Sin.\,p = & 9,9200619 \\
Log.\,Sin.\,(r+s) = & \underline{9,9996032} \\
Log.\,Sin.\,m = & 9,9588395 \\
Log.\,Sin.\,(q+r+s) = & \underline{9,8664443} \\
Log.\,Z = & 3,8530434
\end{array}$$

II. OPLOSSING.

$$\begin{array}{rl}
Log.\,Sin.\,(p+q) = & 9,9971871 \\
Log.\,Sin.\,(q+r+s) = & \underline{9,8664443} \\
 & \underline{19,8636314} \\
Log.\,Sin.\,q = & 9,8100608 \\
Log.\,Sin.\,(p+q+r) = & \underline{9,7658098} \\
Log.\,Tang.\,\varphi' = & 0,2877608 \\
\varphi' = & 62^{\circ}43'41'',988 \\
\varphi' - 45^{\circ} = & 17^{\circ}43'41'',988 \\
\tfrac{1}{2}s = & 22^{\circ}19'\ 8'',6 \\
90^{\circ} - \tfrac{1}{2}s = & 67^{\circ}40'51'',4 \\
Log.\,Tang.\,(\varphi' - 45^{\circ}) = & 9,5047231 \\
L.\,Tang.\,(90^{\circ} - s) = & \underline{0,3866673} \\
Log.\,Tang.\,\mu' = & 9,8913904 \\
\mu' = & 37^{\circ}54'33'',07 \\
90^{\circ} - s = & 67^{\circ}40'51'',40 \\
m' = & 105^{\circ}35'24'',47 \\
n' = & 29^{\circ}46'18'',33
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
Log.\,a = & 3,7586621 \\
Log.\,Sin.\,q = & 9,8100608 \\
Log.\,Sin.\,s = & \underline{9,8467245} \\
Log.\,Sin.\,n' = & 9,6959597 \\
Log.\,Sin.\,(q+r+s) = & \underline{9,8664443} \\
Log.\,Z = & 3,8530434
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
Log.\,a = & 3,7586621 \\
Log.\,Sin.\,s = & 9,8467245 \\
Log.\,Sin.\,(p+q) = & \underline{9,9971871} \\
Log.\,Sin.\,m' = & 9,9837205 \\
Log.\,Sin.\,(p+q+r) = & \underline{9,7658098} \\
Log.\,Z = & 3,8530434
\end{array}$$

Men vindt derhalve $Z = 7129^{m},243$ voor den afstand der voorwerpen.

§. 650. III. Geval. *Fig.* 247. Wanneer het verlengde van de lijn, welke de voorwerpen vereënigt, de basis doorsnijdt; dan blijven de formulen dezelfde, als voor het tweede geval, mits men de hoeken q en r negatief neme.

§. 651. Voorbeeld *op het tweede geval.* Gegeven $a = 3728^m,3$, $p = 63^\circ\ 17'\ 20''$; $q = 58^\circ\ 17'\ 20''$; $r = 45^\circ\ 19'\ 40''$ .... en $s = 57^\circ\ 9'\ 10''$; dan zal $Z = 5569^m,661$ zijn.

§. 652. Voorbeeld *op het derde geval.* Gegeven $a = 4793^m,7$; $p = 73^\circ\ 8'\ 50''$; $q = 63^\circ\ 33'\ 10''$; $r = 33^\circ\ 17'\ 20''$; .... en $s = 55^\circ\ 13'\ 40''$; de waarde van Z te vinden?

§. 653. XI. Vraagstuk. *Fig.* 245–247. *Onderstellende, dat de afstand van twee voorwerpen A en B bekend zij, en dat men, uit twee andere voorwerpen, (of bijzondere standpunten,) D en C, de hoeken BDA, ADC, DCB en BCA, of p, q, r en s, hebbe waargenomen, vraagt men: om, met behulp dezer gegevens, zoowel den afstand dezer twee voorwerpen, of standpunten D en C, als derzelver afstanden tot de twee eerste voorwerpen, A en B, te vinden?*

Oplossing. I. Geval. *Fig.* 245. Dit vraagstuk is van het voorgaande slechts daarin onderscheiden: dat aldaar de afstand CD bekend was, en naar den afstand AB gevraagd werd; terwijl in het tegenwoordige AB gegeven is, en CD moet bepaald worden; voor het overige zijn de gegevens dezelfde, en de hoeken m, n, m', n', welke dezelfde zijn, als de hoeken ABD, BAD, BAC en ABC, in de figuur, worden, onafhankelijk van eenigen der afstanden, door de vergelijkingen (1), (2) en (3), der eerste en tweede oplossingen van het eerste geval van het voorgaande vraagstuk gevonden. Dezen nu door de berekening dezer vergelijkingen bekend geworden zijnde, volgt, (dezelfde notatie als in het voorgaande vraagstuk behoudende,)

uit den driehoek ABD, $\left\{\begin{array}{l} D \;= Z \times Sin.\, n \;: Sin.\, p \\ D' \;= Z \times Sin.\, m : Sin.\, p \end{array}\right\}$

uit den driehoek ABC, $\left\{\begin{array}{l} D'' = Z \times Sin.\, m' : Sin.\, s \\ D''' = Z \times Sin.\, n' : Sin.\, s \end{array}\right\}$

uit den driehoek BCD, . . . $a = D \times Sin.\,(p + q + r) : Sin.\, r$

uit den driehoek ACD, . . . $a = D''' \times Sin.\,(q + r + s) : Sin.\, q$

Het geheele zamenstel der vergelijkingen, waardoor de begeerde afstanden gevonden worden, is dan het volgende:

1° Stel $Tang.\, \phi = \dfrac{Sin.\,(r + s) \times Sin.\,(p + q + r)}{Sin.\, r \times Sin.\,(q + r + s)}$

2° $Tang.\, \mu = Tang.\,(\phi - 45^\circ) \times Tang.\,(90^\circ - \tfrac{1}{2} p)$

3° $m =$

3° $m = (90^\circ - \frac{1}{2}p) + \mu$ en $n = (90^\circ - \frac{1}{2}p) - \mu$

4° Stel, $Tang.\,\phi' = \frac{Sin.(p+q) \times Sin.(q+r+s)}{Sin.\,q \times Sin.(p+q+r)}$

. 5° $Tang.\,\mu' = Tang.(\phi' - 45^\circ) \times Tang.(90^\circ - \frac{1}{2}s)$

6° $m' = (90^\circ - \frac{1}{2}s) + \mu'$ en $n' = (90^\circ - \frac{1}{2}s) - \mu'$

Wanneer deze vergelijkingen naar behooren berekend zijn; dan moet 1° $(p+q)+(r+s)+m+m' = 360^\circ$, en 2° $q+r = n+n'$ zijn. Voorts is

7° $D = Z \times Sin.n : Sin.p$ . . 8° $D' = Z \times Sin.m : Sin.p$

9° $D'' = Z \times Sin.m' : Sin.s$ . . 10° $D''' = Z \times Sin.n' : Sin.s$

en eindelijk:

11° $a = \frac{D \times Sin.(p+q+r)}{Sin.r} = \frac{D''' \times Sin.(q+r+s)}{Sin.q}$

De laatste dezer vergelijkingen geeft eene dubbelde waarde voor a, en strekt alzoo tot eene bevestiging van de juistheid der berekening; nogtans kan men de gevondene uitkomst ook nog beproeven door

$$D'' = \frac{a \times Sin.(p+q)}{Sin.(p+q+r)} \quad \text{en} \quad D' = \frac{a \times Sin.(r+s)}{Sin.(q+r+s)}$$

welke, indien alles naar behooren berekend is, dezelfde uitkomsten als N° (8) en (9) moeten geven. Wij herinneren nog: dat, wanneer ϕ of ϕ' kleiner dan 45° mogten zijn, μ of μ' negatief worden, in welk geval, de teekens van μ of μ', in N° (3) of (6), moeten worder omgekeerd.

§. 654. Voorbeeld. *Fig.* 248. *De afstand der middelpunten van den* St. Laurens *Toren te* Rotterdam, *tot den Toren van de* St. Jan's *kerk te* Gouda, *door de schakel der groote driehoeken, welke een vervolg uitmaken, van den middags-cirkel van* Mechain *en* Delambre, *bevonden zijnde, ten naauwkeurigste gelijk te zijn aan* 18416,921 *meters, hebben wij, in den jare* 1803, *in de koepels van de Torens der dorpen,* Zoetermeer *en* Hazaartswoude, *(ten opzigte van* Rotterdam *en* Gouda, *als in de figuur wordt voorgesteld, gelegen,) men den* Sextant *waargenomen; uit* Zoetermeer, *den hoek van* Rotterdam *en* Gouda *gelijk* 73° 57′ 10″, *van* Gouda *met* Hazaartswoude *gelijk* 52° 1′ 50″; *uit den Toren van* Hazaartswoude, *den hoek van* Zoetermeer *met* Rotterdam *gelijk* 35° 34′ 20″, *en van* Rotterdam *met* Gouda *gelijk* 61° 6′ 30″. *Hoe ver zijn de Torens dezer dorpen van elkander, en van de twee hoofdpunten,* Rotterdam *en* Gouda, *gelegen?* Zie de berekening van dit voorbeeld *op de volgende Bladzijde.* Littera AA.

(*Zie vervolg, op Bladz.* 256.)

LITTERA AA.

BEREKENING *van de afstanden van* Zoetermeer *en* Hazaartswoude *tot elkander en tot* Rotterdam *en* Gouda.

GEGEVENS $Z = 18416^{m},921$ en $\text{Log.}\,Z = 4,2652170$

Uit Zoetermeer: Rotterdam *en* Gouda $= 73^{\circ}\,57'\,10'' = p$; Gouda *en* Hazaartsw. $= 52^{\circ}\,1'\,50'' = q$

Uit Hazaartswoude: Zoetermeer *en* Rotterdam $= 35^{\circ}\,34'\,20'' = r$; Rotterdam *en* Gouda $= 61^{\circ}\,6'\,30'' = s$

$p + q = 125^{\circ}\,59'\,00''$

$p + q + r = 161^{\circ}\,33'\,20''$

$r + s = 96^{\circ}\,40'\,50''$

$q + r + s = 148^{\circ}\,42'\,40''$

Berekening van m en n.

$\text{Log. Sin.}\,(r+s) = 9,9970412$

$\text{Log. Sin.}\,(p+q+r) = 9,5002159$

19.4972571

$\text{Log. Sin.}\,r = 9,7647205$

$\text{Log. Sin.}\,(q+r+s) = 9,7154630$

$\text{Log. Tang.}\,\phi = 0,0170736$

$\phi = 46^{\circ}\,7'\,33'',444$

$\phi - 45^{\circ} = 1^{\circ}\,7'\,33'',444$

$\frac{1}{2}p = 36^{\circ}\,58'\,35''$

$90^{\circ} - \frac{1}{2}p = 53^{\circ}\,1'\,25''$

$\text{Log. Tang.}\,(\phi - 45^{\circ}) = 8,2934550$

$\text{L. Tang.}\,(90^{\circ} - \frac{1}{2}p) = 0,1232580$

$\text{Log. Tang}\,\mu = 8,4167130$

$\mu = 1^{\circ}\,29'\,43'',187$

$90^{\circ} - \frac{1}{2}p = 53^{\circ}\,1'\,25''$

$m = 54^{\circ}\,31'\,8'',187$

$n = 51^{\circ}\,31'\,41'',813$

$\text{Log.}\,Z = 4,2652170$

$\text{Log. Sin.}\,n = 9,8937147$

$14,1589317$

$\text{Log. Sin.}\,p = 9,9827388$

$\text{Log.}\,D = 4,1761929$

$\text{Log.}\,Z = 4,2652170$

$\text{Log. Sin.}\,m' = 9,9965783$

$14,2617943$

$\text{Log. Sin.}\,s = 9,9422734$

$\text{Log.}\,D'' = 4,3195219$

$\text{Log.}\,D = 4.1761929$

$\text{Log. Sin.}\,(p+q+r) = 9,5002159$

$13,6764088$

$\text{Sin. Log.}\,r = 9,7647205$

$\text{Log.}\,a = 3,9116883$

Berekening van m' en n'

$\text{Log. Sin.}\,(p+q) = 9,9080494$

$\text{Log. Sin.}\,(q+r+s) = 9,7154630$

19.6235124

$\text{Log. Sin.}\,q = 9,8967130$

$\text{Log. Sin.}\,(p+q+r) = 9,5002159$

$\text{Log. Tang.}\,\phi' = 0,2265835$

$\phi' = 59^{\circ}\,18'\,40''$

$\phi' - 45^{\circ} = 14^{\circ}\,18'\,40''$

$\frac{1}{2}s = 30^{\circ}\,33'\,15''$

$90^{\circ} - \frac{1}{2}s = 59^{\circ}\,26'\,45''$

$\text{Log. Tang.}\,(\phi' - 45^{\circ}) = 9,4067161$

$\text{L. Tang.}\,(90^{\circ} - \frac{1}{2}s) = 0,2289131$

$\text{Log. Tang.}\,\mu' = 9,6356292$

$\mu' = 23^{\circ}\,22'\,16'',8$

$90^{\circ} - \frac{1}{2}s = 59^{\circ}\,26'\,45''$

$m' = 82^{\circ}\,49'\,01'',8$

$n' = 36^{\circ}\,04'\,28'',2$

$\text{Log.}\,Z = 4,2652170$

$\text{Log. Sin.}\,m = 9,9107884$

$14,1760054$

$\text{Log. Sin.}\,p = 9,9827388$

$\text{Log.}\,D' = 4,1932666$

$\text{Log.}\,Z = 4,2652170$

$\text{Log. Sin.}\,n' = 9,7699949$

$14,0352119$

$\text{Log. Sin.}\,s = 9.9422734$

$\text{Log.}\,D''' = 4,0929385$

$\text{Log.}\,D''' = 4,0929385$

$\text{Log. Sin.}\,(q+r+s) = 9,7154630$

$13,8084015$

$\text{Log. Sin.}\,q = 9,8967130$

$\text{Log.}\,a = 3,9116885$

Het blijkt uit deze berekening: dat de afstanden van

$$\textit{Zoetermeer tot}\begin{cases}\textit{Rotterdam} = D & = 15003^m, 51\\ \textit{Gouda} = D' & = 15605^m, 10\end{cases}$$

$$\textit{Hazaartswoude tot}\begin{cases}\textit{Rotterdam} = D'' & = 20869^m, 97\\ \textit{Gouda} = D''' & = 12386^m, 21\end{cases}$$

$$\textit{Zoetermeer en Hazaartswoude} = a \quad = 8159^m, 97$$

welke afstanden nog, op verscheidene andere wijzen, door andere waarnemingen en andere bekende afstanden, aldus bevonden zijn.

§. 655. II. Geval. *Fig.* 246. Snijdt de lijn, welke de standpunten C en D vereënigt, de lijn, die van het één tot het ander voorwerp loopt; dan zal men, even als in het tweede geval van het vorig vraagstuk, vinden: dat, wanneer men

1° $Tang.\ \phi = \dfrac{Sin.\ s \times Sin.\ (q+r)}{Sin.\ r \times Sin.\ (p+s)}$

2° $Tang.\ \mu = Tang.\ (\phi - 45°) \times Tang.\left\{90° - \tfrac{1}{2}(p+q)\right\}$

3° $m = 90° - \tfrac{1}{2}(p+q) + \mu$; en $n = 90° - \tfrac{1}{2}(p+q) - \mu$

4° $Tang.\ \phi' = \dfrac{Sin.\ q \times Sin.\ (p+s)}{Sin.\ p \times Sin.\ (q+r)}$

5° $Tang.\ \mu' = Tang.\ (\phi' - 45°) \times Tang.\left\{90° - \tfrac{1}{2}(r+s)\right\}$

6° $m' = 90° - \tfrac{1}{2}(r+s) + \mu'$; en $n' = 90° - \tfrac{1}{2}(r+s) - \mu'$

stelt, alsdan

7° $D = Z \times Sin.\ m : Sin.\ (p+q)$

8° $D' = Z \times Sin.\ n : Sin.\ (p+q)$

9° $D'' = Z \times Sin.\ m' : Sin.\ (r+s)$

10° $D''' = Z \times Sin.\ n' : Sin.\ (r+s)$

11° $a = \dfrac{D \times Sin.(p+s)}{Sin.\ s} = \dfrac{D' \times Sin.(q+r)}{Sin.\ r} = \dfrac{D'' \times Sin.\ (q+r)}{Sin.\ q}$

$= \dfrac{D''' \times Sin.\ (p+s)}{Sin.\ p}$

zal zijn, terwijl, de zes eerste vergelijkingen berekend zijnde, dezelve, met behulp der vergelijkingen, $180° - (p+q) = m+n$; $180° - (r+s) = m'+n'$; en voornamelijk, door $m+n' = 180° - \ldots (q+r)$ en $m'+n = 180° - (p+q)$, zullen beproefd worden.

§. 656. III. Geval. *Fig.* 247. Indien niet de lijn, welke de voorwerpen vereënigt, maar wel derzelver verlengde, de lijn CD snijdt; dan zullen de hoeken q en r negatief worden, en men zal dus, door, in de vergelijkingen van het voorgaande geval, de teekens behoorlijk

lijk te veranderen, de bijzondere vergelijkingen voor dit geval verkrijgen. Wij zullen dit aan des Leerlings vlijt overlaten.

§. 657. XII. VRAAGSTUK. *Fig.* 249. *Ondersteld zijnde, dat men, uit een standpunt P, de hoeken, APB en BPC, onder welke drie voorwerpen, welker onderlinge afstand bekend is, gezien worden, door waarneming bepaald hebbe, vraagt men: uit deze gegevens, de afstanden van dit standpunt tot elk dezer voorwerpen te vinden?*

OPLOSSING. Om, in de oplossing van dit gewigtig vraagstuk, waarvan SNELLIUS het eerste denkbeeld gegeven heeft, met de meest mogelijke duidelijkheid, te werk te gaan, zullen wij de voorwerpen, zoo als zij uit het standpunt P gezien worden, van de regter naar de linkerhand gaande, A het eerste, B het tweede, C het derde voorwerp noemen; voorts den afstand van het eerste tot het tweede voorwerp, dat is, $AB = a$; dien van het tweede tot het derde voorwerp, of $BC = b$; dien van het derde tot het eerste voorwerp, of $AC = c$; deze afstanden, als bekend, aannemende, kunnen de hoeken des driehoeks ABC, indien deze niet, door waarneming, gegeven zijn, volgens het vierde geval, door berekening gevonden worden. Echter is het, in de oplossing, welke wij hier geven zullen, voldoende, den hoek B aan het tweede voorwerp te kennen. Eindelijk zullen wij de afstanden van het standpunt P, tot de eerste, tweede en derde voorwerpen, door D, D' en D'' uitdrukken. Wij merken op: dat, wanneer de hoeken PAB en PCB bekend waren, de afstanden D, D' en D'', door het eerste geval van de oplossing der scheefhoekige driehoeken, ABP en CBP, zouden gevonden worden; indien derhalve deze hoeken, die wij $PAB = p$ en $PCB = q$ zullen stellen, kunnen gevonden worden, zal de geheele zwarigheid ontknoopt en het vraagstuk opgelost zijn.

Deze hoeken kunnen nu gemakkelijk gevonden worden; want de driehoeken PAB en PCB, geven ons (*III. Stell.*) de evenredigheden:

$$Sin.\, m : a = Sin.\, p : D'$$
$$b : Sin.\, n = D' : Sin.\, q$$

welke, met elkander vermenigvuldigd zijnde, deze andere evenredigheid (*XVI. Stell. II. B.*) voortbrengen:

$$b\, Sin.\, m : a\, Sin.\, n = Sin.\, p : Sin.\, q$$

waaruit wederom (*VII. Stell. II. B.*) volgt:

$$b\, Sin.\, m + a\, Sin.\, n : b\, Sin.\, m - a\, Sin.\, n = Sin.\, p + Sin.\, q : Sin.\, p - Sin.\, q$$

of, eindelijk, omdat (*VII. Stell. VIII. B.*)

$$Sin.\, p + Sin.\, q : Sin.\, p - Sin.\, q = Tang.\, \tfrac{1}{2}(p+q) : Tang.\, \tfrac{1}{2}(p-q)$$

 is,

is, de evenredigheid

$$b\ Sin.\ m + a\ Sin.\ n : b\ Sin.\ m - a\ Sin.\ n = Tang.\ \tfrac{1}{2}(p+q) : Tang.\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$

waaruit, als naar gewoonte, de vergelijking:

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}(p-q) = \frac{b\ Sin.\ m - a\ Sin.\ n}{b\ Sin.\ m + a\ Sin.\ n} \times Tang.\ \tfrac{1}{2}(p+q)$$

wordt afgeleid.

Nu bestaat het laatste lid dezer vergelijking uit geheel bekende termen; want, omdat de som van de hoeken van eenen vierhoek vier regte hoeken bedraagt, heeft men:

$$(p+q) + (B+m+n) = 360^\circ$$

en hieruit volgt dan:

$$\tfrac{1}{2}(p+q) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(B+m+n)$$

Stellen wij dan, kortheidshalve:

$$\tfrac{1}{2}(p+q) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(B+m+n) = M$$
$$\tfrac{1}{2}(p-q) = N;$$

dan zal

$$Tang.\ N = \frac{b\ Sin.\ m - a\ Sin.\ n}{b\ Sin.\ m + a\ Sin.\ n} \times Tang.\ M$$

zijn, welke vergelijking, indien men den teller en noemer der breuk, welke in derzelver tweede lid voorkomt, door $b\ Sin.\ m$ deelt, en $a\ Sin.\ n : b\ Sin.\ m = Tang.\ \phi$, stelt, in deze volgende

$$Tang.\ N = \frac{1 - Tang\ \phi}{1 + Tang.\ \phi} \times Tang.\ M$$

verandert, of (volgens *I. Gev. IV. Stell. VIII. B. Verg.* (21)) in

$$Tang.\ N = Tang.\ (45^\circ - \phi) \times Tang.\ M$$

Wanneer nu N, door deze vergelijking, gevonden is; dan zal, omdat M en N de halve som en het halve verschil der hoeken p en q is,

$$p = M + N \quad \text{en} \quad q = M - N$$

zijn. De hoeken p en q alzoo bekend zijnde, zullen ook, wanneer de hoeken A en C, door waarneming of berekening, bekend zijn, de andere hoeken der figuur bekend worden; namelijk

$$Hoek\ ABP = 180^\circ - (m+p)$$
$$Hoek\ CBP = 180^\circ - (n+q)$$
$$Hoek\ CAP = p - A; \quad \text{en} \quad Hoek\ ACP = q - C$$

Stellende dan alle deze hoeken bekend; dan zal men, met behulp der *III. Stelling*, voor elk der begeerde afstanden, twee onderscheidene uitdrukkingen vinden, welke in het volgende stelsel van vergelijkingen voorkomen.

Stel-

Stelsel van Vergelijkingen.

1° Stel $Tang.\,\phi = \frac{a\ Sin.\,n}{b\ Sin.\,m}$

2° $M = 180° - \frac{1}{2}(B + m + n)$

of, $M = \frac{1}{2}(B - m - n)$

Men gebruikt de laatste vergelijking, indien het punt B beneden de lijn AC valt. (Zie onderstaande aanmerking.)

3° $Tang.\,N = Tang.\,(45° - \phi) \times Tang.\,M$

Ten blijke van de juistheid van dit eerste gedeelte der berekening, moet $B + m + n + p + q = 360°$ zijn.

4° $p = M + N$, en $q = M - N$

5° $D' = \frac{a\ Sin.\,p}{Sin.\,m} = \frac{b\ Sin.\,q}{Sin.\,n}$

6° $D = \frac{a\ Sin.\,(p + m)}{Sin.\,m} = \frac{c\ Sin.\,(q - C)}{Sin.\,(m + n)}$

7° $D'' = \frac{b\ Sin.\,(q + n)}{Sin.\,n} = \frac{c\ Sin.\,(p - A)}{Sin.\,(m + n)}$

§. 658. AANMERKING. Dit vraagstuk is aan onderscheidene gevallen onderworpen, welke in de gevondene vergelijkingen, op eene algemeene wijze, zijn opgesloten.

1° Indien het punt B in de lijn AC valt; dan is $c = a + b$ en hoek $B = 180°$. De vergelijking (2) wordt, in dit geval, $M = 180° - (90° + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n) = 90° - \frac{1}{2}(m + n)$ en de hoeken A en C worden gelijk nul. De andere vergelijkingen blijven dezelfde.

2° Valt het punt B, beneden de lijn AC; dan is klaarblijkelijk $p + q = B - m - n$, en de tweede vergelijking verandert in $M = \frac{1}{2}(B - m - n)$, en daar, in dit geval, de hoeken A en C negatief worden, moeten de teekens dezer hoeken, in de vergelijkingen (6) en (7), van $-$ in $+$ veranderen.

3° Eindelijk kan het standpunt P binnen den driehoek vallen. In dit geval, is de som der hoeken m en $n > 180°$; alle vergelijkingen blijven dan dezelfde; de hoeken $q - C$ en $q - A$ worden wel negatief, maar aangezien de Sinus van $m + n$ insgelijks negatief is, maakt zulks geene verandering in het teeken van de tweede waarden van D en D'', welke, even als de eerste waarden, positief blijven.

Men moet hier nog bijvoegen: dat men, in de berekening van de vergelijking (3), op de teekens van $Tang.\,(45° - \phi)$ en $Tang.\,M$, behoorlijk acht moeten geven, zijnde het teeken van $Tang.\,(45° - \phi)$ negatief, indien $\phi > 45°$; en $Tang.\,M$ negatief, wanneer $M > 90°$ is; het

het zijn deze teekens, welke het teeken van den hoek *N* bepalen, hebbende die hoek altijd hetzelfde teeken als zijne Tangens.

§. 659. VOORBEELD. *Fig.* 250. *Ik bevond, in den jare* 1805, *op het midden van het plat van den Toren van* Wijk aan Zee, *met den Sextant, van de regter naar de linkerhand gaande, den hoek van den Kerktoren van* Haarlem *met den Westertoren van* Amſterdam, 42° 37′ 5″; *den hoek van den Westertoren van* Amſterdam *met den Kerktoren van* Alkmaar, 89° 49′ 15″; *de driehoek van de middelpunten der gezegde Torens van* Haarlem, Amſterdam *en* Alkmaar, *was te voren, met den herhalings-cirkel van* BORDA, *genomen en bevonden te zijn;* Amſterdam *en* Alkmaar, *uit* Haarlem 77° 54′ 54″, 8; Alkmaar *en* Haarlem, *uit* Amſterdam 69° 11′ 54″, 4, *en* Haarlem *en* Amſterdam, *uit* Alkmaar . . . 32° 53′ 10″, 8: *men kende ook de Logarithmen van de afſtanden dezer plaatſen in meters*

Van Haarlem *tot* Amſterdam = 4, 2250596
—— Amſterdam *tot* Alkmaar = 4, 4805477
—— Alkmaar *tot* Haarlem = 4, 4610064

Men vraagt: hoe ver de Toren van Wijk aan Zee *van de opgenoemde Torens van elk dezer plaatſen gelegen is?*

Zie de oplosſing op de volgende bladzijde, Littera AAA.

§. 660. AANMERKING. In de berekening van het voorgaande voorbeeld, vindt men eenige Logarithmen, welke met een * geteekend zijn: deze Logarithmen moeten van de ſom der Logarithmen, onder welke zij geplaatst zijn, ingevolge de gegevene vergelijkingen, afgetrokken worden; dan, deze aftrekking kan in eene optelling veranderd worden, mits men het arithmetisch complement van het achterſte cijfer tot tien, en van al de andere cijfers tot negen neme, en deze arithmetiſche complementen met de cijfers, welke in dezelfde kolom ſtaan, naar den gewonen regel, optelle. (Zie *I. C.* §. 119, *pag.* 80 en §. 890, *pag.* 467.). In de berekening van de waarde van *Log. Tang.* φ werkt men aldus: het arithm. compl. van 8 en 7 tot 10 is 2 en 3; 2 + 3 + 9 + 6 = 20 = de ſom der éénheden; de arithm. compl. van 7 en 7 tot 9 zijn 2 en 2; 2 + 2 + 7 + 9 + 2 = 22 = de ſom der tweede kolom enz. Meestal ſchrijft men in de plaats van deze Logarithmen de complementen, (zie §. 890, I. C.) doch het is ons toegeſchenen, dat het beter is de Logarithmen zelve te ſchrijven, en, onder het optellen, de complementen der afzonderlijke cijfers te nemen.

(*Zie vervolg, op bladz.* 262.)

LITTERA AAA.

Berekening *van den afstand van den Toren van* Wijk aan Zee, *tot den Kerktoren van* Haarlem, *den* Westertoren *van* Amsterdam, *en den Kerktoren van* Alkmaar.

Gegevens.

$$
\begin{aligned}
Log.\,a &= 4,2250596\\
Log.\,b &= 4,4805477\\
Log.\,c &= 4,4610064\\
A &= 77^\circ 54' 54'',8\\
B &= 69^\circ 11' 54'',4\\
C &= 32^\circ 53' 10'',8\\
m &= 42^\circ 37' 05'',0\\
n &= 89^\circ 49' 15'',0\\
m + n &= 132^\circ 26' 20'',0\\
B &= 69^\circ 11' 54'',4\\
B + m + n &= 201^\circ 38' 14'',4\\
\tfrac{1}{2}(B + m + n) &= 100^\circ 49' 07'',2\\
M &= 79^\circ 10' 52'',8.
\end{aligned}
$$

Berekening *van* p, q, *enz.*

$$
\begin{aligned}
Log.\,a &= 4,2250596\\
Log.\,Sin.\,n &= 9,9999979\\
Log.\,b &= 4,4805477\\
Log.\,Sin.\,m &= \underline{9,8306578^*}\\
Log.\,Tang.\,\varphi &= 9,9138520\\
\varphi &= 39^\circ 21' 15'',2\\
45^\circ - \varphi &= 5^\circ 38' 44'',8\\
Log.\,Tang.\,(45^\circ\ \ \varphi) &= 8,9950099 +\\
Log.\,Tang.\,M &= \underline{0,7187442 +}\\
Log.\,Tang.\,N &= 9,7137541 +\\
N &= 27^\circ 21' 11'',34 +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= 79^\circ 10' 52'',8\\
N &= \underline{27^\circ 21' 11'',34}\\
p = M + N &= 106^\circ 32' 04'',14\\
q = M - N &= \underline{51^\circ 49' 41''.46}\\
p &= 106^\circ 32' 04'',14\\
m &= 42^\circ 37' 05'',00\\
p + m &= 149^\circ 09' 09''.14\\
q &= 51^\circ 49' 41''.46\\
n &= 89^\circ 49' 15'',00\\
q + n &= 141^\circ 38' 56'',46\\
q &= 51^\circ 49' 41'',46\\
C &= 32^\circ 53' 10'',80\\
q - C &= 18^\circ 56' 30'',66\\
p &= 106^\circ 32' 04'',14\\
A &= 77^\circ 54' 54'',80\\
p - A &= 28^\circ 37' 09'',34
\end{aligned}
$$

Zijnde $p + q + m + n + B = 360^\circ$ ten proeve van de juistheid van dit eerste gedeelte der berekening.

Berekening *der afstanden.*

$$
\begin{aligned}
Log.\,a &= 4,2250596\\
Log.\,Sin.\,p &= 9,9816595\\
Log.\,Sin.\,m &= \underline{9,8306578^*}\\
Log.\,D' &= 4,3760613
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Log.\,b &= 4,4805477\\
Log.\,Sin.\,q &= 9,8955114\\
Log.\,Sin.\,n &= \underline{9,9999979^*}\\
Log.\,D' &= 4,3760612
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Log.\,a &= 4,2250596\\
Log.\,Sin.\,(p + m) &= 9,7099092\\
Log.\,Sin.\,m &= \underline{9,8306578^*}\\
Log.\,D &= 4,1043110
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Log.\,c &= 4,4610064\\
Log.\,Sin.\,(q - C) &= 9,5113597\\
Log.\,Sin.\,(m + n) &= \underline{9,8680549^*}\\
Log\ D &= 4,1043112
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Log.\,b &= 4,4805477\\
Log.\,Sin.\,(q + n) &= 9,7927257\\
Log.\,Sin.\,n &= \underline{9,9999979^*}\\
Log.\,D'' &= 4,2732755
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Log.\,c &= 4,46\ 0064\\
Log.\,Sin.\,(p - A) &= 9,6803237\\
Log.\,Sin.\,(m + n) &= \underline{9,8680549^*}\\
Log.\,D'' &= 4,2732752
\end{aligned}
$$

Uitkomsten *dezer Berekening.*

Afstand van *Wijk aan Zee* tot *Haarlem* $= 12714^m,844$.

Afstand van *Wijk aan Zee* tot *W. T. Amsterdam* $= 23771^m,752$.

Afstand van *Wijk aan Zee* tot *Alkmaar* $= 18761^m,832$.

Hoek van *Wijk aan Zee* en *Haarlem*, uit *Amsterdam*, W. Toren $= 30^\circ 50' 50'',86$.

Hoek van *Wijk aan Zee* en *Alkmaar*, uit *Amsterdam*, W. Toren $= 38^\circ 21' 03'',54$.

Hoek van *Wijk aan Zee* en *Alkmaar*, uit *Haarlem* $= 28^\circ 37' 09'',34$.

Hoek van *Wijk aan Zee* en *Haarlem*, uit *Alkmaar* $= 18^\circ 56' 30'',66$.

§. 661. Men zal zich, door het berekenen van de volgende waarnemingen, met de behandeling van dit vraagstuk meer eigen kunnen maken.

VOORBEELD. *Het is, door de waarnemingen van den Heer* KRAIJENHOFF *en ons, met den herhalings-cirkel van* BORDA, *in* 1802 *in het werk gesteld, gebleken: dat de hoeken, onder welke de middelpunten van de Torens der hoofdkerken van de* Haag, Rotterdam *en* Gouda, *uit het middelpunt van het* Observatorium *van de* Koninklijke Hooge School *te* Leijden, *gezien worden, zijn als volgt: de* Haag *en* Rotterdam *gelijk* $54^\circ 6' 8'',9$; Rotterdam *en* Gouda *gelijk* $43^\circ 37' 59'',5$. *Naderhand bleek het: dat de Logarithmen der afstanden in meters was*

Van de Haag *tot* Rotterdam $= 4,3270577$

Van Rotterdam *tot* Gouda $= 4,2652160$

en dat de hoek van Gouda *en de* Haag, *uit* Rotterdam *waargenomen, gelijk is aan* $92^\circ 26' 28'',8$ *is. Men vraagt: hoe ver het middelpunt van het voornoemde* Observatorium *van de middelpunten van de Torens dezer plaatsen verwijderd is?* Men vindt

Observatorium te Leijden *tot* de Haag $= 15119^m,187$; Rotterdam $= 26212^m,391$; Gouda $= 22439^m,167$

Men zal uit eene gewone kaart zien, hoe de driehoek ten opzigte van het standpunt gelegen is.

Oplossing van eenige Vraagstukken van minder aanbelang.

§. 662. XIII. VRAAGSTUK. *Van eenen gelijkbeenigen driehoek, zijn de basis* $= a$, *en de opstaande zijden elk* $= b$ *bekend: men vraagt den tophoek en de gelijke hoeken aan de basis te vinden?*

OPLOSSING. De loodlijn, welke uit den tophoek op de basis valt, deelt den tophoek en de basis in twee gelijke deelen, en den gelijkbeenigen driehoek in twee gelijke regthoekige driehoeken: nu is *II. Stelling*, (A en B de hoeken aan de basis, en C de tophoek zijnde,) $\frac{1}{2} a : b = Cos.\ A = Sin.\ \frac{1}{2} C$. Men zal door deze vergelijking de hoeken vinden. De loodlijn zal gelijk aan $b \times Sin.\ A = \sqrt{(b^2 - \frac{1}{4} a^2)}$.

§. 663. XIV. VRAAGSTUK. *Fig.* 240. *Eene zijde* c, *met den overstaanden hoek* C, *benevens de som of het verschil der twee andere zijden,* a *en* b, *eens driehoeks gegeven zijnde, deszelfs onbekende hoeken en zijden te vinden?*

OPLOSSING. Volgens de *III. Stelling*, is $a : b = Sin.\ A : Sin.\ B$, en hieruit volgt (*VIII en VII. Stell. II. B.*)

$a +$

$$a + b : Sin. A + Sin. B = a : Sin. A$$

wederom is (*III. Stell.*) $a : Sin. A = c : Sin. C$; derhalve zal ook (*I. Stell. II. B.*)

$$a + b : Sin. A + Sin. B = c : Sin. C$$

of, $a + b : c = Sin. A + Sin. B : Sin. C$

zijn. Nu is (*VI. Stell. VIII. B.*) $Sin. A + Sin. B = 2\, Sin. \tfrac{1}{2}(A + B) \times Cos. \tfrac{1}{2}(A - B)$; derhalve is:

$$a + b : c = 2\, Sin. \tfrac{1}{2}(A + B) \times Cos. \tfrac{1}{2}(A - B) : Sin. C$$

Omdat nu $A + B = 180^\circ - C$, en derhalve $\tfrac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C$ is, zal $Sin. \tfrac{1}{2}(A + B) = Sin. (90^\circ - \tfrac{1}{2}C) = Cos. \tfrac{1}{2}C$, en (volgens *IV. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $Sin. C = 2\, Sin. \tfrac{1}{2}C \times Cos. \tfrac{1}{2}C$ is, zal men, deze waarden van $Sin. \tfrac{1}{2}(A + B)$ en $Sin. C$ in de voorgaande evenredigheid overbrengende, en de termen der laatste reden door $2\, Cos. \tfrac{1}{2}C$ deelende, na omkeering der redens, verkrijgen:

$$c : a + b = Sin. \tfrac{1}{2}C : Cos. \tfrac{1}{2}(A - B)$$

Men zal op dezelfde wijze betoogen: dat

$$c : a - b = Cos. \tfrac{1}{2}C : Sin. \tfrac{1}{2}(A - B)$$

is. Het blijkt, uit deze evenredigheden, welke men ook uit de formulen voor de *II. Oplossing* van het *III. Geval*, *pag.* 242, kan afleiden: *dat elke zijde eens driehoeks tot de som van zijne twee andere zijden staat, gelijk de Sinus van de helft van den hoek, over de eerste zijde, tot de Cosinus van het halve verschil der hoeken, over de twee andere zijden*, — en wederom, — *dat elke zijde tot het verschil der twee andere zijden staat, gelijk de Cosinus van den halven hoek over die zijde tot de Sinus van het halve verschil der twee andere hoeken.*

1° Wanneer nu de som $a + b$, benevens de zijde c met den overstaan den hoek C gegeven zijn; dan heeft men:

$$Cos. \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a + b}{c} \times Sin. \tfrac{1}{2}C$$

$$A = (90^\circ - \tfrac{1}{2}C) + \tfrac{1}{2}(A - B), \text{ en } B = (90^\circ - \tfrac{1}{2}C) - \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$a - b = \frac{c \times Sin. \tfrac{1}{2}(A - B)}{Cos. \tfrac{1}{2}C}$$

$$a = \tfrac{1}{2}(a + b) + \tfrac{1}{2}(a - b), \text{ en } b = \tfrac{1}{2}(a + b) - \tfrac{1}{2}(a - b)$$

2° Is $a - b$ met c en C gegeven; dan zal

$$Sin. \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{c} \times Cos. \tfrac{1}{2}C$$

$$A = (90^\circ - \tfrac{1}{2}C) + \tfrac{1}{2}(A - B), \text{ en } B = (90^\circ - \tfrac{1}{2}C) - \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$a + b = \frac{c \times Cos. \tfrac{1}{2}(A - B)}{Sin. \tfrac{1}{2}C}$$

en $a = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)$, en $b = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)$ zijn; door welke vergelijkingen, de onbekende zijden en hoeken in getallen zullen kunnen berekend worden.

§. 664. XV. Vraagstuk. *Fig.* 251. *De opstaande zijden AC en BC, of b en a, benevens den tophoek C, gegeven zijnde, te vinden: hoe ver het toppunt C van het midden van de basis verwijderd is, alsmede de hoeken, welke de lijn CD, die tot het midden van de basis loopt, met de opstaande zijden maakt?*

Oplossing. Men stelle $CD = d$; hoek $ACD = r$ en hoek $BCD = s$; dan is (*VII. Stell.*) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times Cos.C$, en (*XX. St. III. B.*) $c^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4d^2$: uit deze twee vergelijkingen volgt:

$$4d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \times Cos.C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

waardoor de waarde van d kan gevonden worden; en welke, indien men dezelve, met behulp van het *V. Gev. III. Stell. VIII. B.*, onder de volgende gedaante

$$4d^2 = (a+b)^2 \times \left\{1 - \frac{4ab \times Sin^2.\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

stelt, en $4ab \times Sin^2.\frac{1}{2}C : (a+b)^2$ gelijk aan $Cos^2.\omega$ maakt, door de gewone Logarithmen-Tafel, zal kunnen berekend worden: doch men kan voor de waarde van d een kortere en sierlijke uitdrukking vinden. Indien men de evenredigheden

$$\tfrac{1}{2}c : b = Sin.r : Sin.D$$
$$a : \tfrac{1}{2}c = Sin.D : Sin.s$$

welke de driehoeken ADC en BCD geven, met elkander vermenigvuldigt; dan vindt men:

$$a : b = Sin.r : Sin.s$$

evenredigheid, welke ons leert: *dat de opstaande zijden eens driehoeks wederkeerig evenredig zijn met de Sinussen der hoeken, in welke de lijn, die de basis midden door deelt, den tophoek verdeelt.*

Uit deze evenredigheid volgt: (*VIII. Stell. II. B.* en *VII. Stell. VIII. B.*)

$$a + b : a - b = Tang.\tfrac{1}{2}(r+s) : Tang.\tfrac{1}{2}(r-s)$$

derhalve zal

$$Tang.\tfrac{1}{2}(r-s) = \frac{a-b}{a+b} \times Tang.\tfrac{1}{2}(r+s) = \frac{a-b}{a+b} \times Tang.\tfrac{1}{2}C \quad (\gamma)$$

Maar uit dezelfde evenredigheid volgt ook nog:

$$a + b : 2a = Sin.r + Sin.s : 2\,Sin.r$$
$$a + b : 2b = Sin.r + Sin.s : 2\,Sin.s$$

of,

of, omdat (*VI. Stell. VIII. B.*) $Sin. r + Sin. s = 2\, Sin. \tfrac{1}{2}(r+s) \times Cos. \tfrac{1}{2}(r-t) = 2\, Sin. \tfrac{1}{2} C \times Cos. \tfrac{1}{2}(r-s)$ en $r + s = C$ is,

$$a + b : 2a = Sin. \tfrac{1}{2} C \times Cos. \tfrac{1}{2}(r-s) : Sin. r$$
$$a + b : 2b = Sin. \tfrac{1}{2} C \times Cos. \tfrac{1}{2}(r-s) : Sin. s$$

het product van de overëénkomstige termen dezer evenredigheden geeft:

$$(a+b)^2 : 4ab = Sin^2. \tfrac{1}{2} C \times Cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s) : Sin. r \times Sin. s$$

en daarom is:

$$\frac{4ab \times Sin^2. \tfrac{1}{2} C}{(a+b)^2} = \frac{Sin. r \times Sin. s}{Cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s)}$$

Men kan dan de vergelijking (β), in de volgende veranderen:

$$4d^2 = (a+b)^2 \times \left\{ 1 - \frac{Sin. r \times Sin. s}{Cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s)} \right\}$$

maar (*V. Stell. VIII. B.*) $Sin. r \times Sin. s = \tfrac{1}{2} Cos. (r-s) - \tfrac{1}{2} Cos. (r+s) = \tfrac{1}{2} Cos. (r-s) - \tfrac{1}{2} Cos. C$ zijnde, zal de laatste wederom in

$$4d^2 = (a+b)^2 \times \left\{ \frac{Cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s) - \tfrac{1}{2} Cos. (r-s) + \tfrac{1}{2} Cos. C}{Cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s)} \right\}$$

veranderen. Nu is, (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*,) $Cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} Cos. (r-s)$, en om die reden $Cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s) - \tfrac{1}{2} Cos. (r-s) = \tfrac{1}{2}$, en

$$4d^2 = (a+b)^2 \times \left\{ \frac{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} Cos. C}{Cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s)} \right\}$$

welke vergelijking, wanneer men, in plaats van $\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} Cos. C$, (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) schrijft $Cos^2. \tfrac{1}{2} C$, in

$$4d^2 = (a+b)^2 \times \frac{Cos^2. \tfrac{1}{2} C}{Cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s)}; \text{ of in } d = \tfrac{1}{2}(a+b) \times \ldots \frac{Cos. \tfrac{1}{2} C}{Cos. \tfrac{1}{2}(r-s)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

verandert, ons leerende, *dat de lijn, welke de basis midden door deelt, gelijk is aan de halve som der opstaande zijden, vermenigvuldigd met de Cosinus van den halven ingesloten hoek, en gedeeld door de Cosinus van het halve verschil van deszelfs deelen.* En het blijkt nu: dat, wanneer a, b en C gegeven zijn, de afstand van het toppunt tot het midden van de basis, benevens de hoeken, welke de lijn, uit den tophoek tot het midden van de basis loopende, met de opstaande zijden maakt, door de vergelijkingen:

$$Tang. \tfrac{1}{2}(r-s) = \frac{a-b}{a+b} \times Tang. \tfrac{1}{2} C, \text{ en } d = \tfrac{1}{2}(a+b) \times \frac{Cos. \tfrac{1}{2} C}{Cos. \tfrac{1}{2}(r-s)}$$

zullen gevonden worden.

§. 665. XVI. VRAAGSTUK. *Fig.* 251. *De opstaande zijden en den tophoek eens driehoeks gegeven zijnde, de loodlijn, welke uit den tophoek,*

hoek, op de basis valt, benevens de hoeken, welke zij met de opstaande zijden, te vinden?

Oplossing. Men onderstelle CD loodregt op AB, en behoude dezelfde notatie als in het voorgaande vraagstuk; dan is, volgens de bekende eigenschappen des driehoeks, (*VIII. Stell. III. B. en IX. Stell.*) $cd = ab \times Sin. C$; derhalve $d = ab \times Sin. C : c$, of $d^2 = a^2 b^2 \times Sin^2. C : c^2$, maar nu is (*VII. Stell.*) $c^2 = a^2 - 2ab \times Cos. C + b^2$, en men verkrijgt derhalve

$$d^2 = \frac{a^2 b^2 \times Sin^2. C}{a^2 - 2ab \times Cos. C + b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

men zal door deze formule de loodlijn vinden.

De regthoekige driehoeken ADC en BDC, geven (*II. Stell.*) $d = b \times Cos. r = a \times Cos. s$; derhalve

$$a : b = Cos. r : Cos. s$$

$$a + b : a - b = Cos. r + Cos. s : Cos. r - Cos. s$$

dat is, volgens de *VIII. Stell. VIII. B.*

$$a + b : a - b = Cot. \tfrac{1}{2}(r + s) : Tang. \tfrac{1}{2}(r - s)$$

of, dat hetzelfde is,

$$a + b : a - b = Cot. \tfrac{1}{2} C : Tang. (r - s)$$

waaruit men voor de waarde van de Tangens van het halve verschil der deelen van den tophoek vindt:

$$Tang. \tfrac{1}{2}(r - s) = \frac{a - b}{a + b} \times Cot. \tfrac{1}{2} C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Volgens de *IV. Oplosf. III. Gev.* §. 640, *pag.* 245, kan de vergelijking (α) onder de volgende gedaante

$$d^2 = \frac{a^2 b^2 \times Sin^2. C}{(a + b)^2 \times \left\{1 - \frac{4ab}{(a + b)^2} \times Cos^2. \tfrac{1}{2} C\right\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

gebragt worden, en is, onder dien vorm gebragt zijnde, voor eene bijzondere herleiding vatbaar.

Uit de reeds opgenoemde regthoekige driehoeken, ADC en BCD, volgt: (*II. Stell. en VIII. Stell. II. B.*)

$$a + b : a = Cos. r + Cos. s : Cos. r$$

$$a + b : b = Cos. r + Cos. s : Cos. s$$

of, volgens de *VI. Stell. VIII. Boek*,

$$a + b : a = 2\, Cos. \tfrac{1}{2} C \times Cos. \tfrac{1}{2}(r - s) : Cos. r$$

$$a + b : b = 2\, Cos. \tfrac{1}{2} C \times Cos. \tfrac{1}{2}(r - s) : Cos. s$$

het product dezer evenredigheden geeft:

$$(a + b)^2 : ab = 4\, Cos^2. \tfrac{1}{2} C \times Cos^2. \tfrac{1}{2}(r - s) : Cos. r \times Cos. s$$

en

en hieruit volgt:

$$\frac{4ab \times Cos^2.\frac{1}{2}C}{(a+b)^2} = \frac{Cos.r \times Cos.s}{Cos^2.\frac{1}{2}(r-s)}$$

of, volgens de *V. Stell. VIII. B.*

$$\frac{4ab \times Cos^2.\frac{1}{2}C}{(a+b)^2} = \frac{\frac{1}{2}Cos.(r-s) + \frac{1}{2}Cos.C}{Cos^2.\frac{1}{2}(r-s)}$$

Hieruit volgt nu:

$$1 - \frac{4ab \times Cos^2.\frac{1}{2}C}{(a+b)^2} = \frac{Cos^2.\frac{1}{2}(r-s) - \frac{1}{2}Cos.(r-s) - \frac{1}{2}Cos.C}{Cos^2.\frac{1}{2}(r-s)}$$

welke, met behulp der Verg. (13) en (14), *V. Gev. III. Stell. VIII. B.* onder de volgende gedaante gebragt worden,

$$1 - \frac{4ab \times Cos^2.\frac{1}{2}C}{(a+b)^2} = \frac{Sin^2.\frac{1}{2}C}{Cos^2.\frac{1}{2}(r-s)}$$

brengende nu deze waarde in vergelijking (γ) over, dan verkrijgt men:

$$d = \frac{2ab}{a+b} \times Cos.\frac{1}{2}C \times Cos.\frac{1}{2}(r-s) \quad . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

Het blijkt dan, uit deze oplosſing: dat de gevraagde loodlijn, en de deelen, waarin zij den tophoek verdeelt, door de twee vergelijkingen

$$1^o \quad Tang.\frac{1}{2}(r-s) = \frac{a-b}{a+b} \times Cot.\frac{1}{2}C$$

$$2^o \quad d = \frac{2ab}{a+b} \times Cos.\frac{1}{2}C \times Cos.\frac{1}{2}(r-s)$$

zullen kunnen berekend worden.

§. 666. XVII. Vraagstuk. *Fig.* 252. *Om de hoogte van een verheven en afgelegen voorwerp ED te bepalen, heeft men, uit drie ſtandpunten, A, B en C, gelegen, in eene regte waterpas gaande lijn ABC, genomen, AB = m en BC = n meters; de hoogte hoeken EAD, EBD en ECD, of a, b en c waargenomen. Men vraagt: hoe, door deze gegevens, de voornoemde hoogte zal gevonden worden?*

Oplossing. Men ſtelle de begeerde hoogte $CD = H$; dan is, volgens de *I. Stelling*,

$$H = AD \times Tang.a = BD \times Tang.b = ED \times Tang.c$$

en hieruit volgt dan:

$$AD = H \times Cot.a;\; BD = H \times Cot.b;\; CD = H \times Cot.c$$

Nu is, volgens de *VII. Stell.* in de driehoeken *ABD* en *BCD*,

$$Cos.ABD = \frac{m^2 + H^2 \times Cot^2.b - H^2 \times Cot^2.a}{2mH \times Cot.b}$$

$$Cos.CBD = \frac{n^2 + H^2 \times Cot^2.b - H^2 \times Cot^2.c}{2nH \times Cot.b}$$

Om-

Omdat nu ABD het ſupplement van CBD is, is $Cos. ABD = - Cos. CBD$; men mag dan ſtellen:

$$\frac{m^2 + H^2 (Cot^2.b - Cot^2.a)}{m} = - \frac{n^2 + H^2 (Cot^2.b - Cot^2.c)}{n}$$

uit welke vergelijking, (indien men H uit dezelve afzondert,) volgen zal:

$$H = \sqrt{\left\{ \frac{mn(m+n)}{n.Cot^2.a - (m+n).Cot^2.b + m.Cot^2.c} \right\}}$$

door welke de begeerde hoogte in getallen zal berekend worden, en welke vergelijking, indien men $m = n$ ſtelt, waarvan men doorgaans meester is, in de meer eenvoudige

$$H = m \times \sqrt{\left\{ \frac{2}{Cot^2.a - 2\,Cot^2.b + Cot^2.c} \right\}}$$

veranderen zal.

§. 667. XVIII. Vraagstuk. *Fig.* 253. *Om den afſtand van de uiteinden van eene baſis AB, door dadelijke meting, te vinden, is men, wegens beletſelen, verpligt geweest, van de regte lijn AB aftewijken, en de geknikte lijn ACB te meten, te weten, van A tot C, in eene regte lijn* $b = 6839^m,7$; *en van C tot B, in eene regte lijn, . . .* $a = 9784^m,43$; *wanneer men nu bevonden heeft, dat de hoek ACB* $= 175^{\circ}\ 17'\ 32'',5$ *bedraagt; vraagt men: eene geſchikte formule te vinden, om, in dit geval, zonder den driehoek ACB op de gewone wijze opteloſſen, den afſtand van A tot B ten naauwkeurigſte te vinden?*

Oplossing. Volgens de *IV. Oploſſing III. Geval*, §. 640. is:

$$c^2 = (a+b)^2 \times \left\{ 1 - \frac{4ab\,Cos^2.\frac{1}{2}C}{(a+b)^2} \right\}$$

Stelt men nu $\frac{4ab \times Cos^2.\frac{1}{2}C}{(a+b)^2} = \Omega$; dan wordt

$$c = (a+b) \times \sqrt{\left\{1 - \Omega\right\}} = (a+b) \times (1-\Omega)^{\frac{1}{2}}$$

of, wanneer men den factor $(1-\Omega)^{\frac{1}{2}}$ ontwikkelt, (zie II. C. §. 543.)

$$c = (a+b) \times \left\{ 1 - \tfrac{1}{2}\Omega - \tfrac{1}{8}\Omega^2 - \tfrac{1}{16}\Omega^3 - \tfrac{5}{128}\Omega^4 - \tfrac{7}{256}\Omega^5 \right.$$

$$\left. - \tfrac{21}{1024}\Omega^6 - \tfrac{33}{2048}\Omega^7 - \tfrac{429}{32768}\Omega^8 - enz. \right\}$$

welke reeks onder deze gedaante kan gebragt worden:

$$c = (a+b) - (a+b) \times \left\{ \tfrac{1}{2}\Omega + \tfrac{1}{8}\Omega^2 + \tfrac{1}{16}\Omega^3 + \tfrac{5}{128}\Omega^4\ enz. \right\}$$

of,

of, stellende $\frac{1}{2}\Omega + \frac{1}{8}\Omega^2 + enz. = r$ en $(a+b) \times r = s$,

$$c = a + b - s$$

en zij zal zooveel te sterker convergeren, naarmate Ω kleiner wordt; en Ω wordt zooveel te kleiner, als de hoek C minder van 180° verschilt. Volgens deze oplossing wordt nu de begeerde afstand aldus berekend.

GEGEVEN $a = 9784^m,43$ $\quad C = 175^\circ\ 17'\ 32'',5$

$b = 6839^m,70$ $\quad \frac{1}{2}C = 87^\circ\ 38'\ 46'',25$

$a + b = 16624^m,13$ $\quad 90^\circ - \frac{1}{2}C = 2^\circ\ 21'\ 13'',75$

nu is . . . $Cos.\ \frac{1}{2}C = Sin.\ (90^\circ - \frac{1}{2}C)$

$Log.\ a = 3,9905356$ $\quad Log.\ Sin.\ (90^\circ - \frac{1}{2}C) = 8,6135284$ (2

$Log.\ b = 3,8350371$ $\quad Log.\ Cos^2\ \frac{1}{2}C = 7,2270568$

$Log.\ 4 = 0,6020600$ $\quad Log.\ (a+b) = 4,2207389$ (2

$Log.\ Cos^2.\ \frac{1}{2}C = 7,2270568$ $\quad Log.\ (a+b)^2 = 8,4414778^*$

$5,6546895$

$Log.\ (a+b)^2 = 8,4414778^*$ af

$Log.\ \Omega = -3,2132117$ . . . derhalve $\Omega = 0,0016338482$

$Log.\ \Omega^2 = -6,4264234$ . . . . $\Omega^2 = 0,0000026694$

$Log.\ \Omega^3 = -9,6396351$ . . . . $\Omega^3 = 0,0000000044$

derhalve $\frac{1}{2}\Omega = 0,0008169241$

$\frac{1}{8}\Omega^2 = 0,0000003337$

$\frac{1}{16}\Omega^3 = 0,0000000003$

$\frac{1}{2}\Omega + \frac{1}{8}\Omega^2 + \frac{1}{16}\Omega^3 + enz. = 0,0008172581 = r$

$Log.\ (a+b) = +4,2207389$ $\quad a + b = 16624^m,13$

$Log.\ r = -4,9123592$ $\quad s = 13^m,5862$

$Log.\ s = 1,1330981$ $\quad c = 16610^m,5438$

Deze oplossing is niet korter dan de gewone; maar zij geeft eene grootere naauwkeurigheid, waarom men dan ook, onder zulke omstandigheden, zich van dezelve, in het werkdadige, bedient.

§. 668. XIX. VRAAGSTUK. *De straal van eenen cirkel gegeven zijnde, de zijden, de apothemata en de inhouden der in- en omgeschrevene regelmatige n hoeken te vinden?*

OPLOSSING. Stellen wij de straal des gegeven cirkels $= r$, de zijde van den ingeschrevenen veelhoek $= a$; de apothema $= h$; den inhoud $= I$, de zijde van den omgeschrevenen veelhoek $= a'$; den inhoud $= I'$; het getal der hoeken of zijden $= n$; dan is de centerhoek $= \frac{360^\circ}{n}$; de halve centerhoek $= \frac{180^\circ}{n}$.

Met

Met betrekking tot den ingeschrevenen veelhoek, zijn $\frac{1}{2} a$ en h de regthoekszijden, en r de hypothenusa van eenen regthoekigen driehoek, en wij hebben dus: (*II. Stell.*)

$$1^\circ \quad a = 2r \times Sin. \frac{180^\circ}{n}; \quad 2^\circ \quad h = r \times Cos. \frac{180^\circ}{n}$$

$$3^\circ \quad I = n \times \tfrac{1}{2} a h = n r^2 \times Sin. \frac{180^\circ}{n} \times Cos. \frac{180^\circ}{n}.$$

of, volgens het *IV. Gev. III. Stell. VIII. B.*

$$4^\circ \quad I = \tfrac{1}{2} n r^2 \times Sin. \frac{360^\circ}{n} = \tfrac{1}{4} n a^2 \times Cot. \frac{180^\circ}{n}$$

En, uit deze vergelijkingen, volgt verder:

$$5^\circ \quad r = \tfrac{1}{2} a \times Cosec. \frac{180^\circ}{n}; \quad 6^\circ \quad r = h \times Sec. \frac{180^\circ}{n}$$

Met betrekking tot den omgeschrevenen veelhoek, welks apothema $= r$ is, is (*I. Stell.*)

$$7^\circ \quad a' = 2r \times Tang. \frac{180^\circ}{n}; \quad 8^\circ \quad I' = n \times r^2 \times Tang. \frac{180^\circ}{n}$$

Met behulp dezer vergelijkingen, zal men de zijden en inhouden der in- en omgeschrevenen regelmatige n hoeken vinden, en ook omgekeerd, wanneer, het zij eene zijde, het zij de inhoud van eenen regelmatigen veelhoek gegeven is, de straal van den cirkel bepalen kunnen, welke, om of in denzelven beschreven is. Wanneer, bij voorbeeld, in de vierde vergelijking, I als bekend wordt aangemerkt, dan zal men vinden:

$$r = \sqrt{\left\{\frac{2I}{n \times Sin. \frac{360^\circ}{n}}\right\}} \quad \text{en} \quad a = \sqrt{\left\{\frac{4I}{n \times Cot. \frac{360^\circ}{n}}\right\}}$$

waardoor men berekenen zal, met welk eene straal, of met welke zijde, eenen n hoek, onder eenen gegevenen inhoud, zal moeten gemaakt worden.

BE-

BEGINSELEN
DER
MEETKUNST.

TWEEDE DEEL.

OVER DE MEETKUNST DER LIGCHAMEN.

TIENDE BOEK.

Over de ligging en snijding der regte Lijnen en platte Vlakken, en over de Veelvlakkige of Ligchamelijke Hoeken.

§. 669. I. BEPALING. Volgens de X. *Bepaling* van het *I. Boek*, is eene *platte vlakte* of *plat vlak*, (in het vervolg eenvoudig VLAK genoemd,) een vlak, hetwelk zoodanig gesteld is, dat eene regte lijn, in alle rigtingen, over hetzelve bewogen zijnde, dit vlak, in alle deszelfs punten, zal aanraken, zonder ergens eenige opening tusschen beide te laten.

§. 670. I. GEVOLG. *Wanneer men derhalve in een vlak twee punten neemt, en door deze punten eene regte lijn trekt; dan zal deze regte lijn geheel in dit vlak gelegen zijn: dat is: alle punten dezer lijn zullen tevens punten van dit vlak zijn.*

§. 671. II. GEVOLG. *Wanneer eenig gedeelte eener lijn in een vlak ligt, kan geen ander gedeelte van dezelfde lijn buiten dit vlak gelegen zijn.*

§. 672. III. GEVOLG. *Alle vlakken hebben eenerlei beloop of dezelfde figuur.* Wanneer derhalve twee vlakken op elkander

der gepast worden, de voorkant van het eene op den voorkant van het andere, of de achterkant van het eerste op den achterkant van het tweede, zullen zij, in alle gevallen, in alle derzelver punten, even als twee lijnen, die men op elkander past, moeten sluiten.

§. 673. Leering. Men leert hieruit: dat men de juistheid van een plat vlak beproeven kan, door een zuiver liniaal over dit vlak te bewegen; want, indien dit liniaal, in alle rigtingen, volmaakt op het vlak sluit, zonder dat men eenige opening tusschen het liniaal en het vlak bespeurt, zal zulks de zuiverheid van het vlak bewijzen.

§. 674. Berigt. *Offchoon aan de vlakken, welke in de geteekende figuren, strekkende ter opheldering der stellingen en ten verstande van derzelver betoogen, eene bepaalde figuur gegeven is, om dezelve zigtbaar te maken, moet men nogtans, in dit Boek, alle vlakken en alle lijnen, welke ter beschouwing voorkomen, als onbegrensd zijnde, en zonder eenigen bepaalden figuurlijken omtrek, aanmerken.*

I. Stelling. *Fig.* 254.

§. 675. *Twee vlakken PQ en RS, snijden elkander volgens het beloop eener regte lijn AB.*

Betoog. De doorsnijding van twee vlakken is de vereëniging van alle die punten, welke deze vlakken met elkander gemeen hebben. Wanneer nu A en B twee zulke punten zijn; dan ligt (*I. Bep.*) de lijn AB, welke door deze punten gaat, zoowel in het eene vlak PQ, als in het ander RS: deze lijn derhalve, aan beide vlakken gemeen zijnde, is bijgevolg derzelver gemeene doorsnede.

§. 676. I. Gevolg. Door elke regte lijn AB, kan eene vlakte gebragt, en, om deze lijn, als beweegbaar beschouwd worden. — En, elk vlak kan om elke lijn, welke in hetzelve aangenomen wordt, in het ronde bewogen worden.

§. 677. II. Gevolg. Een ounoemlijk aantal vlakken kunnen elkander, in dezelfde regte lijn, doorsnijden.

§. 678. III. Gevolg. Men kan hier bijvoegen: *dat het niet mogelijk is, dat twee onderscheidene vlakken elkander in meer dan ééne regte lijn doorsnijden.*

II.

II. Stelling. *Fig.* 255.

§. 679. *Twee lijnen, AB en CD, welke elkander, in een punt E, doorsnijden, liggen in hetzelfde vlak PQ.*

Betoog. Want men kan een vlak, *PQ*, door ééne dezer lijnen *AB* laten gaan, en, om deze zelfde lijn, laten omdraaijen: bij deze beweging, komt dit vlak ergens in zulk eenen stand, dat een punt *D* van de lijn *CD*, in dit vlak valt; alsdan liggen twee punten van de lijn *CD*, (de punten *E* en *D* namelijk,) in hetzelve; de geheele lijn *CD* zal dan (*I. Bep.*) met de lijn *AB* in hetzelfde vlak *PQ* gelegen zijn.

III. Stelling. *Fig.* 256.

§. 680. *Drie punten, A, B en C, welke, naar welgevallen, in de ruimte worden aangenomen, liggen in hetzelfde vlak PQ.*

Betoog. Laat door twee der drie punten, bij voorbeeld, de punten *A* en *B*, eene regte lijn *AB* getrokken, en door deze regte lijn een vlak *PQ* gebragt worden; wanneer nu dit vlak, om de lijn *AB*, wordt omgedraaid; dan komt het noodwendig in zulk eenen stand, dat het derde punt *C* in hetzelve valt, in welken stand, de drie punten, *A*, *B* en *C*, in hetzelfde vlak *PQ* zullen gelegen zijn.

§. 681. I. Gevolg. *Men kan dan door elke twee lijnen, die elkander snijden, en door elke drie punten, welke, naar welgevallen, in de ruimte, aangenomen worden, altijd een vlak brengen.*

§. 682. II. Gevolg. *Alle hoeken en alle lijnen, die elkander onderling snijden, liggen in hetzelfde vlak.*

IV. Stelling. *Fig.* 257.

§. 683. *Wanneer eene lijn AB loodregt staat op twee lijnen, BC en BD, welke in een vlak PQ gelegen zijn; dan staat deze lijn tevens loodregt op alle andere lijnen BE, welke, uit den voet B van deze loodlijn AB, in dit vlak PQ, kunnen getrokken worden.*

Opheldering. Dat eene lijn *AB* loodregt op twee afzonderlijke lijnen, *BC* en *BD*, staan kan, blijkt hieruit: dat men, door deze lijn

AB, twee onderscheidene vlakken brengen kan, in elk van welke, uit een zeker punt B, eene loodlijn, in het eene, en eene loodlijn, in het andere vlak, op deze lijn AB, kan opgerigt worden: deze twee loodlijnen, uit hetzelfde punt B komende, liggen (*II. Stell.*) in hetzelfde vlak PQ; dus kan omgekeerd eene lijn AB loodregt staan op twee lijnen, BC en BD, welke in hetzelfde vlak liggen, en nu moet men bewijzen: dat die loodlijn AB ook loodregt staat op elke andere lijn BE, welke, uit den voet der loodlijn, in het vlak PQ getrokken wordt, of dat de hoek ABE een regte hoek is.

Betoog. Het spreekt van zelfs, dat AB met het verlengde der lijnen BC en BD, dat is, met de lijnen BF en BG, regte hoeken maakt.

Men neme, op de lijnen, BC en BD, twee punten C en D, trekke de lijn CD, deele dezelve in E midden door, en trekke dan de lijn BE. Om nu te bewijzen: dat de hoek ABE regt is, trekke men van een punt A, in de loodlijn AB gelegen, tot de punten C, D en E, de lijnen AC, AD en AE; omdat dan $DE = CE$ is, zal (*XX. Stell. III. B.*), in den driehoek ACD,

$$AC^2 + AD^2 = 2\,AE^2 + 2\,DE^2$$

en, in den driehoek BCD,

$$BC^2 + BD^2 = 2\,BE^2 + 2\,DE^2$$

moeten zijn. Trekt men nu deze twee vergelijkingen van elkander (de tweede van de eerste) af; dan zal (*VIII. Ax.*)

$$(AC^2 - BC^2) + (AD^2 - BD^2) = 2\,AE^2 - 2\,BE^2$$

zijn: maar de driehoeken ABC en ABD, zijn, volgens de onderstelling, regthoekig; derhalve is (*XVI. Stell. III. B.*) $AC^2 - BC^2 = AB^2$ en $AD^2 - BD^2 = AB^2$, en de laatste vergelijking verandert derhalve in de volgende:

$$2\,AB^2 = 2\,AE^2 - 2\,BE^2$$

dat is (*XII. Ax.*) in

$$AB^2 = AE^2 - BE^2$$

en hieruit volgt dan, dat

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$

is; de driehoek, ABE, is dan (*XVII. Stell. III. B.*) regthoekig, en de lijn AB staat derhalve loodregt op BE.

Wanneer men de punten C en D anders neemt, zal men eene andere lijn BE verkrijgen, op welke, om dezelfde redenen, de lijn AB loodregt staan zal: men zal zelfs CD tot in H kunnen verlengen, en $CH = CD$ nemen, en bewijzen, dat AB loodregt op BH staat. Ook

zal

zal hetzelfde, hetwelk van eene lijn *BE*, welke in den hoek *CBD* valt, bewezen is, gelden van alle lijnen, welke in de drie andere hoeken, *CBG*, *GBF* en *FBD*, vallen.

Het blijkt dan uit dit alles: dat de lijn *AB* loodregt zal ſtaan op alle lijnen, welke uit het punt *B*, in het vlak *PQ*, getrokken kunnen worden.

§. 684. II. Bepaling. Eene lijn wordt gezegd *loodregt* op een vlak te ſtaan, wanneer zij met alle lijnen, welke, uit den voet van die loodlijn, in dit vlak, getrokken kunnen worden, regte hoeken maakt. — Eigenlijk zou het genoeg zijn te zeggen: eene lijn ſtaat loodregt op een vlak, wanneer zij eenen regten hoek maakt met twee lijnen, welke, uit den voet van die loodlijn, in dit vlak getrokken zijn, en niet in dezelfde rigting liggen; omdat, blijkens de voorgaande ſtelling, deze twee regte hoeken, al de hoeken van die lijn, met de andere lijnen, die in dit vlak getrokken kunnen worden, regt maakt.

§. 685 I. Gevolg. *Fig.* 258. *Uit hetzelfde punt A, kan maar ééne loodlijn AB op een vlak worden opgerigt.* Want, indien 'er twee loodlijnen *AB* en *AC* mogelijk waren, zou het vlak, hetwelk door deze twee lijnen gaat, het vlak *PQ*, volgens de lijn *DE*, ſnijden, en de hoeken *DAB* en *DAC*, zouden regt moeten zijn, en dit is onmogelijk.

§. 686. II. Gevolg. *Fig.* 259. Om dezelfde reden, kan, uit een punt *A*, ſlechts ééne loodlijn *AC* op een vlak *PQ* vallen; omdat twee loodlijnen, *AC* en *AB*, eenen driehoek *ABC* zouden vormen, welke, ſtrijdig met den aard van eenen driehoek, twee regte hoeken zou hebben.

§. 687. III. Gevolg. *Fig.* 260. Om uit een punt *A*, in een vlak *PQ*, eene loodlijn *AE* op dit vlak opterigten, trekke men, door het gegevene punt *A*, twee lijnen *BC* en *AD* naar welgevallen, late door ééne dezer lijnen (*BC* bij voorbeeld,) een ander vlak gaan, in hetwelk men, uit het punt *A*, eene loodlijn *AE* op *BC* oprigte: men late dan dit vlak, om de lijn *BC*, omdraaijen, tot dat de hoek *DAE* regt wordt; dan zal, vermits, in dezen ſtand, de hoeken *EAD* en *EAB* beide regt zijn, de lijn *AE*, zie *II. Bepaling*, loodregt op het vlak *PQ* ſtaan.

V. Stelling. *Fig.* 261.

§. 688. *Wanneer men, uit een punt A, hetwelk in eene lijn AB gelegen is, een onbepaald aantal loodlijnen AC, AD, AE, enz., (welke natuurlijk in onderscheidene vlakken moeten liggen,) oprigt; dan zullen deze alle in hetzelfde vlak, op hetwelk deze lijn AB loodregt staan zal, gelegen zijn.*

Betoog. Men kan door twee dezer loodlijnen, *AE* en *AC*, (*II. Stell.*) een vlak laten gaan. Wanneer nu eene derde loodlijn *AD* niet in dit vlak gelegen is; dan zal een vlak, hetwelk door de lijnen *AB* en *AD* (*II. Stell.*) kan gebragt worden, het eerste vlak, volgens het beloop eener lijn *AF*, doorsnijden, en dan zal de hoek *BAF* (*IV. Stell.*) regt zijn: maar aangezien de hoek *BAD* (*onderst.*) regt is, en alle regte hoeken gelijk zijn, zal hoek $BAF =$ hoek BAD moeten zijn; daar zulks nu (*II. Ax.*) onmogelijk is, zal de lijn *AD*, even als alle andere loodlijnen, welke uit het punt *A*, in andere vlakken, loodregt op *AB* staan, niet buiten, maar in het vlak van de lijnen *AC* en *AE*, moeten liggen.

§. 689. Gevolg. *Wanneer men dan een stelsel van twee loodlijnen, om ééne van dezelve, laat omdraaijen; dan zal de andere loodlijn, door deze beweging, een plat vlak beschrijven:* wel te verstaan, wanneer die eerste lijn, altijd in denzelfden stand blijvende, gedurende die beweging, niet van stand verplaatst wordt.

VI. Stelling. *Fig.* 262.

§. 690. *Elk punt A, genomen in eene regte lijn AB, welke, uit het middelpunt B eens cirkels, loodregt op het vlak PQ, waarin die cirkel beschreven is, is opgerigt, staat van al de punten van den omtrek dezes cirkels op denzelfden afstand.* — En omgekeerd. — *Wanneer eenig punt A, buiten het vlak van eenen cirkel gelegen zijnde, tot drie punten, in den omtrek van dien cirkel genomen, denzelfden afstand heeft, zal dit punt gelegen zijn in de lijn, welke, door het middelpunt van dien cirkel gaat, en loodregt op deszelfs vlak geplaatst is.*

Betoog *van het eerste.* Men neme, in den omtrek des cirkels, twee punten *C* en *D*, en trekke de lijnen, *AC* en *AD*, benevens de stra-

ſtralen, *BC* en *BD*; omdat dan, in de driehoeken, *ABC* en *ABD*, volgens de onderſtelling, hoek *ABC* = hoek *ABD*; *AB* = *AB* en (*I. Gev. II. Bep. V. B.*) *BC* = *BD* is, zal (*X. Stell. I. B.*) *AC* = *AD* zijn. Hetzelfde zal, om dezelfde reden, voor alle andere punten *F*, *G*, *enz.* plaats hebben, en de lijnen *AC*, *AD*, *AF*, *AG*, *enz.* zullen, alle zonder onderſcheid, aan elkander gelijk zijn.

BETOOG *van het tweede*. Laat het punt *A*, op eenen gelijken afſtand, van de punten *D*, *C* en *G*, gelegen zijn; dan zijn (*onderſt.* en *I. Gev. II. Bep. V. B.*) de driehoeken *ABD*, *ABC* en *ABG*, onderling gelijkzijdig, en de hoeken *ABD*, *ABC* en *ABG*, zijn (*XIII. Stell. I. B.*) gelijk. Wanneer nu deze hoeken niet regt zijn; dan zal men, uit het punt *A*, eene loodlijn *AP*, op het vlak *PQ*, kunnen laten vallen, de driehoeken, *APD*, *APC* en *APG*, zullen dan regthoekig, en (*II. Lemma I. B.*) de lijnen *PD*, *PC* en *PG*, gelijk zijn; dan zulks (*I. Gev. X. Stell. V. B.*) onmogelijk zijnde, moet *AB* noodzakelijk loodregt op *PQ* ſtaan.

VII. STELLING. *Fig.* 262.

§. 691. *Wanneer men, uit een punt A, gelegen buiten een vlak PQ, tot in, of aan dit vlak, verſcheidene lijnen AB, AD, AC, AE, enz. trekt; dan is:*

1° *De loodlijn AB de kortſte van allen.*

2° *De lijnen AD, AC, AG, AF, enz., welke het vlak, op gelijke afſtanden van den voet der loodlijn AB, ontmoeten, zijn even lang.*

3° *En de lijn AE, welke het vlak, op eenen verderen afſtand van den voet der loodlijn, ontmoet, is langer dan de lijn AC, welke het vlak, op eenen korteren afſtand van datzelfde punt, ontmoet.*

BETOOG. De waarheid van dit geſtelde volgt onmiddelijk, uit de *XXI. Stelling* van het *I. Boek.*

§. 692. III. BEPALING. Gelijk de afſtand van een punt tot eene regte lijn de loodlijn is, welke, uit dit punt, op die lijn valt; zoo is ook, op dezelfde wijze, de afſtand van een punt tot een vlak de loodlijn, welke, uit dit punt, op dit vlak valt.

VIII. STELLING. *Fig.* 263.

§. 693. *Elke lijn DE, welke in een vlak PQ gelegen is, ſtaat loodregt op een ander vlak, ABC, hetwelk door eene, op het eerſte vlak ſtaande, loodlijn, AB, en eene andere lijn BC gaat, welke, uit den voet dezer loodlijn AB, loodregt op de eerstgenoemde lijn DE getrokken wordt.*

BETOOG. Men neme, ter wederzijden van het punt C, op gelijke afſtanden van hetzelve, twee punten D en E; dan is $DC = CE$. Uit een punt A van de loodlijn AB, trekke men, tot de punten D, C en E, de lijnen AD, AC en AE; en, uit het punt B, tot dezelfde punten, de lijnen BD, BC en BE; dan kan men in de figuur het volgende opmerken:

1° Omdat (*onderſt.*) hoek $BCD =$ hoek BCE, $BC = BC$ en $DC = CE$ is, is (*X. Stell. I. B.*) $BD = BE$.

2° Omdat (*onderſt.*) hoek $ABD =$ hoek ABE; $AB = AB$, en $BD = BE$ (*bew.*) is; zal (*X. Stell. I. B.*) $AD = AE$ zijn.

3° Eindelijk, omdat $AD = AE$ (*bew.*) $DC = CE$ en $AC = AC$ is, zal (*XIII. Stell. I. B.*) hoek $ACD =$ hoek ACE zijn.

De hoeken, ACD en ACE, zijn dan (*XVI. Bep. I. B.*) regte hoeken, en DC ſtaat derhalve loodregt op AC: maar, volgens de onderſtelling, ſtaat DC ook loodregt op BC; derhalve ſtaat (*IV. Stell.*) DC ook loodregt op het vlak, hetwelk door de lijnen AC en BC gaat: maar daar (*I. Gev. I. Bep.*) de lijn AB in dit vlak gelegen is, ſtaat DC loodregt op het vlak, waarin de lijnen AB en BC liggen.

IX. STELLING. *Fig.* 264.

§. 694. *Twee lijnen, AB en CD, welke elk regthoekig op hetzelfde vlak PQ ſtaan, liggen in een ander vlak, en zijn onderling evenwijdig.*

BETOOG. Vereënig de voeten der loodlijnen, AB en CD, door de lijn AC; trek, van het punt C, tot het punt B, de lijn CB, en, in de vlakte PQ, de lijn CE loodregt op AC: dan ſtaat (*VIII. Stell.*) de lijn EC loodregt op CB: maar, volgens de onderſtelling, dat CD loodregt op PQ is, ſtaat zij (*II. Bep.*) ook loodregt op CE. De lijnen AC, BC en CD liggen dan (*V. Stell.*) in hetzelfde vlak: maar, in ditzelfde vlak, ligt (*I. Gev. I. Bep.*) ook de lijn AB; de loodlijnen AB en CD liggen, derhalve in hetzelfde vlak, en zijn (*onderſt. en XXII. Ssell. I. B.*) onderling evenwijdig.

X. STELLING. *Fig.* 265.

§. 695. *Wanneer men, door eene lijn AB, welke loodregt op een vlak PQ ſtaat, een ander vlak RS laat gaan, in zulk eene rigting, of in zulk eenen ſtand, als men goedvindt; dan ſnijdt dit vlak het eerſte, volgens eene regte lijn AC; wanneer men nu, uit eenig punt C van de gemeene doorſnede dezer vlakken, eene loodlijn CD, op de gemeene doorſnede AC, in dit vlak RS, oprigt; dan zal deze loodlijn CD ook loodregt op het eerſte vlak PQ ſtaan.*

BETOOG. Men trekke, uit het punt *C*, tot eenig punt *B*, van de loodlijn *AB*, eene lijn *BC*, en, uit ditzelfde punt *C*, in *PQ*, eene loodlijn *CE*, op *AC*; dan ſtaat (*VIII. Stell.*) deze lijn ook loodregt op *BC*, en op de vlakte, welke door de lijnen *AB* en *AC* gaat: maar in deze vlakte ligt (*onderſt.*) de lijn *CD*; de lijn *EC* is dan, (*IV. St.*) als loodregt op *AC* en *CB* ſtaande, ook loodregt op *CD*; deze laatſte dan loodregt op *AC* (*onderſt.*) en op *CE* (*bew.*) ſtaande, ſtaat (*IV. Stell.*) *CD* loodregt op het vlak *PQ*.

§. 696. IV. BEPALING. *Fig.* 265. Een vlak, *RS*, ſtaat *loodregt* op een ander vlak *PQ*, wanneer eene lijn, *CD* of *CE*, welke loodregt op derzelver gemeene doorſnede, in een dezer vlakken getrokken wordt, ook tevens loodregt op het ander vlak ſtaat.

§. 697. GEVOLG. Volgens deze bepaling en de voorgaande ſtelling, *zal elk vlak RS, hetwelk gebragt wordt door eene lijn, welke loodregt op een ander vlak PQ ſtaat, ook loodregt op dit tweede vlak PQ geplaatst zijn.*

XI. STELLING. *Fig.* 266.

§. 698. *De gemeene doorſnede AB van twee vlakken, RS en TU, welke loodregt op één en hetzelfde vlak PQ ſtaan, ſtaat insgelijks loodregt op dat zelfde vlak PQ.*

BETOOG. Want, indien de gemeene doorſnede *AB* niet loodregt op het vlak *PQ*, en dus ook niet loodregt op de ſnijdingen *AR* en *AT* ſtaat; dan zal men, uit het punt *A*, twee loodlijnen *AC* en *AD*, de eerſte, in het vlak *RS*, loodregt op de doorſnede *AR*, en de tweede, in het vlak *TU*, op de doorſnede *AT*, kunnen oprigten, en deze

deze zullen (*IV. Bep.*) elk loodregt op het vlak *PQ* ſtaan: indien men dan *AB* niet loodregt op het vlak *PQ* ſtelt, zal daaruit volgen, dat, uit hetzelfde punt *A*, twee loodlijnen op hetzelfde vlak kunnen worden oprigt; daar zulks nu (*I. Gev. IV. Stell.*) ongerijmd is, kan *AB* niet anders dan loodregt op *PQ* ſtaan.

§. 699. GEVOLG. *Indien drie vlakken regthoekig op elkander ſtaan, ſtaat de doorſnede van twee dezer vlakken altijd loodregt op het derde.*

XII. STELLING. *Fig.* 267.

§. 700. *Alle loodlijnen AF, CG, DH, EI, BK, welke uit de verſchillende punten eener lijn, AB, buiten een vlak, PQ, gelegen zijnde, loodregt op dit vlak vallen, liggen alle, zonder onderſcheid, in hetzelſde vlak, en de voeten dezer loodlijnen in dezelfde regte lijn, FK, volgens welke het vlak dezer loodlijnen het eerstgenoemde vlak PQ doorſnijdt.*

BETOOG. Volgens de *IX. Stelling*, liggen twee loodlijnen *AF* en *CG* in hetzelfde vlak, in hetwelk (*I. Gev. I. Bep.*) de geheele lijn *AB* gelegen is: om dezelfde reden, liggen de loodlijnen *CG* en *DH* met de lijn *AB* in hetzelfde vlak; wanneer nu het vlak, waarin de lijnen *AF* en *CG* gelegen zijn, een ander is dan het vlak, waarin de lijnen *CG* en *DH* liggen, dan zullen, ſtrijdig met het *III. Gev.* der *I. Stell.* twee vlakken elkander, volgens het beloop van twee lijnen *AB* en *CG*, moeten kunnen doorſnijden; de loodlijnen *AF*, *CG* en *DH*, liggen dan in hetzelfde vlak. Hetzelfde betoog geldt van alle andere loodlijnen *EI*, *BK*, *enz.*, welke alle met *AF*, *CG*, *enz.* in hetzelfde vlak liggen, terwijl de voeten der loodlijnen, in de doorſnijding dezer vlakken gelegen zijnde, (*I. Stell.*) in eene regte lijn *FK* liggen.

§. 701. V. BEPALING. De *projectie van een punt op een vlak*, is de voet van de loodlijn, welke, uit dit punt, op dit vlak valt.

§. 702. VI. BEPALING. *Fig.* 267. De *projectie van eenige regte of kromme lijn op een vlak* beſtaat uit de vereëniging van de projectien van al de punten dezer lijn.

De projectie van eene regte lijn *AB*, op een vlak *PQ* is, blijkens de voorgaande ſtelling, eene regte lijn *FK*, volgens welke een vlak, dat door deze lijn *AB* gaat, het vlak *PQ* ont-

ontmoet. Het vlak van *AB*, hetwelk al de loodlijnen, die uit *AB* op *PQ* vallen, bevat, noemt men het *projecterend* vlak, en het vlak *PQ* zelve, het *vlak van projectie.*

§. 703. Aanmerking. Eene regte lijn kan, met betrekking tot eenig vlak, driederlei verschillenden stand hebben. 1° Zij kan loodregt op dit vlak staan. 2° Met hetzelve eenen scheven stand hebben. 3° Of evenwijdig aan hetzelve loopen. In het eerste geval van den loodregten stand, welks eigenschappen de voorgaande stellingen reeds hebben leeren kennen, is hare projectie op het vlak een enkel punt: in de twee andere gevallen, tot welker beschouwing wij nu overgaan, is de projectie altijd eene regte lijn.

§. 704. VII. Bepaling. *Fig.* 268. Eene lijn *BAR*, heeft, met betrekking tot een vlak *PQ*, eenen scheven stand, wanneer deze lijn, of haar verlengde, zonder loodregt op dit vlak te staan, hetzelve in eenig punt *A* ontmoet.

§. 705. VIII. Bepaling. *Fig.* 268. De *stand* van eene, op een vlak *PQ*, schuins staande lijn, *AB*, wordt bepaald door den *standhoek BAC*, welke die lijn *AB* met hare projectie *AC*, op dit vlak *PQ*, maakt.

§. 706. Gevolg. *Fig.* 268 Wanneer men derhalve, uit het punt *A*, alwaar de lijn *AB* of deszelfs verlengde het vlak *PQ* ontmoet, eene loodlijn *AZ* op dit vlak oprigt, en, door deze loodlijn *AZ* en de lijn *AB*, een vlak laat gaan, zal dit vlak (*Gev. IV. Bep.*) loodregt op *PQ* staan, en bijgevolg het projecterend vlak van de lijn *AB* zijn, welker projectie de lijn *AC* is: de hoek derhalve, welke *de loodlijn AZ met de lijn AB maakt, is het complement van den standhoek BAC, welke den stand van de lijn AB op het vlak PQ bepaalt.*

XIII. Stelling. *Fig.* 268.

§. 707. *Wanneer men, uit het punt A, alwaar eene schuinsche lijn, AB, een vlak PQ ontmoet, in dit vlak verscheidene lijnen AC, AE, AF, AD, enz., trekt; dan zullen deze lijnen, met de schuinsche lijn AB, verscheidene hoeken maken, en dan zal, onder alle dezen, 1° de hoek BAC, welke de lijn AB met hare projectie maakt, de kleinste zijn; 2° de hoek BAD, welke zij met het verlengde van de projectie maakt, zal de grootste zijn. 3° Aan denzelfden kant van de pro-*

projectie, worden de hoeken BAE, BAF, enz. grooter, als de lijnen AE, AF, enz. eenen grooteren hoek met de projectie AB maken. 4° *Wanneer men, aan weêrszijden van de projectie, de hoeken CAE en CAG gelijk maakt, dan zullen ook de hoeken BAG en BAE gelijk zijn.*

Betoog *van het eerste.* Men neme, in de lijn *AB*, een punt *B*, en late uit hetzelve eene loodlijn *BC* op het vlak *PQ* vallen; dan ligt (*XII. Stell.*) deze loodlijn in het projecterend vlak, en snijdt de projectie van *AB* in *C*. Wanneer men dan $AE = AC$ maakt, en de lijnen *AE*, *CE* en *BE* trekt; dan is: 1°, in den regthoekigen driehoek *BCE*, de hypothenusa *BE* grooter dan de loodlijn *BC*. 2° In de driehoeken *ABC* en *ABE*, is $AB = AB$; $AC = AE$ en $BE > BC$; derhalve zal (*XII. Stell. I. B.*) hoek $BAE >$ hoek BAC zijn.

Betoog *van het tweede.* Men neme $AF = AD = AC$, en trekke de lijnen *BD*, en *BF*; dan is (*VII. Stell. I. B.*) $CF < AC + AF$, of $CF < CD$, derhalve is (*XXI. Stell. I. B.*) $BF < BD$. In de driehoeken, *ABD* en *ABF*, is nu $AB = AB$; $AD = AF$ en $BD > BF$; derhalve zal ook (*XII. Stell. I. B.*) hoek $BAD >$ hoek BAF zijn.

Betoog *van het derde.* Men make $AF = AE = AC$, en trekke de lijnen *CF* en *BF*; dan is 1°, in de driehoeken *ACE* en *ACF*, $AC = AC$; $AE = AF$, hoek $CAF >$ hoek CAE, en (*XI. Stell. I. B.*) $CF > CE$; 2° in de regthoekige driehoeken *BCE* en *BCF*, is dan ook (*XXI. Stell. I. B.*) $BF > BE$; 3° eindelijk is, in de driehoeken *BAE* en *BAF*, $AB = AB$, $AE = AF$ en $BF > BE$; derhalve zal (*XII. Stell. I. B.*) hoek $BAF >$ hoek BAE zijn.

Betoog *van het vierde.* Men neme den hoek $CAG =$ den hoek *CAE* en $AG = AE$, en trekke de lijn *BG*; dan zal (*X. St. I. B.*) $CG = CE$; en, in de regthoekige driehoeken *BCE* en *BCG*, (*X. Stell. I. B.*) $BE = BG$, en eindelijk, in de driehoeken *ABE* en *ABG*, (*XIII. Stell. I. B.*) hoek $BAE =$ hoek BAG zijn.

§. 708. Gevolg. Neemt men de hoeken *CAG* en *CAE* regt; dan is *AG* het verlengde van *AE*, en omdat, in dit geval, *BAE* en *BAG* regt zijn, staat *AB* loodregt op de lijn *EAG*, welke met de projectie van *AB* eenen regten hoek maakt. *Wanneer men derhalve, om de lijn AB, een vlak laat omdraaijen; dan verkrijgt dit vlak, in elke omwenteling, twee merkwaardige standen.* 1° *Wanneer het loodregt op het vlak PQ staat, alsdan is deszelfs doorsnijding met het vlak PQ de projectie der lijn zelve.* 2° *Wanneer dit omwente-*

len-

lende vlak het vlak PQ, volgens eene lijn doorſnijdt, welke met de projectie eenen regten hoek maakt, in welk geval de ſtand van dit vlak van den voorgaanden ſtand eenen regten hoek verſchilt. Door dit alles, kan nu het onderſcheid tusſchen den loodregten en ſcheven ſtand eener lijn op een vlak merkbaar genoeg onderſcheiden worden.

§. 709. IX. Bepaling. Eene lijn loopt *evenwijdig* aan een vlak, wanneer zij, hoe verre dezelve ook, aan den eenen of aan den anderen kant, mogt verlengd zijn, dit vlak nimmer ontmoet, of doorſnijdt.

XIV. Stelling. *Fig.* 269.

§. 710. *De gemeene doorſnede CD van twee vlakken, PQ en BC, waarvan het eene BC door eene lijn AB gaat, welke evenwijdig aan het andere vlak PQ is, zal altijd evenwijdig aan deze lijn AB loopen.*

Betoog. Want, indien de lijnen *AB* en *CD* niet evenwijdig aan elkander waren, dan zouden zij elkander ergens doorſnijden, en, omdat de lijn *CD* in het vlak *PQ* ligt, zou de lijn *AB* het vlak *PQ* ontmoeten, en niet evenwijdig aan hetzelve zijn.

§. 711. I. Gevolg. *Fig.* 269. Wanneer dan het vlak *BC*, om eene lijn *AB*, evenwijdig aan een ander vlak *PQ* zijnde, bewogen wordt, zal de doorſnijding *CD* of *EF* dezer vlakken overal aan die lijn *AB* evenwijdig blijven.

§. 712. II. Gevolg. *Fig.* 269. Komt dit bewegend vlak in den ſtand *ABEF*, regthoekig op *PQ*; dan is *EF* de projectie (*VI. Bep.*) van *AB*. *Wanneer dan eene lijn evenwijdig aan een vlak is, dan is zij ook evenwijdig aan hare projectie op dit vlak:* en omgekeerd.

§. 713. III. Gevolg. *Fig.* 269. En, omdat eene lijn, die evenwijdig aan een vlak is, evenwijdig is aan hare projectie, zullen (*V en VI. Bep.*) *al de punten eener aan een vlak evenwijdig zijnde lijn, overal denzelfden afſtand tot dit vlak hebben.*

XV. Stelling. *Fig.* 270.

§. 714. *Wanneer twee lijnen, AB en CD, elkander niet ſnijden, en nogtans in onderſcheidene vlakken liggen; dan beſtaat 'er ſlechts ééne lijn, EH, welke beide deze lijnen regt-*

hoe-

hoekig doorſnijdt, of, met elk derzelven, eenen regten hoek maakt, en het gedeelte HE dezer lijn, hetwelk tusſchen de twee voornoemde lijnen, AB en CD, begrepen is, is korter dan eenige andere lijn, welke eenig ander punt van de eerſte lijn AB met eenig ander punt van de tweede lijn CD veréénigt.

Betoog. Men kan, in ééne der lijnen, bij voorbeeld, de lijn *CD* een punt *E* nemen, en door dit punt en de eerſte lijn *AB* (*II. St.*) een vlak laten gaan, en, in dit vlak, door het punt *E*, eene lijn *FG*, evenwijdig aan *AB* trekken, en voorts, door de lijnen *CD* en *FG*, een vlak *PQ* laten gaan, aan hetwelk (*XIV. Stell.*) de lijn *AB* evenwijdig zal zijn.

Beſchouwen wij nu dit vlak *PQ*, en de lijn *AB*, als in denzelfden ſtand blijvende; dan zal men aan het vlak, dat door de lijn *AB* gaat, eene omwentelende beweging kunnen geven; en het zal, ſtaande deze beweging, ergens in eenen ſtand komen, dat het loodregt op *PQ* ſtaat. Laat dan de figuur dien loodregten ſtand voorſtellen; dan zal *FG* de projectie van de lijn *AB* zijn, en, wanneer men dan, uit het punt *E*, de lijn *EH* loodregt op deze projectie oprigt, dan zal zij (*X. Stell.*) tevens loodregt op het vlak *PQ* ſtaan, en daarom de lijn *CD* regthoekig doorſnijden, terwijl, wegens de evenwijdigheid der lijnen *AB* en *FG*, de lijn *AB* insgelijks, door *EH*, regthoekig zal doorgeſneden worden.

Maar deze lijn EH, is de eenige mogelijke, welke beide lijnen, AB en CD, te gelijk regthoekig kan doorſnijden. Men late, om zulks te betoogen, door een punt *I*, en de lijn *CD*, een vlak gaan, en, in dit vlak, uit dit punt *I*, eene loodlijn *IL*, op de lijn *CD*, vallen; men trekke *IK*, loodregt op *FG*, en voege de punten *K* en *L* te zamen, en dan ſtaat (*IV. Bep.*) de driehoek *IKL* loodregt op het vlak *PQ*. Wanneer nu de hoek *BIL*, een regte hoek ware, dan zou (*IV. Stell.*) *AB* regthoekig op den driehoek *IKL* ſtaan, en, omdat *FG* met *AB* in hetzelfde vlak ligt, *KG* (*X. Stell.*) insgelijks regthoekig op den driehoek *IKL* ſtaan, en de hoeken *IKE* en *EKL* zouden (*II. Bep.*) regt zijn: maar de driehoek *IKL* regthoekig op het vlak *PQ* ſtaande, is de hoek *ELK* (*VIII. Stell.*) een regte hoek. Uit dit alles volgt dan: dat, wanneer men de hoek *BIL*, als regt aanneemt, de driehoek *EKL* twee regte hoeken zou hebben; daar zulks nu ongerijmd is, kan de hoek *BIL* niet regt zijn; waar ter plaatſe men derhalve, buiten het punt *H*, in de lijn *AB* een punt *I* neemt, zal

zal de lijn IK, welke, uit dit punt, loodregt op CD valt, de lijn AB onder eenen ſcheven hoek doorſnijden, en men zal op gelijke wijze betoogen, dat zulks ook zal plaats hebben, voor elke lijn, welke, uit eenig punt van CD, regthoekig op AB valt.

Nu moet men nog bewijzen, dat de lijn EH korter is, dan de afſtand van eenige twee andere punten I en L. Tot dat einde merken wij op: dat (*XXI. Stell. I. B.*) 1° het punt H, digter bij het punt E, dan bij eenig ander punt van de lijn CD ſtaat. 2° Dat het punt E, digter bij het punt H, dan bij eenig ander punt van de lijn AB ſtaat. 3° Dat het punt I, digter bij L, dan bij eenig ander punt van de lijn CD gelegen is: omdat nu, wegens den regthoekigen driehoek, IKL, welke in K regthoekig is, $IL > IK$ en $IK = HE$ is, zal (*V. Ax.*) $IL > HE$ zijn. Hetzelfde zal gelden van elk ander punt I, in AB gelegen, welks digtſte afſtand tot CD, en van elk punt L, welks digtſte afſtand tot AB, grooter dan HE zal zijn. De punten H en E, zijn dan digter bij elkander, dan twee andere punten in de lijnen AB en CD genomen, gelegen.

§. 715. X. BEPALING. *Fig.* 270. Naar aanleiding van het voorgaande betoog, wordt de betrekkelijke ligging van twee lijnen, AB en CD, welke elkander niet ſnijden, en nogtans in onderſcheidene vlakken liggen, door twee onderſcheidene gegevens bepaald: 1° door de lijn EH, welke loodregt op beide lijnen ſtaat, en derzelver *kortſten afſtand* genoemd wordt; 2° door den hoek FEC, welke eene lijn FG, die, door één van de voetpunten dezer loodlijn, evenwijdig aan de eene lijn AB, getrokken is, met de andere lijn CD maakt, en de *ſtandhoek* dezer lijnen genoemd wordt.

§. 716. AANMERKING. In de Meetkunst der platte vlakken, worden de evenwijdige lijnen beſchouwd, als liggende in hetzelfde vlak: maar daaruit mag men niet beſluiten: dat twee lijnen niet in onderſcheidene vlakken liggen, en nogtans de overige eigenſchappen der evenwijdige lijnen zouden kunnen bezitten. De volgende ſtelling zal dit gewigtig punt beſliſſen.

XVI. STELLING. *Fig.* 270.

§. 717. *Twee lijnen, AB en CD, welke in onderſcheidene vlakken liggen, kunnen niet evenwijdig zijn.*

BE-

Betoog. Want, wanneer men, uit eenig punt van éénе van twee evenwijdige lijnen, eene loodlijn op de andere laat vallen; dan staat die loodlijn ook loodregt op de eerste: deze omstandigheid heeft nu (*XV. Stell.*) voor twee lijnen, welke in twee onderscheidene vlakken liggen, slechts voor twee punten plaats, en niet voor alle, zoo als, ingevalle de lijnen evenwijdig waren, zou behooren: deze lijnen kunnen derhalve niet evenwijdig zijn.

§. 718. I. Gevolg. *Twee evenwijdige lijnen liggen dan noodzakelijk in hetzelfde vlak.*

§. 719. II. Gevolg. *Al de zijden van een parallelogram liggen dan ook insgelijks in hetzelfde vlak.*

XVII. Stelling. *Fig.* 271.

§. 720. *Wanneer twee lijnen, AB en CD, elk in het bijzonder, aan eene derde, met de twee eerste niet in hetzelfde vlak liggende, lijn, EF, evenwijdig zijn; dan zullen ook deze lijnen evenwijdig zijn, en in hetzelfde vlak liggen.*

Betoog. Omdat AB evenwijdig is aan EF, liggen deze lijnen (*XVI. Stell.*) in hetzelfde vlak, en omdat CD aan EF evenwijdig is, liggen deze twee lijnen in een ander vlak. Men late nu, door het punt E een vlak gaan, op hetwelk de lijn EF regthoekig staat; dan snijdt dit vlak de twee voorgaande, volgens de lijnen EA en EC, en de hoeken BAE en DCE zijn, wegens de onderstelde evenwijdigheid der lijnen, (*II. Gev. XXXIII. Bep. I. B.*) regte hoeken; de lijnen AB en CD staan derhalve (*X. Stell.*) regthoekig op het vlak PQ, en zijn (*IX. Stell.*) in dezelfde vlakte gelegen, en evenwijdig.

§. 721. XI. Bepaling. Wanneer twee vlakken, ten opzigte van elkander zoodanig geplaatst zijn, dat zij, aan welken kant, en hoe verre zij zich mogten uitstrekken, elkander nimmer snijden, worden zij *evenwijdige vlakken* genoemd.

XVIII. Stelling. *Fig.* 272.

§. 722. *Twee vlakken, PQ en RS, welke elke loodregt op dezelfde lijn, AB, staan, zijn onderling evenwijdig.*

Betoog. Want, indien deze vlakken niet evenwijdig zijn, zullen zij elkander ergens ontmoeten, en een zeker punt C gemeen hebben, door

door hetwelk en door de gezegde lijn *AB* een vlak zal kunnen gebragt worden, hetwelk de vlakken, volgens de lijnen *AC* en *BC*, zal doorsnijden: daar nu, wegens den loodregten stand van de lijn *AB*, de hoeken *A* en *B* regt zijn, en een driehoek geen twee regte hoeken hebben kan, kunnen de vlakken *PQ* en *RS*, elkander nergens ontmoeten, en zijn derhalve evenwijdig.

§. 723. I. Gevolg. *Fig.* 273. Om derhalve twee evenwijdige vlakken daarteftellen, neme men op eene lijn *AB*, twee punten *A* en *B*, en trekke, in onderscheidene vlakken, door deze punten de loodlijnen *CD*, *EF*; *GH* en *IK*; dan zullen (*IV en XVIII. Stell.*) de vlakken, welke door deze lijnen gaan, evenwijdig zijn. Of, men late een stelsel van twee evenwijdige lijnen, om de lijn, welke loodregt op beiden staat, omdraaijen; dan zullen deze evenwijdige lijnen, door hare beweging, evenwijdige vlakken voortbrengen.

§. 724. II. Gevolg. *Fig.* 270. Omdat (*XV. Stell.*) zekere lijn *EH* twee lijnen, *AB* en *CD*, welke in twee onderscheidene vlakken liggen, regthoekig snijdt, en men door de punten, *E* en *H*, twee andere lijnen trekken kan, welke regthoekig op diezelfde lijn *EH* staan, *kunnen* (*IV. Stell.*) *'er door twee lijnen, welke niet in hetzelfde vlak liggen, altijd twee evenwijdige vlakken gebragt worden.*

XIX. Stelling. *Fig.* 274.

§. 725. *Wanneer twee evenwijdige vlakken, PQ en RS, door een derde vlak BC gesneden worden; dan zijn ook de lijnen van doorsnijding, AB en CD, evenwijdig.*

Betoog. Want, indien de lijnen van doorsnijding elkander mogten ontmoeten, dan zouden ook de vlakken, in welke deze lijnen liggen, elkander moeten snijden, en derhalve niet evenwijdig zijn.

XX. Stelling. *Fig.* 272. (*Het omgek. van de XVIII. St.*)

§. 726. *Eene lijn, AB, welke loodregt op één PQ van twee evenwijdige vlakken, PQ en RS, staat, staat ook loodregt op het tweede RS.*

Betoog. Men trekke uit het punt *B*, in het vlak *PQ*, de lijn *BC*, en snijde beide vlakken, *PQ* en *RS*, door een vlak, hetwelk door de lijnen *BC* en *AB* gaat; dan zal de lijn *AC*, volgens welke dit vlak, het vlak *RS* snijdt, (*XIX. Stell.*) aan *BC* evenwijdig, en de

hoek

hoek *BAC* zal (*II. Gev. XXXIII. Bep. I. B.*) regt zijn. Hetzelfde zal nu plaats hebben, in welk eene rigting de lijn *BC* genomen wordt, en de lijn *AB* zal derhalve regthoekig ſtaan op alle lijnen, welke, uit het punt *A*, in het vlak *RS*, getrokken worden, en zal bijgevolg (*IV. Stell. of II. Bep.*) regthoekig op het vlak *RS* zijn.

XXI. Stelling. *Fig.* 272.

§. 727. *Een vlak BAC, hetwelk loodregt op één PQ van twee evenwijdige vlakken, PQ en RS, ſtaat, ſtaat ook loodregt op het tweede vlak RS.*

Betoog. Laat uit het punt *B* van de gemeene doorſnede *BC* van het vlak *PQ*, met het vlak *BAC*, hetwelk (*onderſt.*) op hetzelve regthoekig ſtaat, de lijn *BA* loodregt op deze doorſnede worden opgerigt; dan ſtaat (*IV. Bep.*) diezelfde lijn *AB* ook loodregt op het vlak *PQ*, en, omdat *PQ* evenwijdig is aan *RS*, (*XX. Stell.*) loodregt op het vlak *RS*: de hoek *BAC* is dan regt, en de lijn *BA* ſtaat derhalve in het vlak *ABC* loodregt op de doorſnede *AC* van de vlakken *RS* en *ABC*: het vlak *BAC*, ſtaat dan (*IV. Bep.*) loodregt op het vlak *RS*.

XXII. Stelling. *Fig.* 275.

§. 728. *De evenwijdige lijnen, AB en CD, welker uiteinden in twee evenwijdige vlakken, PQ en RS, gelegen zijn, zijn even lang.*

Betoog. De lijnen, *AB* en *CD*, volgens de onderſtelling, evenwijdig zijnde, liggen (*I. Gev. XVI. Stell.*) in een vlak, dat de vlakken *PQ* en *RS*, volgens twee lijnen, *BD* en *AC*, ſnijdt, welke (*XIX. Stell.*) evenwijdig zijn; diensvolgens en, wegens de onderſtelde evenwijdigheid der lijnen, *AB* en *CD*, is *ACDB*, een parallelogram, en daarom is (*I. Stell. III. B.*) $AB = CD$.

§. 729. Gevolg. *Fig.* 275. Wanneer de lijn *AB* loodregt op *PQ* ſtaat, dan ſtaat zij ook loodregt op *RS*, en de lijn *AB* is dan de afſtand der evenwijdige vlakken, *PQ* en *RS*. Wijl dan alle lijnen *CD*, welke evenwijdig aan *AB* loopen, en daarom loodregt op beide vlakken ſtaan, evenwijdig, en gevolgelijk gelijk zijn; *ſtaan twee evenwijdige vlakken overal even ver van elkander.*

XXIII.

XXIII. STELLING. *Fig.* 276.

§. 730. *De eindpunten van drie gelijke en evenwijdige lijnen, welke niet in hetzelfde vlak liggen, zijn altijd in evenwijdige vlakken gelegen.*

Opheldering. Wanneer de lijnen, AB, CD en EF, die niet alle drie in hetzelfde vlak liggen, onderling gelijk en evenwijdig zijn; dan liggen de punten B, D en F, (*III. Stell.*) in een vlak, en de punten A, C en E, in een ander vlak; of, zoo men wil, de lijnen BD, DF en BF, zijn in een vlak BDF, en de lijnen AC, CE en AE, in een ander vlak ACE gelegen. Nu zeg ik: dat deze twee vlakken evenwijdig zijn.

BETOOG. Want, indien deze vlakken niet evenwijdig zijn; dan zal men, door het punt B, een vlak BGH kunnen brengen, dat evenwijdig aan het vlak ACE is. Dit vlak zal de lijnen CD en EF, of derzelver verlengden, in de punten H en G snijden, en, wegens de onderstelde evenwijdigheid der lijnen AB, CD en EF, zal (*XXII. St.*) $CH = AB$; $EG = AB$ zijn; maar daar nu (*onderst.*) $AB = CD = EF$ is, zal (*IV. Ax.*) $CH = CD$ en $EG = EF$ moeten zijn; daar dit nu (*II. Ax.*) niet mogelijk is, zal geen ander, dan het vlak BDF evenwijdig aan het vlak ACE kunnen zijn.

§. 731. GEVOLG. *Vlakken, derhalve, welke overal even ver van elkander afstaan, zijn evenwijdig.*

§. 732. LEERING. Omdat (*XXXI. Stell. I. B.*) $AC = BD$; $CE = DF$ en $AE = BF$ is, zullen (*XIII. Stell. I. B.*) de driehoeken ACE en BDF, welke, door de uiteinden van drie gelijke en evenwijdige lijnen, gevormd worden, gelijk en gelijkvormig zijn.

XXIV. STELLING. *Fig.* 277.

§. 733. *Wanneer de beenen van twee hoeken aan elkander evenwijdig loopen; dan zijn deze hoeken aan elkander gelijk, en zij zijn daarenboven in evenwijdige vlakken gelegen.*

Opheldering. Wanneer AB aan DE, en AC aan DF evenwijdig is; dan zal 1° de hoek $BAC =$ aan den hoek EDF zijn; en 2°, het vlak, waarin de hoek BAC ligt, zal evenwijdig zijn aan het vlak, waarin de hoek EDF gelegen is.

BETOOG *van het eerste.* Men neme $AB = DE$ en $AC = DF$, en trekke de lijnen AD, BE, CF, en de lijnen EF en BC. Omdat nu AB aan DE evenwijdig is, liggen (*I. Gev. XVI. Stell.*) deze lijnen in hetzelfde vlak; en, naardien nog $AB = DE$ is, zijn (*XXXI. Stell. I. B.*) de lijnen AD en BE gelijk en evenwijdig. Om dezelfde redenen, zullen de lijnen AD en CF gelijk en evenwijdig zijn. De lijnen BE en CF, zullen alzoo, aan dezelfde lijn AD evenwijdig zijnde, (*XVII. Stell.*) onderling evenwijdig zijn, en (*I. Gev. XVI. St.*) in hetzelfde vlak liggen: maar, daar nu deze lijnen ook nog gelijk zijn, zal (*XXXI. Stell. I. B.*) $BC = EF$ zijn. De driehoeken, ABC en DEF, derhalve onderling gelijkzijdig zijnde, zal (*XIII. Stell. I. B.*) de hoek $BAC =$ den hoek EDF zijn.

Betoog *van het tweede*. Men heeft reeds bewezen: dat de lijnen AD, BE en CF, gelijk en evenwijdig zijn: de vlakken, in welke de hoeken BAC en EDF liggen, zijn dan (*XXIII. Stell.*) evenwijdig.

§. 734. Gevolg. *Fig.* 277. Hieruit volgt: dat, wanneer twee evenwijdige vlakken ABC en DEF, door twee andere vlakken $ABED$ en $ACFD$, welke elkander, volgens eene lijn AD, snijden, worden doorgesneden, de hoeken EDF en BAC, onder welke de laatste vlakken de eerste snijden, gelijk zullen zijn.

XXV. Stelling. *Fig.* 278.

§. 735. *Elk stelsel van drie evenwijdige vlakken*, PQ, RS *en* TU, *snijdt van twee lijnen*, AD *en* EH, *op eenigerlei wijze, in de ruimte gelegen zijnde, deelen af, welke met elkander eene welgeordende evenredigheid*, ($AB : BC = FG : GH$,) *uitmaken.*

Betoog. Om deze stelling, welke met de *I. Stelling* van het *IV. Boek* overëénstemt, op de algemeenste wijze, te betoogen, zullen wij aannemen: dat de lijnen AD en EH niet in hetzelfde vlak liggen. Zulks dan aannemende, zal men een punt D, in de lijn AD, en een punt E, in de lijn EH kunnen nemen, en deze twee punten, door eene regte lijn DE, verëénigen. Wanneer men nu, door de lijnen AD en DE, een vlak laat gaan, zal dit vlak de vlakken PQ, RS en TU, volgens de lijnen AI, BK en CL doorsnijden, en deze lijnen zullen (*XIX. Stell.*) met de lijnen AD en ED, in hetzelfde vlak liggen en evenwijdig zijn, en men zal derhalve (*I. Stell. IV. B.*) mogen stellen:

$$AB : BC = IK : KL$$

Laat men, door de lijnen ED en EH, een tweede vlak gaan; dan zal het de vlakken PQ, RS en TU, volgens de lijnen IF, KG en

HL,

HL, snijden, welke (*XIX. Stell.*) wederom in hetzelve vlak liggen, en evenwijdig zullen zijn: men zal dan (*I. Stell. IV. B.*) hebben:

$$IK:KL = FG:GH$$

en, wanneer men nu deze evenredigheid met de voorgaande vergelijkt: dan zal men (*I. Stell. II. B.*) eindelijk vinden:

$$AB:BC = FG:GH.$$

Over de Veelvlakkige Hoeken, gemeenelijk Ligchamelijke Hoeken genoemd.

§. 736. XII. BEPALING. Wanneer men de *XIV. Bepaling* van het *I. Boek*, alwaar eene bepaling van eenen hoek (een woord, hetwelk voor *regtlijnige hoek* gebruikt wordt,) gegeven is, inziet; dan zal men gevoelen: dat de natuurlijkste benaming, passende aan de onbepaalde ruimte, gelegen tusschen eenige vlakken, die elkander, in hetzelfde punt, ontmoeten, *veelvlakkige hoek* zal zijn. Een *Tweevlakkige hoek*, welken LEGENDRE *coin* (*hoek*) noemt, en die men ook *Vlaktehoek* zou kunnen noemen, is de onbepaalde ligchamelijke ruimte, gelegen tusschen twee onbepaalde vlakken, welke elkander, volgens het beloop eener onbepaalde lijn, doorsnijden. De vlakken, welke dien tweevlakkigen hoek bepalen, zijn de *zijden* of *faces*, en de lijn, volgens welke die zijden elkander snijden, de *ribbe* van den *tweevlakkigen hoek*.

§. 737. GEVOLG. *De grootte van eenen tweevlakkigen hoek hangt niet af van de uitgestrektheid of figuur, welke deszelfs zijden hebben; maar alleen van de grootere of kleinere ligchamelijke ruimte, welke tusschen dezelve gelegen is.*

§. 738. AANMERKING. *Fig.* 279. *Tweevlakkige hoeken zijn grootheden, welke, door de ribben dezer hoeken langs elkander te leggen, en de zijden tegen elkander te sluiten, tot één geheel vereënigd kunnen worden. Men kan ook elken tweevlakkigen hoek CBF, door middel van vlakken D, E, enz., welke door de ribbe AB van dien hoek gebragt worden, in twee of meer gelijke of ongelijke deelen, verdeelen.*

§. 739. XIII. BEPALING. *Fig.* 280. Twee *tweevlakkige hoeken zijn gelijk*, wanneer de ribbe AB van den eersten langs de ribbe CD van den tweeden, en de zijde Q van den eer-

eersten hoek op de zijde *S* van den tweeden gelegd zijnde, de andere zijde *P* van den eersten tweevlakkigen hoek dan ook op de andere zijde *R* van den tweeden valt.

XXVI. Stelling. *Fig.* 281.

§. 740. *Wanneer men, in de lijn AB, volgens welke twee vlakken AP en AQ elkander snijden, twee punten C en F neemt, en, door deze punten, in het eene vlak AP, twee evenwijdige lijnen, CD en FG, en, in het tweede vlak AQ, twee evenwijdige lijnen, CE en FH, trekt; dan zullen de hoeken DCE en GFH, welke deze lijnen bepalen, gelijk zijn.*

Betoog. Want omdat, volgens de onderstelling, *CD* aan *FG*, en *CE* aan *FH* evenwijdig is, zal (*XXIV. Stell.*) de hoek *DCE* gelijk zijn aan den hoek *GFH*.

§. 741. XIV. Bepaling. *Fig.* 281. De *standhoek* van eenen tweevlakkigen hoek is de hoek *DCE*, welke gevormd wordt door de loodlijnen *CD* en *CE*, welke, uit eenig punt *C* van de ribbe *AB*, in elke zijner zijden of faces, *AP* en *AQ*, op deze ribbe *AB*, worden opgerigt.

§. 742. Gevolg. *Fig.* 281. Die standhoek, is volgens de *XXVI. Stelling*, voor elk punt van de ribbe *AB* dezelfde, en vermits deszelfs beenen regthoekig op de ribbe van den tweevlakkigen hoek staan, staat (*II. Bep.*) deze ribbe regthoekig op het vlak van den standhoek, en de faces of zijden van den tweevlakkigen hoek staan bijgevolg ook (*IV. Bep.*) regthoekig op het vlak van den standhoek, en, omgekeerd.

XXVII. Stelling. *Fig.* 282.

§. 743. *Gelijke tweevlakkige hoeken hebben gelijke standhoeken. En omgekeerd; alle tweevlakkige hoeken, welker standhoeken gelijk zijn, zijn gelijk.*

Betoog *van het eerste*. Laten N° 1 en 2, twee gelijke tweevlakkige hoeken zijn. Men neme, in de ribben, *AB* en *CD*, dezer hoeken, twee punten, *E* en *H*, naar welgevallen, en trekke, in de faces *AP* en *AQ*, de lijnen *EF* en *EG*, loodregt op de ribbe *AB*; voorts de lijnen *HI* en *HK*, loodregt op de ribbe *CD*, en in de faces *CR* en *CS*; dan zijn *FEG* en *IHK*, de standhoeken der tweevlakkige hoeken, N° 1 en 2. Men legge nu de ribbe *CD*, langs de ribbe *AB*, zoo-

da-

danig, dat het punt H in het punt E, en dat de zijde of face CS op de zijde of face AQ valle; dan zal de lijn HK langs de lijn EG vallen, omdat de hoeken CHK en AEG regt, en derhalve gelijk zijn. Omdat nu de tweevlakkige hoeken (*onderst.*) gelijk zijn, zal de zijde of face CR in de zijde of face AP vallen; dat is, deze twee vlakken zullen tegen elkander sluiten; daar dan de regte hoeken, CHI en AEF gelijk zijn, zal HI langs EF vallen; de standhoeken FEG en IHK, zijn dan (*XV. Bep. I. B.*) gelijk.

Betoog *van het omgekeerde.* Wanneer de standhoeken FEG en IHK gelijk zijn; dan zal men daaruit tot de gelijkheid der tweevlakkige hoeken, N° 1 en 2, mogen besluiten. Want, omdat de standhoeken FEG en IHK gelijk zijn, zal men het punt H in E, HK langs EG, en HI langs EF kunnen leggen; daar nu de ribben AB en CD (*XIV. Bep.*) loodregt op de vlakken der standhoeken staan, en, (*II. Gev. IV. Stell.*) uit eenig punt van een vlak, slechts ééne loodlijn op dit vlak kan worden opgerigt, zal de ribbe CD, langs de ribbe AB vallen, en omdat (*III. Gev. I. Stell.*) twee vlakken elkander niet, volgens twee onderscheidene lijnen, kunnen doorsnijden, zal het vlak CR op het vlak AP, en het vlak CS op het vlak AQ vallen, en de tweevlakkige hoeken, N° 1 en 2, zullen (*XIII. Bep.*) gelijk zijn.

XXVIII. Stelling. *Fig.* 281 *en* 282.

§. 744. *De tweevlakkige hoeken staan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne respectieve standhoeken.*

Betoog. Daar deze stelling, met behulp van de voorgaande, op dezelfde wijze, als de *XVIII. Stelling* van het *V. Boek*, bewezen wordt, zullen wij, om plaats te winnen, het betoog achterwege laten.

§. 745. I. Aanmerking. Het blijkt hieruit: dat de standhoek van eenen tweevlakkigen hoek deszelfs betrekkelijke maat uitmaakt, gelijk de cirkelboog, welke, uit het hoekpunt van eenen hoek, beschreven wordt, de betrekkelijke maat van dien hoek is. Wanneer men derhalve, *Fig.* 281, eene zijde AP van eenen tweevlakkigen hoek, om deszelfs ribbe, laat omdraaijen; dan zal de beweging van die zijde den tweevlakkigen hoek, en de gelijktijdige beweging van de lijn CD, (loodregt op de ribbe AB staande,) den standhoek DCE voortbrengen; terwijl voorts elk punt S van de loodlijn CD, eenen cirkelboog ST zal beschrijven, welke de betrekkelijke maat van den standhoek is. Volgens hetgeen nu, in de voorgaande stellingen, en in de *XVIII.*

 Stell.

Stell. V. Boek, bewezen is, zal de tweevlakkige hoek, in elken ſtand van het vlak *AP*, evenredig zijn aan den ſtandhoek *DCE*, en aan den cirkelboog *ST*. Het is om die reden, dat de Schrijvers plegen te zeggen: *dat de ſtelling van twee vlakken gemeten wordt door den hoek der loodlijnen, die, uit eenig punt van de gemeene doorſnede, loodregt op dezelve, in beide vlakken, getrokken worden; en dat men den hoek, welke twee vlakken met elkander maken, aanmerkt, als door deze loodlijnen gevormd te zijn.*

§. 746. II. Aanmerking. Gelijk de helling of neiging van twee lijnen, welke niet anders dan derzelver onderlingen ſtand, of ſtelling, van de eene ten opzigte van de andere, is, door den hoek, welke deze lijnen met elkander maken, bepaald wordt, zoo ook wordt de helling of neiging van twee vlakken tot elkander, door derzelver tweevlakkigen hoek, of eenvoudiger, door derzelver ſtandhoek, bepaald; terwijl de helling of neiging van eene lijn tot een vlak, op dezelve wijze, door den ſtandhoek, welke die lijn met dit vlak maakt, (*VIII. Bep.*) gemeten wordt. Men kan hier bijvoegen: dat de ſtelling van twee lijnen, welke in onderſcheidene vlakken liggen, (*X. Bep.*) insgelijks door eenen hoek bepaald wordt. Het zijn dan de regtlijnige hoeken, welke de ſtelling van eene lijn tot eene lijn, van eene lijn tot een vlak, en van een vlak tot een vlak bepalen; en 'er is, in deze wijze van ſtandsbepaling, zulk eene juiste overëënſtemming, dat de eene ten verſtande van de andere verſtrekken moet.

§. 747. III. Aanmerking. De tweevlakkige hoeken hebben, in allen opzigte, dezelfde eigenſchappen als de regtlijnige. Alles, wat, in de XVI, XVII, XVIII en XIX. *Bep.* I. *B.*, van de laatſte gezegd, en in de III, IV en VI. *Stell.* I. *B.* bewezen is, geldt ook, onder dezelfde omſtandigheden, van de eerſte; ja ook, wanneer twee evenwijdige vlakken, door een derde vlak, geſneden worden; dan zullen de tweevlakkige hoeken, door deze ſnijding ontſtaande, al de eigenſchappen bezitten, welke in de XXIV en XXVI. *Stellingen* I. *B.* voor de regtlijnige hoeken, welke bij de ſnijding van twee evenwijdige lijnen, door eene derde, bewezen zijn, te moeten plaats hebben.

XXIX. Stelling. *Fig.* 283.

§. 748. *Wanneer, uit eenig punt C, van de doorſnede AB van twee vlakken, AP en AQ, twee loodlijnen, CF en CG, op deze vlakken, naar denzelfden kant, worden opgerigt; dan is*

de

de hoek FCG, welke de loodlijnen, CF en CG, met elkander maken, gelijk aan den standhoek DCE dezer twee vlakken.

BETOOG. Men late, door de loodlijnen, *CF* en *CG*, een vlak gaan: dat vlak zal (*Gev. IV. Bep.*) dan loodregt op elk der vlakken *AP* en *AQ* ſtaan, en, omdat dan (*XI. Stell.*) de gemeene doorſnede *AB* deze vlakken loodregt op het vlak, dat door de loodlijnen *CF* en *CG* gaat, geplaatst is, zullen (*II. Bep.*) de lijnen *CD* en *CE*, loodregt op *AB* ſtaan, en (*XIV. Bep.*) den ſtandhoek der vlakken bepalen. Nu zijn (*onderſt. en II. Bep.*) de hoeken *FCD* en *GCE* regt; wanneer men derhalve van die hoeken denzelfden hoek *GCD* afneemt, zal men (*VIII. Ax.*) den hoek *FCG*, gelijk aan den ſtandhoek *DCE* overhouden.

XXX. STELLING. *Fig.* 284.

§. 749. *De hoek DCE, gevormd door twee loodlijnen, CD en CE, welke, uit een punt C, buiten een' tweevlakkigen hoek gelegen, op zijne zijden AP en AQ vallen, is gelijk aan den ſtandhoek GFE, onder welke deze zijden elkander ſnijden.*

BETOOG. Men late, door de loodlijnen *CD* en *CE*, een vlak gaan, hetwelk (*onderſt. en Gev. IV. Bep.*) loodregt op de vlakken, *AP* en *AQ*, ſtaande, (*XI. Stell.*) ook loodregt op de lijn *AB* zal zijn, welke derhalve (*II. Bep.*) met de ſnijdingen, *FD* en *FE*, regte hoeken zal maken, zoodat de hoek *DFE*, de ſtandhoek der vlakken zal zijn: omdat nu de driehoeken, *CDG* en *FGE*, regthoekig zijn, en de hoek *FGE* = hoek *CGD* is, zal (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) de hoek *DCE* gelijk aan den ſtandhoek *EFG* zijn.

XXXI. STELLING. *Fig.* 282.

§. 750. *Wanneer twee vlakken, AP en AQ, die elkander ſnijden, evenwijdig zijn aan twee vlakken CR en CS; dan is de doorſnede AB der twee eerſte vlakken evenwijdig aan de doorſnede CD der twee laatſte, en de ſtandhoek der twee eerſte vlakken, is gelijk aan den ſtandhoek der twee laatſte.*

BETOOG. Laat, in de doorſnijding *AB*, een punt *E* genomen, en, door hetzelve, in de vlakken, *AP* en *AQ*, loodregt op *AB*, de lijnen *EF* en *EG* opgerigt, en een vlak door deze lijnen gebragt wor-

worden. Dit vlak zal de vlakken *CR* en *CS*, volgens het beloop der lijnen, *HI* en *HK*, doorfnijden, en, omdat nu het vlak van den ftandhoek *FEG*, (*IV. Stell. en Gev. IV. Bep.*) regthoekig op de vlakken *AP* en *AQ* ftaat, zullen de vlakken *CR* en *CS*, als evenwijdig aan de eerfte zijnde, ook (*XXI. Stell.*) regthoekig op het vlak van de lijnen *EF* en *EG*, dat is, op het vlak van den ftandhoek *FEG* ftaan, en, wanneer dan *HI* en *HK*, de lijnen zijn, volgens welke dit vlak de vlakken *CR* en *CS* fnijdt, zal de lijn *DH*, (*XI. Stell.*) loodregt op de lijnen *HI* en *HK* ftaan: de lijnen *AB* en *CD* zijn derhalve, als ftaande elk loodregt op het vlak van den ftandhoek, (*IX. Stell.*) evenwijdig; en, omdat eindelijk, wegens de evenwijdigheid der vlakken, *AP*, *CR* en *AQ*, *CS*, (*XIX. Stell.*) *HI* aan *EF*, en *HK* aan *EG* evenwijdig is, zal (*XXX. Stell. I. B.*) de hoek *IHK*, gelijk aan den hoek *FEG* zijn.

§. 751. XV. Bepaling. *Een veelvlakkige hoek, gemeenelijk ligchamelijke hoek genaamd, is de onbepaalde ligchamelijke ruimte, befloten tusfchen drie of meer vlakken, welke elkander in hetzelfde punt ontmoeten.* — Zij worden onderfcheiden, in *drie*, *vier*, *vijfvlakkige hoeken*, *enz.*, naarmate van het aantal vlakken, welke, in één punt zamenkomende, den veelvlakkigen hoek bepalen. Het minfte aantal vlakken, welke, tot het zamenftellen van eenen veelvlakkigen hoek genomen kunnen worden, zijn drie. Aldus vertoont de *Fig.* 285. eenen drievlakkigen hoek, bepaald zijnde door de drie regtlijnige hoeken, *BAC*, *CAD* en *BAD*, welke, niet in hetzelfde vlak mogen liggen, en, volgens het beloop van derzelver beenen, *AB*, *AC* en *AD*, die in het punt *A* zamenkomen, aan elkander fluiten, en welke beenen, in de gedachte, moeten aangemerkt worden, als onbepaaldelijk verlengd te zijn. De figuren 286 en 287. ftellen zesvlakkige hoeken voor.

§. 752. XVI. Bepaling. In eenen veelvlakkigen hoek onderfcheidt men: 1° de *zijden* of *faces*, dat zijn de regtlijnige hoeken, welker hoekpunten, in het toppunt van den veelvlakkigen hoek, aan elkander komen, en welker beenen, aan elkander fluitende, eene onbepaalde ligchamelijke ruimte tusfchen beiden laten; 2° de *ribben* van den veelvlakkigen hoek, zijnde de beenen der faces of zijden, door welken de veelvlakvlakkige hoek bepaald wordt, *en welker aantal altijd zooveel, als het getal der zijden of faces, bedraagt*; 3° de hoeken, welke den ſtand van twee aan elkander grenzende zijden of faces bepalen. *In elken veelvlakkigen hoek, komen dan de hoeken der ribben en de hoeken der zijden voor. Het getal van elke ſoort dezer hoeken is zoo groot, als het getal der zijden of ribben.* In den drievlakkigen hoek, *Fig.* 285, zijn de hoeken BAC, BAD en CAD, als vlakken beſchouwd, de zijden of faces; en de lijnen AB, AC en AD de ribben. Op dezelfde wijze, moet zulks ook van elken veelvlakkigen hoek verſtaan worden.

§. 753. I. Aanmerking. Euclides en zijne navolgers beſchouwen den ligchamelijken hoek, door ons veelvlakkigen hoek genoemd, als te beſtaan *uit de onderlinge neiging van drie of meer regte lijnen, welke niet in hetzelfde vlak gelegen zijn.* Volgens onze bepaling, wordt die onderlinge neiging door den veelvlakkigen hoek bepaald, en de hoedanigheid van den veelvlakkigen hoek beter uitgedrukt.

§. 754. II. Aanmerking. De bepaling van den veelvlakkigen hoek geeft aanleiding, om, tuſſchen denzelven en de regtlijnige figuren, eene merkelijke overëénkomst te beſpeuren. Gelijk de laatſten even zoo vele zijden als hoeken hebben, zoo ook is het getal van de hoeken van eenen veelvlakkigen hoek, gelijk aan het getal van derzelver zijden: het onderſcheid is alleen daarin gelegen, dat de zijden der regtlijnige figuren regte lijnen zijn, terwijl die der veelvlakkige hoeken vlakke hoeken zijn, welke, door den onderlingen ſtand van de ribben des veelvlakkigen hoeks bepaald worden.

§. 755. III. Aanmerking. Gelijk, onder de regtlijnige figuren, de driehoek de merkwaardigſte is, en de kennis van deszelfs eigenſchappen den grondſlag van die der regtlijnige uitmaakt, zoo ook is de drievlakkige hoek, onder de veelvlakkige hoeken, de merkwaardigſte, en verdient daarom afzonderlijk overwogen te worden; te meer, omdat de geheele Meetkunst der Ligchamen niet alleen, maar ook de voornaamſte toegepaste Wiskundige Wetenſchappen, als de Aardrijks- Sterre- en Zeevaartkunde, enz. op dezelve berusten. Zie *XIII. Boek.*

XXXII. Stelling. *Fig.* 288.

§. 756. *De ſom van twee zijden van eenen drievlakkegen hoek is grooter dan de derde zijde.*

Opheldering. Laat een drievlakkige hoek uit de hoeken ADB, BDC en ADC, die deszelfs zijden uitmaken, zijn zamengevoegd; wanneer dan de hoek BDC de grootste zijde is, dan moet men bewijzen: dat deze zijde kleiner is dan de som van de twee andere zijden, ADB en ADC; of hoek ADB + hoek $ADC >$ hoek BDC.

Betoog. Omdat de hoek BDC de grootste van al de zijden is, zal men den hoek BDE gelijk aan den hoek ADB kunnen maken: dit gedaan hebbende, neme men, A, B en E, zoodanig; dat $AD = BD = DE$ zij, en men trekke de lijnen AB en BE, en (BE tot in C verlengd zijnde,) de lijn AC.

Nu zijn de driehoeken ADB en BDE, gelijk en gelijkvormig; want, volgens de constructie, is $BD = BD$, $AD = DE$, en hoek BDE = hoek ADB; de zijde BE is dan (*X. Stell. I. B.*) gelijk aan de zijde AB. In den driehoek ABC, is voorts (*VII. Stell. I. B.*) $AB + AC > BC$; trekkende hiervan af, $AB = BE$ (*bew.*); dan zal 'er (*IX. Ax.*) overblijven, $AC > CE$. Nu is, in de driehoeken, ADC en CDE, $DC = DC$ en $AD = DE$ en $AC > CE$; derhalve zal (*XII. Stell. I. B.*) hoek $ADC >$ hoek CDE zijn; telt men eindelijk hierbij hoek ADB = hoek BDE; zal (*IX. Ax.*) hoek ADC + hoek $ADB >$ hoek BDC zijn.

§. 757. XVII. Bepaling. De hoeken van eenen veelvlakkigen hoek, *staan alle naar buiten*, wanneer, die veelvlakkige hoek door een vlak gesneden zijnde, de hoeken van den veelhoek, welke bij deze doorsnijding geboren worden, alle naar buiten staan. Zie *Fig.* 286. Sommige hoeken *staan naar binnen*, wanneer sommige hoeken van dien veelhoek naar binnen staan. Zie *Fig.* 287. *De hoeken van eenen drievlakkigen hoek staan alle naar buiten.*

XXXIII. Stelling. *Fig* 289.

§. 758. *De som van de zijden van eenen veelvlakkigen hoek, welker hoeken alle naar buiten staan, is altijd minder dan vier regte hoeken.*

Opheldering. Laat een zesvlakkigen hoek, door de hoeken, APB, BPC, CPD, DPE, EPF en FPA, welke deszelfs zijden zijn, en volgens de ribben, AP, BP, CP, DP, EP en FP, in het toppunt P, aan elkander sluiten, bepaald zijn: dan zegt de stelling: dat APB

$$APB + BPC + CPD + DPE + EPF + FPA < 4R$$

zal zijn, wanneer namelijk, al de hoeken naar buiten ſtaan; dat is, wanneer de hoeken van den zeshoek, *ABCDEF*, welke ontſtaat, indien men den zesvlakkigen hoek door een vlak doorſnijdt, alle naar buiten geplaatst zijn.

Betoog. Men neme, in het vlak van den zeshoek, *ABCDEF*, een punt *Q*, en trekke van hetzelve tot de hoekpunten des veelhoeks de lijnen, *AQ*, *BQ*, *CQ*, *DQ*, *EQ* en *FQ*, en tot het hoekpunt des zesvlakkigen hoeks de lijn *PQ*; dan worden 'er, aan den omtrek van den veelhoek, *ABCDEF*, even zoo vele drievlakkige hoeken gevormd, als 'er zijden of hoeken in den veelhoek zijn: omdat nu, volgens de voorgaande ſtelling, in den drievlakkigen hoek *A*, de ſom der hoeken, *FAP* en *BAP*, grooter is dan de hoek *BAF*, of dan de ſom der hoeken, *FAQ* en *BAQ*, en zulks voor de andere drievlakkige hoeken, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, op dezelfde wijze, plaats heeft, zal (*X. Ax.*) de ſom van de hoeken van den veelhoek, *ABCDEF*, kleiner zijn, dan de ſom van al de hoeken, welke aan de baſes der driehoeken, *ABP*, *BCP*, *CDP*, *enz.* gevormd worden; maar de ſom van de hoeken van den zeshoek, *ABCDEF*, is (*XIX. Stell. I. B.*) $n = 6$ zijnde, gelijk aan $(n-2) \times 2R$; derhalve is (*V. Ax.*) de ſom van al de hoeken aan de baſes des driehoeken, welke aan het punt *P* aan elkander ſluiten, grooter dan $(n-2) \times 2R$, of (omdat $n = 6$ is,) grooter dan acht regte hoeken: nu is (*XVIII. Stell. I. B.*) de ſom van al de hoeken dezer opſtaande driehoeken, *ABP*, *BCP*, *enz.*, omdat zij zes in aantal zijn, gelijk aan $6 \times 2R$ of $12R$: trekt men nu hier van af de ſom der hoeken aan de baſes *AB*, *BC*, *enz.* grooter dan $8R$, dan houdt men (*XI. Ax.*) over: dat de ſom der hoeken *APB*, *BPC*, *CPD*, *DPE*, *EPF*, *FPA*, kleiner is, dan $12R$ min $8R$, dat is, kleiner dan vier regte hoeken.

§. 759. XVIII. Bepaling. Twee veelvlakkige hoeken zijn in allen opzigte gelijk, wanneer zij zoodanig binnen elkander kunnen geplaatst worden, *dat derzelver toppunten in, derzelver zijden op, en derzelver ribben langs elkander vallen.*

§. 760. *Opheldering. Fig.* 290. De twee drievlakkige hoeken, *P* en *Q*, zullen gelijk zijn, wanneer het toppunt *E*, in het toppunt *A* gebragt, de ribbe *EF* langs de ribbe *AB*, en het vlak van de zijde *FEH*, op het vlak van de zijde *BAD* gelegd zijnde, dan ook de ribben *EH* en *EG* langs *AD* en *AC* vallen. Het is klaar, dat, wanneer deze omſtandigheden plaats hebben, de eveneens geplaatſte zijden der drie-

drievlakkige hoeken elkander, onder gelijke hoeken, fnijden; want, omdat zij, onder de gezegde omftandigheden, natuurlijk op elkander vallen, moeten zij (*XIII. Bep.*) dezelfde of gelijke ftandhoeken hebben. Hetzelfde, wat hiervan de gelijke drievlakkige hoeken gezegd is, geldt van alle veelvlakkige hoeken, in het algemeen, mits ook derzelver zijden op elkander vallen.

XXXIV. Stelling. *Fig.* 291.

§. 761. *Wanneer de zijden van twee drievlakkige hoeken, in dezelfde rangorde genomen, aan elkander gelijk zijn; dan zullen deze drievlakkige hoeken in alles gelijk zijn, en in elkander passen.*

Opheldering. Zij gegeven de twee drievlakkige hoeken, N° 1 en 2. Wanneer dan de zijden dezer hoeken, in dezelfde rangorde, genomen, aan elkander gelijk zijn; dat is, hoek $BAD =$ hoek FEH; hoek $BAC =$ hoek FEG; en hoek $CAD =$ hoek GEH; dan zullen deze in alles gelijk zijn: dat is 1° het vlak BAD, zal met het vlak BAC denzelfden hoek maken, als het vlak FEH, met het vlak FEG, 2° het vlak BAD, zal met het vlak CAD, denzelfden hoek maken, als het vlak FEH, met het vlak GEH, en 3°, het vlak BAC, zal met het vlak CAD denzelfden hoek maken, als het vlak FEG, met het vlak GEH.

Betoog. Men neme, op de eveneens geplaatfte ribben, AC en EG, twee punten, C en G, zoodanig, dat $EG = AC$ zij, en late, uit deze punten, C en G, twee loodlijnen, CP en GQ, de eerfte op het vlak BAD, en de tweede op het vlak FEH vallen. Men trekke voorts de lijnen, PB en PD, regthoekig op AB en AD, en de lijnen, QF en QH, regthoekig op EF en EH; en eindelijk de lijnen, AP, CB, CD en EQ, GF en GH.

Omdat dan CP loodregt op het vlak BAD ftaat, ftaat (*Gev. IV. Bep.*) het vlak BCP loodregt op het vlak BAD, en daar nu de hoek ABP regt is, zal (*VIII. Stell.*) AB loodregt op het vlak BCP, en bijgevolg (*II. Bep. en IV. Stell.*) loodregt op BC zijn, en de hoek CBP, zal de ftandhoek der zijden BAD en BAC uitmaken.

Om dezelfde redenen, zal de hoek GFQ de ftandhoek van de zijden FEH en FEG; de hoek CDP, de ftandhoek van de zijden BAD en CAD; de hoek GHQ, de ftandhoek van de zijden FEH en GEH zijn.

De

De driehoeken ABC en EFG, zijn derhalve regt in B en F, en de hoeken BAC en FEG, zijn (*onderst.*) gelijk; daarom zijn ook (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) de hoeken ACB en EGF gelijk; vermits nu (*constr.*) $EG = AC$ is, zijn (*IX. Stell. I. B.*) de driehoeken ABC en EFG gelijk en gelijkvormig, $BC = FG$ en $AB = EF$.

Om dezelfde redenen, zullen de driehoeken ADC en EHG, gelijk en gelijkvormig, $CD = GH$ en $AD = EH$ zijn.

Laat nu de vierhoek $EFQH$, op den vierhoek $ABPD$ gepast worden, zoodanig, dat het punt E, in het punt A, en EF langs AB valt; dan zal 1°, F in B vallen, omdat $EF = AB$ (*bew.*) is; 2° EH zal langs AD en het punt H in het punt D vallen; 3° de lijnen FQ en HQ zullen langs de lijnen BP en DP vallen, omdat de hoeken in de punten B, D, F en H, regt zijn. Het punt Q zal dan in het punt P, en EQ langs AP vallen, en daarom zal $EQ = AP$; $FQ = BP$ en $QH = PD$ zijn.

De regthoekige driehoeken EGQ en ACP, hebben dan (*constr. en bew.*) gelijke hypothenusen EG en AC, en de gelijke regthoekszijden EQ en AP; zij zijn dan (*II. Lemma I. B.*) gelijk en gelijkvormig; GQ is dan gelijk CP; en de driehoek FGQ is dan (*XIII. Stell. I. B.*) met den driehoek BCP; en de driehoek GHQ met den driehoek CDP gelijk en gelijkvormig; de hoek CBP is dan gelijk aan den hoek GFQ, en hoek CDP = hoek GHQ.

Wanneer men dan den drievlakkigen hoek N° 2, in den drievlakkigen hoek N° 1 past, zoodanig, dat het hoekpunt E, in het hoekpunt A; EF langs AB, en het vlak FEH op het vlak BAD valt; dan zal, volgens het bewezene, EH langs AD; F in B; H in D; FG langs BC; HG langs DC; het punt G in C, en derhalve EG langs AC vallen, en de twee drievlakkige hoeken zullen (*XVIII. Bep.*) in allen opzigte aan elkander gelijk zijn.

§. 762. Aanmerking. Wanneer de zijden der twee drievlakkige hoeken, N° 1 en 2, wel gelijk, maar niet, in dezelfde rangorde, aan elkander gevoegd zijn, zoodat, wanneer hoek FEH = hoek BAD; hoek FEG = hoek CAD, en hoek GEH = hoek BAC is; dan zal men dezelfde lijnen, als in het voorgaande betoog, trekkende, bewijzen: dat $GQ = CP$; $EF = AD$; $EH = AB$; $FQ = PD$; $QH = PB$; hoek GFQ = hoek CDP; hoek GHQ = hoek CBP zal zijn: de zijden der drievlakkige hoeken zullen elkander dan ook wel, onder dezelfde hoeken, als in het geval der voorgaande stelling, doorsnijden; maar de twee drievlakkige hoeken zullen niet meer, gelijk,

wan-

wanneer de gelijke zijden, in de wederzijdsche figuren, in dezelfde rangorde, geplaatst zijn, plaats heeft, in elkander passen. Nogtans kan men, met behulp van het beginsel, dat in het *XIII. Axioma* gesteld is, bewijzen: dat de onbepaalde ligchamelijke ruimten, begrepen tusschen de zijden dezer drievlakkige hoeken, ook in dit geval, zoowel als in het voorgaande, gelijk zijn; en dat het onderscheid der vergeleken wordende hoeken alleen in de onderlinge plaatsing van derzelver gelijke zijden, welke het onmogelijk maakt dezelve op elkander te passen, doch niet in de hoeken, welke deze zijden met elkander maken, noch in de ruimte, tusschen deze zijden bevat, gelegen is.

§. 763. XIX. BEPALING. Twee veelvlakkige hoeken zijn, door *superpositie* of *op elkander passing*, *gelijk*, wanneer de zijden A, B, C, D, E, van den eersten gelijk zijn aan de zijden A', B', C', D', E', van den tweeden en de standhoeken der eveneens geplaatste zijden, in dezelfde rangorde genomen, in beide veelvlakkige hoeken, gelijk zijn: dat is, (wanneer men zich verbeeldt in het hoekpunt te staan,) wanneer in beide hoeken, regts of linksom, $A = A'$; $B = B'$; $C = C'$; *enz*: maar zij zijn, door *oppositie tegenoverstand*, *gelijk*, wanneer de zijden, in eene andere rangorde genomen, gelijk zijn; te weten, $A = E'$; $B = D'$; $C = C'$; $D = B'$ en $E = A'$; de standhoeken van twee aan elkander grenzende zijden gelijk zijnde. LEGENDRE noemt deze laatste wijze van gelijkheid, *égalité par symétrie*; en LACROIX, hoeken, welke op deze wijze gelijk zijn, *angles polyèdres inverses*.

XXXV. STELLING. *Fig.* 292.

§. 764. *Wanneer men de ribben van eenen drievlakkigen hoek, van het hoekpunt afterekenen, in eene tegenovergestelde rigting verlengt; dan zal de drievlakkige hoek, welke door deze verlengde ribben ontstaat, tegen over den eersten staan, en, bij oppositie of tegenoverstand, aan denzelven gelijk zijn.*

BETOOG. Laat de drievlakkige hoek, uit de hoeken, APB, BPC en APC, die zijne zijden zijn, zijn zamengesteld: wanneer men dan de ribben AP, BP en CP, naar den tegenovergestelden kant van het punt P, verlengt; dan zal (*IV. Stell. I. B.*) hoek $A'PB' =$ hoek APB;

APB; hoek $B'PC' =$ hoek BPC, en hoek $A'PC' =$ hoek APC zijn; de drievlakkige hoeken, welke aan het punt P tegen over elkander ſtaan, zijn derhalve uit gelijke zijden zamengeſteld. Dan, aangezien het uit de figuur zigtbaar is: dat de zijden $A'PB'$, $B'PC'$ en $A'PC'$, van den voortgebragten drievlakkigen hoek, in eene tegengeſtelde rangorde, met de zijden APB, BPC en APC, van den gegevenen voorkomen, zullen deze drievlakkige hoeken, (*Aanm. XXXIV. Stell.*) bij oppoſitie of tegenoverſtand, gelijk zijn.

§. 765. Aanmerking. Men zal zich zonder moeite overtuigen, dat alle andere veelvlakkige hoeken dezelfde eigenſchap hebben.

XXXVI. Stelling. *Fig.* 293.

§. 766. *Wanneer de hoeken, welke de zijden van eenen drievlakkigen hoek met elkander maken, gelijk zijn aan de hoeken, onder welke de zijden van eenen anderen drievlakkigen hoek elkander doorſnijden, wel te verſtaan, dat, in beide drievlakkige hoeken, de gelijke hoeken in dezelfde rangorde voorkomen; dan zullen beide drievlakkige hoeken, bij ſuperpoſitie, gelijk zijn, en de gelijke zijden zullen, in de wederzijdſche drievlakkige hoeken, tegen over gelijke hoeken ſtaan.*

Opheldering. Laten, in de drievlakkige hoeken, N° 1 en 2, de hoek van APB met APC in N° 1 gelijk zijn aan den hoek van $A'P'B'$ met $A'P'C'$ in N° 2; de hoek van APB met BPC in N° 1, gelijk zijn aan den hoek van $A'P'B'$ met $B'P'C'$ in N° 2, en de hoek van APC met BPC in N° 1 gelijk zijn aan den hoek van $A'P'C'$ met $B'P'C'$ in N° 2; dan zal moeten bewezen worden: dat hoek $APB =$ hoek $A'P'B'$; hoek $APC =$ hoek $A'P'C'$, en hoek $BPC =$ hoek $B'P'C'$ zal zijn.

Betoog. Men legge de ribbe $A'P'$ van N° 2, langs de ribbe AP van N° 1, en het vlak $A'P'C'$, op het vlak van APC; dan zal, wegens de gelijke tweevlakkige hoeken, welke aan deze ribben gemaakt worden, (*XVIII. Bep.*) het vlak $A'P'B'$, op het vlak APB vallen, en de ribben $P'B'$ en $P'C'$ van N° 2, zullen (*I. Bep.*) in de vlakken APB en APC vallen.

Volgens de onderſtelling, worden nu de vlakken $B'P'C'$ en BPC, door het vlak APB, onder gelijke hoeken, doorgeſneden; de vlakken $B'P'C'$ en BPC zijn derhalve (*III. Aanm. XXVIII. Stell.*) evenwijdig. Wegens de evenwijdigheid dezer vlakken, zal nu (*XIX. Stell.*) $P'B'$

aan

aan PB, en $P'C'$ aan PC evenwijdig zijn, en daarom zal (*XXIV. Stell. I. B.*) hoek $A'P'B'$ = hoek APB en hoek $A'P'C$ = hoek APC, en eindelijk zal (*XXIV. Stell.*) hoek $B'P'C'$ = hoek BPC zijn.

XXXVII. Stelling. *Fig.* 294.

§. 767. *Wanneer de ribben van twee drievlakkige hoeken aan elkander evenwijdig zijn; dan zullen zij, of, bij superpositie, of, bij oppositie, gelijk zijn; naar dat de ribben dezer hoeken, in dezelfde, of, in eene tegenovergestelde rigting, ten opzigte van elkander, geplaatst zijn.*

Opheldering. Dat is, wanneer de drievlakkige hoeken N° 1 en 2, gegeven zijn, en de ribben $A'P'$, $B'P'$ en $C'P'$, van N° 2, evenwijdig zijn aan de ribben AP, BP en CP, van N° 1; en deze ribben (gelijk in de figuur,) in dezelfde rigting loopen; dan zullen deze hoeken, bij superpositie, gelijk zijn: doch, bij oppositie, indien de ribben van N° 2, in eene andere rigting, als die van N° 1 loopen.

Betoog. Omdat $A'P'$ aan AP en $B'P'$ aan BP evenwijdig is, zal (*XXIV. Stell.*) hoek $A'P'B'$ = hoek APB zijn; om dezelfde reden, zal, wegens de evenwijdigheid der lijnen, $A'P'$ aan AP en $C'P'$ aan CP, hoek $A'P'C'$ = hoek APC, en wegens de evenwijdigheid van $B'P'$ aan BP, en van $C'P'$ aan CP, de hoek $B'P'C'$ = hoek BPC zijn; volgens de *XXXIV. Stell.* zijn dan de drievlakkige hoeken N° 1 en 2, bij superpositie gelijk, en, volgens de *XXXV. Stell.* bij oppositie, wanneer de ribben van den eersten wel evenwijdig aan die van den tweeden zijn; maar in eene tegengestelde rigting loopen. Dezelfde waarheid zal, op dezelfde wijze, van veelvlakkige hoeken kunnen bewezen worden.

XXXVIII. Stelling. *Fig.* 295.

§. 768. *Wanneer men uit het hoekpunt C, van eenen drievlakkigen hoek, drie loodlijnen, CE, CF en CG, op de zijden, ACB, BCD en ACD, naar buiten, oprigt; dan zullen deze loodlijnen de ribben van eenen anderen drievlakkigen hoek zijn, welke de eigenschap zal hebben, dat deszelfs zijden en hoeken de supplementen van de hoeken en zijden van den eerst gestelden drievlakkigen hoek zullen zijn.*

Betoog. Omdat, volgens de onderstelling, *CE* en *CF*, loodregt op *ACB* en *BCD* staan, is (*XXIX. Stell.*) de hoek, welke deze twee vlakken, *ACB* en *BCD*, met elkander maken, gelijk aan den hoek, welke de loodlijn *CE*, met het verlengde van *CF* maakt; de hoek *ECF*, is dan (*XIX. Bep. I. B.*) het supplement van den hoek, onder welken de vlakken, *ACB* en *BCD*, elkander snijden. Om dezelfde reden, zal de hoek *FCG* het supplement zijn van den hoek, onder welke de vlakken, *BCD* en *ACD*, elkander snijden, en de hoek *GCE* het supplement van den hoek, welken de vlakken *ACD* en *ACB*, met elkander maken.

Omdat nu (*onderst.*) *CE* loodregt op *ACB* staat, staat *CE* (*II. Bep.*) loodregt op *AC* en *BC*; om dezelfde reden, is *CF* loodregt op *BC* en *CD*; en *CG* loodregt op *CD* en *AC*; derhalve is (*IV. Stell. en II. Bep.*) *AC* loodregt op *CE* en *CG*, of op het vlak *CGE*; *BC* loodregt op *CE* en *CF*, of op het vlak *ECF*, en *DC* loodregt op *CF* en *CG*, of op het vlak, dat door deze lijnen gaat. De ribben van den gegeven drievlakkigen hoek, zijn dan loodregt op de zijden van den voortgebragten drievlakkigen hoek, en derzelver hoeken zijn, volgens het eerste gedeelte van het betoog, de supplementen van de hoeken, onder welke deszelfs zijden elkander ontmoeten; terwijl, omgekeerd, de ribben van den voortgebragten drievlakkigen hoek loodregt op de zijden van den gegevenen drievlakkigen hoek staan, waarom dan ook de hoeken dezer ribben de supplementen zijn van de hoeken, onder welke de zijvlakken van den voortgebragten drievlakkigen hoek elkander snijden. De voortgebragte drievlakkige hoek is dan, ten opzigte van den gegevenen, op dezelfde wijze gesteld, als de gegevene ten opzigte van den voortgebragten. Men noemt den eenen drievlakkigen hoek den supplements hoek van den anderen.

ELFDE BOEK.

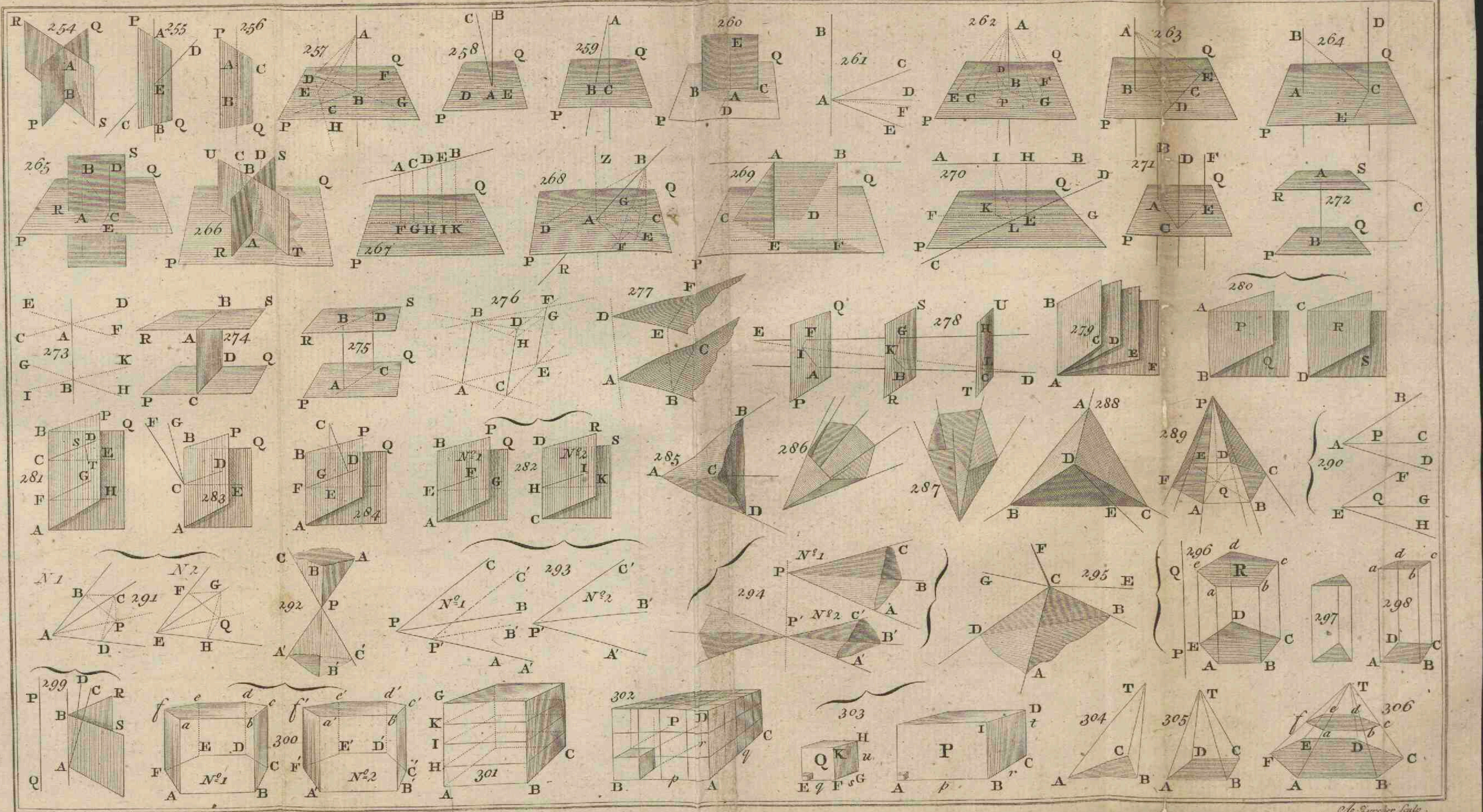
Over de Veelvlakkige Ligchamen; bijzonderlijk, over de Prisma's, Parallelopipeda's, Piramiden, enz. Over derzelver inhouden, en over de gelijkvormige ligchamelijke Figuren.

---

§. 769. I. Bepaling. De *veelvlakkige Ligchamen* bekleeden, onder de ligchamelijke figuren, dezelfde plaats, als de veelhoeken, onder vlakke figuren: onder alle ligchamelijke figuren, de eenvoudigste zijnde, strekken zij tot eene maat van de meer zamengestelde, en zijn, *door een zeker aantal vlakken, die elkander onderling snijden, ingesloten*: men onderscheidt in dezelve: 1° de *zijden* of *faces*, die altijd driehoeken, parallelogrammen, of veelhoeken zijn; 2° de *ribben*, volgens welke, de zijden aan elkander sluiten; 3° de *veelvlakkige hoeken*, welke door de zamenkomst der zijden, in afzonderlijke *hoekpunten*, gevormd worden; 4° en eindelijk den *inhoud*, of de *uitgebreidheid der ligchamelijke ruimte*, welke tusschen de zijden dezer ligchamen is ingesloten, en welke natuurlijk van derzelver onderlinge ligging en uitgebreidheid afhankelijk moet zijn.

§. 770. Aanmerking. Onder de veelvlakkige ligchamen, zijn de *Prisma's* en *Piramiden* de *eenvoudigste*, en strekken, in de ligchaamsmeting, tot termen van vergelijking, waarmede alle andere ligchamelijke figuren vergeleken worden; om welke redenen dan ook die soort van ligchamen, in dit Boek, meer bijzonderlijk overwogen worden.

§. 771. II. Bepaling. *Fig.* 296. Een *Prisma*, of *Zuil*, is een ligchaam, hetwelk op de volgende wijze ontstaat: *men neme eene regtlijnige figuur ABCDE, tot basis, en, op eenen zekeren afstand, naar welgevallen, een vlak R, evenwijdig aan deze basis: indien men dan, door al de zijden van de basis, vlakken brengt, welke, elk in het bijzonder, evenwijdig aan*



Jac. de Gelder delin. *A. Zurcher sculp.*

aan eene gegevene lijn PQ loopen; dan zal de ligchamelijke ruimte, tusschen alle deze vlakken besloten, een prisma of zuil zijn. Men noemt *ABCDE* de *basis*; *abcde* het *bovenvlak*; de vierhoeken *ABba*, *BCcb*, *CDdc*, *DEed*, *EAae*, de *zijvlakken*, of *de opstaande zijden*.

§. 772. III. BEPALING. *Fig.* 296, 297, 298. Men onderscheidt de prisma's in *drie*, *vier*, *vijf*, *zeshoekige prisma's*, *enz.* naar dat de basis een drie, vier, vijf, zeshoek is, enz. *Een driehoekig prisma wordt nogtans meestal eenvoudig* prisma *genoemd.*

§. 773. IV. BEPALING. *Fig.* 296. De Prisma's worden nog in *regte* en *scheve* prisma's onderscheiden: naar dat de lijn *PQ*, aan welke de zijvlakken van het prisma evenwijdig loopen, met het grondvlak of deszelfs verlengde, eenen regten of scheven hoek maken.

§. 774. V. BEPALING. *Regelmatige prisma's* zijn regte prisma's, welker bases regelmatige veelhoeken zijn: zij hebben eene *as*, welke, uit het *middelpunt van de basis komende, regthoekig op dezelve staat.*

I. LEMMA. *Fig.* 299.

§. 775. *De doorsnede AB van twee vlakken, AR en AS, welke, elk in het bijzonder, aan eenige lijn PQ evenwijdig zijn, is tevens aan diezelfde lijn PQ evenwijdig.*

BETOOG. Laat, in de doorsnede *AB*, een punt *A* genomen, en door hetzelve en de lijn *AB*, een vlak gebragt worden: indien dan dit vlak het vlak *AS*, volgens eene lijn *AC*, welke met *AB* eenen hoek maakt, doorsnijdt; dan zal (*XIV. Stell. X. B.*) *AC* aan *PQ*, evenwijdig zijn: maar dit vlak (door *A* en *AR* gaande,) zal het vlak *AR*, volgens eene andere lijn *AD*, doorsnijden, welke (*XIV. Stell. X. B.*) evenwijdig aan *PQ* zal zijn: de lijnen, *AC* en *AD*, welke (*XVII. Stell. X. B.*) onderling evenwijdig zijn, zouden dan elkander, in een punt *A*, snijden; dan, zulks onmogelijk zijnde, kan het vlak, hetwelk door het punt *A*, en de lijn *PQ* gaat, de vlakken *AP* en *AQ*, nergens anders, dan, in derzelver gemeene doorsnede, *AB*, doorsnijden, en deze gemeene doorsnede moet dan (*XIV. Stell. X. B.*) met *PQ* evenwijdig loopen.

I. STELLING. *Fig.* 296.

§. 776. *Elk regt of scheefhoekig prisma heeft de eigenschap: 1° dat de zijvlakken parallelogrammen zijn, 2° dat de ribben dezer zijvlakken gelijk zijn, en 3°, dat het bovenvlak aan de basis gelijk en gelijkvormig is.*

BETOOG. Omdat (*II. Bep.*) elk zijvlak, *ABba*, *BCcb*, *CDdc*, *DEed*, *EAae*, evenwijdig is aan dezelfde lijn *PQ*, zullen de doorsnijdingen dezer zijvlakken, dat zijn de opstaande ribben, *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, van het prisma (*I. Lemma*) aan de lijn *PQ*, en (*XVII. Stell. X. B.*) onderling evenwijdig zijn, en omdat (*II. Bep.*) het bovenvlak van het prisma aan deszelfs basis evenwijdig loopt, zullen (*XIX. Stell. X. B.*) *ab* aan *AB*; *bc* aan *BC*; *cd* aan *CD*; *de* aan *DE* en *ae* aan *AE*, evenwijdig zijn: de zijvlakken zijn dan (*I. Bep. III. B.*) parallelogrammen, welke in de opstaande ribben van het prisma aan elkander sluiten: men heeft dan (*I. Stell. III. B.*) $Aa = Bb = Cc = Dd = Ee$ en voorts $AB = ab$; $BC = bc$; $CD = cd$; $DE = de$; $EA = ea$; en (*XXIV. Stell. X. B.*) hoek $ABC =$ hoek abc; hoek $BCD =$ hoek bcd; hoek $CDE = cde$; hoek $DEA =$ hoek dea en hoek $EAB =$ hoek eab: de grond en bovenvlakken zijn derhalve gelijke en gelijkvormige veelhoeken.

§. 777. I. GEVOLG. *Wanneer een prisma, door een vlak, evenwijdig aan de basis loopende, gesneden wordt; dan zal dit vlak hetzelve in twee andere prisma's verdeelen, en de doorsnede zal, zoowel aan de basis, als aan het bovenvlak, gelijk en gelijkvormig zijn.*

§. 778. II. GEVOLG. *Fig.* 296. Wanneer de rigtlijn *PQ*, loodregt op de basis staat, en het prisma gevolgelijk regt is, *staan* (*I. Lemma en X en XI. Stell. X. B.*) *de zijvlakken en de ribben dezer zijvlakken regthoekig, zoowel op de basis, als op de bovenzijde van het prisma.*

§. 779. III. GEVOLG. *Fig.* 298. Wanneer de basis van het prisma een parallelogram *ABCD* is; dan zal, vermits *Bb* aan *Aa*, en *BC* aan *AD* evenwijdig is, (*XXIV. Stell. X. B.*) het parallelogram *ADda* aan het parallelogram *BCcb* evenwijdig zijn, en deze parallelogrammen zullen, daar (*XXIV. Stell. X. B.*) de hoeken *DAa* en *CBb* gelijk, en (*I. Stell. III. B.*) $AD = BC$ en $Aa = Bb$ is, (*III. Stell.*

III. B.) gelijk en gelijkvormig zijn. Om dezelfde reden, zijn de parallelogrammen *ABba* en *DCcb* evenwijdig, gelijk en gelijkvormig.

§. 780. VI. Bepaling. *Fig.* 298. *Een prisma, welks basis een parallelogram is, is dan bepaald door zes vlakken, die alle parallelogrammen zijn, twee aan twee, tegen over elkander staande, evenwijdig, gelijk en gelijkvormig zijnde. Deze soort van prisma heeft, met uitzondering van alle andere prisma's, de eigenschap, dat elk zijner vlakken tot basis kan genomen worden, zonder dat de figuur ophoudt prisma te zijn.* Men heeft daarom die soort van prisma's, door de bijzondere benaming van *parallelopipedum*, (hetgeen zooveel zeggen wil als *evenwijdzijdig ligchaam*, somtijds *balk* genoemd,) onderscheiden: *zijnde een parallelopipedum, gevolgelijk een prisma, een parallelogram tot basis hebbende*; of, *een ligchaam, bepaald door zes parallelogrammen, waarvan die, welke tegen over elkander staan, evenwijdig, gelijk en gelijkvormig zijn.*

§. 781. VII. Bepaling. Wanneer de parallelogrammen, welke het parallelopipedum bepalen, regthoekig zijn; dan wordt het een *regthoekig parallelopipedum* genoemd.

§. 782. VIII. Bepaling. Zijn al de parallelogrammen, welke het parallelopipedum bepalen, vierkanten; dan draagt het den naam van *cubus*, of *teerling*.

II. Stelling. *Fig.* 300.

§. 783. *Twee prisma's, N° 1 en 2, zullen gelijk en gelijkvormig zijn, wanneer, derzelver bases ABC enz. en $A'B'C'$ enz., gelijk en gelijkvormig zijnde, de zijden en ribben van twee drievlakkige hoeken, aan twee eveneens geplaatste hoekpunten, A en A', van de basis, onderling gelijk zijn; namelijk hoek $BAF =$ hoek $B'A'F'$; hoek $BAa =$ hoek $B'A'a'$; hoek $FAa =$ hoek $F'A'a'$; $AB = A'B'$; $A'F' = AF$ en $Aa = A'a'$.*

Betoog. Laat de basis $A'B'C'D'E'$, op de basis $ABCDE$, gepast worden, zoodanig, dat de gelijke zijden en hoeken in elkander vallen, hetgeen, wegens de onderstelde gelijk en gelijkvormigheid der bases, geschieden kan; dan valt A' in A; B' in B; C' in C; D' in D;

 E'

E' in E; F' in F. Omdat dan hoek $B'A'a' =$ hoek BAa en hoek $F'A'a' =$ hoek FAa is, zal (*XXXIV. Stell. X. B.*) $A'a'$ langs Aa vallen, en omdat $A'a' = Aa$ is, zal het punt a' in het punt a vallen: de parallelogrammen $ABba$ en $A'B'b'a'$, zijn dan (*III. Stell. III. B.*) gelijk en gelijkvormig; het punt b' zal dan in het punt b vallen: daar nu, om dezelfde reden, het punt c' in c, d' in d, e' in e en f' in f, zal vallen, kan het prisma N° 2, volkomen in het prisma N° 1 geplaatst worden, en de prisma's zijn derhalve onderling gelijk en gelijkvormig.

III. Stelling. *Fig.* 301.

§. 784. *Wanneer men eene der opstaande ribben AG, van een prisma, in een zeker aantal gelijke deelen, AH, HI, IK, KG, verdeelt, en, door de deelpunten, H, I, K, enz. vlakken, evenwijdig aan het grondvlak, trekt; dan zullen deze vlakken het prisma in even zoo vele gelijke en gelijkvormige prisma's verdeelen, als 'er deelen in de opstaande ribbe genomen zijn.*

Betoog. Want, omdat de vlakken van doorsnijding (*I. Gev. I. St.*) aan de basis gelijk en gelijkvormig, en de opstaande ribben AH, HI, IK, *enz.* gelijk ook de drievlakkige hoeken, aan de punten A, H, I, K, *enz.* (*XXXIV. Stell. X. B.*) aan elkander gelijk zijn, zullen (*II. Stell.*) de prisma's, in welke het geheele prisma verdeeld is, aan elkander gelijk en gelijkvormig zijn, zijnde derzelver aantal gelijk aan het aantal deelen, welke in de opstaande ribbe AG genomen zijn geworden.

§. 785. I. Gevolg. Vermits alles, wat een prisma, in het algemeen genomen, bewezen is, van alle soorten van prisma's, in het bijzonder, gelden moet, zoo volgt hieruit: *dat een parallelopipedum door een vlak, dat evenwijdig aan éene zijner zijden loopt, altijd in twee andere parallelopipeda's verdeeld wordt.*

§. 786. II. Gevolg. *Fig.* 302. *Wanneer men de drie ribben AB, AD en AC, van een parallelopipedum, welke eenen van deszelfs drievlakkige hoeken A bepalen, de eerste AB in p, de tweede AC in q, en de derde AD in r gelijke deelen verdeelt, en, door de deelpunten, van de ribbe AB vlakken, evenwijdig aan het parallelogram ACD; door de deelpunten van de lijn AC vlakken, evenwijdig aan het parallelogram ABD, en door de deelpunten van de ribbe AD vlakken, evenwij-*

wijdig aan het parallelogram BAC trekt; dan zal het geheele parallelopipedum in een aantal van $p \times q \times r$ gelijke en gelijkvormige parallelopipeda's verdeeld zijn, welke alle aan elkander sluiten, en de geheele ligchamelijke ruimte van het parallelopipedum vervullen.

§. 787. IX. BEPALING. *Fig.* 302. Een parallelopipedum wordt gezegd, *onder drie lijnen AB, AC en AD, en eenen gegevenen drievlakkigen hoek A, te zijn zamengesteld*, wanneer deze lijnen, AB, AC en AD, de ribben van eenen der ligchamelijke of drievlakkige hoeken van het parallelopipedum zijn, en de drie zijden van den drievlakkigen hoek A, namelijk, de hoeken, BAC, BAD en CAD, gegeven zijn; zijnde, door deze hoeken, als zijden van den drievlakkigen hoek, en door de drie ribben, welke tevens ribben van den drievlakkigen hoek zijn, het parallelopipedum zoodanig bepaald, dat het, onder deze gegevens, kan zamengesteld worden.

§. 788. X. BEPALING. *Fig.* 302. Vermits al de hoeken of zijden van den drievlakkigen hoek van een regt of regthoekig parallelopipedum regte hoeken, en dus uit zig zelve gegeven zijn, wordt een regt parallelopipedum gezegd, *onder drie lijnen, AB, AC en AD, gemaakt of zamengesteld te zijn*, indien deze lijnen de ribben van eenen der hoeken zijn. In dit geval noemt men deze drie ribben de *lengte*, *breedte* en *hoogte* van het parallelopipedum, zonder aan ééne der zijden, in het bijzonder, deze benaming, bij voorkeur, te geven.

§. 789. XI. BEPALING. Een cubus wordt gezegd op eene lijn A beschreven te zijn, wanneer deze lijn A eene ribbe van dien cubus is.

IV. STELLING. *Fig.* 303.

§. 790. *Wanneer de lengte AB van een regt parallelopipedum P, tot de zijde EF, van eenen cubus Q, in dezelfde reden staat, als het getal p, tot het getal q; de breedte BC, tot de zijde FG van den cubus, gelijk het getal r, tot het getal s; de hoogte CD, tot de zijde GH van den cubus, gelijk het*

het getal t, tot het getal u; dan ſtaat de inhoud van het parallelopipedum tot den inhoud van den cubus, gelijk het product prt, tot het product qsu.

Betoog. Men zal, volgens de onderſtelling, omdat $AB:EF = p:q$ is, de zijden AB en EF, in p en q gelijke deelen, verdeelen, en, door de deelpunten, vlakken, evenwijdig aan BCD en FGH, trekken kunnen. Om dezelfde redenen, zal men, BC in r, en FG in s gelijke deelen kunnen verdeelen, en, door de deelpunten, lijnen, evenwijdig aan de vlakken ABI en EFK, kunnen trekken. Eindelijk zal men CD en GH, in t en u gelijke deelen, verdeelen, en, door de deelpunten, vlakken, evenwijdig aan ABC en EFG, kunnen trekken. Het parallelopipedum P zal dan, (*II. Gev. III. Stell.*) in $p \times r \times t$, en de cubus Q, in $q \times s \times u$, gelijke en gelijkvormige parallelopipeda's verdeeld zijn, welke in beide ligchamen onderling gelijk zullen zijn. Volgens de *IX. Bep. II. Boek*, zal dan

$$Inh.\ P : Inh.\ Q = p \times r \times t : q \times s \times u$$

zijn, en de cubus Q zal zoo menigmaal in het parallelopipedum P begrepen zijn, als het getal $q \times s \times u$ in het getal $p \times r \times t$ begrepen is.

§. 791. I. Gevolg. Men zal dan, wanneer de betrekkingen van de zijden van een parallelopipedum tot de zijden van eenen cubus gegeven zijn, altijd de betrekking van den inhoud van het parallelopipedum tot den inhoud van den cubus bepalen kunnen, en deze laatſte betrekkingen zullen meetbaar of onmeetbaar zijn, naar dat de gegevene betrekkingen der ribben meetbaar of onmeetbaar zijn.

§. 792. II. Gevolg. Uit de betoogde evenredigheid volgt: (*V. Stell. II. B.*)

$$Inh.\ P = \frac{p \times r \times t}{q \times s \times u} \times Inh.\ Q$$

Nu is $\frac{p \times r \times t}{q \times s \times u} = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} \times \frac{t}{u}$, en de breuken $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ en $\frac{t}{u}$, drukken de betrekking van de zijden van het regthoekig parallelopipedum tot de zijden van den cubus uit, en zijn, of eigenlijke breuken, of geheele getallen, naar dat de ribbe van den cubus een onevenmatig of evenmatig deel van de ribben van het parallelopipedum is. *Wanneer men derhalve de geheele of gebrokene getallen, welke de verhouding of de betrekking van de ribbe eens cubus op of tot de drie ribben van een parallelopipedum uitdrukken, met elkander vermenig-*

vul-

vuldigt, zal het product de verhouding of betrekking van dien cubus op of tot dit parallelopipedum bepalen.

§. 793. III. Gevolg. Omdat dan de betrekking van een regthoekig parallelopipedum tot eenen cubus, door de vermenigvuldiging van geheele of gebrokene getallen, gevonden wordt: zegt men, bij verkorting: *de inhoud van een parallelopipedum is gelijk aan het product van deszelfs lengte, breedte en hoogte, met elkander vermenigvuldigd;* eene spreekwijs, welke altijd, als in het voorgaande gevolg, verstaan en uitgelegd moet worden.

§. 794. IV. Gevolg. *De inhouden der cuben, welke beschreven zijn op lijnen, welke tot elkander in reden staan, als de getallen* 1, 2, 3, 4, 5, *enz.*, n, *enz. staan tot elkander, als de derde magten dezer getallen: dat is, als:* 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, *enz.* n^3 *enz.*

§. 795. V. Gevolg. *Wanneer den inhoud van een regthoekig parallelopipedum in cubieke éénheden gegeven is, en de lengte van twee zijner ribben; dan zal men de onbekende ribbe van het parallelopipedum vinden, wanneer deszelfs gegeven inhoud door het product der bekende ribben deelt.*

§. 796. VI. Gevolg. *Wanneer de inhoud van eenen cubus in cubieke éénheden gegeven is, zal men vinden, hoeveelmaal de éénheid van de lengte maat in de ribbe van den cubus begrepen is, wanneer men uit het gegeven getal cubieke éénheden den cubus-wortel trekt.* Zie, wegens deze worteltrekking, I. C. XXXVII. *Les.*

§. 797. Aanmerking. Omdat gelijke cuben, in de lengte, breedte en hoogte, aan elkander sluiten, wordt de cubus als de natuurlijke en eigenaardige maat der ligchamen aangezien, en men verkiest onder alle cuben den cubus, welke op de éénheid van de lengte maat beschreven is; dat is: *de éénheid, op den meter beschreven.* Men noemt denzelven *cubieken meter*, bevattende duizend cubieke decimeters; de cubieke decimeter duizend cubieke centimeters; de cubieke centimeter duizend cubieke millimeters.

§. 798. XII. Bepaling. *Fig.* 302. In het vervolg, wordt den inhoud van een parallelopipedum P uitgedrukt, door drie zijner ribben, AB, AC, AD, (welke een der drievlakkige hoeken A bepalen,) door het teeken van multiplicatie aan elkander te verbinden. Aldus zal *Inh.* $P = AB \times AC \times AD$, en *Fig.* 303. Inhoud cubus $Q = EF^3$ zijn.

§. 799. XIII. Bepaling. *Fig.* 304 en 305. Eene *piramide* *de* is eene ligchamelijke uitgebreidheid, besloten binnen een zeker aantal driehoeken, welke in één toppunt zamenkomen, en welker bases de zijden van eenen driehoek of veelhoek zijn, welke de basis van de piramide genoemd wordt. Zij ontstaat op de volgende wijze. Men neme eene regtlijnige figuur, (drie of veelhoek,) en, boven of beneden deszelfs vlak, eenig punt T; door dit punt T, en door de zijden der regtlijnige figuur, late men vlakken gaan, welke elkander, volgens regte lijnen, die van het toppunt T, tot de hoekpunten van de basis loopen, doorsnijden, en de *zijvlakken* van de piramide genoemd worden.

§. 800. XIV. Bepaling. Men onderscheidt de piramiden in *drie-*, *vier-* en *veelhoekige*, naar dat de basis een drie-, vier- of veelhoek is, *Fig.* 304. vertoont eene drie, en *Fig.* 305. eene vierhoekige piramide.

§. 801. Aanmerking. *De driehoekige piramide is het ligchaam, dat door het minst mogelijk aantal vlakken* (vier namelijk) *bepaald wordt.* Zij bekleedt, onder de ligchamen, denzelfden rang, als de driehoek, onder de regtlijnige figuren. *De driehoekige piramide heeft de eigenschap, dat elk harer zijvlakken als basis kan aangenomen worden.*

§. 802. XV. Bepaling. Eene piramide is regelmatig, wanneer hare basis een regelmatige veelhoek is, en haar toppunt nog bovendien gelegen is, in de lijn, welke, uit het middelpunt van de basis, loodregt op dezelve staat; zijnde de regelmatige piramide bijgevolg ingesloten door eenen regelmatigen veelhoek, als basis, en door even zoo vele gelijke en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken, als 'er zijden in de basis der piramide voorkomen.

V. Stelling. *Fig.* 306.

§. 803. *Elke drie of veelhoekige piramide heeft de eigenschap: dat, wanneer zij gesneden wordt door een vlak, dat evenwijdig aan hare basis loopt, het vlak van doorsnijding aan deze basis gelijkvormig is.*

Betoog. Laat de piramide, in de figuur afgebeeld, eene zeshoekige ba-

basis $ABCDEF$ hebben, en door het vlak $abcdef$, evenwijdig deze basis zijnde, gesneden worden; dan zal, omdat de evenwijdige vlakken $ABCDEF$ of $abcdef$, door het vlak van den driehoek, ABT, volgens de lijnen, AB en ab, gesneden worden, (*XIX. Stell. X. B.*) ab evenwijdig aan AB zijn. Om dezelfde redenen zijn de zijden bc, cd, de, ef en fa, van den veelhoek $abcdef$ evenwijdig aan de overëénkomstige zijden BC, CD, DE, EF en FA, van den veelhoek $ABCDEF$. Men heeft derhalve (*II. Gev. I. Stell. en VIII. Stell. IV. B.*)

$$AB : ab = BT : bT = BC : bc$$

terwijl (*Gev. XXIV. Stell. X. B.*) de hoek abc = den hoek ABC is. Om dezelfde redenen, zal

$$\text{hoek } bcd = \text{hoek } BCD; \text{ en } BC : bc = CD : cd.$$
$$\text{hoek } cde = \text{hoek } CDE; \text{ en } CD : cd = DE : de.$$
$$\text{hoek } def = \text{hoek } DEF; \text{ en } DE : de = EF : ef.$$
$$\text{hoek } efa = \text{hoek } EFA; \text{ en } EF : ef = FA : fa.$$
$$\text{hoek } fab = \text{hoek } FAB; \text{ en } FA : fa = AB : ab.$$

zijn. Het blijkt hieruit: dat de veelhoeken, $abcdef$ en $ABCDEF$, onderling gelijkhoekig zijn, en dat de zijden, welke om de gelijke hoeken staan, tot elkander dezelfde bestendige reden hebben; en zulke veelhoeken zijn (*XVI. Stell. IV. B.*) gelijkvormig.

VI. Stelling. *Fig.* 307.

§. 804. *Wanneer twee veelvlakkige ligchamen*, N° 1 *en* 2, *zoodanig gesteld zijn: dat al de hoekpunten van het eene in al de hoekpunten van het andere, en al de ribben van het eene ligchaam langs al de ribben van het andere vallen; dan zal ook het eene ligchaam volkomen de plaats van het andere vervullen, dat is: het eene ligchaam zal in het andere passen, en de eveneens geplaatste zijvlakken zullen gelijk en gelijkvormig zijn, en daarenboven gelijke standhoeken hebben.*

Betoog. Laten A, B, C, D, E, F, G, H en I, de hoekpunten van het veelvlakkig ligchaam N° 1, en a, b, c, d, e, f, g, h en i, de hoekpunten van het veelvlakkig ligchaam N° 2 zijn: wanneer dan de hoekpunten a, b, c, *enz.* van het ligchaam N° 2, in de hoekpunten A, B, C, *enz.* van het ligchaam N° 1, geplaatst kunnen worden, zonder dat één van de hoekpunten van het eerste ligchaam buiten eenig hoekpunt van het andere valt: dan is het klaar: dat men de hoek-

hoekpunten van het eerste ligchaam, op eene andere wijze, dan de hoekpunten van het tweede ligchaam, door regte lijnen, veréénigen kan, en dat beide ligchamen dezelfde hoekpunten, en nogtans onderscheidene ribben kunnen hebben, en gevolgelijk door onderscheidene vlakken ingesloten zijnde, niet altijd in alles gelijk zullen zijn. Maar, wanneer de ribben dezer ligchamen, nog boven dien langs elkander vallen; dan sluiten ook de zijvlakken dezer ligchamen tegen elkander, en zij zijn in dit geval gelijk en gelijkvormig, en hebben diensvolgens denzelfden inhoud, en dan behoeft het ook geen verder betoog: dat de eveneens geplaatste zijvlakken gelijke standhoeken hebben, aangezien zulks uit het voorgaande, en uit de *XIII. Bep. en XXVII. Stell. X. B.* overtuigend blijkt.

§. 805. XVI. Bepaling. Twee ligchamen zijn derhalve *gelijk* en *gelijkvormig*, wanneer al de hoekpunten van het eene ligchaam in al de hoekpunten van het andere kunnen gebragt worden, en dit gedaan zijnde, al de ribben van het eene ligchaam langs al de ribben van het andere vallen, en wanneer bijgevolg de overéénkomstige zijvlakken dezer ligchamen gelijk zijn, en gelijke standhoeken hebben.

VII. Stelling. *Fig.* 307.

§. 806. *Wanneer men, uit al de hoekpunten van een veelvlakkig ligchaam, gelijke en evenwijdige lijnen trekt, en de uiteinden dezer lijnen, op dezelfde wijze, als de hoekpunten, uit welke zij getrokken zijn, door regte lijnen veréénigt; dan zal 'er een veelvlakkig ligchaam geboren worden, dat met het eerste gelijk en gelijkvormig zal zijn.*

Betoog. Laten, bij voorbeeld, uit de punten A, B en C, de lijnen Aa, Bb en Cc, onderling gelijk en evenwijdig aan elkander getrokken worden; dan is (*XXIII. Stell. X. B.*) het zijvlak abc, evenwijdig aan het zijvlak ABC, en aan hetzelve gelijk en gelijkvormig. Op dezelfde wijze zal, wanneer men, uit al de hoekpunten van het ligchaam N° 1, gelijke en evenwijdige lijnen trekt, het zijvlak acd, evenwijdig en gelijk aan het zijvlak ACD; het zijvlak ade, aan het zijvlak ADE, *enz.* evenwijdig en gelijk zijn. Nu snijden (*XXXI. Stell. X. B.*) evenwijdige vlakken elkander onder gelijke hoeken: al de standhoeken der zijvlakken van het ligchaam N° 2, zijn dan gelijk

aan

aan de standhoeken van de overëénkomstige zijvlakken van het ligchaam N° 1; uit al hetwelk dan blijkt: dat (*XVI. Bep.*) beide ligchamen gelijk en gelijkvormig zullen zijn.

§. 807. AANMERKING. Het bewezene in deze stelling, is slechts een afzonderlijk geval van deze meer algemeene stelling. *Wanneer men, uit al de punten van een veelvlakkig, regelmatig, of onregelmatig, ligchaam, gelijke en evenwijdige lijnen trekt; dan zullen de uiteinden van alle deze evenwijdige lijnen gelegen zijn, in het oppervlak van een ander ligchaam, hetwelk aan het eerste gelijk en gelijkvormig is.* Eene stelling, welke op dezelfde wijze, als de *XXXII. Stelling* van het *I. Boek*, bewezen wordt.

VIII. STELLING. *Fig.* 308.

§. 808. *Twee piramiden, P en Q, zijn gelijk en gelijkvormig, wanneer de ribben van twee van derzelver drievlakkige hoeken, A en a, gelijk zijn,* ($AB = ab$; $AC = ac$ *en* $AD = ad$;) *en de zijden dezer drievlakkige hoeken, tusschen de gelijke ribben begrepen, insgelijks gelijk zijn,* (*hoek* $BAC =$ *hoek* bac; *hoek* $CAD =$ *hoek* cad *en hoek* $BAD =$ *hoek* bad).

BETOOG. Volgens de onderstellingen, kan men den drievlakkigen hoek a, in den drievlakkigen hoek A, zoodanig plaatsen, dat het hoekpunt a, in het hoekpunt A, de ribben ab, ac en ad, langs de ribben AB, AC en AD, vallen; omdat dan $ab = AB$; $ac = AC$ en $ad = AD$ is, zullen de punten b, c en d, in de punten B, C en D, vallen: al de zijvlakken van de piramide Q, vallen derhalve in de zijvlakken van de piramide P: deze piramiden zijn derhalve (*XVI. Bep.*) gelijk en gelijkvormig.

IX. STELLING. *Fig.* 309.

§. 809. *Wanneer men, uit het toppunt A, van eenen gelijkbeenigen driehoek, ABC,* ($AB = AC$ *zijnde,*) *eene onbepaalde loodlijn op het vlak van dien gelijkbeenigen driehoek, ABC, oprigt, en in deze loodlijn, boven en beneden het vlak van dien driehoek, de punten D en E zoodanig neemt, dat*

AD

$AD = AE$ zij; dan zullen, wanneer men de lijnen, CD, BD, CE en BE trekt, de piramiden $ABCD$ en $ABCE$, gelijk en gelijkvormig zijn.

Betoog. Omdat AD loodregt op het vlak van den driehoek ABC ſtaat, zijn (*II. Bep. X. B.*) de hoeken BAD, BAE, CAD en CAE, regte hoeken, en omdat (*onderſt.*) $AB = AC$ en $AD = AE$ is, zal men de piramide $ABCD$, in de piramide $ABCE$, zoodanig kunnen pasſen, dat het punt A in het punt A, AD langs AE, AC langs AB, en AB langs AC valt, als wanneer de punten B, D en C in de punten C, E en B zullen vallen, ten bewijze, dat (*XVI. Bep.*) de piramiden gelijk en gelijkvormig zijn.

X. Stelling. *Fig.* 310.

§. 810. *Wanneer men, uit het middelpunt P, van eenen cirkel, welke, om eenen ongelijkzijdigen driehoek ABC, beſchreven is, en hetwelk gevolgelijk even ver van de hoekpunten A, B en C afſtaat, eene loodlijn PD op dezen driehoek oprigt, en PE gelijk PD neemt; dan zullen (de lijnen AD, BD, CD en AE, BE, CE, getrokken zijnde,) de piramiden $ABCD$ en $ABCE$, wel niet meer in elkander pasſen: maar zij zullen nogtans denzelfden inhoud hebben.*

Betoog. Aangezien de driehoeken APD, BPD, CPD, APE, BPE en CPE, in P regthoekig zijn, en, volgens de onderſtelling, $AP = PB = PC$ en $DP = EP$ is, zijn alle deze driehoeken (*X. Stell. I. B.*) gelijk en gelijkvormig; derhalve is $AD = BD = CD = AE = BE = CE$, en (*XIII. Stell. I. B.*) hoek $ADC =$ hoek AEC; hoek $ADB =$ hoek AEB; en hoek $CDB =$ hoek BEC; wanneer men dan de piramide $ABCE$, met zijn toppunt E naar boven ſtelt, ziet men: dat de ligchamelijke hoeken D en E, (*XXXI. Stell. X. B.*) ſlechts, bij oppoſitie of tegenoverſtand, gelijk zijn, en niet in elkander pasſen, ten ware dat de driehoek ABC gelijkbeenig of gelijkzijdig ware, iets, hetgeen hier niet onderſteld wordt. Vermits dan de ligchamelijke hoeken D en E niet in elkander ſluiten, zullen ook de piramiden niet in elkander pasſen. — Nogtans hebben deze piramiden gelijke inhoud. Want, volgens de voorgaande ſtelling is:

$$\text{Piram. } BCPE = \text{Piram. } BCPD$$
$$\text{Piram. } ACPE = \text{Piram. } ACPD$$
$$\text{Piram. } ABPE = \text{Piram. } ABPD$$

en,

en, wanneer men nu deze gelijke paramiden oprelt, verkrijgt men: (*VII. Ax.*) piramide $ABCE =$ piramide $ABCD$.

§. 811. Leering. Men leert, uit het betoog dezer ftelling: *dat 'er ligchamen kunnen beftaan, welke, door een gelijk aantal van gelijke en gelijkvormige vlakken, ingefloten zijn, en, alhoewel zij denzelfden inhoud hebben, nogtans niet op elkander pasfen.*

II. Lemma. *Fig.* 311.

§. 812. *'Er beftaat, binnen of buiten elke driehoekige piramide, een punt, hetwelk even ver van de hoekpunten dezer piramide verwijderd is.*

Betoog. Laat ABC de bafis van de driehoekige piramide zijn, P het middelpunt van den cirkel, welke om de bafis is befchreven, en hetwelk van de hoekpunten, A, B en C, even ver afftaat: indien men dan de lijn PQ loodregt op de bafis oprigt; dan zal (*VI. Stell. X. B.*) elk punt van deze loodlijn even ver van de hoekpunten A, B en C afftaan. Men deele nu de ribbe BD in R midden door, en late, door R een vlak gaan, op hetwelk de ribbe BD regthoekig ftaat; dan zal dit vlak de loodlijn PQ ergens in Q fnijden, en (*II. Bep. X. B.*) de lijn QR, zal loodregt op BD ftaan; QD is dan (*XX. St. I. B.*) gelijk BQ, gelijk aan AQ, gelijk aan CQ, en het punt Q ftaat gevolgelijk even ver van de hoekpunten, A, B en C, der piramide.

XI. Stelling. *Fig.* 312.

§. 813. *Wanneer men uit het toppunt D, eener piramide $ABCD$, eene loodlijn DE op derzelver bafis ABC laat vallen, en het verlengde EF dezer loodlijn, naar beneden, gelijk aan de loodlijn DE maakt, en voorts de lijnen AF, BF en CF trekt; dan zal de piramide $ABCF$, welke door deze conftructie ontftaat, door zijvlakken ingefloten zijn, welke gelijk zijn aan de zijvlakken van de eerst geftelde piramide $ABCD$, met dit onderfcheid: dat de buitenkant der zijvlakken van de eerfte piramide de binnenkant van de zijvlakken der tweede wordt, en dat de drievlakkige hoeken van de eerfte, bij oppofitie, aan de drievlakkige hoeken van de tweede ge-*

gelijk zijn, en deze piramiden zullen denzelfden inhoud hebben.

Betoog *van het eerste.* Men trekke de lijnen AE, BE en CE; dan zijn (*onderst. en IV. Stell. X. B.*) de hoeken DEA, DEB, DEC, FEA, FEB en FEC regt, en (*XX. Stell. I. B.*) de driehoeken DEA, DEB, DEC, zijn respectievelijk met de driehoeken FEA, FEB, FEC, gelijk en gelijkvormig, en daarom is $AF = AD$, $BF = BD$ en $CF = CD$, volgens de *XIII. Stell. I. B.*, zijn dan de driehoeken ABD, ACD en BCD, gelijk en gelijkvormig met de driehoeken ABF, ACF en ECF; wanneer men dan de eerste driehoeken ABD, ACD en BCD, op de zijden AB, AC en BC, naar beneden laat omdraaijen; dan zal ABD op ABF; ACD op ACF en BCD op BCF vallen, en de buitenkanten van de zijvlakken der piramide $ABCD$, worden de binnenkanten van de zijvlakken der piramide $ABCF$, en men behoeft slechts de onderste piramide $ABCF$, met haar toppunt naar boven te stellen, om te zien: dat de drievlakkige hoeken, welke tegen over de gelijke zijden staan, bij oppositie, gelijk zijn.

Betoog *van het tweede.* Men neme, in de eerste piramide, $ABCD$, een punt P, op gelijke afstanden van de hoekpunten A, B, C en D; en, in de piramide, $ABCF$, het punt Q insgelijks op gelijke afstanden van de hoekpunten A, B, C en F; dan liggen de punten P en Q, (*VI. Stell. X. B.*) in de loodlijn, welke loodregt op ABC, door het middelpunt van den cirkel gaat, welke om den driehoek ABC beschreven is; en nu is het klaarblijkelijk: dat $AP = AQ$; $BP = BQ$; $CP = CQ$ en $DP = FQ$ is; en nu is (*X. Stell.*) piramide $ABCP$ $=$ piramide $ABCQ$. Wanneer men nu de piramide $ABCF$ op de lijn AC omdraait, en de driehoek ACD, op den driehoek ACF stelt, zal, om dezelfde reden, piramide $ACDP =$ piramide $ACFQ$ zijn. Wij hebben dan:

$$\begin{aligned} &Piram.\ ABCP = Piram.\ ABCQ \\ &Piram.\ ACDP = Piram.\ ACFQ \\ &Piram.\ ABDP = Piram.\ ABFQ \\ &Piram.\ BCDP = Piram.\ BCFQ \end{aligned}$$

en trekt men deze gelijke piramiden op; dan zal (*VII. Ax.*) piramide $ABCD =$ piramide $ABCF$ zijn.

§. 814. Aanmerking. Zonder dat het noodig is, zulks verder in het breede aantetoonen, zal uit het betoogde volgen: *dat, wanneer twee piramiden, uit gelijke zijvlakken, zamengesteld zijn, met dit on-*

onderscheid, dat de binnenzijden van de zijvlakken der eerste piramide de buitenzijden van de zijvlakken der tweede worden, deze piramiden alsdan gelijken inhoud zullen hebben.

XII. STELLING. *Fig.* 313.

§. 815. *Wanneer men, uit al de hoekpunten A, B, C, D, enz. van een veelvlakkig ligchaam, op een gegeven vlak MN, loodlijnen, AP, BQ, CR, enz. laat vallen, en deze loodlijnen, aan den anderen kant van dit vlak MN, verlengt, en, op het verlengde dezer loodlijnen, de overëënkomstige punten a, b, c, d, e, f, enz. zoodanig neemt, dat aP = AP, bQ = BQ, cR = CR, enz. zij, en voorts deze overëënkomstige punten a, b, c, d, enz. op dezelfde wijze, door regte lijnen of ribben verëënigt, als de hoekpunten van het gegeven ligchaam verëënigd zijn; dan zal 'er, aan den anderen kant van het vlak MN, een veelvlakkig ligchaam ontstaan, hetwelk de eigenschap hebben zal: 1° dat het door hetzelfde aantal zijvlakken als het eerste bepaald is, en dat de zijvlakken van het tweede aan die van het eerste gelijk en gelijkvormig zijn; 2° dat de buitenzijden der zijvlakken van het eene ligchaam de binnenzijden der zijvlakken van het tweede zijn; 3° dat de standhoek van twee aan elkander sluitende zijvlakken gelijk is aan den standhoek van de twee gelijke en overëënkomstige zijvlakken van het tweede ligchaam; 4° dat de veelvlakkige hoeken, welke in beide ligchamen door gelijke zijvlakken bepaald worden, bij tegenoverstand, gelijk zijn; 5° en dat eindelijk de ligchamelijke inhouden dezer ligchamen gelijk zijn.*

BETOOG. Omdat de lijnen, *AP* en *BQ*, (*onderst.*) loodregt op het vlak *MN* staan, zijn zij (*IX. Stell. X. B.*) onderling evenwijdig en in hetzelfde vlak gelegen. Wanneer men dan het regthoekig trapezium *ABQP*, om de lijn *PQ* omdraait, en op het regthoekig trapezium *PQba* laat vallen; dan zal *AP* langs *aP*, en *BQ* langs *bQ* vallen; het punt *A* in *a*, en het punt *B* in *b*; de ribbe *ab* is dan gelijk aan de ribbe *AB*.

Men bewijst op dezelfde wijze, dat *bc* = *BC*; *cd* = *CD*; *de* = *DE*; *ef* = *EF*; *fb* = *FB*; *ac* = *AC*; *ad* = *AD*; *ae* = *AE*; *af* = *AF*; *gd* = *GD*; *ge* = *GE*; *gh* = *GH*; *gi* = *GI*; *hb* = *HB*;

$hf = HF$; $he = HE$; $hi = HI$; $hg = HG$; $bi = BI$; $ci = CI$; $di = DI$ en $gi = GI$ is.

Volgens de *XIII. Stelling I. Boek*, zijn dan de driehoeken ABC, ACD, ADE, AEF, AFB, GDE, GEH, GHI, GID, HGE, HEF, HFB, HBI, BIC, ICD en IDH, gelijk en gelijkvormig met de driehoeken abc, acd, ade, aef, *enz.* en de hoeken der zijvlakken van het tweede ligchaam zijn gelijk aan de hoeken der zijvlakken van het eerste, welke door dezelfde letters zijn uitgedrukt, en men ziet uit de figuur: dat de binnenkanten der zijvlakken van het gegevene ligchaam de buitenkanten der overëénkomstige en gelijke zijvlakken in het voortgebragte ligchaam worden.

Maar de standhoek van twee aan elkander liggende zijvlakken ABC en ACD, van het eerste ligchaam is gelijk aan den standhoek van de overëénkomstige gelijke zijvlakken, abc en acd, in het tweede ligchaam. Verbeelden wij ons, om dit te betoogen: dat de punten B en D, door eene regte lijn BD, verëénigd zijn; dan zal wederom, als boven, volgen: dat $bd = BD$ is, en de driehoek bdc, zal aan den driehoek BDC gelijk en gelijkvormig zijn; men kan dan, om de punten C en c, zich twee drievlakkige hoeken verbeelden; de eerste uit de hoeken ACB, ACD en BCD, en de tweède uit de daaraan gelijk zijnde hoeken acb, acd en bcd, zamengesteld, en dan is (*XXXIV. Stell. en Aanmerk.*) de standhoek van de zijvlakken ABC en ACD, gelijk aan den standhoek van de overëénkomstige zijvlakken abc en acd: en men zal op dezelfde wijze betoogen, dat elke andere twee aan elkander liggende zijvlakken van het eene ligchaam met elkander eenen hoek maken, welke gelijk is aan den hoek, onder welke de overëénkomstige zijvlakken van het tweede ligchaam elkander snijden.

Het is nu ook gemakkelijk te zien, dat de overëénkomstige veelvlakkige hoeken der ligchamen, (welker toppunten in de figuur door dezelfde letters zijn aangewezen,) bij oppositie gelijk zijn; want plaatst men zig in het punt A, dan liggen de hoeken BAC, CAD, DAE, EAF en FAB, in rangorde van de regter naar de linkerhand en plaatst men zich in het punt a, dan zijn de overëénkomstige gelijke hoeken bac, cad, dae, eaf en fab, anders om, van de linker naar de regterhand, geplaatst: daar nu bewezen is, dat de gelijkstandige zijden dezer ligchamelijke hoeken A en a elkander onder gelijke hoeken snijden, zijn (*XIX. Bep. X. B.*) de ligchamelijke hoeken A en a, bij oppositie gelijk. Men zal door eene gelijke redenering zich van de ge-

gelijkheid bij oppofitie van de andere gelijkftandige veelvlakkige hoeken dezer ligchamen overtuigen.

De twee ligchamen kunnen derhalve niet in elkander gepast worden: nogtans hebben zij eenen gelijken inhoud. Nemen wij, om zulks te bewijzen, in het vlak *MN*, een punt *M*, en verbeelden wij ons, dat, van dit punt tot de punten *A*, *B* en *C*, en tot de punten *a*, *b* en *c*, de lijnen *AM*, *BM*, *enz.*, *aM*, *bM*, *enz.*, getrokken worden, dan zal uit de *XX. Stell. I. B.* volgen: dat $AM = aM$; $BM = bM$; $CM = cM$ is; de piramiden *ABCM* en *abcM* zijn, derhalve (*XIII. Stell. I. B. en boven*) door gelijke zijvlakken, maar die in eene tegenovergeftelde rangorde geplaatst zijn, bepaald; zij zijn derhalve (*Aanmerk. XI. Stell.*) gelijk van inhoud. Wanneer men op alle de zijvlakken der twee ligchamen, als bafes, piramiden ftelt, welker toppunten in het punt *M* zamenkomen; dan zullen, om dezelfde reden, de piramiden, welke op gelijke bafes ftaan, aan elkander gelijk zijn. Nu beftaat de inhoud van het eerfte ligchaam ter linkerhand van *MN* klaarblijkelijk uit de fom van al de piramiden, welker toppunten in het punt *M* zamenkomen, en op de binnenkanten der zijvlakken geplaatst zijn min de fom van de piramiden, welke op de buitenzijden der zijvlakken ftaan: hetzelfde heeft voor het tweede ligchaam ter regterzijde van het vlak *MN* gelegen, plaats: daar nu de eveneens geplaatfte piramiden gelijk van inhoud zijn, moeten (*VII en VIII. Ax.*) de inhouden van beide ligchamen gelijk zijn.

§. 816. I. Aanmerking. *Wanneer men, aan eenig hoekpunt van het gegeven veelvlakkig ligchaam, de ribben verlengt, en de verlengde ribben aan dezelve gelijk neemt, en voorts, uit al de overige hoekpunten van het ligchaam, door het hoekpunt, A hoekpuntslijnen trekt, en derzelver verlengde aan die hoekpuntslijnen gelijk neemt, en eindelijk de overëënkomftige punten a, c, d, e, enz. welke men door deze conftructie verkrijgt, op dezelfde wijze, door ribben verëënigt, als de hoekpunten van het gegeven ligchaam verëënigd zijn; dan kan men bewijzen: dat het ligchaam, hetwelk op deze wijze ontftaat, in alles gelijk en gelijkvormig zal zijn aan het ligchaam, dat door de eerfte conftructie ontftaan is.*

§. 817. II. Aanmerking. De ligchamen, welke men door ééne dezer twee conftructien verkrijgt, hebben dan de eigenfchap, dat zij door gelijke en gelijkvormige zijvlakken bepaald zijn; met dit onderfcheid, dat de binnenkanten der zijvlakken van het eene de buitenkanten van de zijvlakken van het tweede worden, en uit deze conſtructie blijkt het dan: dat 'er maar ééne wijze mogelijk is, om het tweede ligchaam met behulp van het eerſte zamenteſtellen. Wij noemen zulke ligchamen, welke ten opzigte van elkander op deze wijze zijn zamengeſteld, *tegenovergeſtelde ligchamen.* LEGENDRE noemt dezelve *ſymetrieke ligchamen.*

§. 818. XVII. BEPALING. *Tegenovergeſtelde* of *ſymetrieke ligchamen*, zijn derhalve ligchamen, welke door hetzelfde aantal gelijke en gelijkvormige zijvlakken zijn ingeſloten, zoodanig, dat de binnenzijden der zijvlakken van het eene ligchaam de buitenzijden van de zijvlakken van het andere zijn. Wanneer men eenig ligchaam in eenen ſpiegel beſchouwt; dan is deszelfs beeld ten opzigte van dit ligchaam ſymetriek.

§. 819. GEVOLG. Volgens het betoog der voorgaande ſtelling, *zijn de veelvlakkige hoeken der ſymetrieke ligchamen bij oppoſitie gelijk: deze ligchamen kunnen derhalve niet in elkander gepast worden; nogtans hebben zij eenen gelijken inhoud.*

§. 820. III. AANMERKING. *Fig.* 314. Hetgeen van de veelvlakkige ligchamen in de voorgaande ſtelling bewezen is, is ook van alle ronde en onregelmatige ligchamen waarheid. Indien men, uit alle de punten van het oppervlak van een ligchaam P, loodlijnen op een vlak MN laat vallen, en het verlengde dezer loodlijnen aan dezelve gelijk neemt; dan zullen de uiteinden dezer loodlijnen het oppervlak van een ligchaam Q bepalen, dat bij ſymetrie, of tegenoverſtand, aan het eerſte ligchaam P gelijk zal zijn.

§. 821. IV. AANMERKING. Behalve de ligchamen, welke bij ſuperpoſitie gelijk zijn, heeft men dan ook nog ligchamen, welke, bij tegenoverſtand of ſymetrie, gelijk zijn. Deze laatſte ſoort van gelijkheid komt in de vlakke Meetkunst niet voor, en is alleen aan de ligchamelijke figuren in het bijzonder eigen.

§. 822. V. AANMERKING. *'Er beſtaan, behalve de ligchamen, welke, of bij ſuperpoſitie, of bij ſymetrie, gelijk zijn, vele anderen, die ongelijkvormig zijn, en nogtans eenen gelijken inhoud hebben.* De volgende ſtellingen behelzen de theorie dezer ligchamen, en bevatten de algemeene beginſelen, waarop de gronden der Ligchaamsmeting (*Stereometrie*) berusten.

§. 823. XVIII. BEPALING. De *hoogte van een prisma* is de afſtand tusſchen deszelfs grond en bovenvlakken. Deze vlak-

vlakken (*II. Bep.*) evenwijdig zijnde, *wordt*, aangezien evenwijdige vlakken overal (*Gev. XXIII. Stell. X. B.*) evenver van elkander afstaan, *de hoogte van elk prisma voorgesteld door de loodlijn, welke, uit eenig punt van het bovenvlak, op de basis of het grondvlak van het prisma valt. — De hoogte van eene piramide is de afstand van haar toppunt tot het grondvlak, of zij is de loodlijn, welke uit haar toppunt op het grondvlak valt.*

XIII. Stelling. *Fig.* 315.

§. 824. *Men kan, door elke twee tegenoverstaande ribben, BF en DH, van een parallelopipedum, een vlak BFHD brengen, en dit vlak deelt dan het parallelopipedum in twee gelijke symetrieke prisma's, ABDHEF en GHFBCD.*

Betoog. Vermits (*VI. Bep.*) de zijvlakken *ABFE* en *ADHE*, parallelogrammen zijn, zoo zijn (*I. Bep. III. B.*) de ribben *BF* en *DH*, elk aan de ribbe *AE* evenwijdig; zij zijn dan ook (*XVII. Stell. X. B.*) onderling evenwijdig, en liggen diensvolgens (*I. Gev. XVI. Stell. X. B.*) in hetzelfde vlak. Men zal dan het parallelopipedum *AG* kunnen snijden volgens een vlak, hetwelk door de overstaande ribben *BF* en *DH* gaat, en voorts de grond en bovenvlakken, volgens de lijnen *BD* en *FH*, doorsnijdt, en dit vlak van doorsnijding zal, omdat *BF* gelijk en evenwijdig aan *DH* is, (*XXXI. Stell. I. B. en I. Bep. III. B.*) het parallelogram *BFHD* zijn.

Dit parallelogram BFHD snijdt nu het parallelopipedum AG in twee symetrieke prisma's. Want drieh. *ABD*, is (*I. Stell. III. B*) = drieh. *CDB*, en (*VI. Bep.*) parall. *BCGF* = parall. *ADHE*, en parall. *DCGH* = parall. *ABFE*; wanneer men dan het prisma *ABDHEF*, op het prisma *BCDHFG*, zoodanig plaatst, dat het punt *A* in *G*, en de ribbe *AD* langs de ribbe *GF* valt; dan zal (*I. Stell. en het bew.*) het punt *D* in *F*, en het punt *B* in *H* vallen, en dan blijkt het, (*XII. Stell.*) dat deze prisma's symetriek en derzelver inhouden bijgevolg aan elkander gelijk zijn.

§. 825. Aanmerking. Het parallelopipedum *AG* zal nog, door vlakken, welke door de overstaande ribben *AE* en *CG*, *AB* en *GH*, *CD* en *EF*, *BC* en *EH*, *AD* en *FG*, gaan, in twee gelijke symetrieke prisma's kunnen gesneden worden.

XIV. STELLING. *Fig.* 316, 317, 318, 319 *en* 320.

§. 826. *De inhouden van alle prisma's, (het zij driehoekige het zij veelhoekige,) welke op dezelfde basis, of op hetzelfde grondvlak, staan, en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken geplaatst zijn, (en derhalve gelijke hoogten hebben,) zijn gelijk.*

AANMERKING. In deze eigenschap komen de prisma's met de parallelogrammen (zie *VII. Stell. III. B.*) overeên: maar, aangezien het grondvlak van een prisma, een drie- vier- of veelhoek kan zijn, moet onze stelling, welke op eene algemeene wijze voorgedragen is, in hare afzonderlijke gevallen, betoogd worden.

BETOOG. I. *De parallelopipedums, welke op dezelfde bases en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken staan, zijn gelijk.* (Zie *Fig.* 316, 317 en 318.) Laten de parallelopipedums, AF en AK, op hetzelfde grondvlak $ABCD$ staan, en nemen wij, dat derzelver bovenvlakken, $GEFH$ en $LIKM$, deelen van hetzelfde vlak zijn; dan kunnen de opstaande zijvlakken, $ABEG$ en $ABIL$, 1° in hetzelfde vlak, gelijk, in *fig.* 316 en 317, of 2°, in onderscheidene vlakken, gelijk in *fig.* 318, liggen.

1° Nemen wij, *Fig.* 316 en 317, dat de opstaande zijvlakken, $ABEG$ en $ABIL$, in hetzelfde vlak liggen; dan liggen ook noodzakelijk de tegenoverstaande opstaande zijvlakken, $DCFH$ en $DCKM$, als (*VI. Bep.*) evenwijdig aan de eerste zijnde, in hetzelfde vlak. Volgens het betoog der *VII. Stell. III. B.*, zijn de driehoeken, ALG en BIE, gelijk en gelijkvormig, en, wegens de gelijk en gelijkvormigheid (*VI. Bep.*) van de tegenoverstaande zijvlakken der parallelopipedums, AF en AK, is $AD = GH = LM = BC = EF = IK$; bovendien is GH aan AD, LM aan AD, en derhalve (*XVII. Stell. X. B.*) GH aan LM evenwijdig. Het ligchaam $ADMHGL$, is dan (*I. Stell.*) een driehoekig prisma, hetwelk den driehoek AGL tot grondvlak heeft. Om dezelfde redenen, is het ligchaam $BCKFEI$, een driehoekig prisma, dat den driehoek BIE tot grondvlak heeft. *De twee driehoekige prisma's, $ADMHGL$ en $BCKFEI$, zijn nu gelijk en gelijkvormig.* Want, wegens de gelijke en gelijkvormige driehoeken, ALG en BIE, is hoek $GAL =$ hoek EBI, en, omdat de overstaande zijvlakken van een parallelopipedum gelijke en gelijkvormige parallelogrammen zijn, is hoek $GAD =$ hoek EBC, en hoek $LAD =$ hoek IBC; de drievlakkige hoeken, welke aan de hoekpun-

ten

ten *A* en *B* gevormd zijn, zijn dan (*XXXIV. Stell. X. B.*) bij superpositie of in elkander passing gelijk: daar nu reeds bewezen is, dat de ribben dezer drievlakkige hoeken gelijk zijn, zijn (*II. Stell.*) ook de driehoekige prisma's *ADMHGA* en *BCKFEB*, gelijk en gelijkvormig, en hebben denzelfden inhoud.

Dit betoogde geldt voor de figuren 316 en 317: maar om nu, uit deze gelijke driehoekige prisma's, de gelijkheid der parallelopipedums te bewijzen, moeten de figuren 316 en 317, afzonderlijk overwogen worden.

Wanneer men in *Fig.* 316, bij elk der gelijke prisma's, welke de driehoeken *ALG* en *BIE*, tot bases hebben, het prisma, dat het trapezium *ABEL* tot basis heeft, optelt; dan zullen de sommen, dat is de parallelopipedums *AF* en *AK* (*VII. Ax.*) gelijk van inhoud zijn.

Trekt men, in *Fig.* 317, van de driehoekige prisma's, welke de driehoeken *ALG* en *BIE*, tot bases hebben, het driehoekig prisma, hetwelk den driehoek *NLE* tot basis heeft, af, en telt men bij elk der overblijvende prisma's, welke de trapeziums *ANEG* en *NLIB*, tot bases hebben, het driehoekig prisma, dat *ABN* tot basis heeft op; dan zal men (*VIII en VII. Ax.*) zien: dat ook, in dit geval, de parallelopipedums *AF* en *AK* eenen gelijken inhoud zullen hebben.

2° *Wanneer, Fig.* 318, *geen der opstaande zijvlakken van de parallelopipedums* (gelijk in het voorgaande geval plaats had,) *in het zelfde vlak liggen; dan zullen derzelver inhouden nogtans niet ophouden gelijk te zijn, mits maar altijd de parallelopipedums op hetzelfde grondvlak staan, en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken geplaatst zijn.* Om zulks te betoogen, verlenge men in de gedachte de opstaande zijvlakken *BCFE* en *ADHG*, van het parallelopipedum *AF*, en de opstaande zijvlakken *ABIN* en *DCKM*, van het parallelopipedum *AK*; dan zullen deze verlengde zijvlakken, door derzelver onderlinge snijding, het parallelopipedum *AP* doen geboren worden, aan hetwelk, (als met de parallelopipedums *AF* en *AK*, op hetzelfde grondvlak *ABCD*, en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken staande,) volgens het eerste gedeelte van het betoog, elk der parallelopipedums *AF* en *AK* gelijk zijn: deze laatste (*IV. Ax.*) zullen dan insgelijks gelijk zijn. En hier mede is de algemeene stelling voor de parallelopipedums, in alle mogelijke gevallen, bewezen.

II. *Wanneer de driehoekige prisma's ABCEDF en ABCIGH, Fig.* 319, *op dezelfde basis ABC staan, en hunne bovenvlakken EFD en IHG deelen van hetzelfde vlak zijn, hetwelk evenwijdig* *aan het grondvlak ABC loopt; dan zullen ook de inhouden dezer prisma's gelijk zijn.*

Men trekke, om zulks te betoogen, de lijnen *CK* en *BK*, evenwijdig aan *AB* en *CA*, en de lijnen *KL* en *KM*, evenwijdig aan *CE* en *CI*; dan verkrijgt men, op dezelfde basis *ABKC*, en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken, de parallelopipedums *CD* en *CG*, welker inhouden, volgens het eerste gedeelte des betoogs, gelijk zijn. Nu zijn (*XIII. Stell.*) de helften van de inhouden dezer parallelopipedums (*XII. Ax.*) onderling, en respectievelijk gelijk aan de driehoekige prisma's *ABCEFD* en *ABCIHG*, deze driehoekige prisma's zullen derhalve eenen gelijken inhoud hebben.

III. Nu zal men, *Fig.* 320, gemakkelijk bewijzen kunnen: *dat alle veelhoekige prisma's, P en Q, welke op hetzelfde veelhoekig grondvlak ABCDE staan, en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken geplaatst zijn, (en dus dezelfde hoogte hebben,) eenen gelijken inhoud hebben.*

Want, wanneer men de gemeenschappelijke basis door de hoekpuntslijnen *AD* en *BD*, in driehoeken verdeelt; en voorts, door deze hoekpuntslijnen en de aanliggende ribben, *DF* en *DG*, vlakken laat gaan; dan zullen deze vlakken de prisma's *P* en *Q*, in even zoo vele driehoekige prisma's verdeelen, als de gemeenschappelijke basis in driehoeken verdeeld is. Nu zijn, volgens het tweede gedeelte van ons betoog, de prisma's, welke op de driehoeken *ADE*, *ADB* en *BCD* geplaatst zijn, gelijk van inhoud; gevolgelijk zijn (*VII. Ax.*) de prisma's, *P* en *Q*, welke uit deze gelijke driehoekige prisma's zijn zamengesteld, gelijk van inhoud.

Het blijkt dan, uit deze onderscheidene deelen van ons betoog, *dat alle prisma's, welke op hetzelfde grondvlak staan, en gelijke hoogten hebben, gelijk van inhoud zijn.*

§. 827. XIX. Bepaling. Twee prisma's worden gezegd eene *gelijke helling tot hunne grondvlakken te hebben*, wanneer deze grondvlakken of in één gemeenschappelijk vlak gelegen, of onderling evenwijdig zijn, en tevens de ribben der opstaande zijden in beide prisma's onderling evenwijdig zijn.

XV. Stelling. *Fig.* 321 *en* 322.

§. 828. *Wanneer men het grondvlak van een prisma verandert in een ander, dat denzelfden inhoud heeft, en op dit* *nieuwe grondvlak een prisma oprigt, met het eerſte dezelfde helling en dezelfde hoogte hebbende; dan zal de inhoud van dit laatſte prisma gelijk aan dien van het eerſte zijn.*

Betoog. Om zich van de waarheid dezer algemeene ſtelling te overtuigen, zal het noodig zijn, de volgende gevallen afzonderlijk in overweging te nemen.

1° Nemen wij, *Fig.* 321, dat het parallelopipedum op de baſes *ABCD*, (een parallelogram zijnde,) ſtaat. Wanneer men dan eene lijn *AI* trekt, en, evenwijdig aan deze, de lijn *BK*; dan zal (*XIV. Stell. III. B.*) het parallelogram *ABKI* = het parall. *ABCD* zijn. Trekt men nu voorts door de punten *I* en *K*, de lijnen *IL* en *KM*, evenwijdig aan de opſtaande ribben van het parallelopipedum *AG*, en eindelijk de lijnen *EL* en *FM*; dan ontſtaat in de figuur het parallelopipedum *AM*, hetwelk met het parallelopipedum *AG* hetzelfde zijvlak *ABFE*, dat men als derzelver gemeene baſis kan aanmerken, gemeen heeft, en welke parallelopipedums tusſchen dezelfde evenwijdige vlakken *ABFE* en *DKMH* geplaatst zijn: het parallelopipedum *AM* is dan, met het parallelopipedum *AG*, van gelijken inhoud.

2° Wanneer men, *Fig.* 321, de parallelopipedums *AG* en *AM* door vlakken, welke door de overſtaande ribben *BF*, *DH* en *BF*, *IL* loopen, doorſnijdt; dan zullen (*XIII en XIV. Stell.*) de driehoekige prisma's *ABDHEF* en *ABILEF*, welke op de gelijke grondvlakken *ABD* en *ABI* ſtaan, als aan de helften der parallelopipedums *AM* en *AG* gelijk zijnde, denzelfden inhoud hebben.

3° Bijaldien dan, *Fig.* 322, eenig prisma eene veelhoekige baſis *ABCDE* heeft; dan zal men (*XV. Stell. III. B.*) die veelhoekige baſis in eene andere veelhoekige baſis *AFDE*, welke ééne zijde minder heeft, kunnen veranderen. Wanneer men dan, door het hoekpunt *F*, eene lijn evenwijdig aan de ribben van het prisma (welke uit de hoekpunten *A*, *B*, *C*, *D* en *E* komen,) laat gaan; dan zal (zie boven N° 2) het driehoekig prisma op de baſis *BCD* gelijk zijn aan het driehoekig prisma op de baſis *BFD*, en, wanneer men dan, bij deze gelijke driehoekige prisma's, het prisma, op de baſis *ABDE* ſtaande, optelt; dan zullen (*VII. Ax.*) de prisma's, welke op de baſes *ABCDE* en *AFDE* ſtaan, gelijk van inhoud zijn.

Gelijk men dan elken veelhoek in eenen driehoek kan veranderen, zoo ook zal men elk veelhoekig prisma in een driehoekig van denzelfden inhoud veranderen kunnen, mits men het nieuwe prisma dezelfde hoogte als het eerſte late behouden.

 4° *We-*

4° *Wederom kan, Fig. 323, een driehoekig prisma, op de basis ABC staande, in een parallelopipedum veranderd worden, dat een regthoek tot basis heeft.* Want indien men DCE, evenwijdig aan AB; CF loodregt op AB trekt, en de lijnen AD en BE evenwijdig aan CF; dan is (*XIII. Stell.*) het prisma op ACD = prisma op ACF, en het prisma op BEC = het prisma op BCF, en (*VII. Ax.*) het prisma op $ABED$ = het tweevoudig prisma op ABC. Indien men dan den regthoek $ABED$ door eene lijn GF in twee gelijke deelen deelt; dan zullen de prisma's, op $ABHG$ en $GHED$ elk gelijk zijn aan het prisma, op ABC.

5° *Eindelijk kan men, Fig. 324, een prisma, dat eenen regthoek ABCD tot basis heeft, veranderen in een prisma, dat eenen anderen regthoek AEFG tot basis heeft, onder die bepaling, dat de basis van dit nieuwe prisma eene gegevene lengte of breedte hebbe.* (Zie XXV *Werkstuk, pag.* 178.) Al hetwelk, uit de bloote beschouwing der figuur, en hetgeen reeds betoogd is, van zelf blijkt.

Men kan dan alle prisma's in andere prisma's, en eindelijk in parallelopipedums veranderen, welke niet slechts eenen regthoek tot basis hebben, maar zelf eenen regthoek, welke eene gegevene lengte of breedte heeft. Uit dit alles is dan de waarheid van het gestelde in alle deszelfs bijzonderheden bewezen.

§. 829. I. Gevolg. *Wanneer men, uit al de hoekpunten van de basis van eenen scheef veelhoekig prisma, loodlijnen op deze basis opregt, gaande tot aan het bovenvlak van het prisma; dan ontstaat 'er een regt veelhoekig prisma, dat met het gegevene prisma denzelfden inhoud heeft.* Daar men nu een veelhoekig prisma in een prisma, dat eenen regthoek tot bases heeft, door constructie veranderen kan, *zal ook elk prisma door constructie in een regthoekig parallelopipedum kunnen veranderd worden.*

§. 830. II. Gevolg. Een prisma dan in zulk een regthoekig parallelopipedum veranderd zijnde, *zal men*, (*II. Gev. IV. Stell.*) *door te bepalen, hoeveelmaal de éénheid van de lengte maat op de lengte, de breedte, en de hoogte van dit regthoekig parallelopipedum begrepen is, en door deze drie getallen met elkander te vermenigvuldigen, vinden, hoeveelmaal de cubieke éénheid op den ligchamelijken inhoud van dit prisma begrepen is.* Dan, gewonelijk tracht men de noodige gegevens, waardoor den inhoud van de basis in vierkante éénheden kan gevonden worden, door dadelijke meting te bepalen, en men vermenigvuldigt dan den inhoud van die basis met het getal, dat te te kennen geeft, hoeveelmaal de lengte éénheid in de hoogte van het prisma begrepen is. Men zegt daarom: *dat de inhoud van een prisma gelijk is aan de basis, vermenigvuldigd met de hoogte.*

§. 831. Voorbeeld. Laat, *Fig.* 319, de zijde *BC* van de basis *ABC* van het driehoekig prisma, *ABCDEF* gelijk $0^m, 173$; de loodlijn, welke uit het hoekpunt *A* op de basis van den driehoek valt, gelijk $0^m, 243$; en de hoogte, dat is de afstand van de grond en bovenvlakken, gelijk $0^m, 96$ zijn; dan zal de inhoud van het prisma, gelijk $\frac{1}{2} \times 0,173 \times 0,243 \times 0,96 = 0,01008936$ *cubieke meters*, of gelijk 10 *cubieke decimeters*, 89 *cubieke centimeters*, en 360 *cubieke millimeters* zijn.

XVI. Stelling.

§. 832. *De prisma's, welke gelijke bases en gelijke hoogten hebben, hebben ook eenen gelijken inhoud.*

Betoog. Men zal (*I. Gev. XV. Stell.*) elk prisma in een regthoekig parallelopipedum kunnen veranderen, en deze parallelopipedums zullen gelijke hoogte hebben. Nog zal men (*XV. Stell.*) één dezer regthoekige parallelopipedums in een ander kunnen veranderen, wiens basis dezelfde lengte heeft, als de bases van het ander; maar dan zal, omdat de grondvlakken gelijk zijn, de breedte van het grondvlak van dit veranderde parallelopipedum gelijk moeten zijn aan de breedte van het ander: de prisma's dan in gelijke en gelijkvormige parallelopipedums veranderd zijnde, moeten gevolgelijk denzelfden inhoud hebben.

XVII. Stelling. *Fig.* 325, 326 *en* 327.

§. 833. *De inhouden der prisma's, welke gelijke hoogten hebben, staan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne bases; en de inhouden der prisma's, welke op gelijke bases staan, zijn in dezelfde reden als hunne hoogten; en, wanneer eindelijk de bases en de hoogten van twee prisma's onderscheiden zijn; dan staan derzelver inhouden in de zamengestelde reden van hunne bases en hoogten.*

Betoog *van het eerste*. Laten, *Fig.* 325, de prisma's *P* en *Q* dezelfde hoogten hebben, maar op onderscheidene grondvlakken, bij voor-

voorbeeld, P op een driehoekig, en Q op een vijfhoekig, ſtaan: men zal dan (*XV. Stell.*) de prisma's P en Q in twee regthoekige parallelopipedums, R en S, (*Fig.* 326,) welke dezelfde hoogte hebben, kunnen veranderen, zoodanig, dat $P = R$ en $Q = S$ is, en dat de grondvlakken dezer parallelopipedums regthoeken $ABCD$ en $EFGH$ zijn, welke nog bovendien gelijke breedten $AD = EH$ hebben. Wanneer nu de lengten AB en EF meetbaar zijn en eene gemeene maat hebben, welk op AB en EF respectievelijk m en n maal (in de figuur 326 *acht* en *elf* maal,) begrepen is; dan zal men AB in m (in de figuur in *acht*) en EF in n (in de figuur in *elf*) gelijke deelen kunnen verdeelen, en door de deelpunten vlakken laten gaan, welke evenwijdig aan de zijvlakken $ADIK$ en $EHNM$ loopen. Deze evenwijdige vlakken zullen (*III. Stell.*) de regthoekige parallelopipedums R en S, het eerſte in m, het tweede in n gelijke en gelijkvormige parallelopipedums verdeelen, die alle gelijke baſes $ADIK$ en $EHNM$, en gelijke hoogten AL en EO hebben. Volgens de *Aanmerking IX. Bep. II. B.*, zijn dan de inhouden der parallelopipedums R en S tot elkander in dezelfde reden als de lengten AB en EF; maar deze lengten zijn (*XII. Stell. II. B.*) omdat $AD = EH$ is, in dezelfde reden als de regthoeken $ABCD$ en $EFGH$; derhalve is (*I. Stell. II. B.*)

$$R : S = regth.\ ABCD : regth.\ EFGH.$$

Daar nu (*conſtr.*) $R = P$ en $S = Q$; en $ABCD =$ aan het grondvlak van P en $EFGH =$ aan het grondvlak van Q is, zullen de prisma's P en Q, (die dezelfde hoogte hebben) tot elkander ſtaan in dezelfde reden als hunne grondvlakken. Wanneer de lijnen AB en EF onmeetbaar zijn; dan zal men, gelijk in de betoogen van de XI. Stell. III. B. en XVIII. Stell. V. B., kunnen bewijzen: dat ook de inhouden der prisma's in dezelfde reden als hunne grondvlakken zijn.

Betoog *van het tweede. Fig.* 327. Laten P en Q twee prisma's zijn, het eerſte op een driehoekig grondvlak ABC, en het tweede op een vijfhoekig grondvlak $DEFGH$ ſtaande: indien dan de inhouden dezer grondvlakken gelijk zijn; dan zal moeten betoogd worden: *dat de inhouden der prisma's in dezelfde reden zijn als hunne hoogten.* Onderſtel: dat de hoogten (dat is de loodlijnen, welke tusſchen de grond- en bovenvlakken begrepen zijn,) meetbaar zijn, en dat derzelver gemeene maat op de hoogten der prisma's, P en Q, respectievelijk m en n (in de figuur *acht* en *vijf*) malen begrepen zij; dan zal men (*III. Stell.*) door de deelpunten dezer loodlijnen vlak-

vlakken, evenwijdig aan de grond- en bovenvlakken kunnen laten gaan, en deze evenwijdige vlakken zullen dan de prisma's, P en Q, het eerste in m of *acht*, en het tweede in n of *vijf* gelijke prisma's verdeelen. Omdat nu het grondvlak ABC gelijk is aan het grondvlak $DEFGH$, zal (*XIV. Stell.*) het prisma $ACBI$ gelijk aan het prisma $DEFGHK$ zijn, en de prisma's P en Q zijn dan (*Aanm. IX. Bep. II. B.*) in dezelfde reden als hunne hoogten. Wanneer de hoogten der prisma's onmeetbaar zijn; dan zullen derzelver inhouden nog in dezelfde reden als hunne hoogten ſtaan: hetgeen op dezelfde wijze als boven betoogd wordt.

Betoog *van het derde*. Het blijkt dan, uit de twee voorgaande betoogen: dat de inhouden van twee prisma's zoodanig van derzelver grondvlakken en hoogten afhangen, dat, wanneer de grondvlakken of de hoogten dezelfde zijn, de inhouden der prisma's tot elkander in dezelfde reden ſtaan, als de hoogten, of als de grondvlakken; deze inhouden zijn dan (*XXII. Bep. II. B.*) in de zamengeſtelde reden van hunne grondvlakken en hoogten.

§. 834. Aanmerking. Men kan deze ſtelling korter; doch op eene min meetkunſtige wijze betoogen. Laten de grondvlakken van twee prisma's, P en Q, door G en g; en derzelver hoogten, door H en h, worden uitgedrukt; dan zal (*II. Gev. XV. Stell.*) $P = G \times H$ en $Q = g \times h$ zijn, en daarom $P:Q = G \times H : g \times h$; *dat is de inhouden zijn in de zamengeſtelde reden van de grondvlakken en de hoogten*. Stelt men $H = h$; dan wordt de evenredigheid $P:Q = G:g$; en ſtelt men eindelijk $G = g$, dan wordt de evenredigheid $P:Q = H:h$; en hierdoor zijn de twee eerſte deelen der ſtelling bewezen.

§. 835. Gevolg. *Wanneer de inhouden van twee prisma's gelijk zijn; dan zijn derzelver grondvlakken in de omgekeerde reden hunner hoogten.*

XVIII. Stelling. *Fig.* 328.

§. 836. *De inhouden der driehoekige piramiden, welke gelijke hoogten hebben, ſtaan tot elkander in dezelfde reden, als de inhouden van derzelver grondvlakken.*

Betoog. Verbeelden wij ons: dat de driehoekige piramiden $ABCZ$ en $A'B'C'Z'$, op dezelfde vlakte van het papier der teekening geplaatst zijn, en dat zij door een zeker aantal vlakken evenwijdig aan dit

dit vlak loopende, en op eenen gelijken afſtand van elkander geplaatſt zijnde, (en welke vlakken gevolgelijk de hoogten der piramiden in hetzelfde getal gelijke deelen verdeelen,) de eerſte $ABCZ$, in de ſtukken $ABCFGH$, $GHFLMN$, $LMNRSQ$, $RSQ\Delta VW$ en $VW\Delta Z$, en de tweede in de ſtukken $A'B'C'F'G'H'$, $G'H'F'L'M'N'$, $L'M'N'R'S'Q'$, $R'S'Q'\Delta' V'W'$ en $V'W'\Delta' Z'$, welke ſtukken in beide piramiden dezelfde hoogte hebben. Men trekke, door de punten A, B, G en H, de lijnen AD, BE, Ga en Hb, alle evenwijdig aan de ribbe CZ, en men verlenge FG en FH, tot in D en E; dan ontſtaan 'er de driehoekige prisma's $ABCFDE$ en $abCFGH$, en het ſtuk $ABCFGH$ van de piramide $ABCZ$ is kleiner dan het eerſte, en grooter dan het tweede prisma. — Hetzelfde, wat ten aanzien van de piramide $ABCZ$ gedaan is, moet ook van de piramide $A'B'C'Z'$ alzoo verſtaan worden.

Zonder dat het noodig is, zulks verder te omſchrijven, gaat men voort, met de prisma's $GHFLIK$ en $ghFLMN$, *enz.* in de piramide $ABCZ$, en de prisma's $G'H'F'L'I'K'$, $g'h'F'L'M'N'$, *enz.* in de piramide $A'B'C'Z'$ zamenteſtellen; dan vertoonen zich in de figuur van de piramide $ABCZ$, de naar buiten ſtaande prisma's $ABCFDE$, $GHFLIK$, $MNLQOP$, $RSQ\Delta TU$ en $VW\Delta ZXY$, en de naar binnen ſtaande prisma's $abCFGH$, $ghFLMN$, $mnLQRS$ en $rsQ\Delta VW$; en in de figuur van de piramide $A'B'C'Z'$, de naar buiten en naar binnen ſtaande prisma's, welke met dezelfde geaccentueerde letters geteekend zijn.

Het verſchil of onderſcheid der prisma's $ABCFDE$ en $abCFGH$, is klaarblijkelijk het prisma $ABbaGDEH$; ook ziet men uit de figuur: dat de prisma's $GHhgMNKI$, $MNnmSROP$, $RSsrVWUT$ en $VW\Delta YZX$, respectievelijk de onderſcheiden of verſchillen der voorſchrevene overëënkomſtige uit- en inwendige prisma's zijn, en men ziet uit de figuur: dat de ſom van alle deze verſchillen, gelijk is aan het driehoekig prisma $ABCFDE$, en de ſom der uitwendige prisma's min de ſom der inwendige prisma's is gelijk aan het prisma $ABCFDE$. Hetzelfde geldt van de figuur der piramide $A'B'C'Z'$.

Nu hebben, gelijk gezegd is, de prisma's, welke in beide figuren voorkomen, dezelfde hoogte, namelijk het prisma $ABCFDE$ met het prisma $A'B'C'F'D'E'$; het prisma $GHFLIK$ met het prisma $G'H'F'L'I'K'$, *enz.* en deze prisma ſtaan derhalve tot elkander in dezelfde reden als hunne grondvlakken.

Maar de grondvlakken der overëënkomſtige prisma's, uit beide figu-

gu-

guren genomen, zijn evenredig met de grondvlakken ABC en $A'B'C'$, der piramiden. Want (*V. Stell.*) de driehoeken ABC en GHF zijn gelijkvormig; daarom is (*IX. Stell. IV. B.*)

$$\text{Inh. drieh. } ABC : \text{Inh. drieh. } GHF = AB^2 : GH^2$$

maar omdat GH evenwijdig aan AB is, is (*I. Stell. IV. B.*) $AB : GH = AZ : GZ$ en (*VII. Stell. IV. B.*) $AB^2 : GH^2 = AZ^2 : GZ^2$; derhalve zal (*I. Stell. II. B.*)

$$\text{Inh. drieh. } ABC : \text{Inh. drieh. } GHF = AZ^2 : GZ^2$$

zijn. Om dezelfde reden, zal de tweede figuur

$$\text{Inh. drieh. } A'B'C' : \text{Inh. drieh. } G'H'F' = A'Z'^2 : G'Z'^2$$

moeten zijn. Omdat nu de piramiden gelijke hoogten hebben, zoo zijn de lijnen AZ en $A'Z'$, tusschen evenwijdige vlakken begrepen, en worden door een derde evenwijdig vlak, in de punten G en G', zoodanig gesneden, dat (*XXV. Stell. X. B.*) $AZ : GZ = A'Z' : G'Z'$ of (*VII. Stell. IV. B.*) $AZ^2 : GZ^2 = A'Z'^2 : G'Z'^2$ zal zijn, en daarom zal (*I. Stell. II. B.*)

$$\text{Inh. drieh. } ABC : \text{Inh. drieh. } GHF = \text{Inh. drieh. } A'B'C' : \text{Inh. drieh. } G'H'F'$$

moeten zijn, eene evenredigheid, welke onder deze gedaante

$$\text{Inh. drieh. } GHF : \text{Inh. drieh. } G'H'F' = \text{Inh. drieh. } ABC : \text{Inh. drieh. } A'B'C'$$

kan gesteld worden. En, om dezelfde reden, zijn de grondvlakken der andere overëénkomstige prisma's in beide figuren evenredig aan de grondvlakken der piramiden, $ABCZ$ en $A'B'C'Z'$, dat is aan de driehoeken ABC en $A'B'C'$. Hetzelfde, wat hier van de uitwendige prisma's betoogd is, geldt ook van de inwendige.

De som van de uitwendige prisma's der eerste figuur staat dan (*X. Stell. II. B.*) tot de som der uitwendige prisma's in de tweede gelijk het eerste prisma in de eerste tot het eerste prisma in de tweede figuur; dat is (*I. Stell. II. B. en het bew.*) gelijk de driehoek ABC tot den driehoek $A'B'C'$, en in dezelfde reden staan ook de sommen der inwendige prisma's, welke in beide figuren voorkomen.

Laat nu het getal der evenwijdige en evenver van elkander afstaande vlakken grooter genomen worden; dan zal het bewezene evenwel altijd waarheid blijven, en de sommen der uitwendige zoowel als die der inwendige prisma's zullen als de grondvlakken ABC en $A'B'C'$, der piramiden zijn: doch de inhouden der piramiden, $ABCZ$ en $A'B'C'Z'$, vallen tusschen de sommen dezer prisma's, en de sommen dezer prisma's verschillen van elkander de waarden der prisma's

AB

ABCFDE en *A'B'C'F'D'E'*; welke, indien het getal der evenwijdige vlakken zeer groot genomen wordt, ten laatsten kleiner zijn dan eenige grootheid, die men zich kan voorstellen, terwijl de piramiden van de sommen der uit- en inwendige prisma's niet merkbaar onderscheiden zijn: deze piramiden zijn derhalve in dezelfde reden als hare grondvlakken *ABC* en *A'B'C'*.

§. 837. Gevolg. *De driehoekige piramiden, welke op gelijke grondvlakken staan en gelijke hoogten hebben, zijn gelijk van inhoud.*

XIX. Stelling. *Fig.* 329, 330, 331 *en* 332.

§. 838. *Elk driehoekig prisma kan in drie driehoekige piramiden verdeeld worden, welker inhouden onderling aan elkander gelijk zijn.*

Betoog. Laat, *Fig.* 329, *ABCDEF*, een driehoekig prisma zijn: dan zal men hetzelve deelen kunnen door een vlak, hetwelk door de punten *A*, *C* en *E* gaat, en dan is het vlak van snijding de driehoek *ACE*, welke het prisma verdeelt in de driehoekige piramide *ABCE*, en in de vierhoekige piramide *ACDFE*, welke het parallelogram *ACDF* tot grondvlak en het punt *E* tot toppunt heeft, en welke vierhoekige piramide in *Fig.* 330, afzonderlijk is afgebeeld.

Deze vierhoekige piramide, in *Fig.* 330, kan wederom door een vlak, hetwelk door de punten *C*, *E* en *F* gaat, (het vlak van den driehoek *EFC* namelijk,) in twee driehoekige piramiden *ACFE* en *CDFE*, welke, in de figuren 331 en 332, afzonderlijk zijn afgebeeld, verdeeld worden.

Omdat nu (*I. Stell.*) de grond- en bovenvlakken *ABC* en *DEF*, van een prisma gelijk en gelijkvormig zijn, en wegens de evenwijdigheid dezer vlakken, het punt *E* van het vlak *ABC* zoo ver afstaat, als het punt *C* van het vlak *DEF*, zoo hebben de driehoekige piramiden *ABCE* en *EDFC* gelijke grondvlakken *ABC* en *DEF*, en bovendien gelijke hoogten; zij zijn derhalve (*Gev. XVIII. Stell.*) gelijk van inhoud.

En omdat een hoekpuntslijn *CF* een parallelogram *ACDF* (*I. St. III. B.*) in twee gelijke en gelijkvormige driehoeken, *ACF* en *CDF* verdeelt, en de toppunten der driehoekige piramiden *ACFE* en *CDFE* in het punt *E* aan elkander komen, en bijgevolg dezelfde hoog-

hoogte hebben, zijn (*Gev. XVIII. Stell.*) deze piramiden gelijk van inhoud.

De drie driehoekige piramiden *ABCE*, *ACFE* en *DCFE*, in welke het driehoekig prisma verdeeld is, zijn dan (*IV. Ax.*) gelijk van inhoud, en elk dezer piramiden is derhalve gelijk aan *één-derde* van het driehoekig prisma.

XX. STELLING. *Fig.* 333 *en* 334.

§. 839. *De inhoud van elke piramide is gelijk aan één-derde van den inhoud van het prisma, hetwelk met deze piramide dezelfde hoogte heeft en op hetzelfde grondvlak ſtaat.*

BETOOG. Laat, *Fig.* 333, *ABCDEF* een driehoekig prisma zijn, en *ABCG* eene driehoekige piramide, met dit prisma op hetzelfde grondvlak *ABC* ſtaande, en welker toppunt *G* in het verlengde bovenvlak *DEF* van het prisma ligt; dan hebben het prisma en de piramide dezelfde hoogte. Men trekke nu de lijnen *DA* en *DB*; dan hebben de piramiden *ABCD* en *ABCG* dezelfde baſes en dezelfde hoogten; zij zijn dan (*Gev. XVIII. Stell.*) gelijk van inhoud. Nu is (*XIX. Stell.*) inhoud piramide *ABCD* gelijk één-derde van den inhoud van het prisma *ABCDEF*; gevolgelijk is (*IV. Ax.*) de inhoud der piramide *ABCG*, gelijk aan *één-derde* van het prisma *ABCDEF*.

Laten nu, *Fig.* 334, de veelhoekige piramide *ABCDEF*, en het veelhoekig prisma *GHIKLMNOPQ*, op gelijke en gelijkvormige grondvlakken *ABCDE* en *GHIKL* ſtaan, en gelijke hoogten hebben. Wanneer men dan de hoekpuntslijnen, *AD*, *BD* en *GK*, *HK*, trekt, zal men de piramide in drie driehoekige piramiden, en het prisma in drie driehoekige prisma's kunnen verdeelen, welke alle dezelfde hoogte hebben, en dan zal, naar het eerſte gedeelte van het betoog,

$$Pir.\ ADEF = \tfrac{1}{3}\ Prisma\ GLKQMN$$
$$Pir.\ ABDF = \tfrac{1}{3}\ Prisma\ GHKQNO$$
$$Pir.\ BCDF = \tfrac{1}{3}\ Prisma\ HIKQOP$$

zijn; en trekt men nu deze gelijke dingen bij elkander; dan zal (*II en VII. Ax.*) de piramide *ABCDEF*, gelijk aan één-derde van het prisma *GHIKLMNOPQ* moeten zijn.

§. 840. GEVOLG. *De inhoud eener piramide zal derhalve gevonden worden, wanneer men den inhoud van haar grondvlak met één-derde gedeelte der hoogte vermenigvuldigt, mits de vlakte éénheden,* *in welke de inhoud van het grondvlak is uitgedrukt, het vierkant zij van de lengte éénheid, waarin de hoogte is uitgedrukt.*

§. 841. VOORBEELD. *Fig.* 334. Stel, dat de inhoud van het grondvlak $ABCDE = 237$ vierkante meters, en de hoogte $= 15^m, 3$ zij; dan zal de *Inhoud* $= ABCDE \times \frac{1}{3}$ *Hoogte* $= 237 \times \frac{1}{3} \times 15,3 =$ 1208,7 cubieke meters bedragen.

XXI. STELLING.

§. 842. *De inhouden der piramiden ſtaan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne grondvlakken, indien hare hoogten gelijk zijn; of, in dezelfde reden als de hoogten, indien de grondvlakken gelijk zijn; doch, beide ongelijk zijnde, in de zamengeſtelde reden van de grondvlakken en de hoogten.*

BETOOG. Want, omdat de inhouden der piramiden (*XX. Stell.*) gelijk zijn aan één-derde van de inhouden der prisma's, welke op de grondvlakken der piramiden geplaatst zijn, en met dezelve gelijke hoogten hebben; en (*XIV. Stell.*) de prisma's tot elkander ſtaan, als de grondvlakken, indien de hoogten gelijk zijn; als de hoogten, indien de grondvlakken gelijk zijn, en in de zamengeſtelde reden van de grondvlakken en de hoogten, indien beide ongelijk zijn, zoo zullen (*VI. Stell. II. B.*) de piramiden, welke met deze prisma's dezelfde grondvlakken en hoogten hebben, ook tot elkander in dezelfde verhouding als deze prisma's moeten ſtaan.

§. 843. GEVOLG. *De grondvlakken der piramiden, welke denzelfden inhoud hebben, ſtaan in de omgekeerde reden van derzelver hoogten.*

Want, indien men het grondvlak n malen grooter of kleiner neemt; dan zal men de hoogte n malen kleiner of grooter moeten nemen, om denzelfden inhoud te behouden.

§. 844. AANMERKING. Om den inhoud van een veelvlakkig ligchaam te bepalen, zal men een punt binnen dit ligchaam nemen, en, uit hetzelve, tot aan al de hoekpunten, regte lijnen trekken: het veelvlakkig ligchaam zal daardoor in even zoo vele drie of veelhoekige piramiden verdeeld worden, als het ligchaam zijvlakken heeft. *Wanneer men dan de vlakke inhouden van elk dezer zijvlakken, benevens derzelver afſtand tot dit aangenomen punt bepaalt; dan zal men den inhoud van elke piramide vinden, door den inhoud van het zijvlak van dit ligchaam met één-derde van deszelfs afſtand tot dit aange-*

namen punt te vermenigvuldigen, en de inhouden dezer piramiden bij elkander optetellen. De inhouden van bijzondere ligchamen, kunnen nogtans, zoo als uit de volgende ſtellingen blijken zal, op bijzondere wijzen gevonden worden.

§. 845. XX. Bepaling. Een *afgeknot prisma* is een prisma, waarvan een ſtuk afgeſneden is, door een vlak, hetwelk niet aan het bovenvlak of grondvlak evenwijdig is.

XXII. Stelling. *Fig.* 335.

§. 846. *De inhoud van elk driehoekig afgeknot prisma, ABCDEF, is gelijk aan de ſom van de inhouden der drie piramiden, welke met het afgeknotte prisma hetzelfde grondvlak ABC gemeen hebben, en welker toppunten, D, E en F, de hoekpunten van het bovenvlak van dit afgeknotte prisma zijn.*

Betoog. Men deele het afgeknotte prisma $ABCDEF$, door de vlakken ACE en ECF, in de piramiden $ABCE$, $ACFE$ en $DCFE$. De eerſte $ABCE$ heeft den driehoek ABC tot grondvlak, en derzelver toppunt is in E. De piramiden $ABCE$ en $ACFE$, kunnen aangemerkt worden, als hebbende de driehoeken ABE en AEF, tot grondvlakken, en het punt C tot een gemeenſchappelijke toppunt. Volgens de *XXI. Stell.* is dan:

$$Pir.\,ABCE : Pir.\,ACFE = drieh.\,ABE : drieh.\,AEF$$

maar, omdat BE evenwijdig aan AF is, hebben de driehoeken ABE en AEF gelijke hoogten, en daarom is (*XIV. Stell. III. B.*)

$$drieh.\,ABE : drieh.\,AEF = BE : AF$$

diensvolgens zal (*I. Stell. II. B.*)

$$Pir.\,ABCE : Pir.\,ACFE = BE : AF$$

moeten zijn. Eindelijk, kunnen de piramiden $ACFE$ en $CDFE$, aangemerkt worden, als ſtaande op de grondvlakken ACF en DCF, en daar zij hetzelfde toppunt E hebben, is (*XXI. Stell. en XIV. Stell. III. B.*)

$$Pir.\,ACFE : Pir.\,CDFE = drieh.\,ACF : drieh.\,CDF = AF : CD$$

en, vergelijkt men nu deze evenredigheid met de laatst voorgaande; dan heeft men (*I. Stell. II. B.*)

$$(Pir.\,ABCE,\ Pir.\,ACFE,\ Pir.\,CDFE) :: (BE,\ AF,\ CD)$$

Wanneer men zich nu verbeeldt: dat, uit de punten D, E en F, loodlijnen op het grondvlak ABC vallen; dan zullen deze loodlijnen, daar zij onderling evenwijdig zijn, met de onderling evenwijdig loopende ribben, *DC*, *EB* en *FA*, (*XXIV. Stell. X. B.*) gelijke hoeken, en derhalve (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B. en VIII. Stell. IV. B.*) drie gelijkvormige driehoeken maken; en deze loodlijnen zullen derhalve met de ribben *CD*, *BE*, *AF*, evenredig zijn. Omdat dan de piramiden, welke op dezelfde basis staan, in dezelfde reden, als hare hoogten zijn, zal de piramide *ACFE* gelijk zijn aan de piramide, welke op *ABC* staat, en haar toppunt in *F* heeft; en de piramide *CDFE*, gelijk aan de piramide, welke op *ABC* staat, en haar toppunt in *D* heeft; daar nu de som der piramiden *ABCE*, *ACFE* en *CDFE*, gelijk is aan het afgeknotte prisma, zal dit afgeknotte prisma (*VII. Ax.*) gelijk zijn aan de som der piramiden, welke elk de driehoek *ABC* tot grondvlak hebben, en tot toppunten de hoekpunten *D*, *E* en *F*.

§. 847. Gevolg. *Fig.* 335. Indien het afgeknotte prisma regt is; dan zijn de opstaande ribben *AF*, *BE* en *CD*, de hoogten der piramiden, welker som gelijk is aan het afgeknotte prisma, en die alle den driehoek *ABC* tot basis hebben. In dit geval, zal derhalve

$$Inh.\ ABCDEF = \tfrac{1}{3}.(AF + BE + CD) \times drieh.\ ABC$$

moeten zijn.

XXIII. Stelling. *Fig.* 336.

§. 848. *De inhoud van een scheef veelhoekig prisma AK, is gelijk aan den inhoud van het vlak UVWXZ, hetwelk de ribben regthoekig doorsnijdt, vermenigvuldigd met één der opstaande ribben, bij voorbeeld, de ribbe DK.*

Betoog. Wanneer het vlak *UVWXZ* eene der ribben *DK*, bij voorbeeld, in *U* regthoekig doorsnijdt; dan zullen al de andere ribben van het prisma, welke (*I. Stell.*) onderling evenwijdig zijn, door dit vlak (*I. Stell. III. B. en IV. Stell. X. B.*) regthoekig gesneden worden. Stellen wij dan: dat het prisma door zulk een vlak gesneden zij; dan zal men, omdat (*I. Stell.*) het grondvlak van een prisma aan het bovenvlak evenwijdig is, het stuk ter regterhand kunnen weggenomen, en aan het stuk ter linkerhand zoodanig kunnen aanvoegen, dat het punt *G* in *A*; het punt *H* in *B*; het punt *I* in *C*; het punt *K* in *D*; het punt *L* in *E* valle. Vermits nu de zijvlakken der prisma's parallelogrammen zijn, zoo is (*XXVI. Stell. I. B.*) de hoek *UKI* het supplement van den hoek *UDC*, *enz.* met al de andere hoeken. In dezen nieuwen stand van de deelen van het prisma, is dus KU het verlengde van UD; IV het verlengde van VM; *enz.*: zoodat 'er, door de gezegde zamenvoeging dezer deelen, een *ander* en een *regt* prisma ontſtaat, dat het vlak $UVWXZ$, tot baſis, en dezelfde opſtaande ribben als het gegevene heeft, en klaarblijkelijk van denzelfden inhoud is. Nu is de inhoud van het regte prisma, gelijk aan het vlak $UVWXZ$, vermenigvuldigd met éénе der ribben DK van het gegeven prisma, het ſcheve prisma zal derhalve gelijk zijn aan het vlak $UVWXZ$, vermenigvuldigd met éénе der ribben DK.

§. 849. I. Gevolg. Vermits de inhoud van elk parallelogram gelijk is aan de baſis, vermenigvuldigd met de hoogte, *zoo zal de ſom der zijvlakken van een prisma gelijk zijn aan den omtrek van het vlak, dat de ribben regthoekig doorſnijdt, vermenigvuldigd met ééne der opſtaande ribben van het prisma.*

§. 850. II. Gevolg. *Fig.* 337. *De inhoud van een driehoekig afgeknot prisma is (Gev. XXII. Stell.) gelijk aan het vlak* PQR, *hetwelk de ribben regthoekig doorſnijdt, vermenigvuldigd met één-derde van de ſom der ribben, dat is gelijk aan* $\frac{1}{3}(AB+CD+EF)\times$ *drieh.* PQR; eene uitdrukking, welke, indien $AB=CD$ is, onder de volgende gedaante kan gebragt worden:

$$(2AB+EF)\times QR\times\tfrac{1}{6}H$$

wanneer namelijk H, de afſtand van de ribbe EF, tot het tegenoverſtaande zijvlak $ABCD$ is.

§. 851. III. Gevolg. *Fig.* 338. Laat P een ligchaam zijn, welks grondvlak de regthoek $ABCD$ is, en door welks zijden vier vlakken gaan, waarvan de overſtaande niet evenwijdig zijn, welke zijvlakken voorts geſneden worden, door een vlak $EFGH$, dat evenwijdig aan het grondvlak loopt; dan zal de inhoud van dit ligchaam, dat men *prismoïde* zou kunnen noemen, op de volgende wijze gevonden worden. Men trekke de hoekpuntslijnen BH en CG; dan wordt de prismoïde in twee afgeknotte prisma's verdeeld, waarvan (H de afſtand van het grondvlak tot het bovenvlak beteekenende,) het benedenſte (*voorg. Gevolg*) door

$$(2AD+GH)\times AB\times\tfrac{1}{6}H=(2AD\times AB+GH\times AB)\times\tfrac{1}{6}H$$

en het bovenſte door

$$(2HG+AD)\times EH\times\tfrac{1}{6}H=(2HG\times EH+AD\times EH)\times\tfrac{1}{6}H$$

wordt uitgedrukt. Telt men deze twee afgeknotte prisma's bij elkander; dan verkrijgt men voor den inhoud der prismoïde

$$[(AB+EH)\times(AD+HG)+AB\times AD+HE\times HG]\times\tfrac{1}{6}H$$

zoo als men, deze producten ontwikkelende, ligtelijk vinden zal.

§. 852. XXI. Bepaling. Eene *afgeknotte piramide* is eene piramide, waarvan het bovenste gedeelte is afgesneden door een vlak, dat evenwijdig aan het grondvlak loopt.

XXIV. Stelling. *Fig.* 339.

§. 853. *De inhoud van eene afgeknotte driehoekige piramide is gelijk aan de som van de inhouden van drie piramiden, welke alle dezelfde hoogte der afgeknotte piramide hebben, en welker bases respectievelijk zijn de bases, het bovenvlak en eene midden-evenredige tusschen de bases en het bovenvlak van deze afgeknotte piramide.*

Betoog. Men deele de afgeknotte piramide eerst door een vlak, hetwelk door de punten A, E en C gaat; dan is zij verdeeld in de driehoekige piramide $ABCE$, en in de vierhoekige piramide $ACDFE$. Men deele voorts deze laatste piramide door een vlak, hetwelk door de punten E, F en C gaat, in de twee driehoekige piramiden $DFEC$ en $ACFE$; dan zal de afgeknotte piramide in drie driehoekige piramiden $ABCE$, $ACFE$ en $DEFC$, verdeeld zijn, en dan is (*XXI. St.*)

$$Pir.ABCE : Pir.ACFE = drieh.ABE : drieh.AEF$$

maar, omdat AB evenwijdig is aan EF, is (*XIV. Stell. III. B.*)

$$drieh.ABE : drieh.AEF = AB : EF$$

derhalve (*I. Stell. II. B.*)

$$Pir.ABCE : Pir.ACFE = AB : EF.$$

Op dezelfde wijze betoogt men: dat

$$Pir.ACFE : Pir.CDEF = BC : ED$$

is: maar, omdat (*V. Stell.*) de driehoeken ABC en DEF, gelijkvormig zijn, is (*VIII. Stell. IV. B.*) $AB : EF = BC : ED$: derhalve hebben wij (*I. Stell. II. B.*) de evenredigheid:

$$Pir.ABCE : Pir.ACFE = Pir.ACFE : Pir.CDEF$$

Het blijkt hieruit: dat de inhoud van de piramide $ACFE$, midden-evenredig is, tusschen de inhouden der piramiden $ABCE$ en $CDEF$.

De piramiden $ABCE$ en $DEFC$, hebben klaarblijkelijk, met de afgeknotte piramide, dezelfde hoogte; zij staan derhalve tot elkander, als hunne bases ABC en DEF. Laat nu P de bases van eene piramide zijn, die dezelfde hoogte heeft, en nemen wij, dat

$$drieh.ABC : P = P : drieh.DEF$$

zij; dan zal, omdat (*XXI. Stell.*) de piramiden, welke gelijke hoogten hebben, tot elkander staan als hunne bases, de piramide, welke

P

P tot basis heeft, midden-evenredig zijn tusschen de piramiden $ABCE$ en $CDEF$; maar de piramide $ACFE$, is ook tusschen dezelfde piramiden $ABCE$ en $DCFE$ (*zie boven*) midden-evenredig; de piramide, welke P tot basis heeft, is dan gelijk aan de piramide $ACFE$, en de afgeknotte piramide is derhalve gelijk aan de som der piramiden $ABCE$, $DEFC$, en de piramide, welke P of de midden-evenredige, tusschen de driehoeken ABC en DEF, tot basis heeft.

§. 854. I. Gevolg. *Eene veelhoekige afgeknotte piramide heeft dezelfde eigenschap.* Want zij kan in even zoo vele driehoekige afgeknotte piramiden verdeeld worden, als de basis zijden min twee heeft: daar nu elk dezer driehoekige afgeknotte piramiden gelijk is aan de som der piramiden, welke het grond- en bovenvlak, benevens een vlak, dat midden-evenredig tusschen het grond- en het bovenvlak is, tot bases hebben, zal de som van alle deze afgeknotte driehoekige piramiden gelijk zijn aan de piramiden, welke het grond- en bovenvlak van de veelhoekige afgeknotte piramide, benevens een vlak, midden-evenredig tusschen dezelve, tot bases, en alle dezelfde hoogte der afgeknotte piramide hebben.

§. 855. II. Gevolg. Indien dan de hoogte van de afgeknotte piramide $= h$; het grondvlak $= G$; het bovenvlak $= g$; en de inhoud $= I$ gesteld wordt; dan zal

$$I = \left\{ G + g + \sqrt{(Gg)} \right\} \times \tfrac{1}{3} h$$

zijn.

§. 856. XXII. Bepaling. *Twee ligchamelijke uitgebreidheden zijn, zoowel als derzelver omtrekken, gelijkvormig, wanneer de afstand van elke twee punten, in het oppervlak van de eene uitgebreidheid, tot den afstand van de overëënkomstige punten, in het oppervlak van de tweede uitgebreidheid genomen, overal, waar men die punten in de eerste figuur ook nemen moge, tot elkander staan in dezelfde reden, als eene lijn tot eene lijn, of, als een getal tot een getal.*

§. 857. Aanmerking. Wanneer men de *III. Bep. IV. B.* wel verstaan heeft, zal alle verdere toelichting van de tegenwoordige overbodig zijn. Nogtans verdient hier bijgevoegd te worden: dat de gelijkvormigheid der ligchamelijke uitgebreidheden, uit den aard der zake, de gelijkvormigheid van derzelver grenzen medebrengt. Behalve dat, zijn ook de omtrekken der gelijkvormige figuren gelijkvormig.

XXV. Stelling. *Fig.* 96, 97 *en* 98.

§. 858. *Wanneer men, of binnen, of in, of buiten het oppervlak van een ligchaam, (regelmatig of onregelmatig, rond of veelvlakkig,) een punt neemt, en, uit dit punt, tot aan alle de punten van het oppervlak van dit ligchaam, regte lijnen trekt, en op deze regte lijnen, of derzelver verlengde, punten neemt, zoodanig, dat de afſtanden dezer punten tot het vaste punt, overal tot deze lijnen, in dezelfde reden ſtaan, als eene lijn tot eene lijn, of als een getal tot een getal; dan zullen de uiteinden dezer punten gelegen zijn in het oppervlak van een ligchaam, dat aan het eerstgeſtelde gelijkvormig zal zijn.*

Betoog. Wanneer men zich de figuren 96, 97 en 98, als ligchamelijk, voorſtelt; dan zal het bewijs van de *XIII. Stell. IV. B.* ook voor de tegenwoordige ſtelling gelden.

XXVI. Stelling. *Fig.* 340.

§. 859. *De gelijkvormige driehoekige piramiden worden door gelijkvormige zijvlakken bepaald, en deze maken drievlakkige hoeken, welke, in de wederzijdſche piramiden, bij ſuperpoſitie, gelijk zijn* — En omgekeerd. — *Twee driehoekige piramiden, welke door gelijkvormige en op dezelfde wijze geplaatſte zijvlakken zijn ingeſloten, zijn gelijkvormig.* — Eindelijk — *Indien de drievlakkige hoeken eener driehoekige piramide gelijk zijn aan de drievlakkige hoeken van eene andere piramide; dan zullen ook deze piramiden gelijkvormig zijn.*

Betoog *van het eerſte.* Omdat (*onderſt.*) de piramiden P en Q gelijkvormig zijn, zijn de afſtanden van de hoekpunten der overëenkomſtige hoeken onderling evenredig, en wij hebben derhalve:

$$(AB,\ BC,\ AC) :: (ab,\ bc,\ ac)$$
$$(AC,\ CD,\ AD) :: (ac,\ cd,\ ad)$$
$$(AB,\ AD,\ BD) :: (ab,\ ad,\ bd)$$
$$(BC,\ CD,\ BD) :: (ac,\ cd,\ bd)$$

uit welke evenredigheden, naar de *IX. Stell. IV. B.*, volgt: dat de driehoeken ABC, ACD, ABD en BCD, gelijkvormig zijn aan de driehoeken abc, acd, abd en bcd, en daar nu deze gelijkvormigheid noodzakelijk de onderlinge gelijkhoekigheid medebrengt, zoo blijkt

blijkt ook: dat de drievlakkige hoeken A, B, C en D, bij ſuperpoſitie, aan de drievlakkige hoeken a, b, c en d, zullen gelijk zijn.

Betoog *van het tweede.* Indien de driehoekige piramiden P en Q door gelijkvormige zijvlakken bepaald zijn; dan brengt de gelijkvormigheid dezer zijvlakken mede, dat de affſtanden van de eveneensgeplaatſte hoekpunten der wederzijdſche piramiden overal in dezelfde reden tot elkander ſtaan, om welke reden de piramiden P en Q (*XXII. Bep.*) dan ook gelijkvormig zijn.

Betoog *van het derde.* Wanneer eindelijk de drievlakkige hoeken A, B, C en D der piramiden P, bij ſuperpoſitie aan de drievlakkige hoeken a, b, c en d der piramiden Q gelijk zijn; dan moeten (*XVIII. Bep. X. B.*) noodwendig de eveneensgeplaatſte zijvlakken der piramiden onderling gelijkhoekig, en diensvolgens gelijkvormig zijn: de piramiden P en Q zijn dan (*Betoog van het tweede*) onderling gelijkvormig.

§. 860. Gevolg. *Fig.* 340. Men zal ook ligtelijk betoogen kunnen: *dat de afſtanden der gelijkſtandige hoekpunten tot de overſtaande zijvlakken der gelijkvormige driehoekige piramiden onderling met elkander, en met de ribben dezer zijvlakken, evenredig zullen zijn.*

XXVII. Stelling. *Fig.* 340.

§. 861. *Wanneer eenige drievlakkige hoek A, eener driehoekige piramide P gelijk is aan eenigen drievlakkigen hoek a, eener andere driehoekige piramide Q, en de eveneensgeplaatſte ribben dezer drievlakkige hoeken tot elkander in dezelfde reden ſtaan; dan zullen deze piramiden gelijkvormig zijn.*

Betoog. Want, omdat, naar de onderſtelling, de drievlakkige hoeken, A en a, gelijk zijn, is hoek $BAC =$ hoek bac; hoek $CAD =$ hoek cad en hoek $BAD =$ hoek bad; bovendien geeft de onderſtelling de evenredigheden $AB : ab = AC : ac = AD : ad$. Volgens de *X. Stell. IV. B.* zijn dan de driehoeken ABC, ACD, ABD, gelijkvormig aan de driehoeken abc, acd, abd, en wij hebben dan (*VIII. Stell. IV. B.*) de evenredigheden $AB : ab = BC : bc$, $AB : ab = BD : bd$; derhalve $BC : bc = BD : bd$. Om dezelfde reden is: $BC : bc = CD : cd$. De driehoeken BCD en bcd zijn dan (*IX. St. IV. B.*) gelijkvormig. De piramiden P en Q zijn dan door gelijkvormige en eveneensgeplaatſte zijvlakken bepaald, en zijn derhalve (*XXVI. Stell.*) gelijkvormig.

XXVIII. Stelling. *Fig.* 341.

§. 862. *De eveneensgeplaatste zijvlakken van twee gelijkvormige veelvlakkige ligchamen zijn gelijkvormig, en derzelver eveneensgeplaatste veelvlakkige hoeken zijn gelijk. Voorts kunnen deze gelijkvormige veelvlakkige ligchamen in hetzelfde aantal gelijkvormige piramiden verdeeld worden.*

Betoog. Want, wanneer de veelvlakkige ligchamen *P* en *Q* gelijkvormig zijn; dan zijn ook de eveneensgeplaatste hoekpunten, *A*, *B*, *C*, *enz.* en *a*, *b*, *c*, *enz.* op evenredige afstanden van elkander geplaatst; maar deze afstanden kunnen niet evenredig zijn, zonder dat de eveneensgeplaatste zijvlakken, benevens de vlakken, welke door twee ribben van denzelfden veelvlakkigen hoek gaan, gelijkvormig zijn: deze laatste zijn wederom niet gelijkvormig, zonder dat derzelver hoeken gelijk zijn, en zonder dat de gelijkheid dezer hoeken (*XXXIV. Stell. X. B.*) de gelijkheid van de eveneensgeplaatste veelvlakkige hoeken der gelijkvormige veelvlakkige ligchamen medebrengt.

Wanneer men nu, om het tweede gedeelte der stelling te bewijzen, uit twee hoekpunten der eveneensgeplaatste hoeken *A* en *a*, hoekpuntslijnen tot de andere hoekpunten *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, en *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, trekt; dan worden beide ligchamen in hetzelfde aantal piramiden verdeeld, en, omdat de afstanden der eveneensgeplaatste hoekpunten altijd in dezelfde bestendige reden zijn, moeten (*XXVII. Stell.*) deze piramiden gelijkvormig zijn.

§. 863. Aanmerking. Men zal, na deze gelegde gronden, gemakkelijk betoogen: *dat, wanneer twee veelvlakkige ligchamen door gelijkvormige vlakken zijn ingesloten, welke onderling met elkander dezelfde vlakte en veelvlakkige hoeken maken, deze ligchamen dan ook gelijkvormig zullen zijn.*

XXIX. Stelling.

§. 864. *De cuben, welke op vier evenredige lijnen beschreven worden, zijn evenredig.*

Betoog. Laten *A*, *B*, *C* en *D* vier evenredige lijnen zijn; dan zal moeten bewezen worden: dat $A^3 : B^3 = C^3 : D^3$ is. Volgens de onderstelling, is $A : B = C : D$; wanneer men dan, op de twee eerste lijnen *A* en *B*, eenen regthoek beschrijft, welke de lijn *A* tot hoogte heeft,

heeft, en op de twee laatste eenen regthoek, welke C tot hoogte heeft; dan zal (*XI. Stell. III. B.*) $A^2 : AB = C^2 : CD$ zijn. Plaatst men nu verder op de twee eerste regthoeken, A^2 en AB, twee regthoekige parallelopipedums, welke de lijn A tot hoogte hebben, en op de twee laatste C^2 en CD, twee parallelopipedums, welke de lijn C tot hoogte hebben; dan zal (*XIV. Stell.*) $A^3 : A^2B = C^3 : C^2D$ en (*VII. Stell. II. B.*) $A^3 : C^3 = A^2B : C^2D$ zijn. Volgens de *VII. St. IV. B.* is $A^2 : B^2 = C^2 : D^2$; wanneer men nu op de eerste vierkanten, A^2 en B^2, twee parallelopipedums beschrijft, welke de lijn B tot hoogte hebben, en op de twee laatste C^2 en D^2 twee parallelopipedums, welke de lijn D tot hoogte hebben; dan zal (*XIV. Stell.*) $A^2B : B^3 = C^2D : D^3$ zijn, en (*VII. Stell. II. B.*) $A^2B : C^2D = B^3 : D^3$. Vergelijkt men deze evenredigheid met de straks bewezene, met $A^3 : C^3 = A^2B : C^2D$; dan zal (*I. Stell. II. B.*) volgen: dat $A^3 : C^3 = B^3 : D^3$ is, of (*VII. Stell. II. B.*) $A^3 : B^3 = C^3 : D^3$.

XXX. STELLING. *Fig.* 342.

§. 865. *De gelijkvormige driehoekige piramiden* $ABCD$ *en* $EFGH$, *staan tot elkander, als de cuben van derzelver eveneensgeplaatste ribben. Dat is:*

$$Pir.\ ABCD : Pir.\ EFGH = AB^3 : EF^3.$$

BETOOG. De piramiden $ABCD$ en $EFGH$, kunnen niet gelijkvormig zijn, zonder dat derzelver drievlakkige hoeken bij superpositie gelijk zijn: men kan dan den hoek H in den hoek D passen, zoodanig, dat de ribben HE, HF en HG, langs de ribben DA, DB en DC vallen: zulks gedaan zijnde, zullen, wegens de gelijkvormige zijvlakken, waardoor deze piramiden bepaald zijn, EF aan AB, FG aan BC, evenwijdig zijn, en dan is (*XXIV. Stell. X. B.*) het vlak EFG evenwijdig aan het vlak ABC; wanneer men derhalve uit het toppunt D, de loodlijn DI op het vlak ABC laat vallen; dan zal (*XX. Stell. X. B.*) die lijn DI ook het vlak EFG in K regthoekig doorsnijden: de regthoekige driehoeken, AID en EKD, zijn derhalve (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B. VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig, en wij hebben diensvolgens de evenredigheid, $DK : DI = DE : DA$. Maar de gelijkvormige driehoeken, DEF en DAB, geven nog de evenredigheid, $DE : DA = EF : AB$, en (*I. Stell. II. B.*) $DI : DK = AB : EF$. Nu is (*XI. Stell. IV. B.*)

$$drieh.\ ABC : drieh.\ EFG = AB^2 : EF^2$$

ver-

vermenigvuldigt men deze evenredigheid met de zoo even betoogde evenredigheid $DI:DK = AB:EF$, of met

$$\tfrac{1}{3}DI:\tfrac{1}{3}DK = AB:EF$$

dan verkrijgt men: (*Gev. XX. Stell.*)

$$Pir.\ ABCD : Pir.\ EFGH = AB^3 : EF^3;$$

§. 866. I. Gevolg. Omdat de eveneensgeplaatste ribben der gelijkvormige piramiden met elkander evenredig zijn, zoo zijn ook (*XXIX. Stell.*) derzelver cuben evenredig. De piramiden $ABCD$ en $EFGH$, staan dan ook tot elkander in dezelfde reden, als BC^3 tot FG^3, als AC^3 tot EG^3, *enz.*

§. 867. II. Gevolg. Omdat $AB:EF = DI:DK$ is, en (*XXIX. Stell.*) $AB^3:EF^3 = DI^3:DK^3$, zal $pir.\ ABCD : pir.\ EFGH = DI^3:DK^3$ zijn: dat is: *de gelijkvormige driehoekige piramiden staan tot elkander in dezelfde reden, als de cuben van hare hoogten.*

§. 868. Aanmerking. De ouden drukten deze eigenschap uit, door te zeggen: *de gelijkvormige driehoekige piramiden staan tot elkander in de verdriedubbelde reden van derzelver eveneensgeplaatste ribben en hoogten.* Zie *XXVI. Bep. II. B.*

XXXI. Stelling. *Fig.* 341.

§. 869. *De inhouden der gelijkvormige veelvlakkige ligchamen staan tot elkander, in dezelfde reden, als de cuben, welke op de eveneensgeplaatste ribben beschreven zijn.*

Betoog. Laten, uit de hoekpunten der eveneensgeplaatste hoeken, A en a, tot aan de hoekpunten der overige hoeken, hoekpuntslijnen getrokken worden; dan worden deze ligchamen, in hetzelfde aantal gelijkvormige piramiden verdeeld. Nu staan deze overëenkomstige gelijkvormige piramiden tot elkander, in dezelfde reden, als de cuben der eveneensgeplaatste ribben; maar, vermits (*XXII. Bep.*) de eveneensgeplaatste ribben der gelijkvormige ligchamen tot elkander in dezelfde bestendige reden staan, zoo zijn ook (*XXIX. Stell.*) de cuben van derzelver ribben tot elkander in eene bestendige reden. Men zal dan elke twee dezer gelijkvormige piramiden, waarin de gelijkvormige ligchamen verdeeld zijn, tot elkander stellen kunnen, in dezelfde reden, als de cuben van twee overëenkomstige ribben, AB en ab, dat is: als AB^3 tot ab^3, en dan zal (*X. Stell. II. B.*) de som van al de piramiden, waaruit het ligchaam P bestaat, tot de som van al al de piramiden, waaruit het ligchaam Q is zamengesteld, in dezelfde reden staan, als AB^3 tot ab^3.

§. 870. Bijvoegsel. Omdat de eveneensgeplaatste zijvlakken der gelijkvormige ligchamen gelijkvormig zijn, en (*XVII. Stell. IV. B.*) gelijkvormige vlakken tot elkander in dezelfde reden staan, als de vierkanten der eveneensgeplaatste zijden, *zoo staan de oppervlakten der gelijkvormige veelvlakkige ligchamen, in dezelfde reden, als de vierkanten van de eveneensgeplaatste ribben dezer ligchamen.*

§. 871. Aanmerking. De inhouden der gelijkvormige ligchamen volgen dan de reden van de cuben, welke op derzelver eveneensgeplaatste ribben beschreven zijn, of de reden van de derde magten der getallen, welke de betrekking dezer ribben tot elkander uitdrukken. Hieruit ontstaat nu de vraag: *Op welke wijze, tot een gegeven veelvlakkig ligchaam, een ander zal kunnen gevonden worden, dat met hetzelve gelijkvormig is, en welks inhoud tot den inhoud van het gegevene ligchaam zal staan, in de reden, als een getal tot een getal, of als eene lijn tot eene lijn?* Om dit vraagstuk optelossen, zal men zich van het volgende *Lemma* moeten bedienen.

III. Lemma.

§. 872. *Wanneer vier lijnen A, B, C en D, tot elkander in eene gedurige evenredigheid staan, (dat is: $A:B = B:C = C:D$) dan staan de vierkanten, op de twee eerste lijnen beschreven, tot elkander in dezelfde reden als de eerste tot de derde lijn; en de cuben, op de twee eerste lijnen beschreven, staan tot elkander in dezelfde reden, als de eerste tot de vierde lijn. Dat is:*

$$A^2 : B^2 = A : C$$
$$A^3 : B^3 = A : D.$$

Betoog. Volgens de onderstelling, is $A:B = B:C$. Wanneer men deze evenredigheid met de evenredigheid $A:B = A:B$ vermenigvuldigt; dan verkrijgt men: $A^2 : B^2 = AB : BC$; maar (*XI. Stell. III. B.*) $AB : BC = A : C$ zijnde, zal $A^2 : B^2 = A : C$ zijn.

Wanneer men nu deze laatste evenredigheden met $A:B = C:D$ vermenigvuldigt; dan vindt men $A^3 : B^3 = AC : CD = A : C$.

§. 873. Aanmerking. Laat A ééne der zijden van een regtlijnig vlak zijn, of wel de afstand van twee punten eener vlakke figuur; wanneer dan de lijn C tot de lijn A zoodanig genomen wordt, dat

A tot C ſtaat, als de inhoud van het gegeven vlak, tot den inhoud van een vlak, dat aan hetzelve gelijkvormig is; dan zal, (omdat $A:C = A^2:B^2$ is, en de inhouden der gelijkvormige vlakken tot elkander ſtaan, als de vierkanten van de afſtanden der eveneensgeplaatſte punten,) de midden-evenredige lijn tusſchen A en C; dat is de lijn B de afſtand der eveneensgeplaatſte punten der figuur zijn, welke met dezelve gelijkvormig is, en tot dezelve in de gegevene reden ſtaat. Op dezelfde wijze, wanneer A de zijde van een veelvlakkig ligchaam is, of wel de afſtand van twee van deszelfs voorname punten, en de lijn D zoodanig genomen wordt, dat A tot D ſtaat, in dezelfde reden, als de inhoud van het gegeven ligchaam tot den inhoud van het ligchaam, dat met hetzelve gelijkvormig is; dan zal, vermits $A:D = A^3:B^3$ is, en de inhouden der gelijkvormige ligchamen tot elkander ſtaan, als de cuben, welke op de afſtanden der eveneensgeplaatſte zijden beſchreven zijn, de lijn B, welke de eerſte der twee midden-evenredige is, de afſtand der overëénkomſtige punten van het gelijkvormig ligchaam zijn, hetwelk tot het gegevene in dezelfde reden ſtaat, als D tot A. Uit dit alles volgt dan: *dat het vergrooten of verkleinen van eene vlakke figuur van het vinden van ééne midden-evenredige, tusſchen twee lijnen afhangt, en het vergrooten of verkleinen eener ligchamelijke figuur van het vinden van twee midden-evenredigen tusſchen twee gegevene lijnen.*

I. VRAAGSTUK. *Fig.* 343.

§. 874. *Tusſchen twee gegevene lijnen, P en Q, twee midden-evenredige te vinden?*

OPLOSSING. Dit vraagſtuk behoort tot de klasſe der vraagſtukken, welke (zie *Aanmerk. op het XXIII. Werkſt.* §. 487, *pag.* 178,) niet door de ſnijding van eene regte lijn en eenen cirkel kunnen opgelost worden. Behalve de oplosſing, welke, in de aangehaalde aanmerking, van hetzelve gegeven en werktuigelijk is, kan men zich van de volgende werktuigelijke oplosſing bedienen.

CONSTRUCTIE. Men trekke twee onbepaalde lijnen, AF en AG, welke met elkander eenen regten hoek maken. Op deze lijnen neme men, $AC = P$ en $AB = Q$, trekke CD en BD, evenwijdig aan AB en AC, en voorts de hoekpuntslijnen AD en BC, welke elkander in het punt E ſnijden. Men draaije dan een liniaal FG, zoodanig om het punt D, dat, wanneer de lijnen EF en EG getrokken worden, EF

$EF = EG$ zij, (hetgeen, door eene ligte beproeving, naauwkeurig genoeg geſchieden kan,) dit gedaan zijnde, zullen de lijnen BG en CF de begeerde midden-evenredigen zijn. Zoodat $AC:BG = BG:CF = CF:AB$ zal zijn.

Betoog. Men trekke EH en EI loodregt op AC en AB. Stel, kortheidshalve, $AC = P = a$; $AB = Q = b$; $BG = x$ en $CF = y$; dan geven de gelijkvormige driehoeken, FCD en DBG, de evenredigheid, $y:b = a:x$; of $b:y = x:a$. Omdat verder, volgens de conſtructie, $EF = FG$ is, is de driehoek EFG gelijkbeenig, en daarom $FD \times DG = EF^2 - ED^2$: maar de regthoekige driehoeken FHE en BIE geven: $EF^2 = FH^2 + HE^2 = (y + \frac{1}{2}a)^2 + \frac{1}{4}b^2$ en $EB^2 = ED^2 = BI^2 + EI^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2$; en daarom is $FD \times DG = y^2 + ay$ en $2FD \times DG = 2y^2 + 2ay$. Tel hier bij $FD^2 + DG^2 = CF^2 + CD^2 + DB^2 + BG^2 = y^2 + b^2 + a^2 + x^2$; dan verkrijgt men $FG^2 = 3y^2 + 2ay + a^2 + b^2 + x^2$: maar nu is $FG^2 = AF^2 + AG^2 = (y + a)^2 + (b + x)^2 = y^2 + 2ay + a^2 + b^2 + 2bx + x^2$: deze twee vergelijkingen van elkander aftrekkende, verkrijgt men: $2y^2 - 2bx = 0$, of $y^2 = bx$. Dat wil zeggen: dat CF midden-evenredig is tusſchen AB en BG. Men betoogt, op dezelfde wijze, dat BG midden-evenredig is tusſchen AC en CF.

II. Vraagstuk. *Fig.* 343.

§. 875. *De zijde van eenen cubus gegeven zijnde, de zijde van eenen anderen cubus te vinden, wiens inhoud tot dien van den gegevenen ſtaat, gelijk eene lijn P tot eene lijn Q.*

Oplossing. Laat AC de zijde van den gegevenen cubus zijn. Neem AB tot AC, in dezelfde reden als P tot Q, en zoek, volgens de conſtructie, van het voorgaande vraagſtuk, tusſchen AC en AB de twee midden-evenredigen BG en CF; dan zal de cubus, welke op BG gemaakt is, tot den cubus op AC gemaakt, gelijk AC tot AB gelijk P tot Q zijn.

§. 876. Aanmerking. De zijde van den gevraagden cubus wordt, door berekening, aldus gevonden. Laat de zijde van den gegeven cubus $= a$ zij, en laat geſteld worden: dat men eenen cubus vinden wil, welks inhoud tot dien van den gegevenen ſtaat, gelijk m tot n. Stel de zijde van dien cubus $= x$; dan is, $a^3 : x^3 = n : m$, en $x^3 = a^3 \times \frac{m}{n}$ en $x = \frac{a}{n} \times \sqrt[3]{mn^2}$.

TWAALF-

TWAALFDE BOEK.

Over den Cilinder, den Kegel, en den Bol.

---

§. 877. I. Bepaling. *Fig.* 344. Een *cilinder-vlak*, op de algemeenste wijze genomen, is een vlak, hetwelk aldus geboren wordt. Laat eene kromme lijn *ABCDEF*, welker deelen in hetzelfde vlak liggen, gegeven zijn; indien men dan eene onbepaalde lijn *Aa* evenwijdig aan zich zelve laat bewegen, dat is, zoodanig, dat zij, in elken bijzonderen stand, evenwijdig zij aan eene gegevene lijn *PQ*, en dat deze lijn *Aa*, altijd langs de kromme lijn *ABCDFF* heenschuift; dan loopt deze lijn, in hare beweging, door eene vlakte, welke *cilinder-vlakte* genoemd wordt. Men kan de kromme lijn *ABCDEF*, als de basis van het cilinder-vlak aanmerken.

§. 878. Aanmerking. Wanneer men, in plaats van de kromme lijn *ABCDEF*, eene regte lijn neemt; dan wordt het *cilinder-vlak*, hetwelk op de voorschrevene wijze geboren wordt, een plat vlak. Het platte vlak kan derhalve als een cilinder-vlak, welke eene regte lijn tot basis heeft, aangemerkt worden.

I. Stelling. *Fig.* 344.

§. 879. *Wanneer een cilinder-vlak gesneden wordt, door een vlak, dat evenwijdig aan de basis ABCDEF loopt; dan is de kromme lijn, abcdef, volgens welke dit vlak het cilinder-vlak doorsnijdt, gelijk en gelijkvormig aan de basis.*

Betoog. Verbeelden wij ons de bewegende lijn *Aa*, in de standen *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, *Ff*, in welke zij evenwijdig aan *PQ* is; dan zijn (*XVII. Stell. X. B.*) deze lijnen, twee aan twee, genomen evenwijdig; en, omdat (*onderst.*) *abcdef* evenwijdig aan *ABCDEF* is, zijn (*XXII. Stell. X. B.*) de lijnen *Aa*, *Bb*, *Cc*, *enz.* alle even lang; de lijnen *AB*, *BC*, *CD*, *EF*, *enz. AC*, *AD*, *enz.* zijn dan ook (*XXXI. Stell. I. B.*) gelijk en evenwijdig aan de lijnen *ab*, *bc*, *cd*, *cd*, *ef*, *enz. ac*, *ad*, *enz.* en dan is (*XXIV. Stell. X. B.*) hoek *abc* = hoek *ABC*; hoek *bcd* = hoek *BCD*; *enz.* Uit dit alles volgt dan: dat de kromme lijn *abcdef*, op de kromme lijn *ABCDEF*, kan gepast worden, zoodanig, dat de punten *a*, *b*, *c*, *d*, *e* en *f*, in de punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F*, vallen, en dat zulks ook, op dezelfde wijze, van de overige punten der kromme lijn *abcdef* gelden zal, welke in den omtrek van *ABCDEF* zullen vallen; de kromme lijn *abcdef*, is dan (*I. Ax.*) gelijk en gelijkvormig aan de kromme lijn *ABCDEF*.

§. 880. II. Bepaling. *Fig.* 344. Een *cilinder* is een ligchaam, besloten tusschen een gedeelte van een cilinder-vlak, en tusschen twee evenwijdige vlakken *ABCDEF* en *abcdef*, welke het grond- en bovenvlak genoemd worden. De cilinder is *regt* of *scheef*, naar dat de rigtlijn *PQ*, regt of scheefhoekig op het vlak van de basis staat. Eéne der lijnen *Aa*, *Bb*, *enz.*, welke in het oppervlak van den cilinder, evenwijdig aan de rigtlijn *PQ* getrokken wordt, wordt de *zijde* van den cilinder genoemd.

§. 881. I. Aanmerking. Tot de cilinders behooren alle ligchamen, welke eene kromlijnige vlakte, of eene vlakte, welke gedeeltelijk door kromme en regte lijnen bepaald wordt, tot bases hebben. *De cilinder is eigenlijk niet anders dan een kromlijnig prisma.*

§. 882. II. Aanmerking. *Fig.* 345. In het bijzonder, zullen wij ons, in dit Boek, bij de beschouwing der regte cirkelvormige cilinders bepalen. *Een regte cirkelvormige cilinder*, in het vervolg alleen cilinder genoemd, *heeft een cirkel tot basis en kan begrepen worden door de omwenteling van eenen regthoek ABCD, om ééne zijner zijden BC, geboren te worden; de zijden AB en CD, beschrijven de grond- en bovenvlakken, en de zijde AD het buitenste oppervlak. De lijn BC, om welke de regthoek omdraait, wordt de as van den cilinder genoemd.*

§. 883. III. Bepaling. *Fig.* 346. Een *kegel-vlak* wordt aldus geboren. Laat, in eenig vlak, eene kromme lijn, *ABCDEF*, benevens een punt *P*, buiten hetzelve, gegeven zijn. Wanneer men dan aanneemt: dat eene onbepaalde lijn *AP*, langs deze kromme lijn *ABCDEF*, bewogen worde, zoodanig, dat zij altijd door het punt *P* ga; dan zal het vlak, door hetwelk deze lijn loopt, een kegel-vlak

Z zijn.

zijn. Men noemt P het toppunt van het kegel-vlak; de kromme lijn $ABCDEF$ de basis. De ligchamelijke ruimte, begrepen tusschen het toppunt, de basis en het kegel-vlak, wordt *kegel* genoemd. *Het kegel-vlak bestaat klaarblijkelijk uit twee tegen over elkander staande deelen, waarvan het ééne boven en het ander beneden het toppunt gelegen is.* Elke lijn, welke, uit het toppunt van den kegel, in hare vlakte, getrokken wordt, wordt de *zijde* van den kegel genoemd.

§. 884. Aanmerking. Wanneer men voor de basis van het kegelvlak eene regte lijn neemt; dan is het kegel-vlak zelve een plat vlak. *Het platte vlak kan dan (zie Aanm. I. Bep.) als eene bijzondere soort van kegel-vlak, zoowel als eene bijzondere soort van cilinder-vlak aangemerkt worden.*

II. Stelling. *Fig.* 346.

§. 885. *Wanneer een kegel-vlak gesneden wordt, door een vlak* $abcdef$, *evenwijdig aan de basis* $ABCDEF$ *loopende; dan zal de kromme lijn,* $abcdef$, *volgens welke dit vlak het kegel-vlak snijdt, gelijkvormig zijn aan de basis* $ABCDEF$ *van het kegel-vlak.*

Betoog. Men verbeelde zich twee onderscheidene standen van de lijn AaP, te weten, AaP en BbP; dan liggen deze lijnen (*II. Stell. X. B.*) in hetzelfde vlak, en dit vlak snijdt de vlakken, $ABCDEF$ en $abcdef$, volgens de lijnen, AB en ab, welke, omdat deze vlakken, volgens de onderstelling evenwijdig zijn, (*XIX. Stell. X. B.*) evenwijdig zijn. De driehoeken ABP en abP, zijn dan (*I. en X. Stell. IV. B.*) gelijkvormig, en (*VIII. Stell. IV. B.*) $AB:ab = AP:aP = BP:bP$. Om dezelfde reden, zal $BC:bc = AP:aP$ zijn, enz. De afstanden van de punten van de basis $ABCDEF$ des kegel-vlaks, zijn derhalve tot de afstanden der overëënkomstige punten van de doorsnijding des kegel-vlaks, dat is, van het vlak $abcdef$, in dezelfde reden; de figuur $abcdef$ is alzoo (*III. Bep. IV. B.*) gelijk en gelijkvormig aan de figuur $ABCDEF$.

§. 886. I. Aanmerking. *Fig.* 346. *Wanneer het bovenste deel van het kegel-vlak gesneden wordt door een vlak* $a'b'c'd'e'f'$, *hetwelk aan de bases* $ABCDEF$ *evenwijdig loopt; dan zal dit vlak van doorsnijding insgelijks gelijkvormig zijn aan de basis* $ABCDE$; *doch het*

het zal, in dit geval, ten opzigte van de basis, in eene omgekeerde, of tegenovergestelde, stelling geplaatst zijn.

§. 887. II. Aanmerking. De kegels, dat zijn de ligchamen, welke tusschen kegel-vlakken en derzelver bases zijn ingesloten, maken met de piramiden eene bijzondere klasse van ligchamen uit, waaraan men den algemeenen geslachtsnaam van *piramiden* geven kan, en *dan zal een kegel eene piramide zijn, welke eene kromlijnige basis heeft.* Wanneer nu die basis een cirkel is; dan zal men den kegel eenen *cirkelvormigen kegel* noemen, *en deze cirkelvormige kegel zal regt zijn, wanneer het toppunt gelegen is in de lijn, welke loodregt, uit het middelpunt van de basis, op dezelve is opgerigt.*

§. 888. III. Aanmerking. *Fig.* 347. Een regt cirkelvormig kegel-vlak kan begrepen worden te ontstaan, door de omwenteling van een stelsel van twee lijnen ABC en DBE, welke met elkander eenen scheven hoek ABE maken, wanneer namelijk, (die hoek ABE onveranderd blijvende,) dit stelsel om ééne dezer lijnen DBE bewogen wordt; want alsdan beschrijft AB het benedenste, en BC het bovenste deel van het kegel-vlak, waarvan de lijn DBE de as genoemd wordt, terwijl eenige loodlijn AE, loodregt op BE staande, eenen cirkel beschrijft, welke als de basis of het grondvlak van den regten cirkelvormigen kegel kan aangemerkt worden.

§. 889. IV. Aanmerking. *Fig.* 347. Wanneer de lijn ABC loodregt op den as staat; dan beschrijft (*Gev. V. Stell. X. B.*) deze lijn een plat vlak. *Het platte vlak kan dan, in zekeren zin, als een kegel-vlak worden aangemerkt. Zie Aanm. III. Bep.*

§. 890. IV. Bepaling. *Fig.* 348. Een *omwentelings ligchaam* is een ligchaam, dat geboren wordt, wanneer een vlak CED, om ééne zijner regte lijnen AB omwentelt. De lijn AB wordt de as van dit omwentelings ligchaam genoemd.

§. 891. Gevolg. *Elk omwentelings ligchaam heeft de eigenschap, dat, wanneer het door vlakken, welke loodregt op den as staan, gesneden wordt, deze doorsnijdingen altijd cirkels zijn.*

§. 892. Aanmerking. *De regte cirkelvormige cilinders en kegels zijn derhalve omwentelings ligchamen, welker doorsnijdingen, voor zoo verre zij evenwijdig aan de basis loopen, altijd cirkels zijn.*

III. Stelling. *Fig.* 344.

§. 893. *De inhoud van elken cilinder is gelijk aan den inhoud van zijn grondvlak, vermenigvuldigd met zijne hoogte.*

Betoog. Laten, in den omtrek van de basis, de punten A, B, C, D, E, F, genomen, en door dezelve de lijnen Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, evenwijdig aan de rigtlijn PQ worden getrokken; dan kunnen deze lijnen aangemerkt worden als de opstaande ribben van een prisma, hetwelk den veelhoek $ABCDEF$ tot basis heeft, en in den cilinder beschreven is, en de inhoud van dit prisma is (*II. Gev. XV. Stell. XI. B.*) gelijk aan de basis, vermenigvuldigd met de hoogte van dit prisma, welke hoogte klaarblijkelijk de hoogte van den cilinder is. Hetzelfde zal plaats blijven hebben, wanneer men de punten A, B, C, *enz.* digter, dan in de figuur wordt voorgesteld, bij elkander neemt: dan, hoe digter men deze punten bij elkander neemt, des te minder verschilt de veelhoekige basis van het prisma van de kromlijnige basis des cilinders, en zooveel te minder verschilt ook de inhoud van het prisma, dat in den cilinder beschreven is, van den inhoud des cilinders: wanneer men dan de punten A, B, C, *enz.* naast elkander neemt; dan zullen de basis en de inhoud van het ingeschreven prisma van de basis en den inhoud van den cilinder niet meer onderscheiden zijn, en de inhoud des cilinders zal derhalve gelijk zijn aan zijne basis, vermenigvuldigd met zijne hoogte.

§. 894. Gevolg. *Fig.* 345. *De inhoud van eenen regten cirkelvormigen cilinder is dan ook gelijk aan den cirkelvormigen basis, cirk. AB, vermenigvuldigd met de hoogte, of met de opstaande zijde AD. Dat is,* (*zie Bijv. op het VI. Boek, pag.* 158.)

$$\textit{Inhoud cilinder} = \tfrac{1}{4}\pi \times AE^2 \times AD = \pi \times AB^2 \times AD.$$

§. 895. Aanmerking. *Fig.* 344. *Wanneer men den cilinder snijdt door een vlak, dat ééne der zijden Aa regthoekig ontmoet; dan zal de inhoud van dien cilinder gelijk zijn aan den inhoud van dit vlak, vermenigvuldigd met de opstaande zijde Aa.* Vergelijk *XXIII. Stell. XI. B.*

IV. Stelling. *Fig.* 346.

§. 896. *De inhoud van elken kegel is gelijk aan zijn grondvlak, vermenigvuldigd met één-derde van zijne hoogte.*

Betoog. Men neme, in den omtrek van de basis, op zeer kleine afstanden, de punten A, B, C, *enz.* en trekke van deze punten tot aan het toppunt, P, de lijnen AP, BP, CP, *enz.*; dan ontstaat 'er eene veelhoekige piramide, welke in den kegel beschreven is, en met den-

denzelven hetzelfde toppunt heeft, en de inhoud van deze veelhoekige piramide is (*Gev. XX. Stell. XI. B.*) gelijk aan de veelhoekige basis, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte der piramide, of des kegels. Hoe nader nu deze punten A, B, C, *enz.* bij elkander genomen worden, zooveel te minder zullen de basis en inhoud der ingeschrevene piramide van de basis en den inhoud des kegels, waarin de piramide beschreven is, verschillen, en dit verschil wordt niets, wanneer de punten A, B, C, *enz.* naast elkander genomen worden, waaruit dan het gestelde van zelve volgt.

§. 897. Gevolg. *Fig.* 347. *De inhoud van eenen regten cirkelvormigen kegel is gelijk aan zijne cirkelvormige basis, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte, dat is, met één-derde van den as* BE. *Dat is*, (zie *Bijv. op het VI. B. pag.* 158.)

$$\text{Inhoud kegel} = \tfrac{1}{3}\pi \times AE^2 \times BE.$$

V. Stelling. *Fig.* 345.

§. 898. *Het buitenste oppervlak van eenen regten cirkelvormigen cilinder is gelijk aan den omtrek van de basis, vermenigvuldigd met de as* BC, *of de opstaande zijde* AD.

Betoog. Wanneer het buitenste oppervlak van den cilinder niet gelijk is aan den omtrek van de basis, vermenigvuldigd met de hoogte; dan zal dit oppervlak gelijk zijn aan den omtrek van eenen grooteren of kleineren cirkel, vermenigvuldigd met de hoogte.

Stellen wij het oppervlak gelijk aan den omtrek van eenen grooteren cirkel, vermenigvuldigd met de hoogte, en laat dan die cirkel, met zijn middelpunt, in het middelpunt van de basis geplaatst worden; dan zal men, (*III. Lemma VI. B.*) om de cirkelvormige basis, eenen regelmatigen veelhoek kunnen beschrijven, welks hoekpunten binnen den omtrek van den buitensten cirkel vallen. Wanneer men dan, op dezen regelmatigen veelhoek, als basis, een regt veelhoekig prisma stelt, hetwelk met den cilinder dezelfde hoogte heeft, dan zal het buitenste oppervlak van dit prisma gelijk zijn aan den omtrek van dien veelhoek, vermenigvuldigd met de hoogte: maar nu is het oppervlak van dit veelhoekige prisma klaarblijkelijk grooter dan het oppervlak van den cirkelvormigen cilinder, en, omdat de omtrek van den veelhoek kleiner is dan de omtrek van den buitensten cirkel, zal de omtrek van den buitensten cirkel, vermenigvuldigd met de hoogte, grooter zijn dan het oppervlak van het veelhoekig prisma, en dienvolgens ook grooter dan het oppervlak van den cilinder. Het oppervlak van den cilinder kan derhalve niet gelijk zijn aan den omtrek van eenen cirkel, grooter dan de basis, met de hoogte vermenigvuldigd. Op dezelfde wijze, betoogt men: dat de inhoud van het oppervlak des cilinders niet gelijk kan zijn aan den omtrek van eenen cirkel, kleiner dan de basis, vermenigvuldigd met de hoogte: de inhoud van het buitenste oppervlak des cilinders is derhalve gelijk aan den omtrek van de basis, vermenigvuldigd met de hoogte.

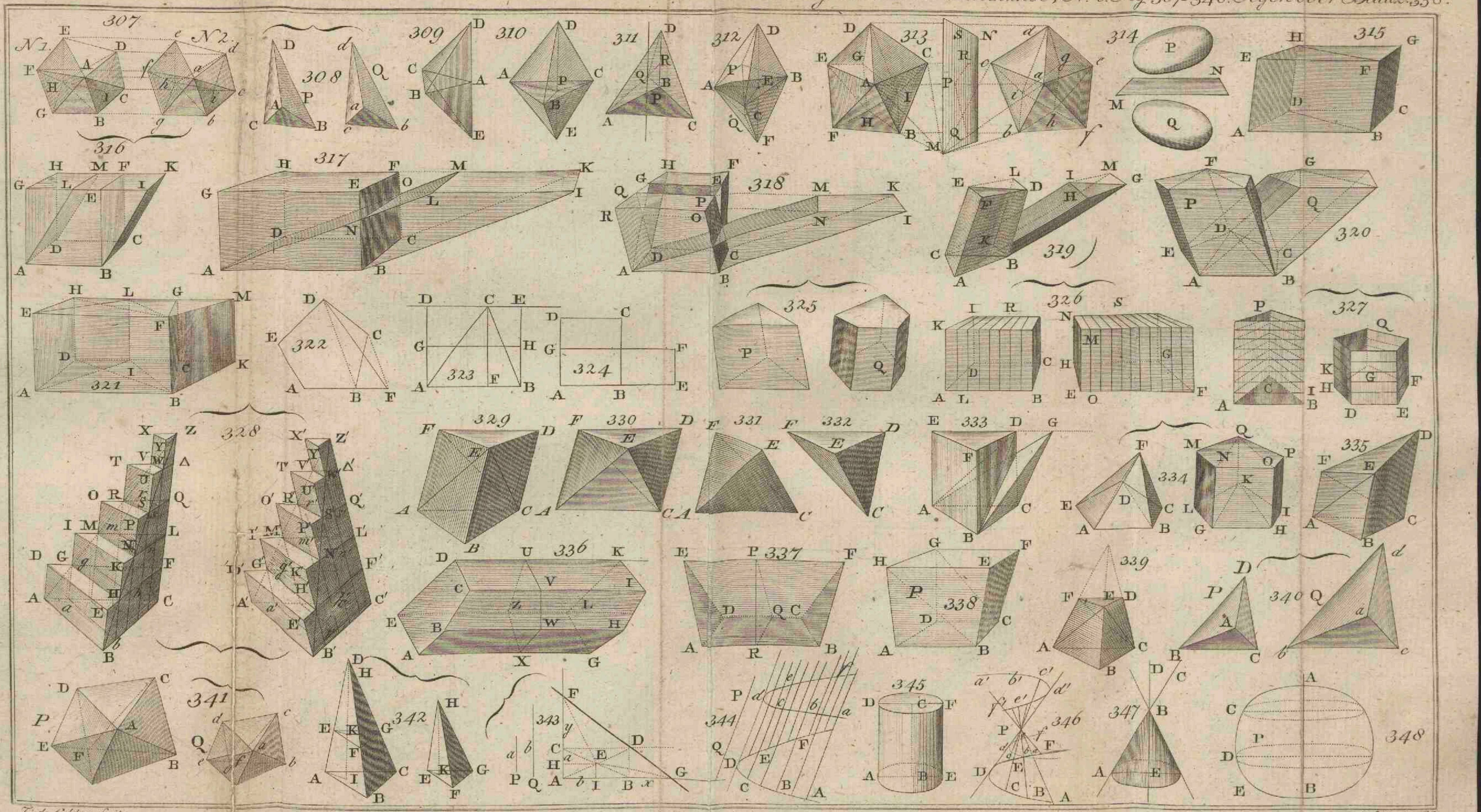
§. 899. Gevolg. *Fig.* 344. *Men zal, op dezelfde wijze, betoogen: dat het oppervlak van eenen scheven cilinder gelijk is aan den omtrek van het vlak, dat de opstaande zijde regthoekig doorsnijdt, vermenigvuldigd met diezelfde opstaande zijde.*

VI. Stelling. *Fig.* 349.

§. 900. *Het oppervlak van eenen regten cirkelvormigen kegel is gelijk aan den omtrek van de basis, vermenigvuldigd met de helft van de opstaande zijde.*

Betoog. Laat AM de straal van de basis van den regten cirkelvormigen kegel zijn, wiens toppunt in P ligt, (in de loodlijn, welke, uit het middelpunt van de basis, loodregt op dezelve staat,) en wiens opstaande zijde de lijn AP is: dan zal moeten bewezen worden: dat het oppervlak van den kegel gelijk is aan *omtrek* $AM \times \frac{1}{2} AP$.

Wanneer het oppervlak des kegels niet gelijk is aan *omtr.* $AM \times \frac{1}{2} AP$; dan zal dit oppervlak gelijk zijn aan den omtrek van eenen grooteren cirkel KQS, vermenigvuldigd met de helft van AP. Laat de cirkel KQS, met de basis gelijkmiddelpuntig zijn; dan zal 'er (*III. Lemma VI. B.*) om den kleinsten cirkel $ABCDE$, eenen regelmatigen veelhoek GHI kunnen beschreven worden, welker hoekpunten binnen den omtrek van den grootsten cirkel vallen, en, wanneer men nu van het toppunt P, tot aan de hoekpunten G, H, *enz.* van den omgeschrevenen veelhoek de lijnen PG, PH, *enz.* trekt; dan zal men eene veelhoekige piramide verkrijgen, welke om den kegel beschreven is, en daar elk opstaand zijvlak GPH van deze veelhoekige piramide gelijk is aan de zijde van den veelhoek, vermenigvuldigd met de helft van PA, met de helft van de opstaande zijde van den kegel, zal het bovenste oppervlak van de omgeschrevene piramide gelijk zijn aan den omtrek van den regelmatigen veelhoek, vermenigvuldigd



J. de Gelder fecit.   A. Kurchen sculp.

digd met de helft van de opstaande zijde AP. Nu is het oppervlak van de omgeschrevene piramide klaarblijkelijk grooter dan het oppervlak des kegels; het oppervlak van den kegel is dan kleiner dan den omtrek van den veelhoek GHI, vermenigvuldigd met de helft van de lijn AP; maar nu is de omtrek van den buitensten cirkel KQS, grooter dan de omtrek van den regelmatigen veelhoek GHI; derhalve is *omtrek* $KGS \times \frac{1}{2} AP$ grooter dan *omtrek veelh.* $GHI \times \frac{1}{2} AP$; volgens (*VI. Ax.*) is dan ook *omtrek* $KGS \times \frac{1}{2} AP$ grooter dan het oppervlak van den kegel.

Men zal, op dezelfde wijze, betoogen: dat het oppervlak van den kegel niet gelijk kan zijn aan den omtrek van eenen cirkel, kleiner dan de basis zijnde, vermenigvuldigd met $\frac{1}{2} AP$.

Indien dan het oppervlak van den kegel grooter is dan de omtrek van eenen cirkel, kleiner dan de basis, vermenigvuldigd met $\frac{1}{2} AP$, en kleiner dan de omtrek van eenen cirkel, grooter dan de basis, vermenigvuldigd met $\frac{1}{2} AP$, zoo zal het oppervlak gelijk zijn aan den omtrek van de basis des kegels, vermenigvuldigd met de helft van zijne opstaande zijde AP.

§. 901. I. Gevolg. *Fig.* 350. *Wanneer men dan, uit het toppunt C van den kegel, als middelpunt, met BC, als straal, eenen cirkelboog BD beschrijft, welks lengte gelijk is aan den omtrek van de basis; dan zal de inhoud van den cirkel sector BCD, gelijk zijn aan het bovenste oppervlak van den kegel.* Want, neemt de *boog* BD $=$ *omtr.* BE, en vermenigvuldigt deze gelijkheid met $\frac{1}{2} BC$; dan is, *boog* $BD \times \frac{1}{2} BC =$ *omtr.* $BE \times \frac{1}{2} BC$; dat is, (*I. Gev. XIII. Stell. VI. B. en VI. Stell.*) *sector* $BCD =$ *het oppervlak van den kegel.*

§. 902. II. Gevolg. *Het oppervlak van den kegel zal ook gelijk zijn aan eenen regthoekigen driehoek CBE, welke de opstaande zijde CB, en eene lijn BE, gelijk aan den omtrek van de basis des kegels, tot regthoekszijden heeft.*

§. 903. Aanmerking. Volgens het *III. Gev. XVIII. Stell. V. B.*, is *omtr.* BC : *boog* $BD = 360^\circ$: *hoek* BCD: maar *omtr.* $BC = 2\pi \times BC$, en *boog* $BD =$ *omtr.* $BE = 2\pi \times BE$ zijnde, is $2\pi \times BC$: $2\pi \times BE = 360^\circ$: *hoek* BCD; of (*VI. Stell. II. B.*) $BC : BE = 360^\circ$: *hoek* BCD; waaruit dan volgt:

$$\text{hoek } BCD = \frac{BE}{BC} \times 360^\circ$$

en hierdoor kan de hoek gevonden worden, welke de stralen van den sector, die aan het oppervlak van den kegel gelijk is, met elkander maken.

VII. Stelling. *Fig.* 351.

§. 904. *De inhoud eens afgeknotten kegels is gelijk aan de ſom van de baſis, het bovenvlak, en een vlak, dat, tusſchen de baſis en het bovenvlak, midden-evenredig is, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte. — En het buitenſte oppervlak van den afgeknotten kegel is gelijk aan deszelfs zijde, vermenigvuldigd met de halve ſom van de omtrekken van de baſis en van het bovenvlak.*

Betoog. Laat *omtr.* AB de baſis van eenen regten kegel zijn, van welken, door een vlak, evenwijdig aan de baſis loopende, het bovenſte ſtuk, dat *omtr.* CD tot baſis heeft, wordt afgeſneden; dan is het gedeelte van den kegel, begrepen tusſchen de cirkels van AB en CD, de afgeknotte kegel.

Stellen wij, op hetzelfde vlak, waarop de kegel ſtaat, eene driehoekige piramide, zoodanig, dat hare baſis, de driehoek HIK, gelijk van inhoud zij met den cirkel AB, en dat de piramide dezelfde hoogte hebbe als de kegel, namelijk loodlijn $EG =$ loodlijn LQ; dan is, vermits zoowel de inhoud van den kegel als van de piramide gevonden wordt, door de baſis met *één-derde* van de hoogte te vermenigvuldigen, de ligchamelijke inhoud van de piramide $HIKL$, gelijk aan den ligchamelijken inhoud van den kegel ABE.

Laat nu de piramide $HIKL$, door een vlak MNO, evenwijdig aan de baſis, geſneden worden, zoodanig, dat $LP = EF$ zij; dan zal, inhoud driehoek $MNO =$ inhoud cirkel CD zijn; want (*III. Stell. XII. B. en XI. Stell. VI. B.*)

$$\textit{cirk. } AB : \textit{cirk. } CD = AG^2 : CF^2 = EG^2 : EF^2$$

en (*V. Stell. XI. B. en XI. Stell. IV. B.*)

$$\textit{drieh. } HIK : \textit{drieh. } MNO = LQ^2 : LP^2$$

omdat nu (*onderſt.*) $EG = LQ$ en $EF = LP$ is, zal (*I. Stell. II. B.*)

$$\textit{cirk. } AB : \textit{cirk. } CD = \textit{drieh. } HIK : \textit{drieh. } MNO$$

zijn: maar, volgens de onderſtelling, is *cirk.* $AB =$ *drieh.* HIK; derhalve is (*Gev. VII. Stell. II. B.*) ook *cirk.* $CD =$ *drieh.* MNO. De piramide $MNOL$ zal dan gelijk zijn aan den kegel CDE, en (*VIII. Ax.*) de afgeknotte piramide $HIKOMN =$ aan den afgeknotten kegel $ABDC$, en beiden hebben dezelfde hoogte, namelijk $PQ = FG$.

Laat nu, op den cirkel AB, als baſis, eenen kegel geſteld worden, welke met den afgeknotten kegel dezelfde hoogte hebbe; dan zal, omdat $FG = PQ$ en driehoek $HIK =$ cirkel AB is, die kegel gelijk zijn

zijn aan de piramide, welke den driehoek HIK tot basis, en PQ tot hoogte heeft. Om dezelfde reden, zal ook de kegel, welke den cirkel CD tot basis, en FG tot hoogte heeft, gelijk zijn aan de piramide, welke den driehoek MNO tot basis, en PQ tot hoogte heeft. Eindelijk, omdat *cirk.* $AB =$ *drieh.* HIK en *cirk.* $CD =$ *drieh.* MNO is, zal een cirkel, welke midden-evenredig tusschen de cirkels AB en CD is, gelijk zijn aan den driehoek, welke, tusschen de driehoeken HIK en MNO, midden-evenredig is: de kegel, welke den midden-evenredigen cirkel tot basis en FG tot hoogte heeft, zal dan gelijk zijn aan de piramide, welke den midden-evenredigen driehoek tot basis en PQ tot hoogte heeft. Wanneer men nu deze gelijke ligchamen optelt; dan zal (*VII. Ax.*) de som der kegels, welke *cirk.* AB, *cirk.* EF, en den midden-evenredigen tusschen de cirkels AB en CD tot bases, en FG tot hoogte hebben, gelijk zijn aan de som der piramiden, welke de driehoeken HIK, MNO, en den midden-evenredigen tusschen deze twee driehoeken tot bases, en PQ tot hoogte hebben. Maar de som dezer piramiden is (*XXIV. Stell. XI. B.*) gelijk aan den afgeknotten kegel $HIKOMN$; gevolgelijk is (*IV. Ax.*) die afgeknotte piramide gelijk aan de som der opgenoemde kegels, en daar nu de afgeknotte piramide gelijk is aan den afgeknotten kegel, zal (*IV. Ax.*) de afgeknotte kegel gelijk zijn aan de som der kegels, welke *cirk.* AB, *cirk.* CD en den cirkel, welke midden-evenredig tusschen *cirk.* AB en *cirk.* CD is, tot bases en alle FG tot hoogte hebben.

Betoog *van het tweede.* Laat BS loodregt getrokken worden op EB, en aan den omtrek van den cirkel AB gelijk genomen worden: en voorts DR loodregt op EB, en gelijk aan den omtrek van CD: men trekke ER en RS; dan is RS het verlengde van ER. Want men heeft (*XII. Stell. VI. B.*) $EB : ED = BS : DR$, en, omdat hoek $EDR =$ hoek EBS is, zijn (*X. Stell. IV. B.*) de driehoeken EBS en EDR gelijkvormig, en hoek $BES =$ hoek DER, en het punt R moet derhalve vallen in de lijn, welke de punten E en S vereënigt. Nu is het trapezium $BDRS$ gelijk aan het bovenste oppervlak der afgeknotte piramide gelijk (*Gev. X. Bep. III. B.*) aan $(DR + BS) \times \frac{1}{2} BD = ($*omtr.* $AB +$ *omtr.* $CD) \times \frac{1}{2} BD$.

§. 905. I. Gevolg. *Fig.* 351. Omdat de inhoud van eenen cirkel (*Bijv. VI. B.*) gelijk is aan het vierkant van de middellijn, vermenigvuldigd met $\frac{1}{4}\pi$, en de middellijn van eenen cirkel, welke midden-evenredig is, tusschen de cirkels AB en CD, gelijk is aan . . . $\sqrt{(AB \times CD)}$, zal het vierkant van die middellijn gelijk $AB \times CD$

 zijn,

zijn, en wij hebben derhalve voor den inhoud van den afgeknotten kegel

$$Inhoud = \tfrac{1}{12}\pi \times (AB^2 + AB \times CD + CD^2) \times FG.$$

§. 906. II. Gevolg. *Fig.* 351. Omdat de omtrek van den cirkel van AB gelijk is aan $\pi \times AB$, en omtrek van den cirkel CD gelijk aan $\pi \times CD$, zal de inhoud van het buitenste oppervlak des afgeknotten kegel door

$$\tfrac{1}{2}\pi \times (AB + CD) \times BD$$

worden uitgedrukt.

§. 907. Aanmerking. Vermits de cilinders en kegels, indedaad, niets anders dan kromlijnige prisma's en piramiden zijn, welke met de drie en veelhoekige prisma's en piramiden dezelfde hoofdeigenschappen hebben, zal ook alles, wat van deze laatste soort van figuren, in de XIV, XVII en XVIII. *Stellingen*, XI. *Boek*, en derzelver gevolgen, betoogd is, op gelijke wijze van de cilinders en kegels gelden. 1° *Zullen de cilinders en kegels tot elkander staan in dezelfde reden als de bases, indien de hoogten gelijk zijn*, 2° *in dezelfde reden als de hoogten, wanneer de bases gelijk zijn*, 3° *in de zamengestelde reden van de bases en hoogten, indien beide ongelijk zijn*, 4° *en, wanneer de cilinders en kegels eenen gelijken inhoud hebben; dan zijn hunne bases in de omgekeerde reden van de hoogten.* Met betrekking eindelijk tot de regte cirkelvormige cilinders en kegels, welke begrepen kunnen worden, door de omwenteling van eenen regthoek en van eenen regthoekigen driehoek, te ontstaan, verdient nog te worden aangemerkt: *dat, indien deze regthoeken of regthoekige driehoeken gelijkvormig zijn, de cilinders en kegels, welke door hunne omwenteling ontstaan, gelijkvormig zullen zijn*, eene waarheid, waarvan men zich, bij een weinig nadenkens, gemakkelijk overtuigen zal. *De gelijkvormige regte cirkelvormige cilinders en kegels zullen nu tot elkander staan, als de cuben van de middellijnen hunner grondvlakken, of als de cuben van hunne hoogten, of als de cuben van hunne opstaande zijden.* Waarheden, welke wij niet noodig geoordeeld hebben, in afzonderlijke stellingen te betoogen.

§. 908. V. Bepaling. *Fig.* 352. Een *Bol*, of *Spheer*, (*Sphæra*) is eene ligchamelijke uitgebreidheid, besloten binnen één gebogen oppervlak, welks punten alle, op eenen gelijken afstand, van één punt, binnen dit ligchaam gelegen, geplaatst zijn. *Een bol kan begrepen worden te ontstaan, door de beweging van eenen halven cirkel ADB, om zijne middellijn*

lijn *AB*. *De halve cirkel beschrijft alsdan de ligchamelijke uitgebreidheid van den bol, en de omtrek van den halven cirkel zijn oppervlak.* Immers een ligchaam, op deze wijze voortgebragt, heeft de eigenschap, dat al de punten van deszelfs oppervlak op denzelfden afstand van het middelpunt *C* gelegen zijn.

§. 909. Aanmerking. De bol, welke tot de omwentelings ligchamen behoort, bekleedt, onder de ligchamen, denzelfden rang, als de cirkel onder de vlakke figuren.

VIII. Stelling. *Fig.* 352.

§. 910. *De doorsnijding van eenen bol met een plat vlak is altijd een cirkel. Die cirkel is op zijn grootst, wanneer die snijding door het middelpunt gaat, en wordt steeds kleiner, naarmate het vlak van doorsnijding verder van het middelpunt van den bol verwijderd is.*

Betoog *van het eerste.* Laat het vlak van doorsnijding door het middelpunt *C* gaan; dan snijdt dit vlak het oppervlak van den bol, volgens eene kromme lijn *DFEG*; de punten dezer kromme lijn, in hetzelfde vlak en tevens in het oppervlak van den bol gelegen zijnde, liggen (*V. Bep.*) op denzelfden afstand van het middelpunt; de kromme lijn *DFEG*, is derhalve (*I. Bep. V. B.*) een cirkel.

Wanneer men den bol snijdt, volgens een vlak *HKI*; dan ontstaat 'er, op het oppervlak van den bol, eene kromme lijn *HKI*, welker punten *H*, *K*, *I*, *enz.* in hetzelfde vlak liggen. Laat nu, uit het middelpunt *C* van den bol, eene loodlijn *CL*, op dit snijdend vlak, en voorts de lijnen *HC*, *KC*, *CI*, *enz.*, benevens *HL*, *KL* en *IL* getrokken worden; dan zijn (*IV. Stell. X. B.*) de driehoeken *CLH*, *CLK* en *CLI* regthoekig, en, omdat dan (*V. Bep.*) $CH = CK = CI$ is, en deze driehoeken de gemeene regthoekszijde *CL* hebben, is, (*II. Lemma I. B.*) $LH = LK = IL$. Al de andere punten der kromme lijn *HKI* zullen dan van het punt *L* denzelfden afstand hebben: de kromme lijn *HKI* is derhalve (*I. Bep. V. B.*) een cirkel, welke het punt *L* tot middelpunt heeft.

Betoog *van het tweede.* Wanneer de snijding door het middelpunt gaat; dan is de middellijn van den cirkel, die ontstaat, de middellijn van den bol zelve: maar, wanneer de snijding buiten het middelpunt gaat; dan is de middellijn van den cirkel, welke door die snijding ge-

maakt

maakt wordt, eene koorde van den cirkel, welke door het middelpunt gaat: nu is (*III. Stell. V. B.*) de middellijn grooter dan eenige koorde, en (*XI. Stell. V. B.*) de koorden van eenen cirkel worden kleiner, naarmate zij verder van het middelpunt afstaan; gevolgelijk geeft de snijding, welke door het middelpunt gaat, den grootsten cirkel, en de snijdingen, buiten het middelpunt, geven kleinere cirkels, naarmate zij verder van het middelpunt van den bol zijn afgelegen.

§. 911. VI. Bepaling. De cirkel, volgens welken eenig vlak eenen bol snijdt, wordt *groote cirkel* genoemd, wanneer dit snijdend vlak door het middelpunt van den bol gaat: maar, loopt dit vlak buiten het middelpunt; dan draagt die cirkel den naam van *kleinen cirkel*.

§. 912. I. Gevolg. *Omdat alle groote cirkels door het middelpunt van den bol gaan, en* (*I. Stell. X. B.*) *twee vlakken elkander volgens regte lijnen doorsnijden, zullen* (*VI. Bep.*) *twee groote cirkels van den bol elkander altijd, volgens éene van deszelfs middellijnen, in twee gelijke deelen snijden.*

§. 913. II. Gevolg. *Fig.* 352. Volgens het betoog der voorgaande stelling, gaat de loodlijn, welke, uit het middelpunt C van den bol, op eenigen van deszelfs kleine cirkels valt, door het middelpunt L van dien kleinen cirkel. Nemen wij nu: dat die loodlijn aan wederzijden tot aan het oppervlak van den bol in A en B verlengd worde; dan zal één dezer punten, A of B, op eenen gelijken afstand van de punten van den omtrek van dien kleinen cirkel gelegen zijn; want, de driehoeken AHL en AKL zijn regthoekig in L, voorts is $HL = KL$ en $AL = AL$; en daarom (*X. Stell. I. B.*) is $AH = AK$. Op dezelfde wijze, blijkt het: dat $BH = BK = BI$ is. Hieruit volgt dan verder: *dat, wanneer men het éene punt van eenen passer in eenig punt A van het oppervlak van eenen bol plaatst, en, met het ander punt, op het oppervlak van dien bol, eene kromme lijn beschrijft, die kromme lijn noodwendig een cirkel zal zijn.*

§. 914. VII. Bepaling. *Fig.* 352. De middellijn AB, welke, door het middelpunt van den bol, regthoekig op eenigen kleinen of grooten cirkel van den bol staat, en, (*voorg. betoog*) door het middelpunt van dien cirkel loopt, wordt de *as* van dien cirkel genoemd, en de uiterste punten A en B van die middellijn, of as, de *polen*, of *aspunten*, van dien cirkel.

§. 915. III. Gevolg. Vermits de asſen van de groote cirkels van eenen bol regthoekig op die cirkels ſtaan, en, door het middelpunt van den bol gaande, uit eenig punt van de doorſnede dezer cirkels, op dezelve zijn opgerigt, is (*XXIX. Stell. X. B.*) de hoek, onder welken deze asſen elkander ſnijden, gelijk aan den ſtandhoek dezer groote cirkels. Hetzelfde geldt ook, op gelijke wijze, voor de kleine cirkels van eenen bol.

§. 916. VIII. Bepaling. Een plat vlak wordt gezegd een gebogen vlak, *in één enkeld punt*, *aanteraken*, wanneer dit platte vlak, met het gebogene, ſlechts één punt gemeen heeft.

§. 917. IX. Bepaling. Twee gebogen oppervlakten worden gezegd elkander, *in één enkeld punt*, *aanteraken*, wanneer zij ſlechts één punt gemeen hebben.

§. 918. X. Bepaling. Een plat vlak wordt gezegd eene gebogene oppervlakte, en twee gebogene oppervlakten worden gezegd elkander, *in de uitgeſtrektheid eener regte of kromme lijn*, *aanteraken*, wanneer de punten, welke deze vlakken gemeen hebben, in het beloop eener regte of kromme lijn gelegen zijn.

IX. Stelling. *Fig.* 353.

§. 919. *Een plat vlak*, *PQ*, *hetwelk regthoekig op het uiteinde A van de middellijn*, *AB*, *van eenen bol ſtaat*, *raakt dien bol in het uiteinde A dezer middellijn aan.*

Bewijs. Laat de bol geſneden worden door een vlak, hetwelk door de middellijn *AB* gaat; dan ſnijdt dit vlak den bol, volgens den cirkel *ACB*, en het vlak, volgens de lijn *EF*; daar nu het vlak *PQ* regthoekig op *AB* ſtaat, is (*II. Bep. X. B.*) *EF* regthoekig op *AB*; en de lijn *EF* raakt den cirkel *ACB* (*XII. Stell. V. B.*) in het punt *A*. Om dezelfde reden, zal, wanneer de bol, volgens een ander vlak geſneden wordt, de lijn *GH* den cirkel *ADB* in het punt *A* aanraken. Alle groote cirkels, welke door de middellijn *AB* gaan, raken derhalve de overéénkomſtige lijnen, welke in het vlak *PQ* elkander in *A* ſnijden. Het punt *A* is derhalve het eenig punt, dat, en in het oppervlak van den bol, en in het vlak *PQ* gelegen is, en is derhalve het punt, alwaar het vlak *PQ* den bol aanraakt.

IX.

X. STELLING.

§. 920. *Wanneer de afstand van de middelpunten van twee bollen gelijk is aan de som of aan het verschil van derzelver stralen; dan zullen deze bollen, in het eerste geval, elkander uitwendig; en, in het tweede geval, elkander inwendig aanraken.*

Betoog. Deze stelling wordt, op dezelfde wijze, als de *XVI. Stell. V. B.* betoogd.

XI. STELLING. *Fig.* 354.

§. 921. *Wanneer, uit eenig punt P, genomen buiten het oppervlak van eenen bol, verscheidene lijnen AP, BP, CP, enz. getrokken worden, welke het oppervlak van dien bol aanraken; dan zijn alle deze lijnen gelegen in het oppervlak van eenen regten cirkelvormigen kegel, welke het oppervlak van den bol, in den omtrek van éénen van deszelfs kleine cirkels, aanraakt; en de punten van den omtrek dezes cirkels zijn de punten, in welke dit kegel-vlak den bol aanraakt.*

Betoog. Men verbeelde zich een vlak, dat door het middelpunt *M* en de lijn *AP* gaat: dit vlak snijdt den bol, volgens het beloop van den grooten cirkel *AQCR*, en de lijn *AP* raakt dien cirkel in het punt *A*. Om dezelfde reden, zal de lijn *BP* den grooten cirkel, welke, bij de doorsnede van het vlak, dat door het middelpunt *M* en de lijn *BP* gaat, gevormd wordt, in *B* raken. Indien men dan de stralen *AM* en *MB* trekt; dan hebben de regthoekige driehoeken *PAM* en *PBM*, dezelfde hypothenusa *PM*, en gelijke regtshoekszijden *AM* en *BM*; derhalve is (*II. Lemma I. B.*) $AP = BP$. Hieruit volgt: dat, wanneer men den regthoekigen driehoek *APM* om de lijn *PM* laat omdraaijen, het punt *A* door al de raakpunten *B*, *C*, *D*, *enz.* zal moeten loopen, terwijl het punt *A* bestendig in het oppervlak van den bol zal blijven: dan, de lijn *AP* beschrijft het oppervlak van eenen kegel, en het punt *A* den omtrek van eenen cirkel: het is derhalve, in het beloop van den omtrek dezes cirkels, dat de lijnen *AP*, *BP*, *enz.*, welke in den omtrek van eenen kegel liggen, het oppervlak van den bol aanraken.

§. 922. I. Gevolg. Het oppervlak van eenen bol kan derhalve al-

altijd in de holle oppervlakte van eenen regten cirkelvormigen kegel geplaatst worden, zoodanig, dat deze oppervlakten elkander in eenen cirkel aanraken.

§. 923. II. Gevolg. *Fig.* 355. Wanneer men twee bollen, welke twee ongelijke ſtralen *AP* en *BQ* hebben, door een vlak, hetwelk door de middelpunten *P* en *Q* gaat, ſnijdt, en men voorts aan de groote cirkels, welke uit deze ſnijding ontſtaan, eene raaklijn *ABC* trekt, welke de lijn, die door de middelpunten gaat, in *C* ſnijdt; dan zal de regte cirkelvormige kegel, welke door de omwenteling van de lijn *AC*, om den as *PQC*, geboren wordt, deze twee bollen aanraken, in de omtrekken der cirkels, welke door de beweging der punten *A* en *B*, op de oppervlakten dezer bollen, worden voortgebragt.

XII. Stelling. *Fig.* 356.

§. 924. *De oppervlakten van twee bollen, welke elkander ſnijden, ſnijden elkander volgens het beloop van eenen kleinen cirkel.*

Betoog. Laten *P* en *Q* de middelpunten van twee bollen zijn, welke elkander ſnijden: indien dan door deze middelpunten een vlak gaat; dan ſnijdt dit vlak beide bollen, volgens groote cirkels, welke elkander in twee punten moeten *A* en *B* ſnijden. Nu is het klaar: dat, wanneer men de geheele figuur om de lijn *PQ* laat omdraaijen, het punt *A* door al de punten zal loopen, welke de oppervlakten dezer bollen gemeen hebben; dan, daar dit punt klaarblijkelijk eenen cirkel beſchrijft, zal de doorſnijding der oppervlakten de cirkel zijn, welke, door de beweging van dit punt *A*, geboren wordt.

§. 925. XI. Bepaling. Men verſtaat door een *bolrond oppervlak* zulk een oppervlak, hetwelk, door eene regte lijn, op welk eene wijze ook geplaatst, ſlechts in twee punten kan geſneden worden.

I. Lemma. *Fig.* 357.

§. 926. *Wanneer een plat vlak, EADBC, en een gebogen of bolrond vlak, FADBC, denzelfden omtrek ADBC hebben; dan is de inhoud van het gebogen vlak grooter dan die van het platte vlak.*

Be-

Betoog. Want het gebogen oppervlak *FADBC* heeft, in alle rigtingen, eene grootere uitgebreidheid dan het platte vlak *EADBC*.

II. Lemma. *Fig.* 358.

§. 927. *Wanneer twee bolronde oppervlakten, FACBD en EACBD, elkander ſnijden, of op dezelfde kromme lijn ACBD rusten; dan heeft het buitenſte oppervlak FACDB eenen grooteren inhoud dan het binnenſte EACDB.*

Betoog. Dit volgt uit dezelfde beginſelen.

III. Lemma.

§. 928. *Het oppervlak, hetwelk geheel binnen den omtrek van een ander gelegen is, is kleiner dan dit andere oppervlak.*

Betoog. Deze waarheid behoeft geen betoog.

IV. Lemma. *Fig.* 359.

§. 929. *Wanneer een regelmatige veelhoek ABCDEFG, van een even aantal zijden, om ééne van deszelfs middellijnen AG omwentelt; dan beſchrijft die regelmatige veelhoek een ligchaam, dat kan aangemerkt worden, als zamengeſteld te zijn, uit twee regte cirkelvormige kegels, welke, aan de hoekpunten, A en G, door de beweging der regthoekige driehoeken, ABH en FGV, ontſtaan, en uit een zeker aantal regte afgeknotte kegels, welke, door de omwenteling der regthoekige trapeziums BCIH, CDKI, enz. geboren worden. Nu zal het gedeelte van het oppervlak van dit ligchaam, hetwelk, door eenige aan elkander liggende zijden, BC, CD en DE, bij voorbeeld, geboren wordt, gelijk zijn aan den omtrek van den cirkel, welke, met de apothema MP des veelhoeks, als ſtraal, beſchreven is, vermenigvuldigd met het gedeelte HL der middellijn, hetwelk gelegen is tusſchen de loodlijnen BH en EL, welke, uit de uiterſte grenzen dezer zijden, op dezelve middellijn vallen.*

Betoog. Men trekke, uit het middelpunt *M*, tot aan de hoekpunten *B*, *C*, *D*, *enz.* de ſtralen *MB*, *MC*, *MD*, *enz.* Voorts dee-

deele men de zijde CB in P, in twee gelijke deelen, en late, uit M, de apothema PM op BC vallen, en trekke, uit het punt P, de loodlijn PQ op AG, en, uit B, de loodlijn BO op CI: dan zijn de driehoeken BOC en PQM gelijkvormig; want, volgens de conſtructie, is hoek $BPQ +$ hoek $QPM = R$; en, wegens den regthoekigen driehoek BCO, is hoek $CBO +$ hoek $BCO = R$; derhalve zal (*IV. Ax.*) hoek $BPQ +$ hoek $QPM =$ hoek $CBO +$ hoek BCO zijn: nu is, wegens de evenwijdigheid der lijnen PQ en CI, (*XXIV. Stell. I. B.*) hoek $BPQ =$ hoek BCO; trekt men dan deze vergelijking van de voorgaande af; dan zal 'er (*VIII. Ax.*) hoek $QPM =$ hoek CBO overblijven: de driehoeken BOC en PQM, zijn dan (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B. en VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig, en wij hebben derhalve: $PQ : PM = BO : BC$; maar, volgens de *XII. Stell. VI. B.* is $PQ : PM =$ *omtr.* PQ : *omtr.* PM; derhalve zal (*I. Stell. II. B.*) *omtr.* PQ : *omtr.* $PM = BO : BC$ zijn, en uit de laatſte evenredigheid volgt dan: dat

$$BC = \frac{\text{omtr. } PM \times BO}{\text{omtr. } PQ}$$

is. Nu is het oppervlak van den afgeknotten kegel, welke met BC beſchreven is (*VII. Stell.*), gelijk aan (*omtr.* $CI +$ *omtr.* BH) $\times \frac{1}{2} BC$; maar omdat $2\,PQ = BH + CI$ is, (zoo als duidelijk genoeg te zien is,) zal *omtr.* $CI +$ *omtr.* $BH = 2$ *omtr.* PQ zijn; derhalve zal het oppervlak, met BC beſchreven, gelijk zijn aan *omtr.* $PQ \times BC$. Stelt men nu, in deze laatſte uitdrukking, in plaats van BC, de waarde, boven gevonden; dan verkrijgt men, voor het oppervlak met BC beſchreven, *omtr.* $PM \times BO =$ *omtr.* $PM \times HI$. Omdat nu de apothemata, welke, uit het middelpunt, op de andere zijden vallen, alle gelijk PM zijn, zal het oppervlak, met CD beſchreven, gelijk zijn aan *omtr.* $PM \times IK$, en het oppervlak met DE beſchreven, gelijk aan *omtr.* $PM \times KL$; telt men nu deze gelijkheden bij elkander, dan zal het oppervlak met $BCDE$ beſchreven, gelijk zijn aan *omtr.* $PM \times HL$.

§. 930. GEVOLG. *Fig.* 359. *Het oppervlak van het ligchaam, hetwelk met den halven omtrek $ABCDEFG$ van eenen veelhoek van een even getal zijden beſchreven wordt, is derhalve ook gelijk aan den omtrek, met de apothema PM, als ſtraal, beſchreven, vermenigvuldigd met de middellijn dezes veelhoeks, of, dat hetzelfde is, vermenigvuldigd met de middellijn van den cirkel, welke om dien veelhoek beſchreven is.*

XIII. Stelling. *Fig.* 360.

§. 931. *Het oppervlak van eenen bol is gelijk aan den omtrek van deszelfs grooten cirkel, vermenigvuldigd met deszelfs middellijn.*

Betoog. Wanneer men den omtrek van den grooten cirkel *ABCDE* van eenen bol met deszelfs middellijn *AD* vermenigvuldigt; dan verkrijgt men een oppervlak, hetwelk gelijk zal zijn aan het oppervlak van eenen bol, welke gelijk, grooter of kleiner dan de bol *ABCDE* zal zijn. Wanneer men dan bewijzen kan, dat dit product niet gelijk aan het oppervlak van eenen grooteren of kleineren dan den gestelden bol kan zijn; dan zal het gestelde volledig bewezen zijn.

1° De regthoek, onder den omtrek *ABCDE*, en de middellijn *AD*, kan niet gelijk zijn aan het oppervlak van den bol *FGHI*, welke uit *M* als middelpunt met eene grootere straal *MF* beschreven is. Want, hoe weinig de stralen *AM* en *MF* der gelijkmiddelpuntige bollen van elkander verschillen, zal men nogtans, in den omtrek van den grootsten cirkel, (*III. Lemma VI. B.*) eenen regelmatigen veelhoek van een even aantal zijden beschrijven kunnen, welker zijden buiten den omtrek van den binnensten cirkel gelegen zijn; wanneer men dan de figuur om de lijn *FL* laat omdraaijen; dan beschrijft de omtrek *ABCD* het oppervlak van den bol, welke *AM* tot straal heeft; de veelhoek *FGHI...L* het oppervlak van een ligchaam, hetwelk in den bol, welke met den halven cirkel *FGHIL* beschreven is, geplaatst is; en de halve cirkel *FGH...L* het oppervlak van den bol, welke *MF* tot straal heeft. Wanneer men nu, uit *M*, op de zijde *GF*, de apothema *MP* laat vallen; dan is (*IV. Lemma*) het oppervlak van het ligchaam, met den veelhoek *FGH...L* beschreven, gelijk aan *omtr.* $MP \times FL$; omdat nu klaarblijkelijk $MP > AM$ is, is *omtr.* $MP >$ *omtr.* AM; dit met $FL > AD$ vermenigvuldigende, is *omtr.* $MP \times FL >$ *omtr.* $AM \times AD$; dat is, het oppervlak, door de omwenteling van *FGH...L* voortgebragt, is grooter dan *omtr.* $AM \times AD$: maar dit oppervlak is (*II. Lemma*) kleiner dan de bol, welke *MF* tot straal heeft: de bol derhalve, welke *MF* tot straal heeft, zal (*VI. Ax.*) grooter zijn dan *omtr.* $AM \times AD$, en dit product *omtr.* $AM \times AD$ zal derhalve altijd kleiner moeten zijn dan het oppervlak van eenen bol, welke, met eene grootere straal, dan de straal *AM*, beschreven is.

2° *Fig.* 361. Het product van den omtrek van den grooten cirkel *ABCD* van den bol, welke *AM* tot straal heeft, kan niet gelijk zijn

aan

aan het oppervlak van eenen bol, welke, met eene kleinere ſtraal FM, beſchreven is. Want, hoe weinig deze ſtralen FM en AM van elkander verſchillen mogen, zal men, (*III. Lemma VI. B.*) in den omtrek van den grootſten cirkel, toch altijd eenen regelmätigen veelhoek $ABC...D$, van een even aantal zijden, beſchrijven kunnen, zoodanig, dat zijne zijden den binnenſten cirkel $FGHL$ niet raken, en het oppervlak van dit ligchaam, hetwelk (*II en III. Lemma*) grooter is dan het oppervlak van den bol, welke FM tot ſtraal heeft, zal gelijk zijn aan *omtr.* $PM \times AD$; maar nu is $AM > PM$; derhalve *omtr.* $AM \times AD >$ *omtr.* $PM \times AD$; dat is *omtr.* $AM \times AD$ grooter dan het ligchaam, dat door de omwenteling van den veelhoek $ABC...D$ ontſtaat; en derhalve ook (*VI. Ax.*) grooter dan het oppervlak van den bol, welke FM tot ſtraal heeft.

Het product van den omtrek van den grooten cirkel van eenen bol, met deszelfs middellijn vermenigvuldigd, is dan kleiner dan het oppervlak van eenen grooteren, en grooter dan het oppervlak van eenen kleineren bol: dit product moet derhalve aan het oppervlak van den bol zelve gelijk zijn.

§. 932. XII. BEPALING. *Fig.* 352. Een *bolvormig ſegment* is een ſtuk $AHKI$, hetwelk door een vlak HKI van eenen bol wordt afgeſneden; deszelfs baſis HKI is eenen kleinen of grooten cirkel van den bol. Het gedeelte $AHKI$ van het oppervlak van den bol, waardoor dit ſegment bepaald wordt, wordt het oppervlak van het bolvormig ſegment genoemd. De lijn AL, welke, uit het middelpunt van de baſis, regthoekig op dezelve ſtaat, is de *as* van het bolvormig ſegment en wordt tevens zijne *hoogte* genoemd.

§. 933. XIII. BEPALING. *Fig.* 352. Eene *bolvormige ſchijf* $DGEIKH$, is een gedeelte van den bol, begrepen tusſchen twee evenwijdige cirkels DGE en HKI, welke het *grondvlak* en *bovenvlak* van die bolvormige ſchijf genoemd worden. Het oppervlak van den bol, welke tusſchen die evenwijdige vlakken begrepen is, wordt het oppervlak van die bolvormige ſchijf genoemd. De lijn LC, welke de middelpunten van het grond- en bovenvlak vereënigen en loodregt op beiden ſtaan, is de *as* en tevens de *hoogte* van die bolvormige ſchijf.

XIV. Stelling. *Fig.* 362 *en* 363.

§. 934. *Het oppervlak, zoowel van een bolvormig ſegment, als van eene bolvormige ſchijf, is gelijk aan den omtrek van den grooten cirkel van den bol, waaruit deze ligchamen geſneden zijn, vermenigvuldigd met de hoogte dezer ligchamen.*

Betoog *van het eerſte.* Laat de cirkelboog AB, welke minder dan een quadrant is, om de middellijn BMP omwentelen; dan zal moeten bewezen worden: dat het oppervlak van het bolvormig ſegment, dat, door de omwenteling van het cirkelſtuk ABD, geboren wordt, gelijk is aan *omtr.* $MB \times BD$.

Men verlenge de ſtralen AM en BM, en beſchrijve uit M de gelijkvormige, en met AB gelijkmiddelpuntige cirkelbogen, EF en QR; dan zal het zoo even geſtelde bewezen zijn, wanneer men bewezen zal hebben: dat het product *omtr.* $BM \times BD$ niet gelijk kan zijn aan het oppervlak van het cirkelvormig ſegment, dat door de omwenteling van den boog EF gemaakt wordt, en dat dit product ook niet gelijk kan zijn aan het bolvormig ſegment, hetwelk door de omwenteling van den boog QR gemaakt wordt.

Men kan (*III. Lemma VI. B.*) in den cirkelboog EF, (hoe digt hij aan den cirkelboog AB geplaatst zij,) een gedeelte van eenen regelmatigen veelhoek beſchrijven, welks zijden den boog AB niet aanraken, en dan zal (*IV. Lemma*) het oppervlak van het ligchaam, dat door de omwenteling van den veelhoek $EIHGF$ ontſtaat, (hebbende MK loodregt op EI getrokken,) gelijk zijn *omtr.* $MK \times EV$. Wanneer men nu de lijnen AB en EF trekt; dan zullen de gelijkvormige driehoeken, ADB en FVE, geven de evenredigheid $AB : EF = BD : EV$. Nu is $EF > AB$; derhalve is ook $EV > BD$. Ook is $MK > MB$; derhalve *omtr.* $MK >$ *omtr.* MB; vermenigvuldigt men deze laatſte ongelijkheid met $EV > BD$; dan zal *omtr.* $MK \times EV >$ *omtr.* $MB \times BD$ zijn: maar *omtr.* $MK \times EV$ is gelijk aan het oppervlak, door de omwenteling van $FGHIE$ voortgebragt, en daar dit oppervlak (*II. Lemma*) kleiner is dan het oppervlak door den boog EF voortgebragt, zal (*VI. Ax.*) het bolvormig ſegment, door EF voortgebragt, altijd grooter dan *omtr.* $BM \times BD$, en niet gelijk aan dit product kunnen zijn.

Men zal, op dezelfde wijze, betoogen: dat het product *omtr.* $BM \times BD$ altijd grooter zal zijn dan het bolvormig ſegment, hetwelk door de omwenteling van den kleineren boog QR ontſtaat.

Het

Het product, *omtr.* $BM \times BD$, zal dan gelijk zijn aan het bolvormig ſegment, hetwelk, door de omwenteling van den boog AB, om de as BP, geboren wordt.

Het eerſte gedeelte der ſtelling is nu, voor een bolvormig ſegment, dat kleiner dan de halve bol is, bewezen: maar zulks is genoeg, om aantetoonen: dat het geſtelde ook gelden moet voor een bolvormig ſegment, grooter dan de halve bol zijnde.

Laat, *Fig.* 363, de bol door een vlak CDE in twee ongelijke deelen geſneden worden; dan is (*XIII. Stell.*)

$$\textit{oppervl. bol} = \textit{omtr.}\ MA \times AB$$

en, volgens het bewezene,

$$\textit{oppervl. ſegm.}\ CAE = \textit{omtr.}\ MA \times AD$$

de laatſte vergelijking van de eerſte aftrekkende, blijft 'er over:

$$\textit{oppervl. ſegm.}\ CBE = \textit{omtr.}\ MA \times BD.$$

BETOOG *van het tweede. Fig.* 363. Volgens het betoogde, is

$$\textit{oppervl. ſegm.}\ FAH = \textit{omtr.}\ AM \times AG$$

$$\textit{oppervl. ſegm.}\ CAE = \textit{omtr.}\ AM \times AD$$

en, trekt men de laatſte van de eerſte vergelijking af; dan houdt men over:

$$\textit{oppervl. ſchijf}\ CEHF = \textit{omtr.}\ AM \times DG.$$

§. 935. I. GEVOLG. *Fig.* 363. *De oppervlakken der bolvormige ſegmenten, zoowel als de oppervlakken der bolvormige ſchijven, ſtaan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne asſen of hoogten.*

§. 936. II. GEVOLG. *Fig.* 363. Wanneer men de koorden AC, AF, *enz.* trekt; dan zijn (*XXIII. Stell. V. B.*) $AD : AG = AC^2 : AF^2$. *De oppervlakken der bolvormige ſegmenten ſtaan derhalve tot elkander, als de vierkanten der koorden, welke, van de polen of toppen, tot aan de omtrekken van derzelver grondvlakken, getrokken worden.*

§. 937. III. GEVOLG. *Fig.* 363. *Om dezelfde reden, ſtaat het oppervlak van den geheelen bol tot het oppervlak van het bolvormige ſegment CAE, gelijk het vierkant van de middellijn AB tot het vierkant van de koorde AC.*

§. 938. IV. GEVOLG. *Fig.* 363. De inhoud van den cirkel, welke, met AB, als ſtraal, beſchreven is, is (*XII. Stell. VI. B.*) gelijk aan viermaal den inhoud van den cirkel, met AM, als ſtraal, beſchreven, gelijk aan omtrek van den grooten cirkel van den bol, vermenigvuldigd met AB. *Het oppervlak van den bol is dan gelijk aan viermaal den grooten cirkel, gelijk aan den cirkel, welke met de middellijn van den bol, als ſtraal, beſchreven is.*

§. 939. V. Gevolg. *Fig.* 363. Volgens het III. *Gevolg*, heeft men:

$$\text{oppervl. bol} : \text{oppervl. fegm. } ACE = AB^2 : AC^2$$

maar naar de (*XII. Stell. VI. B.*) is

$$\text{Inh. cirk. } AB : \text{Inh. cirk. } AC = AB^2 : AC^2$$

derhalve (*I. Stell. II. B.*)

$$\text{oppervl. bol} : \text{oppervl. fegm. } ACE = \text{Inh. cirk. } AB : \text{Inh. cirk. } AC$$

nu is (*IV. Gev.*) het oppervlak van den bol gelijk aan den cirkel, met AB, als ſtraal, beſchreven: de voorgaande termen dezer evenredigheid dan gelijk zijnde, moeten ook de volgende gelijk zijn; *daarom zal het oppervlak van het bolvormig ſegment gelijk zijn aan den cirkel, welke met de koorde AC, als ſtraal, beſchreven is.*

§. 940. VI. Gevolg. *Fig.* 364. Wanneer een halve cirkel AKB, om welken eenen regthoek $ABDC$ beſchreven is, om de middellijn AB omwentelt; dan beſchrijft de regthoek $ABDC$ eenen regten cirkelvormigen cilinder, en de halve cirkel AKB eenen bol, welke in dien cilinder past, en daarom gezegd wordt in denzelven beſchreven te zijn: *het buitenſte oppervlak van den cilinder is* (*V. Stell.*) *gelijk aan den omtrek van den cirkel met BD beſchreven, vermenigvuldigd met DC of AB, en is dus, omdat de cirkel met DB beſchreven gelijk is aan den grooten cirkel van den bol, gelijk aan het oppervlak van den bol.* — En, *wanneer de bol en de cilinder, zoo als de eerſte in den tweeden geplaatst is, geſneden worden, door een vlak GIH; dan zal het oppervlak van den cilinder $GHEC$ gelijk zijn aan het oppervlak van het daar mede overëënkomſtige bolvormig ſegment KAL.* Want, deze oppervlakten worden gevonden, door de gelijke cirkels, welke GH en AB tot middellijn hebben, met de gelijke hoogten CG en AI te vermenigvuldigen.

§. 941. XIV. Bepaling. *Fig.* 365. Een *tweevlakkige bolvormige ſector*, is een gedeelte van den bol, begrepen tusſchen twee halve groote cirkels ACB en ADB, welke elkander, volgens eene middellijn AB, doorſnijden. Een gedeelte van het oppervlak van den bol, hetwelk tusſchen deze halve cirkels begrepen is, wordt het oppervlak van dien ſector genoemd.

XV.

XV. STELLING. *Fig.* 365.

§. 942. *Het oppervlak van eenen tweevlakkigen bolvormigen sector ACBD, staat tot het geheele oppervlak van den bol, gelijk de standhoek der twee groote halve cirkels, welke dezen sector bepalen, tot vier regte hoeken.*

BETOOG. Wij beginnen met te betoogen: *dat twee tweevlakkige bolvormige sectors ACBD en ADBE, welke gelijke standhoeken CMD en DME hebben, niet slechts gelijk van inhoud zijn: maar bovendien gelijke en gelijkvormige oppervlakken hebben.* Want laat, in de gemeene doorsnede der zijvlakken, een punt *M* genomen, en, uit hetzelve, loodregt op *AB*, de lijnen *MC*, *MD* en *ME*, in de vlakken *ACB*, *ADB* en *AEB*, getrokken worden; dan zijn (*onderst.*) de hoeken *CMD* en *DME* gelijk. Laat dan de tweevlakkige bolvormige sector *ADBE* in den tweevlakkigen bolvormigen sector *ACBD* gepast worden, zoodanig, dat *A* in *A*, en *AB* lang *AB*, en het vlak *ADB* op het vlak *ACB* valt; dan zal *M* in *M*, en (wegens de gelijkheid der hoeken *CMD* en *DME*,) *DM* langs *CM*, en *EM* langs *DM*, en het punt *B* in het punt *B* vallen, al de punten van het oppervlak van den tweevlakkigen sector *ADBE*, vallen dan ook (omdat al de punten van het oppervlak van eenen bol even ver van het middelpuut verwijderd zijn,) in het oppervlak van den tweevlakkigen sector *ACBD*: deze twee sectors zijn dan, (*I. Ax.*) zoowel als derzelver oppervlakken, gelijk en gelijkvormig.

Na deze waarheid, bij wijze van *Lemma*, betoogd te hebben, zal men, op dezelfde wijze, als de *XVIII. Stell. V. B.* betoogd is, betoogen: *dat de inhouden van de twee tweevlakkige bolvormige sectors ACBD en ADBE, zoowel als derzelver oppervlakken tot elkander staan, in dezelfde reden, als derzelver standhoeken CMD en DME; waaruit dan onmiddelijk volgt: dat de inhoud van den tweevlakkigen bolvormigen sector ACBD tot den inhoud van bol, en het oppervlak van dien sector, tot het oppervlak van den bol, staat in dezelfde reden, als de standhoek van den sector tot vier regte hoeken.*

§. 943. I. GEVOLG. *Fig.* 365. Indien wij dan het oppervlak van den bol $= \Omega$ stellen; *dan zal het oppervlak van eenen tweevlakkigen bolvormigen sector gelijk zijn aan* $\Omega \times \frac{\text{Standhoek}}{360^\circ}$; *dat is aan het oppervlak van den bol, vermenigvuldigd met den standhoek der* *groote halve cirkels, welke dezen sector bepalen, en gedeeld door vier regte hoeken.*

§. 944. II. Gevolg. *Fig.* 365. Een bol wordt door twee groote cirkels *ACB* en *AEB*, welke elkander regthoekig snijden, in vier gelijke tweevlakkige bolvormige sectors verdeeld, *welker oppervlakken elk gelijk zijn aan den grooten cirkel van den bol.*

§. 945. III. Gevolg. *Fig.* 365. Verbeelden wij ons een vlak, dat den bol in het punt *A* aanraakt; dan zal dit vlak de vlakken van de groote cirkels *ACB* en *ADB*, volgens de lijnen *AF* en *AG* snijden: deze lijnen zijn raaklijnen van de groote cirkels aan het punt *A*. De hoek *FAG*, welke deze raaklijnen met elkander maken, is gelijk aan den hoek *CMD*, gelijk aan den standhoek der twee groote cirkels *ACB* en *ADB*.

§. 946. XV. Bepaling. *Fig.* 365. De hoek *FAG*, welke aan het punt *A*, alwaar twee groote cirkels elkander snijden, door de raaklijnen dezer cirkels gemaakt, en als de standhoek dezer cirkels kan aangemerkt worden, kan worden aangezien, als de hoek, welke de cirkelbogen *AC* en *AD* met elkander maken. Men noemt zulk eenen hoek eenen *bolvormigen hoek*, gemeenlijk *sphærischen hoek*.

§. 947. XVI. Bepaling. *Fig.* 366. Een drievlakkige bolvormige sector *ABCM* ontstaat, wanneer drie groote cirkels van den bol *ABDE*, *BCEF* en *ACDF*, elkander snijden: hij wordt bepaald, door drie cirkel-sectors *ABM*, *ACM* en *BCM*, welke aan het middelpunt sluiten, en door een gedeelte van het oppervlak van den bol, dat bepaald wordt, door drie bogen *AB*, *AC* en *BC*, van groote cirkels. Dit gedeelte van het oppervlak noemen wij, in het vervolg, *bolvormigen* (of *sphærischen*) *driehoek*, zijnde zulk een driehoek, op het oppervlak van eenen bol, door drie bogen van deszelfs groote cirkels bepaald. Men zal hieruit genoegzaam verstaan, wat *bolvormige veelhoeken* zijn.

§. 948. Aanmerking. *Fig.* 366. Wanneer men zich drie groote cirkels verbeeldt, welke elkander gevolgelijk in het middelpunt van den bol snijden; dan wordt de bol in *acht* drievlakkige bolvormige sectors, en het oppervlak in acht bolvormige driehoeken verdeeld, en deze sectors staan twee aan twee tegen over elkander, om welke reden wij deze drievlakkige bolvormige sectors *tegenoverstaande sectors*, en en de bolvormige driehoeken, door welke zij bepaald worden, *tegenoverstaande bolvormige driehoeken* zullen noemen.

XVI. Stelling. *Fig.* 366 *en* 367.

§. 949. *De tegenoverstaande drievlakkige bolvormige sectors, benevens de bolvormige driehoeken, door welke zij bepaald worden, zijn, bij oppositie, of tegenoverstand, gelijk.*

Betoog. Men zal dan moeten betoogen: dat sector $ABCM =$ sector $DEFM$, en driehoek $ABC =$ driehoek EFD is. Stellen wij ons gezegde sectors, in *fig.* 367, afzonderlijk voor, en verbeelden wij ons: dat de bolvormige hoek ABC, dat is de standhoek der cirkelsectors ABM en BCM, door vlakken, welke alle door de middellijn BME gaan, in een zeker aantal gelijke deelen verdeeld worde; (in de figuur in *vier*,) dan zullen deze vlakken den bolvormigen driehoek ABC, volgens de bogen Ba, Bb, Bc, en den tegenoverstaanden driehoek EFG, volgens de bogen Ed, Ee, Ef, (welke bogen van groote cirkels zijn,) snijden, en dan zal boog $Ba =$ boog Ed; boog $Bb =$ boog Ee, en boog $Bc =$ boog Ef zijn. Maken wij nu boog $Bg =$ boog Ba; boog $Bh =$ boog Bb; boog $Bi =$ boog Bb en boog $Bk =$ boog Bc; en laten wij door het middelpunt M, en de punten a en g een vlak laten gaan; dan zal dit vlak de bolvormige driehoeken ABC en DEF, volgens de groote cirkelbogen ag en dl snijden: en, wanneer men insgelijks, door b en h, door b en i, door c en k, en het middelpunt, zulke vlakken laat gaan; dan zullen in ABC de groote cirkelbogen hb, bi, ck, en, in DEF, de groote cirkelbogen em, en en fo ontstaan, en dan zal boog $Bg =$ boog Ba $=$ boog $El =$ boog Ed zijn, *enz.* De drievlakkige bolvormige sectors Bag en Eld; Bbh en Eem; Bbi en Een; Bck en Efo zijn; derhalve, zoowel als hunne oppervlakken, gelijk. Wanneer men den hoek B, in plaats van in vier, in honderd, in duizend en meer deelen verdeelt; dan zal nog het betoogde altijd blijven plaats hebben: maar de sommen der kleine sectors en der kleine bolvormige driehoeken zullen zooveel minder van de drievlakkige sectors ABC en DEF, en derzelver oppervlakken zooveel minder van de oppervlakken dezer sectors verschillen, naarmate men een grooter aantal deelen neemt, waaruit men dan mag besluiten: dat de drievlakkige bolvormige sectors ABC en DEF, benevens derzelver oppervlakken, gelijk en gelijkvormig zijn; doch, zij zijn niet, bij superpositie; maar, zoo als, uit de *XXXIV. Stell. X. B.* blijkt, bij oppositie, of tegenoverstand, gelijk.

XVII. STELLING. *Fig.* 366.

§. 950. *Het oppervlak of de inhoud van eenen bolvormigen driehoek, ABC, ſtaat tot het geheele oppervlak van den bol, in hetwelk die driehoek gelegen is, gelijk de ſom der hoeken van dien bolvormigen driehoek min twee regte hoeken, tot acht regte hoeken. Of dat hetzelfde is, wanneer het oppervlak van den bol gelijk* Ω *geſteld wordt; dan zal*

$$\textit{Oppervl. } ABC = \frac{\textit{hoek } A + \textit{hoek } B + \textit{hoek } C - 2R}{8R} \times \Omega$$

zijn.

BETOOG. Volgens het eerſte gevolg der *XV. Stelling*, hebben wij:

$$\textit{Oppervlak } ACDBA = \Omega \times \frac{\textit{hoek } A}{4R}$$

$$\textit{Oppervlak } ABCEA = \Omega \times \frac{\textit{hoek } B}{4R}$$

$$\textit{Oppervlak } CDFEC = \Omega \times \frac{\textit{hoek } C}{4R}$$

deze gelijkheden bij elkander optellende, moeten de ſommen gelijk zijn: maar de ſom der oppervlakken $ACDBA$, $ABCEA$ en $CDFEC$, is klaarblijkelijk gelijk aan het halve oppervlak van den bol, met nog de ſom der bolvormige driehoeken ABC en DEF, of, omdat (*XVI. Stell.*) drieh. $DEF =$ drieh. ABC is, gelijk aan het halve oppervlak van den bol, met tweemaal den bolvormigen driehoek ABC. Wij hebben derhalve:

$$\tfrac{1}{2}\Omega + 2 \textit{ drieh. } ABC = \frac{\Omega}{4R} \times (\textit{hoek } A + \textit{hoek } B + \textit{hoek } C)$$

of, omdat in plaats van $\frac{1}{2}$ kan geſteld worden $\frac{2R}{4R}$

$$\frac{2R}{4R} \times \Omega + 2 \textit{ drieh. } ABC = \frac{\Omega}{4R} \times (\textit{hoek } A + \textit{hoek } B + \textit{hoek } C)$$

waaruit volgt:

$$2 \textit{ drieh. } ABC = \frac{\Omega}{4R} \times (\textit{hoek } A + \textit{hoek } B + \textit{hoek } C - 2R)$$

of eindelijk, na alles door twee gedeeld te hebben,

$$\textit{drieh. } ABC = \frac{\textit{hoek } A + \textit{hoek } B + \textit{hoek } C - 2R}{8R} \times \Omega.$$

§. 951. GEVOLG. Men zal hieruit gemakkelijk afleiden: dat het opperpervlak van eenen bolvormigen veelhoek, welker hoeken door A, B, C, D, *enz.* en getal van zijden door n wordt uitgedrukt, gelijk zal zijn aan

$$\frac{A + B + C + D + enz. - (n-2) \times 2R}{8R} \times \Omega.$$

V. Lemma. *Fig.* 368 en 369.

§. 952. *Wanneer de driehoek ABC, en de regthoek ABFE, welke op dezelfde basis staan en dezelfde hoogte hebben, om derzelver gemeenschappelijke basis, omwentelen; dan zal de inhoud van het ligchaam, hetwelk door de omwenteling van den driehoek ABC geboren wordt, gelijk zijn aan één-derde van den regten cilinder, welken de beweging van den regthoek ABFE voortbrengt.*

Betoog. Wanneer men onderstelt: dat, uit het toppunt C van den driehoek ABC, de loodlijn CD op de basis AB of derzelver verlengde valt; dan zullen de driehoek ADC, en de regthoek $ADCE$ de eerste eenen kegel, en de tweede eenen cilinder beschrijven, en deze ligchamen zullen den cirkel, welke CD tot straal heeft, tot de basis en de lijn AD tot hoogte hebben. De kegel gemaakt, met den driehoek ADC, zal dan (*IV. Stell.*) gelijk zijn aan één-derde van den cilinder, welke met den regthoek $ADCE$ gemaakt is. Om dezelfde reden, zal de kegel, gemaakt met den driehoek BDC, gelijk zijn aan één-derde van den cilinder, gemaakt met den regthoek $BDCF$. Telt men nu, in *Fig.* 368, de tweede dezer vergelijkingen bij de eerste, of trekt men, in *Fig.* 369, de tweede van de eerste vergelijking af; dan zal men vinden: dat het ligchaam, geboren door de omwenteling van den driehoek ABC, gelijk is aan één-derde van het ligchaam, hetwelk door de omwenteling van den regthoek $ABFE$ is voortgebragt.

§. 953. Gevolg. *Fig.* 368. De inhoud van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van den driehoek ABC, zal dan door

$$\tfrac{1}{3}\pi \times CD^2 \times AB$$

worden uitgedrukt.

VI. Lemma. *Fig.* 370.

§. 954. *Het ligchaam, dat, door de omwenteling van den driehoek ABC, om de lijn AD, ontstaat, is gelijk aan den in-*

inhoud van dien driehoek ABC, vermenigvuldigd met tweederde van den omtrek des cirkels, welke door het punt E, in het midden van de zijde BC gelegen, beschreven wordt.

Betoog. Verleng de zijde BC, tot dat zij de as AD in D ontmoet, en trek de loodlijnen CG en BH. De ligchamen, welke, door de omwenteling der driehoeken ACD en ABD, ontstaan, zijn (*Gev. V. Lemma*) respectievelijk $= \frac{1}{3}\pi \times CG^2 \times AD$ en $\frac{1}{3}\pi \times BH^2 \times AD$ en het verschil dezer ligchamen, hetwelk klaarblijkelijk gelijk is aan het ligchaam, dat door den driehoek ABC wordt voortgebragt, zal $= \frac{1}{3}\pi \times (CG^2 - BH^2) \times AD$ zijn, uitdrukking, waarvoor (*II. Lemma III. B.*) $\frac{1}{3}\pi \times (CG + BH) \times (CG - BH) \times AD$ kan geschreven worden. Nu is (BI evenwijdig aan AD zijnde,) $CG + BH = 2EF$ en $CG - BH = CI$; derhalve wordt de inhoud van het gezegde ligchaam gelijk aan $\frac{2}{3}\pi \times EF \times CI \times AD$. Men trekke nu de loodlijn AK op CD; dan zijn de driehoeken ADK en CBI, klaarblijkelijk gelijkvormig, en men heeft derhalve de evenredigheid

$CI : BC = AK : AD$ en $AD = \frac{BC \times AK}{CI}$. Stelt men dan deze waarde van AD, in de voorgaande uitdrukking, voor den inhoud van het ligchaam; dan verkrijgt men voor denzelven $\frac{2}{3}\pi \times BC \times AK \times EF$, dat is, (omdat $BC \times AK$ gelijk tweemaal inhoud driehoek ABC is, en $EF \times \pi$ gelijk de helft van den omtrek van EF,) gelijk aan $\frac{2}{3}$ *omtr.* $EF \times$ *drieh.* ABC.

§. 955. Gevolg. *Fig.* 371. Wanneer $AC = AB$ is; dan valt het punt K in E, en de gelijkvormige driehoeken AFE en CIB, geven de evenredigheid $EF : AE = BI : BC$; derhalve $BC = AE \times BI : EF$, en stelt men dan deze waarde van BC in de uitdrukking . . . $\frac{1}{3}$ *omtr.* $EF \times AE \times BC$ voor den inhoud van het ligchaam; dan verkrijgt men voor den inhoud (omdat *omtr.* $EF = 2\pi \times EF$ is,) de eenvoudige uitdrukking $\frac{2}{3}\pi \times AE^2 \times BI = \frac{2}{3}\pi \times AE^2 \times GH$.

§. 956. Aanmerking. Hetzelfde zal nog waarheid zijn, wanneer BC evenwijdig aan AD loopt.

VII. Lemma. *Fig.* 359.

§. 957. *Wanneer een regelmatige veelhoek $ABCDEFG$, een even aantal zijden hebbende, om ééne zijner middellijnen AG omwentelt; dan zal de inhoud van het ligchaam, hetwelk (M het middelpunt zijnde,) door de omwenteling van den veelhoe-*

hoekigen sector BCDEM ontstaat, gelijk zijn aan het oppervlak, hetwelk door BCDE geboren wordt, vermenigvuldigd met één-derde van de apothema PM des veelhoeks. En het ligchaam, dat door de omwenteling van den geheelen veelhoek ontstaat, zal gelijk zijn aan het oppervlak van dit ligchaam, vermenigvuldigd met één-derde van de apothema.

Betoog. Want het ligchaam, dat door de omwenteling van den veelhoekigen sector $BCDEM$ ontstaat, kan begrepen worden zamengesteld te zijn, uit de omwentelings ligchamen, welke, door de omwenteling van de middelpunts driehoeken BCM, CDM en DEM ontstaan: nu zijn (*VI. Lemma*) deze ligchamen respectievelijk gelijk aan

$$\text{het ligch. van } BCM = \tfrac{2}{3}\pi \times PM^2 \times HI$$
$$\text{het ligch. van } CDM = \tfrac{2}{3}\pi \times PM^2 \times IK$$
$$\text{het ligch. van } DEM = \tfrac{2}{3}\pi \times PM^2 \times HL$$

gevolgelijk zal de som dezer ligchamen, dat is het ligchaam, door den veelhoekigen sector $BCDEM$ voortgebragt, gelijk zijn aan $\frac{2}{3}\pi \times PM^2 \times HL$.

Nu is (*IV. Lemma*) het oppervlak door $BCDE$ beschreven, gelijk aan *omtr.* $PM \times HL$; of, (omdat, in plaats van *omtr.* PM kan geschreven worden $2\pi \times PM$,). gelijk aan $2\pi \times PM \times HL$. Men zal derhalve hebben

$$\frac{\text{Inh. ligch. } BCDEM}{\text{oppervl. } BCDE} = \frac{\frac{2}{3}\pi \times PM^2 \times HL}{2\pi \times PM \times HL} = \tfrac{1}{3} PM$$

en diensvolgens

$$\text{Inh. ligch. } BCDEM = \text{oppervl. } BCDE \times \tfrac{1}{3} PM.$$

Men ziet nu, zonder verder bewijs: dat de inhoud van het ligchaam, door den veelhoek $ABCDEFG$ voortgebragt, gelijk is aan het oppervlak van dit ligchaam, vermenigvuldigd met één-derde van de apothema des veelhoeks.

XVIII. Stelling. *Fig.* 362.

§. 958. *Het ligchaam, hetwelk, door de omwenteling van den cirkel-sector ABM, om zijne straal MB, ontstaat, is gelijk aan het oppervlak, hetwelk door den boog AB beschreven wordt, vermenigvuldigd met één-derde van de straal van dien sector. — En de inhoud van eenen bol is gelijk aan deszelfs oppervlak, vermenigvuldigd met één-derde van zijne straal.*

Be-

Betoog. Wanneer het ligchaam, hetwelk, door de omwenteling van den ſector *ABM*, geboren wordt, niet gelijk is aan het oppervlak, voortgebragt door den boog *AB*, vermenigvuldigd met één-derde van de ſtraal *BM*; dan zal dit product gelijk zijn aan een ligchaam, dat door de omwenteling van eenen grooteren ſector *EFM*, of door eenen kleineren ſector *QRM* wordt voortgebragt.

Stellen wij: 1° dit product gelijk aan het ligchaam, voortgebragt door den ſector *EFM*, met den ſector *ABM*, in hetzelfde middelpunt *M* geplaatst; dan zal men (*III. Lemma VI. B.*) in den grooteren boog *EF* eenen regelmatigen veelhoek *EIHGF* kunnen beſchrijven, welker zijden den boog *AB* niet aanraken, en dan zal het ligchaam, door de omwenteling van den veelhoekigen ſector *FGHIEM* voortgebragt, gelijk zijn aan het oppervlak door *EIHGF* beſchreven, vermenigvuldigd met één-derde van *MK*. Nu is *oppervl.* $EIHGF >$ *oppervl.* AB en $\frac{1}{3}KM > \frac{1}{3}BM$; derhalve *oppervl.* $EIHGF \times \frac{1}{3}KM >$ *oppervl.* $AB \times \frac{1}{3}BM$; dat is, het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van den veelhoekigen ſector *EIHGFM*, is grooter dan het *oppervl.* $AB \times \frac{1}{3}BM$: maar nu is het ligchaam, door den ſector *EFM* voortgebragt, grooter dan het ligchaam, door den veelhoek *EIHGFM* geboren: derhalve zal (*VI. Ax.*) het ligchaam, voortgebragt door den ſector *EFM* grooter zijn dan het oppervlak, door den boog *AB* beſchreven, vermenigvuldigd met één-derde van *BM*.

Men zal, op dezelfde wijze, betoogen: dat het ligchaam, door de omwenteling van den ſector *RQM* voortgebragt, kleiner is dan het oppervlak, door den boog *AB* beſchreven, vermenigvuldigd met één-derde van *BM*.

De inhoud van het ligchaam, door omwenteling van den ſector *ABM* geboren, zal dan gelijk zijn aan het oppervlak, dat de boog *AB* beſchrijft, vermenigvuldigd met één-derde van de ſtraal *BM*.

Hetzelfde zal gelden van het ligchaam, hetwelk, door de omwenteling van den ſector *APM*, beſchreven wordt, waaruit dan onmiddelijk volgt: dat de inhoud van den geheelen bol gelijk is aan deszelfs oppervlak, vermenigvuldigd met één-derde van de ſtraal.

§. 959. Aanmerking. *Fig.* 366. Men zal nu ook gemakkelijk betoogen kunnen: *dat de inhoud van eenen drievlakkigen bolvormigen ſector ABCM gelijk is aan den inhoud van den bolvormigen driehoek ABC, vermenigvuldigd met één-derde van de ſtraal AM.*

§. 960. I. Gevolg. Omdat (*IV. Gev. XIV. Stell.*) het oppervlak van den bol gelijk is aan viermaal zijnen grooten cirkel, *zal de inhoud*

houd van den bol gelijk zijn aan den inhoud van den grooten cirkel, vermenigvuldigd met vier-derde van de ſtraal of met twee-derde van de middellijn van den bol.

§. 961. II. Gevolg. *De inhoud van eenen bol is dan gelijk aan twee-derde van eenen regten cirkelvormigen cilinder, welks baſis en hoogte reſpectievelijk aan den grooten cirkel en aan de middellijn van den bol gelijk zijn.*

§. 962. III. Gevolg. *Indien men dan eenen kegel, bol en cilinder, zoodanig aanneemt, dat de baſes van den kegel en cilinder gelijk zijn aan den grooten cirkel van den bol, en hunne hoogte gelijk aan deszelfs middellijn; dan zullen de inhouden dezer ligchamen tot elkander ſtaan, als de getallen* één, twee *en* drie.

§. 963. IV. Gevolg. *Fig.* 362. Omdat (*XIII. Stell.*) het oppervlak, door de omwenteling van den boog AB voortgebragt, gelijk is aan *omtr.* $BM \times BD$, zal de inhoud van het ligchaam, dat door de omwenteling van den ſector ABM ontſtaat, gelijk zijn aan *omtr.* $BM \times BD \times \frac{1}{3} BM$; maar *omtr.* BM is gelijk $2\pi \times BM$; derhalve zal de inhoud van dit ligchaam gelijk zijn aan $\frac{2}{3}\pi \times BM^2 \times BD$.

§. 964. V. Gevolg. Stellen wij de ſtraal van eenen bol $= R$; dan is (zie *Bijv. VI. B.*) de inhoud van den cirkel, welke met die ſtraal beſchreven is $= \pi \times R^2$; het oppervlak van den bol is derhalve (*IV. Gev. XIV. Stell.*) $= 4\pi R^2$, en de inhoud (*XVIII. Stell.*) $= 4\pi \times R^2 \times \frac{1}{3} R = 1\frac{1}{3}\pi \times R^3$. (Zijnde $\pi = 3{,}14159265$ *enz.*) en dit zijn de formulen, waardoor (de ſtraal gegeven zijnde,) het oppervlak en de inhoud van den bol zullen gevonden worden.

§. 965. VI. Gevolg. Dat alle bollen gelijkvormige figuren zijn, blijkt (wanneer men de middelpunten dezer bollen in elkander plaatst,) uit de *XXII. Bep. XI. B.* Noemen wij nu de ſtralen van twee bollen R en r; dan worden hunne oppervlakten door $4\pi R^2$ en $4\pi r^2$, en hunne inhouden door $1\frac{1}{3}\pi R^3$ en $1\frac{1}{3}\pi r^3$ uitgedrukt; maar nu is

$$4\pi R^2 : 4\pi r^2 = R^2 : r^2$$
$$1\tfrac{1}{3}\pi R^3 : 1\tfrac{1}{3}\pi r^3 = R^3 : r^3$$

De oppervlakken der bollen ſtaan dan tot elkander, als de vierkanten hunner ſtralen en derzelver inhouden als de cuben van diezelfde ſtralen. Hetwelk met de hoofd-eigenſchap der gelijkvormige ligchamen, zie *XXXI. Stell. XI. B.* volkomen inſtemt.

§. 966. Aanmerking. De waarheden, welke in de XIII, XIV en XVIII Stellingen betoogd zijn, kunnen, hoe zeer langs eenen betoogtrant, welke ſommigen voor minder ſtreng houden, uit het IV en

VIII.

VIII. *Lemma*, aldus worden afgeleid. Wanneer men, *Fig.* 359, de zijden van den veelhoek $ABCDEFG$ onophoudelijk verdubbelt; dan zullen de omtrekken der volgende veelhoeken (*II. Lemma IV. B.*) nader komen aan den omtrek den cirkel, waarin zij beschreven zijn: de oppervlakken der ligchamen, door de omwenteling dezer veelhoeken voortgebragt, nader aan het oppervlak van den bol, waarin zij zijn geplaatst; de inhouden der volgende ligchamen zullen dan ook minder van den inhoud van den bol verschillen, terwijl de apothema PM nader aan de straal van den veelhoek komen zal. Indien dan de zijden van den veelhoek kleiner genomen worden, dan eenige gegevene lijn; dan zal het oppervlak van den bol gelijk worden aan den omtrek van $PM \times AG = omtr. AM \times AG$, en de inhoud van den bol zal gelijk zijn aan $\frac{2}{3} cirk. AM \times AG$.

XIX. Stelling. *Fig.* 372.

§. 967. *Wanneer een cirkel-segment EKC, hetwelk geheel aan dezelfde zijde van de middellijn AB van eenen cirkel gelegen is, om die middellijn omwentelt; dan is de inhoud van het ligchaam, hetwelk daardoor geboren wordt, gelijk aan* $\frac{1}{6}\pi \times CE^2 \times DF$, *(zijnde* π *de verhouding van de middellijn op den omtrek.)*

Betoog. De ligchamen, welke door de omwenteling der sectors AEM en ACM worden voortgebragt, zijn (*IV. Gev. XVIII. Stell.*) elk gelijk aan $\frac{2}{3}\pi \times CM^2 \times AF$ en $\frac{2}{3}\pi \times CM^2 \times AD$; de inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van den sector ECM voortgebragt, is klaarblijkelijk het onderscheid dezer ligchamen en gelijk aan $\frac{2}{3}\pi \times CM^2 \times DF$. Nu is wederom (*Gev. VII. Lemma*) de inhoud van het ligchaam door de omwenteling van den driehoek ECM geboren, gelijk aan $\frac{2}{3}\pi \times MI^2 \times DF$, (zijnde MI de loodlijn, welke, uit het middelpunt M, op de koorde EC valt,) en, wanneer men den inhoud van dit laatste ligchaam van dien van het voorgaande aftrekt, zal men den inhoud van het ligchaam, dat door de omwenteling van den sector EKC geboren wordt, overhouden, en die inhoud zal gelijk zijn aan $\frac{2}{3}\pi \times (CM^2 - MI^2) \times DF$: maar (*XVI. Stell. III. B.*) $CM^2 - MI^2 = CI^2 = \frac{1}{4}CE^2$ zijnde, zal deze inhoud door $\frac{2}{3}\pi \times \frac{1}{4}CE^2 \times DF = \frac{1}{6}\pi \times CE^2 \times DF$ worden uitgedrukt.

XX.

XX. STELLING. *Fig.* 372.

§. 968. *De ligchamelijke inhoud van elke bolvormige schijf $ECGH$, begrepen tusschen twee evenwijdige cirkels, (cirk. CD en cirk. EF,) is gelijk aan de halve som van het grond- en bovenvlak, vermenigvuldigd met de hoogte, of as, DF, van deze schijf, te zamen genomen met den inhoud van den bol, welke deze as, of hoogte, DF, tot middellijn heeft.*

BETOOG. Het blijkt, uit de figuur: dat de inhoud van de bolvormige schijf $ECGH$ gelijk is aan den afgeknotten kegel, welke door de omwenteling van het trapezium $CDFE$ ontstaat, opgeteld met het ligchaam, dat door de omwenteling van den sector EKC geboren wordt. De inhoud des afgeknotten kegels is (*VII. Stell.*) gelijk aan $\frac{1}{3}\pi \times (EF^2 + EF \times CD + CD^2) \times DF$, en de inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van den sector EKC voortgebragt, is (*XIX. St.*) gelijk aan $\frac{1}{6}\pi \times EC^2 \times DF$; derhalve zal de inhoud der bolvormige schijf $ECGH$ worden uitgedrukt door

$$\tfrac{1}{6}\pi \times (2\,EF^2 + 2\,EF \times CD + 2\,CD^2 + EC^2) \times DF \;.\;.\; (a)$$

Men trekke nu de loodlijn CL op EF; dan zal (*XVI. Stell. III. B.*) $EC^2 = EL^2 + CL^2 = EL^2 + DF^2$ zijn: maar nu is $EL = EF - LF = EF - CD$; derhalve $EL^2 = (EF - CD)^2 = EF^2 - 2\,EF \times CD + CD^2$ en $CE^2 = EF^2 + CD^2 + DF^2 - 2\,EF \times CD$. Stelt men nu deze waarde van CE^2, in de zoo even gevondene uitdrukking (a); dan zal men, voor den inhoud der bolvormige schijf, vinden:

$$\tfrac{1}{6}\pi \times (3\,EF^2 + 3\,CD^2 + DF^2) \times DF$$

Deze uitdrukking kan nu, door dezelve in twee deelen te scheiden, onder de volgende gedaante gesteld worden:

$$\textit{Inhoud} = \left\{ \frac{\pi \times EF^2 + \pi \times CD^2}{2} \right\} \times DF + \tfrac{1}{6}\pi \times DF^3$$

Nu zijn $\pi \times EF^2$ en $\pi \times CD^2$ de inhouden der cirkels, met EF en CD, als stralen, beschreven: de uitdrukking $\frac{1}{2}(\pi \times EF^2 + \pi \times CD^2) \times DF$ is dan de halve som van het onder en bovenvlak, vermenigvuldigd met de hoogte; en de term $\frac{1}{6}\pi \times DF^3$ is, (zie *I. Gev. XVIII. Stell.*) de inhoud van den bol, welke de hoogte DF tot middellijn heeft, en hieruit blijkt de waarheid van het gestelde.

§. 969. GEVOLG. *Fig.* 372. Wanneer het bovenblak nader aan het aspunt A komt, wordt het steeds kleiner en verdwijnt, wanneer hetzelve door A gaat: in dit geval is $CD = 0$; de inhoud van het bolvormig segment AEH wordt dan

$$Inh.\ EAH = \tfrac{1}{4}\pi EF^2 \times AF + \tfrac{1}{6}\pi \times AF^3$$

De inhoud van een bolvormig ſegment is dan gelijk aan de ſom van de helft van den cilinder, welke met dit ſegment dezelfde baſis en dezelfde hoogte heeft, opgeteld met den bol, welks middellijn gelijk is aan de hoogte van dit ſegment.

BIJVOEGSEL.

§. 970. Wij zullen de voornaamſte waarheden, rakende de regte cilinders, kegels en bollen, in dit boek behandeld, ten einde dezelve beter in het geheugen te prenten, hier nederſtellen.

§. 971. 1° Zij R de ſtraal van de baſis van eenen cilinder en H zijne hoogte; dan zal men hebben:

1° *Inhoud cilinder* $= \pi R^2 H$.

2° *Buitenſte oppervl.* $= 2\pi RH$.

3° *Som van het grondvlak, bovenvl. en oppervl.* $= 2\pi R \times (H + R)$.

§. 972. 2° Zij R de ſtraal van de baſis van eenen regten cirkelvormigen kegel en H zijne hoogte; dan is:

1° *Inhoud kegel* $= \tfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

2° *Buitenſte oppervl.* $= \pi R \times \sqrt{(R^2 + H^2)}$.

3° *Geheel oppervl.* $\pi R \times \left\{R + \sqrt{(R^2 + H^2)}\right\}$

§. 973. 3° Laten R en r de ſtralen van de grond- en bovenvlakken eens afgeknotten kegels verbeelden en H zijne hoogte; dan is:

1° *Inh. afg. keg.* $= \tfrac{1}{3}\pi (R^2 + Rr + r^2) \times H$.

2° *Oppervl.* $= \pi \times (R + r) \times \sqrt{\left\{H^2 + (R - r)^2\right\}}$

§. 974. 4° Zij R de ſtraal van eenen bol en M zijn middellijn; dan is:

1° *Inhoud bol* $= 1\tfrac{1}{3}\pi \times R^3 = \tfrac{1}{6}\pi M^3$.

2° *Oppervlak* $= 4\pi \times R^2 = \pi M^2$

§. 975. 5° Zijn R en r de ſtralen van het grond- en bovenvlak van eene bolvormige ſchijf, en H de hoogte; dan is:

Inhoud $= \tfrac{1}{2}\pi (R^2 + r^2) \times H + \tfrac{1}{6}\pi H^3$.

§. 976. 6° En wanneer $r = 0$ is; dan wordt

$\tfrac{1}{2}\pi R^2 H + \tfrac{1}{6}\pi H^3$ of $\tfrac{1}{2}\pi H \times (R^2 + \tfrac{1}{3}H^2)$

de inhoud van een bolvormig ſegment, welks baſis R tot ſtraal heeft, en waarvan de hoogte gelijk H is. enz.

*

DER-

DERTIENDE BOEK.

Over de Meetkunst der Drievlakkige Hoeken, bekend onder den naam van Sphærische of Bolvormige Driehoeksmeting.

INLEIDING.

§. 977. Het is, uit de XII en XV. Bepalingen van het X. Boek gebleken, wat men door drie- en veelvlakkige hoeken verstaat, en, in de XXVI, XXVII, XXVIII, XXXII, XXXIII, XXXIV, XXXV, XXXVI, XXXVII en XXXVIII. Stellingen van ditzelfde Boek, zijn reeds de voornaamste eigenschappen dezer hoeken betoogd. In dit Boek zullen wij dezelve opzettelijk, voornamelijk met betrekking tot den bol, in nadere overweging nemen.

§. 978. Gelijk (*XVII en XVIII. Stell. V. B.*) een cirkel, wiens middelpunt, in het hoekpunt van eenen regtlijnigen hoek geplaatst is, tot eene betrekkelijke maat van dien hoek verstrekt, *zoo verstrekt ook elke bol, wiens middelpunt, in het hoekpunt van eenen drie of veelvlakkigen hoek geplaatst is, tot eene betrekkelijke maat, zoowel van de onbepaalde ruimte van dien hoek, als van alle de onderscheidene regtlijnige hoeken, welke in de zamenstelling of constructie van zulk eenen drie of veelvlakkigen hoek voorkomen*; zoodat, indien de bol, onder de ligchamen, denzelfden rang bekleedt, als de cirkel, onder de vlakke figuren, hij ook, in de meetkunst der veelvlakkige hoeken, en bijgevolg ook, in de meetkunst der veelvlakkige ligchamen, dezelfde diensten bewijst, als de cirkel, in de meetkunst der hoeken en der regtlijnige figuren.

§. 979. Laat, om zulks nader aan het verstand te brengen, *Fig.* 373, *ABCM* een drievlakkige hoek zijn, bepaald zijnde door de onbepaalde regtlijnige hoeken, *AMB*, *AMC* en *BMC*, welke, volgens derzelver zijden, *AM*, *BM* en *CM*, aan elkander sluiten, en welker toppunten in hetzelfde punt *M* (het toppunt van den drievlakkigen hoek,) verëenigd zijn. Wanneer men dan eenen bol, eene straal naar welgevallen hebbende, met zijn middelpunt, in het hoekpunt van den drievlakkigen hoek plaatst; dan zullen zijne zijden of faces, als platte vlakken, welke door het middelpunt van den bol gaan, (*VIII. Stell. XII. B.*) zijn oppervlak, volgens het beloop van bogen van groote cirkels, fnijden, (hoek AMB volgens den boog EF, hoek AMC volgens den boog DE en hoek BMC volgens den boog DF,) en 'er zal, op het oppervlak van den bol, een bolvormige of fphærifche driehoek DEF ontftaan. De bogen DE, EF en DF, waardoor deze driehoek bepaald wordt, zijn de zijden van dien driehoek en de hoeken, welke de raaklijnen dezer bogen aan de hoekpunten maken, (*XV. Bep. XII. B.*) zijn de ftandhoeken der zijvlakken van den drievlakkigen hoek. *Nu zijn de zijden van den bolvormigen driehoek de betrekkelijke maten van de hoeken, welke de ribben van den drievlakkigen hoek, twee aan twee genomen, met elkander, in het hoekpunt maken, en de hoeken van den bolvormigen driehoek kunnen voor de ftandhoeken der zijden, of faces, genomen worden.*

§. 980. *En dit alles zal, op dezelfde wijze, plaats hebben, hoe groot of klein de ftraal van den bol mogt genomen worden.* Want, indien men Md tot ftraal neemt; dan zal de bolvormige driehoek def, welke alsdan ontftaat, wel grooter zijden hebben; doch de betrekking van deze zijden tot den geheelen omtrek, of 360°, zal dezelfde zijn, als de betrekking van de zijden des driehoeks DEF, tot den omtrek van den grooten cirkel van den bol, welke MD tot ftraal heeft; zoodat (DE, EF, DF) :: (de, ef, df) zal zijn. Dan, hoezeer ook de zijden grooter of kleiner gemaakt worden, blijven nogtans de hoeken (zie *XIV. Bep. X. B.* en *XXIV. Stell. X. B.*) gelijk; namelijk hoek $d =$ hoek D; hoek $e =$ hoek E, en hoek $f =$ hoek F.

§. 981. *De oppervlakken der bolvormige driehoeken verhouden zich ook tot de geheele oppervlakken van de bollen, tot welke zij behooren, gelijk de onbepaalde ruimte, welke tusfchen de zijden van eenen drievlakkigen hoek begrepen is, tot de onbepaalde ruimte, welke aan alle kanten, om het punt M, is uitgeftrekt.* Want, ftellen wij het oppervlak van den bol, gemaakt met de ftraal MD, gelijk Ω, en het oppervlak van den bol, gemaakt met de ftraal Md, gelijk ω; dan zal (*XVII. Stell. XII. B.*) *drieh.* $DEF = (\text{hoek } D + \text{hoek } E + \text{hoek } F - 2R) \times \Omega : 8R$, en *drieh.* $def = (\text{hoek } d + \text{hoek } e + \text{hoek } f - 2R) \times \omega : 8R$ zijn; nu is, volgens het bewezene, hoek $d =$ hoek D, enz. derhalve zal

$$\text{drieh. } DEF : \text{drieh. } def = \Omega : \omega$$

zijn.

§. 982. Herinnert men zich het bewezene in *XVIII. Stell. XII. B.*, dan

dan zal men zien: *dat de drievlakkige bolvormige sectors DEFM en defM tot de inhouden der bollen, tot welke zij behooren, in dezelfde reden staan, als de inhouden der bolvormige driehoeken DEF en def tot de oppervlakken der bollen, op welke zij geplaatst zijn, en dat gevolgelijk deze sectors de betrekkelijke hoegrootheid der drievlakkige hoeken uitdrukken*, zoodat de bol aan de drievlakkige hoeken dezelfde diensten bewijst, als de cirkel aan de regtlijnige hoeken.

§. 983. *Hetgeen van de drievlakkige hoeken gezegd is, geldt ook van de veelvlakkige hoeken, in het algemeen;* doch, wij bepalen ons, in dit boek, alleenlijk bij de beschouwing der drievlakkige hoeken.

§. 984. De naauwe overeënkomst, welke 'er tusschen de drievlakkige hoeken en de bolvormige driehoeken, waardoor deze hoeken gemeten worden, bestaat, maakt, dat men dat gedeelte der Meetkunst, gewoonlijk *Sphærische Driehoeksmeting*, (en ongeschikter *Klootsche Driehoeksmeting*,) genoemd, op tweederlei wijze beschouwen kan: 1° als de *Meetkunst der drievlakkige hoeken*, 2° als de *Meetkunst der bolvormige driehoeken*, welke door de drievlakkige hoeken van het oppervlak van eenen bol, wiens middelpunt in het hoekpunt van den drievlakkigen hoek geplaatst is, worden afgesneden. De eerste wijze van beschouwen is, in velerlei opzigten, algemeener en duidelijker: dan, daar het algemeen gebruik aan de tweede de voorkeur gegeven heeft, (misschien, omdat de theorie der drievlakkige hoeken daardoor met de platte driehoeksmeting eene meer in het oog loopende overeënstemming verkrijgt,) zullen wij ons aan de tweede wijze van beschouwing houden, zonder nogtans de eerste uit het oog te verliezen.

§. 985. Het onderstaande tafeltje zal kunnen dienen, om de overeënkomst tusschen de drievlakkige hoeken en de bolvormige driehoeken beter in het geheugen te prenten.

De	*drievlakkige hoek*	*stemt overeën met*	*den bolvormigen driehoek.*
	hoeken van de ribben		*de zijden des driehoeks.*
	standhoeken der faces of zijden		*zijne hoeken.*

§. 986. I. Bepaling. De *Bolvormige Driehoeksmeting*, (*Sphærische Trigonometrie*) of de *Meetkunst der drievlakkige hoeken*, is dat bijzonder gedeelte der Meetkunst, hetwelk, door middel der Goniometrische lijnen, de betrekking van de zijden eens bolvormigen driehoeks tot zijne hoeken leert kennen, om alzoo, wanneer éene zijde en twee hoeken, of twee

twee zijden en éénen hoek, of de drie zijden, of de drie hoeken gegeven zijn, de regels, ter bepaling van deszelfs andere onbekende zijden en hoeken, uit deze betrekkingen, te leeren afleiden.

§. 987. Aanmerking. Eer wij nu tot de beschouwing van de regels der bolvormige driehoeksmeting overgaan, zal het noodig zijn, dat wij vooraf eenige algemeene eigenschappen dezer driehoeken betoogen. Wij zullen in het vervolg dikwijls het woord driehoek in plaats van bolvormigen driehoek gebruiken.

Algemeene Grond-eigenschappen der Bolvormige Driehoeken.

§. 988. II. Bepaling. *Fig.* 374. Wanneer men twee zijden, *AB* en *AC*, van eenen bolvormigen driehoek op het oppervlak van den bol verlengt, (hetgeen geschiedt, door altijd in dezelfde vlakken van deze bogen of zijden te blijven,) dan ontmoeten deze verlengde zijden elkander altijd in een punt *D*, hetwelk, met het hoekpunt *A* veréénigd zijnde, (omdat twee groote cirkels van den bol elkander volgens eene middellijn snijden,) in eene middellijn van den bol zal liggen. 'Er ontstaan dan twee driehoeken, *ABC* en *BDC*, die eene gemeenschappelijke zijde *BC* hebben. *De hoeken A en D, over die gemeenschappelijke zijde staande, zijn, als bepalende den standhoek van dezelfde vlakken, aan elkander gelijk. Voorts zijn de zijden van den hoek A, in den eenen driehoek ABC, de supplementen van de zijden van den hoek D, in den anderen driehoek BCD; en de hoeken, welke, in den eenen driehoek ABC, aan de gemeenschappelijke zijde BC liggen, zijn de supplementen van de hoeken, welke, in den anderen driehoek BCD, aan diezelfde zijde BC gelegen zijn.* Men kan de driehoek *BCD* de *supplements driehoek* van den driehoek *ABC* noemen, en, omgekeerd, de driehoek *ABC* de *supplements driehoek* van den driehoek *BCD*. *Het is klaarblijkelijk, dat elke bolvormige driehoek drie zulke supplements driehoeken heeft.*

§. 989. Aanmerking. *Fig.* 366. *Wanneer men al de zijden van eenen bolvormigen driehoek, op deze wijze, verlengt; dan verkrijgt men figuur 366, en 'er ontstaan alsdan op den bol acht bolvormige drie-*

driehoeken, waarvan elk tweetal tegenoverstaande, (XVI. St. XII. B.) bij oppositie, gelijk zijn.

I. Stelling. *Fig.* 375.

§. 990. *Wanneer men, uit het hoekpunt A van eenen bolvormigen driehoek ABC, als aspunt, met eene straal, gelijk aan de koorde van een quadrant, op het oppervlak van den bol, eenen cirkelboog DE beschrijft, welke, tusschen de beenen van den hoek A begrepen is; dan zal deze cirkelboog den bolvormigen hoek A meten.*

Betoog. Laat *M* het middelpunt van den bol zijn, en de boog $AE = 90^\circ$ genomen worden. Trek de stralen *AM*, *DM* en *ME*: indien men dan het quadrant *AME* om de straal *AM* laat omwentelen; dan beschrijft (*Gev. V. Stell. X. B.*) de straal *ME* een vlak, dat loodregt op *AM* staat, dat is, eenen grooten cirkel van den bol; en het punt *E*, dat altijd in het oppervlak van den bol blijft, zal denzelfden boog *DE* beschrijven, welke, met de koorde *AE*, uit *A* als pool, beschreven wordt. Nu staan *ME* en *MD* regthoekig op *AM*; de hoek *EMD* is dan de standhoek der groote cirkels *AEM* en *ADM*: maar nu wordt deze hoek gemeten door den boog *DE*, welke uit *M*, als middelpunt beschreven is: die boog is dan ook de maat van den bolvormigen hoek *A*.

§. 991. Gevolg. *Fig.* 375. Vermits de hoeken *AMD* en *AME* regt zijn, *zal de boog, welke, uit het hoekpunt van eenen bolvormigen hoek, met de koorde van een quadrant, op het oppervlak, beschreven wordt, de beenen van dien hoek regthoekig snijden.*

II. Stelling. *Fig.* 376.

§. 992. *Wanneer men, uit twee punten A en B van eenen grooten cirkel, twee groote cirkelbogen, AP en BP, loodregt oprigt; dan zullen deze elkander in het punt P, dat de pool, of het aspunt, van den boog AB is, ontmoeten.*

Betoog. Want, omdat deze bogen tot groote cirkels behooren, gaan hunne vlakken door het middelpunt van den bol, en staan loodregt op het vlak van den cirkel *AB*: derzelver doorsnede *PM* staat dan ook (*XI. Stell. X. B.*) loodregt op het vlak *AB*, en de lijn

PM is derhalve *(VII. Bep. XII. B.)* de as van den cirkel *AB*, en het punt *P* is gevolgelijk deszelfs aspunt.

§. 993. I. Gevolg. *Fig.* 376. *De hoek P en de boog AB hebben (I. Stell.) hetzelfde getal graden, en de bogen AP en BP zijn quadranten.*

§. 994. II. Gevolg. *Fig.* 376. *Wanneer* $AB = 90^\circ$ *is; dan zijn al de zijden van den driehoek ABP quadranten, en zulk een bolvormige driehoek heeft altijd drie regte hoeken. Zijn oppervlak is gelijk aan één-achtste gedeelte van het oppervlak van den bol.*

III. Stelling. *Fig.* 377.

§. 995. *Wanneer men, uit de hoekpunten A, B en C, van eenen bolvormigen driehoek ABC, als aspunten, met eene straal, gelijk aan de koorde van het quadrant van den grooten cirkel, op het oppervlak van den bol, drie groote cirkelbogen bc, ac en ab beschrijft; dan zal 'er, op het oppervlak van den bol, eenen anderen bolvormigen driehoek abc ontstaan, welke de eigenschap zal hebben, dat elke zijner zijden het supplement zal zijn van den hoek, uit welks hoekpunt, als pool, die zijde beschreven is: namelijk*

$$\text{de zijde} \left\{ \begin{matrix} ab \\ bc \\ ac \end{matrix} \right\} \text{het supplement van den hoek} \left\{ \begin{matrix} C \\ A \\ B \end{matrix} \right\}$$

en, omgekeerd, zal ook

$$\text{de zijde} \left\{ \begin{matrix} AB \\ BC \\ AC \end{matrix} \right\} \text{het supplement van den hoek} \left\{ \begin{matrix} c \\ a \\ b \end{matrix} \right\}$$

zijn. (Vergelijk de XXXVIII. *Stell.* X. *B.*, welke, in andere woorden, hetzelfde zegt.)

Betoog. Men verlenge de zijden *AB*, *BC* en *AC*, tot dat zij de zijden van den bolvormigen driehoek *abc*, in *G* en *H*, in *E* en *I*, en in *D* en *F* ontmoeten; dan is *(I. Stell.)* $DE =$ hoek *C*; $HI =$ hoek *B*; en $FG =$ hoek *A*; en, volgens *Gev. I. Stell.*, zijn de bolvormige hoeken, aan de punten *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, regt. De punten *a*, *b* en *c*, zijn dan *(II. Stell.)* de polen van de bogen *BC*, *AC* en *AB*, en de bogen *aE*, *aI*, *bD*, *bF*, *cG* en *cH*, zijn *(I. Gev. II. Stell.)* quadranten. Om deze reden, is dan $aE + bD = 180^\circ$. Nu is, $aE + bD = aD + DE + bE + ED = ab + DE$; derhalve is ook

ook $ab + DE = 180^\circ$; maar $DE =$ hoek C zijnde, is $ab +$ hoek $C = 180^\circ$, en de boog ab is gevolgelijk het supplement van den hoek C. Om dezelfde reden, is ac het supplement van den hoek B, en bc het supplement van den hoek A.

Volgens de eerste stelling, is boog $IE =$ hoek a; en, omdat (*II. Stell.*) de bogen BI en CE quadranten zijn, is $IB + CE = IC + CB + BE + BC = IE + BC = 180^\circ$, of hoek $a + BC = 180^\circ$; de boog BC is alzoo het supplement van den hoek a. Om dezelfde reden, is boog $AC =$ suppl. hoek b, en boog $AB =$ suppl. hoek c.

§. 996. III. Bepaling. *Fig.* 377. De driehoek abc wordt de *aspunts driehoek* van den driehoek ABC genoemd, en de driehoek ABC de *aspunts driehoek* van den driehoek abc.

§. 997. Aanmerking. *Elke bolvormige driehoek heeft zijnen aspunts driehoek, welke laatste wederom de aspunts driehoek van den eersten is. Wanneer al de zijden van den bolvormigen driehoek quadranten zijn; dan is zijn aspunts driehoek van denzelven niet onderscheiden.*

IV. Stelling. *Fig.* 375.

§. 998. *Elke zijde AD van eenen bolvormigen driehoek ADE, is kleiner dan de som der twee andere zijden; dat is, kleiner dan $AE + DE$.*

Betoog. Want aangezien deze zijden de maten van de zijvlakken van den drievlakkigen hoek $ADEM$ zijn, en (*XXXII. Stell. X. B.*) de zijde AMD kleiner is dan de som der twee andere zijden, AME en DME, zoo zal ook $AD < AE + DE$ moeten zijn.

V. Stelling. *Fig.* 374.

§. 999. *De som van al de zijden van eenen bolvormigen driehoek, is altijd minder dan vier quadranten; dat is, minder dan de omtrek van den grooten cirkel van den bol, tot welken deze bolvormige driehoek behoort. Dat is: $AB + BC + AC < 4R$.*

Betoog. Verleng de zijden AC en AB tot in D: dan is (*IV. St.*) $BC < CD + BD$; tel hier bij $AC + AB = AC + AB$; dan zal (*IX. Ax.*) $AB + AC + BC < AC + CD + AB + BD$ of $< 4R$ zijn.

§. 1000. Gevolg. *De som van de zijden van alle mogelijke bolvormige driehoeken is dan grooter dan 0° en kleiner dan 360°.*

VI. STELLING. *Fig.* 377.

§. 1001. *De ſom van al de hoeken van eenen bolvormigen driehoek abc, is grooter dan twee, en kleiner dan zes regte hoeken.*

BETOOG. Men make, volgens de *III. Stell.* zijnen aspunts driehoek ABC: dan is (*III. Stell.*)

$$\text{hoek } a + \text{hoek } b + \text{hoek } c + BC + AC + AB = 6R$$

maar nu is (*V. Stell.*) $BC + AC + AB$ grooter dan 0^0 en kleiner dan $4R$; derhalve zal hoek a + hoek b + hoek c grooter dan $2R$ en kleiner dan $6R$ zijn.

§. 1002. GEVOLG. Wanneer de zijden van den aspunts driehoek alle minder dan een quadrant zijn; dan zijn de hoeken a, b en c ſtomp. *Een bolvormigen driehoek kan dan één, twee, drie ſtompe hoeken; één, twee, drie regte hoeken; éénen ſtompen en twee ſcherpe, twee ſtompe en éénen ſcherpen, éénen ſtompen en twee regte; éénen ſtompen, éénen regten en éénen ſcherpen; twee regte en éénen ſcherpen hoek, en drie ſcherpe hoeken hebbên.*

§. 1003. IV. BEPALING. Een *ſtomphoekige bolvormige driehoek* is een driehoek, welke éénen, twee of drie ſtompe hoeken heeft. Een *regthoekige bolvormige driehoek* is een driehoek, welke éénen, twee of drie regte hoeken heeft, en een *ſcherphoekige bolvormige driehoek* is een driehoek, welke drie ſcherpe hoeken heeft.

LEMMA. *Fig.* 378

§. 1004. *Wanneer eene lijn AB loodregt op een vlak PQ ſtaat, en, uit eenig punt B van deze loodlijn AB, eene loodlijn BE tot eene lijn CD, in dit vlak gelegen, getrokken is; dan zal de lijn AE, welke de voeten der loodlijnen AB en BE vereënigt, loodregt op de lijn CD ſtaan.*

BETOOG. Laat, uit het punt E de loodlijn EF op het vlak PQ worden opgerigt; dan liggen (*IX. Stell. X. B.*) AB en EF in het zelfde vlak, dat (*Gev. IV. Bep. X. B.*) regthoekig op het vlak PQ ſtaat. Omdat nu (*conſtr.*) EF loodregt op PQ ſtaat, is (*II. Bep. X. B.*) de hoek FEC regt, en daar (*onderſt.*) de hoek BEC insgelijks regt is, ſtaat (*II. Bep. X. B.*) de lijn CD loodregt op het vlak BEF, en bijgevolg (*IV. Stell. X. B.*) ook loodregt op de lijn AE.

VII.

VII. STELLING. *Fig* 397.

§. 1005. *Wanneer een bolvormige driehoek ABC twee gelijke zijden of beenen, AC en BC, heeft, en daarom gelijkbeenig genoemd wordt; dan zijn de hoeken, over die gelijke beenen staande, ook gelijk.* — En, omgekeerd, — *Een bolvormige driehoek, welke twee gelijke hoeken A en B heeft, is gelijkbeenig.*

BETOOG *van het eerste.* Laat *M* het middelpunt van den bol zijn, en laten de stralen *AM*, *BM* en *CM*, en voorts *CD* en *CE*, loodregt op *AM* en *BM*, en eindelijk *CF* loodregt op het vlak *AMB* getrokken worden. Wanneer men dan de lijnen *DF* en *EF* trekt; dan zijn deze lijnen (*Lemma*) regthoekig op *AM* en *BM*, en de lijn *CF* staat (*II. Bep. X. B.*) loodregt op deze zelfde lijnen *DF* en *EF*: de hoeken *CDF* en *CEF*, zijn dan (*XIV. Bep. X. B.*) de standhoeken van de zijvlakken des drievlakkigen hoeks *ABCM*, gelijk aan de bolvormige hoeken *A* en *B* van den bolvormigen driehoek *ABC*. Volgens de onderstelling, is boog *AC* = boog *BC*; derhalve is *CD* = *CE*: de regthoekige driehoeken, *CDF* en *CEF*, hebben dan gelijke hypothenusen en eene gemeenschappelijke regthoekszijde *CF*; zij zijn dan (*II. Lemma I. B.*) gelijk en gelijkvormig; en daarom is hoek *CDF* = hoek *CEF*; of hoek *A* = hoek *B*.

BETOOG *van het omgekeerde.* Indien de bolvormige hoeken *A* en *B* gelijk zijn; dan moet bewezen worden: dat boog *AC* = boog *BC* is. Men trekke wederom *CD* en *CE* loodregt op *AM* en *BM*, en men late *CF* loodregt op het vlak *AMB* vallen; dan zijn (*Lemma*) de lijnen *DF* en *EF* loodregt op *AM* en *BM*, en de hoeken *CDF* en *CEF*, welke gelijk aan de bolvormige hoeken *A* en *B* zijn, zijn gelijk. Vermits dan de regthoekige driehoeken *CDF* en *CEF* de gemeene regthoekszijde *CF* hebben, en onderling gelijkhoekig zijn, is (*IX. Stell. I. B.*) *CD* = *CE*, en boog *AC* = boog *BC*.

§. 1006. GEVOLG. *Een gelijkzijdige bolvormige driehoek is gelijkhoekig, en omgekeerd.*

VIII. STELLING. *Fig.* 380.

§. 1007. *In elken bolvormigen driehoek, staat de grootste zijde tegen over den grootsten hoek.* — En, omgekeerd, — *de grootste hoek tegen over de grootste zijde.*

BE-

Betoog *van het eerste.* Indien de hoek $ABC >$ hoek BAC is; zal moeten bewezen worden: dat $AC > BC$ is. Omdat (*onderst.*) hoek $ABC >$ hoek BAC is, zal men, door het punt B, eenen grooten cirkelboog BD kunnen laten gaan, zoodanig, dat hoek $ABD =$ hoek BAD zij, en dan zal (*VII. Stell.*) $AD = BD$ zijn; derhalve ook $AD + DC = BD + DC$ of $AC = BD + DC$; maar omdat (*IV. Stell.*) $BD + DC > BC$ is, zal (*V. Ax.*) $AC > BC$ zijn.

Betoog *van het omgekeerde.* Indien $AC > BC$ is; dan zal hoek ABC ook $>$ hoek BAC zijn. Want, indien hoek ABC gelijk of kleiner dan hoek BAC ware; dan zou (*VII. Stell. en I. Ged. Bew.*) AC gelijk of kleiner dan BC zijn, en zulks strijdt tegen de onderstelling.

§. 1008. Aanmerking. De eigenschappen der bolvormige driehoeken, welke, in de voorgaande stellingen, betoogd zijn, zijn de voornaamste. De Schrijvers over de Driehoeksmeting betoogen 'er doorgaans nog andere, welke met de eigenschappen der platte driehoeken, in de IX, X, XI, XII en XIII. Stellingen van het eerste Boek betoogd, overeënkomen: dan, daar deze tot ons oogmerk minder dienen en derzelver betoogen bijna van zelve in het oog loopen, zullen wij dezelve met stilzwijgen voorbijgaan.

Beschouwing van de bijzondere eigenschappen der Regthoekige Bolvormige Driehoeken.

§. 1009. V. Bepaling. *Fig.* 381. In de beschouwing van de regthoekige bolvormige driehoeken, beschouwen wij, het zij die driehoek éénen, twee of drie regte hoeken heeft, (éénen der regte hoeken uit zich zelven als bekend aanmerkende,) ééne regthoekszijde AB als basis, de andere regthoekszijde BB als de opstaande zijde, en AC als de hypothenusa, en noemen den scherpen of stompen hoek A, den hoek aan de basis en den hoek C den tophoek.

IX. Stelling. *Fig.* 381.

§. 1010. *In elken bolvormigen regthoekigen driehoek, is de Sinus van ééne der regthoekszijden gelijk aan de Sinus van de hypothenusa, vermenigvuldigd met de Sinus van den hoek, wel-*

welke tegen over deze regthoekszijde staat. Dat is: indien de driehoek ABC regthoekig is in B; dan zal $Sin.\,BC = Sin.\,AC \times Sin.\,A$; *en* $Sin.\,AB = Sin.\,AC \times Sin.\,C$ *moeten zijn.*

Betoog. Laat *M* het middelpunt van den bol zijn, en laten de lijnen *MA*, *MB* en *MC*, getrokken worden; dan is de bolvormige driehoek *ABC* de betrekkelijke maat van den drievlakkigen hoek *ABCM*. Onderstellen wij nu: dat al de zijden minder dan een quadrant zijn, en laten, uit het punt *C*, de lijnen *CH* en *CG*, loodregt op *AM* en *BM*, getrokken worden: dan is (de straal van den bol voor de straal van de Sinus Tafel nemende,) $CH = Sin.\,AMC = Sin.\,AC$, en $CG = Sin.\,CMB = Sin.\,BC$. Omdat nu de hoek *B* regt is, staat het vlak *BMC* regthoekig op het vlak *AMB*, en (*X. Stell. X. B.*) de lijn *CG* staat loodregt op *AMB*. Indien men dan de lijn *GH* trekt, zal (*Lemma*) *GH* loodregt op *AM* staan; de hoek *CHG* is alzoo (*XIV. Bep. X. B.*) de standhoek der vlakken *AMB* en *AMC*, en gelijk aan den bolvormigen hoek *A*. Nu is, in den regthoekigen driehoek *HGC*, (*II. Stell. IX. B.*) $CG = CH \times Sin.\,CHG$, dat is (*zie boven*) $Sin.\,BC = Sin.\,AC \times Sin.\,A$. — Merkt men de regthoekszijde *BC* als de basis aan; dan zal $Sin.\,AB = Sin.\,AC \times Sin.\,C$ zijn.

§. 1011. Aanmerking. *Fig.* 381. Alhoewel de stelling slechts voor eenen bolvormigen regthoekigen driehoek, wiens zijden alle minder dan een quadrant zijn, bewezen is, blijkt het uit de figuur: dat het bewezene ook gelden zal voor de bolvormige regthoekige driehoeken *ADC*, *FBC* en *FDC*. Zulks in het te willen breede aanwijzen, zou bijna eene herhaling van het reeds betoogde zijn.

X. Stelling. *Fig.* 382.

§. 1012. *In elken bolvormigen regthoekigen driehoek, is de Tangens van ééne der regthoekszijden gelijk aan de Tangens van den hoek, die tegen over dezelve staat, vermenigvuldigd met de Sinus van de andere regthoekszijde. Dat is:* $Tang.\,BC = Tang.\,A \times Sin\,AB$; *en* $Tang.\,AB = Tang.\,C \times Sin.\,BC$.

Betoog. Laat *M* wederom het middelpunt van den bol zijn. Trek, in het vlak *BMC*, de lijn *BD* regthoekig op *MB*, tot zij het verlengde van *MC* in *D* ontmoet; dan staan zij (aangezien het vlak *BMC* loodregt op het vlak *AMB* staat,) ook loodregt op het vlak *AMB*. In-

Indien men dan de lijn DE loodregt op AM trekt, en de punten D en E door BE vereënigt; dan zal (*Lemma*) BE regthoekig op AM ftaan, en de hoek BED zal de ftandhoek der vlakken AMC en AMB, en derhalve gelijk aan den bolvormigen hoek A zijn. Neemt men nu de ftraal van den bol gelijk aan de ftraal van de Sinus Tafel; dan is $BD = Tang. BC$, en $BE = Sin. AB$. Nu geeft de regthoekige driehoek EBD (*I. Stell. IX. B.*) $BD = BE \times Tang. DEB = BE \times Tang. A$; dat is, volgens het betoogde, $Tang. BC = Tang. A \times Sin. AB$. Om dezelfde redenen, is $Tang. AB = Tang. C \times Sin. BC$.

§. 1013. AANMERKING. Hier valt hetzelfde, als op de voorgaande ftelling, aantemerken.

XI. STELLING. *Fig.* 383.

§. 1014. *In elken bolvormigen regthoekigen driehoek, is de Cofinus van de hypothenufa gelijk aan het product van de Cofinusfen der regthoekszijden.*

BETOOG. Laat ABC een bolvormige regthoekige driehoek zijn, welker zijden alle minder dan een quadrant zijn. Men verlenge de zijden AB en AC, naar welgevallen, en befchrijve, uit A, als aspunt, den grooten cirkelboog DEF, en men verlenge BC; dan zal deze den boog DEF, in het aspunt F van den boog ABD, ontmoeten, en dan zal (*I. Stell.*) DE de maat van den bolvormigen hoek A zijn, de bolvormige hoeken D en E, zullen regt en (*II. Stell.*) de bogen DF en BF quadranten zijn, en eindelijk zal BD (*I. Stell.*) de maat van den hoek F zijn. Nu is $EF =$ *compl.* van $DE = compl. A$; hoek $F = BD = compl. AB$; $CE = compl. AC$; $CF = compl. BC$; en hoek $ACB =$ hoek ECF. Nu is, in den bolvormigen regthoekigen driehoek CEF, welke regthoekig is in E, (*IX. Stell.*) $Sin. CE = Sin. F \times Sin. CF$. Maar nu is $CE = compl. AC$; hoek $F = BD = compl. AB$, en $CF = compl. BC$; derhalve zal (zie §. 535.) $Sin. CE = Cos. AC$; $Sin. F = Cos. AB$, en $Sin. CF = Cos. BC$ zijn, waardoor de zoo even aangehaalde vergelijking, $Sin. CE = Sin. F \times Sin. CF$, in $Cos. AC = Cos. AB \times Cos. BC$ verandert.

XII. STELLING. *Fig.* 383.

§. 1015. *In elken bolvormigen regthoekigen driehoek, is de Cofinus van éénen der fcheve hoeken gelijk aan de Cofinus van de* *de regthoekszijde, welke tegen over dien hoek ſtaat, vermenigvuldigd met de Sinus van den anderen ſcheven hoek. Dat is:* $Cos.\ A = Cos.\ BC \times Sin.\ C$, *en* $Cos.\ C = Cos.\ AB \times Sin.\ A$.

Betoog. Dezelfde figuur van het voorgaande betoog geeft, (*IX. Stell.*) $Sin.\ EF = Sin.\ CF \times Sin.\ C$: maar nu is EF = *compl.* hoek A en CF = *compl.* BC; derhalve (zie §. 535.) $Sin.\ EF = Cos.\ A$, en $Sin.\ CF = Cos.\ BC$, en de zoo even geſtelde vergelijking verandert in $Cos.\ A = Cos.\ BC \times Sin.\ C$. Op dezelfde wijze volgt: dat $Cos.\ C = Cos.\ AB \times Sin.\ A$ is.

XIII. Stelling. *Fig.* 383.

§. 1016. *In elken bolvormigen regthoekigen driehoek, is de Cotangens van éénen der ſcheve hoeken gelijk aan de Tangens van den anderen ſcheven hoek, vermenigvuldigd met de Coſinus van de hypothenuſa. Dat is:* $Cot.\ A = Tang.\ C \times Cos.\ AC$; *en* $Cot.\ C = Tang.\ A \times Cos.\ AC$.

Betoog. In dezelfde figuur is (*X. Stell.*) $Tang.\ EF = Tang.\ C \times Sin.\ CE$: maar (§. 535.) $Tang.\ EF = Cot.\ A$ en $Sin.\ CE = Cos.\ AC$ zijnde, zal de geſtelde vergelijking, door ſubſtitutie, in $Cot.\ A = Tang.\ C \times Cos.\ AC$ veranderen. Uit deze, kan nu de tweede gemakkelijk worden afgeleid. Men ſtelle $Cot.\ A = 1 : Tang.\ A$ en $Tang.\ C = 1 : Cot.\ C$; dan zal men, na alles met de noemers der breuken vermenigvuldigd te hebben, verkrijgen: $Cot.\ C = Tang.\ A \times Cos.\ AC$.

§. 1017. Gevolg. Men ſchrijve in de vergelijking $Cot.\ A = Tang.\ C \times Cos.\ AC$, in plaats van $Cot.\ A$, hare waarde $1 : Tang.\ A$; dan zal men, na alles met $Tang.\ A$ vermenigvuldigd te hebben, verkrijgen: $1 = Cos.\ AC \times Tang.\ A \times Tang.\ C$. Dat is: *In elken bolvormigen regthoekigen driehoek, is de Coſinus van de hypothenuſa, vermenigvuldigd met het product van de Tangenten der ſcheve hoeken, altijd gelijk aan de éénheid.*

XIV. Stelling. *Fig.* 383.

§. 1018. *In elken bolvormigen regthoekigen driehoek, is de Tangens van ééne der regthoekszijden gelijk aan de Tangens van de hypothenuſa, vermenigvuldigd met de Coſinus van den hoek, welke tusſchen deze regthoekszijde en de hypothenuſa ge-*

le-

legen is. Dat is: $Tang.\ AB = Tang.\ AC \times Cos.\ A$, *en* $Tang.\ BC = Tang.\ AC \times Cos.\ C.$

Betoog. Volgens de (*X. Stell.*) is $Tang.\ CE = Tang.\ F \times Sin.\ EF$; dat is, (naar de figuur en het meer gemelde,) $Cot.\ AC = Cot.\ AB \times Cos.\ A$. Schrijft men nu, voor $Cot.\ AC$ en $Cot.\ AB$, derzelver waarden, $1 : Tang.\ AC$ en $1 : Tang.\ AB$; dan zal men, na herleiding, vinden: $Tang.\ AB = Tang.\ AC \times Cos.\ A$. En, neemt men BC voor basis; dan zal $Tang.\ BC = Tang.\ AC \times Cos.\ C$ zijn.

§. 1019. I. Aanmerking. Aangezien de vier laatste stellingen bewezen zijn, in de onderstelling, dat de zijden van den bolvormigen regthoekigen driehoek alle kleiner dan een quadrant zijn, zou men kunnen twijfelen, of wel deze stellingen waarheid blijven zouden, wanneer ééne of meer zijden grooter dan een quadrant werden? Dan, de figuren 384 en 385, (welke geconstrueerd zijn, in de onderstelling, dat, in *fig.* 384, AB en AC grooter dan 90°; en, dat, in *fig.* 385, hoek A en BC en AC grooter dan 90° zijn, en welke figuren voorts met dezelfde letters als *fig.* 383. geteekend zijn,) zullen, onderling vergeleken zijnde, doen zien: dat men uit deze figuren dezelfde besluiten, als uit *fig.* 383. verkrijgt, mits men de beginsels, welke in het VIII *Boek*, §. 534 en 535, verklaard zijn, behoorlijk in acht neme.

§. 1020. II. Aanmerking. Men kan, uit de betoogde vergelijkingen, welke in *het eerste gedeelte van de derde Tabelle* voorkomen, en in welke de hoeken, door de Hoofd-letters A, B en C, en de overstaande zijden, door de kleine letters a, b, c, (zie *fig.* 386.) zijn uitgedrukt, met behulp van de theorie van de teekens der Goniometrische lijnen, gewigtige gevolgen afleiden, welke andere Schrijvers, en bijzonderlijk Steenstra, in zijne *Klootsche Driehoeksmeting*, in afzonderlijke stellingen, synthetisch bewezen hebben. 1° Nemen wij de vergelijking (2) $Tang.\ a = Tang.\ A \times Sin.\ c$. De zijde c moet $< 180°$ zijn, derzelver Sinus is derhalve altijd positief. Nemen wij nu, dat de hoek A eerst kleiner, dan gelijk, en dan grooter dan 90° worde; dan wordt $Tang.\ A$ beurtelings positief, oneindig en negatief: in het eerste geval zal $Tang.\ a$ positief, in het tweede geval oneindig, en in het derde geval negatief zijn. Hieruit volgt derhalve: *dat, in elken bolvormigen regthoekigen driehoek, eenige regthoekszijde altijd scherp, regt of stomp zal zijn; indien de overstaande hoek scherp, regt of stomp is.* 2° Uit de formule (3) $Cos.\ b = Cos.\ a \times Cos.\ c$, volgt, met behulp der teekens: *dat de hypothenusa van eenen bolvormigen regthoekigen driehoek scherp zal zijn, wanneer de regthoekszijden,*

den, of beide ſcherp, of beide ſtomp zijn; maar ſtomp, indien de regthoekszijden, de ééne ſtomp en de andere ſcherp is. 3° Stellen wij eindelijk de formule (6) onder den vorm $Cos.\,b = 1 : Tang.A \times Tang.B$; dan zal uit dezelve blijken: *dat de hypothenuſa ſcherp zal zijn, indien de ſcheve hoeken beide ſtomp of beide ſcherp zijn; maar ſtomp, indien de ſcheve hoeken, de één ſtomp en de andere ſcherp is.* —— Men kan deze beſchouwingen, waarop men zich niet te veel toeleggen kan, verder uitbreiden; tot dat einde moet men de tafel van *bladz.* 194. grondig verſtaan en onder het oog houden: dat het product van twee grootheden poſitief of negatief is, naarmate de teekens van de factoren gelijk of ongelijk zijn. Zie I. C. §. 481 en 482.

§. 1021. III. Aanmerking. De vergelijkingen, (1) en (2), in de IX en X. Stellingen betoogd, zijn de grondſlagen van de volgende. Wanneer men dan deze laatſte gemakkelijk in het geheugen wil prenten, moet men zich met de eerſte, als eerſte beginſels, gemeenzaam maken, en, met behulp van *fig.* 383, de andere uit deze afleiden. Deze Leerwijze is ongetwijfeld beter dan die, welke bij den Heer Steenstra, in het aangehaalde werk, §. 93 en 94. is voorgeſchreven.

§. 1022. IV. Aanmerking. In elke der betoogde vergelijkingen, komen drie grootheden, het zij de drie zijden, of twee zijden en éénen hoek, of twee hoeken en ééne zijde, voor. Twee dezer grootheden gegeven zijnde, kan men derhalve de derde vinden. Deze aanmerking brengt ons tot de onderſcheidene gevallen van de oplosſing der bolvormige regthoekige driehoeken.

Toepasſing der gelegde gronden, op de oplosſing der Bolvormige Regthoekige Driehoeken.

§. 1023. Indien men, (zie *fig.* 386.) den regten hoek B, welke van zelven bekend is, niet mede rekent, komen 'er, in den regthoekigen bolvormigen driehoek, drie zijden a, b en c, en twee hoeken A en C, te zamen vijf dingen voor, uit welke men twee, naar welgevallen, als bekend, kan uitkiezen, en zich voorſtellen de drie anderen te vinden. Deze vijf dingen kunnen nu op $5 \times 4 : 1 \times 2$ of 10 onderſcheidene wijzen, twee aan twee, worden zamengevoegd, en zulks geeft derhalve *tien* gevallen, welke echter, zoo als nader blijken zal, tot *zes* eigenlijk onderſcheidene gevallen kunnen gebragt worden, en, (zie altijd *fig.* 386.) in het tafeltje, op *Bladz.* 402, zijn opgeteld. Nemen wij nu het eerſte geval, wanneer de ſchuinſche zij-

1	b en A
2	b en C
3	c en A
4	a en C
5	A en a
6	C en c
7	a en c
8	A en C
9	b en c
10	b en a

de b, met den ſcheven hoek A, gegeven zijn: alsdan zijn de andere ſcheve hoek C, benevens de regthoekszijden a en c, onbekend: men voege nu elke dezer onbekenden met de bekenden b en A te zamen: dan heeft men de drie volgende combinatien:

1° b, A en a; 2° b, A en c; 3° b, A en C. *Nu zoeke men, voor elk dezer drie gevallen, in de betoogde vergelijkingen, die vergelijking, in welke de twee bekenden, met de onbekende grootheid voorkomen, en men zondere, indien het noodig is, de onbekende af. Voor b en A gegeven en a onbekend, geeft de eerſte vergelijking* $Sin.\,a = Sin.\,b \times Sin.\,A$. *Voor b en A gegeven en c onbekend, geeft de zevende* $Tang.\,c = Tang.\,b \times Cos.\,A$. *En voor b en A gegeven en C onbekend, gebruikt men de zesde vergelijking,* $1 = Cos.\,b \times Tang.\,A \times Tang.\,C$, *waarin deze grootheden voorkomen, en men zondert* $Tang.\,C$ *af, hetgeen geven zal* $Cot.\,C = Cos.\,b \times Tang.\,A$.

§. 1024. De lezer ontwerpe nu, naar dit voorſchrift, de Tafel, welke, in haar geheel, op de volgende bladzijde, geplaatst is, en in welke al de tien opgenoemde gevallen voorkomen. Deze Tafel geeft ons aanleiding tot de volgende aanmerkingen.

§. 1025. I. Aanmerking. Alleen ten aanzien van de plaatſing van den driehoek ABC, *fig.* 386, en niet ten opzigte van den vorm der vergelijkingen, zijn het eerſte van het tweede, het derde van het vierde, het vijfde van het zesde, en het negende van het tiende geval onderſcheiden; zoodat, ſtrikt geſproken, deze tien gevallen met vier verminderd kunnen worden, en niet meer dan de zes volgende geven:

1° *Gegeven zijnde de hypothenuſa en één der ſcheve hoeken.*

2° *Gegeven zijnde ééne der regthoekszijden met de daaraan liggende ſcheve hoek.*

3° *Gegeven zijnde ééne der regthoekszijden met de tegenoverſtaande hoek.*

4° *Gegeven zijnde de twee regthoekszijden.*

5° *Gegeven zijnde de twee ſcheve hoeken.*

6° *Gegeven zijnde de hypothenuſa met ééne der regthoekszijden.*

Men kan nu de vergelijkingen, welke in de Tafel voorkomen, in het Hollandsch overzetten, hetgeen zeer nuttig is. Bij voorbeeld, de eerſte vergelijking zal zeggen. *Gegeven zijnde de hypothenuſa met één der ſcheve hoeken; dan zal de Sinus van de regthoekszijde, welke tegen over den gegevenen ſcheven hoek ſtaat, gelijk zijn aan de Sinus van*

(*Zie vervolg, op bladz.* 404.)

TAFEL *voor de oplossing van alle mogelijke gevallen van eenen Bolvormigen Regthoekigen Driehoek.* Zie §. 1023 en 1024, benevens *Fig.* 386.

I. Gegeven zijnde b en A; dan heeft men, om a, c en C te vinden:	1 $Sin.\ a = Sin.\ b \times Sin.\ A$ 2 $Tang.\ c = Tang.\ b \times Cos.\ A$ 3 $Cot.\ C = Cos.\ b \times Tang.\ A$	
II. Gegeven zijnde b en C; dan heeft men, om c, a en A te vinden:	4 $Sin.\ c = Sin.\ b \times Sin.\ C$ 5 $Tang.\ a = Tang.\ b \times Cos.\ C$ 6 $Cot.\ A = Cos.\ b \times Tang.\ C$	
III. Gegeven zijnde c en A; dan heeft men, om a, b en C te vinden:	7 $Tang.\ a = Sin.\ c \times Tang.\ A$ 8 $Tang.\ b = Tang.\ c : Cos.\ A$ 9 $Cos.\ C = Cos.\ c \times Sin.\ A$	
IV. Gegeven zijnde a en C; dan heeft men, om c, b en A te vinden:	10 $Tang.\ c = Sin.\ a \times Tang.\ C$ 11 $Tang.\ b = Tang.\ a : Cos.\ C$ 12 $Cos.\ A = Cos.\ a \times Sin.\ C$	
V. Gegeven zijnde a en A; dan heeft men, om b, c en C te vinden:	13 $Sin.\ b = Sin.\ a : Sin.\ A$ 14 $Sin.\ c = Tang.\ a : Tang.\ A$ 15 $Sin.\ C = Cos.\ A : Cos.\ a$	*twijfelach.*
VI. Gegeven zijnde c en C; dan heeft men, om b, a en A te vinden:	16 $Sin.\ b = Sin.\ c : Sin.\ C$ 17 $Sin.\ a = Tang.\ c : Tang.\ C$ 18 $Sin.\ A = Cos.\ C : Cos.\ c$	*twijfelach.*
VII. Gegeven zijnde c en a; dan heeft men, om b, A en C te vinden:	19 $Cos.\ b = Cos.\ a \times Cos.\ c$ 20 $Tang.\ A = Tang.\ a : Sin.\ c$ 21 $Tang.\ C = Tang.\ c : Sin.\ a$	
VIII. Gegeven zijnde A en C; dan heeft men, om a, c en b te vinden:	22 $Cos.\ a = Cos.\ A : Sin.\ C$ 23 $Cos.\ c = Cos.\ C : Sin.\ A$ 24 $Cos.\ b = Cot.\ A \times Cot.\ C$	
IX. Gegeven zijnde b en c; dan heeft men, om A, C en a te vinden:	25 $Cos.\ A = Tang.\ c : Tang.\ b$ 26 $Sin.\ C = Sin.\ c : Sin.\ b$ 27 $Cos.\ a = Cos.\ b : Cos.\ c$	
X. Gegeven zijnde b en a; dan heeft men, om C, A en c te vinden:	28 $Cos.\ C = Tang.\ a : Tang.\ b$ 29 $Sin.\ A = Sin.\ a : Sin.\ b$ 30 $Cos.\ c = Cos.\ b : Cos.\ a$	

de hypothenusa, vermenigvuldigd met de Sinus van den gegeven scheven hoek, enz. met de andere vergelijkingen. Ik zeg, dat zulk eene overzetting nuttig is, omdat zij het gevondene vaster in het geheugen prent, en den beoefenaar met het gebruik der kunst-termen gemeenzamer maakt.

§. 1026. II. Aanmerking. De vijfde en zesde gevallen van de tafel, of het derde der straks opgetelde gevallen, in hetwelk ééne regthoekszijde benevens de tegenoverstaande scheve hoek gegeven zijn, worden de *twijfelachtige* gevallen genoemd, omdat men eigenlijk (zie *fig.* 374.) in de oplossing twee regthoekige driehoeken *ABC* en *DBC* verkrijgt, en men in het werkdadige, (niet meer dan deze twee dingen gegeven zijnde,) niet weten kan, welke dezer twee driehoeken de bedoelde is.

§. 1027. III. Aanmerking. Sommige vergelijkingen van de voorgaande tafel, kunnen onder andere gedaanten gebragt worden, waaronder zij ook wel eens bij andere Schrijvers voorkomen. Bij voorbeeld, uit de vergelijking (8) volgt, $1 : Tang.\,b = Cos.\,A : Tang.\,c$: dat is, (omdat $1 : Tang.\,b = Cot.\,b$ is,) $Cot.\,b = Cot.\,c \times Cos.\,A$. Om dezelfde reden verandert de vergelijking (11) in $Cot.\,b = Cot.\,a \times Cos.\,C$. Voor de vergelijkingen (14), (17), (20), (21), (25) en (28), kan men schrijven: $Sin.\,c = Tang.\,a \times Cot.\,A$; $Sin.\,a = Tang.\,c \times Cot.\,C$; $Cot.\,A = Cot.\,a \times Sin.\,c$; $Cot.\,C = Cot.\,c \times Sin.\,a$; $Cos.\,A = Tang.\,c \times Cot.\,b$; $Cos.\,C = Tang.\,a \times Cot.\,b$. — En wanneer de Logarithmen der Secanten en Cosecanten in eene Tafel (gelijk in de Tafelen van Borda) voorkomen, kan men voor de vergel. (8) $Tang.\,b = Tang.\,c \times Sec.\,A$; voor vergel. (11) $Tang.\,b = Tang.\,a \times Sec.\,C$; voor vergel. (13) $Sin.\,b = Sin.\,a \times Cosec.\,A$ stellen, en, op dezelfde wijze, kan men de vergelijkingen (15), (16), (18), (20), (21), (22), (23), (26), (27), (29) en (30) veranderen, en wanneer, in alle Tafelen, de Secanten en Cosecanten voorkwamen, zou men misschien de voorkeur aan deze afgeleide vormen geven, indien men anders de Additie voor eene gemakkelijker bewerking dan de Subtractie houden mogt.

§. 1028. IV. Aanmerking. Vermits, tot het wel kennen der bolvormige Driehoeksmeting, niet slechts vereischt wordt, dat men alle hare afzonderlijke gevallen rekenkunstig kunne oplossen; maar, voornamelijk, dat men, uit de gevondene grond-formulen, anderen leere afleiden, hetwelk, in alle deelen der toegepaste Wiskunst, maar voornamelijk, in de Sterre-, Aardrijks- en Zeevaartkunde, van het uiterste aan-

aanbelang is, zullen wij de voornaamste vergelijkingen, welke uit de voorgaande Tafel kunnen afgeleid worden, mededeelen, en ons alleenlijk vergenoegen met de Goniometrische formulen van het VIII Boek, uit welke zij afgeleid kunnen worden, optegeven; zijnde onze bedoeling hiermede: 1° om den Leerling deze vergelijkingen te doen kennen, 2° om hem met de herleidingen der Trigonometrische vergelijkingen gemeenzaam te maken, en hem, langs dien weg, in staat te stellen, zijne krachten in het uitvinden van anderen te beproeven.

§. 1029. Met behulp van de *V. Stell. VIII. Boek*, veranderen de (1), (4), (9), (12) en (19) vergelijkingen van de Tafel in de volgende:

$$(1)\ Sin.\ a = \tfrac{1}{2}\ Cos.\ (b - A) - \tfrac{1}{2}\ Cos.\ (b + A)$$
$$(4)\ Sin.\ c = \tfrac{1}{2}\ Cos.\ (b - C) - \tfrac{1}{2}\ Cos.\ (b + C)$$
$$(9)\ Cos.\ C = \tfrac{1}{2}\ Sin.\ (A + c) + \tfrac{1}{2}\ Sin.\ (A - c)$$
$$(12)\ Cos.\ A = \tfrac{1}{2}\ Sin.\ (C + a) + \tfrac{1}{2}\ Sin.\ (C - a)$$
$$(19)\ Cos.\ b = \tfrac{1}{2}\ Cos.\ (a + c) + \tfrac{1}{2}\ Cos.\ (a - c)$$

Deze vergelijkingen kunnen, door de natuurlijke Sinus-Tafelen, met behulp van de Additie en Subtractie, berekend worden. Wanneer in (1), (4) en (19), de bogen of hoeken $b - A$, $b - C$ en $a - c$ negatief worden, (hetgeen plaats heeft, indien $b < A$, $b < C$ en $a < c$ is,) dan blijven de Cosinussen dezer bogen (zie §. 535.) positief; maar, wanneer in (9) en (12) de bogen $A - c$ en $C - a$ negatief worden; dan veranderen de teekens van $Sin.\ (A - c)$ en $(C - a)$.

§. 1030. Uit de vergelijking (13) volgt: de evenredigheid: $1 : Sin.\ b = Sin.\ A : Sin.\ a$. Hieruit zal men, met behulp van de *VII en VIII. Stell. II. B.*, en *VII. Stell.*, benevens *II. Gev. X. Stell. VIII. B.* vinden:

$$(13)\ Tang.\ (45^{0} - \tfrac{1}{2} b) = \pm \sqrt{\frac{Tang. \frac{1}{2}(A - a)}{Tang. \frac{1}{2}(A + a)}};\ \text{of}\ Tang.\ (45^{0} + \tfrac{1}{2} b) = \pm \sqrt{\frac{Tang. \frac{1}{2}(A + a)}{Tang. \frac{1}{2}(A - a)}}.$$

§. 1031. Uit de vergelijking (14) volgt: $1 : Sin.\ c = Tang.\ A : Tang.\ a$, en uit deze evenredigheid, zie *VII en VIII. Stell. II. B.*; *II. Gev. X en XI. Stell. VIII. B.* wederom:

$$(14)\ Tang.\ (45^{0} - \tfrac{1}{2} c) = \pm \sqrt{\frac{Sin.\ (A - a)}{Sin.\ (A + a)}};\ \text{of}\ Tang.\ (45^{0} + \tfrac{1}{2} c) = \pm \sqrt{\frac{Sin.\ (A + a)}{Sin.\ (A - a)}}.$$

§. 1032. De (15) vergelijking zal, op dezelfde wijze, tot de volgende herleid worden:

$$(15)\ Tang.\ (45^{0} + \tfrac{1}{2} C) = \pm \sqrt{\frac{Cot. \frac{1}{2}(A + a)}{Tang. \frac{1}{2}(A - a)}};\ \text{of}\ Tang.\ (45^{0} - \tfrac{1}{2} C) = \pm \sqrt{Tang. \tfrac{1}{2}(A + a) \times Tang. \tfrac{1}{2}(A - a)}.$$

Ten aanzien dezer drie afgeleide vergelijkingen, welke alle tot het twijfelachtig geval behooren, moet worden aangemerkt: dat het dubbelde teeken, waarmede de wortel-uitdrukkingen zijn aangedaan, de twee driehoeken

 geeft,

geeft, op welke de gegevens passen. Want stellen wij, in (13), den hoek, welke tot *Tang.* $(45^\circ - \frac{1}{2} b)$ behoort $= \phi$, dan is $45^\circ - \frac{1}{2} b = \pm \phi$, en hieruit volgt $b = 90^\circ \mp 2\phi$, waaruit dan blijkt: dat de twee waarden, welke men voor b verkrijgt, de éene het supplement is van de andere.

§. 1033. Men kan uit de vergelijking (24) terstond stellen: $\frac{1 + Cot.\, b}{1 - Cot.\, b} = \frac{1 + Cot.\, A \times Cot.\, C}{1 - Cot.\, A \times Cot.\, C}$; wanneer men nu den teller en den noemer der laatste breuk door $Cot.\, A$ deelt, en voor $Tang.\, A$ en $Cot.\, C$ schrijft $Sin.\, A : Cos.\, A$, en $Cos.\, C : Sin.\, C$, zal men, met behulp van de *III. Stell.* en *IV. Gev. IX. Stell. VIII. B.* verkrijgen:

$$(24) \quad \ldots\ldots \quad Tang.\, \tfrac{1}{2} b = \sqrt{- \frac{Cos.\, (A + C)}{Cos.\, (A - C)}}$$

omtrent welke vergelijking, moet aangemerkt worden, dat de grootheid, onder het wortelteeken, wegens de algemeenheid der goniometrische formulen, het negatieve teeken verkrijgt, en dit teeken ook hebben moet, omdat, aangezien $A + C > 90^\circ$ is, de eigenlijke waarde negatief, en de wortel-uitdrukking onbestaanbaar zou worden. Voorts ziet men, dat .. *Tang.* $\frac{1}{2} b$ niet anders dan positief kan zijn.

§. 1034. De vergelijking (25) geeft, met behulp van de *VII en VIII. Stell. II. B.; IV. Gev. IX. Stell. en XI. Stell. VIII. B.*

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Tang.\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{Sin.\, (b - c)}{Sin.\, (b + c)}}$$

§. 1035. Uit de vergelijking (26) volgt, op dezelfde wijze, als in §. 1030:

$$(26) \quad \ldots \quad Tang.\, (45^\circ + \tfrac{1}{2} C) = \pm \sqrt{\frac{Tang.\, \tfrac{1}{2} (b + c)}{Tang.\, \tfrac{1}{2} (b - c)}}$$

Men onderscheidt in deze vergelijking gemakkelijk, welk teeken gebezigd moet worden; want C en c moeten (*II. Aanmerk. XIV. Stell.*) van dezelfde soort zijn.

§. 1036. Uit de vergelijking (27) volgt:

$$(27) \quad \ldots \quad Tang.\, \tfrac{1}{2} a = \sqrt{[Tang.\, \tfrac{1}{2} (b - c) \times Tang.\, \tfrac{1}{2} (b + c)]}$$

en in deze geldt alleen het positieve teeken voor de waarde van *Tang.* $\frac{1}{2} a$.

§. 1037. Men kan, behalve deze vergelijkingen, nog vele andere vinden: dan, aangezien zij voor de getallen berekening moeijelijker, en bijgevolg minder nuttig zijn, zullen wij dezelve met stilzwijgen voorbijgaan.

Voorbeelden en Vraagstukken.

§. 1038. Daar wij, onder anderen, de oplossing der bolvormige driehoeken ook op Sterre- en Aardrijkskundige Vraagstukken zullen toepassen, moeten wij, ten aanzien van deze, den Lezer verwijzen, naar onze *Sterrekundige Aardrijksbeschrijving*, uitmakende *het eerste Deel van de navolging van* GUTHRY, *de II, III en IV Afdeelingen*, en, inzonderheid, de *noodige ophelderingen* op dezelve, *Bladz.* 40, 66 en 82, 82, alwaar men, op eene alzins voldoende wijze, in het verstand van deze soort van Vraagstukken zal onderrigt worden.

§. 1039. I. VRAAGSTUK. *Fig.* 387. *Wanneer men, uit het punt A van de doorsnede AB van twee vlakken, PQ en PR, welke regthoekig op elkander staan, twee lijnen AC en AD, in deze vlakken trekt, zoodanig, dat deze lijnen, met de gemeene doorsnede AB dezer vlakken, gegevene hoeken maken, namelijk hoek* $BAC = 103°\,18'\,30''$ *en hoek* $BAD = 76°\,33'\,10''$, *zoo vraagt men: welken hoek deze lijnen AD en AC met elkander maken, en onder welke hoeken het vlak, dat door deze lijnen gaat, de regthoekige vlakken PQ en PR zal snijden?*

OPLOSSING. Wanneer men, in het punt *A*, het middelpunt van eenen bol plaatst: dan maakt de doorsnijding dezer vlakken met het oppervlak van dien bol den regthoekigen bolvormigen driehoek *bcd*, waarvan de regthoekszijden *bc* en *bd*, als de maat der hoeken *BAC* en *BAD*, gegeven zijn. Om dan den hoek *CAD* en de hoeken, welke het vlak *CAD* met de vlakken *PQ* en *PR* maakt, te vinden, moet de hypothenusa *cd*, benevens de bolvormige hoeken *d* en *c*, berekend worden, en zulks geschiedt door de (19), (20) en (21) vergel. van de Tafel van *Bladz.* 403. Men heeft namelijk:

$$Cos.\,cd = Cos.\,bc \times Cos.\,bd \text{ of } Cos.\,CAD = Cos.\,BAC \times Cos.\,BAD$$
$$Tang.\,bdc = Tang.\,bc : Sin.\,bd = Tang.\,BAC : Sin.\,BAD$$
$$Tang.\,bcd = Tang.\,bd : Sin.\,bc = Tang.\,BAD : Sin.\,BAC.$$

Hieruit volgt, in Logarithmen, deze berekening:

1° *Van den hoek CAD.*

$$Log.\,Cos.\,BAC = 9,3620889$$
$$Log.\,Cos.\,BAD = 9,3665155$$
$$Log.\,Cos.\,CAD = 8,7286044$$
$$Suppl.\,CAD = 86°\,55'\,53'',2$$
$$CAD = cd = 93°\,4'\,6'',8$$

3° *Van den hoek bcd.*

$$Log.\,Tang.\,BAD = 0,6214113$$
$$Log.\,Sin.\,BAC = 9,9881777$$
$$Log.\,Tang.\,bcd = 0,6332341$$
$$bcd = 76°\,54'\,4'',6$$

2° *Van den hoek bdc.*

$$Log.\,Tang.\,BAC = 0,6260889$$
$$Log.\,Sin.\,BAD = 9,9879274$$
$$Log.\,Tang.\,bdc = 0,6381615$$
$$bdc = 102°\,57'\,21'',4$$

NB. Omdat de hoek *BAC* stomp is, is zijne Cosinus negatief; de Cosinus van *cd* moet derhalve insgelijks negatief zijn; en men moet derhalve voor *cd* of den hoek *CAD* het supplement nemen van den hoek, welke, in de Tafel, gevonden wordt. Om dezelfde reden, is de *Tang.* hoek *BAC* negatief; de *Tang. bdc* is dan ook negatief, en de hoek *bdc* is derhalve het supplement van den hoek, welke men in de Tafel vindt, enz. Raadpleeg *II. Aanmerking* §. 1020.

§. 1040. II. VRAAGSTUK. *Fig.* 387. *Hoe groot zal een hoek CAD genomen, en hoedanig zal hij moeten geplaatst worden, op dat het*

 vlak

vlak van dien hoek met de vlakken PQ en PR gegevene hoeken maakt, welke respectievelijk gelijk zijn aan $86^\circ\ 17'$ *en* $69^\circ\ 42'$?

OPLOSSING. Van den bolvormigen regthoekigen driehoek bcd zijn gegeven de scheve hoeken d en c, en men moet, om het gevraagde te vinden, de hypothenusa cd en de regthoekszijden bc en bd berekenen: de eerste zal den hoek CAD leeren kennen, en de twee anderen de hoeken BAC en BAD. Nu heeft men $Cos.\,cd = Cos.\,CAD = Cot.\,bcd \times Cot.\,bdc$; $Cos.\,bc = Cos.\,BAC = Cos.\,bdc : Sin.\,bcd$ en $Cos.\,bd = Cos.\,BAD = Cos.\,bcd : Sin.\,bdc$. Hiermede vindt men (want de berekening laten wij aan den Leerling over,) hoek $CAD = 88^\circ\ 37'\ 23''$; hoek $BAC = 86^\circ\ 2'\ 13''$; en hoek $BAD = 69^\circ\ 39'\ 16''$.

§. 1041. III. VRAAGSTUK. *Fig.* 388. *Op welken tijd, na middernagt, en hoe ver buiten het Noorden, zal de Zon, aan den gezigteinder van het gebouw,* Felix Meritis, te Amsterdam, *opgaan, wanneer hare noordelijke afwijking is* $23^\circ\ 27'\ 50''$, *en het gezegde gebouw op de Noorder Breedte van* $52^\circ\ 22'\ 17''$ *gelegen is? de uitwerking van de straalbreking en van het verschilzigt, in deze berekening, niet in aanmerking nemende.*

OPLOSSING. Laat de halve cirkel ZPN den middag-cirkel en de halve cirkel ZNH de oostelijke helft van den gezigteinder van het gebouw, *Felix Meritis* verbeelden, en bijgevolg N het Noorden, Z het Zuiden; omdat dan deze cirkels regthoekig op elkander staan, is de bolvormige hoek PNH regt. Men neme $PN = 52^\circ\ 22'\ 17''$; dan is het punt P de Noord-pool. Laat H het punt verbeelden, alwaar het middelpunt van de Zon zich, bij haren opgang, bevindt; men late door het middelpunt van den hemelbol en door de punten P en H den grooten cirkelboog PH gaan; dan is PH de afstand van het middelpunt der Zon tot de Noordpool, of het complement van hare afwijking, en de hoek NPH, tegen 15° voor één uur in tijd overgebragt, zal den tijd verbeelden, welke 'er, sedert den middernagt tot aan den opgang der Zon, verloopen is, en de boog HN zal de streek zijn, alwaar de Zon opkomt. Nu is (zie *Vergel.* (25) of (28)), in den regthoekigen bolvormigen driehoek PNH, $Cos.\,NPH = Tang.\,PN : Tang.\,PH$, en (zie *Vergel.* (27) of (30)), $Cos.\,NH = Cos.\,PH : Cos.\,PN$. Dat is:

$$1^\circ \quad Cos.\ Uurhoek = \frac{Tang.\ Breedte}{Cot.\ Afwijk.} = Tang.\ Breedte \times Tang.\ Afwijk.$$

$$2^\circ \quad Cos.\ Streeks\ opgang = \frac{Sin.\ Afwijk.}{Cos.\ Breedte} = Sin.\ Afwijk. \times Sec.\ Breedte.$$

Door deze vergelijkingen, vindt men den uurhoek $= 55^\circ\ 43'\ 56'',2$, hetgeen voor den tijd van den opgang geeft des morgens ten 3 uren 42 minuten en $55'',8$, en voor den opgang beoosten het Noorden $49^\circ\ 17'\ 48'',9$. Wanneer de afwijking der Zon zuidelijk of negatief is; dan worden de Cosinussen van den uurhoek en van de Zons streeks opgang insgelijks negatief, en deze hoek en boog worden stomp. Voor zuider of negatieve breed-

breedte, zal men de waarde dezer grootheden naar de teekens moeten beoordeelen.

§. 1042. IV. Vraagstuk. *Fig.* 388. *Op welk eene breedte zal de Zon, wanneer hare grootste noordelijke afwijking* $23^\circ\,27'\,50''$ *gesteld wordt, des morgens ten drie uren opgaan? Geene straalbreking of verschilzigt in berekening brengende.*

Oplossing. Hier is, één uur tegen vijftien graden rekenende, de hoek $HPN = 45^\circ$ en PH is, wederom het complement van de Zons afwijking. Men zal dan, door middel van den regthoekigen bolvormigen driehoek, NPH vinden:

$$\text{Tang. Breedte} = \text{Cos. Uurh.} \times \text{Cot. Afwijk.}$$

en door deze vindt men de gevraagde Breedte $= 58^\circ\,27'\,21'',5$. Door deze vergelijking worden de breedten der zoogenaamde Aardrijkskundige Klimaten berekend.

§. 1043. V. Vraagstuk. *Fig.* 389. *De Noorder Breedte van eenige plaats gegeven zijnde, benevens de afwijking der Zon, te vinden, op welk oogenblik van den dag, de Zon zich in het Oosten, of in den oostelijken verticaal-cirkel, bevindt, en op welk eene hoogte boven of beneden den gezigteinder?*

Oplossing. Zij wederom $ZTPN$ de middags-cirkel, ZHN de gezigteinder; N het Noorden en Z het Zuiden; T het toppunt; TH de verticaal van het Oosten; dan is $TN = TH = TZ = 90^\circ$ en $ZH = NH = 90^\circ$, en de bolvormige hoeken ZTH en NTH zijn regt. Laat voorts P de Noord-pool zijn, en laat de Zon, op het oogenblik, dat zij door den oost-verticaal-cirkel gaat, zich in A bevinden; dan is de boog van den grooten cirkel, welke van P tot A gaat, het complement van de Zons afwijking. Om nu de vraag optelosfen, zal men, in den bolvormigen regthoekigen driehoek APT, in welken PT en AP gegeven is, den hoek TPA en de zijde AT moeten vinden, en men zal, zie *Vergel.* (25) en (27) verkrijgen:

$$1^\circ \quad \text{Cos. Uurh. voorm.} = \text{Cot. Breedte} \times \text{Tang. Afwijking.}$$

$$2^\circ \quad \ldots \text{Sin. Hoogte} = \frac{\text{Sin. Afwijking}}{\text{Sin. Breedte}}$$

en, wanneer de afwijking zuidelijk, of negatief is; dan zullen de *Cos. Uurh.*, benevens de *Sinus hoogte* negatief zijn, in welk geval de Zon, des morgens voor zes uren, beneden den gezigteinder, door den oost-verticaal-cirkel zal gaan. Voor zuider of negatieve Breedte, zal men de waarde dezer grootheden, overeënkomstig de teekens, moeten bepalen.

Over de Regtzijdige Bolvormige Driehoeken en de afleiding der vergelijkingen, welke tot derzelver oplossing dienen kunnen.

§. 1044. VI. Bepaling. *Fig.* 390. Een bolvormige regtzijdige drie-

driehoek is een driehoek $A'B'C'$, welks ééne zijde $A'C'$ een quadrant is. — Men zal zich, op de volgende wijze, een denkbeeld maken kunnen: 1° hoe de regtzijdige bolvormige driehoeken uit de regthoekige ontstaan, en 2°, hoe, uit de vergelijkingen, op de regthoekige bolvormige driehoeken, de vergelijkingen op de regtzijdige kunnen afgeleid worden. — Wanneer men (zie altijd *Fig.* 390.) uit de hoekpunten, A, B en C, van eenen bolvormigen regthoekigen driehoek ABC, als aspunten, met de koorde van het quadrant des grooten cirkels, bogen beschrijft; dan zal de aspunts driehoek $A'B'C'$, welke alsdan ontstaat, een regtzijdige bolvormige driehoek zijn. Nu zal men, uit de vergelijkingen, welke in §. 1020, voor de bolvormige regthoekige driehoeken, zijn opgegeven, (en onder het oog houdende, dat (zie §. 535.) $Sin.\,suppl.\,a = Sin.\,a$; $Cos.\,suppl.\,a = -Cos\,a$ en $Tang.\,suppl.\,a = -Tang.\,a$ is,) vinden:

1° $Sin.\,A' = Sin.\,B' \times Sin.\,a'$; en $Sin.\,C' = Sin.\,B' \times Sin.\,c'$

2° $Tang.\,A' = Tang.\,a' \times Sin.\,C'$; en $Tang.\,C' = Tang.\,c' \times Sin.\,A'$

3° $Cos.\,B' = -Cos.\,A' \times Cos.\,C'$

4° $Cos.\,a' = Cos.\,A' \times Sin.\,c'$; en $Cos.\,c' = Cos.\,C' \times Sin.\,a'$

5° $Cot.\,a' = -Tang.\,c' \times Cos.\,B'$; en $Cot.\,c' = -Tang.\,a' \times Cos.\,B'$

6° $1 = -Cos.\,B' \times Tang.\,a' \times Tang.\,c'$

7° $Tang.\,C' = -Tang.\,B' \times Cos.\,a'$; en $Tang.\,A' = -Tang.\,B' \times Cos.\,c'$.

§. 1045. Wij laten de verdere beschouwing dezer vergelijkingen aan den Lezer over. Hij zal uit dezelve (behalve dat zij dienen kunnen, om, uit twee gegevens, de overigen te vinden,) verscheidene gevolgen kunnen afleiden. Zoo zal de tweede vergelijking doen zien: *dat de scheve zijden van dezelfde soort zijn als de overstaande hoeken.* De derde vergelijking: *dat de hoek, tegen over de regte zijde, stomp, of scherp zal zijn, naar dat de twee andere hoeken (of de zijden tegen over die hoeken,) van dezelfde of van verschillende soort zijn.* enz.

Beschouwing van de Bolvormige Scheefhoekige Driehoeken.

§. 1046. De eigenschappen der bolvormige regthoekige driehoeken, bevatten in zich de gronden, waaruit die der scheefhoekige, tot welker beschouwing wij thans overgaan, kunnen worden afgeleid.

§. 1047. VII. Bepaling. *Fig.* 391 *en* 392. Tot dat einde late men door den tophoek C van eenigen scheefhoekigen bolvormigen drie-

driehoek ABC eenen grooten cirkel DCE gaan, welke regthoekig op het vlak van de basis AB staat, hetgeen (*XII. Stell. en VII en VIII. Bep. X. B.*) altijd geschieden kan, wanneer men dien grooten cirkel, behalve door het toppunt, ook laat gaan door de projectie, welke de straal, die het toppunt van den driehoek met het middelpunt van den bol vereënigt, op de basis maakt. Die cirkel teekent op het oppervlak van den bol twee bogen CD en CE, van welke de één het supplement van den anderen is, en welke, omdat zij loodregt op de basis of derzelver verlengde staan, *de loodregte bogen, welke, uit het toppunt, op de basis vallen, genoemd worden.*

§. 1048. I. Aanmerking. *Fig.* 391. Wanneer één dezer bogen binnen den driehoek valt; dan verdeelt hij denzelven in twee regthoekige bolvormige driehoeken ACD en BCD, en, in dit geval, worden de bogen AD en BD, de stukken of deelen van de basis, en de hoeken ACD en BCD, de deelen van den tophoek genoemd. Aangezien nu (§. 1020.) in eenen regthoekigen bolvormigen driehoek de scheve hoeken van dezelfde soort zijn, als de tegenoverstaande regthoekszijden, zoo zullen de hoeken BAC en ABC, beide van dezelfde soort zijn als de loodregte boog CD; waaruit dan blijkt: *dat, wanneer één der loodregte bogen binnen den driehoek valt, de hoeken aan de basis of beide scherp óf beide stomp moeten zijn, en dat,* omgekeerd, *wanneer de hoeken aan de basis van dezelfde soort zijn, één der loodregte bogen binnen den driehoek zal moeten vallen.*

§. 1049. II. Aanmerking. *Fig.* 392. Men bemerkt hieruit: *dat, wanneer de hoeken BAC en ABC aan de basis van verschillende soort zijn, de één stomp en de ander scherp, geen der loodregte bogen CD en CE, binnen den driehoek ABC vallen kan: zij zullen dan, in dit geval, buiten den driehoek vallen.* Welke dezer twee loodregte bogen nu ook genomen worde, ontstaan 'er altijd twee regthoekige driehoeken ACD en BCD, of BCE en ACE, welke deze loodregte bogen tot eene gemeenschappelijke regthoekszijde hebben.

§. 1050. III. Aanmerking. *Fig.* 391. In de volgende beschouwingen, onderstellen wij: dat de bolvormige driehoek zoodanig gesteld zij, dat éene der loodregte bogen CD binnen den driehoek valle, en alsdan worden de bogen AD en BD, als deelen van de basis, zoowel als de hoeken ACD en BCD, als deelen van den tophoek, voor positieve bogen en hoeken aangenomen, welke, de eerste, van de punten A en B, naar D, en de laatste, van de bogen AC en BC, naar CD geteld worden. Hieruit volgt dan: dat, wanneer, onder zekere

om-

omſtandigheden, de boog BD negatief wordt, het punt D aan de regter hand van B zal vallen, en dat de loodregte boog, welke, in de oorſpronkelijke figuur 391, door CD is afgebeeld, onder die omſtandigheid buiten den hoek B zal vallen; maar buiten den hoek A, indien, ten gevolge van andere omſtandigheden, de boog AD negatief wordt. Want het is, zoo als op zijn tijd blijken zal, een vooroordeel te meenen: dat de loodregte boog, welke uit den tophoek van eenen ſtomphoekigen driehoek op de baſis valt, altijd buiten den ſtompen hoek zal vallen. Dezelfde omſtandigheden moeten, ten aanzien van de deelen van den tophoek, in acht genomen worden.

§. 1051. IV. Aanmerking. Nog moet men, in de volgende beſchouwingen, niet uit het oog verliezen: dat de zijden en hoeken van eenen bolvormigen driehoek altijd kleiner dan 180° moeten zijn.

XV. Stelling. *Fig.* 391 *en* 392.

§. 1052. *In elken bolvormigen driehoek, ſtaan de Sinusſen der zijden tot elkander, in dezelfde reden, als de Sinusſen der tegenoverſtaande hoeken. Dat is:*

$$(Sin.\, AB,\, Sin.\, AC,\, Sin.\, BC) :: (Sin.\, C,\, Sin.\, B,\, Sin.\, A) \quad (1)$$

Betoog. Wanneer, gelijk in *Fig.* 391, de loodregte boog CD binnen den driehoek valt; dan geven de bolvormige regthoekige driehoeken, ADC en BDC, (*IX. Stell.*) de vergelijkingen: $Sin.\, CD = Sin.\, AC \times Sin.\, BAC = Sin.\, BC \times Sin.\, ABC$, waaruit dan volgt: $Sin.\, AC : Sin.\, BC = Sin.\, B : Sin.\, A$.

Wanneer, in *Fig.* 392, de hoeken aan de baſis van verſchillende ſoort zijn, en de loodregte bogen CD of CE buiten den driehoek vallen, zal men, aangezien de Sinus van eenen boog en die van zijn ſupplement dezelfde waarde hebben, het zij uit de regthoekige driehoeken ADC en BCD, het zij uit de regthoekige driehoeken ACE en BCE, dezelfde evenredigheid vinden. De loodregte boog, welke, uit het hoekpunt van den hoek A, op de overſtaande zijde BC, valt, zal geven $Sin.\, AB : Sin.\, AC = Sin.\, C : Sin.\, B$, enz.

§. 1053. I. Gevolg. Uit de evenredigheid, $Sin.\, AC : Sin.\, BC = Sin.\, B : Sin.\, A$, volgt (*VIII. Stell. II. B.*) $Sin.\, AC + Sin.\, BC : Sin.\, AC - Sin.\, BC = Sin.\, B + Sin.\, A : Sin.\, B - Sin.\, A$; waaruit (zie *VII. Stell. VIII. B.*) volgt:

$$Tang.\, \tfrac{1}{2}(AC + BC) : Tang.\, \tfrac{1}{2}(AC - BC) = Tang.\, \tfrac{1}{2}(B + A) : Tang.\, \tfrac{1}{2}(B - A) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

§. 1054.

§. 1054. II. Gevolg. Deze laatste evenredigheid of vergelijking kan onder de volgende gedaante gebragt worden:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}(B+A) = Tang.\,\tfrac{1}{2}(AC+BC) \times \frac{Tang.\,\tfrac{1}{2}(B-A)}{Tang.\,\tfrac{1}{2}(AC-BC)}$$

Nu zijn $\tfrac{1}{2}(B-A)$ en $\tfrac{1}{2}(AC-BC)$ altijd kleiner dan 90°; derhalve is het gebroken, hetwelk in het laatste lid dezer vergelijking voorkomt, altijd positief. Wanneer wij dan $\tfrac{1}{2}(AC+BC)$ eerst kleiner, dan gelijk, en eindelijk grooter dan 90° stellen, zullen, volgens de bekende regels op de teekens, $Tang.\,\tfrac{1}{2}(B+A)$ en $Tang.\,\tfrac{1}{2}(AC+BC)$ te gelijk positief, te gelijk onbepaald groot, en te gelijk negatief zijn, waaruit dan volgt: *dat de som van twee hoeken van eenen bolvormigen driehoek kleiner, gelijk, of grooter dan 180° zal zijn, naar dat de som der overstaande zijden kleiner, gelijk, of grooter dan 180° is.*

XVI. Stelling. *Fig.* 391.

§. 1055. *Wanneer men, uit het hoekpunt van den tophoek* C *van eenen bolvormigen driehoek ABC, eenen loodregten boog CD op de basis of op derzelver verlengde laat vallen; dan zullen 'er de volgende vergelijkingen plaats hebben:*

1° $Tang.\,A \times Sin.\,AD = Tang.\,B \times Sin.\,BD$ . . (3)

2° $Cos.\,A : Sin.\,ACD = Cos.\,B : Sin.\,BCD$ . . . (4)

3° $Cos.\,AC : Cos.\,AD = Cos.\,BC : Cos.\,BD$ . . . (5)

4° $Tang.\,AC \times Cos.\,ACD = Tang.\,BC \times Cos.\,BCD$ (6)

5° $Tang.\,AD : Tang.\,ACD = Tang.\,BC : Tang.\,BCD$ (7)

Betoog *van het eerste.* Volgens de *X. Stell.* is $Tang.\,CD = Tang.\,A \times Sin.\,AD = Tang.\,B \times Sin.\,BD$.

Betoog *van het tweede.* Volgens de *XII. Stell.* is $Cos.\,A = Cos.\,CD \times Sin.\,ACD$, en $Cos.\,B = Cos.\,CD \times Sin.\,BCD$; derhalve is $Cos.\,CD = Cos.\,A : Sin.\,ACD = Cos.\,B : Sin.\,BCD$.

Betoog *van het derde.* Volgens de *XI. Stell.* is $Cos.\,AC = Cos.\,AD \times Cos.\,CD$, en $Cos.\,BC = Cos.\,BD \times Cos.\,CD$; derhalve zal $Cos.\,CD = Cos.\,AC : Cos.\,AD = Cos.\,BC : Cos.\,BD$ zijn.

Betoog *van het vierde.* Volgens de *XIV. Stell.* is $Tang.\,CD = Tang.\,AC \times Cos.\,ACD = Tang.\,BC \times Cos.\,BCD$.

Betoog *van het vijfde.* Volgens de *X. Stell.* is $Tang.\,AD = Tang.\,ACD \times Sin.\,CD$, en $Tang.\,BD = Tang.\,BCD \times Sin.\,CD$, en hieruit volgt: $Sin.\,CD = Tang.\,AD : Tang.\,ACD = Tang.\,BD : Tang.\,BCD$.

§. 1056. I. Aanmerking. Wanneer, zie *Fig.* 392, de loodregte boog *CD* buiten den driehoek valt; dan zal men zich, met weinig moeite, kunnen overtuigen: dat de betoogde vergelijkingen, in dit geval, nog zullen blijven plaats hebben: dan, men zal, in dezen toestand der figuur, de goniometrische lijnen der hoeken en bogen, het zij, naar de eigenlijke waarde dezer hoeken en bogen, het zij naar den stand, welke zij met betrekking tot de oorspronkelijke figuur 391, (zie §. 1050.) verkrijgen, naar de bekende beginselen van §. 534 en 535, positief of negatief moeten aannemen.

§. 1057. II. Aanmerking. *Fig.* 392. Men zal, bij een weinig nadenkens, bevinden: dat de betoogde vergelijkingen ook gelden voor de bogen *AE*, *BE*, en de hoeken *ACE* en *BCE*, welke, door den loodregten boog *CE*, in de figuur ontstaan.

XVII. Stelling. *Fig.* 391.

§. 1058. *Wanneer men, uit den tophoek C van eenen scheefhoekigen bolvormigen driehoek ABC, eenen loodregten boog CD op de overstaande zijde AB laat vallen; dan zullen de betrekkingen, welke 'er tusschen de twee andere zijden en hoeken, en tusschen de deelen van de basis en den tophoek bestaan, door de volgende vergelijkingen worden uitgedrukt:*

$$Tang.\tfrac{1}{2}(AD-BD)=Cot.\tfrac{1}{2}AB\times Tang.\tfrac{1}{2}(AC+BC)\times Tang.\tfrac{1}{2}(AC-BC) \quad \ldots \quad (8)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}(ACD-BCD)=Tang.\tfrac{1}{2}C\times Tang.\tfrac{1}{2}(B+A)\times Tang.\tfrac{1}{2}(B-A) \quad \ldots \quad (9)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}(ACD-BCD)=Cot.\tfrac{1}{2}C\times\frac{Sin.(AC-BC)}{Sin.(AC+BC)} \quad (10)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}(AD-BD)=Tang.\tfrac{1}{2}AB\times\frac{Sin.(B-A)}{Sin.(A+B)} \quad \ldots \quad (11)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}(B-A)=Cot.\tfrac{1}{2}C\times\frac{Sin.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{Sin.\tfrac{1}{2}(AC+BC)} \quad \ldots \quad (12)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}(B+A)=Cot.\tfrac{1}{2}C\times\frac{Cos.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{Cos.\tfrac{1}{2}(AC+BC)} \quad \ldots \quad (13)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}(AC-BC)=Tang.\tfrac{1}{2}AB\times\frac{Sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{Sin.\tfrac{1}{2}(A+B)} \quad (14)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}(AC+BC)=Tang.\tfrac{1}{2}AB\times\frac{Cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}{Cos.\tfrac{1}{2}(A+B)} \quad (15)$$

BE-

Betoog. Deze vergelijkingen, welke, naar Neper, deszelfs uitvinder, de *Neperiaansche Analogien* genoemd worden, kunnen, uit de vergelijkingen van de voorgaande stelling, ligtelijk worden afgeleid.

De vergelijking N° (8) wordt, uit de evenredigheid, $Cos.\,AC : Cos.\,AD = Cos.\,BC : Cos.\,BD$, met behulp van de *IX. Stell. II. B.*, en de *VIII. Stell. VIII. B.* afgeleid.

N° (9) volgt uit $Cos.\,A : Sin.\,ACD = Cos.\,B : Sin.\,BCD$, indien men namelijk de beginselen van de *IX. Stell. II. B.*, en *VII en VIII. Stell. VIII. B.* op deze evenredigheid toepast.

N° (10) volgt de evenredigheid, $Tang.\,AC : Tang.\,BC = Cos.\,BCD : Cos.\,ACD$, indien men op dezelve de beginselen van de *VIII. Stell. II. B.*, en van de *VIII en IX. Stell. VIII. B.* toepast.

N° (11) volgt uit $Tang.\,A : Tang.\,B = Sin.\,BD : Sin.\,AD$, en uit de *VIII. Stell. II. B.*, *VII en XI. Stell. VIII. B.*

De twee vergelijkingen N° (12) en (13), welke bij elkander behooren, volgen uit N° (9) en (10). Wanneer men de waarden van $Tang.\,\frac{1}{2}(ACD - BCD)$, in N° (9) en (10) voorkomende, met elkander vergelijkt, vindt men, met behulp van het *IV. Gev. III. Stell. VIII. B.*

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}(B+A) \times Tang.\,\tfrac{1}{2}(B-A) = Cot^2.\,\tfrac{1}{2}C \times \ldots\ldots \frac{Sin.\,\frac{1}{2}(AC-BC) \times Cos.\,\frac{1}{2}(AC-BC)}{Sin.\,\frac{1}{2}(AC+BC) \times Cos.\,\frac{1}{2}(AC+BC)} \ldots\ldots (p)$$

vermenigvuldigt men deze (zie *I. Gev. XV. Stell.*) met

$$\frac{Tang.\,\frac{1}{2}(B-A)}{Tang.\,\frac{1}{2}(B+A)} = \frac{Tang.\,\frac{1}{2}(AC-BC)}{Tang.\,\frac{1}{2}(AC+BC)} = \frac{Sin.\,\frac{1}{2}(AC-BC)}{Cos.\,\frac{1}{2}(AC-BC)} \times \frac{Cos.\,\frac{1}{2}(AC+BC)}{Sin.\,\frac{1}{2}(AC+BC)}$$

verkrijgt men, na uit het product den vierkants-wortel getrokken te hebben,

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}(B-A) = Cot.\,\tfrac{1}{2}C \times \frac{Sin.\,\frac{1}{2}(AC-BC)}{Sin.\,\frac{1}{2}(AC+BC)}$$

en deelt men de vergelijking (p) door de zoo even verkregene; dan vindt men:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}(B+A) = Cot.\,\tfrac{1}{2}C \times \frac{Cos.\,\frac{1}{2}(AC-BC)}{Cos.\,\frac{1}{2}(AC+BC)}$$

De twee vergelijkingen N° (14) en (15), worden, uit de vergelijkingen N° (8) en (11), op dezelfde wijze, afgeleid.

§. 1059. I. Aanmerking Vermits de evenredigheden, waaruit de Neperiaansche Analogien volgen, algemeen zijn, en ook gelden, wan-

neer

neer de loodregte bogen (zie *Fig.* 392,) buiten den driehoek vallen, zijn ook deze analogien voor alle gevallen algemeen. Om die reden, behoeft men zich, bij het begin der berekening, niet te bekommeren, of de loodregte boog binnen of buiten den driehoek zal vallen; noch ook niet, welke der twee loodregte bogen, bij het tweede geval, in de berekening zullen te pas komen; want de teekens, welke de goniometrische lijnen verkrijgen, beslissen, bij de uitkomst der berekening, deze omstandigheid.

Nemen wij, bij voorbeeld, de eerste vergelijking,

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(AD - BD) = \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}AB \times \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(AC + BC) \times \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(AC - BC)$$

door welke, wanneer de drie zijden gegeven zijn, het verschil van de deelen van de basis, en eindelijk de deelen van de basis zelve gevonden worden. Want stellen wij $\frac{1}{2}(AD - BD) = P$; dan is:

$$AD = \tfrac{1}{2}AB + P; \quad \text{en } BD = \tfrac{1}{2}AB - P.$$

Omdat nu de zijden van eenen bolvormigen driehoek, alle, zonder onderscheid, minder dan 180° zijn, zijn *Cot.* $\frac{1}{2}AB$ en .... Tang. $\frac{1}{2}(AB - BC)$ altijd positief. Wanneer dan $AC + BC < 180°$ is; dan zal Tang. $\frac{1}{2}(AD + BD)$ positief zijn, en Tang. $\frac{1}{2}(AD - BD)$ kan dan ook geene andere dan eene positieve waarde hebben. Hieruit volgt dan: dat, wanneer $AC > BC$ is, ook $AD > BD$ zal zijn. Maar is $AC + BC > 180°$, dan zal Tang. $\frac{1}{2}(AD - BD)$ negatief zijn: nu kan deze Tangens om geene andere reden negatief zijn, dan, omdat $AD - BD > 180°$, of, omdat $AD - BD$ negatief is: het eerste is onmogelijk, omdat AD alsdan grooter dan 180° zou zijn. Het verschil $AD - BD$ moet dan negatief zijn, of $BD > AD$. Hieruit volgt dus: *dat zoo lang de som van de opstaande zijden minder dan twee regte hoeken is, het grootste stuk van de basis aan de grootste der opstaande zijden zal gelegen zijn; doch, dat het tegendeel zal plaats hebben, wanneer de som der opstaande zijden grooter dan* 180° *is.* CAGNOLI (zie Trig. §. 1074, Ed. de 1808.) vergist zich, wanneer hij zegt: „ *Dans tous les cas on trouvera pour le plus grand segment celui qui est adjacent au plus grand des deux côtés.*"

Nemen wij nu: dat P positief is; dan is (*zie boven*,) $AD = \frac{1}{2}AB + P$ en $BD = \frac{1}{2}AB - P$: zoo lang dan $P < \frac{1}{2}AB$ is, blijven de waarden van AD en BD positief; maar is $P > \frac{1}{2}AB$, dan zal AD positief en BD negatief worden, en de loodregte boog CD, zal buiten den hoek B (welke, omdat $AC > BC$ is, stomp is,) vallen. Neemt men P negatief; dan worden de bovenstaande vergelijkingen

AD

$AD = \frac{1}{2}AB - P$ en $BD = \frac{1}{2}AB + P$, en de loodregte boog zal binnen of buiten den driehoek, en wel, buiten den ſcherpen hoek A, vallen, naar dat P kleiner of grooter dan $\frac{1}{2}AB$ is. Men verkeert derhalve in een verkeerd begrip, wanneer men gelooft: *dat de loodregte boog altijd buiten den ſtompen hoek valt. Hij valt* (ten minſte, wanneer men de Neperiaanſche Analogien berekent,) *buiten den ſtompen hoek, wanneer de ſom der opſtaande zijden minder dan* 180° *is, en buiten den ſcherpen hoek, wanneer die ſom grooter dan* 180° *is.* Wanneer $AC + BC = 180°$ en AC niet gelijk BC is; dan is de driehoek altijd ſtomphoekig, en omdat één boog, welks Tangens onbepaald groot is, zoowel gelijk aan $-90°$ als aan $+90°$ kan zijn; wordt, in dit geval, $AD = \frac{1}{2}AB \pm 90°$, en $BD = \frac{1}{2}AB \mp 90°$, en dan zal, zie, *Fig.* 392, $AE = BD$ en $BE = AD$ zijn, hetgeen ook nog, door andere beginſelen, kan geſtaafd worden.

§. 1060. II. Aanmerking. Dezelfde aanmerking geldt ten aanzien van de tweede, derde en vierde analogien, en wat de vijfde en zesde dezer analogien aanbelangt, het oppervlakkig inzien der vergelijkingen is genoeg, om te ontwaren, dat de teekens van $Tang.\ \frac{1}{2}(B - A)$ en $Tang.\ \frac{1}{2}(B + A)$ gelijk ook die van $Tang.\ \frac{1}{2}(AC - BC)$ en .... $Tang.\ \frac{1}{2}(AC + BC)$ altijd poſitief moeten zijn.

§. 1061. III. Aanmerking. De betoogde Neperiaanſche Analogien kunnen dienen, om, het zij de deelen van de baſis, het zij de deelen van den tophoek te berekenen, wanneer, of de drie zijden, of de drie hoeken, of de opſtaande zijden met den tophoek, of de baſis, met de hoeken aan de baſis, gegeven zijn. Wanneer nu de deelen van de baſis of van den tophoek zijn bekend geworden, zal men, met behulp van de regthoekige bolvormige driehoeken, ACD en BCD, van welke nu altijd twee termen bekend zijn, de onbekende hoeken of zijden van den bolvormigen driehoek kunnen berekenen, zoo als op zijnen tijd omſtandiger zal verklaard worden.

XVIII. Stelling. *Fig.* 391.

§. 1062. *De Coſinus van elke zijde van eenen bolvormigen driehoek wordt gevonden, wanneer men de Coſinus van den overſtaanden hoek met het product van de Sinusſen der twee andere zijden vermenigvuldigt, en bij dit product het product van de Coſinusſen der twee andere zijden optelt* Dat is:

$$Cos.\,BC = Cos.\,A \times Sin.\,AB \times Sin.\,AC + Cos.\,AB \times Cos.\,AC \quad (16)$$

Betoog. Men låte, uit het hoekpunt van den tophoek C, den loodregten boog CD op de basis vallen; dan is volgens de *XVI Stelling*, $Cos.\ AC : Cos.\ AD = Cos.\ BC : Cos.\ BD$; of wel, $Cos.\ BC \times Cos.\ AD = Cos.\ AC \times Cos.\ BD$. Nu kan men, in plaats van $Cos.\ BD$, stellen: $Cos.\ (AB - AD) =$ (zie *III. Stell. VIII. B.*) $Cos.\ AB \times Cos.\ AD + Sin.\ AB \times Sin.\ AD$, en dan verandert de laatst voorgaande vergelijking, door deze substitutie, in de volgende:

$$Cos.\ BC \times Cos.\ AD = Cos.\ AC \times Cos.\ AB \times Cos.\ AD + Cos.\ AC \times Sin.\ AB \times Sin.\ AD$$

Men deele de leden dezer vergelijking door $Cos.\ AD$, en schrijve, voor $Sin.\ AD : Cos.\ AD$, hare waarde, $Tang.\ AD$; dan verkrijgt men:

$$Cos.\ BC = Cos.\ AC \times Cos.\ AB + Cos.\ AC \times Sin.\ AB \times Tang.\ AD$$

maar nu is (*XIV. Stell.*) $Tang.\ AD = Tang.\ AC \times Cos.\ A = \frac{Sin.\ AC}{Cos.\ AC} \times Cos.\ A$. Stelt men dan deze waarde van $Tang.\ AD$ in de laatste vergelijking; dan verkrijgt men eindelijk:

$$Cos.\ BC = Cos.\ A \times Sin.\ AB \times Sin.\ AC + Cos.\ AB \times Cos.\ AC.$$

§. 1063. I. Gevolg. Wanneer men, uit de betoogde vergelijking, de waarde van $Cos.\ A$ afzondert; dan verkrijgt men:

$$Cos.\ A = \frac{Cos.\ BC - Cos.\ AB \times Cos.\ AC}{Sin.\ AB \times Sin.\ AC} \quad . \ . \ . \quad (17)$$

en dit leert ons: *dat men de Cosinus van elken hoek van eenen bolvormigen driehoek verkrijgen zal, wanneer men de Cosinus van de zijde, tegen over dien hoek staande, vermindert met het product van de Cosinussen der zijden, welke om dien hoek staan, en dit verschil door het product der Sinussen van de zijden, welke om dien hoek staan, deelt.*

§. 1064. II. Gevolg. *Fig.* 391. Omdat (*XIV. Stell.*) $Cos.\ A = \frac{Tang.\ AD}{Tang.\ AC} = Tang.\ AD \times \frac{Cos.\ AC}{Sin.\ AC}$ is, zal men vinden:

$$Tang.\ AD = \frac{Cos.\ BC - Cos.\ AB \times Cos.\ AC}{Sin.\ AB \times Cos.\ AC} \quad . \ . \ . \quad (18)$$

Op dezelfde wijze, zal men vinden:

$$Tang.\ BD = \frac{Cos.\ AC - Cos.\ AB \times Cos.\ BC}{Sin.\ AB \times Cos.\ BC} \quad . \ . \ . \quad (19)$$

Door deze vergelijkingen, zullen de deelen van de basis gevonden worden, wanneer de drie zijden bekend zijn.

§. 1065. I. Aanmerking. De betoogde vergelijkingen gelden voor alle

alle soorten van bolvormige driehoeken. Door de vergelijking, N° (16), kan, wanneer twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijn, de derde zijde berekend worden; door de vergelijking, N° (17), vindt men éénen der hoeken, uit de drie bekende zijden; en, door N° (18) en (19), de deelen van de basis, uit de drie gegevene zijden. De teekens van *Cos. BC*, *Cos. A*, *Tang. AD* en *Tang. BD*, in N° (16), (17), (18) en (19), hangen af van de waarde en van de teekens, welke de goniometrische lijnen der gegevene hoeken en bogen, overëenkomstig de bekende regels voor de teekens, verkrijgen.

§. 1066. II. Aanmerking. Wanneer men in de vergelijking, N° (16), $A = 90°$ stelt; dan is $Cos. A = 0$, en deze vergelijking verandert in: $Cos. BC = Cos. AB \times Cos. AC$, welke, (zie *XI. Stell.*) eene reeds bewezene eigenschap van den regthoekigen bolvormigen driehoek voorstelt.

XIX. Stelling. *Fig.* 391.

§. 1067. *De Cosinus van elken hoek van eenen bolvormigen driehoek wordt gevonden, wanneer men de Cosinus van de overstaande zijde, met het product van de Sinussen der twee andere hoeken vermenigvuldigt, en dit product met het product van de Cosinussen der twee andere hoeken vermindert. Dat is:*

$$Cos. B = Cos\ AC \times Sin. A \times Sin. C - Cos\ A \times Cos\ C \quad (20)$$

Betoog. Volgens de *XVI. Stell.* is $Cos. B : Sin. BCD = Cos. A : Sin. ACD$; derhalve $Cos. B \times Sin. ACD = Cos. A \times Sin. BCD =$ (zie *III. Stell. VIII. B.*) $Cos. A \times Sin. (ACB - ACD) = Cos. A \times Sin. ACB \times Cos. ACD - Cos. A \times Cos. ACB \times Sin. ACD$. Deelt men deze vergelijking door $Sin. ACD$; dan verkrijgt men:

$$Cos. B = Cos. A \times Sin. C \times Cot. ACD - Cos. A \times Cos. C$$

Maar nu is (*XIII. Stell.*) $Cot. ACD = Cos. AC \times Tang. A = Cos. AC \times Sin. A : Cos. A$; derhalve zal men, na behoorlijke substitutie, verkrijgen:

$$Cos. B = Cos. AC \times Sin. A \times Sin. C - Cos. A \times Cos. C.$$

§. 1068. I. Gevolg. Uit de betoogde vergelijking volgt:

$$Cos. AC = \frac{Cos. B + Cos. A \times Cos. C}{Sin. A \times Sin. C} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

dat is: *Men verkrijgt de Cosinus van ééne der zijden, wanneer men de Cosinus van den overstaanden hoek optelt met het product van de Cosinussen der twee andere hoeken, en deze som deelt door het* *product van de Sinusſen der hoeken, welke aan die zijde gelegen zijn.*

§. 1069. II. Gevolg. Vermits (*XIII. Stell.*) $Cos.\,AC = Cot.\,ACD \times Cot.\,A = Cot.\,ACD \times Cos.\,A : Sin.\,A$ is, zal men deze waarde van $Cos.\,AC$, met die van vergelijking N° (21) vergelijkende, vinden:

$$Cot.\,ACD = \frac{Cos.\,B + Cos.\,A \times Cos.\,C}{Cos.\,A \times Sin.\,C} \quad \ldots \ldots (22)$$

en men zal, door eene ſoortgelijke ſubſtitutie, vinden:

$$Cot.\,BCD = \frac{Cos.\,A + Cos.\,B \times Cos.\,C}{Cos.\,B \times Sin.\,C} \quad \ldots \ldots (23)$$

§. 1070. I. Aanmerking. Men zal door N° (20) den derden hoek vinden, wanneer ééne zijde, met de aanliggende hoeken, gegeven zijn; door N° (21) ééne der zijden, wanneer de drie hoeken gegeven zijn, en door N° (22) en (23), met dezelfde gegevens, de deelen, waarin de hoeken door de loodregte bogen verdeeld worden.

§. 1071. II. Aanmerking. *Fig.* 390. Men kan de vergelijking, N° (20) uit N° (16), met behulp van de eigenſchappen van den aspunts driehoek, afleiden. Men heeft namelijk

$$Cos.\,BC = Cos.\,A \times Sin.\,AB \times Sin.\,AC + Cos.\,AB \times Cos.\,AC$$

nu is $Cos.\,BC = -Cos.\,A'$; $Cos.\,A = -Cos.\,B'C'$; $Sin.\,AB = Sin.\,C'$; $Sin.\,AC = Sin.\,B'$; $Cos.\,AB = -Cos.\,C'$ en $Cos.\,AC = -Cos.\,B'$.
Men verkrijgt derhalve:

$$-Cos.\,A' = -Cos.\,B'C' \times Sin.\,C' \times Sin.\,B' + Cos.\,C' \times Cos.\,B'$$

of, na omkeering van al de teekens,

$$Cos.\,A' = Cos.\,B'C' \times Sin.\,C' \times Sin.\,B' - Cos.\,C' \times Cos.\,B'$$

Op dezelfde wijze wordt N° (21) uit N° (17) afgeleid.

§. 1072. III. Aanmerking. Wanneer men in N° (21) $AC = 90°$ ſtelt; dan wordt $Cos.\,B = -Cos.\,A \times Cos.\,B$, hetwelk met N° (3) van §. 1044. overéénſtemt.

XX. Stelling. *Fig.* 391.

§. 1073. *Wanneer men ééne zijde AC met de twee aangelegene hoeken A en C, als bekend, aanneemt; dan verkrijgt men de Tangens van ééne der onbekende zijden, wanneer men de Sinus van de bekende zijde deelt door de ſom van de producten, die ontſtaan, wanneer men de Cotangens van den hoek over de onbekende zijde, met de Sinus van den bekenden hoek, aan die onbekende zijde gelegen, vermenigvuldigt, en*

voorts

voorts de Cosinus van dien laatsten hoek, met de Cosinus van de bekende zijde. Dat is:

$$Tang.\,BC = \frac{Sin.\,AC}{Sin.\,C \times Cot.\,A + Cos.\,C \times Cos.\,AC} \quad . \; . \; (24)$$

$$Tang.\,AB = \frac{Sin.\,AC}{Sin.\,A \times Cot.\,C + Cos.\,A \times Cos.\,AC} \quad . \; . \; (25)$$

Betoog. Volgens de *XVI. Stell.* is $Tang.\,BC \times Cos.\,BCD = Tang.\,AC \times Cos.\,ACD$; dat is, $Tang.\,BC \times Cos.(ACB - ACD) = Tang.\,AC \times Cos.\,ACD$; of, (zie *III. Stell. VIII. B.*) voor ..... $Cos.(ACB - ACD)$ hare waarde schrijvende:

$$Tang.\,BC \times (Cos.\,C \times Cos.\,ACD + Sin.\,C \times Sin.\,ACD) = Tang.\,AC\;Cos.\,ACD.$$

Deelt men deze vergelijking door $Cos.\,ACD$; dan verkrijgt men:

$$Tang.\,BC \times (Cos.\,C + Sin.\,C \times Tang.\,ACD) = Tang.\,AC$$

Nu is (*XIII. Stell.*) $Tang.\,ACD = 1 : (Cos.\,AC \times Tang.\,A)$: stelt men dan deze waarde in de voorgaande vergelijking; dan verkrijgt men:

$$Tang.\,BC \times \left\{ Cos.\,C + \frac{Sin.\,C}{Cos.\,AC \times Tang.\,A} \right\} = Tang.\,AC$$

of, na den tweeden factor van het eerste lid dezer vergelijking met $Cos.\,AC \times Tang.\,A$ vermenigvuldigd en gedeeld te hebben:

$$Tang.\,BC \times \left\{ \frac{Sin.\,C + Cos.\,C \times Tang.\,A \times Cos.\,AC}{Cos.\,AC \times Tang.\,A} \right\} = Tang.\,AC,$$

deelt men deze vergelijking door den tweeden factor; dan verkrijgt men:

$$Tang.\,BC = \frac{Tang.\,AC \times Cos.\,AC \times Tang.\,A}{Sin.\,C + Cos.\,C \times Tang.\,A \times Cos.\,AC}$$

Schrijft men nu, in plaats van $Tang.\,AC \times Cos.\,AC$ de waarde $Sin.\,AC$, en vermenigvuldigt men den teller en den noemer der breuk met $Cot.\,A$; dan zal men, omdat $Tang.\,A \times Cot.\,A = 1$ is, vinden:

$$Tang.\,BC = \frac{Sin.\,AC}{Sin.\,C \times Cot.\,A + Cos.\,C \times Cos.\,AC}$$

Laat men uit A eenen loodregten boog op BC vallen; dan zal men, op dezelfde wijze, de tweede vergelijking betoogen.

§. 1074. I. Gevolg. Uit de betoogde vergelijking volgt terstond:

$$Cot.\,BC = \frac{Sin.\,C \times Cot.\,A}{Sin.\,AC} + Cos\,C \times Cot.\,AC \quad . \; . \; (26)$$

$$Cot.\,AB = \frac{Sin.\,A \times Cot.\,C}{Sin.\,AC} + Cos.\,A \times Cot.\,AC \quad . \; . \; (27)$$

§. 1075. II. Gevolg. *Fig.* 391. Neemt men AB, A en B, als bekend aan; dan zal:

$$Tang.\,AC = \frac{Sin.\,AB}{Sin.\,A \times Cot.\,B + Cos.\,A \times Cos.\,AB}$$

zijn, en, volgens de *XIV. Stell.* is $Tang.\,AC = Tang.\,AD : Cos.\,A$; gevolgelijk is:

$$\frac{Tang.\,AD}{Cos.\,A} = \frac{Sin.\,AB}{Sin.\,A \times Cot.\,B + Cos.\,A \times Cos.\,AB}$$

waaruit men, zonder veel moeite, vindt:

$$Tang.\,AD = \frac{Sin.\,AB}{Cos.\,AB + Tang.\,A \times Cot.\,B} \quad \ldots \quad (28)$$

op dezelfde wijze zal men vinden:

$$Tang.\,BD = \frac{Sin.\,AB}{Cos.\,AB + Tang.\,B \times Cot.\,A} \quad \ldots \quad (29)$$

of wel, door omkeering dezer vergelijkingen,

$$Cot.\,AD = \frac{Tang.\,A \times Cot.\,B}{Sin.\,AB} + Cot.\,AB \quad \ldots \quad (30)$$

$$Cot.\,BD = \frac{Tang.\,B \times Cot.\,A}{Sin.\,AB} + Cot.\,AB \quad \ldots \quad (31)$$

§. 1076 I. Aanmerking. Met behulp der vergelijkingen, welke in deze ſtelling betoogd zijn, zal men, wanneer van eenen bolvormigen driehoek ééne zijde met de aangelegene hoeken gegeven zijn, elk der twee onbekende zijden kunnen berekenen; doch, men zal wederom in de berekening oplettend moeten nagaan, welk teeken de Tangenten der onbekende zijden verkrijgen; want deze zijden zullen kleiner of grooter dan een quadrant zijn, naar dat de Tangenten, in den loop der berekening, het poſitieve of negatieve teeken verkrijgen, en deze teekens hangen af van de poſitieve of negatieve waarden, welke aan de termen van de noemers der breuken, de waarde dezer Tangenten uitdrukkende, ingevolge hunne waarde, moeten gegeven worden.

§. 1077. II. Aanmerking. Stellen wij in de vergelijking (24) den noemer van de breuk gelijk nul; dan is:

$$Sin.\,C \times Cot.\,A = -\,Cos.\,C \times Cos.\,AC$$

maar dan is $Tang.\,BC$ onbepaald groot en $BC = 90°$; de driehoek ABC is dan regtzijdig. Deelen wij nu de vergelijking door $Sin.\,C$; dan verkrijgt men: $Cot.\,A = -\,Cot.\,C \times Cos.\,AC$, vergelijking, welke van N° (7), zie §. 1044. niet onderſcheiden is.

XXI. STELLING. *Fig.* 391.

§. 1078. *Wanneer men eenen hoek B, met de twee aanliggende zijden, AB en BC, van eenen bolvormigen driehoek ABC als bekend aanneemt; dan zal men de Tangens van éénen der onbekende hoeken verkrijgen; wanneer men de Sinus van den bekenden hoek deelt door het verschil, dat men verkrijgt, wanneer men van het product van de Sinus der bekende zijde, welke aan den onbekenden hoek ligt, vermenigvuldigd met de Cotangens der andere bekende zijde, aftrekt het product van de Cosinus der bekende zijde, aan den onbekenden hoek, met de Cosinus van den bekenden hoek.* Dat is:

$$Tang.\,A = \frac{Sin.\,B}{Sin.\,AB \times Cot.\,BC - Cos.\,AB \times Cos.\,B} \quad (32)$$

$$Tang.\,C = \frac{Sin.\,B}{Sin.\,BC \times Cot.\,AB - Cos.\,BC \times Cos.\,B} \quad (33)$$

BETOOG. Volgens de *XVI. Stell.* is $Tang.\,A \times Sin.\,AD = Tang.\,B \times Sin.\,BD$; dat is $Tang.\,A \times Sin.(AB - BD) = Tang.\,B \times Sin.\,BD$; dat is (zie *III. Stell. VIII. B.*)

$$Tang.\,A \times (Sin.\,AB \times Cos.\,BD - Cos.\,AB \times Sin.\,BD) = Tang.\,B \times Sin.\,BD$$

Deelt men deze vergelijking door $Sin.\,BD$; dan verkrijgt men:

$$Tang.\,A \times (Sin.\,AB \times Cot.\,BD - Cos.\,AB) = Tang.\,B$$

Nu is (zie *XIV. Stell.*) $Tang.\,BD = Cos.\,B \times Tang.\,BC$, of $Cot.\,BD = 1 : Cos.\,B \times Tang.\,BC$; men stelle deze waarde van $Cot.\,BD$ in de voorgaande vergelijking; dan verandert zij in:

$$Tang.\,A \times \left\{ \frac{Sin.\,AB - Cos.\,AB \times Tang.\,BC \times Cos.\,B}{Tang.\,BC \times Cos.\,B} \right\} = Tang.\,B$$

en vermenigvuldigt men den teller en den noemer dezer breuk met $Cot.\,BC$; dan verkrijgt men:

$$Tang.\,A \times \left\{ \frac{Sin.\,AB \times Cot.\,BC - Cos.\,AB \times Cos.\,B}{Cos.\,B} \right\} = Tang.\,B$$

waaruit, (wanneer men door den tweeden factor van het voorste lid der vergelijking deelt,) onmiddelijk volgt:

$$Tang.\,A = \frac{Sin.\,B}{Sin.\,AB \times Cot.\,BC - Cos.\,AB \times Cos.\,B}$$

De tweede vergelijking wordt, indien men uit A eenen loodregten boog op BC laat vallen, op dezelfde wijze, betoogd.

§. 1079. I. Gevolg. Uit de betoogde vergelijkingen volgt onmiddelijk:

$$Cot.A = \frac{Sin.AB \times Cot.BC}{Sin.B} - Cos.AB \times Cot.B \quad . \; . \; (34)$$

$$Cot.B = \frac{Sin.BC \times Cot.AB}{Sin.B} - Cos.BC \times Cot.B \quad . \; . \; (35)$$

§. 1080. II. Gevolg. *Fig.* 392. Neemt men de AC, BC, en hoek C als bekend aan; dan zal men, met behulp van de *XIII. Stell.* vinden:

$$Tang.ACD = \frac{Tang.AC \times Cot.BC}{Sin.C} - Cot.C \quad . \; . \; (36)$$

$$Tang.BCD = \frac{Tang.BC \times Cot.AC}{Sin.C} - Cot.C \quad . \; . \; (37)$$

$$Cot.ACD = \frac{Sin.C}{Tang.AC \times Cot.BC - Cos.C} \quad . \; . \; (38)$$

$$Cot.BCD = \frac{Sin.C}{Tang.BC \times Cot.AC - Cos.C} \quad . \; . \; (39)$$

§. 1081. I. Aanmerking. Men zal, door de betoogde vergelijkingen (32) en (33), de onbekende hoeken van eenen bolvormigen driehoek vinden, wanneer twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijn: dan, men zal, in de dadelijke berekening, op de teekens behooren acht te geven, om het ware teeken van de Tangenten der hoeken te bepalen, aan welke het kenbaar zal zijn, of de hoeken scherp of stomp zijn.

§. 1082. II. Aanmerking. Men zal de vergelijkingen (32) en (33) uit de vergelijkingen (24) en (25), met behulp van den aspunts driehoek, vinden kunnen, mits men, in deze afleiding, de teekens behoorlijk verandere. Steenstra heeft, (zie *Klootsche Drieh. Bladz.* 155.) door zulks niet in acht te neemen, de teekens van den tweeden term van den noemer der breuk, die de waarde van de Tangens van eene zijde uitdrukt, verkeerd genomen.

§. 1083. III. Aanmerking. Stellen wij, in N° (32), de hoek $A = 90°$; dan moet $Sin.AB \times Cot.BC - Cos.AB \times Cos.B = 0$ zijn, en deelt men deze vergelijking door $Sin.AB$; dan zal men $Cot.BC = Cos.B \times Cot.AB$, of, dat hetzelfde is, $Tang.AB = Cos.B \; Tang.BC$, verkrijgen, hetwelk met het bewezene in de *XIV. Stelling* overéénstemt.

Toe-

Toepasſing der gelegde gronden op de oploſſing der Bolvormige Scheefhoekige Driehoeken.

§. 1084. De eigenſchappen der bolvormige ſcheefhoekige driehoeken, welke van de XV tot de XXI *Stellingen* betoogd zijn, zijn genoegzaam, niet ſlechts, om alle de gevallen der ſcheefhoekige bolvormige driehoeken optelosſen, maar ook alle meer of min gewigtige vraagſtukken, tot deze ſoort van driehoeken betrekking hebbende. Men kan de oploſſing der ſcheefhoekige driehoeken (zie *I. Bep.* §. 986.) tot vier hoofdgevallen brengen.

1° Wanneer ééne zijde en twee hoeken
2° Wanneer één hoek en twee zijden
3° Wanneer de drie hoeken
4° Wanneer de drie zijden gegeven zijn.

De twee eerſte hoofdgevallen houden (en zulks, omdat de ſom van de hoeken van eenen bolvormigen driehoek veranderlijk is, en tusſchen $2R$ en $6R$ valt,) twee andere in; zoodat alle eenvoudige gevallen (bijzondere vraagſtukken uitgezonderd,) tot ééne dezer zes behooren:

1° Gegeven zijnde de drie zijden
2° De drie hoeken
3° Twee zijden met den ingeſlotenen hoek
4° Ééne zijde met de twee aanliggende hoeken
5° Twee zijden met éénen hoek over ééne dezer zijden
6° Twee hoeken met ééne zijde over éénen dezer hoeken.

Wij zullen, in de oploſſing van zoo vele onderſcheidene vraagſtukken, als hier gevallen opgeteld zijn, uit de reeds betoogde beginſelen, de regels leeren afleiden, waardoor men, in elk geval, de onbekende hoeken en zijden vinden kan.

§. 1085. VI. Vraagstuk. Voor het I. Geval. *De drie zijden van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de formulen of voorſchriften ter berekening van deszelfs hoeken te vinden?*

I. Oplossing. *Fig.* 393. Wij zullen, in de oploſſing van dit en de volgende vraagſtukken, de hoeken van eenen bolvormigen driehoek *ABC*, door de letters A, B en C, en de overſtaande zijden door a,

b en c uitdrukken; en, daar het noodig zal zijn, zullen wij loodregte bogen, uit de hoekpunten der hoeken op de overstaande zijden laten vallen, en onderstellen: dat deze loodregte bogen (zie *III. Aanmerk. VII. Bep.*) binnen den driehoek vallen, en de deelen der zijden en hoeken, gelijk in de figuur aangewezen is, uitdrukken AD door p, BD door q; hoek ACD door P, en hoek BCD door Q, *enz.* Nu is *XVII. Stell.* (de loodregte boog CD gebruikende)

$$Tang.\tfrac{1}{2}(p-q)=Tang.\tfrac{1}{2}(a+b)\times Tang.\tfrac{1}{2}(b-a)\times Cot.\tfrac{1}{2}c$$

Stellen wij dan $\frac{1}{2}(p-q)=\phi$; dan wordt, door de berekening dezer vergelijking, ϕ bekend, en wij hebben:

$$p=\tfrac{1}{2}c+\phi,\quad \text{en } q=\tfrac{1}{2}c-\phi.$$

De regthoekige bolvormige driehoeken ADC en BDC geven, (zie Vergel. (25) of (28) van de *Tafel, Bladz.* 403.)

$$Cos.A=Tang.p\times Cot.b=Tang.(\tfrac{1}{2}c+\phi)\times Cot.b$$
$$Cos.B=Tang.q\times Cot.a=Tang.(\tfrac{1}{2}c-\phi)\times Cot.a$$

Men vindt, door deze vergelijkingen, de Cosinussen van twee der onbekende hoeken; dan, aangezien de loodregte bogen, welke, uit de hoeken A en B, op de overstaande zijden vallen, tot dergelijke vergelijkingen brengen, en men door elk stelsel van vergelijkingen de Cosinussen van twee onderscheidene hoeken verkrijgt, kan men de drie volgende stelsels van vergelijkingen stellen:

1° $$Tang.\phi=Tang.\tfrac{1}{2}(a+b)\times Tang.\tfrac{1}{2}(b-a)\times Cos.\tfrac{1}{2}c$$
$$Cos.A=Tang.(\tfrac{1}{2}c+\phi)\times Cot.b$$
$$Cos.B=Tang.(\tfrac{1}{2}c-\phi)\times Cot.a$$

2° $$Tang.\phi'=Tang.\tfrac{1}{2}(b+c)\times Tang.\tfrac{1}{2}(c-b)\times Cot.\tfrac{1}{2}a$$
$$Cos.B=Tang.(\tfrac{1}{2}a+\phi')\times Cot.c$$
$$Cos.C=Tang.(\tfrac{1}{2}a-\phi')\times Cot.b$$

3° $$Tang.\phi''=Tang.\tfrac{1}{2}(c+a)\times Tang.\tfrac{1}{2}(a-c)\times Cot.\tfrac{1}{2}b$$
$$Cos.C=Tang.(\tfrac{1}{2}b+\phi'')\times Cot.a$$
$$Cos.A=Tang.(\tfrac{1}{2}b-\phi'')\times Cot.c$$

De wijze, waarop men elk dezer drie stelsels gebruiken moet, is reeds, in de Aanmerkingen op de *XVII. Stell. Bladz.* 415, en verv. gezegd. Wij voegen 'er nog bij: dat, indien b niet $> a$ is, $b-a$ negatief wordt, in welk geval ook $Tang.\frac{1}{2}(b-a)$ negatief zal zijn. Om nu den Leerling in de berekening dezer vergelijkingen te oefenen en tevens, door eene dadelijke proef, de waarheid van hetgeen, in de Aanmerkingen op de *XVII. Stell.* gezegd is, te bevestigen, zal het nuttig zijn, dat hij het volgend voorbeeld berekene.

§. 1086. I. VOORBEELD. *Fig.* 394. *Wanneer de hoeken, welke de op-*

opstaande ribben eener driehoekige piramide, twee aan twee, genomen, met elkander maken, gegeven zijn; te weten, hoek $ADB = 36° 32'$; *hoek* $ADC = 152° 30'$ *en hoek* $BDC = 131° 37'$; *vraagt men: hoe groot de standhoeken der opstaande zijvlakken zijn?*

Berekening. Men plaatse, in het toppunt D der piramide, eenen bol, welks oppervlak, door de opstaande zijvlakken, volgens de zijden van den bolvormigen driehoek ABC, gesneden wordt; dan zijn deze zijden de maat der hoeken ADB, ADC en BDC, en de vraag zal opgelost zijn, wanneer men de hoeken van den bolvormigen driehoek ABC berekent. Deze bolvormige driehoek wordt, in *Fig.* 395, overeênkomstig de uitkomst der berekening, voorgesteld. Berekent men nu de hoeken naar de straks gevondene vergelijkingen; dan zal men vinden:

1°. $\phi = -23° 31' 23'',2$; $\frac{1}{2}c + \phi = -5° 15' 23'',2$; $\frac{1}{2}c - \phi = 41° 47' 23'',2$
$A = 79° 49' 14'',07$; $B = 142° 33' 40''$

2°. $\phi' = -83° 43' 32'',4$; $\frac{1}{2}a + \phi'' = 149° 32' 2'',4$; $\frac{1}{2}a - \phi' = -17° 55' 2'',4$
$B = 142° 33' 40''$; $C = 51° 36' 12''$

3°. $\phi'' = +68° 47' 25'',8$; $\frac{1}{2}b + \phi'' = 145° 2' 25'',8$; $\frac{1}{2}b - \phi'' = 7°$ [illegible]$' 34'',2$
$A = 79° 49' 14'',07$; $C = 51° 36' 12''$.

§. 1087. II. Oplossing. Volgens het *I. Gev. XVIII. Stell.* is:

$$Cos.\,A = \frac{Cos.\,a - Cos.\,b \times Cos.\,c}{Sin.\,b \times Sin.\,c}$$

Trekt men elk lid dezer vergelijking van de éénheid af; dan zal men, omdat (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $1 - Cos.\,A = 2\,Sin^2.\,\frac{1}{2}A$ is, verkrijgen:

$$2\,Sin^2.\,\tfrac{1}{2}A = \frac{Sin.\,b \times Cos.\,c + Cos.\,b \times Cos.\,c - Cos.\,a}{Sin.\,b \times Sin.\,c}$$

maar nu is (*III. Stell. VIII. B.*) $Cos.\,b \times Cos.\,c + Sin.\,b \times Sin.\,c = Cos.\,(b - c)$; derhalve is:

$$2\,Sin^2.\,\tfrac{1}{2}A = \frac{Cos.\,(b - c) - Cos.\,a}{Sin.\,b \times Sin.\,c}$$

Eindelijk is (*VI. St. VIII. B.*) $Cos.\,(b-c) - Cos.\,a = 2\,Sin.\,\frac{1}{2}(a+b-c) \times Sin.\,\frac{1}{2}(a-b+c)$; derhalve zal (alles door *twee* deelende,)

$$Sin^2.\,\tfrac{1}{2}A = \frac{Sin.\,\frac{1}{2}(a+b-c) \times Sin.\,\frac{1}{2}(a-b+c)}{Sin.\,b \times Sin.\,c}$$

zijn. Stelt men nu $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = s$; dan is $\frac{1}{2}(a+b-c) = s - c$, en $\frac{1}{2}(a-b+c) = s - b$, en men zal, na den vierkants-wortel uit elk lid getrokken te hebben, verkrijgen:

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{Sin.\,(s-b) \times Sin.\,(s-c)}{Sin.\,b \times Sin.\,c}}$$

Om dezelfde redenen, zal

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{Sin.(s-a)\times Sin.(s-c)}{Sin.a \times Sin.c}}; \ldots\ldots$$

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{Sin.(s-a)\times Sin.(s-b)}{Sin.a \times Sin.b}}$$

zijn; zijnde altijd $s = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c$.

§. 1088. III. Oplossing. Telt men bij elk lid der vergelijking $Cos.A = \frac{Cos.a - Cos.b \times Cos.c}{Sin.b \times Sin.c}$ de éénheid; dan zal men, met behulp van het *V. Gev. III. Stell. VIII. B.*, de *III. Stell.* en *XI. Stell. VIII. B.* vinden:

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{Sin.s \times Sin.(s-a)}{Sin.b \times Sin.c}}$$

Op dezelfde wijze, zal

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{Sin.s \times Sin.(s-b)}{Sin.a \times Sin.c}};\ Cos.\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{Sin.s \times Sin.(s-c)}{Sin.a \times Sin.b}}$$

zijn, zijnde wederom $s = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c$.

§. 1089. IV. Oplossing. Deelt men de waarden van $Sin.\,\tfrac{1}{2}A$, $Sin.\,\tfrac{1}{2}B$ en $Sin.\,\tfrac{1}{2}C$, door de waarden van $Cos.\,\tfrac{1}{2}B$ en $Cos.\,\tfrac{1}{2}C$, welke in de II en III Oplossingen gevonden zijn; dan zal men (zijnde altijd $s = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c$) verkrijgen:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{Sin.(s-b)\times Sin.(s-c)}{Sin.s \times Sin.(s-a)}};\ enz.$$

Of, stellende $\Omega = \sqrt{\frac{Sin.(s-a)\times Sin.(s-b)\times Sin.(s-c)}{Sin.s}}$;

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\Omega}{Sin.(s-a)};\ Tang.\,\tfrac{1}{2}B = \frac{\Omega}{Sin.(s-b)};\ Tang.\,\tfrac{1}{2}C = \frac{\Omega}{Sin.(s-c)}$$

§. 1090. V. Oplossing. Vermenigvuldigt men de waarde van $Sin.\,\tfrac{1}{2}A$ en $Cos.\,\tfrac{1}{2}A$, in de tweede en derde oplossing gevonden; dan zal men, omdat $Sin.\,\tfrac{1}{2}q \times Cos.\,\tfrac{1}{2}q = 2\,Sin.q$ is, vinden:

$$Sin.A = \frac{\sqrt{[Sin.s \times Sin.(s-a)\times Sin.(s-b)\times Sin.(s-c)]}}{\tfrac{1}{2}Sin.b \times Sin.c}$$

§. 1091. Om de formulen of vergelijkingen, in deze drie laatste oplossingen gevonden, (en welke met die van de *VIII. Stell.* en *Gev. IX. B.* zooveel overëénkomst hebben,) op de berekening in getallen toetepassen, kan men, behalve het voorgaande voorbeeld §. 1086, daartoe het volgende voorbeeld nemen.

§. 1092. II. Voorbeeld. *Fig.* 396. *Men heeft in eenig punt P, den hoek APC, onder welken twee punten A en C, (welke met het standpunt C niet in hetzelfde horizontale of waterpas vlak gelegen zijn,)*

zijn,) gezien worden, waargenomen $73^\circ\ 17'\ 36'',5$, *benevens de hoeken, welke de rigtlijnen* AP *en* CP *met de loodlijn* PT *maken, namelijk* $TPA = 79^\circ\ 11'\ 37''$ *en* $TPC = 83^\circ\ 57'\ 17'',5$. *Men begeert den waargenomen hoek op den gezigteinder of het horizontale vlak overtebrengen?*

Oplossing. In de Geodesie, worden de middelpunten der Torens, Gebouwen of Signalen tot hetzelfde horizontale vlak, dat (offchoon onze Aarde eene platronde gedaante heeft, voor zulk eene kleine uitgestrektheid, waarin drie voorwerpen, die in elkanders gezigt gelegen zijn, zich bevinden,) voor een gedeelte van eenen bol kan aangezien worden, in welks middelpunt de loodlijnen (dat is de rigtingen der draden waaraan gewigten opgehangen zijn,) van de punten P, A en C, zich bevinden. Wanneer men zich dan door het punt P een vlak BPD verbeeldt, op hetwelk de loodlijn PT regthoekig staat; dan zal dit vlak het *horizontale vlak* van het punt P zijn, hetwelk het oppervlak van den Aardbol in het punt P aanraakt; en, wanneer men nu, door de loodlijn PT, en de punten A en C, twee vlakken laat gaan; dan gaan deze vlakken door de loodlijnen der punten A en B, en snijden het horizontale vlak, volgens de lijnen PB en PD, welke als de projectien der gezigtslijnen AP en CP kunnen aangezien worden, en den standhoek BPD der verticale vlakken TPA en TPC (dat is den bolvormigen hoek van den bolvormigen driehoek, welke door de voeten der loodlijnen van P, A en C, op het oppervlak der Aarde gemaakt worden,) bepalen. Deze hoek, uit de gegevene waarnemingen, te bepalen, is hetgeen men noemt, *den waargenomen hoek tot den horizon overtebrengen.*

Verbeelden wij ons nu, dat het middelpunt van eenen bol in het standpunt P geplaatst worde, dan zullen de vlakken APC, APT, CPT en DPB, het oppervlak van dien bol, volgens de bogen FH, EF, EH en IG, snijden, en nu ziet men duidelijk: dat de vraag zal opgelost zijn, indien men den hoek E van den bolvormigen driehoek EFH, waarvan men de drie zijden kent, berekent; want dien hoek is klaarblijkelijk gelijk aan den hoek DPB.

Stellen wij nu den waargenomen hoek $APC = A$; de hoeken TPA en TPC, die men gewonelijk de afstanden van de punten A en C tot het toppunt noemt, gelijk D en d, $s = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}d$; dan zal

$$Sin.\tfrac{1}{2}DPB = \sqrt{\frac{Sin.(s-D) \times Sin.(s-d)}{Sin.D \times Sin.d}}$$

zijn, en men zal vinden, hoek $DPB = 74^\circ\ 5'\ 33'',6$.

§. 1093. III. Voorbeeld. *Fig.* 397. *Ik bevond, op het gewezene Observatorium van de Marine in den* Haag, *hetwelk op* $52^\circ\ 4'\ 49'',5$ *gelegen is, des voormiddags, en op een oogenblik, dat de Zon eene zuidelijke of negatieve afwijking van* $6^\circ\ 17'\ 20'',3$ *had, de hoogte der Zon, door eene sextants meting, (na behoorlijke verbetering, voor de straalbreking en het verschilzigt,) gelijk aan* $18^\circ\ 37'\ 43''$.

Men

Men vraagt: hoe veel tijds voor den middag deze waarneming geschiedde, in welken verticaal de Zon zich bevond, en hoe groot de zoogenaamde parallactische hoek, of de hoek, welke de verticaal met den afwijkings cirkel maakt, op het oogenblik der waarneming was?

BEREKENING. Zij ZHN de oostelijke helft van den gezigteinder, $ZTPN$ de bovenste helft van den middags-cirkel, T het Toppunt, P de Noord-pool, N het Noorden en Z het Zuiden. Stel de Zon in S. Laat, door A, het middelpunt van den Hemelbol, het toppunt T, en het middelpunt S van de Zon, den top-cirkel TSH gaan; dan is SH de hoogte $= 18^\circ\ 37'\ 43''$ en $ST =$ compl. hoogte $= 71^\circ\ 22'\ 17''$; men late door de Noordpool, het middelpunt der Zon en het middelpunt van den bol den afwijkings-cirkel PS gaan; dan is (omdat de afwijking zuidelijk is,) $PS = 90^\circ + 6^\circ\ 17'\ 20'',3 = 96^\circ\ 17'\ 20'',3$. Voorts $PT =$ Complement Breedte $= 37^\circ\ 55'\ 10'',5$. De zijden van den bolvormigen driehoek TPS zijn alzoo bekend. Men zal dan den uurhoek P; de standhoek T van den verticaal TSN en den parallactischen hoek S, onder anderen, door de vergelijkingen van de II, III en IV Oplossingen vinden, als volgt:

Uurhoek $P = 48^\circ\ 21'\ 52'',02$; *in tijd* $= 3^u\ 13'\ 27'',5$, of $8^u\ 46'\ 32'',5$ Vm. *Azimuth.* T of $NH = 128^\circ\ 22'\ 31'',76$, *Parall. hoek* $= 28^\circ\ 59'\ 35'',33$.

§. 1094. IV. VOORBEELD. *Onderstellende, dat de Aarde een volmaakte bol zij; dan vraagt men, hoeveel twee plaatsen, welke 962 Duitsche mijlen van elkander afgelegen zijn, in lengte verschillen, wanneer de eene plaats op* $13^\circ\ 7'\ 30''$ *Noorder breedte, en de andere op* $7^\circ\ 15'\ 30''$ *Zuider breedte gelegen is? (De duitsche mijlen tegen 15 in éénen graad van den grooten cirkel van den Aardbol gerekend zijnde)* Antw. $61^\circ\ 13'\ 47''.46$.

§. 1095. VI. OPLOSSING. Nemen wij nog eens de vergelijking $Cos.\,A = (Cos.\,a - Cos.\,b \times Cos.\,c) : Sin.\,b \times Sin.\,c$, en stellen wij $Cos.\,b \times Cos.\,c = Cos.\,\mu$, (hetgeen altijd bestaanbaar is,) dan hebben wij (*VI. Stell. VIII. B.*)

$$Cos.\,A = \frac{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+\mu) \times Sin.\,\tfrac{1}{2}(\mu - a)}{Sin.\,b \times Sin.\,c}$$

Zullende het teeken van μ van de teekens van $Cos.\,b$ en $Cos.\,c$ afhangen. Indien $Cos.\,\mu$ negatief is, is $\mu > 90^\circ$.

§. 1096. VII. OPLOSSING. Men kan de vergelijking $Cos.\,A = (Cos.\,a - Cos.\,b \times Cos.\,c) : Sin.\,b \times Sin.\,c$, onder dezen vorm stellen:

$$Cos.\,A = \frac{Sin.\,a}{Sin.\,b \times Sin.\,c} \times \left[\frac{Cos.\,a}{Sin.\,a} - \frac{Cos.\,b \times Cos.\,c}{Sin.\,a}\right]$$

Men neme nu $Cos.\,b \times Cos.\,c : Sin.\,a = Sin.\,\chi : Cos.\,\chi = Tang.\,\chi$; dan heeft men: (zie *III. Stell. VIII. B.*)

Cos.

$$Cos.\,A = \frac{Sin.\,a}{Sin.\,b \times Sin.\,c} \times \left[\frac{Cos.\,a}{Sin.\,a} - \frac{Sin.\,\chi}{Cos.\,\chi}\right] = (III.\,St.\,VIII.\,B.)$$
$$\frac{Sin.\,a \times Cos.\,(a+\chi)}{Sin.\,a \times Sin.\,b \times Sin.\,c \times Cos.\,\chi}$$

Men zal derhalve de $Cos.\,A$ door het ſtelſel der twee onderſtaande vergelijkingen:

$$Tang.\,\chi = \frac{Cos.\,b \times Cos.\,c}{Sin.\,a} \quad \text{en} \quad Cos.\,A = \frac{Cos.\,(a+\chi)}{Sin.\,b \times Sin.\,c \times Cos.\,\chi}$$

kunnen vinden. De boog χ is negatief, indien *Tang.* χ negatief is.

§. 1097. Aanmerking. Wij gaan andere oplosſingen, welke uit de vergelijking $Cos.\,A = (Cos.\,a - Cos.\,b \times Cos.\,c) : Sin.\,b \times Sin.\,c$ (uit welke alle oplosſingen behalve de eerſte afgeleid zijn,) gehaald kunnen worden, en niets anders dan transformatien van die vergelijking zijn, met ſtilzwijgen voorbij, en merken aan: dat de tweede en derde oplosſingen het meest in gebruik zijn. Ten aanzien nu van deze tweede en de derde oplosſingen, zal het beter zijn de eerſte, die $Sin.\,\frac{1}{2}\,A$ geeſt, te gebruiken, indien de hoek A zeer ſcherp is, en de derde, die $Cos.\,\frac{1}{2}\,A$ geeft, indien hoek A zeer ſtomp is. — Voor het overige zal men wel doen, elke der gegevene oplosſingen op de berekening van het eerſte voorbeeld, §. 1086, toetepasſen.

§. 1068. VII. Vraagstuk. Voor het II. Geval. *Al de hoeken van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de formulen of vergelijkingen te bepalen, waardoor zijne zijden kunnen berekend worden?*

I. Oplossing. *Fig.* 393. Wanneer men, uit het hoekpunt van den hoek C, eenen loodregten boog CD op de overſtaande zijde AB laat vallen; dan zal (zie (9) *Vergel. XVII. Stell.*)

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}(P-Q) = Tang.\,\tfrac{1}{2}C \times Tang.\,\tfrac{1}{2}(B+A) \times Tang.\,\tfrac{1}{2}(B-A)$$

zijn: ſtellen, wij dan $\frac{1}{2}(P-Q) = \Psi$; dan zal, omdat $\frac{1}{2}(P+Q) = \frac{1}{2}C$ is; $P = \frac{1}{2}C + \Psi$ en $Q = \frac{1}{2}C - \Psi$ zijn. Nu zijn, in de regthoekige bolvormige driehoeken, ACD en BCD, (zie *Vergel.* (24) van de *Tafel, Bladz.* 403.)

$$Cos.\,b = Cot.\,A \times Cot.\,(\tfrac{1}{2}C+\Psi), \text{ en } Cos.\,a = Cot.\,B \times Cot.\,(\tfrac{1}{2}C-\Psi).$$

Men gevoelt nu ligtelijk: dat men, (aangezien hetzelfde van de loodregte bogen AE en BF kan gezegd worden,) de drie volgende ſtelſels van vergelijkingen zal hebben:

1°. $Tang.\,\Psi = Tang.\,\frac{1}{2}\,C \times Tang.\,\frac{1}{2}\,(B+A) \times Tang.\,\frac{1}{2}\,(B-A)$
$Cos.\,b = Cot.\,A \times Cot.\,(\frac{1}{2}\,C+\Psi)$; $Cos.\,a = Cot.\,B \times Cot.\,(\frac{1}{2}\,C-\Psi)$.

2° *Tang.*

2°. $Tang.\Psi' = Tang.\frac{1}{2}A \times Tang.\frac{1}{2}(C+B) \times Tang.\frac{1}{2}(C-B)$

$Cos.c = Cot.B \times Cot.(\frac{1}{2}A+\Psi')$; $Cos.b = Cot.C \times Cot.(\frac{1}{2}A-\Psi')$

3°. $Tang.\Psi'' = Tang.\frac{1}{2}B \times Tang.\frac{1}{2}(A+C)\ \ Tang.\frac{1}{2}(A-C)$

$Cos.a = Cot.C \times Cot.(\frac{1}{2}B+\Psi'')$; $Cos.c = Cot.A \times Cot.(\frac{1}{2}B-\Psi'')$

waardoor men de Cofinusfen van elk der zijden, op twee onderfcheidene wijzen, vinden zal.

§. 1099. VOORBEELD. *Fig.* 394. *De ftandhoeken van de zijvlakken van eenen drievlakkigen hoek gegeven zijnde; te weten, hoek* $A = 142° 34'$, *hoek* $B = 79° 50'$, *en hoek* $C = 51° 36'$ *de hoeken te vinden, welke de ribben* AD, BD *en* CD, *aan het hoekpunt maken?* Men vindt: hoek $BDC = 152° 31' 51''$, hoek $ADC = 131° 40' 20'',1$ en hoek $ADB = 36° 29' 34'',8$.

§. 1100. II. OPLOSSING. Volgens het *I. Gev.* der *XIX. Stelling*, is $Cos.\,a = \frac{Cos.\,A + Cos.\,B \times Cos.\,C}{Sin.\,B \times Sin.\,C}$. Trekt men elk lid dezer vergelijking van de éénheid af; dan zal men (*V. Gev. III. St. VIII. B.*) overhouden:

$$2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{Sin.B \times Sin.C - Cos.B \times Cos.C - Cos.A}{Sin.B \times Sin.C}$$

of wel

$$2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}a = -\frac{Cos.A + Cos.B \times Cos.C - Sin.B \times Sin.C}{Sin.B \times Sin.C}$$

dat is, zie *III en VI. Stell. VIII. B.*,

$$2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}a = -\frac{Cos.\,A + Cos.\,(B+C)}{Sin.\,B \times Sin.\,C} = \ldots\ldots$$

$$= \frac{2\,Cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C) \times Cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{Sin.\,B \times Sin.\,C}$$

ftelt men nu $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = S$; dan wordt $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}A = S - A$, en men verkrijgt:

$$Sin.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{Cos.\,S \times Cos.\,(S-A)}{Sin.\,B \times Sin.\,C}}$$

§. 1101. III. OPLOSSING. Telt men bij elk lid der vergelijking, $Cos.a = (Cos.A + Cos.\,B \times Cos.\,C) : Sin.\,B \times Sin.\,C$, de éénheid; dan zal men (*V. Gev. III. Stell. en VI. Stell. VIII. B.*) vinden:

$$Cos.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{Cos.(S-B) \times Cos.(S-C)}{Sin.\,B \times Sin.\,C}}$$

§. 1102. IV. OPLOSSING. Wanneer men de waarde van $Sin.\frac{1}{2}a$, door die van $Cos.\frac{1}{2}a$, in de II en III Oplosfing gevonden, deelt; dan zal men vinden:

Tang.

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{Cos.\,S \times Cos.\,(S-A)}{Cos.\,(S-B) \times Cos.\,(S-C)}}$$

Of, ſtelt men:

$$\Omega = \sqrt{-\frac{Cos.\,(S-A) \times Cos.\,(S-B) \times Cos.\,(S-C)}{Cos.\,S}};$$

dan verkrijgt men voor de Tangenten der halve zijden:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}a = \frac{Cos.\,(S-A)}{\Omega};\ Tang.\,\tfrac{1}{2}b = \frac{Cos.\,(S-B)}{\Omega};\ Tang.\,\tfrac{1}{2}c = \frac{Cos.\,(S-C)}{\Omega}$$

§. 1103. V. Oplossing. Wanneer men de waarden van $Sin.\,\tfrac{1}{2}a$ en $Cos.\,\tfrac{1}{2}a$ (zie II en III *Oploſſing*) met elkander vermenigvuldigt; dan verkrijgt men: (zie *IV. Gev. III. Stell. VIII. B.*)

$$Sin.\,a = \frac{\sqrt{[-Cos.\,S \times Cos.\,(S-A) \times Cos.\,(S-B) \times Cos.\,(S-C)]}}{\tfrac{1}{2}\,Sin.\,B \times Sin.\,C}$$

§. 1104. Aanmerking. In de tweede, vierde en vijfde Oploſſingen, zijn de grootheden, onder het wortelteeken, met het negatieve teeken aangedaan: dan, vermits $S > 90^\circ$ is, wordt $Cos.\,S$ negatief, en $-$ verandert in $+$. *Offchoon nu ſommige der hoeken*, $S-A$, $S-B$ *en* $S-C$ *negatief kunnen zijn, blijven nogtans hunne Coſinusſen poſitief.*

§. 1105. Leering. Vermits, in de waarde van $Sin.\,\tfrac{1}{2}a$, (*II. Oploſſ.*) zal de driehoek mogelijk zijn, $Cos.\,(S-A)$ poſitief moet zijn, volgt hieruit: *dat, in elken bolvormigen driehoek, de halve ſom der hoeken min elken hoek minder dan één regte hoek moet zijn.*

§. 1106. Gevolg. Men zal, uit de waarden, welke in §. 1090 en §. 1103, voor de Sinusſen der hoeken en zijden gevonden zijn, ligtelijk kunnen opmaken: dat men, wanneer $M = Sin.\,a : Sin.\,A = Sin.\,b : Sin.\,B = Sin.\,c : Sin.\,C$ geſteld wordt, hebben zal:

$$M^2 = -\frac{Sin.\,s \times Sin.\,(s-a) \times Sin.\,(s-b) \times Sin.\,(s-c)}{Cos.\,S \times Cos.\,(S-A) \times Cos.\,(S-B) \times Cos.\,(S-C)}$$

§. 1107. VI. Oplossing. Wanneer men, in de vergelijking $Cos.\,a = \frac{Cos.\,A + Cos.\,B \times Cos.\,C}{Sin.\,B \times Sin.\,C}$, het product $Cos.\,B \times Cos.\,C = Cos.\,\mathrm{M}$ ſtelt; dan vindt men (*VI. Stell. VIII. B.*) het ſtelſel der vergelijkingen

$$Cos.\,\mathrm{M} = Cos.\,B \times Cos.\,C \text{ en } Cos.\,a = \frac{2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}(A+\mathrm{M}) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(A-\mathrm{M})}{Sin.\,B \times Sin.\,C}.$$

§. 1108. VII. Oplossing. Stelt men de vergelijking $Cos.\,a = (Cos.\,A + Cos.\,B \times Cos.\,C) : Sin.\,B \times Sin.\,C$ onder den vorm

$$Cos.\,a = \frac{Sin.\,A}{Sin.\,B \times Sin.\,C} \times \left[\frac{Cos.\,A}{Sin.\,A} + \frac{Cos.\,B \times Cos.\,C}{Sin.\,A}\right]$$

en maakt men $Cos.\,B \times Cos.\,C : Sin.\,A = Sin.\,\psi : Cos.\,\psi = Tang.\,\psi$;

dan zal men vinden:

$$\frac{Cos.\,B \times Cos.\,C}{Sin.\,A} = Tang.\,\psi \text{ en } Cos.\,a = \frac{Cos.\,(A-\psi)}{Sin.\,B \times Sin.\,C \times Cos.\,\psi}.$$

§. 1109. Aanmerking. De formulen, welke de tweede en derde Oplossingen gegeven hebben, zijn het meest in gebruik. Men zal de onbekende zijde door de Sinus of de Cosinus van deszelfs helft zoeken, naar dat deze zijde scherp of stomp is: doch alle formulen geven eene genoegzame naauwkeurigheid.

§. 1110. VIII. Vraagstuk voor het III. Geval. *Van eenen bolvormigen driehoek, twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijnde, de formulen te vinden, waardoor de onbekende hoeken en de onbekende zijde kunnen berekend worden?*

Wij zullen eerst de onbekende hoeken en daarna de onbekende zijde leeren vinden.

§. 1111. A. Wanneer men de onbekende hoeken alleenlijk begeert te kennen; dan zal men zich van ééne der volgende oplossingen kunnen bedienen.

§. 1112. I. Oplossing. *Fig.* 393. Laten a en b de bekende zijden en C de bekende hoek zijn. Men late, uit het hoekpunt van den bekenden hoek, de loodregte boog CD, op de overstaande onbekende zijde c, vallen, welke dien hoek in de hoeken P en Q verdeelt; dan is (*XVII. Stell. Vergel.* (10))

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}(P-Q) = Cot.\,\tfrac{1}{2}C \times \frac{Sin.\,(b-a)}{Sin.\,(b+a)}$$

wanneer het halve verschil van de deelen van den tophoek C door deze vergelijking gevonden is; dan zal

$$P = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(P-Q) \text{ en } Q = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(P-Q)$$

zijn, en men zal (zie *Vergel.* (3) *en* (6) *der Tafel*, *Bladz.* 403.) hebben:

$$Cot.\,A = Cos.\,b \times Tang.\,P \text{ en } Cot.\,B = Cos.\,a \times Tang.\,Q$$

Men kan dit zamenstel van vergelijkingen beknopter aldus voorstellen.

$$Tang.\,\chi = Cot.\,\tfrac{1}{2}C \times \frac{Sin.\,(b-a)}{Sin.\,(b+a)}$$

$$Cot.\,A = Cos.\,b \times Tang.\,(\tfrac{1}{2}C+\chi);\quad Cot.\,B = Cos.\,a \times Tang.\,(\tfrac{1}{2}C-\chi)$$

Deze vergelijkingen zijn ontworpen, in de onderstelling, dat $b > a$ is: in het tegengestelde geval, worden $b-a$ en $Sin.\,(b-a)$ negatief. Voorts zal χ positief of negatief zijn, naar dat de teekens van $Sin.\,(b-a)$ en $Sin.\,(b+a)$ gelijk of ongelijk zijn.

§. 1113.

§. 1113. II. OPLOSSING. Wanneer men de vergelijkingen (12) en (13) van de *XVII. Stelling* raadpleegt; dan zal men zien: dat, wanneer men ftelt:

$$Tang.\mu = Cot.\tfrac{1}{2}C \times \frac{Sin.\frac{1}{2}(b-a)}{Sin.\frac{1}{2}(b+a)} \text{ en } Tang.\nu = Cot.\tfrac{1}{2}C \times \frac{Cos.\frac{1}{2}(b-a)}{Cos.\frac{1}{2}(b+a)}$$
$$A = \nu - \mu \text{ en } B = \nu + \mu$$

zal zijn. Wanneer, in deze vergelijkingen, $b < a$ is; dan wordt μ negatief; maar ν blijft altijd pofitief, het zij $b >$ of $< a$ is.

§. 1114. III. OPLOSSING. Men heeft, in de gevolgen op de *XXI. Stelling*, voor de onbekende hoeken A en B, gevonden:

$$Cot.A = Cot.a \times Sin.b : Sin.C - Cos.b \times Cot.C \quad . \quad . \quad (p)$$
$$Cot.B = Cot.b \times Sin.a : Sin.C - Cos.a \times Cot.C \quad . \quad . \quad (q)$$

Men kan de eerfte dezer vergelijkingen, namelijk (p) onder den vorm

$$Cot.A = \frac{Cot.a \times Sin.b - Cos.b \times Cos.C}{Sin.C}$$

ftellen, en, wanneer men dan den teller en den noemer van het laatfte lid met $Tang.\, a$ vermenigvuldigt; dan zal men, aangezien $Tang.a \times Cot.a = 1$ is, verkrijgen:

$$Cot.A = \frac{1}{Sin.C \times Tang.a} \times [Sin.b - Tang.a \times Cos.b \times Cos.C]$$

Men ftelle nu $Tang.a \times Cos.C = Tang.x = Sin.x : Cos.x$; dan verandert deze laatfte wederom in

$$Cot.A = \frac{1}{Sin.C \times Tang.a} \times \left[Sin.b - Cos.b \times \frac{Sin.x}{Cos.x}\right]$$

of, den eerften factor met $Cos.x$ deelende, en den tweeden met $Cos.x$ vermenigvuldigende, in

$$Cot.A = \frac{Sin.(b-x)}{Sin.C \times Tang.a \times Cos.x}$$

en vermenigvuldigt men den teller en den noemer dezer breuk met $Cos.C$, zal men (voor $Tang.a \times Cos.C$ en $Tang.x \times Cos.x$ fchrijvende $Tang.x$ en $Sin.x$ en daarna teller en noemer door $Cos.C$ deelende,) verkrijgen:

$$Cot.A = \frac{Sin.(b-x)}{Tang.C \times Sin.x}; \text{ of } Tang.A = \frac{Tang.C \times Sin.x}{Sin.(b-x)}$$

ftelt men dan:

$$Tang.x = Cos.C \times Tang.a; \text{ dan is } Tang\ A = \frac{Tang.C \times Sin.x}{Sin.(b-x)}$$

Op dezelfde wijze, zal men vinden: dat, wanneer, in vergelijking

(q) gesteld wordt,

$$Tang.\lambda = Cos.C \times Tang.b;\ Tang.B = \frac{Tang.C \times Sin.\lambda}{Sin.(a-\lambda)}$$

zal zijn, zullende gevolgelijk, door deze vergelijkingen, de hoeken A en B afzonderlijk gevonden worden. De teekens van $\varkappa$ en λ zullen van de teekens van $Cos.C$, $Tang.a$ en $Tang.b$ afhangen.

§. 1115. B. Wanneer men de onbekende zijde afzonderlijk begeert te vinden, zal men van de volgende oplossingen gebruik kunnen maken.

§. 1116. I. Oplossing. *Fig.* 393. Volgens de *XVIII. Stell.* is:

$$Cos.c = Cos.C \times Sin.a \times Sin.b + Cos.a \times Cos.b$$

Men kan deze vergelijking aldus voorstellen,

$$Cos.c = Cos.a \times (Cos.C \times Tang.a \times Sin.b + Cos.b)$$

stelt men dan $Cos.C \times Tang.a = Tang.\varkappa = Sin.\varkappa : Cos.\varkappa$; dan zal deze vergelijking veranderen in

$$Cos.c = Cos.a \times \left[\frac{Sin.\varkappa \times Sin.b}{Cos.\varkappa} + Cos.b\right]$$

en men zal, den tweeden factor met $Cos.\varkappa$ vermenigvuldigende, en den eersten door $Cos.\varkappa$ deelende, verkrijgen:

$$Cos.c = \frac{Cos.a}{Cos.\varkappa} \times (Sin.\varkappa \times Sin.b + Cos.\varkappa \times Cos.b)$$

dat is: (zie *III. Stell. VIII. B.*)

$$Cos.c = \frac{Cos.a \times Cos.(b-\varkappa)}{Cos.\varkappa}$$

Men heeft dan, om de derde zijde c te vinden, het stelsel van de twee volgende vergelijkingen:

$$Tang.\varkappa = Cos.C \times Tang.a \quad \text{en} \quad Cos.c = \frac{Cos.a \times Cos.(b-\varkappa)}{Cos.\varkappa}$$

omtrent welke men moet opmerken: dat het teeken van ω van de teekens van $Cos.C$ en $Tang.a$ afhangt, en dat $Cos.(b-\varkappa)$ altijd positief is.

§. 1117. II. Oplossing. Men zal vinden: dat de onbekende zijde ook door het stelsel der volgende vergelijkingen kan berekend worden.

$$Tang.\lambda = Cos.C \times Tang.b;\ \text{en}\ Cos.c = \frac{Cos.b \times Cos.(a-\lambda)}{Cos.\lambda}$$

§. 1118. III. Oplossing. Men kan de vergelijking $Cos.c = Cos.C \times Sin.a \times Sin.b + Cos.a \times Cos.b$, door $Sin.a \times Sin.b$ eerst van het tweede lid aftetrekken en daarna bij hetzelve optetellen, onder de volgende gedaante stellen:

Cos.

$Cos.\,c = Cos.\,a \times Cos.\,b - Sin.\,a \times Sin.\,b + (1 + Cos.\,C) \times Sin.\,a \times Sin.\,b$
dat is: (zie *III. Stell.* en *V. Gev. III. Stell. VIII. B.*)

$$Cos.\,c = Cos.\,(a+b) + 2\,Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b \;\ldots\; (r)$$

Trekt men elk lid dezer vergelijking van de éénheid af; dan verkrijgt men:

$$1 - Cos.\,c = 1 - Cos.\,(a+b) - 2\,Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b$$

dat is, (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) na alles door twee gedeeld te hebben,

$$Sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b) - Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b$$

welke vergelijking onder de gedaante

$$Sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times \left\{1 - \frac{Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b}{Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b)}\right\}$$

kan gesteld worden.

Het gebroken $Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b : Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b)$ is altijd kleiner dan de éénheid; want, men kan (zie *V. Stell. VIII. B.* en *V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) voor hetzelve stellen:

$$\frac{Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times [Cos.\,(b-a) - Cos.\,(a+b)]}{1 - Cos.\,(a+b)}$$

nu is $Cos.\,(b-a) < 1$; derhalve $Cos.\,(b-a) - Cos.\,(a+b) < 1 - Cos.\,(a+b)$, en zulks is genoeg, om terstond te zien: dat de teller kleiner dan de noemer is.

Men mag dan veilig $Sin.\,\phi = \dfrac{Cos.\,\tfrac{1}{2}C \times \sqrt{(Sin.\,a \times Sin.\,b)}}{Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b)}$ stellen, en dan zal $Sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times (1 - Sin^2.\,\phi) = Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Cos^2.\,\phi$ worden, of $Sin.\,\tfrac{1}{2}c = Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Cos.\,\phi$. Men heeft dan deze oplossing:

$$Sin.\,\phi = \frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}C \times \sqrt{(Sin.\,a \times Sin.\,b)}}{Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b)},\ \text{en}\ Sin.\,\tfrac{1}{2}c = Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Cos.\,\phi.$$

§. 1119. IV. OPLOSSING. Men telle bij elk lid der vergelijking (r), welke in de voorgaande oplossing gevonden is, de éénheid; dan verkrijgt men:

$$1 + Cos.\,c = 1 + Cos.\,(a+b) + 2\,Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b$$

dat is, (zie *V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) alles door twee deelende,

$$Cos^2.\,\tfrac{1}{2}c = Cos^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b) + Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b$$

eene vergelijking, welke onder den vorm

$$Cos^2.\,\tfrac{1}{2}c = Cos^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times \left\{1 + \frac{Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b}{Cos^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b)}\right\}$$

 kan

kan gebragt worden. Men ſtelle dan $Tang.\,\chi = \ldots\ldots$ $\dfrac{Cos.\frac{1}{2}C \times \sqrt{(Sin.\,a \times Sin.\,b)}}{Cos.\frac{1}{2}(a+b)}$; dan zal $Cos^2.\frac{1}{2}c = \dfrac{Cos^2.\frac{1}{2}(a+b)}{Cos^2.\chi}$ of $Cos.\frac{1}{2}c = Cos.\frac{1}{2}(a+b) : Cos.\,\chi$ worden.

§. 1120. V. Oplossing. De vergelijking $Cos.\,c = Cos.\,C \times Sin.\,a \times Sin.\,b + Cos.\,a \times Cos.\,b$ kan ook nog onder deze gedaante geſteld worden:

$$Cos.\,c = Cos.\,a \times Cos.\,b + Sin.\,a \times Sin.\,b - (1 - Cos.\,C) \times Sin.\,a \times Sin.\,b$$

dat is, (zie *III. Stell.* en *V. Gev. III. Stell. VIII. B.*)

$$Cos.\,c = Cos.(b-a) - 2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b \quad \ldots (s)$$

Men telle wederom bij elk lid dezer vergelijking de éénheid; dan verkrijgt men: (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*)

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}c = Cos^2.\tfrac{1}{2}(b-a) - Sin^2.\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b$$

welke vergelijking wederom den vorm

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}c = Cos^2.\tfrac{1}{2}(b-a) \times \left\{1 - \frac{Sin^2.\frac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b}{Cos^2.\frac{1}{2}(b-a)}\right\}$$

verkrijgt. De breuk, welke in deze vergelijking voorkomt, is kleiner dan de éénheid: men ſtelle dan

$Sin.\,\psi = \dfrac{Sin.\frac{1}{2}C \times \sqrt{(Sin.\,a \times Sin.\,b)}}{Cos.\frac{1}{2}(b-a)}$; dan is $Cos.\frac{1}{2}c = \ldots$ $Cos.\frac{1}{2}(b-a) \times Cos.\,\psi$.

§. 1121. VI. Oplossing. Men trekke de leden der vergelijking (s), welke in de voorgaande oploſſing gevonden is, van $1 = 1$; dan verkrijgt men: (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*)

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}c = Sin^2.\tfrac{1}{2}(b-a) + Sin^2.\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b$$

Hieruit zal men, als boven, vinden: dat, wanneer $Tang.\,\omega = \ldots$ $\dfrac{Sin.\frac{1}{2}C \times \sqrt{(Sin.\,a \times Sin.\,b)}}{Sin.\frac{1}{2}(b-a)}$ geſteld wordt; $Sin.\frac{1}{2}c = Sin.\frac{1}{2}(b-a) : Cos.\,\omega$ zal zijn. Het ſpreekt van zelve, dat, in deze twee laatſte oploſſingen, b de grootſte en a de kleinſte zijde beteekent.

§. 1122. VII. Oplossing. Wij hebben, in de V Oploſſing, verkregen,

$$Cos.\,c = Cos.(b-a) - 2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,a \times Sin.\,b.$$

Nu is $Cos.(b-a) = Cos.(b-a) \times 1 = Cos.(b-a) \times (Sin^2.\frac{1}{2}C + Cos^2.\frac{1}{2}C)$ en (*V. Stell. VIII. B.*) $2\,Sin.\,a \times Sin.\,b = Cos(b-a) - Cos.(a+b)$; derhalve zal men hebben:

$$Cos.\,c = Cos.(b-a) \times (Sin^2.\tfrac{1}{2}C + Cos^2.\tfrac{1}{2}C) - Sin^2.\tfrac{1}{2}C \times Cos.(b-a) + Sin^2.\tfrac{1}{2}C \times Cos.(a+b)$$

of,

of, bij nadere ontwikkeling,

$$Cos.\,c = Cos.\,(a+b) \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + Cos.\,(b-a) \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \quad (t)$$

Deze vergelijking, welke eene fraaije eigenschap der bolvormige driehoeken leert kennen, is nog verder herleidbaar. Men trekke derzelver leden van de vergelijking $1 = Sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C$ af; dan zal men overhouden:

$$1 - Cos.\,c = (1 - Cos.(a+b)) \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + (1 - Cos.(b-a)) \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C$$

dat is, volgens het *V. Gev. III. Stell. VIII. B.*

$$Sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a) \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (u)$$

Men kan deze vergelijking onder de volgende gedaante brengen:

$$Sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}C \times \left\{1 + \frac{Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a)}{Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b)} \times Cot^2.\,\tfrac{1}{2}C\right\}$$

of wel, onder deze andere gedaante

$$Sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a) \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times \left\{1 + \frac{Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b)}{Sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a)} \times Tang^2.\,\tfrac{1}{2}C\right\}$$

Men stelle dan $Cot.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,\tfrac{1}{2}(b-a) : Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b) = Tang.\,\mu$; dan is $Tang.\,\tfrac{1}{2}C \times Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b) : Sin.\,\tfrac{1}{2}(b-a) = Cot.\,\mu$, en dan veranderen de twee laatst gevondene vergelijkingen in:

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}c = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin.\,\tfrac{1}{2}C}{Cos.\,\mu} = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(b-a) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}C}{Sin.\,\mu}$$

§. 1123. VIII. Oplossing. Wanneer men bij elk lid van de vergelijking (t), in de voorgaande oplossing gevonden, $1 = Sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C$ optelt; dan zal men verkrijgen,

$$1 + Cos.\,c = (1 + Cos.\,(a+b)) \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + (1 + Cos.\,(b-a)) \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C$$

dat is, (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*)

$$Cos^2.\,\tfrac{1}{2}c = Cos^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + Cos^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a) \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (v)$$

eene vergelijking, welke ook onmiddelijk uit (u), met behulp van $Cos^2.\,m = 1 - Sin^2.\,m$, kan afgeleid worden.

Uit de vergelijking (v) zal men, dezelfde herleidingen als in de voorgaande oplossing volgende, vinden:

$$Tang.\,\nu = Cot.\,\tfrac{1}{2}C \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(b-a) : Cos.\,\tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$Cos. \tfrac{1}{2} c = \frac{Cos. \tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin. \tfrac{1}{2} C}{Cos. v} = \frac{Cos. \tfrac{1}{2}(b-a) \times Cos. \tfrac{1}{2} C}{Sin. v}$$

§. 1124. Aanmerking. Wanneer de onbekende zijde scherp of stomp is, zal het het veiligst zijn, derzelver helft door de Sinus of Cosinus te zoeken. In de VII en VIII Oplossingen, die geheel nieuw zijn, is de II Oplossing van het eerste gedeelte, waarbij men de onbekende hoeken zoekt, mede begrepen. Het zal derhalve, indien men alle de onbekenden begeert te berekenen, geschikter zijn, zich van de VII en VIII Oplossingen te bedienen.

§. 1125. I. Voorbeeld. *Fig.* 287. *Indien de standhoek van de vlakken PQ en PR gelijk* 76° 36′ 40″ *is, en, uit het punt A, de lijnen AC en AD zoodanig zijn getrokken: dat hoek BAC* = 117° 18′ 20″ *en hoek BAD* = 77° 39′ *is, vraagt men: welk eenen hoek de lijnen AC en AD met elkander maken, en onder welke hoeken het vlak DAC de vlakken PQ en PR snijdt?* Antw. De lijnen *AC* en *AD* maken eenen hoek van 84° 5′ 50″, 4. En het vlak *ACD* maakt met *PQ* eenen hoek van 119° 39′ 12″, 59, en met *PR* eenen hoek van 72° 49′ 9″, 89.

§. 1126. II. Voorbeeld. *Wanneer* Amsterdam *op* 52° 22′ 17″, *en* Philadelphia, *de hoofdstad der vereënigde Staten van* Noord-Amerika, *op* 39° 56′ 55″ *Noorder Breedte gelegen zijn, en de standhoek van de middags-cirkels dezer twee plaatsen gelijk is aan* 80° 6′ 15″, *hoe ver zijn dan (de Aarde als eenen volmaakten bol aannemende,) deze twee plaatsen van elkander verwijderd, en in welke streek van het kompas zijn zij, de eene ten opzigte van de andere, gelegen?* Antw. De afstand dezer plaatsen is 53° 54′ 57″, 1; of 808,738 mijlen; *Philadelphia* ligt 69° 8′ 47″, 8 bewesten het Noorden van *Amsterdam*, en *Amsterdam* 48° 5′ 36″, 7 beoosten het Noorden van *Philadelphia*.

§. 1127. IX. Vraagstuk. Voor het IV. Geval. *Eéne zijde met de aanliggende hoeken van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de formulen te vinden, waardoor de twee onbekende zijden en de onbekende hoek kunnen berekend worden?*

Daar dit geval met het voorgaande zooveel overéénkomst heeft, zullen wij ons vergenoegen, met aantewijzen, hoe de vergelijkingen voor de verschillende oplossingen gevonden worden.

Wij stellen de zijde *c* met de aanliggende hoeken *A* en *B* gegeven.

§. 1128.

§. 1128. A. Om de onbekende zijden a en b te vinden, heeft men de volgende oplossingen.

§. 1129. I. OPLOSSING. Men vindt, door Vergel. (11) *XVII. Stell.* en de regthoekige driehoeken, gemaakt, door den loodregten boog, welke, uit den onbekenden hoek C, op de bekende zijde c valt, de vergelijkingen:

$$Tang.\,\chi = Tang.\,\tfrac{1}{2}c \times \frac{Sin.\,(B-A)}{Sin.\,(A+B)}$$

$Cot.\,b = Cos.\,A \times Cot.\,(\tfrac{1}{2}c+\chi)$; $Cot.\,a = Cos.\,B \times Cot.\,(\tfrac{1}{2}c-\chi)$.
In deze oplossing, is B de grootste hoek. $Tang.\,\chi$ is negatief, indien $A+B > 180^\circ$ is, en dan moet ook χ negatief genomen worden.

§. 1130. II. OPLOSSING. Uit de vergelijkingen (14) en (15), zal, zie *XVII. Stell.* volgen:

$$Tang.\,\mu = Tang.\,\tfrac{1}{2}c \times \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(B-A)}{Sin.\,\tfrac{1}{2}(A+B)};\ Tang.\,\nu = Tang.\,\tfrac{1}{2}c \times \frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}(B-A)}{Cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B)}$$

en . . . $b = \nu + \mu$; $a = \nu - \mu$.
Wanneer $Tang.\,\nu$ negatief is; dan is $\nu > 90^\circ$.

§. 1131. III. OPLOSSING. Uit de vergelijking $Cot.\,a = Cot.\,A \times Sin.\,B : Sin.\,c + Cos.\,B \times Cot.\,c$, (*XX. Stell.*) volgt: (verg. §. 1114.)

$$Cot.\,\varkappa = Tang.\,A \times Cos.\,c, \quad \text{en } Tang.\,a = \frac{Tang.\,c \times Cos.\,\varkappa}{Cos.\,(B-\varkappa)}$$

§. 1132. IV. OPLOSSING. Uit de vergelijking $Cot.\,b = Cot.\,B\ Sin.\,A : Sin.\,c + Cos.\,A \times Cot.\,c$, volgt:

$$Cot.\,\lambda = Tang.\,B \times Cos.\,c, \quad \text{en } Tang.\,b = \frac{Tang.\,c \times Cos.\,\lambda}{Cos.\,(A-\lambda)}$$

§. 1133. B. De formulen, door welke de onbekende hoek C berekend kan worden, worden, in de volgende oplossingen, uit de vergelijking $Cos.\,C = Cos.\,c \times Sin.\,A \times Sin.\,B - Cos.\,A \times Cos.\,B$, afgeleid.

§. 1134. I. OPLOSSING. Door eene behoorlijke schikking van de termen dezer grond-vergelijking, zal men vinden: (vergel. §. 1116.)

$$Cot.\,\varkappa = Tang.\,A \times Cos.\,c, \quad \text{en } Cos.\,C = \frac{Cos.\,A \times Sin.\,(B-\varkappa)}{Sin.\,\varkappa}$$

§. 1135. II. OPLOSSING. Eene andere schikking zal geven:

$$Cot.\,\lambda = Tang.\,B \times Cos.\,c, \quad \text{en } Cos.\,C = \frac{Cos.\,B \times Sin.\,(A-\lambda)}{Sin.\,\lambda}$$

§. 1136. Men zal, de handelwijze van §. 1118, volgende, de vergelijking $Cos.\,C = Cos.\,c \times Sin.\,A \times Sin.\,B - Cos.\,A \times Cos.\,B$, onder de volgende vormen kunnen brengen:

$$Cos.\,C = -Cos.\,(A+B) - 2\,Sin^2.\,\tfrac{1}{2}c \times Sin.\,A \times Sin.\,B \quad . . (p)$$

$$Cos.\,C = -Cos.(B-A) + 2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}c \times Sin.\,A \times Sin.\,B \;.\;.\; (q)$$

en men zal, uit deze twee vergelijkingen, de volgende oplossingen halen.

§. 1137. III. OPLOSSING. Uit de vergelijking (p) volgt:

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}C = Sin^2.\tfrac{1}{2}(A+B) - Sin^2.\tfrac{1}{2}c \times Sin.\,A \times Sin.\,B$$

en deze geeft de oplossing:

$$Sin.\,\phi = \frac{Sin.\tfrac{1}{2}c\sqrt{Sin.\,A \times Sin.\,B}}{Sin.\tfrac{1}{2}(A+B)};\quad Cos.\tfrac{1}{2}C = Sin.\tfrac{1}{2}(A+B) \times Cos.\,\phi$$

§. 1138. IV. OPLOSSING. Dezelfde vergelijking (p) geeft nog,

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}C = Cos^2.\tfrac{1}{2}(A+B) + Sin^2.\tfrac{1}{2}c \times Sin.\,A \times Sin.\,B$$

en uit deze volgt de oplossing,

$$Tang.\,\chi = \frac{Sin.\tfrac{1}{2}c\sqrt{Sin.\,A \times Sin.\,B}}{Cos.\tfrac{1}{2}(A+B)};\quad Sin.\tfrac{1}{2}C = \frac{Cos.\tfrac{1}{2}(A+B)}{Cos.\,\chi}.$$

§. 1139. V. OPLOSSING. Uit de vergelijking (q) volgt:

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}C = Cos^2.\tfrac{1}{2}(B-A) - Cos^2.\tfrac{1}{2}c \times Sin.\,A \times Sin.\,B$$

waaruit dan volgt:

$$Sin.\,\psi = \frac{Cos.\tfrac{1}{2}c\sqrt{Sin.\,A \times Sin.\,B}}{Cos.\tfrac{1}{2}(B-A)};\quad Sin.\tfrac{1}{2}C = Cos.\tfrac{1}{2}(B-A) \times Cos.\,\psi.$$

§. 1140. VI. OPLOSSING. Dezelfde vergelijking (q) geeft nog:

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}C = Sin^2.\tfrac{1}{2}(B-A) + Cos^2.\tfrac{1}{2}c \times Sin.\,A \times Sin.\,B$$

en deze vergelijking geeft dan:

$$Tang.\,\omega = \frac{Cos.\tfrac{1}{2}c\sqrt{Sin.\,A \times Sin.\,B}}{Sin.\tfrac{1}{2}(B-A)},\quad Cos.\tfrac{1}{2}C = \frac{Sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{Cos.\,\omega}.$$

§. 1141. Uit ééne der twee vergelijkingen (p) of (q), zal men, op dezelfde wijze, als in §. 1122, vinden:

$$Cos.\,C = -Cos.(A+B) \times Cos^2.\tfrac{1}{2}c - Cos.(B-A) \times Sin^2.\tfrac{1}{2}c \quad (r)$$

welke vergelijking, door $C = 90^\circ$ te stellen, in de vergelijking (24), van *Bladz.* 406, §. 1033. verandert.

§. 1142. Uit deze vergelijking (r) zal men, (raadpleeg §. 1122.) de twee volgende afleiden:

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}C = Cos^2.\tfrac{1}{2}(A+B) \times Cos^2.\tfrac{1}{2}c + Cos^2.\tfrac{1}{2}(B-A) \times Sin^2.\tfrac{1}{2}c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (s)$$

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}C = Sin^2.\tfrac{1}{2}(A+B) \times Cos^2.\tfrac{1}{2}c + Sin^2.\tfrac{1}{2}(B-A) \times Sin^2.\tfrac{1}{2}c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (t)$$

§. 1143. VII. OPLOSSING. Uit de vergelijking (s) volgt:

$$Tang.\,\nu = Tang.\tfrac{1}{2}c \times \frac{Cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}{Cos.\tfrac{1}{2}(A+B)}$$

$$Sin.\tfrac{1}{2}C = \frac{Cos.\tfrac{1}{2}(A+B) \times Cos.\tfrac{1}{2}c}{Cos.\,\nu} = \frac{Cos.\tfrac{1}{2}(B-A) \times Sin.\tfrac{1}{2}c}{Sin.\,\nu}.$$

§. 1144 VIII. Oplossing. Uit de vergelijking (t) volgt:

$$Tang.\,\mu = Tang.\,\tfrac{1}{2}\,c \times \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)}{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B)}$$

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}\,c}{Cos.\,\mu} = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(B-A) \times Sin.\,\tfrac{1}{2}\,c}{Sin.\,\mu}.$$

§. 1145. Voorbeeld. *Fig.* 394. *Gegeven zijnde de hoek* $ADC = 69^\circ\ 11'\ 40''$; *dan begeert men, uit het hoekpunt D, eene lijn BD, buiten het vlak van dien hoek te trekken, zoodanig, dat de vlakken ADB en CDB, met het vlak ADC, hoeken maken, die respectievelijk aan* $65^\circ\ 17'$ *en* $88^\circ\ 32'$ *gelijk zijn. Men vraagt, hoe groot, tot dat einde de hoeken ADB en CDB moeten genomen worden, en hoe groot de standhoek dezer hoeken zal zijn?* Antw. De hoek $ADB = 79^\circ\ 35'\ 14'',9$; de hoek $BDC = 63^\circ\ 20'\ 40'',2$, en de standhoek der twee vlakken is $71^\circ\ 49'\ 45'',5$.

§. 1146. X. Vraagstuk. Voor het V. Geval. *Van eenen bolvormigen driehoek twee zijden, met eenen hoek, over ééne dezer bekende zijden staande, gegeven zijnde, de formulen te vinden, waardoor de onbekende zijde, benevens de twee onbekende hoeken, berekend kunnen worden?*

Dit vijfde en het volgend zesde geval, bij de Schrijvers gewonelijk de *twijfelachtige* gevallen genoemd, verdienen, alvorens wij derzelver onderscheidene oplossingen voordragen, eene meer bijzondere overweging.

§. 1147. Laten de zijden a en b, benevens de hoek A, welke tegen over de zijde A staat, gegeven zijn. Het valt terstond in het oog: dat (*XV. Stell.*) $Sin.\,a : Sin.\,b = Sin.\,A : Sin.\,B$ is, en dat derhalve de onbekende hoek B, door de vergelijking

$$Sin.\,B = \frac{Sin.\,b \times Sin.\,A}{Sin.\,a}$$

kan gevonden worden. Daar nu eenige Sinus tot twee bogen, eenen scherpen, die in de tafel gevonden wordt, en eenen stompen boog, die het supplement des eersten is, behoort, schijnt dit geval altijd twee oplossingen te hebben; dat is het schijnt: dat twee driehoeken kunnen zamengesteld worden, welke elk de gegevene zijden en den gegevenen hoek hebben. Dat zulks nu niet altijd plaats heeft, zal uit de volgende beschouwingen blijken.

§. 1148. Laten, *fig.* 397, ABD en ACD, twee groote cirkels zijn, die elkander, volgens de middellijn, AD, snijden, en eenen

hoek

hoek BAC maken, die gelijk is aan den gegevenen hoek van den gevraagden driehoek. Indien men dan $AC = b$ neemt, en uit C, als aspunt, met de koorde van de gegevene zijde, a, op het oppervlak van den bol, eenen cirkel beschrijft; dan zal men de volgende omstandigheden kunnen opmerken.

§. 1149. 1° Zal de boog a zoo klein kunnen gegeven zijn: dat die kleine cirkel geheel boven den grooten cirkel ABD gelegen is, en denzelven niet snijden kan: in dit geval, bestaat 'er geen driehoek, welke de gegevene zijden en den gegeven hoek heeft.

§. 1150. 2° Zal de boog a ook zoo groot kunnen gegeven zijn, dat de kleine cirkel, uit C beschreven, geheel beneden den grooten cirkel ABD valt, in welk geval ook geen driehoek, onder de gegevens, kan zamengesteld worden.

§. 1151. Beide deze omstandigheden worden kenbaar door de berekening der vergelijking $Sin. B = Sin. A \times Sin. b : Sin. a$; wanneer namelijk, $Sin. A \times Sin. b > Sin. a$ zijnde, $Sin. B$ grooter dan de éénheid wordt, hoedanig eene Sinus onmogelijk is. Wanneer derhalve $Sin. A \times Sin. b > Sin. a$ is, blijkt daaruit: dat de cirkel, die uit C, met den boog a, beschreven wordt, of boven of beneden den grooten cirkel ABD ligt, en dat de gegevens met eenigen bolvormigen driehoek geheel onbestaanbaar zijn.

§. 1152. 3° De cirkel, die, uit C, met de koorde van den boog a, beschreven wordt, kan den cirkel ABD in deszelfs eerste helft, in een punt B aanraken: maar dan staat de boog CB of a loodregt op ABD, en de driehoek ABC is regthoekig in B; $Sin. B$ is dan $= 1$, en $Sin. A \times Sin. b = Sin. a$, hetgeen met de bekende eigenschap van den regthoekigen bolvormigen driehoek overëénkomt. 'Er is, in dit geval, slechts ééne oplossing, welke de berekening en de constructie beide geven.

§. 1153. 4° Maar dezelfde kleine cirkel kan den grooten cirkel ABD in deszelfs tweede helft $AFGD$ in een punt G aanraken: in dit geval, zal $Sin. B = 1$ en $Sin. A \times Sin. b = Sin. b$ zijn. De berekening schijnt hier, in den eersten opslag, eenen regthoekigen bolvormigen driehoek te geven: doch, de constructie geeft die niet: deze geeft wel eenen regthoekigen bolvormigen driehoek, welke de gegevene zijden heeft; doch, de hoek CAF is het supplement van den gegeven hoek A: de reden nu, waarom de berekening deze omstandigheid niet leert kennen, is eenvoudig hierin gelegen: dat de $Sin. B$, welke, in de berekening van de vergelijking, gebruikt wordt, ook

ook tevens de Sinus van het ſupplement van dien hoek zijnde, het onderſcheid tusſchen den hoek BAC en zijn ſupplement niet uitdrukt.

§. 1154. 5° Indien $a = 90°$ is, dan zal de cirkel, welke, uit C, als aspunt, met de koorde van a beſchreven wordt, eenen grooten cirkel zijn, welke den grooten cirkel ABD, in twee middellijnig tegen over elkander ſtaande punten, ſnijden zal. In dit geval heeft de driehoek ABC de regte zijde $BC = 90°$, en omdat $Sin.\,a = 1$ is, zal $Sin.\,B = Sin.\,A \times Sin.\,b$ zijn, en 'er is ſlechts ééne oplosſing.

§. 1155. 6° Nemen wij: dat de hoek BAC ſcherp is; indien dan de cirkel, met de koorde van den boog a, uit het aspunt C, beſchreven wordt, de eerſte helft van den grooten cirkel ABD in twee punten B en E ſnijdt; dan zullen 'er twee driehoeken ABC en AEC op de gegevens pasſen, welke ook, door de berekening van de vergelijking voor $Sin.\,B$, zullen gevonden worden, wanneer men voor den hoek, welke tot die Sinus behoort, zoowel dien hoek als zijn ſupplement neemt. Nu ziet men ligtelijk, uit de beſchouwing der figuur, dat de boog a grooter moet zijn dan de kleinſte der loodregte bogen, welke uit C op het vlak van den cirkel ABD vallen, en kleiner dan de grootſte dezer bogen, en dat bijgevolg het kleinſte gedeelte van den kleinen cirkel beneden, en deszelfs grootſte deel boven het vlak van den cirkel ABD valt, zoodat de kleine cirkel de bogen AC en CD ſnijden zal, waaruit dan volgt: dat de boog a kleiner dan b, en tevens kleiner dan zijn ſupplement $180° - b$ zal zijn.

§. 1156. 7° Blijft nog BAC ſcherp; dan zal a zoodanig kunnen gegeven zijn: dat gezegde kleine cirkel de tweede helft $AFGD$ van den grooten cirkel ABD, in twee punten F en G, ſnijdt: in dit geval, ligt de grootſte helft van den kleinen cirkel beneden den grooten cirkel ABD, en ſnijdt de bogen AC en CD in derzelver verlengde. 'Er beſtaan, in dit geval, geen driehoeken, op welke de gegevens pasſen: de vergelijking op $Sin.\,B$, ſchijnt nogtans in dit geval (als analytisch beſtaanbaar zijnde,) twee oplosſingen te geven: doch de omſtandigheid bij welke a grooter is dan b, en tevens grooter dan $180° - b$, bewijst: dat, hoezeer de vergelijking in zich zelve beſtaanbaar is, 'er nogtans geene driehoeken beſtaan, op welke de gegevens pasſen.

§. 1157. 8° Onder dezelfde omſtandigheid, dat $BAC < 90°$ is, zal a nog zoodanig kunnen gegeven zijn: dat de kleine cirkel, uit C beſchreven, den grooten cirkel ABD in twee punten B en F ſnijdt.

In

In dit geval, bestaat 'er slechts één driehoek ABC, op welke de gegevens passen: doch de kleine cirkel zal, in dit geval, het verlengde van AC beneden A en CD boven D snijden, en a zal alzoo $> b$ en $< 180^\circ - b$ zijn. Ook zal B van dezelfde soort als b zijn.

§. 1158. 9° Het geval waarin hoek $BAC = 90^\circ$ is, behoort tot de regthoekige driehoeken.

§. 1159. 10° Wanneer de hoek BAC stomp en a zoodanig gegeven is: dat de kleine cirkel, die, uit C, beschreven wordt, den grooten cirkel ABD, in de eerste helft, in twee punten B en E, snijdt; dan ligt de kleinste helft van den kleinen cirkel boven, en de grootste helft beneden het vlak van den cirkel $ABED$, en snijdt het verlengde van de bogen AC en CD beneden het vlak van dien grooten cirkel. In dit geval bestaan 'er twee driehoeken, die aan de gegevens voldoen: maar nu is de zijde a grooter dan de zijde b, en grooter dan zijn supplement $180^\circ - b$.

§. 1160. 11° In dezelfde onderstelling, dat hoek $BAC > 90^\circ$ zal a zoodanig kunnen gegeven zijn: dat de kleine cirkel, uit C beschreven, de tweede helft van den grooten cirkel ABD in de punten F en G snijdt. In dit geval, ligt de grootste helft van den kleinen cirkel boven het vlak van den grooten cirkel ABD, en snijdt de bogen AC en CD boven hetzelfde vlak. 'Er zijn, hoezeer de vergelijking voor $Sin. B$ analytisch bestaanbaar is, geen driehoeken, welke de gegevens passen: maar de omstandigheid, bij welke a kleiner is dan b en tevens kleiner dan $180^\circ - b$, doet de onbestaanbaarheid der gegevens kenbaar worden.

§. 1161. 12° Eindelijk kan, terwijl de hoek $BAC > 90^\circ$ is, de kleine cirkel, die uit C beschreven wordt, den grooten cirkel ABD in twee punten B en F snijden. In dit geval zal slechts één driehoek bestaanbaar zijn: en nu zal de kleine cirkel den boog AC, beneden A en CD boven D, snijden, en a zal $> b$ en $< 180^\circ - b$ zijn. Ook zullen wederom B en b van dezelfde soort zijn.

§. 1162. 13° In het 8° en 12° geval, is stilzwijgend ondersteld, dat $AC = b$ kleiner dan 90° is, en, in deze gevallen, is $a > b$ en $< 180^\circ - b$: maar indien $AC > 90^\circ$ genomen wordt, dan zal, in die gevallen, $a < b$ en $> 180^\circ - b$ zijn.

§. 1163. Trekken wij dit alles te zamen: dan kan men, in de berekening van dit vijfde geval, het volgende tot eenen vasten regel aannemen.

1° *Indien de vergelijking* $Sin. B = Sin. A \times Sin. b : Sin. a$, *en ana-*

analytisch onbeſtaanbaar is; dan zal 'er ook geen drièhoek beſtaan, op welken de gegevens paſſen.

2° *Is de vergelijking* $Sin.\, B = Sin.\, A \times Sin.\, b : Sin.\, a$ *beſtaanbaar; dan zal,*

$a)$ $A < 90°$ *en* $a > b$, *benevens* $a > 180° - b$

$b)$ $A > 90°$ *en* $a < b$, *benevens* $a < 180° - b$

zijnde, geen driehoek op de gegevens paſſen.

3° *Maar is*

$a)$ $A > 90°$ *en* $a > b$, *benevens* $a > 180° - b$

$b)$ $A < 90°$ *en* $a < b$, *benevens* $a < 180° - b$

dan beſtaan 'er twee driehoeken, waarop de gegevens toepaſſelijk zijn.

4° *Is eindelijk* $a >$ *of* $< b$ *en* $a <$ *of* $> 180° - b$; *dan beſtaat 'er ſlechts één driehoek, die aan de gegevens voldoet. In dit geval is de oplosſing niet meer twijfelachtig, en de hoek B is dan altijd van dezelfde ſoort als de zijde b.*

5° *In alle gevallen beſliſt nog boven dien de regel, waar bij de ſom der overſtaande hoeken altijd van dezelfde ſoort moet zijn, als de ſom der zijden, tegen over welke zij ſtaan,* (zie §. 1054.) *alle de bovengenoemde omſtandigheden.*

§. 1164. Na deze ophelderingen tot de oplosſing van het geval zelve overgaande, zullen wij a en b, benevens den hoek A, als bekend aannemen, en de formulen voor de berekening der hoeken B en C en de zijde c leeren vinden.

§. 1165. A. Om den hoek B, welke tegen over de zijde b ſtaat, te vinden, heeft men de volgende oplosſingen.

§. 1166. I. OPLOSSING. Volgens §. 1147. wordt de hoek B door de formule

$$Sin.\, B = Sin.\, A \times Sin.\, b : Sin.\, a$$

gevonden.

§. 1167. II. OPLOSSING. Stellen wij, in de zoo even bijgebragte vergelijking, $Sin.\, A \times Sin.\, b = Sin.\, \phi$; dan wordt $Sin.\, B = Sin.\, \phi : Sin.\, a$, waaruit (*VIII. Stell- II. B. en VII. Stell. VIII. B.*) volgt:

$$\frac{1 - Sin.\, B}{1 + Sin.\, B} = \frac{Sin.\, a - Sin.\, \phi}{Sin.\, a + Sin.\, \phi} = \frac{Tang.\, \frac{1}{2}(a - \phi)}{Tang.\, \frac{1}{2}(a + \phi)}$$

dat is, zie *II. Gev. X. Stell. VIII. B.*

$$Tang.\, (45° - \tfrac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{Tang.\, \frac{1}{2}(a - \phi)}{Tang.\, \frac{1}{2}(a + \phi)}}$$

Wanneer men nu $45° - \frac{1}{2} B = \psi$ ſtelt; dan zal $B = 90° \pm 2\psi$ zijn, en men heeft dan, om den hoek B te vinden:

Sin.

$$Sin.\,\phi = Sin.\,A \times Sin.\,b;\ Tang.\,\psi = \pm\sqrt{\frac{Tang.\,\frac{1}{2}(a-\phi)}{Tang.\,\frac{1}{2}(a+\phi)}}$$

$$\text{en}\ \ldots\ B = 90^\circ \mp 2\psi$$

en dit ſtelſel van vergelijkingen zal de hoek B, indien hij niet veel van 90° verſchilt, met meer naauwkeurigheid doen bekend worden.

§. 1168. III. Oplossing. Men ſtelle, in dezelfde vergelijking, $Sin.\,A \times Sin.\,b = Tang.\,\mu$, en $Sin.\,a = Tang.\,\nu$; dan $Sin.\,B = Tang.\,\mu : Tang.\,\nu$ zijn, waaruit (*VIII. Stell. II. en XI. Stell. VIII. B.*) volgen zal:

$$\frac{1 - Sin.\,B}{1 + Sin.\,B} = \frac{Tang.\,\nu - Tang.\,\mu}{Tang.\,\nu + Tang.\,\mu} = \frac{Sin.\,(\nu - \mu)}{Sin.\,(\nu + \mu)}$$

en, zie *II. Gev. X. Stell. VIII. B.*

$$Tang.\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{Sin.\,(\nu - \mu)}{Sin.\,(\nu + \mu)}}$$

zoodat men ook den hoek B door het volgend ſtelſel van vergelijkingen

$$Tang.\,\nu = Sin.\,a;\ Tang.\,\mu = Sin.\,A \times Sin.\,b;\ Tang.\,\omega = \pm\sqrt{\frac{Sin.\,(\nu-\mu)}{Sin.\,(\nu+\mu)}}$$

$$\text{en}\ \ldots\ B = 90^\circ \mp 2\omega$$

vinden zal, welke oploſſing, ingevalle de waarde van den hulphoek ϕ, in de tweede oploſſing, weinig van 90° verſchillen mogt, eene meerdere naauwkeurigheid voor de waarde van B verzekert.

§. 1169. IV. Oplossing. Men vindt, uit de vergelijking van de eerſte oploſſing,

$$1 - Sin.\,B = 1 - Cos.\,(90^\circ - B) = \frac{Sin.\,a - Sin.\,A \times Sin.\,b}{Sin.\,a}$$

dat is, (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*), en $Sin.\,A \times Sin.\,b = Sin.\,\phi$ ſtellende,

$$Sin.\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{Sin.\,a - Sin.\,\phi}{2\,Sin.\,a}}$$

of eindelijk, zie *VI. Stell. VIII. B.*,

$$Sin.\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{Sin.\,\frac{1}{2}(a - \phi) \times Cos.\,\frac{1}{2}(a + \phi)}{Sin.\,a}}$$

Zoodat men, ſtellende, $45^\circ - \frac{1}{2}B = \pm\chi$, hebben zal:

$$Sin.\,\phi = Sin.\,A \times Sin.\,b;\ Sin.\,\chi = \sqrt{\frac{Sin.\,\frac{1}{2}(a-\phi) \times Cos.\,\frac{1}{2}(a+\phi)}{Sin.\,a}}$$

$$\text{en}\ \ldots\ B = 90^\circ \mp 2\chi.$$

§. 1170. V. Oplossing. Bij dezelfde vergelijking van de eerſte oploſſing, de éénheid optellende, zal men vinden:

Sin.

$$Sin.\,\phi = Sin.\,A \times Sin.\,b;\ Cos.\,\chi = \sqrt{\frac{Sin.\,\frac{1}{2}(a+\phi) \times Cos.\,\frac{1}{2}(a-\phi)}{Sin.\,a}}$$

en . . . . $B = 90^\circ \mp 2\chi$.

§. 1171. Aanmerking. Wanneer, door ééne der voorgaande oplossingen, de hoek B gevonden is, zal men den anderen onbekenden hoek, benevens de onbekende zijde, welke tegen over denzelven staat, door de Neperiaansche Analogien (12), (13), (14) en (15), zie *XVII. Stell.* vinden kunnen; want uit dezelve volgt:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}C = Cot.\,\tfrac{1}{2}(B-A) \times \frac{Sin.\,\frac{1}{2}(b-a)}{Sin.\,\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}C = Cot.\,\tfrac{1}{2}(B+A) \times \frac{Cos.\,\frac{1}{2}(b-a)}{Cos.\,\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}c = Tang.\,\tfrac{1}{2}(b-a) \times \frac{Sin.\,\frac{1}{2}(B+A)}{Sin.\,\frac{1}{2}(B-A)}$$

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}c = Tang.\,\tfrac{1}{2}(b+a) \times \frac{Cos.\,\frac{1}{2}(B+A)}{Cos.\,\frac{1}{2}(B-A)}$$

In het werkdadige, zullen deze formulen tot eene bevestiging van de gevondene waarde van B verstrekken, welke waarde van B nogtans ten scherpste zal moeten berekend worden, om eene voldoende overëenstemming tusschen de eerste en tweede, en tusschen de derde en vierde formulen te vinden. Wanneer de gegevens twee oplossingen medebrengen, dan zullen de twee waarden van C en c, naar elke bijzondere waarde van B, afzonderlijk moeten berekend worden.

§. 1172. I. Voorbeeld. *Gegeven zijnde $A = 63^\circ\ 18'\ 20''$, $a = 65^\circ\ 33'\ 40''$, $b = 78^\circ\ 20'\ 30''$; de hoeken B en C, benevens de zijde c, te vinden?*

In dit voorbeeld, is de hoek A scherp, en de zijde a kleiner dan b, en tevens kleiner dan $180^\circ - b$: 'er zijn derhalve twee oplossingen. Men vindt namelijk:

$B = 73^\circ\ 57'\ 55'',2$	$B = 106^\circ\ 2'\ 4'',7$
$C = 102^\circ\ 53'\ 32'',4$	$C = 33^\circ\ 19'\ 10'',4$
$c = 96^\circ\ 37'\ 24'',2$	$c = 34^\circ\ 2'\ 17'',2$

Dat nu op deze gegevens twee oplossingen passen, blijkt, zoodra men de hoeken B gevonden heeft; want elke waarde van B geeft de som der hoeken A en B kleiner dan 180°; vermits nu de som der overstaande zijden a en b insgelijks kleiner dan 180° is, wordt 'er in geene dezer twee oplossingen eene tegenstrijdigheid gevonden.

§. 1173. II. Voorbeeld. *Gegeven zijnde $a = 76^\circ\ 36'$, $b = 50^\circ\ 61'$, en $A = 121^\circ\ 52'$; de hoeken B en C, benevens de zijde c, te vinden?*

In dit voorbeeld, is $a > b$ en $< 180^\circ - b$; 'er zal gevolgelijk slechts één driehoek op de gegevens pasſen. Men zal vinden $B = 42^\circ\ 10'\ 30''$; $C = 33^\circ\ 56'\ 30'', 1$; en $c = 39^\circ\ 45'\ 26'', 6$.

§. 1174. III. Voorbeeld. *Gegeven zijnde* $a = 93^\circ\ 17'$, $b = 123^\circ\ 43'$, *en* $A = 72^\circ\ 15'$: *de hoeken B en C, en de zijde c, te vinden?*

Hier is $a < b$ en $> 180^\circ - b$; 'er zal gevolgelijk ſlechts één driehoek op de gegevens pasſen. Men zal vinden $B = 127^\circ\ 29'\ 10'', 87$; $C = 55^\circ\ 45'\ 29'', 8$; en $c = 60^\circ\ 3'\ 43'', 9$.

§. 1175. B. Wanneer men den hoek C, welke tegen de onbekende zijde ſtaat, uit de gegevens wil afleiden, zal men zich van de volgende oplosſingen kunnen bedienen.

§. 1176. I. Oplossing. *Fig.* 398. Laten ABC en $AB'C$ de twee driehoeken verbeelden, welke, in ſommige gevallen, op de gegevens pasſen kunnen; dan zal de loodregte boog CD den tophoek en de baſis van den gelijkbeenigen driehoek BCB' in twee gelijke deelen verdeelen. Wanneer men dan de hoeken ACD en BCD vinden kan; dan zal derzelver ſom of verſchil de hoeken ACB en ACB' bekend doen worden.

Stel $ACD = p$ en $BCD = q$; dan is, volgens de bekende eigenſchappen der regthoekige driehoeken,

$Tang.\, p = Cot.\, A : Cos.\, b$ (1) en $Cos.\, q = Tang.\, CD : Tang.\, a$ (2)

Men moet nu $Tang.\, CD$ uit de tweede vergelijking wegmaken. Men heeft $Sin.\, CD = Sin.\, A \times Sin.\, b$; $Cos.\, CD = Cos.\, b : Cos.\, AD$, en wederom $Cos.\, AD = Cos.\, p : Sin.\, A$, en daarom $Cos.\, CD = Cos.\, b \times Sin.\, A : Cos.\, p$. Eindelijk $Tang.\, CD = Sin.\, CD : Cos.\, CD = Tang.\, b \times Cos.\, p$. Stellende deze waarde van $Tang.\, CD$ in de tweede vergelijking; dan verkrijgt men: $Cos.\, q = Tang.\, b \times Cot.\, a \times Cos.\, p$. Men heeft derhalve het volgende ſtelſel van vergelijkingen:

$$Tang.\, p = Cot.\, A : Cos.\, b;\ Cos.\, q = Tang.\, b \times Cot.\, a \times Cos.\, p$$
$$\text{en}\ \ C = p \pm q$$

Omtrent welke vergelijkingen moet aangemerkt worden. 1° Dat, wanneer $Cos.\, q > +1$ bevonden wordt, de gegevens onbeſtaanbaar zijn. 2° Dat, wanneer $Tang.\, p$ en $Cos.\, q$ negatief zijn, de bogen p en q insgelijks negatief moeten genomen worden. 3° Dat, de waarden van $C = p \pm q$, naar de waarden van p en q, opgemaakt wordende, de negatieve waarden van C, en de poſitieve waarden, die grooter dan 180° zijn, als onbeſtaanbaar, moeten verworpen worden.

§. 1177. II. Oplossing. Men ſtelle, in de tweede vergelijking der voorgaande oplosſing, $Tang.\, b \times Cos.\, p = Tang.\, \phi$; dan wordt $Cos.\, q = Cot.\, a \times Tang.\, \phi$, waaruit $(1 - Cos.\, q) : (1 + Cos.\, q) = (1 - Cot.\, a \times$

$\times$ *Tang.* ϕ) : ($1 +$ *Cot.* $a \times$ *Tang.* ϕ) wordt afgeleid, en eindelijk:

$$Tang.\ \tfrac{1}{2} q = \sqrt{[Sin.(a - \phi) : Sin.(a + \phi)]}$$

Men heeft dan het volgend steisel:

$$Tang.\, p = Cot.\, A : Cos.\, b\,;\ Tang.\, \phi = Tang.\, b \times Cos.\, p$$

$$Tang.\ \tfrac{1}{2} q = \sqrt{[Sin.(a - \phi) : Sin.(a + \phi)]},\ \text{en } C = p \pm q.$$

Deze oplossing zal, wanneer q weinig van 90^0 mogt verschillen, eene meerdere naauwkeurigheid dan de eerste geven.

§. 1178. III. OPLOSSING. Volgens de *XX. Stelling*, heeft men:

$$Tang.\, a = \frac{Sin.\, b}{Sin.\, C \times Cot.\, A + Cos.\, C \times Cos.\, b}$$

waaruit onmiddelijk volgt:

$$Cot.\, A \times Sin.\, C = Sin.\, b \times Cot.\, a - Cos.\, b \times Cos.\, C \quad . \ . \ . \ (M)$$

In deze vergelijking, is alleenlijk de hoek C onbekend. Men brenge de leden dezer vergelijking in het vierkant, en schrijve voor $Sin^2.\, C$ hare waarde $1 - Cos^2.\, C$; dan zal men eene vierkants-vergelijking verkrijgen, welke, behoorlijk opgelost zijnde, geven zal:

$$Cos.\, C = \frac{Sin.\, b \times Cos.\, b \times Cot.\, a \times Sin^2.\, A}{1 - Sin^2.\, A \times Sin^2.\, b} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$
$$\pm \frac{Cos.\, A \times \sqrt{[1 - Sin^2.\, b \times Sin^2.\, A : Sin^2.\, a]}}{1 - Sin^2.\, A \times Sin^2.\, b}.$$

§. 1179. IV. OPLOSSING. Stelt men de vergelijking (M) onder deze gedaante:

$$Cos.\, b \times Cos.\, C = Sin.\, b \times Cot.\, a - Cot.\, A \times Sin.\, C$$

verheft men derzelver leden tot het vierkant, en schrijft men, in plaats van $Cos^2.\, C$, hare waarde $1 - Sin^2.\, C$; dan zal men eene vierkants-vergelijking verkrijgen, welker oplossing geven zal:

$$Sin.\, C = \frac{Sin.\, b \times Cot.\, a \times Cos.\, A \times Sin.\, A}{1 - Sin^2.\, A \times Sin^2.\, b} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$
$$\pm \frac{Cos.\, b \times Sin.\, A \times \sqrt{[1 - Sin^2.\, b \times Sin^2.\, A : Sin^2.\, a]}}{1 - Sin^2.\, A \times Sin^2.\, b}.$$

§. 1180. AANMERKING. De breuk, welke onder het wortelteeken voorkomt, is gelijk aan $Sin^2.\, B$; de waarde van $Cos.\, C$ en $Sin.\, C$ kunnen derhalve, volgens deze formulen, niet berekend worden, zonder de Sinus van den hoek B, in den loop der berekening, te bepalen: deze berekening maakt dan de grootheid, onder het wortelteeken, gelijk aan $Cos^2.\, B$; men verkrijgt derhalve,

$$Sin.\, B = Sin.\, A \times Sin.\, b : Sin.\, a$$
$$Sin.\, \mu = Sin.\, A \times Sin.\, b$$

 stel-

ſtellende, door eene behoorlijke ſubſtitutie,

$$Cos.\,C = \frac{\frac{1}{2}\,Sin.\,2\,b \times Cot.\,a \times Sin^2.\,A \pm Cos.\,A \times Cos.\,B}{Cos^2.\,\mu}$$

$$Sin.\,C = \frac{\frac{1}{2}\,Sin.\,2\,A \times Cot.\,a \times Sin.\,b \pm Cos.\,b \times Sin.\,A \times Cos.\,B}{Cos^2.\,\mu}$$

Dan, aangezien deze analytiſche waardijen vrij zamengeſteld en, voor de dadelijke berekening, niet zeer geſchikt zijn, zullen wij, uit de vergelijking (M), nog twee andere vergelijkingen afleiden, welke fraaijer en minder zamengeſteld zijn.

§. 1181. V. Oplossing. Men kan de vergelijking (M), zie de *III. Oplosſing*, onder den vorm:

$$Cot.\,A \times Sin.\,C = Sin.\,b \times Cot.\,a + Cos.\,b - Cos.\,b\,(1 + Cos.\,C)$$

ſtellen, welke, na al de termen door $1 + Cos.\,C$ gedeeld te hebben, geven zal:

$$Cot.\,A \times \frac{Sin.\,C}{1 + Cos.\,C} = \frac{Sin.\,b \times Cot.\,a + Cos.\,b}{1 + Cos.\,C} - Cos.\,b$$

Nu is (*I. Gev. IX. Stell. VIII. B.*) $Sin.\,C : (1 + Cos.\,C) = Tang.\,\frac{1}{2}\,C$ en (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $1 + Cos.\,C = 2\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\,C = \ldots$ $2 : Sec^2.\,\frac{1}{2}\,C = 2\,(1 + Tang^2.\,\frac{1}{2}\,C)$; de laatſte vergelijking wordt derhalve

$$2\,Cot.\,A \times Tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = (Sin.\,b \times Cot.\,a + Cos.\,b) \times Tang^2.\,\tfrac{1}{2}\,C + Sin.\,b \times Cot.\,a - Cos.\,b$$

maar, $Sin.\,b \times Cot.\,a + Cos.\,b = Sin.\,(a + b) : Sin.\,a$, en $Sin.\,b \times Cot.\,a - Cos.\,b = Sin.\,(b - a) : Sin.\,a$ zijnde, zal men hebben:

$$2\,Cot.\,A \times Tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{Sin.\,(a+b)}{Sin.\,a} \times Tang^2.\,\tfrac{1}{2}\,C + \frac{Sin.\,(b-a)}{Sin.\,a}$$

welke, na behoorlijke herleiding, de vierkants-vergelijking:

$$Tang^2.\,\tfrac{1}{2}\,C - \frac{2\,Cot.\,A \times Sin.\,a}{Sin.\,(a+b)} \times Tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = -\frac{Sin.\,(b-a)}{Sin.\,(a+b)}$$

geven zal. Lost men nu deze vergelijking op; dan zal men vinden:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{Cot.\,A \times Sin.\,a}{Sin.\,(a+b)} \times \left\{ 1 \pm \sqrt{\left[1 + \ldots \frac{Sin.\,(a+b) \times Sin.\,(a-b) \times Tang^2.\,A}{Sin^2.\,a}\right]} \right\}$$

§. 1182. Men moet, in deze vergelijking, twee gevallen onderſcheiden: 1° wanneer $a - b$ poſitief is; 2° wanneer $a - b$ negatief is.

§. 1183. In het eerſte geval, ſtelle men $Tang.\,\mu = \frac{Tang.\,A}{Sin.\,a} \times$

V

$\sqrt{(Sin.(a+b) \times Sin.(a-b))}$; dan verkrijgt men voor den onbekenden hoek C deze twee waarden,

$$Tang.\tfrac{1}{2}C = \frac{Cot.A \times Sin.a}{Sin.(a+b)} \times (1 \pm Sec.\mu) \quad . \quad . \quad . \quad (N)$$

Nu is (zie *I. Gev. IX. Stell. VIII. B.*,) $1 + Sec.\mu = 1 + \frac{1}{Cos.\mu} = \frac{1+Cos.\mu}{Cos.\mu} = \frac{1+Cos.\mu}{Sin.\mu} \times \frac{Sin.\mu}{Cos.\mu} = Cot.\tfrac{1}{2}\mu \times Tang.\mu$; en $1 - Sec.\mu = 1 - \frac{1}{Cos.\mu} = \frac{Cos.\mu - 1}{Cos.\mu} = -\frac{1-Cos.\mu}{Sin.\mu} \times \frac{Sin.\mu}{Cos.\mu} = -Tang.\tfrac{1}{2}\mu \times Tang.\mu$. Stelt men nu deze waarden van $1 + Sec.\mu$ en $1 - Sec.\mu$ in de vergelijking (N); dan verkrijgt men voor $a > b$ de volgende vergelijkingen:

$$Tang.\mu = [Tang.A \times \sqrt{(Sin.(a+b) \times Sin.(a-b))}] : Sin.a$$
$$\Omega = Cot.A \times Sin.a \times Tang.\mu : Sin.(a+b)$$
$$Tang.\tfrac{1}{2}C = +\Omega \times Cot.\tfrac{1}{2}\mu;\ \text{of}\ Tang.\tfrac{1}{2}C = -\Omega \times Tang.\tfrac{1}{2}\mu.$$

§. 1184. Is, in de vergelijking (N) voor $Tang.\tfrac{1}{2}C$, $a < b$; dan wordt $Sin.(a-b)$ negatief, en dan kan de vergelijking niet bestaanbaar zijn, indien niet $Sin.(a+b) \times Sin.(a-b) \times Tang^2.A < Sin^2.a$ is. Men ftelle dan $Sin.\nu = (Tang.A : Sin.a) \times \ldots \sqrt{(Sin.(a+b) \times Sin.(a-b))}$: dan verandert gezegde vergelijking in:

$$Tang.\tfrac{1}{2}C = \frac{Cot.A \times Sin.a}{Sin.(a+b)} \times (1 \pm Cos.\nu)$$

Maar nu is (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $1 + Cos.\nu = 2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}\nu$, en $1 - Cos.\nu = 2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}\nu$, en wij hebben bijgevolg, wanneer $a < b$ is, de vergelijkingen:

$$Sin.\nu = [Tang.A \times \sqrt{(Sin.(a+b) \times Sin.(a-b))}] : Sin.a$$
$$\omega = 2\,Cot.A \times Sin.a : Sin.(a+b)$$
$$Tang.\tfrac{1}{2}C = \omega \times Sin^2.\tfrac{1}{2}\nu;\ \text{of}\ Tang.\tfrac{1}{2}C = \omega \times Cos^2.\nu.$$

§. 1185. VI. Oplossing. Men kan de vergelijking (M) ook nog onder de volgende gedaante

$$Cot.A \times Sin.C = Sin.b \times Cot.a - Cos.b + Cos.b \times (1 - Cos.C)$$

ftellen, en hieruit zal men (gelijk in de voorgaande oplosfing) vinden:

$$Cot.\tfrac{1}{2}C = -\frac{Cot.A \times Sin.a}{Sin.(a-b)} \times \left\{1 \pm \sqrt{\left[1 + \ldots \frac{Sin.(a+b) \times Sin.(a-b) \times Tang^2.A}{Sin^2.a}\right]}\right\}$$

 §. 1186.

§. 1186. Hieruit zal men, 1° wanneer $a > b$ is, vinden:

$$Tang.\,\mu = [Tang.\,A \times \sqrt{(Sin.\,(a+b) \times Sin.\,(a-b))}] : Sin.\,a$$
$$\Omega = -\,Cot.\,A \times Sin.\,a \times Tang.\,\mu : Sin.\,(a-b)$$
$$Cot.\,\tfrac{1}{2}\,C = +\,\Omega \times Cot.\,\tfrac{1}{2}\,\mu;\ \text{of}\ Cot.\,\tfrac{1}{2}\,C = -\,\Omega \times Tang.\,\tfrac{1}{2}\,\mu.$$

§. 1187. 2° Wanneer $a < b$ is,

$$Sin.\,\nu = [Tang.\,A \times \sqrt{(Sin.\,(a+b) \times Sin.\,(a-b))}] : Sin.\,a$$
$$\omega = -\,2\,Cot.\,A \times Sin.\,a : Sin.\,(a-b)$$
$$Cot.\,\tfrac{1}{2}\,C = \omega \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,\nu;\ \text{of}\ Cot.\,\tfrac{1}{2}\,C = \omega \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}\,\nu.$$

§. 1188. Aanmerking. Deze laatste oplossingen geven aanleiding tot verscheidene aanmerkingen, welke wij, daar zij ons te ver zouden afleiden, aan de naspeuring van den Lezer overlaten.

§. 1189. C. Wil men de onbekende zijde afzonderlijk berekenen, zal zulks, door de formulen, welke de volgende oplossingen geven zullen, kunnen geschieden.

§. 1190. I. Oplossing. *Fig.* 398. Men stelle $AD = r$ en $BD = s$; dan geven de regthoekige driehoeken, ADC en BDC, de vergelijkingen $Tang.\,r = Tang.\,b \times Cos.\,A$; $Cos.\,CD = Cos.\,b : Cos.\,r$ en $Cos.\,s = Cos.\,a : Cos.\,CD = Cos.\,a \times Cos.\,r : Cos.\,b$. Men heeft alzoo, om de waarde van c te vinden:

$$Tang.\,r = Tang.\,b \times Cos.\,A;\ Cos.\,s = Cos.\,a \times Cos.\,r : Cos.\,b$$
$$\text{en}\quad c = r \pm s$$

De waarden van r en s zullen negatief zijn, wanneer $Tang.\,r$ en $Cos.\,s$ negatief zijn. De gegevens zijn met eenen driehoek onbestaanbaar, wanneer $Cos.\,s > \pm 1$ is. Voorts moeten de negatieve waarden, welke men voor c verkrijgt, of die positieve waarden van c, welke grooter dan 180° zijn, als onbestaanbaar, verworpen worden.

§. 1191. II. Oplossing. Men stelle, in de tweede vergelijking der voorgaande oplossing, $Cos.\,a \times Cos.\,r = Cos.\,\psi$, en dan heeft men het volgend stelsel van vergelijkingen:

$$Tang.\,r = Tang.\,b \times Cos.\,A;\ Cos.\,\psi = Cos.\,a \times Cos.\,r$$
$$Tang.\,\tfrac{1}{2}\,s = \sqrt{[Tang.\,\tfrac{1}{2}\,(\psi + b) \times Tang.\,\tfrac{1}{2}\,(\psi - b)]}$$
$$\text{en}\quad c = r \pm s$$

De onbestaanbaarheid der gegevens blijkt, in den loop der berekening, wanneer $\tfrac{1}{2}\,(\psi + b)$ of $\tfrac{1}{2}\,(\psi - b)$ negatief is.

§. 1192. III. Oplossing. Uit de XVIII Stelling volgt:

$$Cos.\,A \times Sin.\,b \times Sin.\,c = Cos.\,a - Cos.\,b \times Cos.\,c \;.\;.\;.\; (Q)$$

brengt men deze vergelijking in het vierkant, en schrijft men $Sin^2.\,c = 1 - Cos^2.\,c$, zal men eene vierkants-vergelijking verkrijgen, welker oplossing geven zal:

Cos.

$$Cos.\,c = \frac{Cos.a \times Cos.b \pm Cos.A \times Sin.a \times Sin.b \sqrt{\left(1 - \frac{Sin^2.A \times Sin^2.b}{Sin^2.a}\right)}}{1 - Sin^2.A \times Sin^2.b}$$

§. 1193. AANMERKING. Omdat (*XVIII. Stell.*) $Cos.\,c = Cos.\,C \times Sin.\,a \times Sin.\,b + Cos.\,a \times Cos.\,b$ is, zal men de waarde van $Cos.\,c$ gemakkelijker vinden kunnen, indien men de waarde van $Cos.\,C$, welke §. 1178. gevonden is, met $Sin.\,a \times Sin.\,b$ vermenigvuldigt, en bij het product $Cos.\,a \times Cos.\,b$ optelt.

§. 1194. IV. OPLOSSING. Uit dezelfde vergelijking (*Q*) zal men, door de oplossing eener vierkants-vergelijking, vinden:

$$Sin.\,a = \frac{Cos.\,A \times Cos.a \times Sin.\,b \pm Sin.\,a \times Cos.\,b \sqrt{(1 - Sin^2.\,A \times Sin^2.\,b : Sin^2.\,a)}}{1 - Sin^2.\,A \times Sin^2.\,b}$$

§. 1195. I. AANMERKING. Omdat (*XV. Stell.*) $Sin.\,c = Sin.\,a \times Sin.\,C : Sin.\,A$ is, zal men de waarde van $Sin.\,c$ vinden, door de waarde van $Sin.\,C$, in §. 1179. gevonden, met $Sin.\,a$ te vermenigvuldigen, en het product door $Sin.\,A$ te deelen.

§. 1196. II. AANMERKING. Omdat (*XV. Stell.*) de grootheid onder het wortelteeken gelijk aan $Cos^2.\,B$ is, zal men, stellende

$Sin.\,A \times Sin.\,b : Sin.\,a = Sin.\,B$, en $Sin.\,A \times Sin.\,b = Sin.\,\mu$,

hebben:

$$Cos.c = [Cos.a \times Cos.b \pm Sin.a \times Sin.b \times Cos.\,A \times Cos.\,B] : Cos^2.\mu$$
$$Sin.c = [Cos.\,A \times Cos.a \times Sin.b \pm Sin.a \times Cos.b \times Cos.\,B] : Cos^2.\mu$$

welke vergelijkingen nog voor verdere herleidingen vatbaar zijn.

§. 1197. V. OPLOSSING. Door aanwending van de kunstgreep, waarvan in §. 1181. gebruik gemaakt is, zal men, uit de vergelijking (*Q*), vinden:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}c = \frac{Cos.\,A \times Sin.\,b \times \left\{1 \pm \sqrt{\left[1 + \frac{Sin.\,(a+b) \times Sin.\,(a-b)}{Cos^2.\,A \times Sin^2.\,b}\right]}\right\}}{2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(a-b)}$$

§. 1198. Wanneer nu $a > b$ is; dan stelle men:

$$Tang.\,\mu = \sqrt{[Sin.\,(a+b) \times Sin.\,(a-b)]} : Cos.\,A \times Sin.\,b$$
$$\Omega = \tfrac{1}{2}\,Cos.\,A \times Sin.\,b \times Tang.\,\mu : Cos.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(a-b)$$

en dan is:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}c = \Omega \times Cot.\,\tfrac{1}{2}\mu, \text{ of } Tang.\,\tfrac{1}{2}c = -\Omega \times Tang.\,\tfrac{1}{2}\mu.$$

§. 1199. Maar is $a < b$; dan stelle men:

$$Sin.\,\nu = \sqrt{[Sin.\,(a+b) \times Sin.\,(a-b)]} : Cos.\,A \times Sin.\,b$$
$$\omega = Cos.\,A \times Sin.\,b : Cos.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}(a-b)$$

en dan is:

$$Tang.\tfrac{1}{2}c = \omega \times Sin^2.\tfrac{1}{2}\nu, \text{ of } Tang.\tfrac{1}{2}c = \omega \times Cos^2.\tfrac{1}{2}\nu.$$

§. 1200. VI. Oplossing. Dezelfde vergelijking (Q), zal (vergelijk §. 1185.) geven:

$$Cot.\tfrac{1}{2}c = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{-Cos.A \times Sin.b \times \left\{ 1 \pm \sqrt{\left[1 + \frac{Sin.(a+b) \times Sin.(a-b)}{Cos^2.A \times Sin^2.b} \right]} \right\}}{2\, Sin.\tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin.(a-b)}$$

§. 1201. Wanneer nu $a > b$ is; dan stelle men:

$$Tang.\mu = \sqrt{[Sin.(a+b) \times Sin.(a-b)]} : Cos.A \times Sin.b$$

$$\Omega = -\tfrac{1}{2}Cos.A \times Sin.b \times Tang.\mu : Sin.\tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin.\tfrac{1}{2}(a-b)$$

en dan is:

$$Cot.\tfrac{1}{2}c = +\Omega \times Cot.\tfrac{1}{2}\mu, \text{ of } Cot.\tfrac{1}{2}c = -\Omega \times Tang.\tfrac{1}{2}\mu.$$

§. 1202. Maar is $a < b$; dan stelle men:

$$Sin.\nu = \sqrt{[Sin.(a+b) \times Sin.(a-b)]} : Cos.A \times Sin.b$$

$$\omega = -Cos.A \times Sin.b : Sin.\tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin.\tfrac{1}{2}(a-b)$$

en dan is:

$$Cot.\tfrac{1}{2}c = \omega \times Sin^2.\tfrac{1}{2}\nu, \text{ of } Cot.\tfrac{1}{2}c = \omega \times Cos^2.\tfrac{1}{2}\nu.$$

§. 1203. XI. Vraagstuk. Voor het VI. Geval. *Van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, twee hoeken, met ééne zijde, over éénen dezer bekende hoeken staande, de formulen te vinden, waardoor de twee onbekende zijden, en den onbekenden hoek kunnen berekend worden?*

Dit laatste geval van de oplossing der scheefhoekige bolvormige driehoeken is het tweede, hetwelk, onder sommige omstandigheden, twee oplossingen heeft, en daarom algemeen, doch ten onregte, het *tweede* der *twijfelachtige gevallen* is genoemd geworden.

§. 1204. Laten A en B de bekende hoeken, en a de bekende zijde zijn; dan is (*XV. Stell.*)

$$Sin.b = Sin.a \times Sin.B : Sin.A$$

Deze vergelijking is analytisch bestaanbaar, zoo lang $Sin.A > Sin.a \times Sin.B$ is, en dan vindt men voor de zijde b steeds twee waarden, welke wel altijd aan de vergelijking: doch niet aan eenen bolvormigen driehoek, in den zin, waarin wij denzelven nemen, voldoen.

§. 1205. Om deze bijzonderheid meer van nabij te leeren kennen, zoo laat, *Fig.* 400, de cirkel *ABDPE* het vlak van de basis des gevraagden driehoeks zijn. Laat, volgens eene middellijn *AD*, op dezen cirkel eenen halven cirkel *AIDF*, zoodanig geplaatst worden, dat de standhoek *CAB* gelijk zij aan den gegeven hoek *A* van den ge-

gevraagden bolvormigen driehoek ABC, en nog de halve cirkel $BCFE$, met eenen hoek $ABF = B$, zijnde $BC = a$. Men rigte, uit M, het middelpunt van den bol, in het vlak AID, de loodlijn MI, op AD, en, in het vlak BHE, de loodlijn MH, op BE; dan zijn deze loodlijnen ſtralen van den bol, en de bogen, AI, DI, BH en EH, zijn quadranten. Eindelijk beſchrijve men, uit M, met MH en MI, als ſtralen, de kleine cirkels Hab en Icd; dan zijn deze de projectien van de kleine cirkels van den bol, welke, uit het aspunt van den cirkel ABD, met de koorden van de complementen der hoeken B en A, beſchreven zijnde, gezegde halve cirkels, op het oppervlak van den bol, in de punten H en I aanraken, en welke kleine cirkels, in het oppervlak van den bol, evenwijdig aan den cirkel $ABDPE$, moeten gedacht worden.

§. 1206. 'Er kunnen, ten opzigte van de gegevene hoeken, vier gevallen plaats hebben. *a*) De hoeken A en B kunnen beide ſcherp zijn. *b*) De hoek A ſtomp en de hoek B ſcherp. *c*) De hoek A ſcherp en de hoek B ſtomp. *d*) De hoeken A en B beide ſtomp.

§. 1207. A. Nemen wij, *Fig.* 400, de hoeken A en B ſcherp, en hoek $A <$ hoek B; wanneer wij dan den halven cirkel AID in zijnen ſtand laten; maar den halven cirkel $BCFE$, van het punt D door de punten B, A, E, P, *enz.*, om het punt M, over het vlak DBA, omſchuiven, zoodanig, dat de hoek ABC altijd dezelfde blijft; dan zal het punt H den kleinen cirkel Hab beſchrijven, en de punten F en G zullen beſtendig in den omtrek van den kleinen cirkel Icd blijven. Wanneer nu het punt B, van het punt D afterekenen, de eerſte helft van den cirkel $DBAP$ doorloopt, zal elk punt van den boog BF, het ééne na het andere, door het quadrant DI gaan, tot dat, het punt F in I gekomen zijnde, de punten van dienzelfden boog, maar in eene teruggaande orde, van F naar B, door het quadrant IA zullen gaan. Is het punt B in A gekomen, en loopt het punt B door de tweede helft van den cirkel $DBAP$; dan zullen al de punten van den boog GE, het ééne na het andere, door het quadrant DI gaan, en, wanneer G in I gekomen is, zullen diezelfde punten, doch nu in eene omgekeerde orde, door het quadrant IA loopen. Geene der punten van den boog FG, welke geheel buiten den kleinen cirkel Icd gelegen is, zal (de hoeken A en B dezelfde blijvende,) immer den omtrek van den halven cirkel DIA bereiken.

§. 1208. Dit verklaarde is genoeg, om te doen zien: dat, wanneer een bolvormige driehoek, onder twee gegevene hoeken A en B, en eene zijde $BC = a$, moet zamengesteld worden, hoek $B >$ hoek A is, en de hoeken A en B beide scherp zijn.

1° De zijde $BC = a$ tot zoodanig eene grootte moet gegeven zijn: dat het punt C door den omtrek van den halven cirkel AID moet kunnen gaan, en dat alzoo,

2° Wanneer $BC = a$ kleiner is dan BF, het vraagstuk niet slechts mogelijk is; maar dat 'er ook, vermits het punt C (van D naar A gaande,) den halven cirkel AID tweemaal moet ontmoeten, twee driehoeken aan de gegevens voldoen zullen.

3° Dat, wanneer $a = BF$ is, slechts een driehoek, in welke $b = 90°$ is, zal plaats hebben, in welk geval $Sin. A = Sin. a \times Sin. B$ zal zijn.

4° Dat, wanneer BC of $a > BF$ en $< BG$ genomen wordt, het punt C den omtrek AID niet zal kunnen snijden, en diensvolgens de gegevens met elkander onbestaanbaar zullen zijn, hetwelk ook, in dit geval, door de analytische onbestaanbaarheid der formule, kenbaar zal worden.

5° Dat eindelijk, wanneer BC of $a > BG$ is, ja wel het punt C door den halven cirkel AID zal gaan, en de vergelijking $Sin. b = Sin. a \times Sin. B : Sin. A$ analytisch bestaanbaar zal zijn: doch, dat de driehoek, welke de gegeven hoek B, en de gegevene zijde heeft, eenen hoek zal hebben, welke, het supplement van den hoek A zijnde, niet meer de gegeven driehoek is; doch niet te min, aangezien de Sinus van eenen hoek en van zijn supplement dezelfde waarde hebben, aan de vergelijking van $Sin. b$ zal voldoen. Uit al hetwelk dan volgt: *dat, wanneer de formule voor $Sin. b$ bestaanbaar is, de hoeken A en B scherp, $B > A$, en A en a van dezelfde soort zijn, het vraagstuk twee oplossingen zal hebben.*

§. 1209. B. Geheel anders is het met de zaak gelegen, wanneer (*Fig.* 401.) de hoeken A en B wel beide scherp zijn: maar hoek $A >$ hoek B is. Want, wanneer men het punt B in D brengt, en den halven cirkel DBA laat doorloopen; dan zullen al de punten van den halven omtrek $EKGCB$, van E naar B te rekenen, het ééne na het andere, door den omtrek van den halven cirkel $AGFD$ gaan. Waaruit dan volgt:

1° *Dat, in dit geval, de zijde a alle waarden van 0° tot 180° zal kunnen hebben.*

2° *Maar dat slechts één driehoek aan de gegevens zal voldoen;* want, wanneer het punt B in A gekomen is, en de tweede helft van den

den cirkel $ABDE$ doorloopt, zal het punt C nog éénmaal door den omtrek van $AGFD$ gaan: maar de driehoek, welke men dan verkrijgt, zal niet meer den ſcherpen hoek, maar deszelfs ſupplement tot ééne der gegevens hebben.

§. 1210. In dit geval, is het nogtans merkwaardig: dat, in de eerſte helft van de omwenteling, de ſnijding der halve cirkels, in den boog AG, moet plaats hebben, en in de tweede helft, in den boog FD; *zoodat de boog b, even als zijn overſtaande hoek, ſcherp zal zijn, en dat eindelijk dit geval van het voorgaande daar in onderſcheiden is, dat $A > B$ en $< 180° - B$ is*, terwijl, in het voorgaande, A te gelijk kleiner dan B en kleiner dan $180° - B$ zal moeten zijn.

§. 1211. Het zal gemakkelijk zijn, voor de andere opgenoemde gevallen, figuren (§. 1205.) te ontwerpen, om de omſtandigheden, waarin het vraagſtuk mogelijk is, of ſlechts ééne, of twee oploſſingen geeft, nategaan. Den geenen, die het bovenſtaande begrepen heeft, zal zulks gemakkelijk vallen, en hem, die te zwak is, om het reeds verklaarde te hebben kunnen volgen, zou eene verdere verklaring zonder nut zijn. Alle deze beſchouwingen dan vereenigende, zal men tot eenen regel mogen ſtellen.

1° *Indien de vergelijking $Sin.\,b = Sin.\,a \times Sin.\,B : Sin.\,A$. analytisch onbeſtaanbaar is; dan zal 'er ook geen driehoek beſtaan, op welken de gegevens paſſen.*

2° *Is de vergelijking $Sin.\,b = Sin.\,a \times Sin.\,B : Sin.\,A$ analytisch beſtaanbaar; dan zal,*

a) $a > 90°$ *en* $A < B$, *benevens* $A < 180° - B$

b) $a < 90°$ *en* $A > B$, *benevens* $A > 180° - B$

zijnde; geen driehoek op de gegevens paſſen.

3° *Maar is*

a) $a > 90°$ *en* $A > B$, *benevens* $A > 180° - B$

b) $a < 90°$ *en* $A < B$, *benevens* $A < 180° - B$

dan beſtaan 'er twee driehoeken, op welke de gegevens toepaſſelijk zijn.

4° *Is eindelijk $A >$ of $< B$ en tevens $A <$ of $> 180 - B$; dan beſtaat 'er ſlechts één driehoek, die aan de gegevens voldoet. In dit geval, is de oploſſing niet meer twijfelachtig, en de zijde b is gelijk van dezelfde ſoort als de gegeven hoek B.*

5° *In alle gevallen, beſliſt nog boven dien de regel, welke zegt: dat de ſom van twee zijden van dezelfde ſoort moet zijn, als de ſom der hoeken, welke tegen over die zijden ſtaan*, (zie §. 1054.) *al de boven opgenoemde omſtandigheden.*

§. 1212. Wij gaan, na deze ophelderingen, tot de oplossing zelve over, en zullen, daar wij de hoeken A en B, benevens de zijde a, als bekend aannemen, wegens de gelijkvormigheid van dit geval met het voorgaande, meestal de uitkomsten der oplossingen, met de aanwijzing van de gronden, waaruit zij zijn afgeleid, opgeven.

§. 1213. A. Om de onbekende zijde b, welke tegen over den bekenden hoek B staat, te vinden, heeft men de volgende oplossingen.

§. 1214. I. Oplossing. Volgens §. 1204. wordt de zijde b door de formule,

$$Sin.\, b = Sin.\, a \times Sin.\, B : Sin.\, A$$

gevonden.

§. 1215. II. Oplossing. Men stelle (vergelijk §. 1167.)

$$Sin.\, \phi = Sin.\, a \times Sin.\, B\,;\ Tang.\, \psi = \sqrt{\frac{Tang.\, \frac{1}{2}(A - \phi)}{Tang.\, \frac{1}{2}(A + \phi)}}$$

$$\text{dan is: } b = 90^\circ \mp 2\,\psi.$$

§. 1216. III. Oplossing. Of men stelle (vergelijk §. 1168.)

$$Tang.\, \nu = Sin.\, A, \text{ en } Tang.\, \mu = Sin.\, a \times Sin.\, B, \text{ en}$$

$$Tang.\, \omega = \sqrt{\frac{Sin.\, (\nu - \mu)}{Sin.\, (\nu + \mu)}}\,; \text{ dan is: } b = 90^\circ \mp 2\,\omega.$$

§. 1217. IV. Oplossing. Men zal, gelijk in §. 1169, vinden:

$$Sin.\, \phi = Sin.\, a \times Sin.\, B\,;\ Sin.\, \chi = \sqrt{\frac{Sin.\, \frac{1}{2}(A - \phi) \times Cos.\, \frac{1}{2}(A + \phi)}{Sin.\, A}}$$

$$\text{en } b = 90^\circ \mp 2\,\chi.$$

§. 1218. V. Oplossing. Eindelijk zal men, gelijk in §. 1170, vinden:

$$Sin.\, \phi = Sin.\, a \times Sin.\, B\,;\ Cos.\, \chi = \sqrt{\frac{Sin.\, \frac{1}{2}(A + \phi) \times Cos.\, \frac{1}{2}(A - \phi)}{Sin.\, A}}$$

$$\text{en } b = 90^\circ \mp 2\,\chi.$$

§. 1219. I. Aanmerking. Wanneer b weinig van 90° verschilt, zal men de tweede oplossing gebruiken, en de derde, wanneer ϕ weinig van 90° afwijkt.

§. 1220. II. Aanmerking. Wanneer men de zijde b, door ééne der voorgaande oplossingen, gevonden heeft, zullen dezelfde Neperiaansche Analogien, welke in §. 1171, gebruikt zijn, dienen kunnen, om C en c te vinden.

§. 1221. B. Om de onbekende zijde c te vinden, heeft men de volgende oplossingen.

§. 1222. I. Oplossing. *Fig.* 402. Nemende dat het geval twee oplossingen hebbe, en dat ABC en $AB'C'$ de twee bolvormige driehoehoeken zijn, welke, onder de gegevens A, B en a, bestaanbaar zijn; wanneer men dan, uit C en C', de loodregte bogen, CD en $C'D'$, op de basis, laat vallen; dan zullen de regthoekige driehoeken BCD en $B'C'D'$ (omdat $BC = B'C' = a$ en $B = B'$ is,) in alles gelijk zijn. Stellen wij dan $BD = B'D' = p$ en AD of $AD' = q$; dan hebben wij (*form.* (2), *Bladz.* 403,) $Tang. p = Tang. a \times Cos. B$, en, volgens de *XVI. Stell.*, $Tang. B \times Sin. p = Tang. A \times Sin. q$; derhalve $Sin. q = Cot. A \times Tang. B \times Sin. p$; en AB, of c, is gelijk aan $p + q$. Men heeft derhalve het volgend stelsel van vergelijkingen,

$$Tang. p = Tang. a \times Cos. B;\ Sin. q = Cot. A \times Tang. B \times Sin. p$$
$$\text{en}\quad c = p + q.$$

§. 1223. Aanmerking. Wanneer $Tang. p$ negatief wordt; dan kan men p negatief nemen: maar dan neemt men stilzwijgend den loodregten boog, welke, wanneer B stomp is, buiten den stompen hoek valt, of, wanneer B scherp is, den loodregten boog, welke men, op het verlengde van AB, het eerst ontmoet, en dan is, in die onderstelling, $Sin. p$ in de tweede vergelijking negatief. Wordt $Sin. q > 1$; dan zijn de gegevens, in alle gevallen, onderling onbestaanbaar: maar is $Sin. q < 1$ en negatief; dan moet q ook negatief genomen worden. Men kan ook, wanneer $Tang. p$ negatief is, het supplement van p nemen: maar dan blijft $Sin. q$ positief, enz. In allen gevalle, kan men, welk stelsel men aanneme, nooit dwalen; want, daar de waarde van c niet negatief noch ook niet grooter dan 180° kan zijn, zal, bij de uitkomst, blijken, of 'er ééne, twee of geene oplossingen, voor de bijzondere gegevens plaats zullen hebben.

§. 1224. II. Oplossing Men stelle, in de tweede vergelijking der voorgaande oplossing, $Tang.\ \phi = Tang.\ B \times Sin.\ p$ en $Tang. \psi = \sqrt{(Sin.\ (A - \phi) : Sin.\ (A + \phi))}$; dan zal $q = 90^\circ \pm 2\psi$ zijn. Men heeft dan nog dit andere stelsel:

$$Tang. p = Tang. a \times Cos. B;\ Tang. \phi = Tang. B \times Sin. p$$
$$Tang. \psi = \sqrt{(Sin. (A - \phi) : Sin. (A + \phi))};\ q = 90^\circ \pm 2\psi$$
$$\text{en}\quad c = p + 90^\circ \pm 2\psi.$$

§. 1225. Aanmerking. Wanneer de grootheid, onder het wortelteeken, negatief wordt, dan zijn de gegevens met eenen mogelijken driehoek onbestaanbaar.

§. 1226. III. Oplossing. Volgens het *I. Gev. XXI. Stell.* is,

$$Cot. A \times Sin. B = Sin. c \times Cot. a - Cos. c \times Cos. B$$

Lost men deze vergelijking, met betrekking tot $Cos. c$, (gelijk in §. 1178.) op; dan zal men vinden:

Cos.

$$Cos.\,c = -\frac{Cot.\,A \times Sin.\,B \times Cos.\,B \times Sin^2.\,a}{1 - Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B}$$
$$\pm \frac{Cos.\,a \sqrt{[1 - Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B : Sin^2.\,A]}}{1 - Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B}$$

§. 1227. IV. Oplossing. Dezelfde vergelijking, met betrekking tot $Sin.\,c$, opgelost zijnde, zal men vinden:

$$Sin.\,c = \frac{Cot.\,A \times Sin.\,a \times Cos.\,a \times Sin.\,B}{1 - Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B}$$
$$\pm \frac{Cos.\,B \times Sin.\,a \sqrt{[1 - Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B : Sin^2.\,A]}}{1 - Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B}$$

§. 1228. Aanmerking. In de twee laatste oplossingen, wordt de grootheid, onder het wortelteeken, gelijk aan $Cos^2.\,b$; zoodat men, om deze formulen te berekenen, noodwendig b zoeken moet: maar deze waarde van b gevonden hebbende, zal men, ($Sin.\,a \times Sin.\,B = Sin.\,\mu$ stellende,) verkrijgen:

$$Cos.\,c = [-\tfrac{1}{2}\,Cot.\,A \times Sin.\,2B \times Sin^2.\,a \pm Cos.\,a \times Cos.\,b] : Cos^2.\,\mu$$
$$Sin.\,c = [\tfrac{1}{2}\,Cot.\,A \times Sin.\,2a \times Sin.\,B \pm Cos.\,B \times Sin.\,a \times Cos.\,b] : Cos^2.\,\mu$$

§. 1229. V. Oplossing. Uit de vergelijking, $Cos.\,B \times Cos.\,c = Cot.\,a \times Sin.\,c - Cot.\,A \times Sin.\,B$, (zie III *Oplossing*) zal, gelijk in §. 1181. volgen:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}\,c = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{Cot.\,a \times Sin.\,A}{Sin.\,(B - A)} \times \left\{ 1 \pm \sqrt{\left[1 - \frac{Sin.\,(B - A) \times Sin.\,(A + B)}{Cos^2.\,a \times Sin^2.\,A}\right]} \right\}$$

§. 1230. De analytische waarde van $Tang.\,\tfrac{1}{2}\,c$, wordt, op de volgende wijze, voor het gebruik der gewone Logarithmen-tafel herleid. 1° Indien $B > A$ is, en de tweede term der uitdrukking, onder het wortelteeken, negatief blijft; dan stelle men:

$$Sin.\,\mu = \frac{\sqrt{(Sin.\,(B - A) \times Sin.\,(B + A))}}{Cot.\,a \times Sin.\,A}; \quad \Omega = \frac{2\,Cot.\,a \times Sin.\,A}{Sin.\,(B - A)}$$

en dan heeft men voor $Tang.\,\tfrac{1}{2}\,c$ deze twee waarden:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}\,c = \Omega \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}\,\mu, \text{ en } Tang.\,\tfrac{1}{2}\,c = \Omega \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,\mu$$

2° Maar is $B < A$, en wordt de tweede term, onder het wortelteeken, positief; dan stelle men:

$$Tang.\,\nu = \frac{\sqrt{(Sin.\,(B - A) \times Sin.\,(B + A))}}{Cot.\,a \times Sin.\,A}; \quad \omega = \frac{Cot.\,a \times Sin.\,A}{Sin.\,(B - A)}$$

en dan heeft men:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}\,c = +\,\omega \times Tang.\,\nu \times Cot.\,\tfrac{1}{2}\,\nu, \text{ of } Tang.\,\tfrac{1}{2}\,c = -\,\omega \times Tang.\,\nu \times Tang.\,\tfrac{1}{2}\,\nu.$$

§. 1231. VI. Oplossing. Uit dezelfde vergelijking, zal, gelijk in §. 1185,

§. 1185, volgen:

$$Cot.\tfrac{1}{2}c = \ldots\ldots$$

$$\frac{Cot.a \times Sin.A}{Sin.(A+B)} \times \left\{ 1 \pm \sqrt{\left[1 - \frac{Sin.(B-A) \times Sin.(A+B)}{Cot^2.a \times Sin^2.A}\right]} \right\}$$

§. 1232. Deze analytifche uitdrukking voor $Cot.\tfrac{1}{2}c$, geeft de volgende vergelijkingen:

1° Indien $B > A$ is; dan ftelle men:

$$Sin.\mu = \frac{\sqrt{(Sin.(B-A) \times Sin.(A+B))}}{Cot.a \times Sin.A};\quad \Omega = \frac{2\,Cot.a \times Sin.A}{Sin.(A+B)}$$

en dan heeft men:

$$Cot.\tfrac{1}{2}c = \Omega \times Cos^2.\tfrac{1}{2}\mu,\ \text{of}\ Cot.\tfrac{1}{2}c = \Omega \times Sin^2.\tfrac{1}{2}\mu$$

2° Maar is $B < A$; dan ftelle men:

$$Tang.\nu = \frac{\sqrt{(Sin.(B-A) \times Sin.(A+B))}}{Cot.a \times Sin.A};\quad \omega = \frac{Cot.a \times Sin.A}{Sin.(A+B)}$$

en dan heeft men wederom:

$$Cot.\tfrac{1}{2}c = \omega \times Tang.\nu \times Cot.\tfrac{1}{2}\nu,\ \text{of}\ Cot.\tfrac{1}{2}c = -\omega \times Tang.\nu \times Tang.\tfrac{1}{2}\nu.$$

§. 1233. C. Om den onbekenden hoek C te vinden, heeft men de volgende oplosfingen.

§. 1234. I. Oplossing. *Fig.* 402. Men heeft, in den regthoekigen driehoek BCD, (zie *form.* 3, *Bladz.* 403,) wanneer men de hoeken BCD en ACD, of $B'C'D'$ en $AC'D'$ gelijk P en Q ftelt, 1° $Cot.P = Cos.a \times Tang.B$, en, volgens de *XVI. Stell.* $Cos.B : Cos.A = Sin.P : Sin.Q$; derhalve $Sin.Q = Sin.P \times Cos.A : Cos.B$. Men heeft dan dit fteifel van vergelijkingen:

$$Cot.P = Cos.a \times Tang.B;\ Sin.Q = Sin.P \times Cos.A : Cos.B$$
$$\text{en}\quad C = P + Q.$$

§. 1235. Aanmerking. Hier gelden dezelfde aanmerkingen, als in §. 1223.

§. 1236. II. Oplossing. Uit de voorgaande oplosfing, zal men, gelijk in §. 1224, vinden:

$$Cot.P = Cos.a \times Tang.B;\ Cos.\phi = Cos.A \times Sin.P$$
$$Tang.\psi = \sqrt{[Tang.\tfrac{1}{2}(\phi - B) \times Tang.\tfrac{1}{2}(\phi + B)]};\ Q = 90° \pm 2\psi$$
$$\text{en}\quad C = 90° + P \pm 2\psi.$$

§. 1237. III. Oplossing. Uit de vergelijking $Cos.A = Cos.a \times Sin.B \times Sin.C - Cos.B \times Cos.C$, (zie *XIX. Stell.*) volgt:

$$Cos.C = -\frac{Cos.A \times Cos.B}{1 - Sin^2.a \times Sin^2.B} \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{Cos.a \times Sin.B \times Sin.A \sqrt{[1 - Sin^2.a \times Sin^2.B : Sin^2.A]}}{1 - Sin^2.a \times Sin^2.B}$$

§. 1238.

§. 1238. IV. Oplossing. Uit dezelfde vergelijking volgt:

$$Sin.\,C = \frac{Cos.\,a \times Cos.\,A \times Sin.\,B}{1 - Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$\pm \frac{Cos.\,B \times Sin.\,A \sqrt{[1 - Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B : Sin^2.\,A]}}{1 - Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B}$$

§. 1239. Aanmerking. Omdat $Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B : Sin^2.\,A = Sin^2.\,b$ is, zal men (ſtellende $Sin^2.\,a \times Sin^2.\,B = Sin^2.\,\mu$,) hebben:
$Cos.\,C = [-Cos.\,A \times Cos.\,B \pm Cos.\,a \times Cos.\,b \times Sin.\,A \times Sin.\,B] : Cos^2.\,\mu$
$Sin.\,C = [Cos.\,a \times Cos.\,A \times Sin.\,B \pm Cos.\,b \times Sin.\,A \times Cos.\,B] : Cos^2.\,\mu$;
vergelijkingen, welke, even als ſoortgelijken, in §. 1180, §. 1196, §. 1228, gevonden, op verſcheidene andere wijzen, herleidbaar zijn.

§. 1240. V. Oplossing. Dezelfde vergelijking zal geven:

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$\frac{Cos.\,a \times Sin.\,B \times \left\{1 \pm \sqrt{\left[1 - \frac{Sin.\,(A+B) \times Sin.\,(B-A)}{Cos^2.\,a \times Sin^2.\,B}\right]}\right\}}{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B) \times Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)}$$

§. 1241. Welke vergelijking aldus herleid wordt:

1° Indien $B > A$ is; dan ſtelle men:

$Sin.\,\mu = [\sqrt{(Sin.\,(A+B) \times Sin.\,(B-A))}] : Cos.\,a \times Sin.\,B$

$\Omega = Cos.\,a \times Sin.\,B : Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B) \times Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)$

en $Tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = \Omega \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,\mu$; of $Tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = \Omega \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}\,\mu$

2° Of, indien $B < A$ is; dan ſtelle men:

$Tang.\,\nu = [\sqrt{(Sin.\,(A+B) \times Sin.\,(B-A))}] : Cos.\,a \times Sin.\,B$

$\omega = Cos.\,a \times Sin.\,B : 2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B) \times Sin.\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)$

en $Tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = \omega \times Tang.\,\nu \times Cot.\,\tfrac{1}{2}\,\nu$; of $= -\,\omega \times Tang.\,\nu \times Tang.\,\tfrac{1}{2}\,\nu$

§. 1242. Nog zal men, door dezelfde vergelijking, vinden:

$$Cot.\,\tfrac{1}{2}\,C = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$\frac{Cos.\,a \times Sin.\,B \times \left\{1 \pm \sqrt{\left[1 - \frac{Sin.\,(A+B) \times Sin.\,(B-A)}{Cos^2.\,a \times Sin^2.\,B}\right]}\right\}}{2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)}$$

§. 1243. En deze vergelijking, wordt aldus herleid:

1° Indien $B > A$ is; dan ſtelle men:

$Sin.\,\mu = [\sqrt{(Sin.\,(A+B) \times Sin.\,(B-A))}] : Cos.\,a \times Sin.\,B$

$\Omega = Cos.\,a \times Sin.\,B : Cos.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)$

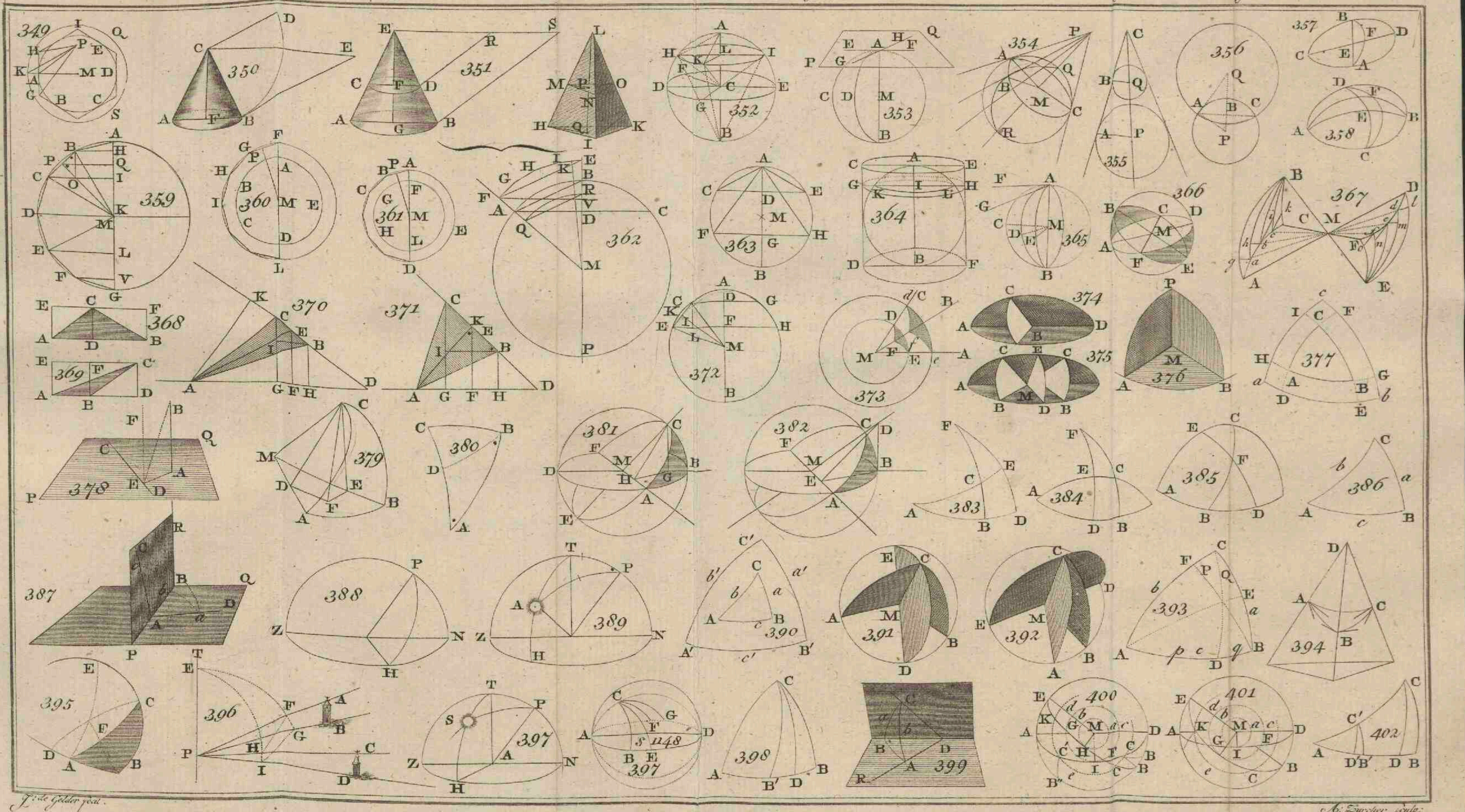
en $Cot.\,\tfrac{1}{2}\,C = \Omega \times Sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,\mu$; of $Cot.\,\tfrac{1}{2}\,C = \Omega \times Cos^2.\,\tfrac{1}{2}\,\mu$

2° Is $B < A$; dan ſtelle men:

$Tang.\,\nu = [\sqrt{(Sin.\,(B-A) \times Sin.\,(A+B))}] : Cos.\,a \times Sin.\,B$

$\omega = Cos.\,a \times Sin.\,B : 2\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\,(A+B) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)$

en



J. de Gelder fecit. A. Zurcher sculp.

en dan is:

$$Cot.\tfrac{1}{2}C = \omega \times Tang.\nu \times Cot.\tfrac{1}{2}\nu, \text{ of } Cot.\tfrac{1}{2}C = -\omega \times Tang.\nu \times Tang.\tfrac{1}{2}\nu.$$

Eenige aanmerkingen op de afgehandelde gevallen.

§. 1244. 1° De onderſcheidene oplosſingen, welke wij van elk geval gegeven hebben, hebben niet alle, met betrekking tot de werkdadige berekening, dezelfde voordeelen; ofſchoon, in zeer vele omſtandigheden, (welke wij, om geene te groote uitgebreidheid aan dit ſtuk te geven, met ſtilzwijgen voorbij zijn gegaan, en welke wij in onze mondelinge lesſen doen opmerken,) ſommige oplosſingen, die het ongeſchikſte ſchijnen, boven alle anderen eene meerdere naauwkeurigheid geven.

§. 1245. 2° Echter moet de leerling, die wenscht, niet ſlechts oppervlakkig de bolvormige Driehoeksmeting te verſtaan: maar dit waarlijk allergewigtigst gedeelte der Meetkunst te doorgronden: (en dit behoort hij, zal hij zich, met vrucht, de uitmuntendſte meesterſtukken der eerſte Meesters van onzen tijd eigen maken, en zich op de Sterre- en Zeevaartkunde toeteleggen, tè doen,) niet ſlechts al het verhandelde, met lust en verſtand, nagaan: maar ook elke onzer uitgebragte formulen op hetzelfde voorbeeld in getallen toepasſen. Uit deze oefening zal hij het dubbeld voordeel trekken: 1° van bekend te worden met de voornaamſte der analytiſche zetten, waardoor men de voortbrengſels van voorname Meesters, met vrucht lezen, en zelfs nieuwe dingen zal leeren uitvinden; 2° dat men, met het dadelijk gebruik der teekens en tafels, die gemeenzaamheid verkrijgen zal, welke een noodzakelijk vereischte uitmaakt van den geenen, die gaarne op die hoogte komt, dat hij zich, met vertrouwen, op zijn eigen werk kan verlaten.

§. 1246. 3° De tweede, vierde en zesde gevallen zijn, met de eerſte, derde en vijfde, zoo naauw verknogt, dat de eerſte uit de laatſte, met behulp van de eigenſchappen des aspunts-driehoeks, kunnen afgeleid worden, waarom dan ook de formulen voor de oplosſing dezer alzoo in verband ſtaande gevallen, die in het oog loopende overëënſtemming bezitten, welke de opmerkzame Lezer daarin reeds zal hebben opgemerkt. Het is nuttig, dat de Leerling, vooral indien hij tijd heeft, zulks naga. Een voorbeeld zal genoeg zijn, om hem den weg in dezen te wijzen. Wij hebben (*A*, *B* en *C*,

 ge-

gegeven zijnde) gevonden, zie §. 1087, §. 1088, *Bladz.* 427 en 428,

$$Sin. \tfrac{1}{2} A = \ldots\ldots$$

$$\sqrt{\frac{Sin.(s-b) \times Sin.(s-c)}{Sin.\,b \times Sin.\,c}} \text{ en } Cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{Sin.\,s \times Sin.(s-a)}{Sin.\,b \times Sin.\,c}}$$

Laat nu $A' B' C'$, *fig.* 390, de aspunts-driehoek van den driehoek ABC zijn; dan zullen, indien, in ABC, de zijden a, b en c gegeven zijn, ook de hoeken A', B' en C' bekend zijn; want (*III. St.*) $A' = 180^\circ - a$, $B' = 180^\circ - b$ en $C' = 180^\circ - c$ zijnde, zal ook, omgekeerd, $a = 180^\circ - A'$, $b = 180^\circ - B'$, $c = 180^\circ - C'$ zijn, en daarom $Sin.\,a = Sin.\,B'$; $Sin.\,b = Sin.\,B'$ en $Sin.\,c = Sin.\,C'$ zijn; om dezelfde reden, zal $A = 180^\circ - a'$; $B = 180^\circ - b'$; $C = 180^\circ - c'$ en $\tfrac{1}{2} A = 90^\circ - \tfrac{1}{2} a'$; $\tfrac{1}{2} B = 90^\circ - \tfrac{1}{2} b'$; $\tfrac{1}{2} C = 90^\circ - \tfrac{1}{2} c'$ en $Sin. \tfrac{1}{2} A = Sin.(90^\circ - \tfrac{1}{2} a) = Cos. \tfrac{1}{2} a$; enz. $Cos. \tfrac{1}{2} A = Sin. \tfrac{1}{2} a$ enz. zijn. Verder is $A' + B' + C' = 540^\circ - (a + b + c)$; $S' = 270^\circ - s$ en $s = 270^\circ - S'$; derhalve $Sin.\,s = Sin.(270^\circ - S') = Sin.\,270^\circ \times Cos.\,S' - Cos.\,270^\circ \times Sin.\,S'$; dat is, omdat $Sin.\,270^\circ = -1$ en $Cos.\,270^\circ = 0$ is, $Sin.\,s = -Cos.\,S'$. Eindelijk van $s = 270^\circ - S'$, $a = 180^\circ - A'$ aftrekkende, zal 'er $s - a = 90^\circ - (S' - A')$ overblijven; derhalve zal $Sin.(s-a) = Sin.\,90^\circ \times Cos.(S' - A') - Cos.\,90^\circ \times Sin.(S' - A')$; of, $Sin.(s-a) = Cos.(S' - A')$ zijn: insgelijks is $Sin.(s-b) = Cos.(S' - B')$ en $Sin.(s-c) = Cos.(S' - C')$. Stelt men nu al dit gevondene, in de bijgebragte vergelijkingen; dan zal men de waarden $Sin. \tfrac{1}{2} a'$ en $Cos. \tfrac{1}{2} a'$, welke in de tweede en derde oplossingen van het tweede geval, gevonden zijn, verkrijgen.

§. 1247. 4° Wanneer men de gevondene formulen voor de onderscheidene gevallen, (welke alle zoo ingerigt zijn, dat men geene bijzondere figuur, om de berekening te maken, behoeft te teekenen,) op de berekening van eenen dadelijk gegevenen driehoek wil toepassen; dan behoeft men, wanneer het 'er op geene groote naauwkeurigheid aankomt, niet alle cijfers van de decimalen der Logarithmen te gebruiken; in dit geval, zijn de vijf eerste cijfers der breuk voldoende. Indien wij dan de berekening van de opgegevene voorbeelden tot in de tiende deelen van secunden bepaald hebben, is zulks geschied, om den Leerling aan deze strikte naauwkeurigheid, die echter altijd niet noodig is, te gewennen.

Bijzondere oplossing van sommige der behandelde gevallen, door middel der reeksen.

§. 1248. Laat gegeven zijn de vergelijking $Tang.\,\alpha = \frac{m\,Sin.\,\beta}{1 \pm m\,Cos.\,\beta}$; dan zal men, van de handelwijze van §. 641, *Bladz.* 245, gebruik makende, vinden: dat de hoek α door de volgende reeks,

$$\alpha = \frac{1}{Sin.\,1''} \times \Big\{ m\,Sin.\,\beta \mp \tfrac{1}{2} m^2\,Sin.\,2\,\beta + \tfrac{1}{3} m^3\,Sin.\,3\,\beta \mp$$

$$\tfrac{1}{4} m^4\,Sin.\,4\,\beta + \tfrac{1}{5} m^5\,Sin.\,5\,\beta \mp \tfrac{1}{6} m^6\,Sin.\,6\,\beta + \text{enz.} \Big\} \;.\;.\; (P)$$

wordt uitgedrukt, en men zal den hoek α, indien m eene kleine breuk is, door slechts een gering aantal termen dezer reeks te gebruiken, in secunden, verkrijgen.

§. 1249. Laat verder gegeven zijn $Tang.\,x = \frac{p}{q} \times Tang.\,y$; dan zal men (*IV. Stell. VIII. B.*) verkrijgen:

$$Tang.\,(x+y) = \frac{(p+q) \times Tang.\,y}{q - p \times Tang^2.\,y} = \frac{(p+q) \times Sin.\,y \times Cos.\,y}{q \times Cos^2.\,y - p \times Sin^2.\,y} =$$

dat is, zie *IV en V. Gev. III. Stell. VIII. B.*,

$$Tang.\,(x+y) = \frac{(p+q)\,Sin.\,2\,y}{(q-p) + (p+q)\,Cos.\,2\,y} \;.\;.\;.\; (Q)$$

§. 1250. Op dezelfde wijze zal men vinden:

$$Tang.\,(y-x) = \frac{(q-p)\,Sin.\,2\,y}{(p+q) + (q-p)\,Cos.\,2\,y} \;.\;.\;.\; (R)$$

§. 1251. Stelt men in deze vergelijkingen $p : q = r$; dan is $q + p = q\,(1+r)$ en $q - p = q\,(1-r)$, en nu zal uit de vergelijking $Tang.\,x = r \times Tang.\,y$ volgen:

$$Tang.\,(x+y) = \frac{(1+r)\,Sin.\,2\,y}{(1-r) + (1+r)\,Cos.\,2\,y} \;.\;.\;.\; (Qq)$$

$$Tang.\,(y-x) = \frac{(1-r)\,Sin.\,2\,y}{(1+r) + (1-r)\,Cos.\,2\,y} \;.\;.\;.\; (Rr)$$

moeten volgen.

§. 1252. Men zal door middel van de onbepaald voortloopende reeks (P), en zulks door eene eenvoudige substitutie, met behulp der vergelijkingen (Q), (R), (Qq) en (Rr), wanneer men, in $Tang.\,x = \frac{p}{q} \times Tang.\,y$ en $Tang.\,x = r \times Tang.\,y$, p, q, r en y, als bekend aanmerkt, de waarden van $Tang. (x+y)$ en $Tang. (y-x)$ in onbepaald voortloopende reekſen kunnen uitdrukken: want, indien men de vergelijking (Q) met $Tang. \alpha = (m \, Sin. \beta) : (1 + m \, Cos. \beta)$ vergelijkt, dan is $\alpha = x + y$; $\beta = 2 y$; $(p+q):(q-p) = m$, en men heeft dan:

$$x = -y + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{Sin. 1''} \times \left\{ \frac{p+q}{q-p} \times Sin. 2y - \tfrac{1}{2}.\left(\frac{p+q}{q-p}\right)^2 \times Sin. 4y + enz. \right\} \quad (S)$$

$$x = +y - \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{Sin. 1} \times \left\{ \frac{q-p}{q+p} \times Sin. 2y - \tfrac{1}{2}.\left(\frac{q-p}{q+p}\right)^2 \times Sin. 4y + enz. \right\} \quad (T)$$

en, op dezelfde wijze, worden (Qq) en (Rr) in reekſen herleid.

§. 1253. Deze onbepaald voortloopende reekſen geven onder anderen aanleiding tot de volgende beſchouwingen.

§. 1254. 1° *Van eenen regthoekigen bolvormigen driehoek ABC, regthoekig in B, gegeven zijnde, éénen der ſcheve hoeken A, benevens de hypothenuſa b;* dan zal de regthoekszijde c aan den ſcheven hoek liggende, uitgedrukt worden door de formule

$$c = b - \frac{Tang^2. \tfrac{1}{2} A}{Sin. 1''} \times Sin. 2b + \frac{Tang^4. \tfrac{1}{2} A}{2 . Sin. 1''} \times Sin. 4b - \ldots \frac{Tang^6. \tfrac{1}{2} A}{3 . Sin. 1''} \times Sin. 6b + \frac{Tang^8. \tfrac{1}{2} A}{4 . Sin. 1''} \times Sin. 8b - enz.$$

eene reeks, welke uit de vergelijking $Tang. c = Cos. A \times Tang. b$, met behulp van de vergelijking (Rr) wordt afgeleid, en, wanneer de hoek A niet boven 30° is, aanmerkelijk convergeert.

§. 1255. 2° Dergelijke reekſen zal men voor andere gevallen der regthoekige bolvormige driehoeken kunnen vinden. Als bij voorbeeld, uit de vergelijking (3) en (7), van de Tafel, *Bladz.* 403.

§. 1256. 3° Alle de Neperiaanſche Analogien zijn voor dergelijke herleidingen vatbaar. Om ons ſlechts bij de (12) en (13), zie Stelling XVII, te bepalen, zal men, met behulp van reeds meermaal aangehaalde eigenſchappen der goniometriſche lijnen, vinden: dat

ſtellende, $Tang. \tfrac{1}{2} a \times Cot. \tfrac{1}{2} b = m$
en $Tang. \tfrac{1}{2} a \times Tang. \tfrac{1}{2} b = n$

$$\tfrac{1}{2}(B-A) = 90° - \tfrac{1}{2} C - \frac{m \times Sin. C}{Sin. 1''} - \frac{m^2 \, Sin. 2C}{2 . Sin. 1''} - \frac{m^3 \, Sin. 3C}{3 . Sin. 1''} - \frac{m^4 \, Sin. 4C}{4 . Sin. 1''} - enz. \; (zijnde \; b > a \; en \; B > A.)$$

$\tfrac{1}{2}(A+B)$

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\tfrac{1}{2}C+\frac{n\ Sin.\ C}{Sin.\ 1''}-\frac{n^2\ Sin.\ 2\ C}{2\ Sin.\ 1''}+\frac{n^3\ Sin.\ 3\ C}{3\ Sin.\ 1''}$$
$$-\frac{n^4\ Sin.\ 4\ C}{4\ Sin.\ 1''}+enz,$$

zal zijn. Door welke reekſen de halve ſom en het halve verſchil der twee onbekende hoeken A en B, uit de twee gegevene zijden a en b en den ingeſloten hoek C, kunnen gevonden worden; maar daar toe wordt vereischt: dat beide reekſen genoeg convergeren, om ſlechts een gering getal termen tot de berekening noodig te hebben. De eerſte convergeert altijd, omdat in de analogie, waaruit zij is afgeleid, $b > a$ geſteld wordt: de tweede reeks zal ook convergeren, indien .... $Tang.\ \tfrac{1}{2}a \times Tang.\ \tfrac{1}{2}b < 1$, of $Tang.\ \tfrac{1}{2}a < Cot.\ \tfrac{1}{2}b$ is; en, dit geval heeft klaarblijkelijk plaats, indien $a+b < 180^\circ$ is. Wanneer nogtans $a+b > 180^\circ$ is, zal men, door den ſupplements driehoek in plaats van den gegevenen te berekenen, (zie *II. Bep.*) de divergentie van de reeks kunnen vermijden. Dan, men zal in alle gevalle, wanneer de gegevene zijden a en b, beneden de 45° vallen, en het verſchil dezer zijden zeer groot is, deze reekſen met voordeel kunnen gebruiken.

§. 1257. Gevolg. Uit de tweede reeks volgt onmiddelijk: dat

$$A+B+C-180^\circ=2\times\left\{\frac{n\ Sin.\ C}{Sin.\ 1''}-\frac{n^2\ Sin.\ 2\ C}{2\ Sin.\ 1''}+\frac{n^3\ Sin.\ 3\ C}{3\ Sin.\ 1''}\right.$$
$$\left.-\frac{n^4\ Sin.\ 4\ C}{4\ Sin.\ 1''}+enz.\right\}$$

is, zijnde $n = Tang.\ \tfrac{1}{2}a \times Tang.\ \tfrac{1}{2}b$, door welke reeks de overmaat van de ſom der hoeken eens bolvormigen driehoeks boven twee regte hoeken in eene reeks, welke functie van twee zijden en derzelver ingeſloten hoek is, in een getal van ſecunden wordt voorgeſteld, zoodat, wanneer men (zie *XVII. Stell. XII. B.*) het getal, dat de berekening van deze reeks geeft, door $2592000''$, welke in 720° begrepen zijn, deelt, het quotient de betrekking van den inhoud des bolvormigen driehoeks tot den inhoud van hetoppervlak van den bol tot welken hij behoort, zal voorſtellen.

§. 1258. 4° Keeren wij tot de vergelijkingen (u) en (v)

$$Sin^2.\ \tfrac{1}{2}c = Sin^2.\ \tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin^2.\ \tfrac{1}{2}C + Sin^2.\ \tfrac{1}{2}(b-a) \times Cos^2.\ \tfrac{1}{2}C \quad (u)$$
$$Cos^2.\ \tfrac{1}{2}c = Cos^2.\ \tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin^2.\ \tfrac{1}{2}C + Cos^2.\ \tfrac{1}{2}(b-a) \times Cos^2.\ \tfrac{1}{2}C \quad (v)$$

welke in §. 1122 en §. 1123, *Bladz.* 438 en 439 betoogd zijn, terug; dan zien wij: dat de termen van de leden dezer vergelijkingen de zijden van twee regthoekige platte driehoeken voorſtellen, in den eerſten van welke, $Sin.\ c$ de hypothenuſa, en $Sin.\ \tfrac{1}{2}(a+b) \times Sin.\ \tfrac{1}{2}C$,

 en

en $Sin.\frac{1}{2}(b-a) \times Cos.\frac{1}{2}C$, de regthoekszijden zijn, en in de tweeden, $Cos.\frac{1}{2}c$ de hypothenusa, $Cos.\frac{1}{2}(a+b) \times Sin.\frac{1}{2}C$ en $Cos.\frac{1}{2}(b-a) \times Cos.\frac{1}{2}C$ de regthoekszijden. Nu kan men ook uit deze vergelijkingen twee andere afleiden, welke de zijden van een platten driehoek voorstellen, met den bolvormigen driehoek ABC denzelfden hoek C gemeen hebbende. Men ontwikkele, tot dat einde, de waarden van $Sin^2.\frac{1}{2}(b+a)$, $Sin^2.\frac{1}{2}(b-a)$, $Cos^2.\frac{1}{2}(a+b)$ en $Cos^2.\frac{1}{2}(b-a)$, volgens de vergelijkingen van de *III. Stell. VIII. B.*, en schrijve voor $Sin^2.\frac{1}{2}C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Cos.C$, en voor $Cos^2.\frac{1}{2}C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}Cos.C$; dan zal men vinden:

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}c = Sin^2.\tfrac{1}{2}a \times Cos^2.\tfrac{1}{2}b + Sin^2.\tfrac{1}{2}b \times Cos^2.\tfrac{1}{2}a \ldots\ldots$$
$$-2\,Sin.\tfrac{1}{2}a \times Cos.\tfrac{1}{2}b \times Sin.\tfrac{1}{2}b \times Cos.\tfrac{1}{2}a \times Cos.C \;\ldots\; (uu)$$
$$Cos^2.\tfrac{1}{2}c = Cos^2.\tfrac{1}{2}a \times Cos^2.\tfrac{1}{2}b + Sin^2.\tfrac{1}{2}a \times Sin^2.\tfrac{1}{2}b \ldots\ldots$$
$$+2\,Sin.\tfrac{1}{2}a \times Cos.\tfrac{1}{2}b \times Sin.\tfrac{1}{2}b \times Cos.\tfrac{1}{2}a \times Cos.C \;\ldots\; (vv)$$

Het is genoeg deze formulen in te zien, om overtuigd te worden: dat de eerste (zie *VII. Stell. IX. B.*) de vergelijking is op de zijden van eenen regtlijnigen driehoek, welker zijden respectievelijk aan . . $Sin.\frac{1}{2}c$, $Sin.\frac{1}{2}a \times Cos.\frac{1}{2}b$ en $Sin.\frac{1}{2}b \times Cos.\frac{1}{2}a$, gelijk zijn, en welks hoek tegen over de zijde $Sin.\frac{1}{2}c$ staande, gelijk C is, en dat de tweede formule de vergelijking is op de zijden van eenen anderen regtlijnigen driehoek, welks zijden door $Cos.\frac{1}{2}c$, $Cos.\frac{1}{2}a \times Cos.\frac{1}{2}b$ en $Sin.\frac{1}{2}a \times Sin.\frac{1}{2}b$ worden uitgedrukt, en waarvan $180^0 - C$ de hoek is, welke tegen over de zijde $Cos.\frac{1}{2}c$ staat.

Wanneer nu de vergelijking op eenen regtlijnigen driehoek $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \times Cos.C$ gegeven is; dan zal, zie §. 642, *Bladz.* 246, in Neperiaansche Logarithmen,

$$Log.\gamma = Log.\alpha - \frac{\beta}{\alpha}.Cos.C - \frac{\beta^2}{2\alpha^2}.Cos.2C - \frac{\beta^3}{3\alpha^3}.Cos.3C - enz.$$

of wel,

$$Log.\gamma = Log.\beta - \frac{\alpha}{\beta}.Cos.C - \frac{\alpha^2}{2\beta^2}.Cos.2C - \frac{\alpha^3}{3\beta^3}.Cos.3C - enz.$$

en, wanneer de hoek C stomp zijnde, de term $2\alpha\beta \times Cos.C$ van teeken verandert, zal

$$Log.\gamma = Log.\alpha + \frac{\beta}{\alpha}.Cos.C - \frac{\beta^2}{2\alpha^2}.Cos.2C + \frac{\beta^3}{3\alpha^3}.Cos.3C - enz.$$

$$Log.\gamma = Log.\beta + \frac{\alpha}{\beta}.Cos.C - \frac{\alpha^2}{2\beta^2}.Cos.2C + \frac{\alpha^3}{3\beta^3}.Cos.3C - enz.$$

zijn, en men zal naar dat $\alpha > \beta$ of $\beta > \alpha$ de eerste of tweede reeks nemen, welke des te sterker zal convergeren, naar mate het onderſcheid tusſchen de zijden α en β grooter is. Men vergelijke nu de vergelijking (uu), term voor term, met de vergelijking $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta . Cos. C$; dan is $\alpha = Sin. \frac{1}{2} a \times Cos. \frac{1}{2} b$ en $\beta = Cos. \frac{1}{2} a \times Sin. \frac{1}{2} a$; dan zal men:

$$Tang. \tfrac{1}{2} a : Tang. \tfrac{1}{2} b = p \text{ en } Tang. \tfrac{1}{2} b : Tang. \tfrac{1}{2} a = q;$$

ſtellende, vinden:

$$Log. Sin. \tfrac{1}{2} c = Log. Cos. \tfrac{1}{2} a + Log. Sin. \tfrac{1}{2} b \mp p . Cos. C - \tfrac{1}{2} p^2 . Cos. 2 C \mp \tfrac{1}{3} p^3 . Cos. 3 C - \tfrac{1}{4} p^4 . Cos. 4 C \mp \tfrac{1}{5} p^5 . Cos. 5 C - enz.$$

$$Log. Sin. \tfrac{1}{2} c = Log. Sin. \tfrac{1}{2} a + Log. Cos. \tfrac{1}{2} b \mp q . Cos. C - \tfrac{1}{2} q^2 . Cos. 2 C \mp \tfrac{1}{3} q^3 . Cos. 3 C - \tfrac{1}{4} q^4 . Cos. 4 C \mp \tfrac{1}{5} q^5 . Cos. 5 C - enz.$$

in welke vergelijkingen de bovenſte teekens indien C ſcherp is, en de benedenſte indien C ſtomp is, moeten genomen worden; en, wanneer $b > a$ zal de eerſte reeks convergeren; de tweede indien $a > b$ is.

De vergelijking (vv), term voor term, met $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta . Cos. C$ vergelijkende, zal men:

$$Tang. \tfrac{1}{2} a \times Tang. \tfrac{1}{2} b = r \text{ en } Cot. \tfrac{1}{2} a \times Cot. \tfrac{1}{2} b = s$$

ſtellende, vinden:

$$Log. Cos. \tfrac{1}{2} c = Log. Cos. \tfrac{1}{2} a + Log. Cos. \tfrac{1}{2} b \pm r . Cos. C - \tfrac{1}{2} r^2 . Cos. 2 C \pm enz.$$

$$Log. Cos. \tfrac{1}{2} c = Log. Sin. \tfrac{1}{2} a + Log. Sin. \tfrac{1}{2} b \pm s . Cos. C - \tfrac{1}{2} s^2 . Cos. 2 C \pm enz.$$

in welke reekſen, de bovenſte of benedenſte teekens gelden, naar dat C ſcherp of ſtomp is, en vermits $r = 1 : s$ is, zal ééne dezer reekſen convergeren, indien de andere divergeert.

§. 1259. Men zal voor het vierde geval, wanneer twee hoeken met de ingeſlotene zijde gegeven zijn, ſoortgelijke reekſen vinden kunnen.

Gevallen, in welke Bolvormige Driehoeken, door eene benadering, eenvoudiger, en, met eene voldoende naauwkeurigheid, kunnen opgelost worden.

§. 1260. XII. Vraagstuk. *Wanneer, drie zijden a, b en c van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de bekende zijden a en b weinig van 90° verſchillen, den hoek C, tusſchen de zijden a en b liggende, door eene eenvoudige benadering te vinden?*

Oplossing. Men ſtelle $a = 90° - \alpha$ en $b = 90° - \beta$ en $C = c + x$; dan zal, omdat, wanneer $a = 90°$ en $b = 90°$ geſteld wordt, $C = c$ is, x een zeer kleine boog zijn, en de vergelijking $Cos. C = [Cos. c - Cos. a \times Cos. b] : Sin. a \times Sin. b$, zal in

$$Cos. (c + x) = \frac{Cos. c - Sin. \alpha \times Sin. \beta}{Cos. \alpha \times Cos. b}$$

veranderen. Maar, aangezien α en β zeer klein zijn, zal men, uit de reeksen (59) en (60), *Bladz.* 211, de vierde magten van α en β, als ten uiterste klein zijnde, verwaarloozende, vinden: $Sin.\,\alpha \times Sin.\,\beta = \alpha \times b$ en $Cos.\,\alpha \times Cos.\,\beta = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2$, en dan verkrijgt men:

$$Cos.\,(c + x) = \frac{Cos.\,c - \alpha\beta}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2} = (1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2) \times (Cos.\,c - \alpha\beta)$$

Maar verwaarloosd men het vierkant van x; dan is: $Cos.\,(c + x) = Cos.\,c - x\,Sin.\,c$, en men verkrijgt alzoo

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2).\,Cos.\,c}{Sin.\,c}$$

in welke vergelijking, (aangezien $\alpha\beta$ en $\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$, ten opzigte van α en β zelve, zeer klein zijn,) niet meer dan zeer kleine grootheden verwaarloosd zijn geworden. Men stelle nu $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = p$ en $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = q$; dan verandert de gevondene vergelijking in:

$$x = + p^2 \left(\frac{1 - Cos.\,c}{Sin.\,c}\right) - q^2 \left(\frac{1 + Cos.\,c}{Sin.\,c}\right) = + p^2 \times Tang.\,\tfrac{1}{2}c$$
$$- q^2.\,Cot.\,\tfrac{1}{2}c$$

Het tweede lid dezer vergelijking, in deelen van de straal uitgedrukt zijnde, moet met het standvastig getal $206264'',8$ vermenigvuldigd, of met $Sin.\,1''$ gedeeld worden, om x in secunden te verkrijgen: men heeft derhalve, in secunden van eenen boog,

$$x = + \frac{p^2 \times Tang.\,\frac{1}{2}c}{Sin.\,1''} - \frac{q^2 \times Cot.\,\frac{1}{2}c}{Sin.\,1''}$$
$$\text{en} \quad C = c + x$$

wanneer echter α en $\beta \geqq + 2^\circ$ waren, zou het beter zijn, zich van de gewone oplossing des driehoeks te bedienen. In de Werkdadige Meetkunst zullen wij nog eene andere oplossing geven.

§. 1261. XIII. Vraagstuk. *Eenen bolvormigen driehoek, welks zijden, met betrekking tot de straal van den bol, tot welken hij behoort, zeer klein zijn, op de wijze van eenen regtlijnigen driehoek optelossen?*

Oplossing. Laten a, b, c, de zijden van eenen bolvormigen driehoek zijn, behoorende tot den bol, welks straal $= r$ is; nemen wij, dat a, b, c en r, in dezelfde éénheden, bij voorbeeld, meters, zijn uitgedrukt; dan zullen de zijden van eenen bolvormigen driehoek, de éénheid tot straal hebbende, zijn $a:r$, $b:r$ en $c:r$, en, volgens de bekende eigenschap, zal

$$Cos.\,A = \frac{Cos.\,\frac{a}{r} - Cos.\,\frac{b}{r} \times Cos.\,\frac{c}{r}}{Sin.\,\frac{b}{r} \times Sin.\,\frac{c}{r}}$$

moeten zijn. Vermits nu r in vergelijking van a, b en c, zéer groot is, zal, (zie *Bladz.* 211, de reekſen (59) en (60),) nagenoeg

$$Cos.\,\frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4};\quad Cos.\,\frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4};$$

$$Cos.\,\frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}\,.$$

$$Sin.\,\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3},\ \text{en}\ Sin.\,\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}$$

zijn: ſtelt men dan deze waarden in de vergelijking voor $Cos.\,A$; dan zal men, na behoorlijke herleiding, en, na den teller en den noemer der breuk met $1 + (b^2 + c^2) : 6r^2$ vermenigvuldigd te hebben (de vijfde en hoogere magten verwaarloozende,) nagenoeg verkrijgen:

$$Cos.\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24\,bcr^2}$$

Verbeelden wij ons nu eenen regtlijnigen driehoek, welks zijden, in lengte, gelijk zijn aan de zijden van den voorgeſtelden bolvormigen driehoek: zij A' de hoek, welke in dien regtlijnigen driehoek tegen over de zijde a ſtaat; dan is (zie *VII. Stell. IX. B.* en *Bijv. XVIII en XIX. Stell. III. B.*) $Cos.\,A' = (b^2 + c^2 - a^2) : 2bc$, en $4\,b^2c^2\,Sin^2.\,A' = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$; en

$$Cos.\,A = Cos.\,A' - \frac{bc}{6r^2}\,Sin^2.\,A' \quad \ldots\ldots \quad (p)$$

Hieruit blijkt: dat $A > A'$ is; ſtel derhalve $A = A' + x$; dan zal men het vierkant van x, als zeer klein zijnde, zonder merkbare onnaauwkeurigheid, kunnen verwerpen, en dan is $Cos.\,A = Cos.\,A' - x\,Sin.\,A'$. Trekt men nu deze vergelijking van (p) af; dan zal men, na alles door $Sin.\,A'$ gedeeld te hebben, vinden: $x = \frac{bc}{6r^2}\,.\,Sin.\,A'$, en

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2}\,Sin.\,A'$$

Maar nu is $\frac{1}{2}\,bc \times Sin.\,A'$ de inhoud van den regtlijnigen driehoek, waarvan a, b en c, de zijden zijn; en deze is (dit gevoelt men van zelf,) niet merkelijk van den inhoud des voorgeſtelden bolvormigen driehoeks onderſcheiden: wanneer men derhalve den inhoud dezer driehoeken $=\omega$ ſtelt; zal $A' = A - \frac{\omega}{3r^2}$ zijn. Het zal op dezelfde wijze blijken: dat

$$B' = B - \frac{\omega}{3r^2}, \text{ en } C' = C - \frac{\omega}{3r^2}$$

is, en telt men deze vergelijkingen bij elkander, dan zal:

$$A' + B' + C' = 180° = A + B + C - \frac{\omega}{r^2}$$

zijn. Men kan dan $\frac{\omega}{r^2}$ aanmerken als het *exces* of de *overmaat* van de ſom der hoeken des bolvormigen driehoeks boven twee regte hoeken. Wij noemen voortaan, die overmaat het *ſphærisch exces*, en uit dit alles volgt dan: deze merkwaardige eigenſchap.

Een bolvormige driehoek, welks hoeken wij A, B en C noemen, en welks overſtaande zijden a, b, c, met betrekking tot de ſtraal van den bol, tot welken hij behoort, zeer klein zijn, ſtemt nagenoeg overéén met eenen regtlijnigen driehoek, welks zijden a, b en c, dezelfde lengte als de zijden van den bolvormigen driehoek hebben, en waarvan (indien ω het ſphærisch exces is,) de overſtaande hoeken gelijk zijn aan $A - \frac{1}{3}\omega$, $B - \frac{1}{3}\omega$ *en* $C - \frac{1}{3}\omega$.

§. 1262. Aanmerking. Dit Theorema is, in de berekening der driehoeken, welke op het oppervlak van den Aardbol, in de Geodeſie, ontworpen worden, van het uitgeſtrekte nut. De ſtandplaatſen zijn, wel is waar, meestal op onderſcheidene afſtanden van het middelpunt der Aarde verwijderd; dan, men neemt, door de behoorlijke herleidingen in acht te nemen, in plaats van de waargenomen driehoeken, de bolvormige driehoeken, welke op een bolvormig waterpas ontworpen zijn. De bekende zijden dezer driehoeken moeten tevens met de ſtraal der Aarde in dezelfde maat (bij voorbeeld, meters,) zijn uitgedrukt, en dan is, *het ſphærisch exces ω gelijk aan den inhoud van den driehoek, gedeeld door het vierkant van de ſtraal der Aarde*, en om dit ſphærisch exces in ſecunden te verkrijgen, moet hetzelve met 206264″,8, van den omtrek eens cirkels, welke in de lengte van de ſtraal begrepen zijn, vermenigvuldigd worden. Daar nu één-vierde van den middagcirkel, of $\frac{1}{2}\pi r = 10000000$ meters is, zal $Log. r^2 = 13.6077602$ zijn, hier aftrekkende de Logarithmus van de ſtraal, in ſecunden uitgedrukt, namelijk $Log. 206264'',8 = 5.3144251$, *verkrijgt men* 1,7066649 *voor den ſtandvastigen Logarithmus, welke men bij den Logarithmus van den inhoud des driehoeks moet optel-*

tellen, en van de som tien aftrekken om den Logarithmus van het sphærisch exces te vinden.

§. 1263. Wanneer dus twee zijden a en b met den ingesloten hoek gegeven zijn, zal, daar $Inh. = \frac{1}{2} a b \times Sin. C$ is, het sphærisch exces door

$$Log.\,\omega = Log.\,a + Log.\,b + Log.\,Sin.\,C + 1,4056349 - 10 \quad (H)$$

gevonden worden.

§. 1264. Is eene zijde met de twee aanliggende hoeken A en B gegeven, zal, daar $Inh. = \frac{1}{2} c^2 \times Sin.\,A \times Sin.\,C : Sin.\,(A+B)$ is, het sphærisch exces door

$$Log.\,\omega = 2\,Log.\,c + Log.\,Sin.\,A + Log.\,Sin.\,B - Log.\,Sin.\,(A+B) + 1,4056349 - 10 \quad (I)$$

§. 1265. Zijn eindelijk de drie zijden a, b en c gegeven; dan zal, $s = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$ stellende, het sphærisch exces

$$Log.\,\omega = \tfrac{1}{2} \left\{ Log.\,s + Log.\,(s-a) + Log.\,(s-b) + Log.\,(s-c) \right\} + 1,7066649 - 10 \quad (K)$$

berekend worden.

§. 1266. I. Door het sphærisch exces, tot welks berekening vijf cijfers van de decimalen der Logarithmen voldoen, kan men den graad van naauwkeurigheid, met welken de hoeken aan de middelpunten der standplaatsen, welke de zijden van eenen sphærischen driehoek, op het oppervlak der Aarde, maken, vereenigen, ten strengste beoordeelen. Bij voorbeeld, indien men, na behoorlijke herleiding, tot de middelpunten der torens en tot den Horizon bevonden heeft, den driehoek

Alkmaar, Waagtoren . . .	39° 7′ 40″, 303
Amsterdam, Westertoren . . .	53° 24′ 2″, 283
Edam, Kerktoren	87° 28′ 18″, 337

en, door eene ruwe berekening, de Logarithmen van de afstanden dezer punten zijn bekend geworden, bij voorbeeld, de Logarithmus afstand van *Alkmaar* tot *Amsterdam*, in meters, $= 4,4805476$; dan zal men door formule (I) vinden $\omega = 1'', 180$: daar nu de som der waargenome hoeken $= 180°\ 0'\ 0'', 923$ is, en de som dezer hoeken $180°\ 0'\ 1'', 180$ moet zijn; is deze som $0'', 257$ te weinig, en elk der waargenomen moet gevolgelijk met $0'', 086$ vermeerderd worden, om de misslagen der waarneming over de hoeken gelijkelijk te verdeelen.

§. 1267. II. Wanneer van eenen bolvormigen driehoek ééne der zij-

zijden, in meters, bekend is, en de bolvormige hoeken, aan deze zijde gelegen, zijn waargenomen, zal men den derden hoek bij conclusie vinden, *wanneer men* (het sphærisch exces door formule (*I*) berekend hebbende,) *het supplement van de som der waargenomen hoeken met het sphærisch exces vermeerdert; en trekt men dan één-derde van het sphærisch exces vân elken hoek af; dan zullen de verschillen dienen, om de twee onbekende zijden naar de regels der platte Driehoeksmeting te bepalen.*

§. 1268. III. Zijn voorts twee zijden van eenen kleinen bolvormigen driehoek, in meters, gegeven, benevens den ingesloten hoek, *dan zal men één-derde van het sphærisch exces van den gegeven hoek aftrekken, en dit verschil voor den hoek eens regtlijnigen driehoeks, dezelfde zijden als den gegeven bolvormigen driehoek hebbende, aannemen: men zal dan, door de berekening van dien regtlijnigen driehoek, de onbekende zijden vinden en de hoeken, die deze berekening geeft, met één-derde van het sphærisch exces moeten vergrooten, om de onbekende bolvormige hoeken van den gegevenen bolvormigen driehoek te verkrijgen.*

§. 1269. IV. Zijn de drie zijden van eenen bolvormigen driehoek, in meters, gegeven, *zal men om de hoeken te vinden, den regtlijnigen driehoek, welke die gegevene zijden heeft, berekenen, en elk der gevondene hoeken, met één-derde van het sphærisch exces, dat nu door de formule* (*K*) *gevonden wordt, moeten verhoogen.*

§. 1270. V. *Eindelijk zal men nog, door de toepassing van diezelfde beginselen, eenen bolvormigen driehoek, welke twee zeer scherpe hoeken heeft, na eene ligte herleiding, op de wijze van eenen regtlijnigen, kunnen oplossen.* Want, de aspunts-driehoek van den gegevenen zal twee zijden hebben, die weinig minder dan 180° zijn: lost men nu de supplements driehoek van den laatsten op, welks zijden zeer klein zijn; dan zullen al de onbekende zijden en hoeken van den aspunts-driehoek, en gevolgelijk ook die van den gegevenen driehoek bekend worden.

Vraagstukken, betrekkelijk de Bolvormige Driehoeken en Veelhoeken, benevens derzelver gebruik in de Ligchaamsmeting.

§. 1371. XIV. Vraagstuk. *Twee dingen van eenen gelijkbeenigen bolvormigen driehoek ABC (in welken AC = BC of a = b is,) gegeven zijnde, de andere onbekenden te vinden?*

Op-

Oplossing. Men late, uit het toppunt van den tophoek C, den loodregten boog CD op de basis vallen: deze deelt den tophoek en de basis beide in twee gelijke deelen, en den driehoek in twee regthoekige driehoeken, welken bij oppositie gelijk zijn. Stellen wij nu: $CD = p$; dan geven elke dezer regthoekige driehoeken:

$$\text{Gegeven } a \text{ en } c \begin{cases} Sin.\ \tfrac{1}{2} C = Sin.\ \tfrac{1}{2} c : Sin.\ a \\ Cos.\ A = Cos.\ B = Tang.\ \tfrac{1}{2} c : Tang.\ a \\ Cos.\ p = Cos.\ a : Cos.\ \tfrac{1}{2} c \end{cases}$$

$$\text{Gegeven } A \text{ en } C \begin{cases} Cos.\ a = Cos.\ b = Cot.\ A \times Cot.\ \tfrac{1}{2} C \\ Cos.\ \tfrac{1}{2} c = Cos.\ \tfrac{1}{2} C : Sin.\ A \\ Cos.\ p = Cos.\ A : Sin.\ \tfrac{1}{2} C \end{cases}$$

$$\text{Gegeven } A,\ a \begin{cases} Tang.\ \tfrac{1}{2} c = Tang.\ a \times Cos.\ A \\ Cot.\ \tfrac{1}{2} C = Cos.\ a \times Tang.\ A \\ Sin.\ p = Sin.\ A \times Sin.\ a \end{cases}$$

$$\text{Gegeven } A \text{ en } c \begin{cases} Tang.\ a = Tang.\ \tfrac{1}{2} c : Cos.\ A \\ Cos.\ \tfrac{1}{2} C = Sin.\ A \times Cos.\ \tfrac{1}{2} c \\ Tang.\ p = Sin.\ \tfrac{1}{2} c \times Tang.\ A \end{cases}$$

$$\text{Gegeven } C \text{ en } a \begin{cases} Sin.\ \tfrac{1}{2} c = Sin.\ \tfrac{1}{2} C \times Sin.\ a \\ Cot.\ A = Cos.\ a \times Tang.\ \tfrac{1}{2} C \\ Tang.\ p = Tang.\ a \times Cos.\ \tfrac{1}{2} C \end{cases}$$

$$\text{Gegeven } C \text{ en } c \begin{cases} Sin.\ b = Sin.\ \tfrac{1}{2} c : Sin.\ \tfrac{1}{2} C \\ Sin.\ A = Cos.\ \tfrac{1}{2} C : Cos.\ \tfrac{1}{2} c \\ Sin.\ p = Tang.\ \tfrac{1}{2} c : Tang.\ \tfrac{1}{2} C \end{cases}$$

§. 1272. Aanmerking. Het laatste geval is twijfelachtig. Neemt men den driehoek gelijkzijdig; dan is $a = b = c$; alsmede $A = B = C$; en dan is $Sin.\ \tfrac{1}{2} A = Sin.\ \tfrac{1}{2} a : Sin.\ a = Sin.\ \tfrac{1}{2} a : 2\ Sin.\ \tfrac{1}{2} a \times Cos.\ \tfrac{1}{2} a = 1 : 2\ Cos.\ \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}\ Sec.\ \tfrac{1}{2} a$. *Zoodat in eenen gelijkzijdigen driehoek de Sinus van de helft van éénen der hoeken gelijk is aan de helft van de Secans van ééne halve zijde.* Voorts is, in den gelijkzijdigen driehoek, $Cos.\ p = Cos.\ a \times Sec.\ \tfrac{1}{2} a = Cos.\ A \times Cosec.\ \tfrac{1}{2} A$.

§. 1273. XV. Vraagstuk. *De som of het verschil van twee hoeken of twee zijden van eenen bolvormigen driehoek, benevens den derden hoek of de derde zijde, met nog de zijde of hoek, welke tegen over deze laatste staat, gegeven zijnde, de onbekende zijden en hoeken van dien driehoek te vinden?*

Oplossing. Uit de vergelijking (u), §. 1122. *Bladz.* 439, en vergelijking (12) *XVII. Stelling*, volgt $Sin.\ \tfrac{1}{2}(a + b) : Sin.\ \tfrac{1}{2} c = Cos.\ \tfrac{1}{2}.(B - A) : Sin.\ \tfrac{1}{2} C$. Uit dezelfde vergelijking (u) en (v), alsmede uit de Neperiaansche Analogien, zal men soortgelijke vergelijkinkingen vinden, en in alles, zal men de volgende merkwaardige vergelijkingen verkrijgen:

$$\frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b)}{Sin.\,\tfrac{1}{2}c} = \frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}(B-A)}{Cos.\,\tfrac{1}{2}C} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}(a+b)}{Cos.\,\tfrac{1}{2}c} = \frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{Sin.\,\tfrac{1}{2}C} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(b-a)}{Sin.\,\tfrac{1}{2}c} = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(B-A)}{Cos.\,\tfrac{1}{2}C} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}(b-a)}{Cos.\,\tfrac{1}{2}c} = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{Cos.\,\tfrac{1}{2}C} \quad \ldots\ldots (4)$$

Laat nu, bij voorbeeld, gegeven zijn $A+B$, C en c; dan zal men uit de (2) en (4) *Vergel.* vinden:

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{Cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}c}{Sin.\,\tfrac{1}{2}C}$$

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}(b-a) = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(A+B) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}c}{Cos.\,\tfrac{1}{2}C}$$

$$b = \tfrac{1}{2}(a+b) + \tfrac{1}{2}(b-a) \quad \text{en} \quad a = \tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}(b-a)$$

De zijden b en a door deze berekening bekend geworden zijnde, zal men de hoeken A en B door

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}(B-A) = \frac{Sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b) \times Cos.\,\tfrac{1}{2}C}{Sin.\,\tfrac{1}{2}c}$$

kunnen vinden; want, dan zal

$$B = \tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(B-A) \quad \text{en} \quad A = \tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{1}{2}(B-A)$$

zijn. Men zal, op deze wijze, de bovengevondene vergelijkingen aan de oplosfing van andere foortgelijke vragen kunnen dienstbaar maken.

§. 1274. XVI. VRAAGSTUK. *Fig.* 393. *Al de zijden van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, den loodregten boog te vinden, welke, uit het toppunt van éénen der hoeken, op de overftaande zijde valt?*

OPLOSSING. Volgens §. 1090, *Bladz.* 428, is:

$$Sin.\,A = \frac{2\sqrt{[Sin.\,s \times Sin.\,(s-a) \times Sin.\,(s-b) \times Sin.\,(s-c)]}}{Sin.\,b \times Sin.\,c}$$

zijnde $s = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c$; en volgens de *IX. Stell.* is $Sin.\,CD = Sin.\,A \times Sin.\,AC = Sin.\,A \times Sin.\,b$; derhalve

$$Sin.\,CD = \frac{2\sqrt{[Sin.\,s \times Sin.\,(s-a) \times Sin.\,(s-b) \times Sin.\,(s-c)]}}{Sin.\,c}$$

Men zal, in den noemer dezer breuk, in plaats van $Sin.\,c$, flechts

Sin. a en *Sin. b* behoeven te nemen, om de waarde van de loodregte bogen *AE* en *BF* te verkrijgen.

§. 1275. Aanmerking. Men zal door deze gevondene vergelijking onder anderen de twee volgende werkstukken kunnen oplossen.

1° *Zal men, wanneer,* (*Fig.* 403.) *in een hellend vlak QR, uit den voet van eene verticaal lijn AP, twee lijnen AB en BC naar welgevallen in dit vlak getrokken zijn, uit de waargenomene hoeken PAC = c, PAB = a en BAC den hoek, onder welke dit vlak het horizontale vlak snijdt, kunnen berekenen.*

2° *Ook zal men, door diezelfde formule, den hoek* (*Fig.* 404.) *onder welken eenige lijn AP een vlak QR ontmoet, kunnen berekenen, wanneer men, uit het doorsnijdingspunt A, twee lijnen AB en AC, naar welgevallen, getrokken hebbende, de hoeken BAC, BAP en CAP, door dadelijke meting, bepaald heeft.*

§. 1276. XVII. Vraagstuk. *Al de hoeken van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, den loodregten boog te vinden, welke uit het hoekpunt van éénen der hoeken op de overslaande zijde valt?*

Oplossing. Uit de formule in §. 1103, gevonden zal volgen:

$$Sin.\,CD = \frac{2\sqrt{[-Cos.\,S \times Cos.\,(S-A) \times Cos.\,(S-B) \times Cos.\,(S-C)]}}{Sin.\,C}$$

eene waarde, welke ook met behulp van den aspunts-driehoek, uit de oplossing van het voorgaande vraagstuk, kan afgeleid worden.

§. 1277. XVIII. Vraagstuk. *Twee zijden a en b, met den ingesloten hoek C, eens bolvormigen driehoek gegeven zijnde, den loodregten boog CD te vinden, welke, uit het hoekpunt van den bekenden hoek C, op de onbekende zijde c valt?*

Oplossing. Volgens het *II. Gev. XXI. Stell.* is (zie *Fig.* 393.) $Tang.\,ACD = (Tang.\,b \times Cot.\,a - Cos.\,C) : Sin.\,C$, deze vergelijking in het vierkant brengende, en, aan beide zijden van de nieuwe vergelijking de éénheid bijtellende, zal men de waarde van $Sec^2.\,ACD$ vinden, en deze met $Cot^2.\,b$ vermenigvuldigende, zal men, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$Cot.\,CD = \frac{\sqrt{(Cot^2.\,a - 2\,Cot.\,a \times Cot.\,b \times Cos.\,C + Cot^2.\,b)}}{Sin.\,C}.$$

§. 1278. XIX. Vraagstuk. *Nog dienzelfden loodregten boog CD te vinden, wanneer de basis c, benevens de hoeken A en B aan de basis gegeven zijn?*

Oplossing. Men zal, met behulp van vergelijking (30) *II. Gev. XX. Stell.*, als boven, vinden:

Cot.

$$Cot.\,CD = \frac{\sqrt{(Cot^2.\,A + 2\,Cot.\,A \times Cot.\,B \times Cos.\,c + Cot^2.\,B)}}{Sin.\,c}$$

§. 1279. XX. Vraagstuk. *Fig.* 405. *De faces of zijden van eenen drievlakkigen hoek ABCM, te weten, hoek AMC* $= c$; *hoek BMC* $= a$ *en hoek AMC* $= b$ *gegeven zijnde, begeert men te vinden: hoedanig uit het hoekpunt M, de lijn MP zal moeten getrokken worden, opdat zij, met elke der drie ribben, gelijke hoeken AMP, BMP en CMP make?*

Oplossing. Men denke, in het toppunt van den drievlakkigen hoek, het middelpunt van eenen bol, op welks oppervlak, de zijden van den drievlakkigen hoek den bolvormigen driehoek ABC bepalen, om welks hoekpunten eenen kleinen cirkel van den bol kan gedacht worden, en door het middelpunt van welken kleinen cirkel de lijn MP, die het oppervlak van bol in het aspunt P van dien kleinen cirkel fnijdt, gaan moet, zijnde de bogen AP, BP en CP, aan elkander gelijk. Wanneer men zich nu dezen bolvormigen driehoek, in *Fig.* 406, afzonderlijk voorftelt; dan heeft men drie gelijkbeenige driehoeken ABP, BCP en ACP, en laat men de loodregte bogen PD, PE en PF, op de zijden vallen; dan is $AD = BD = \frac{1}{2}c$; $BE = EC = \frac{1}{2}a$; $AF = CF = \frac{1}{2}b$; noemt men de hoeken, zoo als zij in de figuur geteekend zijn, en ftelt men $AP = BP = CP = x$; dan is, vermits $s + t + u = 180°$ is:

$$Sin.\,u = Sin.\,s \times Cos.\,t + Sin.\,t \times Cos.\,s \quad . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Voorts is uit de eigenfchappen der regthoekige driehoeken ADP, BDP en AFP, die in de figuur voorkomen, $Sin.\,s = Sin.\,\frac{1}{2}c : Sin.\,x$; $Tang.\,\frac{1}{2}c = Tang.\,x \times Cos.\,p$, uit welke twee vergelijkingen volgt:

$$Sin.\,s = \frac{Cos.\,\frac{1}{2}c}{Cos.\,x} \times Cos.\,p; \text{ voorts } Sin.\,t = \frac{Cos.\,\frac{1}{2}a}{Cos.\,x} \times Cos.\,q$$

$$Cos.\,s = Cos.\,\tfrac{1}{2}c \times Sin.\,p, \text{ en } Cos.\,t = Cos.\,\tfrac{1}{2}a \times Sin.\,q$$

$$Sin.\,u = Sin.\,\tfrac{1}{2}b : Sin.\,x$$

ftelt men alle deze waarden van $Sin.\,s$, $Sin.\,t$, *enz.* in de vergelijking (α); dan zal men vinden:

$$\frac{Sin.\,\frac{1}{2}b}{Sin.\,x} = \frac{Cos.\,\frac{1}{2}a \times Cos.\,\frac{1}{2}c}{Cos\,x} \times Sin.\,(p+q) = \frac{Cos.\,\frac{1}{2}a \times Cos.\,\frac{1}{2}c}{Cos.\,x} \times Sin.\,B$$

waaruit, indien men ($s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ zijnde,) voor $Sin.\,B$ de waarde in §. 1090. gevonden, ftelt, volgen zal:

$$Tang.\,x = \frac{2\,Sin.\,\frac{1}{2}a \times Sin.\,\frac{1}{2}b \times Sin.\,\frac{1}{2}c}{\sqrt{[Sin.\,s \times Sin.\,(s-a) \times Sin.\,(s-b) \times Sin.\,(s-c)]}}$$

§. 1280. Aanmerking. Men vindt door deze formule ook: *hoe een reg-*

regte cirkelvormige kegel om eenen drievlakkigen hoek kan beschreven worden.

§. 1281. XXI. VRAAGSTUK. *Wanneer niet de zijden van den drievlakkigen hoek; maar wel de standhoeken zijner zijden gegeven zijn, hetzelfde te vinden?*

OPLOSSING. *Fig.* 406. Uit den regthoekigen driehoek APD volgt: $Tang.\,x = Tang.\,\frac{1}{2}c : Cos.\,p$. Stellende nu $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = S$; dan is $S = p + q + r$ en $p = S - (q + r) = S - C$ en $Cos.\,p =$ . . . $Cos.\,(S - C)$; derhalve $Tang.\,x = Tang.\,\frac{1}{2}c : Cos.\,(S - C)$. Schrijft men nu voor $Tang.\,\frac{1}{2}c$ de waarde, in §. 1102, voor dezelve gevonden; dan verkrijgt men:

$$Tang.\,x = \sqrt{\frac{-Cos.\,S}{Cos.\,(S-A) \times Cos.\,(S-B) \times Cos.\,(S-C)}}$$

§. 1282. XXII. VRAAGSTUK. *De drie zijvlakken van eenen drievlakkigen hoek gegeven zijnde, uit het hoekpunt eene lijn te trekken, welke, met elk dezer drie zijvlakken, gelijke hoeken maakt?*

OPLOSSING. Dit vraagstuk komt hier op neder, om, binnen eenen bolvormigen driehoek, een punt te vinden, dat eenen gelijken afstand van elk der zijden heeft. Stelt men dezen afstand $= x$, en $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$; dan zal men vinden:

$$Cot.\,x = \sqrt{\frac{Sin.\,s}{Sin.\,(s-a) \times Sin.\,(s-b) \times Sin.\,(s-c)}}$$

§. 1283. XXIII. VRAAGSTUK. *Maar, wanneer de standhoeken der zijvlakken gegeven zijn; hoe zal men dan diezelfde lijn vinden?*

OPLOSSING. Men zal, bijna langs denzelfden weg, welke wij, in *Vraagst. XX.* gevolgd hebben, vinden:

$$Cot.\,x = \frac{2\,Cos.\,\frac{1}{2}A \times Cos.\,\frac{1}{2}B \times Cos.\,\frac{1}{2}C}{\sqrt{[-Cos.S \times Cos.(S-A) \times Cos.(S-B) \times Cos.(S-C)]}}$$

§. 1284. XXIV. VRAAGSTUK. *De som der hoeken van eenen bolvormigen driehoek, uit deszelfs gegevene zijden, te vinden?*

OPLOSSING. Volgens het *I. Gev. III. Stell. VIII. B.*, is . . . . . . $Cos.\,\frac{1}{2}(A + B + C) = Cos.\,\frac{1}{2}A \times Cos.\,\frac{1}{2}B \times Cos.\,\frac{1}{2}C - Cos.\,\frac{1}{2}A \times Sin.\,\frac{1}{2}B \times Sin.\,\frac{1}{2}C - Cos.\,\frac{1}{2}B \times Sin.\,\frac{1}{2}A \times Sin.\,\frac{1}{2}C - Cos.\,\frac{1}{2}C \times Sin.\,\frac{1}{2}A \times Sin.\,\frac{1}{2}B$. Stelt men nu, voor de Sinussen en de Cosinussen der halve hoeken, de waarden, welke daar voor, in §. 1087 en 1088, gevonden zijn; dan zal men, na herleiding, verkrijgen:

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{Sin.s - Sin.(s-a) - Sin.(s-b) - Sin.(s-c)}{Sin.a \times Sin.b \times Sin.c}$$

$$\times \sqrt{[Sin.s \times Sin.(s-a) \times Sin.(s-b) \times Sin.(s-c)]} \quad . \; . \; (\beta)$$

zijnde, in deze vergelijking, $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Maar nu is (*VI. Stell. VIII. B.*) $Sin. s - Sin. (s - a) = 2\, Sin. \frac{1}{2}a \times Cos. (s - \frac{1}{2}a) = 2\, Sin. \frac{1}{2}a \times Cos. \frac{1}{2}(b + c)$ en $Sin. (s - b) + Sin. (s - c) = 2\, Sin. (s - \frac{1}{2}(b+c)) \times Cos. \frac{1}{2}(b-c) = 2\, Sin. \frac{1}{2}a \times Cos. \frac{1}{2}(b-c)$; derhalve:

$$Sin. s - Sin. (s-a) - Sin. (s-b) - Sin. (s-c) = 2\, Sin. \tfrac{1}{2}a \times [Cos. \tfrac{1}{2}(b+c) - Cos. \tfrac{1}{2}(b-c)]$$

of, (omdat $Cos. \frac{1}{2}(b+c) - Cos. \frac{1}{2}(b-c) = -2\, Sin. \frac{1}{2}b \times Sin. \frac{1}{2}c$ is,) $Sin. s - Sin. (s-a) - Sin. (s-b) - Sin. (s-c) = -4\, Sin. \frac{1}{2}a \times Sin. \frac{1}{2}b \times Sin. \frac{1}{2}c$. Stelt men dan deze waarde in vergelijking (β), dan is:

$$Cos. \tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\frac{\sqrt{[Sin. s \times Sin. (s-a) \times Sin. (s-b) \times Sin. (s-c)]}}{2\, Cos. \frac{1}{2}a \times Cos. \frac{1}{2}b \times Cos. \frac{1}{2}c}$$

§. 1285. XXV. VRAAGSTUK. *Den omtrek van eenen bolvormigen driehoek, uit deszelfs gegevene hoeken, te vinden?*

OPLOSSING. Men zal, met behulp van den aspunts-driehoek, vinden:

$$Sin. \tfrac{1}{2}(a+b+c) = \ldots\ldots\ldots \frac{\sqrt{[-Cos. S \times Cos. (S-A) \times Cos. (S-B) \times Cos. (S-C)]}}{2\, Sin. \frac{1}{2}A \times Sin. \frac{1}{2}B \times Sin. \frac{1}{2}C}$$

zijnde $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$.

§. 1286. XXVI. VRAAGSTUK. *Te vinden: hoe de inhoud van eenen bolvormigen driehoek van twee zijner zijden* a *en* b, *en den ingeſloten hoek* C, *afhangt?*

OPLOSSING. In de *XVII. Stelling XII. B.* is bewezen: dat het oppervlak van eenen bolvormigen driehoek tot het oppervlak van den bol, tot welken hij behoort, ſtaat gelijk het ſphærisch exces ω van den driehoek (vergelijk §. 1261.) tot acht regte hoeken. Dit ſphærisch exces, door acht regte hoeken gedeeld zijnde, geeft een gebroken, waarmede het oppervlak van den bol, het zij in vierkante éénheden van eenige lengtemaat, het zij (wanneer een graad van den grooten cirkel, als regte lijn genomen, die lengte éénheid is,) in vierkante graden uitgedrukt, vermenigvuldigd zijnde, den inhoud van den driehoek geeft. Het oppervlak van den bol, dat wij $= \Omega$ ſtellen, is gelijk aan den omtrek van den grooten cirkel vermenigvuldigd met zijne middellijn: dat is, (de middellijn gelijk M ſtellende, en $\pi = 3,14159265$ *enz.*) gelijk aan $\Omega = \pi \times M^2$, nu is π in graden uitgedrukt $= 360^\circ$ en $M = 114^\circ,591556$; derhalve zal $\Omega = 31252,96016$ vierkante graden zijn: dit getal moet dus met $\omega : 8R$ vermenigvuldigd worden, om den inhoud des driehoeks in vierkante graden te verkrijgen.

Nu

Nu is $\omega = A + B + C - 180°$ en $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90° + \frac{1}{2}\omega$; derhalve

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}(A + B + C) = -\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\omega \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (\alpha)$$

Volgens eene der Neperiaansche Analogien (zie (13) *Bl.* 414.), is:

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}(A + B) = Cot.\ \tfrac{1}{2}C \times \frac{Cos.\ \tfrac{1}{2}(b - a)}{Cos.\ \tfrac{1}{2}(b + a)} \quad . \ . \ . \quad (\beta)$$

en, volgens *IV. Stell. VIII. B.* is:

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{Tang.\ \tfrac{1}{2}(A+B) + Tang.\ \tfrac{1}{2}C}{1 - Tang.\ \tfrac{1}{2}(A+B) \times Tang.\ \tfrac{1}{2}C}$$

Stelt men in deze vergelijking voor $Tang.\ \frac{1}{2}(A+B)$ hare waarde, in (β) voorkomende; dan vindt men, zie *Vergel.* (α),

$$-\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\omega = \frac{Cot.\ \tfrac{1}{2}C \times Cos.\ \tfrac{1}{2}(b - a) + Tang.\ \tfrac{1}{2}C \times Cos.\ \tfrac{1}{2}(b + a)}{Cos.\ \tfrac{1}{2}(a + b) - Cos.\ \tfrac{1}{2}(b - a)}$$

welke, (zie *III. Stell. VIII. B.* en *III. Gev. IX. Stell. VIII. B.*) na herleiding, geven zal:

$$Cot.\ \tfrac{1}{2}\omega = \frac{Cot.\ \tfrac{1}{2}a \times Cot.\ \tfrac{1}{2}b + Cos.\ C}{Sin.\ C}$$

§. 1287. I. AANMERKING. Nemen wij eenen bolvormigen driehoek, welken denzelfden hoek C, en om dezen hoek de zijden a' en b' heeft; indien dan deszelfs sphærisch exces ω' gesteld wordt; dan zal $Cot.\ \frac{1}{2}\omega' = (Cot.\ \frac{1}{2}a' \times Cot.\ \frac{1}{2}b' + Cos.\ C) : Sin.\ C$ zijn, en, wanneer, de inhouden dezer driehoeken gelijk zijnde, $Cot.\ \frac{1}{2}\omega = Cot.\ \frac{1}{2}\omega'$ is, zal $Cot.\ \frac{1}{2}a \times Cot.\ \frac{1}{2}b = Cot.\ \frac{1}{2}a' \times Cot.\ \frac{1}{2}b'$, of $Tang.\ \frac{1}{2}a \times$ . . . $Tang.\ \frac{1}{2}b = Tang.\ \frac{1}{2}a' \times Tang.\ \frac{1}{2}b'$ zijn. *De bolvormige driehoeken, welke derhalve, onder denzelfden hoek C, eenen gelijken inhoud hebben, moeten zoodanig gesteld zijn: dat de producten van de Tangenten der halve zijden, om dien hoek staande, gelijk zijn.*

§. 1288. II. AANMERKING. De gevondene formule kan aldus geconstrueerd worden. Men neme, *Fig.* 407, $AM = 1$, en beschrijve met deze straal, eenen cirkel, men stelle EM regthoekig op AM, en EF evenwijdig aan AM. Voorts neme men $AB = \frac{1}{2}a$; $AC = \frac{1}{2}b$; dan is $EF = Cot.\ \frac{1}{2}a$ en $EG = Cot.\ \frac{1}{2}b$; indien men dan $MH = EG$ neemt, en HI evenwijdig aan EG trekt; dan is $ME : EF = MH : HI$, en $HI = Cot.\ \frac{1}{2}a \times Cot.\ \frac{1}{2}b$. Men neme dienvolgens $AD = C$, trekke DK loodregt op AM, en neme $MP = HI = Cot.\ \frac{1}{2}a \times Cot.\ \frac{1}{2}b$; dan zal, PD getrokken zijnde, in den regthoekigen driehoek PKD, $Sin.\ C = DK$, $Cos.\ C = KM$ en $KD \times Cot.KPD = PK$, of $Sin.\ C \times Cot.\ KPD = Cot.\ \frac{1}{2}a \times Cot.\ \frac{1}{2}b + Cos.\ C$ zijn; de hoek KPD is derhalve gelijk aan $\frac{1}{2}\omega$, gelijk aan de helft van het ſphærisch exces van den driehoek; zoodat, de hoek P tot vier regte hoeken ſtaat, gelijk het oppervlak van den driehoek tot het oppervlak van den bol. Wanneer men nu onderſtelt, dat de zijden a en b onveranderlijk dezelfde blijven; dan is ook MP ſtandvastig, en indien dan $MP = Cot.\frac{1}{2}a \times Cot.\frac{1}{2}b > 1$ is, zal de hoek MPD, en gevolgelijk de bolvormige driehoek, onder de gegevene zijden, op zijn grootst zijn, wanneer (de raaklijn PL getrokken hebbende,) de hoek C gelijk aan den boog ADL is. Omdat nu (*XX. Stell. V. B.*) de hoek APD door het halve verſchil der bogen AD en QN gemeten wordt, zal, wanneer de inhoud de grootſte is, $\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C - 90^\circ = \frac{1}{2}(AL - LN) = \frac{1}{2}(AL - (180^\circ - AL)) = \frac{1}{2}(2AL - 180^\circ) = C - 90^\circ$ zijn; derhalve ook $A + B = C$. Hieruit volgt dan: 1° *Dat 'er bolvormige driehoeken beſtaan, waarin één hoek gelijk is aan de ſom der twee anderen;* 2° *dat, wanneer, onder twee gegevene zijden, een bolvormige driehoek, welks inhoud een maximum is, mogelijk is, (en zulk een driehoek is mogelijk, indien het product van de Cotangenten der halve zijden grooter dan de éénheid is,) de hoek, tusſchen deze zijden, voor dit maximum, gelijk aan de ſom der twee andere hoeken zijn moet.*

§. 1289. XXVII. VRAAGSTUK. *Den inhoud van eenen bolvormigen driehoek, in eene functie zijner drie zijden, te vinden?*

OPLOSSING. Omdat $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90^\circ + \frac{1}{2}\omega$ is, zal . . . $Cos.\frac{1}{2}(A+B+C) = -Sin.\frac{1}{2}\omega$; derhalve is, zie *Vraagſt. XXIV*,

$$Sin.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{[Sin.s \times Sin.(s-a) \times Sin.(s-b) \times Sin.(s-c)]}}{2\,Cos.\frac{1}{2}a \times Cos.\frac{1}{2}b \times Cos.\frac{1}{2}c} \quad (R)$$

Maar men kan nog eene andere uitdrukking voor ω vinden. Men ſtelle, tot dat einde, in de vergelijking $Cot.\frac{1}{2}\omega = [Cot.\frac{1}{2}a \times Cot.\frac{1}{2}b + Cos.C] : Sin.C$ (zie *voorg. Vraagſt.*) $Cot.\frac{1}{2}a \times Cot.\frac{1}{2}b =$ . . . $(1 + Cos.a) \times (1 + Cos.b) : Sin.a \times Sin.b$; en $Cos.C = (Cos.c - Cos.a \times Cos.b) : Sin.a \times Sin.b$; dan heeft men:

$$Cot.\tfrac{1}{2}a \times Cot.\tfrac{1}{2}b + Cos.C = \frac{1 + Cos.a + Cos.b + Cos.c}{Sin.a \times Sin.b}$$

Nu is (zie §. 1090.)

$$Sin.C = \frac{2\sqrt{[Sin.s \times Sin.(s-a) \times Sin.(s-b) \times Sin.(s-c)]}}{Sin.a \times Sin.b}$$

derhalve is

$$Cot.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{1 + Cos.a + Cos.b + Cos.c}{2\sqrt{[Sin.s \times Sin.(s-a) \times Sin.(s-b) \times Sin.(s-c)]}} \quad (S)$$

Vermenigvuldigt men de vergelijkingen (R) en (S) met elkander; dan

dan verkrijgt men, na voor $1 + Cos.\, a$, $1 + Cos.\, b$ en $1 + Cos.\, c$, hare waarden gesteld te hebben:

$$Cos.\, \tfrac{1}{2}\,\omega = \frac{Cos^2.\, \tfrac{1}{2}\, a + Cos^2.\, \tfrac{1}{2}\, b + Cos^2.\, \tfrac{1}{2}\, c - 1}{2\, Cos.\, \tfrac{1}{2}\, a \times Cos.\, \tfrac{1}{2}\, b \times Cos.\, \tfrac{1}{2}\, c} \quad . \quad . \quad (T)$$

Uit deze laatste haalt men, omdat $(1 - Cos.\, \tfrac{1}{2}\,\omega) : Sin.\, \tfrac{1}{2}\,\omega = Tang.\, \tfrac{1}{4}\,\omega$ is, (zie *I. Gev. IX. Stell. VIII. B.* en *verg.* (R))

$$Tang.\, \tfrac{1}{4}\,\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1 - Cos^2.\, \tfrac{1}{2}\, a - Cos^2.\, \tfrac{1}{2}\, b - Cos^2.\, \tfrac{1}{2}\, c + 2\, Cos.\, \tfrac{1}{2}\, a \times Cos.\, \tfrac{1}{2}\, b \times Cos.\, \tfrac{1}{2}\, c}{\sqrt{[Sin.\, s \times Sin.\, (s - a) \times Sin.\, (s - b) \times Sin.\, (s - c)]}}$$

De teller dezer breuk kan onder de gedaante

$$(1 - Cos^2.\, \tfrac{1}{2}\, a) \times (1 - Cos^2.\, \tfrac{1}{2}\, b) - [Cos.\, \tfrac{1}{2}\, a \times Cos.\, \tfrac{1}{2}\, b - Cos.\, \tfrac{1}{2}\, c]^2$$

gebragt worden, welke uitdrukking in de factoren

$$Sin.\, \tfrac{1}{2}\, a \times Sin.\, \tfrac{1}{2}\, b + Cos.\, \tfrac{1}{2}\, a \times Cos.\, \tfrac{1}{2}\, b - Cos.\, \tfrac{1}{2}\, c$$

en $Sin.\, \tfrac{1}{2}\, a \times Sin.\, \tfrac{1}{2}\, b - Cos.\, \tfrac{1}{2}\, a \times Cos.\, \tfrac{1}{2}\, b + Cos.\, \tfrac{1}{2}\, c$

kan ontleed worden, waaruit dan gemakkelijk gevonden wordt:

$$Tang^2.\, \tfrac{1}{4}\,\omega = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{16\, Sin^2.\, \tfrac{1}{2}\, s \times Sin^2.\, \tfrac{1}{2}\,(s - a) \times Sin^2.\, \tfrac{1}{2}\,(s - b) \times Sin^2.\, \tfrac{1}{2}\,(s - c)}{Sin.\, s \times Sin.\, (s - a) \times Sin.\, (s - b) \times Sin.\, (s - c)}$$

uit welke, aangezien $Sin.\, u = 2\, Sin.\, \tfrac{1}{2}\, u \times Cos.\, \tfrac{1}{2}\, u$ is, onmiddelijk volgt:

$$Tang.\, \tfrac{1}{4}\,\omega = \sqrt{\left\{ Tang.\, \tfrac{1}{2}\, s \times Tang.\, \tfrac{1}{2}\,(s - a) \times Tang.\, \tfrac{1}{2}\,(s - b) \times Tang.\, \tfrac{1}{2}\,(s - c) \right\}}$$

zijnde deze de fraaije formule van L'HUILLIER.

§. 1290. XXVIII. VRAAGSTUK. *Fig.* 408. *Wanneer, op dezelfde basis AB, verscheidene bolvormige driehoeken ABC, welke denzelfden inhoud hebben, gedacht worden, dan begeert men de kromme lijn te bepalen, in welke de toppunten van al deze driehoeken gelegen zijn?*

OPLOSSING. Men late, door het midden van de basis AB, eenen loodregten boog EFG gaan; en neme $EF = 90°$; dan is F het aspunt van den boog AB: en, wanneer men dan, door de punten F en C, eenen grooten cirkel laat gaan; dan zal FCD loodregt op AB staan. Men stelle nu $ED = p$ en $CD = q$; dan is $AD = p + \tfrac{1}{2}\, c$ en $BD = p - \tfrac{1}{2}\, c$, en de regthoekige driehoeken BDC en ADC zullen geven: $Cos.\, a = Cos.\, q \times Cos.\, (p - \tfrac{1}{2}\, c)$; $Cos.\, b = Cos.\, q \times Cos.\, (p + \tfrac{1}{2}\, c)$; $Sin.\, q = Sin.\, a \times Sin.\, B$. Stelt men nu deze waarden in

$$Cot.\, \tfrac{1}{2}\,\omega = \frac{Cot.\, \tfrac{1}{2}\, a \times Cot.\, \tfrac{1}{2}\, b + Cos.\, C}{Sin.\, C} = \frac{1 + Cos.\, a + Cos.\, b + Cos.\, c}{Sin.\, a \times Sin.\, b \times Sin.\, C}$$

 en

en maakt men $Sin. b \times Sin. C = Sin. c \times Sin. B = 2 Sin. \frac{1}{2} c \times Cos. \frac{1}{2} c \times Sin. B$; dan zal men de vergelijking

$$Cot. \tfrac{1}{2}\omega = \frac{Cos. \frac{1}{2} c + Cos. p \times Cos. q}{Sin. \frac{1}{2} c \times Sin. q}$$

of wel, na herleiding,

$$Cos. p \times Cos. q = Cot. \tfrac{1}{2}\omega \times Sin. \tfrac{1}{2} c \times Sin. q - Cos. \tfrac{1}{2} c \ .\ .\ (P)$$

verkrijgen, die de betrekking tusfchen p en q uitdrukt, en welke de kromme lijn, op welke de punten C gelegen zijn, bepalen moet.

Verlengen wij nu EF tot in G, en trekken wij den boog CG. Men ftelle $FG = x$ en $CG = y$; dan is $CF = 90° - q$, en hoek $CFG = 180° - p$, en men heeft (*XIX. Stell.*)

$$Cos. y = Sin. q \times Cos. x - Sin. x \times Cos. p \times Cos. q$$

welke met de vergelijking (P) vereënigd zijnde, geeft:

$$Cos. y = Sin. x \times Cos. \tfrac{1}{2} c + Sin. q \times (Cos. x - Sin. x \times Cot. \tfrac{1}{2}\omega \times Sin. \tfrac{1}{2} c)$$

Stelt men nu, in deze vergelijking, $Cos. x - Sin. x \times Cot. \frac{1}{2}\omega \times Sin. \frac{1}{2} c = 0$; dan is $Cot. x = Cot. \frac{1}{2}\omega \times Sin. \frac{1}{2} c$ en $Cos. y = Sin. x \times Cos. \frac{1}{2} c$. De boog x is dus eene ftandvastige grootheid, en de waarde van y zal om die reden insgelijks ftandvastig zijn. Hieruit volgt dan: *dat, wanneer men, uit het midden van de bafis, eenen loodregten boog EF oprigt, $EF = 90°$ en $Cot. FG = Cot. \frac{1}{2}\omega \times Sin. \frac{1}{2} c$ maakt, en uit G, als aspunt, met GC, zoodanig genomen, dat $Cos. CG = Sin. FG \times Cos. \frac{1}{2} c$ zij, eenen kleinen cirkel op het oppervlak van den bol befchrijft, de toppunten van alle driehoeken, welke op dezelfde bafis AB ftaan, en denzelfden inhoud hebben, in den omtrek van dien kleinen cirkel zullen gelegen zijn.*

§. 1291. XXIX. Vraagstuk. *Daar het, uit de oplosfing van het XXVI. Vraagftuk, gebleken is: dat 'er bolvormige driehoeken beftaan, waarin één hoek gelijk is aan de fom der twee andere hoeken, vraagt men: de bijzondere betrekkingen tusfchen de zijden en de hoeken van zulk eenen bolvormigen driehoek te bepalen?*

Oplossing. Stellen wij $C = A + B$; dan is $A + B + C = 2C > 180°$; de hoek C is dus altijd ftomp. Dit onder het oog houdende, zal men de volgende omftandigheden ontdekken.

§. 1292. 1° De waarden van $Cos. c$, $Cos. a$ en $Cos. b$, (zie *I. Gev. XIX. Stell.*) zullen geven:

$$Cos^2. \tfrac{1}{2} c = Cot. A \times Cot. B \ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

$$Sin^2. \tfrac{1}{2} a = - Cot. B \times Cot. C \ (2) \qquad Sin^2. \tfrac{1}{2} b = - Cot. A \times Cot. C \ (3)$$

waaruit volgt: dat A en B elk minder dan $90°$ moeten zijn.

§. 1293. 2° Telt men (2) en (3) bij elkander; dan zal men, deze fom

fom met (1) vergelijkende, vinden:

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}c = Sin^2.\tfrac{1}{2}a + Sin^2.\tfrac{1}{2}b \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Dit is de vergelijking op de vierkanten van de halve koorden van de zijden des driehoeks: deze koorden maken derhalve, aan het punt C, eenen platten regthoekigen driehoek: en het blijkt hieruit: *dat, wanneer men, om de hoekpunten des bolvormigen driehoeks ABC, waarin $C = A + B$ is, eenen kleinen cirkel befchrijft de koorde van c de middellijn van dien cirkel zal zijn, en dat deszelfs aspunt in het midden van de zijde c liggen zal, terwijl voorts, in alle bolvormige driehoeken, welke de gemeenfchappelijke zijde c hebben, en welker toppunten in den omtrek van dien kleinen cirkel gelegen zijn $C = A + B$ zijn zal.*

§. 1294. 3° De vergelijking (4) kan met weinig moeite (zie *VI. Gev. III. Stell. VIII. B.*) onder deze gedaante:

$$1 + Cos.\,c = Cos.\,a + Cos.\,b$$

gebragt worden; waaruit dan (*VI. Stell. VIII. B.*) volgt:

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}c = Cos.\tfrac{1}{2}(a+b) \times Cos.\tfrac{1}{2}(a-b) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}a = Sin.\tfrac{1}{2}(b+c) \times Sin.\tfrac{1}{2}(c-b) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}b = Sin.\tfrac{1}{2}(a+c) \times Sin.\tfrac{1}{2}(c-a) \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

§. 1295. 4° Stelt men, in de vergelijking $Cos.\,C = (Cos.\,c - Cos.\,a \times Cos.\,b) : Sin.\,a \times Sin.\,b$, voor $Cos.\,c$ hare waarde $Cos.\,a + Cos.\,b - 1$; dan verkrijgt men:

$$Cos.\,C = -\,Tang.\tfrac{1}{2}a \times Tang.\tfrac{1}{2}b \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Op dezelfde wijze zal men vinden:

$$Cos.\,A = Tang.\tfrac{1}{2}b \times Cot.\tfrac{1}{2}c \;(9) \qquad Cos.\,B = Tang.\tfrac{1}{2}a \times Cot.\tfrac{1}{2}c \;(10)$$

§. 1296. 5° Wanneer C en c gegeven zijn, zal men gemakkelijk vinden: (zie *XV. Vraagft. Bladz.* 478, *form.* (2) en (4))

$$Cos.\tfrac{1}{2}(a+b) = Cos.\tfrac{1}{2}c \times Cot.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}(a-b) = Cos.\tfrac{1}{2}c \times Tang.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

§. 1297. 6° Wanneer A en a gegeven zijn, zal men vinden:

$$Sin.\tfrac{1}{2}(c+b) = Sin.\tfrac{1}{2}a \times Cot.\tfrac{1}{2}A \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$Sin.\tfrac{1}{2}(c-b) = Sin.\tfrac{1}{2}a \times Tang.\tfrac{1}{2}A \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

§. 1298. 7° Uit de Neperiaanfche Analogien volgt nog:

$$Tang.\tfrac{1}{2}(A+B) = \sqrt{\frac{Cos.\tfrac{1}{2}(a-b)}{Cos.\tfrac{1}{2}(a+b)}} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{Sin.\tfrac{1}{2}(a-b)}{Sin.\tfrac{1}{2}(a+b)} \times \sqrt{\frac{Cos.\tfrac{1}{2}(a+b)}{Cos.\tfrac{1}{2}(a-b)}} \quad \ldots \quad (16)$$

§. 1299. I. Aanmerking. Men ziet, uit deze formulen: dat flechts twee gegevens genoeg zijn, om eenen driehoek, welks tophoek gelijk aan de som van de twee andere hoeken is, te bepalen, en dat zulk een driehoek bijna zoo gemakkelijk als een regthoekige kan worden opgelost.

§. 1300. II. Aanmerking. *Fig.* 409. Laat ABC een driehoek zijn, waarin $C = A + B$ is: wanneer men dan de zijden AB en BC verlengt, tot in C'; dan is ABC' de supplements-driehoek van ABC. Noemen wij nu, kortheidshalve, hoek $ABC' = B'$ en hoek $BAC' = A'$; dan is $C' = C = A + B$; $A' = 180° - A$ en $B' = 180° - B$ en $A' + B' + C' = 360 = 4R$. Op dezelfde wijze zal de som der hoeken van de supplements-driehoeken BCA' en ACB' gelijk $360°$ zijn. Nemen wij dan, omgekeerd, dat de som der hoeken van eenigen driehoek ABC' gelijk $360°$ zij; dan zal de tophoek van elk der drie supplements-driehoeken gelijk aan de som der twee andere hoeken zijn. Omdat nu $a = 180° - a'$ is, zal $Sin.\frac{1}{2}a = Cos.\frac{1}{2}a'$; $Sin.\frac{1}{2}b = Cos.\frac{1}{2}b'$ zijn, en daar $A = 180° - A'$; $B = 180° - B'$ is, zal $Cot.A = - Cot.A'$ en $Cot.B = - Cot.B'$ zijn, en de formulen (1), (2) en (3) van §. 1292. zullen in

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}c' = Cot.A' \times Cot.B' \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}a' = Cot.B' \times Cot.C' \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}b' = Cot.A' \times Cot.C' \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

veranderen, en, als eene bijzondere eigenschap van eenen driehoek, waarvan de som der hoeken vier regte hoeken bedraagt, zal

$$Cos.\tfrac{1}{2}a' \times Cos.\tfrac{1}{2}b' \times Cos.\tfrac{1}{2}c' = Cot.A' \times Cot.B' \times Cot.C'$$

zijn. Voorts verandert de formule N° (4) §. 1293. in:

$$Sin^2.\tfrac{1}{2}a' + Sin^2.\tfrac{1}{2}b' + Sin^2.\tfrac{1}{2}c' = 2 \quad \ldots \quad (4)$$

of, dat hetzelfde is, in

$$Cos.a' + Cos.b' + Cos.c' = -1 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

waaruit dan (*VI. Stell. VIII. B.*) volgt:

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}a' = - Cos.\tfrac{1}{2}(b' + c') \times Cos.\tfrac{1}{2}(b' - c') \quad .. \quad (6)$$

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}b' = - Cos.\tfrac{1}{2}(a' + c') \times Cos.\tfrac{1}{2}(a' - c') \quad .. \quad (7)$$

$$Cos^2.\tfrac{1}{2}c' = - Cos.\tfrac{1}{2}(a' + b') \times Cos.\tfrac{1}{2}(a' - b') \quad .. \quad (8)$$

verder zal men, door dezelfde beginselen, vinden:

$$Cos.C' = - Cot.\tfrac{1}{2}a' \times Cot.\tfrac{1}{2}b' \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$Cos.A' = - Cot.\tfrac{1}{2}b' \times Cot.\tfrac{1}{2}c' \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$Cos.B' = - Cot.\tfrac{1}{2}a' \times Cot.\tfrac{1}{2}c' \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}(a' + b') = - Cos.\tfrac{1}{2}c' \times Cot.\tfrac{1}{2}C' \quad \ldots \quad (12)$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}(a' - b') = + Cos.\tfrac{1}{2}c' \times Tang.\tfrac{1}{2}C' \quad \ldots \quad (13)$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}(c' - b') = + Cos.\tfrac{1}{2}a' \times Tang.\tfrac{1}{2}A' \quad \ldots \quad (14)$$

$$Cos.\tfrac{1}{2}(b' + c') = - Cos.\tfrac{1}{2}a' \times Cot.\tfrac{1}{2}A' \quad \ldots \quad (15)$$

be-

benevens nog vele andere vergelijkingen, welke alle leeren: *dat twee gegevens genoeg zijn, om eenen driehoek, waarvan de som der hoeken 360° is, te bepalen.*

§. 1301. III. Aanmerking. De inhoud van den driehoek, waarvan de som der hoeken vier regte hoeken is, is gelijk aan één-vierde van het oppervlak van den bol, tot welken hij behoort: doch, het is merkwaardig: *dat het oppervlak van den bol, op oneindig vele wijzen, in vier gelijke en gelijkvormige driehoeken kan verdeeld worden, waarvan de som der hoeken 360° is.* Laat *Fig.* 410, ABC zulk een driehoek zijn: maak de hoek $CAD =$ hoek ACB, $AD = BC$, en trek de bogen CD en BD; dan is $AC = AC$, $AD = BC$, en hoek $CAD =$ hoek ACB; derhalve is $DC = AB$, hoek $ADC =$ hoek ABC en hoek $ACD =$ hoek BAC. Omdat nu de som der hoeken, om de punten A, B, C en D, vier regte hoeken is, zal ook hoek $BAD =$ hoek BCD, en $BD = AC$ zijn; waaruit dan de gelijkheid bij superpositie van al de vier driehoeken, die gelijk het blijkt, onderling gelijke zijden hebben, terstond in het oog valt. Om nu het eenvoudigste geval te stellen, neme men een gelijkzijdigen driehoek wiens hoeken 120° zijn; dan is $Cos. \frac{1}{2} a = Cos. \frac{1}{2} b = Cos. \frac{1}{2} c = Tang. 30°$ en $a = b = c = 109° 28' 16'', 27$. En, om het oppervlak van den bol, op zoo vele andere wijzen, als men goedvindt, in vier gelijke en gelijkvormige deelen te verdeelen, neme men twee zijden a en b van eenen driehoek naar welgevallen, mits $a + b > 180°$ zij; en men berekene de derde zijde c door de formule $Cos. \frac{1}{2} c = \sqrt{[- Cos. \frac{1}{2}(a+b) \times Cos. \frac{1}{2}(a-b)]}$ dan zal men, wanneer men vier zulke driehoeken, onder deze zijden, zamenstelt, bevinden: dat zij het oppervlak van den bol volmaakt dekken. *'Er bestaan dan ook oneindig vele driehoekige piramiden onder gelijke zijvlakken.*

§. 1302. IV. Aanmerking. Men stelle zich eenen driehoek ABC voor, zoodanig dat $C = A + B$ zij; dan stemt met denzelven eenen aspunts-driehoek overëén, waarin de som van twee zijden min de derde zijde gelijk aan twee regte hoeken is. Even zoo zal met eenen driehoek, waarvan de som der hoeken vier regte hoeken is, eenen aspunts-driehoek overëénstemmen, in welken de som der zijden twee regte hoeken bedraagt. De formulen, ter oplossing van beide deze soorten van driehoeken, zullen uit de bovenstaande, naar de bekende regels, kunnen worden afgeleid.

§. 1303. VIII. Bepaling. Een bolvormige veelhoek ontstaat, wanneer vier of meer punten, op het oppervlak van den bol, door bogen van groote cirkels, twee aan twee, vereénigd worden.

§. 1304. IX. Bepaling. Die veelhoek is regelmatig, wanneer, die punten, in den omtrek van eenen kleinen cirkel, gelegen zijnde, de koorden der bogen, die deze punten vereénigen, de zijden van eenen regelmatigen veelhoek zijn, welke in dien kleinen cirkel beschreven is.

§. 1305. I. Aanmerking. De aspunten van dien kleinen cirkel zijn de middelpunten der twee bolvormige regelmatige veelhoeken, waarin het oppervlak van den bol verdeeld wordt, en welke veelhoeken denzelfden omtrek hebben.

§. 1306. XXIX. Vraagstuk. *Fig.* 411. *Gegeven zijnde de boog van den grooten cirkel, met welks koorde eenen kleinen cirkel, op het oppervlak van den bol, beschreven is; de zijden van eenen regelmatigen bolvormigen n hoek, in dien kleinen cirkel passende, benevens de polygoonshoek en de apothema van dien veelhoek te vinden?*

Oplossing. Laat C het aspunt van den kleinen cirkel zijn, waarin een regelmatige bolvormige veelhoek beschreven is; dan is dit punt tevens het middelpunt van dien veelhoek, welks oppervlak (indien men, uit het middelpunt C, tot aan al de hoekpunten, bogen van groote cirkels trekt,) in even zoo vele onderlinge gelijke en gelijkvormige middelpunts-driehoeken verdeeld wordt, als 'er hoeken of zijden in den veelhoek zijn. Nu is ACB een centerhoek ABD een polygoonshoek; de boog CE, welke eenen centerhoek midden door deelt, de apothema. Stellen wij dan het getal der zijden $= n$; $AC = BC = DC =$ enz. $= r$; $CE = p$; $AB = BC =$ enz. $= a$; en $ABD = P$; dan is $ACB = 360^\circ : n$; $ACE = BCE = 180^\circ : n$; en de regthoekige bolvormige driehoek ACE geeft:

$$Sin. \tfrac{1}{2} a = Sin. r \times Sin. \frac{180^\circ}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$Tang. p = Tang. r \times Cos. \frac{180^\circ}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$Cot. \tfrac{1}{2} P = Cos. r \times Tang. \frac{180^\circ}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

§. 1307. Aanmerking. Omdat $Sin. r = Sin. (180^\circ - r)$ is, bevestigt de Vergelijking (1) de aanmerking van de IX. Bepaling.

§. 1308. XXX. Vraagstuk. *Fig.* 412. *Éene der zijden van het grondvlak, benevens éene der opstaande ribben van eene regelmatige pi-*

piramide (zie XV. Bep. XI. B.) gegeven zijnde, den inhoud van die piramide te vinden?

Oplossing. Zij ABM één der middelpunts-driehoeken van het grondvlak; ABC ééne der opstaande zijvlakken van de piramide; CM de loodlijn. Stel het getal der zijden $= n$; $AB = a$; $AM = r$; $AC = b$; $CM = h$; dan is (zie §. 668.) $r^2 = \frac{1}{4} a^2 : Sin^2. \frac{180^0}{n}$; $h^2 = b^2 - r^2$, en de inhoud van het grondvlak $= \frac{1}{4} n a^2 \times Cot. \frac{180^0}{n}$. Hieruit zal men vinden: dat, stellende

$$Sin. \psi = a : 2 b \times Sin. \frac{180^0}{n}$$

en de inhoud van de regelmatige piramide $= I$;

$$I = \tfrac{1}{12} n a^2 b \times Cos. \psi \times Cot. \frac{180^0}{n}$$

§. 1309. I. Gevolg. Stellen wij $n = 3$ en $a = b$; dan verkrijgt men voor den inhoud van de driehoekige regelmatige piramide, welker opstaande ribben aan de zijden van het grondvlak gelijk zijn, $\frac{1}{12} a^3 \times \sqrt{2}$.

§. 1310. II. Gevolg. Stellen wij $n = 4$ en $a = b$; dan is $I = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$. *Het dubbeld van deze piramide is $\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$ gelijk den inhoud van een achtvlakkig ligchaam, dat, door acht onderling gelijke en gelijkzijdige driehoeken, a tot zijde hebbende, is ingesloten.*

§. 1311. Aanmerking. Wanneer niet b maar den hoek CAB, die wij gelijk q stellen, gegeven is; dan heeft men:

$$Sin. \psi = Cos. q \times Cosec. \frac{180^0}{n}$$

$$I = \tfrac{1}{24} n a^3 \times Sec. q \times Cos. \psi \times Cot. \frac{180^0}{n}$$

§. 1312. XXXI. Vraagstuk. Fig. 413. *De drie ribben AB, AC en AD van den drievlakkigen hoek A van een parallelopipedum, benevens de hoeken BAC, BAD en CAD, welke deze ribben met elkander maken, gegeven zijnde; den inhoud van dit parallelopipedum te vinden?*

Oplossing. Stel $AB = a$; $AC = b$; $AD = c$; hoek $BAC = \gamma$; $BAD = \beta$ en $CAD = \alpha$. Volgens *IX. Stell. IX. B.* is Inhoud Parallelogram $ABEC = ab \times Sin. \gamma$. Laat nu DP loodregt op het grondvlak vallen: dan wordt de inhoud van het parallelopipedum (*II. Gev. XV. Stell. XI. B.*) door

Pa-

$$Parallelogr.\ ABCE \times DP = ab \times DP \times Sin.\gamma \quad . \quad . \ (P)$$

uitgedrukt, en men moet nu nog DP uit deze vergelijking wegmaken. Men denke, tot dat einde, eenen bol, welks middelpunt in het hoekpunt A geplaatst zij; dan zijn de zijden van den bolvormigen driehoek, welke uit de snijding der zijvlakken ontstaat, de maat der hoeken α, β en γ, en de hoek DAP wordt door den loodregten boog, die uit het toppunt dezes driehoeks op zijn basis valt, gemeten; derhalve is, (*XVI. Vraagst.*) $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=s$ stellende,

$$Sin.\,DAP = \frac{2\sqrt{[Sin.\,s \times Sin.(s-\alpha) \times Sin.(s-\beta) \times Sin.(s-\gamma)]}}{Sin.\gamma}$$

daar nu $DP = AD \times Sin.\,DAP = c \times Sin.\,DAP$ is, zal men deze waarde van DP in (P) stellende, vinden: (den inhoud van het parallelopipedum $= I$ stellende,)

$$I = 2\,abc \times \sqrt{[Sin.\,s \times Sin.(s-\alpha) \times Sin.(s-\beta) \times Sin.(s-\gamma)]}$$

§. 1313. I. Gevolg. Stel $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$; dan is $s=135^\circ$; $s-\alpha=s-\beta=s-\gamma=45^\circ$; en $Sin.\,s = Sin.\,135^\circ = Sin.\,45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = Sin.(s-\alpha) = Sin.(s-\beta) = (s-\gamma)$, en men verkrijgt, in dit geval,

$$I = 2\,abc \times \sqrt{[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}]^4} = 2\,abc \times [\tfrac{1}{2}\sqrt{2}]^2 = abc$$

zoo als het behoort.

§. 1314. II. Gevolg. *Fig.* 412. Indien men de lijnen BC, BD en CD trekt; dan is de piramide $ABCD$ gelijk aan één-zesde van het parallelopipedum; bijgevolg is

$$Inhoud\ Piramide\ ABCD = \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$
$$\tfrac{1}{3}\,abc \times \sqrt{[Sin.\,s \times Sin.(s-\alpha) \times Sin.(s-\beta) \times Sin.(s-\gamma)]}$$

§. 1315. III. Gevolg. Men stelle in de laatste vergelijking $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, dan is:

$$Inhoud\ Pir.\ ABCD = \tfrac{1}{12}\,abc \times \sqrt{2}$$

stelt men nog $a=b=c$, dan vindt men, voor den inhoud van het regelmatig viervlak, $\frac{1}{12}a^3 \times \sqrt{2}$. Vergelijk §. 1309.

§. 1316. Aanmerking. Men zal, met behulp van het *XVII. Vraagstuk*, den inhoud van een parallelopipedum, en van eene piramide, in eene functie van de drie ribben van éénen der drievlakkige hoeken, en de standhoeken van deszelfs zijvlakken, kunnen uitdrukken.

§. 1317. XXXII. Vraagstuk. *Fig.* 414. *Den afstand van het hoekpunt eener driehoekige piramide tot haar overstaande zijvlak, in eene functie van de zes ribben, te vinden?*

Oplossing. (Hoewel dit en eenige volgende vraagstukken wel niet tot de bolvormige drie en veelhoeken behooren, staan dezelve daarmemede toch in zulk een naauw verband, dat wij voor derzelver plaatſing geene geſchiktere gelegenheid hebben kunnen vinden.) Laat, *fig.* 414, ABC de baſis der driehoekige piramide; AD, BD en CD hare opſtaande ribben zijn; DP de loodlijn, welke uit het toppunt D op de baſis valt. Men noeme $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, en de ribben, welke respectievelijk tegen over deze laatſte ſtaan $DC = \alpha$, $AD = \beta$ en $BD = \gamma$: men trekke de lijnen AP, BP en CP, en ſtelle $PC = A$, $AP = B$ en $BP = C$; dan is (*VII. Stell. IX. B.*)

$$Cos.\,APB = \frac{B^2 + C^2 - a^2}{2\,BC};\ Cos.\,BPC = \frac{A^2 + C^2 - b^2}{2\,AC};\ \ldots.$$

$$\text{en } Cos.\,APC = \frac{A^2 + B^2 - c^2}{2\,AB}.$$

Men ſtelle $DP = p$; dan is $A^2 = \alpha^2 - p^2$; $B^2 = \beta^2 - p^2$; $C^2 = \gamma^2 - p^2$; $A^2 + B^2 - c^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c^2 - 2\,p^2$; $A^2 + C^2 - b^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - b^2 - 2\,p^2$ en $B^2 + C^2 - a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - a^2 - 2p^2$;

$$Cos.\,APB = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - a^2 - 2\,p^2}{2\sqrt{(\beta^2 - p^2) \times (\gamma^2 - p^2)}};\ Cos.\,BPC = \ldots.$$

$$\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - b^2 - 2\,p^2}{2\sqrt{(\alpha^2 - p^2) \times (\gamma^2 - p^2)}};\ \text{en } Cos.\,APB = \ldots.$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - c^2 - 2\,p^2}{2\sqrt{(\alpha^2 - p^2) \times (\beta^2 - p^2)}}$$

ſtelt men nu deze waarden der Coſinusſen in de vergelijking:

$$1 - Cos^2.\,APB - Cos^2.\,APC - Cos^2.\,BPC + 2\,Cos.\,APB \times \ldots$$
$$Cos.\,APC \times Cos.\,BPC = 0$$

welke (*III. Gev. III. Stell. VIII. B.*) gegeven is, zal men, de termen behoorlijk ontwikkelende, eene zamengeſtelde uitdrukking verkrijgen, welke, op de volgende wijze zal kunnen vereênvoudigd worden, (eene notatie, die wij ook in het vervolg gebruiken.) Men ſtelle

1º *De ſom der producten van de vierde magten van al de ribben der piramide met het vierkant van de ribbe, die 'er tegen over ſtaat, of*

$$a^4\,\alpha^2 + b^4\,\beta^2 + c^4\,\gamma^2 + \alpha^4\,a^2 + \beta^4\,b^2 + \gamma^4\,c^2 = A.$$

2º *De ſom van de producten van de vierkanten der ribben, welke hetzelve zijvlak bepalen, of*

$$a^2\,b^2\,c^2 + a^2\,\beta^2\gamma^2 + b^2\,\alpha^2\,\gamma^2 + c^2\,\alpha^2\,\beta^2 = B.$$

3º *De ſom van de producten van de vierkanten van drie ribben, waarvan de middelſte aan de uiterſte ſluiten, zoodanig, dat, in elk product, twee overſtaande ribben gevonden worden, op alle mogelijke wijzen genomen, of*

+

$$\left.\begin{array}{l} +a^2b^2\alpha^2+a^2c^2\alpha^2+b^2a^2\beta^2+b^2c^2\beta^2+c^2a^2\gamma^2+c^2b^2\gamma^2 \\ +a^2\beta^2\alpha^2+a^2\gamma^2\alpha^2+b^2\alpha^2\beta^2+b^2\gamma^2\beta^2+c^2\alpha^2\gamma^2+c^2\beta^2\gamma^2 \end{array}\right\} = C$$

4° *De dubbelde som van de producten van de vierkanten der ribben, op alle mogelijke wijzen, vier aan vier, zoodanig genomen, dat in elk product twee ribben tegen over de twee andere staan, of*

$$2a^2b^2\alpha^2\beta + 2a^2c^2\alpha^2\gamma^2 + 2b^2c^2\beta^2\gamma^2 = D.$$

5° *De som van de producten van de vierde magten der overstaande ribben, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen, of*

$$a^4\alpha^4 + b^4\beta^4 + c^4\gamma^4 = E.$$

Dit alzoo gesteld zijnde, zal men vinden:

$$h^2 \times [2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4] + A + B - C = 0 \text{ of}$$

$$h^2 = \frac{C-(A+B)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

zijnde $(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$ = zestienmaal het vierkant van den inhoud van den driehoek ABC.

§. 1318. XXXIII. VRAAGSTUK. *Fig.* 414. *Den inhoud eener driehoekige piramide, in eene functie van hare zes ribben, uittedrukken?*

OPLOSSING. Men stelle den inhoud $= I$; omdat dan de inhoud gevonden wordt, door de basis met één-derde der hoogte te vermenigvuldigen, zal men (zie voorgaande Vraagstuk) vinden:

$$I = \tfrac{1}{12}\sqrt{\left\{C-(A+B)\right\}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\lambda)$$

§. 1319. GEVOLG. Indien men de opstaande ribben α, β en γ, gelijk stelt; dan wordt de inhoud door de vergelijking:

$$I^2 = \tfrac{1}{144}\alpha^2(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) - \tfrac{1}{144}a^2b^2c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu)$$

gevonden. Stelt men nu, in deze vergelijking, $\alpha = a = b = c$; dan vindt men, als in §. 1309, $I = \tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2}$ voor den inhoud van de regelmatige driehoekige piramide.

§. 1320. XXXIV. VRAAGSTUK. *Te vinden, hoe de straal van den bol, welke om eene driehoekige piramide beschreven is, van derzelver zes gegevene ribben afhangt?*

OPLOSSING. Men stelle de straal van den omgeschreven bol $= R$; indien men dan, uit het middelpunt van den bol, vier lijnen tot aan de vier hoekpunten der piramide trekt; dan wordt de geheele piramide in vier piramiden verdeeld, welke, in het middelpunt van den bol, aan elkander sluiten, en welker opstaande ribben gelijk $= r$ zijn; de inhoud van elke dezer piramiden wordt door de vergelijking (μ) *Gev. XXXIII. Vraagst.* gevonden: deze inhouden opgeteld en met den

den geheelen inhoud door de vergelijking (λ) gegeven, vergeleken zijnde, zal men vinden:

$$R = \tfrac{1}{2} \times \sqrt{\frac{E-D}{A+B-C}}$$

§. 1321. Gevolg. Indien al de ribben der piramiden gelijk a zijn, dan is ook $R = \tfrac{1}{4} a \sqrt{6}$.

§. 1322. XXXV. Vraagstuk. *Fig.* 414. *Te vinden, hoe de straal van den bol, welke in eene driehoekige piramide beschreven is, van de ribben dezer piramide afhangt?*

Oplossing. Men verbeelde: dat, uit het middelpunt van dien bol, lijnen tot aan hoekpunten der piramide getrokken zijn; dan zal de geheele piramide in vier piramiden verdeeld zijn, welke de straal van den bol tot hoogte, en de zijvlakken der geheele piramide tot grondvlakken zullen hebben. Men stelle de straal der ingeschrevene piramide $= r$; dan zal:

$$I = \tfrac{1}{3} r \times (dr.\,ABC + dr.\,ABD + dr.\,ACD + dr.\,BCD)$$

zijn, en, omdat (*XXXIII. Vraagst.*) $I = \tfrac{1}{12} \sqrt{[C-(A+B)]}$ is, zal

$$r = \frac{\tfrac{1}{4}\sqrt{[C-(A+B)]}}{dr.\,ABC + dr.\,ABD + dr.\,ACD + dr.\,BCD}$$

zijn: zijnde (gelijk bekend is,) *Inh. drieh.* $ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$, *enz.*

§. 1323. Gevolg. Indien al de ribben van de piramide gelijk a genomen worden; dan verandert de gevondene vergelijking in $r = \ldots$ $\tfrac{1}{12} a \sqrt{6}$. — *De straal van den bol, welke om de regelmatige driehoekige piramide beschreven is, is dan gelijk aan driemaal de straal van den bol, welke 'er in beschreven is.*

§. 1324. Aanmerking. Behalve de bol, welke in eene piramide kan geplaatst worden, zijn 'er nog vier bollen, welke éene der zijden uitwendig, en de drie anderen inwendig, aanraken; de stralen dezer bollen worden gevonden, wanneer men, in de gevondene formule, den inhoud der zijde, welke uitwendig wordt aangeraakt, negatief neemt.

§. 1325. XXXVI. Vraagstuk. *Eene vergelijking tusschen de hoeken, welke door de ribben eener driehoekige piramide, aan de toppunten van derzelver hoeken, gemaakt worden, en deze ribben te vinden?*

Oplossing. In het vervolg, zullen wij, kortheidshalve, den hoek, welke door twee lijnen gemaakt wordt, door eene comma tusschen deze lijnen te zetten, uitdrukken: aldus zal (zie *Fig.* 414.) *Cos.* ABC door *Cos.* a,b worden voorgesteld, enz. Beschouwt men de zijvlakken, welke aan de punten A, B, C en D zamenkomen; dan heeft men:

$2ab$

$$2\,a\,b\,Cos.\,a,b = a^2 + b^2 - c^2$$
$$2\,a\,\gamma\,Cos.\,a,\gamma = a^2 + \gamma^2 - \beta^2$$
$$2\,b\,\gamma\,Cos.\,b,\gamma = b^2 + \gamma^2 - \alpha^2$$

deze vergelijkingen opgeteld hebbende, verkrijgt men, ten opzigte van de hoeken, welke aan hetzelfde hoekpunt B der piramide gemaakt worden,

$$2\,a\,b\,Cos.\,a,b + 2\,a\,\gamma\,Cos.\,a,\gamma + 2\,b\,\gamma\,Cos.\,b,\gamma = 2\,a^2 + 2\,b^2 + 2\,\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 - c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Elk der drie andere hoekpunten A, C en D, geven eene aan deze gelijkvormige vergelijking: telt men nu die vier vergelijkingen op, dan zal men vinden:

$$\left.\begin{array}{l} + a\,b\,Cos.\,a,b + a\,\gamma\,Cos.\,a,\gamma + b\,\gamma\,Cos\;b,\gamma \\ + a\,c\,Cos.\,a,c + a\,\beta\,Cos.\,a,\beta + c\,\beta\,Cos.\,c,\beta \\ + b\,c\,Cos.\,b,c + b\,\alpha\,Cos.\,b,\alpha + c\,\alpha\,Cos.\,c,\alpha \\ + \alpha\,\beta\,Cos.\,\alpha,\beta + \alpha\,\gamma\,Cos.\,\alpha,\gamma + \beta\,\gamma\,Cos.\,\beta,\gamma \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} a^2 + b^2 + c^2 \\ + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{array}\right\} \; (2)$$

welke vergelijkingen dienen kunnen, om verscheidene vragen aangaande de driehoekige piramide optelossen.

§. 1326. XXXVII. VRAAGSTUK. *Fig.* 414 *en* 415. *Al de ribben eener driehoekige piramide gegeven zijnde, den standhoek van twee derzelver overstaande zijden, bij voorbeeld, a en α te vinden?*

OPLOSSING. Men trekke, *Fig.* 415, uit het punt D, de lijn DE, evenwijdig aan AB; dan liggen de lijnen AB, DE en BD, in hetzelfde vlak, en de hoek CDE is de standhoek der lijnen AB en DC, welken wij door a,α uitdrukken. Men denke dan, in het hoekpunt D, het middelpunt van eenen bol, op welks oppervlak door de snijding der vlakken ADB, BCD, ACD en CDE, de twee bolvormige driehoeken pqr en psr ontstaan, die den hoek p gemeen hebben, en welker zijden de maat van de hoeken ADB, BDC, ADC en CDE zijn. Nu is (*XVII. Stell.*) omdat de hoek ADE het supplement van BAD is:

$$Cos.\,p = \frac{Cos.\,a,\alpha + Cos.\,BAD \times Cos.\,ADC}{Sin.\,BAD \times Sin.\,ADC} = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{Cos.\,BDC - Cos.\,ADB \times Cos.\,ADC}{Sin.\,ADB \times Sin.\,ADC}$$

uit welke vergelijking terstond volgt:

$$[Cos.\,a,\alpha + Cos.\,BAD \times Cos.\,ADC] \times Sin.\,ADB = \quad . \quad . \quad . \quad [Cos.\,BDC - Cos.\,ADB \times Cos.\,ADC] \times Sin.\,BAD$$

Wanneer men nu, in deze vergelijking, $Cos.\,a,\alpha$ afzondert, en de Cosinussen en Sinussen der hoeken BAD, ADC, ADB en BAD, in func-

functien van de ribben uitdrukt; dan zal men verkrijgen:

$$2\,a\,\alpha\, Cos.\, a,\alpha = (b^2 + \beta^2) - (c^2 + \gamma^2)$$

eene eenvoudige vergelijking, waardoor den ſtandhoek van twee overſtaande ribben, zoo door conſtructie, als door berekening, kan gevonden worden.

§. 1327. I. Gevolg. Wanneer men de twee vergelijkingen, welke de ſtandhoeken b,β en c,γ bepalen, bij de gevondene optelt; dan verkrijgt men de merkwaardige vergelijking:

$$a,\alpha\; Cos.\, a,\alpha + b\,\beta\; Cos.\, b,\beta + c\,\gamma\; Cos.\, c,\gamma = 0$$

§. 1328. II. Gevolg. Indien al de ribben der piramide gelijk zijn; dan wordt $2\,a\,\alpha\; Cos.\, a,\alpha = 0$; derhalve is ook $Cos.\, a,\alpha = 0$, en hoek $a,\alpha = 90^\circ$.

§. 1329. Aanmerking. Wanneer men, *Fig.* 414, het punt D in het vlak ABC laat vallen, dan zijn de gevondene formulen, welke alsdan nog plaats blijven hebben, in de berekening van den onregelmatigen vierhoek, van veel gebruik.

§. 1330. XXXVIII. Vraagstuk. *Fig.* 415. *De ſtandhoeken van twee der zijvlakken eener driehoekige piramide in eene functie der ribben te bepalen?*

Oplossing. Dezelfde bolvormige driehoek pqr, welke ons, in de oploſſing van het voorgaande vraagſtuk, gediend heeft, (en in welken de hoek p de ſtandhoek der zijvlakken ABD en ACD is) geeft:

$$Cos.\, p = \frac{Cos.\, BDC - Cos.\, ADC \times Cos.\, ADB}{Sin.\, ADC \times Sin.\, ADB}$$

Men ſchrijve, in deze vergelijking, voor $Cos.\, BDC$, $Cos.\, ADC$, $Cos.\, ADB$, $Sin.\, ADC$ en $Sin.\, ADC$, derzelver waarden, in functien van de ribben uitgedrukt; dan zal men, onder het oog houdende, dat

$$2\,a^2\beta^2 + 2\,a^2\gamma^2 + 2\,\beta^2\gamma^2 - a^4 - \beta^4 - \gamma^4 = 16\; Inh^2.\, ABD$$

$$2\,c^2\alpha^2 + 2\,c^2\beta^2 + 2\,\alpha^2\beta^2 - c^4 - \alpha^4 - \beta^2 = 16\; Inh^2.\, ACD$$

is, en dat $Cos^2.\, p = 1 - Sin^2.\, p$ is, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$64\; Inh^2.\, ABD \times Inh^2.\, ACD \times Sin^2.\, p + \beta^2 \times (A + B - C) = 0$$

hebbende A, B en C, dezelfde beteekenis als in Vraagſtuk XXXIII, waaruit volgt:

$$Sin.\, p = \frac{\beta \sqrt{(C - (A + B))}}{8\; Inh.\, ABD \times Inh.\, ACD}$$

§. 1331. Gevolg. Volgens Vraagſt. XXXIV, is Inhoud Piramide,

 of

of $I = \frac{1}{12} \sqrt{(C-(A+B))}$, bijgevolg $\sqrt{(C-(A+B))} = 12 I$; derhalve zal:

$$Sin.p = \frac{3\beta \times I}{2\, Inh.ABD \times Inh.ACD}$$

zijn, hetwelk eene fraaije eigenſchap der driehoekige piramide is.

§. 1332. XXXIX. Vraagstuk. *Fig.* 416. *Eene vergelijking op de inhouden van de vier zijvlakken eener driehoekige piramide te vinden?*

Oplossing. Men ſtelle den inhoud van het grondvlak $ABC = M$; de inhouden van de zijvlakken, BCD, ACD en ABD, respectievelijk $= P$, Q en R, en de ſtandhoeken der opſtaande zijvlakken als volgt; den ſtandhoek van P met $Q = r$, van P met $R = q$ en van Q met $R = p$, en behoude voorts dezelfde letters als in de voorgaande vraagſtukken. Men denke nu in de hoekpunten A, B en C, de middelpunten van drie bollen, welke de éénheid der lengtemaat tot ſtraal hebben; dan worden 'er, aan de drievlakkige hoeken A, B en C, drie bolvormige driehoeken geboren. De bolvormige driehoek aan A geeft:

$$Cos.p = \frac{Cos.BAC - Cos.BAD \times Cos.DAC}{Sin.BAD \times Sin.CAD} \quad \ldots \quad (1)$$

Nu is $Cos.BAC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $Cos.BAD = \frac{a^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2a\beta}$; ... $Cos.CAD = \frac{c^2 + \beta^2 - \alpha^2}{2c\beta}$; $Sin.BAD = 2R : a\beta$ en $Sin.CAD = 2Q : c\beta$. Stelt men dit alles in de vergelijking (1); dan zal zij, na herleiding, de gedaante

$$32\, QR \times Cos.p = 4\beta^2 (a^2 + c^2 - b^2) - 2(a^2 + \beta^2 - \gamma^2) \times (c^2 + \beta^2 - \alpha^2)$$

verkrijgen. De driehoeken aan de hoekpunten B en C, geven ſoortgelijke, en aan deze gelijkvormig zijnde vergelijkingen. Men heeft dan in alles:

$$32\, QR \times Cos.p = 4\beta^2 (a^2 + c^2 - b^2) - 2(a^2 + \beta^2 - \gamma^2) \times (c^2 + \beta^2 - \alpha^2)$$

$$32\, PR \times Cos.q = 4\gamma^2 (a^2 + b^2 - c^2) - 2(a^2 + \gamma^2 - \beta^2) \times (b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)$$

$$32\, PQ \times Cos.r = 4\alpha^2 (b^2 + c^2 - a^2) - 2(b^2 + \alpha^2 - \gamma^2) \times (c^2 + \alpha^2 - \beta^2)$$

Wanneer men nu deze vergelijkingen ontwikkelt, en derzelver leden tevens met de leden der vergelijking $0 = a^4 + b^4 + c^4 - a^4 - b^4 - c^4$ op-

optelt; dan zal men, na uit de ſom de termen, die elkander vernietigen, weggenomen te hebben, eene vergelijking verkrijgen, welke, nadat men in dezelve

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^2 = 16M^2$$
$$2b^2\gamma^2 + 2b^2\alpha^2 + 2\alpha^2\gamma^2 - b^4 - \alpha^4 - \gamma^2 = 16P^2$$
$$2c^2\beta^2 + 2c^2\alpha^2 + 2\alpha^2\beta^2 - c^4 - \alpha^4 - \beta^4 = 16Q^2$$
$$2a^2\beta^2 + 2a^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - a^4 - \beta^4 - \gamma^4 = 16R^2$$

geſteld, en al de termen door 16 gedeeld heeft, na verſchikking, geven zal:

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ \times Cos.r - 2PR \times Cos.q - 2QR \times Cos.p$$

Eene vergelijking, welke ons leert: *dat het vierkant van ééne der zijvlakken eener driehoekige piramide gelijk is aan de ſom van de vierkanten der drie andere zijvlakken, verminderd met de ſom der producten dezer drie andere zijvlakken, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, en elk product vermenigvuldigd met de Coſinus van den ſtandhoek der twee zijden, welke in dit product voorkomen.*

§. 1333. I. Gevolg. De ſom der vier vergelijkingen, welke de waarden van M^2, P^2, Q^2 en R^2 uitdrukken, zal geven:

$$M^2 + P^2 + Q^2 + R^2 =$$
$$2MP\,Cos.M,P + 2MQ\,Cos.M,Q + 2MR\,Cos.M,R + 2PQ\,Cos.P,Q$$
$$+ 2PR\,Cos.P,R + 2QR\,Cos.Q,R$$

zijnde M, P de ſtandhoek der vlakken M en P. *enz.*

§. 1334. II. Gevolg. Indien de zijvlakken P, Q en R, regthoekig op elkander ſtaan; dan heeft men eene driehoekige piramide, die men, omdat zij, onder de piramiden, denzelfden rang, als de regthoekige-driehoek, onder de driehoeken, bekleedt, *regthoekig* zou kunnen noemen, en in deze piramide is nu $Cos.p = 0$, $Cos.q = 0$ en $Cos.r = 0$: de gevondene vergelijking verandert dan in

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2$$

en leert ons: *dat het vierkant van de zijde, tegen over den regten drievlakkigen hoek eener regthoekige driehoekige piramide, gelijk is aan de ſom van de vierkanten der zijvlakken, welke om den regten drievlakkigen hoek ſtaan.* Eene eigenſchap, welke met het Theorema van Pythagoras overëénſtemt.

§. 1335. Aanmerking. Het *vierkant van het zijvlak* is eene zegwijze, welke niet anders kan verſtaan worden, als *de tweede magt van het getal, dat de betrekking van den inhoud van het zijvlak tot de éénheid van de vlaktemaat of tot het vierkant van de één-*

heid op de lengtemaat, uitdrukt; want men kan wel een vierkant beschrijven, dat eene gegevene lijn tot zijde heeft; maar geen vlak kan de zijde van een vierkant zijn. Het Theorema van PYTHAGORAS kan ook in zulk eenen zin verklaard worden.

§. 1336. XL. VRAAGSTUK. *Fig.* 417. *Wanneer, in de ruimte, uit eenig punt P, vier lijnen zoodanig getrokken zijn: dat geen drie dezer lijnen in hetzelfde vlak liggen; dan begeert men eene vergelijking op de zes onderscheidene hoeken te vinden, welke deze lijnen, twee aan twee genomen, met elkander maken?*

OPLOSSING. Men stelle, in het gegeven punt P, het middelpunt van eenen bol; dan ontmoeten de lijnen, welke uit het punt P getrokken zijn, het oppervlak van dien bol, in de punten A, B, C en D, en de hoeken, welke door de lijnen AP, BP, CP en DP, twee aan twee genomen, gemaakt worden, worden door de bogen AB, BC, CD, AD, AC en BD, (welke de zijden en hoekpuntsbogen van eenen bolvormigen vierhoek zijn,) gemeten; de betrekking dezer zes bogen moet nu gevonden worden. Wij noemen, om de symetrie van de uitkomst zooveel te sprekender in het oog te doen vallen, *overstaande bogen*, welke niet in hetzelfde hoekpunt van den vierhoek zamenkomen; aldus staan de bogen DC, AC en AD, tegen over de bogen AB, BD en BC, of α, β en γ, tegen over a, b en c.

Nu geven de driehoeken ABD, ABC en BCD, de vergelijkingen

$$Cos.\,ABD = [Cos.\,\gamma - Cos.\,a \times Cos.\,b] : Sin.\,a \times Sin.\,b \quad . \; . \; (1)$$

$$Cos.\,ABC = [Cos.\,\beta - Cos.\,a \times Cos.\,c] : Sin.\,a \times Sin.\,c \quad . \; . \; (2)$$

$$Cos.\,CBD = [Cos.\,\alpha - Cos.\,b \times Cos.\,c] : Sin.\,b \times Sin.\,c \quad . \; . \; (3)$$

en de hoeken ABD, CBD en $360^\circ - ABC$ maken 360°; derhalve is (omdat $Cos.\,(360^\circ - a) = Cos.\,a$ is,) zie *III. Gev. III. St. VIII. B.*

$$1 - Cos^2.\,ABD - Cos^2.\,CBD - Cos^2.\,ABC + 2\,Cos.\,ABD \times Cos.\,CBD \times Cos.\,ABC = 0$$

stelt men nu, in deze laatste vergelijking, de vergelijkingen (1), (2) en (3); dan zal men, na voor $Sin^2.\,p$ geschreven te hebben $1 - Cos^2.\,p$, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$\begin{aligned} &1 - Cos^2.\,a - Cos^2.\,b - Cos^2.\,c - Cos^2.\,\alpha - Cos^2.\,\beta - Cos^2.\,\gamma \\ &+ Cos^2.\,a \times Cos^2.\,\alpha + Cos^2.\,b \times Cos^2.\,\beta + Cos^2.\,c \times Cos^2.\,\gamma \;.\;.\;.\;. \\ &+ 2\,Cos.\,a \times Cos\,b \times Cos.\,c + 2\,Cos.\,a \times Cos.\,b \times Cos.\,\gamma \;.\;.\;.\;. \\ &+ 2\,Cos.\,b \times Cos.\,\alpha \times Cos.\,\gamma + 2\,Cos.\,c \times Cos.\,\alpha \times Cos.\,\beta \;.\;.\;.\;. \\ &- 2\,Cos.\,a \times Cos.\,b \times Cos.\,\alpha \times Cos.\,\beta - 2\,Cos.\,a \times Cos.\,c \times Cos.\,\alpha \times Cos.\,\gamma \\ &- 2\,Cos.\,b \times Cos.\,c \times Cos.\,\beta \times Cos.\,\gamma = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (\mu) \end{aligned}$$

§. 1337.

§. 1337. Aanmerking. Vermits $Cos.(360^\circ - a) = Cos. a$ is, valt het in het oog: dat deze vergelijking ook gelden zal, wanneer men $360^\circ - b$ en $360^\circ - \beta$ voor de hoekspunts-bogen neemt; gelijk zij ook gelden zal voor elk ander ſtelſel van vier lijnen, welke, in het punt P, gedacht kunnen worden.

§. 1338. XLI. Vraagstuk. *Eene formule te vinden, door welke, wanneer van de zes ſtandhoeken, welke de vier zijvlakken eener driehoekige piramide met elkander maken, vijf gegeven zijn, de zesde kan gevonden worden?*

Oplossing. Men verbeelde zich binnen de piramide, een punt, uit hetwelk loodlijnen op de zijvlakken vallen; dan heeft men een ſtelſel van vier lijnen, welker hoeken, twee aan twee genomen, de ſupplementen van de ſtandhoeken der zijvlakken zijn: de betrekking van de hoeken dezer loodlijnen wordt door de vergelijking (μ) uitgedrukt; om dat nu $Cos.(180^\circ - q) = - Cos. q$ en $Cos. q = - Cos.(180^\circ - q)$ is, zal, wanneer men (*Fig.* 416.) de ſtandhoeken der zijvlakken, welke aan de ribben gemaakt worden, door dezelfde letters, welke voor de ribben genomen zijn, aanwijst, (namelijk ſtandhoek der vlakken P en Q door α *enz.*) de betrekking dezer ſtandhoeken door

$$\begin{aligned}
&1 - Cos^2. a - Cos^2. b - Cos^2. c - Cos^2. \alpha^2 - Cos^2. \beta - Cos^2. \gamma \;\ldots \\
&+ Cos^2. a \times Cos^2. \alpha + Cos^2. b \times Cos^2. \beta + Cos^2. c \times Cos^2. \gamma \;\ldots \\
&- 2\, Cos. a \times Cos. b \times Cos. c - 2\, Cos. \alpha \times Cos. \beta \times Cos. \gamma \;\ldots \\
&- 2\, Cos. b \times Cos. \alpha \times Cos. \gamma - 2\, Cos. c \times Cos. \alpha \times Cos. \beta \;\ldots \\
&- 2\, Cos. a \times Cos. b \times Cos. \alpha \times Cos. \beta - 2\, Cos. a \times Cos. c \times Cos. \alpha \times Cos. \gamma \\
&- 2\, Cos. b \times Cos. c \times Cos. \beta \times Cos. \gamma = 0
\end{aligned}$$

uit welke, één der hoeken uit de vijf anderen, door de oplosſing eener vierkants-vergelijking, kan gevonden worden.

§. 1339. XLII. Vraagstuk *De betrekking te bepalen, welke 'er, in een veelvlakkig ligchaam, tusſchen het getal der veelvlakkige of ligchamelijke hoeken, het getal der zijvlakken en het getal der ribben beſtaat?*

Oplossing. Men neme, binnen het ligchaam, een punt naar welgevallen, en trekke, uit dat punt, tot aan al de hoekpunten, regte lijnen; voorts plaatſe men, in dit aangenomen punt, het middelpunt van eenen bol, welks oppervlak de ſtraks getrokkene lijnen, in even zooveel punten ontmoeten, als 'er hoekpunten in het ligchaam voorkomen. Men verëenige nu, op het oppervlak van den bol, deze punten door bogen, op dezelfde wijze, als de hoekpunten van het ligchaam, door de ribben, veréénigd zijn; dan ontſtaan 'er, op het oppervlak van den bol, even zoo vele bolvormige driehoeken en veelhoeken, als 'er zijvlakken in het ligchaam zijn, ſtemmende met elk zijvlak van het ligchaam een bolvormige veelhoek, welke even zoo-veel zijden, als dit zijvlak heeft, overéén; terwijl de ſom van al die bolvormige drie en veelhoeken gelijk is aan het oppervlak van den bol.

Stellen wij nu, na deze opheldering, het getal der ligchamelijke hoeken $= h$; het getal der zijden $= z$; en het getal der ribben $= r$; ſtellen wij voorts het getal van de zijden der zijvlakken, en bijgevolg het getal der zijden van de overéénkomſtige bolvormige veelhoeken n, n', n'', n''', *enz.* en de ſom van de hoeken dezer bolvormige veelhoeken S, S', S'', S''', *enz.* en de inhouden dezer bolvormige veelhoeken I, I', I'', I''', *enz.*; omdat dan (*Gev. XVII. St. XII. B.*)

$$I = \frac{S - 2nR + 4R}{8R} \times \Omega$$

is, (zijnde $R = 90°$ en Ω de inhoud van het oppervlak van den bol,) zal, omdat

$$I + I' + I'' + I''' + enz. = \Omega$$

en, omdat het getal der zijvlakken z is, noodzakelijk

$$\frac{S + S' + S'' + enz. - 2(n + n' + n'' + enz.) \times R + 4zR}{8R} \times \Omega = \Omega$$

zijn, of wel, na door Ω gedeeld, en met $8R$ vermenigvuldigd te hebben,

$$S + S' + S'' + enz. - 2(n + n' + n'' + enz.) \times R + 4zR = 8R$$

De ſom der hoeken, om hetzelfde punt, op het oppervlak, waar de bolvormige veelhoeken aan elkander ſluiten, is $= 4R$, en het getal dezer punten is gelijk h; daarom is $S + S' + S'' + S''' + enz. = 4hR$. Voorts is elke ribbe van het ligchaam eene zijde van twee aan elkander ſluitende zijvlakken, en, om die reden, is $n + n' + n''$ $n''' + enz. = 2r$; de laatſte vergelijking verandert derhalve in:

$$h \times 4R - r \times 4R + z \times 4R = 8R$$

en deelt men dezelve door $4R$; dan verkrijgt men:

$$h + z = r + 2$$

dat is: *het getal der hoeken en der zijvlakken te zamen genomen, is altijd twee meer dan het getal der ribben.*

§. 1340. Gevolg. Volgens *XIX. I. B.* is de ſom der hoeken van het zijvlak dat n hoeken heeft $= (n - 2) \times 2R = 2nR - 4R$; gevolgelijk wordt de ſom van de hoeken van al de zijvlakken, welke ſom wij Σ ſtellen, door de vergelijking:

$$2(n+n'+n''+n'''+ enz.) \times 2R - 4zR = \Sigma$$

gevonden; of, omdat $n + n' + n'' +$ enz. $= 2r$ is, door $\Sigma = 4rR - 4zR$; maar $r - z = h - 2$ zijnde, is $\Sigma = (h-2) \times 4R$. Dat is: *de som van al de hoeken der zijvlakken is gelijk aan zooveelmaal vier regte hoeken als het getal der veelvlakkige hoeken min twee.* — Men kan uit deze oplosfing vele leerzame gevolgen afleiden.

Iets over de vijf Regelmatige Ligchamen.

§. 1341. X. Bepaling. Regelmatige ligchamen zijn door een zeker getal zijvlakken, welke gelijke en gelijkvormige drie of veelhoeken zijn, bepaald.

§. 1342. XLIII. Vraagstuk. *Het aantal der mogelijke regelmatige ligchamen te bepalen, en derzelver wijze van zamenftelling te befchrijven.*

Oplossing. Vermits tot de zamenftelling van eenen ligchamelijken of veelvlakkigen hoek, ten minften drie vlakken vereischt worden, zoo zijn alle regelmatige veelhoeken, welke meer dan vijf zijden hebben, tot de zamenftelling der regelmatige ligchamen onbruikbaar. 'Er blijven dan geene andere regelmatige veelhoeken, dan de gelijkzijdige driehoek, het vierkant en de regelmatige vijfhoek over, welke alleen, tot die zamenftelling, kunnen gebruikt worden.

Omdat nu de fom der zijden van eenen veelvlakkigen hoek minder dan 360° moet zijn, en de hoek van eenen gelijkzijdigen driehoek 60° bedraagt, zal men drie, vier en vijf gelijke gelijkzijdige driehoeken tot eenen drie, vier en vijfvlakkigen hoek kunnen vereënigen, en men zal met gelijke gelijkzijdige driehoeken, drie onderfcheidene foorten van regelmatige ligchamen kunnen zamenftellen.

1° Wanneer men, *fig.* 418, drie gelijke en gelijkzijdige driehoeken ABC, ADC en BCD, met derzelver hoekpunten C aan elkander voegt, zoodat de ribben AC, BC en DC aan elkander fluiten; dan wordt de gelijkzijdige driehoek ABD gevormd, welke aan elken der drie zamengevoegde driehoeken gelijk is, en men verkrijgt eene ligchamelijke ruimte, befloten binnen vier gelijke en gelijkzijdige driehoeken, in welke, zoo als duidelijk te zien is, alle de drievlakkige hoeken gelijk zijn. Men noemt dit ligchaam *regelmatige driehoekige piramide*, *Tetraëdrum* of *regelmatig Viervlak*. Men kan, om en in hetzelve, eenen bol befchrijven.

2° Men verbeelde zich *fig.* 419, een vierkant $ABCD$, welks zij-

 den

den gelijk zijn aan de zijden der gelijke en gelijkzijdige driehoeken, waaruit men het ligchaam wil zamenſtellen. Men late twee driehoeken *ABE* en *BCE*, om de zijden *AB* en *BC*, draaijen, tot dat twee van derzelver ribben *BE* langs *BE* zamenkomen: dit gedaan hebbende, zal men op de zijde *DC* eenen derden driehoek *DCE* aan het punt *E* kunnen veréénigen, en de zijden *AD*, *DE* en *AE* zullen eenen vierden gelijkzijdige driehoek maken, die aan de drie eerſte gelijk is. Op dezelfde wijze zal men, beneden het vierkant *ABCD*, vier gelijke en gelijkzijdige driehoeken *ABF*, *BCF*, *CDF* en *ADF* kunnen zamenvoegen, en men zal, zoo doende, een ligchaam verkrijgen, dat binnen acht gelijke en gelijkzijdige driehoeken is ingeſloten, en men zal gemakkelijk kunnen bewijzen, dat de lijnen *BE*, *ED*, *DF* en *BF*, in hetzelfde vlak liggen en een vierkant maken, dat de zes viervlakkige hoeken *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F*, bij ſuperpoſitie gelijk zijn, en dat men, in en om dit ligchaam, eenen bol beſchrijven kan. Men noemt dit ligchaam *Octaëdrum* of *regelmatig Achtvlak.*

3° Laat verder, *fig.* 320, *ABCDE* een regelmatige vijfhoek zijn, welks zijden gelijk aan de zijden der driehoeken zijn; dan kan men (gelijk in N° 2.) vijf gelijkzijdige driehoeken *ABF*, *BCF*, *CDF*, *DEF* en *AEF*, bij *F* zamenvoegen, en men verkrijgt alzoo op de baſis *ABCDE* eene regelmatige vijfhoekige piramide. Men plaatſe voorts op de zijden van den vijfhoek vijf gelijkzijdige driehoeken *ABG*, *BCH*, *CDI*, *DEK*, *AEL*, zoodanig, dat zij met de driehoeken *ABF*, *BCF*, *CDF*, *DEF* en *AEF*, dezelfde ſtandhoeken maken als twee der aan elkander grenzende zijvlakken der piramide; dan is het ligtelijk te betoogen: dat de hoeken *GBH*, *HCI*, *IDK*, *KEL* en *GAL*, alle hoeken van 60° zijn, en dat alzoo, de lijnen *GH*, *HI*, *IK*, *KL*, *LG*, getrokken hebbende, deze lijnen de zijden van eenen regelmatigen vijfhoek zijn, op welke eene regelmatige piramide, gelijk aan de bovenſte, door middel der gelijke gelijkzijdige driehoeken *GHM*, *HIM*, *IKM*, *KLM* en *LGM*, kan zamengeſteld worden. Het ligchaam op deze wijze zamengeſteld is tusſchen twintig gelijke en gelijkzijdige driehoeken beſloten; de twaalf vijfvlakkige hoeken, welke door deze zijden gemaakt worden zijn gelijk, en daar men ligtelijk bewijzen kan: dat de lijnen, welke de overſtaande hoekpunten veréénigen, even lang zijn, en elkander in hetzelfde punt midden door deelen, hetwelk van al de zijvlakken denzelfden afſtand heeft, zal men in en om dit ligchaam eenen bol kunnen beſchrijven. Men noemt dit ligchaam *Icoſaëdrum* of *regelmatig Twintigvlak.*

4° Wan-

4° Wanneer zes gelijke vierkanten, als in *fig.* 421, aan elkander gevoegd worden; dan ontſtaat 'er een cubus, welke, in den rang der regelmatige ligchamen, *Hexaëdrum* of *regelmatig Zesvlak* genoemd wordt. Om en in hetzelve kan een bol beſchreven worden. Dit ligchaam is het eenige regelmatige dat door vierkanten kan ingeſloten worden.

5° Wanneer men *fig.* 422, eenen regelmatigeen vijfhoek *ABCDE* als baſis aanneemt; dan zal met dezen vijf andere gelijke regelmatige veelhoeken *ABHFG*, *BCKIH*, *CDMLK*, *DEONM* en *AEOPG*, kunnen zamenvoegen, welke aan de hoekpunten *A*, *B*, *C*, *D* en *E*, gelijke drievlakkige hoeken maken. Wanneer men nu, binnen elken dezer drievlakkige hoeken, lijnen denkt, welke met de drie ribben gelijke hoeken maken, zullen deze lijnen elkander in hetzelfde punt ontmoeten, dat van elk der hoekpunten van de zes regelmatige vijfhoeken, als ook van diezelfde vijfhoeken even ver afſtaat, en men zal gemakkelijk bewijzen kunnen: dat de ſtandhoeken van twee dezer regelmatige vijfhoeken overal gelijk zijn: men zal dan nog vijf andere aan de voorgaande gelijke regelmatige vijfhoeken *IKLST*, *LMNRS*, *NOPQR*, *PGFUQ*, *FHITU*, met de voorgaande kunnen zamenvoegen, welke aan de punten *T*, *S*, *R*, *Q* en *U*, ſluiten zullen, en aldaar eenen anderen regelmatigen vijfhoek *QRSTU* zullen maken, en men zal aldus een ligchaam verkrijgen, beſloten binnen twaalf gelijke regelmatige vijfhoeken, in en om hetwelk eenen bol kan beſchreven worden. Men noemt dit ligchaam *Dodecaëdrum* of *regelmatig Twaalfvlak*.

Deze zijn de vijf mogelijke ligchamen, welke, door gelijke en regelmatige veelhoeken, kunnen ingeſloten, en om, en in welken eenen bol kan beſchreven worden. Wanneer men zich nu een zinnelijk denkbeeld van deze ligchamen wenscht te maken, zoo ſnijde men uit karton-papier de figuren 422, 423, 424, 425 en 426, welke men, volgens de lijnen in die figuren voorkomende, omvouwt, en men zal dan de ſtraks beſchrevene ligchamen, behalve den cubus, verkrijgen.

§. 1343. XLIV. Vraagstuk. *De formulen te vinden, waardoor men de ſtandhoeken van de zijvlakken der regelmatige ligchamen, benevens de middellijnen der in en omgeſchrevene bollen, en de inhouden dezer ligchamen vinden kan?*

Oplossing. Laten, *Fig.* 427, *ABC* en *ABD*, twee middelpuntsdriehoeken van twee aan elkander ſluitende zijvlakken zijn, zoodanig dat *AB* éene der ribben is. Men late, uit de middelpunten, *C* en

D, der zijvlakken, de apothemata CE en DE, op de ribbe AB, vallen; dan is de hoek CED de ſtandhoek van twee der zijvlakken. Men late voorts, door deze apothemata, een vlak gaan, en deele den hoek CED, door de lijn EM, midden door; trekke de lijn CM, loodregt op CE, wanneer men dan de lijn MD trekt, zal deze lijn ook loodregt op ED ſtaan; terwijl de lijnen MC en MD, die (*X. Stell. I. B.*) gelijk zijn, loodregt op de zijvlakken ſtaan, en de ſtralen van den ingeſchrevenen bol zullen zijn. Indien men de lijnen AM en BM trekt, zullen deze twee ſtralen van den omgeſchrevenen bol zijn. Men denke nu, in het gemeene middelpunt M van het ligchaam en der in en omgeſchrevene bollen, eenen bol, welks ſtraal gelijk aan de éénheid van de lengtemaat zij; het oppervlak van den bol maakt dan den bolvormige driehoek abc, welke, omdat de vlakken CDM en ABM elkander regthoekig ſnijden, regthoekig is in b; omdat dan CM loodregt ſtaat op ABC, is hoek $cab =$ hoek ACE gelijk den halven centerhoek van den veelhoek, die één der zijvlakken van het ligchaam is, de boog ab is de maat van den hoek CME, de maat van het complement van den halven ſtandhoek CED, en de hoek acb is de ſtandhoek der vlakken ACM en AME. Men ſtelle nu den ſtandhoek der zijvlakken $CED = C$; $AB = a$; $AM = R$ en $CM = r$; het getal der zijden van elk zijvlak $= n$, het getal der zijvlakken van elken veelvlakkigen hoek van het ligchaam $= m$; dan is $cab = 180^\circ : n$, en $c = 180^\circ : m$; nu is, in den regthoekigen bolvormigen driehoek abc, $Cos.\,ab = Cos.\,c : Sin.\,a$; dat is:

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}C = Cos.\frac{180^\circ}{m} : Sin.\frac{180^\circ}{n} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

door welke vergelijking de ſtandhoeken der zijvlakken gevonden worden. Dezelfde driehoek geeft nog $Cos.\,ac = Cot.\,a \times Cot.\,c = \ldots$ $Cos.\,CMA$; nu is, $R : r = 1 : Cos.\,CMA$; derhalve

$$\frac{R}{r} = Tang.\frac{180^\circ}{n} \times Tang.\frac{180^\circ}{m} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

eene vergelijking, waardoor de betrekking van de ſtralen der om en ingeſchrevene bollen bekend worden. Eindelijk geeft nog de driehoek abc de vergelijking $Cos.\,bc = Cos.\,a : Sin.\,c$: maar bc is de maat van den hoek AME, en is het complement van EAM; derhalve $Cos.\,bc = Sin.\,EAM$. Hieruit volgt nu met weinig moeite,

$$R = \tfrac{1}{2}a \times \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Sin.\frac{180^\circ}{m} : \sqrt{\left[-Cos.\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{180^\circ}{m}\right) \times Cos.\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{180^\circ}{m}\right)\right]} \quad (3)$$

Door

Door deze en de voorgaande formulen, zal men de ſtralen der in en omgeſchrevene bollen kunnen vinden; of ook wel door (2) en deze volgende

$$R^2 = r^2 + \tfrac{1}{4} a^2 : Sin^2. \frac{180^\circ}{n} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Veel gemakkelijker zal het nogtans zijn, eerst den ſtandhoek der zijvlakken te zoeken, en daar na R en r door

$$R = \tfrac{1}{2} a \times Tang. \frac{180^\circ}{m} \times Tang. \tfrac{1}{2} C \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$r = \tfrac{1}{2} a \times Cot. \frac{180^\circ}{n} \times Tang. \tfrac{1}{2} C \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

uit welke volgt:

$$a = 2 R \times Cot. \frac{180^\circ}{m} \times Cot. \tfrac{1}{2} C \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

vergelijking, waardoor de zijden der regelmatige ligchamen, in denzelfden bol beſchreven zijnde, gevonden kunnen worden.

Eindelijk is de inhoud van het zijvlak $\tfrac{1}{4} n a^2 \times Cot. \frac{180^\circ}{n}$; ſtellende dan het getal der zijvlakken $= p$; dan is het geheele oppervlak $= \tfrac{1}{4} p n a^2 \times Cot. \frac{180^\circ}{n}$; dit met één-derde van r vermenigvuldigd zijnde geeft, voor den inhoud van het ligchaam, de uitdrukking:

$$Inhoud = \tfrac{1}{24} p n a^3 \times Cot^2. \frac{180^\circ}{n} \times Tang. \tfrac{1}{2} C \quad \ldots \quad (8)$$

§. 1344. Men behoeft nu ſlechts, voor elk regelmatig ligchaam, de waarden van n en m, in de gevondene vergelijkingen, te ſtellen, om de ſtandhoek der zijvlakken, de ſtralen der om en ingeſchrevene bollen, en den inhoud van dit ligchaam te vinden. Men raadplege dien aangaande het nevenſtaande tafeltje.

	n	m
Viervlak	3	3
Zesvlak	4	3
Achtvlak	3	4
Twaalfvlak	5	3
Twintigvlak	3	5

§. 1345. De vergelijking (2) is voor het zesvlak en achtvlak,

$$R : r = Tang. 60^\circ \times Tang. 45^\circ$$

en voor het twaalfvlak en twintigvlak,

$$R : r = Tang. 60^\circ \times Tang. 36^\circ$$

waaruit volgt: *dat, wanneer het zesvlak en achtvlak, het twaalfvlak en twintigvlak, in denzelfden bol beſchreven zijn, dezelfde bol in het zes en achtvlak, en dezelfde bol, in het twaalf en twintigvlak, zal paſſen.*

§. 1346.

§. 1346. Door de toepasſing der formulen zal men vinden:

1° Voor het viervlak $n = 3$; $m = 3$; $p = 4$; $Cos. C = \frac{1}{3}$; $Sin. C = \frac{2}{3}\sqrt{2}$; $Tang. C = 2\sqrt{2}$; $Tang. \frac{1}{2} C = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $R = \frac{1}{4} a\sqrt{6}$; $r = \frac{1}{12} a\sqrt{6}$; $a = \frac{2}{3} R\sqrt{6}$; $Inhoud = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

2° Voor het zesvlak: $n = 4$; $m = 3$; $p = 6$; $Cos. C = 0$; $Sin. = 1$; $Tang. \frac{1}{2} C = Cot. \frac{1}{2} C = 1$; $R = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$; $r = \frac{1}{2} a$; $Inhoud = a^3$.

3° Voor het achtvlak: $n = 3$; $m = 4$; $p = 8$; $Cos. C = -\frac{1}{3}$; $Sin. C = \frac{2}{3}\sqrt{2}$; $Tang. C = -2\sqrt{2}$; $Tang. \frac{1}{2} C = \sqrt{2}$; $R = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$; $r = \frac{1}{6} a\sqrt{6}$; $Inhoud = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$.

4° Voor het twaalfvlak: $p = 12$; $n = 5$; $m = 3$; $Cos. C = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$; $Sin. C = \frac{2}{5}\sqrt{5}$; $Tang. C = -2$; $Tang. \frac{1}{2} C = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$; $R = \frac{1}{4} a \times (\sqrt{3} + \sqrt{15})$; $r = \frac{1}{4} a\sqrt{(10 + 4\frac{2}{5}\sqrt{5})}$; $Inhoud = \frac{1}{4} a \times (15 + 7\sqrt{5})$.

5° Voor het twintigvlak: $p = 20$; $m = 5$; $n = 3$; $Cos. C = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$; $Sin. C = \frac{2}{3}$; $Tang. C = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$; $Tang. \frac{1}{2} C = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$; $R = \frac{1}{4} a\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$; $r = \frac{1}{12} a \times (3\sqrt{3} + \sqrt{15})$ en $Inhoud = \frac{5}{12} a^3 \times (3 + \sqrt{5})$.

§. 1347. Bijvoegsel. Men zal, uit alle deze waarden gemakkelijk de gronden van de volgende conſtructie, *om, in eenen gegeven bol, de vijf regelmatige ligchamen te conſtrueren*, kunnen nagaan.

Laat, *fig.* 428, AB de middellijn van den bol, AEB zijn halve groote cirkel, C het middelpunt zijn. Neem $BD = \frac{1}{3} AB$; DF loodregt op AB; dan is AF de ribbe van het viervlak, en BF de ribbe van het zesvlak. Trek EC loodregt op AB; dan is AE de ribbe van het achtvlak. Stel AG loodregt op AB, maak $AG = AB$, en trek CG; dan is AH de ribbe van het twintigvlak. Men deele eindelijk BF, in N, in de uiterſte en middelſte reden; dan is het grootſte ſtuk BN de ribbe van het twaalfvlak.

*

VEER-

VEERTIENDE BOEK.

Over de Theorie der Transversalen, benevens eene korte aanwijzing van derzelver gebruik.

---

§. 1348. I. Bepaling. Eene transversaal is eene regte of kromme lijn, welke, in het vlak van eenige figuur, naar welgevallen wordt aangenomen, en de zijden van die figuur of derzelver verlengde ergens doorsnijdt. Een transversaal vlak is een plat of gebogen vlak, dat, naar welgevallen, in de ruimte wordt aangenomen, en een stelsel van lijnen snijdt, enz.

§. 1349. II. Bepaling. Wij nemen thans het woord veelhoek in eene uitgestrektere beteekenis, en verstaan door denzelven een stelsel van regte lijnen, welke eenige gegevene punten, (mits geen drie dezer punten in dezelfde regte lijn liggen,) in eenigerlei rangorde genomen, het eerste met het tweede, het tweede met het derde, enz. en het laatste met het eerste vereënigen. Zie *fig.* 429 en 430.

§. 1350. III. Bepaling. Wanneer die punten in hetzelfde vlak gelegen zijn, noemt men den veelhoek *vlakke veelhoek:* maar liggen zij in onderscheidene vlakken, wordt de veelhoek *scheve veelhoek* (*polygone gauche*) genoemd.

§. 1351. I. Aanmerking. Wanneer het aantal der gegevene punten n is, zal het getal veelhoeken, welke, door deze punten, op de voorschrevene wijze te vereënigen, ontstaan, door

$$\tfrac{1}{2}(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\ \textit{enz.}\times 3\times 2\times 1$$

worden uitgedrukt, eene waarheid, welke, door de Leer der permutatien, gemakkelijk kan bewezen worden.

§. 1352. II. Aanmerking. Men kan ook den veelhoek beschouwen, als te ontstaan, uit de onderlinge snijding van eenige gegevene lijnen; en dan ontstaan 'er in deze figuur onderscheidene veelhoeken: doch wij zullen ons met deze wijze van beschouwen, als minder tot ons oogmerk dienende, thans niet ophouden.

§. 1353.

§. 1353. III. Aanmerking. De beschouwing der veelhoeken, op de wijze, zoo als wij dezelve hier aannemen, leert zeer fraaije eigenschappen kennen, welke wij, als tot ons tegenwoordig plan niet behoorende, bij eene andere gelegenheid zullen leeren kennen.

I. Stelling. *Fig.* 431, 432 en 433.

§. 1354. *Wanneer de drie zijden AB, AC en BC, van eenen driehoek of derzelver verlengden, door eene regte lijn DEF, als transversaal, gesneden worden; dan ontstaan 'er, op elke zijde des driehoeks, twee lijnen, begrepen tusschen de uiteinden van die zijde en het snijpunt, (namelijk AD en BD op AB; BF en CF op BC; CE en EA op AC,) welke wij, kortheidshalve, segmenten der zijden zullen noemen; deze segmenten hebben, hoe de transversaal moge genomen zijn, zulk eene overëënkomst met elkander, dat het product van drie dezer segmenten, welke geen gemeenschappelijk hoekpunt hebben, gelijk is aan het product der drie anderen. Dat is:*

$$AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF.$$

Betoog. Men trekke de lijn AG, evenwijdig aan BC; dan geven de driehoeken DAG en DBF, die (*XXIV. Stell. I. B. en VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig zijn, de evenredigheid:

$AD : DB = AG : BF$; *waaruit* $AD \times BF = AG \times BD$ . . (1)

De driehoeken ACE en CFG, (*XXVI. Stell. I. B. en VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig zijnde, geven:

$AG : AE = CF : CE$; *waaruit* $AG \times CE = AE \times CF$ . . . (2)

Vermenigvuldigt men nu de leden der vergelijkingen (1) en (2) met elkander, en deelt men de gelijke producten door den gemeenen factor AG; dan heeft men:

$$AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF$$

en dit betoog geldt voor al de figuren, gelijk ook voor vele anderen, in welken, aan de transversaal eene andere stelling mogt gegeven zijn.

§. 1355. I. Gevolg. Indien men, *Fig.* 431, de transversaal DF evenwijdig aan AB stelt; dan worden AD en BD oneindig, en de vergelijking op de segmenten der zijden wordt $BF \times CE = AE \times CF$; waaruit volgt: $BF : CF = AE : CE$, hetgeen met de *I. Stelling* van het *IV. Boek* overëënstemt.

§. 1356.

§. 1356. II. Gevolg. Wanneer de transversaal, *Fig.* 431, door het punt A gaat; dan worden AD en $AE = o$, en wij hebben, $o \times BF \times CE = o \times DB \times CF$ en $BF \times CE : BD \times CF = \frac{o}{o} =$ eene onbepaalde grootheid; en de vergelijking kan, in dit geval, niets leeren.

§. 1357. III. Gevolg. *Fig.* 431, 432 en 433. Door de transversaal ontstaan 'er in de figuur, behalve de driehoek ABC, nog de drie driehoeken DBF, CEF en DAE, welke respectievelijk de lijnen AC, BD en BC, tot transversalen hebben: men heeft derhalve de vier vergelijkingen:

$$AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF \text{ uit drieh. } ABC$$
$$AB \times CF \times DE = AD \times EF \times BC \; \ldots\ldots \; DBF$$
$$AE \times FD \times BC = BF \times AC \times DE \; \ldots\ldots \; CEF$$
$$BD \times AC \times EF = EC \times DF \times AB \; \ldots\ldots \; DAE$$

welker product $1 = 1$ geeft; zoodat het product van drie dezer vergelijkingen de vierde moet geven.

§. 1358. IV. Gevolg. Wanneer men de eerste met de tweede, of de derde met de vierde vergelijking, vermenigvuldigt; dan verkrijgt men:

$$AB \times BF \times CE \times DE = BD \times BC \times AE \times EF$$

en het product van de eerste en derde, of van de tweede en vierde vergelijking, geeft:

$$AD \times FD \times CE \times BC = BD \times AC \times CF \times DE$$

uit welke vergelijkingen de evenredigheden,

$$BD \times BC : AB \times BF = CE \times DE : AE \times EF$$
$$\text{en } AD \times DF : BD \times DE = AC \times CF : BC \times CE$$

volgen, waarvan men, in vele gevallen, een nuttig gebruik kan maken.

II. Stelling. *Fig.* 431, 432 *en* 433. (*Het omgek. der voorg.*)

§. 1359. *Wanneer men op twee zijden, AC en BC, eens driehoeks, of op derzelver verlengden, twee punten E en F; en, op het verlengde van de derde zijde AB, een punt D, zoodanig neemt; dat het product der segmenten AD. BF en CE, welke geen gemeenschappelijk punt hebben, gelijk is aan het product der drie andere segmenten, AE. BD en CF; dan zullen de punten D, E en F, in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

Be-

Betoog. Wanneer een ander punt D', met de punten E en F, in dezelfde regte lijn liggen; dan is (*I. Stell.*)

$$AD' \times BF \times CE = AE \times BD' \times CF$$

maar volgens de onderstelling is:

$$AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF$$

uit welke vergelijkingen, de evenredigheden (*V. Stell. II. B.*)

$$AD' : BD' = AE \times CF : BF \times CE$$

$$AD : BD = AE \times CF : BF \times CE$$

volgen, en uit deze wederom (*I. Stell. II. B.*)

$$AD' : BD' = AD : BD$$

en (*VIII. Stell. B.*)

$$BD' - AD' : BD - AD = AD' : AD = AB : AB$$

dat is twee ongelijke grootheden, in dezelfde reden, als twee gelijke: daar zulks nu ongerijmd is, kan geen ander, dan het punt B, met de punten E en F, in dezelfde regte lijn gelegen zijn.

III. Stelling. *Fig.* 434, 435 *en* 436.

§. 1360. *Wanneer al de zijden van eenen vlakken veelhoek van n zijden, of derzelver verlengden, (zoo als het valt) door eene transversaal lijn gesneden worden; dan ontstaan 'er, op elke van deszelfs zijden, van de hoekpunten afterekenen, tot aan het snijpunt, twee segmenten: nu zal het product van n segmenten, waarvan 'er op elke zijde één zoodanig genomen is, dat geen dezer segmenten een gemeen hoekpunt hebben, gelijk zijn aan het product van de n andere segmenten. Dat is voor eenen zeshoek, welke de figuur voorstelt:*

$$AG \times BH \times CI \times DK \times EL \times FM = AM \times FL \times EK \times DI \times CH \times BG.$$

Betoog. Offchoon deze stelling niet algemeen, voor eenen n hoek, kan bewezen worden, zal het bewijs voor de zeshoeken, waarvan de figuren 434, 435 en 436, 'er drie onderscheidene soorten voorstellen, aanwijzen: hoe men de bewijzen voor de vier, vijf, zeven, acht, negen hoeken, enz. kan opmaken, terwijl men, door de leiding van dit bijzonder bewijs, zal gevoelen, dat het bewezene voor den zeshoek zich tot alle andere veelhoeken, hoe groot het getal der zijden zijn moge, moet uitstrekken.

Men trekke van één der hoekpunten, bij voorbeeld, A, de hoekpuntslijnen AC, AD en AE, welke men, indien het noodig is, tot aan

aan de transverſaal lijn, in N, O en P, verlengt; dan geven, volgens de *I. Stelling*, de driehoeken ABC, ACD, ADE en AEF, de lijn KI als derzelver transverſaal lijn beſchouwende, de vier volgende vergelijkingen:

$$AG \times BH \times CN = AN \times CH \times BG$$
$$AN \times CI \times DO = AO \times DI \times CN$$
$$AO \times EP \times DK = AP \times EK \times DO$$
$$AP \times EL \times FM = AM \times FL \times EP$$

vermenigvuldigt men nu de overéénkomſtige leden dezer vergelijkingen met elkander; dan verkrijgt men, na alles door de gelijke factoren CN, AN, DO, AO, EP en AP, welke in de beide producten voorkomen, gedeeld te hebben:

$$AG \times BH \times CI \times DK \times EL \times FM = AM \times BG \times CH \times DI \times EK \times FL$$

welke de geſtelde vergelijking is, die men betoogen moest.

Men zal, door, uit hetzelfde hoekpunt, tot de andere hoekpunten, hoekpuntslijnen te trekken, eenen vierhoek in twee, eenen vijfhoek in drie, eenen n hoek in $n-2$ driehoeken verdeelen, en het product der vergelijkingen, op de gemeenſchappelijke transverſaal van alle deze driehoeken, zal, na door de gelijke factoren, welke in hetzelve voorkomen, gedeeld te hebben, altijd de geſtelde vergelijking geven.

IV. STELLING. *Fig.* 434, 435 *en* 436.

§. 1361. *Wanneer de hoekpunten van eenen veelhoek in onderſcheidene vlakken gelegen zijn, en de veelhoek diensvolgens een ſcheve veelhoek is; dan zal, indien men, in plaats van eene transverſaal lijn, een transverſaal vlak KI aanneemt, hetwelk de zijden, of derzelver verlengden, doorſnijdt, de vergelijking op de ſegmenten, welke door de ontmoeting van dit vlak gemaakt worden, nog, op dezelfde wijze, als in het geval van eenen vlakken veelhoek, die door eene transverſaal lijn geſneden wordt, blijven plaats hebben; namelijk voor onze bijzondere figuren*

$$AG \times BH \times CI \times DK \times EL \times FM = AM \times BG \times CH \times DI \times EK \times FL.$$

BETOOG. Men trekke wederom de hoekpuntslijnen AC, AD en AE, welke het transverſaal vlak, in de punten N, O en P ſnijden: omdat nu de driehoeken ABC, ACD, ADE en AEF, elk, in een bijzonder vlak, liggen, zijn de snijpunten G, H en N; N, O en I; O, K en P; en M, L en P, (die zich alle in het transversaal vlak bevinden,) drie aan drie, in dezelfde regte lijnen gelegen, welke regte lijnen, als in het algemeene transversaal vlak liggende, de transversaal lijnen van elken dezer driehoeken zijn. Deze transversaal lijnen geven dezelfde vergelijkingen van het betoog der voorgaande stelling, en bijgevolg ook dezelfde vergelijking op de segmenten van den scheven zeshoek. De beschouwing van twee of drie andere scheve veelhoeken zal aan het verstand overtuigend doen blijken: *dat het gestelde voor alle scheve, zoowel als voor alle vlakke veelhoeken, volstrekt, en zonder eenige uitzondering, algemeen is.*

§. 1362. Aanmerking. Men zal het omgekeerde der twee voorgaande stellingen, op dezelfde wijze, als het omgekeerde van de eerste stelling, kunnen bewijzen.

V. Stelling. *Fig.* 437 *en* 438.

§. 1363. *Wanneer men, binnen of buiten eenen driehoek* ABC, *een punt* P *neemt, en uit de hoekpunten* A, B *en* C, *van dien driehoek* ABC, *door dit punt* P, *de transversaal lijnen* AD, BE *en* CF, *trekt, welke de zijden des driehoeks* ABC, *of derzelver verlengden, in de punten* D, E *en* F, *in twee segmenten deelen; dan zal het product van drie segmenten, op de drie onderscheidene zijden genomen, en die niet hetzelfde hoekpunt gemeen hebben, gelijk zijn aan het product der drie andere segmenten. Dat is:* $AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$.

Betoog. Men beschouwe de driehoeken ACF en BCF, en neme de lijnen BE en AD, als derzelver transversalen aan; dan is (*I. St.*)

$$FP \times CE \times AB = BF \times CP \times AE$$
$$AF \times BD \times CP = FP \times CD \times AB$$

het product dezer vergelijkingen geeft, na alles door $FP \times CP \times AB$ gedeeld te hebben:

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD.$$

§. 1364. I. Gevolg. Uit de betoogde vergelijking volgt: (*V. Stell. II. B.*)

$$AF : BF = AE \times CD : BD \times CE.$$

§. 1365. II. Gevolg. Men trekke, door C, de lijn RQ, evenwijwijdig aan AB; dan zijn de driehoeken AFP en BFP aan de driehoeken QCP en RCQ (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig, men heeft dan $AF : FP = CQ : CP$ en $BF : PF = CR : CP$; derhalve (*XII. Stell. II. B.*) $AF : BF = CQ : CR$, en eindelijk, (*I. Stell. II. B.*)

$$CQ : CR = AE \times CD : BD \times CE$$

en $$AE \times CD \times CR = BD \times CE \times CQ.$$

VI. STELLING. *Fig.* 437 *en* 438. (*Het omg. der voorg.*)

§. 1366. *Wanneer, op de drie zijden AB, BC en AC, van eenen driehoek ABC, (of op twee van derzelver verlengde naar denzelfden kant,) drie punten F, D en E, zoodanig genomen worden, dat $AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$ zij; dan zullen de lijnen AD, BE en CF, welke, uit de hoekpunten, A, B en C, der overstaande hoeken, tot deze alzoo aangenomene punten getrokken worden, elkander in hetzelfde punt P, buiten of binnen den driehoek, ontmoeten.*

BETOOG. De lijnen BE en CF snijden elkander in een punt P; wanneer nu de lijn AD niet door het punt P gaat; dan zal men, door het punt P, eene lijn AD' kunnen trekken, welke de zijde BC, in het punt D', snijdt; en dan zal (*V. Stell.*)

$$AF \times BD' \times CE = BF \times CD' \times AE$$

zijn; maar, volgens de onderstelling, is

$$AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$$

Hieruit volgt: (*V. Stell. II. B.*)

$$BD' : CD' = AE \times BF : AF \times CE$$
$$BD : CD = AE \times BF : AF \times CE$$

en (*I. Stell. II. B.*) $BD' : CD' = BD : CD$; waaruit (*VIII. Stell. II. B.*) $BD' + CD' : BD + CD = BD' : BD$; of wel, $BD' : BD = BC : BC$ volgen zal; daar nu zulks ongerijmd is, zal geene andere, dan de lijn AD, door het punt P kunnen gaan, en het gestelde is hierdoor ten vollen bewezen.

§. 1367. I. GEVOLG. *Fig.* 437. Laten AD, BE en CF, de loodlijnen zijn, welke, uit de hoekpunten, op de overstaande zijden van den driehoek vallen; dan is de driehoek AFC met den driehoek AEB, de driehoek CDA met den driehoek CEB, en de driehoek BDA met den driehoek BFC gelijkvormig; derhalve is,

$$AF : AE = AC : AB$$
$$BD : BF = AB : BC$$
$$CE : CD = BC : AC$$

vermenigvuldigt men deze vergelijkingen met elkander; dan verkrijgt men: (*XVI. Stell. II. B.*)

$$AF \times BD \times CE : AE \times BF \times CD = AC : AC = 1 : 1$$

of wel, omdat de termen van de tweede reden gelijk zijn, $AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$. Volgens het bewezene in de stelling, *moeten dan de loodlijnen van eenen driehoek elkander, in hetzelfde punt, doorsnijden.*

§. 1368. II. Gevolg. *Fig.* 437. Laat $AF = BF$; $BD = CD$ en $CE = AE$ genomen worden; dan is $AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$; *de lijnen derhalve, welke, uit de toppunten van de hoeken eens driehoeks, tot het midden overstaande zijden, getrokken worden, moeten elkander in hetzelfde punt, binnen den driehoek, doorsnijden.*

§. 1369. III. Gevolg. *Fig.* 437. Laten de lijnen AD, BE en CF, de hoeken A, B en C, midden door deelen, dan is (*IV. Stell. IV. B.*)

$$AF : FB = AC : BC$$
$$BD : CD = AB : AC$$
$$CE : AE = BC : AB$$

het product dezer evenredigheden geeft $AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$. *De lijnen derhalve, welke de hoeken eens driehoeks in twee gelijke deelen snijden, ontmoeten elkander in hetzelfde punt.*

§. 1370. IV. Bepaling. Eenige grootheden, a, b, c, d, *enz.* zijn in eene harmonische reeks, wanneer drie op elkander volgende termen, a, b, c, of b, c, d, *enz.*, tot elkander zulk eene betrekking hebben, dat de eerste dezer termen tot de derde in dezelfde reden staat, als het verschil der twee eersten tot het verschil der twee laatsten: dat is, wanneer $a : c = a - b : b - c$; $b : d = b - c : c - d$ is, *enz.* (Zie *I. C.* 45 *Vraagstuk*, *Bladz.* 346.) Wanneer die reeks slechts uit drie leden bestaat, noemt men haar eene *harmonische evenredigheid.*

§. 1371. V. Bepaling. *Fig.* 439. Wanneer men, op eene lijn AD, van het punt A afterekenen, de lijnen AB, AC en AD, in eene harmonische evenredigheid neemt; dan wordt de lijn AD gezegd, in de punten B en C, *harmonisch* (of

in

in eene *harmonische evenredigheid*) *gesneden* te zijn; en men noemt dan de deelen AB en CD de *uiterste* deelen, en BC het *middelste* deel.

§. 1372. GEVOLG. *Fig.* 439. Omdat, naar den aard der harmonische evenredigheid, $AB : AD = AC - AB : AD - AC$ is, of $AB : AD = BC : CD$, zal $AB \times CD = AD \times BC$ zijn. *Wanneer derhalve eene lijn AD, in de punten B en C, harmonisch gesneden is, zal de regthoek, onder de geheele lijn en het middelste deel, gelijk zijn aan den regthoek, onder de uiterste deelen.*

§. 1373. AANMERKING. *Fig.* 439. *Eene bepaalde of gegevene lijn AD kan, op onnoemlijk vele wijzen, harmonisch gesneden worden.* Stellen wij de geheele lijn $AD = a$, en nemen wij ééne der uiterste deelen $AB = b$; stellen wij dan het middelste deel $BC = x$; dan is $CD = a - b - x$, en (§. 1372.) $ax = ab - b^2 - bx$, en $x = b \times \frac{a-b}{a+b}$; waaruit volgt: *dat aan b alle waarden, van 0 tot a, kunnen gegeven, en bijgevolg het uiterste deel b naar welgevallen kan genomen worden.*

§. 1374. *Wanneer men, Fig.* 439, *eene lijn AC, welke, in het punt B, in twee, naar welgevallen genomene deelen, verdeeld is, tot in D zoodanig wil verlengen, dat de geheele verlengde lijn AD, in de punten B en C, harmonisch gesneden zij*; of, dat hetzelfde is, *wanneer men tot twee lijnen AB en AC eene derde harmonische evenredige AD vinden wil*; dan zal men $AB = a$, $BC = b$ en $CD = x$ stellen, en dan is $(a + b + x) \times b = ax$; en hieruit zal volgen: $x = b \times \frac{a+b}{a-b}$; waaromtrent moet aangemerkt worden: dat, zal het verlengde indedaad positief zijn, $a > b$ moet gegeven zijn.

§. 1375. Men kan dit alles, op eene eenvoudige wijze, door constructie, vinden. Zij, *fig.* 439, AD de gegevene lijn, AB het naar welgevallen genomen uiterste deel; dan trekke men, uit de uiteinden A en D, twee lijnen AE en DE, welke, in een willekeurig punt E, zamenkomen; door het punt B eene lijn FBG, evenwijdig aan DE; men neme $BG = FB$; dan zal de lijn EG de beide andere deelen BC en CD bepalen. Want, door de gelijkvormige driehoeken, welke, door de constructie, in de figuur ontstaan zijn, is $AB : AD = BF : DE = BG : DE = BC : CD$ en $AB \times CD = AD \times CD$.

§. 1376. En, om eene gedeelde lijn AC tot in D, zoodanig te verlengen, dat AD in B en C harmonisch gesneden zij, zal men eene on-

onbepaalde lijn AE, door B eene onbepaalde lijn FGB trekken, $BG = BF$ nemen, GCE trekken, en ED evenwijdig aan FG; dan zal CD het verlengde der gegevene lijn zijn.

VII. STELLING. *Fig.* 440.

§. 1377. *Wanneer eene lijn* AD, *in de punten* B *en* C, *harmonisch gesneden is, en men, uit eenig punt* P, *buiten die lijn gelegen, de lijnen* AP, BP, CP *en* DP, *trekt; dan zal,* $Sin.\,APD \times Sin.\,BPC = Sin.\,APB \times Sin.\,CPD$ *zijn.* En, omgekeerd, *wanneer de lijnen* AP, BP, CP *en* DP, *uit een punt* P, *zoodanig zijn getrokken: dat* $Sin.\,APD \times Sin.\,BPC = Sin.\,APB \times Sin.\,CPD$ *is; dan zal dit stelsel van lijnen elke lijn* AB, *welke door hetzelve, naar welgevallen, getrokken wordt, harmonisch snijden.*

BETOOG *van het eerste.* Men heeft (*III. Stell. IX. B.*) de evenredigheden:

$$AB : AP = Sin.\,APB : Sin.\,B$$
$$AP : AD = Sin.\,D : Sin.\,APD$$
$$CP : BC = Sin.\,B : Sin.\,BPC$$
$$CD : CP = Sin.\,CPD : Sin.\,D$$

vermenigvuldigt men de overëénkomstige termen dezer evenredigheden met elkander; dan verkrijgt men, na de termen van dezelfde reden, door de gelijke factoren, gedeeld te hebben:

$$AB \times CD : AD \times BC = Sin.\,APB \times Sin.\,CPD : Sin\,APD \times Sin.\,BPC$$

Omdat nu (*onderstell.*) $AB \times CD = AD \times BC$ is, zal ook $Sin.\,APB \times Sin.\,CPD = Sin.\,APD \times Sin.\,BPC$ zijn.

BETOOG *van het omgekeerde.* Geheel onafhankelijk van de onderstelling, is voor elke lijn AB, de gezegde lijnen snijdende,

$$AB \times CD : AD \times BC = Sin.\,APB \times Sin.\,CPD : Sin.\,APD \times Sin.\,BPC$$

Omdat nu (*onderst.*) $Sin.\,APB \times Sin.\,CPD = Sin.\,APD \times Sin.\,BPC$ is, zal ook $AB \times CD = AD \times BC$ zijn.

§. 1378. I. GEVOLG. *Fig.* 440. *Elke lijn* $A'B'C'D'$, *welke, boven of beneden* AD, *evenwijdig, of niet evenwijdig, aan dezelve getrokken wordt, zal, indien* AD *door de lijnen* AP, BP, CP *en* DP, *harmonisch gedeeld is, ook door diezelfde lijnen harmonisch gesneden worden*, welke waarheid onmiddelijk, uit de stelling en de tegenstelling, volgt.

§. 1379.

§. 1379. II. Gevolg. Wanneer men de lijnen AP, BP, CP en DP, naar boven verlengt, zullen de verlengde lijnen aP, bP, cP, dP, nog de eigenschap behouden, dat zij elke lijn, die dezelve snijdt, harmonisch zullen snijden.

§. 1380. III. Gevolg. Vermits de Sinussen van de supplementen der hoeken aan de Sinussen van die hoeken zelve gelijk zijn, *zullen de hoeken APb, DPc, CPd en BPa, door de lijnen, welke binnen dezelve gelegen zijn, op dezelfde wijze, als de hoeken APD en aPd gesneden zijn, zoodat alle transversalen, welke door deze hoeken getrokken worden door de lijnen, welke dezelve snijden, harmonisch zullen worden doorgesneden.*

VIII. Stelling. *Fig.* 441 *en* 442.

§. 1381. *Wanneer men, uit het hoekpunt C, van den hoek eens driehoeks ABC, eene lijn CD, tot aan de basis of derzelver verlengde, trekt, en voorts, uit de hoekpunten der twee andere hoeken, A en B, door eenig punt P, van die eerste lijn, CD, twee andere lijnen, AF en BE, tot aan de overstaande zijden, of derzelver verlengden, trekt; dan zal, indien de lijn CD de zijde AB niet midden door deelt, de lijn, welke door de punten E en F gaat, de zijde AB, of dezelver verlengde, in een punt Q, snijden, naar dat CD buiten of binnen den driehoek valt, en de lijn BD zal, in het eerste geval, Fig.* 442, *door de punten A en Q, en in het tweede geval, Fig.* 441, *de lijn PQ, door de punten A en D, harmonisch gesneden zijn. Dat is, in beide figuren, zal $AD \times BQ = AQ \times BD$ zijn. Eindelijk zullen alle lijnen QEF, welke, door het punt P hooger of lager te nemen, op de gezegde wijze ontstaan, elkander, in hetzelfde punt Q, doorsnijden.*

Betoog *van het eerste.* Omdat de lijnen CD, AF en BE, elkander in P snijden, is (*V. Stell.*) is $AD \times BF \times CE = BD \times CF \times AE$; derhalve is:

$$AD : BD = CF \times AE : BF \times CE$$

en, omdat QF eene transversaal van den driehoek ABC is, is $AQ \times BF \times CE = AE \times BQ \times CF$; derhalve

$$AQ : BQ = CF \times AE : BF \times CE$$

en daarom is (*I. Stell. II. B.*) $AD : BD = AQ : BQ$; dat is: $BQ \times AD = BD \times AQ$.

Betoog *van het tweede.* Wanneer het punt P hooger of lager, ja zelfs aan de andere zijde van C, of beneden den driehoek, genomen wordt, en de transversaal lijn, welke alsdan ontstaat, niet door Q, maar door een ander punt Q' mogte gaan; dan zal, volgens het bewezene, $Q'A:Q'B = AD:BD$ zijn; maar nu is $QA:QB = AD:BD$; derhalve (*I. Stell. II. B.*) $Q'A:Q'B = QA:QB$ en (*VIII. Stell. II. B.*) $Q'B - Q'A : QB - QA = Q'A : QA = AB : AB$, welke evenredigheid, daar zij ongerijmd is, bewijst: dat de nieuwe transversaal, gelijk ook elke andere, die op dezelfde wijze gemaakt is, door het punt Q zal loopen.

§. 1382. I. Gevolg. *Fig.* 441. Wanneer de lijn CD zoodanig is aangenomen, dat zij de zijde AB in twee gelijke deelen verdeelt; dan zal, omdat $AD:BD = AQ:BQ$ is, ook $AQ = BQ$ zijn, welke gelijkheid onbestaanbaar is, indien Q niet op eenen oneindigen afstand van A gelegen, en $AQ = BQ$ zijnde, FEQ evenwijdig aan AB loopt. Uit deze eigenschap volgt eene bijzondere constructie voor de evenwijdige lijnen. Zie *IV. Werkstuk*, §. 1399, *Bladz.* 506.

§. 1383. II. Gevolg. *Fig.* 441. Trekt men de lijn CQ; dan zal (*VII. Stell.*) $Sin.QCB \times Sin.ACD = Sin.QCA \times Sin.BCD$ zijn; *de lijn QF is dan ook, in de punten E en G, harmonisch gesneden*, en, wanneer men BE tot aan H verlengd; *dan is*, om dezelfde reden, *de lijn BH, in de punten E en P, harmonisch gesneden.* Hetzelfde is ook, in *fig.* 442, waarheid.

§. 1384. III. Gevolg. Wanneer men, *fig.* 441, door de punten P en Q de lijn $QKPI$ trekt; dan bevindt zich de driehoek BFQ, ten opzigte van de transversaal AC, in dezelfde betrekkelijke ligging, als de driehoek ABC, ten opzigte van de transversaal QF; *volgens het bewezene, zijn dan de zijden BC en AC, in de punten I en F, K en E, harmonisch gesneden, gelijk ook de lijn CD, in de punten P en G.*

I. Lemma *Fig.* 441.

§. 1385. *Wanneer, in eene lijn BC, een punt F genomen is; dan bestaat 'er slechts één elkeld punt I, hetwelk, met het punt F, die lijn harmonisch snijdt.*

Betoog. Want, indien deze snijding nog in een ander punt I' konde plaats hebben, zou (*Gev. V. Bep.*) $BI:IF = BC:CF$ en $BI':I'F = BC:CF$ moeten zijn, en daarom (*I. Stell. II. B.*) $BI:$
IF

$IF = BI' : I'F$, waaruit (*VIII. Stell. II. B.*) volgen zou: $BI + IF : BI' + I'F = BI : BI'$; dat is $BF : BF = BI : BI'$; dat ongerijmd is.

IX. STELLING. *Fig.* 441.

§. 1386. *Wanneer twee zijden AC en BC van eenen driehoek ABC, door eene transversaal QEF, die het verlengde van de zijde AB in Q ontmoet, gesneden is; dan zullen de punten K en I, welke, met de punten E en F, deze zijden harmonisch snijden, met het punt Q, in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

BEWIJS. Want, indien men, van het punt Q, door het punt P, alwaar de hoekpuntslijnen van den vierhoek $ABFE$ elkander snijden, eene transversaal QP trekt; dan zal deze transversaal, met de transversaal QF, de zijden AC en BC (*III. Gev. VIII. Stell.*) in de punten K en E, en I en F, harmonisch snijden: deze snijding kan nu (*voorgaand Lemma*) slechts op eene wijze geschieden; de lijn, welke door de punten I en K loopt, zal dan ook door het punt Q loopen, en de punten I, K en Q liggen diensvolgens in dezelfde regte lijn.

X. STELLING. *Fig.* 443.

§. 1387. *Wanneer, uit een punt P, buiten eene regte lijn AE gelegen, verscheidene lijnen AP, BP, CP, DP, EP, enz. tot die regte lijn AE, zoo als het valt, getrokken worden, en voorts, door dit stelsel van lijnen, eene transversaal FGHIKL, welke die eerstgenoemde lijn AB, of derzelver verlengde, in een punt F ontmoet; dan zullen de punten M, N, O, Q, enz., in welke de hoekpuntslijnen der vierhoeken ABHG, BCIH, CDKI, DELK, enz., elkander snijden, in dezelfde regte lijn liggen, welker verlengde door het ontmoetingspunt F zal gaan.*

BETOOG. Want de lijn AP is, (*III. Gev. VIII. Stell.*) in de punten S en G, harmonisch gesneden; derhalve zullen ook (*I. Gev. VII. St.*) al de lijnen PB, PC, PD, PE, *enz.* als binnen denzelfden hoek PFE liggende, harmonisch gesneden zijn; en de punten S, T, U, V en W, liggen, (*IX. Stell.*) met het punt F, in dezelfde regte lijn FW; maar het punt M ligt (*VII. Stell.*) in de lijn ST; N in de lijn

TU; *O* in de lijn *UV*; *Q* in de lijn *VW*; *enz.*; deze punten liggen dan in de deelen van dezelfde lijn *FW*; dat is, in de lijn, welke door het punt *F* loopt.

XI. Stelling. *Fig.* 443.

§. 1388. *Wanneer de lijn EF een vlak verbeeldt, en, uit een punt P, buiten dit vlak genomen, verscheidene regte lijnen AP, BP, CP, enz. tot aan dit vlak getrokken worden, en voorts dit stelsel van lijnen door een ander vlak, bij de lijn FL afgebeeld, wordt doorgesneden, welk vlak het eerste volgens eene regte lijn FV snijdt; dan wordt door elk tweetal dezer lijnen AP, BP, CP, enz. een vierhoek ABHG gemaakt, en nu zullen de punten M, N, O, P, enz., alwaar de hoekpuntslijnen dezer vierhoeken elkander snijden, in een derde vlak gelegen zijn, hetwelk, met de twee voorgaande vlakken, dezelfde doorsnijdingslijn FV heeft.*

Betoog. Stel dat het vlak, waarin de lijnen *AP* en *BP* liggen, de gemeene doorsnijding der vlakken *FE* en *FL* in het punt *F* snijdt; dan zal de lijn, welke door het punt *M* gaat, in het vlak *ABP* liggen, en de lijnen *AP* en *BP* (*III. Gev. VIII. Stell.*) harmonisch snijden. Op dezelfde wijze, zal, (wanneer een vlak, dat door de lijnen *BP* en *CP* gaat, en de doorsnijding der vlakken *FE* en *FL* in *W* snijdt.) de lijn, welke door de punten *W* en *N* gaat, de lijnen *BP* en *CP* harmonisch snijden: omdat 'er nu (*Lemma*) maar een punt *T* bestaat, waardoor *BP* harmonisch, in *T* en *H*, kan gesneden worden, zal de lijn, welke door *F* en *M* gaat, de lijn, door *W* en *N* loopende, in het punt *T* snijden, en met *FV* in hetzelfde vlak gelegen zijn. Hetzelfde zal ook plaats hebben voor de lijnen, welke door *W* en *N* en door *X* en *O* loopen, en elkander in *U* doorsnijden; waaruit volgt: dat de punten *S*, *T*, *U*, *V*, *W*, *enz.* in het vlak liggen, hetwelk door de snijding *FV* gaat: maar in dit vlak liggen ook de punten *M*, *N*, *O*, *Q*, *enz.* derhalve, enz.

§. 1389. Aanmerking. Het betoogde leert eene fraaije eigenschap der drie en veelhoekige piramiden kennen.

XII. Stelling. *Fig.* 444.

§. 1390. *Wanneer men, op de opstaande ribben, AD, BD en* *en CP, eener driehoekige piramide ABCD, (zijnde ABC de basis,) drie naar welgevallen genomene punten, E, F en G, aanneemt, en, van de hoekpunten van de basis, tot deze punten, de lijnen BE, CE; AF, CF; AG, BG; trekt, welke elkander, op de zijvlakken, in de punten H, K en M, snijden; en voorts, uit het toppunt, door deze punten, de lijnen DI, DL en DN, tot aan de basis trekt; dan zullen de lijnen, welke de hoekpunten van de basis, met de uiteinden I, L en N, dezer laatste lijnen, vereënigen, elkander in hetzelfde punt O doorsnijden; en, wanneer men nu van hoekpunten der piramide A, B, C en D, tot de punten K, M, H en O, alwaar de transversalen der tegenoverstaande zijvlakken elkander snijden, de lijnen AK, BM, CH en DO trekt; dan zullen deze lijnen elkander, binnen het ligchaam der piramide, in hetzelfde punt P, doorsnijden.*

Betoog *van het eerste.* Volgens de *V. Stelling*, heeft men, in de driehoeken ABD, BCD en ACD, de vergelijkingen:

$$AI \times BF \times DE = AE \times DF \times BI$$
$$DF \times CG \times BL = BF \times DG \times CL$$
$$AE \times DG \times CN = DE \times CG \times AN$$

wanneer men deze drie vergelijkingen met elkander vermenigvuldigt, en de producten door de gelijke factoren deelt; dan verkrijgt men:

$$AI \times BL \times CN = BI \times CL \times AN$$

en deze vergelijking kan niet bestaan, ten zij (*VI. Stell.*) de lijnen AL, BN en CI, elkander in hetzelfde punt O snijden.

Betoog *van het tweede.* Het vlak AGB snijdt het vlak ACF volgens de lijn AK; het vlak AGB snijdt het vlak BCE, volgens de lijn BM, en het vlak ACF snijdt het vlak BCE, volgens de lijn CH; geene dezer drie vlakken zijn evenwijdig; gevolgelijk moeten hunne snijdingen AK, BM en CH, hetzelfde punt P gemeen hebben. Men moet nu slechts nog bewijzen, dat de lijn DO door het punt P gaat. ABG snijdt ADL volgens AK; ABG snijdt BDN volgens BM; en ADL snijdt BDN volgens DO; de lijnen AK, BM en DO, snijden elkander derhalve in hetzelfde punt; maar de lijnen AK en BM snijden elkander in P; de lijn DO gaat dan ook door datzelfde punt P.

§. 1391. I. Gevolg. *Fig.* 444. Men trekke de lijnen NF, LE en IG; dan snijden deze elkander in hetzelfde punt P, alwaar de lijnen

DO,

DO, AK, BM en CH, elkander ſnijden. Want de vlakken BDN en ADL, ſnijden elkander volgens de lijn DO, de vlakken BDN en AFC volgens de lijn NF, en de vlakken ADL en AFC volgens de lijn AK; de lijnen DO, NF en AK, moeten elkander dienvolgens, in hetzelfde punt P, ſnijden; maar nu ſnijden de lijnen AK en DO elkander in het punt P; de lijn NF zal dan ook door dit punt P loopen. Om dezelfde reden gaan de lijnen LE en IG door hetzelfde punt P.

§. 1392. II. Gevolg. *Fig.* 444. Men heeft dan ook volgens de V Stelling de vergelijkingen:

$$DF \times BO \times NM = BF \times NO \times MD$$
$$DG \times CO \times IH = CG \times IO \times HD$$
$$DE \times AO \times LK = AE \times LO \times KD.$$

§. 1393. III. Gevolg. *Fig.* 444. Wanneer men een punt P binnen de piramide aanneemt, en, uit de hoekpunten, door dit punt, tot aan de overſtaande zijvlakken, de lijnen AK, BM, CH en DO trekt, dan is het zigtbaar dat vermits AK en BM, AK en CH, BM en CH, AK en DO, BM en DO, CH en DO, twee aan twee, in hetzelfde vlak liggen, de lijnen, welke van de hoekpunten der piramide door de punten K, M, H en O, getrokken worden elkander, op de zes ribben der piramide, in dezelfde punten E, F, G, I, L en N, moeten ſnijden, en dat alzoo K en M met A en B; K en H met A en C; *enz.* in een zelfde vlak liggen, en dat al de vergelijkingen van de V Stelling en het voorgaande gevolg op de figuur toepasſelijk zijn.

Toepasſing der voorgaande Beſchouwingen.

§. 1394. Men kan de voorgaande beſchouwingen verder uitbreiden; bij eenen vlakken veelhoek eenen cirkel, en bij een ſcheven veelhoek eenen bol, als transverſaal, aannemen: men zal dan, bij deze ſnijdingen, eigenſchappen vinden, welke met de voorgaande volkomen inſtemmen. De bolvormige drie- en veelhoeken bezitten ook, ten opzigte van eenigen grooten cirkel van den bol, welke als derzelver transverſaal aangenomen wordt, ſoortgelijke eigenſchappen. Aldus zal, in *fig.* 431, 432, 433, (de driehoek ABC als bolvormig aannemende, en DF als eenen grooten cirkel van den bol)

$$Sin.AD \times Sin.BF \times Sin.CE = Sin.AE \times Sin.CF \times Sin.BD$$

zijn; en, in *fig.* 437 en 438,

$$Sin.AF \times Sin.BD \times Sin.CE = Sin.AE \times Sin.CD \times Sin.BF$$

het-

hetwelk, uit de *XV. Stell. XIII. B.* met weinig moeite, wordt afgeleid. Dan wij gaan de verdere uitbreiding dezer eigenschappen voorbij, om, in het kort, eenige werkdadige toepasfingen van dezelve aantewijzen.

§. 1395. Onder anderen, kunnen de betoogde eigenfchappen der transverfalen en der harmonifche fnijdingen, welke uit dezelve volgen, zeer gelukkig worden toegepast, om onderfcheidene Werkftukken op het veld, door middel van baken, en het enkel meten van toegankelijke lengten, optelosfen, zonder eenig der gewone werktuigen daarbij te gebruiken.

§. 1396. I. WERKSTUK. *Fig.* 445. *Tusfchen twee verafgelegen punten, A en B, eenig punt C te vinden, dat met dezelve in eene regte lijn gelegen is?*

CONSTRUCTIE. Men ftelle ergens, buiten de lijn AB, eene baak in D. Op de rigtingen BD en AD, twee baken E en F, naar welgevallen; voorts eene baak in G, alwaar de lijnen EA en BF elkander fnijden; eindelijk nog eene baak in H, in de fnijding der lijnen EF en DG. Nu mete men, met eene maatftok, of op den pas, de lengte der lijnen $DH = a$ en $HG = b$, en neme $GC = b \times \frac{a+b}{a-b}$, en men ga, in de rigting DG, van G, zoo vele pasfen achter uit, als 'er éénheden in $a \times (a+b) \times (a-b)$ begrepen zijn, en dan zal men in het punt C, dat in de lijn AB gelegen is, gekomen zijn. — Want de lijn DC is (*III. Gev. VIII. Stell.*) in de punten H en G harmonisch gefneden, en CG is (*Aanmerk. V. Bep.*) gelijk aan $b \times (a+b) : (a-b)$. Laat, om een voorbeeld te geven, $a = 280$ pasfen, $b = 120$ pasfen zijn; dan zal $CG = 300$ pasfen moeten genomen worden. De proef, dat men in het ware punt C gekomen zij, zal daarin beftaan: dat men, na, in de rigting van BC, eene baak I gefteld te hebben, bevindt, dat deze baak in de lijn AC gelegen is.

§. 1397. II. WERKSTUK. *Fig.* 446. *Onderfteld zijnde, dat 'er twee toegankelijke punten, A en B, gegeven zijn, zoodanig echter, dat eenig voorwerp P, dat tusfchen deze punten ligt, verhindert, dat men zich, in de regte lijn, welke door deze twee punten gaat, kunne plaatfen; dan begeert men een punt F te vinden, dat in het verlengde van de lijn, welke door deze punten gaat, gelegen zij?*

CONSTRUCTIE. Men plaatfe, op eenige regte lijn AE, twee baken D en E; en, naar welgevallen, in het verlengde van BD, eene baak C, en men verbeelde zich, in F, het punt, alwaar het verlengde van de lijn AB de lijn CE doorfnijdt; dan zal dit punt F, door berekening, aldus kunnen gevonden worden. Men ftelle $AD = a$; $DE = b$; $CE = c$; $CB = d$; $BD = e$; $EF = x$; dan is $CF = c - x$: nu is (*I. Stell.*) $AD \times EF \times CB = DB \times CF \times EA$ of $adx = (a+b) \times (c-x) \times e$. Hieruit vindt men:

$x =$

$$x = \frac{(a+b)ec}{ad+(a+b)e}$$

Men neme dan, op de lijn CE, van E tot F, zoo vele deelen, als de berekening van de waarde van $x = EF$ geeft; dan zal men in het punt F komen, hetwelk in het verlengde van AB zal gelegen zijn.

§. 1398. III. Werkstuk. *Fig.* 447. *In het verlengde van de lijn* AB, *welke twee ontoegankelijke punten* A *en* B, *tusfchen welke een heuvel ligt, verëënigen, eenig punt* P *te vinden?*

Constructie. Men ftelle eene baak in een punt F, uit hetwelke beide de gegevene punten A en B kunnen gezien worden; men ga achter uit, en plaatfe, in de rigting van AF, eene baak E; en, in de rigting van BF, eene baak D; voorts ga men achter uit in C, en ftelle eene baak in het punt, alwaar de lijnen AD en BE zamenkomen, en men zoeke het punt G, alwaar de lijnen CF en DE elkander fnijden; men mete dan DG en GE, en ga, in de rigting van DE, zoo verre achter uit, tot dat men in P gekomen, en $EP = x = b \times (a+b) : (a-b)$ zij; dan zal (zie *III. Gev. VIII. Stell. en Aanm. V. Bep.*) het punt P in het verlengde van AB gelegen zijn. Men kan op deze wijze verfcheidene punten P vinden, welke, indien zij in dezelfde regte lijn liggen, tot eene proef van de naauwkeurigheid der conftructie verftrekken.

§. 1399. IV. Werkstuk. *Fig.* 448. *Door een gegeven punt* P, *eene lijn te brengen, evenwijdig aan eene gegevene lijn* AB *loopende?*

Constructie. Men neme, op de lijn AB, het punt C zoodanig, dat $BC = AB$ zij. Men ga, in de rigting van AP, achter uit tot ergens in D, en ftelle aldaar eene baak; voorts ftelle men in E, alwaar de lijnen BD en PC elkander fnijden, eene andere baak, en men ga eindelijk in de rigting van AE achterwaards, tot dat men in de lijn CD kome; dan zullen de punten P en F (zie *I. Gev. VIII. Stell.*) in eene lijn liggen, welke evenwijdig aan AB is.

§. 1400. V. Werkstuk. *Fig.* 449. *Door een punt* C, *eene lijn te trekken, welke evenwijdig loopt aan eene lijn* AB, *welke door twee ontoegankelijke voorwerpen* A *en* B *loopt?*

Constructie. Stel, in het gegeven punt C, eene baak; op de lijnen AC en BC twee baken D en E, welker rigting zigtbaar genoeg niet evenwijdig aan AB loopt. Stel eindelijk, in de fnijding der lijnen AE en BD, en in die der lijnen CF en DE, de baken F en G. Nu komt het 'er op aan, om, in het verlengde van DE, een punt H te vinden, hetwelk met het gegevene punt C in eene met AB evenwijdig loopende lijn gelegen zij? Men verlenge, in de gedachte, de lijnen DE en CF tot aan AB, en trekke CH evenwijdig aan AB. Men mete de lijnen $CG = a$, $FG = b$, $EG = c$ en $DG = d$, ftel $DI = x$, $FK = y$ en $HE = z$. Omdat dan (*V. Stell. en Gev.*) de lijnen CK en EI harmonisch gefneden zijn, is $EI \times DG = DI \times GE$ of $(c+d+x)d = cx$ en $CK \times GF = CG \times FK$, of $(a+b+y)b = ay$. Hieruit volgt dan

$x =$

$$x = d \times \frac{c+d}{c-d}, \text{ en } x+d = IG = \frac{2cd}{c-d}$$

$$y = b \times \frac{a+b}{a-b}, \text{ en } y+b = GK = \frac{2ab}{a-b}$$

Omdat nu CH evenwijdig aan AB moet zijn, zijn de driehoeken KGI en CGH gelijkvormig, en wij hebben derhalve de evenredigheid, $GK : GI = CG : GH$; dat is $\frac{2ab}{a-b} : \frac{2cd}{c-d} = a : GH$, en hieruit volgt:

$$GH = \frac{a-b}{c-d} \times \frac{cd}{b}, \text{ en } z = GH - c = HE = \frac{c}{b} \times \frac{ad-bc}{c-d}$$

Men zal dan, door de berekening dezer formule, uit het getal éénheden of pasſen, welke in a, b, c en d, begrepen zijn, vinden: hoe vele éénheden of pasſen men uit, E in de rigting van DE, moet teruggaan, om in het punt H te komen, en de rigting CH evenwijdig aan AB te vinden.

§. 1401. VI. Werkstuk. *Fig.* 450. *Te vinden, hoe verre men in een punt A, van een ontoegankelijk voorwerp B afſtaat?*

Constructie. Stel, in het gegeven punt A, eene baak, en, een goed eind wegs achter uit gaande, eene baak D; voorts in eenig punt C eene baak C: men verkrijgt dan eenen driehoek ADC, op welks zijden AC en DC twee baken, E en F, met het gegeven voorwerp in dezelfde regte lijn liggende, genomen worden: eindelijk ſtelle men, in de ſnijding van AF en DE, de baak G, en, in de ſnijding CH en AD, de baak H. Men mete nu, met een ketting, of op den pas, de lijnen $DH = a$ en $AH = b$; dan is, als boven, de begeerde afſtand gelijk $b \times (a+b) : (a-b)$.

§. 1402. VII. Werkstuk. *Fig.* 451. *Den afſtand van twee afgelegene en ontoegankelijke voorwerpen A en B te vinden?*

Constructie. Men bepale, door het voorgaande werkſtuk, hoe verre men in een punt C van de voorwerpen A en B affta: dit gevonden hebbende, neme men in de rigting van BC den afſtand $bC = BC$, en, in de rigting van AC, den afſtand $aC = AC$; dan is $ab = AB$; of men neme, bij voorbeeld, $b'C = \frac{1}{2}BC$; $a'C = \frac{1}{2}AC$, dan zal $a'b' = \frac{1}{2}AB$ zijn, al hetwelk, uit de gelijkvormige driehoeken ABC en abC of $a'b'C$, zigtbaar is.

§. 1403. Aanmerking. Deze werkſtukken, welke wij nog met een groot aantal anderen zouden hebben kunnen vermeerderen, doen zien: welk eene voordeelige partij men van de transverſalen en de harmoniſche ſnijding dezer lijnen, in het werkdadige, trekken kan. Onze Landgenoot van Schooten, heeft, in zijne *Exercit. Mathem. Liber II. de Conſtructione Problematum Simplicium quæ ſolvi posſunt, ducendo tantum rectas lineas*, den eerſten grondſlag tot deze ſoort van handelwijzen gelegd: doch, wanneer men ſlechts zijne figuren met de onze vergelijkt, zal men zien, hoeveel eenvoudiger het werk door de transververſalen en de harmoniſche ſnijding, dan bij hem, geworden is. Intusſchen zijn de gelegde gronden niet ſlechts van nut in de bewerkingen op het veld; maar ook in de meetkundige conſtructien op het papier. Het volgend werkſtuk zal hiervan een voorbeeld geven.

§. 1404. VIII. Werkstuk. *Fig.* 452. *Wanneer twee lijnen AB en CD, gegeven zijn, met een punt P tusſchen dezelve; dan begeert men, alleen, door het trekken van lijnen, door dit punt P, eene lijn PH te trekken, welker verlengde door het ontmoetingspunt dezer twee gegevene lijnen AB en CD gaat?*

Constructie. Men trekke eene onbepaalde lijn EGF, naar welgevallen; door de punten G en P, de lijn GB; door de punten F en P, de lijn DF; en door de punten B en D, de lijn BDE. Voorts trekke men, door het punt E, eene lijn EA; en eindelijk de hoekpuntslijnen AG en CF van den vierhoek $AFGC$; dan zal (*XI. Stell.*) de lijn, welke door de punten P en H gaat, de gegevene lijnen AB en CD, in derzelver ontmoetingspunt, doorſnijden.

Meetkundige Stellingen, welke, met behulp van de Leer der Transverſalen, kunnen betoogd worden.

XIII. Stelling. *Fig.* 453.

§. 1405. *Wanneer drie cirkels van onderſcheiden grootte, (welker middelpunten A, B en C zijn,) in een vlak gegeven zijn; dan zullen de raaklijnen, welke die cirkels, twee aan twee genomen, uitwendig aanraken, elkander, in het verlengde der lijn, welke de middelpunten vereënigt, in drie onderſcheidene punten D, E en F, doorſnijden: deze ſnijpunten zullen nu op dezelfde regte lijn DEF liggen.*

Betoog. Wij zullen, in dit betoog, kortheidshalve, de ſtralen der cirkels, door de letters, die aan de middelpunten ſtaan, uitdrukken. Men verbeelde zich nu eene raaklijn MNE, welke de cirkels A en B, in de punten M en N, raakt; dan zijn de ſtralen AM en CN regthoekig op de raaklijn, en wij hebben (door de gelijkvormige driehoeken AME en CNE) $A:B = AE:CE$, eene ſoortgelijke evenredigheid heeft voor de cirkels A en B, en B en C plaats; zoodat

$$A:C = AE:CE$$
$$C:B = CD:BD$$
$$B:A = BF:AF \text{ is;}$$

indien men nu de overëenkomſtige termen van deze evenredigheid ver-

vermenigvuldigt, verkrijgt men $AE \times CD \times BF = CE \times BD \times AF$. Volgens de *II. Stelling*, liggen dan de punten D, E en F, in dezelfde regte lijn.

§. 1406. I. Aanmerking. *Fig.* 453. Men kan ook nog twee andere inwendige raaklijnen aan de gegevene cirkels, twee aan twee genomen, trekken, welke elkander, op de lijn, die de middelpunten verèénigt, tusschen deze cirkels, in G, H en I, snijden, en dan zal wederom $A : B = AG : GB$; $B : C = BH : CH$; en $C : A = CI : AI$ zijn; het product dezer evenredigheden geeft $AG \times BH \times CI = BG \times CH \times AI$, en daarom snijden (*VI. Stell.*) de lijnen AH, BI en CG, elkander, in hetzelfde punt P.

§. 1407. II. Aanmerking. *Fig.* 453. Volgens het betoogde, is $A : C = AE : CE = AI : CI$, en daarom $AI \times CF = CI \times AE$; zoodat de lijnen, welke de middelpunten der drie cirkels verèénigen, door de raaklijnen, harmonisch gesneden worden.

§. 1408. III. Aanmerking. *Wanneer drie kleine cirkels, op het oppervlak van eenen bol, beschreven zijn; dan zullen de groote cirkels, die deze cirkels, twee aan twee genomen, aanraken, in den omtrek van eenen anderen grooten cirkel gelegen zijn.* Men zal deze waarheid, op gelijke wijze, als boven, betoogen.

§. 1409. IV. Aanmerking. Men kan het betoogde ook uitstrekken tot vier bollen, welker middelpunten, drie aan drie genomen, in onderscheidene vlakken gelegen zijn, (hetwelk wij, om de plaats der figuren uittesparen, niet afzonderlijk zullen betoogen,) en dan zal men vinden: 1° *Dat de toppunten der cirkelvormige kegels, welke, wanneer vier bollen van onderscheidene middellijnen gegeven zijn, twee derzelver, op eenige wijze gekozen, insluiten, en welke dus zes in aantal zijn, in hetzelfde platte vlak gelegen zijn.* 2° *Dat, wanneer men de middelpunten der bollen, op alle mogelijke wijzen, met de toppunten der cirkelvormige kegels, welke de bollen naar binnen aanraken, verèénigt, de vier lijnen, welke daardoor ontstaan, elkander in hetzelfde punt zullen snijden.* 3° *En, dat, eindelijk, de lijnen, die de middelpunten der bollen, twee aan twee, verèénigen, door de toppunten der gezegde kegels, harmonisch gesneden zullen zijn.* — Andere aanmerkingen (want wij kunnen de voornaamste zaken slechts aanstippen,) gaan wij met stilzwijgen voorbij.

XIV. Stelling. *Fig.* 454.

§. 1410. *De lijnen AE, BD en CF, welke de supplementen der hoeken, A, B en C, eens driehoeks midden door deelen, snijden de verlengden der zijden, BC, AC en AB, welke tegen over die hoeken staan, in drie onderscheidene punten, E, D en F, welke in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

Betoog. Men heeft (*IV. Stell. IV. B.*) de volgende evenredigheden:

$$BC:AC = BF:AF$$
$$AC:AB = CE:BE$$
$$AB:BC = AD:CD$$

het product dezer evenredigheden geeft de vergelijking $BF \times CE \times AD = AF \times BE \times CD$; en daarom zullen (*II. Stell.*) de punten D, E en F, in dezelfde regte lijn liggen.

XV. Stelling. *Fig.* 455.

§. 1411. *Wanneer, in eenen cirkel, een driehoek ABC beschreven is; dan zullen de raaklijnen, AD, BE en CF, welke, aan de hoekpunten A, B en C, dezes driehoeks, tot dien cirkel getrokken worden, de zijden AB, AC en AB, welke tegen over die hoeken staan, in dezelfde regte lijn, snijden: dat is, deze snijpunten zullen in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

Betoog. Men beschouwe de driehoeken BCF en ACF: in dezelve is (*III. Stell. IX. B.*)

$$BC:BF = \text{Sin.}\,BFC:\text{Sin.}\,BCF$$
$$AF:AC = \text{Sin.}\,ACF:\text{Sin.}\,BFC$$

het product van de overeënkomstige termen dezer evenredigheden geeft de evenredigheid:

$$BC \times AF:BF \times AC = \text{Sin.}\,ACF:\text{Sin.}\,BCF$$

maar nu wordt (*XIX. Stell. V. B.*) de hoek BCF door de helft van den boog CAB gemeten, en is bijgevolg het supplement van den hoek BAC, welke (*I. Gev. XX. Stell. V. B.*) door de helft van den boog BC gemeten wordt; gevolgelijk is $\text{Sin.}\,BCF = \text{Sin.}\,BAC$, om dezelfde reden, is hoek $ACF =$ hoek ABC; de voorgaande evenredigheid wordt derhalve,

$$BC \times AF : BF \times AC = Sin. ABC : Sin. BAC.$$

De beschouwing van de driehoeken DCA en DBA, en van de driehoeken EBC en EAB, geven soortgelijke evenredigheden: men heeft dan, in alles, deze drie evenredigheden:

$$BC \times AF : AC \times BF = Sin. ABC : Sin. BAC$$
$$AC \times BD : AB \times CD = Sin. ACB : Sin. ABC$$
$$AB \times CE : BC \times AE = Sin. BAC : Sin. ACB$$

Het product van de overëënkomstige termen dezer evenredigheden geeft eindelijk:

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$$

en daarom moeten (*II. Stell.*) de punten D, E en F, in dezelfde regte lijn liggen.

II. Lemma. *Fig.* 456.

§. 1412. *Wanneer men, uit het punt C, alwaar de raaklijnen van twee punten, A en B, van den omtrek eens cirkels elkander ontmoeten, eene snijlijn CDEF trekt; dan zal deze, door den omtrek des cirkels en de koorde AB, welke deze raakpunten verëënigt, harmonisch gesneden worden. En, wanneer men, op twee snijlijnen, CF en CI, welke, uit hetzelfde punt C, buiten den omtrek, getrokken zijn, binnen den omtrek twee punten E en H neemt, zoodanig, dat deze snijlijnen harmonisch gesneden zijn; dan zullen de raaklijnen, welke, uit datzelfde punt C, aan den cirkel getrokken worden, de lijn, welke door de punten E en H getrokken wordt, in de raakpunten A en B, snijden.*

Betoog *van het eerste.* Omdat (*Leer. XIII. Stell. V. B.*) ABC een gelijkbeenige driehoek is, is (*Bijv. XII. Stell. IV. B.*) $AC^2 = CE^2 + AE \times BE$: maar (*Aanm. XXII. Stell. V. B.*) $AC^2 = CD \times CF$ en (*XXI. Stell. V. B.*) $AE \times EB = DE \times EF$ zijnde, is $CD \times CF = CE^2 + DE \times EF$. Nu is (*VII en VIII. Gev. VIII. Stell. en I. Lemma II. B.*) $CD \times CF = CD^2 + CD \times DE + CD \times EF$ en $CE^2 + DE \times EF = CD^2 + 2CD \times DE + DE^2 + DE \times EF$; derhalve $CD \times EF = CD \times DE + DE^2 + DE \times EF = DE \times (CD + DE + EF) = DE \times CF$.

Betoog *van het tweede.* Wanneer de raaklijnen, uit het punt C getrokken zijnde, den omtrek niet, in de punten A en B, raken; dan zal die aanraking, in twee andere punten a en b, plaats hebben, en de koorde ab zal dan de snijlijnen CF en CH in twee andere punten e en h harmonisch snijden: maar daar (*onderst.*) deze harmonische snijding in de punten E en H plaats heeft, en dezelve (*I. Lemma*) slechts op éénе wijze kan plaats hebben, kunnen a en b de raakpunten niet zijn: deze raakpunten zijn derhalve de punten, alwaar de lijn, welke door de punten E en H gaat, den omtrek snijdt.

XVI. Stelling. *Fig.* 457.

§. 1413. *Wanneer een onregelmatige vierhoek ABCD (geene twee evenwijdige zijden hebbende,) in eenen cirkel beschreven is, en aan de hoekpunten, A, B, C en D, van dien vierhoek, raaklijnen HE, EF, FG en GH, aan dien cirkel getrokken worden, welker onderlinge snijding den vierhoek EFGH, om den cirkel beschreven, voortbrengt; dan zal deze figuur de volgende eigenschappen hebben:*

1° *Zullen de punten K, L, M en N, in welke de verlengden van de overstaande zijden der in en omgeschrevene vierhoeken, ABCD en EFGH, elkander snijden, in dezelfde regte lijn NK gelegen zijn.*

2° *De hoekpuntslijnen AC en BD, EG en FH, zoowel van den in als van den omgeschrevenen vierhoek, zullen elkander, in hetzelfde punt C, ontmoeten.*

3° *De lijn NK, in welke de gezegde punten, K, L, M en N, gelegen zijn, wordt door dezelve harmonisch gesneden.*

Betoog *van het eerste.* Men trekke, van het punt N, door het punt D, de lijn NDP tot aan P, en van C door P de lijn CPR, en eindelijk de koorden AR en BR; dan ontstaat in de figuur de kleine driehoek ADP, op welken men, in dit betoog, bijzonder den aandacht vestigen moet. Volgens de *III. Stell. IX. B.*, heeft men de evenredigheden:

$CK:DK = Sin.\,CDK : Sin.\,DCK$	*volgende uit de driehoeken*	DCK
$AK:CK = Sin.\,ACK : Sin.\,CAK$		CAK
$CN:PN = Sin.\,CPN : Sin.\,PCN$		CPN
$DN:CN = Sin.\,NCD : Sin.\,CDN$		CDN
$LD:AL = Sin.\,LAD : Sin.\,LDA$		LDA
$LP:LD = Sin.\,LDP ; Sin.\,LPD$		LDP

Nu is (§. 535.) $Sin.\,CDK = Sin.\,LDA$. Voorts (*IV. Stell. I. B.*) $Sin.\,LDP = Sin.\,CDN$, en (*VI. Gev. XX. Stell. V. B.*) $Sin.\,LAD = Sin.\,DCK$; wanneer men derhalve deze zes evenredigheden met elkander vermenigvuldigt, en de termen van dezelfde reden door hunne gelijke factoren deelt: dan verkrijgt men de evenredigheid:

$$AK \times DN \times LP : DK \times PN \times AL = Sin.\,ACK \times Sin.\,CPN \times Sin.\,NCD : Sin.\,CAK \times Sin.\,PCN \times Sin.\,LPD \quad . \; . \; . \quad (\alpha)$$

Nu kan men bewijzen: dat de termen van de laatste reden dezer zamengestelde evenredigheid gelijk zijn; want

1° Indien men de middellijn van den cirkel, in welken de vierhoek beschreven is, als éénheid aanneemt; dan is (*I. Gev. XX. Stell. V. B. en* §. 534.) $Sin.\,ACK = Sin.\,ACB = AB$ en $Sin.\,CAK = Sin.\,DAC = DC$; derhalve

$$Sin.\,ACK : Sin.\,CAK = AB : DC \quad . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

2° De driehoeken APN en CPN geven de evenredigheden:

$$Sin.\,APN : Sin.\,NAP = AN : PN$$

$$Sin.\,CPN : Sin.\,NCP = CN : PN$$

maar nu is (*Leer. XIII. Stell. V. B.*) $AN = CN$; derhalve

$$Sin.\,APN : Sin.\,CPN = Sin.\,NAP : Sin.\,NCP;$$

of, omdat hoek NAP = hoek ARB, en hoek NCP = hoek CBR is,

$$Sin.\,APN : Sin.\,CPN = Sin.\,ARB : Sin.\,CBR$$

maar nu is $Sin.\,ARB : Sin.\,CBR = AB : CR$: men heeft dan eindelijk:

$$Sin.\,CPN : Sin.\,LPD = CR : AB \quad . \; . \; . \; . \quad (\gamma)$$

3° De hoek NCD = hoek CBD, en hoek PCN = hoek CBR zijnde, zoo heeft men ook:

$$Sin.\,NCD : Sin.\,PCN = DC : CR \quad . \; . \; . \; . \quad (\delta)$$

Vermenigvuldigt men nu de evenredigheden (β), (γ) en (δ) met elkander; dan verkrijgt men:

$$Sin.\,ACK \times Sin.\,CPN \times Sin.\,NCD = Sin.\,CAK \times Sin.\,PCN \times Sin.\,LPD$$

de termen van de laatste reden der evenredigheid (α) zijn derhalve gelijk; maar dan is ook:

$$AK \times DL \times LP = DK \times PN \times AL$$

doch deze gelijkheid brengt (*II. Stell.*) mede, dat de punten N, L en K, in dezelfde regte lijn liggen.

Wanneer men, van het punt M, door het punt A, de lijn MAQ trekt; dan zal men, door middel van den driehoek ADQ, bewijzen: dat de punten L, M en K, in dezelfde regte lijn gelegen zijn. Het

 punt

punt M ligt derhalve in de lijn LK, het punt N in derzelver verlengde; de punten N, L, M en K, liggen derhalve in dezelfde regte lijn NK.

Betoog *van het tweede.* Wanneer de hoekpuntslijnen BD en AC van den ingeschreven veelhoek getrokken zijn, die elkander in O snijden; dan trekke men, van L, door het hoekpunt F van den omgeschrevenen vierhoek, eene lijn LF, en van het punt L door het hoekpunt H de lijn LHV; indien men nu bewijzen kan: dat beide deze lijnen, afzonderlijk genomen, door het punt O loopen; dan zal men daaruit besluiten kunnen: dat de lijnen LF en LH, als beide door O loopende, dezelfde zijn, en dat de lijn, welke de hoekpunten H en F vereënigt, noodzakelijk door het punt O moet loopen.

1° Ten opzigte van de lijn LF, heeft men: (*III. Stell. IX. B.*)

$$BL : LF = Sin.\,BFL : Sin.\,FBL, \text{ uit drieh. } BLF$$
$$LF : CL = Sin.\,LCF : Sin.\,CFL \;\ldots\ldots\; CLF$$
$$CL : BL = Sin.\,ABC : Sin.\,BCD \;\ldots\ldots\; BCL$$

Het product dezer evenredigheden geeft (*XVI. Stell. II. B.*) de vergelijking:

$$Sin.\,BFL \times Sin.\,LCF \times Sin.\,ABC = Sin.\,FBL \times Sin.\,CFL \times Sin.\,BCD$$

uit welke vergelijking de evenredigheid,

$$Sin.\,BFL : Sin.\,CFL = Sin.\,BCD \times Sin.\,ACB : Sin.\,ABC \times Sin.\,CBD \;\ldots\ldots\ldots\; (\alpha)$$

volgen zal, indien men namelijk onder het oog houdt: dat $Sin.\,FBL = Sin.\,EBL = Sin.\,ACB$, en $Sin.\,LCF = Sin.\,DCG = Sin.\,DBC$ is. De driehoeken BVF en CVF geven voorts (*III. St. IX. B.*)

$$BV : VF = Sin.\,BFL : Sin.\,CBF$$
$$VF : CV = Sin.\,BCF : Sin.\,CFL$$

vermenigvuldigt men deze evenredigheden; dan zal, omdat $BF = CF$ en diensvolgens $Sin.\,CBF = Sin.\,BCF$ is, (*XVI. Stell. II. B.*)

$$BV : CV = Sin.\,BFL : Sin.\,CFL$$

zijn; welke evenredigheid met de evenredigheid (α) vergeleken zijnde, geven zal:

$$BV : CV = Sin.\,BCD \times Sin.\,ACB : Sin.\,ABC \times Sin.\,CBD \quad (\beta)$$

Nu is in den cirkel

$$DC : AB = Sin.\,CBD : Sin.\,ACB \;\ldots\ldots\; (\gamma)$$

en, in den driehoek ADL,

$$AL : LD = Sin.\,ADL : Sin.\,DAL = Sin.\,ABC : Sin.\,BCD \;..\; (\delta)$$

Vermenigvuldigt men nu de evenredigheden (β), (γ) en (δ) met el-

elkander; dan verkrijgt men (*XVI. Stell. II. B.*)

$$BV \times DC \times AL = CV \times AB \times LD$$

en deze vergelijking kan niet bestaan, ten zij (*VI. Stell.*) de lijnen BD, AC en LF, elkander, in hetzelfde punt O, snijden.

2° Men trekke, van L door H, de lijn LHV; dan zal men, met behulp der driehoeken ALH, LDH, en de verdere eigenschappen der figuur, bewijzen: dat de lijnen LV, AC en BD, elkander in hetzelfde punt O snijden.

Omdat dan de lijnen, welke van F tot L, en van L door H getrokken worden, door hetzelfde punt O loopen, liggen die lijnen op elkander, en de hoekpuntslijn FH loopt derhalve door het punt O.

3° Men zal op dezelfde wijze betoogen, dat de hoekpuntslijn EG ook door het punt O gaat: *de hoekpuntslijnen der om- en ingeschrevene vierhoeken snijden elkander, in hetzelfde punt, en de verlengden der hoekpuntslijnen van den omgeschrevenen veelhoek loopen nog daarenboven door de punten, alwaar de overstaande zijden des ingeschrevenen vierhoeks elkander snijden.*

Betoog *van het derde.* Wij hebben bewezen, dat de punten N, L, M en K, in dezelfde regte lijn liggen; de punten L, H, O, F, in eene andere, en de punten K, E, O, G, in eene derde regte lijn; in den driehoek MFN snijden de transversalen FL, MG en NE, elkander in hetzelfde punt H, en de lijn, welke door de punten G en E loopt, ontmoet het verlengde van de basis in het punt K; de lijn KN is derhalve, (*VIII. Stell.*) in de punten L en M, harmonisch gesneden.

§. 1414. I. Gevolg. Daar dan de regte lijn NK, in L en M, harmonisch gesneden is, heeft men, (*VII. Stell.*) ten opzigte van het punt A, de vergelijking,

$$Sin.NAK \times Sin.LAM = Sin.LAN \times Sin.MAK \quad \ldots (1)$$

en, ten opzigte van het punt D, de vergelijking,

$$Sin.NDK \times Sin\,LDM = Sin.NLD \times Sin.MDK \quad \ldots (2)$$

§. 1415. II. Gevolg. Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt:

$$Sin.MAB \times Sin.KAE = Sin.MAK \times Sin.BAE \quad \ldots (3)$$

§. 1416. III. Gevolg. Omdat bewezen is, dat de hoekpuntslijn EG door het punt K gaat, is (*VII. Stell.*) de lijn MB, in de punten U en E, harmonisch gesneden, en men heeft (*VII. Stell.*) de vergelijking,

$$Sin.NKD \times Sin.CKG = Sin.NKC \times Sin.DKG \quad \ldots (4)$$

§. 1417. IV. Gevolg. Men heeft ook bewezen: dat de hoek-

 punts-

puntslijn HF door het punt L gaat; daar nu al de hoekpuntslijnen der vierhoeken elkander in hetzelfde punt O ſnijden, zal (*VIII. Stell.*) de lijn CK, in de punten B en V, harmonisch geſneden zijn, en men heeft daarom de vergelijking,

$$Sin. KLB \times Sin. CLF = Sin. KLC \times Sin. \times BLF \ldots (5)$$

§. 1418. V. Gevolg. Uit deze laatſte vergelijking volgt:

$$Sin. BLN \times Sin. CLF = Sin. CLN \times Sin. BLF \ldots (6)$$

§. 1419. VI. Gevolg. Uit alle deze vergelijkingen kan men tot zeer vele harmoniſche ſnijdingen (*VII. Stell.*) beſluiten, waaronder de volgende de merkwaardigſte zijn. 1° De ſnijlijn LC wordt, door de hoekpuntslijn GK, in de punten D en m, 2° de ſnijlijn LB wordt, door diezelfde hoekpuntslijn GK, in de punten A en n, harmonisch geſneden. Ook ſnijdt 3° de hoekpuntslijn LF de ſnijlijn KD, in de punten A en d, harmonisch; en dat CK, in B en V, harmonisch geſneden wordt, is reeds bewezen.

§. 1420. VII. Gevolg. Beſchouwen wij de punten a en c en b en d, in welke de hoekpuntslijnen van den omgeſchrevenen vierhoek den omtrek des cirkels ſnijden; wanneer men dan, uit het punt L, de lijnen Lc en La, en uit het punt K de lijnen Kb en Kd trekt; dan zullen deze (*II. Lemma*) den omtrek des cirkels, in deze punten c, a, b en d, aanraken.

§. 1421. VIII. Gevolg. Verbeelden wij ons, dat door de vereëniging der koorden ad, dc, cb en ab, de vierhoek $abcd$ ontſtaat; dan maken de raaklijnen La, Lb, Kb en Kb, behoorlijk verlengd zijnde, eenen vierhoek, welke om den cirkel beſchreven is; daar nu de verlengden van de overſtaande zijden van dien omgeſchrevenen vierhoek elkander, in de punten L en K, ontmoeten, zullen, volgens het bewezene in de ſtelling, de overſtaande zijden van den vierhoek $abcd$ elkander in de lijn KN moeten ſnijden.

§. 1422. IX. Gevolg. Laat, uit het middelpunt Z van den cirkel, de lijnen LZ en LK getrokken worden; dan zullen (*Betoog XIII. Stell. V. B.*) deze lijnen de hoekpuntslijnen GK en LF in p en q regthoekig ſnijden; indien men dan, uit hetzelfde middelpunt, door het ontmoetingspunt O, de lijn ZW tot aan KN trekt; dan zal (*I. Gev. VI. Stell.*) ZW loodregt op KN ſtaan.

§. 1423. X. Gevolg. De driehoeken ZOp en ZLW zijn dan (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B. en VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig: derhalve $Zp : ZO = ZW : ZL$ en $ZO \times ZW = Zp \times ZL$; maar (*Leer. XVI. Stell. III. B.*) $Zp \times ZL = Zc^2$ zijnde, is (R de ſtraal

van

van den cirkel noemende) $R^2 = ZO \times ZW$: *de ſtraal van den cirkel is dus midden-evenredig tusſchen ZO en ZW, dat is, tusſchen de afſtanden van het middelpunt des cirkels, en het punt, alwaar de hoekpuntslijnen elkander ſnijden, tot de lijn, welke door de punten K, L, M en N loopt.*

§. 1424. XI. Gevolg. In alle gevallen liggen de punten K, P en Q, in dezelfde regte lijn.

§. 1425. XII. Gevolg. En, wanneer $AN = AK$ is, liggen de punten K, E, P, O, Q en G, op dezelfde regte lijn. Wij laten de betoogen dezer twee laatſte gevolgen aan den leerling over. De figuur bezit nog vele andere fraaije eigenſchappen.

XVII. Stelling.

§. 1426. *Wanneer een onregelmatige zeshoek in eenen cirkel beſchreven is; dan zullen de drie punten, in welken de overſtaande zijden van dien zeshoek elkander ontmoeten, in dezelfde regte lijn gelegen zijn. En, wanneer men, door de hoekpunten van dien zeshoek, tot den omtrek van den cirkel, raaklijnen trekt; dan zullen de hoekpuntslijnen, welke de overſtaande hoeken van den onregelmatigen zeshoek, welke alsdan om den cirkel beſchreven wordt, twee aan twee genomen, in hetzelfde punt doorſnijden.*

Het betoog dezer ſtelling kan, door de Leerwijze der transverſalen, op dezelfde wijze, als in de voorgaande ſtelling, te werk gaande, worden opgemaakt, en wij laten hetzelve aan den Leerling over, ten einde hij hier in, als op den weg geholpen en voorzien van al de noodige hulpmiddelen, die hem daartoe dienen kunnen, zijne kragten beproeve.

*

VIJFTIENDE BOEK.

Over de eerste beginselen der Veelhoeksmeting (Polygonometrie) *en over de eigenschappen der veelvlakkige Ligchamen* (Polyedrometrie.)

---

§. 1427. I. BEPALING. De Veelhoeksmeting (*Polygonometrie*) is een bijzonder gedeelte der Meetkunst, hetwelk de betrekking tusschen de zijden, de hoeken en de inhouden van alle soorten van veelhoeken leert kennen.

§. 1428. I. AANMERKING. Het woord veelhoek wordt alhier in de uitgestrekte beteekenis van de *II. Bep. XIV. B.* genomen.

§. 1429. II. AANMERKING. Daar de behandeling der afzonderlijke gevallen der Veelhoeksmeting, voor elken bijzonderen veelhoek, op de wijze, zoo als de Driehoeksmeting hier boven behandeld is, een geheel boekdeel zou vereischen, zullen wij ons, in dit Boek, bij de beschouwing der voornaamste hoofdzaken moeten bepalen.

§. 1430. II. BEPALING. In het bijzonder zullen hier de vijf Grondregelen aangaande de beoordeeling van den positieven en negatieven toestand der lijnen en hoeken, bij het begin van het VIII *Boek* verklaard, en, welke hier ter plaatse moeten geraadpleegd worden, te stade komen. Ook moet hier worden onder het oog gehouden: dat wij, om de orde en duidelijkheid, in onze volgende beschouwingen, niet uit het oog te verliezen, en alle duisterheid in de ware beteekenis der vergelijkingen, welke de eigenschappen der veelhoeken zullen uitdrukken, te vermijden, *de zijden en hoeken van elken vlakken of scheven veelhoek (Fig. 458.) in rangorde van de letters A, B, C, enz., van de regter naar de linkerhand zullen tellen; zoodat, den veelhoek in die rigting rondgaande, elke zijde, AB of BC, van A tot B, of van B tot C, zal gerekend worden. Ook zal men elke hoek ABC, van de volgende naar de voorgaande zijde, van BC naar AB, binnenwaards*

waards om, van de regte naar de linkerhand, tellen; waardoor dan elke inſpringende, of naar binnen ſtaande, hoek grooter dan 180°, *en zijn ſupplement negatief wordt.* Nog moeten wij herinneren: *dat, wanneer, op eene onbepaalde lijn* PQ, *eenige deelen* $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, *van de linker naar de regterhand gaande, genomen worden, zoodanig dat elk volgend deel aan het naast voorgaande grenſe, de deelen* $D'E'$, $E'F$, $F'A$, *welke in eene teruggaande rangorde genomen worden, ten opzigte van de eerſte, als negatief worden aangemerkt; en dat eindelijk, op dezelfde wijze, wanneer men, van eene zekere lijn afterekenen, eenige hoeken, van de regter naar de linkerhand, telt, (elke volgende hoek aan de naast voorgaande grenzende,) de hoeken, welke, in eene teruggaande rigting, (op die wijze genomen,) geteld worden, ten opzigte van de eerſte, als negatief moeten worden aangemerkt.* Met één woord, *in elke figuur moet elke lijn en elke hoek, op dezelfde wijze, en volgens dezelfde regelmaat, als alle andere lijnen en hoeken, in die figuur voorkomende, beſchouwd en gerekend worden,* zonder welke voorzorg de wet van opvolging en zamenhang verbroken, en de gevolgtrekkingen onwettig zouden zijn.

§. 1431. Aanmerking. Wanneer men deze gronden niet uit het oog verliest, zullen de zaken, op de algemeenſte wijze, kunnen worden voorgedragen, en, zonder eene menigte omſchrijvingen, voor bijzondere gevallen, te ontwerpen, den hoogstmogelijken graad van algemeenheid verkrijgen. Men zal, door zulk eene handelwijze, niet, gelijk in de *XIX. Stell. I. B.*, behoeven te zeggen: *de ſom van de ſupplementen der hoeken eens veelhoeks,* WELKER HOEKEN ALLE NAAR BUITEN STAAN, *is gelijk aan vier regte hoeken;* maar zulks, algemeen, van alle veelhoeken, die inſpringende hoeken hebben, mits zij niet van de ſoort zijn, welke de 436 en 437 figuren voorſtellen, kunnen vastſtellen.

I. Stelling. *Fig.* 458.

§. 1432. *Wanneer, in het vlak van eenen vlakken veelhoek,* $ABCDEF$, *eenige onbepaalde lijn* PQ *wordt aangenomen; dan zal, op welke eene wijze deze lijn* PQ *ook geplaatst zij, de ſom der producten, die men verkrijgt, wanneer men elke zijde vermenigvuldigt met de Coſinus van den hoek, welke die*

zij-

zijde, of haar verlengde, met die aangenomene lijn PQ maakt, gelijk nul zijn; dat is: ($AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DE = d$; $EF = e$ en $AF = f$; en hoek AB met $PQ = (a)$; hoek BC met $PQ = (b)$ enz. stellende,)

$$a \times Cos.(a) + b \times Cos.(b) + c \times Cos.(c) + d \times Cos.(d) + e \times Cos.(e) + f \times Cos.(f) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

en deze zelfde vergelijking zal nog blijven plaats hebben, wanneer $ABCDEF$ een scheve veelhoek is, en de lijn PQ ergens, naar welgevallen, in de ruimte is aangenomen geworden.

BETOOG *van het eerste.* Men late, uit de hoekpunten A, B, C, D, E en F, de loodlijnen AA', BB', CC', DD', EE' en FF', op de aangenomene lijn PQ vallen, en trekke, door dezelfde hoekpunten, A, B, C, D, E en F, de lijnen AQ, BQ, CQ, DQ, EQ en FQ, van die hoekpunten afterekenen, naar de regterhand, evenwijdig aan PQ; dan worden, aan de hoekpunten van den veelhoek, met die evenwijdige lijnen, hoeken gemaakt, gelijk zijnde aan de hoeken, welke de verlengde zijden, met de lijn PQ, maken: maar om nu niet te dwalen in de wijze, op welke die hoeken, aan elk hoekpunt, genomen moeten worden, moet men het begin van elke zijde als het hoekpunt van den hoek, welke die zijde met PQ maakt, aanmerken, (behoorende alzoo het hoekpunt A tot de zijde AB, het hoekpunt B tot de zijde BC, *enz.*,) en de hoeken, van de evenwijdige lijnen afterekenen, regtsom, tot aan de zijde tellen: de hoek, welke AB met AQ, en gevolgelijk met PQ maakt, behoort dus tot het vierde quadrant; de hoeken, welke BC en CD met BQ en CQ, of met PQ maken, tot het eerste; de hoek, welke DE met DQ, of met PQ maakt, tot het tweede, en de hoeken, welke EF en FA met EQ en FQ, of met PQ maken, tot het derde quadrant; zoodat (zie de *Tafel. Bladz.* 194.) $Cos.(a)$, $Cos.(b)$, $Cos.(c)$, positief en $Cos.(d)$, $Cos.(e)$ en $Cos.(f)$, negatief zijn. Het is nu in dien zin, dat de hoeken, onder welke de zijden, of haar verlengden, de lijn PQ snijden, regelmatigheidshalve, en om de vergelijking, zoo als zij in de stelling voorgedragen is, in elken veelhoek waarheid te doen zijn, moeten genomen worden.

Wij hebben nu, door de loodlijnen AA', BB', *enz.* en de evenwijdige AQ, BQ, *enz.* die elkander in A'', B'', C'', *enz.* snijden, en de regthoeken, welke daaruit geboren worden, (*I. Stell. III. B.*) $A'B' = AB''$; $B'C' = BC''$; $C'D' = CD''$; $D'E' = DE''$; $E'F' = EF''$

$= EF''$ en $F'A' = FA''$. De regthoekige driehoek ABB'' geeft (*II. Stell. IX. B.*) $AB'' = AB \times Cos.\,BAB''$; maar $Cos.(BAB'') = Cos.(360^\circ - (a)) = Cos.(a)$ zijnde, is $AB'' = AB \times Cos.(a) = a \times Cos.(a)$. Op dezelfde wijze is het met de andere regthoekige driehoeken BCC'', CDD'', DEE'', EFF'', FAA'', gelegen: men heeft daarom:

$$a \times Cos.(a) = AB \times Cos.\,B''AB = + AB'' = + A'B'$$
$$b \times Cos.(b) = BC \times Cos.\,C''BC = + BC'' = + B'C'$$
$$c \times Cos.(c) = CD \times Cos.\,D''CD = + CD'' = + C'D'$$
$$d \times Cos.(d) = DE \times Cos.\,EDQ = - DE'' = - D'E'$$
$$e \times Cos.(e) = EF \times Cos.\,QEF = - EF'' = - E'F'$$
$$f \times Cos.(f) = AF \times Cos.\,QFA = - FA'' = - F'A'$$

nu is klaarblijkelijk $A'B' + B'C' + C'D' = D'E' + E'F' + F'A'$, en daarom $A'B' + B'C' + C'D' - D'E' - E'F' - A'F' = 0$; wanneer men derhalve deze vergelijkingen optelt, zal

$$a \times Cos.(a) + b \times Cos.(b) + c \times Cos.(c) + d \times Cos.(d) + e \times Cos.(e) + f \times Cos.(f) = 0$$

moeten zijn.

Dit betoog, hoezeer op eene bijzondere figuur ingerigt, zal voor alle andere veelhoeken, op dezelfde wijze, gelden; want, in welk eene rangorde, eenige punten mogen genomen worden, wanneer maar de figuur altijd gesloten blijft, zal men, op de aangenomene lijn PQ, een aantal deelen vinden, welke van P naar Q, en een ander aantal deelen, welke van Q naar P geteld worden, en juist daarom, omdat de figuur sluit en een veelhoek is, zal de som der deelen die voorwaards geteld worden gelijk zijn aan de som der deelen, die terugwaards genomen worden: maar, uit de beschouwing van onze bijzondere figuur, blijkt: dat een achterwaards gaande deel van de lijn PQ ontstaat, door eene zijde, welke met PQ zulk een hoek maakt, dat de Cosinus van dien hoek negatief is, en deze aanmerking maakt de overweging van alle andere bijzondere gevallen overtollig: men begint van een punt A, en komt op hetzelve terug; de veelhoek moge dan zoo als de 435 en 436 figuren voorstellen, of nog anders, gesteld zijn, het betoogde zal, voor elken bijzonderen veelhoek, zonder eenige onderscheiding waarheid blijven.

Betoog *van het tweede*. Verbeelden wij ons, dat de punten A, B, C, D, E en F, niet in hetzelfde vlak, maar op eenigerlei wijze in de ruimte verspreid zijn, en dat de lijn PQ naar welgevallen zij aangenomen; dan zal nog dezelfde vergelijking, onder dezelfde voor-

waar-

waarden, bestaan. Men late, door de punten A, B, C, D, E en F, een stelsel van evenwijdige vlakken, door de lijnen AA', BB', CC', *enz.* afgebeeld, gaan, welke alle de lijn PQ regthoekig doorsnijden, (en dit kan altijd geschieden,) en men trekke uit de punten A, B, C, D, E en F, de lijnen AB'', BC'', CD'', DE'', EF'' en FA'', evenwijdig aan PQ; deze evenwijdige staan dan (*XXIX. Stell. X. B.*) regthoekig op gezegde evenwijdige vlakken AA'', BB'', *enz.* en (*XXV. Stell. X. B.*) dan is $AB'' = A'B'$; $BC'' = B'C'$; $CD'' = C'D'$; *enz.* de hoeken $B''AB$, $C''BC$, $D''CD$, QDE, QEF en QFA, zijn dan gelijk aan de standhoeken van de zijden AB, BC, *enz.* met de lijn PQ; en omdat de driehoeken ABB'', BCC'', *enz.* regthoekig zijn, verkrijgt men dezelfde vergelijkingen als boven, en het betoogde geldt derhalve ook voor elken scheven veelhoek.

§. 1433. I. Aanmerking. Als een zeker hulpmiddel, waaraan, behalve de boven opgegevene omstandigheden, de positieve of negatieve waarden van de Cosinussen der hoeken, welke in de vergelijking voorkomen, kan onderkend worden, mag men vaststellen: dat de Cosinus, welke eenige zijde met de lijn PQ maakt, positief of negatief zal zijn; naar dat deze zijde uitwendig (gelijk AB, BC en CD,) of inwendig (gelijk DE, EF en FA,) naar de lijn PQ gekeerd is.

§. 1434. II. Aanmerking. Wanneer de lijn PQ evenwijdig aan ééne der zijden loopt; dan wordt de Cosinus van den hoek, welke die zijde met PQ maakt, gelijk aan de éénheid, en, wanneer eenige zijde, of haar verlengde, de lijn PQ regthoekig snijdt, wordt de Cosinus van den hoek van die zijde met PQ gelijk nul.

§. 1435. Gevolg. Wanneer men bij de betoogde vergelijking $2s = a + b + c + d +$ *enz.* (zijnde s de halve omtrek van den vlakken of scheven veelhoek,) bijtelt, dan zal, aangezien (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $1 + Cos. p = 2\, Cos^2. \tfrac{1}{2} p$ is

$$s = a \times Cos^2. \tfrac{1}{2}(a) + b \times Cos^2. \tfrac{1}{2}(b) + c \times Cos^2. \tfrac{1}{2}(c) + d \times Cos^2. \tfrac{1}{2}(d) + enz. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

zijn; dat is: *de halve omtrek van elke vlakken of scheven veelhoek is gelijk aan de som der producten, welke men verkrijgt, indien men elke zijde vermenigvuldigt met het vierkant van de Cosinus van de helft van den hoek, welke die zijde met eenige naar welgevallen aangenomene lijn maakt.*

II. STELLING. *Fig.* 458.

§. 1436. *Elke zijde van eenen vlakken of ſcheven veelhoek is gelijk aan de ſom der producten, die ontſtaan, wanneer elke der andere zijden, zonder ééne uittezonderen, vermenigvuldigd wordt met de Coſinus van den hoek, welke die zijde of haar verlengde, met de eerst gedachte zijde maakt, wel verſtaande, dat men deze hoeken inwendig neme, zoo als de hoeken van eene figuur genomen worden. Dat is: (noemende (a,b) de hoek van b met a; (a,d) de hoek van d met a, enz.)*

$$a = b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) + d \times Cos.(a,d) + enz. \quad (3)$$
$$b = a \times Cos.(b,a) + c \times Cos.(b,c) + d \times Cos.(b,d) + enz.$$

BETOOG. Laat PQ eene zekere lijn zijn; dan is (*I. Stell.*)

$$a \times Cos.(a) = -b \times Cos.(b) - c \times Cos.(c) - d \times Cos.(d) - enz.$$

daar nu deze vergelijking, voor elken ſtand van de lijn PQ, algemeen moet plaats hebben, zal zij ook gelden, wanneer de lijn PQ langs AB gebragt wordt; maar dan is $(a) = 0$, en derhalve $Cos.(a) = +1$. Wanneer men nu AB tot in R verlengt; BS, BT, BU en BV, evenwijdig aan CD, DE, EF en FA trekt; dan is, van BR regtsom gerekend, hoek $RBC = (b)$; hoek $RBS = (c)$; hoek $RBT = (d)$; hoek $RBU = (e)$ en hoek $RBV = (f)$; de vergelijking,

$$a \times Cos.(a) = a = -b \times Cos.(b) - c \times Cos.(c) - d \times Cos.(d) - enz.$$

geldt dan voor de hoeken RBC, RBE, RBF, *enz.*, maar nu moeten, door de voorwaarde der ſtelling, de hoeken niet van de lijn BR, maar van BA, op de wijze, zoo als men de inwendige hoeken van eenen veelhoek telt, gerekend worden; dat is, men moet de ſupplementen der hoeken RBC, RBS, RBT, RBU en RBV, of de ſupplementen der hoeken (b), (c), (d), (e) en (f), nemen. Omdat dan, in het algemeen, $Cos.(180^\circ - a) = - Cos.\, a$ is, zal . . . $Cos.(b) = - Cos.\, ABC = - Cos.(a,b)$; $Cos.(c) = - Cos.\, ABQ = - Cos.(a,c)$; $Cos.(d) = - Cos.\, ABT = - Cos.(a,d)$ enz. zijn; zoodat, wanneer men deze waarden van $Cos.(b)$, $Cos.(c)$, *enz.*, in de bovenſtaande vergelijking overbrengt, dezelve in

$$a = b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) + d \times Cos.(a,d) + enz.$$

veranderen zal. Men zal, op dezelfde wijze, al de andere vergelijkingen betoogen, welke, voor elke zijde van den veelhoek, geſteld kunnen worden, en bijgevolg zooveel in aantal zijn, als de veelhoek zijden of hoeken heeft.

§. 1437. I. Gevolg. Wanneer men, aan beide zijden van de vergelijking, $a = b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) + enz.$, bijtelt de som der zijden min de eerste zijde; dan zal men, aangezien (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $1 + Cos.p = 2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}p$ is, en $s = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c + enz. =$ de halve som van de zijden van den veelhoek stellende, verkrijgen:

$$s = b \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,b) + c \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + d \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,d) + enz. \quad (4)$$

§. 1438. II. Gevolg. En, wanneer men dezelfde vergelijking van $b + c + d + enz. = b + c + d + enz.$ of van $2s - a = b + c + d + enz.$ aftrekt, zal men, daar $1 - Cos.p = 2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}p$ is, verkrijgen:

$$s - a = b \times Sin^2.\tfrac{1}{2}(a,b) + c \times Sin^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + d \times Sin^2.\tfrac{1}{2}(a,d) + enz. \ldots \quad (5)$$

en men zal ook soortgelijke vergelijkingen voor $s-b$, $s-c$, $s-d$, *enz.* vinden.

§. 1439. III. Gevolg. Wanneer de veelhoek een vlakke veelhoek is; dan valt het terstond in het oog: dat de hoeken RBC, CBS, SBT, TBU, UBV en VBR, de supplementen van de inwendige hoeken, B, C, D, E, F en A, des veelhoeks zijn; men heeft derhalve, altijd van BR, regtsom gaande,

$$\begin{aligned} RBC &= 180^\circ - B \\ RBS &= 2 \times 180^\circ - (B + C) \\ RBT &= 3 \times 180^\circ - (B + C + D) \\ RBU &= 4 \times 180^\circ - (B + C + D + E) \\ RBV &= 5 \times 180^\circ - (B + C + D + E + F) \ldots \quad (\mu) \end{aligned}$$

omdat nu $Cos.\,180^\circ = -1$; $Cos.\,2n \times 180^\circ = +1$ en $Cos.(2n+1) \times 180^\circ = -1$ is; zal (*IV. Stell. VIII. B.*) $Cos.\,RBC = Cos.(b) = -Cos.\,B$; $Cos.\,RBS = Cos.(c) = +Cos.(B + C)$; $Cos.\,RBT = Cos.(d) = -Cos.(B + C + D)$; $Cos.\,RBU = Cos.(e) = + \ldots Cos.(B + C + D + E)$ en $Cos.\,RBV = Cos.(f) = -Cos.(B + C + D + E + F)$ moeten zijn, en brengt men nu deze waarden van $Cos.(b)$, $Cos.(c)$, *enz.* in de vergelijking:

$$a = -b \times Cos.(b) - c \times Cos.(c) - d \times Cos.(d) - enz.$$

over; dan verkrijgt men:

$$a = +b \times Cos.B - c \times Cos.(B + C) + d \times Cos.(B + C + D) - e \times Cos.(B + C + D + E) + f \times Cos.(B + C + D + E + F) \quad (6)$$

ons leerende: *dat elke zijde van eenen veelhoek gevonden wordt, indien men (den veelhoek, van deze zijde afterekenen, in de eene of andere rigting, rondgaande,) elke zijde vermenigvuldigt met de som der hoeken, welke tusschen die zijde en de onbekende zijde gelegen is,* en *en van de som der producten, welke de Cosinus van de som een oneven aantal hoeken tot factoren hebben, de som van al de andere producten aftrekt.*

§. 1440. I. Aanmerking. Deze laatste vergelijking (6) geldt alleen voor eenen vlakken veelhoek; omdat, wanneer de zijden in onderscheidene vlakken gelegen zijn, de som der hoeken RBC en CBS niet meer gelijk is aan den hoek RBS: maar de vergelijkingen (3), (4) en (5), zijn voor scheve, zoowel als vlakke veelhoeken, algemeen.

§. 1441. II. Aanmerking. Daar het aan den eenen kant natuurlijker is aantenemen, dat de inwendige hoeken van eenen vlakken veelhoek, door dadelijke meting, bekend zijn, en, aan den anderen kant, de vergelijking $a = b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) +$ *enz.*, wegens de gelijke teekens, geschikter schijnt, zoo is het nuttig optegeven, hoe de Cosinussen der hoeken (a,b), (a,c), (a,d), uit de hoeken B, C, D, E, *enz.* volgen. Indien men elke der bovenstaande vergelijkingen (μ) van $180^\circ = 180^\circ$ aftrekt, verkrijgt men:

$$(a,b) = B$$
$$(a,c) = (B + C) - 180^\circ$$
$$(a,d) = (B + C + D) - 2 \times 180^\circ$$
$$(a,e) = (B + C + D + E) - 3 \times 180^\circ$$
$$(a,f) = (B + C + D + E + F) - 4 \times 180^\circ$$

diensvolgens $Cos.(a,b) = Cos.B$; $Cos.(a,c) = - Cos.(B + C) \ldots$ $Cos.(a,d) = + Cos.(B + C + D)$, *enz.* Men zoeke dan de som der twee eerste, drie eerste, vier eerste, *enz.* hoeken en de Cosinussen dezer sommen, waaraan men de teekens geeft, welke aan dezelve, overëénkomstig de quadranten, waarin zij vallen, toekomen: dit gedaan hebbende, keere men de teekens van de Cosinussen van de sommen van de evene aantallen hoeken om, en stelle de gevondene Cosinussen met hare teekens in $a = b \times Cos.(a,b) +$ *enz.* Men zal zich, op deze wijze te werk gaande, niet ligtelijk verzinnen kunnen.

§. 1442. III. Aanmerking. *Fig.* 459. Laat, in den omtrek van eenen cirkel, de bogen BC, CD, DE, *enz.* gelijk genomen, en de koorden dezer bogen getrokken worden; dan verkrijgt men eenen veelhoek $ABCD$ *enz.* in den cirkel beschreven, welker zijden alle, behalve de zijde AB, gelijk zijn; stel de boog $BC = 2q$, het getal der gelijke zijden $= n$; $AB = a$, de koorde $BC = CD = DE =$ *enz.* $= b$, dan is volgens het betoogde

$$a = b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) + d \times Cos.(a,d) + enz.$$

neemt men nu de middellijn des cirkels voor de éénheid; dan is $a =$

$Sin. nq$; $b = Sin. q = c = d = e = f =$ *enz.*; $Cos. (a,b) = Cos. (n-1). q$, verlengt men DC tot in G, dan is $(a,c) =$ hoek $AGC =$ hoek ABC — hoek BCG: derhalve $Cos. (a,c) = Cos. (n-3)\, q$; $Cos. (a,d) = Cos. (n-5)\, q$; *enz.*; en de vergelijking veranderd in:

$$Sin. nq = Sin. q \times [Cos. (n-1) q + Cos. (n-3) q + Cos. (n-5) q + + Cos. (n-7) q + Cos. (n-9) q] + enz.$$

en, wanneer die veelhoek zoodanig genomen wordt, dat $AB = o$ zij; dan wordt $Sin. nq = o$, en de veelhoek is dan een regelmatige n hoek; wij hebben dan

$$Cos. (n-1) q + Cos. (n-3) q + Cos. (n-5) q + Cos. (n-7) q + enz. = o$$

III. Stelling.

§. 1443. *De som van de vierkanten van de zijden van eenen vlakken of scheven veelhoek is gelijk aan het dubbeld van de som der producten van derzelver zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, elk vermenigvuldigd met de Cosinus van den hoek, welke deze zijden, of derzelver verlengden, met elkanker maken. Dat is:*

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + enz. = & \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \\ 2ab \times Cos. (a,b) & + 2ac \times Cos. (a,c) + 2ad \times Cos. (a,d) + enz. \\ & + 2bc \times Cos. (b,c) + 2bd \times Cos. (b,d) + enz. \\ & + 2cd \times Cos. (c,d) + enz. \\ & + enz. \;.\;.\;. \quad (7) \end{aligned}$$

Betoog. Om den zin dezer stelling wel te begrijpen, moet men verstaan, wat het zeggen wil: eenige dingen, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, waaraangaande men, in de oplossing van *Vraagst.* 46, *I. C. Bladz.* 349, de noodige opheldering zal vinden. Men schrijve, om tot het betoog zelve te komen, de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} a &= b \times Cos. (a,b) + c \times Cos. (a,c) + d \times Cos. (a,d) + enz. \\ b &= a \times Cos. (b,a) + c \times Cos. (b,c) + d \times Cos. (b,d) + enz. \\ c &= a \times Cos. (c,a) + b \times Cos. (c,b) + d \times Cos. (c,d) + enz. \\ d &= a \times Cos. (d,a) + b \times Cos. (d,b) + c \times Cos. (d,c) + enz. \end{aligned}$$

welke vergelijkingen zooveel in aantal zijn, als het getal der zijden van den veelhoek: men vermenigvuldige nu de eerste vergelijking met a, de tweede met b, de derde met c, de vierde met d, *enz.*; dan zal men verkrijgen:

$$a^2 = ab \times Cos.(a,b) + ac \times Cos.(a,c) + ad \times Cos.(a,d) + enz. \ldots$$
$$b^2 = ba \times Cos.(b,a) + bc \times Cos.(b,c) + bd \times Cos.(b,d) + enz. \ldots$$
$$c^2 = ca \times Cos.(c,a) + cb \times Cos.(c,b) + cd \times Cos.(c,d) + enz. \ldots$$
$$d^2 = ad \times Cos.(a,d) + db \times Cos.(d,b) + dc \times Cos.(d,c) + enz. \quad (\phi)$$

In de achterste leden dezer vergelijkingen, vindt men alle mogelijke producten der zijden, twee aan twee genomen, maar $ab \times Cos.(a,b) = ba \times Cos.(b,a)$; $ac \times Cos.(a,c) = ca \times Cos.(c,a)$ zijnde, zal men, bij aandachtige overweging, zien: dat elk product tweemaal voorkomt, en dat geene der producten van twee zijden, achterwege blijven: men zal dan gemelde vergelijkingen optellende,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + enz. =$$
$$\begin{aligned} 2ab \times Cos.(a,b) + 2ac \times Cos.(a,c) + 2ad \times Cos.(a,d) &+ enz. \\ + 2bc \times Cos.(b,c) + 2bd \times Cos.(b,d) &+ enz. \\ + 2cd \times Cos.(c,d) &+ enz. \\ &+ enz. \end{aligned}$$

verkrijgen.

§. 1444. I. GEVOLG. Wanneer men, in het voorgaande betoog, de eerste der vergelijkingen (ϕ) van de som van al de anderen aftrekt; dan zal men, na verschikking der termen, verkrijgen:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + enz. - 2bc \times Cos.(b,c) - 2bd \times Cos.(b,d) - enz. - 2cd \times Cos.(c,d) - 2ce \times Cos.(c,e) - enz. - enz. \ldots (8)$$

dat wil zeggen: *Het vierkant op ééne der zijden van eenigen vlakken of scheven veelhoek is gelijk aan de som van de vierkanten van al de andere zijden, verminderd met het dubbeld van de som der producten welke, ontstaan, indien men al die andere zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, vermenigvuldigt, en elk product nog eens met de Cosinus van den hoek, onder welken deze twee zijden elkander ontmoeten.*

§. 1445. II. GEVOLG. Men telle, bij elk lid der vergelijking (7), het dubbeld van de som van de producten der zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen; dan zal men, vermits (*V. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $1 + Cos.p = 2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}p$ is, ($s = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c + enz.$ stellende,) vinden:

$$\begin{aligned} s^2 = ab \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,b) + ac \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + ad \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,d) &+ enz. \\ + bc \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(b,c) + bd \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(b,d) &+ enz. \\ + cd \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(c,d) &+ enz. \\ + enz. \ldots (9) \end{aligned}$$

Het vierkant van de halve som der zijden is derhalve gelijk aa[n] som van de producten van al de zijden, op alle mogelijke wijze[n] *aan twee genomen, en elk product vermenigvuldigd met het vierkant van de Cosinus van de helft van den hoek, welke deze twee zijden met elkander maken.*

§. 1446. III. Gevolg. En wanneer men, met uitzondering van de eerste zijde a, bij het tweede lid der vergelijking (8) het dubbeld van de som van de producten der zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, optelt; dan zal men, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$(b + c + d + e + enz.)^2 - a^2 = \ldots\ldots$$
$$4\,bc \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(b,c) + 4\,bd \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(b,d) + enz.$$
$$+ 4\,cd \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(c,d) + enz.$$
$$+ enz. \ldots\ldots \quad (10)$$

§. 1447. IV. Gevolg. Uit de vergelijking (7) volgt nog: *dat, wanneer de zijden van eenen vlakken of scheven veelhoek dezelfde lengte blijven behouden, en het stelsel van die zijden, om deszelfs hoekpunten, omdraait, altijd, in elken stand, mits de figuur maar gesloten blijve, de som van de producten der zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, en elk product vermenigvuldigd met de Cosinus van den hoek, welke die twee zijden met elkander maken, eene standvastige waarde zal blijven behouden.*

§. 1448. I. Aanmerking. Men moet, in alle deze vergelijkingen, niet uit het oog verliezen, dat, door de hoeken, welke twee zijden met elkander maken, de inwendige hoeken verstaan worden, en dat men, ten einde zich in de teekens der Cosinussen niet te vergissen, letten moet: 1° op de hoekpunten, welke voor het begin van eene zijde gehouden worden, 2° op de rangorde der zijden, welke in een product voorkomen: Men trekke dan, in de gedachte, door het begin der zijde, welke in eene hoogere rangorde voorkomt, eene lijn evenwijdig aan de zijde van den lageren rang, en in dezelfde rigting, waarin deze laatste geteld wordt; dan zal men, van de hoogere naar de lagere zijde, regtsom gaande, de rigting verkrijgen, in welke de hoek moet geteld worden, waaruit blijken zal, met welk teeken de Cosinus van dien hoek moet worden aangedaan.

§. 1449. II. Aanmerking. De verklaarde eigenschappen der veelhoeken, van het getal der zijden onafhankelijk zijnde, gelden ook voor den driehoek. Men zal, deszelfs zijden a, b en c, en de daar tegenoverstaande hoeken A, B en C stellende, vinden:

$$a = b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c)$$
$$\text{of } a = b \times Cos.C + c \times Cos.B$$

$a +$

$$a+b+c=2b\times Cos^2.\tfrac{1}{2}C+2c\times Cos^2.\tfrac{1}{2}B$$
$$a^2+b^2+c^2=2ab\times Cos.C+2ac\times Cos.B+2bc\times Cos.A$$
$$(a+b+c)^2=4ab\times Cos^2.\tfrac{1}{2}C+4ac\times Cos^2.\tfrac{1}{2}B+4bc\times Cos^2.\tfrac{1}{2}A$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\times Cos.A$$
waarvan velen reeds, uit andere gronden, bewezen zijn.

IV. STELLING. *Fig.* 460.

§. 1450. *Wanneer men, in eenen vlakken veelhoek, ééne zijde, bij voorbeeld, de zijde a uitzondert, en alle de overige zijden b, c, d, enz. benevens de hoeken, welke deze zijden, met de uitgezonderde zijde a, maken, gegeven zijn; dan wordt de inhoud van dien veelhoek uitgedrukt door de vergelijking:*

$$I=b\times Cos.(a,b)\times\tfrac{1}{2}b\times Sin.(a,b)\quad\ldots\ldots\quad(11)$$
$$+c\times Cos.(a,c)\times[b\times Sin.(a,b)+\tfrac{1}{2}c\times Sin.(a,c)]$$
$$+d\times Cos.(a,d)\times[b\times Sin.(a,b)+c\times Sin.(a,c)+\tfrac{1}{2}d\times Sin.(a,d)]$$
$$+enz.$$
$$+p\times Cos.(a,p)\times[b\times Sin.(a,b)+c\times Sin.(a,c)+enz.\ldots$$
$$+\tfrac{1}{2}p\times Sin.(a,p)]$$
zijnde, in deze vergelijking, I de inhoud en p de zijde, welke, aan den anderen kant, naast a gelegen is.

BETOOG. Men late, uit al de hoekpunten, C, D, E, *enz.* loodlijnen CG, DH, EI, FK, op de zijde AB, of derzelver verlengde vallen, en trekke, door diezelfde hoekpunten, CL, DM, EN, *enz.* evenwijdig aan BA: dan is, (*II. Stell. IX. B.*) volgens de figuur, $CG = b\times Sin.(a,b)$; $DL=c\times Sin.(a,c)$; $EM=d\times Sin.(a,d)$; $FN=-e\times Sin.(a,e)$; $AO=-f\times Sin.(a,f)$; derhalve

$$CG=b\times Sin.(a,b)$$
$$DH=b\times Sin.(a,b)+c\times Sin.(a,c)$$
$$EI=b\times Sin.(a,b)+c\times Sin.(a,c)+d\times Sin.(a,d)$$
$$FK=b\times Sin.(a,b)+c\times Sin.(a,c)+d\times Sin.(a,d)+e\times Sin.(a,e)$$
en $$0=b\times Sin.(a,b)+c\times Sin.(a,c)+d\times Sin.(a,d)+e\times Sin.(a,e)+f\times Sin.(a,f)$$
al hetwelk men gemakkelijk, uit de beschouwing der regthoekige driehoeken en der regthoeken, welke in de figuur voorkomen, kan afleiden; voorts is:

$BG=-b\times Cos.(a,b)$; $GH=+c\times Cos.(a,c)$; $HI=+d\times Cos.(a,d)$; $IK=+e\times Cos.(a,e)$ en $AK=-f\times Cos.(a,f)$; hierdoor wordt (*Bijv. XV. Stell. III. B.*)

 drieh.

$drieh.\,BGC = -b \times Sin.(a,b) \times \frac{1}{2} b \times Cos.(a,b)$

$trap.\,GCDH = +c \times Cos.(a,c) \times [b \times Sin.(a,b) + \frac{1}{2} c \times Sin.(a,c)]$

$trap.\,HDEI = +d \times Cos.(a,d) \times [b \times Sin.(a,b) + c \times Sin.(a,c) + \frac{1}{2} d \times Sin.(a,d)]$

$trap.\,IEFK = +e \times Cos.(a,e) \times [b \times Sin.(a,b) + c \times Sin.(a,c) + d \times Sin.(a,d) + \frac{1}{2} e \times Sin.(a,e)]$

$drieh.\,AFK = -f \times Cos.(a,f) \times [b \times Sin.(a,b) + c \times Sin.(a,c) + d \times Sin.(a,d) + e \times Sin.(a,e) + \frac{1}{2} f \times Sin.(a,f)]$

Uit de beſchouwing van de figuur blijkt nu: dat de inhoud van den veelhoek gelijk is aan $trap.\,GCDH + trap.\,HDEI + trap.\,IEFK - drieh.\,BCG - drieh.\,AFK$. Wanneer men dan de ſtraks gevondene waarden dezer trapeziums en driehoeken, in deze vergelijking overbrengt, zal men de vergelijking, die betoogd moest worden, verkrijgen.

Wanneer men, uit den loop van ons bijzonder betoog, hetwelk op eene bijzondere figuur gegrond is, deszelfs algemeenheid niet mogt gevoeld hebben, zoo ontwerpe men eenen vlakken veelhoek van een grooter aantal zijden, en zelfs eenen met inſpringende hoeken; dan zal men zien: dat (lettende behoorlijk op de teekens der Sinusſen en Coſinusſen,) de inhouden der driehoeken en trapeziums, welke, om den inhoud van den veelhoek te verkrijgen, afgetrokken moeten worden, eene negatieve waarde verkrijgen, terwijl al de andere poſitief zijn, waardoor al de termen van de uitdrukking, welke den inhoud voorſtelt, poſitief worden, en dat alzoo de vergelijking, voor alle veelhoeken, denzelfden vorm blijft behouden.

§. 1451. Aanmerking. *Fig.* 460. Wanneer men al de zijden des veelhoeks, in de rigting, waarin zij geteld worden, (aan B, C, D, *enz.*) verlengt; dan is $(a,b) = ABC = B$; $(a,c) = DCL = C - ſuppl.\,B = C - (180^\circ - B) = B + C - 180^\circ$; $(a,d) = EDM = D - ſuppl.\,(a,c) = D - (180^\circ - (B + C - 180^\circ)) = B + C + D - 2 \times 180^\circ$; $(a,e) = FEN = E - ſuppl.\,(a,d) = B + C + D + E - 3 \times 180^\circ$; $(a,f) = B + C + D + E - 4 \times 180^\circ$: men zal derhalve hebben:

$Cos.(a,b) = Cos.\,B$ . . . . . . $Sin.(a,b) = Sin.\,B$

$Cos.(a,c) = -Cos.(B+C)$ . . $Sin.(a,c) = -Sin.(B+C)$

$Cos.(a,d) = +Cos.(B+C+D)$ . . $Sin.(a,d) = +Sin.(B+C+D)$

$Cos.(a,e) = -Cos.(B+C+D+E)$ $Sin.(a,e) = -Sin.(B+C+D+E)$

enz. *enz.*

in welke vergelijkingen, de letters B, C, D, E, *enz.* de inwendige hoeken des veelhoeks beteekenen, (houdende onder het oog, dat de

in-

inſpringende hoeken grooter dan 180° zijn,) terwijl de teekens beurtelings afwisſelen. *Wordt nu de Coſinus en de Sinus van eenen hoek of van de ſom van twee of meer hoeken, naar het quadrant, waarin dien hoek of de ſom dezer hoeken valt, poſitief; dan behoudt die goniometriſche lijn het teeken, waarmede zij in de bovenſtaande vergelijkingen, is aangedaan: maar moet die goniometriſche lijn naar de waarde van den hoek, tot welke zij behoort, negatief genomen worden, dan veranderen de teekens der vergelijkingen.* Deze regel moet overal, in het vervolg, ſtiptelijk in acht genomen worden.

V. STELLING. *Fig.* 461.

§. 1452. *Onder dezelfde omſtandigheden der voorgaande ſtelling, zal de inhoud des vlakken veelhoeks door*

$$
\begin{aligned}
I = & -b \times Sin.(a,b) \times \tfrac{1}{2} b \times Cos.(a,b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12) \\
& -c \times Sin.(a,c) \times [b \times Cos.(a,b) + \tfrac{1}{2} c \times Cos.(a,)] \\
& -d \times Sin.(a,d) \times [b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) + \tfrac{1}{2} d \times \\
& \quad Cos.(a,d)] - enz. \\
& -p \times Sin.(a,p) \times [b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) + d \times \\
& \quad Cos.(a,d) + enz. + \tfrac{1}{2} p \times Cos.(a,p)] \\
& - enz.
\end{aligned}
$$

worden uitgedrukt.

BETOOG. Nemende even als in *fig.* 460, $AB = a$ voor de eerſte (en de niet gegevene) zijde, zoo rigte men uit B eene onbepaalde loodlijn BK op AB op, en trekke, uit de hoekpunten C, D, E, F, des veelhoeks, loodlijnen op AB, en loodlijnen op BK, en trekke door B, de lijn BD' evenwijdig aan CD, BE' evenwijdig aan DE, BF' evenwijdig aan EF, en BA' evenwijdig aan FA; dan zijn de hoeken $CBA = (a,b)$; $D'BA = (a,c)$; $E'BA = (a,d)$; poſitief, en de hoeken $F'BA = (a,e)$ en $A'BA = (a,f)$ negatief, en nu valt het in het oog: dat

$$
\begin{aligned}
BG &= -b \times Cos.(a,b) & CG = BH &= +b \times Sin.(a,b) \\
GN &= +c \times Cos.(a,c) & DM = HI &= +c \times Sin.(a,c) \\
NO &= +d \times Cos.(a,d) & DS = IK &= +d \times Sin.(a,d) \\
OP &= +e \times Cos.(a,e) & ET = KL &= -e \times Sin.(a,e) \\
PA &= -f \times Cos.(a,f) & FP = LB &= -f \times Sin.(a,f)
\end{aligned}
$$

is, en dat dienſvolgens

$$BG = -b \times Cos.(a,b)$$

$$BN = GN + BG = DI = +b \times (a,b) + c \times Cos.(a,c)$$

$BO = EK = +b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) + d \times Cos.(a,d)$

$BP = FL = +b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) + d \times Cos.(a,d) +$
$e \times Cos.(a,e)$

$BA = +b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) + d \times Cos.(a,d) +$
$e \times Cos.(a,e) + f \times Cos.(a,f)$

zal zijn. Men zal nu, ingevolge deze waarden, vinden:

drieh. $BCH = -b \times Sin.(a,b) \times \frac{1}{2} b \times Cos.(a,b)$

trap. $CHID = -c \times Sin.(a,c) \times [b \times Cos.(a,b) + \frac{1}{2} c \times Cos.(a,c)]$

trap. $IKED = +d \times Sin.(a,d) \times [b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) +$
$\ldots \frac{1}{2} d \times Cos.(a,d)]$

trap. $KEFL = -e \times Sin.(a,e) \times [b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) +$
$\ldots d \times Cos.(a,d) + \frac{1}{2} e \times Cos.(a,e)]$

trap. $LFAB = -e \times Sin.(a,f) \times [b \times Cos.(a,b) + c \times Cos.(a,c) +$
$\ldots d \times Cos.(a,d) + e \times Cos.(a,e) + \frac{1}{2} f \times Cos.(a,f)]$

De waarde van den inhoud van *trap.* $CHID$, kan den eerstbeginnenden eenige zwarigheid maken: om deze wegtenemen, denke men het punt D aan den anderen kant van de loodlijn BI; alsdan is ... *trap.* $CHID = \frac{1}{2} HI \times [DI + CH]$; maar daar het punt D aan de linkerhand van IB valt, wordt DI negatief, en *trap.* $CHID = \frac{1}{2} HI \times [CH - DI] = \frac{1}{2} HI \times [BG - (GN - BG)] = \frac{1}{2} HI \times [2BG - GN] = -c \times Sin.(a,c) \times [b \times Cos.(a,b) + \frac{1}{2} c \times Cos.(a,c)]$, en het blijkt hieruit, dat de inhoud van het trapezium $CHID$ eigenlijk gelijk is aan *Inh. drieh.* CHQ — *Inh. drieh.* DIQ.

De inhoud van den veelhoek is nu klaarblijkelijk gelijk aan ..., *drieh.* BCH + *drieh.* CHQ — *drieh.* DIQ — *trap.* $IKED$ + *trap.* $KEFL$ + *trap.* $LFAB$ = *drieh.* BCH + *trap.* $CHID$ — *trap.* $IKED$ + *trap.* $KEFL$ + *trap.* $LFAB$. Stelt men dan de waarden dezer trapeziums, hier boven gevonden, in deze vergelijking, zal men de vergelijking, welke betoogd moest worden, verkrijgen.

§. 1453. I. Aanmerking. Alle de termen van het tweede lid der vergelijking zijn negatief: men kan aan dezelve nogtans een positief teeken geven; mits men, in plaats van de hoeken (a,b), (a,c), *enz.* derzelver supplementen stelle; want, omdat, in het algemeen, $Sin.\, p = Sin.\, Suppl.\, p$, en $Cos.\, p = -Cos.\, Suppl.\, p$ is, zal de betoogde vergelijking veranderen in:

$$I = b \times Sin.\, Suppl.(a,b) \times \tfrac{1}{2} b\, Cos.\, Suppl.(a,b)$$
$$+ c \times Sin.\, Suppl.(a,c) \times [b\, Cos.\, Suppl.(a,b) + \tfrac{1}{2} c\, Cos.\, Suppl.(a,c)]$$
$$+ \textit{enz.} \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

§. 1454. II. Aanmerking. Men heeft, zie *III. Gev. II. Stell.*

(a,b)

$$(a,b) = B$$
$$(a,c) = B + C - 180^\circ$$
$$(a,d) = B + C + D - 2 \times 180^\circ$$
$$(a,e) = B + C + D + E - 3 \times 180^\circ, \text{ enz.}$$

waaruit men terstond stellen mag:

$$\text{Suppl.}(a,b) = 180^\circ - B$$
$$\text{Suppl.}(a,c) = 2 \times 180^\circ - (B + C)$$
$$\text{Suppl.}(a,d) = 3 \times 180^\circ - (B + C + D)$$
$$\text{Suppl.}(a,e) = 4 \times 180^\circ - (B + C + D + E), \text{ enz.}$$

en hierdoor kan men aan de teekens van de termen der (12) vergelijking het positieve teeken geven, en de hoeken, welke in dezelve voorkomen, van de inwendige hoeken des veelhoeks, die gemeenelijk gegeven zijn, doen afhangen.

§. 1455. III. Aanmerking. Men kan nu de (11) en (12) vergelijkingen, ten einde dezelve op de dadelijke berekening van den inhoud van eenen veelhoek toetepassen, aldus voorstellen:

1° *Stel a, b, c, d, e, enz. de zijden, en y op ééne na de laatste zijde, A, B, C, $D \ldots X$, de hoeken des veelhoeks, welke aan het begin eener zijde gelegen zijn, (op dezelfde wijze, zoo als de figuur voorstelt,) zij $R = 90^\circ$.*

Stel $A = p$

$$A + B - 2R = q$$
$$A + B + C - 4R = r$$
$$A + B + C + D - 6R - s$$
$$A + B + C + D + E - 8R = t$$
$$A + B + C + D + E + \text{enz.} + x - 2nR = z$$

dan is, de inhoud $= I$ stellende,

$$I = a \times \text{Cos.}p \times \tfrac{1}{2} a \times \text{Sin.}p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$
$$+ b \times \text{Cos.}q \times [a \times \text{Sin.}p + \tfrac{1}{2} b \times \text{Sin.}q]$$
$$+ c \times \text{Cos.}r \times [a \times \text{Sin.}p + b \times \text{Sin.}q + \tfrac{1}{2} c \times \text{Sin.}r]$$
$$+ d \times \text{Cos.}s \times [a \times \text{Sin.}p + b \times \text{Sin.}q + c \times \text{Sin.}r + \tfrac{1}{2} d \times \text{Sin.}s]$$
$$+ \text{enz.}$$
$$+ y \times \text{Cos.}z \times [a \times \text{Sin.}p + b \times \text{Sin.}q + c\,\text{Sin.}r + \text{enz.} + \tfrac{1}{2} y \times \text{Sin.}z]$$

2° *Behoudt men dezelfde notatie; dan zal, stellende*

$$2R - A = p$$
$$4R - (A + B) = q$$
$$6R - (A + B + C) = r$$
$$8R - (A + B + C + D) = s$$
$$2nR - (A + B + C + D + \text{enz.} + x) = z;$$

de inhoud aldus worden voorgesteld:

$$I = a \times Sin.p \times \tfrac{1}{2} a \times Cos.p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$
$$+ b \times Sin.q \times [a \times Cos.p + \tfrac{1}{2} b \times Cos.q]$$
$$+ c \times Sin.r \times [a \times Cos.p + b \times Cos.q + \tfrac{1}{2} c \times Cos.r]$$
$$+ d \times Sin.s \times [a \times Cos.p + b \times Cos.q + c \times Cos.r + \tfrac{1}{2} d \times Cos.s]$$
$$+ enz.$$
$$+ y \times Sin.z \times [a \times Cos.p + b \times Cos.q + enz. + \tfrac{1}{2} y \times Cos.z]$$

moetende de teekens van de termen dezer vergelijkingen veranderd worden, indien de Sinusſen of Coſinusſen van p, q, r, s, t, enz., te rekenen naar het quadrant, waarin die hoeken vallen, negatief worden.

§. 1456. IV. Aanmerking. De zijde, welke in deze vergelijkingen, op éénena, de laatſte genoemd wordt, kan alle waarden hebben, en dus ook gelijk nul zijn: in dit geval, komen al de zijden en al de hoeken des veelhoeks in rekening, en dan volgt hieruit: dat, wanneer al de zijden en al de hoeken van eenen veelhoek gegeven zijn, deszelfs inhoud, op onderſcheidene wijzen, kan berekend worden. Want men kan: 1° éćne der zijden uitſluitende, elk der vergelijkingen (14) en (15) op twee onderſcheidene wijzen, of van de linker naar de regterhand gaande, of omgekeerd, berekenen; hetwelk, voor eenen n hoek, $2(n-1)$ onderſcheidene wijze van berekenen, door elke formule geeft; en brengt men al de zijden en hoeken in berekening; dan zal men den inhoud, door $2n$ onderſcheidene berekeningen, voor elke formule vinden kunnen; gevende dit in alles, voor eenen n hoek, $8n-4$ onderſcheidene wijzen, om door de toepasſing dezer vergelijkingen, den inhoud te vinden.

VI. Stelling.

§. 1457. *De inhoud van elken vlakken veelhoek is, (wanneer men ééne der zijden uitzonderd, en niet in rekening brengt,) gelijk aan de halve ſom der produċten, die ontſtaan, wanneer men al de overige zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, vermenigvuldigt, en elk dezer produċten met de Sinus van den hoek, of van de ſom der hoeken, welke tusſchen die zijden gelegen zijn; mits men die produċten, welke met de Sinus van de ſom van een even aantal hoeken vermenigvuldigd zijn, negatief neme. Dat is, ſtellende a, b, c, d....enz. en y, op éénе na, de laatſte zijde; B, C, D, E,*

enz.

enz. de hoeken, tusschen a en b, b en c, c en d, d en e, enz. en I den inhoud; dan is, met uitzondering van a,

$$I = \tfrac{1}{2} bc \times Sin. C - \tfrac{1}{2} bd \times Sin. (C + D) + \tfrac{1}{2} be \times Sin. (C + D + E) - \tfrac{1}{2} bf \times Sin. (C + D + E + F) + enz.$$
$$+ \tfrac{1}{2} cd \times Sin. D - \tfrac{1}{2} ce \times Sin. (D + E) + \tfrac{1}{2} cf \times Sin. (D + E + F) - enz.$$
$$+ \tfrac{1}{2} de \times Sin. E - \tfrac{1}{2} df \times Sin. (E + F) + enz.$$
$$+ \tfrac{1}{2} ef \times Sin. F - enz. \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Betoog. Men ontwikkele de vergelijkingen (11) en (12), welke in de IV en V Stellingen betoogd zijn, door de producten dadelijk te vermenigvuldigen; dan zal men verkrijgen:

$$I = \tfrac{1}{2} b^2 Sin. (a,b) \times Cos. (a,b) + \tfrac{1}{2} c^2 Sin. (a,c) \times Cos. (a,c) + \tfrac{1}{2} d^2 Sin. (a,d) \times Cos. (a,d) + \tfrac{1}{2} e^2 Sin. (a,e) \times Cos. (a,e) + enz.$$
$$+ bc \times Sin. (a,b) \times Cos. (a,c)$$
$$+ bd\, Sin. (a,b) \times Cos. (a,d) + cd\, Sin. (a,c) \times Cos. (a,d)$$
$$+ be\, Sin. (a,b) \times Cos. (a,e) + ce\, Sin. (a,c) \times Cos. (a,e) + \ldots de\, Sin. (a,d) \times Cos. (a,e)$$
$$+ enz. \quad \ldots \ldots \quad (P)$$

de ontwikkeling van de vergelijking (12) zal geven:

$$I = -\tfrac{1}{2} b^2 Sin. (a,b) \times Cos. (a,b) - \tfrac{1}{2} c^2 Sin. (a,c) \times Cos. (a,c) - \tfrac{1}{2} d^2 Sin. (a,d) \times Cos. (a,d) - \tfrac{1}{2} e^2 Sin. (a,e) \times Cos. (a,e) - enz.$$
$$- bc \times Cos. (a,b) \times Sin. (a,c)$$
$$- bd \times Cos. (a,b) \times Sin. (a,d) - cd \times Cos. (a,c) \times Sin. (a,d)$$
$$- be \times Cos. (a,b) \times Sin. (a,e) - ce \times Cos. (a,c) \times Sin. (a,e) \ldots - de \times Cos. (a,d) \times Sin. (a,e)$$
$$- enz. \quad \ldots \ldots \quad (Q)$$

Men telle nu de vergelijkingen P en Q bij elkander; dan verkrijgt men:

$$2I = bc\,[Sin. (a,b) \times Cos. (a,c) - Cos. (a,b) \times Sin. (a,c)]$$
$$+ bd\,[Sin. (a,b) \times Cos. (a,d) - Cos. (a,b) \times Sin. (a,d)]$$
$$+ be\,[Sin. (a,b) \times Cos. (a,e) - Cos. (a,b) \times Sin. (a,e)]$$
$$+ bf\,[Sin. (a,b) \times Cos. (a,f) - Cos. (a,b) \times Sin. (a,f)]$$
$$+ enz.$$
$$+ cd\,[Sin. (a,c) \times Cos. (a,d) - Cos. (a,c) \times Sin. (a,d)]$$
$$+ ce\,[Sin. (a,c) \times Cos. (a,e) - Cos. (a,c) \times Sin. (a,e)]$$
$$+ cf\,[Sin. (a,c) \times Cos. (a,f) - Cos. (a,c) \times Sin. (a,f)]$$
$$+ enz.$$

+ de

$+ de[Sin.(a,d) \times Cos.(a,e) - Cos.(a,d) \times Sin.(a,e)]$
$+ df[Sin.(a,d) \times Cos.(a,f) - Cos.(a,d) \times Sin.(a,f)]$
$+$ *enz.*
$+ ef[Sin.(a,e) \times Cos.(a,f) - Cos.(a,e) \times Sin.(a,f)]$
$+$ *enz.*

Maar nu is (*III. Stell. VIII. B.*) $Sin.(a,b) \times Cos.(a,c) - Cos.(a,b) \times Sin.(a,c) = Sin.[(a,b) - (a,c)]$, *enz.*: de laatste vergelijking wordt derhalve

$$2I = bc\,Sin.[(a,b) - (a,c)] + bd\,Sin.[(a,b) - (a,d)] + \ldots$$
$$be\,Sin.[(a,b) - (a,e)] + bf\,Sin.[(a,b) - (a,f)] + \text{enz.}$$
$$+ cd\,Sin.[(a,c) - (a,d)] + ce\,Sin.[(a,c) - (a,e)] + \ldots$$
$$cf\,Sin.[(a,c) - (a,f)] + \text{enz.}$$
$$+ de\,Sin.[(a,d) - (a,e)] + df\,Sin.[(a,d) - (a,f)] + \text{enz.}$$
$$+ ef\,Sin.[(a,e) - (a,f)] + \text{enz.}$$

Maar nu is (*I. Aanm. V. Stell.*) $(a,b) = B$; $(a,c) = B + C - 180^\circ$; $(a,d) = B + C + D - 2 \times 180^\circ$; $(a,e) = B + C + D + E - 3 \times 180^\circ$; $(a,f) = B + C + D + E + F - 4 \times 180^\circ$; *enz.*; derhalve is:

$$(a,b) - (a,c) = 180^\circ - C$$
$$(a,b) - (a,d) = 2 \times 180^\circ - (C + D)$$
$$(a,b) - (a,e) = 3 \times 180^\circ - (C + D + E)$$
$$(a,b) - (a,f) = 4 \times 180^\circ - (C + D + E + F), \text{ enz.}$$
$$(a,c) - (a,d) = 180^\circ - D$$
$$(a,c) - (a,e) = 2 \times 180^\circ - (D + E)$$
$$(a,c) - (a,f) = 3 \times 180^\circ - (D + E + F), \text{ enz.}$$
$$(a,d) - (a,e) = 180^\circ - E \ \ldots \ (a,e) - (a,f) = 180^\circ - F$$
$$(a,d) - (a,f) = 2 \times 180^\circ - (E + F) \qquad \text{enz.}$$

en $Sin.[(a,b) - (a,c)] = Sin.C$
$Sin.[(a,b) - (a,d)] = - Sin.(C - D)$
$Sin.[(a,b) - (a,e)] = + Sin.(C + D + E)$, *enz.*

Stelt men eindelijk deze waarden, in de laatst gevondene vergelijking, en deelt men alles door *twee*; dan verkrijgt men de vergelijking, die betoogd moest worden.

§. 1458. I. Gevolg. Wij hebben (*I. Aanm. V. Stell.*) gezien: dat $Sin.C = (b,c)$; $Sin.(C + D) = - Sin.(b,d)$; $Sin.(C + D + E) = Sin.(b,e)$; *enz.* de betoogde vergelijking verandert dan in deze:

$$I = \tfrac{1}{2} bc\,Sin.(b,c) + \tfrac{1}{2} bd\,Sin.(b,d) + \tfrac{1}{2} be\,Sin.(b,e) + \ldots$$
$$\tfrac{1}{2} bf\,Sin.(b,f) + \text{enz.}$$
$$+ \tfrac{1}{2} cd\,Sin.(c,d) + \tfrac{1}{2} ce\,Sin.(e,e) + \tfrac{1}{2} cf\,Sin.(c,f) + \text{enz.}$$

+

$$+ \tfrac{1}{2} de\, Sin.(d,e) + \tfrac{1}{2} df\, Sin.(d,f) + enz.$$
$$+ \tfrac{1}{2} ef\, Sin.(e,f) + enz. \quad (17)$$

waaruit blijkt: dat men de eigenſchap nog aldus kan voorſtellen: *De inhoud van eenen vlakken veelhoek is, wanneer men ééne der zijden uitzondert, gelijk aan de halve ſom der producten van al de andere zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, en elk product vermenigvuldigd met den hoek, welke deze twee zijden met elkander maken.* Dan, de wijze, waarop deze eigenſchap, in de ſtelling, is voorgedragen, ſchijnt voor de berekening geſchikter te zijn.

§. 1459. I. Aanmerking. Voor eenen driehoek verandert de algemeene vergelijking in de bekende $I = \tfrac{1}{2} bc \times Sin.\, C.$

§. 1460. II. Aanmerking. Vermits de uitgezonderde zijde a alle waarden kan hebben, kan zij ook $= 0$ geſteld worden, zonder dat deze omſtandigheid de gedaante der vergelijking verandert. Wanneer derhalve al de zijden en hoeken van eenen veelhoek bekend zijn, zal men deszelfs inhoud, even als door de vergelijkingen (14) en (15), op $8n - 4$ onderſcheidene wijzen, kunnen berekenen.

Toepaſſing der voorgaande Beſchouwingen.

§. 1461. Van de verdere Beſchouwing dezer rijke ſtof afſlappende, zullen wij, kortelijk, het nut der betoogde eigenſchappen, in het werkdadige, aanwijzen.

§. 1462. I. Vraagstuk. *Fig.* 458. *In een digt bewaſſen boſch, zijn twee punten A en B gelegen, welker afſtand men ten naauwkeurigſte noodig heeft te kennen: maar het is niet mogelijk, om de lijn AB dadelijk te meten, noch ergens eene baſis te vinden, uit welker uiteinden, de punten A en B te gelijk kunnen gezien worden; men kan alleen, uit B het punt A, en uit A het punt B zien; en, in eene regte lijn, van B tot C, van C tot D, van D tot E, van E tot F, en van F tot A gaan; en deze afſtanden benevens de hoeken A, B, C, D, E, F, meten: men vraagt nu door deze gegevens den afſtand AB te vinden?*

Oplossing. Volgens het *III. Gev. II. Stell.* is:

$$a = b \times Cos.\, B - c \times Cos.(B + C) + d \times Cos.(B + C + D) \; .\; .\; .\; .\; .$$
$$- e \times Cos.(B + C + D + E) + f \times Cos.(B + C + D + E + F)$$

Laat nu gegeven zijn $b = 392^m$, $c = 281^m$, $d = 373^m$, $e = 331^m$, ... $f = 253^m$, $B = 130°$; $C = 145°$; $D = 76°$; $E = 132°$; $F = 142°$; $A = 95°$; dan heeft men:

$B = 130^\circ$	zoek in de Tafel	$50^\circ -$
$B+C = 275^\circ$	. . . .	$85^\circ +$
$B+C+D = 351^\circ$	. . . .	$9^\circ +$
$B+C+D+E = 483^\circ$	. . . .	$57^\circ +$
$B+C+D+E+F = 625^\circ$	. . . .	$85^\circ -$

In dit Tafeltje zijn de teekens van de Cosinusfen der hoeken, achter dezelve gesteld. Om de hoeken te vinden, welke, in de tafel, die slechts tot het eerste quadrant loopt, moeten genomen worden, om de goniometrische lijnen voor bogen, grooter dan 90°, te verkrijgen. *Deelt men het getal der graden, grooter dan 360° zijnde, door 360°, en lette alleen op het overschot: valt dit in het eerste quadrant; dan zoekt men in de tafel, met dit overschot, de goniometrische lijn. Valt het overschot in het tweede quadrant, moet men het van 180° aftrekken; valt het in het derde quadrant, moet men 'er 180° van aftrekken, en valt het in het vierde quadrant, moet het van 360° afgetrokken worden, en men moet, in elk geval, met het verschil, dat altijd minder dan 90° zal zijn, de goniometrische lijn in de tafel zoeken.*

De bijgebragte vergelijking wordt, in ons bijzonder geval, ten opzigte van de gegevens en de teekens,

$$a = -392 \times Cos.\,50^\circ - 281 \times Cos.\,85^\circ + 373 \times Cos.\,9^\circ + 331 \times Cos.\,57^\circ - 253 \times Cos.\,85^\circ$$

Elke term dezer vergelijking wordt door de Logarithmen gemakkelijk berekend. Men zal met behulp van dezelve vinden:

$$a = -251^m,973 - 24^m,491 + 368^m,408 + 180^m,275 - 22^m,050$$
$$\text{of } a = +250^m,169.$$

§. 1463. II. VRAAGSTUK. *Fig.* 458. *Laat alles, als in het voorgaande vraagstuk, gegeven zijn, uitgenomen de hoeken B en A, welke de omstandigheden verhinderd hebben te meten; dan vraagt men de zijde $AB = a$ te vinden?*

OPLOSSING. Volgens de *III. Stelling II. Aanm. V. Stelling*, is:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2bc\ Cos.\ C + 2bd \times Cos.(C+D) - 2be \times Cos.(C+D+E) + 2bf \times Cos.(C+D+E+F) - 2cd \times Cos.\,D + 2ce \times Cos.(D+E) - 2cf \times Cos.(D+E+F) - 2de \times Cos.\,E + 2df \times Cos.(E+F) - 2ef \times Cos.\,F.$$

Hier is nu $C = 145^\circ$; $D = 76^\circ$; $E = 132^\circ$ en $F = 142^\circ$; derhalve heeft men:

$C = 145^\circ$	zoek in de Tafel	$35^\circ -$
$C+D = 221^\circ$	. . . .	$41^\circ -$
$C+D+E = 353^\circ$	. . . .	$7^\circ +$
$C+D+E+F = 495^\circ$	. . . .	$45^\circ -$
$D = 76^\circ$	. . . .	$76^\circ +$
$D+E = 208^\circ$	. . . .	$28^\circ -$
$D+E+F = 350^\circ$	. . . .	$10^\circ +$
$E = 132^\circ$	. . . .	$48^\circ -$
$E+F = 274^\circ$	. . . .	$86^\circ +$
$F = 142^\circ$	. . . .	$38^\circ -$

en de vergelijking wordt diensvolgens:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + 2bc \times Cos.\,35^\circ - 2bd \times Cos.\,41^\circ - 2be \times Cos.\,7^\circ - 2bf \times Cos.\,45^\circ - 2cd \times Cos.\,76^\circ - 2ce \times Cos.\,28^\circ - 2cf \times Cos.\,10^\circ + 2de \times Cos.\,48^\circ + 2df \times Cos.\,86^\circ + 2ef \times Cos.\,38^\circ.$$

De berekening dezer vergelijking zal geven: $a = 240^m, 169$, als boven.

§. 1464. AANMERKING. Men zal nu ook gemakkelijk de hoeken A en B vinden kunnen.

Men heeft, zie *II. Stelling*,

$$b = c \times Cos.\,C - d \times Cos.\,(C + D) + e \times Cos.\,(C + D + E) \;.\;.\;.\;.\;. \; - f \times Cos.\,(C + D + E + F) + a \times Cos.\,(C + D + E + FA)$$

$$f = e \times Cos.\,F - d \times Cos.\,(F + E) + c \times Cos.\,(F + E + D) \;.\;.\;.\;.\;. \; - b \times Cos.\,(F + E + D + C) + a \times Cos.\,(F + E + D + C + B)$$

waaruit volgt:

$$a \times Cos.\,(C + D + E + F + A) = b - c \times Cos.\,C + d \times Cos.\,(C + D) \;.\;.\;. \; - e \times Cos.\,(C + D + E) + f \times Cos.\,(C + D + E + F)$$

$$a \times Cos.\,(F + E + D + C + B) = f - e \times Cos.\,F + d \times Cos.\,(F + E) \;.\;.\;. \; - c \times Cos.\,(F + E + D) + b \times Cos.\,(F + E + D + C)$$

waardoor $C + D + E + F + A$ en $F + E + D + C + B$, en bijgevolg A en B, berekend kunnen worden.

§. 1465. III. VRAAGSTUK. *Fig.* 458. *Wanneer van den veelhoek ABCDEF dezelfde dingen, als in het eerste en tweede vraagstuk, gegeven zijn, begeert men den inhoud te vinden?*

OPLOSSING. Door de toepassing van elk der formulen (14), (15) en (16), zal men den inhoud vinden.

§. 1466. IV. VRAAGSTUK. *Fig.* 464. *Drie zijden $AB = a$, $AD = d$, $DC = c$, eens vierhoeks, met de twee ingesloten hoeken A en D, gegeven zijnde, de zijde b, benevens de hoeken B en C te vinden?*

OPLOSSING. Men heeft (*II. Stell. en II. Aanm. V. Stell.*)

$$a = b \times Cos.\,B - c \times Cos.\,(B + C) + d \times Cos.\,(B + C + D)$$

maar $B + C + D = 360^\circ - A$ en $B + C = 360^\circ - (A + D)$ zijnde, is $Cos.\,(B + C + D) = Cos.\,A$ en $Cos.\,(B + C) = Cos.\,(A + D$, en de vergelijking wordt derhalve:

$$b \times Cos.\,B = a + c \times Cos\,(A + D) - d \times Cos.\,A \;.\;.\;.\;. \quad (\mu)$$

Nog is (*IV. Stell.*)

$$b \times Sin.\,B = - c \times Sin.\,(B + C) + d \times Sin.\,(B + C + D)$$

of $b \times Sin.\,B = d \times Sin.\,A - c \times Sin.\,(A + D)$

deelt men deze vergelijking door de vergelijking (μ); dan verkrijgt men:

$$Tang.\,B = \frac{d \times Sin.\,A - c \times Sin.\,(A + D)}{a - d \times Cos.\,A + c \times Cos.\,(A + D)}$$

Op dezelfde wijze, zal men vinden:

$$Tang.\,C = \frac{d \times Sin.\,D - c \times Sin.\,(A + D)}{a - d \times Cos.\,D + c \times Cos.\,(A + D)}$$

Deze hoeken gevonden hebbende, zal de zijde b, door de vergelijking

$b =$

$$b = \frac{d \times Sin.A - c \times Sin.(A+D)}{Sin.B}$$

berekend worden.

§. 1467. V. Vraagstuk. *Fig.* 465. *Om den inhoud eens vijfhoeks ABCDE te vinden, heeft men gemeten ééne der zijden $AB = a$; aan het hoekpunt A, de hoeken EAB, DAB en CAB, gelijk p, q en r; en, aan het hoekpunt B, de hoeken ABE, ABD en ABC, gelijk aan p', q' en r'. Men vraagt: hoe, door deze gegevens, den inhoud van den veelhoek kan gevonden worden?*

Oplossing. Men zal met behulp van de *II. en IX. Stell. IX. B.* vinden: (den inhoud $= I$ ftellende)

$$I = \tfrac{1}{2}a^2 \times \left\{ \frac{Sin.p' \times Sin.q' \times Sin.(p-q)}{Sin.(p+p') \times Sin.(q+q')} + \frac{Sin.q' \times Sin.r' \times Sin.(q-r)}{Sin.(q+q') \times Sin.(r+r')} + \frac{Sin.r \times Sin.r'}{Sin.(r+r')} \right\}$$

en ook nog deze andere vergelijking:

$$I = \tfrac{1}{2}a^2 \times \left\{ \frac{Sin.r \times Sin.q \times Sin.(r'-q')}{Sin.(r+r') \times Sin.(q+q')} + \frac{Sin.q \times Sin.r \times Sin.(q'-r')}{Sin.(q+q') \times Sin.(r+r')} + \frac{Sin.p \times Sin.p'}{Sin.(p+p')} \right\}$$

Algemeene Eigenfchappen der veelvlakkige Ligchamen (Polyedrometrie.)

§. 1468. III. Bepaling. *Fig.* 458. Men kan, bij elke vlakke figuur, eene zekere lijn PQ in dit vlak gelegen, en in hetzelve naar welgevallen geplaatst zijnde, aannemen, en alle punten, bepaalde lijnen of zijden der figuur, naar de *V en VI. Bep. X. B.*, op deze alzoo aangenomene lijn PQ, projecteren. Men noemt dan deze aangenomene lijn PQ de *lijn van projectie*, en de lijn $A'B'$, begrepen tusfchen de loodlijnen AA' en BB', welke uit de uiteinden van eenige lijn AB op de lijn van projectie vallen, de *projectie van AB op PQ*, fomtijds eenvoudig de *projectie van AB*. En de hoek, onder welken het verlengde van AB de lijn van projectie ontmoet, wordt de *projectie hoek* van de lijn AB genoemd. Wij zullen in het vervolg dezen projectie hoek door (AB) uitdrukken, of $AB = a$ ftellende door (a). — Wanneer, *fig.* 458, eene lijn AB op een vlak PQ geprojecteerd wordt, (zie *VI. Bep. X. B.*) wordt de projectie van die lijn, op het vlak van projectie, volmaakt, op dezelfde wijze, bepaald.

§. 1469. IV. Bepaling. *Fig.* 463. De projectie $A'B'C'D'E'$ van eenige vlakke figuur $ABCDE$, op een vlak PQ, dat als het vlak van projectie wordt aangenomen, kan begrepen worden, aldus te ontstaan. Men verbeelde zich, op het vlak van projectie, eene onbepaalde loodlijn QR, en dat eene lijn, den omtrek der gegevene figuur volgende, evenwijdig aan deze rigtlijn QR bewogen worde; dan wordt 'er (*I. Bep. XII. B.*) een cilinder vlak geboren, hetwelk, op het vlak van projectie, eene vlakke figuur $A'B'C'D'E$ bepaalt, welke vlakke figuur de projectie van de *gestelde* figuur $ABCDE$, op het vlak PQ, genoemd wordt. De hoek, onder welken het gegeven vlak het vlak van projectie ontmoet, wordt ook hier de projectie hoek genoemd, en door $(ABCDE)$ uitgedrukt.

I. Lemma *Fig.* 462.

§. 1470. *De projectie $A'B'$ van eenige lijn AB is gelijk aan deze lijn vermenigvuldigd met de Cosinus van haren projectie hoek. Dat is $A'B' = AB \times Cos.(AB)$.*

Betoog. Want, indien men AR evenwijdig aan $A'B'$ trekt; dan is (*XXIV. Stell. I. B.*) hoek $BAR = (AB)$ en (*I. Stell. III. B.*) $AR = A'B'$; nu is (*II. Stell. IX. B.*) $AR = AB \times Cos. BAR$; dat is, $A'B' = AB \times Cos.(AB)$.

§. 1471. Aanmerking. Indien AB evenwijdig aan $A'B'$ is, wordt $(AB) =$ hoek $BAR = 0$; nu is de $Cos. 0^\circ = 1$, derhalve $A'B' = AB$. Maar is AB loodregt op de lijn van projectie; dan is $(AB) = 90^\circ$, $Cos.(AB) = 0$ en $A'B' = 0$.

II. Lemma. *Fig.* 462 *en* 463.

§. 1472. *De projectie van eenige vlakke figuur, op haar vlak van projectie, is gelijk aan die figuur, vermenigvuldigd met de Cosinus van haren projectie hoek.*

Betoog. Men moet deze stelling wel bijzonderlijk van eene vlakke figuur verstaan, en bij de bewoordingen *vlakke* figuur en hare *projectie* aan de inhouden van de figuur en van hare projectie denken.

Laat, *Fig.* 462, PQ het vlak projectie, ABC een driehoek $A'B'C'$

zijne projectie zijn; dan zijn AA', BB' en CC', loodregt op PQ. Men brenge door de loodlijn AA' een vlak $A'D'DA$, hetwelk loodregt op het vlak van den driehoek ABC staat; dan staan (*XI. Stell. X. B.*) de doorsneden der vlakken van ABC en $A'B'C'$ loodregt op het vlak $A'D'DA$, en de verlengde der lijnen AD en $A'D'$, welke elkander in de doorsnede ontmoeten, maken met dezelve (*IV. Stell. X. B.*) een' regten hoek, en de hoek, onder welken deze lijnen elkander snijden, is (*XIV. Bep. X. B.*) de standhoek der vlakken ABC en $A'B'C'$, en (*III. Bep.*) gevolgelijk de projectie hoek van den driehoek ABC. Men denke nu, in het hoekpunt A', het middelpunt van eenen bol, welks oppervlak door de vlakken $A'C'D'$, $A'C'CA$, $A'D'DA$, in de bogen qr, pq en pr, gesneden wordt; voorts brenge men, door het punt A', een vlak $A'cd$, evenwijdig aan ACD: dit vlak bepaalt den boog cd, en omdat dit vlak (*XXVIII. Stell. X. B.*) regthoekig op $A'D'DA$ staat, is de bolvormige driehoek pcd regthoekig in d; eindelijk is $pq = pr = 90°$; $p = qr =$ hoek $D'A'C'$ en $dc =$ hoek DAC; dr de projectie hoek van ABC, en tevens de projectie hoek van de lijn AD, terwijl cq de projectie hoek van AC is. Men heeft dan (*I. Stell.*) $A'D' = AD \times Cos.\, dr = AD \times Sin.\, pd$, en $A'C' = AC \times Cos.\, cq = AC \times Sin.\, pc$. Nog is (*IX. St. XIII. B.*) $Sin.\, dc = Sin.\, p \times Sin.\, pc = Sin.\, qr \times Sin.\, pc$; dat is, $Sin.\, DAC = Sin.\, D'A'C' \times Sin.\, pc$. Nog is (*IX. Stell. IX. B.*) ... $Inh.\, ACD = \frac{1}{2} AD \times AC \times Sin.\, DAC = \frac{1}{2} AD \times AC \times Sin.\, D'A'C' \times Sin.\, pc$; en $Inh.\, A'C'D' = \frac{1}{2} A'D' \times A'C' \times Sin.\, D'A'C' =$ (zie boven) $= \frac{1}{2} AD \times AC \times Sin.\, pd \times Sin.\, pc \times Sin.\, D'A'C' = \ldots$ $Inh.\, ACD \times Sin.\, pd = Inh.\, ACD \times Cos.\, dr$. Men heeft derhalve de projectie hoek van ACD gelijk P stellende,

$$Inh.\, A'B'D' = Inh.\, ABD \times Cos.\, P$$
$$Inh.\, A'C'D' = Inh.\, ACD \times Cos.\, P$$

derhalve zal ook (de tweede van de eerste vergelijking aftrekkende,)

$$Inh.\, A'B'C' = Inh.\, ABC \times Cos.\, P$$

moeten zijn.

Laat verder *Fig.* 463, $ABCDE$ een veelhoek zijn, welks projectie hoek op het vlak PQ door P wordt uitgedrukt; dan zal (*bew.*) uit eenig punt A de hoekpuntslijnen AC *enz.* trekkende, $A'B'C' = ABC \times Cos.\, P$, $A'C'D' = ACD \times Cos.\, P$, *enz.* zijn derhalve $A'B'C'D'E' = ABCDE \times Cos.\, P$.

Wanneer men eindelijk, in eene kromlijnige vlakke figuur, een veelhoek

hoek van groot aantal zijden beschrijft, zal men gemakkelijk bewijzen, dat het gestelde ook voor zulk eene figuur gelden zal.

§. 1473. Aanmerking. Wanneer $P = 0$ is; dan wordt $A'B'C'D'E' = ABCDE$.

VII. Stelling.

§. 1474. *De som der producten van alle de zijvlakken van een veelvlakkig ligchaam, elk vermenigvuldigd met de Cosinus van den hoek, welke dat zijvlak, met eenig naar welgevallen aangenomen vlak, maakt, is, op welk eene wijze ook dit vlak geplaatst zij, gelijk nul.*

Betoog. Wanneer men, op het aangenomen vlak, eene loodlijn stelt, en, evenwijdig aan dezelve, eene lijn laat bewegen, welke altijd langs de ribben of zijvlakken van het ligchaam loopt, ziet men: dat hetzelve, binnen de zijvlakken van een regt veelhoekig prisma, kan besloten worden, welks grondvlak in het onbepaald aangenomen vlak zal gelegen zijn. Dit grondvlak zal klaarblijkelijk de projectien van alle de zijvlakken van het veelvlakkig ligchaam bevatten, welke projectien, daarom, omdat de zijvlakken, in het beloop der ribben, aan elkander sluiten, ook door regte lijnen aan elkander vereënigd, en tot aan de grensen van de grondvlakte van het regte prisma zullen uitgestrekt zijn. Zonder dat het nu noodig zij, eene bijzondere figuur te ontwerpen, ziet men duidelijk: dat de zijvlakken, welke, op dit grondvlak, geprojecteerd zijn, ten aanzien van het aangenomen vlak, tweederlei stand kunnen hebben: 1° zijvlakken, welken, met haar buitenkant, naar dit vlak liggen: 2° zijvlakken, welker binnenkant naar hetzelve staan, en dat de som der projectien, zoowel van de eerste als van de laatste soort van zijvlakken, gelijk zal moeten zijn aan de basis van het regte prisma. Noemen wij nu de zijvlakken van de eerste soort a, b, c, d, *enz.* en die van de tweede soort a', b', c', *enz.* en de hoeken, welke deze zijvlakken met het aangenomen vlak maken (a), (b), *enz.*; dan zullen de projectien van a, b, c, *enz.* op het aangenomen vlak (*II. Lemma*) door $a \times Cos.(a)$, $b \times Cos.(b)$, $c \times Cos.(c)$, worden uitgedrukt, en omdat (raadpleeg *Betoog I. Stell. en I. Aanm.* op dezelve,) de ligging van de eerste met de tweede soort van zijvlakken, ten opzigte van het aangenomen vlak, door het teeken van de Cosinus van den projectie hoek wordt aangewezen, zullen de projectien van a', b', *enz.* door $-a' \times Cos.(a')$, ...

$-b \times Cos.(b')$, *enz.* worden aangewezen; noemende derhalve B het grondvlak van het regte prisma; dan zal

$$B = +a \times Cos.(a) + b \times Cos.(b) + c \times Cos.(c) + enz.$$
$$B = -a' \times Cos.(a') - b' \times Cos.(b') - c \times Cos.(c') - enz.$$

en trekt men de tweede van de eerste vergelijking af; dan vindt men:

$$a \times Cos.(a) + b \times Cos.(b) + c \times Cos.(c) + enz. + a' \times Cos.(a') + b' \times Cos.(b') + c' \times Cos.(c') enz. = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

§. 1475. GEVOLG. Men zal, (noemende s de halve som der zijvlakken,) gelijk in §. 1435, vinden:

$$s = a \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a) + b \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(b) + c \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(c) + enz. \quad (19)$$

VIII. STELLING.

§. 1476. *Elk zijvlak van een veelvlakkig ligchaam is gelijk aan de som der producten, die men verkrijgt, wanneer men elk der andere zijvlakken vermenigvuldigt met de Cosinus van den hoek, welk dit zijvlak met het eerste maakt: Dat is: a, b, c, d, e, f, enz. de zijvlakken zijnde; dan zal*

$$a = b \times Cos.(a,c) + c \times Cos.(a,c) + d \times Cos.(a,d) + enz.$$
$$b = a \times Cos.(b,a) + c \times Cos.(b,c) + d \times Cos.(b,d) + enz.$$
$$c = a \times Cos.(c,a) + b \times Cos.(c,b) + d \times Cos.(c,d) + enz.$$
$$enz. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20$$

zijn.

BETOOG. Deze waarheid wordt, op dezelfde wijze, als de *II. Stell.* bewezen.

§. 1477. GEVOLG. Noemende s de halve som der zijvlakken, dan heeft men: (zie §. 1437 en 1438.)

$$s = b \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,b) + c \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + d \times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,d) + enz. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

$$(s-a) = b \times Sin^2.\tfrac{1}{2}(a,b) + c \times Sin^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + d \times Sin^2.\tfrac{1}{2}(a,d) + enz. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

IX. STELLING.

§. 1478. *De som van de inhouden van de vierkanten der zijvlakken van een veelvlakkig ligchaam, is gelijk aan de dubbelde som van de producten der zijden, op alle mogelijke wij-*

wijzen, twee aan twee genomen, en elk vermenigvuldigd met de Cosinus van den tweevlakkigen hoek, welke zij met elkander maken. Dat is:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+enz.=2ab\times Cos.(a,b)+\ldots\ldots$$
$$2ac\times Cos.(a,c)+enz.+2bc\times Cos.(b,c)+enz. \qquad (23)$$

Betoog. Deze waarheid wordt, uit de voorgaande stelling, op dezelfde wijze, als de III uit de II. *Stell.*, afgeleid.

§. 1479. I. Gevolg. Stellende $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+enz.=s$; zal,

$$s^2=ab\times Cos.\tfrac{1}{2}(a,b)+ac\times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,c)+ad\times Cos^2.\tfrac{1}{2}(a,d)+enz.$$
$$+bc\times Cos^2.\tfrac{1}{2}(b,c)+bd\times Cos^2.\tfrac{1}{2}(b,d)+enz.$$
$$+cd\times Cos^2.\tfrac{1}{2}(c,d)+enz.$$
$$+enz.\quad\ldots\ldots \qquad (24)$$

gevonden worden.

§. 1480. II. Gevolg. Men zal ook gelijk in §. 1443, vinden:

$$a^2=b^2+c^2+d^2+enz.-2[bc\times Cos.(b,c)+bd\times Cos.(b,d)+ enz.+cd\times Cos.(c,d)+enz.] \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (25)$$

§. 1481. III. Gevolg. Voor eene driehoekige piramide, zal dan $a^2=b^2+c^2+d^2-2bc\times Cos.(b,c)-2bd\times Cos.(b,d)\ldots -2cd\times Cos.(c,d)$ zijn. Laten nu de hoeken (b,c), (b,d) en (c,d) regt zijn; dan zijn hunne Cosinussen $=0$, en de vergelijking wordt $a^2=b^2+c^2+d^2$, hetwelk instemt met de oplossing van het *XXXIX. Vraagstuk, XIII. B., Bladz.* 499.

§. 1482. Aanmerking. Het blijkt, uit de drie laatste Boeken, hoe naauw de eigenschappen der figuren met elkander overëénstemmen. Deze overëénstemming opent eene bron van nieuwe waarheden, welke, wij bij eene andere gelegenheid, hoopen te leeren kennen.

Einde van het vijftiende en laatste Boek.

NOODIGE

TABELLES.

I. TABELLE, *bevattende de meest gebruikelijke Goniometrische Formulen.*

NB. De gewone Sinus-tafel geeft de goniometrische lijnen slechts van 0° tot 90°. En dit is genoeg, om dezelve voor hoeken of bogen, die grooter dan 90° zijn, te vinden. *Laat n het getal graden zijn. Men deele hetzelve door* 360, *en lette op de rest der deeling, die wij r noemen, en welke rest in het eerste, tweede, derde of vierde quadrant kan vallen, men zoeke met r*, $180 - r$, $r - 180$ *of* $360 - r$, *naar dat r in het eerste, tweede, derde of vierde quadrant valt, in de tafel, de begeerde goniometrische lijn, welke dan ook tot eenen hoek of boog van die n graden zal behooren.* Het teeken, waarmede dezelve moet aangedaan worden, vindt men door de tafel, op *Bladz.* 194.

I. *Waardijen der Goniometrische Lijnen voor bijzondere bogen.*

Zij n een geheel getal, en $\pi = 180°$.

$Sin.\ 0° = Sin.\ 180° = Sin.\ n\pi = 0$

$Sin.\ 90° = Sin.\ \tfrac{1}{2}(4n+1) \times \pi = +1$

$Sin.\ 270° = Sin.\ \tfrac{1}{2}(4n+3) \times \pi = -1$

$Cos.\ 0° = Cos.\ 2n\pi = +1$

$Cos.\ 90° = Cos.\ 270° = Cos.\ \tfrac{1}{2}(4n+1)\pi = Cos.\ \tfrac{1}{2}(4n+3)\pi = 0$

$Cos.\ 180° = Cos.\ n\pi = -1$

$Tang.\ 0° = Tang.\ 180° = Tang.\ n\pi = 0$

$Tang.\ 90° = Tang.\ \tfrac{1}{2}(4n+1) \times \pi = \infty$

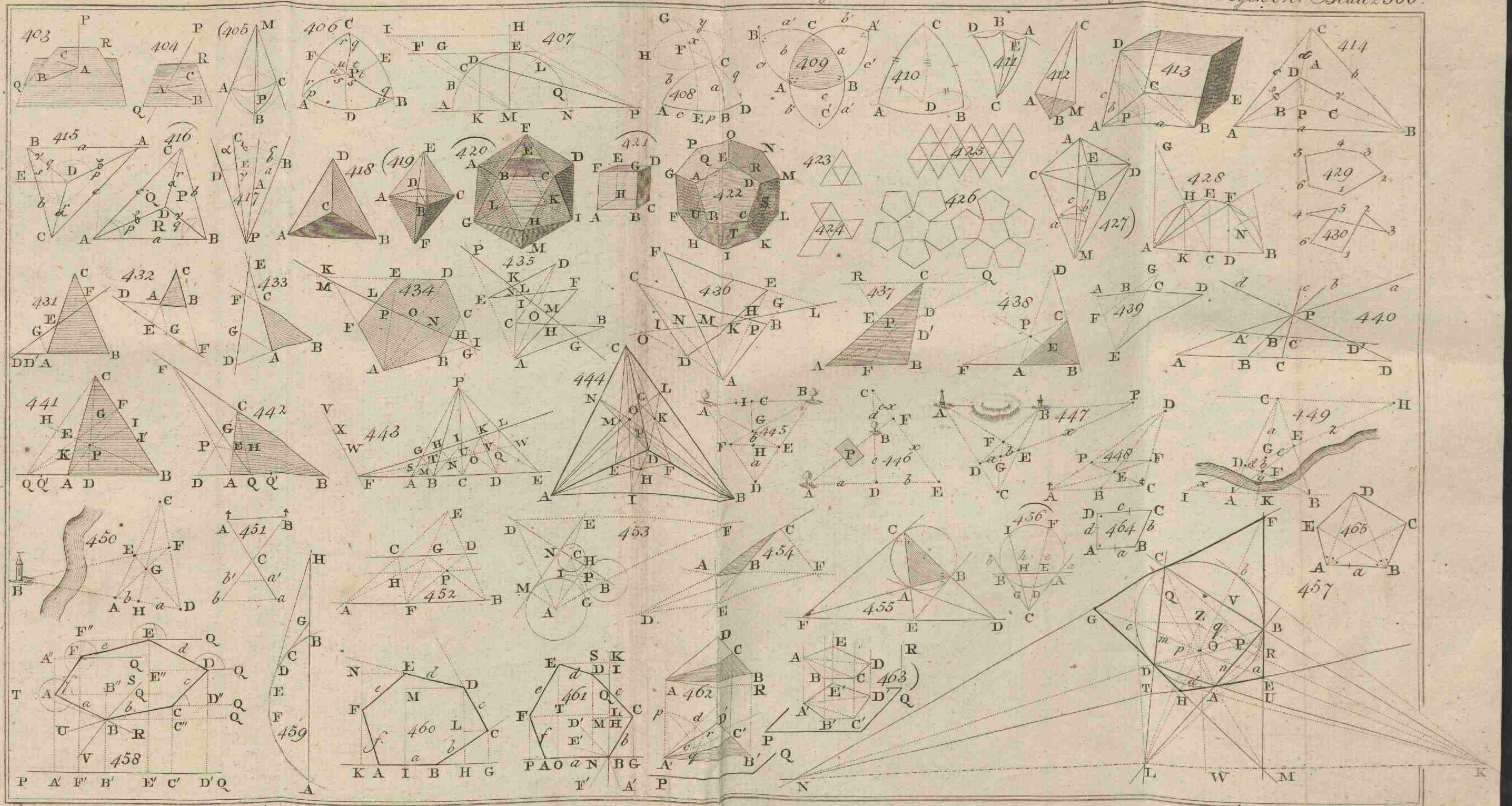
$Tang.\ 270° = Tang.\ \tfrac{1}{2}(4n+3) \times \pi = \infty$

$Cot.\ 0° = Cot.\ 180° = Cot.\ 2n\pi = Cot.\ (2n+1)\pi = \infty$

$Cot.\ 90° = Cot.\ 270° = Cot.\ \tfrac{1}{2}(4n+1)\pi = Cot.\ \tfrac{1}{2}(4n+3)\pi = 0$

II.

φ φ



Jac. de Gelder delin. A. Zurcher sculp.

II. *Naauwkeurige waarden der Sinussen en Cosinussen van 3 tot 3 Sexagesimale graden.*

$Sin.\ 0^\circ = Cos.\ 90^\circ = 0$

$Sin.\ 3^\circ = Cos.\ 87^\circ = \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).(-1+\sqrt{5}) - \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}).\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$Sin.\ 6^\circ = Cos.\ 84^\circ = -\frac{1}{8}(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$

$Sin.\ 9^\circ = Cos.\ 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$Sin.\ 12^\circ = Cos.\ 78^\circ = -\frac{1}{8}(\sqrt{15}-\sqrt{3}) + \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

$Sin.\ 15^\circ = Cos.\ 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$Sin.\ 18^\circ = Cos.\ 72^\circ = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$

$Sin.\ 21^\circ = Cos.\ 69^\circ = -\frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(1+\sqrt{3}).\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$Sin.\ 24^\circ = Cos.\ 66^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) - \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

$Sin.\ 27^\circ = Cos.\ 63^\circ = -\frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$Sin.\ 30^\circ = Cos.\ 60^\circ = \frac{1}{2}$

$Sin.\ 33^\circ = Cos.\ 57^\circ = \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).(-1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}).\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$Sin.\ 36^\circ = Cos.\ 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

$Sin.\ 39^\circ = Cos.\ 51^\circ = \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).(1+\sqrt{5}) - \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}).\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$Sin.\ 42^\circ = Cos.\ 48^\circ = -\frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})}$

$Sin.\ 45^\circ = Cos.\ 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$Sin.\ 48^\circ = Cos.\ 42^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{15}-\sqrt{3}) + \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

$Sin.\ 51^\circ = Cos.\ 39^\circ = \frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(1+\sqrt{3}).\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$Sin.\ 54^\circ = Cos.\ 36^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$

$Sin.\ 57^\circ = Cos.\ 33^\circ = -\frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).(-1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(1+\sqrt{3}).\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$Sin.\ 60^\circ = Cos.\ 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$Sin.\ 63^\circ = Cos.\ 27^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$Sin.\ 66^\circ = Cos.\ 24^\circ = \frac{1}{8}(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$

$Sin.\ 69^\circ = Cos.\ 21^\circ = \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}).\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$Sin.\ 72^\circ = Cos.\ 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

$Sin.\ 75^\circ = Cos.\ 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$Sin.\ 78^\circ = Cos.\ 12^\circ = \frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})}$

$Sin.\ 81^\circ = Cos.\ 9^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$Sin.\ 84^\circ = Cos.\ 6^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) + \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

$$Sin.\,87^\circ = Cos.\,3^\circ = \tfrac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).(-1+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{8}(1+\sqrt{3}).\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$Sin.\,90^\circ = Cos.\,0^\circ = 1$$

$$Tang.\,15^\circ = Cot.\,75^\circ = 2-\sqrt{3}$$
$$Tang.\,18^\circ = Cot.\,72^\circ = \sqrt{(1-\tfrac{2}{5}\sqrt{5})}$$
$$Tang.\,30^\circ = Cot.\,60^\circ = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$Tang.\,36^\circ = Cot.\,72^\circ = \sqrt{(5-2\sqrt{5})}$$
$$Tang.\,45^\circ = Cot.\,45^\circ = 1$$
$$Tang.\,54^\circ = Cot.\,36^\circ = \sqrt{(1+\tfrac{2}{5}\sqrt{5})}$$
$$Tang.\,60^\circ = Cot.\,30^\circ = \sqrt{3}$$
$$Tang.\,72^\circ = Cot.\,18^\circ = \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$$
$$Tang.\,75^\circ = Cot.\,15^\circ = 2+\sqrt{3}$$

III. *Onderlinge betrekking van de Goniometrische Lijnen, welke tot denzelfden boog behooren.*

$Sin^2.a + Cos^2.a = 1$ . .	(1)	$Tang.a = Sin.a : Cos.a$.	(12)
$Sin^2.a = 1 - Cos^2.a$ . . .	(2)	$Cot.a = Cos.a : Sin.a$.	(13)
$Cos^2.a = 1 - Sin^2.a$ . .	(3)	$Sin.a = Tang.a \times Cos.a$	(14)
$Sin.a = \pm\sqrt{(1 - Cos^2.a)}$	(4)	$Cos.a = Cot.a \times Sin.a$	(15)
$Cos.a = \pm\sqrt{(1 - Sin^2.a)}$	(5)	$Sin.a = Cos.a : Cot.a$.	(16)
$Sec^2.a = 1 + Tang^2.a$ . .	(6)	$Cos.a = Sin.a : Tang.a$	(17)
$Tang^2.a = Sec^2.a - 1$ . .	(7)	$Tang.a \times Cot.a = 1$ . .	(18)
$Sec.a = \pm\sqrt{(1 + Tang^2.a)}$	(8)	$Sec.a = 1 : Cos.a$ . .	(19)
$Cosec^2.a = 1 + Cot^2.a$ . .	(9)	$Cosec.a = 1 : Sin.a$ . .	(20)
$Cot^2.a = Cosec^2.a - 1$ . .	(10)	$Sec.a \times Cos.a = 1$ . .	(21)
$Cosec.a = \pm\sqrt{(1 + Cot^2.a)}$	(11)	$Cosec.a \times Sin.a = 1$ . .	(22)

IV. *Merkwaardigste Goniometrische Formulen, tot twee of meer bogen behoorende* (*).

$$Sin.(a+b) = Sin.a \times Cos.b + Sin.b \times Cos.a \quad . \quad . \quad (23)$$
$$Sin.(a-b) = Sin.a \times Cos.b - Sin.b \times Cos.a \quad . \quad . \quad (24)$$
$$Cos.(a+b) = Cos.a \times Cos.b - Sin.a \times Sin.b \quad . \quad . \quad (25)$$
$$Cos.(a-b) = Cos.a \times Cos.b + Sin.a \times Sin.b \quad . \quad . \quad (26)$$

Sin.

(*) De formulen, welke met een * gemerkt zijn, zijn in het VIII Boek niet betoogd, maar volgen echter ligtelijk uit de overigen.

$$Sin.(a+b+c)=\left\{\begin{array}{l} Sin.a\times Cos.b\times Cos.c \\ Sin.b\times Cos.a\times Cos.c \\ Sin.c\times Cos.a\times Cos.b \end{array}\right\}-Sin.a\times Sin.b\times Sin.c \quad (27)$$

$$Sin.(a+b+c)=\left\{\begin{array}{l} Cos.(a+b)\times Sin.c \\ Cos.(a+c)\times Sin.b \\ Cos.(b+c)\times Sin.a \end{array}\right\}+2Sin.a\times Sin.b\times Sin.c \quad (28)$$

$$Cos.(a+b+c)=Cos.a\times Cos.b\times Cos.c-\left\{\begin{array}{l} Cos.a\times Sin.b\times Sin.c \\ Cos.b\times Sin.a\times Sin.c \\ Cos.c\times Sin.a\times Sin.b \end{array}\right\} \quad (29)$$

$$Cos.(a+b+c)=\left\{\begin{array}{l} Cos.(a+b)\times Cos.c \\ Cos.(a+c)\times Cos.b \\ Cos.(b+c)\times Cos.a \end{array}\right\}-2Cos.a\times Cos.b\times Cos.c \quad (30)$$

1° Stel $a+b+c=90°$; dan is:

$1-Sin^2.a-Sin^2.b-Sin^2.c-2\,Sin.a\times Sin.b\times Sin.c=0$ (31)

en * $Sin.2a+Sin.2b+Sin.2c=4\,Cos.a\times Cos.b\times Cos.c$ ... (32)

2° Stel $a+b+c=180°$; dan is:

$1-Cos^2.a-Cos^2.b-Cos^2.c-2\,Cos.a\times Cos.b\times Cos.c=0$ (33)

* $1=Cot.a\times Cot.b+Cot.a\times Cot.c+Cot.b\times Cot.c$ ... (34)

* $Tang.a+Tang.b+Tang.c-Tang.a\times Tang.b\times Tang.c=0$ (35)

* $Tang.a\times Tang.b+Tang.a\times Tang.c+Tang.b\times Tang.c=1-Sec.a\times Sec.b\times Sec.c$ . . . . (36)

3° Stel $a+b+c=360°$; dan is:

$1-Cos^2.a-Cos^2.b-Cos^2.+2\,Cos.a\times Cos.b\times Cos.c=0$ (37)

* $Tang.a+Tang.b+Tang.c-Tang.\times Tang.c\times Tang.c=0$ (38)

$Sin.2a=2\,Sin.a\times Cos.a$ . . . . . . (39)

$Sin.p=2\,Sin.\tfrac{1}{2}p\times Cos.\tfrac{1}{2}p$ . . . . . . (40)

$1-Cos.p=2\,Sin^2.\tfrac{1}{2}p$ . . . . (41)

$1+Cos.p=2\,Cos^2.\tfrac{1}{2}p$ . . . . (42)

* $1-Sin.p=2\,Sin^2.(45°-\tfrac{1}{2}p)$ . . . . . (43)

* $1+Sin.p=2\,Cos^2.(45°-\tfrac{1}{2}p)$ . . . . . (44)

* $1+Tang.p=\dfrac{Cos.(45°-p)}{Cos.p}\times\sqrt{2}$ . . . (45)

* $1-Tang.p=\dfrac{Sin.(45°-p)}{Cos.p}\times\sqrt{2}$ . . . (46)

* $1+Sec.p=Cot.\tfrac{1}{2}p\times Tang.p$ . . . . . (47)

* $1-Sec.p=-Tang.\tfrac{1}{2}p\times Tang.p$ . . . (48)

$$Tang.(a+b)=\frac{Tang.a+Tang.b}{1-Tang.a\times Tang.b}=\frac{Cot.a+Cot.b}{Cot.a\times Cot.b-1} \quad (49)$$

$$Tang.(a-b)=\frac{Tang.a-Tang.b}{1+Tang.a\times Tang.b}=\frac{Cot.b-Cot.a}{Cot.a\times Cot.b+1} \quad (50)$$

$$^{*}\,Tang.(45^\circ \pm a)=Cot.(45^\circ \mp a) \quad \ldots \quad (51)$$

$$\frac{1+Tang.b}{1-Tang.b}=Tang.(45^\circ+b)=Cot.(45^\circ-b) \quad \ldots \quad (52)$$

$$\frac{1-Tang.b}{1+Tang.b}=Tang.(45^\circ-b)=Cot.(45^\circ+b) \quad \ldots \quad (53)$$

$$\frac{Cot.b+1}{Cot.b-1}=Tang.(45^\circ+b)=Cot.(45^\circ-b) \quad \ldots \quad (54)$$

$$\frac{Cot.b-1}{Cot.b+1}=Tang.(45^\circ-b)=Cot.(45^\circ+b) \quad \ldots \quad (55)$$

$$Tang.2a=\frac{2\,Tang.a}{1-Tang^2.a} \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

$$Sin.a\times Cos.b=\tfrac{1}{2}Sin.(a+b)+\tfrac{1}{2}Sin.(a-b) \quad \ldots \quad (57)$$

$$Sin.b\times Cos.a=\tfrac{1}{2}Sin.(a+b)-\tfrac{1}{2}Sin.(a-b) \quad \ldots \quad (58)$$

$$Sin.a\times Sin.b=\tfrac{1}{2}Cos.(a-b)-\tfrac{1}{2}Cos.(a+b) \quad \ldots \quad (59)$$

$$Cos.a\times Cos.b=\tfrac{1}{2}Cos.(a+b)+\tfrac{1}{2}Cos.(a-b) \quad \ldots \quad (60)$$

$$Sin.p+Sin.q=2\,Sin.\tfrac{1}{2}(p+q)\times Cos.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots \quad (61)$$

$$Sin.p-Sin.q=2\,Sin.\tfrac{1}{2}(p-q)\times Cos.\tfrac{1}{2}(p+q) \quad \ldots \quad (62)$$

$$Cos.p+Cos.q=2\,Cos.\tfrac{1}{2}(p+q)\times Cos.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots \quad (63)$$

$$Cos.q-Cos.p=2\,Cos.\tfrac{1}{2}(p+q)\times Sin.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots \quad (64)$$

$$\frac{Sin.p+Sin.q}{Sin.p-Sin.q}=\frac{Tang.\tfrac{1}{2}(p+q)}{Tang.\tfrac{1}{2}(p-q)} \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

$$\frac{Cos.p+Cos.q}{Cos.q-Cos.p}=\frac{Cot.\tfrac{1}{2}(p+q)}{Tang.\tfrac{1}{2}(p-q)} \quad \ldots\ldots \quad (66)$$

$$\frac{Cos.p+Cos.q}{Cos.q-Cos.p}=\frac{Cot.\tfrac{1}{2}(p-q)}{Tang.\tfrac{1}{2}(p+q)} \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

$$(Sin.p+Sin.q):(Cos.p+Cos.q)=Tang.\tfrac{1}{2}(p+q) \quad \ldots \quad (68)$$

$$(Sin.p+Sin.q):(Cos.q-Cos.p)=Cot.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots \quad (69)$$

$$(Sin.p-Sin.q):(Cos.p+Cos.q)=Tang.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots \quad (70)$$

$$(Sin.p-Sin.q):(Cos.q-Cos.p)=Cot.\tfrac{1}{2}(p+q) \quad \ldots \quad (71)$$

$$\frac{Sin.p}{1+Cos.p}=Tang.\tfrac{1}{2}p \quad \ldots \quad (72) \qquad \frac{Sin.p}{1-Cos.p}=Cot.\tfrac{1}{2}p \quad \ldots \quad (73)$$

$$Cot.\tfrac{1}{2}p=Cosec.p+Cot.p \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

$$Tang.\tfrac{1}{2}p=Cosec.p-Cot.p \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

$$Cosec.\,p = \tfrac{1}{2}\,Cot.\,\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\,Tang.\,\tfrac{1}{2}p \quad \ldots \quad (76)$$

$$Cot.\,p = \tfrac{1}{2}\,Cot.\,\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}\,Tang.\,\tfrac{1}{2}p \quad \ldots \quad (77)$$

$$Sin.(p+q) : (Sin.p + Sin.q) = Cos.\tfrac{1}{2}(p+q) : Cos.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad (78)$$

$$Sin.(p+q) : (Sin.p - Sin.q) = Sin.\tfrac{1}{2}(p+q) : Sin.\tfrac{1}{2}(p-q) \quad (79)$$

$$\frac{1 - Sin.\,q}{1 + Sin.\,q} = Tang^2.(45^\circ - \tfrac{1}{2}p) \quad \ldots \quad (80)$$

$$\frac{Tang.\,a + Tang.\,b}{Tang.\,a - Tang.\,b} = \frac{Sin.\,(a+b)}{Sin.\,(a-b)} \quad \ldots \quad (81)$$

$$\frac{Cot.\,a + Cot.\,b}{Cot.\,b - Cot.\,a} = \frac{Sin.\,(a+b)}{Sin.\,(a-b)} \quad \ldots \quad (82)$$

$$Sin.\,(a+b) \times Sin.\,(a-b) = Sin^2.\,a - Sin^2.\,b \quad \ldots \quad (83)$$

Laten $a, b, c, d, e, enz. \ldots p, q$ eenige bogen zijn; dan is:

$$* \; Sin^2.\,a - Sin^2.\,p = Sin.\,(a+b) \times Sin.\,(a-b) + Sin.\,(b+c) \times Sin.\,(b-c) + Sin.\,(c+d) \times Sin.\,(c-d) + Sin.\,(d+e) \times Sin.\,(d-e) + enz. + Sin.\,(p+q) \times Sin.\,(p-q) \quad \ldots \quad (84)$$

II. Tabelle. *Gevallen voor de oplossing der regtlijnige Driehoeken.*

NB. De letters a, b en c, beteekenen de zijden; A, B en C, de tegenoverstaande hoeken.

I. Regthoekige Driehoeken, regt in B.

1° Geval. *Gegeven ééne regthoekszijde met éénen der scherpe hoeken.*

$$\text{Gegeven } A \text{ en } c \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \;\; C = 90^\circ - A \\ 2^\circ \;\; a = c \times Tang.\,A \\ 3^\circ \;\; b = c : Cos.\,A = c \times Sec.\,A \end{array} \right\}$$

$$\text{Gegeven } C \text{ en } c \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \;\; A = 90^\circ - C \\ 2^\circ \;\; a = c \times Cot.\,C \\ 3^\circ \;\; b = c : Sin.\,A = c \times Cosec.\,A \end{array} \right\}$$

2° Geval. *Gegeven zijnde de hypothenusa met éénen der scherpe hoeken.*

$$\text{Gegeven } b \text{ en } A \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \;\; C = 90^\circ - A \\ 2^\circ \;\; a = b \times Sin.\,A \\ 3^\circ \;\; c = b \times Cos.\,A \end{array} \right\}$$

$$\text{Gegeven } b \text{ en } C \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \;\; A = 90^\circ - C \\ 2^\circ \;\; a = b \times Cos.\,C \\ 3^\circ \;\; c = b \times Sin.\,C \end{array} \right\}$$

3° Ge-

3° Geval. *Gegeven zijnde de twee regthoekszijden a en c; de ſcherpe hoeken en de hypothenuſa te vinden?*

$$1^\circ\ Tang.\,A = Cot.\,C = \frac{a}{c} \qquad 2^\circ\ Tang.\,C = Cot.\,A = \frac{c}{a}$$

$$3^\circ\ b = \frac{a}{Cos.\,C} = \frac{c}{Cos.\,A} \qquad 4^\circ\ b = \sqrt{(a^2 + c^2)}$$

Anders, om de hoeken A en C te vinden:

$$Tang.\,(A - C) = \frac{(a + c)(a - c)}{2\,a\,c}$$

$$A = 45^\circ + \tfrac{1}{2}(A - C) \text{ en } C = 45^\circ - \tfrac{1}{2}(A - C)$$

En, om b te vinden:

$$\text{Stel } \frac{c}{a} = Tang.\,\varphi; \quad \text{dan is } b = \frac{a}{Cos.\,\varphi}$$

4° Geval. *Gegeven zijnde, éène regthoekszijde en de hypothenuſa.*

$$\textit{Gegeven } b \text{ en } c \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ\ Cos.\,A = Sin.\,C = c : b \\ 2^\circ\ a = c \times Tang.\,A = c \times Cot.\,C \end{array} \right\}$$

$$\textit{Gegeven } b \text{ en } a \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ\ Cos.\,C = Sin.\,A = a : b \\ 2^\circ\ c = a \times Tang.\,C = a \times Cot.\,A \end{array} \right\}$$

Anders, om de hoeken A en C te vinden:

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{b - c}{2b}\right)};\ Cos.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{b + c}{2b}\right)};\ Tang.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{b - c}{b + c}\right)}$$

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\left(\frac{b - a}{2b}\right)};\ Cos.\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\left(\frac{b + a}{2b}\right)};\ Tang.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{b - a}{b + a}\right)}$$

II. Scheefhoekige Driehoeken.

I. Geval. *Gegeven zijnde, éène zijde a, benevens de hoeken B en C, welke aan die zijde gelegen zijn.*

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

$$\text{ſtel } p = a : Sin.\,A; \text{ dan is}$$

$$b = p \times Sin.\,B, \quad \text{en } c = p \times Sin.\,C$$

II. Geval. *Gegeven zijnde twee zijden a en b, met éénen hoek A, tegen over eene dezer zijden.*

$$\text{ſtel } Sin.\,p = \frac{b \times Sin.\,A}{a}$$

nemende dan p altijd kleiner dan 90°; dan heeft de hoek B deze twee waarden.

$$1^\circ\ B = p \qquad 2^\circ\ B = 180^\circ - p$$

hiermede ſtemmen, in rangorde, overëen,

1°

$$1^\circ\ C = 180^\circ - (p + A) \qquad 2^\circ\ C = p - A$$

en, eindelijk, voor de eerste waarde van B:

$$c = \frac{b \times Sin.(p + A)}{Sin.p} = \frac{a \times Sin.(p + A)}{Sin.A},$$

en, voor de tweede waarde van B:

$$c = \frac{b \times Sin.(p - A)}{Sin.p} = \frac{a \times Sin.(p - A)}{Sin.A}$$

Wanneer $b \times Sin.A > a$ is, zijn de gegevens onbestaanbaar, en, $b \times Sin.A = a$ zijnde, zijn beide driehoeken regthoekig, en onderling gelijk.

III. Geval. *Twee zijden a en b, met den ingesloten hoek C gegeven zijnde.*

I. Oplossing. Zij $a > b$; dan is ook $A > B$

stel $a : b = Tang.\phi$

en $Tang.\psi = Tang.(\phi - 45^\circ) \times Tang.(90^\circ - \frac{1}{2}C)$

dan is $A = (90^\circ - \frac{1}{2}C) + \psi$

$B = (90^\circ - \frac{1}{2}C) - \psi$

$c = a \times Sin.C : Sin.A = b \times Sin.C : Sin.B.$

II. Oplossing. Zij nog $a > b$

stel $Tang.\psi = \frac{a - b}{a + b} \times Tang.(90^\circ - \frac{1}{2}C)$

dan is $A = (90^\circ - \frac{1}{2}C) + \psi$

$B = (90^\circ - \frac{1}{2}C) - \psi$

$$c = \frac{(a + b) \times Sin.\frac{1}{2}C}{Cos.\psi} = \frac{(a - b) \times Cos.\frac{1}{2}C)}{Sin.\psi}$$

III. Oplossing. Wanneer men slechts de derde zijde C behoeft te kennen. Stel dan:

$$\frac{a}{b} = Tang.\psi;\ \text{en}\ Sin.\omega = \sqrt{\left\{Sin.2\psi \times Cos.^{\prime}C\right\}};$$

$$\text{dan is}\ c = \frac{b \times Cos.\omega}{Cos.\psi} = \frac{a \times Cos.\omega}{Sin.\psi}$$

IV. Oplossing. Om de derde zijde c alleen te zoeken: stel

$\frac{2\,Cos.\frac{1}{2}C}{a + b} \times \sqrt{ab} = Sin.\mu$; dan is $c = (a + b) \times Cos.\mu.$

V. Oplossing. Om de derde zijde c alleen te zoeken: stel

$\frac{2\,Sin.\frac{1}{2}C}{a - b} \times \sqrt{ab} = Tang.\nu$; dan is $c = \frac{(a - b)}{Cos.\nu}$

VI.

VI. Oplossing. Door de reeksen

$$B = \frac{b}{a} \times \frac{Sin.\,C}{Sin.\,1''} + \frac{b^2}{2\,a^2} \times \frac{Sin.\,2\,C}{Sin.\,1''} + \frac{b^3}{3\,a^3} \times \frac{Sin.\,3\,C}{Sin.\,1''} + \frac{b^4}{4\,a^4} \times \frac{Sin.\,4\,C}{Sin.\,1''} + \frac{b^5}{5\,a^5} \times \frac{Sin.\,5\,C}{Sin.\,1''} + enz.$$

$$Log.\,c = Log.\,a - \frac{b}{a} \times Cos.\,C - \frac{b^2}{2\,a^2} \times Cos.\,2\,C - \frac{b^3}{3\,a^3} \times Cos.\,3\,C - \frac{b^4}{4\,a^4} \times Cos.\,4\,C - \frac{b^5}{5\,a^5} \times Cos.\,5\,C - enz.$$

moetende de termen dezer laatste reeks met den modulus der Briggiaansche Logarithmen, of met 0,43429448, vermenigvuldigd worden.

IV. Geval. *De drie zijden a, b en c, gegeven zijnde, de hoeken te vinden?*

I. Oplossing. Stel $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = s$; dan is:

$$Sin.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)\times(s-c)}{bc}};\ Sin.\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)\times(s-c)}{ac}}$$

$$\text{en } Sin.\,\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)\times(s-b)}{ab}}$$

II. Oplossing. Zij altijd $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$; dan is:

$$Cos.\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s.(s-a)}{bc}};\ Cos.\,\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{s\,(s-b)}{ac}}$$

$$\text{en } Cos.\,\tfrac{1}{2}C \sqrt{\frac{s\,(s-c)}{ab}}$$

III. Oplossing. Stel nogmaals $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$; en maak

$$\Omega = \sqrt{\frac{(s-a).(s-b).(s-c)}{s}};\ \text{dan is}$$

$$Tang.\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\Omega}{s-a};\ Tang.\,\tfrac{1}{2}B = \frac{\Omega}{s-b};\ Tang.\,\tfrac{1}{2}C = \frac{\Omega}{s-c}.$$

III. Tabelle. *Inhoudende de voornaamste eigenschappen der Bolvormige Driehoeken.*

I. Regthoekige.

De letters a, b en c, beteekenen de zijden; A, B en C, de tegenoverstaande hoeken. De driehoek is regt in B.

1° $Sin.\,a = Sin.\,b \times Sin.\,A$; $Sin.\,c = Sin.\,b \times Sin.\,C$.

2° $Tang.\,a = Sin.\,c \times Tang.\,A$; $Tang.\,c = Sin.\,a \times Tang.\,C$.

3° . . . . $Cos.\,b = Cos.\,a \times Cos.\,c$.

4°

4° $Cos.\,A = Cos.\,a \times Sin.\,C$; $Cos.\,C = Cos.\,c \times Sin.\,A$.

5° $Cot.\,A = Tang.\,C \times Cos.\,b$; $Cot.\,C = Tang.\,A \times Cos.\,b$.

6° . . . $1 = Cos.\,b \times Tang.\,A \times Tang.\,C$

7°. $Tang.\,c = Tang.\,b \times Cos.\,A$; $Tang.\,a = Tang.\,b \times Cot.\,C$.

II. Scheefhoekige.

8° $Cos.\,a = Cos.\,A \times Sin.\,c \times Sin.\,b + Cos.\,c \times Cos.\,b$.

9° $Cos.\,A = Cos.\,a \times Sin.\,C \times Sin.\,B - Cos.\,C \times Cos.\,B$.

10° $$Tang.\,a = \frac{Sin.\,b}{Sin.\,C \times Cot.\,A + Cos.\,C \times Cos.\,b}$$

11° $$Tang.\,A = \frac{Sin.\,B}{Sin.\,c \times Cot.\,a - Cos.\,c \times Cos.\,B}$$

Deze zijn de voornaamste grondeigenschappen, op welke al de menigvuldige formulen en vergelijkingen bevatten, welke in het XIII. Boek voorkomen en betoogd zijn, en welke de Leerling, des begeerende, voor zich in eene bijzondere Tafel, tot zijn gemak, naar het model van de tweede Tabelle, verzamelen kan.

EINDE.

Ter Drukkerij van G. POST, te UTRECHT.

VERBETERINGEN.

In een werk van dien aard, als het tegenwoordige, waarin men onophoudelijk op de hoofdzaak is bedacht geweest, is het niet mogelijk, kleine onregelmatigheden en drukfeilen voortekomen, vooral, wanneer de Schrijver, door onaangename en tijdvorderende bezigheden belet, in de correctie der proeven, geene hulp gehad heeft. Onze bijzondere vriend, den Heer J. J. KRANTZ, JR. heeft de goedheid gehad, de afgedrukte bladen, met eene naauwkeurigheid, welke hem bijzonder eigen is, en aangespoord door een voorbeeldeloos belang, dat hij in onzen persoon en in dit werk stelt, na te lezen. Aan hem is de Lezer de volgende verbeteringen alleen verschuldigd. Het geen met ** geteekend is, zijn wezenlijke zinstorende feilen of noodige toelichtingen. Het geen met * geteekend is, raakt de verbetering van letters; de overige betere aanhalingen van stellingen. Alles kan elk, in zijn exemplaar, zonder het te schenden, veranderen. Zij zijn alle nogtans van zoo weinig belang, dat slechts zeer weinige door onze leerlingen, die de afgedrukte bladen gebruikten, zijn bemerkt geworden.

Pag. 14 Reg. 6, van ond. staat IX, lees XI.
* — 18 Reg. 11, van ond. moet aan het begin van den regel gesteld worden *ABI*,
* — 26 einde 8 en begin 9 regel, staat *gelijkzijdige*, lees *gelijkbeenige*.
— 32 Reg. 16, van bov. staat *XXIV*, lees *XXVI*.
* — — Reg. 1, van ond. staat *GFH*, lees *GEH*.
* — 34 Reg. 8, van ond. staat *A* en *B*, lees *A* en *C*.
* — 45 Reg. 5, van bov. staat *met nog Q*, lees *met nog R*.
* — 68 Reg. 15, van bov. staat *ABCD* lees *ABDE*.
— 77 Reg. 9, van ond. staat (*I. Stell. I. B*) lees (*I. Stell. II. B.*)
— 78 Reg. 16, van ond. staat (*VII. Stell. II. B.*) lees (*IV. Stell, II. B.*)
— 79 Reg. 15 en 14, van ond. staat (*I. Stell. II. B.*) lees (*I. Stell. III. B.*)
* — 98 Reg. 12, van bov. staat *ef*, lees *ea*; — en, een weinig verder, reg. 20, van bov. staat *Ae*, lees *AE*.
* — 101 Reg. 2, van ond. staat *FFG*, lees *EFG*.
* — 103 Reg. 7, van ond. staat $AB \lhd AM$, lees $AB \lhd AC$.
* — 105 Reg. 3, van bov. staat $AMD >$ hoek *AMD*, lees . . . $AMD > AMB$.
* — 107 Reg 11, van bov. staat *AM* en *DM*, lees *AC* en *DM*.
* — 110 Reg. 7, van bov. staat *DH*, lees *DB*.
* — 117 Reg. 13, van ond. staat *AC*, lees *BC*.
— 118 Reg. 19, van bov. staat *XIX. Bep.*, lees *XVI. Bep.*
— 122 Reg. 7, van ond. staat *VIII. Gev.*, lees *IX. Gev.*
— 123 Reg. 5, van bov. staat *VIII. Gev.*, lees *IX. Gev.*; — en reg. 13, van ond. staat *XI. Bep.*, lees *IX. Bep.*

* Pag. 132 Reg. 5, van bov. ſtaat zijde *AC*, lees zijde *BC*.
* — 135 Reg. 11, van bov. ſtaat *aan AC*, lees *aan AE*.
* — 138 Reg. 3, van bov. ſtaat *VI. Stell.*, lees *III. Stell.*; — reg. 17, van bov. aan het begin ſtaat $+MD^2$, lees $+MC^2$; — reg. 9, van ond. ſtaat *III. Stell.*, lees *IV. Stell.*
— 143 Reg. 4, van ond. ſtaat *III. B.*, lees *V. Boek.*
* — 149 Reg. 8, van bov. ſtaat ſtraal *MC*, lees ſtraal *MG*.
* — 152 Reg. 9, van bov. ſtaat met *AC* beſchreven tot het vierkant *AC*, lees met *AM* beſchreven tot het vierkant van *AM*.
* — 155 Reg. 9, van bov. ſtaat *FFGH*, lees *EFGH*.
— 156 Reg. 5, van ond. ſtaat *I. Lemma*, lees *II. Lemma*.
* — 159 laatſte regel van het I. Voorbeeld, lees $p = 124^m,724$.
— 167 Reg. 5, van bov. ſtaat (*XV. Stell.*) lees (*XIX. Stell.*)
* — 175 einde 14 reg. van ond. ſtaat *ABC*, lees *BAC*.
— 178 Reg. 6, van bov. ſtaat XXII, lees XXI.
* — 185 Reg. 8, van bov. ſtaat *AB*, lees *BC* of *CB*; — reg. 13, van ond. ſtaat *BM* gelijk zes deelen, lees *BN* gelijk; — volgende regel *MC* en *NC*, lees *MO* en *NO*; — in de volgende regel *BC*, lees *BO*; ook in de 3 van ond. *BC*, lees *BO*.
* — 206 Reg. 2, van ond. ſtaat *de helft van de ſom en van het verſchil*, lees *de ſom en het verſchil*.
— 211 Reg. 7, van ond. ſtaat §. 1066, lees §. 1072.
— 212 Reg. 13, van bov. ſtaat *IV. B.* lees *VI. B.*
— 214 Reg. 9, van bov. ſtaat *Sin.* 90°, lees *Sin.* 9°.
* — 222 Reg. 5, van ond. ſtaat 43° 17′ 20″, lees 43° 17′ 30″, en in de twee volgende regels ſtaat *DE*, lees *EF*.
* — 223 In de berekening van de zijde *a* moet de Sinus $A = 9,9040416$ genomen worden, en dan wordt $a = \ldots 630^m,7646$.
— 224 Reg. 5, van bov. ſtaat *men moet*, lees *moet men*.
* — 225 Eerſte regel van de Oploſſ. IV. Vr. ſtaat *I. Stell.* lees *II. Stell.* Voorts is wat lager, in de berekening van de zijde *a* het achterſte cijfer van *Log.c* geen 8 maar 5 hierdoor wordt $a = 506^m,849$.
* — 231 Reg. 8, van ond. ſtaat $BD = C \times Cos.\,B$, lees $BD = c \times Cos.\,B$.
— 234 is bij §. 622. het Rom. cijfer II. bij Gevolg vergeten.
— 239 Reg. 1, van bov. ſtaat 3° lees 2° — en reg. 7, van ond. ſtaat VI. VRAAGSTUK, lees VII. VRAAGSTUK.
* — 247 Reg. 2, van ond. ſtaat $Sin^2.\,A$, lees $Sin^2.\,\frac{1}{2}A$.
** — 252 In de eerſte kolom der berekening, reg. 8 van ond. ſtaat $Log.\,Sin.\,p = 9,7658098$, lees $Log.\,Sin.\,(p+q+r) = 9,7658098$.
** — 256 Reg. 5, van ond. ſtaat $m' + n = 180° - (p+q)$ lees $m' + n = 180° - (p+s)$.
* — 282 Reg 3, van bov. ſtaat *AB*, lees *AC*.

Pag.

Pag. 286 Reg. 17, van ond. ſtaat (*XVI. Stell.*) lees (*I. Gev. XVI. Stell.*)

** — 307 Reg. 12, van ond. ſtaat *AB*, lees *PQ*. — Verder reg. 4 en 3, van ond. ſtaat *AP* en *AQ*, lees *AS* en *AR*.

— 310 Reg. 12, van ond. ſtaat *wat een prisma*, lees *wat van een prisma*.

— 313 Reg. 18, van bov. ſtaat *wanneer deszelfs*, lees *wanneer men deszelfs*.

— 318 Reg. 10, van ond. ſtaat *XXXI. Stell.* lees *XIX. Bep.*

— 320 Reg. 10, van bov. ſtaat *DCF*, lees *BCF*.

* — 329 Reg. 9, van bov. ſtaat *XIV*, lees *VII*. — en reg. 16, van ond. ſtaat *AM* en *AG*, lees *AG* en *AM*.

* — 330 Reg. 8, van bov. ſtaat *GF*, lees *GH*.

** — 331 Reg. 9, van bov. ſtaat $= 0,01008936$, lees . . . $= 0,02017872$.

— 332 Reg. 13, van ond. ſtaat *IX. Stell.* lees *XI. Stell.*

— 335 Reg. 3, van bov. ſtaat (*IX. St.*) lees (*XI. St.*) — reg. 9, van bov. ſtaat *zal de*, lees *zal in de*

— 338 Reg. 16, van bov. ſtaat (*XIV. Stell.*) lees (*XVII. Stell.*)

* — 341 Reg. 1, van bov. ſtaat *VM*, lees *VC*.

* — 344 Reg. 5, van ond. ſtaat *ac* lees *bc* — en in de volgende regel ſtaat (*IX. Stell. IV. B.*) lees (*III. Bep. IV. B.*)

— 347 Reg. 6 en 11, van bov. ſtaat *XIV*. lees *XVII*.

* — 349 Reg. 4, van ond. ſtaat $A:C$, lees $A:D$.

* — 351 Reg. 9, van bov. ſtaat $EF = FG$ lees $EF = EG$.

** — 354 Reg. 6, van ond. ſtaat gelijk en gelijkvormig, lees gevormig.

* — 361 Reg. 13, van bov. ſtaat *cirk. BF* lees *cirk. CD* — en reg. 18, van bov. ſtaat afgeknotten kegel lees afgeknotte piramide.

* — 367 Reg. 15, van onder ſtaat moeten *A* en *B*, lees *A* en *C* moeten

* — 377 Reg. 15, van bov. ſtaat *EFG*, lees *EFD*; — reg. 2, van ond. ſtaat *XXXIV. Stell.* lees *XXXV. Stell.*

* — 381 Reg. 15, van bov. ſtaat *HL* lees *KL*.

— 383 Reg. 13, van bov. ſtaat *XIII*. lees *XIV*.

* — 384 Reg. 1, ſtaat *VIII*. lees *VII*; — 3 regel ſtaat *IX. B.* lees *VI. B.* — * In de eerſte regel van §. 976. ſtaat *cirkel-ſegment AKC*, lees *cirkel-ſegment EKC*, — en reg. 10, van ond. ſtaat *VII. Lemma*, lees *VI. Lemma*.

* — 401 Reg. 3, van bov. ſtaat *Tang. B*, lees *Tang. C*.

* — 406 Reg. 5, van bov. ſtaat $\frac{1 + Cot.\,b}{1 - Cot.\,1}$, lees $\frac{1 + Cos.\,b}{1 - Cos.\,b}$

— 408 In de Oplosſing van het II. Vraagſtuk is naauwkeuriger hoek $CAD = 88^\circ\ 37'\ 24''$, hoek $BAD = 69^\circ\ 39'\ 19''$, — en in het III. Vraagſt. voor den opgang beoosten het Noorden $49^\circ\ 17'\ 42'',9$.

* — 413 Reg. 15, van ond. ſtaat *Tang. BC* lees *Tang. BD*.

* Pag. 416 Reg. 18, van bov. ſtaat *Tang.* $\frac{1}{2}(AB - BC)$ lees . . . *Tang.* $\frac{1}{2}(AC - BC)$.

* — 420 Reg. 10, van ond. ſtaat $Cos. B = - Cos. A \times Cos. B$, lees $Cos. B = - Cos. A \times Cos. C$.

* — 424 Form. (35) ſtaat $Cot. B =$, lees $Cot. C =$

* — 427 Moet in de Oplosſing van het I. Voorb. de waarde van Φ' poſitief zijn; dat is $\Phi' = + 83° 43' 32'', 4$, voorts in de II. Oplosſing §. 1087. in de eerſte waarde van $2 Sin^2. \frac{1}{2} A$, in den teller $Sin. b \times Sin. c$ gelezen worden.

— 428 In §. 1088. reg. 3, ſtaat *X. Stell.* lees *VI. Stell.*; — in §. 1089. 2 regel is het beter te lezen door de waarde van $Cos. \frac{1}{2} A$, $Cos. \frac{1}{2} B$ en $Cos. \frac{1}{2} C$; in §. 1089. 2 reg. leze men $2 Sin. \frac{1}{2} q \times Cos. \frac{1}{2} q = Sin. q$; — onderſte regel van de pag. ſtaat *ſtandpunt Q*, lees *ſtandpunt P.*

— 429 Reg. 18, van bov. ſtaat *A* en *B*, lees *A* en *C*, en in de uitkomst van de Oplosſing III. Voorb. zie pag. 430. is het naauwkeuriger Parall. hoek $= 28° 59' 32''$.

— 436 Reg. 10, van ond. ſtaat *b*, lees χ.

— 440 §. 1125. De lijnen *AC* en *AD* maken eenen hoek van $84° 5' 41'', 3$.

— 443 De ſecunden van de uitkomſten van het voorbeeld op §. 1145. moeten gelezen worden hoek $ADB = 79° 34' 24''$ hoek $BDC = 63° 20' 21'', 5$ en de ſtandhoek $71° 50' 14'', 2$ — §. 1147. regel 2, ſtaat zijde *A*, lees zijde *a*.

— 444 §. 1153. 3 reg. ſtaat $Sin. A \times Sin. b = Sin. b$, moet zijn $= Sin. a$.

— 448 §. 1168. 2 reg. ſtaat, dan $Sin. B =$ lees dan zal $Sin. B$.

* — 466 Reg. 10, van bov. ſtaat $Sin. a = Sin. B'$ lees $Sin. a = Sin. A'$.

— 468 Om de formulen of reekſen voor $\frac{1}{2}(B-A)$ en $\frac{1}{2}(A+B)$ te vinden, moet men niet uit het oog verliezen, dat, wanneer in vergelijking (*R*) op pag. 467, $Cos. 2\,y$ negatief wordt, de onderſte teekens van de reeks (*P*) alleen gelden.

— 469 Onderſte regel ſtaat $Sin. c$, lees $Sin. \frac{1}{2} c$.

— 471 Reg. 4, van bov. ſtaat $\times Sin. \frac{1}{2} c$, lees $\times Sin \frac{1}{2} b$, en in den teller van de breuk in de onderſte regel moet men lezen $Cos. \alpha \times Cos. \beta$.

— 475 Reg. 9, van bov. ſtaat $\frac{1}{2} c^2 \times Sin. A \times Sin. C$, lees $\frac{1}{2} c^2 \times Sin. A \times Sin. B$.

* — 478 Formule (1) moet zijn $\dfrac{Sin. \frac{1}{2}(a+b)}{Sin. \frac{1}{2} c} = \dfrac{Cos. \frac{1}{2}(B-A)}{Sin. \frac{1}{2} C}$ en dan komt in den teller van $Cos. \frac{1}{2}(B-A)$, de factor $Sin. \frac{1}{2} C$.

* — 482 Reg. 3, van ond. $\Omega = 41252, 95836$.

* — 488 Reg. 5, van bov. ſtaat *AB* en *BC* lees *AC* en *BC*.

— 490 XXIX. Vraagſt. is bis. Reg. 10, van ond. ſtaat $AB = BC$ lees $AB = BD$; — in form. (3) ſtaat $Cot. \frac{1}{2} P$, lees $Cot. \frac{1}{2} p$.

Pag.

Pag. 492 §. 1313, reg. 3, ſtaat $(s-\gamma)$ lees $Sin.\ (s-\gamma)$ — lees ook in §. 1314. *Fig.* 413.
— 493 Reg. 15, van bov. ſtaat $Cos.\ APB$, lees $Cos.\ APC$.
— 494 Reg. 6, is de exponent van β weggevallen, lees β^2 en daar h^2 ſtaat lees p^2; — regel 3, van ond. ſtaat $= r$, lees $= R$.
— 497 Reg. 12, van ond. ſtaat en $Sin.\ ADC$, lees en $Sin.\ ADB$
— 499 In de twee bovenſte vergelijkingen lees c^4 en γ^4 in plaats van c^2 en γ^2.
— 501 In de 3 regel van de groote vergelijking moet ſtaan $-2\ Cos.\ a \times Cos.\ b \times Cos.\ \gamma$.
— 503 1 Reg. van bov. ſtaat $\times 2 R$ lees $\times R$.
* — 515 Reg. 2, van bov. ſtaat RCQ lees RCP.
* — 518 Reg. 10, van ond. ſtaat lijn AB lees lijn AD.
— 519 §. 1381, reg. 12, ſtaat PQ lees BQ.
* — 522 §. 1388, reg. 8, ſtaat P lees Q.
* — 523 Reg. 1, van bov. ſtaat CP lees CD.
* — 525 Reg. 20, van bov. ſtaat $a \times$ lees $b \times$
* — 528 Reg. 9, van ond. ſtaat A en B, lees A en C.
* — 529 Reg. 13, van bov. ſtaat $AI \times CP$, lees $AI \times CE$.
* — 530 §. 1411, Reg. 4, ſtaat AB, AC en AB, lees CB, enz.
* — 532 §. 1413, Reg. 14, ſtaat C lees O.
* — 533 Reg. 6, van ond. ſtaat DE lees DN.
* — 535 Reg. 9, van ond. ſtaat $Sin.\ NPL$, lees $Sin.\ NDL$.
* — 539 Reg. 8, van bov. ſtaat $E'F$, $F'A$, lees $E'F'$ en $F'A'$, en reg. 7, van ond. lees *Fig.* 435 en 436.
* — 540 Onderſte reg. ſtaat $I'C$ lees $B'C'$.
* — 544 Reg. 2, van ond. ſtaat *met de ſom* lees *met de Coſinus van de ſom.*
* — 549 Reg. 13, van ond. ſtaat AD lees FK.
* — 550 Reg. 9, van ond. in de waarde van (a,b), $+F$ bijte-voegen.
* — 552 Reg. 13, van bov. ſtaat $-c$ lees $-f$.
* — 553 Reg. 16, van ond. ſtaat $-s$ lees $= s$. Voorts in reg. 1 en 14 van ond. in plaats van $+x$ te leezen $+X$.
* — 556 Reg. 11, van ond. ſtaat $-Sin.\ (C-D)$ lees . . . $-Sin.\ (C+D)$
** — 557 Reg. 7, van bov. ſtaat *met den hoek*, lees *met de Sinus van den hoek.*
* — 559 Reg. 5, van bov. lees $a = 250^m, 169$ — en reg. 8 van ond. lees $b\ Sin.\ B = c\ Sin.\ (B+C) - d\ Sin.\ (B+C+D)$
* — 560 Het tweede lid van de waarde van I moet zijn:

$$\frac{Sin.\ q \times Sin.\ p' \times Sin.\ (q'-p')}{Sin.\ (q+q') \times Sin.\ (p+p')}$$